

Р. КУРАНТ и Д. ГИЛЬБЕРТ

**МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ**

ТОМ II

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Ю. РАВИНОВИЧА и З. ЛИВИНА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1945 ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом томе излагаются некоторые отделы теории дифференциальных уравнений в частных производных, связанные с математической физикой. Даже с этим ограничением я отнюдь не стремился к исчерпывающей полноте. Точнее говоря, здесь рассматриваются преимущественно вопросы, в существо или форму изложения которых мне, как я полагаю, удалось внести нечто новое. При этом преследовалась цель сделать важные ветви анализа более доступными и прозрачными и тем облегчить путь для дальнейших исследований.

Если это удалось, то заслугу я разделяю с моими учениками и сотрудниками, совместно с которыми я в течение ряда лет работал над более глубоким проникновением в эту область. Роль этого сотрудничества — в том, что может здесь показаться более или менее новым — не исчерпывается ссылками на отдельные публикации.

Этот труд многим обязан и другим математикам. В первую очередь это относится к моему уважаемому учителю Д. Гильберту. Я надеюсь, что в этой книге будет ощущаться нечто от его устремлений, всегда обращенных к существу вопроса. Некоторые части книги стимулированы исследованиями Адамара по теории процессов распространения. На главу о прямых методах вариационного исчисления оказал влияние глубокий подход Неймана и Стона (J. v. Neumann и M. H. Stone) к линейным операторам в пространстве Гильберта.

Появление этого тома сильно задержалось под давлением административных мероприятий¹⁾. Когда в моем распоряжении оказалось свободное время для обработки, я полагал, что не следует еще дольше оттягивать срок выхода книги. Поэтому я отказался от устранения многих несовершенств, в частности, не дал систематического указателя литературы. Однако, я надеюсь, что избежал серьезных упущений при указании чужих заслуг.

Некоторые важные группы исследований, связанных с нашим предметом, не подверглись рассмотрению. Не считая классических теорий, назову прежде всего новейшие работы Жиро, Шаудера и Лерэ, а также Хопфа (Giraund, Schauder, Leray, E. Hopf). Кроме того, многое из того материала, который первоначально предназна-

¹⁾ Намек на вынужденную эмиграцию автора из Германии после фашистского переворота. (Прим. перев.)

чался и был подготовлен для этого тома, в частности, по вопросу о прямых методах анализа, пришлось опустить ввиду предложенного ограничения объема книги.

О деталях содержания информирует подробное оглавление. Что касается формы, то я должен сделать следующее принципиальное замечание. Классический идеал атомистического, в известной мере, изложения математики требует, чтобы материал был сгущен в форме постулатов, теорем и доказательств. При этом внутренняя связь и мотивировка теории не являются непосредственно предметом изложения. В противовес этому математическую дисциплину можно рассматривать как непрерывную ткань взаимных связей, при изложении которых метод и мотивировка выступают на передний план, а кристаллизация результатов в изолированные резко очерченные теоремы играет лишь вторичную роль. Там, где синтез обеих трактовок казался неподходящим, я предпочитал вторую точку зрения.

Нью-Рошель, Нью-Йорк

24 октября 1937 г.

Р. Курант

ОТ ПЕРЕВОДЧИКОВ

При переводе II тома, так же как и первого, были тщательно проверены все выкладки и исправлены замеченные неправильности.

Для устранения недосмотров и для достижения, как нам казалось, большей ясности мы позволяли себе иногда некоторые отступления от подлинника.

Часто встречающийся термин «Anfangswertproblem» нами всюду переводится, в согласии с общепринятой терминологией, термином: «задача Коши». В некоторых местах даны для пояснения примечания.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

(Цифры курсивом указывают страницы.)

ГЛАВА I.

АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ.

§ 1. Линейные уравнения и линейные преобразования. 1

1. Векторы 1. 2. Ортогональные системы векторов. Полнота системы 3. 3. Линейные преобразования, матрицы 5. 4. Билинейные формы, квадратичные и эрмитовы формы 10. 5. Ортогональные и унитарные преобразования 12.

§ 2. Линейные преобразования с линейным параметром 14

§ 3. Преобразования к главным осям квадратичных и эрмитовых форм. 20

1. Проведение преобразования к главным осям на основании принципа максимума 20. 2. Характеристические числа и собственные значения 23. 3. Обобщение на эрмитовы формы 24. 4. Закон инерции квадратичных форм 25. 5. Выражение для резольвенты формы 26. 6. Решение системы линейных уравнений, соответствующей данной форме 27.

§ 4. Минимально - максимальное свойство собственных значений 28

1. Определение характеристических чисел с помощью задачи о наименьшем значении максимума 28. 2. Применения 29.

§ 5. Дополнения и задачи к первой главе 31

1. Линейная независимость и определитель Грама 31. 2. Теорема Адамара об оценке определителя 32. 3. Одновременное преобразование двух квадратичных форм к каноническому виду 33. 4. Билинейные и квадратичные формы от бесконечно большого числа переменных 35. 5. Бесконечно малые линейные преобразования 35. 6. Варьированные системы 36. 7. Наложение связи 38. 8. Элементарные делители матрицы или билинейной формы 39. 9. Спектр унитарной матрицы 39. Литература к гл. I 40.

ГЛАВА II.

ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Ортогональные системы функций 42

1. Определения 42. 2. Ортогонализация функций 43. 3. Неравенство Бесселя. Условие полноты системы. Аппроксимирование в среднем 44. 4. Ортогональные и унитарные преобразования бесконечно большого числа переменных 48. 5. Справедливость результатов в случае нескольких независимых переменных. Расширение предположек 49. 6. Построение полных систем функций от многих переменных 49.

§ 2. Принцип предельных точек в функциональном пространстве	50
1. Сходимость в функциональном пространстве 50.	
§ 3. Мера независимости и число измерений	55
1. Мера независимости 55. 2. Асимптотическое число измерений последовательности функций 56.	
§ 4. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании. Полнота системы степеней и системы тригонометрических функций	58
1. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании 58. 2. Распространение на функции от многих переменных 61. 3. Аппроксимирование производных 61. 4. Полнота системы тригонометрических функций 61.	
§ 5. Ряды Фурье	62
1. Доказательство основной теоремы 62. 2. Кратные ряды Фурье 66. 3. Порядок коэффициентов Фурье 67. 4. Растяжение основной области 67. Примеры 68.	
§ 6. Интеграл Фурье	70
1. Доказательство основной теоремы 70. 2. Распространение формулы на случай многих переменных 73. 3. Взаимно обратные формулы 74.	
§ 7. Примеры на интеграл Фурье	75
1. Интегральная формула Фурье 75. 2. Разрывный множитель Дирихле 75.	
§ 8. Полиномы Лежандра	77
1. Построение путем ортогонализации степеней 1, x , x^2 , ... 2. 77. 2. Производящая функция 79. 3. Дальнейшие свойства 79.	
§ 9. Примеры других ортогональных систем	80
1. Обобщение постановки вопроса, приводящей к полиномам Лежандра 80. 2. Полиномы Чебышева 81. 3. Полиномы Якоби 83. 4. Полиномы Эрмита 84. 5. Полиномы Лагерра 86. 6. Полнота системы полиномов Лагерра и Эрмита 88.	
§ 10. Дополнения и задачи ко второй главе	90
1. Решение Гурвица для изопериметрической задачи 90. 2. Взаимно обратные формулы 91. 3. Интеграл Фурье и сходимость в среднем 91. 4. Спектральное разложение с помощью ряда Фурье и интеграла Фурье 92. 5. Плотные системы функций 93. 6. Теорема Г. Мюнца о полноте системы степеней 94. 7. Теорема Фейера 94. 8. Формулы обращения Мелина 95. 9. Явление Гиббса 98. 10. Теорема об определителе Грама 100. 11. Применение понятия интеграла Лебега 100. Литература к гл. II 103.	

ГЛАВА III.

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Предварительные соображения	104
1. Обозначения и основные понятия 104. 2. Истокообразно представленные функции 105. 3. Выродившиеся ядра 106.	
§ 2. Теоремы Фредгольма для выродившегося ядра 107	
§ 3. Теоремы Фредгольма для произвольного ядра 109	

§ 4. Симметрические ядра и их собственные значения 113

1. Существование собственного значения у симметрического ядра 113.
2. Совокупность собственных функций и собственных значений 116. 3. Максимально-минимальное свойство собственных значений 122.

§ 5. Теорема о разложении и ее применения 124

1. Теорема о разложении 124. 2. Решение неоднородного линейного интегрального уравнения 126. 3. Билинейная формула для итерированных ядер 127. 4. Теорема Мерсера 128.

§ 6. Ряд Неймана и разрешающее ядро 130

§ 7. Формулы Фредгольма 132

§ 8. Новое обоснование теории 136

1. Лемма 136. 2. Собственные функции симметрического ядра 137.
3. Несимметрические ядра 138. 4. Непрерывная зависимость собственных значений и собственных функций от ядра 139.

§ 9. Расширение границ приложимости теории 140

§ 10. Дополнения и задачи к третьей главе 142

1. Примеры 142. 2. Особенные интегральные уравнения 142. 3. Метод Шмидта для вывода теорем Фредгольма 143. 4. Метод Энского для решения симметрических интегральных уравнений 144. 5. Метод Келлога для определения собственных функций 145. 6. Символические функции ядра и их собственные значения 145. 7. Пример несимметрического ядра, не имеющего собственных функций 145. 8. Интегральные уравнения Вольтерры 146. 9. Интегральное уравнение Абеля 146. 10. Взаимно сопряженные ортогональные системы, принадлежащие несимметрическому ядру 147. 11. Интегральные уравнения первого рода 147. 12. Метод бесконечно большого числа переменных 148. 13. Минимальные свойства собственных функций 149. 14. Полярные интегральные уравнения 149. 15. Ядра, допускающие симметризацию 150. 16. Определение разрешающего ядра посредством функциональных уравнений 150. 17. Непрерывность определенных ядер 150. 18. Теорема Гамерштейна 150. Литература к гл. III 150.

Глава IV.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

§ 1. Постановка задачи вариационного исчисления 152

1. Maxima и minima функций 153. 2. Функционалы 155. 3. Типичные примеры задач вариационного исчисления 157. 4. Характерные трудности вариационного исчисления 161.

§ 2. Прямые методы 162

1. Изопериметрическая задача 162. 2. Метод Ритца. Минимальные последовательности 163. 3. Дальнейшие прямые методы. Метод конечных приращений. Бесконечное число независимых переменных 165. 4. Соображения общего характера относительно прямых методов вариационного исчисления 171.

§ 3. Уравнения Эйлера 173

1. Простейшая проблема вариационного исчисления 173. 2. Случай многих известных функций 177. 3. Выражения, содержащие производные высших порядков 179. 4. Случай многих независимых переменных 180.

5. Тождественное обращение в нуль дифференциального выражения Эйлера 182.
 6. Однородная форма дифференциальных уравнений Эйлера 186. 7. Вариационные проблемы с расширенными условиями допустимости. Теоремы Дюбуа-Реймона и Гаара 189. 8. Другие вариационные задачи и их функциональные уравнения 195.

§ 4. Замечания относительно интегрирования дифференциального уравнения Эйлера. Примеры . . . 196

§ 5. Граничные условия . . . 198

1. Естественные граничные условия в задачах со свободной вариацией на границе 198. 2. Геометрические задачи. Трансверсальность 201.

§ 6. Вторая вариация и условие Лежандра . . . 205

§ 7. Вариационные задачи с дополнительными условиями . . . 207

1. Изопериметрические задачи 207. 2. Конечные дополнительные условия 210. 3. Дифференциальные уравнения в качестве дополнительных условий 212.

§ 8. Инвариантный характер дифференциальных уравнений Эйлера . . . 213

1. Выражение Эйлера как градиент в функциональном пространстве. Инвариантность выражения Эйлера 213. 2. Преобразования выражения Δu . Полярные координаты 216. 3. Эллиптические координаты 217.

§ 9. Приведение вариационных задач к каноническому и инволюционному виду . . . 222

1. Преобразование обыкновенных задач минимума с добавочным условием 222. 2. Инволюционное преобразование простейшей вариационной задачи 224. 3. Приведение вариационной задачи к каноническому виду 229. 4. Обобщения 230.

§ 10. Вариационное исчисление и дифференциальные уравнения математической физики . . . 233

1. Общие соображения 233. 2. Колебания струны и стержня 235. 3. Мембрана и пластинка 237.

§ 11. Дополнения и задачи к четвертой главе . . 243

1. Вариационная задача, соответствующая заданному дифференциальному уравнению 243. 2. Закон взаимности изопериметрических задач 243. 3. Световые лучи, имеющие форму окружности 243. 4. Задача Дидоны 243. 5. Пример пространственной вариационной задачи 244. 6. Изопериметрическая задача на поверхности 244. 7. Индикатрисса и ее применения 244. 8. Вариация при переменной области интегрирования 246. 9. Теоремы Э. Нэтер относительно инвариантных вариационных проблем. Интегралы дифференциальных уравнений механики 248. 10. Трансверсальность для случая кратных интегралов 252. 11. Дифференциальные выражения Эйлера на произвольной поверхности 252. 12. Принцип Томсона в электростатике 253. 13. Проблемы равновесия упругого тела. Принцип Кастильяно 253. 14. Принцип Кастильяно в теории балок 256. 15. Вариационная задача о продольном изгибе стержня 257. Литература к гл. IV 259.

Глава V.

ПРОБЛЕМЫ КОЛЕБАНИЙ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ.

§ 1. Предварительные замечания о линейных дифференциальных уравнениях 260

1. Общие замечания. Принцип наложения 260. 2. Однородные и неоднородные задачи. Краевые условия 262. 3. Формальные соотношения. Сопряженные дифференциальные выражения. Формулы Грина 262. 4. Линейные функциональные уравнения, как предельные случаи и аналоги систем линейных уравнений 265.

§ 2. Системы с конечным числом степеней свободы 266

1. Собственные колебания. Нормальные координаты. Общая теория процесса 266. 2. Общие свойства колебательных систем 270.

§ 3. Колебания струны 271

1. Свободные колебания однородной струны 271. 2. Вынужденные движения 274. 3. Общий случай неоднородной струны и задача Штурм-Лиувилля 275.

§ 4. Колебания стержня 279

§ 5. Колебания мембраны 281

1. Общая задача об однородной мембране 281. 2. Вынужденные движения 283. 3. Узловые линии 284. 4. Прямоугольная мембрана 284. 5. Круговая мембрана. Бесселевы функции 286. 6. Неоднородная мембрана 289.

§ 6. Колебания пластинки 290

1. Общие соображения 290. 2. Круговая пластинка 290.

§ 7. Общие соображения о методе собственных функций 291

1. Применение метода в задачах о колебаниях и в задачах о равновесии 291. 2. Задачи о собственных значениях в теории теплопроводности 294. 3. Другие вопросы, приводящие к задачам о собственных значениях 295.

§ 8. Колебания трехмерных континуумов 296

§ 9. Краевые задачи теории потенциала и собственные функции 297

1. Окружность, сфера, сферический слой 298. 2. Цилиндрическая область 301. 3. Задача Ламе 301.

§ 10. Задачи штурм-лиувиллевского типа. Особые краевые точки 306

1. Бесселевы функции 306. 2. Функции Лежандра любого порядка 307. 3. Полиномы Якоби и Чебышева 309. 4. Полиномы Эрмита и Лагерра 310.

§ 11. Об асимптотическом поведении решений штурм-лиувиллевских дифференциальных уравнений 312

1. Ограниченность при бесконечном возрастании независимого переменного 312. 2. Уточнение результата (бесселевы функции) 313. 3. Ограниченность решений при возрастании параметра 315. 4. Асимптотическое выражение решений 316. 5. Асимптотическое выражение штурм-лиувиллевских фундаментальных функций 317.

§ 12. Краевые задачи с непрерывным спектром собственных значений 320

1. Тригонометрические функции 321. 2. Бесселевы функции 321. 3. Задача о собственных значениях уравнения колебания для бесконечной плоскости 321, 4. Задача Шрёдингера о собственных значениях 322.

§ 13. Теория возмущений 324

1. Простые собственные значения 324. 2. Кратные собственные значения 326. 3. Пример к теории возмущений 328.

§ 14. Функция Грина (функция влияния). Приведение задач с дифференциальными уравнениями к интегральным уравнениям 330

1. Функция Грина и краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений 330. 2. Построение функции Грина и обобщенная функция Грина 334. 3. Эквивалентность задачи с дифференциальным уравнением задаче решения соответствующего интегрального уравнения 337. 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка 341. 5. Дифференциальные уравнения с частными производными 342.

§ 15. Примеры функции Грина 349

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 349. 2. Функция Грина выражения Δu для круга и шара 354. 3. Функция Грина и конформное отображение 356. 4. Функция Грина уравнения потенциала для шаровой поверхности 356. 5. Функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ для прямоугольного параллелепипеда 357. 6. Функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ для внутренней области прямоугольника 362. 7. Функция Грина для кругового кольца 364.

§ 16. Дополнения к пятой главе 366

1. Примеры на колебания струны 366. 2. Колебания свободно свисающего каната и бесселевы функции 368. 3. Дальнейшие примеры случаев колебательного уравнения, разрешимых в явном виде. Функции Матье 369. 4. Параметры в крайних условиях 370. 5. Теизоры Грина для систем дифференциальных уравнений 371. 6. Аналитическое продолжение решения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ 372. 7. Теорема об узловых линиях решения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ 372. 8. Пример собственного значения бесконечно большой кратности 372. 9. Границы применимости теорем разложения 372. Литература к гл. V 373.

ГЛАВА VI.

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ.

§ 1. Экстремальные свойства собственных значений 375

1. Классические экстремальные свойства 375. 2. Дополнения и обобщения 379. 3. Задачи о собственных значениях для областей, состоящих из отдельных несвязанных кусков 382. 4. Максимально-минимальное свойство собственных значений 383.

§ 2. Общие следствия из экстремальных свойств собственных значений 384

1. Общие теоремы 384. 2. Неограниченное возрастание собственных значений 390. 3. Асимптотическое поведение собственных значений для задачи Штурм-Лиувилля 392. 4. Дифференциальные уравнения, имеющие особые

точки 393. 5. Дальнейшие замечания относительно возрастания собственных значений. Случай, когда имеются отрицательные собственные значения 394. 6. Свойства непрерывности собственных значений 396.

§ 3. Теорема о полноте системы собственных функций и теорема о разложении 402

1. Полнота системы собственных функций 402. 2. Теорема о разложении 404. 3. Обобщение теоремы о разложении 405.

§ 4. Асимптотическое распределение собственных значений 407

1. Дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для прямоугольника 407. 2. Дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для областей, состоящих из конечного числа квадратов или кубов 409. 3. Распространение полученного результата на общее дифференциальное уравнение $L[u] + \lambda u = 0$ 412. 4. Законы асимптотического распределения собственных значений для произвольной области 414. 5. Законы асимптотического распределения собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в уточненной форме 421.

§ 5. Задачи о собственных значениях шрёдингеровского типа 423

§ 6. Узлы собственных функций 429

§ 7. Дополнения и задачи к шестой главе 434

1. Вывод минимальных свойств собственных значений из их полноты 434. 2. Отсутствие нулей у первой собственной функции 436. 3. Другие минимальные свойства собственных значений 437. 4. Асимптотическое распределение собственных значений для случая колебания пластинки 438. 5—7. Задачи 438. 8. Задачи с граничными условиями, содержащими параметр λ 438. 9. Задачи о собственных значениях для замкнутых поверхностей 439. 10. Оценка собственных значений в случае наличия особых точек 439. 11. Минимальное свойство круглой мембраны или пластинки 441. 12. Проблема минимума для случая неравномерного распределения масс 441. 13. Узловые точки для задачи Штурм-Лиувилля и принцип максимума минимумов 442. Литература к гл. VI 443.

Глава VII.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, К КОТОРЫМ ПРИВОДЯТ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ.

§ 1. Предварительные замечания относительно линейных дифференциальных уравнений второго порядка 444

§ 2. Функции Бесселя 445

1. Интегральное преобразование 446. 2. Функции Ганкеля 447. 3. Бесселевы функции и функции Неймана 448. 4. Выражение бесселевых функций в виде интегралов 451. 5. Другое выражение функций Ганкеля и бесселевых функций в виде интегралов 454. 6. Разложение бесселевых функций в степенные ряды 460. 7. Соотношения между бесселевыми функциями 463. 8. Нули бесселевых функций 469. 9. Функции Неймана 473.

§ 3. Шаровые функции Лежандра 477

1. Интеграл Шлёфли 477. 2. Интегральные выражения Лапласа 479. 3. Функции Лежандра второго рода 480. 4. Сопряженные шаровые функции (функции Лежандра высшего порядка) 481.

§ 4. Применение метода интегральных преобразований к дифференциальным уравнениям Лежандра, Чебышева, Эрмита и Лагерра	481

1. Функции Лежандра 481. 2. Функции Чебышева 483. 3. Функции Эрмита 484. 4. Функции Лагерра 484.

§ 5. Шаровые функции Лапласа	485

1. Нахождение $2n + 1$ шаровых функций n -го порядка 486. 2. Полнота полученной системы функций 487. 3. Теорема о разложении 488. 4. Интеграл Пуассона 488. 5. Выражение шаровых функций Максвелла-Сильвестра 489.

§ 6. Асимптотические разложения	496

1. Формула Стирлинга 496. 2. Асимптотическое вычисление функций Ганкеля и Бесселя для больших значений аргумента 498. 3. Метод перевала 501. 4. Применение метода перевала к вычислению функций Ганкеля и Бесселя для больших значений параметра и больших значений аргумента 502. 5. Общие замечания по поводу метода перевала 506. 6. Метод Дарбу 506. 7. Применение метода Дарбу к асимптотическому разложению полиномов Лежандра 507.

Примечания	509

Предметный указатель	519

ГЛАВА I.

АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ.

Многочисленные вопросы математического анализа, с которыми нам придется иметь дело в этом томе, самым тесным образом связаны как в смысле аналогии, так и в смысле внутренней зависимости с теорией линейных преобразований и квадратичных форм. Поэтому мы рассмотрим сначала со всей возможной краткостью именно эту область с точки зрения, имеющей для нас здесь важное значение, причем мы предполагаем у читателя некоторое знакомство с затронутыми вопросами.

§ 1. Линейные уравнения и линейные преобразования.

1. Векторы. Для того чтобы иметь возможность кратко формулировать известные факты из теории линейных уравнений, целесообразно ввести простейшие обозначения векторного исчисления¹⁾. Систему n действительных чисел $x_1, \dots, x_n$ мы называем *n -мерным вектором* или вектором в пространстве n измерений и сокращенно обозначаем соответствующей немецкой буквой ξ . Числа x_i ($i=1, \dots, n$) называются *компонентами* вектора ξ . Если все компоненты обращаются в нуль, то мы говорим о *нулевом векторе*. При $n=2$ или при $n=3$ простейшим геометрическим истолкованием вектора является, как известно, „радиус-вектор“, идущий из начала координат прямоугольной системы к точке с прямоугольными координатами x_i . При $n > 3$, правда, геометрически наглядного образа нет, но пользоваться геометрическим способом выражения по сути дела удобно и в этом случае.

Если заданы два произвольных действительных числа λ и μ , то под вектором $\lambda\xi + \mu\eta = \zeta$ мы разумеем вектор, компоненты z_i которого линейно составлены из компонент x_i и y_i векторов ξ и η по формуле

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i.$$

Тем самым в частности определена сумма и разность двух векторов. *Скалярным произведением* $(\xi\eta)$ векторов ξ и η мы называем число

$$(\xi\eta) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = (\eta\xi). \quad (1)$$

Иногда мы будем называть скалярное произведение $(\xi\eta)$ *компонентой вектора η относительно вектора ξ* , или же наоборот.

¹⁾ При этом здесь речь идет только о сокращенном способе обозначений, а не об изложении собственно векторного анализа или его обобщения на случай измерений, где основным пунктом исследования является вопрос об известных инвариантах.

¹ Курант-Гильберт.

Если скалярное произведение $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ обращается в нуль, то векторы $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ мы будем называть перпендикулярными или *ортогональными* друг к другу; при $n=2$ и $n=3$ этот способ выражения имеет непосредственное наглядное значение. Особенное значение имеет скалярное произведение $N\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^2$ вектора на самого себя, которое мы называем *нормой* вектора. Положительный квадратный корень из $\mathfrak{x}^2$ называют *абсолютным значением* или *длиной* вектора $\mathfrak{x}$ и обозначают так:

$$|\mathfrak{x}| = \sqrt{\mathfrak{x}^2}.$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным* вектором или *единичным* вектором.

Скалярное произведение $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ двух векторов $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\mathfrak{b} = (b_1, \dots, b_n)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2 \leq \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2,$$

или, не пользуясь векторными обозначениями:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right),$$

причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда числа a_i пропорциональны числам b_i , т. е. имеет место соотношение:

$$\lambda \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b} = 0.$$

Доказательство этого *неравенства Шварца* ¹⁾ вытекает из замечания, что квадратное уравнение

$$\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$$

не может иметь двух различных действительных корней, а имеет, за исключением случая пропорциональности чисел a_i и чисел b_i , мнимые корни. Неравенство Шварца представляет соответствующее этому факту соотношение для дискриминанта квадратного уравнения. Другое доказательство неравенства Шварца непосредственно вытекает из тождества:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

Векторы $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m$ называются *линейно независимыми*, если невозможно найти числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, которые не равнялись бы одновременно нулю, так чтобы имело место векторное равенство:

$$\lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \dots + \lambda_m \mathfrak{x}_m = 0,$$

т. е. чтобы все компоненты вектора, стоящие в левой части, равнялись нулю. В противном случае векторы называются *линейно зависимыми*.

¹⁾ Впрочем, этим соотношением пользовался еще Коши.

В n -мерном пространстве n векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, компоненты которых по порядку задаются строками схемы

$$\begin{array}{c} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots, 1, \end{array}$$

образуют систему n линейно независимых векторов.

В самом деле, если бы имело место соотношение $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, то, умножив его скалярно на e_h , мы получили бы тотчас же $\lambda_h = 0$, так как $e_h^2 = 1$, а $(e_h e_k) = 0$ ($h \neq k$).

В то время как безусловно существуют системы n линейно независимых векторов, между $n+1$ векторами $u_1, \dots, u_{n+1}$ непременно должно иметь место, по крайней мере, одно линейное уравнение:

$$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_{n+1} u_{n+1} = 0,$$

в котором не все коэффициенты равны нулю, так как система n однородных линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_{ik} \mu_i = 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

относительно $n+1$ неизвестных $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$ всегда имеет нетривиальное решение (см. п. 3).

2. Ортогональные системы векторов. Полнота системы. Предыдущие „координатные векторы“ e_i представляют специальную систему „ортогональных единичных векторов“. Мы разумеем под единичным вектором, как и выше, вектор, длина которого равна единице, а под системой n ортогональных единичных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ — такую систему, когда выполнены условия:

$$e_h^2 = 1, (e_h e_k) = 0 \quad (h \neq k)$$

при $h, k = 1, 2, \dots, n$. Так же как и раньше, можно заключать, что n векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы.

Если имеем произвольный вектор ξ , то в силу линейной зависимости $n+1$ векторов должно иметь место соотношение:

$$c_0 \xi - c_1 e_1 - \dots - c_n e_n = 0,$$

в котором не все постоянные c равны нулю; при этом c_0 не может равняться нулю, так как векторы e_i линейно независимы, и потому можно принять c_0 равным единице. Всякий вектор ξ можно, следовательно, представить при помощи системы ортогональных единичных векторов в виде:

$$\xi = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n. \quad (2)$$

Значение коэффициентов c_i компонент вектора ξ относительно системы $e_1, \dots, e_n$ находим скалярным умножением равенства (2) на e_i , а именно:

$$c_i = (\xi e_i).$$

Из произвольной системы m линейно независимых векторов $v_1, \dots, v_m$ мы можем получить систему m ортогональных единичных векторов $e_1, \dots, e_m$ с помощью следующего *процесса ортогонализации*.

Полагаем $e_1 = v_1 / |v_1|$. Затем мы выбираем два не обращающиеся одновременно в нуль числа c'_1 и c'_2 так, чтобы вектор $c'_1 e_1 + c'_2 v_2$ был ортогонален к e_1 , т. е. чтобы $c'_1 + c'_2 (e_1 v_2) = 0$. Вследствие линейной независимости векторов v_1 и v_2 , а вместе с тем и e_1 и v_2 вектор $c'_1 e_1 + c'_2 v_2$ не равен нулю; разделив этот вектор на его длину, получим единичный вектор e_2 , ортогональный к e_1 . Далее, выбираем три не обращающиеся одновременно в нуль числа c''_1, c''_2, c''_3 так, чтобы вектор $c''_1 e_1 + c''_2 e_2 + c''_3 v_3$ был ортогонален к векторам e_1 и e_2 , т. е. чтобы $c''_1 + c''_3 (v_3 e_1) = 0$ и $c''_2 + c''_3 (v_3 e_2) = 0$. Вектор $c''_1 e_1 + c''_2 e_2 + c''_3 v_3$ опять отличен от нуля и потому может быть нормирован, и мы получаем таким образом e_3 .

Путем продолжения этого процесса мы приходим к искомой ортогональной системе.

При $m < n$ говорят о неполной, а при $m = n$ о *полной ортогональной системе*. Если обозначим компоненты вектора x относительно $e_1, \dots, e_m$ опять через $c, \dots, c_m$, то из очевидного соотношения:

$$(x - c_1 e_1 - \dots - c_m e_m)^2 \geq 0$$

следует, если разложить квадрат вектора в левой части по имеющим место и здесь правилам алгебры, что

$$x^2 - 2(x \sum_{l=1}^m c_l e_l) + \sum_{l=1}^m c_l^2 = x^2 - 2 \sum_{l=1}^m c_l^2 + \sum_{l=1}^m c_l^2 \geq 0$$

или

$$x^2 \geq \sum_{l=1}^m c_l^2, \quad (3)$$

причем $m \leq n$ и $c_l = (x, e_l)$. При $m = n$ имеет место знак равенства:

$$x^2 = \sum_{l=1}^m c_l^2. \quad (4)$$

Оба последних соотношения, которые содержат векторное выражение теоремы Пифагора и при $n \leq 3$ имеют непосредственное геометрическое истолкование, обычно называют первое — *неравенством Бесселя*, а второе — *условием полноты*. Действительно, равенство (4) выражает в том случае, когда оно справедливо для любого вектора, что заданная ортогональная система является полной системой. В самом деле, равенство (4) не могло бы иметь места для нормированного вектора, ортогонального ко всем векторам $e_1, \dots, e_m$, а такой вектор непременно существует, если $m < n$.

где $a'_{ik} = a_{ki}$, имеет p линейно независимых, нетривиальных решений $\xi'_1, \dots, \xi'_p$. Для тех, и только для тех векторов, которые удовлетворяют p соотношениям: $(\eta\xi'_1) = 0, \dots, (\eta\xi'_p) = 0$, т. е. ортогональны к $\xi'_1, \dots, \xi'_p$, может быть решена и неоднородная система (7), причем это решение определяется только с точностью до произвольного аддитивно входящего решения однородной системы уравнений.

При этой формулировке основной теоремы мы не ссылаемся на теорию определителей. Определители нужны лишь для того, чтобы представить решение системы уравнений в явном виде, что мы сейчас и сделаем.

Самое существенное в таком линейном преобразовании дается таблицей коэффициентов или *матрицей* уравнений (7):

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \quad (9)$$

с определителем

$$\Delta = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В иных случаях целесообразно обозначить само преобразование или, как говорят также, тензор или оператор отдельной буквой $\mathfrak{A}$. Элементы a_{ik} матрицы A называются компонентами тензора. Мы можем рассматривать линейное преобразование (7) как „умножение“ тензора $\mathfrak{A}$ на вектор ξ и символически записать в виде:

$$\mathfrak{A}\xi = \eta.$$

Многие положения „линейной алгебры“ особенно удобно выражаются, если их формулировать как теоремы о матрицах, пользуясь при этом некоторыми простыми определениями и правилами, которые носят название: *исчисление матриц*. Прежде всего мы приходим к понятию об умножении матриц, рассматривая вектор ξ , который требуется преобразовать при помощи предыдущих уравнений (7), в свою очередь, как произведение другого тензора $\mathfrak{B}$ с компонентами b_{ik} на вектор η ; итак, пусть ξ и η связаны между собой системой линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} \eta_k = \xi_i \quad (i=1, \dots, n)$$

с матрицей $B = (b_{ik})$, тогда и вектор η получается из вектора η путем умножения на тензор $\mathfrak{C}$. Матрица C этого тензора получается из A и B по правилам „умножения матриц“:

$$C = AB,$$

т. е. элемент c_{ik} представляет скалярное произведение i -й строки A и k -го столбца B :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (10)$$

Тензор или преобразование $\mathfrak{C}$ называют скалярным произведением или, короче, *произведением тензоров или преобразований* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. В дальнейшем мы вместо тензоров всегда будем говорить об эквивалентных им матрицах. Мы видим, что произведение матриц обладает *свойством сочетательности*:

$$(AB)C = A(BC),$$

так что произведение $A_1 A_2 \dots A_h$ произвольного числа матриц, взятых в известном порядке, имеет вполне определенное значение. Если $A_1 = A_2 = \dots = A_h = A$, то это произведение записывают в виде h -й степени A^h матрицы A .

Однако следует заметить, что *закон переместительности* произведения, вообще говоря, не имеет места, так что приходится различать между умножением *слева* и умножением *справа* матриц A и B , причем в общем случае $AB \neq BA$. Наконец, под матрицей $\lambda A + \mu B$ мы согласно определению разумеем матрицу с компонентами $\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}$, под нулевой матрицей — матрицу, все компоненты которой равны нулю¹⁾. Между прочим, можно непосредственно убедиться в справедливости распределительного закона:

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Во многих случаях необходимо ввести „единичную матрицу“.

$$E = (e_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Она обладает тем свойством, что для любой матрицы A имеет место равенство:

$$AE = EA = A.$$

Единичной матрице соответствует тождественное преобразование, которое задается уравнениями:

$$x_i = y_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Нулевую степень любой матрицы A мы согласно определению считаем равной единичной матрице:

$$A^0 = E.$$

¹⁾ При оперировании над матрицами необходимо заметить, что из равенства $AB = (0)$ ни в коем случае не вытекает равенство нулю одной из матриц A или B , как это видно из примера $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Установив определение степени A^h матрицы, можем также дать определение многочленов, аргументом которых является матрица. Если

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

есть многочлен m -й степени относительно x , то равенство

$$f(A) = a_0 + a_1A + \dots + a_mA^m$$

определяет матрицу $f(A)$ как целую рациональную функцию матрицы A . Определение матрицы как функции $f(A)$ от A можно иногда распространить и на случаи, когда выражение с помощью многочлена уже невозможно. Так, например, матрицу e^A определяют при помощи равенства:

$$B = e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{A^v}{v!}.$$

При этом такой ряд имеет следующий смысл: сперва нужно взять сумму первых N членов, а затем надо исследовать, сходится ли каждый из n^2 элементов полученной таким путем матрицы при неограниченном возрастании N ; матрица, составленная из n^2 предельных значений, принимается в этом случае за значение ряда. В данном частном случае матрицы e^A ряд, как будет далее доказано, всегда сходится.

Особенно важное соотношение между матрицами получается, если выбрать за функцию $f(A)$ „геометрический ряд“. Пусть

$$S_m = E + A + A^2 + \dots + A^m.$$

Умножая это равенство, определяющее матрицу S_m , на A , мы приходим к равенству:

$$S_m A + E = S_m + A^{m+1},$$

из которого следует, что

$$S_m(E - A) = E - A^{m+1}.$$

Если с возрастанием m матрица S_m стремится к определенному пределу S и, следовательно, матрица A^{m+1} стремится к нулевой матрице, то для определенной при помощи бесконечного геометрического ряда

$$S = E + A + A^2 + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} A^v = f(A)$$

матрицы S имеет место соотношение:

$$S(E - A) = E.$$

Вопрос о том, когда бесконечный геометрический ряд или, как его иногда называют, *ряд Неймана*, составленный из матриц, сходится, мы рассмотрим в следующем параграфе.

Над многочленами из матриц можно оперировать совершенно таким, же образом, как и над обыкновенными многочленами относительно x . Например, из тождества двух многочленов относительно x вытекает со-

ответствующее тождество многочленов для произвольной матрицы A . Так, тождеству

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x^2 + 1)(x + 2) + (2x + 2)$$

соответствует справедливое для всякой матрицы A соотношение:

$$A^3 + 2A^2 + 3A + 4 = (A^2 + E)(A + 2E) + (2A + 2E).$$

Подобным же образом разложению на множители

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = a_m(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_m$ суть корни многочлена $f(x)$, соответствует матричное равенство:

$$f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_mA^m = a_0(A - x_1E)(A - x_2E) \dots (A - x_mE),$$

имеющее место для любой матрицы A .

Обычно к каждой матрице A с компонентами a_{ik} относят другие матрицы. Элементы матрицы могут иметь и комплексные значения. Если $\bar{a}_{ik}$ является комплексным числом, сопряженным с a_{ik} , то матрицу $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ называют *сопряженной* матрицей; далее, матрицу $A' = (a_{ki})$, получающуюся из A заменой столбцов и строк, называют *транспонированной* матрицей; наконец, $A^* = \bar{A}' = (\bar{a}_{ki})$ называют *сопутствующей* (begleitende) матрицей; она получается, следовательно, переходом к сопряженным комплексным величинам и заменой строк и столбцов.

Всегда имеет место равенство:

$$(AB)' = B'A',$$

которое легко непосредственно проверить. Матрица называется *симметричной*, если $A = A'$; действительная матрица, для которой

$$AA' = E,$$

называется *ортогональной*, наконец, вообще комплексная матрица называется *унитарной*, если

$$AA^* = E.$$

Обращение линейного преобразования (7), как известно из теории определителей, возможно при произвольных y_i в том и только в том случае, когда определитель $\Delta = |\bar{a}_{ik}|$ не равен нулю. В этом случае решение однозначно определяется и выражается соответствующей системой уравнений

$$x_i = \sum \widetilde{a}_{ik} y_k \quad (i = 1, \dots, n). \quad (11)$$

При этом, как известно,

$$\widetilde{a}_{ik} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta}, \quad (12)$$

где Δ_{ki} означает минор, соответствующий элементу a_{ki} определителя Δ . Матрица $\bar{A} = (\widetilde{a}_{ik})$ называется *взаимной* или *обратной* матрице A и отличается тем, что

$$\bar{A}A = A\bar{A} = E.$$

Однозначно определенную матрицу $\tilde{A}$ обозначим теперь A^{-1} ; определитель этой матрицы имеет значение Δ^{-1} . На языке исчисления матриц мы можем, следовательно, охарактеризовать решение системы уравнений с матрицей A , определитель которой не равен нулю, при помощи матрицы $B = A^{-1}$, удовлетворяющей соотношениям:

$$AB = BA = E.$$

4. Билинейные формы, квадратичные и эрмитовы формы. Для того чтобы представить в компактной и наглядной форме линейные уравнения (7), можно воспользоваться эквивалентной системе уравнений *билинейной формой*, принадлежащей матрице A . Эта билинейная форма

$$A(u, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} u_i x_k \quad (13)$$

получается, если умножить линейные относительно $x_1, \dots, x_n$ формы, стоящие в левых частях уравнений (7), на неопределенные величины $u_1, \dots, u_n$ и затем сложить. Таким путем вместо системы уравнений (7) получаем одно тождественное относительно величин u уравнение:

$$A(u, x) = E(u, y), \quad (14)$$

где $E(u, y) = \sum_{i=1}^n u_i y_i$ представляет билинейную форму единичной матрицы или *билинейную единичную форму*. Под символическим произведением двух билинейных форм $A(u, x)$ и $B(u, x)$ с матрицами A и B разумеют билинейную форму $C(u, x)$ с матрицей $C = AB$. Степень $A^h(u, x)$ называют также h -й итерированной формой. *Обратная билинейная форма* $A^{-1}(u, x)$, имеющая матрицу A^{-1} , может быть представлена на основании теорем теории определителей в виде:

$$A^{-1}(u, x) = - \frac{A(u, x)}{\Delta}, \quad (15)$$

где

$$A(u, x) = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ x_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \sum_{i, k=1}^n A_{ik} x_i u_k.$$

Особый интерес представляют *симметрические линейные преобразования*, которые характеризуются условием $a_{kl} = a_{lk}$. Для исследования таковых достаточно рассмотреть *квадратичную форму*:

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i x_k,$$

которая получается из билинейной формы, если положить $u_i = x_i$. В самом деле, из квадратичной формы $A(x, x)$ получаем симметричную

билинейную форму:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i x_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial A(x, x)}{\partial x_i} = \frac{A(x+u, x+u) - A(x, x) - A(u, u)}{2},$$

которая называется *полярной формой*, соответствующей квадратичной форме $A(x, x)$.

Если $A(u, x) = \sum a_{ik} u_i x_k$ — произвольная несимметричная билинейная форма (с действительными коэффициентами), то $AA'(u, x)$ и $A'A(u, x)$ во всяком случае представляют симметричные билинейные формы; в самом деле:

$$AA'(u, x) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \sum_{l=1}^n a_{lk} u_l \right)$$

и

$$A'A(u, x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k \right).$$

Мы можем, следовательно, образовать также квадратичные формы:

$$AA'(x, x) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right)^2$$

и

$$A'A(x, x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right)^2.$$

Эти квадратичные формы, будучи суммами квадратов, обладают тем свойством, что могут принимать только неотрицательные значения. Такого рода квадратичные формы называются *определенными положительными* квадратичными формами.

Важным обобщением квадратичных форм являются *эрмитовы формы*. Это — билинейные формы:

$$A(u, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i x_k,$$

коэффициенты которых a_{ik} могут иметь комплексные значения и должны удовлетворять соотношениям:

$$a_{ik} = \overline{a_{ki}}.$$

Следовательно, эрмитова форма принимает действительные значения если придать u_i значения, комплексно сопряженные с x_i . В этом случае обыкновенно записывают эрмитову форму в виде:

$$H(x, \bar{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i \bar{x}_k = \sum_{i,k=1}^n \overline{a_{ki}} x_i \bar{x}_k.$$

Произвольной билинейной форме

$$A(u, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} u_i x_k$$

с комплексными коэффициентами соответствуют эрмитовы формы:

$$AA^*(x, \bar{x}) = A\bar{A}'(x, \bar{x}) = \sum_{k=1}^n \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right|^2$$

и

$$A^*A(x, \bar{x}) = \bar{A}'A(x, \bar{x}) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{x}_k \right|^2.$$

Если в билинейной форме

$$A(x, y) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i y_k$$

подвергнуть переменные линейным преобразованиям

$$x_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \xi_k \quad \text{и} \quad y_l = \sum_{k=1}^n b_{lk} \eta_k,$$

матрицы которых C и B , то

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i y_k = \sum_{i, j, k, l=1}^n a_{ik} c_{ij} b_{kl} \xi_j \eta_l = \sum_{j, l=1}^n p_{jl} \xi_j \eta_l, \\ p_{jl} &= \sum_{i, k=1}^n a_{ik} c_{ij} b_{kl}. \end{aligned}$$

Таким образом получаем из A преобразованную билинейную форму с матрицей

$$(p_{jl}) = C'AB,$$

определитель которой по теореме умножения определителей равен $AB\Gamma$. Если в частности имеем дело с квадратичной формой:

$$K(x, x) = \sum_{p, q=1}^n k_{pq} x_p x_q$$

с симметрической матрицей $K = (k_{pq})$ и определителем $K = |k_{pq}|$, то следует взять $C = B$, и при преобразовании переменных x получается симметрическая матрица $C'KC$ с определителем $K\Gamma^2$.

5. Ортогональные и унитарные преобразования. Мы ставим себе теперь задачу — найти линейные преобразования $\mathcal{Q}$:

$$x_p = \sum_{q=1}^n l_{pq} y_q = L_p(y) \quad (p = 1, \dots, n), \quad (16)$$

с матрицей $L = (l_{pq})$ и определителем $\Lambda = |l_{pq}|$, которые были бы ортогональны, т. е. переводили бы единичную квадратичную форму

$$E(x, x) = \sum_{p=1}^n x_p^2$$

в себя самое, удовлетворяя тождественно относительно y_p соотношению

$$E(x, x) = E(y, y). \quad (17)$$

Если применить наши правила преобразования к квадратичной форме $A(x, x) = E(x, x)$, то требование, выражаемое равенством (17), даст в качестве необходимого и достаточного условия ортогональности преобразования $\mathfrak{L}$ равенства:

$$L'EL = L'L = LL' = E, \quad L' = L^{-1}, \quad (18)$$

т. е. транспонированная матрица ортогонального преобразования совпадает с обратной матрицей, так что уравнения (16) разрешаются также с помощью ортогональной системы:

$$y_p = \sum_{q=1}^n l_{qp} x_q = L'_p(x). \quad (19)$$

Мы видим, таким образом, что ортогональные преобразования задаются ортогональными матрицами, определение которых дано уже на стр. 9. Подробно условия ортогональности записываются следующим образом:

$$\sum_{v=1}^n l_{vp}^2 = 1, \quad \sum_{v=1}^n l_{vp} l_{vq} = 0 \quad (p \neq q) \quad (20)$$

или

$$\sum_{v=1}^n l_{pv}^2 = 1, \quad \sum_{v=1}^n l_{pv} l_{qv} = 0 \quad (p \neq q) \quad (21)$$

Переходя к определителям, мы из соотношений (18) прежде всего видим, что $\Lambda^2 = 1$, т. е. определитель ортогонального преобразования равен $+1$ или -1 ; далее, мы видим, что определитель любой квадратичной формы инвариантен по отношению к ортогональным преобразованиям.

Соотношение $L'(AB)L = (L'A)L(L'B)L$ между матрицами A и B двух произвольных квадратичных форм и матрицей L ортогонального преобразования, вытекающее из (18), показывает, что можно ортогонально преобразовать символическое произведение квадратичных форм путем ортогонального преобразования каждого множителя в отдельности. Отсюда в частности следует, что квадратичные формы, полученные ортогональным преобразованием двух обратных квадратичных форм, также обратны друг другу.

Обобщение предыдущих рассмотрений на случай эрмитовых форм

$$H(x, \bar{x}) = \sum_{p, q=1}^n h_{pq} x_p \bar{x}_q$$

приводит к *унитарным преобразованиям*. Под унитарным преобразованием

$$x_p = \sum_{q=1}^n l_{pq} y_q$$

разумеют такое линейное преобразование (с комплексными коэффициентами l_{pq}), которое переводит единичную эрмитову форму

$$\sum_{p=1}^n |x_p|^2 = \sum_{p=1}^n x_p \bar{x}_p$$

снова в единичную форму, т. е.

$$\sum_{p=1}^n |x_p|^2 = \sum_{p=1}^n |y_p|^2.$$

Путем, вполне аналогичным предыдущему, находим в качестве необходимого и достаточного условия унитарности преобразования с матрицей L матричное равенство:

$$LL^* = L^*L = E,$$

где $L^* = \bar{L}'$ — матрица, сопряженная L . Следовательно, L согласно определению на стр. 9 должно быть унитарной матрицей. Условия унитарности можно записать подробно следующим образом:

$$\sum_{v=1}^n |l_{vp}|^2 = 1, \quad \sum_{v=1}^n l_{vp} \bar{l}_{vq} = 0 \quad (p \neq q) \quad (22)$$

и

$$\sum_{v=1}^n |l_{pv}|^2 = 1, \quad \sum_{v=1}^n l_{pv} \bar{l}_{qv} = 0 \quad (q \neq p). \quad (23)$$

Определитель унитарного преобразования по абсолютному значению равен единице, что также непосредственно следует из равенства

$$LL^* = E.$$

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ.

Во многих вопросах система уравнений линейного преобразования представляется в следующем виде:

$$x_i - \lambda \sum_{k=1}^n t_{ik} x_k = y_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (24)$$

где λ — параметр (который может принимать и комплексные значения). Соответствующая билинейная форма имеет вид:

$$E(u, x) - \lambda T(u, x),$$

причем $T(u, x)$ имеет матрицу $T = (t_{ik})$. Решение этой системы уравнений на основании предыдущего параграфа эквивалентно разысканию обратной билинейной формы $R(u, y; \lambda)$ с матрицей R , удовлетворяющей уравнению $(E - \lambda T)R = E$. Мы знаем, что эта обратная матрица существует в том и только в том случае, когда определитель $|E - \lambda T|$ не равен нулю. Так как этот определитель представляет целую рациональную функцию от λ , степени не выше n , то может быть только конечное число значений λ , для которых обратная форма R не существует, именно при значениях λ_i , являющихся корнями этой целой рациональной функции. Эти значения λ_i , *собственные значения* T относительно матрицы E , образуют так называемый спектр матрицы T . (Часто также называют спектром совокупность значений $x_i = \frac{1}{\lambda_i}$, при которых не существует матрицы, обратной $\chi E - T$.)

Вид уравнений (24) наводит на мысль попытаться решить их методом последовательных приближений, подставляя в уравнение

$$x_i = y_i + \lambda \sum_{k=1}^n t_{ik} x_k$$

вместо величин x_k снова значения

$$y_k + \lambda \sum_{j=1}^n t_{kj} x_j$$

и продолжая поступать таким образом неограниченно. Нагляднее всего представляется этот процесс с помощью соотношения $R = E + \lambda TR$, из которого мы последовательно получаем:

$$R = E + \lambda TR = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 R = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \lambda^3 T^3 R = \dots$$

Если этот процесс сходится, то мы получаем выражение для R с помощью бесконечного ряда:

$$R = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \lambda^3 T^3 + \dots,$$

который действительно (в случае сходимости ряда) дает матрицу, обратную матрице $E - \lambda T$. Чтобы в этом убедиться, достаточно только умножить ряд на $E - \lambda T$, заметив, что в случае сходимости можно выполнить символическое умножение почленно. Непосредственно ясно, что выражение:

$$R = (E - \lambda T)^{-1} = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \dots$$

формально вполне совпадает с обыкновенным геометрическим рядом (см. рассуждения на стр. 8, где надо только положить $A = \lambda T$, чтобы получить полное совпадение).

Если представить нашу первоначальную систему уравнений не с помощью матриц, а с помощью соответствующих им билинейных форм в виде:

$$E(u, x) - \lambda T(u, x) = E(u, y),$$

то можно тотчас же записать решение во вполне симметричном к предыдущему виде:

$$E(u, y) + \lambda T(u, y; \lambda) = E(u, x),$$

если положить

$$T(u, y; \lambda) = T + \lambda T^2 + \lambda^2 T^3 + \dots = \frac{R(u, y; \lambda) - E(u, y)}{\lambda}.$$

Билинейную форму T называют *резольвентой* формы T . Легко доказать сходимость предыдущих рядов Неймана для R и T при достаточно малых значениях $|\lambda|$.

Пусть M означает верхнюю грань абсолютных значений чисел t_{ik} , тогда для абсолютных значений коэффициентов форм $T^2, T^3, \dots, T^h$ мы непосредственно получаем верхние грани $nM^2, n^2M^3, \dots, n^{h-1}M^h$, следовательно, выражение

$$(M + \lambda n M^2 + \lambda^2 n^2 M^3 + \dots)(|u_1| + \dots + |u_n|)(|y_1| + \dots + |y_n|)$$

представляет мажоранту для ряда Неймана. Но эта мажоранта непременно сходится при $|\lambda| < \frac{1}{nM}$. Следовательно, ряд Неймана также сходится при достаточно малых значениях $|\lambda|$ и действительно представляет резольвенту формы $T(u, x)^1$.

4) Сходимость предыдущей мажоранты, очевидно, с возрастанием n все ухудшается. Следует, однако, заметить, что можно при помощи небольшого уточнения легко найти оценку границы сходимости, не зависящую от n , которую можно поэтому применять и при обобщениях на случай бесконечно большого числа переменных. Обозначим элементы матрицы T^v через $t_{ik}^{(v)}$ и положим

$$\sum_{\alpha=1}^n |t_{p\alpha}^{(1)}| = z_p.$$

Если M представляет верхнюю грань всех n чисел z_p то, как мы покажем методом полной индукции, $\sum_{q=1}^n |t_{pq}^{(v)}| \leq M^v$, следовательно, и подавно

$$|t_{pq}^{(v)}| \leq M^v$$

при $p, q = 1, \dots, n$ и любом значении v . Отсюда непосредственно следует, что наш ряд Неймана сходится при $|\lambda| < \frac{1}{M}$. Таким образом получена грань, в которую число n явно не входит.

Чтобы доказать предыдущее неравенство для любого v , будем считать его доказанным для $v-1$.

Заметим, между прочим, что только что произведенная нами оценка показывает, что мы можем во всякий повсюду сходящийся степенной ряд $f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v$ подставить вместо x произвольную матрицу A и по-

лучить таким путем новую матрицу $f(A) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v A^v$. В частности, следовательно, всегда существует матрица e^A .

Полученное нами выражение для R или T сходится только при достаточно малых $|\lambda|$. Между тем формула (15) предыдущего параграфа дает нам выражение для обратной формы или матрицы $R = (E - \lambda T)^{-1}$, имеющее смысл и вне области сходимости ряда. В самом деле, отождествляя форму $E - \lambda T$ с формой $A(u, x)$, получаем для обратной формы выражение:

$$R(u, y; \lambda) = - \frac{\Delta(u, y; \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

а для резольвенты T выражение:

$$T(u, y; \lambda) = - \frac{\Delta(u, y; \lambda)}{\lambda \Delta(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} E(u, y),$$

причем

$$\Delta(u, y; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ y_1 & 1 - \lambda t_{11} & \dots & -\lambda t_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & -\lambda t_{n1} & \dots & 1 - \lambda t_{nn} \end{vmatrix}$$

есть целая рациональная функция от λ степени $n-1$, а

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda t_{11} & -\lambda t_{12} & \dots & -\lambda t_{1n} \\ -\lambda t_{21} & 1 - \lambda t_{22} & \dots & -\lambda t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda t_{n1} & -\lambda t_{n2} & \dots & 1 - \lambda t_{nn} \end{vmatrix}$$

целая рациональная функция степени n . Корни многочлена $\Delta(\lambda)$ образуют, следовательно, определенный выше спектр формы T , т. е. совокупность тех значений λ , для которых форма $E - \lambda T$ не имеет обратной формы.

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^n |t_{pq}^{(v)}| &= \sum_{q=1}^n \left| \sum_{\alpha=1}^n t_{p\alpha}^{(1)} t_{\alpha q}^{(v-1)} \right| \leq \sum_{q=1}^n \sum_{\alpha=1}^n |t_{p\alpha}^{(1)}| |t_{\alpha q}^{(v-1)}| = \\ &= \sum_{\alpha=1}^n |t_{p\alpha}^{(1)}| \left(\sum_{q=1}^n |t_{\alpha q}^{(v-1)}| \right) \leq M^{v-1} \sum_{\alpha=1}^n |t_{p\alpha}^{(1)}| \leq M^v. \end{aligned}$$

Так как неравенство справедливо при $v=1$, то тем самым оно доказано для любого индекса v .

При помощи формулы:

$$T + \lambda T^2 + \lambda^2 T^3 + \dots = - \frac{\Delta(u, y; \lambda)}{\lambda \Delta(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} E(u, y)$$

находящийся в левой части ряд, характер которого непосредственно усмотреть нельзя и который сходится не при всех значениях λ , аналитически продолжен на всю плоскость переменного λ . Обратная форма R , как и резольвента T , является рациональной функцией λ , полюсы которой представляют спектр формы T .

Разлагая определители $\Delta(u, y; \lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ по правилам теории определителей по степеням λ , получаем:

$$\Delta(u, y; \lambda) = \Delta_1(u, y) - \lambda \Delta_2(u, y) + \lambda^2 \Delta_3(u, y) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \Delta_n(u, y),$$

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \Delta_1 + \lambda^2 \Delta_2 - \dots + (-1)^n \lambda^n \Delta_n,$$

причем:

$$\Delta_h(u, y) = \sum \begin{vmatrix} 0 & u_{p_1} & \dots & u_{p_h} \\ y_{p_1} & t_{p_1 p_1} & \dots & t_{p_1 p_h} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_{p_h} & t_{p_h p_1} & \dots & t_{p_h p_h} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_h = \sum \begin{vmatrix} t_{p_1 p_1} & t_{p_1 p_2} & \dots & t_{p_1 p_h} \\ t_{p_2 p_1} & t_{p_2 p_2} & \dots & t_{p_2 p_h} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ t_{p_h p_1} & t_{p_h p_2} & \dots & t_{p_h p_h} \end{vmatrix}.$$

При этом суммирование распространяется на все целочисленные значения $p_1, p_2, \dots, p_h$, от 1 до n , где $p_1 < p_2 < \dots < p_h$.

Часто бывает удобно ввести вместо параметра λ обратное значение $x = \frac{1}{\lambda}$. В этом случае целесообразно рассматривать форму $x E - T$, с определителем

$$\begin{vmatrix} x - t_{11} & -t_{12} & \dots & -t_{1n} \\ -t_{21} & x - t_{22} & \dots & -t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -t_{n1} & -t_{n2} & \dots & x - t_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(x),$$

представляющим целую рациональную функцию степени n от x , корни которой $x_1, \dots, x_n$, представляют величины, обратные корням $\Delta(\lambda)$, т. е. собственным значениям формы T . Обратная форма $(x E - T)^{-1}$, которая существует для всех значений x , отличных от $x_1, \dots, x_n$, может быть представлена при достаточно больших значениях $|x|$ с помощью ряда Неймана:

$$(x E - T)^{-1} = \frac{E}{x} + \frac{T}{x^2} + \frac{T^2}{x^3} + \dots$$

Из этого разложения можно получить интересное следствие. Так как левая часть, на основании предыдущего, является рациональной функцией от λ с знаменателем $\varphi(\lambda)$, то форма $\varphi(\lambda)(\lambda E - T)^{-1}$ должна быть целой рациональной функцией от λ , и следовательно, ее разложение по степеням λ не может содержать отрицательных степеней. Поэтому, если мы умножим предыдущее равенство на $\varphi(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$, то в правой части должно будет получиться выражение, в котором все коэффициенты при отрицательных степенях λ равны нулю. Коэффициент при λ^{-1} , как легко видеть, равен выражению $T^n + c_1T^{n-1} + \dots + c_nE$, и мы получаем, таким образом, теорему Кэли (Cayley):

Если $\varphi(\lambda)$ есть определитель матрицы $\lambda E - T$, то матрица T удовлетворяет соотношению:

$$\varphi(T) = 0.$$

Другой важный факт относительно спектра, представленного с помощью характеристических чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, выражает следующая теорема:

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ представляют характеристические числа матрицы T , а $g(x)$ — произвольная целая рациональная функция от x , то характеристическими числами матрицы $g(T)$ будут

$$g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n).$$

Для доказательства мы исходим из тождества:

$$|\lambda E - T| = \varphi(\lambda) = \prod_{v=1}^n (\lambda - \lambda_v).$$

Целью нашей является доказать соотношение:

$$|\lambda E - g(T)| = \prod_{v=1}^n [\lambda - g(\lambda_v)].$$

Пусть $h(x)$ — произвольная целая рациональная функция степени r , которая с помощью ее корней $x_1, \dots, x_r$ представлена в следующем виде:

$$h(x) = a \prod_{p=1}^r (x - x_p).$$

Тогда для произвольной матрицы T имеет место тождество:

$$h(T) = a \prod_{p=1}^r (T - x_p E).$$

Переходя к определителям, имеем:

$$\begin{aligned} |h(T)| &= a^n \prod_{p=1}^r |T - x_p E| = (-1)^{nr} a^n \prod_{p=1}^r |x_p E - T| = \\ &= (-1)^{nr} a^n \prod_{p=1}^r \psi(x_p) = (-1)^{nr} a^n \prod_{p=1}^r \left(\prod_{v=1}^n (x_p - x_v) \right) = \\ &= (-1)^{nr} (-1)^{nr} a^n \prod_{v=1}^n \left(\prod_{p=1}^r (x_v - x_p) \right) = \prod_{v=1}^n h(x_v). \end{aligned}$$

Подставляя теперь вместо $h(T)$ функцию $\chi E - g(T)$, непосредственно получаем искомое равенство:

$$|\chi E - g(T)| = \prod_{v=1}^n [\chi - g(x_v)].$$

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ КВАДРАТИЧНЫХ И ЭРМИТОВЫХ ФОРМ.

Особенно важной главой алгебры является теория линейного преобразования квадратичной формы $K(x, x) = \sum_{p, q=1}^n k_{pq} x_p x_q$ к виду:

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^n x_p y_p^2,$$

т. е. к виду, при котором переменные входят только в виде квадратов. В первую очередь мы займемся задачей о преобразовании к такому виду квадратичной формы $K(x, x)$ с помощью ортогонального преобразования:

$$x_p = \sum_{q=1}^n l_{pq} y_q = L_p(y) \quad (p=1, \dots, n).$$

Эта задача, к которой часто приводят вопросы геометрии, механики и теории колебаний, называется *задачей о преобразовании к главным осям*, а искомое линейное преобразование — *преобразованием к главным осям*.

1. Проведение преобразования к главным осям на основании принципа максимума. Теперь мы докажем, что заданную квадратичную форму $K(x, x)$ всегда возможно преобразовать к главным осям. При этом мы будем опираться на тот факт, что непрерывная функция от многих переменных, изменяющихся в некоторой

ограниченной замкнутой области, принимает в этой области наибольшее значение (*теорема Вейерштрасса*)¹⁾.

Ввиду этого существует такой единичный вектор $\bar{I}_1$ с компонентами $l_{11}, \dots, l_{1n}$, что $K(x, x)$ принимает наибольшее значение x_1 , при $x_1 = l_{11}, \dots, x_n = l_{1n}$, при добавочном условии:

$$\sum_{p=1}^n x_p^2 = 1. \quad (25)$$

Геометрически вектор $\bar{I}_1$ определяет на „единичной сфере“ (25) точку, которая в то же время лежит на одной из поверхностей семейства центральных поверхностей второго порядка $K(x, x) = \text{const}$, касающейся единичной сферы.

Далее, существует ортогональный к $\bar{I}_1$ единичный вектор $\bar{I}_2$ с компонентами $l_{21}, \dots, l_{2n}$, такой, что $K(x, x)$ при $x_1 = l_{21}, \dots, x_n = l_{2n}$ принимает наибольшее значение x_2 , которое только возможно, если к условию (25) присоединить условие:

$$\sum_{p=1}^n l_{1p} x_p = 0. \quad (26)$$

И здесь непосредственно ясно, что для фигуры, получающейся от пересечения единичной сферы с „плоскостью“, ортогональной к вектору $\bar{I}_1$, можно решить ту же задачу, решение которой для всей единичной сферы дается вектором $\bar{I}_1$.

Далее, существует такой единичный вектор $\bar{I}_3$, ортогональный к векторам $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$, с компонентами $l_{31}, \dots, l_{3n}$, что $K(x, x)$ в конечной точке этого вектора принимает наибольшее значение x_3 , которое возможно при дополнительных условиях (25), (26) и

$$\sum_{p=1}^n l_{2p} x_p = 0. \quad (27)$$

Продолжая поступать таким образом, мы придем к системе n взаимно ортогональных векторов $\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_q, \dots, \bar{I}_n$, которые мы будем называть *векторами главных осей* или *собственными векторами*; компо-

4) Преобразование к главным осям можно очень легко провести также непосредственно алгебраически, если искать такую ортогональную матрицу L , чтобы $L'KL = D$ была диагональной матрицей с диагональными элементами $x_1, \dots, x_p, \dots, x_n$. Из условия $KL = LD$ получаем для коэффициентов преобразования l_{qi} уравнения:

$$\sum_q k_{pq} l_{qi} = l_{pi} x_i$$

из которых прежде всего числа x_i определяются как корни уравнения (30), которое будет позже выведено; далее, на основании простых алгебраических соображений получается ортогональная система n^2 величин l_{qi} . Приведенный в тексте метод доказательства имеет по сравнению с алгебраическим то важное для дальнейшего преимущество, что он применим к обширному классу трансцендентных проблем.

ненты l_{qp} этих векторов, в силу того, что они удовлетворяют соотношениям (21), определяют ортогональное преобразование:

$$x_p = \sum_{q=1}^n l_{qp} y_q \quad (p=1, \dots, n), \quad (28)$$

которое, как мы утверждаем, дает решение нашей задачи.

Решая систему уравнений (28), получаем:

$$y_p = \sum_{q=1}^n l_{pq} x_q \quad (p=1, \dots, n), \quad (29)$$

следовательно, равенство $x = I_p$ означает, что $y_p = 1$, а $y_q = 0$ при $q \neq p$. В частности, следовательно, максимум χ_1 достигается при значениях $y_1 = 1, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$, поэтому в преобразованной форме:

$$C(y, y) = \sum_{p, q=1}^n c_{pq} y_p y_q,$$

первый коэффициент c_{11} равен χ_1 . В таком случае форма

$$H(y, y) = \sum_{p, q=1}^n h_{pq} y_p y_q = C(y, y) - \chi_1 (y_1^2 + \dots + y_n^2),$$

не может иметь положительных значений. В самом деле, это утверждение несомненно справедливо при условии:

$$\sum_{p=1}^n x_p^2 = \sum_{p=1}^n y_p^2 = 1,$$

в силу того, что χ_1 является при этом наибольшим значением формы $C(y, y)$, следовательно, оно во всяком случае справедливо, если заметить y_i через $\frac{y_i}{\sqrt{\sum y_p^2}}$; но умножая на $\sum y_p^2$ получаем, что вообще

$H(y, y) \leq 0$. Если бы переменное y_1 входило еще в выражение $H(y, y)$, например, если бы коэффициент $h_{12} = h_{21}$ был отличен от нуля, то форма $H(y, y)$ при

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \epsilon, \quad y_3 = \dots = y_n = 0$$

принимала бы значение:

$$2h_{12}\epsilon + h_{22}\epsilon^2 = \epsilon(2h_{12} + h_{22}\epsilon),$$

которое при соответствующем выборе ϵ могло бы быть положительным.

Тем самым доказано, что $K(x, x)$ принимает после преобразования вид:

$$C(y, y) = \chi_1 y_1^2 + C_1(y, y),$$

где $C_1(y, y)$ означает квадратичную форму от $n-1$ переменных $y_2, \dots, y_n$. При добавочном условии $y_1=0$ преобразованная форма, следовательно, равна $C_1(y, y)$, и мы можем теперь совершенно таким же образом, как и раньше, заключить, что $C_1(y, y)$ имеет вид $\chi_2 y_2^2 + C_2(y, y)$, причем $C_2(y, y)$ зависит только от $n-2$ переменных $y_3, \dots, y_n$ и т. д.

Тем самым полностью доказана возможность преобразования к главным осям:

$$\sum_{p, q=1}^n k_{pq} x_p x_q = \sum_{p=1}^n \chi_p y_p^2; \quad \sum_{p=1}^n x_p^2 = \sum_{p=1}^n y_p^2.$$

Впрочем, для доказательства можно было бы с таким же успехом исходить из соответствующей задачи о минимуме, т. е. можно было бы искать наименьшее значение $K(x, x)$ при условии $E(x, x)=1$, и тогда получились бы числа $\chi_1, \dots, \chi_n$ в обратном порядке. Можно было бы также фиксировать значение $K(x, x)$ и разыскать наибольшие или наименьшие значения $E(x, x)$. При этом получились бы значения λ_i , обратные χ_i .

2. Характеристические числа и собственные значения. Теперь мы покажем, что числа χ_i , определенные в п. 1 как последовательные наибольшие значения, тождественны с характеристическими числами, введенными на стр. 18.

Составим уравнение:

$$\varphi(x) = (x - \chi_1)(x - \chi_2) \dots (x - \chi_n) = 0,$$

которое можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x - \chi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x - \chi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x - \chi_n \end{vmatrix} = 0.$$

Но этот определитель является определителем квадратичной формы;

$$\chi \sum_{p=1}^n y_p^2 - \sum_{p=1}^n \chi_p y_p^2,$$

получающейся путем ортогонального преобразования из квадратичной формы:

$$\chi \sum_{p=1}^n x_p^2 - K(x, x).$$

Поэтому имеет место тождественное относительно x соотношение:

$$\begin{vmatrix} x - \chi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x - \chi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x - \chi_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - k_{11} & -k_{12} & \dots & -k_{1n} \\ -k_{21} & x - k_{22} & \dots & -k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \dots & x - k_{nn} \end{vmatrix};$$

следовательно, числа $\chi_1, \dots, \chi_n$ являются корнями алгебраического уравнения:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \chi & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \chi & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} - \chi \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

относительно неизвестной χ , т. е. характеристическими числами.

Наше доказательство вместе с тем обнаруживает, что уравнение (30) всегда имеет только действительные корни, если k_{pq} — произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $k_{qp} = k_{pq}$ ¹⁾. Заметим, еще, что абсолютные величины собственных значений, т. е. чисел, обратных характеристическим числам, геометрически означают квадраты длин главных полуосей центральной поверхности второго порядка $K(x, x) = 1$. Если по крайней мере одно из характеристических чисел равно нулю, то форма называется „выродившейся“; она может быть представлена как форма от меньшего чем n числа переменных. Вследствие инвариантности определителя (см. стр. 13) это имеет место в том и только в том случае, когда $K = |k_{pq}| = \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n$ обращается в нуль. Для того чтобы $K(x, x)$ было определенной положительной формой, необходимо и достаточно, чтобы $\chi_p > 0$, $p = 1, \dots, n$.

Если форма $K(x, x)$ преобразована к главным осям:

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^n \chi_p y_p^2,$$

то для квадратичной формы, стоящей в правой части, можно непосредственно образовать итерированные формы, а принимая во внимание сказанное ранее относительно ортогонального преобразования, получаем:

$$K^2(x, x) = \sum_{p=1}^n \chi_p^2 y_p^2, \quad K^3(x, x) = \sum_{p=1}^n \chi_p^3 y_p^2, \dots$$

Отсюда мы видим, что h -я итерированная форма $K^h(x, x)$ имеет в качестве характеристических чисел h -е степени характеристических чисел формы $K(x, x)$, а собственные значения $K^h(x, x)$ являются h -ми степенями собственных значений $K(x, x)$, что, впрочем, непосредственно следует из теоремы на стр. 19. Далее ясно, что при четном h форма $K^h(x, x)$ является определенной положительной формой.

3. Обобщение на эрмитовы формы. Совершенно аналогичным образом можно провести преобразование к главным осям и

¹⁾ Уравнение (30) обыкновенно называют „уравнением вековых возмущений“ (Säkulargleichung), так как оно встречается в задаче вековых планетных возмущений. Для прямого доказательства теоремы о действительности корней см., например, соответствующее рассуждение в гл. III, § 4, п. 2.

эрмитовых форм. Эрмитову форму:

$$H(x, \bar{x}) = \sum_{p,q=1}^n h_{pq} x_p \bar{x}_q$$

с матрицей $H = \bar{H}'$ можно всегда преобразовать с помощью унитарного преобразования $\mathfrak{U}$:

$$x_p = \sum_{q=1}^n l_{qp} y_q \quad (p=1, \dots, n)$$

к виду:

$$H(x, \bar{x}) = \sum_{p=1}^n x_p y_p \bar{y}_p = \sum_{p=1}^n x_p |y_p|^2,$$

где все коэффициенты x_p — действительные числа. Характеристические числа x_m опять являются наибольшими значениями эрмитовой формы $H(x, \bar{x})$ при условии

$$\sum |x_p|^2 = 1$$

и

$$\sum_{p=1}^n l_{ip} \bar{x}_p = 0 \quad (i=1, \dots, m-1).$$

4. Закон инерции квадратичных форм. Если отказаться от требования ортогональности искомого линейного преобразования, то квадратичную форму можно различным образом привести к виду, при котором входят только квадраты переменных. Например, если выполнить данное ранее ортогональное преобразование и затем сделать любое преобразование подобия, т. е. преобразование, при котором каждая переменная умножается только на некоторый множитель пропорциональности, то получим опять выражение такого же вида. В частности, следовательно, можно достигнуть того, чтобы все (действительные) коэффициенты формы имели значения $+1$ или -1 . При этом имеет место следующая теорема, называемая законом инерции квадратичных форм.

Число положительных и отрицательных коэффициентов, которые получаются при действительном и обратимом преобразовании квадратичной формы в выражение, состоящее только из квадратов, не зависит от частного характера этого преобразования.

Доказательство. Положительные и отрицательные коэффициенты могут быть, как было указано, сделаны равными соответственно $+1$ и -1 . Если бы квадратичная форма $K(x, x)$ двумя различными действительными преобразованиями приводилась соответственно к виду

$$y_1^2 + \dots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \dots - y_n^2$$

и

$$z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_n^2,$$

где $r < s$, то в силу соотношения

$$y_1^2 + \dots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \dots - y_n^2 = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_n^2$$

или

$$y_1^2 + \dots + y_r^2 + z_{s+1}^2 + \dots + z_n^2 = y_{r+1}^2 + \dots + y_n^2 + z_1^2 + \dots + z_s^2$$

из системы уравнений $y_1 = \dots = y_r = z_{s+1} = \dots = z_n = 0$ вытекало бы обращение в нуль и остальных y_j . Так как система однородных уравнений содержит менее n уравнений, то непременно существует отличный от нуля вектор ξ , удовлетворяющий этой системе; но этот вектор не может удовлетворять системе n однородных уравнений $\eta = 0$ с определителем, не равным нулю.

5. Выражение для резольвенты формы. Резольвента квадратичной формы $K(x, x)$ на основании изложенного в этом параграфе также легко может быть приведена к удобному виду, если согласно § 2 определить ее с помощью символического равенства:

$$K(x, x; \lambda) = \frac{[E(x, x) - \lambda K(x, x)]^{-1} - E(x, x)}{\lambda}.$$

Представим себе, что форма $K(x, x)$ путем преобразования к главным осям приведена к виду:

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^n \frac{y_p^2}{\lambda_p},$$

тогда резольвента формы

$$\sum_{p=1}^n \frac{y_p^2}{\lambda_p}$$

должна совпасть с резольвентой формы $K(x, x)$, так как $[E(x, x) - \lambda K(x, x)]^{-1}$ переходит при преобразовании в

$$\left[E(y, y) - \lambda \sum_{p=1}^n \frac{y_p^2}{\lambda_p} \right]^{-1}.$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \left[\left(\sum_{p=1}^n y_p^2 - \lambda \sum_{p=1}^n \frac{y_p^2}{\lambda_p} \right)^{-1} - E(y, y) \right] = \\ & = \frac{1}{\lambda} \left[\left(\sum_{p=1}^n \frac{\lambda_p - \lambda}{\lambda_p} y_p^2 \right)^{-1} - E(y, y) \right] = \\ & = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{p=1}^n \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} y_p^2 - E(y, y) \right] = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{p=1}^n \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} y_p^2 - \sum_{p=1}^n y_p^2 \right] = \sum_{p=1}^n \frac{y_p^2}{\lambda_p - \lambda}. \end{aligned}$$

Если преобразовать здесь снова к переменным x_p , то получим, пользуясь обозначениями (19), резольвенту $K(x, x; \lambda)$ формы $K(x, x)$ в виде:

$$K(x, x; \lambda) = \sum_{p=1}^n \frac{[L'_p(x)]^2}{\lambda_p - \lambda}, \quad (31)$$

или, возвращаясь к билинейной форме:

$$K(u, x; \lambda) = \sum_{p=1}^n \frac{L'_p(u) L'_p(x)}{\lambda_p - \lambda}. \quad (32)$$

Между прочим, это выражение обнаруживает, что вычет рациональной относительно λ функции $K(u, x; \lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_p$ равен

$$-L'_p(u) L'_p(x),$$

если предполагать, что $\lambda_p \neq \lambda_q$ при $p \neq q$.

6. Решение системы линейных уравнений, соответствующей данной форме. В заключение выразим решение системы линейных уравнений:

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^n k_{pq} x_q = y_p \quad (p = 1, \dots, n), \quad (33)$$

соответствующей квадратичной форме:

$$K(x, x) = \sum_{p, q=1}^n k_{pq} x_p x_q,$$

с помощью собственных векторов.

Применим к переменным x_i и y_i преобразование к главным осям:

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{q=1}^n l_{qp} u_q, \\ y_p &= \sum_{q=1}^n l_{qp} v_q, \end{aligned}$$

причем форма $K(x, x)$ примет вид:

$$\sum_{q=1}^n x_q u_q^2;$$

тогда наша система уравнений (33) переходит в систему:

$$u_p - \lambda x_p u_p = v_p \quad (p = 1, \dots, n), \quad (34)$$

решением которой является:

$$u_p = \frac{v_p}{1 - \lambda x_p} = \frac{v_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} v_p. \quad (35)$$

В первоначальных переменных решение выражается эквивалентной формулой:

$$x = \sum_{p=1}^n \frac{(y, \gamma_p)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} \gamma_p, \quad (36)$$

в которой оно развернуто по собственным векторам $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ формы $K(x, x)$. При этом полагаем

$$(\mathbf{y} \mathbf{Y}_p) = \sum_{q=1}^n l_{pq} y_q.$$

Собственный вектор $\mathbf{Y}_p$ является нормированным решением системы однородных уравнений:

$$x_q - \lambda_p \sum_{r=1}^n k_{qr} x_r = 0$$

или

$$u_q - \lambda_p x_q u_q = 0 \quad (q = 1, \dots, n).$$

Если при $q \neq p$ все x_q не равны $x_p = \frac{1}{\lambda_p}$, то имеется только одно нормированное решение:

$$u_p = 1, \quad u_q = 0 \quad (q \neq p)$$

или

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}_p.$$

Если среди характеристических чисел имеются равные между собой, то собственные векторы определяются неоднозначно.

§ 4. Минимально-максимальное свойство собственных значений.

1. Определение характеристических чисел с помощью задачи о наименьшем значении максимума. Выше мы ввели характеристические числа с помощью ряда задач на нахождение максимума, причем в каждой предполагалось решение предыдущей. Теперь же, предполагая, что характеристические числа расположены в порядке убывания, покажем, как можно непосредственно охарактеризовать h -е характеристическое число как решение несколько иной задачи, в которой не приходится ссылаться на решение предыдущих задач.

Требуется найти наибольшее значение формы:

$$K(x, x) = \sum_{p, q=1}^n k_{pq} x_p x_q,$$

если кроме условия

$$\sum_{p=1}^n x_p^2 = 1 \tag{25}$$

должны выполняться еще $h-1$ уравнений:

$$\sum_{p=1}^n a_{vp} x_p = 0 \quad (v = 1, \dots, h-1; h \leq n). \tag{37}$$

Далее, требуется, чтобы этот максимум, представляющий функцию параметров $\alpha_{\nu p}$, путем соответствующего выбора этих параметров принял наименьшее возможное значение.

Преобразование к главным осям приводит форму $K(x, x)$ к виду:

$$\sum_{p=1}^n x_p y_p^2 \quad (x_1 \geq \dots \geq x_n),$$

условие (25) — к виду:

$$\sum_{p=1}^n y_p^2 = 1, \quad (38)$$

а уравнения (37) — к виду:

$$\sum_{p=1}^n \beta_{\nu p} y_p = 0, \quad (39)$$

где $\beta_{\nu p}$ — новые параметры. Выбрав

$$y_{h+1} = \dots = y_n = 0,$$

получаем, каковы бы ни были $\beta_{\nu p}$, $h-1$ однородных уравнений (39) для h неизвестных $y_1, \dots, y_h$; всегда можно подобрать систему значений, удовлетворяющую этим уравнениям и уравнению (38). Для этих значений имеем:

$$K(x, x) = x_1 y_1^2 + \dots + x_h y_h^2 \geq x_h (y_1^2 + \dots + y_h^2) = x_h.$$

Следовательно, искомый максимум при любой системе $\beta_{\nu p}$ не может быть меньше x_h . Но этот максимум как раз становится равным x_h , если за систему (37) взять уравнения:

$$y_1 = \dots = y_{h-1} = 0.$$

Таким образом получаем:

h -е характеристическое число x_h квадратичной формы $K(x, x)$ есть наименьшее значение, которое может иметь максимум $K(x, x)$, когда кроме условия

$$\sum_{p=1}^n x_p^2 = 1$$

заданы еще $h-1$ произвольных линейных однородных уравнений между числами x_p .

2. Применения. На основании этого свойства характеристических чисел особенно легко выяснить, как они изменяются, когда на переменные налагаются j независимых „связей“:

$$\sum_{p=1}^n \gamma_{sp} x_p = 0 \quad (s = 1, \dots, j), \quad (40)$$

так что $K(x, x)$ сводится к квадратичной форме $\tilde{K}(x, x)$ от $n-j$

независимых переменных. h -е характеристическое число χ_h представляет решение той же задачи о минимуме максимума, что и χ_h , но условием (40) совокупность допустимых систем значений $x_1, \dots, x_n$ суживается.

Поэтому отдельные максимумы, а вместе с тем характеристическое число для $\tilde{K}(x, x)$ не может превосходить соответствующего числа для формы $K(x, x)$.

Далее, χ_{j+h} является наименьшим максимумом, который может принять форма $K(x, x)$, когда, кроме условия (25), заданы еще $h+j-1$ линейных однородных уравнений для x_p , и потому χ_{j+h} не может быть больше, чем $\tilde{\chi}_h$, для которого j из этих уравнений даны системой (40).

Следовательно, $\tilde{\chi}_h \geq \chi_h \geq \chi_{j+h}$, или словами: если квадратичная форма $K(x, x)$ от n переменных при j независимых линейных однородных связях переходит в квадратичную форму $\tilde{K}(x, x)$ от $n-j$ переменных, то характеристические числа $\chi_1, \dots, \chi_{n-j}$ не больше соответствующих чисел ряда $\chi_1, \dots, \chi_{n-j}$ и не меньше соответствующих чисел ряда $\chi_{j+1}, \dots, \chi_n^1$.

Если в частности взять $j=1$ и выбрать в качестве линейной связи условие $x_n=0$, то форма $K(x, x)$ переходит в $(n-1)$ -ю усеченную форму, и мы получаем теорему:

h -е характеристическое число $(n-1)$ -й усеченной формы не больше h -го характеристического числа и не меньше $(h+1)$ -го характеристического числа первоначальной формы.

Применяя нашу теорему к $(n-1)$ -й усеченной форме, мы получаем соответствующую теорему для характеристических чисел $(n-2)$ -й усеченной формы и т. д. Вообще мы видим, что характеристические числа двух последовательных усеченных форм данной квадратичной формы распределяются по величине указанным образом.

Подобным же образом имеем: если к форме $K(x, x)$ прибавить форму, не принимающую никогда отрицательных значений, то характеристические числа суммы не меньше соответствующих чисел формы $K(x, x)$.

Вместо того чтобы для определения характеристических чисел пользоваться задачей о наименьшем значении максимума, можно было бы с таким же успехом взять за исходный пункт задачу о наибольшем значении минимума. Тогда опять получаются числа χ_h , только в обратном порядке.

Предоставляем читателю формулировать и доказать свойство наименьшего значения максимума для характеристических чисел эрмитовых форм.

¹) Для пояснения изложенных рассуждений сделаем следующее замечание. Если пересечь трехосный эллипсоид плоскостью, проходящей через его центр, то большая ось эллипса, полученного в сечении, заключается между большой и средней осями эллипсоида, а малая ось эллипса заключается между средней и малой осями эллипсоида.

§ 5. Дополнения и задачи к первой главе.

1. Линейная независимость и определитель Грама. Вопрос о линейной зависимости m данных векторов $v_1, \dots, v_m$ можно формально очень просто решить, не прибегая, как это обычно делают, к установлению ранга матрицы компонент, следующим образом. Рассмотрим квадратичную форму:

$$G(x, x) = (x_1 v_1 + \dots + x_m v_m)^2 = \sum_{i, k=1}^m (v_i v_k) x_i x_k.$$

Несомненно, $G(x, x) \geq 0$, а векторы v_i линейно зависимы в том и только в том случае, когда существует система значений переменных $x_1, \dots, x_m$, удовлетворяющая условию:

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 = 1 \quad (25')$$

и при которой $G(x, x) = 0$. Следовательно, для того чтобы имела место линейная зависимость, минимум формы $G(x, x)$ при условии (25') непременно должен равняться нулю. Но этот минимум представляет наименьшее характеристическое число квадратичной формы $K(x, x)$, т. е. наименьший корень уравнения:

$$\begin{vmatrix} v_1^2 - \lambda & (v_1 v_2) & \dots & (v_1 v_m) \\ (v_2 v_1) & v_2^2 - \lambda & \dots & (v_2 v_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v_m v_1) & (v_m v_2) & \dots & v_m^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (41)$$

Итак: необходимым и достаточным условием линейной зависимости векторов $v_1, \dots, v_m$ является обращение в нуль „определителя Грама“

$$\Gamma = \begin{vmatrix} v_1^2 & (v_1 v_2) & \dots & (v_1 v_m) \\ (v_2 v_1) & v_2^2 & \dots & (v_2 v_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v_m v_1) & (v_m v_2) & \dots & v_m^2 \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Если расположить левую часть уравнения (41), которому удовлетворяют все (неотрицательные) характеристические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ формы $K(x, x)$, по степеням λ , то свободный от λ член равен Γ , а коэффициент при λ^m равен $(-1)^m$. По известной теореме алгебры имеет место, следовательно, соотношение:

$$\Gamma = \lambda_1 \dots \lambda_m. \quad (43)$$

Итак, определитель Грама любой системы m векторов не может иметь отрицательного значения. Соотношение

$$\Gamma = |(v_i v_k)| \geq 0, \quad (44)$$

в котором знак равенства может иметь место лишь для линейно зависимых векторов $v_1, \dots, v_m$, представляет обобщение неравенства Шварца (стр. 2):

$$v_1^2 v_2^2 - (v_1 v_2)^2 = \begin{vmatrix} v_1^2 & (v_1 v_2) \\ (v_2 v_1) & v_2^2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Значение определителя Грама или также наименьшее характеристическое число χ_m формы $G(x, x)$ представляет меру линейной независимости векторов $v_1, \dots, v_m$. Чем меньше это число, тем более „плоской“ является m -мерная фигура, составленная этими векторами; если эта мера независимости равна нулю, то число измерений фигуры не более $m-1$. Впрочем, определителю Грама можно легко приписать геометрическое значение. Этот определитель равен квадрату $m!$ -кратного объема m -мерной геометрической фигуры, образуемой векторами $v_1, \dots, v_m$, следовательно, например, при $m=2$ равен квадрату удвоенной площади треугольника, построенного на векторах v_1 и v_2 .

Разумеется, критерий Грама для линейной зависимости должен быть эквивалентен обычному критерию, гласящему, что векторы линейно зависимы в том и только в том случае, когда все определители m -го порядка, которые можно выделить из прямоугольной таблицы компонент

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix},$$

равны нулю. В самом деле, по известной теореме теории определителей:

$$\Gamma = \sum \begin{vmatrix} v_{1s_1} & v_{1s_2} & \dots & v_{1s_m} \\ v_{2s_1} & v_{2s_2} & \dots & v_{2s_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{ms_1} & v_{ms_2} & \dots & v_{ms_m} \end{vmatrix}^2, \quad (45)$$

где суммирование распространяется на все целые значения $s_1, s_2, \dots, s_m$ от 1 до n , причем $s_1 < s_2 < \dots < s_m$.

2. Теорема Адамара (Hadamard) об оценке определителя. Для любого определителя:

$$A = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

с действительными элементами a_{ik} справедлива оценка

$$A^2 \leq \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2. \quad (46)$$

Доказательство. Будем изменять элементы a_{ik} , однако, так, чтобы суммы квадратов

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = c_i^2 \quad (i=1, \dots, n)$$

оставались неизменными. Если $A_{\max}^2$ представляет наибольшее значение, которое может иметь функция A^2 элементов a_{ik} при этих n условиях (из теоремы Вейерштрасса, приведенной на стр. 21, непосредственно следует, что такое наибольшее значение непременно должно быть получено для некоторого определителя $A_{\max}$), то элементы $A_{\max}$ в каждой строке должны быть пропорциональны соответствующим минорам. В самом деле, при любом выборе h имеем:

$$A = a_{h1}A_{h1} + \dots + a_{hn}A_{hn},$$

следовательно, на основании неравенства Шварца (стр. 2) находим:

$$A^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{hk}^2 \sum_{k=1}^n A_{hk}^2;$$

если при этом числа a_{hk} не пропорциональны числам A_{hk} , то значение A^2 , безусловно, не будет наибольшим, так как в этом случае имеет место знак неравенства, между тем путем изменения n величин a_{hk} ($k=1, \dots, n$) мы можем, не меняя чисел A_{hk} и числа c_h , сделать квадрат определителя равным правой части.

Умножая определитель $A_{\max}$ на себя самого по правилу умножения определителей, мы получаем:

$$A_{\max}^2 = \prod_{i=1}^n c_i^2,$$

так как скалярные произведения двух различных строк равны нулю в силу только что доказанной пропорциональности, как это следует из элементарных теорем теории определителей. Поэтому для первоначального определителя A справедливо соотношение:

$$A^2 \leq \prod_{i=1}^n c_i^2 = \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2.$$

Геометрически теорема Адамара означает, что объем параллелепипеда, построенного в n -мерном пространстве на n векторах данной длины, будет наибольшим, когда векторы взаимно перпендикулярны.

Оценка Адамара справедлива и при комплексных значениях a_{ik} , если вместо A и a_{ik} подставить их абсолютные значения.

3. Одновременное преобразование двух квадратичных форм к каноническому виду. Преобразование к главным осям является частным случаем более общей задачи (которая сводится к предыдущей, но может быть столь же просто изучена и непосред-

ственно) об одновременном преобразовании двух заданных квадратичных форм:

$$K(x, x) = \sum_{p, q=1}^n k_{pq} x_p x_q;$$

$$H(x, x) = \sum_{p, q=1}^n h_{pq} x_p x_q$$

одна из которых, скажем $H(x, x)$, определенная положительная, с помощью линейного преобразования

$$x_p = \sum_{q=1}^n l_{pq} y_q$$

■ выражения, содержащие только квадраты переменных:

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^n x_p y_p^2,$$

$$H(x, x) = \sum_{p=1}^n \eta_p y_p^2.$$

При этом коэффициенты η_p положительной формы H могут быть сделаны равными ± 1 . Отношения $\frac{x_p}{\eta_p} = \rho_p$ мы назовем характеристическими числами, числа $\frac{1}{\rho_p} = \lambda_p$ — собственными значениями формы $K(x, x)$ по отношению к $H(x, x)$.

Требуется непосредственно провести теорию преобразования и доказать следующее свойство характеристических чисел.

При $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_n$ число ρ_h является наименьшим значением, которое может иметь максимум функции $\frac{K(x, x)}{H(x, x)}$ при добавочных условиях:

$$\sum_{p=1}^n a_{vp} x_p = 0 \quad (v = 1, \dots, h-1),$$

если рассматривать этот максимум как функцию параметров a_{vp} .

Для нахождения искомого преобразования можно искать сперва максимум $\frac{K(x, x)}{H(x, x)}$ при условии $H(x, x) = 1$; пусть этот максимум достигается при $x_p = l_{1p}$ ($p = 1, \dots, n$). Затем присоединяем дальнейшее добавочное условие:

$$\sum_{p, q=1}^n h_{pq} l_{1p} x_q = 0$$

и т. д. Характеристические числа ρ_p являются корнями уравнения:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \rho h_{11} & k_{12} - \rho h_{12} & \dots & k_{1n} - \rho h_{1n} \\ k_{21} - \rho h_{21} & k_{22} - \rho h_{22} & \dots & k_{2n} - \rho h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} - \rho h_{n1} & k_{n2} - \rho h_{n2} & \dots & k_{nn} - \rho h_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение можно получить также как условие разрешимости однородной системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \rho h_{ij}) x_j = 0.$$

Системы значений x_j , соответствующие отдельным характеристическим числам, дают после соответствующего нормирования компоненты „собственных векторов“, т. е. коэффициенты искомого преобразования.

4. Билинейные и квадратичные формы от бесконечно большого числа переменных. Наши теории остаются справедливыми и в том случае, когда число переменных неограниченно возрастает, если только при этом сделать некоторые предположения, во-первых, относительно коэффициентов билинейных или квадратичных форм, например, допустить, что сумма их квадратов сходится, а во-вторых, предполагать также сходимость суммы квадратов входящих переменных. Эта теория форм от бесконечно большого числа переменных, разработанная Гильбертом, может быть непосредственно применена к многочисленным проблемам анализа. Однако в этих проблемах мы можем быстрее прийти к цели, если пойдем более прямым путем, соответствующим алгебраическому векторному и тензорному исчислению.

5. Бесконечно малые линейные преобразования. Бесконечно малым линейным преобразованием называют преобразование с матрицей:

$$A = E + (\varepsilon a_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \dots & \varepsilon a_{1n} \\ \varepsilon a_{21} & 1 + \varepsilon a_{22} & \dots & \varepsilon a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon a_{n1} & \varepsilon a_{n2} & \dots & 1 + \varepsilon a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем ε есть бесконечно малая величина первого порядка, т. е. такая величина, высшими степенями которой можно в рассматриваемом случае пренебречь по сравнению с низшими. Произведение двух бесконечно малых преобразований с матрицами $A = E + (\varepsilon a_{ik})$ и $B = E + (\varepsilon b_{ik})$ имеет матрицу $C = AB = E + (\varepsilon a_{ik} + \varepsilon b_{ik})$. Отсюда следует:

Бесконечно малые преобразования обладают свойством переместительности.

Далее:

Матрицей, обратной матрице $A = E + (\varepsilon a_{ik})$, является $A^{-1} = E - (\varepsilon a_{ik})$; определитель матрицы $A = E + (\varepsilon a_{ik})$ равен $1 + \varepsilon(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$.

Если бесконечно малое преобразование ортогонально, то из условия $AA' = E$, где A' — транспонированная матрица, следует соотношение

$a_{ik} + a_{ki} = 0$, т. е. необходимым и достаточным условием ортогональности бесконечно малого преобразования является требование, чтобы матрица его, если отнять от нее матрицу E , была косо симметрической.

Бесконечно малое преобразование общего вида $C = E + (\epsilon \gamma_{ik})$ можно с помощью величин:

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2} (\gamma_{ik} - \gamma_{ki}),$$

$$\beta_{ik} = \frac{1}{2} (\gamma_{ik} + \gamma_{ki})$$

представить в виде произведения ортогонального преобразования с матрицей $A = E + (\epsilon \alpha_{ik})$ и симметрического преобразования с матрицей $B = E + (\epsilon \beta_{ik})$.

Симметрическое, хотя бы и не бесконечно малое преобразование $x_i = \sum_k s_{ik} x_k$ с матрицей $S = (s_{ik})$ геометрически означает растяжение в n взаимно перпендикулярных направлениях. В самом деле, введем новые переменные u_i и v_i при помощи преобразования к главным осям квадратичной формы $S(x, x)$, так что

$$\sum_{i,k=1}^n s_{ik} x_i x_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2,$$

тогда уравнения примут вид:

$$v_i = \lambda_i u_i,$$

что аналитически выражает „неравномерное“ растяжение, отнесенное к главным осям. Отношение приращения объема к первоначальному объему, „объемное расширение“, выражается, очевидно, разностью $\lambda_1 \dots \lambda_n - 1$, вместо которой мы можем также писать $|s_{ik}| - 1$. Если в частности преобразование бесконечно малое, т. е. $(s_{ik}) = E + (\epsilon \beta_{ik})$, то

$$\lambda_1 \dots \lambda_n - 1 = \epsilon (\beta_{11} + \dots + \beta_{nn}).$$

Так как ортогональное преобразование означает вращение, то можно резюмируя сказать:

Бесконечно малое преобразование с матрицей $E + (\epsilon \gamma_{ik})$ можно представить в виде произведения вращения и растяжения; объемное расширение равно $\epsilon \sum_{i=1}^n \gamma_{ii}$.

6. Вариированные системы. Для теории малых колебаний имеет важное значение вопрос: как изменяются собственные значения и собственные векторы квадратичной формы

$$K(x, x) = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} x_i x_k,$$

если варьировать и единичную форму $E(x, x)$ и форму $K(x, x)$, т. е.

если одновременно преобразовать к каноническому виду формы $E(x, x) + \epsilon A(x, x)$ и $E(x, x) + \epsilon B(x, x)$ (см. п. 3), где

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad B(x, x) = \sum_{i,k=1}^n \beta_{ik} x_i x_k,$$

а ϵ — параметр.

Полагаем

$$K(x, x) + \epsilon B(x, x) = \sum_{i,k=1}^n b'_{ik} x_i x_k, \quad E(x, x) + \epsilon A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a'_{ik} x_i x_k,$$

тогда уравнения, служащие для определения компонент собственных векторов (см. стр. 35), имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n (b'_{ik} - \rho' a'_{ik}) x'_k = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

причем ρ' определяется из уравнения, получающегося приравниванием нулю соответствующего определителя и имеющего n действительных корней.

Обозначим характеристические числа $K(x, x)$ через $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, причем предполагаем, что все они между собой различны; соответствующие значения для варьированной системы обозначим через $\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n$. Мы можем тогда принять, что исходная форма $K(x, x)$ задана в виде суммы квадратов:

$$K(x, x) = \rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2 + \dots + \rho_n x_n^2.$$

Величины ρ'_i , являясь простыми корнями алгебраического уравнения, представляют в окрестности точки $\epsilon = 0$ однозначные аналитические функции от ϵ ; это же справедливо и для компонент x'_{hk} варьированных собственных векторов, соответствующих характеристическим числам ρ'_h . Следовательно, величины ρ'_i и x'_{hk} можно искать в виде степенных рядов, расположенных по степеням ϵ , свободные члены которых, конечно, соответственно равны ρ_i и x_{hk} . Для того чтобы последовательно определить коэффициенты при $\epsilon, \epsilon^2, \dots$, подставляем эти ряды в уравнения

$$\sum_{k=1}^n (b'_{ik} - \rho'_h a'_{ik}) x'_{hk} = 0 \quad (i, h = 1, 2, \dots, n),$$

в которых, кроме того, надо положить $b'_{ik} = \delta_{ik} + \epsilon \beta_{ik}$, $a'_{ik} = e_{ik} + \epsilon a_{ik}$, где $\delta_{ii} = \rho_i$, $\delta_{ik} = 0$ ($i \neq k$), $e_{ii} = 1$, $e_{ik} = 0$ ($i \neq k$). Располагая по степеням ϵ и приравнявая нулю коэффициенты при этих степенях, получаем бесконечную последовательность уравнений. Вполне эквивалентным, но несколько более удобным является следующее рассуждение, в котором ϵ рассматривают как величину бесконечно малую. Именно, рассмотрим из предыдущих уравнений для компонент h -го собственного вектора

h -е уравнение ($i=h$), в нем все слагаемые с точностью до бесконечно-малых второго порядка относительно ε равны нулю:

$$\rho'_h = \frac{\rho_h + \varepsilon \beta_{hh}}{1 + \varepsilon \alpha_{hh}} = \rho_h - \varepsilon \rho_h \alpha_{hh} + \varepsilon \beta_{hh}.$$

Рассмотрение уравнений при $i \neq h$, в которых все члены, кроме двух, представляют бесконечно-малые второго порядка, дает с точностью до бесконечно-малых второго порядка:

$$x'_{hh} = 1; \quad x'_{hi} = -\varepsilon \frac{\alpha_{ih} \rho_h - \beta_{ih}}{\rho_h - \rho_i},$$

так как сумма $\sum x'^2_{hk} = 1$.

Пользуясь этими значениями компонент собственных векторов, мы можем очень легко вычислить собственные значения с точностью до бесконечно-малых третьего порядка. Рассмотрим опять уравнение для компонент h -го собственного вектора, получающееся при $i=h$:

$$\sum_{k=1}^n (b'_{hk} - \rho'_h a'_{hk}) x'_{hk} = 0.$$

Отбрасывая в левой части величины третьего порядка относительно ε и уединяя член, для которого $k=h$, получаем:

$$b'_{hh} - \rho'_h a'_{hh} = \sum_k' \varepsilon (b'_{hk} - \rho'_h a'_{hk}) \frac{\alpha_{kh} \rho_h - \beta_{kh}}{\rho_h - \rho_k} = -\varepsilon^2 \sum_k' \frac{(\alpha_{kh} \rho_h - \beta_{kh})^2}{\rho_h - \rho_k};$$

отсюда следует, что

$$\rho'_h = \rho_h - \varepsilon \rho_h \alpha_{hh} + \varepsilon \beta_{hh} - \varepsilon^2 \alpha_{hh} (\beta_{hh} - \rho_h \alpha_{hh}) + \varepsilon^2 \sum_k' \frac{(\alpha_{kh} \rho_h - \beta_{kh})^2}{\rho_h - \rho_k}.$$

При этом штрих, поставленный у знака суммы, означает, что суммирование распространяется на все значения k от 1 до n , кроме значения $k=h$.

7. Наложение связи.

$$\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n = 0$$

и связанное с этим уменьшение числа переменных квадратичной формы

$$K(x, x) = \sum_{p,q=1}^n k_{pq} x_p x_q$$

можно представить себе осуществленным при помощи непрерывного процесса, а именно рассматриваем квадратичную форму

$$K(x, x) + t(\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n)^2,$$

где t — положительный параметр. Если t неограниченно возрастает, то и каждое из характеристических чисел монотонно возрастает. В частности наибольшее из характеристических чисел возрастает неограниченно, между тем как остальные переходят в характеристические числа квад-

ратичной формы, получающейся из $K(x, x)$ исключением одной переменной при помощи соотношения $\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n = 0$.

8. Элементарные делители матрицы или билинейной формы. Пусть $\mathfrak{A}$ тензор, $A = (a_{ik})$ — соответствующая матрица. Тогда полином

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

разлагается по известным правилам, которые мы здесь приводить не станем, на „элементарные делители“:

$$(\lambda - r_1)^{e_1}, (\lambda - r_2)^{e_2}, \dots, (\lambda - r_h)^{e_h},$$

причем среди чисел $r_1, r_2, \dots, r_h$ могут быть и равные между собой. Каждому элементарному делителю $(\lambda - r_v)^{e_v}$ соответствуют e_v векторов $f_1^{(v)}, f_2^{(v)}, \dots, f_{e_v}^{(v)}$, для которых имеют место равенства:

$$\mathfrak{A} f_1^{(v)} = r_v f_1^{(v)}; \quad \mathfrak{A} f_2^{(v)} = r_v f_2^{(v)} + f_1^{(v)}, \dots, \mathfrak{A} f_{e_v}^{(v)} = r_v f_{e_v}^{(v)} + f_{e_v-1}^{(v)}.$$

При этом n векторов

$$f_1^{(1)}, \dots, f_{e_1}^{(1)}; f_1^{(2)}, \dots, f_{e_2}^{(2)}; \dots; f_1^{(h)}, \dots, f_{e_h}^{(h)}$$

линейно независимы. Если ввести новые переменные $x_1^{(1)}, \dots, x_{e_h}^{(h)}$, приняв эти векторы за единичные векторы новой системы, то матрица A превратится в матрицу:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_h \end{pmatrix},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_h$ в свою очередь являются матрицами, среди которых могут оказаться матрицы, состоящие только из одного элемента, а именно A_v представляет матрицу порядка e_v :

$$A_v = \begin{pmatrix} r_v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & r_v & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_v & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r_v \end{pmatrix}.$$

9. Спектр унитарной матрицы. Докажем, что спектр унитарной матрицы лежит на окружности радиуса 1.

Для доказательства заметим, что все элементы унитарной матрицы по абсолютному значению не больше единицы, а потому абсолютные значения коэффициентов характеристических уравнений всех унитарных матриц n -го порядка меньше некоторой грани, не зависящей от частного вида матрицы. Так как первый и последний коэффициенты характеристического уравнения по абсолютному значению равны единице, то

тем самым доказано существование независимых от частного вида матрицы верхней и положительной нижней грани для абсолютных значений характеристических чисел. С другой стороны, все степени A^m унитарной матрицы являются унитарными, а их характеристическими числами являются m -е степени характеристических чисел матрицы A . Эти степени и обратные им величины могут только в том случае оставаться по абсолютному значению меньше некоторой грани, не зависящей от m , если абсолютное значение λ_i равно единице.

Другой метод доказательства, который может быть распространен и на бесконечные матрицы, получается путем изучения сходимости ряда Неймана для $(E - \lambda A)^{-1}$.

В самом деле, ряд

$$(E - \lambda A)^{-1} = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \lambda^3 A^3 + \dots,$$

где A — унитарная матрица, непременно сходится, пока $|\lambda| < 1$, так как элементы матрицы A^m все по абсолютному значению не превосходят единицы, и потому для элементов, стоящих в правой части, геометрический ряд является мажорантой. Таким образом нули $|E - \lambda A|$ не могут лежать внутри круга радиуса 1. С другой стороны, ввиду того, что $A\bar{A}' = E$, имеем:

$$(E - \lambda A)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \bar{A}' \left(E + \frac{1}{\lambda} \bar{A}' + \frac{1}{\lambda^2} \bar{A}'^2 + \dots \right),$$

геометрический ряд в правой части сходится, если $\left| \frac{1}{\lambda} \right| < 1$, так как и $\bar{A}'$ есть унитарная матрица. Вместе с тем нули $|E - \lambda A|$ не могут лежать и вне круга радиуса 1. Следовательно, эти нули должны лежать на окружности радиуса 1, как мы и утверждали.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ I.

Учебники.

Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909.

Böcher M., Einführung in die höhere Algebra, Leipzig und Berlin 1910.

(Русский перевод. *Бохер*, Введение в высшую алгебру, ГТТИ, 1933 г.)

Монографии и статьи.

Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (в особенности первый и четвертый отдел), Leipzig und Berlin 1912.

Fischer E., Ueber quadratische Formen mit reellen Koeffizienten, Monatsh. f. Math. u. Phys., т. 16, стр. 234—249, 1905. Там, пожалуй, впервые указано максимально-минимальное свойство собственных значений.

Courant R., Zur Theorie der kleinen Schwingungen, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., т. 2, стр. 278—285, 1922.

Wintner A., Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Leipzig 1929.

ГЛАВА II.

ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Многие из соотношений, рассмотренных в предыдущей главе, находят далеко идущую аналогию, если вместо векторов в n -мерном пространстве рассматривать функции от одной или многих переменных, определенные в данной *основной области* G . Так, например, тому факту, что в пространстве n измерений всякий вектор может быть линейно представлен с помощью n произвольно выбранных независимых векторов, соответствует задача о выражении более или менее произвольно взятой функции, определенной в основной области G , в виде линейной комбинации заданных функций. (Множество заданных функций должно быть бесконечным, в чем мы непосредственно убедимся в дальнейшем.) Мы говорим тогда о задаче *разложения произвольно взятой функции по заданной системе функций*.

В настоящей главе мы рассмотрим с общей точки зрения этот вопрос, встречающийся в самых разнообразных формах в задачах математической физики.

При этом мы ограничиваемся *кусочно-непрерывными функциями*, т. е. такими функциями, для которых основная область G может быть разбита на конечное число частичных областей так, чтобы функция внутри каждой из них была непрерывна и стремилась при произвольном приближении изнутри к границе частичной области к определенному конечному пределу. Для более удобной записи мы сначала будем предполагать, что мы имеем дело с функциями только от одного переменного x , основной областью G которых является конечный отрезок оси x .

Если речь будет идти о функциях от многих переменных, например от двух переменных x и y , то мы будем предполагать, что основная область G ограничена конечным числом дуг кривых, с непрерывно вращающейся касательной. Когда мы будем считать точки границы принадлежащими основной области, то мы будем говорить о „замкнутой области“, если только это не вытекает из самого текста.

Далее, мы часто будем предполагать относительно рассматриваемых функций, что они *кусочно-гладкие* т. е. что они кусочно-непрерывны и имеют кусочно-непрерывные первые производные. Мы предполагаем, что наши функции имеют действительные значения в том случае, когда не оговорено противоположное.

§ 1. Ортогональные системы функций.

1. Определения. Под *скалярным* или *внутренним произведением* (f, g) или (fg) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ мы разумеем взятый по основной области интеграл¹⁾.

$$(f, g) = \int fg dx. \quad (1)$$

Это произведение удовлетворяет неравенству Шварца:

$$(f, g)^2 \leq (f, f)(g, g), \quad (2)$$

которое так же, как и в случае векторов, либо вытекает из определенного положительного характера квадратичной относительно λ функции

$$\int (\lambda f + g)^2 dx,$$

либо же следует непосредственно из тождества:

$$(f, g)^2 = (f, f)(g, g) - \frac{1}{2} \iint [f(x)g(\xi) - f(\xi)g(x)]^2 dx d\xi;$$

знак равенства имеет место в том и только в том случае, если f и g пропорциональны. Две функции, скалярное произведение которых равно нулю, будем называть *ортогональными*. Скалярное произведение функции $f(x)$ на самое себя будем называть *нормой* этой функции и писать так:

$$Nf = (f, f) = \int f^2 dx; \quad (3)$$

функцию, норм которой равен единице, назовем *нормированной* функцией. Систему нормированных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, в которой каждые две различные функции взаимно ортогональны, будем называть *ортогональной нормированной системой*, а характеризующие ее соотношения

$$(\varphi_\nu, \varphi_\mu) = e_{\nu\mu} \quad (e_{\nu\nu} = 1, \quad e_{\nu\mu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu)$$

назовем *соотношениями ортогональности*.

Пример ортогональной нормированной системы функций в интервале $0 \leq x \leq 2\pi$ или вообще в любом интервале длины 2π представляют функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Для функций действительного переменного, принимающих комплексные значения, удобно ввести обобщение понятия ортогональности.

¹⁾ Мы в дальнейшем опускаем границы интегрирования там, где это не может привести к недоразумениям.

Две таких функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными, если имеют место соотношения:

$$(f, g) = (\bar{f}, g) = 0,$$

причем $\bar{f}$ и $\bar{g}$ означают, как это обычно принято, сопряженные комплексные функции по отношению к f и g .

Функция $f(x)$ называется *нормированной*, если

$$Nf = \int |f|^2 dx = 1.$$

Простейший пример комплексной ортогональной системы представляют в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ показательные функции:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}}, \dots,$$

что непосредственно видно из „соотношений ортогональности“:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\mu-\nu)x} dx = e_{\mu\nu} \quad (e_{\nu\nu} = 1, \quad e_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu). \quad (4)$$

Функции $f_1, \dots, f_r$ называются *линейно зависимыми*, если они удовлетворяют тождественно относительно x однородному линейному соотношению

$$\sum_{i=1}^r c_i f_i = 0$$

с постоянными коэффициентами $c_i (i=1, \dots, r)$, которые не все равны нулю. В противном случае эти r функций называются *линейно независимыми*. Важно заметить, что функции ортогональной системы всегда линейно независимы. В самом деле, из соотношения

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n = 0$$

следовало бы, если его умножить на φ_i и интегрировать, что $c_i = 0$.

2. Ортогонализация функций. Из заданной бесконечной системы функций $v_1, v_2, \dots$, обладающей тем свойством, что при любом r каждые r произвольно выбранных функций линейно независимы, можно при помощи „процесса ортогонализации“ получить ортогональную нормированную систему функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, выбирая φ_n как соответствующую линейную комбинацию функций $v_1, \dots, v_n$. Сначала полагаем

$$\varphi_1 = \frac{v_1}{\sqrt{Nv_1}}.$$

Затем определяем любые два не обращающихся одновременно в нуль числа c_1 и c_2 так, чтобы функция $\varphi'_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ была ортогональной к φ_1 , т. е. чтобы имело место равенство:

$$c_1 + c_2 (\varphi_1, v_2) = 0.$$

Функция φ'_2 в силу линейной независимости v_1 и v_2 , а следовательно, и функций φ_1 и v_2 не может тождественно равняться нулю.

Таким образом

$$\varphi_2 = \frac{\varphi'_2}{\sqrt{N\varphi'_2}}$$

представляет нормированную функцию, ортогональную к φ_1 .

Далее, образуем функцию

$$\varphi'_3 = c_1^* \varphi_1 + c_2^* \varphi_2 + c_3^* v_3,$$

выбирая три не равных одновременно нулю числа c_1^* , c_2^* , c_3^* , удовлетворяющие двум линейным однородным уравнениям:

$$(\varphi'_3 \varphi_1) = c_1^* + c_3^* (\varphi_1 v_3) = 0, \quad (\varphi'_3 \varphi_2) = c_2^* + c_3^* (\varphi_2 v_3) = 0.$$

В силу линейной независимости v_1 , v_2 , v_3 , а вместе с тем и φ_1 , φ_2 , v_3 функция φ'_3 не может равняться нулю тождественно, и потому

$$\varphi_3 = \frac{\varphi'_3}{\sqrt{N\varphi'_3}}$$

представляет нормированную функцию, ортогональную к φ_1 и φ_2 .

Продолжая неограниченно этот процесс, мы получаем искомую ортогональную систему функций с помощью рекуррентной формулы:

$$\varphi_{n+1} = \frac{\varphi'_{n+1}}{\sqrt{N\varphi'_{n+1}}}, \quad \varphi'_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{h=1}^n \varphi_h (\varphi_h v_{n+1}).$$

Когда мы в дальнейшем будем говорить об ортогонализации, то мы всегда будем понимать только что указанный процесс, который одновременно с ортогонализацией дает и нормирование, если только не будет явно указано нечто другое.

3. Неравенство Бесселя. Условие полноты системы. Аппроксимирование в среднем. Если дана ортогональная нормированная система функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ и любая функция f , то числа

$$c_v = (f \varphi_v) \quad (v = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

называются *коэффициентами разложения* или *компонентами* функции f относительно заданной ортогональной системы¹⁾.

Из непосредственно очевидного соотношения

$$\int \left(f - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right)^2 dx \geq 0 \quad (6)$$

¹⁾ В связи с теорией рядов Фурье иногда употребляют также выражение „коэффициенты Фурье“.

путем возведения в квадрат и почленного интегрирования получаем:

$$0 \leq \int f^2 dx - 2 \sum_{v=1}^n c_v \int \varphi_v f dx + \sum_{v=1}^n c_v^2 = Nf - 2 \sum_{v=1}^n c_v^2 + \sum_{v=1}^n c_v^2,$$

откуда

$$\sum_{v=1}^n c_v^2 \leq Nf; \quad (7)$$

так как в правой части находится постоянное, не зависящее от n число, то

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v^2 \leq Nf. \quad (8)$$

Это основное неравенство, *неравенство Бесселя*, справедливо для любой ортогональной нормированной системы. Это неравенство доказывает сходимость ряда с неотрицательными членами, составленного из квадратов коэффициентов разложения, находящегося в левой части соотношения (8).

Для системы функций, принимающих комплексные значения, справедливо соответствующее соотношение:

$$\sum_{v=1}^{\infty} |c_v|^2 \leq Nf = (f, \bar{f}), \quad (8')$$

если под c_v разумеет коэффициент разложения $c_v = (f, \bar{\varphi}_v)$.

Оно вытекает аналогично случаю действительных функций из неравенства:

$$\int \left| f(x) - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right|^2 dx = Nf - \sum_{v=1}^n |c_v|^2 \geq 0.$$

Интегральное выражение, стоящее в левой части формулы (6) получается совершенно естественно, если поставить себе задачу *аппроксимировать в смысле метода наименьших квадратов, данную функцию $f(x)$ с помощью линейного агрегата*

$$\sum_{v=1}^n \gamma_v \varphi_v$$

с постоянными коэффициентами γ_v и фиксированным числом слагаемых и так, чтобы „средняя квадратичная ошибка“

$$M = \int (f - \sum \gamma_v \varphi_v)^2 dx$$

была возможно меньше. Действительно, путем простого преобразования интеграла получаем тождество:

$$M = \int \left(f - \sum_{v=1}^n \gamma_v \varphi_v \right)^2 dx = \int f^2 dx + \sum_{v=1}^n (\gamma_v - c_v)^2 - \sum_{v=1}^n c_v^2,$$

из которого непосредственно следует, что минимум M достигается при $\gamma_v = c_v$.

Если для любой кусочно-непрерывной функции f можно сделать наименьшую среднюю квадратичную ошибку

$$\int \left(f - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right)^2 dx$$

путем соответствующего выбора n меньше сколь угодно малого положительного числа, т. е. если можно каждую такую функцию аппроксимировать в смысле способа наименьших квадратов или, как мы будем говорить, в „среднем“ с произвольной точностью, с помощью линейного

агрегата $\sum_{v=1}^n c_v \varphi_v$ с достаточно большим числом членов, то систему функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ мы будем называть „полной ортогональной системой функций“.

На основании предыдущих рассуждений коэффициенты разложения $c_v = (f \varphi_v)$ любой функции f удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v^2 = Nf, \quad (9)$$

которое мы будем называть „условием полноты“.

Это условие можно записать в более общем виде:

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v d_v = (f, g), \quad (9')$$

где

$$c_v = (f \varphi_v), \quad d_v = (g \varphi_v),$$

который получается, если применить формулу (9) к функции $f + g$:

$$N(f + g) = Nf + Ng + 2(f, g) = \sum_{v=1}^{\infty} (c_v + d_v)^2 = \sum_{v=1}^{\infty} (c_v^2 + d_v^2 + 2c_v d_v)$$

и затем вычесть соответствующие равенства для f и g .

Впрочем, для полноты системы функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ достаточно, чтобы условие полноты (9) было выполнено для всех непрерывных функций f . В самом деле, всякая кусочно-непрерывная функция g может быть аппроксимирована с помощью непрерывной функции f так, чтобы интеграл $\int (f - g)^2 dx$ имел сколь угодно малое значение. Такую функцию f

можно, например, построить следующим образом: представим себе кривую, изображающую функцию g ; около каждой точки разрыва x_i этой функции отметим на кривой две точки с абсциссами $x_i - \delta$ и $x_i + \delta$, где δ можно выбирать сколь угодно малым; эту пару точек соединим прямолинейным отрезком и этим отрезком заменим нашу кривую в каж-

дом таком интервале ¹⁾. Если $a_1, a_2, \dots$ представляют коэффициенты разложения функции g , а $c_1, c_2, \dots$ — коэффициенты разложения функции f , то из того, что интеграл $\int (f - \sum c_v \varphi_v)^2 dx$ может быть сделан путем соответствующего выбора n сколь угодно малым, следует на основании неравенства Шварца справедливость аналогичного утверждения для интеграла:

$$M' = \int \left(g - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right)^2 dx = \int \left[(g - f) + \left(f - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right) \right]^2 dx.$$

В самом деле,

$$M' = N(g - f) + N \left(f - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right) + 2 \left(g - f, f - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right),$$

следовательно,

$$M' \leq N(g - f) + N \left(f - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right) + 2 \sqrt{N(g - f) N \left(f - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right)}.$$

Но

$$M = \int \left(g - \sum a_v \varphi_v \right)^2 dx \leq M',$$

так как коэффициенты разложения a_v для g дают наименьшую квадратичную ошибку. Таким образом условие полноты доказано и для функции f .

Следует обратить внимание на то, что из полноты системы функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, т. е. из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(f - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \right)^2 dx = 0$$

ни в коем случае нельзя делать заключение, что $f = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v$, т. е. что

функция f разлагается в ряд по функциям φ_v . Однако, если ряд $\sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v$ равномерно сходится и мы можем поэтому сделать переход к предельной функции под знаком интеграла, то разложимость функции f очевидна. Полнота данной системы $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ является при этом, конечно, необходимым условием; действительно, выделив, например, из полной системы одну функцию, мы видим, что все компоненты ее относительно остающейся неполной системы равны нулю. Но и для полной системы

¹⁾ В самом деле, пусть M означает верхнюю грань $|g(x)|$, а q — число точек разрыва функции $g(x)$ в промежутке интегрирования, тогда в неравенстве

$$\int (f - g)^2 dx < 8 M^2 \delta q$$

правую часть можно сделать сколь угодно малой при соответствующем выборе δ .

функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ вопрос о разложимости функции f требует более подробного исследования, которое мы в дальнейшем (гл. V и VI) будем еще проводить в различных случаях.

Содержание предыдущего предельного равенства мы будем также выражать следующим образом: *последовательность функций $\sum_{v=1}^n c_v \varphi_v$ сходится в среднем к функции f .*

Далее, приводим теорему: *кусочно-непрерывная функция однозначно определяется своими коэффициентами разложения по заданной полной ортогональной системе, т. е. две кусочно-непрерывные функции тождественны между собой, если их коэффициенты разложения соответственно равны.* Действительно, разность двух таких функций с равными коэффициентами имеет коэффициенты, равные нулю, и следовательно, в силу условия полноты и норм ее равен нулю; следовательно, эта разность сама должна тождественно равняться нулю. Таким образом функция однозначно характеризуется своим разложением по полной ортогональной системе функций и в том случае, когда разложение сходится не в обычном смысле, а только в среднем. Во многих рассуждениях достаточно бывает этой сходимости в среднем.

Понятие полноты системы функций сохраняет смысл и в том случае, когда система не ортогональна и не нормирована. Вообще мы будем называть систему функций полной системой, если любая кусочно-непрерывная функция может быть аппроксимирована в среднем с любой точностью при помощи линейного агрегата этих функций. Полнота такой системы переносится также на ортогональную систему, получающуюся из нее путем ортогонализации.

4. Ортогональные и унитарные преобразования бесконечно большого числа переменных. Ортогональные нормированные системы функций аналогичны во многих отношениях ортогональным системам нормированных векторов в n -мерном пространстве; компоненты $c_i = (f\varphi_i)$ функции f можно рассматривать как прямоугольные координаты функции f в системе координат, определенной при помощи „координатных функций“ $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ в пространстве бесконечно большого числа измерений.

Если $\phi_1, \phi_2, \dots$ — другая ортогональная нормированная система, в которой компонентами функции f служат $d_i = (f\phi_i)$, и если обе системы являются полными, то применение условия полноты (9') к функции f и функциям φ_i по отношению к системе $\phi_1, \phi_2, \dots$, непосредственно дает бесконечную систему равенств:

$$c_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} d_k, \quad a_{ik} = (\varphi_i \phi_k) \quad (i=1, 2, \dots). \quad (10)$$

Соответственным образом получаем обратную систему равенств:

$$d_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} c_k, \quad a_{ki} = (\phi_i \varphi_k) \quad (i=1, 2, \dots). \quad (10')$$

Коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} a_{jk} = (\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases} \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} a_{kj} = (\phi_i, \phi_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i \\ 1 & \text{при } j = i \end{cases} \quad (11')$$

представляющим обобщение условий ортогональности в пространстве n измерений (гл. I, § 1) на пространство бесконечно большого числа измерений. Поэтому преобразование (10), удовлетворяющее условиям (11) и (11'), называют *ортогональным преобразованием бесконечно большого числа переменных*.

Аналогично устанавливается связь между коэффициентами двух комплексных ортогональных систем при помощи *унитарного преобразования бесконечно-большого числа переменных*.

5. Справедливость результатов в случае нескольких независимых переменных. Расширение предпосылок. Все установленные нами понятия и рассуждения остаются справедливыми, если вместо функций от одной переменной x рассматривать функции от нескольких переменных, например от x и y , причем переменные изменяются в заданной конечной области G , элемент площади которой обозначим через dG . Внутреннее произведение (f, g) двух функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, определенных в этой области G , мы определяем равенством $(f, g) = \int_G fg dG$, и тогда в обозначениях и доказательствах этого параграфа не приходится делать никаких существенных изменений.

Далее, все установленные понятия и факты сохраняются и в том случае, если считать основную область бесконечной и допустить, что все встречающиеся функции вместе с их квадратами интегрируемы во всей основной области.

Наконец, заметим, что наши понятия сохраняют смысл, если функция f обращается в бесконечность в основной области так, что квадрат ее интегрируем во всей основной области.

6. Построение полных систем функций от многих переменных. Если известны полные системы функций от одной переменной, то можно построить полные системы функций от двух и большего числа переменных на основании следующей теоремы: если система функций

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$$

представляет полную ортогональную нормированную систему функций в интервале $a \leq s \leq b$ и если для любого $i = 1, 2, \dots$ в интервале $c \leq t \leq d$ функции

$$\psi_{1i}(t), \psi_{2i}(t); \dots$$

образуют такую же систему, то функции

$$\omega_{ik}(s, t) = \varphi_i(s) \psi_{ki}(t)$$

образуют полную ортогональную систему функций от s и t в прямоугольнике $a \leq s \leq b$, $c \leq t \leq d$. В частности система функций $\varphi_i(s)\varphi_n(t)$ является ортогональной и полной системой в области квадрата $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$.

Если $f(s, t)$ является непрерывной функцией от s и t в этом прямоугольнике, то имеет место условие полноты:

$$\iint f^2(s, t) ds dt = \sum_{i,k=1}^n \left(\iint f(s, t) \omega_{ik}(s, t) ds dt \right)^2.$$

Для доказательства исходим из соотношения:

$$\int f^2(s, t) ds = \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2(t),$$

где $g_i(t) = \int f(s, t) \varphi_i(s) ds$, выражающего полноту системы функций φ_i .

Так как ряд в правой части сходится равномерно¹⁾, то мы имеем право почленно интегрировать по t и получаем:

$$\iint f^2(s, t) ds dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int g_i^2(t) dt.$$

К i -му члену в правой части применяем условие полноты по отношению к системе функций $\phi_{ki}(t)$, ($k=1, 2, \dots$) и непосредственно получаем искомое соотношение.

§ 2. Принцип предельных точек в функциональном пространстве.

1. Сходимость в функциональном пространстве. Аналогия между функциями и векторами в n -мерном пространстве часто

*) Это следует из теоремы Дини (Dini): если ряд $\sum_{v=1}^{\infty} f_v(t)$ положительных непрерывных функций, сходящихся в замкнутой области G , представляет непрерывную функцию $S(t)$, то этот ряд сходится равномерно. Наметим здесь доказательство в самых общих чертах. Полагаем $S_n(t) = \sum_{v=1}^n f_v(t)$, $S(t) = S_n(t) + R_n(t)$. Если бы утверждение было неправильным, то существовали бы положительное число α , неограниченно возрастающая последовательность чисел $n_1, n_2, n_3, \dots$ и соответствующие значения $t_1, t_2, t_3, \dots$ в области G такие, что $R_{n_i}(t_i) \geq \alpha$, и следовательно, $S_{n_i}(t_i) \leq S(t_i) - \alpha$. При этом мы можем допустить, что значения t_i стремятся к некоторому пределу t из области G . Пусть теперь N означает определенно выбранное число, тогда при $n_i \geq N$ и $S_{n_i}(t_i) \geq S_N(t_i)$, следовательно, $S_N(t_i) \leq S(t_i) - \alpha$. Здесь мы неограниченно увеличиваем i и получаем в силу наших предположений о непрерывности:

$$S_N(t) \leq S(t) - \alpha,$$

что при достаточно большом N , конечно, невозможно.

нарушается, если перейти к рассмотрению бесконечных совокупностей функций и бесконечных совокупностей векторов. В случае векторных многообразий непосредственно из простейших фактов анализа (принцип предельных точек, определение сходимости) следует, что из каждого бесконечного множества векторов v с ограниченным абсолютным значением, $|v|$ или ограниченным нормом $v^2 = Nv$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, далее, что из соотношения

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} N(v_n - v_m) = 0,$$

имеющего место для последовательности векторов $v_1, v_2, v_3, \dots$, вытекает существование предельного вектора $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, и, наконец, что из соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} Nv_n = 0$ получается соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

В пространстве бесконечно большого числа измерений эти утверждения перестают быть правильными. Например, не из всякого бесконечного множества непрерывных функций $f(x)$ с ограниченным нормом Nf можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к непрерывной функции; нельзя также из соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} Nf_n = 0$, имеющего место для последовательности непрерывных функций, заключать, что справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$. Возьмем, например, в основной области $-1 \leq x \leq 1$ функции

$$f_n(x) = 1 - n^2 x^2 \quad \text{при } x^2 \leq \frac{1}{n^2},$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{при } x^2 \geq \frac{1}{n^2}.$$

Любая подпоследовательность из этой последовательности функций сходит к имеющей разрыв в точке $x=0$ функции:

$$f(x) = 0 \quad \text{при } x \neq 0,$$

$$f(x) = 1 \quad \text{при } x = 0,$$

и несмотря на это, $\lim_{n \rightarrow \infty} Nf_n = 0$.

Сделать возможным проведение аналогии между векторами и функциями, т. е. сохранить в „пространстве функций“ принцип предельных точек и указанные теоремы о сходимости, есть задача, неизбежно встречающаяся во многих исследованиях, прежде всего при доказательствах сходимости и доказательствах существования. Возможны два пути для решения этой задачи.

Во-первых, можно достигнуть цели расширением области функций и одновременным расширением понятия интеграла и понятия сходимости. По этому пути, опирающемуся на теорию Лебега (Lebesgue)

мы не пойдем ¹⁾, так как он не соответствует характеру этой книги. Мы пойдем другим путем, который основан на том, что мы суживаем область функций так, чтобы имел место принцип сходимости. Это сужение заключается в том, что мы требуем от совокупности функций не только непрерывности, но и *равностепенной непрерывности*, (*gleichgradige Stetigkeit*) для всей области функций. Пусть, например, речь идет о функциях от одной независимой переменной x . Тогда требование равностепенной непрерывности означает, что каждому положительному числу ϵ должно соответствовать положительное число $\delta = \delta(\epsilon)$, зависящее только от ϵ , но не от выбора отдельной функции $f(x)$ из множества функций, такое, что из соотношения $|x_2 - x_1| < \delta(\epsilon)$ следует соотношение $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, если x_1 и x_2 принадлежат к области изменения независимого переменного. Например, в интервале

$a \leq x \leq b$ все непрерывные функции $f(x)$, для которых $\int_a^b f^2(x) dx < M$,

где M — фиксированное постоянное число, образуют равностепенно непрерывное множество функций. В самом деле, для двух значений x_1 и x_2 из указанного интервала имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx,$$

следовательно, в силу неравенства Шварца

$$|f(x_2) - f(x_1)|^2 \leq (x_2 - x_1) \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \leq |x_2 - x_1| M.$$

Из этого неравенства мы видим, что при $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{M}$ выполнены условия равностепенной непрерывности. Для таких множеств функций имеет место принцип предельных точек. Из любого множества функций, равномерно ограниченного и равностепенно непрерывного в основной области G , можно выбрать равномерно сходящуюся в области G подпоследовательность $q_1(x), q_2(x), q_3(x), \dots$, которая сходится к непрерывной предельной функции ²⁾.

Эта теорема выражает для множеств непрерывных функций нечто подобное тому, что выражает принцип предельных точек Вейерштрасса для точечных множеств, и тем самым выполняется предыдущее требование.

Для доказательства рассмотрим счетное множество точек $x_1, x_2, \dots$, которые лежат повсюду плотно в интервале, например множество, получающееся неограниченным последовательным делением пополам интервала и образующихся при этом частичных интервалов. В множестве значений функций в точке x_1 существует на основании принципа предельных точек

¹⁾ См., однако § 10, п. 11.

²⁾ Впрочем, достаточно предположить ограниченность последовательности функций в одной единственной точке области G ; отсюда в силу равностепенной непрерывности следует уже равномерная ограниченность во всей области G .

Вейерштрасса сходящаяся подпоследовательность, следовательно из множества всех данных функций можно выбрать последовательность неограниченного числа функций $a_1(x), a_2(x), \dots$ так, чтобы значения этих функций в точке x_1 образовали сходящуюся последовательность. Из этой последовательности можно таким же путем выделить подпоследовательность функций $b_1(x), b_2(x), \dots$, для которой значения функций и в точке x_2 представляют сходящуюся последовательность, и т. д. Теперь рассмотрим „диагональную последовательность“ $a_1(x) = q_1(x), b_2(x) = q_2(x), \dots$ всех полученных таким образом последовательностей функций, мы утверждаем, что она обладает свойством равномерной сходимости во всем интервале.

Чтобы доказать это, задаем произвольно малое положительное число ϵ и делим интервал $a \leq x \leq b$ с помощью определенного достаточно большого числа M точек $x_1, x_2, \dots, x_M$ из нашего множества точек $x_1, x_2, \dots$, на столь мелкие части, что каждой точке x из данного интервала должна соответствовать точка x_h ($h \leq M$), для которой $|x - x_h| < \delta(\epsilon)$, где $\delta(\epsilon)$ имеет значение, указанное в условии. Затем выбираем зависящее от ϵ число $N = N(\epsilon)$ настолько большим, чтобы при $m > N$ и $n > N$ имело место в точке x_h ($h = 1, 2, \dots, M$) соотношение:

$$|q_m(x_h) - q_n(x_h)| < \epsilon.$$

В силу равномерной непрерывности имеем для соответствующего $h \leq M$ соотношения:

$$|q_m(x) - q_m(x_h)| < \epsilon,$$

$$|q_n(x) - q_n(x_h)| < \epsilon,$$

следовательно, при $n > N$ и $m > N$

$$|q_m(x) - q_n(x)| < 3\epsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость последовательности функций $q_1(x), q_2(x), \dots$ для всех значений x из интервала $a \leq x \leq b$. Непрерывность предельной функции $q(x)$ является тогда следствием равномерной сходимости. Заметим, между прочим, что из предыдущего рассуждения следует, что всякая сходящаяся подпоследовательность сходится равномерно.

Множество равномерно непрерывных функций обладает еще следующими свойствами. Если последовательность функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ принадлежит такого рода множеству и если $\lim_{n \rightarrow \infty} N f_n = 0$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$, и притом сходимость будет равномерной. Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} N(f_n - f_m) = 0$, то существует непрерывная функция $j(x)$, к которой $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = j(x)$, которой равномерно сходится наша последовательность, т. е. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Чтобы доказать первую часть этого утверждения, допустим, что для точки $x = x_0$ не имеет места соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0$; тогда существуют произвольно большие значения n , для которых $f_n^2(x_0) > 2a^2$

где $2a^2$ — положительная грань. В силу равностепенной непрерывности функций $f_n(x)$ имеется определенный интервал, заключающий точку x_0 , ширины δ , в котором для указанных выше значений n справедливо неравенство: $f_n^2 > a^2$. Следовательно, для этих значений и $Nf_n > \delta a^2$, что противоречит нашему условию. Подобным же образом можно доказать и вторую часть утверждения, что предоставляем сделать читателю.

Множество равностепенно непрерывных функций с ограниченными нормами обладает также следующим свойством, которое мы будем называть свойством *гладкости* ¹⁾ множества. Пусть r — целое положительное число, а $c_1, c_2, \dots, c_r$ — какие угодно числа, абсолютные значения которых остаются меньше некоторой определенной грани, например меньше единицы, тогда существует зависящее только от положительного числа ϵ и стремящееся одновременно с ϵ к нулю число $\delta(\epsilon)$, такое, что из соотношения $N(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_r f_r) < \epsilon$ следует соотношение:

$$|c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_r f_r| < \delta.$$

если $f_1, f_2, \dots, f_r$ — какие угодно r функций из нашего множества.

Доказательство непосредственно получается из предыдущего, если заметить, что множество наших функций сохраняет свойство равностепенной непрерывности, если его расширить путем присоединения всех линейных комбинаций $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_r f_r$, где r — фиксированное число, а $|c_i|$ ограничены.

Условие гладкости последовательности функций $f_1, f_2, \dots$ можно также выразить в следующей форме: последовательность функций $f_1, f_2, \dots$ должна обладать тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Из принципа предельных точек можно непосредственно получить следующую несколько более общую теорему: пусть

$$\begin{aligned} & p_{11}(x), p_{12}(x), \dots, p_{1r}(x), \\ & p_{21}(x), p_{22}(x), \dots, p_{2r}(x), \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

последовательность групп $G_1, G_2, \dots$, каждая из которых содержит по r функций, причем все эти функции равностепенно непрерывны и равномерно ограничены в интервале $a \leq x \leq b$. Тогда можно выделить группы функций $p_{n_i k}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty, k = 1, \dots, r$) так, чтобы функции $p_{n_i k}(x)$ при неограниченном возрастании i сходились равномерно к r непрерывным функциям $p_1(x), \dots, p_r(x)$.

Действительно, мы можем путем соответствующего выбора сперва добиться искомой сходимости для первого столбца. Из полученной таким образом последовательности групп мы выделяем подпоследовательность так, чтобы имела место сходимость и во втором столбце, и повторяем этот процесс еще $r - 2$ раза.

¹⁾ Это понятие, относящееся к множествам функций, не надо смешивать с понятием, введенным на стр. 41, о *гладкой функции*.

§ 3. МЕРА НЕЗАВИСИМОСТИ И ЧИСЛО ИЗМЕРЕНИЙ.

1. Мера независимости. Мы можем легко вывести критерий линейной зависимости или независимости r функций $f_1, \dots, f_r$ аналогично тому, как мы это раньше сделали для векторов n -мерного пространства. С этой целью образуем квадратичную форму от r действительных переменных $t_1, \dots, t_r$:

$$\begin{aligned} K(t, t) &= N(t_1 f_1 + \dots + t_r f_r) = \\ &= \int (t_1 f_1 + \dots + t_r f_r)^2 dx = \sum_{i,k=1}^n (f_i f_k) t_i t_k; \end{aligned} \quad (12)$$

наименьшее характеристическое число m , т. е. минимум квадратичной формы $K(t, t)$, когда переменные t_i изменяются, удовлетворяя добавочному условию $\sum_{i=1}^r t_i^2 = 1$, мы будем называть *мерой независимости*

функций $f_1, \dots, f_r$. Число m конечно не может быть отрицательным. Функции $f_1, \dots, f_r$ линейно зависимы в том и только в том случае, когда мера независимости m равна нулю; в случае же линейной независимости величина числа m дает представление о характере линейной независимости. Обращение в нуль меры независимости m равносильно обращению в нуль *определителя Грама*

$$\Gamma(f_1, \dots, f_r) = \begin{vmatrix} (f_1 f_1) & \dots & (f_1 f_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_r f_1) & \dots & (f_r f_r) \end{vmatrix} \quad (13)$$

системы функций $f_1, \dots, f_r$. Это следует из того, что определитель Грама есть произведение всех характеристических чисел формы $K(t, t)$. Ни одно из этих чисел не может иметь отрицательного значения, поэтому справедливо соотношение $m^r \leq \Gamma \leq m M^{r-1}$, где M означает наибольшее из характеристических чисел формы $K(t, t)$. В силу того, что $K(t, t)$ представляет определенную положительную форму, имеем неравенство: $\Gamma \geq 0$ ¹⁾. Итак, *обращение в нуль определителя Грама также представляет необходимое и достаточное условие линейной зависимости функций $f_1, \dots, f_r$* .

Если образовать линейную нормированную комбинацию $f = \sum_{i=1}^r u_i f_i$ от r линейно независимых функций $f_1, \dots, f_r$, то ни один из коэффициентов u_i не может превышать по абсолютному значению грани $\frac{1}{\sqrt{m}}$, зависящей только от меры независимости функций $f_1, \dots, f_r$. В самом

¹⁾ Это неравенство представляет обобщение неравенства Шварца. Действительно, оно переходит в неравенство Шварца при $r=2$.

деле, если $v_i = \frac{u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^r u_i^2}}$, то в силу определения числа m имеем:

$$\int \left(\sum_{i=1}^r v_i f_i \right)^2 dx = \frac{Nf}{\sum_{i=1}^r u_i^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^r u_i^2} \geq m,$$

следовательно, $\sum_{i=1}^r u_i^2 \leq \frac{1}{m}$. Если, следовательно, ортогонализировать систему r функций, мера независимости которой больше положительного числа μ , т. е. заменить функции этой системы надлежаще выбранными нормированными линейными комбинациями их, то абсолютные значения коэффициентов не могут при этом превысить грань $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

2. Асимптотическое число измерений последовательности функций. Если в последовательности нормированных функций $f_1, f_2, \dots$ или, общее, в последовательности функций с ограниченными нормами всегда каждые $r+1$ функций линейно зависимы между собой, так что каждая функция может быть представлена как линейная комбинация $t_1 g_1 + \dots + t_r g_r$ от r , но и не меньше, чем r основных функций $g_1, \dots, g_r$ с постоянными коэффициентами $t_1, \dots, t_r$, т. е. вся последовательность функций входит в состав *линейного семейства* $t_1 g_1 + \dots + t_r g_r$, то мы говорим, пользуясь геометрической терминологией, что последовательность функций имеет число измерений, равное r .

Если последовательность функций $f_1, f_2, \dots$ не имеет конечного числа измерений, то возможны два случая. Либо для всякого сколь угодно большого положительного числа s существуют группы, содержащие по s функций $f_{n_1}, \dots, f_{n_s}$ последовательности с произвольно большими индексами $n_1, \dots, n_s$ такие, что мера независимости этих функций больше некоторого определенного положительного числа, не зависящего от чисел n_i (но оно может зависеть от s). Тогда мы приписываем последовательности функций асимптотическое число измерений ∞^1). Либо же при достаточно большом s мера независимости функций $f_{n_1}, \dots, f_{n_s}$ стремится к нулю, если все числа $n_1, \dots, n_s$ по какому бы то ни было закону неограниченно увеличиваются. В этом случае мы называем наименьшее число r , для которого при $s > r$ мера независимости стремится к нулю, *асимптотическим числом измерений* последовательности. В частности $r=0$, если Nf_n с возрастанием n стремится к нулю. В последовательности, имеющей асимптотическое число измерений r , каждые $r+1$ функций, если только отбросить достаточно большое число начальных функций, „почти“ линейно зависимы.

¹⁾ Простейший пример представляет последовательность ортогональных нормированных функций, у которой мера независимости для любой группы функций равна единице.

Внутреннее значение введенных понятий, естественно возникающих по геометрической аналогии с последовательностями векторов в n -мерном пространстве, заключается в том, что последовательность функций с асимптотическим числом измерений r определяет в качестве предельного образования линейное семейство из r функций. Правда, в общем случае это справедливо лишь тогда, когда, пользуясь понятием интеграла Лебега и соответствующей теорией, расширяют положенную в основание область функций. Так как мы, однако, хотим остаться на нашей элементарной позиции, то для доказательства только что высказанного утверждения мы должны согласно § 2 сделать еще некоторые ограничительные предположения, а именно, мы просто допустим, что последовательность гладкая (см. стр. 54).

В таком случае имеет место следующая теорема. Пусть $f_1, f_2, \dots$ — гладкая последовательность функций с асимптотическим числом измерений r . Тогда существуют такие r линейно независимых функций (следовательно, их можно выбрать ортогональными и нормированными) $g_1, \dots, g_r$, что при достаточно большом n каждая из функций f_n отличается от некоторой функции из линейного семейства $t_1 g_1 + \dots + t_r g_r$ меньше чем на произвольно малое положительное число ϵ , и не существует линейного семейства с числом основных функций, меньшим r , которое обладало бы этим свойством.

Мы можем это предельное линейное семейство характеризовать также следующим образом. Если $G_1, G_2, \dots, G_m, \dots$ — группы, каждая из которых содержит по r функций $f_{m_1}, \dots, f_{m_r}$ нашей последовательности и мера независимости которых больше некоторого положительного числа μ , а индексы $m_i (i=1, \dots, r)$ с возрастанием m неограниченно возрастают, то линейные семейства функций S_m , определенные при помощи функций из G_m как основных функций, равномерно сходятся с возрастанием m к предельному линейному семейству T , определяемому r линейно независимыми функциями $g_1, \dots, g_r$, в том смысле, что при достаточно большом m всякая нормированная функция из S_m сколь угодно мало отличается от некоторой функции из T .

Для того чтобы можно было удобно формулировать доказательство этих положений, мы будем пользоваться следующей терминологией. Мы скажем, что функция f удалена от линейного семейства функций S на расстояние, меньшее положительного числа d , если разность между f и надлежаще выбранной функцией из S по абсолютному значению повсюду меньше, чем d . Аналогично мы приписываем двум линейным семействам функций S и S^* расстояние меньшее, чем d , если любая нормированная функция одного семейства отличается от соответственно выбранной нормированной функции другого семейства меньше, чем на d .

Теперь легко видеть, что при достаточно больших значениях m и n функция f_n удалена от семейства S_m на произвольно малое расстояние. В самом деле, мера независимости функций $f_n, f_{m_1}, \dots, f_{m_r}$ при больших m и n произвольно мала; в силу условия гладкости существуют, следовательно, $r+1$ чисел $u_0, u_1, \dots, u_r$, причем $\sum_{i=0}^r u_i^2 = 1$, для которых $|u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \dots + u_r f_{m_r}|$ сколь угодно мало. Число u_0 с возра-

станием m и n не может неограниченно убывать по абсолютному значению, так как в противном случае мера независимости $f_{m_1}, \dots, f_{m_r}$ становилась бы сколь угодно малой, что противоречит условию. Следовательно, разделив выражение $u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \dots + u_r f_{m_r}$ на u_0 и

полагая $\frac{u_i}{u_0} = -t_i$, мы можем заключить, что при достаточно больших значениях m и n функция f_n сколь угодно мало отличается от соответственно выбранной функции $t_1 f_{m_1} + \dots + t_r f_{m_r}$ из линейного семейства S_m . Поэтому и расстояние между линейными семействами S_m и S_n при достаточно больших значениях m и n сколь угодно мало. Пусть теперь ϵ — некоторое достаточно малое положительное число (насколько малым его надо выбрать, мы увидим позже), и $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ — последовательность положительных чисел, причем $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i = \epsilon$. Пусть, далее, m_i —

целое положительное число, такое, что при $n \geq m_i$ и $m \geq m_i$ расстояние между S_m и S_n меньше ϵ_i . Берем какие угодно r нормированных функций $h_{11}, \dots, h_{1r}$ из последовательности S_{m_1} и определяем (что согласно условию возможно) в S_{m_2} ($m_2 > m_1$) нормированные функции $h_{21}, \dots, h_{2r}$ так, чтобы $|h_{2i} - h_{1i}| < \epsilon_1$. Подобным же образом мы определяем в S_{m_3} ($m_3 > m_2$) нормированные функции $h_{31}, \dots, h_{3r}$ так, чтобы $|h_{3i} - h_{2i}| < \epsilon_2$ и т. д. Ввиду того, что $|h_{pi} - h_{qi}| < \epsilon_p + \dots + \epsilon_{q-1}$, последовательность функций h_{pi} при постоянном $i = 1, \dots, r$ равномерно сходится к предельной функции g_i ; при этом $|g_i - h_{1i}| < \epsilon$. Если выбрать ϵ достаточно малым, то одновременно с функциями $h_{11}, \dots, h_{1r}$ и функции $g_1, \dots, g_r$ будут иметь меру независимости, не равную нулю, т. е. будут линейно независимы. Функции $g_1, \dots, g_r$ очевидно, удовлетворяют всем поставленным требованиям.

§ 4. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА ОБ АППРОКСИМИРОВАНИИ. Полнота системы степеней и системы тригонометрических функций.

1. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании. Самый простой пример полной системы функций представляют степени:

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

Они образуют для любого замкнутого интервала $a \leq x \leq b$ полную систему функций. Более того, для них справедлива следующая теорема Вейерштрасса об аппроксимировании¹⁾: *любую непрерывную функцию в интервале $a \leq x \leq b$ можно равномерно аппроксимировать в этом интервале с помощью полиномов.*

Эта теорема дает больше чем полноту системы, именно обнаруживает не только сходимость в среднем, но и равномерную сходимость.

¹⁾ Weierstrass K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlichen Funktionen reeller Argumente, Sitzungsber. Akad., Berlin 1885, стр. 633—639, 789—805, а также в собрании сочинений, т. 3, стр. 1—37, Berlin 1903.

Для доказательства допустим, что интервал $a \leq x \leq b$ лежит целиком внутри интервала $0 < x < 1$, так что можно найти два числа α и β , удовлетворяющие неравенствам:

$$0 < \alpha < a < b < \beta < 1.$$

Далее, представим себе, что непрерывная в интервале $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ каким бы то ни было образом продолжена непрерывно до границ интервала $\alpha \leq x \leq \beta$.

Рассмотрим сперва интеграл

$$J_n = \int_0^1 (1 - v^2)^n dv.$$

Этот интеграл, как легко видеть, стремится с возрастанием n к нулю. Пусть δ — некоторое постоянное число из интервала $0 < \delta < 1$, а

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1 - v^2)^n dv,$$

тогда мы утверждаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0,$$

т. е. что при достаточно большом значении n интеграл, взятый в пределах от 0 до δ , имеет решающее значение при вычислении всего интеграла от нуля до единицы. В самом деле, при $n \geq 1$ имеем:

$$J_n > \int_0^1 (1 - v)^n dv = \frac{1}{n+1},$$

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1 - v^2)^n dv < (1 - \delta^2)^n (1 - \delta) < (1 - \delta^2)^n,$$

$$\frac{J_n^*}{J_n} < (n+1)(1 - \delta^2)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0.$$

Теперь образуем выражения:

$$P_n(x) = \frac{\int_\alpha^\beta f(u) [1 - (u-x)^2]^n du}{\int_{-1}^1 (1 - u^2)^n du} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при условии $a \leq x \leq b$. Эти выражения, очевидно, представляют собой многочлены степени $2n$ относительно x , коэффициенты которых выражаются отношениями определенных интегралов, и эти многочлены дают, как мы сейчас докажем, требуемое аппроксимирование.

Путем подстановки $u = v + x$ в числителе получаем:

$$\begin{aligned} \int_a^{\beta} f(u) [1 - (u - x)^2]^n du &= \int_{a-x}^{\beta-x} f(v+x) (1 - v^2)^n dv = \\ &= \int_{a-x}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\beta-x} = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

где положительное число δ из интервала $0 < \delta < 1$ мы сейчас соответствующим образом фиксируем. Интеграл I_2 можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} I_2 &= f(x) \int_{-\delta}^{\delta} (1 - v^2)^n dv + \int_{-\delta}^{\delta} [f(v+x) - f(x)] (1 - v^2)^n dv = \\ &= 2f(x) (J_n - J_n^*) + \int_{-\delta}^{\delta} [f(v+x) - f(x)] (1 - v^2)^n dv. \end{aligned}$$

Ввиду равномерной непрерывности функции $f(x)$ в интервале $a \leq x \leq \beta$ можно для любого наперед заданного сколь угодно малого числа $\epsilon > 0$ подобрать такое зависящее только от ϵ число $\delta = \delta(\epsilon)$ из интервала $0 < \delta < 1$, чтобы при $|v| < \delta$ и $a \leq x \leq \beta$ имело место соотношение $|f(v+x) - f(x)| < \epsilon$; в таком случае имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{\delta} [f(v+x) - f(x)] (1 - v^2)^n dv \right| &< \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} (1 - v^2)^n dv < \\ &< \epsilon \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n dv = 2\epsilon J_n^*. \end{aligned}$$

Пусть, далее, M — максимум $|f(x)|$ в интервале $a \leq x \leq \beta$, тогда

$$\begin{aligned} |I_1| &< M \int_{-\delta}^{\delta} (1 - v^2)^n dv = MJ_n^*, \\ |I_3| &< M \int_{\delta}^{\beta-x} (1 - v^2)^n dv = MJ_n^*; \end{aligned}$$

в общем, так как знаменатель в выражении $P_n(x)$ равен $2J_n$, получаем:

$$|P_n(x) - f(x)| < 2M \frac{J_n^*}{J_n} + \epsilon.$$

Ввиду того, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0,$$

мы можем путем соответствующего выбора n сделать правую часть меньше 2ε ; таким образом действительно $f(x)$ равномерно аппроксимируется в интервале $a \leq x \leq b$ с помощью полиномов $P_n(x)$.

2. Распространение на функции от многих переменных. Таким же образом доказывается, что непрерывная при $a_i < x_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $0 < a_i < b_i < 1$) функция от m переменных $x_1, \dots, x_m$ равномерно аппроксимируется полиномами:

$$P_n(x_1, \dots, x_m) = \frac{\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(u_1, \dots, u_m) [1 - (u_1 - x_1)^2]^n \dots [1 - (u_m - x_m)^2]^n du_1 \dots du_m}{\left[\int_{-1}^1 (1 - u^2)^n du \right]^m},$$

причем

$$0 < a_i < a_i < b_i < b_i < 1.$$

3. Аппроксимирование производных. Несколько углубляя наши рассуждения, мы получаем следующий общий результат: функцию $f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывную и имеющую непрерывные производные до k -го порядка включительно в замкнутой области $a_i \leq x_i \leq b_i$, можно равномерно аппроксимировать с помощью полиномов $P(x_1, \dots, x_m)$ так, чтобы и производные от функции f до k -го порядка равномерно аппроксимировались производными соответствующего порядка от этих полиномов.

Для доказательства мы опять предполагаем $0 < a_i < b_i < 1$ и представляем себе функцию f продолженной за область определения на большую прямоугольную область $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($0 < a_i < a_i < b_i < b_i < 1$) так, чтобы функция и ее производные были непрерывны в новой области и, кроме того, чтобы значения функции f и ее производных до $(k-1)$ -го порядка включительно были равны нулю на границе новой области. Тогда определенные в предыдущем номере полиномы $P_n(x_1, \dots, x_m)$ дают требуемое аппроксимирование. В этом можно очень просто убедиться следующим образом: дифференцируем под знаком интеграла по x_r , заменяем это дифференцирование равносильным ему дифференцированием по u_r и, наконец, преобразуем интеграл путем интегрирования по частям, пользуясь при этом пограничными условиями.

4. Полнота системы тригонометрических функций. Из сказанного в п.п. 1, 2 следует тот важный факт, что нормированная ортогональная система тригонометрических функций

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots; \\ & \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

образует в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ полную систему функций. И здесь имеет место далее идущая теорема: *любую непрерывную в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ функцию $f(x)$, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно*

равномерно аппроксимировать, при помощи тригонометрических полиномов:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_v \cos vx + \beta_v \sin vx),$$

где a и β — постоянные.

Для доказательства напомним ϑ вместо x и рассмотрим плоскость ξ, η , в которой точка определяется полярными координатами ρ и ϑ ($\xi = \rho \cos \vartheta$, $\eta = \rho \sin \vartheta$). Функция

$$\varphi(\xi, \eta) = \rho f(\vartheta)$$

непрерывна во всей плоскости ξ, η и на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$ совпадает с данной функцией $f(\vartheta)$. На основании теоремы Вейерштрасса об аппроксимировании, функцию $\varphi(\xi, \eta)$ можно равномерно аппроксимировать в области квадрата, заключающего внутри себя окружность $\xi^2 + \eta^2 = 1$, многочленами относительно ξ и η . Полагая затем $\rho = 1$, мы видим, что функцию $f(\vartheta)$ можно равномерно аппроксимировать многочленами относительно $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$. Но по известным формулам тригонометрии каждый такой многочлен можно представить также в указанном ранее виде:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_v \cos vx + \beta_v \sin vx).$$

Непрерывную функцию $f(x)$, которая не удовлетворяет условию периодичности $f(-\pi) = f(\pi)$, можно заменить непрерывной функцией $g(x)$, удовлетворяющей этому условию; так, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx$$

имел сколь угодно малое значение. Отсюда следует возможность аппроксимирования в среднем любой непрерывной функции при помощи тригонометрических многочленов и, следовательно, полнота системы тригонометрических функций.

§ 5. Ряды Фурье.

1. Доказательство основной теоремы. На основании общих рассуждений § 1 из ортогональности тригонометрических функций следует, что наилучшее приближение в среднем степени n дает так называемый *многочлен Фурье*:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx),$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \nu x \, dx, \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \nu x \, dx, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

При помощи соотношения $\cos \nu x + i \sin \nu x = e^{i\nu x}$ можно, впрочем, этот многочлен представить в более удобной форме:

$$s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^n a_\nu e^{i\nu x} \quad \left(\begin{aligned} 2a_\nu &= a_\nu - ib_\nu, & \nu > 0 \\ 2a_\nu &= a_{-\nu} + ib_{-\nu}, & \nu < 0 \end{aligned} \right. \quad 2a_0 = a_0),$$

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t} \, dt \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (15')$$

Заранее не известно, являются ли полиномы, дающие наилучшее приближение в среднем, также равномерно аппроксимирующими, т. е. сходится ли бесконечный ряд $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ равномерно и представляет ли он функцию $f(x)$. Этим вопросом занимается теория рядов Фурье.

Для удобства формулировок в дальнейшем, мы представляем себе, что функция $f(x)$ сперва определена только в интервале $-\pi < x < \pi$ и затем периодически продолжена за основную область при помощи функционального соотношения $f(x + 2\pi) = f(x)$; далее, мы в каждой точке разрыва ξ функции $f(x)$ принимаем за значение функции среднее арифметическое „предельных значений справа и слева“:

$$f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \quad \text{и} \quad f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h) \quad (h > 0),$$

т. е. полагаем

$$f(\xi) = \frac{1}{2} [f(\xi+0) + f(\xi-0)].$$

Тогда имеет место следующая теорема: *любая кусочно-гладкая в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ и периодическая с периодом 2π функция может быть разложена в ряд Фурье, т. е. многочлены Фурье*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

стремятся с возрастанием n к $f(x)$. Кроме того, мы докажем, что ряд Фурье сходится равномерно во всяком замкнутом интервале, в котором функция непрерывна.

Сначала мы будем вести доказательство в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна, т. е. что разрывы встречаются только у производной $f'(x)$. Обозначая через α_ν и β_ν коэффициенты разложения $f'(x)$, имеем:

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos \nu x \, dx = \frac{\nu}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \nu x \, dx = \nu \beta_\nu, \\ \beta_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin \nu x \, dx = -\frac{\nu}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \nu x \, dx = -\nu \alpha_\nu, \\ \alpha_0 &= 0.\end{aligned}$$

Так как $f'(x)$ — кусочно-непрерывная функция, то имеет место условие полноты:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) \, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2).$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{\nu=n}^m a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x \right| &= \left| \sum_{\nu=n}^m \frac{1}{\nu} (\nu \alpha_\nu \cos \nu x + \nu \beta_\nu \sin \nu x) \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{\nu=n}^m \nu^2 (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2)} \sqrt{\sum_{\nu=n}^m \frac{1}{\nu^2}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) \, dx} \sqrt{\sum_{\nu=n}^m \frac{1}{\nu^2}}.\end{aligned}$$

Но отсюда непосредственно следует абсолютная и равномерная сходимость бесконечного ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

который в силу полноты системы тригонометрических функций и представляет функцию $f(x)$.

Чтобы доказать разложимость в ряд Фурье также и для прерывных кусочно-гладких функций, рассмотрим сперва такую функцию частного вида, которая определяется равенствами:

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \text{ при } 0 < x < 2\pi, \\ h(0) &= 0, \\ h(x + 2\pi) &= h(x),\end{aligned}$$

и имеет в точках $x = \pm 2k\pi$ ($k=0, 1, \dots$) разрыв, равный π .

Коэффициенты Фурье этой функции равны

$$a_0 = 0, \quad a_v = 0, \quad b_v = \frac{1}{v} \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Чтобы доказать равенство

$$h(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin vx}{v},$$

мы сначала образуем повсюду непрерывную кусочно-гладкую функцию

$$g(x) = h(x)(1 - \cos x) = 2h(x) \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Ряд Фурье

$$\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v \sin vx$$

для этой функции согласно предыдущим рассуждениям сходится равномерно к

$$g(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v \sin vx.$$

При этом коэффициенты β_v связаны с коэффициентами b_v соотношениями:

$$\beta_v = b_v - \frac{1}{2}(b_{v-1} + b_{v+1}) \quad (v = 2, 3, \dots)$$

$$\beta_1 = b_1 - \frac{1}{2}b_2.$$

Полагая

$$\sum_{v=1}^n b_v \sin vx = s_n(x)$$

и

$$\sum_{v=1}^n \beta_v \sin vx = \sigma_n(x),$$

имеем:

$$(1 - \cos x) s_n(x) = \sigma_n(x) - \frac{b_n}{2} \sin(n+1)x + \frac{b_{n+1}}{2} \sin nx.$$

С возрастанием n коэффициенты b_n стремятся к нулю, а сумма $\sigma_n(x)$ стремится равномерно к $g(x)$. Следовательно, и $(1 - \cos x) s_n(x)$ равномерно сходится в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ к $g(x)$, а потому и сумма $s_n(x)$ равномерно сходится к $h(x)$ во всяком замкнутом частичном интервале, не содержащем точки $x = 0$.

В точке $x = 0$ все частичные суммы $s_n(x)$ равны нулю, так что и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0$. Следовательно, и в точке разрыва сумма ряда равна зна-

чению функции $h(x)$, а именно среднему арифметическому предельных значений слева и справа $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Подобно тому, как функция $h(x)$ делает скачок, равный π при $x=0$, так и функция $h(x-\xi)$ делает такой же скачок при $x=\xi$, во всех же остальных точках основного интервала она непрерывна. Пусть теперь $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, которая в точках $x=\xi_i$ ($i=1, \dots, r$) интервала $0 \leq x < 2\pi$ делает скачки, равные $s(\xi_i) = f(x_i+0) - f(x_i-0)$, а в остальных точках непрерывна, тогда функция

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^r \frac{s(\xi_i)}{\pi} h(x - \xi_i)$$

повсюду непрерывна и имеет, очевидно, одновременно с $f(x)$ кусочно-непрерывную первую производную. Следовательно, функция $F(x)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье; так как и функция

$$\sum_{i=1}^r \frac{s(\xi_i)}{\pi} h(x - \xi_i)$$

может быть разложена в ряд Фурье, равномерно сходящийся во всяком замкнутом интервале, не содержащем точек разрыва, то теорема, сформулированная в начале параграфа, полностью доказана.

2. Кратные ряды Фурье. И для многомерных прямоугольных областей можно образовать ортогональные системы при помощи тригонометрических функций. Ограничимся для определенности случаем двух переменных; заметим, однако, что все это остается справедливым и для любого числа переменных.

В области квадрата $0 \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$ функции:

$$\cos \mu s \cos \nu t \quad (\mu=0, 1, \dots; \nu=0, 1, \dots),$$

$$\sin \mu s \cos \nu t \quad (\mu=1, 2, \dots; \nu=0, 1, \dots),$$

$$\cos \mu s \sin \nu t \quad (\mu=0, 1, \dots; \nu=1, 2, \dots),$$

$$\sin \mu s \sin \nu t \quad (\mu=1, 2, \dots; \nu=1, 2, \dots)$$

образуют ортогональную систему. Формулы разложения записываются проще всего, если пользоваться записью в комплексной форме. Если функция $F(s, t)$ разлагается в равномерно сходящийся двойной ряд Фурье, то

$$F(s, t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\mu\nu} e^{i(\mu s + \nu t)},$$

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} ds \int_0^{2\pi} F(s, t) e^{-i(\mu s + \nu t)} dt.$$

Полнота этой системы функций, а вместе с тем условие полноты

$$\sum_{\mu, \nu=-\infty}^{\infty} |a_{\mu\nu}|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(s, t)|^2 ds dt$$

получается на основании нашей общей теоремы относительно образования полных систем функций от нескольких переменных из полных систем от одной переменной (см. стр. 49 п. 6).

Далее таким же путем, как в п. 1, выводится абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье от функции $F(s, t)$, если $\frac{\partial^2 F(s, t)}{\partial s \partial t}$ существует и кусочно-непрерывна.

3. Порядок коэффициентов Фурье. Если периодическая функция $f(x)$ и ее производные до $(h-1)$ -го порядка непрерывны, а h -я производная кусочно-непрерывна, то для коэффициентов разложения $f(x)$ в ряд Фурье

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x}$$

справедливы при $\nu \geq 1$ соотношения:

$$2|a_{\nu}| = \sqrt{a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2} \leq \frac{c}{\nu^h},$$

где c — некоторое постоянное число. Мы видим, таким образом, что коэффициенты ряда тем сильнее стремятся к нулю, чем регулярнее функция.

Указанный результат непосредственно получается, если выражение (15') для коэффициентов разложения интегрировать по частям последовательно h раз.

4. Растяжение основной области. Если периодическая функция $f(x)$ имеет период $2l$, то разложение имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_{\nu} \cos \nu \frac{\pi}{l} x + b_{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{l} x \right),$$

где

$$a_{\nu} = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(t) \cos \nu \frac{\pi}{l} t dt,$$

$$b_{\nu} = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(t) \sin \nu \frac{\pi}{l} t dt.$$

Это разложение можно также записать в следующей форме:

$$f(x) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v e^{iv \frac{\pi}{l} x},$$

$$a_v = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t) e^{-iv \frac{\pi}{l} t} dt.$$

5. Примеры. Простые примеры к теории рядов Фурье можно найти в элементарных учебниках ¹⁾. Здесь же мы применим разложение в ряд Фурье для вывода функционального уравнения тетафункции и для вывода общей формулы Пуассона.

Функциональное уравнение для тетафункции

$$\vartheta(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi \mu^2 x}$$

имеет вид:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Для доказательства полагаем

$$\varphi(y) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\mu+y)^2 x};$$

очевидно, $\varphi(y)$ является периодической функцией от y с периодом 1, которая имеет производные любого порядка по y и разлагается поэтому в ряд Фурье:

$$\varphi(y) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v e^{2\pi i v y},$$

где

$$a_v = \int_0^1 \varphi(t) e^{-2\pi i v t} dt = \int_0^1 \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\mu+t)^2 x - 2\pi i v t} dt.$$

Ввиду того, что при любом $x > 0$ мы имеем право изменить порядок интегрирования и суммирования, получаем:

$$\begin{aligned} a_v &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-\pi(\mu+t)^2 x - 2\pi i v(\mu+t)} dt = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} e^{-\pi t^2 x - 2\pi i v t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 x - 2\pi i v t} dt = e^{-\frac{\pi v^2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x \left(t + \frac{iv}{x}\right)^2} dt = \frac{e^{-\frac{\pi v^2}{x}}}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

¹⁾ См. например, *Курант*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, часть I, стр. 391—397, ГИИТ, 1931 г.

так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$, взятый вдоль прямой $\Im z = \frac{y}{x}$, параллельной действительной оси, имеет такое же значение $\sqrt{\pi}$, как и вдоль самой действительной оси. (В самом деле, применяя к функции e^{-z^2} и прямоугольнику с вершинами $-T$, $+T$, $+T + i\frac{y}{x}$, $-T + i\frac{y}{x}$ теорему Коши и неограниченно увеличивая затем число T , мы видим, что интегралы, взятые по вертикальным отрезкам, стремятся к нулю, так как подынтегральное выражение равномерно стремится к нулю, а длина пути интегрирования равна постоянному числу $\frac{y}{x}$.) Следовательно, мы получаем:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi v^2}{x}} e^{2\pi i v y},$$

а отсюда при $y=0$ следует:

$$\vartheta(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi \mu^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi v^2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Рассмотренное здесь в данном частном случае применение разложения в ряд Фурье к преобразованию бесконечных рядов представляет пример приема, который в последнее время оказался очень плодотворным при изучении некоторых аналитических функций, встречающихся в высшей арифметике.

Рассуждения, которыми мы только что пользовались, приводят к общей и очень важной формуле преобразования рядов, *формуле суммирования Пуассона*. Пусть имеем ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n),$$

в котором $\varphi(x)$ представляет такую непрерывную и непрерывно дифференцируемую функцию от x , что ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t)$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi'(2\pi n + t)$$

сходятся абсолютно и равномерно для всех значений t из интервала $0 \leq t < 2\pi$. Тогда второй ряд представляет производную от первого ряда по t , и потому первый ряд может быть представлен в интервале

$0 \leq t < 2\pi$ в виде сходящегося ряда Фурье. Следовательно, имеет место разложение:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu \tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi n + \tau) e^{-i\nu \tau} d\tau.\end{aligned}$$

Внутреннюю сумму можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi n + \tau) e^{-i\nu \tau} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \varphi(\tau) e^{-i\nu \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i\nu \tau} d\tau,$$

и мы получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i\nu \tau} d\tau.$$

Полагая здесь $t=0$, окончательно получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i\nu \tau} d\tau.$$

Это и есть формула Пуассона. Для того чтобы эта формула была справедлива, очевидно, требуется только, чтобы существовали все встречающиеся в ней интегралы, чтобы ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t)$$

равномерно сходилась относительно t в интервале $0 \leq t < 2\pi$ и представлял функцию, разлагающуюся в ряд Фурье.

§ 6. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ.

1. Доказательство основной теоремы. В разложении функции $f(x)$, заданной в интервале $-l < x < l$, в ряд Фурье:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu \frac{\pi}{l} x}, \\ a_{\nu} &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\nu \frac{\pi}{l} t} dt\end{aligned}$$

естественно попытаться сделать предельный переход $l \rightarrow \infty$ для того, чтобы освободиться от необходимости периодического продолжения функции $f(x)$ и получить выражение для непериодической функции, определенной для всех действительных значений x . При этом мы сохраняем условие, что функция $f(x)$ является кусочно-гладкой в любом конечном интервале и в точках разрыва имеет значение, равное среднему арифметическому предельных значений справа и слева, и кроме того, вводим добавочное условие, что существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Полагая $\frac{\pi}{l} = \delta$, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta \int_{-l}^l f(t) e^{-i v \delta (t-x)} dt,$$

откуда предельный переход $l \rightarrow \infty$, т. е. $\delta \rightarrow 0$ приводит к формуле:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iu(t-x)} dt. \quad (16)$$

Для функций, имеющих только действительные значения, мы можем представить эту формулу также в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) dt. \quad (17)$$

Строгое доказательство этой *интегральной формулы Фурье* проще всего провести не путем обоснования правильности предельного перехода, а непосредственным подтверждением формулы (16) или (17).

Исходным пунктом служит установленная Дирихле формула:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = f(x)^1),$$

¹⁾ Доказательство этой формулы, которая служит обычно также основанием теории рядов Фурье, см. в учебниках дифференциального и интегрального исчисления, например, *Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, 2-е изд., стр. 373, Berlin 1930. Для удобства читателя оно приведено в дополнении в конце книги †.

где a — произвольное положительное число; она справедлива для любой кусочно-гладкой функции $f(x)$. Из этой формулы следует:

$$\begin{aligned}\pi f(x) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x+t) dt \int_0^v \cos ut du = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v du \int_{-a}^a f(x+t) \cos ut dt = \\ &= \int_0^\infty du \int_{-a}^a f(x+t) \cos ut dt.\end{aligned}$$

Мы утверждаем, что формула останется справедливой, если во внутреннем интеграле произвести интегрирование от $-\infty$ до $+\infty$. Действительно, если $A > a$, то

$$\int_0^v \int_{-A}^A - \int_0^v \int_{-a}^a = \int_0^v \int_{-A}^{-a} + \int_0^v \int_a^A = \int_{-A}^{-a} \int_0^v + \int_a^A \int_0^v;$$

так как согласно условию существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = C,$$

то отсюда следует:

$$\begin{aligned}\left| \int_0^v \int_{-A}^A - \int_0^v \int_{-a}^a \right| &\leq \left| \int_{-A}^{-a} f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt \right| + \left| \int_a^A f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{a} \left(\int_{-A}^{-a} |f(x+t)| dt + \int_a^A |f(x+t)| dt \right) \leq \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)| dt = \frac{C}{a}.\end{aligned}$$

Увеличивая здесь неограниченно A при постоянном значении v получаем:

$$\left| \int_0^v \int_{-\infty}^{\infty} - \int_0^v \int_{-a}^a \right| \leq \frac{C}{a},$$

после этого предельный переход при $v \rightarrow \infty$ дает:

$$\left| \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v \int_{-\infty}^{\infty} - \pi f(x) \right| \leq \frac{C}{a}.$$

Правая часть неравенства может быть сделана при соответствующем выборе a сколь угодно малой, следовательно, наше утверждение, а вместе с тем и требуемая формула (17) доказаны.

Ввиду того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) dt$$

является четной функцией от u , мы можем написать предыдущее равенство и в таком виде:

$$\pi f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) dt;$$

с другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x) dt$$

есть нечетная функция от u , следовательно,

$$0 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x) dt,$$

если только интеграл в правой части имеет смысл¹⁾. Вычитая почленно второе равенство из первого, получаем для точек, в которых функция непрерывна, равенство:

$$\pi f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iu(t-x)} dt,$$

т. е. формулу (16).

2. Распространение формулы на случай многих переменных. Последовательным применением формулы (16) получаем аналогичные формулы для кусочно-гладких непрерывных функций от многих переменных, справедливые для кусочно-гладких функций в точках непрерывности. Например:

$$4\pi^2 F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, t_2) e^{-i[u_1(t_1-x_1)+u_2(t_2-x_2)]} dt_1 du_1 dt_2 du_2$$

при условии существования интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t_1, x_2)| dt_1$$

¹⁾ Это имеет место для тех значений x , в которых функция $f(x)$ непрерывна. В точках разрыва интеграл расходится, как легко видеть на примере функции

$$f(x) = 1 \text{ при } |x| \leq 1, f(x) = 0 \text{ при } |x| > 1,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, t_2)| dt_2,$$

и вообще для n переменных имеем:

$$(2\pi)^n F(x_1, \dots, x_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, \dots, t_n) e^{-i[u_1(t_1-x_1) + \dots + u_n(t_n-x_n)]} dt_1 du_1 dt_2 du_2 \dots dt_n du_n$$

при аналогичных условиях.

При этом интегрирование следует производить в том порядке, в каком расположены дифференциалы.

3. Взаимно обратные формулы. Если положить

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt,$$

то интегральная формула Фурье (16) принимает особенно изящную форму. Именно она указывает, что равенства

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iut} du$$

вытекают одно из другого. Эти уравнения, если рассматривать в них левые части как известные, представляют пару так называемых интегральных уравнений; каждое из них является решением другого, и при этом обнаруживается полная взаимность. Им соответствуют для четных функций вещественные равенства:

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(u) \cos ut dt,$$

а для нечетных:

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(u) \sin ut \, du.$$

Аналогичные формулы имеют место для функций от многих переменных:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \dots \int g(\xi_1, \dots, \xi_n) e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} dx_1 \dots dx_n$$

§ 7. ПРИМЕРЫ НА ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ.

1. Интегральная формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux \, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \quad (17)$$

приводится, если $f(x)$ четная функция, к более простому виду:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \, du \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt,$$

а если $f(x)$ — нечетная функция, — к виду:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux \, du \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt.$$

2. Разрывный множитель Дирихле. Пусть $f(x)$ — четная функция, определенная следующим образом:

$$f(x) = 1 \text{ при } 0 \leq x < 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \text{ при } x = 1,$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x > 1.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \, du \int_0^1 \cos ut \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} \, du.$$

Выражение, стоящее справа, называют „разрывным множителем Дирихле“. Он находит применение во многих вопросах.

3. Если возьмем при $x > 0$

$$f(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0),$$

то получим либо

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \, du \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos ut \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta \cos ux}{\beta^2 + u^2} \, du,$$

либо

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux \, du \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \sin ut \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u \sin ux}{\beta^2 + u^2} \, du,$$

смотря по тому, захотим ли мы продолжать $f(x)$ для отрицательных значений как четную или как нечетную функцию; во втором случае следует положить $f(0) = 0$. Интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{\beta^2 + u^2} \, du = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\beta|x|}}{\beta}$$

называют интегралом Лапласа.

4. Особенно интересный пример представляет функция

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

А именно, ввиду того, что

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos ut \, dt = e^{-\frac{u^2}{2}},$$

оба интегральных уравнения

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos ut \, dt = e^{-\frac{u^2}{2}},$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(u) \cos ut \, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cos ut \, du = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

каждое из которых является решением другого, в данном случае вполне тождественны.

§ 8. Полиномы Лежандра.

1. Построение путем ортогонализации степеней 1, x , x^2 , ... Еще в некоторых отношениях более простой, чем тригонометрические функции пример полной ортогональной системы функций получается, если ортогонализировать по способу, указанному в § 1, степени 1, x , x^2 , ... в заданной основной области, например в интервале $-1 \leq x \leq 1$. При этом получается последовательность ортогональных нормированных полиномов, которые будут однозначно определены, если мы потребуем еще, например, чтобы коэффициент при высшей степени x в каждом многочлене был положительным.

Мы утверждаем, что они с точностью до постоянных множителей совпадают с многочленами

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

которые называются *полиномами Лежандра* ¹⁾. Так как процесс ортогонализации обнаруживает, что существует, если не принимать во внимание постоянных множителей, только одна система ортогональных многочленов, в которую входят многочлены любой степени, то достаточно доказать, что $P_n(x)$ есть многочлен n -й степени и, кроме того, что система многочленов $P_n(x)$ обладает свойством ортогональности. Но действительно $P_n(x)$ является, очевидно, многочленом n -й степени:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\nu-n)!} x^{2\nu-n} = \\ &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu-1)}{(n-\nu)! (2\nu-n)! 2^{n-\nu}} x^{2\nu-n}. \end{aligned}$$

Из этой суммы следует выбросить члены, содержащие отрицательные степени x . Поэтому в случае четного n нижним членом будет

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n},$$

а в случае нечетного n :

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} x \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)};$$

например,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) &= \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x, \quad P_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

¹⁾ Legendre A. M., Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, Mem. math. phys. prés. à l'Acad. sc. par divers sav., т. 10, стр. 411—434, 1785; Recherches sur la figure des planètes, tirés des reg. de l'Acad. sc., стр. 370—389; 1784 (1787).

Чтобы доказать, что многочлены $P_n(x)$ образуют ортогональную систему, полагаем для краткости $(x^2 - 1)^n = u_n(x)$; тогда для любого целого неотрицательного числа $m < n$ имеем:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) x^m dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 u_n^{(n)}(x) x^m dx = 0,$$

что легко проверить путем повторного интегрирования по частям, пока из-под знака интеграла постепенно не исчезнет x^m , принимая при этом во внимание, что все производные от $u_n(x)$ до $(n-1)$ -го порядка на границах промежутка интегрирования обращаются в нуль. Отсюда следует, что и

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (m < n),$$

т. е. что действительно два различных многочлена взаимно ортогональны. Для нормирования мы вычисляем при помощи многократного

$$\begin{aligned} \text{интегрирования по частям } \int_{-1}^1 [u_n^{(n)}(x)]^2 dx: \\ \int_{-1}^1 u_n^{(n)}(x) u_n^{(n)}(x) dx = - \int_{-1}^1 u_n^{(n-1)} u_n^{(n+1)} dx = \int_{-1}^1 u_n^{(n-2)} u_n^{(n+2)} dx = \dots \\ \dots = (-1)^n \int_{-1}^1 u_n u_n^{(2n)} dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx; \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx &= \frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1} dx = \dots \\ &= \frac{n(n-1) \dots 1}{(n+1)(n+2) \dots 2n} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n} dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)} 2^{2n+1}, \end{aligned}$$

то

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1},$$

и следовательно, искомые нормированные многочлены имеют вид:

$$\varphi_v(x) = \sqrt{\frac{2v+1}{2}} P_v(x) = \sqrt{\frac{2v+1}{2}} \frac{1}{2^v v!} \frac{d^v (x^2 - 1)^v}{dx^v}.$$

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ обладают тем свойством, что

$$P_n(1) = 1;$$

это легко видеть, образуя по известному правилу Лейбница n -ю производную выражения $(x-1)^n(x+1)^n$ и полагая затем $x=1$.

2. Производящая функция. Важную роль играют многочлены Лежандра в теории потенциала, где они фигурируют в качестве коэффициентов разложения *производящей функции*. В самом деле, если мы разложим величину, обратную расстоянию между двумя точками, одна из которых удалена от начала координат на 1, а другая — на $u < 1$ и радиусы-векторы которых образуют угол $\arccos x$, т. е. величину

$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$, по степеням u , то с помощью биномиального ряда найдем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) u^n, \quad (18)$$

причем $Q_n(x)$ есть многочлен n -й степени от x . Покажем, что эти многочлены $Q_n(x)$ тождественны с ранее определенными полиномами Лежандра, для чего докажем, что $Q_n(x)$ удовлетворяют тем же соотношениям ортогональности, что и $P_n(x)$. Действительно, из определяющего равенства (18) тотчас же следует:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}} = \sum_{n,m=0}^{\infty} Q_n(x) Q_m(x) u^n v^m.$$

Интегрируя левую часть по x в пределах от -1 до $+1$, получаем в результате элементарного вычисления:

$$\frac{1}{\sqrt{uv}} \log \frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} u^n v^n;$$

интегрируя правую часть почленно и сравнивая результаты, получаем:

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) Q_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Подобным же образом получим $Q_n(1)=1$, если подставим в равенство (18) вместо x единицу. Тем самым установлена тождественность многочленов $Q_n(x)$ и $P_n(x)$.

3. Дальнейшие свойства. Рекуррентная формула. Дифференцируя производящую функцию по u , получаем рекуррентную формулу для трех следующих друг за другом полиномов Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (19)$$

Дифференциальное уравнение. n -й многочлен Лежандра

$$y(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \quad (20)$$

или

$$[(x^2 - 1)y']' - n(n+1)y = 0. \quad (20')$$

Это доказывается путем $(n+1)$ -кратного дифференцирования равенства $(x^2 - 1)u' = 2nxy$, где $u = (x^2 - 1)^n$, причем в результате заменяем $u^{(n)}$ через $2^n n! y^{(1)}$.

Свойство минимума. Если умножить полином Лежандра $P_n(x)$ на число C , обратное коэффициенту при x^n , и, следовательно, коэффициент при x^n в многочлене $CP_n(x)$ будет равен единице, то получаются многочлены, отличающиеся следующим свойством минимума. Среди всех многочленов n -й степени с действительными коэффициентами и высшим коэффициентом, равным единице, они наименее удалены в среднем от нуля в интервале $-1 \leq x \leq 1$. Доказательство этого предложения вытекает просто из того соображения, что в интеграле

$$\int (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)^2 dx$$

можно представить подинтегральное выражение в виде квадрата линейной комбинации:

$$[CP_n(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x) + \dots + c_0]^2.$$

Следовательно, интеграл равен выражению

$$\frac{2C^2}{2n+1} + 2 \sum_{v=0}^{n-1} \frac{c_v^2}{2v+1},$$

которое достигает минимума при $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$.

§ 9. ПРИМЕРЫ ДРУГИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ.

1. Обобщение постановки вопроса, приводящей к полиномам Лежандра. Задачу, из которой мы исходили при введении полиномов Лежандра, можно обобщить следующим образом.

Пусть в интервале $a \leq x \leq b$ задана неотрицательная функция $p(x)$; требуется исследовать системы функций, получающиеся ортогонализацией функций $\sqrt{p(x)}$, $x\sqrt{p(x)}$, $x^2\sqrt{p(x)}$, ... в интервале $a \leq x \leq b$. Конечно, эти функции так же линейно независимы между собой, как и степени 1, x , x^2 , ... Очевидно, в ортогонализированной системе множители при $\sqrt{p(x)}$ будут многочлены $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, ... степеней 0, 1, ..., которые можно однозначно определить при помощи соответствующих

¹⁾ Из этого дифференциального уравнения следует, что все корни полинома $P_n(x)$, различны между собой, так как для кратного корня следовало бы из дифференциального уравнения, что вторая производная и все производные высшего порядка должны равняться нулю. (Из определения $P_n(x)$ на основании теоремы Ролля вытекает, что все корни его действительны и лежат в промежутке от -1 до $+1$.)

добавочных условий; эти многочлены называются *ортогональными многочленами, соответствующими нагрузке $p(x)$* ¹⁾.

Например,

$$\text{при } a = -1, b = 1 \text{ и } p(x) = 1$$

получаются полиномы Лежандра: $P_n(x)$,

$$\text{при } a = -1, b = 1 \text{ и } p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

получаются полиномы Чебышева:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

$$\text{при } a = -1, b = 1 \text{ и } p(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

получаем многочлены:

$$Q_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

при $a = 0, b = 1$ и $p(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$ ($q > 0, p-q > -1$) получаем полиномы Якоби или гипергеометрические полиномы,

$$\text{при } a = -\infty, b = \infty \text{ и } p(x) = e^{-x}$$

получаем полиномы Эрмита,

$$\text{при } a = 0, b = \infty \text{ и } p(x) = e^{-x}$$

— полиномы Лагерра (Laguerre).

Полиномы Чебышева, Якоби, Эрмита и Лагерра мы рассмотрим несколько подробнее.

2. Полиномы Чебышева²⁾. Полиномы Чебышева

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)^3$$

¹⁾ Полиномы $Q_0(x), Q_1(x), \dots$, после умножения каждого на надлежаще выбранный множитель C , обладают свойством минимума, аналогичным свойству полиномов Лежандра, именно свойством давать наименьшее значение интегралу:

$$\int p(x)(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)^2 dx$$

по сравнению со всеми многочленами с действительными коэффициентами, в которых коэффициент при высшем члене равен единице. И в данном случае можно представить подинтегральное выражение с помощью многочленов $Q_n(x)$, например, в таком виде:

$$p(x)[CQ_n(x) + c_{n-1}Q_{n-1}(x) + \dots + c_0]^2,$$

следовательно, в силу ортогональности функций $\sqrt{p(x)}Q_n(x)$ получаем для интеграла выражение $C^2 + \sum_{v=0}^{n-1} c_v^2$, т. е. минимум достигается при $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$.

²⁾ Чебышев П. Л., Sur les questions de minima, qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions, Мém. Acad. sc. Petersb., Серия 6, т. III, стр. 199—291, 1859, Сочинения. Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций, т. I, стр. 271—378, особенно стр. 295—301, С. Петербург 1899.

³⁾ На основании известной формулы

$$\cos n\vartheta = \cos^n \vartheta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \vartheta \sin^4 \vartheta - \dots$$

эти выражения являются полиномами относительно x .

образуют для интервала $-1 \leq x \leq 1$ ортогональную систему полиномов, соответствующую нагрузке $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, так как:

$$2 \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2^{m+n-2}} \int_0^{2\pi} \cos n \vartheta \cos m \vartheta d\vartheta = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Они замечательны тем, что для них отклонение от нуля, т. е. максимум абсолютного значения в интервале $-1 \leq x \leq 1$, принимает наименьшее значение, какое только возможно для полиномов n -й степени с действительными коэффициентами и коэффициентом при высшем члене, равным единице, к числу которых принадлежит и $T_n(x)$. В самом деле, полагая для краткости $\arccos x = \vartheta$ и $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), имеем при

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n}, \dots, \pi:$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \frac{-1}{2^{n-1}}, \quad \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \quad \frac{(-1)^n}{2^{n-1}},$$

вообще

$$T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

В этих точках $T_n(x)$ достигает наибольшего отклонения от нуля. Если бы какой-либо многочлен $R_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ с действительными коэффициентами уклонялся в интервале $-1 \leq x \leq 1$ от нуля не больше, чем полином $T_n(x)$, то непременно имели бы место соотношения:

$$T_n(x_0) - R_n(x_0) \geq 0, \quad T_n(x_1) - R_n(x_1) \leq 0, \quad T_n(x_2) - R_n(x_2) \geq 0, \dots$$

Следовательно, целая рациональная функция $T_n(x) - R_n(x)$ имела бы в интервале $-1 \leq x \leq 1$ по крайней мере n корней, но это невозможно, так как степень ее не выше $(n-1)$ -й.

Делением $T_n(x)$ на

$$\sqrt{\int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2^{2n-1}}}$$

мы получаем нормированные многочлены.

Полиномы Чебышева являются также коэффициентами разложения производящей функции:

$$\psi(x, t) = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) (2t)^n; \quad (21)$$

три последовательных полинома при $n \geq 2$ связаны соотношением:

$$T_{n+1}(x) - xT_n(x) + \frac{1}{4}T_{n-1}(x) = 0; \quad (22)$$

полином Чебышева $T_n(x)$ является решением однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \quad (23)$$

При $n \leq 2$ имеют место рекуррентные формулы несколько иной формы:

$$\begin{aligned} T_2 - xT_1 + \frac{1}{4}T_0 &= -\frac{1}{4}, \\ T_1 - xT_0 &= 0. \end{aligned}$$

3. Полиномы Якоби¹⁾. Полиномы Якоби $G_n(p, q, x)$ получаются при $a=0$, $b=1$ и функции

$$p(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q},$$

где

$$q > 0, \quad p - q > -1.$$

Они могут быть получены также из гипергеометрического ряда:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1} \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots, \quad (24)$$

если положить β равным целому отрицательному числу $-n$, α равным $p+n$, а $\gamma=q$; они удовлетворяют поэтому гипергеометрическому дифференциальному уравнению:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \quad (25)$$

т. е. в частности $G_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$x(1-x)G_n''(x) + [q - (p+1)x]G_n'(x) + (p+n)nG_n(x) = 0 \quad (25')$$

и представляет единственное целое рациональное решение этого уравнения. Первые среди них имеют вид:

$$\begin{aligned} G_0(p, q, x) &= 1, \\ G_1(p, q, x) &= 1 - \binom{1}{1} \frac{p+1}{q} x, \\ G_2(p, q, x) &= 1 - \binom{2}{1} \frac{p+2}{q} x + \binom{2}{2} \frac{(p+2)(p+3)}{q(q+1)} x^2, \\ G_3(p, q, x) &= 1 - \binom{3}{1} \frac{p+3}{q} x + \binom{3}{2} \frac{(p+3)(p+4)}{q(q+1)} x^2 \\ &\quad - \binom{3}{3} \frac{(p+3)(p+4)(p+5)}{q(q+1)(q+2)} x^3; \end{aligned}$$

¹⁾ Jacobi C. G. J., Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, Journ. f. d. reine u. angew. Math., т. 56, стр. 149—165, 1859, Werke, т. 6, стр. 184—202, Berlin 1891.

вообще они могут быть выражены в виде:

$$G_n(p, q, x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\dots(q+n-1)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{q+n-1}(1-x)^{p+n-q}].$$

Из этого выражения следует, что эти полиномы могут быть определены с помощью производящей функции следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{(1-x)^{1-q}(1+x)^{q-p}(t-1+\sqrt{1-2tx+t^2})^{q-1}(t+1-\sqrt{1-2tx+t^2})^{p-q}}{t^{p-1}\sqrt{1-2tx+t^2}} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q+n-1}{n} G_n\left(p, q, \frac{1-x}{2}\right) t^n. \end{aligned}$$

При $p=q=1$ получаем полиномы Лежандра:

$$P_n(x) = G_n\left(1, 1, \frac{1-x}{2}\right) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right); \quad (26)$$

при $p=0, q=\frac{1}{2}$ получаются с точностью до постоянных множителей полиномы Чебышева:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} G_n\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right). \quad (27)$$

4. Полиномы Эрмита¹⁾. Полиномы Эрмита $H_n(x)$, для которых $a=-\infty, b=\infty$ и $p(x)=e^{-x^2}$, целесообразно определить при помощи производящей функции, полагая

$$\phi(x, t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n; \quad (28)$$

отсюда непосредственно получаем:

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial t^n} \right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad (29)$$

т. е. n -й полином Эрмита $H_n(x)$ равен n -й производной от e^{-x^2} , умноженной на $(-1)^n e^{x^2}$. Из соотношения $\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = 2t\phi(x, t)$ следует:

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1), \quad (30)$$

а из соотношения $\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + 2(t-x)\phi(x, t) = 0$ вытекает:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1); \quad (31)$$

¹⁾ *Hermite Ch., Sur un nouveau développement en série de fonctions, C. R. Acad. sc. Paris., т. 58, стр. 93—100, 266—273; Oeuvres, т. 2, стр. 293—312, Paris 1908; Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables там же, т. 60, стр. 370—377, 432—440, 461—466, 512—518, 1865; там же, стр. 319—346.*

комбинируя последние две формулы, получаем:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (n \geq 0), \quad (32)$$

т. е. линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка для $H_n(x)$. Первые полиномы Эрмита имеют вид:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

Общее выражение для полинома Эрмита $H_n(x)$ следующее:

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots$$

Последний член равен:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \text{при четном } n, \\ & (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} 2x \quad \text{при нечетном } n. \end{aligned}$$

Свойство ортогональности полиномов Эрмита получается¹⁾ из соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} dx$$

при $n > m$ путем повторного интегрирования по частям, если принять во внимание формулу (30) и то, что при бесконечно больших значениях x^2 обращаются в нуль все производные от e^{-x^2} ; именно

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx &= (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}} dx = \dots \\ &= (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}} dx = 0. \end{aligned}$$

Чтобы нормировать, можно таким же путем при $n = m$ вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi};$$

¹⁾ Так же легко доказать соотношения ортогональности при помощи производящей функции.

тогда функциями нормированной ортогональной системы являются функции:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{H_\nu(x) e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^\nu \nu!} \sqrt{\pi}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

5. Полиномы Лагерра¹⁾. Полином Лагерра $L_n(x)$ ($a=0$, $b=\infty$, $p(x)=e^{-x}$), входит как множитель при e^{-x} в производную n -го порядка от функции $x^n e^{-x}$.

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1) \dots (n-k+1) x^k = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{[n(n-1) \dots (n-k+1)]^2}{k!} x^{n-k} = \\ &= (-1)^n \left(x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right); \end{aligned}$$

например

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, & L_1(x) &= -x + 1, \\ L_2(x) &= x^2 - 4x + 2, & L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6, \\ L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24. \end{aligned}$$

Ввиду того, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} x^k t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} t^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}, \end{aligned}$$

полиномы Лагерра также имеют простую производящую функцию, а именно

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}.$$

Из соотношения

$$(1-t)^2 \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = (1-t-x) \psi(x, t)$$

¹⁾ Laguerre E., Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$, Bull. Soc. math. France, т. 7, стр. 72—81, 1879; Oeuvres, т. 1, стр. 428—437, Paris 1898.

следует рекуррентная формула:

$$L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (33)$$

Эта формула и вытекающая из соотношения

$$(1-t) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = -t \phi(x, t)$$

формула

$$L'_n(x) - n L'_{n-1}(x) = -n L_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \quad (34)$$

приводят к формуле:

$$x L'_n(x) = n L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \quad (35)$$

и к однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (36)$$

для полинома Лагерра $L_n(x)$.

Свойство ортогональности

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0 \quad (n > m)$$

выводится из равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n(x) dx &= \int_0^{\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx = -k \int_0^{\infty} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx = \\ &= k(k-1) \int_0^{\infty} x^{k-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^n e^{-x}) dx = \dots \\ &\dots = (-1)^k k! \int_0^{\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) dx = 0 \quad \text{при } n > k. \end{aligned}$$

Для нормирования надо вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x) dx = \int_0^{\infty} (-1)^n x^n \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx = n! \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = (n!)^2;$$

функции

$$\varphi_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} L_\nu(x)}{\nu!} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

представляют, следовательно, ортогональную нормированную систему¹⁾.

¹⁾ И в данном случае можно было бы легко вывести свойства ортогональности функций φ_ν при помощи производящей функции.

6. Полиота системы полиномов Лагерра и Эрмита. Вопрос о полноте системы функций Лагерра или функций Эрмита требует особого рассмотрения, так как до сих пор мы доказывали полноту системы полиномов и т. д. только для конечных интервалов. Систему функций, заданных в интервале $0 \leq x < \infty$, мы будем называть полной системой, если, при помощи линейных комбинаций этих функций можно с произвольной точностью аппроксимировать в среднем любую кусочно-непрерывную функцию $f(x)$, для которой существует интеграл $\int_0^{\infty} f^2(x) dx$.

Чтобы доказать ¹⁾ полноту системы ортогональных функций Лагерра, умножаем обе части тождества

$$\psi(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x)$$

на $e^{-\frac{x}{2}}$ и получаем таким образом соответствующее тождество для ортогональных функций Лагерра

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)}{n!},$$

а именно:

$$g(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{1}{2} \frac{1+t}{1-t} x} = \sum t^n \varphi_n(x).$$

Бесконечный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x)$ при $|t| < 1$ сходится и в среднем к производящей функции $g(x, t)$. Это утверждение непосредственно доказывается путем преобразования интеграла:

$$\int_0^{\infty} [g(x, t) - \sum_{n=0}^N t^n \varphi_n(x)]^2 dx = \frac{1}{1-t^2} - \sum_0^N t^{2n},$$

причем мы пользуемся соотношениями:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g^2(x, t) dx &= \frac{1}{1-t^2}, \\ \int_0^{\infty} g(x, t) \varphi_n(x) dx &= t^n. \end{aligned}$$

Так как выражение $a = \frac{1}{2} \frac{1+t}{1-t}$ принимает все значения, заключающиеся между нулем и бесконечностью, когда t пробегает значения от

¹⁾ Пользуюсь личным сообщением И. Неймана (J. v. Neumann).

— 1 до +1, то можно с помощью ортогональных функций Лагерра аппроксимировать в среднем с произвольной точностью любую функцию e^{-ax} , где $0 < a < \infty$ в интервале $0 \leq x < \infty$. Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна в интервале $0 \leq x < \infty$, и пусть квадрат этой функции интегрируем в пределах от 0 до ∞ . Строим вспомогательную функцию $F(x)$, непрерывную в интервале $0 \leq x < \infty$ и удовлетворяющую следующим требованиям:

$$1^\circ. \quad \int_0^\infty [f(x) - F(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

где ε — произвольно малое положительное число,

$$2^\circ. \quad F(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \geq A,$$

где $A = A(\varepsilon)$ — достаточно большое число ¹⁾. Полагая далее $\xi = e^{-x}$, тогда $F(x)$ переходит в непрерывную функцию $\varphi(\xi)$ от ξ в интервале $0 \leq \xi \leq 1$, которая при $0 \leq \xi \leq e^{-A}$ равна нулю. По теореме Вейерштрасса можно равномерно аппроксимировать с помощью полиномов от ξ непрерывную в интервале $0 \leq \xi \leq 1$ функцию $\frac{\varphi(\xi)}{\xi}$, следовательно, существует такой полином $a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n$, что

$$\int_0^1 [\varphi(\xi) - a_1 \xi - \dots - a_n \xi^n]^2 \frac{d\xi}{\xi} < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает возможность аппроксимирования в среднем функции $F(x)$ в интервале $0 \leq x < \infty$ при помощи выражений вида:

$$a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} + \dots + a_n e^{-nx}$$

и, следовательно, на основании ранее доказанного возможность аппроксимирования в среднем функции $F(x)$ с помощью ортогональных функций Лагерра. Тем самым доказана возможность аппроксимирования в среднем данной кусочно-непрерывной функции $f(x)$. Этому эквивалентно утверждение, что имеет место условие полноты:

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v^2 = \int_0^\infty f^2(x) dx,$$

где

$$c_v = \int_0^\infty f(x) \varphi_v(x) dx$$

коэффициенты разложения.

Совершенно аналогичным образом доказывается полнота системы ортогональных функций Эрмита.

¹⁾ См. примечание к этой странице в конце книги. (Прим. перев.)

§ 10. Дополнения и задачи ко второй главе.

1. Решение Гурвица для изопериметрической задачи. *Изопериметрической задачей* называют задачу о нахождении среди всевозможных замкнутых плоских кривых данной длины той, которая охватывает наибольшую площадь. Как известно, решением является окружность; доказательство проведем, следуя Гурвицу (Hurwitz)¹⁾ и ограничиваясь кусочно-гладкими кривыми, следующим образом.

Пусть

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leq s \leq L$$

есть параметрическое выражение непрерывной, замкнутой, кусочно-гладкой кривой, имеющей длину L и заключающей внутри себя площадь F , причем параметром является длина дуги s . Введем вместо s в качестве параметра пропорциональную ей величину $t = \frac{2\pi s}{L}$, которая изменяется от 0 до 2π , в то время как s пробегает значения от 0 до L , и назовем коэффициенты Фурье от функций x и y через a_v , b_v и c_v , d_v ; тогда коэффициентами Фурье для функций $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ будут νb_v , $-\nu a_v$ и νd_v , $-\nu c_v$. Так как

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2,$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt,$$

мы получаем из условия полноты (9) и (9') соотношения:

$$2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2 + d_\nu^2),$$

$$\frac{F}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{dt} dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu).$$

Из двух последних формул следует:

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} [(\nu a_\nu - d_\nu)^2 + (\nu b_\nu + c_\nu)^2 + (\nu^2 - 1)(c_\nu^2 + d_\nu^2)] \geq 0.$$

Знак равенства может иметь место, очевидно, только в том случае, если

$$b_1 + c_1 = 0, \quad a_1 - d_1 = 0, \quad a_\nu = b_\nu = c_\nu = d_\nu = 0 \quad \text{при } \nu = 2, 3, \dots,$$

¹⁾ Hurwitz, A., Quelques applications géométriques des séries de Fourier, Ann. Ec. Norm., Série 3, т. 19, стр. 357—408, особенно стр. 392—397.

т. е. если

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\y &= \frac{1}{2} c_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t,\end{aligned}$$

и, следовательно, кривая является окружностью. Вместе с тем для всех непрерывных замкнутых, кусочно-гладких плоских кривых справедливо „изопериметрическое неравенство“.

$$L^2 - 4\pi F \geq 0, \quad (37)$$

где L — длина кривой, а F — площадь, заключенная внутри кривой; знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда кривая является окружностью. Тем самым доказано изопериметрическое свойство круга.

2. Взаимно обратные формулы. Требуется доказать эквивалентность формул¹⁾:

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^1 g(u) \operatorname{ctg} \pi(t-u) du, \\-g(u) &= \int_0^1 f(t) \operatorname{ctg} \pi(u-t) dt,\end{aligned}$$

причем предполагается, что

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(u) du &= 0, & \int_0^1 f(t) dt &= 0, \\g(u) &= g(u+1), & f(t) &= f(t+1)\end{aligned}$$

и что берется „главное значение“ интегралов в смысле Коши, сначала, с помощью теории рядов Фурье, а затем с помощью теоремы Коши.

3. Интеграл Фурье и сходимости в среднем. Теорию интеграла Фурье можно развить так же, как и теорию рядов Фурье, исходя из понятия о сходимости в среднем.

Пусть действительная или комплексная функция $f(x)$ кусочно-непрерывна в любом конечном интервале, и пусть существуют интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Попытаемся дать наилучшее приближение в среднем функции $f(x)$ с помощью интегралов вида:

$$\int_{-T}^T \varphi(t) e^{ixt} dt.$$

¹⁾ См. Hilbert D., Integralgleichungen, стр. 75.

т. е. придать интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \int_{-T}^T \varphi(t) e^{ixt} dt \right|^2 dx$$

при постоянном значении T наименьшее возможное значение.

На основании следующего преобразования, которое нетрудно доказать,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \int_{-T}^T \varphi(t) e^{ixt} dt \right|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx + \\ &+ 2\pi \int_{-T}^T |\varphi(x) - g(x)|^2 dx - 2\pi \int_{-T}^T |g(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

где

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi,$$

обнаруживается, что наш интеграл принимает наименьшее значение, когда

$$\varphi(t) = g(t).$$

Далее, в пределе при $T \rightarrow \infty$ получаем соотношение полноты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Доказательство этого предложения, как и переход к интегральной теореме Фурье, мы здесь, однако, приводить не станем.

4. Спектральное разложение с помощью ряда Фурье и интеграла Фурье. Ряд Фурье и интеграл Фурье встречаются в тех вопросах, где речь идет о выражении данного процесса или хода изменения данной функции в виде наложения периодических процессов или периодических функций, или, как говорят, о спектральном разложении процесса.

Если $f(x)$ есть заданная в интервале $-l \leq x \leq l$ функция, а

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v e^{\frac{i\pi vx}{l}}$$

ее ряд Фурье, то говорят, что функция разложена на периодические функции с „дискретными частотами“

$$\frac{v\pi}{l} \quad (v=0, 1, \dots)$$

и „амплитудами“

$$|a_v| = \frac{1}{2l} \left| \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i\pi v x}{l}} dx \right|.$$

Если же рассматривают бесконечную область $-\infty < x < \infty$, то говорят о разложении $f(x)$ в *непрерывный спектр*, причем частоте u соответствует *плотность спектра*

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx.$$

Функция

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{i\omega x} \text{ при } |x| < l, \\ f(x) &= 0 \text{ при } |x| > l, \end{aligned}$$

соответствующая конечному отрезку синусоиды, состоящему из $n = \frac{l\omega}{\pi}$ волн, представляет принципиальный интерес для физики¹⁾. Для этой функции плотность спектра равна:

$$g(u) = \int_{-l}^l e^{i(\omega-u)x} dx = \frac{2 \sin(\omega-u)l}{\omega-u}.$$

При $u = \omega$ функция $|g(u)|$, рассматриваемая как функция от u , имеет максимум, который тем резче выражен, чем больше число волн n . При больших значениях n плотность спектра для значений u , лежащих вне произвольно малого интервала $\omega - \delta \leq u \leq \omega + \delta$, будет сравнительно очень мала.

5. **Плотные системы функций.** Следуя Г. Мюнцу (Müntz), мы будем называть плотной системой²⁾ функций систему, обладающую тем свойством, что всякая функция $f(x)$, которая может быть аппроксимирована в среднем с любой точностью при помощи конечного числа функций этой системы, может быть таким же образом аппроксимирована и при помощи функций из произвольно выхваченного из первоначальной системы бесконечного частичного множества. Замечательный факт, что существуют нетривиальные примеры таких систем (тривиальным случаем, например, является тот, когда все функции равны между собой), проще всего можно установить, следуя Сего (Szegő)²⁾, на основании следующей теоремы. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — положительные числа, которые с возрастанием n стремятся к бесконечности, то функции

$$\frac{1}{x + \lambda_1}, \frac{1}{x + \lambda_2}, \dots, \frac{1}{x + \lambda_n}, \dots$$

¹⁾ Этот пример иллюстрирует тот факт, что конечному числу синусоидальных волн в оптике никогда не соответствует резкая спектральная линия, а спектр конечной ширины, который будет тем уже и интенсивнее, чем при данной частоте больше число волн.

²⁾ Szegő G., Über dichte Funktionenfamilien, Berichte der Sachs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, т. 78, 1926.

образуют в любом конечном положительном интервале полную систему функций.

Из этой теоремы следует так же и плотность нашей системы, так как любая подпоследовательность чисел λ_n обладает требуемыми в условии теоремы свойствами.

На основании теоремы Вейерштрасса об аппроксимировании достаточно доказать, что любую степень x^m можно равномерно аппроксимировать при помощи функций $\frac{1}{x + \lambda_n}$.

Но рациональная функция

$$x^m \frac{\lambda_p \lambda_{p+1} \dots \lambda_q}{(x + \lambda_p)(x + \lambda_{p+1}) \dots (x + \lambda_q)}$$

сходится при возрастании p при любом $q \geq p$ к x^m и притом равномерно во всяком конечном положительном интервале. Если будем выбирать всякий раз $q - p \geq m$, то можно будет рассматриваемую рациональную функцию путем разложения на элементарные дроби привести к виду:

$$\frac{A_p}{x + \lambda_p} + \frac{A_{p+1}}{x + \lambda_{p+1}} + \dots + \frac{A_q}{x + \lambda_q},$$

где $A_p, A_{p+1}, \dots, A_q$ — постоянные числа, так как мы можем считать, что все λ_n различны между собой. Но полученное выражение представляет собой линейную комбинацию функций исследуемой системы.

Другие примеры плотных систем функций были указаны Мюнцем¹⁾.

6. Теорема Г. Мюнца о полноте системы степеней. Мюнц²⁾ указал следующую интересную теорему.

Бесконечная последовательность степеней $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots$ с возрастающими положительными показателями представляет полную систему функций в интервале $0 \leq x \leq 1$ в том и только в том случае, если

ряд $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v}$ расходится.

7. Теорема Фейера. Из теоремы Вейерштрасса об аппроксимировании мы вывели заключение, что любую непрерывную периодическую функцию можно равномерно аппроксимировать при помощи тригонометрических многочленов. Мы можем получить такие аппроксимирующие многочлены очень просто на основании следующей теоремы, найденной Фейером³⁾. Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция,

¹⁾ Muntz H., Dichte Funktionensysteme, Mathem. Zeitschrift, т. 21, 1924.

²⁾ Muntz H., Über den Approximationssatz von Weierstrass, Festschrift H. A. Schwarz, 1914, стр. 303; Szasz O., Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Ann., т. 77, 1926.

³⁾ Fejer L., Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Ann., т. 58, 1904.

$s_n(x)$ — частичные суммы ее ряда Фурье, то последовательность средних арифметических

$$S_n(x) = \frac{s_1(x) + s_2(x) + \dots + s_n(x)}{n} = \frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt$$

сходится равномерно к $f(x)$ ¹⁾.

Аналогичная теорема имеет место для интеграла Фурье.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в любой конечной области, и пусть существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$; мы полагаем

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$$

и

$$s_T(x) = \int_{-T}^T g(t) e^{ixt} dt,$$

тогда последовательность арифметических средних

$$S_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(x) dT = \frac{2}{\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \left(\frac{\sin \frac{Tt}{2}}{t} \right)^2 dt$$

равномерно сходится во всяком конечном интервале к функции $f(x)$. В частности сходимость равномерна во всем интервале $-\infty < x < \infty$, если функция $f(x)$ равномерно непрерывна во всем этом интервале.

8. Формулы обращения Мелина²⁾.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s = \sigma + ti$ — комплексная переменная. Допустим, что функция $f(s)$ регулярна в полосе $\alpha < \sigma < \beta$ и что $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + ti)| dt$ сходится в этой полосе. Пусть, далее, в каждой более узкой полосе $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$ ($\delta > 0$) есть произвольно малое постоянное число функция $f(s)$ равномерно стремится к нулю с возрастанием абсолют-

¹⁾ См. примечание в конце книги.

²⁾ Mellin H., Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzgleichungen, Acta Math., т. 25, стр. 139–164, особенно стр. 156–162, 1902; Fujiwara M., Über Abelsche erzeugende Funktionen und Darstellbarkeitsbedingungen von Funktionen durch Dirichletsche Reihen, Tôhoku math. J., т. 17, стр. 363–383, особенно стр. 379–383, 1920; Hamburger H., Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ -Funktion (первое сообщение), Math. Ztschr., т. 10, стр. 240–254, особенно стр. 242–247, 1921.

ного значения ординаты t . Полагая при этих условиях для действительных положительных значений x

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} x^{-s} f(s) ds, \quad (38)$$

причем σ сохраняет постоянное значение, получаем, что в полосе $\alpha < \sigma < \beta$ имеет место соотношение:

$$f(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx. \quad (39)$$

Доказательство. В силу допущения, что $f(s)$ равномерно стремится к нулю при $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$ и $|t| \rightarrow \infty$, мы имеем право в формуле (38) смещать прямую, по которой производится интегрирование. Следовательно, функция $g(x)$ не зависит от σ . Выберем две абсциссы σ_1 и σ_2 , удовлетворяющие условию $\alpha < \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 < \beta$; тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx &= \int_0^1 x^{s-1} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - \infty i}^{\sigma_1 + \infty i} x^{-s_1} f(s_1) ds_1 + \\ &+ \int_1^{\infty} x^{s-1} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - \infty i}^{\sigma_2 + \infty i} x^{-s_2} f(s_2) ds_2 = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

В этих интегралах мы имеем право изменить порядок интегрирования, так как на основании оценок

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma_1 + ti)| dt \int_0^1 x^{-1 + (\sigma - \sigma_1)} dx, \\ |J_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma_2 + ti)| dt \int_1^{\infty} x^{-1 + (\sigma - \sigma_2)} dx \end{aligned}$$

имеет место абсолютная сходимость. Таким образом получаем:

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - \infty i}^{\sigma_2 + \infty i} \frac{f(s_2)}{s_2 - s} ds_2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - \infty i}^{\sigma_1 + \infty i} \frac{f(s_1)}{s_1 - s} ds_1.$$

Разность, стоящая в правой части, равна $f(s)$ на основании интегральной формулы Коши. В самом деле, интегралы, взятые по горизонтальным отрезкам между вертикальными прямыми $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$, при $|t| \rightarrow \infty$ исчезают, так как $f(s) \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 2. При $x > 0$ пусть функция $g(x)$ будет кусочно-гладкой функцией, а интеграл $\int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx$ при $\alpha < \sigma < \beta$ — абсолютно

сходящимся. При этих условиях из формулы (39) следует обратная ей формула (38).

Доказательство. Полагая $x = e^u$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} x^{-s} f(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u(\sigma + it)} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{v(\sigma + it)} g(e^v) dv = \\ &= \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(v-u)} e^{v\sigma} g(e^v) dv. \end{aligned}$$

На основании интегральной теоремы Фурье (16) последнее выражение равно $e^{-u\sigma} e^{u\sigma} g(e^u) = g(x)$, что и требовалось доказать.

Примеры на преобразование Мелина.

а) Пусть

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{„ } x = 1 \\ 0 & \text{„ } x > 1 \end{cases}$$

Так как интеграл $\int_0^{\infty} x^{\sigma-1} g(x) dx$ абсолютно сходится при $\sigma > 0$, то из соотношения

$$f(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx = \frac{1}{s} \quad (\sigma > 0)$$

вытекает формула:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} \frac{x^{-s}}{s} ds.$$

Эта формула играет роль в теории рядов Дирихле.

б) Из соотношения

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (\sigma > 0)$$

следует:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} x^{-s} \Gamma(s) ds \quad (\sigma > 0).$$

в) Формула

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (\sigma > 1),$$

где $\zeta(s)$ означает риманову дзета-функцию, дает:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} x^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) ds \quad (\sigma > 1).$$

г) Обращением формулы

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \left(\Gamma \frac{s}{2} \right) \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\pi v^2 x} dx = \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{\vartheta(x) - 1}{2} dx \quad (\sigma > 1)$$

является формула:

$$\vartheta(x) = 1 + \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} x^{-s} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) ds. \quad (\sigma > 1).$$

Формула преобразования интегралов Мелина является важным вспомогательным средством в аналитической теории чисел и вообще часто встречается в анализе.

9. Явление Гиббса. Если вычертить для кусочно-гладкой функции $f(x)$ волнистые кривые, изображающие частичные суммы ее ряда Фурье, то оказывается, что во всяком интервале, не содержащем в себе точек разрыва, в котором ряд Фурье сходится равномерно, эти кривые все более и более примыкают к кривой, изображающей функцию $f(x)$; однако в непосредственной окрестности точек разрыва, где сходимость неравномерна, имеются волны, которые все ближе и ближе подходят к точке разрыва и становятся все более узкими, но отклонение которых от кривой $y=f(x)$ не стремится к нулю. Это явление называют явлением Гиббса¹⁾. Чтобы подробнее изучить это явление, можно на основании рассуждений § 5 ограничиться рассмотрением специального ряда Фурье:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin vx}{v} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Пользуясь формулой

$$s_n(x) = \sum_{v=1}^n \frac{\sin vx}{v} = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt,$$

¹⁾ Этот факт был сперва обнаружен Гиббсом чисто эмпирическим путем. *Gibbs J. W.*, *Fourier's series*, *Nature*, т. 59, стр. 250, стр. 606; 1898—1899, *Papers*, т. 2, стр. 258—260, London, New York and Bombay 1906.

мы можем представить остаток ряда в виде:

$$r_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

или в виде:

$$r_n(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\left(n + \frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin t}{t} dt + \rho_n(x),$$

где для краткости полагаем

$$\rho_n(x) = \int_0^x \frac{2 \sin \frac{t}{2} - t}{2t \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt.$$

Как легко убедиться при помощи дифференцирования, приближение является наилучшим в точках

$$x_k = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

в которых остаток достигает максимума или минимума

$$r_n(x_k) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \rho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

С возрастанием n при постоянном значении k выражение $\rho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ стремится к нулю, следовательно, остаток $r_n(x_k)$, т. е. отклонение аппроксимирующей кривой от кривой $y = \frac{\pi - x}{2}$ в точке x_k , неограниченно приближающейся к точке разрыва, стремится к значению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x_k) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Например, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x_1) \approx -0,2811$, т. е. аппроксимирующая кривая поднимается над кривой $y = \frac{\pi - x}{2}$ на расстояние, составляющее приблизительно 90/0 высоты скачка функции¹⁾.

¹⁾ Bocher M., Introduction to the theory of Fourier's series, Annals of math., серия 2, т. 7 стр. 81—152, особенно стр. 123—132, 1906; Runge C., Theorie und Praxis der Reihen, стр. 170—182, Leipzig 1904. Относительно обобщения явления

Подчеркнем еще тот факт, что при аппроксимировании с помощью сумм Фейера явление Гиббса не имеет места.

10. Теорема об определителе Грама. Пусть G' является частичной областью основной области G , и пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, кусочно-непрерывны в области G ; если Γ есть их определитель Грама для области G , а Γ' — для области G' , то

$$\Gamma' \leq \Gamma.$$

Доказательство непосредственно вытекает из максимально-минимального свойства собственных значений. В самом деле, Γ представляет произведение характеристических чисел квадратичной формы:

$$K(t, t) = \int_G (t_1 \varphi_1 + \dots + t_n \varphi_n)^2 dG,$$

Γ' представляет соответствующее произведение для квадратичной формы

$$K'(t, t) = \int_{G'} (t_1 \varphi_1 + \dots + t_n \varphi_n)^2 dG;$$

но ясно, что

$$K'(t, t) \leq K(t, t),$$

следовательно, и каждое характеристическое число для формы $K'(t, t)$ не больше соответствующего характеристического числа для $K(t, t)$.

Другое доказательство можно получить из следующего выражения определителя Грама:

$$\Gamma = \left| \int_0^1 \varphi_i \varphi_k dx \right| = \frac{1}{n!} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

причем мы для краткости предполагаем, что функции зависят только от одной независимой переменной x , изменяющейся в основной области $0 < x < 1$; это выражение в точности соответствует формуле (45) первой главы¹⁾.

11. Применение понятия интеграла Лебега. Многие факты и соотношения, установленные в этой главе, существенно дополняются, если вместо элементарного понятия риманова интеграла положить в основу понятие интеграла, формулированное Лебегом. Для этого приходится расширить класс функций, рассматривая все функции, интегрируемые в смысле Лебега, или, как говорят, все *суммируемые* функции, и нужно воспользоваться основными фактами из теории Лебега. Теория Лебега исходит из понятия меры точечного множества M ; мы

Гиббса на другие ортогональные системы функций и специально на системы таких функций от многих переменных см. Weyl H., Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen, Rend. Circolo mat. Palermo, т. 29, стр. 308, 323, 1910; Über die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene, там же т. 30, стр. 377—407, 1910.

¹⁾ См. Kneser A., Zur Theorie der Determinanten, Festschr. H. A. Schwarz, стр. 177—191, Berlin 1914, а также Kowalewski G., Determinanten.

предположим, что оно лежит в конечном интервале. Представим себе, что все точки множества M каким угодно образом включены в счетное множество интервалов, причем эти интервалы могут частично покрывать друг друга.

Пусть m является нижней границей суммы длин таких интервалов; пусть, далее, m' будет соответствующей нижней границей для точек дополнительного множества M' т. е. для множества всех точек данного интервала, которые не принадлежат множеству M . Если число $m + m'$ равно длине интервала, то множество M называется *измеримым* и число m называется *мерой* этого множества. Согласно этому определению любое счетное множество точек имеет меру нуль (есть „множество меры нуль“).

Если возьмем теперь функцию $f(x)$, определенную в интервале $G(a \leq x \leq b)$ и ограниченную в этом интервале, значения которой принадлежат некоторому интервалу J , то мы разобьем этот интервал на частичные интервалы $J_1, J_2, \dots, J_n$; если для каждого частичного интервала J_j существует мера m_j точечного множества в G , на котором функция $f(x)$ принимает значения из J_j , то функция $f(x)$ называется измеримой в G . В таком случае сумма $\sum_{j=1}^n m_j f_j$, в которой f_j

означает значение функции f из интервала J_j , стремится к определенному пределу, не зависящему от специального выбора предельного перехода, если только длины интервалов J_j равномерно стремятся к нулю. Этот предел называется *интегралом (Лебега)* от функции $f(x)$ и обозначается, так же, как и обыкновенный риманов интеграл, естественным обобщением которого он является. Для функции, которая имеет отличные от нуля значения только на множестве меры нуль, интеграл всегда равен нулю. Мы можем, следовательно, представить себе, что на произвольном множестве меры нуль, например, во всех рациональных точках значения функции произвольно изменены, но это не повлияет на значение интеграла, это указывает, что при помощи нового определения мы значительно расширили класс интегрируемых функций. Функцию, интегрируемую в смысле Лебега, называют *суммируемой* функцией.

Понятие интеграла Лебега может быть распространено также на функции, которые не остаются ограниченными в рассматриваемой области. Для этого мы сперва интегрируем по тем частичным областям, в которых $|f(x)| < N$, и затем неограниченно увеличиваем число N . Если при этом интеграл стремится к определенному пределу, то этот предел и называется *лебеговым интегралом*, взятым по всей области.

Для нас важны следующие положения, которые можно вывести на основании только что установленных понятий.

а) *Теорема сходимости Лебега*. Если дана последовательность суммируемых в интервале $a \dots b$ функций и если для любого значения x из нашего интервала функции $f_n(x)$ стремятся с возрастанием n к функции $F(x)$, то можно и в том случае, когда сходимость не равномерна, заключить, что имеет место соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int F(x) dx,$$

когда скоро все функции $f_n(x)$ по абсолютному значению остаются меньше некоторой грани, не зависящей от n .

Впрочем, достаточно даже, чтобы имело место неравенство:

$$|\dot{f}_n(x)| \leq \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ определенная, не зависящая от n суммируемая функция.

Эти теоремы позволяют доказать законность почленного интегрирования бесконечных рядов во многих случаях неравномерной сходимости.

б) *Сходимость в среднем*. Пусть последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots$ состоит из суммируемых функций, квадраты которых также суммируемы, и пусть

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \int (f_n - f_m)^2 dx = 0.$$

Тогда говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ *сходится в среднем*. Имеет место теорема: из каждой такой последовательности функций можно выделить подпоследовательность f_{n_i} , которая сходится к суммируемой функции $f(x)$ повсюду за исключением, быть может, множества меры нуль.

в) *Теорема Фишера-Рисса*¹⁾. Эта теорема может быть выражена в двух эквивалентных формах.

Формулировка Фишера. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots$ и их квадраты суммируемы, и пусть

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \int (f_n - f_m)^2 dx = 0.$$

В таком случае существует суммируемая функция $f(x)$, квадрат которой также представляет суммируемую функцию, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int [f(x) - f_n(x)]^2 dx = 0.$$

Формулировка Рисса. Если $\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x), \dots$ — произвольно заданная система ортогональных функций и если $a_1, a_2, a_3, \dots$ — любая последовательность действительных чисел, для которой ряд $\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2$

сходится, то существует суммируемая функция $f(x)$, квадрат которой также суммируем, такая, что $a_v = (f, \omega_v)$. С помощью этой теоремы мы устанавливаем, что соотношения § 1 обратимы, если только указанным образом расширить класс функций и понятие интеграла.

г) *Полнота и замкнутость системы функций*. Система функций называется *замкнутой*, если не существует нормированной функции, ортогональной ко всем функциям системы; при этом мы раз навсегда предполагаем, что рассматриваемые функции и их квадраты суммируемы.

¹⁾ *Riesz F.* Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, C. R. Acad. sc. Paris, т. 141, стр. 615—619, 1907; Über orthogonale Funktionensysteme, Nachr. Ges. Göttingen (math. phys. Kl.), стр. 116—122, 1907; *Fischer E.*, Sur la convergence en moyenne, C. R. Acad. sc. Paris, т. 144, стр. 1022—1024, 1907.

Тогда справедлива теорема: всякая замкнутая система функций является полной системой, и обратно. В самом деле, если функция $f(x)$ не равна нулю, за исключением, быть может, точек множества меры нуль, и ортогональна ко всем функциям системы $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots$, которую мы считаем ортогональной, то

$$0 = \sum_{v=1}^{\infty} (f, \omega_v)^2 < \int f^2 dx,$$

следовательно, система функций не является полной системой. Обратно, если система не является полной системой, то существует такая функция $f(x)$, что

$$\int f^2 dx - \sum_{v=1}^{\infty} a_v^2 > 0,$$

где

$$a_v = (f, \omega_v);$$

в таком случае функции

$$f_n = f - \sum_{v=1}^n a_v \omega_v$$

на основании теоремы Фишера-Рисса (формулировка Фишера) сходятся в среднем к некоторой функции $\varphi(x)$, которая ортогональна ко всем функциям ω_v . Таким образом система не может быть замкнутой.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ II.

Учебники:

Borel E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes, Paris 1905.

Carlsaw H. S., Introduction to the theory of Fourier's series and integrals, 2-е изд., London 1921.

Heine H., Handbuch der Kugelfunktionen, т. 1 и 2, 2-е изд., Berlin 1878 и 1891.

Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1912 (цитир. „Integralgleichungen“).

Hobson E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambridge 1907.

Lebesgue H., Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives Paris 1904; Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1906.

Whittaker E. T. and Watson G. N., A course of modern analysis, 3-е изд. Cambridge 1920.

Монографии и статьи:

Bocher M., Introduction to the theory of Fourier's series, Annals of math., серия 2, т. 7, стр. 81—152, 1906.

Courant R., Über die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik, Math. Ann., т. 85, стр. 280—325 1922; Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, там же т. 89, стр. 161—178, 1923.

Hilbert D., Über das Dirichletsche-Prinzip, Festschr. Ges. Göttingen 1901, Berlin 1901; вновь напечатано Math. Annalen, т. 59, стр. 161—186, 1904.

Montel P., Sur les suites infinies de fonctions, Ann. Éc. Norm., серия 3, т. 24, стр. 233—334, 1907.

Szegő G., Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi, Math. Zeitschr., т. 1, стр. 31—356, 1918; Über Orthogonalsysteme von Polynomen, там же т. 4, стр. 139—157, 1919; Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, там же, т. 12, стр. 61—94, 1922.

ГЛАВА III.

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ.

1. Обозначения и основные понятия. Пусть $K(s, t)$ — определенная в области $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ и непрерывная в этой области функция обоих переменных s и t , и пусть λ — параметр. Пусть, далее, $f(s)$ и $\varphi(s)$ — две, непрерывные в интервале $a \leq s \leq b$ функции переменной s , связанные функциональным уравнением:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (1)$$

(Условимся раз навсегда, что интегралы без дальнейшего обозначения области интегрирования должны всегда распространяться по вышеуказанной „основной области“ переменных.) Посредством функционального уравнения (1), которое мы будем называть *линейным интегральным уравнением второго рода с ядром $K(s, t)$* , каждой непрерывной функции $\varphi(s)$ отнесена другая $f(s)$, и к тому же линейным образом, так что всякой линейной комбинации $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ относится соответствующая комбинация $c_1f_1 + c_2f_2$. Мы будем здесь заниматься преимущественно *решением* интегрального уравнения, т. е. вопросом об определении функции $\varphi(s)$ по заданной $f(s)$. При этом предполагаем, если только точно не указано противоположное, что все встречающиеся величины действительны.

Если функция $f(s)$ тождественно исчезает, то говорят об *однородном интегральном уравнении*; в том случае, если последнее обладает, помимо тривиального решения $\varphi = 0$, еще другими решениями φ , то это нетривиальное решение можно помножить на постоянный множитель, и следовательно, его можно также полагать нормированным.

Одновременно с различными решениями $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ однородного уравнения являются также решениями все линейные комбинации $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots$. Несколько таких линейно независимых решений мы поэтому можем и будем всегда представлять себе нормированными и взаимно ортогональными, ибо в противном случае мы можем их подвергнуть процессу ортогонализации, описанному в главе II, § 1, без того, чтобы они перестали быть решениями. Такое значение λ , для которого однородное интегральное уравнение имеет отличные от нуля решения, мы будем называть *собственным значением ядра*, а соответствующие решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, которые будем предполагать взаимно ортогональными, —

собственными или фундаментальными функциями ядра, принадлежащими собственному значению λ . Число их ограничено. В самом деле, согласно неравенству Бесселя (гл. II, § 1), примененному к-ядру $K(s, t)$ и ортогональным нормированным функциям $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$,

$$\lambda^2 \int K(s, t)^2 dt \geq \lambda^2 \sum_{i=1}^h \left[\int K(s, t) \varphi_i(t) dt \right]^2 = \sum_{i=1}^h \varphi_i(s)^2,$$

а следовательно, интегрируя по s :

$$\lambda^2 \iint K(s, t)^2 ds dt \geq h,$$

т. е. для h получается верхняя грань. Можно сказать: *всякое собственное значение имеет конечную кратность* (т. е. конечное число линейно независимых решений).

Наше интегральное уравнение представляет собою, как это выяснится в § 6, естественное обобщение той проблемы линейной алгебры, которую мы рассмотрели в гл. I, § 2. Его значение для математического анализа состоит в том, между прочим, что многие иначе разрозненные соображения благодаря ему объединяются общей точкой зрения.

2. Истокообразно представленные функции. Член, типичный для интегрального уравнения (1), дается интегралом вида:

$$g(s) = \int K(s, t) h(t) dt. \quad (2)$$

О функции g , заданной равенством (2) при посредстве функции h и ядра K , говорят, что она представлена истокообразно.

Если $h(t)$ — кусочно-непрерывна, то функция $g(s)$ наверно непрерывна. Но о ней можно сказать еще более: если $\int h(t)^2 dt \leq M$, где M означает определенное число, то функции, представленные равенством (2), *равностепенно* непрерывны (*gleichgradig stetig*) в своей совокупности, т. е. для всякого положительного числа ε существует, независимо от специального вида функции $h(t)$, положительное число $\delta(\varepsilon)$ такого рода, что из неравенства $|\eta| < \delta$ вытекает соотношение

$$|g(s + \eta) - g(s)| < \varepsilon$$

(ср. гл. II, § 2). Действительно, из неравенства Шварца следует, что

$$[g(s + \eta) - g(s)]^2 \leq M \int [K(s + \eta, t) - K(s, t)]^2 dt,$$

откуда, в силу равномерной непрерывности ядра, непосредственно получается наше утверждение; ибо независимо от t , имеет место неравенство:

$$|K(s + \eta, t) - K(s, t)| < \sigma$$

с произвольно малым σ , коль скоро η достаточно мало.

Далее, если функции $K_n(s, t)$ равномерно стремятся к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s, t) = K(s, t),$$

то при заданной $h(t)$ справедливо соотношение:

$$g(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int K_n(s, t) h(t) dt$$

в смысле равномерной сходимости относительно s , так как предельный переход можно выполнить под знаком интеграла. Таким образом непосредственно следует, что все функции вида:

$$g_n(s) = \int K_n(s, t) h(t) dt, \quad g(s) = \int K(s, t) h(t) dt$$

равностепенно непрерывны для всех рассматриваемых функций $h(t)$, если только $\int h^2 dt \leq M$. Точно так же все эти функции равномерно ограничены, т. е. все они по абсолютной величине лежат ниже одной общей грани, что непосредственно следует из неравенства Шварца:

$$g_n(s)^2 \leq M \int [K_n(s, t)]^2 dt \text{ и соответственно } g(s)^2 \leq M \int [K(s, t)]^2 dt.$$

3. Выродившиеся ядра. Ядро, которое можно представить в виде конечной суммы произведений функции от s на функцию от t :

$$A(s, t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(s) \beta_i(t), \quad (3)$$

мы будем называть *выродившимся ядром*. Можно при этом допустить, что функции $\alpha_i(s)$, а также функции $\beta_i(t)$ линейно независимы между собою, ибо в противном случае можно было бы одни из этих функций выразить линейно через другие и таким образом удалось бы представить ядро $A(s, t)$ в виде суммы меньше чем p произведений вышеуказанного типа. Из теоремы о возможности равномерно аппроксимировать непрерывную функцию $K(s, t)$ полиномами (ср. гл. II, § 4) следует, что ядро $K(s, t)$ можно, как угодно точно, равномерно аппроксимировать выродившимися ядрами, так как всякий полином относительно s и t представляет собою, очевидно, выродившееся ядро.

Выродившееся ядро допускает следующее преобразование в другую, часто удобную форму. Представим себе, что $2p$ функций от s : $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s)$, ..., $\alpha_p(s)$; $\beta_1(s)$, $\beta_2(s)$, ..., $\beta_p(s)$ выражены линейно через систему нормированных ортогональных функций $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$, ..., $\omega_q(s)$, чего всегда можно достигнуть ортогонализацией заданных функций. Тогда ядро $A(s, t)$ принимает форму двойной суммы:

$$A(s, t) = \sum_{i,j=1}^q c_{ij} \omega_i(s) \omega_j(t). \quad (4)$$

Произведения $\omega_i(s) \omega_j(t)$ образуют систему q^2 функций от s и t , заданных в квадрате $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ и взаимно ортогональных, а следовательно, и линейно независимых.

Если ядро $A(s, t)$ симметрично, т. е. $A(s, t) = A(t, s)$ тождественно, то

$$\sum_{i,j=1}^q (c_{ij} - c_{ji}) \omega_i(s) \omega_j(t) = 0,$$

что в силу линейной независимости произведений $\omega_i(s) \omega_j(t)$ означает, что $c_{ij} = c_{ji}$.

Симметрическое ядро $K(s, t)$ всегда возможно равномерно аппроксимировать симметрическими выродившимися ядрами. Чтобы убедиться в этом, достаточно лишь, в случае необходимости, заменить $A(s, t)$ функцией $\frac{1}{2}[A(s, t) + A(t, s)]$, которая одновременно с $A(s, t)$ равномерно аппроксимирует ядро $K(s, t)$.

§ 2. Теоремы Фредгольма для выродившегося ядра.

Основные теоремы общей теории интегральных уравнений, доказанные впервые Фредгольмом ¹⁾ (Fredholm), полностью соответствуют основным теоремам теории линейных уравнений и могут быть сформулированы следующим образом.

Интегральное уравнение

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

при заданном λ либо имеет для всякой произвольно заданной непрерывной функции $f(s)$ одно и только одно непрерывное решение $\varphi(s)$, в частности решение $\varphi = 0$ для $f = 0$, или же соответствующее однородное уравнение

$$\phi(s) = \lambda \int K(s, t) \phi(t) dt \quad (5)$$

имеет положительное конечное число r линейно независимых решений $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$. В первом случае соответствующее уравнению (1) „транспонированное“ интегральное уравнение:

$$g(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(t, s) \varphi(t) dt \quad (6)$$

также всегда имеет однозначно определенное решение; во втором же случае транспонированное однородное уравнение

$$\chi(s) = \lambda \int K(t, s) \chi(t) dt \quad (7)$$

¹⁾ Fredholm J., Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta math. т. 27, стр. 365—390, 1903.

имеет также r линейно независимых решений $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$, а неоднородное интегральное уравнение (1) имеет решение в том и только в том случае, если заданная функция $f(s)$ удовлетворяет r условиям

$$(f, \chi_i) = \int f(s) \chi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r). \quad (8)$$

Решение уравнения (1) определяется в этом случае лишь до произвольной аддитивной линейной комбинации $c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + \dots + c_r \phi_r$; его можно сделать однозначно определенным с помощью требований:

$$(\phi, \phi_i) = \int \phi(s) \phi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Мы докажем эти теоремы прежде всего для того случая, когда ядро $K(s, t) = A(s, t)$ выродилось и представлено равенством (3). В этом случае теория нашего интегрального уравнения почти непосредственно сводится к теории системы p линейных уравнений с p неизвестными. В самом деле, напомним интегральное уравнение в следующем виде:

$$f(s) = \phi(s) - \lambda \sum_{i=1}^p \alpha_i(s) \int \beta_i(t) \phi(t) dt; \quad (9)$$

положим $x_i = (\beta_i, \phi)$, помножим затем уравнение (9) на $\beta_j(s)$ и проинтегрируем по s , тогда для величин x_i получим систему уравнений:

$$f_j = x_j - \lambda \sum_{i=1}^p c_{ji} x_i \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad (10)$$

где $f_j = (\beta_j, f)$ и $c_{ji} = (\beta_j, \alpha_i)$. Если эта система уравнений имеет одно, и только одно решение $x_1, x_2, \dots, x_p$, то функция

$$\phi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^p x_i \alpha_i(s)$$

наверно является решением интегрального уравнения, что непосредственно подтверждается, если подставить эту функцию в интегральное уравнение, принимая во внимание уравнения (10). Если обозначить через $y_1, y_2, \dots, y_p$ также существующее в этом случае решение транспонированной системы

$$g_j = y_j - \lambda \sum_{i=1}^p c_{ij} y_i, \quad (11)$$

то функция $\phi(s) = g(s) + \lambda \sum_{i=1}^p y_i \beta_i(s)$ является решением транспонированного интегрального уравнения (6). Если, напротив, $x_1, x_2, \dots, x_p$

есть нетривиальное решение однородной системы уравнений:

$$0 = x_j - \lambda \sum_{i=1}^p c_{ji} x_i \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad (12)$$

то функция $\phi(s) = \lambda \sum_{i=1}^p x_i a_i(s)$ является нетривиальным решением однородного интегрального уравнения (5). Два линейно независимых решения $x_1, x_2, \dots, x_p$ и $x'_1, \dots, x'_2, \dots, x'_p$ однородной системы (12), очевидно, дают два линейно независимых решения

$$\phi(s) = \lambda \sum_{i=1}^p x_i a_i(s) \quad \text{и} \quad \phi'(s) = \lambda \sum_{i=1}^p x'_i a_i(s),$$

и наоборот.

Однако наличие r линейно независимых решений $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$ уравнения (5) и тем самым r независимых решений системы (12) равносильно существованию такого же числа линейно независимых решений $y_1, y_2, \dots, y_{lp}$ ($l=1, 2, \dots, r$) транспонированной системы уравнений:

$$g_j = y_j - \lambda \sum_{i=1}^p c_{ij} y_i \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad (13)$$

где $g_j = 0$, и тем самым наличием r линейно независимых решений:

$$\chi_1(s), \chi_2(s), \dots, \chi_r(s)$$

транспонированного однородного интегрального уравнения (7), причем

$$\chi_l(s) = \lambda \sum_{j=1}^p y_{lj} \beta_j(s). \quad (14)$$

Теоремы теории уравнений утверждают, однако, что в случае $r=0$ уравнения (10) а, следовательно, и (13) и (6) всегда однозначно разрешимы, в случае же $r>0$ для разрешимости неоднородной системы (10) и вместе с тем интегрального уравнения (5) необходимо и достаточно выполнение для f_j следующих условий:

$$\sum_{j=1}^p f_j y_{lj} = 0 \quad (l=1, 2, \dots, r). \quad (15)$$

В силу определения величин y_{lj} и f_j эти условия принимают следующий вид:

$$(f, \chi_l) = 0 \quad (l=1, 2, \dots, r). \quad (16)$$

Таким образом теоремы Фредгольма полностью доказаны для нашего случая.

§ 3. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЯДРА.

Чтобы получить возможность, на основании последних результатов, исследовать интегральное уравнение с произвольным ядром $K(s, t)$, мы воспользуемся теоремой сходимости § 2 предыдущей главы.

Аппроксимируем ядро $K(s, t)$ равномерно последовательностью выродившихся ядер $A_1(s, t), A_2(s, t), \dots, A_n(s, t)$ и рассмотрим одновременно с интегральным уравнением (1) аппроксимирующие интегральные уравнения:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s, t) \varphi(t) dt. \quad (17)$$

Тогда (при заданном λ) возможны два случая.

Случай I. Уравнение (17) имеет при всякой функции $f(s)$ решение $\rho_n(s)$ для бесконечно большого числа значений n (можно, впрочем, считать: для всех значений n , если опустить неподходящие аппроксимирующие уравнения и изменить нумерацию), и для всех этих решений имеет место неравенство $(\rho_n, \rho_n) = c_n^2 \leq M$, где M — число, не зависящее от n .

Случай II. Сделанное выше допущение не имеет места. В таком случае для надлежащим образом выбранной функции $f(s)$ либо

а) решение $\rho_n(s)$ действительно существует для бесконечно большого числа значений n (можно допустить: для всех значений n), но $(\rho_n, \rho_n) = c_n^2 \rightarrow \infty$, либо

б) такое решение, вообще, существует лишь для конечного числа значений n (или, как мы снова можем допустить, ни для какого значения n), а следовательно — на основании теорем Фредгольма, справедливых для выродившихся ядер, — однородное интегральное уравнение:

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s, t) \varphi(t) dt \quad (18)$$

имеет нормированное решение $\sigma_n(s)$ для всех значений n .

В случае I функции $\rho_n(s) = f(s)$ представлены истокообразно при помощи ядер $A_n(s, t)$. Согласно § 1 представления таким образом функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поэтому функции $\rho_n(s)$ определяют, в силу нашего принципа сходимости, непрерывную предельную функцию $\varphi(s)$, как предел равномерно сходящейся частичной последовательности. Совершая предельный переход непосредственно в интегральном уравнении (17), обнаружим, что предельная функция $\varphi(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1). Таким образом интегральное уравнение (1) в случае I разрешимо, какова бы ни была функция $f(s)$.

В случае II а) делим интегральное уравнение (17), в котором $\varphi = \rho_n$, на c_n и полагаем $\frac{\rho_n}{c_n} = \sigma_n$, так что имеет место равенство:

$$\frac{f(s)}{c_n} = \sigma_n(s) - \lambda \int A_n(s, t) \sigma_n(t) dt;$$

в случае II б) замечаем, что уравнение (18) удовлетворяется при $\varphi = \sigma_n$. Однако в обоих случаях функция σ_n нормирована, и таким образом, аналогично предыдущему, функции $\sigma_n(s) = \frac{f(s)}{c_n}$ и, соответственно, функции $\sigma_n(s)$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены и, сле-

довательно, определяют предельную функцию $\phi(s)$, как предел равномерно сходящейся частичной последовательности. Эта предельная функция необходимо нормирована и удовлетворяет однородному интегральному уравнению:

$$\phi(s) = \lambda \int K(s, t) \phi(t) dt. \quad (5)$$

Таким образом в случае II однородное интегральное уравнение имеет нетривиальные решения, которые мы назовем в согласии с определением, данным на стр. 104 и след., собственными функциями.

Для того чтобы отсюда вывести формулированные в § 2 теоремы Фредгольма, вспомним замечание, сделанное в § 1, что для каждого значения λ может существовать лишь конечное число r линейно независимых собственных функций. При $r=0$ случай II, очевидно, не может возникнуть, так как он всегда ведет к нормированному решению уравнения (5), а следовательно, имеет место случай I, т. е. интегральное уравнение (1) имеет решение, какова бы ни была функция $f(s)$ на левой стороне. Это решение однозначно, ибо не исчезающая разность двух решений давала бы, противно предположению, нетривиальное решение уравнения (5). Этим самым доказана первая теорема Фредгольма.

Пусть, во-вторых, $r > 0$, и пусть $\phi_1, \dots, \phi_r$ — взаимно ортогональные нормированные решения уравнения (5). Тогда в силу того, что $A_n = > K^{-1}$, для функций

$$\delta_{n,i}(s) = \phi_i(s) - \lambda \int A_n(s, t) \phi_i(t) dt$$

$$(i = 1, 2, \dots, r; n = 1, 2, 3, \dots)$$

выполняется соотношение $\delta_{n,i}(s) \Rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если теперь положить

$$A'_n(s, t) = A_n(s, t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^r \delta_{n,i}(s) \phi_i(t),$$

то функции $A'_n(s, t)$ являются выродившимися ядрами, равномерно аппроксимирующими ядро $K(s, t)$.

Легко видеть, что для всех ядер $A'_n(s, t)$ r функций $\phi_i(s)$ являются собственными функциями.

Больше чем r линейно независимых решений при достаточно большом n быть не может. В самом деле, если бы функции $\phi_{r+1,n}(s)$ представляли последовательность таких решений, которые мы можем полагать нормированными и ортогональными к функциям $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$, то на основании нашего принципа сходимости мы получили бы решение уравнения (5), ортогональное к функциям $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$, и следовательно, линейно независимое от этих функций, противно предположению, что r есть точное число линейно независимых собственных функций.

⁴⁾ Мы употребляем при случае знак $\rightarrow$ как сокращение для сходимости. Подобно этому, если желательно подчеркнуть равномерность предельного перехода, мы будем пользоваться двойной стрелкой $\Rightarrow$.

Так как теоремы Фредгольма справедливы для выродившихся ядер, то однородные транспонированные интегральные уравнения

$$\chi(s) = \lambda \int A'_n(t, s) \chi(t) dt \quad (19)$$

тоже имеют для достаточно больших значений n ровно r линейно независимых решений $\chi_{i,n}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), которые можно выбрать нормированными и взаимно ортогональными. Но выродившиеся ядра $A'_n(t, s)$ равномерно сходятся к ядру $K(t, s)$, а потому мы и для него получаем r взаимно ортогональных собственных функций $\chi_1(s), \chi_2(s), \dots$, совершая, на основании нашего принципа сходимости, предельный переход при помощи равномерно непрерывных и равномерно ограниченных функций $\gamma_{i,n}(s)$. Больше, чем r независимых решений транспонированное интегральное уравнение

$$\chi(s) = \lambda \int K(t, s) \chi(t) dt, \quad (20)$$

однако, иметь не может, ибо в противном случае отсюда обратно вытекало бы существование больше чем r решений уравнения (5).

Заметим, наконец, что для разрешимости интегрального уравнения (1) в случае $r > 0$ наверно необходимо выполнение условий:

$$(f, \chi_i) = \int f(s) \chi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (21)$$

что непосредственно обнаруживается, если помножить уравнение (1) на $\chi_i(s)$, проинтегрировать, а затем справа изменить порядок интегрирования, принимая во внимание уравнение (20). Для того чтобы убедиться в достаточности условий (21), ограничимся, поскольку это необходимо, такими указателями n , для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{i,n}(s) = \chi_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) и при помощи чисел $\epsilon_{i,n} = (f, \chi_{i,n})$, которые в силу уравнения (21) сходятся к нулю с возрастанием n , построим функции

$$f_n(s) = f(s) - \sum_{i=1}^r \epsilon_{i,n} \chi_{i,n}(s).$$

Имеем:

$$(f_n, \chi_{i,n}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Следовательно, интегральное уравнение

$$f_n(s) = \varphi(s) - \lambda \int A'_n(s, t) \varphi(t) dt \quad (22)$$

наверно имеет решение $\rho_n(s)$, ортогональное к функциям

$$\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_r(s),$$

так как для выродившегося ядра теоремы Фредгольма справедливы. В отношении этих решений $\rho_n(s)$ мы должны иметь случай I, ибо,

в противном случае, они повлекли бы за собой существование решения уравнения (5), ортогонального к функциям $\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_r(s)$, что по предположению невозможно. Следовательно, мы можем опять, на основании принципа сходимости, выполнить предельный переход в интегральном уравнении и в силу того, что $f_n(s) \Rightarrow f(s)$, вывести заключение о разрешимости уравнения (1). Этим самым полностью доказаны теоремы Фредгольма для нашего ядра $K(s, t)$.

Существуют ли вообще случаи, когда однородное уравнение имеет нетривиальные решения — на этот вопрос будет в дальнейшем дан ответ в отношении симметрических ядер.

§ 4. Симметрические ядра и их собственные значения.

Так же, как у билинейных форм в гл. I, и у интегральных уравнений тот случай, когда ядро $K(s, t)$ симметрично, т. е. удовлетворяет соотношению:

$$K(s, t) = K(t, s), \quad (23)$$

может быть исследован подробнее.

В этом случае интегральное уравнение совпадает со своим транспонированным. По отношению к такому рода симметричному интегральному уравнению мы прежде всего поставим себе вопрос, для каких значений параметра $\lambda = \lambda_i$ однородное интегральное уравнение (5) имеет нетривиальное (нормированное) решение. Эти значения параметра называются, как уже упомянуто, собственными значениями, а соответствующие функции — собственными или фундаментальными функциями ядра $K(s, t)$. Аналогично рассуждениям гл. I, § 3, докажем следующую теорему:

Всякое симметрическое, исчезающее тождественно, непрерывное ядро имеет собственные значения и фундаментальные функции, которые образуют бесконечное и именно счётное множество в том и только в том случае, если ядро не вырождается. Все собственные значения действительного симметрического ядра сами действительны.

1. Существование собственного значения у симметрического ядра. Докажем прежде всего существование одного собственного значения. Для этой цели рассмотрим „квадратичную интегральную форму“

$$J(\varphi, \varphi) = \iint K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt, \quad (24)$$

которая играет здесь роль квадратичной формы гл. I, причем φ означает какую-нибудь функцию, непрерывную или кусочно-непрерывную в основной области. В силу неравенства Шварца имеем

$$J(\varphi, \varphi)^2 \leq (\varphi, \varphi)^2 \iint K^2(s, t) ds dt.$$

Следовательно, $J(\varphi, \varphi)$ ограничено по абсолютной величине, если потребовать, чтобы функция φ удовлетворяла соотношению:

$$(\varphi, \varphi) = 1. \quad (25)$$

Интегральная форма обращается в нуль для всех допустимых функций

в том и только в том случае, если само ядро тождественно исчезает. В самом деле, введем „билинейную интегральную форму“

$$J(\varphi, \psi) = J(\psi, \varphi) = \iint K(s, t) \varphi(s) \psi(t) ds dt \quad (26)$$

и заметим, что справедливо преобразование:

$$J(\varphi + \psi, \varphi + \psi) = J(\varphi, \varphi) + 2J(\varphi, \psi) + J(\psi, \psi). \quad (27)$$

Тогда, прежде всего, из тождественного исчезания' квадратичной вытекает также исчезание и билинейной интегральной формы. Подставив в (26) в частности $\psi(t) = \int K(s, t) \varphi(s) ds$, получим

$$\int \left[\int K(s, t) \varphi(s) ds \right]^2 dt = 0;$$

и следовательно, $\int K(s, t) \varphi(s) ds = 0$ для произвольной функции $\varphi(s)$; если выбрать $\varphi(s)$ равной $K(s, t)$ при определенном значении t , то получим требуемое тождество $K(s, t) = 0$.

Ядро, обладающее тем свойством, что $J(\varphi, \varphi)$ может принимать только положительные либо только отрицательные значения (когда функция φ не равна тождественно нулю), называется *положительно определенным*, либо, соответственно, *отрицательно определенным*. В противном случае ядро называется *неопределенным*.

В предположении, что форма J способна принимать положительные значения, поставим себе задачу на нахождение максимума: найти нормированную функцию $\varphi(s)$, для которой $J(\varphi, \varphi)$ принимает возможно большее значение.

В силу ограниченности интегральной формы $J(\varphi, \varphi)$, безусловно, существует для ее значений верхняя граница $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_1}$; требуется доказать, что эта положительная верхняя граница действительно достигается для надлежащим образом выбранной функции $\varphi(s)$. Для этой цели аппроксимируем ядро $K(s, t)$ выродившимися симметрическими ядрами

$$A_n(s, t) = \sum_{i, k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} \omega_i(s) \omega_k(t), \quad c_{ik}^{(n)} = c_{ki}^{(n)}$$

описанного в конце § 1 вида. Соответствующая сказанному выше задача на максимум для интегральных форм

$$J_n(\varphi, \varphi) = \iint A_n(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$$

при дополнительном условии (25) оказывается равносильной соответствующей задаче для квадратичной формы от q_n переменных, так как, полагая

$$(\varphi, \omega_i) = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, q_n),$$

получим:

$$J_n(\varphi, \varphi) = \sum_{i, k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_i x_k, \quad (28)$$

т. е. квадратичную форму относительно $x_1, x_2, \dots, x_{q_n}$, которой надо сообщить максимум при соблюдении добавочного условия (25). Но применяя неравенство Бесселя (гл. II, § 1, 3) к функции $\varphi(s)$ и ортогональной системе $\omega_1(s), \omega_2(s), \dots, \omega_{q_n}(s)$, имеем:

$$(\varphi, \varphi) \geq \sum_{i=1}^{q_n} x_i^2;$$

следовательно, переменные формы (28) подавно подчинены условию

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 \leq 1,$$

и, стало быть, максимум достигается формой, когда

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1,$$

так как в противном случае значение $J_n(\varphi, \varphi)$ можно было бы увеличить посредством умножения переменных x_i на подходящего множителя. Очевидно, перед нами в точности постановка вопроса задачи о преобразовании к главным осям из гл. I, § 3. Максимум формы достигается для системы значений $x_1, x_2, \dots, x_{q_n}$, удовлетворяющей уравнениям:

$$\sum_{k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_k = \lambda_{1n} x_i \quad (i=1, 2, \dots, q_n), \quad (29)$$

причем коэффициент пропорциональности λ_{1n} равен как раз $J_n(\varphi, \varphi)$. Это можно обнаружить, помножив уравнение (29) на x_i и просуммировав по i . Тогда правая сторона обратится в λ_{1n} , ибо

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1,$$

между тем как на левой стороне получится наша форма $J_n(\varphi, \varphi)$. Если впредь подразумевать под $x_1, x_2, \dots, x_{q_n}$ эту систему значений и если положить

$$\varphi_n(s) = x_1 \omega_1(s) + x_2 \omega_2(s) + \dots + x_{q_n} \omega_{q_n}(s),$$

причем $N\varphi_n = 1$ (в силу ортогональности функций ω_i и в силу равенства $\sum x_i^2 = 1$), то из уравнений (29) вытекает соотношение:

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\lambda_{1n}} \int A_n(s, t) \varphi_n(t) dt, \quad (30)$$

и наоборот. В самом деле, из уравнения (29) получим (30), помножив на $\omega_i(s)$, просуммировав и заметив, что $x_i = (\varphi_n, \omega_i)$, а из уравнения (30) получается уравнение (29) после умножения на $\omega_i(s)$ и интегриации. Таким образом функция $\varphi_n(s)$ является фундаментальной функцией ядра $A_n(s, t)$, принадлежащей собственному значению $\mu_{1n} = \frac{1}{x_{1n}}$:

$$\varphi_n(s) = \mu_{1n} \int A_n(s, t) \varphi_n(t) dt. \quad (31)$$

Пусть теперь n безгранично растет. При этом x_{1n} должно стремиться к пределу x_1 , соответствующей положительной верхней границе формы $J(\varphi, \varphi)$. В самом деле, из соотношения:

$$|K(s, t) - A_n(s, t)| < \varepsilon$$

при условии, что $(\varphi, \varphi) \leq 1$, вытекает на основании неравенства Шварца, что

$$[J(\varphi, \varphi) - J_n(\varphi, \varphi)]^2 \leq \varepsilon^2 (b - a)^2,$$

где a и b — пределы интегриации. Таким образом совокупность значений $J_n(\varphi, \varphi)$ при достаточно большом n как угодно точно совпадает с совокупностью значений $J(\varphi, \varphi)$, а следовательно, то же самое должно иметь место и для верхних границ обеих совокупностей. Существует, стало быть, также $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1n} = x_1$, так что числа x_{1n} лежат все ниже определенной грани, и в силу уравнения (31), на основании § 1, функции $\varphi_n(s)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны для всех значений n . Согласно нашей теореме сходимости можно, следовательно, выбрать такую частичную последовательность $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots$, которая сходится равномерно к предельной функции $\phi_1(s)$. Совершив этот предельный переход в уравнении (30) и в равенствах: $J_n(\varphi_n, \varphi_n) = x_{1n}$ и $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$, получим следующие соотношения:

$$x_1 \phi_1(s) = \int K(s, t) \phi_1(t) dt, \quad (\phi_1, \phi_1) = 1, \quad (32)$$

$$J(\phi_1, \phi_1) = x_1. \quad (33)$$

Таким образом функция $\phi_1(s)$ решает задачу о максимуме формы $J(\varphi, \varphi)$ и является вместе с тем собственной функцией ядра $K(s, t)$. Отсюда непосредственно вытекает, что x_1 не может быть нулем, так как $J(\varphi, \varphi)$ может принимать положительные значения. Для произвольной функции ϕ выполняется, стало быть, соотношение

$$J(\phi, \phi) \leq x_1 (\phi, \phi), \quad (34)$$

что легко обнаружить нормированием.

2. Совокупность собственных функций и собственных значений. Для того чтобы получить дальнейшие собственные значения и фундаментальные функции, мы поступим следующим образом:

Поставим задачу: сообщить интегралу $J(\varphi, \varphi)$ максимальное значение, причем на этот раз мы, кроме условия $(\varphi, \varphi) = 1$, поставим еще одно дополнительное условие:

$$(\varphi, \phi_1) = 0.$$

Мы предполагаем при этом, что при этих двух добавочных условиях форма $J(\varphi, \varphi)$ еще способна принимать положительные значения. Так как вторым добавочным условием область значений интегральной формы ограничивается по сравнению с областью ее значений в первой задаче на максимум, то максимум $\lambda_2 = \frac{1}{\mu_2}$ не может быть больше прежнего максимума λ_1 , т. е. $\lambda_2 \leq \lambda_1$ и $\mu_1 \leq \mu_2$. Существование решения этой задачи на максимум можно доказать точно тем же методом, которым мы воспользовались для первого собственного значения, а именно сведением к квадратичной форме и предельным переходом. Удобнее, однако, нижеследующее непосредственное сведение задачи к определению первого собственного значения другого ядра.

Составим функцию:

$$K_{(1)}(s, t) = K(s, t) - \frac{\phi_1(s) \phi_1(t)}{\mu_1} \quad (35)$$

и будем ее также рассматривать как симметрическое ядро. Согласно только что полученному результату, задача о максимуме интегральной формы:

$$J_{(1)}(\varphi, \varphi) = \iint K_{(1)}(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt = \max = \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} \quad (36)$$

при добавочном условии $(\varphi, \varphi) = 1$ решается функцией $\phi_2(s)$, удовлетворяющей однородному интегральному уравнению:

$$\phi_2(s) = \mu_2 \int K_{(1)}(s, t) \phi_2(t) dt; \quad (37)$$

мы предполагаем при этом, что и форма $J_{(1)}(\varphi, \varphi)$ еще способна принимать положительные значения, так что $\lambda_2 > 0$.

Перепишем уравнение (37) в следующей форме:

$$\phi_2(s) = \mu_2 \int K(s, t) \phi_2(t) dt - \mu_2 \frac{\phi_1(s)}{\mu_1} (\phi_2, \phi_1),$$

помножим на $\phi_1(s)$ и интегрируем по s ; в двойном интеграле изменим порядок интегрирования и воспользуемся равенством $(\phi_1, \phi_1) = 1$, тогда правая сторона обращается в нуль, и мы получим:

$$(\phi_1, \phi_2) = 0, \quad (38)$$

т. е. собственная функция $\phi_2(s)$ ортогональна собственной функции $\phi_1(s)$. Как следствие этого имеем:

$$\int K(s, t) \phi_2(t) dt = \int K_{(1)}(s, t) \phi_2(t) dt, \quad (39)$$

и, стало быть, функция $\phi_2(s)$ является также собственной функцией ядра $K(s, t)$, а μ_2 — соответствующим собственным значением:

$$\phi_2(s) = \mu_2 \int K(s, t) \phi_2(t) dt. \quad (40)$$

Так как в силу соотношения $(\psi_2, \psi_1) = 0$ мы можем определить χ_2 и как максимум интегральной формы $J_1(\varphi, \varphi)$ при добавочном условии $(\varphi, \psi_1) = 0$, а в этом случае $J_1(\varphi, \varphi) = J(\varphi, \varphi)$, то функция ψ_2 решает также и задачу на максимум, поставленную в начале этого пункта.

Таким же образом можно продолжать далее, построив ядро:

$$K_{(2)}(s, t) = K_{(1)}(s, t) - \frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2} = K(s, t) - \frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1} - \frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2}, \quad (41)$$

и искать максимум интегральной формы:

$$J_2(\varphi, \varphi) = \iint K_{(2)}(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt \quad (42)$$

в предположении, что эта форма еще может принимать положительные значения. В качестве решения точно так же, как и выше, получаются нормированная функция $\psi_3(s)$ и максимальное значение $\chi_3 = \frac{1}{\mu_3}$, которые

удовлетворяют интегральному уравнению $\psi_3(s) = \mu_3 \int K(s, t) \psi_3(t) dt$ и соотношениям ортогональности $(\psi_3, \psi_1) = 0$, $(\psi_3, \psi_2) = 0$. Мы могли бы также получить это решение, поставив задачу: сообщить первоначальной интегральной форме максимум с помощью нормированной функции, ортогональной функциям ψ_1 и ψ_2 . Как и выше, имеем $\mu_2 \leq \mu_1$.

Этот процесс продолжаем так дальше и притом безгранично, если получающиеся при этом ядра $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$, ... постоянно приводят к интегральным формам, которые могут принимать положительные значения. Если же в получающемся ряде ядер появляется первое ядро:

$$K_{(m)}(s, t) = K(s, t) - \frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1} - \dots - \frac{\psi_m(s)\psi_m(t)}{\mu_m}, \quad (43)$$

для которого постоянно $J_m(\varphi, \varphi) \leq 0$, то процесс обрывается на собственной функции $\psi_m(s)$ и ее собственном значении μ_m .

Резюмируем полученный вывод: наименьшее положительное собственное значение μ_1 ядра $K(s, t)$ есть обратное значение максимума χ_1 , принимаемого интегральной формой $J(\varphi, \varphi)$ при дополнительном условии $(\varphi, \varphi) = 1$. Этот максимум достигается для первой собственной функции $\varphi = \psi_1$ ядра $K(s, t)$. Положительные собственные значения μ_h ($h = 2, 3, \dots$), расположенные в порядке возрастания, определяются тогда последовательно (рекуррентно) как обратные значения максимумов χ_h , принимаемых интегральной формой $J(\varphi, \varphi)$ при добавочных условиях:

$$(\varphi, \varphi) = 1, \quad (\varphi, \psi_v) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, h-1).$$

Этот максимум χ_h достигается для h -й собственной функции $\varphi = \psi_h$.

Ряд положительных собственных значений обрывается, как только в последовательности поставленных задач на максимум появляется одна такая, в которой форма $J(\varphi, \varphi)$ уже не может принимать положительных значений.

Подобно положительным собственным значениям и соответствующим фундаментальным функциям, можно теперь получить также ряд отрицательных собственных значений и соответствующих фундаментальных функций: $\mu_{-1}, \mu_{-2}, \dots$; $\psi_{-1}(s), \psi_{-2}(s), \dots$ в том случае, если интегральная форма $J(\varphi, \varphi)$ способна принимать отрицательные значения. Для этого достаточно рассмотреть задачи на минимум, соответствующие поставленным выше задачам, на максимум. Мы придем таким образом к бесконечной или обрывающейся последовательности отрицательных, никогда не возрастающих собственных значений

$$\mu_{-1} \geq \mu_{-2} \geq \mu_{-3} \geq \dots, \quad (44)$$

и соответствующих взаимно ортогональных собственных функций

$$\psi_{-1}(s), \psi_{-2}(s), \dots$$

Собственные функции $\psi_h(s)$ ($h > 0$) ортогональны собственным функциям $\psi_{-k}(s)$ ($k > 0$). Это можно заключить из обоих равенств:

$$\begin{aligned} x_h \psi_h(s) &= \int K(s, t) \psi_h(t) dt, \\ x_{-k} \psi_{-k}(s) &= \int K(s, t) \psi_{-k}(t) dt, \end{aligned}$$

умножив первое на $\psi_{-k}(s)$, второе на $\psi_h(s)$, вычтя одно из другого и проинтегрировав, принимая во внимание, что $K(s, t) = K(t, s)$, получим:

$$(x_h - x_{-k})(\psi_h, \psi_{-k}) = 0,$$

а это равенство, в силу того, что $x_h \neq x_{-k}$, и означает требуемую ортогональность.

Продолжая этот процесс, приходим к последовательности, возможно чередующихся, положительных и отрицательных собственных значений. Расположим их в порядке возрастающей абсолютной величины и обозначим в этом порядке через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$; тогда $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$. Через $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ будем отныне обозначать соответствующие собственные функции, составляющие систему нормированных ортогональных функций.

Если ядро $K(s, t)$ обладает лишь конечным числом собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то оно непременно вырождается и имеет следующий вид:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i}, \quad (45)$$

так как на основании соображений стр. 114 ядро:

$$K(s, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i} = \bar{K}(s, t)$$

должно тождественно исчезать, ибо и максимум и минимум соответствующей интегральной формы:

$$\bar{J}(\varphi, \varphi) = \iint \bar{K}(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt,$$

оба равны нулю.

Итак, ядро, обладающее лишь конечным числом собственных значений и собственных функций, вырождается. Наоборот, выродившееся ядро имеет лишь конечное число собственных значений и собственных функций. В самом деле, выше мы узнали, что задача о собственных значениях такого ядра эквивалентна задаче о собственных значениях квадратичной формы, где возможно лишь конечное число собственных значений.

Согласно § 1 собственное значение λ_i называют *кратным*, и именно *r-кратным*, если число ему соответствующих линейно независимых собственных функций, — которые, кстати, можно выбрать взаимно ортогональными, — в точности равно *r*. Каждое собственное значение может иметь лишь конечную кратность *r*. Эту теорему, уже доказанную в § 1, можно доказать с важным дополнением еще следующим образом: применяем к ортогональной системе функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ соотношение Бесселя из гл. II, § 1 и пишем:

$$\int K(s, t)^2 dt \geq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int K(s, t) \varphi_i(t) dt \right)^2, \quad (46)$$

или

$$\int K(s, t)^2 dt \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}. \quad (47)$$

Здесь содержится, во-первых, тот факт, что состоящий исключительно из положительных членов ряд:

$$T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2} \quad (48)$$

сходится, и к тому же равномерно в силу теоремы Дини (ср. сноску на стр. 50); во-вторых, интегрируя соотношение (47) вторично по *s*, получим:

$$\iint K(s, t)^2 ds dt \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \quad (49)$$

Итак, мы обнаружили, что *сумма обратных величин квадратов собственных значений сходится*. Следовательно, собственные значения не могут иметь точек сгущения в конечном; если их число бесконечно, то они должны безгранично возрастать по абсолютной величине, и равных между собою собственных значений может оказаться лишь конечное число.

Отсюда можно заключить, что собственные значения λ_i и фундаментальные функции φ_i , последовательно определенные выше при помощи экстремальных задач, исчерпывают всю совокупность действительных собственных значений и собственных функций. (Что комплексных собственных значений быть не может, будет показано ниже.) Если бы χ была собственной функцией, линейно независимая от функций φ_i , принадлежащая, скажем, положительному собственному значению σ , то на основании приведенного выше рассуждения функция χ должна быть

ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим собственным значениям $\lambda_i \neq \sigma$. Если же $\sigma = \mu_h$ — одному из определенных выше собственных значений, и если это собственное значение имеет кратность r , т. е.

$$\mu_{h-1} < \mu_h = \mu_{h+1} = \dots = \mu_{h+r-1} < \mu_{h+r},$$

то можно было бы, так как χ , по предположению, линейно независима от собственных функций $\phi_h, \phi_{h+1}, \dots, \phi_{h+r-1}$, заменить функцию χ комбинацией $\chi + c_0 \phi_h + \dots + c_{r-1} \phi_{h+r-1} = \bar{\chi}$, ортогональной к этим функциям, и $\bar{\chi}$ также является собственной функцией, принадлежащей собственному значению μ_h . Следовательно, функция $\bar{\chi}$, которую мы теперь снова будем обозначать просто через χ , в каждом из двух рассматриваемых случаев ортогональна ко всем собственным функциям ϕ_i . Отсюда, на основании максимального свойства собственных значений, для всякого n , для которого существует μ_{n+1} , вытекает справедливость соотношения:

$$J(\chi, \chi) = \iint K(s, t) \chi(s) \chi(t) ds dt = \frac{1}{\sigma} (\chi, \chi) \leq \frac{1}{\mu_{n+1}}.$$

Таким образом, если положительных собственных значений μ_n бесконечно большое число, то отсюда, в силу равенства $\lim \mu_n = \infty$, вытекает, что $(\chi, \chi) = 0$, и, следовательно, функция χ должна тождественно равняться нулю. Если же положительных собственных значений конечное число, положим n , то $J(\chi, \chi)$ уже не может более принимать положительные значения при дополнительных условиях

$$(\chi, \phi_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

и отсюда опять следует равенство $(\chi, \chi) = 0$, а следовательно, $\chi = 0$.

Так как этот способ рассуждения применим без изменения и к отрицательным значениям σ , то отсюда следует вывод, что всякая собственная функция ядра, ортогональная ко всем функциям ϕ_i , должна тождественно исчезать, чем и доказывается наше утверждение.

К полученным результатам присоединим еще несколько замечаний, которые нам пригодятся впоследствии.

Обозначим через $\eta_1(s), \eta_2(s), \dots; \zeta_1(s), \zeta_2(s), \dots$ две последовательности непрерывных (или кусочно-непрерывных) функций, нормы которых лежат ниже заданной грани M . В таком случае для ядра

$$K_{(n)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

выполняется соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J'_{(n)}(\eta_n, \zeta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint K'_{(n)}(s, t) \eta_n(s) \zeta_n(t) ds dt = 0 \quad (50)$$

и выполняется притом равномерно в том смысле, что степень малости левой стороны помимо числа M зависит еще только от выбора чисел n .

Действительно, вследствие максимального свойства собственных значений и фундаментальных функций имеем:

$$|J'_{(n)}(\eta_n + \zeta_n, \eta_n + \zeta_n)| \leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} N(\eta_n + \zeta_n) \leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} 4M^1),$$

$$J'_{(n)}(\eta_n, \eta_n) \leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} M, \quad |J'_{(n)}(\zeta_n, \zeta_n)| \leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} M,$$

откуда непосредственно получается наше утверждение, так как $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ и

$$J'_{(n)}(\eta + \zeta, \eta + \zeta) = J'_{(n)}(\eta, \eta) + 2J'_{(n)}(\eta, \zeta) + J'_{(n)}(\zeta, \zeta).$$

Далее, заметим следующее: *ядро является положительно определенным в том и только в том случае, если все его собственные значения положительны*, ибо в этом и только в этом случае интегральная форма $J(s, \varphi)$ имеет при нормированном φ положительный минимум и, стало быть, вообще не может принимать отрицательных значений.

Наконец, *все собственные значения действительного симметрического ядра действительны*. Доказательство этого утверждения получится само собой в § 5, но мы проведем его и здесь другим, прямым путем.

Доказываемая теорема утверждает, что не существует такого комплексного числа $\lambda = p + iq$ с соответствующей комплексной функцией от s , $\varphi(s) = \psi(s) + i\chi(s)$ (причем ψ и χ — действительные функции, не исчезающие одновременно), чтобы удовлетворялось равенство

$$\varphi(s) = \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt.$$

Для сопряженных величин $\bar{\lambda}$ и $\bar{\varphi}$ выполнялось бы тогда равенство

$$\bar{\varphi}(s) = \bar{\lambda} \int K(s, t) \bar{\varphi}(t) dt.$$

Но в таком случае так же, как и выше, имеем:

$$0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \int \varphi(s) \bar{\varphi}(s) ds = 2iq \int (\psi^2 + \chi^2) ds,$$

т. е. $q = 0$, а стало быть, λ действительно.

3. Максимально-минимальное свойство собственных значений. И здесь точно так же, как у квадратичных форм в главе I, можно на основании максимально-минимального свойства дать прямое определение собственного значения λ_n и соответствующей собственной функции, т. е. такое определение, которое не прибегает к предшествующим собственным значениям и фундаментальным функциям.

Рассмотрим положительные собственные значения μ_n ядра $K(s, t)$ и положим, что их, по меньшей мере, n . Поставим теперь задачу сообщить интегральной форме $J(\varphi, \varphi)$ максимум, если функция $\varphi(s)$, по-

¹⁾ Что $N(\eta_n + \zeta_n) = (\eta_n, \eta_n) + (\zeta_n, \zeta_n) + 2(\eta_n, \zeta_n) \leq 4M$, получается непосредственно с помощью неравенства Шварца.

мимо условия $(\varphi, \varphi) = 1$, удовлетворяет еще $n-1$ условию:

$$(\varphi, v_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (51)$$

где $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ — какие бы то ни было заданные непрерывные функции. Мы оставляем без рассмотрения, действительно ли достигается для какой-либо из допустимых функций сама по себе безусловно существующая верхняя граница формы $J(\varphi, \varphi)$. Во всяком случае эта верхняя граница зависит от выбора функций $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$; мы обозначим ее поэтому через $x_n\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, или короче $x_n\{v_i\}$. В частном случае $v_i = \phi_i$, в силу доказанных выше теорем, $x_n\{v_i\} = x_n$, и эта верхняя граница достигается для $\varphi = \phi_n(s)$. Так вот, мы утверждаем, что для всякой системы функций $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ имеет место соотношение:

$$x_n\{v_i\} \geq x_n.$$

Для доказательства построим, линейно комбинируя собственные функции $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, функцию $\varphi(s) = c_1\phi_1(s) + \dots + c_n\phi_n(s)$. Чтобы подчинить функцию $\varphi(s)$ условиям $(\varphi, \varphi) = 1$ и (51), потребуем, чтобы было

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n c_i(\phi_i, v_h) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1).$$

Этой системе уравнений для n неизвестных c_i , состоящей из $n-1$ однородных линейных уравнений и одного нормирующего условия, можно всегда удовлетворить. Подставив построенную таким образом функцию $\varphi(s)$ в $J(\varphi, \varphi)$, имеем:

$$J(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^n c_i c_k J(\phi_i, \phi_k),$$

а следовательно, принимая во внимание, что

$$J(\phi_i, \phi_i) = \frac{1}{\mu_i}, \quad J(\phi_i, \phi_k) = 0 \quad \text{при } i \neq k,$$

получим:

$$J(\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{\mu_i} = \sum_{i=1}^n c_i^2 x_i \geq x_n \sum_{i=1}^n c_i^2 = x_n.$$

Максимум выражения $J(\varphi, \varphi)$ по меньшей мере равен x_n , и мы получаем следующий результат: *n -е положительное собственное значение ядра $K(s, t)$ есть наименьшее значение, которое может принять максимум или верхняя граница формы $J(\varphi, \varphi)$, если функция $\varphi(s)$ подчинена, помимо условия $(\varphi, \varphi) = 1$, еще $n-1$ условиям вида (51), и этот максимум рассматривается в зависимости от функций $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Наименьшее значение этого максимума получается при $v_1 = \phi_1, \dots, v_{n-1} = \phi_{n-1}$ и $\varphi = \phi_n$.*

Совершенно аналогично определяются отрицательные собственные значения и соответствующие фундаментальные функции $\phi_{-n} (n > 0)$

посредством наибольшего значения минимума формы $J(\varphi, \varphi)$ при наличии соответствующих условий.

Из максимально-минимальных свойств собственных значений вытекает непосредственно следующая теорема: *если к ядру $K(s, t)$ прибавить положительно определенное ядро $K^+(s, t)$ или соответственно отрицательно определенное ядро $K^-(s, t)$, то каждое положительное и отрицательное собственное значение ядра $K + K^+$ и, соответственно, ядра $K + K^-$ не меньше или, соответственно, не больше соответствующего собственного значения ядра K^1* . Доказательство получается с помощью того же рассуждения, что в гл. I, § 4.

§ 5. ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ.

1. Теорема о разложении. Если бы было известно, что ядро, соответственно преобразованию квадратичной формы к главным осям²⁾, допускает разложение в ряд:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i}, \quad (52)$$

причем ряд в правой части сходится равномерно относительно каждой переменной, то тем самым для всякой функции $g(s)$ вида:

$$g(s) = \int K(s, t) h(t) dt, \quad (53)$$

где $h(t)$ — любая непрерывная или кусочно-непрерывная функция, было бы доказано разложение в ряд:

$$g(s) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \varphi_i(s), \quad g_i = (g, \varphi_i) = (h, \varphi_i) \frac{1}{\lambda_i}.$$

То обстоятельство, что мы не можем доказать соотношение (52) в общем виде, вынуждает нас вести доказательство общности разложения для функции $g(s)$ несколько окольным путем. Пусть $h_i = (h, \varphi_i)$ — коэффициенты разложения функции h относительно ортогональной системы $\varphi_1, \varphi_2, \dots$; пусть $g(s)$ — „истокообразно представленная“ по формуле (53) при помощи $h(s)$, непрерывная функция, а

$$g_i = (g, \varphi_i) = \frac{h_i}{\lambda_i}$$

— коэффициенты разложения функции g . В силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$ сходится. Согласно равенствам (47) и (49) в § 4, 2 сумма

$$T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}$$

¹⁾ Ср. Weyl H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), Math. Ann., Bd. 71, стр. 441—479, 1912.

²⁾ См. гл. I, § 3.

равномерно сходится и ограничена равномерно относительно s . Но согласно неравенству Шварца

$$\left[\frac{h_n \varphi_n(s)}{\lambda_n} + \dots + \frac{h_m \varphi_m(s)}{\lambda_m} \right]^2 \leq (h_n^2 + \dots + h_m^2) \left(\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n^2} + \dots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m^2} \right).$$

Так как остаток $h_n^2 + \dots + h_m^2$ делается сколь угодно малым, коль скоро только n становится достаточно большим, а $\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n^2} + \dots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m^2}$ остается ниже не зависящей от s грани, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(s)$$

сходится абсолютно и равномерно. Его сумма

$$\gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(s)$$

есть непрерывная функция от s . Требуется доказать, что $\gamma(s)$ тождественно с $g(s)$. Для этой цели образуем выражения:

$$K_{(n)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i} {}^1),$$

$$g(s) - \gamma_n(s) = \int K_{(n)}(s, t) h(t) dt,$$

помножим последнее равенство на произвольную непрерывную функцию $w(s)$ аргумента s и проинтегрируем по s . В силу формулы (50) из § 4,2 в полученном равенстве

$$\int w(s) [g(s) - \gamma_n(s)] ds = \iint K_{(n)}(s, t) h(t) w(s) ds dt$$

правая часть стремится к нулю при возрастании n , а так как $\gamma_n(s) \Rightarrow \gamma(s)$, имеем:

$$\int w(s) [g(s) - \gamma(s)] ds = 0.$$

Это равенство должно выполняться для произвольной функции $w(s)$, следовательно, и для функции $w(s) = g(s) - \gamma(s)$. Но из непрерывности функции $g(s) - \gamma(s)$ следует, что равенство $(g - \gamma, g - \gamma) = 0$ возможно лишь в том случае, если $g(s) - \gamma(s)$ тождественно равно нулю, что и

¹⁾ Так мы будем обозначать отныне эту функцию, которую мы раньше (стр. 121) обозначали через $K'_{(n)}$.

требовалось доказать. Таким образом мы получили основную теорему о разложении:

Всякая непрерывная функция $g(s)$, которую можно представить истокообразно в форме (53) с помощью кусочно-непрерывной функции $h(t)$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $K(s, t)$.

2. Решение неоднородного линейного интегрального уравнения. В качестве применения этой теоремы выведем формулу для решения неоднородного интегрального уравнения:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (1)$$

При этом мы предположим первоначально, что значение параметра λ не совпадает ни с одним из собственных значений λ_i . Если принять, что непрерывная функция $\varphi(s)$ с коэффициентами разложения (φ, φ_i) решает интегральное уравнение, то функция $\varphi(s) - f(s) = g(s)$, на основании теоремы о разложении, примененной к функции $h(t) = \lambda \varphi(t)$, должна разлагаться в равномерно и абсолютно сходящийся ряд:

$$g(s) = \varphi(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(s) = \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt, \quad (54)$$

причем $c_i = (g, \varphi_i)$. С другой стороны, из (54) следует:

$$c_i = (g, \varphi_i) = \lambda \int \int K(s, t) \varphi_i(s) \varphi(t) ds dt = \frac{\lambda}{\lambda_i} (\varphi_i, \varphi) = \frac{\lambda}{\lambda_i} (\varphi_i, f) + \frac{\lambda}{\lambda_i} (\varphi_i, g),$$

откуда

$$c_i = f_i \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} \quad [f_i = (\varphi_i, f)]. \quad (55)$$

Таким образом мы получили бы для φ разложение в ряд:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(s), \quad (56)$$

который должен представлять собой решение интегрального уравнения (1). Что это действительно так, можно узнать следующим образом. Ряд сходится абсолютно и равномерно, что доказывается точно по вышеприведенному образцу. Надо лишь заметить, что для достаточно больших i при произвольном λ справедливо, во всяком случае, неравенство $|\lambda_i - \lambda| > \frac{|\lambda_i|}{2}$, так что, отвлекаясь от начальных членов, получаем

в качестве мажоранты ряд $2|\lambda| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f_i| |\varphi_i(s)|}{|\lambda_i|}$, равномерная сходимость

которого доказана выше. Подставив теперь ряд (56) вместо $\varphi(s)$ в уравнение (1), непосредственно убеждаемся, что уравнение (1) удовлетво-

руется. В согласии с теоремами § 3, это решение отказывается служить лишь в том случае, если $\lambda = \lambda_i$ есть одно из собственных значений; оно остается действительным еще и в этом случае, если $f(s)$ удовлетворяет условиям $f_i = (f, \varphi_i) = 0$ для фундаментальных функций φ_i , принадлежащих значению λ_i . Так как, в силу теорем § 3, интегральное уравнение (1) не может иметь решения для некоторых функций $f(s)$, если λ есть собственное значение, то отсюда следует, что помимо наших значений λ_i никаких других собственных значений ядро иметь не может. Наше утверждение, что все собственные значения симметрического действительного ядра действительны, стало, таким образом, самоочевидным, независимо от рассуждений на стр. 122.

3. Билинейная формула для итерированных ядер. Дальнейшее применение теоремы о разложении мы получим, полагая $h(\sigma) = K(\sigma, t)$. Для „итерированного ядра“

$$K^{(2)}(s, t) = \int K(s, \sigma) K(\sigma, t) d\sigma$$

мы получим тогда разложение:

$$K^{(2)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i} \int K(\sigma, t) \varphi_i(\sigma) d\sigma,$$

или

$$K^{(2)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i^2}. \quad (57)$$

Точно так же для дальнейших итерированных ядер

$$\begin{aligned} K^{(3)}(s, t) &= \int K^{(2)}(s, \sigma) K(\sigma, t) d\sigma = \\ &= \iint K(s, \sigma_1) K(\sigma_1, \sigma_2) K(\sigma_2, t) d\sigma_1, d\sigma_2, \\ &\dots \dots \dots \\ K^{(n)}(s, t) &= \int K^{(n-1)}(s, \sigma) K(\sigma, t) d\sigma = \\ &= \int \dots \int K(s, \sigma_1) K(\sigma_1, \sigma_2) \dots K(\sigma_{n-1}, t) d\sigma_1 \dots d\sigma_{n-1} \end{aligned}$$

получаются разложения:

$$K^{(n)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i^n} \quad (n = 2, 3, \dots); \quad (58)$$

все они сходятся абсолютно и равномерно относительно s и относительно t и, как будет показано в п. 4, равномерно также и относительно обеих переменных. В силу (57) справедливо, во всяком случае, равенство:

$$K^{(2)}(s, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2},$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(K^{(2)}(s, s) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2} \right) = 0.$$

Но это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left[K(s, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i} \right]^2 dt = 0, \quad (59)$$

или что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i}$ сходится в среднем к $K(s, t)$. В том случае,

если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i}$ при фиксированном значении s сходится равно-

мерно относительно t и представляет, следовательно, при фиксированном s непрерывную функцию $L(s, t)$ от t , должно иметь место равенство:

$$K = L.$$

Действительно, в этом случае можно в равенстве (59) выполнить предельный переход под знаком интеграла, после чего получится:

$$\int [K(s, t) - L(s, t)]^2 dt = 0,$$

откуда следует, что $K - L = 0$.

4. Теорема Мерсера¹⁾. Формулу (58) следует рассматривать в общем случае как соотношение, которое, соответственно существу дела, заменяет равенство (52), ибо формулу (58) можно доказать в общем виде, лишь начиная с $n=2$. Для одного важного частного случая можно, напротив, высказать следующую теорему: *Если $K(s, t)$ есть определенное, непрерывное, симметрическое ядро или если оно имеет лишь конечное число собственных значений одного из двух знаков, то разложение (52) справедливо и сходится к тому же абсолютно и равномерно.*

Для доказательства предположим сначала, что $K(s, t)$ положительно определенно, так что все собственные значения λ_i положительны. Далее, заметим, что для всякого положительно определенного непрерывного ядра $H(s, t)$ справедливо неравенство $H(s, s) \geq 0$. В самом деле, если бы было $H(s_0, s_0) < 0$, то существовала бы такая окрестность точки $s = s_0$, $t = s_0$, скажем, $|s - s_0| \leq \epsilon$, $|t - s_0| \leq \epsilon$, что повсюду в этой области $H(s, t) < 0$. Определим теперь функцию $\varphi(s)$ условием $\varphi(s) = 1$ при $|s - s_0| \leq \epsilon$ и $\varphi(s) = 0$ вне этого промежутка. Для этой функции на- верно справедливо неравенство:

$$\iint H(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt < 0$$

¹⁾ Mercer T., Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. Trans. London Phil. Soc. (A), том 209, стр. 415—446, 1909.

противно предположению, что H положительно определено. Прилагая этот результат к положительно определенному ядру

$$H = K(s, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i},$$

получим:

$$K(s, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i} \geq 0.$$

Следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}$, состоящий исключительно из положительных членов, сходится при всяком значении s . В силу соотношения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\varphi_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} + \dots + \frac{\varphi_m(s)}{\sqrt{\lambda_m}} \frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{\lambda_m}} \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n} + \dots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m} \right) \left(\frac{\varphi_n(t)^2}{\lambda_n} + \dots + \frac{\varphi_m(t)^2}{\lambda_m} \right) \end{aligned}$$

(неравенство Шварца), ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i}$ также сходится абсолютно и притом при заданном s равномерно относительно t , и при заданном t —

равномерно относительно s . Следовательно, функция $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i}$ при заданном s непрерывна относительно t , и наоборот. Таким образом она на основании предыдущего равна ядру K .

Наконец, убедимся еще в том, что этот ряд сходится также равномерно относительно обеих переменных одновременно. Достаточно для этого на основании приведенных выше оценок показать равномерность

сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}$. Но согласно только что доказанному

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i} = K(s, s),$$

а $K(s, s)$ — непрерывная функция. С другой стороны, существует теорема¹⁾: Если ряд положительных непрерывных функций одной переменной сходится к непрерывной функции, то ряд сходится в соответствующем интервале равномерно.

Применение этой теоремы дает непосредственно требуемый результат.

¹⁾ Ср. стр. 50 примечание.

Наличие конечного числа отрицательных собственных значений не может ничего изменить в сходимости ряда (52), так как ядро, после отделения членов $\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$, соответствующих отрицательным собственным значениям, становится положительно определенным. Таким образом наша теорема сходимости доказана в полном объеме.

§ 6. Ряд Неймана и разрешающее ядро.

Изложенная выше теория интегральных уравнений дает нам одновременно метод решения, указывая путь, как действительно вычислять эти решения с произвольной точностью (см. также § 8). Однако эти решения она дает не в изящной законченной форме, в какой были получены решения в теории линейных уравнений гл. I. Но и здесь можно прийти к такому явному решению вполне аналогично тому, как это было сделано в гл. I. Перепишем интегральное уравнение (1), подставив в правой части вместо $\varphi(t)$ снова ее выражение из (1). Продолжая таким образом, получим уравнение с помощью итерированных ядер в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= f(s) + \lambda \int K(s, t) f(t) dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s, t) \varphi(t) dt \\ &= f(s) + \lambda \int K(s, t) f(t) dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s, t) f(t) dt + \lambda^3 \int K^{(3)}(s, t) \varphi(t) dt \\ &= \dots\end{aligned}$$

и, как в гл. I, усматриваем отсюда, что решение дается бесконечным рядом:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t) f(t) dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s, t) f(t) dt + \dots, \quad (60)$$

если только этот ряд равномерно сходится. Если сделать несколько далее идущее предположение о равномерной сходимости выражения

$$K(s, t) = K(s, t) + \lambda K^{(2)}(s, t) + \lambda^2 K^{(3)}(s, t) + \dots, \quad (61)$$

то решение интегрального уравнения

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt$$

представится в форме „взаимного интегрального уравнения“:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t) f(t) dt. \quad (62)$$

Функцию $K(s, t) = K(s, t; \lambda)$ мы назовем поэтому также *взаимным* или *разрешающим ядром* или *резольвентой*.

Ряд (60) или (61) мы будем называть *рядом Неймана*. Он во всяком случае сходится при достаточно малых значениях $|\lambda|$, например при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, где M — верхняя граница абсолютной величины $K(s, t)$. Таким образом при достаточно малых значениях $|\lambda|$ разрешающее ядро

является аналитической функцией от λ . Оно удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} K(s, t; \lambda) &= K(s, t) + \lambda \int K(s, \sigma) K(\sigma, t; \lambda) d\sigma, \\ K(s, t; \lambda) &= K(s, t) + \lambda \int K(\sigma, t) K(s, \sigma; \lambda) d\sigma, \\ K(s, t; \lambda) - K(s, t; \lambda') &= (\lambda - \lambda') \int K(s, \sigma; \lambda) K(\sigma, t; \lambda') d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

в чем можно убедиться непосредственно подстановкой.

Если ядро $K(s, t)$ симметрично, то разрешающему ядру легко можно дать весьма замечательную форму, которая делает наглядным характер аналитической зависимости функции K от λ ; а именно, принимая во внимание разложение (58) для симметрических ядер $K^{(2)}(s, t)$, $K^{(3)}(s, t)$, ... и суммируя появляющиеся при этом в (61) геометрические ряды, непосредственно получаем:

$$K(s, t, \lambda) = K(s, t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(t)}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)}. \quad (64)$$

При этом, как показывает рассуждение, совершенно аналогичное приведенному в § 5,1 и § 5,2, ряд справа сходится при всяком значении λ , не являющемся собственным значением, и притом равномерно относительно s и t .

Соотношение (64), доказанное пока лишь в предположении сходимости ряда Неймана (61), дает аналитическое продолжение резольвенты $K(s, t; \lambda)$ на всю комплексную плоскость λ , причем собственные значения λ_i оказываются все простыми полюсами. Таким образом мы в формуле (64) имеем разложение резольвенты на простые дроби, и наш результат можем выразить так: *Резольвента симметрического ядра есть мероморфная функция от λ , для которой собственные значения интегрального уравнения являются простыми полюсами.* Ее вычеты относительно полюсов λ_i дают соответствующие этому значению собственные функции. Из ряда Неймана и формулы (64) вытекает, что радиус сходимости ряда Неймана равен наименьшей из абсолютных величин собственных значений.

Согласно теоремам общей теории функций, резольвенту, как мероморфную функцию, возможно представить в форме отношения двух целых трансцендентных функций, и следует ожидать, что эти целые трансцендентные функции могут быть выражены в виде таких повсюду сходящихся степенных рядов, коэффициенты которых можно составить непосредственно с помощью данного ядра. В алгебраической задаче мы имеем перед собою такой способ выражения в формулах гл. I, § 2. Естественно предположение, что и здесь можно установить совершенно аналогичные формулы. Можно, далее, ожидать, что эти формулы отнюдь не ограничены случаем симметрических ядер, но годятся и для произвольного непрерывного несимметрического ядра. Такие соотношения действительно установлены Фредгольмом, который сделал их исходным пунктом всей теории. В следующем параграфе мы покажем, как можно вывести эти формулы Фредгольма естественным путем, причем мы снова равно-

мерно аппроксимируем ядро выродившимися ядрами $A_n(s, t)$ и затем совершим предельный переход $n \rightarrow \infty$ ¹⁾.

§ 7. ФОРМУЛЫ ФРЕДГОЛЬМА.

Так как в дальнейшем мы формул Фредгольма применять не будем, то в нижеследующих выводах мы некоторые промежуточные вычисления с определителями предоставим читателю²⁾.

Воспользуемся рассуждениями и обозначениями гл. I, § 2. Для выродившегося ядра $K(s, t) = A(s, t) = \sum_{p=1}^n \alpha_p(s) \beta_p(t)$ интегральное уравнение

$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt$ принимает вид:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{p=1}^n x_p \alpha_p(s) = f(s) + \lambda E(x, \alpha(s)), \quad (65)$$

если, как и раньше, положить $x_p = (\varphi, \beta_p)$. Сохраняя прежние обозначения $y_p = (f, \beta_p)$, $k_{pq} = (\alpha_q, \beta_p)$, получим для x_p систему уравнений:

$$y_p = x_p - \lambda \sum_{q=1}^n k_{pq} x_q, \quad (66)$$

решение которой дается равенством:

$$E(x, u) = - \frac{\Delta(y, u; \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

откуда решение интегрального уравнения (1) получится в следующем виде:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda E(x, \alpha(s)) = f(s) - \lambda \frac{\Delta(y, \alpha(s); \lambda)}{\Delta(\lambda)}. \quad (67)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} \Delta(y, u; \lambda) &= \Delta_1(y, u) - \Delta_2(y, u)\lambda + \dots + (-1)^{n-1} \Delta_n(y, u)\lambda^{n-1}, \\ \Delta(\lambda) &= 1 - \Delta_1\lambda + \dots + (-1)^n \Delta_n\lambda^n, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

где

$$\Delta_h(y, u) = \sum \begin{vmatrix} 0 & u_{p_1} & u_{p_2} & \dots & u_{p_h} \\ y_{p_1} & k_{p_1 p_1} & k_{p_1 p_2} & \dots & k_{p_1 p_h} \\ y_{p_2} & k_{p_2 p_1} & k_{p_2 p_2} & \dots & k_{p_2 p_h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{p_h} & k_{p_h p_1} & k_{p_h p_2} & \dots & k_{p_h p_h} \end{vmatrix}, \quad (69)$$

¹⁾ Этот метод впервые применил Э. Гурса (E. Goursat) в работе: Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm, Bull. Soc. math. France, т. 35, стр. 163–173, 1907. Ср. также Lebesgue H., Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm, там же, т. 36, стр. 3–19, 1909.

²⁾ Ср. Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909.

$$\Delta_h = \sum \begin{vmatrix} k_{p_1 p_1} & k_{p_1 p_2} & \dots & k_{p_1 p_h} \\ k_{p_2 p_1} & k_{p_2 p_2} & \dots & k_{p_2 p_h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{p_h p_1} & k_{p_h p_2} & \dots & k_{p_h p_h} \end{vmatrix}, \quad (69')$$

причем указатели $p_1, p_2, \dots, p_h$ пробегают независимо значения от 1 до n и $p_1 < p_2 < \dots < p_h$.

Сумма определителей $\Delta_h(y, \alpha(s))$, очевидно, может быть записана также в виде $\int \Delta_h[\beta(t), \alpha(s)] f(t) dt$, так что решение (67) интегрального уравнения принимает форму:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t; \lambda) f(t) dt \quad (62')$$

с резольвентой

$$K(s, t; \lambda) = - \frac{\Delta(\beta(t), \alpha(s); \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}. \quad (70)$$

Вместо того, чтобы в формулах (69) суммировать, как указано, по сочетаниям из n элементов по h индексов $1, 2, \dots, n$ можно, разделив на $h!$, составить сумму по всем размещениям по h индексов, очевидно, также и с повторениями. После этого замечания, принимая во внимание определение величин k_p , получим на основании простых теорем теории определителей формулы:

$$\left\{ \begin{aligned} D(s, t; \lambda) &= -\Delta(\beta(t), \alpha(s); \lambda) \\ &= D_0(s, t) - \frac{1}{1!} D_1(s, t) \lambda + \frac{1}{2!} D_2(s, t) \lambda^2 - \dots \\ &\quad \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D_{n-1}(s, t) \lambda^{n-1}, \\ D(\lambda) &= \Delta(\lambda) \\ &= 1 - \frac{1}{1!} D_1 \lambda + \frac{1}{2!} D_2 \lambda^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} D_n \lambda^n, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} D_h(s, t) &= \int \dots \int \begin{vmatrix} A(s, t) & A(s, s_1) & \dots & A(s, s_h) \\ A(s_1, t) & A(s_1, s_1) & \dots & A(s_1, s_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(s_h, t) & A(s_h, s_1) & \dots & A(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h \\ D_h &= \int \dots \int \begin{vmatrix} A(s_1, s_1) & A(s_1, s_2) & \dots & A(s_1, s_h) \\ A(s_2, s_1) & A(s_2, s_2) & \dots & A(s_2, s_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(s_h, s_1) & A(s_h, s_2) & \dots & A(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

при $h = 1, \dots, n$ и $D_0(s, t) = A(s, t)$.

Этим самым целые рациональные функции $D(s, t; \lambda)$ и $D(\lambda)$ от λ выражены явно через ядро. Выражения (71) можно формально продолжить и в виде бесконечных рядов, ибо, как легко видеть, для выродившегося ядра $A(s, t) = \sum_{p=1}^n a_p(s) \beta_p(t)$ составленные по формулам (72) величины D_h при $h > n$ и $D_h(s, t)$ при $h > n - 1$ все исчезают.

Если теперь произвольное непрерывное ядро $K(s, t)$ равномерно аппроксимируется последовательностью выродившихся ядер, то относящиеся к ним выражения (72) сходятся к соответствующим детерминантам ядра $K(s, t)$. Бесконечные ряды

$$\left. \begin{aligned} D(s, t; \lambda) &= D_0(s, t) - \frac{1}{1!} D_1(s, t) \lambda + \dots, \\ D(\lambda) &= 1 - \frac{1}{1!} D_1 \lambda + \frac{1}{2!} D_2 \lambda^2 - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

причем теперь в выражениях (72) следует заменить A через K , представляют собою для невыродившегося ядра $K(s, t)$ целые трансцендентные функции. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что они сходятся при всех значениях λ . Если при всех значениях s, t постоянно $|K(s, t)| \leq M$, то на основании теоремы Адамара об оценке определителя (ср. гл. 1, § 5, 2) имеем:

$$\begin{aligned} |D_h(s, t)| &\leq \sqrt{(h+1)^{h+1}} M^{h+1} (b-a)^h, \\ |D_h| &\leq \sqrt{h^h} M^h (b-a)^h. \end{aligned}$$

Так как ряды

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sqrt{(h+1)^{h+1}} M^{h+1} (b-a)^h \frac{\lambda^h}{h!}, \quad 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{h^h} M^h (b-a)^h \frac{\lambda^h}{h!}$$

сходятся при всяком значении λ и являются мажорантами для рядов абсолютных величин членов вышеприведенных рядов (73), то наше утверждение доказано; из него же вытекает, что при всяком значении λ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(s, t; \lambda) = D(s, t; \lambda), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(\lambda) = D(\lambda)$$

в смысле равномерной сходимости, причем величины с индексом n относятся к n -му аппроксимирующему выродившемуся ядру $A_n(s, t)$, величины же без индекса — к ядру $K(s, t)$. Таким образом, если только мы

*) В самом деле $\frac{1}{h!} < \frac{e^h}{h^h}$, так как в разложении e^h имеется член $\frac{h^h}{h!}$. Поэтому корень степени h из коэффициента при λ^h во втором ряду меньше, чем

$$\frac{M(b-a)e}{h^{\frac{1}{2}}}$$

и, стало быть, сходится к нулю при $h \rightarrow \infty$; то же самое справедливо и для первого из вышеприведенных рядов.

имеем дело не с корнем $\lambda = \lambda_i$ выражения $D(\lambda)$, то и резольвента ядра $K(s, t)$:

$$K(s, t; \lambda) = - \frac{D_0(s, t) - \frac{1}{1!} D_1(s, t) \lambda + \dots}{1 - \frac{1}{1!} D_1 \lambda + \frac{1}{2!} D_2 \lambda^2 - \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s, t; \lambda) \quad (74)$$

и с ее помощью получим для произвольного ядра $K(s, t)$ следующую формулу решения интегрального уравнения:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t; \lambda) f(t) dt. \quad (75)$$

Написанные выше формулы называют, по имени открывшего их ученого, *формулами Фредгольма*. Очевидна справедливость следующего соотношения:

$$D_h = \int D_{h-1}(s, s) ds. \quad (76)$$

Далее, приведем формулу ¹⁾:

$$D'(\lambda) = - \int D(s, s; \lambda) ds \quad (77)$$

и следующую общую формулу для производной порядка m :

$$D^{(m)}(\lambda) = (-1)^m \int \dots \int D \left(\begin{matrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_m \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_m \end{matrix} \middle| \lambda \right) ds_1 ds_2 \dots ds_m, \quad (78)$$

где положено

$$D \left(\begin{matrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_m \\ t_1, & t_2, & \dots, & t_m \end{matrix} \middle| \lambda \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^h}{h!} D_h \left(\begin{matrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_m \\ t_1, & t_2, & \dots, & t_m \end{matrix} \right) \quad (79)$$

и

$$D_h \left(\begin{matrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_m \\ t_1, & t_2, & \dots, & t_m \end{matrix} \right) = \int \dots \int \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) \dots K(s_1, t_m) & K(s_1, \sigma_1) \dots K(s_1, \sigma_h) \\ K(s_2, t_1) \dots K(s_2, t_m) & K(s_2, \sigma_1) \dots K(s_2, \sigma_h) \\ \dots & \dots \\ K(s_m, t_1) \dots K(s_m, t_m) & K(s_m, \sigma_1) \dots K(s_m, \sigma_h) \\ K(\sigma_1, t_1) \dots K(\sigma_1, t_m) & K(\sigma_1, \sigma_1) \dots K(\sigma_1, \sigma_h) \\ \dots & \dots \\ K(\sigma_h, t_1) \dots K(\sigma_h, t_m) & K(\sigma_h, \sigma_1) \dots K(\sigma_h, \sigma_h) \end{vmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2, \dots, d\sigma_h \quad (80)$$

Прибавим еще к этому, что собственные функции для корней $\lambda = \lambda_i$ выражения $D(\lambda)$ в случае простых полюсов можно получить, вычисляя в этих точках вычеты резольвенты $K(s, t; \lambda)$. Доказательство этого легко получить, исходя из наших формул ²⁾.

¹⁾ Ср. *Fredholm I.* в указанном месте.

²⁾ Для дальнейших подробностей о формальном аппарате теории Фредгольма ср., например, *Kowalewski G.*, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909.

§ 8. НОВОЕ ОБОСНОВАНИЕ ТЕОРИИ.

При обосновании общей теории интегральных уравнений мы довольствовались вытекающей из принципа сходимости гл. II, § 2 уверенностью, что из множества решений аппроксимирующих интегральных уравнений можно выделить последовательность, равномерно сходящуюся к решению интегрального уравнения. Понятия меры независимости и асимптотического числа измерений последовательности функций, также введенные уже во второй главе, дают, однако, возможность несколько другим способом обосновать теорию интегральных уравнений и обозреть при этом многообразие решений аппроксимирующих уравнений во всей их совокупности в отношении их свойств сходимости с возрастанием приближения. Так как, помимо того, при этом получаются новые заслуживающие внимания точки зрения и результаты, то уместно будет привести здесь относящиеся сюда соображения.

1. Лемма. Приложение к теории интегральных уравнений понятий, выясненных в гл. II, § 3, основывается на следующей лемме: Пусть $\phi_1(s), \phi_2(s), \dots$ — последовательность функций, нормы которых остаются ниже заданной грани M и для которых выполняется соотношение:

$$\phi_n(s) - \lambda \int K(s, t) \phi_n(t) dt \rightarrow 0, \quad (81)$$

причем сходимость равномерная. В таком случае функции $\phi_n(s)$ образуют гладкую последовательность функций конечного асимптотического числа измерений r .

Для доказательства заметим, что соотношение (81) сохраняет силу и в том случае, если функции $\phi_n(s)$ заменить какими угодно функциями $\chi_n(s) = x_1 \phi_{n_1} + \dots + x_p \phi_{n_p}$, представляющими собой линейные комбинации, с ограниченными по абсолютной величине коэффициентами $x_1, x_2, \dots, x_p$ из какого угодно числа p таких функций

$$\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots, \phi_{n_p}$$

последовательности ϕ_n , выбранных таким образом, что индексы n_i безгранично возрастают одновременно с n . Теперь, если среди функций $\phi_n(s)$ имеются такие группы по r функций со сколь угодно большими индексами n , что мера независимости этих групп остается выше заданной границы α , если, другими словами, число измерений последовательности по меньшей мере равно r , то можно эти группы ортогонализировать каждую внутри себя, причем согласно гл. II, § 3, 1 получающиеся коэффициенты остаются ниже числа $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Таким путем мы полу-

чаем группы из r взаимно ортогональных нормированных функций $\omega_{n,i}(s) (i=1, 2, \dots, r; n=1, 2, 3, \dots)$, для которых выполняется предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\omega_{n,i}(s) - \lambda \int K(s, t) \omega_{n,i}(t) dt \right) = 0 \quad (82)$$

равномерно относительно s . Обычное рассуждение с помощью неравенства Бесселя ¹⁾ обнаруживает, что при всяком n

$$\iint K(s, t)^2 ds dt \geq \sum_{i=1}^r \iint \left[\int K(s, t) \omega_{n,i}(t) dt \right]^2 ds,$$

откуда в силу (82) имеем:

$$\iint K(s, t)^2 ds dt \geq \frac{r}{\lambda^2}.$$

Таким образом мы получили границу для числа измерений последовательности и обнаружили, что это число конечно. Что последовательность является гладкой, вытекает непосредственно из равномерности предельного перехода в выражении (81). Действительно, во-первых, если обозначим через ε_n число, стремящееся к нулю с возрастанием n , то в силу неравенства Шварца имеем:

$$\phi_n(s)^2 \leq M\lambda^2 \int K(s, t)^2 dt + \varepsilon_n,$$

что обнаруживает равномерную ограниченность функций $\phi_n(s)$. Во-вторых, из соотношения $\int (x_1\phi_n + \dots + x_p\phi_n)^2 ds < \varepsilon$ точно таким же образом получается соотношение:

$$(x_1\phi_n + \dots + x_p\phi_n)^2 \leq \lambda^2 \varepsilon \int K(s, t)^2 dt + \varepsilon_n,$$

чем доказывается гладкость последовательности функций.

2. Собственные функции симметрического ядра. Доказанной леммой мы воспользуемся прежде всего для того, чтобы получить собственные функции симметрического ядра $K(s, t)$, которое равномерно аппроксимируется выродившимися симметрическими ядрами $A_n(s, t)$. Пусть, как и раньше, $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots$ — положительные, $\mu_{-1}^{(n)}, \mu_{-2}^{(n)}, \dots$ — отрицательные собственные значения ядра $A_n(s, t)$, а $\phi_1^{(n)}(s), \phi_2^{(n)}(s), \dots$ и соответственно $\phi_{-1}^{(n)}(s), \phi_{-2}^{(n)}(s), \dots$ — соответствующие им собственные функции. При этом кратные собственные значения повторены надлежащее число раз. Далее, пусть снова $J_n(\varphi, \varphi) = \iint A_n(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$ и $J(\varphi, \varphi) = \iint K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$ — интегральные формы, принадлежащие соответственно ядрам $A_n(s, t)$ и $K(s, t)$, и пусть форма $J(\varphi, \varphi)$ способна принимать положительные значения, что мы вправе предполагать. Тогда $\chi_1^{(n)} = \frac{1}{\mu_1^{(n)}}$ есть максимум формы $J_n(\varphi, \varphi)$ для нормированной

функции, а $\chi_1 = \frac{1}{\mu_1}$ — верхняя граница формы $J(\varphi, \varphi)$ при том же условии. Так как значения $J(\varphi, \varphi)$ и $J_n(\varphi, \varphi)$ отличаются между собою меньше чем на заданное сколь угодно малое число, то непременно $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1^{(n)} = \mu_1$.

¹⁾ Ср. § 4, 2 этой главы, стр. 120.

Следовательно, из равенства:

$$\phi_1^{(n)}(s) - \mu_1^{(n)} \int A_n(s, t) \phi_1^{(n)}(t) dt = 0$$

в силу того, что $A_n(s, t) \Rightarrow K(s, t)$, вытекает соотношение:

$$\phi_1^{(n)}(s) - \mu_1 \int K(s, t) \phi_1^{(n)}(t) dt \Rightarrow 0. \quad (83)$$

Согласно нашей лемме функции $\phi_1^{(n)}$ образуют гладкую последовательность конечного, очевидно, положительного, числа измерений r [равенство r нулю противоречило бы предположению, что функции $\phi_1^{(n)}(s)$ нормированы], а следовательно, определяют, согласно гл. II, § 3, линейную совокупность функций с нормированными ортогональными компонентами $\phi_{1,1}(s), \dots, \phi_{1,r}(s)$, которые, необходимо, удовлетворяют однородному интегральному уравнению:

$$\phi_{1,i}(s) = \mu_1 \int K(s, t) \phi_{1,i}(t) dt \quad (i=1, 2, \dots, r),$$

а потому являются собственными функциями ядра $K(s, t)$, принадлежащими собственному значению μ_1 . Точно таким же путем получим остальные собственные значения и фундаментальные функции ядра $K(s, t)$. Действительно, например, $\lambda_h^{(n)} = \frac{1}{\mu_h^{(n)}}$ есть наименьшее значение максимума формы $J_n(\varphi, \varphi)$, достигаемое при надлежащем выборе функций $v_1(s), v_2(s), \dots, v_{h-1}(s)$ при дополнительном условии $(\varphi, \varphi) = 1$ и прочих добавочных условиях $(\varphi, v_i) = 0$ ($i=1, 2, \dots, h-1$).

Если мы снова определим $\lambda_h = \frac{1}{\mu_h}$, как соответствующую нижнюю границу верхней границы формы $J(\varphi, \varphi)$, то в силу близости совокупности значений форм $J_n(\varphi, \varphi)$ и $J(\varphi, \varphi)$ имеем снова $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_h^{(n)} = \mu_h$.

Отсюда выводим соотношение:

$$\phi_h^{(n)}(s) - \mu_h \int K(s, t) \phi_h^{(n)}(t) dt \Rightarrow 0,$$

после чего остается повторить предыдущие рассуждения. Для того чтобы получить отрицательные собственные значения и принадлежащие им собственные функции, следует рассматривать соответствующие задачи на минимум и на максимальное значение минимума. Если имеется лишь конечное число собственных значений того или другого знака, то процесс их отыскания следует оборвать на надлежащем месте, что не нуждается в дальнейших разъяснениях.

3. Несимметрические ядра. И в случае несимметрического интегрального уравнения (1) настоящий метод также дает принципиальное упрощение и углубление по сравнению с прежним методом. Пользуясь старыми обозначениями, мы можем ограничиться здесь кратким указанием. В случае I пусть ρ_n и c_n таковы, что при всяком n норм c_n остается меньше числа M . В таком случае и норм разности $\rho_n - \rho_m = \zeta_{n,m}$

остается меньше некоторой грани, а именно $4M$. Далее, имеем:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left[\zeta_{n, m}(s) - \lambda \int K(s, t) \zeta_{n, m}(t) dt \right] = 0$$

(равномерно относительно s), а потому, согласно нашей лемме, всякая часть двойной последовательности $\zeta_{n, m}$, у которой n и m одновременно безгранично возрастают, имеет ограниченное асимптотическое число измерений r , причем грань для r зависит лишь от ядра $K(s, t)$ и от λ . Стало быть, и наша двойная последовательность $\zeta_{n, m}$ определяет линейную предельную совокупность (ср. гл. II, § 3) с конечным числом r ортогональных компонент $\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_r(s)$, исключая разве только тот случай, когда асимптотическое число измерений всякой частичной последовательности равно нулю, т. е. $\zeta_{n, m} \Rightarrow 0$. В последнем случае $r = 0$ функции $\rho_n(s)$ просто сходятся равномерно к решению интегрального уравнения:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt.$$

В случае $r > 0$ функции $\phi_i(s)$ являются решениями однородного уравнения. Заменяя ρ_n функцией

$$\eta_n(s) = \rho_n(s) + x_1 \phi_1(s) + \dots + x_r \phi_r(s),$$

ортогональной к функциям $\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_r(s)$. Для этих функций, несомненно, выполняется соотношение:

$$\left[\eta_n(s) - \lambda \int K(s, t) \eta_n(t) dt \right] - f(s) \Rightarrow 0.$$

К разностям $\eta_n - \eta_m = \zeta_{n, m}$ можно теперь снова, как это сделано было выше, применить нашу лемму, и легко придем к заключению, что число измерений всякой части этой последовательности должно равняться нулю, и что, следовательно, функции $\eta_n(s)$ равномерно сходятся к предельной функции, ортогональной к $\phi_i(s)$ и удовлетворяющей интегральному уравнению. В случае II подобным же образом на основании нашей леммы получим, в качестве предельного образования последовательности

функций $\sigma_n(s) = \frac{\rho_n(s)}{c_n}$, линейную совокупность функций, являющихся

решениями однородного интегрального уравнения. Таким образом по нашему второму методу получается более отчетливое проникновение в природу господствующих здесь соотношений сходимости. Мы убеждаемся, что, рассматривая аппроксимирующее интегральное уравнение с ядром $A_n(s, t)$, мы действительно с произвольной точностью приходим к решению неоднородного (или, соответственно, однородного) интегрального уравнения.

4. Непрерывная зависимость собственных значений и собственных функций от ядра. Что касается вопроса о том, в какой мере решения интегрального уравнения непрерывно изменяются вместе с ядром, мы ограничиваемся задачей о собственных значениях при симметрическом ядре $K(s, t)$. Пусть ядро $K(s, t)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности симметрических ядер $K_n(s, t)$

($n=1, 2, 3, \dots$). Если рассматривать функции $\varphi(s)$, удовлетворяющие условию $(\varphi, \varphi) \leq M$, то значения соответствующих этим ядрам интегральных форм $J_n(\varphi, \varphi)$ и $J(\varphi, \varphi)$ при достаточно большом n отличаются между собой на сколь угодно малую величину. То же самое справедливо поэтому и для максимумов или минимумов этих форм при добавочных условиях $(\varphi, \varphi)=1, (\varphi, v_i)=0$, и точно так же и для наибольших значений минимумов или наименьших значений максимумов. Другими словами: *h -е положительное и h -е отрицательное собственное значение изменяются непрерывно вместе с ядром.* Что касается собственных функций, то у них нельзя ожидать закономерной непрерывности, если принять во внимание произвольность их знака и возможность кратных собственных значений. Зато здесь справедлива следующая теорема: Пусть λ_h является r -кратным собственным значением ядра $K(s, t)$, т. е. пусть

$$\lambda_h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_h^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{h+1}^{(n)} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{h+r-1}^{(n)},$$

между тем как для $\lambda_{h-1}^{(n)}$ и $\lambda_{h+r}^{(n)}$ это соотношение не справедливо. В таком случае при $n \rightarrow \infty$ линейная совокупность собственных функций $\varphi_h^{(n)}(s), \varphi_{h+1}^{(n)}(s), \dots, \varphi_{h+r-1}^{(n)}(s)$ ядра $K_n(s, t)$ равномерно сходится¹⁾ к линейной совокупности собственных функций ядра $K(s, t)$, принадлежащих собственному значению λ_h .

Эту теорему, представляющую полное выражение искомых свойств непрерывности собственных функций, можно доказать на основании нашей леммы почти непосредственно, исходя из замечания, что для последовательности собственных функций $\varphi_{h+k}^{(n)}(s)$ ($0 \leq k < r$) справедливо предельное равенство:

$$[\varphi_{h+k}^{(n)}(s) - \lambda_h \int K(s, t) \varphi_{h+k}^{(n)}(t) dt] \Rightarrow 0$$

и что эта последовательность имеет асимптотическое число измерений r .

§ 9. РАСШИРЕНИЕ ГРАНИЦ ПРИЛОЖИМОСТИ ТЕОРИИ.

Выводы § 1—6 и § 8 можно обобщить в двух направлениях.

Прежде всего все рассуждения сохраняют силу, если рассматривать интегральные уравнения для функций многих, скажем m , независимых переменных. Под $f(s)$ и $\varphi(s)$ будем теперь понимать непрерывные функции переменных $s_1, s_2, \dots, s_m$, определенные в заданной конечной области G , под $K(s, t)$ — непрерывную функцию переменных $s_1, s_2, \dots, s_m$ и $t_1, t_2, \dots, t_m$, изменяющихся в той же области; обозначим, наконец, через ds элемент объема $ds_1 ds_2 \dots ds_m$ области G , положим соответственно $dt = dt_1 dt_2 \dots dt_m$ и все рассматриваемые интегралы будем раз навсегда считать распространенными на всю область G . В таком случае интегральное уравнение

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt$$

представляет собой интегральное уравнение с ядром $K(s, t)$, зависящим

¹⁾ В отношении понятия сходимости линейных совокупностей ср. гл. II, § 3, 2.

от $2m$ переменных, для функции m переменных $\varphi(s)$, и вся наша теория, слово в слово, остается в силе.

С другой стороны, и сделанное до сих пор предположение о непрерывности ядра может быть значительно смягчено без того, чтобы полученные результаты в чем-либо изменились. Не придавая значения возможно более широкому обобщению, отметим здесь лишь случаи, существенные для приложений, и вновь будем рассматривать ядро $K(s, t)$ с двумя переменными s и t . Наши прежние рассуждения, исключая рассуждения, относящиеся к теореме Мерсера (§ 5, 4), с незначительными видоизменениями сохраняют силу и для ядер лишь кусочно-непрерывных в определенном ранее смысле, ибо всякую такую функцию, как мы видели в предыдущей главе, можно с произвольной точностью аппроксимировать в среднем с помощью непрерывной функции.

Можно также допускать и бесконечно большие значения ядра. При этом предполагается, что интегралы

$$\iint K(s, t)^2 ds dt, \int K(s, t)^2 ds, \int K(s, t)^2 dt$$

имеют смысл, а два последние, как функции соответственно t или s , остаются ниже определенной грани. Это предположение выполняется, например, в том важном для приложений случае, когда ядро при $s=t$ обращается в бесконечность порядка ниже $\frac{1}{2}$, т. е. когда ядро имеет вид:

$$K(s, t) = H(s, t) |s - t|^{-\alpha},$$

причем $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, а $H(s, t)$ — всюду непрерывная функция. Для такого ядра выведенные ранее теоремы справедливы, ибо такое ядро можно во всяком случае аппроксимировать непрерывными выродившимися ядрами $A_n(s, t)$ таким образом, что $\int [K(s, t) - A_n(s, t)]^2 dt$ и $\int [A_n(s + \eta, t) - A_n(s, t)]^2 dt$ делаются сколь угодно малыми, первый интеграл равномерно в s , а второй — равномерно относительно s и n , когда $|\eta|$ берется достаточно малым. Но для проведения наших рассуждений большего не требуется. Точно так же остаются в силе наши прежние теоремы и для случая двух независимых переменных, если ядро при $s_1 = t_1, s_2 = t_2$ обращается в бесконечность порядка ниже первого, ибо при этом условия указанные особенности не лишают смысла интеграла $\iint K(s_1, s_2, t_1, t_2)^2 ds_1 ds_2$. При трех независимых переменных точно так же допустимы для K произвольные особенности порядка ниже $\frac{3}{2}$ и вообще при n переменных — особенности более низкого порядка, чем $\frac{n}{2}$.

Не трудно расширить область применимости наших результатов настолько, что потребуются лишь сформулированные выше предположения об интегралах от $K^2(s, t)$, между тем как во всем прочем можно совершенно отказаться от непрерывности ядра и т. д. Здесь мы ограничимся только этим указанием.

§ 10. Дополнения и задачи к третьей главе.

1. Примеры.

а) Ядро

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ns \sin nt}{n} = \frac{1}{2} \log \left| \sin \frac{s+t}{2} : \sin \frac{s-t}{2} \right| \quad (0 \leq s, t \leq \pi)$$

имеет собственные значения $\lambda_n = \frac{2n}{\pi}$ и собственные функции $\sin nt$.

б) Показать, что симметрическое ядро

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1-h^2}{1-2h \cos(s-t) + h^2} \quad (0 \leq s, t \leq 2\pi)$$

имеет при $|h| < 1$ собственные функции $1, \sin ns, \cos ns$ с собственными значениями $1, \frac{1}{h^n}, \frac{1}{h^n}$.

в) Для симметрического ядра, определенного равенством:

$$K(s, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{s^2+t^2}{2}} \int_{-\infty}^s e^{-\tau^2} d\tau \int_t^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \quad (s \leq t),$$

ортгональные функции Эрмита $e^{\frac{s^2}{2}} \frac{d^n}{ds^n} e^{-\frac{s^2}{2}}$ являются фундаментальными функциями с собственными значениями $\lambda_n = 2n + 2$.

г) Для симметрического ядра, определенного равенством:

$$K(s, t) = e^{\frac{s+t}{2}} \int_t^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \quad (0 \leq s \leq t),$$

ортгональные функции Лагерра $e^{-\frac{s}{2}} \frac{\partial^n}{\partial h^n} \left. \frac{e^{-\frac{sh}{1-h}}}{1-h} \right|_{h=0}$ являются собственными функциями при собственных значениях $\lambda_n = n + 1$ ¹⁾.

2. Особенные интегральные уравнения. Приложимость общей теории может нарушиться, если ядро обнаруживает особенности слишком высокого порядка, или если оно при бесконечно протяженной основной области — в отличие от ядер только что рассмотренных в п. 1 — в бесконечности обращается в нуль недостаточно высокого порядка.

Приводим здесь несколько примеров интегральных уравнений с собственными значениями бесконечно большой кратности.

¹⁾ Ср. Neumann R., Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermite-schen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen и т. д. Dissert., Breslau 1912.

Из интегральной формулы

$$\int_0^{\infty} \sin st \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-at} + \frac{t}{a^2 + t^2} \right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2 + s^2},$$

тождественной относительно a , вытекает, что для основной области $0 \leq s, t < \infty$, ядро $\sin st$ имеет собственное значение $\lambda = 1$ бесконечно большой кратности.

Эрмитовские ортогональные функции (ср. п. 1, в) являются собственными функциями ядра e^{ist} с собственными значениями $\frac{i^n}{\sqrt{2\pi}}$. Стало быть, каж-

дое из четырех значений $\pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}}$ есть собственное значение бесконечно большой кратности для этого ядра.

Пример интегрального уравнения ¹⁾ с бесконечно большим числом собственных значений в конечном промежутке:

Уравнение

$$\varphi(s) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s-t|} \varphi(t) dt$$

имеет решения e^{as} с собственными значениями $\lambda = \frac{1+a^2}{2}$. Таким образом всякое $\lambda > \frac{1}{2}$ является собственным значением.

3. Метод Шмидта для вывода теорем Фредгольма ²⁾. Принимая $\lambda = 1$, приведем ядро $K(s, t)$ к виду

$$K(s, t) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu}(s) \beta_{\nu}(t) + k(s, t),$$

причем $\iint k(s, t)^2 ds dt < 1$, так что ряд Неймана для ядра k при $\lambda = 1$ сходится (ср. § 6), а стало быть, даст, согласно § 6, соответствующую ядру $k(s, t)$ резольвенту $\chi(s, t)$. Написав интегральное уравнение (1) в форме:

$$f_1(s) = \varphi(s) - \int k(s, t) \varphi(t) dt,$$

¹⁾ Интегральные уравнения родственного типа рассматриваются в работе Гопфа: Hopf, E. Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern, Sitzungsber. Acad. Berlin (phys.-math. Kl.), стр. 233 - 275, 1928 и в цитируемых там работах U. Wegner'a, H. H. Hardy и E. C. Titchmarsh'a.

²⁾ Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, Math. Ann., том 64, стр. 161—174, 1907.

где

$$f_1(s) = f(s) + \sum_{v=1}^n x_v \alpha_v(s), \quad x_v = (\varphi, \beta_v),$$

мы имеем поэтому обратно:

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{v=1}^n x_v \alpha_v(s) + \int \chi(s, t) \left[f(t) + \sum_{v=1}^n x_v \alpha_v(t) \right] dt,$$

или

$$f_2(s) = f(s) + \int \chi(s, t) f(t) dt = \varphi(s) - \int \left[\sum_{v=1}^n \alpha_v(s) \beta_v(t) + \gamma_v(s) \beta_v(t) \right] \varphi(t) dt,$$

полагая

$$\gamma_v(s) = \int \chi(s, \tau) \alpha_v(\tau) d\tau.$$

Таким образом заданное интегральное уравнение сведено к интегральному уравнению с выродившимся ядром.

4. Метод Энскага для решения симметрических интегральных уравнений ¹⁾. Рассмотрим положительно определенное ядро $K(s, t)$, первое собственное значение которого больше единицы, для которого, следовательно, при всякой функции φ справедливо соотношение:

$$\int \varphi(s)^2 ds - \iint K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt > 0.$$

Интегральное уравнение (1) напомним, полагая $\lambda = 1$, в сокращенной форме $f(s) = J(\varphi)$, введя обозначение $J(\varphi) = \varphi(s) - \int K(s, t) \varphi(t) dt$. Далее, построим какую-нибудь „полярную по отношению к ядру полную систему функций“ $v_1(s), v_2(s), \dots$, удовлетворяющую соотношениям:

$$\int v_i J(v_k) ds = \delta_{ik} \quad (\delta_{ii} = 1, \delta_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k).$$

Такую систему можно получить из полной системы функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ способом, аналогичным процессу ортогонализации, описанному в гл. II, § 1. Положив $a_v = \int \varphi J(v_v) ds = \int v_v f ds$, получим непосредственно

$$\varphi(s) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v v_v(s) \text{ в предположении, что этот ряд равномерно сходится.}$$

Кстати, для функции v_v выполняется „условие полноты“ $\int \varphi(s) J[\varphi(s)] ds = \sum_{v=1}^{\infty} a_v^2$, как бы ни была выбрана кусочно-непрерывная функция $\varphi(s)$.

^{1) Enskog D., Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen, Dissert., Uppsala 1917.}

5. Метод Келлога для определения собственных функций¹⁾. Исходя из произвольной нормированной функции $\varphi_0(s)$, определяем функции $\varphi_\nu(s)$ и числа λ_ν с помощью соотношений:

$$\varphi_{\nu+1}(s) = \lambda_{\nu+1} \int K(s, t) \varphi_\nu(t) dt, \quad N\varphi_\nu = 1.$$

Здесь можно выполнить предельный переход, дающий собственное значение и соответствующую собственную функцию ядра или итерированного ядра. — Привести этот метод в связь с понятием асимптотического числа измерений и, следуя этим путем, провести рассмотрение вопроса.

6. Символические функции ядра и их собственные значения. Для операций, определенных с помощью ядра интегрального уравнения, справедливы соотношения, аналогичные тем, которые выведены в гл. I для матриц. Рассмотрим в частности целую рациональную

функцию $f(u) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu u^\nu$, исчезающую при $u=0$, и заменим в ней степени u соответствующими итерированными ядрами симметрического ядра $K(s, t)$. Мы получим тогда ядро:

$$H(s, t) = f[K] = \sum_{\nu=1}^n a_\nu K^{(\nu)}(s, t).$$

Тогда справедлива следующая теорема: собственные функции φ ядра H тождественны с собственными функциями ядра K , а соответствующие характеристические числа η_i ядра H связаны с характеристическими числами χ_i ядра K равенством:

$$\eta_i = f(\chi_i).$$

Действительно, непосредственная проверка подтверждает, что собственная функция φ_i ядра $K(s, t)$, принадлежащая собственному значению $\lambda_i = \frac{1}{\chi_i}$, является вместе с тем собственной функцией ядра $H(s, t)$ с характеристическим числом $\eta_i = f(\chi_i)$. Что H других характеристических чисел и фундаментальных функций не имеет, легко обнаружить, для чего достаточно показать справедливость соотношения:

$$\iint H(s, t)^2 ds dt = \sum_{i=1}^{\infty} f(\chi_i)^2.$$

7. Пример несимметрического ядра, не имеющего собственных функций. Ядро $K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu s \sin(\nu+1)t}{\nu^2}$ не имеет для области $0 \leq s, t \leq 2\pi$ собственных функций, так как для итериро-

¹⁾ Kellogg O. D., On the existence and closure of sets of characteristic functions, Math. Ann., т. 86, стр. 14—17, 1922.

ванных ядер получаются следующие выражения:

$$K^{(n)}(s, t) = \pi^{n-1} \sum_{\nu} \frac{\sin \nu s \sin (\nu + n) t}{\nu^2 (\nu + 1)^2 \dots (\nu + n - 1)^2},$$

следовательно, ряд Неймана сходится при всех значениях λ . Тот же результат можно получить, доказав, что соответствующая ядру K функция $D(\lambda)$ постоянна¹⁾.

8. Интегральные уравнения Вольтерра²⁾. Если $K(s, t) = 0$ при $s < t$, то интегральное уравнение можно написать в следующем виде:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^s K(s, t) \varphi(t) dt.$$

Такие типы интегральных уравнений изучены, главным образом, Вольтеррой. Показать, что соответствующая резольвента есть целая трансцендентная функция от λ и, следовательно, интегральное уравнение Вольтерра имеет для каждого значения λ одно и только одно решение, а стало быть, не имеет собственных функций ни для какого значения λ .

9. Интегральное уравнение Абеля³⁾. Уже Абель (Abel) составил важное для многих приложений частного вида интегральное уравнение типа Вольтерра для решения нижеследующей задачи: материальная точка движется под влиянием силы тяжести по гладкой кривой, расположенной в вертикальной плоскости. Время t , которое ей требуется для того, чтобы спуститься вдоль кривой с высоты x до самой низкой точки ее, есть заданная функция f от x ; каково уравнение кривой? Задача приводит к интегральному уравнению:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{2g(x-t)}}.$$

Если принять, что $f(x)$ — исчезающая при $x=0$ функция, имеющая непрерывную производную, то решение интегрального уравнения Абеля дается формулой:

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t) dt}{\sqrt{x-t}},$$

где g — ускорение силы тяжести, и уравнение кривой получается в следующем виде:

$$y = \int_0^x \sqrt{|\varphi^2(t) - 1|} dt.$$

¹⁾ Аналогичные ядра приведены у Гурса: *Goursat, Cours d'Analyse* (см. перечень литературы).

²⁾ *Volterra V., Leçons sur les équations intégrales et les équations intégréo-différentielles*, гл. II, Paris 1913.

³⁾ *Abel, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*. Werke (Christiania 1881) I, стр. 11—27; *Bôcher, Integral Equations*, стр. 8. Cambridge University Press, 1909.

В качестве более общей задачи можно рассмотреть уравнение:

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(s) ds}{(s-x)^a} \quad (0 < a < 1),$$

решение которого выражается формулой:

$$\varphi(x) = \frac{\sin a \pi}{\pi} \cdot \frac{f(a)}{(x-a)^{1-a}} + \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_a^x \frac{f'(s) ds}{(s-x)^{1-a}},$$

в предположении, что $f(x)$ имеет непрерывную производную.

10. Взаимно сопряженные ортогональные системы, принадлежащие несимметрическому ядру¹⁾. Составим для несимметрического ядра $K(s, t)$ два симметрических ядра $K'(s, t) = \int K(s, \sigma) K(t, \sigma) d\sigma$ и $K''(s, t) = \int K(\sigma, s) K(\sigma, t) d\sigma$. Существует последовательность пар функций $\varphi_\nu(s), \phi_\nu(s)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) и соответствующие значения λ_ν , которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(s) &= \lambda_\nu \int K(s, t) \phi_\nu(t) dt, \quad \phi_\nu(s) = \lambda_\nu \int K(t, s) \varphi_\nu(t) dt, \\ \varphi_\nu(s) &= \lambda_\nu^2 \int K'(s, t) \varphi_\nu(t) dt, \quad \phi_\nu(s) = \lambda_\nu^2 \int K''(s, t) \phi_\nu(t) dt. \end{aligned}$$

Всякая функция, которую можно представить в форме $\int K(s, t) h(t) dt$, допускает абсолютно и равномерно сходящееся разложение по ортогональной системе φ_ν , и точно так же всякая функция вида $\int K(t, s) h(t) dt$ допускает разложение по ортогональной системе ϕ_ν . Далее, справедливо разложение $K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s) \phi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$, если только ряд справа равномерно сходится относительно каждой переменной. Ядро K однозначно определяется значениями λ_ν и обоими независимыми друг от друга ортогональными системами.

11. Интегральные уравнения первого рода. Примеры интегральных уравнений первого рода вида:

$$f(s) = \int K(s, t) \varphi(t) dt \quad (84)$$

встречались нам неоднократно. Например, возможность разложения по собственным функциям ядра была поставлена в зависимость от разрешимости некоторого интегрального уравнения первого рода. Далее, такие примеры представляли интеграл Фурье и интегральное преобразование

¹⁾ Schmidt E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, 1 Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Ann., т. 63. стр. 433—476, 1907.

Мелина (гл. II, § 10, 8). Затруднение для теории интегральных уравнений первого рода лежит в том обстоятельстве, что при непрерывном ядре $K(s, t)$ многообразие всех кусочно-непрерывных функций $\varphi(s)$ преобразовывается в часть того же многообразия, так как все получающиеся таким образом функции $f(s)$ во всяком случае непрерывны. Если ядро $K(s, t)$ дифференцируемо, то всякая кусочно-непрерывная функция, даже всякая только интегрируемая функция $\varphi(s)$, преобразовывается в дифференцируемую. Стало быть, интегральное уравнение не может иметь для всякой непрерывной функции $f(s)$ непрерывное решение $\varphi(s)$. Лишь постольку, поскольку ядро уклоняется от правильного поведения, можно ожидать разрешимости уравнения (84) для более общих классов функций $f(s)$. Предлагаем рассмотреть с этой точки зрения ранее встречавшиеся и следующие в дальнейшем примеры, причем распространение основной области в бесконечность надо считать эквивалентным наличию особой точки ядра.

Чисто формально можно при симметрическом ядре искать решение в форме:

$$\varphi(s) = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v x_v \varphi_v(s),$$

где $x_v = (f, \varphi_v)$ — коэффициенты разложения функции f по собственным функциям $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ядра. В том случае, когда этот ряд равномерно сходится, что вследствие возрастания чисел λ_v налагает вообще ограничения на $f(s)$, он действительно представляет решение уравнения (84).

В общем случае теорема Пикара ¹⁾ дает необходимые и достаточные условия для разрешимости интегрального уравнения первого рода $f(s) = \int K(s, t) \varphi(t) dt$ при произвольном (также и несимметрическом) ядре посредством функции $\varphi(s)$, интегрируемой в смысле Лебега вместе со своим квадратом. Если $\varphi_i, \phi_i, \lambda_i$ суть принадлежащие согласно п. 10 ядру $K(s, t)$ пары взаимно сопряженных функций и соответствующие собственные значения, то для разрешимости вышеприведенного интегрального уравнения необходимо и достаточно, чтобы сходил ряд

$$\sum \lambda_i^2 \left(\int f(s) \varphi_i(s) ds \right)^2.$$

12. Метод бесконечно большого числа переменных. Пусть функции $\omega_1(s), \omega_2(s), \dots$ представляют полную ортогональную систему для основной области. Положим $x_i = (\varphi, \omega_i), f_i = (f, \omega_i), k_{pq} = \iint K(s, t) \omega_p(s) \omega_q(t) ds dt$. Тогда интегральное уравнение (1) тотчас приводит к системе:

$$f_i = x_i - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

¹⁾ Picard E., Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique, Rend. Circ. mat. Palermo, т. 29, стр. 79—97, 1910.

бесконечно большого числа линейных уравнений для бесконечно большого числа неизвестных $x_1, x_2, x_3, \dots$; при этом как ряды $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ и

$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$, так и ряд $\sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij}^2$ сходятся, что вытекает из неравенства Бесселя.

Теория решения этой системы уравнений дает тогда теоремы об интегральном уравнении (1).

13. Минимальные свойства собственных функций. Собственные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ симметрического ядра или обе принадлежащие несимметрическому ядру ортогональные системы $\varphi_i(s), \psi_i(s)$ и соответствующие собственные значения λ_i можно получить с помощью следующей задачи на минимум. Требуется аппроксимировать ядро $K(s, t)$ выродившимся ядром

$$A_n(s, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(s) \Psi_i(t)}{\Lambda_i}$$

таким образом, чтобы $\iint (K - A_n)^2 ds dt$ получил возможно меньшее значение. Показать, что решение дается формулами:

$$\Phi_i = \varphi_i, \Psi_i = \psi_i, \Lambda_i = \lambda_i.$$

14. Полярные интегральные уравнения. И для ядер вида $K(s, t) = A(s) S(s, t)$, где $S(s, t)$ симметрична, а $A(s)$ непрерывна повсюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, можно получить сходные результаты, как и для случая симметрического ядра. Обстоятельнее всего исследован пока тот случай, когда $S(s, t)$ — *определенное* ядро, и стало быть, имеет, скажем, исключительно положительные собственные значения. В этом случае, который исследовали Гильберт¹⁾ и Гарбэ²⁾, интегральное уравнение называется *полярным* или уравнением *третьего рода*. При этом резольвента, как и для симметрических ядер, имеет только действительные и простые полюсы, а для соответствующих вычетов, дающих „полярные собственные функции“, справедлива теорема о разложении, подобная найденной Гильбертом для симметрических ядер. В частности, если итерированное ядро $K^{(2)}(s, t)$ не исчезает тождественно, то всегда существует по крайней мере одно собственное значение. Впрочем, теорема, что резольвента имеет только действительные и простые полюсы справедлива и в том случае, если функция $S(s, t)$ предполагается только *положительной*; далее, справедлива также теорема: существует по крайней мере одно собственное значение, если функция $S(s, t)$ положительна, а $K^{(2)}(s, t)$ не исчезает тождественно³⁾.

¹⁾ Hilbert D., Integralgleichungen, гл. 15, где для полярного интегрального уравнения положена в основу несколько другая форма.

²⁾ Garbe E., Zur Theorie der Integralgleichung dritter Art., Math. Ann., том 76, стр. 527—547, 1915.

³⁾ Marty J., Sur une équation intégrale, C. R. Acad. sc. Paris, т. 150, стр. 515—518, 1910; Développements suivant certaines solutions singulières, там же, стр. 603—606; Existence de solutions singulières pour certaines équations de Fredholm, там же, стр. 1031—1033.

15. Ядра, допускающие симметризацию¹⁾. Можно очень просто непосредственно охарактеризовать ядра, резольвента которых имеет лишь действительные и простые полюсы. Для того чтобы ядро $K(s, t)$ обладало этим свойством, необходимо существование такого ядра $S(s, t)$, чтобы ядра $\int S(s, \tau) K(\tau, t) d\tau$ и $\int K(s, \tau) S(\tau, t) d\tau$ были симметричны. О таких ядрах $K(s, t)$ говорят, что они *допускают симметризацию*. Обратно, если для надлежащим образом выбранного положительно-определенного симметрического ядра $S(s, t)$ по крайней мере один из вышеупомянутых интегралов представляет симметрическое ядро, то все полюсы резольвенты ядра $K(s, t)$ будут действительными и простыми.

16. Определение разрешающего ядра посредством функциональных уравнений. Доказать, что резольвента ядра однозначно определяется уравнениями (63).

17. Непрерывность определенных ядер. Доказать, что в области $0 \leq s, t \leq 1$ кусочно-непрерывное определенное симметрическое ядро $K(s, t)$, непрерывное во всех точках $s = t$ и имеющее непрерывные собственные функции, непрерывно вообще повсюду в области $0 \leq s, t \leq 1$.

18. Теорема Гаммерштейна (Hammerstein). Если ядро непрерывно во всей области $0 \leq s, t \leq 1$ и имеет во всей области $0 \leq s, t \leq 1$ равномерно ограниченную производную, то билинейная формула справедлива уже для самого ядра, а не только начиная с итерированного ядра $K^{(2)}(s, t)$. Предположение о существовании ограниченной производной можно заменить еще существенно более общими условиями²⁾.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ III.

Прежде всего следует указать статью E. Hellinger и O. Toeplitz в „Enzyklopädie d. math. Wissenschaften“ т. 2. Эта статья содержит сжатое изложение теории интегральных уравнений и подробно останавливается на связи этой теории с другими частями анализа. Далее, укажем на наглядный реферат H. Hahn, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver., т. 20, стр. 69—117, 1911.

Учебники:

Bôcher M., An introduction to the study of integral equations, Cambridge tracts, т. 10, Cambridge 1909.

Goursat E., Cours d'analyse mathématique, т. 3, 3-е изд., стр. 323—544. Paris 1923

Kneser A., Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2-е изд. Braunschweig 1922.

Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, einschliesslich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten, Leipzig 1909.

Lalesco T., Introduction à la théorie des équations intégrales, Paris 1912.

(К книге приложена подробная библиография до 1912 г.)

Vivanti G., Elementi della teoria delle equazioni integrali lineare, Milano 1916. (Немецкое издание F. Schwank, Hannover 1929.)

Volterra V., Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrales différentielles, Paris 1913.

¹⁾ Marty J., Valeurs singulières d'une équation de Fredholm, C. R. Acad. sc. Paris, т. 150, стр. 1499—1502, 1910.

²⁾ Hammerstein A., Über die Entwicklung des Kernes linearer Integralgleichungen und Eigenfunktionen, Sitzungsber. Akad. Berlin (phys.-math. Kl.), стр. 181—184, 1923.

Монографии и статьи:

Carleman T., Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala Univ. Årsskrift 1923.

Courant R., Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, Math. Ann., т. 89, стр. 161—178, 1923.

Fredholm I., Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta math., т. 27, стр. 305—390, 1903.

Goursat E., Recherches sur les équations intégrales linéaires, Ann. Fac. sc. Toulouse, série 2, т. 10, стр. 5—98, 1908.

Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin 1912. (Перепечатка шести статей из „Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ 1904—1910.)

Landsberg G., Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen, Math. Ann., т. 69, стр. 227—265, 1910.

Schmidt E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Math. Ann., т. 63, стр. 433—476, 1907; там же, т. 64 стр. 161—174, 1907.

Schur I., Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Ann. т. 66. стр 488—510, 1909.

Weyl H., Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems, Dissert., Göttingen 1908.

ГЛАВА IV.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Почти все вопросы математической физики, к которым мы будем применять изложенные в предыдущих главах теории, в той или иной мере связаны с вариационным исчислением. Мы изложим в настоящей главе основные факты этой важнейшей области анализа, которые дадут нам возможность вывести наиболее естественным путем дифференциальные уравнения математической физики и основные принципы их решения. Изложенная здесь теория будет дополнена и углублена во втором томе.

§ 1. Постановка задачи вариационного исчисления.

1. *Максима и минимума функций.* Исходным пунктом вариационного исчисления является обобщение элементарной теории *maxima* и *minima*. Чтобы лучше понять сущность этого обобщения, бросим беглый взгляд на эту общеизвестную элементарную теорию. Задача здесь заключается в том, чтобы для заданной непрерывной функции $f(x, y, \dots)$ с заданной ограниченной замкнутой областью G изменения переменных $x, y, \dots$ найти такую точку $x_0, y_0, \dots$ области G , в которой функция $f(x, y, \dots)$ имеет „экстремальное“, т. е. максимальное или минимальное значение по сравнению со всеми точками области G , достаточно близкими к точке $x_0, y_0, \dots$. Что такие точки, действительно, всегда существуют, вытекает из следующей теоремы Вейерштрасса, примененной нами уже в гл. I и являющейся простым следствием из понятия непрерывности: *Всякая непрерывная в замкнутой области функция достигает внутри или на границе области своего максимума и своего минимума.* Если функция $f(x, y, \dots)$ дифференцируема в области G и достигает своего экстремума внутри области, то необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные первого порядка функции $f(x, y, \dots)$ по каждой из переменных $x, y, \dots$, так что и дифференциал df должен равняться нулю. Это необходимое условие, однако, ни в коем случае не является достаточным, как показывают случаи точек перегиба или гиперболических точек; в качестве примеров приведем $f(x) = x^3$ при $x_0 = 0$; $f(x, y) = xy$ при $x_0 = 0, y_0 = 0$. Точки, в которых обращаются в нуль все первые частные производные заданной функции, т. е. точки, в которых $df = 0$, называются *стационарными точками* этой функции.

Если переменные не независимы, но подчинены дополнительным условиям $g_1(x, y, \dots) = 0, g_2(x, y, \dots) = 0, \dots, g_h(x, y, \dots) = 0$, то для получения необходимых условий экстремума или, иначе говоря, для нахож-

дения всех стационарных точек можно воспользоваться *методом множителей Лагранжа*. Этот метод заключается в следующем правиле. Для того, чтобы найти внутренние точки $(x_0, y_0, \dots)$ заданной области, в которых $f(x, y, \dots)$ достигает максимума или минимума или вообще имеет стационарный характер, образуем с помощью $h+1$ новых параметров („множителей“) $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_h$ функцию

$$F = \lambda_0 f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_h g_h$$

и находим значения $x_0, y_0, \dots$ и отношения параметров $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_h$ из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \dots, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_h} = g_h = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

число которых равняется числу неизвестных. Эти уравнения представляют собой искомые условия стационарности функции $f(x, y, \dots)$ или необходимые условия экстремума этой функции при заданных дополнительных условиях $g_1 = 0, \dots, g_h = 0$.

Если λ_0 отлично от нуля, то вследствие однородности функции F относительно $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_h$ мы имеем право считать λ_0 равным единице. Метод Лагранжа представляет собой не что иное, как чрезвычайно изящный приём, избавляющий нас от необходимости непосредственно исключить из функции $f(x, y, \dots)$ с помощью дополнительных условий h переменных и нарушить в процессе элиминирования симметрию формул.

Рассмотрим несколько типичных примеров, которые, несмотря на свой элементарный характер, полезны для ориентировки в вопросе.

а) *Из всех треугольников, имеющих заданное основание и заданный периметр, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник; при заданной же площади и заданном основании равнобедренный треугольник имеет наименьший периметр.*

Уже на примере этой простой задачи, которую можно решить без всяких вычислений путем рассмотрения эллипса, фокусами которого служат концы основания рассматриваемых треугольников, мы встречаемся со своеобразным законом *взаимности*, общую формулировку которого мы приведем в дальнейшем (§ 11, 2, стр. 243).

б) *Закон преломления и отражения света.* Так называемый принцип Ферма о *кратчайшем времени распространения света* утверждает, что световой луч распространяется от одной заданной точки до другой по тому пути, для которого время распространения света является кратчайшим по сравнению со всяким другим „возможным“ путем, т. е. со всяким воображаемым путем, удовлетворяющим заданным условиям. Отсюда непосредственно вытекает прямолинейность распространения света в однородной среде. Если потребовать далее, чтобы световой луч дошел до заданной кривой (зеркала) и, не пересекая ее, повернул обратно, то из условия обращения в нуль первой производной от времени распространения света непосредственно вытекает, что оба прямолинейных отрезка, образующих путь светового луча, пересекаются в точке кривой так, что

углы, составленные ими с касательной к кривой, равны между собой (закон отражения). Если же данная кривая служит границей между двумя областями с различными скоростями распространения света c_1 , c_2 и если световой луч должен перейти из одной области в другую, то он состоит из двух прямолинейных отрезков, удовлетворяющих известному закону преломления света: $\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = c_1 : c_2$, где α_1 и α_2 означают углы, образуемые обоими отрезками с нормалью к кривой в точке пересечения светового пути с кривой.

в) *Задача Штейнера*. Даны три точки A_1, A_2, A_3 , образующие остроугольный треугольник. Требуется найти четвертую точку P , для которой сумма расстояний $PA_1 + PA_2 + PA_3$ имеет минимальное значение. Опишем из вершины A_3 окружность радиусом PA_3 ; тогда точка P должна находиться в той точке этой окружности, для которой сумма $PA_1 + PA_2$ имеет минимальное значение; поэтому, согласно п. б., прямые PA_1 и PA_2 должны составлять равные углы с радиусом PA_3 . Повторяя это рассуждение для вершин A_2 и A_3 , мы получаем, что все три угла A_1PA_2 , A_2PA_3 и A_3PA_1 должны быть равны между собой и каждый из них равняется, следовательно, $\frac{2\pi}{3}$, и задача таким образом решена.

г) *Изопериметрическая задача для многоугольников*. Среди всех не пересекающих самих себя многоугольников с заданным четным числом сторон $2n$ и с заданным периметром $2l$ требуется найти многоугольник, имеющий наибольшую площадь. Докажем, что искомым многоугольником будет правильный $2n$ -угольник. Для этой цели убедимся сначала в том, что наш искомый многоугольник Π ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}$) должен быть обязательно выпуклым. В самом деле, если искомый многоугольник не выпуклый, то у него имеются две такие вершины, например, A_1, A_3 , для которых обе соединяющие их ломаные линии, образованные сторонами многоугольника, расположены по одну сторону от прямой A_1A_3 (прямая A_1A_3 является, как говорят, опорной прямой многоугольника). Но тогда, заменяя одну из этих ломаных линий, например $A_1A_2A_3$ ее зеркальным отражением $A_1A_2'A_3$ относительно прямой A_1A_3 , мы получим, что новый многоугольник, образуемый ломаной линией $A_1A_2'A_3$ и ломаной линией $A_3A_4 \dots A_{2n}, A_1$ имеет тот же периметр, что и первоначальный многоугольник, и ограничивает большую площадь, чем этот последний. Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением выпуклых многоугольников. Покажем теперь, что искомый многоугольник должен быть равносторонним. В самом деле, если бы две смежные стороны A_1A_2, A_2A_3 не были бы равны между собой, то мы могли бы согласно п., а заменить вершину A_2 другой вершиной A_2' так, чтобы $A_1A_2' + A_3A_2' = A_1A_2 + A_2A_3$ и чтобы площадь треугольника $A_1A_2'A_3$ была больше площади треугольника $A_1A_2A_3$, так что и площадь нового многоугольника будет больше площади многоугольника Π вопреки нашему допущению, что Π является максимальным многоугольником. Чтобы, наконец, показать, что Π может быть вписан в окружность, разложим Π на два многоугольника Π_1, Π_2 , имеющих одинаковые периметры, с помощью диагонали d , соединяющей две противоположные вершины A_1 и A_{n+1} ; многоугольники Π_1 и Π_2 имеют равные площади, ибо если бы площадь Π_1 была

большее площади Π_2 , то мы могли бы заменить Π_2 зеркальным отражением Π'_1 многоугольника Π_1 относительно диагонали d и получили бы многоугольник $\Pi = \Pi_1 + \Pi'_1$ периметра $2l$, но большей площади, чем Π . Покажем теперь, что для всякой вершины A_h угол $A_1 A_h A_{n+1}$ является прямым. Действительно, если бы один из этих углов для какой-нибудь вершины A_h не был прямым, то мы разбили бы Π_1 на треугольник $A_1 A_h A_{n+1}$ и два многоугольника H_1, H_2 , прилегающих к сторонам $A_1 A_h$ и $A_{n+1} A_h$, и рассмотрели бы прямоугольный треугольник $A'_1 A_h A'_{n+1}$, катеты которого $A'_1 A_h$ и $A'_{n+1} A_h$ соответственно равны сторонам $A_1 A_h$ и $A_{n+1} A_h$. Построив на катетах $A'_1 A_h$ и $A'_{n+1} A_h$ многоугольники H'_1, H'_2 , соответственно равные многоугольникам H_1, H_2 , мы получим многоугольник Π^* . Отражая зеркально Π^*_1 относительно прямой $A'_1 A'_{n+1}$ и соединяя многоугольник Π^* , и его зеркальное отражение в один замкнутый многоугольник Π^* , мы убедимся, что Π^* , имея тот же периметр, что и Π , ограничивает большую площадь, чем этот последний. В самом деле, прямоугольный треугольник $A'_1 A_h A'_{n+1}$ имеет большую площадь, чем непрямоугольный треугольник $A_1 A_h A_{n+1}$, тогда как многоугольники H'_1 и H'_2 соответственно равны многоугольникам H_1 и H_2 . Таким образом интересующее нас экстремальное свойство правильного многоугольника доказано¹⁾. Совершенно тот же ответ мы получим и для обратной задачи: найти многоугольник, имеющий заданную площадь и наименьший периметр.

Изложенный здесь метод решения, в основе которого лежит классический принцип, принадлежащий Штейнеру, показывает, что в конкретных случаях наглядный геометрический метод может быстрее и убедительнее привести к цели, чем применение общего аналитического процесса.

е) *Другие примеры. Наибольшее значение минимума.* Другие типичные примеры, в которых речь идет уже не о чистом максимуме или минимуме, нам уже многократно встречались раньше. Укажем, например, на определение собственных значений квадратичной формы как наибольших значений некоторых минимумов или на *полиномы Чебышева* (стр. 81).

2. *Функционалы.* Как и элементарная теория maxima и minima, вариационное исчисление также занимается проблемами нахождения экстремумов или соответственно стационарных значений. Но основным отличием является то, что здесь речь идет уже не об экстремумах функций от конечного числа независимых переменных, а об экстремумах так называемых функционалов²⁾. Под функционалом подразумевают величину

1) Подчеркнем еще раз, что существование экстремума установлено заранее на основании теоремы Вейерштрасса. В самом деле, если поместить одну вершину многоугольника в начале координат, то, так как периметр многоугольника имеет заданную конечную величину, все другие вершины должны лежать внутри ограниченной замкнутой области, т. е. координаты вершин многоугольника имеют ограниченную область изменения; площадь же многоугольника является непрерывной функцией координат его вершин, так что все условия теоремы Вейерштрасса выполнены.

2) Автор употребляет термин „Funktionenfunktion“, дословно: „функция от функций“. Так как в русской терминологии этот термин имеет другой смысл, мы пользуемся термином „функционал“ от французского „fonctionnelle“. Во французской литературе пользуются также термином „fonction de ligne“ (функция линии). *Прим. перев.*

или функцию, которая зависит не от известного числа независимых переменных, изменяющихся в некоторых пределах, но зависит от всего хода изменения одной или нескольких функций, играющих здесь роль аргументов. Функции, от которых зависит функционал, являются в известной степени совершенно произвольными. Простейшим примером такого функционала является длина L дуги кривой $y = y(x)$ между значениями $x = x_0$ и $x = x_1$; эта длина задается интегралом:

$$L = \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Величина L зависит от всего хода функции $y(x)$, которую мы назовем „функциональным аргументом“ функционала L . В качестве функционального аргумента мы можем в этом случае выбрать произвольную непрерывную функцию $y(x)$ с кусочно непрерывной производной. Такие функционалы встречаются всюду в анализе и его приложениях, и многие важнейшие проблемы анализа в той или иной мере относятся к подобным зависимостям между функционалами и их функциональными аргументами.

Другим примером функционала является площадь части поверхности $z = z(x, y)$, имеющей своей проекцией область G плоскости x, y . Эта часть поверхности имеет величину, равную интегралу:

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

и представляет собой функционал, имеющий своим функциональным аргументом функцию $z(x, y)$. С другими примерами функционалов мы уже познакомились в предыдущих главах. Так, функция

$$g(x) = \int K(x, y) h(y) dy$$

является при постоянном ядре $K(x, y)$ функционалом, зависящим от функционального аргумента $h(x)$; точно так же интегральная форма

$$\iint K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy$$

является функционалом от функции $\varphi(x)$.

В настоящей главе мы будем заниматься, главным образом, такими функционалами, которые задаются в виде интегралов, взятых от заданных выражений, содержащих функциональный аргумент, его производные и независимые переменные, как, например, приведенное выше выражение длины дуги кривой.

Подобно тому как для функций от конечного числа переменных должна быть задана область изменения этих переменных, так и для функционалов должен быть указан класс допустимых функциональных аргументов. Так, например, мы можем определить этот класс допустимых функ-

ций требованием непрерывности самого функционального аргумента и кусочной непрерывности его первой производной (см. следующий пункт).

Если и нельзя рассматривать функционал как функцию от конечного числа переменных, то мы можем, однако, смотреть на него как на функцию от *бесконечного множества* переменных.

Если представить себе, например, что функциональный аргумент разложен в степенной ряд или ряд Фурье, то в качестве такого бесконечного множества переменных мы можем рассматривать коэффициенты этих рядов. Область изменения этих независимых переменных должна быть подчинена соответственным ограничениям, вытекающим из ограничений, наложенных на класс допустимых функций.

3. Типичные примеры задач вариационного исчисления. В вариационном исчислении речь идет об отыскании максимальных, минимальных или же вообще стационарных значений¹⁾ заданного функционала путем определения тех функциональных аргументов, для которых рассматриваемый функционал принимает экстремальное или стационарное значение. Аналогично обыкновенной задаче максимума и минимума, рассматриваемой в дифференциальном исчислении, мы находим сперва не абсолютный экстремум, а лишь относительный экстремум, т. е. экстремум относительно известной окрестности экстремального функционального аргумента (т. е. того функционального аргумента, для которого функционал принимает экстремальное значение). Мы определяем при этом понятие *окрестности функции* $f(x, y, \dots)$ следующим образом: функция $f_1(x, y, \dots)$ принадлежит (h) -окрестности функции $f(x, y, \dots)$, если $|f - f_1| < h$ внутри рассматриваемой области изменения переменных $x, y, \dots$ ²⁾. Мы можем теперь следующим образом формулировать *основную задачу вариационного исчисления*: внутри определенного класса допустимых функциональных аргументов требуется найти ту функцию, которая является экстремальной для рассматриваемого функционала, т. е. для которой этот функционал принимает экстремальное значение сравнительно со всеми допустимыми функциональными аргументами, принадлежащими достаточно малой (h) -окрестности экстремальной функции. Функциональный аргумент может быть при этом либо совершенно произвольным и ничем не ограниченным (кроме условий допустимости), либо функциональный аргумент может быть подчинен еще добавочным ограничительным условиям.

Если требуется найти экстремум такого функционала, который кроме функциональных аргументов содержит еще переменные параметры $x, y, \dots$,

¹⁾ Точное определение понятия стационарного значения функционала будет нами дано позже (см. § 3, п. 1)

²⁾ Для некоторых исследований целесообразно дать более тонкое определение понятия окрестности функции. Мы говорим, что функция $f_1(x, y, \dots)$ содержится в (h) -окрестности первого порядка функции $f(x, y, \dots)$, если кроме условия $|f - f_1| < h$ выполняются еще условия:

$$|f_x - f_{1x}| < h, |f_y - f_{1y}| < h \text{ и т. д.}$$

Вообще (h) -окрестностью n -го порядка функции $f(x, y, \dots)$ называется множество тех функций $f_1(x, y, \dots)$, для которых эти неравенства имеют место не только для самой функции, но и для всех частных производных до n -го порядка включительно.

т. е. если рассматриваемый функционал сам является не числом, а функцией от этих параметров, то эти параметры также должны быть определены из условий экстремальности. Мы поясним эту постановку задачи на ряде примеров:

а) *Геодезические линии*. На данной поверхности требуется найти кратчайший из всех лежащих на этой поверхности путей, соединяющих данные две точки. Если поверхность задана в параметрическом виде

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где x, y, z — прямоугольные координаты, и если положить, как обычно

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

то длина дуги кривой, лежащей на поверхности и заданной уравнением

$$v = v(u),$$

между значениями u_0, u_1 задается интегралом:

$$L = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2} \, du.$$

Речь идет, следовательно, о нахождении экстремума интеграла

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2} \, du.$$

б) *Световой луч, брахистохрона*. Согласно сформулированному выше принципу Ферма (стр. 153) путь светового луча в неоднородной двумерной среде со скоростью света $\varphi(x, y)$ характеризуется вариационной задачей:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(x, y)} \, dx = \min.$$

В этой, как и в предыдущей задаче, искомый путь сравнивается с другими путями, имеющими непрерывно изменяющуюся кривизну и соединяющими заданные неподвижные конечные точки. Совершенно аналогично этой задаче формулируется задача брахистохроны, которая в 1696 г. привела Якова Бернулли к созданию вариационного исчисления.

Требуется соединить две данные точки $A(x_0, 0)$ и $B(x_1, y_1)$ такой кривой, чтобы тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой без трения, пришла из A в B в кратчайшее время. Пусть ось OY направлена вертикально вниз, а начальная скорость падающей точки равна нулю.

При падении с высоты y скорость падающей точки равна, как известно, $\sqrt{2gy}$, где g означает ускорение силы тяжести. Поэтому время падения выражается интегралом:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx, \quad (2)$$

который, следовательно, должен иметь минимум для искомой кривой. Допустимыми функциями сравнения являются здесь все положительные непрерывные функции $y(x)$, имеющие непрерывные производные первого и второго порядка и для которых $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = y_1$.

в) *Минимальная поверхность вращения.* Пусть линия $y = y(x)$, лежащая в верхней полуплоскости, вращается вокруг оси x . Часть получающейся поверхности вращения, ограниченная плоскостями $x = x_0$ и $x = x_1$, имеет площадь

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Линия $y = y(x)$, дающая минимальную поверхность вращения, характеризуется вариационной задачей:

$$\int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx = \min.$$

г) *Изопериметрическая задача.* В своей первоначальной геометрической форме эта задача формулируется так: найти замкнутую кривую, имеющую данную длину и ограничивающую наибольшую площадь. Предполагая искомую кривую выпуклой и допустив, что ось x делит как самую кривую, так и ограниченную ею площадь (см. п. 1, г) на две равные части, мы приходим к следующей задаче:

Требуется найти максимальное значение интеграла:

$$\int_0^\xi y(x) dx$$

путем соответственного выбора функционального аргумента $y(x)$ и параметра ξ при добавочном условии, чтобы интеграл

$$\int_0^\xi \sqrt{1+y'^2} dx$$

имел заранее заданную величину l ; в качестве функции сравнения $y(x)$ мы можем здесь взять любую функцию, которая в промежутке $0 \leq x \leq \xi$

непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную и, кроме того, удовлетворяет дополнительному условию:

$$\int_0^{\xi} \sqrt{1+y'^2} dx = l.$$

Совершенно аналогичная задача получается, если считать верхний предел ξ постоянным.

Эта задача, называемая обычно специальной изопериметрической задачей, может быть сведена к обыкновенной вариационной задаче путем введения в качестве независимой переменной длины дуги

$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx,$$

которая по условию, может изменяться в промежутке $0 \leq s \leq l$. Так как $ds^2 = dx^2 + dy^2$, то наша задача сводится тогда к нахождению максимума интеграла:

$$\int_0^l y \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds,$$

где $y(s)$ есть произвольная непрерывная функция от s , имеющая кусочно-непрерывную производную. Найдя $y(s)$, мы определим затем

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds \quad (3)$$

и получим нашу искомую кривую в параметрическом виде (см. решение Гурвица изопериметрической задачи, глава II, § 10, п. 1).

Вообще же изопериметрическими задачами называются все те задачи, в которых требуется найти экстремум одного интеграла при добавочном условии, чтобы некоторый другой интеграл имел заранее заданную величину. В качестве примера приведем задачу о *цепной линии*: требуется определить положение равновесия однородной тяжелой нити данной длины с закрепленными концами, находящейся под действием силы тяжести, направленной по отрицательной оси y . Так как положение равновесия характеризуется тем, что центр тяжести занимает низшее положение, то мы приходим к следующей вариационной задаче: найти такую функцию $y(x)$, для которой интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx$$

имеет минимум, тогда как интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

имеет данное значение, причем также заданы граничные значения функции $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Приведем еще в качестве примера задачу:

$$\int_{x_0}^{x_1} (y'')^2 dx = \min$$

при добавочном условии:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = 1,$$

причем функция $y(x)$ должна обращаться в нуль на концах интервала и всюду оставаться непрерывной вместе со своими производными первого и второго порядка.

Или такой пример (см. стр. 166): требуется найти такую функцию u от двух переменных x , y , которая удовлетворяет условию:

$$\iint_G u^2 dx dy = 1$$

и для которой выражение

$$\iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \int_\Gamma \sigma u^2 ds \quad (4)$$

имеет минимальное значение (Γ означает здесь границу области G , а σ — заданную функцию от длины дуги s линии Γ). При этом предполагается, что функция u внутри области G непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка. Точно так же и задача минимума, рассмотренная в предыдущей главе, с помощью которой мы определили собственные функции симметрического ядра, является такой же изопериметрической проблемой.

Во всех перечисленных задачах класс допустимых функций сравнения должен, разумеется, каждый раз быть определен так, чтобы рассматриваемые функционалы имели смысл.

4. Характерные трудности вариационного исчисления. Тогда как в обыкновенной теории *maxima* и *minima* существование решения раз навсегда гарантировано фундаментальной теоремой Вейерштрасса, в вариационном исчислении мы наталкиваемся на следующую специфическую трудность: может случиться, что задача, формулировка которой не содержит в себе никаких внутренних противоречий, тем не менее не разрешима, так как класс допустимых функций определен так, что его нельзя рассматривать как замкнутое множество,

в котором имеет место принцип предельных точек Вейерштрасса. Приведем следующий простой геометрический пример: требуется соединить две данные точки оси x кратчайшей линией, имеющей непрерывно изменяющуюся кривизну и направленной в конечных точках перпендикулярно к оси x . Эта проблема не имеет решения, ибо длина всякой такой линии всегда больше длины прямого пути между данными точками и может быть сделана как угодно мало отличной от этой последней. Хотя здесь и существует нижняя грань рассматриваемого функционала, но эта нижняя грань не является минимумом, достигаемым для какой-нибудь допустимой кривой.

В качестве другого примера неразрешимой вариационной проблемы приведем следующую задачу: требуется найти минимум интеграла

$$\int_{-1}^1 x^4 y'^2 dx, \quad (5)$$

в котором $y(x)$ означает непрерывную и имеющую кусочно-непрерывную производную функцию, для которой

$$y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

Нетрудно убедиться, что можно выбрать такую допустимую функцию $y(x)$, для которой наш интеграл становится сколь угодно мал (например, полагая $y = -1$ при $x < -\epsilon$, $y = 1$ при $x > \epsilon$ и $y = \frac{x}{\epsilon}$ при $|x| \leq \epsilon$), тогда как ни для какой допустимой функции данный интеграл не обращается в нуль.

Мы видим таким образом, что *в вариационном исчислении существование решения данной проблемы экстремума требует каждого раз особого доказательства*. В этом заключается существенная трудность для многих вопросов, связанных с вариационным исчислением, как мы в этом убедимся впоследствии. Однако в настоящей главе речь будет идти главным образом о выводе только необходимых условий экстремума, причем останется открытым вопрос, действительно ли имеется экстремум при выполнении этих условий.

Прежде, чем перейти к выводу этих необходимых условий в форме дифференциальных уравнений, мы приведем в ближайших параграфах некоторые соображения относительно приемов, с помощью которых можно в известных случаях получить решение вариационной проблемы прямым путем.

§ 2. Прямые методы¹⁾.

1. Изопериметрическая задача. В качестве примера рассмотрим изопериметрическую задачу (см. § 1, п. 3, г). Требуется найти замкнутую кривую K , имеющую длину $2l$ и ограничивающую максимальную площадь, причем эта кривая должна быть кусочно-гладкой т. е. должна иметь всюду, за исключением конечного числа угло-

¹⁾ Подробно прямые методы вариационного исчисления будут нами рассмотрены во втором томе.

вых точек, непрерывно изменяющуюся касательную. Докажем, что иско-
мая кривая K представляет собой окружность. В самом деле, во-
первых, совершенно таким же путем, как и в § 1, п. 1, г., мы получаем,
что K является выпуклой линией и что всякая хорда AB , делящая K
на две дуги равной длины, делит также и площадь, ограниченную K ,
на две равновеликие части; во-вторых, для всякой точки P кривой K
угол APB должен быть прямым, ибо в противном случае можно было бы
с помощью построения, приведенного в § 1, п. 1, г., получить кри-
вую K' , имеющую ту же длину, но ограничивающую большую пло-
щадь. Но это рассуждение основано на требующем доказательства до-
пущении, что задача вообще имеет решение. Мы выберем поэтому
другой путь решения нашей задачи, который нам даст вместе с тем и
требуемое доказательство существования решения. Рассмотрим множе-
ство численных значений всех площадей, ограничиваемых допустимыми
кривыми. Эти числа не могут превосходить грани $l^2\pi$, ибо всякая до-
пустимая кривая лежит внутри круга радиуса l . Поэтому рассматриваемое
множество чисел имеет верхнюю грань M такую, что ни одно из чисел
множества не превосходит M , тогда как для любого ε в рассматриваемом
числовом множестве найдется число, превосходящее $M - \varepsilon$. Другими
словами, существует *максимальная последовательность* допустимых кри-
вых $K_1, K_2, K_3, \dots$ таких, что площадь F_n , ограниченная линией K_n ,
стремится к пределу M . Но каждую линию K_n мы можем аппроксимиро-
вать с помощью многоугольника π_n с достаточно большим числом сто-
рон, площадь и периметр которого сколь угодно мало отличаются от
площади и длины линии K_n . Мы можем далее немного деформировать
многоугольник π_n , не нарушая его аппроксимирующего характера, так,
чтобы его периметр в точности равнялся $2l$, и максимальная последова-
тельность $K_1, K_2, K_3, \dots$ может быть поэтому заменена максимальной
последовательностью допустимых в нашей задаче многоугольников $\pi_1',$
 $\pi_2', \pi_3', \dots$; число сторон каждого из этих многоугольников мы можем
считать четным, так как $(2m-1)$ -угольник может быть рассматриваем как
 $2m$ -угольник, две смежные стороны которого образуют угол в 180° . Но
мы знаем из § 1, п. 1, г., что из всех $2m$ -угольников периметра $2l$ наи-
большую площадь имеет правильный многоугольник. Поэтому мы тем
более получим максимальную последовательность нашей проблемы, если
заменить каждый многоугольник π_n соответствующим правильным много-
угольником. Но при возрастании числа сторон эти правильные много-
угольники имеют своим пределом окружность длины $2l$, а так как пло-
щади многоугольников стремятся к пределу M , то этот круг имеет
площадь M и служит поэтому решением нашей задачи.

2. Метод Ритца (Ritz). Минимальные последователь-
ности. Рассуждения в предыдущем примере основаны на принципе
общего характера. Рассмотрим какую-нибудь вариационную проблему
вида $D[\varphi] = \text{minimum}$, где $D[\varphi]$ означает интеграл от некоторого за-
данного выражения, составленного из функции φ и ее производных
до h -го порядка включительно, задавая при этом как область инте-
грирования, так и класс допустимых функций сравнения φ . При этом
является безразличным, идет ли речь о простом или кратном интеграле
и содержатся ли в подинтегральном выражении только производные пер-

вого порядка или же в него входят также производные высших порядков. Мы предполагаем, что множество значений интеграла $D[\varphi]$ для всех допустимых функций φ имеет некоторую нижнюю грань d (вопрос, достигается ли эта грань для некоторой допустимой функции φ , остается пока открытым); тогда существуют последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D[\varphi_n] = d,$$

тогда как для любой допустимой функции φ интеграл $D[\varphi] \geq d$. Такие последовательности функций мы называем *минимальными последовательностями*. *Прямой метод решения вариационной проблемы заключается в том, что непосредственно дается способ построения минимальных последовательностей и из них пытаются получить искомое решение путем перехода к пределу.*

На этом принципе основан метод В. Ритца¹⁾, примененный им с большим успехом для получения численного значения минимума. Метод Ритца заключается в следующем: найдем полную систему функций $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, определенных в области интегрирования, обладающую тем свойством²⁾, что все линейные комбинации $\varphi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_n\omega_n$ любого конечного числа функций ω_i являются допустимыми функциями и что для всякой допустимой функции φ можно подобрать такую линейную комбинацию φ_n , составленную из функций ω_i , чтобы интеграл $D[\varphi_n]$ сколь угодно мало отличался от интеграла $D[\varphi]$. Тогда существуют минимальные последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, в которых φ_n является линейной комбинацией:

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_n\omega_n$$

функций $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Мы тем более получим минимальную последовательность, если мы для каждого n определим функцию φ_n , т. е. постоянные

$$c_1, c_2, \dots, c_n,$$

так, чтобы интеграл $D[\varphi_n] = d_n$ имел минимальное значение. Это требование представляет собой, очевидно, обыкновенную задачу нахождения минимума выражения $D[\varphi_n]$, рассматриваемого как функция от конечного числа параметров $c_1, c_2, \dots, c_n$. Эта задача всегда имеет решение на основании теоремы Вейерштрасса, если предположить, что $D[\varphi_n]$ является непрерывной функцией от $c_1, c_2, \dots, c_n$. Для определения значений c_i мы, вообще говоря, получаем n уравнений $\frac{\partial D[\varphi_n]}{\partial c_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Естественно

ожидать, что полученная этим путем минимальная последовательность сходится к искомому решению. К сожалению, однако, дело здесь обстоит не так просто, как мы в этом убедимся в п. 4. Мы можем поэтому в общем случае сказать только одно: полученные значения $D[\varphi_n] = d_n$

¹⁾ W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, J. f. reine u. angew. Math., т. 135, стр. 1—61, 1909. Собрание сочинений, стр. 192—250, Париж 1911.

²⁾ Вопрос о существовании таких функций будет исследован во втором томе.

сходятся к искомой нижней границе или минимуму. Сходится ли сама минимальная последовательность к искомому решению, это должно быть предметом особого исследования. К этому вопросу мы будем в дальнейшем часто возвращаться по различным поводам.

Однако пригодность этого процесса для получения численного значения d остается в силе даже в тех случаях, когда сходимость процесса не доказана. Успех этого метода в каждом отдельном случае зависит от того, насколько удачно выбрана система *координатных функций* φ_i , при выборе которой мы должны приравниваться к каждой индивидуальной проблеме в отдельности. В качестве первого пояснения к этому процессу предлагаем читателю рассмотреть примеры п. 3.

3. Дальнейшие прямые методы. Метод конечных приращений. Бесконечное число независимых переменных. Во многих случаях можно получить минимальные последовательности другим путем, расширяя при этом класс допустимых функций, рассматривая, например, вместо непрерывно дифференцируемых функций непрерывные функции сравнения, имеющие кусочно-непрерывные производные. Ограничимся задачей нахождения минимума интеграла вида:

$$D[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

Если функции:

$$y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x), \dots$$

образуют минимальную последовательность, то, сделав относительно $F(x, y, y')$ обычные предположения непрерывности, мы можем кривую, изображаемую функцией $y = \varphi_n(x)$, заменить ломаной линией $y = p_n(x)$ так, чтобы интеграл $D[p_n]$ сколь угодно мало отличался от интеграла $D[\varphi_n]$. Мы можем поэтому образовывать минимальные последовательности, составленные из кусочно-линейных функций, и тогда в каждом частичном интервале отпадает разница между производной и отношением конечных приращений. Тогда, разделив промежуток интегрирования на $m+1$ равных интервалов длины Δx с помощью m промежуточных точек $x_1, x_2, \dots, x_m$ и ограничиваясь функциями, линейными в каждом из этих интервалов, мы можем снова свести вариационную проблему к обыкновенной проблеме минимума

$$\sum_{i=1}^{i=m} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x = \min,$$

решая которую мы найдем значения $y_1, y_2, \dots, y_n$ функции y в точках деления. Образовав получаемые таким путем функции для $m=1, 2, 3, \dots$, мы снова получим минимальную последовательность¹⁾.

¹⁾ Изложенный здесь метод по существу совпадает с тем методом, с помощью которого Эйлер первоначально вывел дифференциальные уравнения вариационного исчисления в своей работе; „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes“ (Лозанна 1744).

Читатель может легко убедиться, что этот процесс решения вариационной проблемы можно получить как частный случай из общего процесса Ритца, вводя в качестве координатных функций подходящие кусочно-линейные функции.

Во втором томе мы выясним, когда полученная таким путем минимальная последовательность действительно сходится к искомому решению проблемы минимума.

В том случае, когда подинтегральное выражение содержит производные высших порядков, например производную второго порядка, можно поступать совершенно аналогичным образом. В этом случае мы в аппроксимирующей проблеме заменяем вторую производную отношением конечных приращений второго порядка, т. е. выражением:

$$\frac{y_{l+2} - 2y_{l+1} + y_l}{(\Delta x)^2}.$$

Можно также рассматривать наши вариационные проблемы и с точки зрения *теории функций от бесконечно многих переменных*. В качестве примера мы можем указать на приведенное в главе II (стр. 90 и след.) решение Гурвица изопериметрической задачи, где независимыми переменными являются коэффициенты Фурье и где решение задачи непосредственно вытекает из полученного там аналитического выражения для $\alpha^2 - 4\pi F$.

Процесс Ритца можно также рассматривать и с этой точки зрения, разлагая искомую функцию в бесконечный ряд:

$$c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + \dots + c_n \omega_n + \dots$$

и рассматривая этот процесс как метод последовательного определения коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, причем, конечно, необходимо провести все относящиеся сюда исследования сходимости.

Поясним эти общие рассуждения на отдельных примерах:

а) (см. стр. 161). Требуется найти минимум интеграла

$$D[\varphi] = \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy, \quad (6)$$

взятого по прямоугольнику R :

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

налагая при этом на функции сравнения φ следующие ограничения: функция φ , во-первых, должна быть непрерывной и кусочно-гладкой¹⁾ внутри прямоугольника R , во-вторых, φ должна обращаться в нуль на границе этого прямоугольника, и, наконец, функция φ должна удовлетворять дополнительному условию:

$$H(\varphi) = \iint_R \varphi^2 dx dy = 1. \quad (7)$$

¹⁾ См. определение кусочно-гладкой функции в начале гл. II,

Представим себе функцию φ разложенной в ряд Фурье:

$$\varphi = \sum_{m, n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y,$$

что согласно гл. II, несомненно, возможно в виду наложенных ограничений на функцию φ ; тогда речь идет об определении бесконечного множества параметров c_{mn} с помощью требуемого условия минимума. Так как функции φ_x и φ_y кусочно-непрерывны, то для этих функций, имеющих коэффициенты Фурье $\frac{\pi}{a} m c_{mn}$, $\frac{\pi}{b} n c_{mn}$, выполняются условия полноты системы тригонометрических функций, и мы получаем для обоих интегралов следующие выражения:

$$D = \pi^2 \frac{ab}{4} \sum_{m, n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad H = \frac{ab}{4} \sum_{m, n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \quad (8)$$

содержащие бесконечное множество параметров c_{mn} . Из условия $H=1$ непосредственно следует, что решение нашей проблемы получается, если все $c_{mn}=0$ за исключением коэффициента $c_{11} = \sqrt{\frac{4}{ab}}$. Таким образом решение нашей вариационной проблемы дается функцией:

$$u = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Минимальное значение $D[\varphi]$ равно:

$$d = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Отсюда непосредственно следует, что всякая кусочно-гладкая функция φ , обращающаяся в нуль на границе прямоугольника R , удовлетворяет неравенству:

$$D[\varphi] \geq \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) H[\varphi], \quad (9)$$

ибо это неравенство эквивалентно неравенству $D[\psi] \geq d$ для нормированной функции

$$\psi = \frac{\varphi}{\sqrt{H[\varphi]}}.$$

б) *Проблема Дирихле*¹⁾ для круга. Требуется найти минимум интеграла:

$$D[\varphi] = \iint_K (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx \, dy,$$

¹⁾ Присвоение рассматриваемой проблеме имени Дирихле стало общепринятым со времен Римана, хотя совершенно не соответствует исторической действительности.

распространенного по кругу $K: x^2 + y^2 \leq 1$ плоскости x, y , принимая за функции сравнения все функции, гладкие внутри K и принимающие на границе заданные граничные значения. Переходя к полярным координатам r, ϑ , мы получаем для $D[\varphi]$ выражение:

$$D[\varphi] = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\vartheta^2 \right) r dr d\vartheta;$$

пусть заданные граничные значения определены с помощью ряда Фурье:

$$f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta),$$

и пусть эта граничная функция имеет гладкую производную, откуда следует, согласно гл. II, § 5, п. 3, ограниченность множества значений $n^2 |a_n|$, $n^2 |b_n|$.

Представим себе функцию φ разложенной в ряд:

$$\varphi = \frac{1}{2} f_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(r) \cos n\vartheta + g_n(r) \sin n\vartheta],$$

где коэффициенты $f_n(r)$ и $g_n(r)$ должны удовлетворять условиям $f_n(1) = a_n$, $g_n(1) = b_n$. Мы можем тогда на основании условия полноты системы тригонометрических функций получить для $D[\varphi]$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} D[\varphi] = & \frac{\pi}{2} \int_0^1 f_0'(r)^2 r dr + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[f_n'(r)^2 + \frac{n^2}{r^2} f_n(r)^2 \right] r dr + \\ & + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[g_n'(r)^2 + \frac{n^2}{r^2} g_n(r)^2 \right] r dr. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для того, чтобы решить первоначальную проблему минимума, мы должны решить в отдельности весь ряд проблем минимума:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[f_n'(r)^2 + \frac{n^2}{r^2} f_n(r)^2 \right] r dr = \min, \\ & \int_0^1 \left[g_n'(r)^2 + \frac{n^2}{r^2} g_n(r)^2 \right] r dr = \min \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

причем f_n и g_n должны быть гладкими функциями, принимающими при $r=1$ заданные значения a_n и b_n . На основании теоремы Вейерштрасса об аппроксимировании непрерывных функций последовательность функций $1, r, r^2, \dots$ удовлетворяет для всех этих проблем минимума условиям, требующимся при процессе Ритца. Мы можем поэтому заменить

функции f_n или g_n многочленами $c_{n,0} + c_{n,1}r + \dots + c_{n,m}r^m$ с дополнительным условием $c_{n,0} + c_{n,1} + \dots + c_{n,m} = a_n$ или b_n . Решением соответствующей обыкновенной задачи minimum'a служит, как читатель может в этом легко убедиться, функция $f_n = a_n r^n$ или $g_n = b_n r^n$ для всякого $m \geq n$. Так как эти решения не зависят от m , то получается минимальная последовательность, все члены которой равны между собой, откуда непосредственно следует, что эти функции служат решением каждой из рассматриваемых вариационных проблем минимума.

Вместо применения процесса Рунге можно непосредственно получить решения f_n или g_n наших вариационных проблем, поступая следующим образом. При $n=0$ мы должны найти минимум

$$\int_0^1 f'^2(r) r dr,$$

что, очевидно, будет достигнуто, если положить $f'_0 = 0$, $f_0 = \text{const} = a_0$. При $n > 0$, мы должны, во-первых, иметь $f_n(0) = g_n(0) = 0$, ибо в противном случае вторая часть интеграла обратилась бы в бесконечность, так как f_n дифференцируема и может быть представлена в виде:

$$f_n(0) + r h_n(r),$$

где $h_n(r)$ — непрерывная функция. Представим теперь наш первый интеграл в форме:

$$\int_0^1 \left(f'_n - \frac{n}{r} f_n \right)^2 r dr + 2n \int_0^1 f'_n f_n dr = \int_0^1 \left(f'_n - \frac{n}{r} f_n \right)^2 r dr + n f_n^2(1),$$

где $f_n(1) = a_n$ является заданной заранее величиной. Отсюда непосредственно следует, что данный интеграл имеет своим минимумом

$$n f_n^2(1) = n a_n^2,$$

и мы достигнем этого минимума, если положим $f'_n - \frac{n}{r} f_n = 0$, откуда следует, что $f_n = c_n r^n$, а в силу условия $f_n(1) = a_n$ мы получаем:

$$f_n(r) = a_n r^n.$$

Точно также мы получим, что $g_n(r) = b_n r^n$.

Итак, решением нашей первоначальной проблемы минимума служит функция

$$u(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \quad (10)$$

а минимальное значение интеграла равно:

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2).$$

Необходимо при этом подчеркнуть тот факт, что решенная нами проблема минимума может потерять смысл, если сделать более общие предположения относительно граничной функции, например ограничиться требованием непрерывности.

Возьмем, например в качестве граничной функции непрерывную функцию $\rho(\vartheta)$, определенную с помощью следующего равномерно сходящегося ряда:

$$\rho(\vartheta) = \varphi(1, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n! \vartheta),$$

тогда сумма

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (n!)^2$$

обращается в бесконечность; нетрудно доказать, что в этом случае вообще не существует допустимых функций сравнения φ , для которых интеграл $D[\varphi]$ имеет конечное значение.

в) Пусть в прямоугольнике $R: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ задана гладкая функция $g(x, y)$. Найдем функцию φ , непрерывную вместе со своими производными первого порядка внутри прямоугольника R и обращающуюся в нуль на границе, для которой интеграл

$$J[\varphi] = \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - 2\varphi g) dx dy \quad (11)$$

достигает минимума.

Положим, что внутри R

$$g(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} a_{mn} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b}$$

и

$$\varphi(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b},$$

где c_{mn} являются подлежащими определению параметрами. Тогда в силу условия полноты системы тригонометрических функций данная вариационная проблема сводится к отысканию тех значений параметров c_{mn} , при которых выражение:

$$\frac{4}{ab} J[\varphi] = \pi^2 \sum_{m, n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) c_{mn}^2 - 2 \sum_{m, n=1}^{\infty} a_{mn} c_{mn}$$

имеет минимальное значение,

Отсюда непосредственно видно, что минимум получается при

$$c_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}, \quad \varphi = u(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b}. \quad (12)$$

Что функция $u(x, y)$ действительно удовлетворяет всем сделанным допущениям, следует из того, что как полученный ряд, так и ряды, получающиеся из него путем почленного дифференцирования, равномерно сходятся, имея в качестве мажорант абсолютно сходящиеся ряды:

$$\sum \frac{|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad \sum \frac{m |a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad \sum \frac{n |a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Мы увидим позже (стр. 182), что функция $u(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$u_{xx} + u_{yy} = g(x, y).$$

Функция $u(x, y)$ примера а) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} + \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) u = 0,$$

а функция $u(r, \vartheta)$ примера б) удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

4. Соображения общего характера относительно прямых методов вариационного исчисления. Главная трудность, на которую мы наталкиваемся как при проведении, так и при строгом обосновании прямых методов вариационного исчисления, заключается в том, что минимальные последовательности проблемы могут не сходиться к некоторой предельной функции даже в тех случаях, когда существование решения является несомненным. Поэтому нельзя считать, что рассмотрение минимальных последовательностей, действительно, может во всех случаях непосредственно привести к решению задачи.

В качестве простого примера рассмотрим задачу нахождения минимальных поверхностей, в которой требуется найти минимум интеграла

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

и в которой в качестве допустимых поверхностей сравнения рассматриваются все квадратуемые поверхности (т. е. поверхности с конечной площадью), проходящие через заданную пространственную кривую, имеющую своей проекцией границу области G .

Возьмем в частности в качестве такой пространственной кривой кривую, лежащую в плоскости x, y , например окружность с площадью, равной единице. Тогда, очевидно, минимум достигается с помощью функции $z = 0$, т. е. с помощью самой плоскости x, y . Минимальной

последовательностью будет при этом всякая последовательность поверхностей, проходящих через данную окружность и площади которых стремятся к единице. Но мы можем легко построить такие допустимые поверхности сравнения, площадь которых сколь угодно мало отличается от единицы и на которых $z(x, y)$ в отдельных точках отличается от нуля на сколь угодно большую величину. Представим себе для этого прямой конус сколь угодно большой высоты, но радиус основания которого настолько мал, что боковая поверхность конуса меньше любой сколь угодно малой величины. Пусть основание этого конуса лежит на плоскости xy внутри заданной окружности. Возьмем в качестве поверхности сравнения поверхность, состоящую из этого конуса и остальной части заданного круга. Минимальная последовательность, состоящая из таких поверхностей, не сходится, очевидно, к поверхности, служащей решением данной задачи. Можно даже, как в этом легко убедиться, построить такие минимальные последовательности, для которых точки расходимости лежали бы всюду плотно внутри данного круга.

Другой пример дает задача Дирихле нахождения минимума интеграла

$$D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy,$$

если в качестве функций сравнения допустить все функции, непрерывные и кусочно-гладкие внутри G и обращающиеся в нуль на границе. Очевидно, $\varphi = 0$ является единственным однозначно определенным решением задачи, так как для всякой другой допустимой функции данный интеграл имеет положительное значение, тогда как при $\varphi = 0$ интеграл $D[\varphi]$ равен нулю.

Введя полярные координаты r, ϑ с началом координат в произвольной внутренней точке P области G , мы получим для нашего интеграла выражение:

$$\iint_G \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\vartheta^2 \right) r dr d\vartheta.$$

Опишем из точки P круг радиуса a , целиком лежащий внутри области G , радиус которого меньше единицы. Положим $\varphi = 0$ вне этого круга и

$$\varphi = \frac{1}{\log a} \log \frac{r}{a}$$

внутри кольца между окружностями $r = a$ и $r = a^2$ и, наконец,

$$\varphi = \frac{1}{\log a} \log a = 1$$

внутри круга $r \leq a^2$.

Определенная таким образом функция φ является, по условию, допустимой функцией сравнения. Данный интеграл принимает при этом значение:

$$\frac{2\pi}{(\log a)^2} \int_{a^2}^a \frac{1}{r^2} r dr = -\frac{2\pi}{\log a}.$$

Пусть a пробегает последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$, имеющих своим пределом нуль. Рассмотрим соответствующую последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$. Тогда интеграл $D[\varphi_n]$ стремится к нулю, так что эти функции образуют минимальную последовательность. Однако в точке P все эти функции равны единице, и следовательно, они не сходятся к решению проблемы $\varphi = 0$.

Для вариационной проблемы

$$\int_0^1 y'^2 dx = \min,$$

где $y(x)$ должна быть непрерывной и кусочно-гладкой функцией от x , обращающейся в нуль на концах промежутка интегрирования, легко убедиться, что хотя всякая минимальная последовательность всегда должна сходиться к пределу $y = 0$, однако производные функций, составляющих минимальную последовательность, могут и не стремиться в пределе к производной от предельной функции, как это показывает пример последовательности функций: $y_n = x$ при $x < \epsilon_n$, $y_n = 2\epsilon_n - x$ при $\epsilon_n \leq x \leq 2\epsilon_n$ и $y_n = 0$ при $x > 2\epsilon_n$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

Мы увидим во втором томе, что во многих случаях все такие трудности могут быть преодолены, и мы убедимся, что прямые методы вариационного исчисления являются, действительно, одним из могущественнейших средств анализа. Мы переходим теперь к изложению косвенных методов, сущность которых заключается в приведении вариационных проблем к проблемам дифференциальных уравнений. Со времени Эйлера и Лагранжа до самого последнего времени эти косвенные методы занимали в вариационном исчислении первенствующее положение. Уступая прямым методам по глубине проникновения в сущность проблемы минимума, косвенные методы отличаются большей общностью, и формально ими легче пользоваться, чем прямыми методами.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА.

Выведенные впервые Эйлерам дифференциальные уравнения вариационной проблемы представляют собой только необходимые, но ни в коем случае не достаточные условия, которым функция должна удовлетворять для того, чтобы заданный интеграл достиг своего экстремума. Мы получаем эти дифференциальные уравнения, приводя вариационную проблему к проблеме дифференциального исчисления. Условимся заранее раз навсегда, что все фигурирующие в проблеме функции и все их производные, входящие явно в заданные выражения, предполагаются непрерывными, если только не сделано противоположной оговорки.

1. Простейшая проблема вариационного исчисления. Рассмотрим сначала простейшую проблему вариационного исчисления, т. е. задачу отыскания минимума интеграла

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad (13)$$

где $x_0, x_1, y(x_0), y(x_1)$ имеют заданные численные значения. Мы предполагаем, что функция F' дважды непрерывно дифференцируема по своим трем аргументам x, y и y' . Относительно функции y мы предположим непрерывность второй производной y'' . Пусть $y = y(x) = f(x)$ является искомой экстремальной функцией, обращающей в минимум интеграл $J(y)$, относительно достаточно малой (h) -окрестности функции $y = f(x)$. Рассмотрим некоторую определенную в интервале $x_0 \leq x \leq x_1$ функцию $\eta(x)$, имеющую в этом интервале непрерывные производные первого и второго порядка и которая обращается в нуль на концах этого интервала, будучи в остальном совершенно произвольной. Образует функции $\bar{y} = y + \epsilon \eta(x) = y + \delta y$, где ϵ произвольный параметр. Величину $\delta y = \epsilon \eta(x)$ мы будем называть *вариацией* функции $y = f(x)$. При достаточно малом значении параметра ϵ все вариированные функции $\bar{y}$ содержатся в любой сколь угодно малой окрестности экстремали $y = f(x)$. Поэтому интеграл $J(\bar{y}) = J(y + \epsilon \eta)$, рассматриваемый как функция $\Phi(\epsilon)$ от ϵ , должен при $\epsilon = 0$ иметь минимальное значение относительно всех значений ϵ , достаточно малых по своему абсолютному значению. Отсюда следует, что $\Phi'(0) = 0$. Но интеграл

$$\Phi(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta') dx$$

мы имеем право дифференцировать под знаком интеграла, и мы получаем, следовательно, в качестве необходимого условия экстремума уравнение:

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \eta + F_{y'} \eta') dx = 0,$$

которое должно иметь место для всякой произвольной функции $\eta(x)$, удовлетворяющей перечисленным выше требованиям. Мы преобразовываем вторую часть этого интеграла путем интегрирования по частям и, принимая во внимание условия $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, получаем, что для всех функций $\eta(x)$ должно иметь место равенство:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) dx = 0.$$

Это равенство приводит к искомому дифференциальному уравнению на основании следующей *фундаментальной леммы вариационного исчисления*.

Если для всех функций $\eta(x)$, имеющих непрерывные производные первого и второго порядка и обращающихся в нуль при $x = x_0$ и $x = x_1$, имеет место соотношение:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \varphi(x) dx = 0,$$

где $\varphi(x)$ — данная непрерывная функция от x , то $\varphi(x)$ должна тождественно равняться нулю. Эта теорема, имеющая место также и для кратных интегралов (вместо концов интервала $x=x_0$ и $x=x_1$ там рассматривается граница области интегрирования), доказывается очень просто рассуждением от противного. Если бы $\varphi(x)$ была отличной от нуля при $x=\xi$ и имела, например, положительное значение, то существовала бы окрестность G точки ξ , т. е. некоторый интервал $\xi_0 < x < \xi_1$, в котором $\varphi(x) > \delta > 0$.

Положим $\eta(x) = (x - \xi_0)^4 (x - \xi_1)^4$ внутри G и $\eta(x) = 0$ вне этого интервала; тогда мы будем иметь:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \varphi dx > 0,$$

вопреки нашему допущению.

Наше утверждение, что $\varphi = 0$, сохраняет свою силу и тогда, если мы потребуем, чтобы функция η имела непрерывные производные до k -го порядка; мы полагаем в этом случае просто $\eta = (x - \xi_0)^{2l} (x - \xi_1)^{2l}$, где $2l > k$. Из фундаментальной леммы непосредственно следует, что функция $\frac{d}{dx} F_y - F_y$, которую мы сокращенно обозначим через $[F]_y$, должна как функция от x тождественно обратиться в нуль, т. е. функция $y(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$-[F]_y = \frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0 \quad (14)$$

или в раскрытом виде:

$$y'' F_{y'y} + y' F_{y'y'} + F_{y'x} - F_y = 0. \quad (14')$$

Это и есть *дифференциальное уравнение Эйлера*; уравнения этого типа многократно встречаются в анализе и его приложениях. *Уравнение Эйлера является необходимым условием экстремума*. Дифференциальное уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого содержит две произвольные постоянные, т. е. ровно столько, сколько нужно для того, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям.

Мы называем *всякое* решение этого дифференциального уравнения *экстремалью* данной проблемы минимума. Дифференциальное выражение $[F]_y$ мы называем *вариационной производной* функции F по y . Оно здесь играет такую же роль, какую обыкновенная производная играет в обыкновенных проблемах минимума.

Если мы хотим разрешить дифференциальное уравнение Эйлера относительно производной высшего порядка, как это обычно делают в теории дифференциальных уравнений, то мы должны предположить, что

$$F_{y'y'} \neq 0.$$

Это неравенство называется *неравенством Лежандра*; оно играет большую роль при решении вопроса, действительно ли данная экстремаль дает экстремум или нет (см. также § 6, стр. 205 и след.).

В предыдущих рассуждениях существенным было включение экстремали $y(x)$ в состав семейства функций $y(x; \epsilon) = y(x) + \epsilon \eta(x)$ с параметром ϵ . То, что этот параметр входит в функцию $y(x; \epsilon)$ линейно, не является существенным. Ничего не изменилось бы, если бы мы включили экстремаль $y(x)$ в семейство функций $y(x; \epsilon)$ более общего вида, полагая тогда

$$\eta(x) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} y(x, \epsilon) \Big|_{\epsilon=0}.$$

Укажем также на очень полезный способ обозначения. Подобно тому, как мы функцию $\epsilon \eta = \delta y$ называем вариацией функции $y(x)$, мы называем *вариацией*, или, точнее, *первой вариацией*, интеграла J следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} \delta J &= \epsilon \Phi'(0) = \epsilon \int_{x_0}^{x_1} (\eta F_y + \eta' F_{y'}) dx = \\ &= \epsilon \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \eta dx + \epsilon \eta F_{y'} \Big|_{x=x_1} - \epsilon \eta F_{y'} \Big|_{x=x_0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta y dx + F_{y'} \delta y \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В этом выражении в общем случае не предполагается, что η на границе обращается в нуль. Понятие вариации аналогично понятию дифференциала $df = \epsilon f'(x)$ функции $f(x)$, где ϵ является также неопределенным параметром. *Итак, необходимым условием минимума является обращение в нуль первой вариации.*

Все функции или, выражаясь геометрически, все кривые, для которых δJ обращается в нуль, т.е. все экстремали данной проблемы, мы называем также *стационарными функциями или кривыми*, указывая этим так же, как и при соответствующей проблеме дифференциального исчисления на то, что возможны случаи, когда эти функции не дают в действительности экстремума.

В самом деле, во многих случаях речь идет в первую очередь об исчезании первой вариации, тогда как вопрос о достижении экстремума является второстепенным. Такого рода проблемы, в которых требуется только определить стационарные значения функционала, также называются вариационными проблемами.

Приведенные выше примеры (см. стр. 158, 159) дают следующие вариационные производные:

$$a) F = \sqrt{e + 2fv' + gv'^2}; \quad \frac{d}{du} \frac{f + gv'}{\sqrt{e + 2fv' + gv'^2}} - \frac{e_u + 2f_v v' + g_v v'^2}{2\sqrt{e + 2fv' + gv'^2}} = 0;$$

$$б) F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\varphi(x, y)} = \psi(x, y) \sqrt{1+y'^2}; \quad \psi y' = (\psi_y - \psi_x y')(1+y'^2);$$

в) $F = y\sqrt{1+y'^2}$; $yy'' = 1 + y'^2$ (частный случай предыдущего);

г) $F = y\sqrt{1-y'^2}$; $yy'' = y'^2 - 1$.

Интегрированием этих дифференциальных уравнений мы займемся в § 4.

2. Случай многих неизвестных функций. От простейшей проблемы вариационного исчисления, только что рассмотренной нами, очень мало отличается тот случай, когда речь идет о нахождении системы неизвестных функций $y(x)$, $z(x)$, ... от переменной x , для которой интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \dots, y', z', \dots) dx \quad (16)$$

имеет экстремальное (или стационарное) значение, причем снова предполагается, что заданы значения функций на концах промежутка интегрирования.

Вводя и здесь произвольные функции $\eta(x)$, $\zeta(x)$, ..., обращающиеся на границе в нуль, и предполагая, что система функций

$$y = y(x) = f(x), \quad z = z(x) = g(x)$$

дает экстремум, мы заключаем отсюда, как и раньше, что функция

$$\Phi(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \epsilon_1 \eta, z + \epsilon_2 \zeta, \dots, y' + \epsilon_1 \eta', z' + \epsilon_2 \zeta', \dots) dx$$

от переменных $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ должна иметь экстремум при $\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = 0, \dots$

Отсюда следует, что $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_2}\right)_0 = 0, \dots$ ¹⁾

Систему этих условий мы можем записать в виде одного уравнения:

$$\begin{aligned} \delta J &= \epsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_1}\right)_0 + \epsilon_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_2}\right)_0 + \dots = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [(F_y \eta + F_{y'} \eta') \epsilon_1 + (F_z \zeta + F_{z'} \zeta') \epsilon_2 + \dots] dx = 0. \end{aligned}$$

Мы называем это выражение первой вариацией интеграла J и так же, как и раньше, мы можем его привести к виду:

$$\begin{aligned} \delta J &= \epsilon_1 \left[F_{y'} \eta \right]_{x_0}^{x_1} + \epsilon_2 \left[F_{z'} \zeta \right]_{x_0}^{x_1} + \\ &+ \epsilon_1 \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) dx + \epsilon_2 \int_{x_0}^{x_1} \zeta \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) dx + \dots, \quad (17) \end{aligned}$$

причем в рассматриваемом случае граничные члены обращаются в нуль.

¹⁾ Индекс нуль указывает, что во всех этих выражениях нужно положить $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 0$.

Считая одну из функций $\eta, \zeta, \dots$ произвольной, а все остальные равными нулю, мы заключаем из обращения в нуль вариации δJ для этих частных систем значений $\eta, \zeta, \dots$, на основании приведенной выше леммы, что функции $y, z, \dots$ должны одновременно удовлетворять следующей системе совокупных дифференциальных уравнений Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} -[F]_y &= \frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = \\ &= F_{y'y''} + F_{y'z''} + \dots + F_{y'y} y' + F_{y'z} z' + \dots + F_{y'x} - F_y = 0, \\ -[F]_z &= \frac{d}{dx} F_{z'} - F_z = \\ &= F_{z'y''} + F_{z'z''} + \dots + F_{z'y} y' + F_{z'z} z' + \dots + F_{z'x} - F_z = 0. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Мы получаем таким образом в качестве необходимого условия экстремума или стационарного характера „пространственной кривой“ $y=f(x)$, $z=g(x)$ систему совокупных дифференциальных уравнений второго порядка, причем число уравнений равно числу неизвестных функций $y, z, \dots$. Все сказанное нами выше для случая простейшей проблемы вариационного исчисления сохраняет свою силу и здесь. Новым является лишь то обстоятельство, что обращение в нуль первой вариации является необходимым условием не только экстремума, но и такого смешанного минимума и максимума, когда интеграл имеет минимум при вариировании функции $y(x)$ и в то же время имеет максимум при вариировании функции $z(x)$.

Здесь мы также называем *всякую* интегральную кривую системы дифференциальных уравнений (18) *экстремалью*.

Простейший пример уравнений Эйлера (18) дает задача определения кратчайших линий в обыкновенном евклидовом или же неевклидовом пространстве с линейным элементом

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + g_{22} dy^2 + g_{33} dz^2 + 2g_{12} dx dy + 2g_{13} dx dz + 2g_{23} dy dz.$$

Здесь

$$F = \sqrt{g_{11} + g_{22} y'^2 + g_{33} z'^2 + 2g_{12} y' + 2g_{13} z' + 2g_{23} y' z'},$$

и мы получаем для *геодезических линий* этого пространства дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{g_{12} + g_{22} y' + g_{33} z'}{F} \right) - \frac{1}{2F} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial y} y' + \dots \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{g_{13} + g_{23} y' + g_{33} z'}{F} \right) - \frac{1}{2F} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial z} + 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial z} y' + \dots \right) &= 0. \end{aligned}$$

В евклидовом пространстве, где

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

эти дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0,$$

и удовлетворяются всеми прямыми линиями в пространстве.

Распространение света в трехмерной среде со скоростью $\varphi(x, y, z)$ приводит к вариационной проблеме:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\varphi(x, y, z)} ds = \min.$$

В более общем случае мы можем считать, что скорость света зависит также и от направления светового луча и выражается поэтому функцией

$$\varphi(x, y, z, y', z').$$

Тогда задача нахождения вида светового луча, т. е. основная проблема геометрической оптики, оказывается эквивалентной рассматриваемой нами общей проблеме вариационного исчисления, в которой мы должны положить

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\varphi(x, y, z, y', z')}.$$

3. Выражения, содержащие производные высших порядков. Пусть речь идет о вариационной проблеме для интеграла вида:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (19)$$

где F — заданная функция от аргументов $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ и где в качестве функций сравнения допускаются все функции, имеющие непрерывные производные до порядка $2n$ включительно, для которых на концах промежутка заданы значения функции и ее производных до порядка $n-1$ включительно. Мы можем и в этом случае вывести совершенно аналогичным образом дифференциальное уравнение Эйлера. Обозначим снова через $\eta(x)$ произвольную функцию, имеющую непрерывные производные до порядка $2n$ включительно и удовлетворяющую в граничных точках $x=x_0$ и $x=x_1$ условиям $\eta(x)=0, \eta'(x)=0, \dots, \eta^{(n-1)}(x)=0$. Мы получим тогда совершенно так же, как и раньше для первой вариации $\delta J = \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon \eta] \Big|_{\varepsilon=0}$ следующее выражение:

$$\delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} [F_y \eta + F_{y'} \eta' + \dots + F_{y^{(n)}} \eta^{(n)}] dx.$$

Повторным интегрированием по частям мы можем здесь так же, как и раньше, устранить все производные функции η в подынтегральном выражении, так что δJ принимает вид:

$$\delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \eta \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right] dx. \quad (20)$$

Отсюда мы получаем на основании приведенной выше леммы в качестве необходимого условия экстремума дифференциальное уравнение порядка $2n$:

$$[F]_y = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (21)$$

Мы называем это дифференциальное уравнение также уравнением Эйлера. Входящие в общий интеграл уравнения (21) $2n$ постоянных интегрирования могут быть определены с помощью $2n$ граничных условий.

Совершенно аналогичный вид имеет система уравнений Эйлера, получающихся при отыскании системы функций $y, z, \dots$, удовлетворяющих вариационной проблеме:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \dots, y', z', \dots, y'', z'', \dots) dx = \min.$$

4. Случай многих независимых переменных. Вариационная проблема нахождения экстремума кратного интеграла приводит к одному или к нескольким дифференциальным уравнениям с частными производными, которым должны удовлетворять искомые функции, подобно тому как рассмотренные до сих пор задачи привели нас к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Пусть, например, требуется найти экстремум двойного интеграла:

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \quad (22)$$

распространенного по заданной области G , причем искомая функция u должна иметь непрерывные производные до второго порядка включительно и принимать на границе области G заданные граничные значения. Мы снова обозначаем через $\eta(x, y)$ произвольную функцию, на которую мы позже наложим граничное условие $\eta = 0$, и получаем в качестве необходимого условия экстремума обращение в нуль первой вариации:

$$\delta J = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Phi(\varepsilon) \right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon \eta] \right)_{\varepsilon=0}$$

или, иначе говоря, уравнение

$$\delta J = \varepsilon \iint_G (F_u \eta + F_{u_x} \eta_x + F_{u_y} \eta_y) dx dy = 0. \quad (23)$$

Это уравнение мы снова преобразовываем путем интегрирования по частям.

Мы предполагаем, как обычно, что граница Γ области G имеет кусочно-непрерывно изменяющуюся касательную.

Тогда по теореме Гаусса ¹⁾

$$\begin{aligned} & \iint_G (\eta_x F_{u_x} + \eta_y F_{u_y}) dx dy = \\ &= \int_{\Gamma} \eta (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) - \iint_G \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx dy; \end{aligned}$$

мы получаем таким образом

$$\begin{aligned} \delta J &= \varepsilon \iint_G \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx dy + \varepsilon \int_{\Gamma} \eta (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) = \\ &= \iint_G \delta u [F]_u dx dy + \int_{\Gamma} \delta u (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) = 0. \end{aligned}$$

В частности, если мы потребуем, чтобы на границе Γ функция η была равна нулю, в соответствии с тем, что, согласно предположению, для функции u заданы постоянные граничные значения, то мы получаем:

$$\delta J = \varepsilon \iint_G \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx dy = 0. \quad (24)$$

Равенство $\delta J = 0$ должно иметь место для произвольной непрерывно дифференцируемой функции η . Так как лемма п. 1 справедлива также и для кратных интегралов и доказывается так же, как и для простых интегралов, то мы отсюда получаем дифференциальное уравнение Эйлера:

$$- [F]_u = \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0, \quad (25)$$

или в раскрытом виде:

$$F_{u_x u_x} u_{xx} + 2F_{u_x u_y} u_{xy} + F_{u_y u_y} u_{yy} + F_{u_x u_x} u_x + F_{u_y u_y} u_y + F_{u_x x} + F_{u_y y} - F_u = 0.$$

Из всего многообразия решений этого дифференциального уравнения мы должны выбрать то частное решение, которое удовлетворяет заданным граничным условиям (*краевая задача*).

Аналогично мы получаем систему таких дифференциальных уравнений в том случае, когда требуется найти несколько неизвестных функций.

Если же функция F содержит частные производные высших порядков до n -го порядка включительно, то мы получаем дифференциальное

¹⁾ См., например, *Курант*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, стр. 246.

уравнение порядка $2n$:

$$\left. \begin{aligned} [F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{u_{xy}} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{u_{yy}} - \dots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} F_{u_{yy} \dots y} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

В качестве примера рассмотрим

$$F = \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2)$$

(см. стр. 167).

Уравнение Эйлера сводится в этом случае к „уравнению Лапласа“:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Выражение

$$F = \frac{1}{2} (\Delta u)^2 = \frac{1}{2} u_{xx}^2 + u_{xx} u_{yy} + \frac{1}{2} u_{yy}^2$$

приводит к уравнению Эйлера:

$$\Delta \Delta u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0.$$

Это же уравнение Эйлера получается и для функции

$$F = (\Delta u)^2 - c (u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2)$$

при постоянном c .

Проблема минимальных поверхностей, для которой подинтегральное выражение имеет вид:

$$F = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

приводит к дифференциальному уравнению Эйлера:

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_x z_y + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0.$$

5. Тождественное обращение в нуль дифференциального выражения Эйлера. Подинтегральные выражения, изображаемые в виде дивергенций. Может случиться, что дифференциальное выражение Эйлера, образованное для подинтегрального выражения $F(x, y, y', \dots)$, обращается тождественно в нуль для любого допустимого функционального аргумента u . Так как всегда можно построить такой допустимый функциональный аргумент u , чтобы при любом заранее заданном значении x функции $u, y', \dots$ принимали произвольные заданные значения, то обращение в нуль дифференциального выражения Эйлера для всякого допустимого функционального аргумента равносильно обращению в нуль этого выражения при любых значениях переменных $x, y, y', \dots$, рассматриваемых как независимые параметры. Это же относится и к тому случаю, когда функциональный аргумент u выражения Эйлера является функцией от многих переменных.

Простейший случай представляет выражение $F(x, y, y')$. Из тождественного обращения в нуль дифференциального выражения Эйлера

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y'} y'' - F_{y'y'} y'' = 0$$

следует, что $F_{y'y'}=0$, так что выражение F имеет вид:

$$F=A(x, y)+y'B(x, y).$$

Тогда уравнение Эйлера переходит в условие интегрируемости:

$$\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}=0.$$

В этом случае интеграл

$$\int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x (A+y'B) dx = \int (A dx + B dy)$$

не зависит от пути интегрирования¹⁾, согласно известной теореме интегрального исчисления.

Считая верхний предел x переменным, мы получим, что наш интеграл будет некоторой функцией $G(x, y)$ от своего верхнего предела и тогда

$$F(x, y, y') = \frac{d}{dx} G(x, y).$$

Это соотношение является не только необходимым, но также, как в этом легко убедиться, и достаточным условием тождественного обращения в нуль дифференциального выражения Эйлера от функции F .

Аналогичный факт имеет место и для подинтегрального выражения вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, а именно:

Для того чтобы дифференциальное выражение Эйлера $[F]_y$ тождественно обратилось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы функцию F можно было представить в виде:

$$F = \frac{dG}{dx},$$

где $G = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ содержит только производные от y не выше $n-1$ -го порядка.

В достаточности этого условия можно убедиться либо непосредственно путем простого вычисления, либо на основании того, что интеграл

$\int_{x_0}^{x_1} F dx$ зависит в этом случае исключительно от граничных значений функции y и производных $y', \dots, y^{(n-1)}$ при $x=x_0$ и $x=x_1$. Поэтому, если мы будем произвольным образом варьировать функцию y внутри промежутка интегрирования, оставляя неизменными граничные значения, то наш интеграл не будет при этом изменяться, вследствие чего первая вариация этого интеграла, а вместе с тем и дифференциальное выражение Эйлера должны тождественно равняться нулю.

Чтобы убедиться в необходимости этого условия, рассмотрим семейство функций $y(x, \alpha)$, зависящее от параметра α , с постоянными, т. е. не зависящими от α граничными значениями $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

¹⁾ Как мы сейчас увидим, эта независимость от пути вытекает также непосредственно из тождественного обращения в нуль дифференциального выражения Эйлера.

Обозначим через $J(a)$ значение, принимаемое интегралом, если заменить функциональный аргумент функцией $y = y(x, a)$. Тогда из выражения для первой вариации следует, что

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \frac{\partial y}{\partial a} dx,$$

и поэтому в силу нашего предположения

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0.$$

Таким образом интеграл J не зависит от a и является поэтому функцией только от координат x_0 и x_1 и граничных значений функции y и ее первых $n-1$ производных на концах промежутка интегрирования. Оставляя неизменными x_0 и начальные значения функции y и ее производных и считая верхний предел x_1 и значения $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ при $x = x_1$ переменными, мы получим, что

$$\int_{x_0}^x F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

откуда дифференцированием по верхнему пределу мы и получаем:

$$F = \frac{dG}{dx},$$

что и требовалось доказать.

Для интегралов, функциональным аргументом которых служит функция от многих переменных, в том случае, когда подинтегральное выражение $F(x, y, u, u_x, u_y)$ содержит только производные первого порядка, имеет место совершенно аналогичное соотношение. Именно, путем рассуждения аналогичного предыдущему, мы получаем следующую теорему: *Для того чтобы дифференциальное выражение Эйлера $[F]_u$ обращалось в нуль тождественно относительно функционального аргумента u , необходимо и достаточно, чтобы выражение F можно было представить в виде:*

$$F = A_x + B_y,$$

где A и B суть функции от x, y и u . Выражения такого вида мы называем *дивергенциями*. Выражение, изображаемое в виде дивергенции, характеризуется тем, что двойной интеграл $\iint_G F dx dy$ не меняет своего значения, если функция u варьирует так, что при этом изменяются только значения функции в некоторой внутренней части области G , тогда как на границе области G как функция u , так и ее частные производные остаются без изменения. — Согласно теореме Гаусса,

$$\iint_G F dx dy = \int_{\Gamma} (A dy - B dx),$$

где стоящий справа интеграл является криволинейным интегралом, взятым вдоль линии Γ в положительном направлении.

Несколько сложнее обстоит дело в том случае, когда подинтегральное выражение F содержит частные производные высших порядков.

В этом случае, хотя и остается в силе теорема, что для того чтобы выражение Эйлера обращалось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение F можно было представить в виде:

$$F = A_x + B_y,$$

т. е. чтобы F было выражением, изображаемым в виде дивергенции, однако в общем случае невозможно выбрать A и B так, чтобы высший порядок производных, содержащихся в этих выражениях, был ниже, чем в F .

Простейшим примером выражения второго порядка, изображаемого в виде дивергенции, является выражение:

$$F = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2.$$

Для этого выражения имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} F &= (u_x u_{yy})_x - (u_x u_{xy})_y = - (u_y u_{xy})_x + (u_y u_{xx})_y = \\ &= -\frac{1}{2} \left[(u_x^2)_{yy} - 2 (u_x u_y)_{xy} + (u_y^2)_{xx} \right]. \end{aligned}$$

Другой пример дается тождеством:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{u_{xx} u_y}{(u_x^2 + 1) \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_{xy} u_y}{(u_x^2 + 1) \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right]. \end{aligned}$$

Стоящее слева выражение

$$\frac{u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

равняется, как известно, гауссовой кривизне поверхности $z = u(x, y)$, умноженной на $\frac{1}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Из того, что это выражение может быть представлено в виде дивергенции, вытекает тот общеизвестный факт, что полная кривизна ограниченного куска поверхности зависит только от значений функции z и ее частных производных на границе этого куска поверхности.

Следующим непосредственным следствием из полученного нами условия обращения в нуль дифференциального выражения Эйлера является следующая теорема: *Если разность подинтегральных выражений двух вариационных проблем представляет собой выражение, изображаемое в виде дивергенции, то уравнения Эйлера, а следовательно и семейства*

экстремалей обеих вариационных проблем, тождественны между собой (см. стр. 201, примечание 1).

6. Однородная форма дифференциальных уравнений Эйлера. В задачах геометрического характера, в которых идет речь об определении кривых или поверхностей, удовлетворяющих некоторому условию минимума, выделение одной из координат в качестве независимой переменной не соответствует характеру задачи, и поэтому является более естественным задать кривую или поверхность в параметрическом виде $x=x(t)$, $y=y(t)$ или соответственно $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, где t или соответственно u , v являются независимыми переменными. Относительно функций x , y или x , y , z мы предполагаем при этом, что не имеют места равенства: $\dot{x}=\dot{y}=0$ или соответственно $x_u y_v - x_v y_u = y_v z_u - y_u z_v = z_u x_v - z_v x_u = 0$, где поставленные сверху точки означают дифференцирование по параметру t . Рассмотрим сначала простейшую вариационную проблему, имеющую вид:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt = \min, \quad (27)$$

где

$$\mathfrak{F} = \dot{x} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right).$$

Функция $\mathfrak{F}$ является „однородной“ функцией первого измерения относительно производных $\dot{x}, \dot{y}$ и удовлетворяет для всякого k условию однородности:

$$\mathfrak{F}(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad (28)$$

откуда, дифференцируя по k и полагая затем $k=1$, мы получаем:

$$\dot{x} \mathfrak{F}_x + \dot{y} \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}. \quad (29)$$

Обратно, если $\mathfrak{F}$ есть произвольная однородная¹⁾ функция первого измерения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$, так что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет равенству (28), то вариационная проблема $\int \mathfrak{F} dt = \min$ определяет кривую независимо от выбора параметра, ибо если при преобразовании параметра $t=t(\tau)$,

¹⁾ В геометрических примерах функция $\mathfrak{F}$ очень часто удовлетворяет условию (28) только для положительных значений k . Мы говорим тогда, что $\mathfrak{F}$ только положительно однородна, а не однородна в полном смысле этого слова. В последнем случае интеграл должен менять знак, если пробегать кривую в противоположном направлении, но это требование полной однородности не выполняется уже, например, для длины дуги, выражающейся интегралом

$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

где квадратный корень положителен и интеграл всегда имеет одно и то же значение независимо от направления пробега кривой. Приведенные выше соображения сохраняют свою силу и для таких только положительно однородных подинтегральных выражений.

где $\frac{dt}{d\tau} > 0$, интервал $t_0 \leq t \leq t_1$ переходит в интервал $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$, то в силу соотношения (28) мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F} \left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right) d\tau &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F} \left(x, y, \dot{x} \frac{dt}{d\tau}, \dot{y} \frac{dt}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F} \left(x, y, \dot{x}, \dot{y} \right) \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F} \left(x, y, \dot{x}, \dot{y} \right) dt. \end{aligned}$$

Таким образом рассматриваемая вариационная проблема инвариантна относительно преобразования параметра, не меняющего направления пробега, и экстремальные кривые не зависят поэтому от выбора параметра.

Приведенной к однородному виду проблеме соответствуют два дифференциальных уравнения Эйлера:

$$\mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}} = 0, \quad \mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}} = 0. \quad (30)$$

Эти два уравнения при выполнении соотношения (29) должны быть эквивалентны дифференциальному уравнению (14) и не могут быть поэтому независимыми друг от друга. Мы получаем эту зависимость, выводя из (29) путем дифференцирования следующие тождества:

$$\mathfrak{F}_x = \dot{x} \mathfrak{F}_{x\dot{x}} + \dot{y} \mathfrak{F}_{x\dot{y}}, \quad \mathfrak{F}_y = \dot{x} \mathfrak{F}_{y\dot{x}} + \dot{y} \mathfrak{F}_{y\dot{y}},$$

$$\dot{x} \mathfrak{F}_{x\dot{x}} + \dot{y} \mathfrak{F}_{x\dot{y}} = 0, \quad \dot{x} \mathfrak{F}_{y\dot{x}} + \dot{y} \mathfrak{F}_{y\dot{y}} = 0,$$

откуда

$$\mathfrak{F}_{x\dot{x}} : \mathfrak{F}_{x\dot{y}} : \mathfrak{F}_{y\dot{y}} = \dot{y}^2 : -\dot{x}\dot{y} : \dot{x}^2.$$

Равные между собой отношения

$$\frac{\mathfrak{F}_{x\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{\mathfrak{F}_{x\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{\mathfrak{F}_{y\dot{y}}}{\dot{x}^2}$$

обычно обозначают через $\mathfrak{F}_1$.

Из предыдущих тождеств следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}} &= \dot{x} \mathfrak{F}_{x\dot{x}} + \dot{y} \mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{x\dot{x}} \dot{x} - \mathfrak{F}_{x\dot{y}} \dot{y} - \mathfrak{F}_{x\dot{x}} \ddot{x} - \mathfrak{F}_{x\dot{y}} \ddot{y} = \\ &= \dot{y} [\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} + (\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}) \mathfrak{F}_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}} &= \dot{x} \mathfrak{F}_{y\dot{x}} + \dot{y} \mathfrak{F}_{y\dot{y}} - \mathfrak{F}_{y\dot{x}} \dot{x} - \mathfrak{F}_{y\dot{y}} \dot{y} - \mathfrak{F}_{y\dot{x}} \ddot{x} - \mathfrak{F}_{y\dot{y}} \ddot{y} = \\ &= -\dot{x} [\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} + (\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}) \mathfrak{F}_1]. \end{aligned}$$

Таким образом оба уравнения (30) связаны между собой тождеством:

$$\dot{x} (\mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}}) + \dot{y} (\mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}}) = 0 \quad (31)$$

и могут быть заменены одним уравнением, например уравнением:

$$\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} + (\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}) \mathfrak{F}_1 = 0; \quad (32)$$

Совершенно аналогично обстоит дело и в том случае, когда речь идет об отыскании нескольких функций от одной переменной. Например, вариационная проблема $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx = \min$ переходит в вариацион-

ную проблему $\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt = \min$, где

$$\mathfrak{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x} F\left(x, y, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),$$

и функция $\mathfrak{F}$ является однородной функцией первого измерения относительно производных $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Приведение подинтегрального выражения к однородному виду обладает не только преимуществом формальной симметрии, но и расширяет область геометрических проблем, доступных непосредственному исследованию. Если, например, речь идет о замкнутой кривой, вдоль которой абсцисса x не возрастает все время монотонно, так что кривая не может быть представлена в виде $y = y(x)$, то соответствующая вариационная проблема не может быть непосредственно рассмотрена в неоднородной форме. — Для вариационных проблем в многомерных областях однородная форма подинтегрального выражения получается следующим образом:

Если в интеграле

$$\iint F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$$

считать переменные x, y и функцию z функциями от двух параметров u и v , причем функциональный детерминант x и y по u и v

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - x_v y_u$$

отличен от нуля, то

$$z_x = \frac{z_{uu} y_v - z_{uv} y_u}{x_u y_v - x_v y_u}; \quad z_y = -\frac{z_{uv} x_v - z_{vv} x_u}{x_u y_v - x_v y_u},$$

и рассматриваемый интеграл принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} & \iint F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy = \\ & = \iint F \left[x, y, z, -\frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, -\frac{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \right] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \\ & = \iint \mathfrak{F} \left[x, y, z, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv, \end{aligned} \quad (33)$$

где подинтегральное выражение $\mathfrak{F}$ является однородной функцией первого измерения относительно последних трех аргументов. Соотношения, выведенные выше для случаев простых интегралов, и в особенности со-

отношение (31) и симметрический вид (32) дифференциального уравнения распространяются соответственным образом и на случай многих переменных. Так как эти соотношения нам в дальнейшем не понадобятся, мы ограничиваемся указанием литературы¹⁾.

7. Вариационные проблемы с расширенными условиями допустимости. Теорема Дюбуа-Реймона и Гаара (Haar). До сих пор мы требовали, чтобы допустимые при вариации функции сравнения имели непрерывные производные до наивысшего порядка, встречающегося в дифференциальном уравнении Эйлера. С точки зрения вариационной проблемы эти требования неестественно суживают объем класса допустимых функций; так, например, вариационная проблема с подинтегральным выражением $F(x, y, y')$ имеет смысл уже тогда, когда мы ограничиваемся требованием кусочной непрерывности первой производной и не делаем никаких предположений относительно второй производной. Поэтому а priori не исключена возможность, что при таком расширении условий допустимости появится новое решение вариационной проблемы, не удовлетворяющее дифференциальному уравнению Эйлера.

Рассмотрим сначала проблему минимума в собственном смысле и допустим, что функция $y(x)$, имеющая непрерывные производные первого и второго порядка, дает минимум относительно функций сравнения, удовлетворяющих таким же требованиям непрерывности. Тогда функция $y(x)$ дает минимум также и относительно таких функций сравнения y^* , которые удовлетворяют только требованию непрерывности производной первого порядка и могут вовсе не иметь производной второго порядка. Ибо по теореме Вейерштрасса об аппроксимировании непрерывных функций производная $y^{*'}(x)$ может быть аппроксимирована полиномом $p'(x)$, а функция y^* — полиномом $p(x)$, удовлетворяющим граничным условиям $p(x_0) = y_0$, $p(x_1) = y_1$. Так как можно определить $p(x)$ так, чтобы разности $(p' - y^{*'})$ и $(p - y^*)$ были сколь угодно малы²⁾, то интеграл $J[p]$ может быть сделан сколь угодно мало отличным от интеграла $J[y^*]$. Так как $p(x)$ является допустимой функцией сравнения, имеющей непрерывные производные первого и второго порядка, то $J[p] \geq J[y]$, а поэтому и $J[y^*] \geq J[y]$.

¹⁾ См. Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, стр. 666—671, Лейпциг 1909; Kolb G., Sur les maxima et minima des intégrales doubles, Acta Math., 16, стр. 61—140, 1892—1893.

²⁾ Мы образуем для этой цели на основании теоремы Вейерштрасса многочлен $q'(x)$, который удовлетворял бы неравенству $|q'(x) - y^{*'}(x)| < \frac{\varepsilon}{2(x_1 - x_0)}$, при $x_0 \leq x \leq x_1$, причем ε означает любое сколь угодно малое положительное число.

Тогда многочлен $q(x) = y_0 + \int_{x_0}^x q'(t) dt$ принимает при $x = x_0$ заданное начальное значение y_0 и во всем интервале отличается от функции $y^*(x)$ не больше чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Чтобы получить теперь многочлен, удовлетворяющий условиям: $|p(x) - y^*(x)| < \varepsilon$, $|p'(x) - y^{*'}(x)| < \varepsilon$, $p(x_0) = y_0$ и, кроме того, принимающий при $x = x_1$ заданное значение y_1 , достаточно прибавить к многочлену $q(x)$ линейную функцию $I(x) = \frac{y_1 - q(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$. Легко убедиться, что функция $p(x) = q(x) + I(x)$ удовлетворяет всем перечисленным в тексте условиям.

Если же мы заранее вводим в проблему минимума — или вообще в проблему отыскания стационарного значения — расширенные условия допустимости, так что относительно решения проблемы мы требуем только, чтобы первая производная была кусочно-непрерывной, то возникает вопрос, не имеет ли эта функция еще производных высших порядков и удовлетворяет ли она тогда дифференциальному уравнению Эйлера. Этот вопрос разрешается в положительном смысле на основании следующей теоремы Дюбуа-Реймона:

Пусть первая вариация интеграла $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ обращается в нуль для некоторой непрерывной и имеющей кусочно-непрерывную производную функции $y(x)$, равной нулю на концах интервала, и вариация которой $\eta(x)$ удовлетворяет тем же требованиям непрерывности, что и сама функция $y(x)$. Предполагая, что подинтегральное выражение $F(x, y, y')$ имеет частные производные первого и второго порядка по всем своим аргументам и что вдоль кривой $y = y(x)$ выполняется условие $F_{y''y''} \neq 0$, мы утверждаем, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера и имеет непрерывную производную второго порядка. Из обращения в нуль первой вариации само собой вытекает, таким образом, существование и непрерывность второй производной, удовлетворяющей при этом дифференциальному уравнению Эйлера.

Предпошлем доказательству следующую лемму:

Если $\varphi(x)$ есть некоторая кусочно-непрерывная в промежутке интегрирования функция и если имеет место равенство:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) \eta_1(x) dx = 0$$

для всякой кусочно-непрерывной функции $\eta_1(x)$, удовлетворяющей условию:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x) dx = 0,$$

то $\varphi(x)$ есть постоянная.

Для доказательства заметим, что соотношение $\int_{x_0}^{x_1} \varphi \eta dx = 0$ имеет место при любом постоянном φ . Определим постоянную c так, чтобы

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi - c) dx = 0;$$

так как из условия

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi \eta dx = 0$$

вытекает условие:

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi - c) \eta \, dx = 0$$

и так как функция $\varphi - c$ удовлетворяет требованию, наложенному на функции η , то мы имеем право положить здесь $\eta = \varphi - c$, откуда получаем:

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi - c)^2 \, dx = 0.$$

Поэтому $\varphi = c$, что и требовалось доказать. Таким же путем получается следующая более общая теорема:

Если кусочно-непрерывная функция¹⁾ $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi \eta \, dx = 0$$

для всех кусочно-непрерывных функций η , удовлетворяющих условиям

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \, dx = 0, \quad \int_{x_0}^{x_1} x \eta \, dx = 0, \dots, \quad \int_{x_0}^{x_1} x^n \eta \, dx = 0,$$

то φ есть полином n -й степени:

$$\varphi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы Дюбуа-Реймона. Обращение в нуль первой вариации означает, как и раньше, что для всякой непрерывной функции $\zeta(x)$, имеющей кусочно-непрерывную производную и обращающейся в нуль на концах интервала, имеет место равенство:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \zeta + F_{y'} \zeta') \, dx = 0, \quad \text{где } \zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0.$$

Положим для краткости $F_y = A'$, $F_{y'} = B$, $\int_{x_0}^x F_y \, dx = A$. Мы получаем

тогда, интегрируя по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1} (A' \zeta + B \zeta') \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \zeta' (B - A) \, dx = 0.$$

¹⁾ См. глава II, стр. 41.

В качестве функции $\zeta' = \eta$ мы можем здесь выбрать произвольную кусочно-непрерывную функцию, удовлетворяющую только условию:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta dx = \zeta(x_1) - \zeta(x_0) = 0.$$

Применяя доказанную выше лемму, мы получаем отсюда, что

$$B - A = F_{y'} - \int_{x_0}^x F_y dx = c, \quad (34)$$

где c не зависит от x . Это уравнение заменяет дифференциальное уравнение Эйлера. Так как функция $\int_{x_0}^x F_y dx$ дифференцируема, то и $F_{y'}$ дифференцируема. Поэтому, дифференцируя почленно уравнение (34), мы получаем уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0. \quad (34')$$

Если F дважды дифференцируема по своим аргументам и если, далее, выполнено условие Лежандра $F_{y'y'} \neq 0$, то отсюда следует, что функция y' , которая по условию только кусочно-непрерывна, обязательно непрерывна и имеет непрерывную производную. В самом деле, так как $F_{y'y'} \neq 0$, то мы можем из уравнения $F_{y'}(x, y, y') = F_{y'}$ выразить y' через $x, y, F_{y'}$, так что $y' = \varphi(x, y, F_{y'})$, где φ — непрерывно дифференцируемая функция. Но на основании (34) $F_{y'}$ является непрерывной функцией от x , поэтому y' также непрерывна. Далее, так как аргументы y и $F_{y'}$ функции φ непрерывно дифференцируемы, то отсюда следует, что функция y' также непрерывно дифференцируема.

Применяя приведенную выше обобщенную лемму, мы можем непосредственно распространить результат Дюбуа-Реймона на подинтегральные выражения вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$. Подробное проведение этого доказательства предоставляем читателю.

Для вариационных проблем со многими независимыми переменными дело обстоит несколько сложнее. Здесь уже не имеет места теорема, что если для проблемы с подинтегральным выражением $F(x, y, u, u_x, u_y)$ расширить класс функций сравнения, включив в него все непрерывные функции с кусочно-непрерывными производными, то из обращения в нуль первой вариации само собой вытекает дифференциальное уравнение Эйлера и существование и непрерывность вторых производных. Однако и в этом случае справедлива следующая теорема Гаара, аналогичная теореме Дюбуа-Реймона.

Обращение в нуль первой вариации интеграла от $F(x, y, u, u_x, u_y)$ для непрерывной функции u , имеющей кусочно-непрерывные

производные u_x и u_y , равносильно уравнению

$$\iint_B F_u dx dy = \int_R F_{u_x} dy - F_{u_y} dx, \quad (35)$$

где стоящий слева интеграл распространяется по произвольной односвязной части B области G , ограниченной кусочно гладкими кривыми, а стоящий справа криволинейный интеграл взят в положительном направлении вдоль границы R области B . В частном случае, когда u не содержится явно в F , из теоремы Гаара следует таким образом обращение в нуль стоящего справа интеграла для всякой замкнутой кривой R , что эквивалентно существованию во всякой односвязной части области G функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений

$$F_{u_x} = \Phi_y; \quad F_{u_y} = -\Phi_x.$$

Приведенное выше интегральное соотношение или соответственно эта последняя система дифференциальных уравнений первого порядка заменяет в этом случае дифференциальное уравнение Эйлера.

Для доказательства теоремы Гаара достаточно убедиться в справедливости нашего интегрального соотношения для специального случая, когда область B представляет собой квадрат. Тогда теорема непосредственно распространяется и на область, состоящую из конечного числа квадратов, а отсюда, применяя обычный прием аппроксимирования и перехода к пределу, можно перейти к произвольной области, удовлетворяющей перечисленным выше требованиям.

Итак рассмотрим квадрат: $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$.

Обращение в нуль первой вариации для этого квадрата B выражается равенством:

$$\iint_B (F_u \zeta + F_{u_x} \zeta_x + F_{u_y} \zeta_y) dx dy = 0$$

для всякой функции ζ , обращающейся в нуль на границе квадрата. Выберем специально вариацию $\zeta(x, y)$ так, чтобы $\zeta(x, y) = v(x)w(y)$, где $v(x)$ обращается в нуль при $x = x_0, x_1$, а $w(y)$ обращается в нуль при $y = y_0, y_1$. Мы получаем тогда равенство:

$$\iint_{y_0 y_1}^{x_1 x_0} (F_u v w + F_{u_x} v' w + F_{u_y} v w') dx dy = 0,$$

откуда мы и получим наше интегральное соотношение путем двукратного применения теоремы Дюбуа-Реймона.

Положим

$$F_{u_x} = A_y(x, y); \quad F_{u_y} = B_x(x, y); \quad F_u = C_{xy}(x, y);$$

$$\int_{y_0}^y F_{u_x} dy = A(x, y); \quad \int_{x_0}^x F_{u_y} dx = B(x, y); \quad \int_{x_0}^x F_u dx = C_y(x, y);$$

$$\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x F_u dx dy = C(x, y).$$

Интегрируя по частям, мы получаем:

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \cdot \left\{ \int_{x_0}^{x_1} (-C_y v' w + A_y v' w - B v' w') dx \right\} = 0$$

или

$$\int_{x_0}^{x_1} dx v' \left\{ \int_{y_0}^{y_1} (-C_y w + A_y w - B w') dy \right\} = 0.$$

Так как v' есть производная от совершенно произвольной функции v , обращающейся в нуль при $x = x_0$ и $x = x_1$, то согласно приведенной выше лемме

$$\int_{y_0}^{y_1} (-C_y w + A_y w - B w') dy = c,$$

где c не зависит от x . Вторично интегрируя по частям, мы получаем:

$$\int_{y_0}^{y_1} (C - A - B) w' dy = c.$$

Полагая в этом равенстве сначала $x = x_1$, а затем $x = x_0$ и вычитая полученные два равенства одно из другого, мы получим, полагая $C - A - B = D$:

$$\int_{y_0}^{y_1} [D(x_1, y) - D(x_0, y)] w' dy = 0.$$

Вторичное применение теоремы Дюбуа-Реймона дает:

$$D(x_1, y_1) - D(x_0, y_1) = D(x_1, y_0) - D(x_0, y_0),$$

т. е.

$$\int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} F_u dx dy = \int (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx),$$

где стоящий справа интеграл должен быть взят вдоль границы квадрата, что и требовалось доказать.

8. Другие вариационные задачи и их функциональные уравнения. Рассмотренные до сих пор вариационные задачи относились к функционалам, получающимся путем интегрирования данного дифференциального выражения, составленного из функционального аргумента и его производных. Однако часто встречаются вариационные задачи с функционалами более общего характера. Покажем на нескольких примерах, как, поступая таким же образом, как и раньше, мы получим совершенно другие функциональные уравнения, играющие здесь роль дифференциальных уравнений Эйлера.

а) Требуется найти стационарное значение выражения:

$$J[\varphi] = \iint K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt + \int \varphi(s)^2 ds - 2 \int \varphi(s) f(s) ds,$$

где $K(s, t)$ — заданная непрерывная симметрическая функция от s и t , $f(s)$ — заданная непрерывная функция, а $\varphi(s)$ — искомый непрерывный функциональный аргумент. Все интегрирования производятся в пределах $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$.

Заменяя φ через $\varphi + \varepsilon \zeta$ и рассматривая функционал $J[\varphi + \varepsilon \zeta] = \Phi(\varepsilon)$ как функцию от ε , мы получим после простого преобразования:

$$\delta J = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 2\varepsilon \int_a^b \zeta(t) \left[\int_a^b K(s, t) \varphi(s) ds + \varphi(t) - f(t) \right] dt.$$

Требование $\delta J = 0$ приводит таким образом к интегральному уравнению:

$$\int_a^b K(s, t) \varphi(s) ds + \varphi(t) - f(t) = 0,$$

играющему здесь роль уравнения Эйлера. Нетрудно привести в связь с этой задачей все те вариационные задачи, с помощью которых мы исследовали в гл. III интегральные уравнения с симметрическим ядром $K(s, t)$.

б) Требуется найти стационарное значение выражения:

$$J[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} [p(x) \varphi'(x)^2 + 2\varphi(x+1) \varphi(x-1) - \varphi^2(x) - 2\varphi(x) f(x)] dx,$$

причем предполагается, что функциональный аргумент $\varphi(x)$ непрерывен и имеет кусочно-непрерывные производные во всем интервале $-\infty < x < +\infty$.

Общий способ образования первой вариации дает после простого преобразования:

$$\begin{aligned} \delta J &= \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} J[\varphi + \varepsilon \zeta] \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= 2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x) [-(p\varphi')' + \varphi(x+2) + \varphi(x-2) - \varphi(x) - f(x)] dx, \end{aligned}$$

и функциональное уравнение Эйлера, выражающее обращение в нуль первой вариации для любого $\xi(x)$, имеет здесь следующий вид:

$$(p\varphi)' - \varphi(x+2) - \varphi(x-2) + \varphi(x) + f(x) = 0.$$

Это функциональное уравнение представляет собой уже не дифференциальное уравнение, а смешанное дифференциально-разностное уравнение.

§ 4. ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. ПРИМЕРЫ.

Систематическое изложение методов интегрирования уравнений Эйлера будет нами дано во втором томе на основе теории Гамильтона-Якоби. Здесь мы ограничимся только некоторыми замечаниями, которые дадут нам возможность выполнить интегрирование в приведенных выше простейших примерах. Мы ограничимся при этом задачей

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \min.$$

Если функция F вовсе не содержит производной y' , то уравнение Эйлера сводится к уравнению $F_y = 0$, которое в неявной форме определяет функцию $y(x)$. Заметим, что в этом случае невозможно задать совершенно произвольно граничные значения функции $y(x)$. Если граничные значения не удовлетворяют условию $F_y = 0$, то задача не имеет решения.

Если функция F не содержит зависимой переменной y , то отсюда следует, что $\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$, так что $F_{y'} = \text{const} = c$, откуда $y' = \varphi(x, c)$, так что $y = \int \varphi(x, c) dx$; уравнение Эйлера интегрируется в этом случае с помощью одной квадратуры.

Если функция F не содержит независимой переменной x , то и в этом случае уравнение Эйлера интегрируется с помощью одной квадратуры.

В этом случае имеем:

$$(y' F_{y'} - F)' = y'' F_{y'} + y' F'_{y'} - \dot{F}_{y'} y'' - F_y y' = y' (F'_{y'} - F_y) = 0,$$

так что из уравнения Эйлера тотчас же следует, что

$$F(y, y') - y' F_{y'}(y, y') = c,$$

откуда мы получаем, что $y' = \varphi(y, c)$, так что

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, c)}.$$

Формально тот же самый результат получается, если привести этот случай к предыдущему, замечая, что первая вариация интеграла вдоль экстремали обращается в нуль и в том случае, если мы будем рассматривать y как независимую, а x как зависимую переменную.

Обозначая дифференцирование по y поставленной сверху точкой, мы придем тогда к вариационной задаче:

$$\int F\left(y, \frac{1}{x}\right) \dot{x} dy = \min,$$

где подинтегральное выражение не содержит зависимой переменной.

Из приведенных на стр. 176 и 177 примеров мы можем теперь проинтегрировать на основании предыдущего следующие:

Пример б) при $\phi = \frac{1}{\sqrt{y}}$, в этом случае:

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}, \quad y'F_{y'} - F = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{const} = \frac{1}{c}.$$

Полагая $y = \frac{c^2}{2}(1 - \cos t)$, получим:

$$y' = \sqrt{\frac{c^2 - y}{y}} = \text{ctg} \frac{t}{2},$$

и

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int \text{tg} \frac{t}{2} \frac{dy}{dt} dt = c^2 \int \sin^2 \frac{t}{2} dt = c_1 + \frac{c^2}{2}(t - \sin t).$$

Таким образом брахистохроны представляют собой циклоиды, описываемые точкой, лежащей на окружности радиуса $\frac{c^2}{2}$, когда эта окружность катится по оси x .

Пример в) $F = y\sqrt{1+y'^2}$, $y'F_{y'} - F = \frac{-y}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{1}{c}$,

откуда

$$y = \frac{1}{c} \text{ch}(cx + c_1).$$

Для того чтобы поверхность вращения, соединяющая два заданных круга, имела наименьшую боковую поверхность, необходимо, чтобы эта поверхность получалась вращением цепной линии вокруг своей оси.

Пример г) $F = y\sqrt{1-y'^2}$, $y'F_{y'} - F = \frac{-y}{\sqrt{1-y'^2}} = -\frac{1}{c}$,

$$y = \frac{1}{c} \sin(cs + c_1),$$

откуда для другой координаты x получаем:

$$x = \int \sqrt{1-y'^2} ds = \int \sin(cs + c_1) ds = -\frac{1}{c} \cos(cs + c_1) + c_2.$$

Таким образом решением изопериметрической задачи может быть только окружность.

§ 5. Граничные условия.

Во всех наших предыдущих рассуждениях мы всегда предполагали, что искомые функции должны принимать на границе области интегрирования заданные значения. Однако в многочисленных вопросах граничные значения функции либо вовсе не подчинены никаким условиям, либо подчинены условиям другого рода. *Если при определении функций внутри заданной постоянной области граничные значения не подчинены никаким условиям, то мы называем вариационную задачу задачей со свободной вариацией на границе.*

Наряду с задачами со свободной вариацией на границе, во многих геометрических вопросах, в которых речь идет о нахождении кривых или поверхностей, встречаются такие задачи, в которых начальная или конечная точка искомой кривой должна лежать на некоторой заданной кривой или в которых требуется определить искомую поверхность так, чтобы ее граница лежала на некоторой заданной поверхности. Таким образом в задачах этого типа область интегрирования не задается заранее и сама может варьировать. Из условия экстремума мы должны определить не только функциональный аргумент, но и область интегрирования. Чтобы исследовать вопросы этого рода, достаточно несколько обобщить наши прежние результаты и видоизменить в соответствии с расширенными граничными условиями выражение для первой вариации δJ интеграла J , так как теперь мы уже не имеем права приравнять нулю вариацию функции на границе.

1. Естественные граничные условия в задачах со свободной вариацией на границе.

Для простейшей вариационной задачи

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \min,$$

в которой на граничные значения функционального аргумента $y(x)$ на границе $x = x_0$ и $x = x_1$ не накладываются никакие ограничения, мы получаем в качестве условия стационарности обращение в нуль первой вариации, которая в этом случае выражается следующим образом:

$$\delta J = F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta y dx.$$

Для того чтобы вариация δJ равнялась нулю, прежде всего, очевидно, необходимо, чтобы функция y удовлетворяла уравнению Эйлера $[F]_y = 0$.

В самом деле, интеграл J сохраняет свой стационарный характер и относительно того более узкого класса функций, которые на концах интервала имеют те же значения, что и экстремальная функция. Ограничиваясь сначала только такими функциями сравнения, т. е. рассматривая только такие вариации δy , которые обращаются в нуль при $x = x_0$ и

$x = x_1$, мы получим в качестве первого необходимого условия экстремума уравнение Эйлера:

$$[F]_y = 0.$$

При выполнении условия $[F]_y = 0$ уравнение $\delta J = 0$ принимает вид:

$$F_{, \delta y} \Big|_{x_0}^{x_1} = 0.$$

и содержит теперь только граничные значения вариации δy при $x = x_0$ и $x = x_1$. Так как вариация δy может в рассматриваемой задаче принимать на границе какие угодно значения, то мы получаем в качестве второго необходимого условия экстремума естественное граничное условие:

$$F_{, y} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad \text{и} \quad x = x_1.$$

Точно так же мы получаем из остальных выведенных нами раньше выражений для первой вариации интегралов (см. стр. 177, 180, 181):

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \dots, y', z', \dots) dx, \quad (36)$$

$$\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \quad (37)$$

$$\iint_G F(v, y, u, u_x, u_y, v, v_x, v_y, \dots) dx dy, \quad (38)$$

кроме дифференциальных уравнений Эйлера, следующие естественные граничные условия:

для интеграла (36):

$$F_{, y} = 0 \quad \text{и} \quad F_{, z} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad \text{и} \quad x = x_1;$$

для интеграла (37):

$$F_{, u_x} \frac{dy}{ds} - F_{, u_y} \frac{dx}{ds} = 0$$

вдоль границы Γ , где s означает длину дуги, и, наконец,

для интеграла (38) должны удовлетворяться вдоль границы Γ условия:

$$F_{, u_x} \frac{dy}{ds} - F_{, u_y} \frac{dv}{ds} = 0,$$

$$F_{, v_x} \frac{dv}{ds} - F_{, v_y} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Понятие естественных граничных условий особенно важно благодаря тому, что оно может быть непосредственно применено к вариационным задачам более общего характера и в частности к таким, которые в явном виде содержат граничные значения искомыми функций.

В качестве примера приведем следующие выражения:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx - \varphi(y_0) + \phi(y_1), \quad (39)$$

где

$$y_0 = y(0), \quad y_1 = y(1)$$

или

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y) + \int_{\Gamma} \Phi(s, u, u_s) ds, \quad (40)$$

где

$$u_s = \frac{du}{ds}.$$

мы получаем следующие выражения для вариации:

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta y dx + \{\phi'(y_1) + F_{y'}[x_1, y(x_1), y'(x_1)]\} \delta y_1 - \\ & - \{\varphi'(y_0) + F_{y'}[x_0, y(x_0), y'(x_0)]\} \delta y_0 \end{aligned} \quad (41)$$

и соответственно

$$\delta J = \iint_G [F]_u \delta u dx dy + \int_{\Gamma} (F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} + [\Phi]_u) \delta u ds, \quad (42)$$

где

$$[\Phi]_u = \Phi_u - \frac{d}{ds} \Phi_{u_s}. \quad (43)$$

Соответствующие естественные граничные условия гласят так:

$$F_{y'} + \varphi'(y) \Big|_{x_0} = 0; \quad F_{y'} + \phi'(y) \Big|_{x_1} = 0^1),$$

$$F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} + \Phi_u - \frac{d}{ds} \Phi_{u_s} = 0.$$

В частном случае

$$J = \iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \int_{\Gamma} \sigma u^2 ds \quad (44)$$

с непрерывной граничной функцией $\sigma(s)$ вариация δJ выражается так:

$$\delta J = -2 \iint_G (u_{xx} + u_{yy}) \delta u dx dy + 2 \int_{\Gamma} \left(\frac{du}{dn} + \sigma u \right) \delta u ds, \quad (45)$$

где $\frac{d}{dn}$ означает дифференцирование по внешней нормали к Γ .

1) Черта $\Big|_{x_0}$ означает, что в стоящем слева выражении нужно положить $x = x_0$.

Для интеграла несколько более общего вида:

$$J = \iint_G \left\{ p(u_x^2 + u_y^2) - qu^2 \right\} dx dy + \int_{\Gamma} p \sigma u^2 ds, \quad (4'4)$$

где $p(x, y)$ означает функцию, которая в области G непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка; $q(x, y)$ — функцию, непрерывную в области G , а $\sigma(s)$ — функцию, непрерывную на границе Γ , вариация выражается следующим образом:

$$\delta J = -2 \iint_G \left[(pu_x)_x + (pu_y)_y + qu \right] \delta u dx dy + 2 \int_{\Gamma} p \left(\frac{du}{dn} + \sigma u \right) \delta u ds, \quad (45')$$

Полагая, в частности, в (39) и (41)

$$\varphi(y) = l(y-a)^2, \quad \psi(y) = l(y-b)^2,$$

мы получим в качестве естественных граничных условий уравнения:

$$\frac{1}{2l} F_y|_{x_0} + y_0 - a = 0; \quad \frac{1}{2l} F_y|_{x_1} + y_1 - b = 0.$$

Предельный переход $l \rightarrow \infty$ приводит к случаю неподвижных граничных значений:

$$y_0 = a, \quad y_1 = b,$$

так что простейшая вариационная задача с неподвижными концами экстремалей оказывается предельным случаем задачи со свободно варьирующими концами.

Вообще, присоединяя к заданному интегралу соответствующие граничные члены или граничные интегралы ¹⁾, мы получаем возможность, существенным образом изменять естественные граничные условия задачи, не меняя при этом дифференциального уравнения Эйлера.

2. Геометрические задачи. Трансверсальность. При рассмотрении геометрических задач, в которых концы искомых кривых могут перемещаться по данным кривым или поверхностям, и вообще во всех тех задачах, где граница области интегрирования не задана неподвижно ²⁾, удобнее всего задать кривые или поверхности в параметрическом виде. Мы остановимся здесь на том случае, когда начальная

¹⁾ Вместо присоединения таких граничных интегралов, мы можем также прибавить к подинтегральному выражению любое выражение типа дивергенции (см. стр. 184 и 242, примечание 1).

²⁾ Только что рассмотренные нами задачи со свободной вариацией на границе представляют собой, понятно, частный случай задач более общего характера, в которых вариация на границе подчиняется тем или иным условиям. Так, например, задачу: $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \min$, в которой на значения $y(x_0)$ и $y(x_1)$ не наложены никакие ограничительные условия, можно формулировать так: найти кривую, оба конца которой должны лежать на вертикальных прямых $x = x_0$ и $x = x_1$ и для которой данный интеграл имеет наименьшее значение.

точка искомой кривой $y(x)$ может перемещаться по кривой $T(x, y) = 0$, тогда как конец этой кривой остается неподвижным. Выведем необходимые граничные условия экстремума. Представим заданный интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

в котором нижний предел x_0 может варьировать, в параметрическом виде, положив $x = x(t)$, $y = y(t)$, где параметр t изменяется в постоянных пределах $t_0 \geq t \geq t_1$, и устраним таким путем неудобство, причиняемое изменчивостью области интегрирования. Мы получаем тогда:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt,$$

где

$$\mathfrak{F} = \dot{x} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

при начальном условии $T[x(t_0), y(t_0)] = 0$ и при заданных значениях $x(t_1)$ и $y(t_1)$.

Введем две обращающиеся при $t = t_1$ в нуль и в остальном совершенно произвольные функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ и два параметра ϵ_1 и ϵ_2 , удовлетворяющие условию.

$$\Psi(\epsilon_1, \epsilon_2) = T[x(t_0) + \epsilon_1 \xi(t_0), y(t_0) + \epsilon_2 \eta(t_0)] = 0.$$

Мы можем тогда выразить экстремальное свойство нашей кривой с помощью условия, чтобы функция

$$\Phi(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x + \epsilon_1 \xi, y + \epsilon_2 \eta, \dot{x} + \epsilon_1 \dot{\xi}, \dot{y} + \epsilon_2 \dot{\eta}) dt$$

имела стационарное значение при $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$, где переменные ϵ_1 и ϵ_2 подчинены добавочному условию $\Psi(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0$. Но из теории обыкновенных экстремумов мы знаем, что в этом случае существуют два постоянных и не обращающихся одновременно в нуль множителя λ_0 и λ , для которых имеют место равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_1} (\lambda \Psi + \lambda_0 \Phi) \Big|_{\epsilon_1=0} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \epsilon_2} (\lambda \Psi + \lambda_0 \Phi) \Big|_{\epsilon_2=0} = 0.$$

Предполагая, что частные производные $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial T}{\partial y}$ не обращаются одновременно в нуль вдоль кривой $T(x, y) = 0$, мы можем допустить, что $\lambda_0 = 1$, ибо, если бы λ_0 равнялась нулю, то мы получили бы, что $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ при $t = t_0$, вопреки допущению.

Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ должны удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера, то мы получаем на основании наших выражений для первой вариации следующие уравнения:

$$\xi(\lambda T_x - \mathcal{F}_x) = 0, \quad \eta(\lambda T_y - \mathcal{F}_y) = 0 \quad \text{при } t = t_0;$$

исключая λ , мы получаем отсюда так называемое *условие трансверсальности*

$$\mathcal{F}_x T_y - \mathcal{F}_y T_x = 0. \quad (46)$$

Если конец экстремали также может перемещаться по некоторой заданной кривой, то и для этой точки мы получим, разумеется, также соответствующее условие.

Условие трансверсальности выражает взаимную зависимость между направлением искомой экстремали и заданным направлением возможного перемещения начальной точки экстремали. Это соотношение линейно относительно T_x и T_y ; поэтому, если задано направление экстремали, то условие трансверсальности однозначно определяет направление возможного перемещения начальной точки экстремали, соответствующее данному начальному направлению экстремали (обратное может, однако, и не иметь места).

Если задана кривая $T(x, y) = 0$, вдоль которой может перемещаться начальная точка экстремали, то можно построить семейство трансверсальных к этой кривой экстремалей, зависящих от одного параметра, проводя через каждую точку кривой $T(x, y) = 0$ в трансверсальном к ней направлении интегральную кривую дифференциального уравнения Эйлера.

Возвращаясь к неоднородной форме уравнения экстремали вида: $y = f(x)$, мы получаем:

$$\mathcal{F}_x = F - \frac{\dot{y}}{x} F_y = F - y' F_y'; \quad \mathcal{F}_y = F_y. \quad (47)$$

Следовательно, условие трансверсальности принимает вид:

$$(F - y' F_y') T_y - F_y T_x = 0. \quad (48)$$

Если же кривая, по которой может перемещаться начальная точка экстремали, задана уравнением вида $y = g(x)$, то условие трансверсальности выражается уравнением:

$$F + (g' - y') F_y = 0.$$

Подчеркнем при этом, что этот последний вид условия трансверсальности теряет смысл, если кривая $T(x, y) = 0$ имеет в рассматриваемой точке касательную, параллельную оси y ; в этом случае условие трансверсальности сводится, как это следует из уравнения (48), к естественному граничному условию $F_y = 0$.

Совершенно аналогично обстоит дело и в случае, когда требуется найти пространственную кривую $y = y(x)$, $z = z(x)$, начальная точка которой должна лежать на заданной поверхности $T(x, y, z) = 0$ и конец

которой x_1, y_1, z_1 задан неподвижно и для которой интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

должен иметь стационарное значение.

Введя параметрическое изображение кривой и полагая

$$F(x, y, z, \frac{\dot{y}}{x}, \frac{\dot{z}}{x}) \dot{x} = \mathfrak{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

мы получим совершенно таким же образом, как и раньше, в качестве условий трансверсальности два уравнения:

$$T_x : T_y : T_z = \mathfrak{F}_x : \mathfrak{F}_y : \mathfrak{F}_z \quad (49)$$

или в неоднородной форме:

$$T_x : T_y : T_z = (F - y'F_{y'} - z'F_{z'}) : F_{y'} : F_{z'}. \quad (50)$$

Эти условия также приводят в соответствие каждой точке заданной поверхности $T=0$ одно или несколько трансверсальных направлений, так что всей поверхности соответствует семейство экстремалей, зависящее от двух параметров.

Обратно, если задано направление экстремали, то ему *однозначно* соответствует единственное трансверсальное направление касательной плоскости к поверхности $T=0$ (трансверсальное направление поверхности).

Само собой разумеется, что и для другого конца кривой, если он также может перемещаться по некоторой поверхности, имеют место такие же условия трансверсальности.

Для случая геодезических линий на поверхности или кратчайших линий в пространстве понятие трансверсальности совпадает с понятием ортогональности. Например, при $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ условие трансверсальности гласит:

$$T_x : T_y : T_z = 1 : y' : z'.$$

при

$$F = \sqrt{e + 2fy' + gy'^2}$$

мы получаем

$$T_x : T_y = (e + fy') : (f + gy'),$$

т. е. условие перпендикулярности линии $T=0$ к геодезической линии.

Если мы, таким образом, из какой-нибудь точки P поверхности проведем пучок геодезических линий, то ортогональные траектории этого пучка пересекают геодезические линии пучка трансверсально. Длина геодезической линии от точки P до точки пересечения Q геодезической линии с какой-нибудь ортогональной траекторией пучка остается при перемещении точки Q по рассматриваемой ортогональной траектории все время стационарной. Отсюда следует, что эта длина постоянна и что ортогональные траектории — так называемые геодезические круги — являются замкнутыми линиями.

Во втором томе мы остановимся подробнее на связи, существующей между экстремалами и трансверсальными траекториями. Здесь мы доба-

вим только еще следующее замечание: в случае распространения света *трансверсальные кривые или поверхности* представляют собой не что иное, как *волновые поверхности световой волны, распространяющейся в направлении лучей, являющихся экстремалими*. При этом мы понимаем под трансверсальной кривой или поверхностью такую кривую или поверхность, которая в каждой своей точке пересекает заданное семейство экстремалей в трансверсальном направлении. *Если трансверсальность не совпадает с ортогональностью, то это значит, что направление светового луча не совпадает с направлением нормали к поверхности световой волны.*

§ 6. ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ И УСЛОВИЕ ЛЕЖАНДРА.

Дифференциальное уравнение Эйлера представляет собой только необходимое условие экстремума. Для того чтобы заданный интеграл принимал экстремальное значение вдоль данной экстремали, удовлетворяющей соответствующим граничным условиям, необходимо, чтобы эта экстремаль удовлетворяла еще другим необходимым условиям, выражающимися в форме неравенств; вывод этих неравенств и усиление их с целью получения достаточных условий экстремума составляют важный отдел классического вариационного исчисления. Подробно мы остановимся на этих вопросах только во втором томе, здесь же мы сделаем только первый шаг в этом направлении, а именно выведем для простейшей задачи вариационного исчисления следующий критерий Лежандра: если экстремаль $\varphi = u(x)$ обращает в минимум интеграл

$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi') dx$ относительно всякой непрерывной и имеющей кусочно-непрерывную производную функции сравнения $\varphi(x)$, то вдоль всей экстремали необходимо должно иметь место неравенство:

$$F_{\varphi\varphi}(x, u, u') \geq 0.$$

Для доказательства разложим выражение

$$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi') dx$$

согласно формуле Тейлора:

$$J[\varphi + \varepsilon\eta] = J[\varphi] + \varepsilon J_1[\varphi, \eta] + \frac{\varepsilon^2}{2} J_2[\bar{\varphi}, \eta],$$

где

$$J_1[\varphi, \eta] = \int_{x_0}^{x_1} (F_{\varphi}\eta + F_{\varphi'}\eta') dx,$$

$$J_2[\bar{\varphi}, \eta] = \int_{x_0}^{x_1} (\bar{F}_{\varphi\varphi}\eta^2 + 2\bar{F}_{\varphi\varphi'}\eta\eta' + \bar{F}_{\varphi'\varphi'}\eta'^2) dx,$$

причем горизонтальная черта над выражениями $F_{\varphi\varphi}$, $F_{\varphi\varphi'}$, $F_{\varphi'\varphi'}$ означает, что мы должны в этих выражениях заменить аргументы φ и φ' выражениями: $\bar{\varphi} = \varphi + \rho\eta$, $\bar{\varphi}' = \varphi' + \rho\eta'$, где ρ есть некоторое число, содержащееся между нулем и ϵ . Так как интеграл J стационарен при $\varphi = u$, то $J_1[u, \eta] = 0$, и мы получаем в качестве необходимого условия минимума неравенство:

$$J_2[\bar{\varphi}, \eta] \geq 0$$

при любом выборе функции η .

Если в выражении $J_2[\bar{\varphi}, \eta]$ мы будем неограниченно приближать к нулю параметр ϵ , то это выражение будет иметь своим пределом интеграл

$$J_2[\varphi, \eta] = \int_{x_0}^{x_1} (F_{\varphi\varphi}\eta^2 + 2F_{\varphi\varphi'}\eta\eta' + F_{\varphi'\varphi'}\eta'^2) dx,$$

и мы получаем в пределе необходимое условие минимума в форме:

$$J_2[u, \eta] \geq 0,$$

или, вводя выражение:

$$\delta^2 J = \frac{\epsilon^2}{2} J_2[u, \eta],$$

которое называется „второй вариацией“ интеграла J , мы можем записать это условие в виде:

$$\delta^2 J \geq 0.$$

Из этого интегрального условия мы выведем теперь, пользуясь произвольностью функции η , сформулированное выше в качестве необходимого условия минимума дифференциальное условие Лежандра, которое должно выполняться в каждой точке x промежутка интегрирования. Для этой цели выберем в качестве функции η специальную кусочно-линейную функцию, которая только в окрестности некоторой точки $x = a$ отлична от нуля, а именно пусть:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\sigma} \left(1 + \frac{x-a}{\sigma} \right) \quad \text{при } a - \sigma \leq x \leq a, \\ \eta &= \sqrt{\sigma} \left(1 - \frac{x-a}{\sigma} \right) \quad \text{при } a \leq x \leq a + \sigma \end{aligned}$$

и

$$\eta = 0 \quad \text{для всех остальных значений } x.$$

Интеграл $J_2[u, \eta]$ сводится тогда к интегралу, взятому в пределах $a - \sigma \leq x \leq a + \sigma$, и во всем этом интервале $\eta'^2 = \frac{1}{\sigma}$. Если мы теперь станем неограниченно приближать σ к нулю, то первые два слагаемых интеграла $J_2[u, \eta]$ будут стремиться к нулю, тогда как третье слагаемое будет иметь своим пределом значение $2F_{\varphi'\varphi'}$ в точке $x = a$. Этот предельный переход приводит нас, таким образом, к сформулированному выше условию Лежандра.

В случае многих неизвестных функций $\varphi, \psi, \dots$ соответствующее условие Лежандра заключается в требовании, чтобы квадратичная форма, коэффициенты которой образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} F_{\varphi'\varphi'} & F_{\varphi'\psi'} & \dots \\ F_{\psi'\varphi'} & F_{\psi'\psi'} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

никогда не принимала отрицательных значений.

Вместо доказанного только что условия Лежандра: $F_{\varphi'\varphi'} \geq 0$, не исключающего возможности обращения в нуль функции $F_{\varphi'\varphi'}$, часто играет важную роль более сильное условие Лежандра:

$$F_{\varphi'\varphi'} > 0.$$

Если это условие выполнено не только, когда функция ω равна экстремальной функции u , но и для любых значений x и u , лежащих внутри заданной области, и при совершенно произвольных значениях u' , то мы это условие называем *усиленным условием Лежандра*.

Если кроме условия Лежандра имеет место также неравенство:

$$F_{\varphi'\varphi'} F_{\varphi\varphi} - F_{\varphi\varphi'}^2 \geq 0$$

для всех u и x , принадлежащих заданной области, и для любых значений u' , то квадратичная форма, стоящая в J_2 под знаком интеграла, является определенной положительной формой, и в этом случае всякая лежащая в рассматриваемой области экстремаль, действительно, дает минимум. Это простейшее, но очень грубое *достаточное условие* будет нами заменено во втором томе другим, более тонким условием.

§ 7. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ.

В рассмотренных до сих пор вариационных задачах функциональный аргумент не был подчинен никаким другим условиям, кроме соответствующих граничных условий, и искомое решение вариационной задачи определялось с помощью дифференциальных уравнений Эйлера и заданных или естественных граничных условий. Перейдем теперь к рассмотрению таких вариационных задач, в которых функциональный аргумент кроме граничных условий должен удовлетворять еще дополнительным условиям другого рода, которые относятся к совокупности всех значений функционального аргумента и под влиянием которых само дифференциальное уравнение Эйлера существенно изменяет свой вид.

1. Изопериметрические задачи. Простейшим типом задач такого рода служит изопериметрическая задача, которую мы формулировали в § 1, п. 3, г в общем виде следующим образом. Требуется найти

стационарное значение интеграла $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ при дополнитель-

ном условии, чтобы функция y , кроме граничных условий, удовлетворяла также требованию:

$$K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = c, \quad (51)$$

где c — заданное постоянное число.

Чтобы решить эту задачу, мы поступим следующим образом: допустим, что граничные значения $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ заданы и что $y = y(x)$ является искомой экстремалью. Рассмотрим семейство кривых:

$$y + \delta y = y(x) + \varepsilon_1 \eta(x) + \varepsilon_2 \zeta(x),$$

где ε_1 и ε_2 служат параметрами, а $\eta(x)$ и $\zeta(x)$ удовлетворяют условиям $\eta(x_0) = \eta(x_1) = \zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0$, будучи в остальном совершенно произвольными функциями. Тогда функция

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1 \eta + \varepsilon_2 \zeta, y' + \varepsilon_1 \eta' + \varepsilon_2 \zeta') dx$$

должна иметь при $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ стационарное значение по сравнению со всеми достаточно малыми по абсолютной величине значениями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, для которых

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y + \varepsilon_1 \eta + \varepsilon_2 \zeta, y' + \varepsilon_1 \eta' + \varepsilon_2 \zeta') dx = c.$$

На основании упомянутых в § 1 теорем относительно обыкновенных *stationary* и *extremal* существуют две постоянные λ_0 и λ , не обращающиеся одновременно в нуль, такие, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \left[\lambda_0 \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1 \eta + \varepsilon_2 \zeta, y' + \varepsilon_1 \eta' + \varepsilon_2 \zeta') dx + \right. \\ & \left. + \lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, y + \varepsilon_1 \eta + \varepsilon_2 \zeta, y' + \varepsilon_1 \eta' + \varepsilon_2 \zeta') dx \right] \Big|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \left[\lambda_0 \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1 \eta + \varepsilon_2 \zeta, y' + \varepsilon_1 \eta' + \varepsilon_2 \zeta') dx + \right. \\ & \left. + \lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, y + \varepsilon_1 \eta + \varepsilon_2 \zeta, y' + \varepsilon_1 \eta' + \varepsilon_2 \zeta') dx \right] \Big|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \lambda_0 [F]_y + \lambda [G]_y \right\} \eta \, dx = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \lambda_0 [F]_y + \lambda [G]_y \right\} \zeta \, dx = 0.$$

Из первого уравнения следует, что отношение постоянных λ_0 и λ не зависит от ζ ; но тогда из второго уравнения в силу произвольности функции ζ следует, что:

$$\lambda_0 [F]_y + \lambda [G]_y = 0.$$

Если λ_0 не равно нулю, т. е. если функция y не удовлетворяет уравнению:

$$(G_y)' - G_y = 0^1), \quad (52)$$

то мы можем положить $\lambda_0 = 1$, и мы получаем тогда:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial y} \right] - \frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial y} = 0. \quad (53)$$

Мы пришли, таким образом, к следующему результату: *Исключая тот особый случай, когда имеет место уравнение (52), мы получим уравнение Эйлера рассматриваемой вариационной проблемы, поступая по следующему правилу: составим с помощью соответствующего параметра λ подинтегральное выражение $F^* = F + \lambda G$ и приравняем нулю вариацию этого выражения, не обращая внимания на заданное дополнительное условие.* Общий интеграл содержит тогда, кроме двух постоянных интегрирования, еще параметр λ . Эти три параметра определяются с помощью граничных условий и уравнения $K = c$. Простейший пример дает обыкновенная изопериметрическая задача, в которой

$$F = \sqrt{1 + y'^2} \text{ и } G = y.$$

Мы получаем:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (\sqrt{1 + y'^2} + \lambda y) \right] - \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{1 + y'^2} + \lambda y) = 0$$

или

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \lambda,$$

откуда мы получаем в качестве экстремалей окружности.

В качестве второго примера приведем *определение положения равновесия тяжелой однородной нити*, подвешенной на своих концах. Здесь

¹⁾ Как легко видеть, в том частном случае, когда существует только одна единственная функция y , удовлетворяющая дополнительному условию $\int_{x_0}^{x_1} G \, dx = c$, эта единственная функция y должна удовлетворять уравнению (52).

$F = y\sqrt{1+y'^2}$ и $G = \sqrt{1+y'^2}$. Применяя изложенный выше способ интегрирования дифференциального уравнения Эйлера в случае $F_x = 0$ (см. стр. 196), мы получим:

$$F^* - y' F_{y'} = (y + \lambda) \left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \frac{y + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

$$y + \lambda = c \operatorname{ch} \left(\frac{x}{c} + c_1 \right).$$

Таким образом искомая кривая, представляет собой *цепную линию*. В качестве примера, когда имеет место отмеченный выше особый случай, рассмотрим дополнительное условие $\int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx = 1$ при граничных условиях: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Здесь, очевидно, имеется только одна единственная кривая сравнения $y = 0$, и эта кривая действительно, удовлетворяет дифференциальному уравнению (52); каково бы ни было F , решением задачи всегда будет функция $y = 0$ ¹⁾.

2. Конечные дополнительные условия. Рассмотрим теперь вариационные проблемы с дополнительными условиями, в которых требуется найти стационарное значение интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx,$$

причем искомые функции $y(x)$ и $z(x)$, кроме граничных условий

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, z(x_0) = z_0, z(x_1) = z_1,$$

должны удовлетворять еще дополнительному условию вида:

$$G(x, y, z) = 0, \quad (54)$$

или, геометрически выражаясь, требуется найти пространственную кривую $y(x)$, $z(x)$, обладающую заданным экстремальным свойством и лежащую на заданной поверхности $G(x, y, z) = 0$ ²⁾.

Чтобы получить необходимые условия экстремума для функций $y(x)$, $z(x)$, естественно поступать так: разрешим уравнение $G = 0$ относительно одной из функций, например $z(x)$ и сведем таким путем нашу проблему к нахождению *одной* функции $y(x)$. Согласно элементарным теоремам анализа уравнение $G = 0$ разрешимо относительно z , если вдоль искомой экстремали $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$. Пусть $z = g(x, y)$.

Принимая во внимание соотношение: $G_x + y' G_y + z' G_z = 0$ или $z' = -\frac{\partial G}{\partial y} y' - \frac{\partial G}{\partial x}$, мы можем z' рассматривать как функцию от x , y и y'

¹⁾ Об этом особом случае см. *Carathéodory C., Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung, Dissert. Göttingen 1904, стр. 45 и след.*

²⁾ Заметим, что в этой геометрической формулировке выделена координата x , так что не все кривые, лежащие на поверхности $G = 0$, считаются допустимыми.

и исключить из $F(x, y, z, y', z')$. Тогда

$$F(x, y, z, y', z') = F\left(x, y, g(x, y), y', \frac{\partial g}{\partial x} + y' \frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

и y должно удовлетворять уравнению Эйлера:

$$\frac{d}{dx} \left(F_{y'} + F_{z'} \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \left[F_y + F_z \frac{\partial g}{\partial y} + F_{z'} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) \right] = 0,$$

которое после простого преобразования приводится к виду:

$$(F_{y'} - F_y) + (F_{z'} - F_z) \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

С другой стороны, $G_y + G_z \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, поэтому:

$$(F_{y'} - F_y) : (F_{z'} - F_z) = G_y : G_z.$$

Таким образом либо вдоль искомой экстремали G_y и G_z тождественно обращаются в нуль, что противоречит сделанному выше допущению, либо существует фактор пропорциональности $\lambda = \lambda(x)$ такой, что

$$F_{y'} - F_y + \lambda G_y = 0; \quad F_{z'} - F_z + \lambda G_z = 0. \quad (55)$$

Полагая

$$F^* = F + \lambda G,$$

мы можем записать наш результат в форме уравнений Эйлера для подинтегрального выражения F^* :

$$-[F^*]_y = \bar{F}_{y'}^* - F_y^* = 0; \quad -[F^*]_z = F_{z'}^* - F_z^* = 0.$$

Эти уравнения являются необходимыми условиями экстремума за исключением того особого случая, когда вдоль экстремали одновременно имеют место уравнения:

$$G_y = 0 \quad \text{и} \quad G_z = 0.$$

Тогда в силу соотношения $G_x + y' G_y + z' G_z = 0$ должно иметь место и третье уравнение: $G_x = 0$.

Как и в соответствующих проблемах дифференциального исчисления, множители λ называются *множителями Эйлера* или *Лагранжа*.

Задачи обоих типов формально решаются с помощью одного и того же приема: мы составляем с помощью множителя λ выражение $F + \lambda G = F^*$ и образуем дифференциальные уравнения Эйлера для этого выражения. Разница заключается только в том, что в первом случае λ является постоянной величиной, а во втором случае $\lambda = \lambda(x)$ является функцией от x . Уравнения Эйлера вместе с дополнительным условием и граничными условиями дают ровно столько условий, сколько нужно для нахождения экстремали.

Простейшим примером вариационной задачи с дополнительными условиями этого вида служит задача нахождения геодезических линий на заданной поверхности $G(x, y, z) = 0$. Здесь $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, и мы получаем для геодезических линий, заданных в параметрической

форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} : \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} : \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = G_x : G_y : G_z$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \lambda G_x = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \lambda G_y = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \lambda G_z = 0.$$

Эти три уравнения определяют вместе с четвертым уравнением $G=0$ геодезические линии и множитель $\lambda(x)$. Это изображение геодезических линий обладает тем преимуществом по сравнению с приведенным выше видом дифференциальных уравнений геодезических линий, что в этой последней форме непосредственно выражаются главные свойства геодезических линий, например то свойство, что соприкасающаяся плоскость геодезической линии проходит через нормаль к поверхности. Доказательство этого мы можем предоставить читателю.

3. Дифференциальные уравнения в качестве дополнительных условий. Тогда как в проблемах только что рассмотренного типа введение множителя λ представляет собой только формально изящный искусственный прием, при дополнительных условиях более общего вида

$$G(x, y, z, y', z') = 0, \quad (56)$$

где выражение G не получается путем дифференцирования по x некоторой функции $H(x, y, z)$, т. е. не представляет собой *вполне интегрируемого дифференциального выражения*, введение множителя λ является неизбежным по самой сути проблемы. Такие дополнительные условия называют также *„неголономными“ условиями*. Простейшим условием такого рода служит, например, условие $y' - z = 0$. Если бы это условие было голономным, т. е. эквивалентным конечному условию $H(x, y, z) = \text{const}$, то значения x, y, z нельзя бы выбрать совершенно произвольно, тогда как данное условие $y' - z = 0$ относит только ко всякой произвольной системе значений x, y, z значение $y' = z$. Неголономные условия встречаются в механике во всех тех задачах, в которых уравнения, связывающие движение, кроме координат, содержат также и направление движения, как например при движении парохода, коньков или при качении шара.

Предыдущие типы проблем с дополнительными условиями можно считать частными случаями рассматриваемой общей проблемы. Для проблемы 2 это понятно само собой. Но и собственно изопериметрическая задача также может быть включена как частный случай в рассматриваемую проблему. Действительно, мы придем к изопериметрической

задаче, если предположим, что выражение F не содержит вовсе величин z, z' , тогда как дополнительное условие имеет вид:

$$z' - G(x, y, y') = 0,$$

а граничные условия гласят:

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, z(x_0) = 0, z(x_1) = c.$$

Точно так же и случай обыкновенной проблемы минимума с производными высших порядков под знаком интеграла можно подвести как частный случай под рассматриваемую проблему. Так, например, проблема

нахождения экстремума интеграла $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx$ эквивалентна про-

блеме нахождения экстремума интеграла $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z') dx$ с допол-

нительным условием $z - y'' = 0$. Во всех этих частных случаях мы получаем необходимые условия экстремума, поступая каждый раз по одному и тому же общему правилу: *если искомое решение не удовлетворяет уравнениям Эйлера, соответствующим выражению G , то существует множитель $\lambda(x)$ такой, что искомое решение удовлетворяет уравнениям Эйлера, составленным для выражения:*

$$F^* = F + \lambda G.$$

Способ множителей Лагранжа применим также и к сформулированной выше общей проблеме. Мы не приводим здесь доказательства и отсылаем читателя к соответствующей литературе ¹⁾. Наконец, подчеркнем, что все наши рассуждения и результаты остаются в силе и для большего числа неизвестных функций и дополнительных условий. Что касается тех случаев, когда речь идет об определении функций от многих независимых переменных, то хотя и не подлежит сомнению, что наши результаты справедливы и в этом случае, однако, пока еще не удалось получить доказательства для общего случая дополнительных условий, заданных в виде дифференциальных уравнений с частными производными.

§ 8. ИНВАРИАНТНЫЙ ХАРАКТЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА.

1. Выражение Эйлера, как градиент в функциональном пространстве. Инвариантность выражения Эйлера. Стационарность функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в определенной точке может быть выражена условием:

$$\text{grad } f = 0,$$

где $\text{grad } f$ означает градиент функции f , т. е. вектор n -мерного пространства, имеющий компоненты $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$. Этот вектор обла-

¹⁾ См. Hilbert D., Zur Variationsrechnung, Math. Ann., т. 62, стр. 351—370, 1906. В упомянутых на стр. 259 учебниках Больца и Адамара также можно найти подробное изложение этого вопроса.

дает следующим свойством: если n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются какими-нибудь дифференцируемыми функциями от параметра t , то функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ переходит в функцию $f(t)$ такую, что

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \dot{x}_i f_{x_i} = v \operatorname{grad} f, \quad (57)$$

где поставленная сверху точка означает дифференцирование по t , а v означает *вектор перемещения*, имеющий компоненты $\dot{x}_i$; скорость изменения функции равняется, таким образом, скалярному произведению вектора перемещения точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на градиент функции f . Таким же образом и дифференциальное выражение Эйлера, обращение в нуль которого характеризует стационарность рассматриваемого функционала, можно истолковать как *градиент в функциональном пространстве*.

Так, например, если функциональный аргумент φ интеграла

$$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi') dx$$

содержит, кроме независимой переменной x , еще и параметр t , то $J[\varphi]$ будет некоторой функцией $J[t]$ от параметра t , и, поступая по правилам нахождения первой вариации, мы получим, если допустить, что значения φ на концах интеграла не зависят от t :

$$\dot{J}(t) = \int_{x_0}^{x_1} \dot{\varphi}(x) [F]_{\varphi} dx,$$

где поставленная сверху точка снова означает дифференцирование по параметру t . Эта формула совершенно аналогична формуле (57) для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Мы выражаем эту аналогию тем, что называем выражение $[F]_{\varphi}$ градиентом функционала $J[\varphi]$ в функциональном пространстве.

Вообще мы называем выражение $G[\varphi]$, зависящее от функционального аргумента φ , градиентом функционала $J[\varphi]$, если при замене функции φ произвольным семейством функций, зависящим от параметра t , мы для любого φ имеем соотношение:

$$\frac{d}{dt} J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} \dot{\varphi} G[\varphi] dx.$$

Так, например, градиентом функционала

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy$$

при условии $K(x, y) = K(y, x)$ служит выражение:

$$2 \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy.$$

Известному свойству инвариантности градиента функции при преобразовании независимых переменных соответствует аналогичное свойство инвариантности или лучше ковариантности выражений Эйлера при преобразовании содержащихся в интеграле функций в функции от новых независимых переменных. Эти свойства инвариантности мы выразим с помощью соответствующих формул преобразования. Введем для этого в случае функции от одной переменной вместо x переменную ξ и положим:

$$F(x, y, y') = F\left(x(\xi), y, \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}}\right) = \Phi\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right),$$

так что

$$\int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi \frac{dx}{d\xi} d\xi;$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \eta dx &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\left(\xi, y + \varepsilon \eta, \frac{dy}{d\xi} + \varepsilon \frac{d\eta}{d\xi}\right) \frac{dx}{d\xi} d\xi \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\Phi \frac{dx}{d\xi} \right]_y \eta d\xi. \end{aligned} \quad (58)$$

Отсюда следует в силу произвольности функции η (ограниченной только условием обращения в нуль на концах интервала), что

$$[F]_y = \frac{d\xi}{dx} \left[\Phi \frac{dx}{d\xi} \right]_y. \quad (59)$$

В случае двух независимых переменных получаем точно так же:

$$\begin{aligned} F(x, y, u, u_x, u_y) &= F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u, u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y] = \\ &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_G F dx dy &= \iint_{\bar{G}} \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \\ \iint_G [F]_u \zeta dx dy &= \iint_{\bar{G}} \left[\Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right]_u \zeta d\xi d\eta, \end{aligned}$$

откуда

$$[F]_u = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \left[\Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right]_u. \quad (60)$$

Для большего числа независимых переменных выражение Эйлера преобразовывается совершенно аналогичным образом.

Выражаемое нашими формулами свойство инвариантности дает нам при преобразовании переменных в рассматриваемых дифференциальных выражениях помимо формальной наглядности формул преобразования большую экономию в вычислительной работе, так как при вычислении этих формул мы можем обойтись без преобразования производных второго порядка.

2. Преобразование выражения Δu . Полярные координаты. Рассмотрим в качестве важнейшего примера подинтегральное выражение $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Пусть при преобразовании $x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ квадрат линейного элемента $dx^2 + dy^2 + dz^2$ переходит в выражение $\sum_{i,k} g_{ik} d\xi_i d\xi_k$, где

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial x}{\partial \xi_k} + \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_k} + \frac{\partial z}{\partial \xi_i} \frac{\partial z}{\partial \xi_k}.$$

При этом определитель a , составленный из элементов g_{ik} , равен квадрату функционального определителя x, y, z по ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Рассматриваемое выражение $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ преобразовывается при этом, как легко убедиться, следующим образом:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \sum_{i,k} g^{ik} u_i u_k \quad \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right),$$

где величины g^{ik} определяются посредством формул:

$$g^{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} + \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} + \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \frac{\partial \xi_k}{\partial z}$$

и удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_i g_{ik} g^{il} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l, \\ 1 & \text{при } k = l. \end{cases}$$

Отсюда мы непосредственно получаем формулу¹⁾

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\sqrt{a} \sum_k g^{ik} u_k), \quad (61)$$

¹⁾ Применяя формулу (60) для случая трех переменных к выражению

$$F = \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2),$$

для которого

$$-[F]_u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

т. е. общую формулу преобразования выражения Δu при переходе к криволинейным координатам ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

В том частном случае, когда $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$, т. е. когда новая система координат также прямоугольна, так что координатные поверхности $\xi_1 = \text{const}$, $\xi_2 = \text{const}$, $\xi_3 = \text{const}$ пересекаются под прямыми углами, формула (61) принимает следующий более простой вид:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(u_1 \sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(u_2 \sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(u_3 \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \right) \right\}. \quad (62)$$

Так, например, в случае *полярных координат* r, φ, ϑ :

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta, \\ ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2,$$

и мы получим после небольшого вычисления:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (u_\vartheta \sin \vartheta) \right\}. \quad (63)$$

Для случая двух независимых переменных ξ, η имеют место совершенно аналогичные формулы. А именно, если $ds^2 = e d\xi^2 + 2f d\xi d\eta + g d\eta^2$, то мы получаем для дифференциального выражения Δu следующую инвариантную форму:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{gu_\xi - fu_\eta}{\sqrt{eg - f^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{eu_\eta - fu_\xi}{\sqrt{eg - f^2}} \right) \right\}. \quad (64)$$

В частности в полярных координатах мы получаем:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad \Delta u = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right\}. \quad (65)$$

3. Эллиптические координаты¹⁾. В качестве другого очень важного примера рассмотрим эллиптические координаты.

Эллиптические координаты определяются как три корня ρ, σ, τ уравнения третьей степени относительно s :

$$\frac{x^2}{s - e_1} + \frac{y^2}{s - e_2} + \frac{z^2}{s - e_3} = 1, \quad (66)$$

¹⁾ См. *Jacobi C. G. J., Vorlesungen über Dynamik* (Курс динамики, читанный в Кёнигсберге в зимнем семестре 1842-1843, изданный А. Клебшом, Берлин 1866, и вошедший в качестве дополнительного тома в полное собрание сочинений Якоби, Берлин 1886), лекция 26, где читатель может найти подробный вывод приводимых формул. Заметим также, что все следующие рассмотрения непосредственно распространяются и на случай числа измерений большего трех.

где e_1, e_2, e_3 суть некоторые заданные действительные числа. Корни ρ, σ, τ действительны для всех действительных значений x, y, z , и при $e_1 > e_2 > e_3$ имеют место неравенства:

$$\rho > e_1 > \sigma > e_2 > \tau > e_3.$$

Поверхности $\rho = \text{const}$ представляют собой эллипсоиды, поверхности $\sigma = \text{const}$ — однополостные гиперболоиды, а поверхности $\tau = \text{const}$ — двуполостные гиперболоиды. Прямоугольные координаты выражаются через эллиптические координаты так:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(\rho - e_1)(\sigma - e_1)(\tau - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, & y^2 &= \frac{(\rho - e_2)(\sigma - e_2)(\tau - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 &= \frac{(\rho - e_3)(\sigma - e_3)(\tau - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}, \end{aligned} \right\} (67)$$

а для квадрата линейного элемента мы получаем:

$$\begin{aligned} 4 ds^2 &= \frac{(\rho - \sigma)(\rho - \tau)}{(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3)} d\rho^2 + \frac{(\sigma - \tau)(\sigma - \rho)}{(\sigma - e_1)(\sigma - e_2)(\sigma - e_3)} d\sigma^2 + \\ &+ \frac{(\tau - \rho)(\tau - \sigma)}{(\tau - e_1)(\tau - e_2)(\tau - e_3)} d\tau^2. \end{aligned} \quad (68)$$

Этот вид квадрата линейного элемента упрощается, если ввести в качестве новых переменных функции

$$t_1 = \int^{\rho} \frac{d\lambda}{Vf(\lambda)}; \quad t_2 = \int^{\sigma} \frac{d\lambda}{Vf(\lambda)}; \quad t_3 = \int^{\tau} \frac{d\lambda}{Vf(\lambda)},$$

где

$$f(\lambda) = 4(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3).$$

Если

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

чего можно всегда достигнуть подстановкой

$$s = s' + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3),$$

то, взяв в качестве нижнего предела рассматриваемых интегралов $\lambda = \infty$, мы получим, что

$$\rho = p(t_1), \quad \sigma = p(t_2), \quad \tau = p(t_3),$$

где p означает эллиптическую функцию Вейерштрасса¹⁾.

Тогда квадрат линейного элемента принимает вид:

$$ds^2 = (\rho - \sigma)(\rho - \tau) dt_1^2 + (\sigma - \tau)(\sigma - \rho) dt_2^2 + (\tau - \rho)(\tau - \sigma) dt_3^2,$$

¹⁾ Ср. *Hurwitz-Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, 3-е издание, Берлин 1929, стр. 161—171.

и согласно формуле (62) мы получаем для всякой функции T от переменных t_i :

$$\Delta T = \frac{1}{(\sigma - \tau)(\tau - \rho)(\rho - \sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t_1} \left[(\tau - \sigma) \frac{\partial T}{\partial t_1} \right] + \frac{\partial}{\partial t_2} \left[(\rho - \tau) \frac{\partial T}{\partial t_2} \right] + \frac{\partial}{\partial t_3} \left[(\sigma - \rho) \frac{\partial T}{\partial t_3} \right] \right\} = \frac{1}{(\rho - \sigma)(\rho - \tau)} \frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} + \frac{1}{(\sigma - \tau)(\sigma - \rho)} \frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2} + \frac{1}{(\tau - \rho)(\tau - \sigma)} \frac{\partial^2 T}{\partial t_3^2}. \quad (69)$$

Введение интегралов t_i дает еще и то преимущество, что прямоугольные координаты выражаются однозначными функциями от t_i , ибо в выражениях

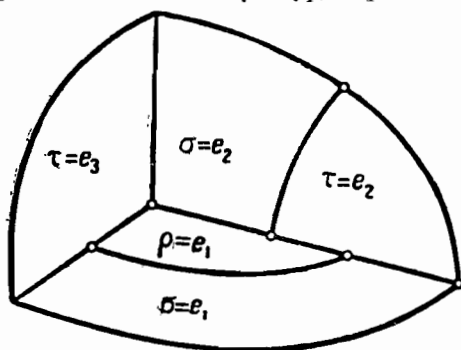
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{p(t_1) - e_1} \sqrt{p(t_2) - e_1} \sqrt{p(t_3) - e_1}}{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}, \\ y &= \frac{\sqrt{p(t_1) - e_2} \sqrt{p(t_2) - e_2} \sqrt{p(t_3) - e_2}}{\sqrt{e_2 - e_3} \sqrt{e_2 - e_1}}, \\ z &= \frac{\sqrt{p(t_1) - e_3} \sqrt{p(t_2) - e_3} \sqrt{p(t_3) - e_3}}{\sqrt{e_3 - e_1} \sqrt{e_3 - e_2}} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

стоящие в числителе корни могут быть, как известно, однозначно определены для всех значений t_i , если задать знаки корней для начальных значений этих переменных. Когда точка x, y, z перемещается внутри одного октанта, то каждая из величин ρ, σ, τ пробегает соответствующий ей интервал, и когда какая-нибудь из координат ρ, σ, τ принимает предельное значение, лежащее на одном из двух концов соответствующего ей интервала, то точка x, y, z попадает на части граничных плоскостей октанта, указанные на черт. 1. Рассматриваемая здесь часть октанта ограничена с внешней стороны эллипсоидом $\rho = \rho_1 > e_1$; плоскость yz разбивается на две части $\rho = e_1$ и $\sigma = e_1$ дугой „фокального эллипса“

$$x=0, \quad \frac{y^2}{e_1 - e_2} + \frac{z^2}{e_1 - e_3} = 1,$$

а плоскость xz разбивается на части $\sigma = e_2$ и $\tau = e_2$ „фокальной гиперболой“

$$y=0, \quad \frac{x^2}{e_2 - e_1} + \frac{z^2}{e_2 - e_3} = 1.$$



Черт 1.

Обозначая через ω действительный, а через ω' чисто мнимый период интегралов t_i , т. е. полагая

$$\omega = 2 \int_{e_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{V f(\lambda)}, \quad \omega' = 2 \int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\lambda}{V f(\lambda)},$$

мы получаем, что когда t_1 изменяется от 0 до $\frac{\omega}{2}$, t_2 — от $\frac{\omega}{2}$ до $\frac{\omega + \omega'}{2}$, а t_3 — от $\frac{\omega + \omega'}{2}$ до $\frac{\omega'}{2}$, то точка (x, y, z) пробегает весь октант.

Если удвоить интервалы изменения переменных t_i , то точки (x, y, z) заполнят все пространство. Для того, чтобы какая-нибудь однозначная функция от переменных t_i была также однозначной функцией от координат x, y, z , необходимо, чтобы эта функция оставалась инвариантной при всех тех подстановках переменных t_i , которые преобразовывают x, y, z в самих себя, например при замене t_1 и t_2 через $\omega - t_1$ и $\omega - t_2$.

Положим: $t_1 = u$, $t_2 = \frac{\omega}{2} + iv$, $t_3 = \frac{\omega'}{2} + w$, $p(t_1) = f(u)$, $p(t_2) = g(v)$, $p(t_3) = h(w)$. Тогда действительным значениям x, y, z соответствуют действительные значения u, v, w и мы получаем:

$$ds^2 = [f(u) - g(v)][f(u) - h(w)]du^2 + [f(u) - g(v)][g(v) - h(w)]dv^2 + [f(u) - h(w)][g(v) - h(w)]dw^2; \quad (71)$$

в этом выражении все коэффициенты никогда не отрицательны при любых действительных значениях u, v, w , так как $f(u) \geq e_1 \geq g(v) \geq e_2 \geq h(w) \geq e_3$, тогда как в прежнем симметричном выражении для ds^2 через t_1, t_2, t_3 дифференциал dt_2 имеет чисто мнимое значение, и квадратичная форма ds^2 остается определенной положительной квадратичной формой лишь вследствие того, что коэффициент при dt_2^2 имеет всегда отрицательное значение.

В качестве примеров *вырождающихся эллиптических координат* мы рассмотрим здесь только два случая (помимо полярных координат, которые также можно рассматривать как вырождающиеся эллиптические координаты): во-первых, случай, когда координатными поверхностями служат софокусные эллипсоиды, гиперболоиды вращения и их меридиональные плоскости, и во-вторых, координатные системы, состоящие из софокусных параболоидов вращения и их меридиональных плоскостей. Пусть две из величин e_i , например e_1 и e_2 равны между собой. Мы получаем тогда:

$$\frac{x^2 + y^2}{s - e_1} + \frac{z^2}{s - e_3} = 1. \quad (72)$$

Оба корня $s = \lambda_1$, $s = \lambda_2$ этого уравнения вместе с углом φ , определяемым уравнениями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$; образуют рассматриваемую систему координат. Здесь

$$r^2 = \frac{(\lambda_1 - e_1)(\lambda_2 - e_1)}{e_3 - e_1}; \quad z^2 = \frac{(\lambda_1 - e_3)(\lambda_2 - e_3)}{e_1 - e_3}; \quad (73)$$

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4(\lambda_1 - e_1)(\lambda_1 - e_3)} d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_2 - e_1)(\lambda_2 - e_3)} d\lambda_2^2 = \\ = r^2 d\varphi^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(dt_1^2 - dt_2^2), \quad (74)$$

где

$$t_i = \int_{\lambda_i}^{\lambda} \frac{dt}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}} \quad (75)$$

Отсюда мы получаем:

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(r \frac{\partial T}{\partial t_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t_2} \left(r \frac{\partial T}{\partial t_2} \right) \right] \quad (76)$$

Если мы станем удалять одну из вершин эллипсоидов в бесконечность, то, переходя к пределу ¹⁾, мы получим два семейства софокусных параболоидов вращения, определяемых с помощью уравнения:

$$\frac{x^2 + y^2}{s - e_1} - 2z - s + e_1 = 0. \quad (77)$$

Обозначая через λ_1, λ_2 корни этого уравнения, мы получим что r и z выражаются через λ_1, λ_2 следующим образом:

$$r^2 = -(\lambda_1 - e_1)(\lambda_2 - e_1); \quad 2z = 2e_1 - \lambda_1 - \lambda_2. \quad (78)$$

Координатами точки пространства служат здесь λ_1, λ_2 и φ . Квадрат линейного элемента принимает вид:

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4(\lambda_1 - e_1)} d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_2 - e_1)} d\lambda_2^2 = r^2 d\varphi^2 + (\lambda_1 - \lambda_2) (dt_1^2 - dt_2^2), \quad (74)$$

где

$$t_i = \int_{\lambda_i}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda_i - e_1)(\lambda - e_3)}}, \quad (75)$$

а дифференциальное выражение ΔT имеет форму:

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(r \frac{\partial T}{\partial t_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t_2} \left(r \frac{\partial T}{\partial t_2} \right) \right]. \quad (76)$$

Отбрасывая в предыдущих выражениях для квадрата линейного элемента члены, содержащие φ , мы непосредственно получим формулы, выражающие квадрат линейного элемента в эллиптических и параболических координатах на плоскости r, z . Для ΔT мы получаем в обоих случаях согласно формуле (64),

$$\Delta T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2} \right),$$

причем связь между λ_i и t_i выражается в случае эллиптических координат формулой:

$$t_i = \int_{\lambda_i}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}},$$

а в случае параболических координат формулой:

$$t_i = \sqrt{\lambda_i - e_1}.$$

¹⁾ Можно, конечно, при введении этих координат не ссылаться на предыдущее, но определить их непосредственно, исходя из семейств софокусных параболоидов вращения, заданных уравнением (77).

§ 9. ПРИВЕДЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРОБЛЕМ К КАНОНИЧЕСКОМУ И ИНВОЛЮЦИОННОМУ ВИДУ.

Метод множителей Лагранжа приводит к различным преобразованиям вариационных проблем, одинаково важным как в теоретическом, так и в практическом отношении. С помощью этих преобразований мы связываем заданную вариационную проблему с рядом других вариационных проблем, эквивалентных данной проблеме в том смысле, что функционалы, рассматриваемые во всех этих проблемах, одновременно достигают своего стационарного значения. Такого рода преобразования вариационных проблем важны, с одной стороны, в чисто формальном отношении, благодаря своему симметричному и наглядному характеру; с другой стороны, эти преобразования приводят в очень многих случаях к противопоставлению проблеме минимума с минимальным значением d рассматриваемого функционала другой эквивалентной ей проблемы максимума с тем же числом d в качестве максимального значения соответствующего функционала, и мы непосредственно получаем отсюда практически важный способ нахождения численных пределов, между которыми заключается это экстремальное значение d^1).

1. Преобразование обыкновенных проблем минимума с добавочными условиями. Для лучшего понимания дальнейшего мы предположим некоторые замечания относительно обыкновенных проблем минимума с конечным числом независимых переменных и рассмотрим ряд преобразований этих проблем, основанных на следующем непосредственно очевидном основном принципе: *Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке $x_i = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) стационарное значение при заданной системе добавочных условий, и если числа ξ_i удовлетворяют некоторому соотношению $r(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$, то функция f остается стационарной в точке $x_i = \xi_i$ также и в том случае, если мы с самого начала присоединим к данной системе добавочных условий в качестве еще одного добавочного условия соотношение $r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.* Начнем со следующей проблемы:

I. Требуется найти стационарное значение функции $f(x, y)$ при добавочном условии $g(x, y) = 0$; при этом должны выполняться обычные условия непрерывности и дифференцируемости, и, кроме того, $g_x^2 + g_y^2$ должно быть отлично от нуля в точке стационарности. Применяя правило множителей Лагранжа, мы заменяем проблему I следующей эквивалентной ей проблемой:

II. Найти стационарное значение функции $F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, рассматриваемой как функция от трех независимых переменных x, y, λ . Условие стационарности $dF = 0$ эквивалентно трем соотношениям:

$$f_x + \lambda g_x = 0, \quad f_y + \lambda g_y = 0, \quad g = 0.$$

¹⁾ Эту практическую сторону вопроса мы сможем систематически развить только во втором томе. Укажем здесь на работу Е. Грейтца „Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren“. Труды второго международного конгресса по технической механике, Цюрих 1927, стр. 131, где впервые было произведено с помощью этого способа вычисление пределов, между которыми заключается искомый экстремум.

Обратно, исходя из проблемы II, мы можем тотчас же свести ее к проблеме I, присоединяя на основании нашего общего принципа к условиям проблемы в качестве явно выраженного добавочного условия соотношение $g=0$, само собой выполняющееся при достижении функцией $F(x, y; \lambda)$ своего стационарного значения.

Из проблемы II мы можем дальше получить другую эквивалентную проблему, т. е. проблему, имеющую те же точки стационарности, присоединяя в качестве добавочных условий оба других соотношения, выполняющихся для решения проблемы II. Мы тогда получаем проблему:

III. *Найти стационарное значение функции $F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ при добавочных условиях $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$.* Предполагая, что в окрестности точки стационарности можно из последних двух уравнений выразить x и y в виде функций от λ , мы получим, подставляя эти значения x, y в функцию $F(x, y; \lambda)$, что $F(x, y; \lambda) = \phi(\lambda)$, и это приводит нас к еще одной проблеме, эквивалентной предыдущим, а именно:

IV. *Найти стационарные значения функции $\phi(\lambda)$.* Уточним теперь полученные нами результаты, требуя, чтобы в искомой точке рассматриваемые функции были не только стационарны, но и достигали максимума или минимума. Предположим, что в проблеме I, которую мы теперь обозначим через I', функция f в точке $\bar{x}, \bar{y}$ действительно имеет минимальное значение $f(\bar{x}, \bar{y}) = d$. Мы рассматриваем тогда проблему:

II'. $(F(x, y; \lambda) = f + \lambda g = \min$ при *постоянном* λ ; предположим, что для любого значения λ , содержащегося внутри некоторой окрестности значения $\lambda = \bar{\lambda}$, определенного с помощью правила множителей Лагранжа, функция $F(x, y; \lambda)$ имеет действительно минимум, который мы обозначим через $d_\lambda = \phi(\lambda)$ и который характеризуется уравнениями $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$. Тогда имеет место неравенство:

$$d_\lambda \leq d,$$

ибо проблема I' с минимумом d получается из проблемы II' с минимумом d_λ путем присоединения к этой второй проблеме добавочного условия $g=0$, ограничивающего область изменения точек сравнения. Предполагая дальше, что уравнения $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$ однозначно определяют x и y как функции от λ , мы получаем, что $d = d_{\bar{\lambda}}$, так что

$$d = \max d_\lambda,$$

т. е. d является максимумом функции $\phi(\lambda)$ или другими словами, *наибольшим из наименьших* значений функции $F = f + \lambda g$, причем минимум мы находим при постоянном λ , а затем, изменяя λ , мы находим то значение λ , при котором наименьшее значение функции F достигает максимума. Мы можем поэтому при выполнении наших предположений характеризовать d с помощью проблемы:

III'. $F(x, y; \lambda) = f + \lambda g = \max = d$ при *добавочных условиях* $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$. Чтобы пояснить геометрически эту задачу нахождения максимума наименьших значений, рассмотрим следующий пример: $f = (x+1)^2 + y^2 = \min$ при добавочном условии $g = 2x = 0$, или

в геометрической формулировке: найти низшую точку вертикальной параболы, по которой параболоид $z = (x + 1)^2 + y^2$ пространства x, y, z пересекается плоскостью $x = 0$. Этой низшей точкой будет, очевидно, вершина этой параболы. Непосредственно очевидно, что наименьшее значение функции $z = (x + 1)^2 + y^2$ при рассматриваемом добавочном условии равно $d = 1$. Если мы теперь рассмотрим параболоид $z = f + \lambda g = (x + \lambda + 1)^2 + y^2 - 2\lambda - \lambda^2$, где λ постоянно, то этот параболоид при всяком λ проходит через интересующую нас параболу, и вершина этого параболоида всегда лежит ниже вершины параболы. При изменении λ вершина параболоида перемещается, и самым высоким из всех возможных положений вершины параболоида, выше которого она не может подняться, является вершина неподвижной параболы. Вершина нашей параболы является таким образом самой высокой из низших точек рассматриваемых параболоидов.

2. Инволюционное преобразование простейшей вариационной проблемы. Аналогичные рассуждения приводят нас к преобразованию вариационных проблем. Основой этих преобразований служит следующий общий принцип, аналогичный принципу, сформулированному в п. 1: *Если функционал $J[u, v, \dots]$ при заданных условиях непрерывности и добавочных условиях достигает стационарного значения для некоторой системы функций $u, v, \dots$ и если эта система функций удовлетворяет некоторым заданным соотношениям, то функционал J остается стационарным для этой системы функций также и в том случае, если одно или несколько из этих соотношений заранее присоединить к добавочным условиям проблемы.*

Соотношения, получающиеся путем приравнивания нулю вариации функционала, т. е. уравнения Эйлера и естественные граничные условия, мы будем называть естественными условиями, а добавочные или граничные условия, входящие в состав условий задачи, назовем предварительными условиями. Тогда из нашего принципа следует, что если для какой-нибудь вариационной проблемы присоединить одно или несколько из соответствующих естественных условий к предварительным условиям задачи, то стационарный характер рассматриваемого выражения сохраняется и для новой проблемы.

Рассмотрим сначала проблему простейшего типа:

I. Найти стационарное значение интеграла $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u') dx$ при обычных условиях непрерывности и граничных условиях:

$$u(x_0) - u_0 = 0, \quad u(x_1) - u_1 = 0 \quad (80)$$

и с добавочным условием

$$\frac{du}{dx} - u' = 0. \quad (81)$$

Мы рассматриваем, таким образом, с самого начала нашу вариационную проблему как проблему с двумя неизвестными функциями u и u' , удовлетворяющими дифференциальному уравнению (81), рассматриваемому

как добавочное условие. Правило множителей Лагранжа показывает, что решения задачи I являются в то же время решениями следующей задачи:

II. *Найти стационарное значение выражения:*

$$H[u, u'; \lambda; \mu_0, \mu_1] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx - \mu_0 [u(x_0) - u_0] + \\ + \mu_1 [u(x_1) - u_1],$$

где неизвестными являются функции $u(x)$, $u'(x)$, $\lambda(x)$ и параметры μ_0 и μ_1 , причем в этой новой проблеме на искомые функции не налагаются никакие граничные и добавочные условия. Условия обращения в нуль первой вариации, т. е. дифференциальные уравнения Эйлера и естественные граничные условия имеют для нашей задачи следующий вид:

$$F_{u'} - \lambda = 0, \quad (81)$$

$$F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0, \quad (83)$$

$$\frac{du}{dx} - u' = 0 \quad (84)$$

для внутренних точек интервала и

$$\lambda(x_0) + \mu_0 = 0, \quad \lambda(x_1) + \mu_1 = 0 \quad (85)$$

$$u(x_0) - u_0 = 0, \quad u(x_1) - u_1 = 0. \quad (86)$$

для концов интервала.

Эти уравнения получаются непосредственно путем приравнивания нулю первой вариации. Если исключить из этих уравнений λ , μ_0 , μ_1 , то мы получим, разумеется, дифференциальное уравнение Эйлера для функции $u(x)$.

Присоединяя к задаче II на основании нашего общего принципа условия $\frac{du}{dx} - u' = 0$; $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$ в качестве пред-

варительных условий, мы снова вернемся к задаче I. Если же мы введем в качестве таких предварительных условий уравнения (82), (83), (85), соответствующие естественным условиям проблемы I, то мы получим преобразование, открытое только в самое последнее время Фридрихсом (Friedrichs) и имеющее большое значение для применений вариационного исчисления¹⁾. Получающаяся таким путем задача III может быть формулирована в таком же виде, как и задача I, если путем интегрирования по частям устранить из подинтегрального выражения интеграла H производную $\frac{du}{dx}$ и ввести затем новые переменные p , p' и новое подинтегральное выражение $\Psi(x, p, p')$ с помощью уравнений:

$$F_{u'} = p, \quad F_u = p', \quad pu' + p'u - F = \Psi. \quad (87)$$

¹⁾ Friedrichs K., Ein Verfahren der Variationsrechnung (Об одном приеме вариационного исчисления), Известия Научного Гёттингенского общества (Nachrichten der Ges. d. Wiss zu Göttingen), 1929, стр. 13—20.

Для того чтобы это преобразование (так называемое преобразование Лежандра) имело смысл, мы должны предположить, что из первых двух уравнений можно выразить u и u' через p , p' и x ; полученные значения u и u' мы должны подставить в левую часть последнего уравнения. Это условие будет выполнено, если

$$F_{u'u'} F_{uu} - (F_{uu'})^2 \neq 0 \quad (88)$$

для всех рассматриваемых значений x , u и u' .

Мы получаем таким образом эквивалентную задаче I задачу ¹⁾

IV. Найти стационарное значение выражения

$$-\int_{x_0}^{x_1} \Psi(x, p, p') dx + p(x_1)u_1 - p(x_0)u_0$$

при добавочном условии $\frac{dp}{dx} - p' = 0$, не ставя никаких граничных условий.

Естественные условия проблемы IV гласят:

$$\frac{d}{dx} \Psi_{p'} - \Psi_p = 0$$

для внутренних точек интервала и

$$\Psi_{p'}|_{x=x_0} = u_0 - 0, \quad \Psi_{p'}|_{x=x_1} = u_1 - 0$$

на концах интеграла. Согласно нашему общему принципу, с помощью которого мы преобразовали задачу I в задачу IV, эти естественные условия должны совпадать с предварительными условиями проблемы I. В самом деле, это непосредственно следует из того, что преобразование обратное рассматриваемому преобразованию Лежандра задается уравнениями:

$$\Psi_{p'} = u, \quad \Psi_p = u', \quad u'p' + u'p - \Psi = F.$$

Из этих же формул следует далее, что применяя преобразование Фридрихса к задаче IV, не содержащей граничных условий, мы снова вернемся к исходной проблеме I. Это преобразование обладает, таким образом, инволюционным характером и преобразовывает естественные условия одной проблемы в предварительные условия другой.

Особенный интерес представляет тот частный случай, когда подинтегральное выражение F вариационной задачи либо вовсе не содержит u , либо зависит от u линейно, т. е. когда

$$F(x, u, u') = g(x, u') + uf(x).$$

¹⁾ Эту задачу можно рассматривать как аналогичную задаче VI, п. 1.

В этом случае рассматриваемое преобразование Лежандра не является обратимым для любых заданных p и p' . Но видоизменив соответствующим образом наше общее преобразование, мы непосредственно получим, что в этом случае вариационная задача I эквивалентна следующей:
$$-\int_{x_0}^{x_1} \Phi(p) dx + p(x_1)u_1 - p(x_0)u_0 = \text{стационарному значению,}$$

при добавочном условии $\frac{dp}{dx} = f(x)$. При этом p и $\Phi(p)$ связаны с неизвестной функцией u и подинтегральным выражением первоначальной задачи с помощью преобразования:

$$p = g_{u'}; \quad -\Phi(p) = g(u') - u'p;$$

мы предполагаем при этом, что из уравнения $g_{u'} = p$ можно обратно выразить u' через p . Новая задача представляет собой существенное упрощение по сравнению с первоначальной задачей. В самом деле, добавочное условие определяет искомую функцию $p(x)$ с помощью квадратуры с точностью до аддитивного параметра.

Чтобы найти этот параметр, мы должны решить обыкновенную задачу экстремума.

Таким образом путем рассматриваемого преобразования мы сводим в этом особом случае нашу вариационную задачу к обыкновенной задаче экстремума.

Уточним теперь наши рассуждения и, поступая так же, как и в п. 1, рассмотрим наши преобразования не только как преобразования стационарных значений одного функционала в стационарные значения другого, но и спросим себя, как влияют эти преобразования на минимумы или максимумы функционалов.

Повторяя рассуждения п. 1, мы придем к следующему результату:

Если для первоначальной задачи I (которую мы теперь назовем задачей I') мы имеем минимум, равный d , то для задачи IV (которую мы теперь назовем задачей IV') это же значение d служит максимумом.

Как и в п. 1, это утверждение справедливо лишь при выполнении известных ограничительных условий; а именно, мы требуем, чтобы при любой произвольно заданной вспомогательной функции $\lambda(x)$, имеющей кусочно-непрерывную производную, выражение H , положенное нами в основу в проблеме II стр. 225, действительно достигало минимума d_λ , зависящего от λ , если только мы заранее предположим, что $\lambda(x_1) + \mu_1 = 0$, $\lambda(x_0) + \mu_0 = 0$ ¹⁾. Задача нахождения d_λ приводит нас, если мы устраним в интеграле H путем интегрирования по частям производную функции u , к задаче:

¹⁾ Если бы $\lambda(x_0)$, $\lambda(x_1)$, μ_0 , μ_1 не удовлетворяли этим условиям, которые сами собой должны выполняться для решения нашей задачи, то при таком выборе $\lambda(x)$, μ_0 и μ_1 рассматриваемый функционал не может никогда достигнуть минимума, ибо каковы бы ни были u и u' , вариация функционала всегда может быть сделана отличной от нуля.

III. Найти минимум выражения:

$$H = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx - \mu_0 [u(x_0) - u_0] + \mu_1 [u(x_1) - u_1] =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[F - \frac{d\lambda}{dx} u - \lambda u' \right] dx - \lambda(x_0) u_0 + \lambda(x_1) u_1,$$

считая $\lambda(x)$ заданной функцией. Соответствующие решения u и u' этой задачи удовлетворяют тогда уравнениям:

$$F_{u'} - \lambda = 0, \quad F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0. \quad (89)$$

Сделаем теперь по аналогии с п. 1 дальнейшее предположение, что уравнения (89) однозначно определяют функции u и u' при любых λ и $\frac{d\lambda}{dx}$. Так как задача I' с минимумом d получается из рассматриваемой задачи II' путем присоединения ограничительных добавочных условий $\frac{du}{dx} - u' = 0$, $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$, то отсюда следует, что $d \geq d_\lambda$. С другой стороны, решение u задачи I' удовлетворяет уравнениям (89) при $\lambda = \bar{\lambda} = F_{u'}$; так как уравнения (89), по предположению, однозначно разрешимы относительно u и u' , то отсюда следует, что $d_\lambda = d$.

Отсюда вытекает, что

$$d = \max d_\lambda.$$

Но проблема IV' заключается как раз в разыскании максимума d_λ , так что наше утверждение доказано.

Достаточным признаком выполнения наших предположений являются условия:

$$F_{u'u'} F_{uu} - (F_{uu'})^2 > 0, \quad F_{u'u'} > 0 \quad (90)$$

для всех u и x рассматриваемой области и при любом значении u' . В самом деле, мы уже видели на стр. 207, что тогда решение уравнения Эйлера дает минимум. Но из этих неравенств следует точно так же существование минимума d_λ задачи II' ; ибо уравнения (89) вместе с неравенствами (90) являются условиями того, чтобы подинтегральное выражение интеграла H , рассматриваемое как функция от независимых переменных u и u' , само достигало минимума при значениях u , u' , определяемых из уравнений (89), для любого значения x ; тем более это справедливо и для интеграла H .

В заключение покажем, как этот переход от проблемы минимума к проблеме максимума с помощью преобразования Фридрихса может быть выведен совершенно непосредственно, если имеют место условия (90). Само преобразование Фридрихса получается при этом само

собой. Формула Тейлора приводит при выполнении неравенств (90) к неравенству:

$$F(u, u') - F(v, v') - (u - v) F_v - (u' - v') F_{v'} \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место лишь при $u = v$ и $u' = v'$. Если мы напомним это выражение в форме:

$$F(u, u') - [F(v, v') - v F_v - v' F_{v'}] - u F_v - u' F_{v'}$$

и введем вместо переменных v и v' новые переменные p и p' с помощью преобразования Лежандра

$$p = F_{v'}, \quad p' = F_v, \quad \Psi(x, p, p') = v p' + v' p - F,$$

то для любых u, u', p, p' имеет место неравенство:

$$F(x, u, u') + \Psi(x, p, p') - u p' - u' p \geq 0,$$

причем равенство имеет место лишь тогда, когда функциям p и p' соответствуют функции $v = u$ и $v' = u'$. Если мы проинтегрируем это неравенство в пределах от x_0 до x_1 , предполагая при этом, что u, u', p, p' являются функциями от x , удовлетворяющими условиям:

$$\frac{du}{dx} - u' = 0, \quad \frac{dp}{dx} - p' = 0, \quad u(x_0) - u_0 = 0, \quad u(x_1) - u_1 = 0,$$

то мы убедимся, что интеграл от левой части этого неравенства никогда не отрицателен и обращается в нуль тогда и только тогда, когда функция u является решением задачи I', а p является решением задачи IV'.

Задача

$$\int_{x_0}^{x_1} [F + \Psi - u p' - u' p] dx = \int_{x_0}^{x_1} F dx + \int_{x_0}^{x_1} \Psi dx + u_0 p(x_0) - u_1 p(x_1) = \min$$

при перечисленных выше предварительных условиях имеет, таким образом, своим решением эти значения функций u и p , и минимум равняется нулю. Но это утверждение равносильно формулированной нами выше теореме относительно взаимоотношения, существующего между задачами I' и IV'.

3. Приведение вариационной задачи к каноническому виду. Формулированный в п. 2 в общем виде принцип преобразования охватывает другое, давно известное и важное преобразование вариационных проблем, заключающееся в *приведении этих задач к каноническому виду*.

Дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка заменяется при этом преобразовании системой дифференциальных уравнений первого порядка. Это преобразование, не имеющее аналогичного себе преобразования среди преобразований обыкновенных задач экстремума, рассмотренных в п. 1, получается путем присоединения к задаче II уравнений (82) и (86) в качестве предварительных условий. Мы тогда приходим сперва к задаче.

IIa. *Найти стационарное значение интеграла:*

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ F(x, u, u') + F_{u'} \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right\} dx$$

при граничных условиях $u(x_0) = u_0$, $u(x_1) = u_1$, где u и u' следует рассматривать как два независимых функциональных аргумента.

Если мы теперь введем вместо u' новый функциональный аргумент ¹⁾

$$p = F_{u'},$$

а вместо подинтегрального выражения $F(x, u, u')$ введем новое подинтегральное выражение:

$$\Phi(x, u, p) = pu' - F(x, u, u')$$

(мы предполагаем при этом, что

$$F_{u'u'} \neq 0,$$

так что из уравнения $p = F_{u'}$ можно обратно выразить u' как функцию от p , u и x), то мы получим эквивалентную задачу:

Иб. Найти стационарное значение интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[p \frac{du}{dx} - \Phi(x, u, p) \right] dx$$

при граничных условиях $u(x_0) = u_0$, $u(x_1) = u_1$. При этом выражения, фигурирующие в эквивалентных задачах I и IIб, связаны между собой преобразованием Лежандра

$$F_{u'} = p, \quad pu' - F = \Phi,$$

обратным преобразованием которого, является, как легко видеть, преобразование:

$$\Phi_p = u', \quad pu' - \Phi = F.$$

Мы называем этот вид вариационной задачи *каноническим видом*. Приравняв нулю вариацию этого интеграла по p и u , мы получим *канонические дифференциальные уравнения вариационной задачи*:

$$\frac{dp}{dx} + \Phi_u = 0, \quad \frac{du}{dx} - \Phi_p = 0.$$

Совершенно аналогично мы можем привести к каноническому виду и вариационную задачу с n неизвестными функциями $u_1(x), \dots, u_n(x)$.

Что касается характера экстремума, то, не перечисляя подробно всех необходимых условий, формулируем лишь следующий результат. Если для задачи I имеется налицо минимум d , то это число d будет и канонической задаче служить наибольшим из наименьших значений в том смысле, что для того, чтобы найти это число d , мы должны сперва найти наименьшее значение функционала при постоянном p и варьирующем u , а затем, варьируя p , должны найти наибольшее из этих наименьших значений, зависящих от функции p .

4. Обобщения. Вышеизложенную теорию преобразований вариационных проблем, как это само собой очевидно и не требует никаких

¹⁾ p равняется, таким образом, фигурирующему в задаче II множителю Лагранжа.

особых пояснений, можно непосредственно распространить как на случай задач, содержащих многие неизвестные функции и их производные высших порядков, так и на те задачи, в которых функциональный аргумент является функцией от многих независимых переменных.

Мы ограничимся рассмотрением одного особенно простого примера вариационной задачи с функциональным аргументом, зависящим от двух независимых переменных, соответствующего рассмотренному в п. 2 частному случаю, когда подинтегральное выражение не содержит в явной форме функции u , а именно рассмотрим преобразование классической вариационной задачи Дирихле:

Задача I.

$$\frac{1}{2} \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min,$$

где u есть функция, имеющая в области G кусочно-непрерывную производную и принимающая на границе заданные неподвижные граничные значения $\bar{u} = f(s)$, где через s мы обозначаем длину дуги границы Γ области G . При этом предполагается, что граница Γ области G представляет собой кривую, имеющую кусочно-непрерывно вращающуюся касательную.

Заменяя в нашей задаче обе частные производные функциями p и q и присоединяя добавочные условия $\frac{\partial u}{\partial x} - p = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} - q = 0$, мы приходим, применяя правило множителей Лагранжа, к задаче II:

Найти стационарное значение выражения:

$$\iint_G \left[\frac{1}{2} (p^2 + q^2) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} - p \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - q \right) \right] dx dy - \\ - \int_{\Gamma} \rho(s) [\bar{u} - f(s)] ds.$$

При этом $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ и $\rho(s)$ являются множителями Лагранжа. Преобразовывая двойной интеграл путем интегрирования по частям, мы приведем проблему II к следующему виду:

$$\iint_G \left[\frac{1}{2} (p^2 + q^2) - u \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) - \lambda p - \mu q \right] dx dy + \\ + \int_{\Gamma} \left[\bar{u} \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial n} + \mu \frac{\partial y}{\partial n} - \rho(s) \right) + \rho(s) f(s) \right] ds = \text{стационарному значению},$$

При этом $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по внешней нормали, а u обозначает, как обычно, граничные значения функции u .

Составив уравнения Эйлера и уравнения, выражающие естественные граничные условия этой задачи, присоединим следующие из них:

к предварительным условиям задачи в качестве добавочных условий:

$$p - \lambda = 0, \quad q - \mu = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \quad \bar{\lambda} \frac{\partial x}{\partial n} + \bar{\mu} \frac{\partial y}{\partial n} - \rho = 0;$$

мы получаем тогда следующую эквивалентную задачу III:

$$-\frac{1}{2} \iint_G (p^2 + q^2) dx dy + \int_{\Gamma} \rho(s) f(s) ds = \text{стационарному значению,}$$

с добавочными условиями:

$$\rho(s) - p \frac{\partial x}{\partial n} - q \frac{\partial y}{\partial n} = 0$$

на границе и

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

внутри области. Этим произведено преобразование Фридрихса.

Мы упростим проблему, если заранее удовлетворим второму добавочному условию, введя функцию $v(x, y)$ с помощью уравнений:

$$p = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad q = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда

$$p \frac{\partial x}{\partial n} + q \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s},$$

где $\frac{\partial v}{\partial s}$ означает производную от граничной функции $\bar{v}$ по направлению положительной касательной к Γ , и наша задача переходит в задачу IV:

$$-\frac{1}{2} \iint_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} f(s) ds = \text{стационарному значению.}$$

Входящий в это выражение криволинейный интеграл можно, впрочем, легко преобразовать с помощью интегрирования по частям в интеграл

$$-\int_{\Gamma} v f'(s) ds.$$

Эта новая задача имеет под знаком двойного интеграла подинтегральное выражение такого же типа, как и проблема I. В то время как решение проблемы I дает функцию, удовлетворяющую уравнению потенциала $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и имеющую на границе заданные значения $f(s)$, вторая задача дает также потенциальную функцию, которая в силу

естественных граничных условий является потенциальной функцией, сопряженной с u .

Наконец, чтобы убедиться в том, что минимуму выражения, рассматриваемого в задаче I, соответствует численно ему равный максимум выражения, рассматриваемого в задаче IV, проще всего поступить так: вычтем из интеграла, рассматриваемого в задаче I, выражение, рассматриваемое в задаче IV, и с помощью очень простого преобразования представим эту разность в виде:

$$\frac{1}{2} \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy.$$

Задачи I и IV, взятые вместе, эквивалентны задаче нахождения минимума этого последнего интеграла при единственном граничном условии $\bar{u} = f(s)$. Но минимум этого интеграла равен нулю, и он достигается, если функция u является решением соответствующей краевой задачи теории потенциала, а функция v — сопряженной с u потенциальной функцией, так как функции u и v удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Отсюда следует, что между задачами I и IV существует формулированная выше зависимость.

§ 10. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

1. Общие соображения. Вариационное исчисление является надежнейшим средством при выводе и исследовании дифференциальных уравнений математической физики. Если идет речь о задачах (устойчивого) равновесия, то можно положить в основу *вариационный принцип минимума потенциальной энергии*, тогда как законы процессов движения проще всего формулируются с помощью *вариационного принципа Гамильтона*. Мы займемся в этом параграфе формулировкой важнейших типичных проблем теории дифференциальных уравнений математической физики, исходя из названных двух вариационных принципов.

Рассмотрим сначала систему с конечным числом n степеней свободы. Пусть положение системы определяется значениями n параметров $q_1, q_2, \dots, q_n$. Требуется выразить эти параметры в виде функции от времени t . Представим себе, что механические свойства системы заданы, с одной стороны, с помощью *кинетической энергии* этой системы $T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t)$, которая является функцией от n скоростей $\dot{q}_i$, n координат q_i и времени t и притом квадратичной формой относительно скоростей:

$$T = \sum_{i,k=1}^n P_{ik}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

и, с другой стороны, *потенциальной энергией системы* $U(q_1, \dots, q_n, t)$, которую мы считаем функцией от $q_1, q_2, \dots, q_n$ и t . Принцип Гамильтона

гласит так: *В течение промежутка времени между моментами t_0 и t_1 движение системы происходит так, что функции $q_i(t)$ делают стационарным интеграл*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

по сравнению с такими достаточно близкими функциями $\bar{q}_i(t)$, для которых $\bar{q}_i(t_0) = q_i(t_0)$ и $\bar{q}_i(t_1) = q_i(t_1)$. Или другими словами. При действительном движении интеграл J имеет стационарное значение по сравнению со всеми достаточно близкими возможными движениями, при которых система в течение заданного промежутка времени перемещается из того же, начального положения в то же самое конечное положение, как и для действительного движения.

Согласно § 3 принцип Гамильтона непосредственно приводит к общим уравнениям движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (91)$$

Предполагая, что T и U не содержат в явном виде t , мы получим из этих уравнений движения условия равновесия, приравнявая нулю в уравнениях (91) все производные по времени. Мы получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (92)$$

т. е. механическая система с потенциальной энергией $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ находится в равновесии для некоторой системы значений координат $q_1, q_2, \dots, q_n$ тогда и только тогда, если при этих значениях координат потенциальная энергия имеет стационарное значение.

Для устойчивости равновесия является сверх того необходимым и достаточным, чтобы функция U достигала минимума при соответствующих значениях координат. Этот факт можно доказать, исходя из уравнений движения; мы, однако, предпочитаем рассматривать это положение как независимый постулат и класть его в основу при исследовании проблем равновесия.

Особенно простым характером обладает движение системы в том случае, когда процесс движения протекает поблизости от положения устойчивого равновесия системы. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что это положение равновесия характеризуется обращением в нуль всех координат q_i .

Рассматривая только такие состояния движения, при которых система остается настолько близкой к положению равновесия, что мы можем пренебречь высшими степенями координат и их производных по времени, и предполагая, что T и U не содержат в явном виде t , мы можем считать T определенной положительной квадратичной формой относительно $\dot{q}_i$ постоянными коэффициентами a_{ik} :

$$T = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

и точно так же мы можем рассматривать U как определенную положительно-кватратичную форму относительно q_i с постоянными коэффициентами b_{ik} :

$$U = \sum_{i, k}^n b_{ik} q_i q_k.$$

Уравнения движения переходят тогда в систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{ik} q_k = 0,$$

которым подчиняются „малые колебания“ около положения устойчивого равновесия и которые будут исследованы нами в следующей главе.

Точно таким же образом мы будем исходить из принципа Гамильтона и соответственно из принципа минимума потенциальной энергии и при исследовании систем, рассматриваемых в механике непрерывно распределенных масс, положение которых уже не определяется с помощью конечного числа координат. Здесь потенциальная и кинетическая энергии уже не являются функциями от конечного числа переменных и их производных, но выражаются интегралами, распространенными по объемам, поверхностям или линиям, по которым распределены рассматриваемые системы.

2. Колебания струны и стержня. Простейший пример дают колебания *однородной струны* (или нити), которая в положении покоя (соответствующем состоянию устойчивого равновесия) совпадает с отрезком $0 \leq x \leq l$ оси x и которая находится под действием постоянного натяжения μ и может совершать небольшие поперечные колебания около положения равновесия. Обозначим через $u(x, t)$ отклонение точки струны от ее положения равновесия, равное расстоянию этой точки от оси x . Это отклонение $u(x, t)$ и будет искомой функцией от двух независимых переменных x и t . Мы предполагаем, что колебания струны настолько малы, что мы можем пренебрегать более высокими степенями функции u и ее производных по сравнению с более низкими степенями. Допустим сначала, что концы струны закреплены, т. е. пусть $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Кинетическая энергия струны задается интегралом

$$-\frac{1}{2} \int_0^l \rho u_t^2 dx = T,$$

где ρ означает линейную плотность струны. Потенциальная энергия u пропорциональна растяжению струны, т. е. увеличению длины струны по сравнению с ее длиной в состоянии покоя, причем фактор пропорциональности равняется натяжению μ . Но пренебрегая членами высших порядков, мы можем считать изменение длины $\int_0^l \sqrt{1 + u_x^2} dx - l$ равным

интегралу $\frac{1}{2} \int_0^l u_x^2 dx$, и мы получаем поэтому следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \mu u_x^2 dx.$$

Тогда принцип Гамильтона требует, чтобы интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l (\rho u_t^2 - \mu u_x^2) dx dt$$

имел стационарное значение, причем в качестве функций сравнения допускаются все функции $u(x, t)$, имеющие кусочно-непрерывные производные и обращающиеся в нуль при $x=0$ и $x=l$ и совпадающие при $t=t_0$ и $t=t_1$ с функциями $u(x, t_0)$ и $u(x, t_1)$, изображающими форму струны в начале и конце промежутка (t_0, t_1) при действительном движении. Отсюда мы получаем на основании общих принципов вариационного исчисления, при постоянных ρ и μ , следующее дифференциальное уравнение (в частных производных) колебаний струны:

$$\rho u_{tt} - \mu u_{xx} = 0. \quad (93)$$

Если на струну действует внешняя сила $f(x, t)$, то в выражение потенциальной энергии входит еще добавочный член $-\int_0^l f(x, t) u dx$, так что в этом случае мы получаем дифференциальное уравнение:

$$\rho u_{tt} - \mu u_{xx} = f(x, t). \quad (94)$$

Положение устойчивого равновесия струны, находящейся под действием внешней силы, задается согласно нашему общему принципу минимумом интеграла

$$\int_0^l \left(\frac{\mu}{2} u_x^2 - f u \right) dx,$$

причем мы предполагаем, что внешняя сила $f(x)$ не зависит от времени; уравнение Эйлера этой вариационной задачи имеет вид:

$$\mu u_{xx} + f(x) = 0,$$

и получается также как частный случай из уравнения движения (94).

Чтобы получить *уравнения поперечных колебаний стержня*, мы исходим из определения стержня как одномерного множества непрерывно распределенных материальных частиц, имеющего в состоянии покоя прямолинейную форму и обладающего тем свойством, что приобретаемая им при деформации потенциальная энергия пропорциональна интегралу от квадрата кривизны, распространенному по длине

стержня. Предполагая снова, что мы имеем право пренебречь более высокими степенями функции смещения $u(x, t)$ и ее производных по сравнению с более низкими степенями, мы получаем для потенциальной энергии деформации выражение вида:

$$\frac{\mu}{2} \int_0^l u_{xx}^2 dx,$$

тогда как кинетическая энергия сохраняет то же выражение, как и для случая колебаний струны. Предполагая, кроме того, в общем случае наличие внешней силы $f(x, t)$, мы получаем отсюда на основании принципа Гамильтона следующее дифференциальное уравнение движения:

$$\rho u_{tt} + \mu u_{xxxx} = f(x, t),$$

тогда как условие равновесия под действием внешней силы $f(x)$ имеет вид:

$$\mu u_{xxxx} - f(x) = 0.$$

Для решения наших вариационных задач первостепенное значение имеет вопрос, каким граничным или другим предварительно налагаемым ограничительным условиям должно подчиняться искомое решение. Вместо случая неподвижных концов, характеризуемого условиями $u(0) = u(l) = 0$ для струны или $u(0) = u_x(0) = u(l) = u_x(l) = 0$ для стержня с наглухо закрепленными концами, мы можем также рассматривать случай, когда концы остаются свободными, и мы получаем тогда, пользуясь методами § 5, естественные граничные условия, которые для струны гласят:

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad (95)$$

а для стержня:

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0; \quad u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(l, t) = 0. \quad (96)$$

Если концы струны не абсолютно неподвижны, но удерживаются с помощью упругих сил, то к предыдущим выражениям для потенциальной энергии присоединяются еще члены, обуславливаемые силами, действующими на концах, а именно члены $h_1 \frac{\mu}{2} u^2(0, t)$ и $h_2 \frac{\mu}{2} u^2(l, t)$. Эти члены не изменяют уравнения движения (94), но зато мы получаем теперь, как и в § 5, естественные граничные условия вида:

$$u_x(0, t) = h_1 u(0, t); \quad u_x(l, t) = -h_2 u(l, t)$$

В остальном сошлемся на дополнения к настоящей главе, где в п. 15 будет проведено исследование более общих граничных условий для случая колебаний стержня.

3. Мембрана и пластинка. Принципиальная постановка вопроса остается такой же, как раньше, и в случае плоской мембраны и пластинки. Под *мембраной* мы понимаем упругую материальную поверхность, плоскую в состоянии покоя, потенциальная энергия которой пропорциональна изменению площади поверхности, причем множитель пропорциональности мы называем натяжением. Пусть мембрана покрывает в состоянии

покою часть G плоскости x, y ; обозначим через $u(x, y)$ перпендикулярное к плоскости x, y смещение точки мембраны, и пусть это смещение достаточно мало в том смысле, что мы можем пренебрегать более высокими степенями величин u, u_x, u_y по сравнению с более низкими степенями. Тогда мы можем заменить выражение площади поверхности

$$\iint_G \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} dx dy$$

интегралом

$$\iint_G \left(1 + \frac{u_x^2 + u_y^2}{2}\right) dx dy,$$

и мы получаем в качестве искомого выражения потенциальной энергии с точностью до постоянного множителя двойной интеграл:

$$\frac{1}{2} \iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy. \quad (97)$$

Рассмотрим сначала задачу равновесия мембраны. Предположим, что прогиб мембраны $u(x, y)$ имеет на границе Γ области G заранее заданные значения $\bar{u} = \bar{u}(s)$, где s означает длину дуги линии Γ , и предположим далее, что на мембрану не действуют никакие внешние силы. Тогда функция u , выражающая прогиб в положении равновесия, определяется следующей вариационной проблемой: для искомой функции $u(x, y)$, интеграл

$$\iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

должен иметь минимальное значение, если в качестве функций сравнения допускать все непрерывные в замкнутой области G функции u , принимающие на границе заданные граничные значения $u(s)$ и которые внутри области имеют непрерывные производные первого порядка и кусочно-непрерывные производные второго порядка⁴⁾.

Дифференциальное уравнение Эйлера гласит:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Проблема равновесия эквивалентна, таким образом, краевой задаче этого дифференциального уравнения в частных производных (уравнения потенциала), т. е. нахождению решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным граничным условиям.

Рассмотрим теперь несколько более общий случай. Пусть мембрана находится под действием внешней силы, поверхностная плотность которой во внутренних точках мембраны задается функцией $f(x, y)$; пусть, далее, граница мембраны является свободно подвижной, и пусть на этой границе действуют внешняя сила с линейной плотностью $p(s)$ и упругие силы,

⁴⁾ Для решения этой задачи, которой мы займемся впоследствии, имеет, впрочем, большое значение то, что мы имеем право отбросить требование непрерывности вторых производных; от чего решение задачи не изменяется.

стремящиеся удержать границу в положении равновесия, и пусть модуль упругости этих сил, рассчитанный на единицу длины, равняется $\delta(s)$. Тогда потенциальная энергия мембраны с прогибом $u(x, y)$ задается выражением:

$$\iint_G \left[\frac{\mu}{2} (u_x^2 + u_y^2) - fu \right] dx dy + \int_\Gamma \left[p(s)u + \frac{1}{2} \sigma(s) u^2 \right] ds.$$

Положение равновесия здесь также характеризуется тем, что интеграл достигает минимума, причем допустимые функции сравнения здесь не должны быть подчинены никаким граничным условиям, но должны только удовлетворять формулированным выше требованиям непрерывности. Дифференциальное уравнение Эйлера (условие равновесия во внутренних точках мембраны) здесь гласит, если принять, что $\mu = 1$:

$$\Delta u + f(x, y) = 0,$$

а в качестве естественного граничного условия получается уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u + p(s) = 0.$$

Эти два требования вместе снова составляют краевую задачу.

Из этого общего граничного условия мы можем в качестве предельного случая получить простейшее граничное условие $u = 0$, полагая $p = 0$ и заставляя σ стремиться к бесконечности.

Если $\sigma = 0$, то наша проблема равновесия, вообще говоря, не имеет решения. С точки зрения физики можно заранее считать вполне вероятным, что мембрана, свободно подвижная над областью G , под действием совершенно произвольных сил не имеет в общем случае устойчивого положения равновесия и что устойчивое положение равновесия мембраны возможно только в том случае, если мы заранее потребуем, чтобы все действующие внешние силы взаимно уравновешивались. В самом деле, этот результат непосредственно следует из нашего вариационного принципа, а именно: для того чтобы наше выражение для потенциальной энергии могло иметь нижнюю грань в случае $\sigma = 0$, необходимо, чтобы имело место равенство:

$$\iint_G f dx dy + \int_\Gamma p ds = 0. \quad (98)$$

Чтобы в этом убедиться, дадим прогибу u в нашем выражении энергии постоянное значение c . Тогда величина энергии будет равняться левой части уравнения (98), умноженной на постоянную c . Поэтому, если левая часть уравнения (98) отлична от нуля, то, выбрав достаточно большое по абсолютному значению c , мы получим, если подберем соответствующим образом знак числа c , сколь угодно большое по абсолютному значению отрицательное значение потенциальной энергии U , и поэтому множество значений энергии U не имеет нижней грани. Если же выполняется условие (98), то решение нашей вариационной задачи или проблемы равновесия не является единственным, ибо, прибавив к решению произвольное постоянное слагаемое c , мы ничем не изменим

выражения энергии U и вместе с тем значение ее минимума. Чтобы сделать решение однозначным, мы должны поэтому подчинить u некоторому добавочному условию. Обычно берут для этого условие:

$$\iint_G u \, dx \, dy = 0,$$

которое означает, что центр тяжести мембраны остается в положении покоя. Уравнения движения мембраны мы получаем с помощью принципа Гамильтона, положив в основу следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{\rho}{2} \iint u_t^2 \, dx \, dy. \quad (99)$$

Если на поверхности мембраны действует внешняя сила с поверхностной плотностью $f(x, y, t)$, а на границе мембраны — граничная сила с линейной плотностью $P(s, t)$, и если, кроме того, имеется упругая связь $\sigma(s)$, то принцип Гамильтона требует, чтобы выражение:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \iint_G \left[\frac{\rho}{2} u_t^2 - \frac{\mu}{2} (u_x^2 + u_y^2) + f(x, y, t) u \right] dx \, dy \, dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} \sigma u^2 \, ds \, dt - \\ - \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} p u \, ds \, dt \end{aligned}$$

имело стационарное значение.

Дифференциальное уравнение Эйлера гласит для нашей проблемы так:

$$\mu \Delta u - \rho u_{tt} + f(x, y, t) = 0,$$

а естественные граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u + p(s, t) = 0. \quad (100)$$

Если же речь идет о закрепленной мембране, для которой граничные значения заранее заданы в виде функции от длины дуги, то условие (100) отпадает и заменяется заданием этих граничных значений.

Тогда как для задачи равновесия принцип минимума непосредственно приводит к краевой задаче дифференциального уравнения в том виде, в каком эта задача действительно ставится физическими условиями проблемы, и здесь, как мы позже увидим, вариационная задача выражает по сути дела самое существо физической проблемы, значение принципа Гамильтона заключается прежде всего в той формальной простоте, с которой получается с помощью этого принципа дифференциальное уравнение проблемы. Чтобы, однако, действительно получить решение этого уравнения, необходимо ввести, кроме тех пространственных граничных условий, которые либо сами получаются из принципа Гамильтона, либо заранее задаются, еще другие предельные условия, относящиеся ко времени t . При применении принципа Гамильтона мы считаем, что

допустимые функции сравнения имеют заранее заданные значения в два заданных момента времени t_0 и t_1 . Однако в проблемах движения математической физики в общем случае не всегда задаются такого рода предельные условия в отношении переменного t . Обычно задается, помимо граничных условий, только *начальное состояние*, т. е. для функций $u(x, y, t)$ и $u_t(x, y, t)$ задаются значения этих функций в момент $t=0$. Таким образом проблемы движения приведут нас к проблемам теории дифференциальных уравнений смешанного типа, т. е. к проблемам, в которых заданы как граничные, так и начальные условия.

Совершенно аналогично обстоит дело и с уравнением колебаний *пластинки*.

Пластинкой мы называем упругую материальную поверхность, плоскую в состоянии покоя, которая при деформации приобретает потенциальную энергию, равную интегралу от некоторой квадратичной формы от главных кривизн поверхности, получающейся при изгибании пластинки. Если обозначить главные радиусы кривизны деформированной пластинки через ρ_1, ρ_2 , то подинтегральное выражение для потенциальной энергии имеет вид:

$$A \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) + \frac{2B}{\rho_1 \rho_2},$$

где A и B суть некоторые постоянные, зависящие от материала пластинки; так как величины $u, u_x, \dots$, согласно допущению, достаточно малы, то мы можем положить

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2;$$

искомая потенциальная энергия изгибания задается поэтому выражением вида:

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint_G \left[(\Delta u)^2 - 2(1 - \mu)(u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2) \right] dx dy \quad (101)$$

с точностью до постоянного множителя, зависящего от материала пластинки, который мы считаем равным единице.

К энергии U_1 присоединяются еще энергии внешних сил, действующих на поверхности и на границе пластинки, а также при известных обстоятельствах еще и энергия заданных на границе изгибающих моментов. Сумма этих энергий выражается интегралом:

$$U_2 = \iint_G f u dx dy + \int_{\Gamma} p(s) u ds + \int_{\Gamma} m(s) \frac{du}{dn} ds,$$

где плотности сил, действующих на поверхности и на границе, и изгибающих моментов, действующих по нормали к границе пластинки, заданы функциями

$$f(x, y), p(s) \text{ и } m(s).$$

Равновесие снова характеризуется условием, чтобы функция $u(x, y)$ была подобрана так, чтобы сумма $U_1 + U_2$ достигала минимума, причем

для допустимых функций сравнения u требуется непрерывность производных вплоть до производных четвертого порядка (впрочем это требование можно значительно смягчить, не меняя этим решения проблемы). Чтобы получить для нашей проблемы уравнения Эйлера и естественные граничные условия, мы должны согласно § 5 составить вариацию $\delta U = \delta U_1 + \delta U_2$ и приравнять ее нулю.

Мы получаем:

$$\delta U_1 = \iint_G (\Delta u \delta u) dx dy - \int_{\Gamma} M \delta \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} P \delta u ds,$$

причем

$$M(u) = - \left[\mu \Delta u + (1 - \mu) (u_{xx} x_n^2 + 2u_{xy} x_n y_n + u_{yy} y_n^2) \right],$$

$$P(u) = \frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial s} \left(u_{xx} x_n x_s + u_{xy} (x_n y_s + x_s y_n) + u_{yy} y_n y_s \right)$$

(x_n, y_n и x_s, y_s означают здесь направляющие косинусы внешней нормали n и касательной s). Из условия $\delta U = 0$ мы получаем в качестве условий равновесия, во-первых, дифференциальное уравнения Эйлера:

$$\Delta u + f = 0,$$

и, во-вторых, так как на границе не заданы никакие ограничительные условия, то мы получаем естественные граничные условия:

$$P(u) - p = 0 \text{ и } M(u) - m = 0.$$

Если пластинка закреплена вдоль границы, т. е. если на границе u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ имеют значение нуль, то эти естественные условия отпадают и должны быть заменены условиями:

$$u = 0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Если же пластинка только подперта на границе, т. е. если только сама граница пластинки неподвижна, тогда как касательная плоскость к поверхности пластинки остается вдоль границы подвижной и может вращаться вокруг касательной к границе, то мы получаем граничные условия:

$$u = 0, \mu \Delta u + (1 - \mu) (x_n^2 u_{xx} + y_n^2 u_{yy} + 2x_n y_n u_{xy}) + m = 0^1). \quad (102)$$

Чтобы получить для пластинки дифференциальное уравнение движения (дифференциальное уравнение колебаний пластинки), мы попрежнему пользуемся принципом Гамильтона, вводя для кинетической энергии выраже-

¹⁾ Для вариационных задач пластинки характерно, что выражение

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2,$$

которое в качестве выражения типа дивергенции не оказывает никакого влияния на уравнение Эйлера, играет решающую роль по отношению к виду естественных граничных условий.

ние (99). Мы получим тогда, с одной стороны, дифференциальное уравнение:

$$\Delta u + \rho u_{tt} = 0$$

или в более общем случае:

$$\Delta u + \rho u_{tt} + f(x, y, t) = 0$$

и, с другой стороны, соответствующие граничные условия, которые получаются таким же образом, как и выше для случая пластинки, находящейся в состоянии равновесия. Чтобы полностью охарактеризовать действительный процесс движения, мы должны к этим граничным условиям присоединить еще начальные условия, характеризующие начальное состояние, т. е. задать функции $u(x, y, 0)$ и $u_t(x, y, 0)$.

§ 11. Дополнения и задачи к четвертой главе.

1. Вариационная задача, соответствующая заданному дифференциальному уравнению. Для всякого заданного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

всегда можно найти такую функцию $F(x, y, y')$, чтобы уравнение $[F]_y = 0$, будучи разрешено относительно y'' , было эквивалентно данному дифференциальному уравнению (ср. Bolza O., „Vorlesungen über Variationsrechnung“, стр. 37—39).

2. Закон взаимности изопериметрических задач. Экстремали задачи

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \text{extremum}$$

при добавочном условии

$$K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = \text{const}$$

совпадают с экстремалими задачи $K = \text{extremum}$, $J = \text{const}$, за исключением отмеченного выше особого случая (§ 7, п. 1).

3. Световые лучи, имеющие форму окружностей. Если скорость света пропорциональна y , то световые лучи представляют собой окружности, центры которых лежат на оси x .

4. Задача Дидоны состоит в том, чтобы отрезать участок возможно большей площади, граница которого имела бы заданную длину. Требуется решить обобщенную задачу, предполагая, что почва рассматриваемого участка земли не всюду равноценна, но плодородность почвы является некоторой функцией места $\rho(x, y)$. Поэтому речь идет о нахождении наибольшего значения интеграла $\iint_G \rho dx dy$, распространенного по

участку, окруженному линией заданной длины. Составить дифференциальное уравнение экстремалей.

5. Пример пространственной вариационной задачи. Шар является той замкнутой поверхностью, которая имеет наименьшую площадь по сравнению со всеми поверхностями, замыкающими тот же объем (см. указания у Blaschke W., „Kreis und Kugel, Лейпциг 1916).

Если требуется найти поверхность наименьшей площади, ограниченную заданной линией и замыкающую вместе с некоторой заданной поверхностью, проходящей через ту же линию, данный объем, то в качестве экстремалей получаются поверхности постоянной средней кривизны. Если отбросить последнее условие относительно объема, то мы получим выведенное уже в § 3, 4 дифференциальное уравнение *минимальных поверхностей*:

$$(1 + z_y^2) z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2) z_{yy} = 0,$$

которое выражает обращение в нуль средней кривизны.

6. Изопериметрическая задача на кривой поверхности имеет экстремалами кривые постоянной геодезической кривизны (ср. Blaschke W., „Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie“, т. 1, изд. 3, стр. 154—155, Берлин 1910).

7. Индикатриса и ее применения ¹⁾. При рассмотрении задачи нахождения экстремума интеграла $\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$ (где $\mathfrak{F}$ является положительной однородной функцией первого измерения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$) вводят кривую

$$\mathfrak{F}(x, y, \xi, \eta) = 1,$$

где ξ и η мы считаем прямоугольными координатами точки на плоскости ξ, η , а x, y являются постоянными параметрами.

Эта кривая называется *индикатрисой* („Eichkurve“).

С помощью этой кривой можно геометрически истолковать много важных соотношений. Соответственным образом, для пространственной задачи рассматривается в качестве индикатрисы поверхность $\mathfrak{F}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 1$ („Eichfläche“) в пространстве ξ, η, ζ .

Направление $(\delta x, \delta y)$ трансверсально к направлению $(\dot{x}, \dot{y})$, если

$$\mathfrak{F}_x \delta x + \mathfrak{F}_y \delta y = 0.$$

Но уравнение касательной к индикатрисе в точке $\left(\frac{\dot{x}}{\mathfrak{F}}, \frac{\dot{y}}{\mathfrak{F}}\right)$ имеет вид:

$$\left(\xi - \frac{\dot{x}}{\mathfrak{F}}\right) \mathfrak{F}_x + \left(\eta - \frac{\dot{y}}{\mathfrak{F}}\right) \mathfrak{F}_y = 0;$$

или

$$\xi \mathfrak{F}_x + \eta \mathfrak{F}_y = 1.$$

Таким образом трансверсальное направление совпадает с направлением касательной к индикатрисе в точке пересечения индикатрисы

¹⁾ См. Carathéodory C., Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen, Math. Annalen, т. 62, стр. 449—503, 1906.

с лучом, соединяющим начало координат с точкой $\dot{x}, \dot{y}$. Поэтому, если мы спросим себя, для каких проблем трансверсальность совпадает с ортогональностью, то мы получим, что индикатриса должна пересекать в этом случае под прямым углом лучи, выходящие из начала координат, т. е. она должна быть окружностью с центром в начале координат. В силу однородности функции $\mathfrak{F}$ мы получаем отсюда, что

$$\mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \varphi(x, y) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Далее, для того чтобы соотношение между направлением экстремали и трансверсальным направлением было симметричным, необходимо, чтобы индикатриса обладала следующим свойством: если провести через начало координат O прямую, параллельную касательной к индикатрисе в точке P , то касательная в точке пересечения индикатрисы с этой прямой должна быть параллельной лучу OP .

Рассмотрение индикатрисы оказывается особенно полезным для исследования ломаных экстремалей, т. е. экстремалей, имеющих в некоторой точке (x_1, y_1) угловую точку. Спросим себя, когда может дать экстремум линия, состоящая из двух дуг, из которых одна соединяет точку (x_0, y_0) с точкой (x_1, y_1) и имеет в последней точке направление $(\dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)$, а другая идет от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) и имеет в точке (x_1, y_1) направление $(\dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+)$. Вдоль тех кусков кривой, вдоль которых она имеет непрерывно вращающуюся касательную, кривая должна, как всегда, удовлетворять уравнениям Эйлера. Чтобы получить условия экстремума, которые должны выполняться в угловой точке (x_1, y_1) , включим нашу экстремаль в семейство линий

$$x(t) + \varepsilon \xi(t), \quad y(t) + \varepsilon \eta(t),$$

имеющих при $t = t_1$ угловую точку, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ непрерывно дифференцируемы и обращаются в нуль на концах. Составим теперь первую вариацию, т. е. продифференцируем по ε и положим $\varepsilon = 0$. Если мы это сделаем для каждой из двух дуг экстремали в отдельности, то остаются только члены, содержащие вариации координат угловой точки (x_1, y_1) . Внешние члены, содержащие вариации координат концов (x_0, y_0) и (x_2, y_2) , обращаются в нуль, если считать эти концы неподвижными, а оба интеграла исчезают в силу экстремального характера обеих дуг.

Таким образом остается уравнение:

$$\begin{aligned} & \xi(t_1) \mathfrak{F}_x(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-) + \eta(t_1) \mathfrak{F}_y(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-) - \\ & - \xi(t_1) \mathfrak{F}_x(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+) - \eta(t_1) \mathfrak{F}_y(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+) = 0, \end{aligned}$$

и так как $\xi(t_1)$ и $\eta(t_1)$ произвольны, то мы получаем отсюда условие Вейерштрасса-Эрдмана для угловых точек:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-) &= \mathfrak{F}_x(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+), \\ \mathfrak{F}_y(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-) &= \mathfrak{F}_y(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+), \end{aligned}$$

т. е. касательные к индикатрисе в точках пересечения индикатрисы с векторами $(\dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)$ и $(\dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+)$ должны совпадать.

Обе касательные к экстремали в угловой точке направлены параллельно лучам, соединяющим начало координат с точками касания двойной касательной к индикатрисе.

8. Вариация интеграла с переменной областью интегрирования. Если в интеграле

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u') dx$$

варирует не только функция u , но и пределы интегрирования x_0 и x_1 , зависящие от некоторого параметра ε , то в выражении первой вариации интеграла сверх обычных членов появляется еще дополнительный член, обусловленный вариацией области интегрирования, и вариация имеет в этом случае следующий вид:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \{ [F]_{\varepsilon} \delta u + (F_{u'} \delta u)' \} dx + (F \delta x)_{x_0}^{x_1}, \quad (103)$$

где

$$\delta u = \varepsilon \left(\frac{\partial u(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta x_1 = \varepsilon \left(\frac{\partial x_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta x_0 = \varepsilon \left(\frac{\partial x_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0},$$

а $[F]_{\varepsilon}$ означает выражение Эйлера для функции F .

Аналогичная формула имеет место и для случая двух измерений, (а также, разумеется, для большего числа измерений), когда область интегрирования G варирует и зависит от параметра ε . Чтобы вычислить вариацию интеграла

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy,$$

представим себе, что варирующая область G^* , изменяющаяся в зависимости от параметра ε , может быть отображена на первоначальную область G с текущими координатами x, y с помощью одно-однозначного и непрерывно дифференцируемого преобразования:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X(x, y; \varepsilon), \\ y^* &= Y(x, y; \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

содержащего параметр ε и совпадающего при $\varepsilon=0$ с тождественным преобразованием $x^*=x, y^*=y$. В области G^* пусть точке (x^*, y^*) соответствует новое значение функции $u^*=u^*(x^*, y^*; \varepsilon)$, и пусть u^* выражается через первоначальные переменные функцией:

$$u^* = U(x, y; \varepsilon). \quad (104')$$

Таким образом имеет место соотношение:

$$u^*(X, Y; \varepsilon) = U(x, y; \varepsilon).$$

В семействе поверхностей $u^*(x^*, y^*; \varepsilon)$, отдельные члены которого задаются уравнениями (104), (104') при постоянном ε в параметрическом

виде с параметрами x, y , содержится и наша исходная поверхность $u(x, y)$ при $\varepsilon = 0$.

Составим теперь интеграл

$$J(\varepsilon) = \iint_{G^*} F[x^*, y^*, u^*(x^*, y^*; \varepsilon), u_{x^*}^*(x^*, y^*; \varepsilon), u_{y^*}^*(x^*, y^*; \varepsilon)] dx^* dy^*$$

и преобразуем его в интеграл, взятый по постоянной области G , путем введения x, y в качестве независимых переменных. Мы получаем:

$$J(\varepsilon) = \iint_G F[X, Y, u^*(X, Y; \varepsilon), u_{x^*}^*(X, Y; \varepsilon), u_{y^*}^*(X, Y; \varepsilon)] \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} dx dy$$

Мы должны теперь составить вариацию, дифференцируя по ε и приравнявая к нулю. Введем для удобства следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \delta x &= \varepsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}; & \delta y &= \varepsilon \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}; \\ \delta u &= \varepsilon \left(\frac{\partial u^*(x, y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon \left(\frac{\partial u^*(X, Y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \\ \delta u_x &= \varepsilon \left(\frac{\partial u_{x^*}^*(X, Y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}; & \delta u_y &= \varepsilon \left(\frac{\partial u_{y^*}^*(X, Y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Мы получаем тогда:

$$\delta J = \iint_G [F_x \delta x + F_y \delta y + F_u \delta u + F_{u_x} \delta u_x + F_{u_y} \delta u_y + F(\delta x)_x + F(\delta y)_y] dx dy.$$

Изменим вид этого интеграла, выразив предыдущие вариации функций u^* , обусловленные одновременным вариированием величин x, y и ε , через вариации этих функций при неизменных x и y , т. е. через вариации

$$\bar{\delta} u = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^*(x, y; \varepsilon) \right)_{\varepsilon=0},$$

где черта над знаком вариации означает, что изменяется только параметр ε , тогда как x и y остаются неизменными.

Вариация функции u при вариировании независимых переменных связана с вариацией $\bar{\delta} u$ соотношением:

$$\delta u = \bar{\delta} u + u_x \delta x + u_y \delta y. \quad (105)$$

Таким же образом

$$\begin{aligned} \delta u_x &= (\bar{\delta} u)_x + u_{xx} \delta x + u_{xy} \delta y, \\ \delta u_y &= (\bar{\delta} u)_y + u_{yx} \delta x + u_{yy} \delta y. \end{aligned}$$

Введя эти выражения в δJ , мы получаем:

$$\delta J = \iint_G \{ [F]_u \bar{\delta} u + (F_{u_x} \bar{\delta} u)_x + (F_{u_y} \bar{\delta} u)_y + (F \delta x)_x + (F \delta y)_y \} dx dy.$$

или

$$\delta J = \iint_G [F]_u \bar{\delta} u \, dx \, dy + \int_{\Gamma} \left(F_{u_x} \frac{\partial x}{\partial n} + F_{u_y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \bar{\delta} u \, ds + \int_{\Gamma} F \left(\delta x \frac{\partial x}{\partial n} + \delta y \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds,$$

где n означает внешнюю нормаль, а s — длину дуги границы Γ области G . (Последнее выражение для δJ легко, впрочем, вывести непосредственно геометрическим путем, разлагая вариацию интеграла J на две части: одну часть, обусловленную вариацией интеграла при неизменной области интегрирования, и другую, вызываемую исключительно вариацией области; при этом вариацию области можно определить с помощью смещения точек границы, и при вычислении вариации интеграла J можно допустить, что вектор смещения n направлен по нормали к границе, а величина нормального смещения $\delta x \frac{\partial x}{\partial n} + \delta y \frac{\partial y}{\partial n}$ пропорциональна числу ε и зависит от смещаемой точки границы.

9. Теоремы Э. Нетер (E. Noether) относительно инвариантных вариационных задач. Интегралы дифференциальных уравнений механики ¹⁾. Рассмотрим преобразование:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X^*(x, y, u; a), \\ y^* &= Y^*(x, y, u; a), \\ u^* &= U^*(x, y, u; a), \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

зависящее от непрерывно изменяющегося параметра a . Всякой поверхности $u = u(x, y)$ приводится при этом в соответствие семейство поверхностей $u^* = u^*(x^*, y^*; a)$, зависящее от a и задаваемое в параметрическом виде (с параметрами x, y) уравнениями:

$$\begin{aligned} x^* &= X^*[x, y, u(x, y); a] = X(x, y; a), \\ y^* &= Y^*[x, y, u(x, y); a] = Y(x, y; a), \\ u^* &= U^*[x, y, u(x, y); a] = U(x, y; a). \end{aligned}$$

Нулевому значению параметра a пусть соответствует тождественное преобразование.

Допустим, что при преобразовании (106) интеграл

$$J = \iint_G F(x, y, u, x_x, u_y) \, dx \, dy,$$

не изменяется, т. е. пусть для всякой области G имеет место равенство:

$$J_i^* = \iint_{G^*} F(x^*, y^*, u^*, u_{x^*}^*, u_{y^*}^*) \, dx^* \, dy^* = \iint_G F \, dx \, dy,$$

где через G^* обозначена область, пробегаемая точкой (x^*, y^*) , когда точка (x, y) пробегает область G .

¹⁾ Noether E., Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Göttingen (math. phys. Kl.), стр. 235—257, 1918.

Тогда, очевидно,

$$\delta J = \alpha \left(\frac{\partial J^*}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0,$$

и мы получаем согласно формуле, выведенной в предыдущем номере:

$$0 = \iint_G \left\{ [F]_u \bar{\delta} u + \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x} \bar{\delta} u) + \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y} \bar{\delta} u) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} (F \delta x) + \frac{\partial}{\partial y} (F \delta y) \right\} dx dy, \quad (107)$$

причем мы здесь полагаем, как и раньше:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \alpha \left(\frac{\partial X^*}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \alpha \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}, \\ \delta y &= \alpha \left(\frac{\partial Y^*}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \alpha \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}, \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

и принимая во внимание формулу (105), мы получаем:

$$\bar{\delta} u = \alpha \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - (U_x^* + U_u^* u_x)_{\alpha=0} \delta x - (U_y^* + U_u^* u_y)_{\alpha=0} \delta y. \quad (109)$$

Так как уравнение (107) имеет, по условию, место для любой области G , то подинтегральное выражение в правой части этого уравнения должно тождественно обращаться в нуль, т. е.

$$[F]_u \bar{\delta} u + \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x} \bar{\delta} u + F \delta x) + \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y} \bar{\delta} u + F \delta y) = 0.$$

Соответствующие формулы получаются и для большего числа зависимых переменных. Так, например, если интеграл

$$J = \iint_G F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) dx dy,$$

остается неизменным при непрерывных преобразованиях:

$$\begin{aligned} x^* &= X^*(x, y, u, v; \alpha), & y^* &= Y^*(x, y, u, v; \alpha), \\ u^* &= U^*(x, y, u, v; \alpha), & v^* &= V^*(x, y, u, v; \alpha), \end{aligned}$$

то мы получаем:

$$[F]_u \bar{\delta} u + [F]_v \bar{\delta} v + \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x} \bar{\delta} u + F_{v_x} \bar{\delta} v + F \delta x) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y} \bar{\delta} u + F_{v_y} \bar{\delta} v + F \delta y) = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= \alpha \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - (U_x + U_u u_x + U_v v_x)_{\alpha=0} \delta x - \\ &\quad - (U_y + U_u u_y + U_v v_y)_{\alpha=0} \delta y, \\ \delta v &= \alpha \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - (V_x + V_u u_x + V_v v_x)_{\alpha=0} \delta x - \\ &\quad - (V_y + V_u u_y + V_v v_y)_{\alpha=0} \delta y. \end{aligned} \right\} \quad (109')$$

Эти формулы непосредственно распространяются на случай, когда искомые функции зависят только от одного независимого переменного или же от многих независимых переменных. Для случая одного независимого переменного мы получаем отсюда для экстремалей рассматриваемой вариационной задачи путем интегрирования первый интеграл:

$$F_u \bar{\delta} u + F_v \bar{\delta} v + F \bar{\delta} x = C \alpha,$$

где C — произвольная постоянная, а выражения $\bar{\delta} u$, $\bar{\delta} v$, $\bar{\delta} x$ являются известными функциями от x , определяемыми формулами, соответствующими формулам (108) и (109').

Проверим этот результат на примере

$$\int_{x_0}^{x_1} F(u, u') dx = \min.$$

Так как подинтегральное выражение не содержит в явном виде x , то оно остается неизменным при непрерывном преобразовании:

$$x^* = x + \alpha, \quad u^* = u;$$

отсюда получается для экстремалей интеграл: $F - u' F_{u'} = \text{const}$, что совпадает с результатом, который был нами непосредственно уже выведен в § 4.

Если известно семейство преобразований, не изменяющих интеграла J и зависящих от нескольких параметров, то оно дает нам возможность получить столько же первых интегралов (для случая одного независимого переменного) или представить в виде дивергенций столько же линейно независимых комбинаций выражений Эйлера (для случая многих переменных), сколько имеется параметров в данном семействе преобразований.

Все эти факты могут быть пояснены на примере *интегралов дифференциальных уравнений движения системы материальных точек*. Траектории точек свободной системы задаются экстремалами проблемы:

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0,$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

а потенциальная энергия зависит только от взаимного положения материальных точек, т. е. не изменяется при таком изменении положения всей системы в целом, при котором сохраняется взаимное расположение точек системы друг относительно друга.

Рассматриваемый интеграл допускает поэтому, например, непрерывное преобразование:

$$t^* = t, \quad x^* = x + a, \quad y^* = y, \quad z^* = z$$

(так что $\delta t = \delta y = \delta z = 0$, $\delta x = a$)

или преобразование вида:

$$t^* = t, \quad x^* = x \cos a + y \sin a, \quad y^* = -x \sin a + y \cos a, \quad z^* = z$$

(так что $\delta t = \delta z = 0$, $\delta x = ay$, $\delta y = -ax$).

Отсюда следует на основании предыдущего:

$$\sum T_{\dot{x}} = \sum m \dot{x} = \text{const.},$$

$$\sum (y T_{\dot{x}} - x T_{\dot{y}}) = \sum m (\dot{x}y - \dot{y}x) = \text{const.}$$

Эти интегралы вместе с четырьмя другими, получающимися из них перестановкой координат x , y , z , выражают закон движения центра тяжести и закон площадей.

Интеграл живой силы в случае, когда T и U не содержат в явном виде времени t , получается аналогичным образом на основании замечания, что интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

допускает в этом случае преобразование $t' = t + a$, $\delta t = a$.

(Подробнее см. Bessel-Hagen E., „Über die Erhaltungsgesetze der Elektrodynamik“, Math. Ann., т. 84, стр. 258—276, 1921.)

Если интеграл J не изменяется при преобразованиях, содержащих произвольную функцию p от независимых переменных x , y и ее производные до порядка k :

$$x^* = X \left(x, y, u, v, p(x, y), \frac{\partial}{\partial x} p(x, y), \dots, \frac{\partial^k}{\partial y^k} p(x, y) \right),$$

.....

то отсюда следует тождественное обращение в нуль некоторой линейной комбинации выражений Эйлера и их полных производных до порядка k , т. е. уравнения Эйлера не являются независимыми между собой.

Простейшим примером является однородная форма простого интеграла:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt.$$

Этот интеграл не изменяется, если заменить

$$t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)$$

через

$$t(\tau), x[t(\tau)], y[t(\tau)], \frac{dx[t(\tau)]}{d\tau}, \frac{dy[t(\tau)]}{d\tau}.$$

Отсюда следует, согласно предыдущему, что выражения Эйлера $[\mathfrak{F}]_x$ и $[\mathfrak{F}]_y$ связаны между собой соотношением:

$$\dot{x}[\mathfrak{F}]_x + \dot{y}[\mathfrak{F}]_y = 0,$$

(ср. формулу (31) на стр. 187).

Более подробные указания, дальнейшие обобщения и различные применения к механике, электродинамике и теории относительности читатель может найти в вышеупомянутой статье Э. Нетер и приведенных там работах.

10. Трансверсальность для случая кратных интегралов. Если требуется найти минимум интеграла

$$\iint_G F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v) du dv,$$

при условии, чтобы граница искомой поверхности $[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ лежала на заданной поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$, то мы получаем, формально распространяя на этот случай процесс, примененный для кривых, граничное условие:

$$\begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix} = 0,$$

однако необходимость этого условия до сих пор еще не удалось доказать (см. Bolza O., „Vorlesungen über Variationsrechnung“, стр. 670).

11. Дифференциальные выражения Эйлера на произвольной поверхности. Пусть кривая поверхность пространства p, q, r задана в параметрическом виде:

$$p = p(\xi, \eta), \quad q = q(\xi, \eta), \quad r = r(\xi, \eta),$$

и пусть $ds^2 = e d\xi^2 + 2f d\xi d\eta + g d\eta^2$ есть квадрат линейного элемента этой поверхности. Тогда выражение

$$Q[u, u] = \frac{gu_\xi^2 - 2fu_\xi u_\eta + eu_\eta^2}{eg - f^2}$$

не зависит от выбора параметра. Поверхностному интегралу

$$\iint_G Q[u, u] \sqrt{eg - f^2} d\xi d\eta$$

соответствует выражение Эйлера:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{gu_\xi - fu_\eta}{\sqrt{eg - f^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{-fu_\xi + eu_\eta}{\sqrt{eg - f^2}} \right],$$

и поэтому выражение

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{eg-f^2}}$$

не зависит от выбора параметров.

12. Принцип Томсона в электростатике. Пусть внутри некоторого конденсатора, т. е. области G , заключенной между замкнутыми поверхностями Γ_1 , Γ_2 , напряжение электрического поля имеет компоненты u , v , w . Пусть выполнено условие отсутствия источников:

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (110)$$

и пусть заданы заряды Q и $-Q$ на обеих поверхностях Γ_1 и Γ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\Gamma_1} (ux_n + vy_n + wz_n) dS &= Q, \\ \iint_{\Gamma_2} (ux_n + vy_n + wz_n) dS &= -Q \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

(см. обозначения на стр. 242).

Тогда условие электростатического равновесия заключается в том, чтобы энергия поля, равная с точностью до постоянного множителя, зависящего от материала конденсатора, интегралу

$$\frac{1}{2} \iiint_G (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz,$$

имела наименьшее значение.

Отсюда мы получаем на основании правила множителей Лагранжа, обозначая через $\lambda(x, y, z)$, μ_1 и μ_2 множители уравнений (110) и (111), в качестве уравнения Эйлера:

$$u = \lambda_x, \quad v = \lambda_y, \quad w = \lambda_z, \quad (112)$$

а в качестве естественных граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \mu_1 = \text{const на } \Gamma_1, \\ \lambda &= \mu_2 = \text{const на } \Gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

т. е. вектор напряжения поля с компонентами u , v , w является градиентом потенциала λ , имеющего на поверхностях Γ_1 и Γ_2 постоянное значение и удовлетворяющего уравнению потенциала $\Delta\lambda = 0$.

Этот же результат можно получить без помощи правила множителей, представляя на основании добавочного условия $u_x + v_y + w_z = 0$ вектор (u, v, w) в виде ротора некоторого другого вектора и элиминируя этим путем это добавочное условие.

13. Проблемы равновесия упругого тела. Принцип Кастилиано (Castigliano). Чтобы формулировать условия равновесия для трехмерных упругих тел, приведем некоторые определения и основные факты классической теории упругости, не останавливаясь подробно на их физическом значении.

Пусть рассматриваемое тело заполняет в состоянии покоя область G пространства (x, y, z) , ограниченную кусочно-гладкой поверхностью. Пусть это тело под влиянием каких-нибудь сил выводится из состояния покоя и принимает некоторое новое положение равновесия, причем каждая точка (x, y, z) смещается на вектор, имеющий компоненты u, v, w . Обусловленное смещениями u, v, w изменение формы тела характеризуется величинами:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_x, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(u_y + v_x), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}(u_z + w_x), \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2}(v_x + u_y), & \varepsilon_{22} &= v_y, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}(v_z + w_y), \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2}(w_x + u_z), & \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2}(w_y + v_z), & \varepsilon_{33} &= w_z, \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

называемыми „простыми деформациями“, и, кроме того, „расширением“:

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Возникающие же при деформации упругие силы характеризуются системой десяти компонент натяжения:

$$\begin{array}{ccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}, \end{array}$$

являющихся функциями от координат x, y, z и удовлетворяющих условиям симметрии $S_{12} = S_{21}$, $S_{13} = S_{31}$ и $S_{23} = S_{32}$. Эти натяжения связаны с простыми деформациями согласно закону Гука следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= a\varepsilon_{11} + b\varepsilon, & S_{12} &= a\varepsilon_{12}, & S_{13} &= a\varepsilon_{13}, \\ S_{21} &= a\varepsilon_{21}, & S_{22} &= a\varepsilon_{22} + b\varepsilon, & S_{23} &= a\varepsilon_{23}, \\ S_{31} &= a\varepsilon_{31}, & S_{32} &= a\varepsilon_{32}, & S_{33} &= a\varepsilon_{33} + b\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

где a и b — постоянные, зависящие от материала упругого тела.

Пусть на внутреннюю точку (x, y, z) тела действует объемная сила, объемная плотность которой имеет компоненты P_1, P_2, P_3 . Кроме того, пусть на поверхности тела действует поверхностная сила, поверхностная плотность которой в точке (x, y, z) имеет компоненты P_1, P_2, P_3 .

Тогда условия равновесия выражаются внутри тела уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} + \frac{\partial S_{31}}{\partial z} + P_1 &= 0, \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} + \frac{\partial S_{32}}{\partial z} + P_2 &= 0, \\ \frac{\partial S_{13}}{\partial x} + \frac{\partial S_{23}}{\partial y} + \frac{\partial S_{33}}{\partial z} + P_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

тогда как на поверхности должны выполняться условия:

$$\left. \begin{aligned} S_{11}x_n + S_{21}y_n + S_{31}z_n - p_1 &= 0, \\ S_{12}x_n + S_{22}y_n + S_{32}z_n - p_2 &= 0, \\ S_{13}x_n + S_{23}y_n + S_{33}z_n - p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Задача заключается в том, чтобы найти натяжения и простые деформации, если заданы, во-первых, объемные силы P_1, P_2, P_3 , действующие внутри тела, во-вторых, поверхностные силы p_1, p_2, p_3 , действующие на некоторой части Γ_1 поверхности тела, тогда как на остальной части Γ_2 этой поверхности заданы смещения u, v, w ¹⁾, так что на Γ_2

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}. \quad (118)$$

Состояние равновесия снова характеризуется принципом минимума потенциальной энергии и определяется путем решения проблемы I о нахождении минимума выражения:

$$\begin{aligned} & U[u, v, w] = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_G [\epsilon_{11}S_{11} + 2\epsilon_{12}S_{12} + \epsilon_{22}S_{22} + 2\epsilon_{23}S_{23} + \epsilon_{33}S_{33} + 2\epsilon_{31}S_{31}] dx dy dz - \\ & - \iiint_G (P_1 u + P_2 v + P_3 w) dx dy dz - \iint_{\Gamma_1} (p_1 u + p_2 v + p_3 w) dS, \end{aligned}$$

причем при составлении вариации этого выражения мы рассматриваем в качестве функциональных аргументов смещения u, v, w , принимающие на части Γ_2 поверхности тела заданные значения $\bar{u}, \bar{v}$ и $\bar{w}$. Чтобы выразить U через u, v, w , мы должны с помощью уравнений (115) выразить натяжения S через простые деформации ϵ , а простые деформации ϵ выразить через смещения u, v, w с помощью уравнений (114).

Варируя интеграл $U[u, v, w]$, мы без труда получим в качестве условий равновесия уравнения (116) для внутренних точек тела G и уравнения (117) для точек, лежащих на части поверхности Γ_1 .

Состояние равновесия можно определить также и другим путем, вводя вместо принципа минимума потенциальной энергии принцип минимума работы деформации. Вывод этого так называемого принципа Кастилиано и доказательство эквивалентности этого принципа принципу минимума потенциальной энергии проще всего получить, применяя преобразование Фридрихса.

Для этой цели умножим первоначальные условия (114) и (118) (рассматриваемые как предварительные условия) на соответствующие множители, проинтегрируем их и прибавим к выражению U .

Уравнения Гука (115) рассматриваются при этом исключительно как уравнения, определяющие величины S , и остаются без изменения. Решая получающуюся таким путем вариационную задачу (считая при этом введенные множители произвольно варьирующими функциями), мы опре-

¹⁾ Можно также задать на поверхности смещение по нормали и тангенциальную составляющую силы или же тангенциальное смещение и нормальную составляющую силы. Части поверхности Γ_1 и Γ_2 могут, конечно, в частности совпасть со всей поверхностью тела.

деляем эти множители согласно приведенной нами раньше схеме из условия обращения в нуль первой вариации и приходим затем (заменяя предварительные условия естественными, и наоборот) к следующей вариационной задаче, эквивалентной нашей предыдущей задаче:

$$\frac{1}{2} \iiint_G [\epsilon_{11} S_{11} + 2\epsilon_{12} S_{12} + \epsilon_{22} S_{22} + 2\epsilon_{23} S_{23} + \epsilon_{33} S_{33} + 2\epsilon_{31} S_{31}] dx dy dz - \\ - \iint_{\Gamma_2} (\bar{p}_1 \bar{u} + \bar{p}_2 \bar{v} + \bar{p}_3 \bar{w}) dS = \min.$$

Это выражение мы должны вариировать по натяжениям S , подчиненным добавочным условиям (116) внутри G и (117) на Γ_1 . При этом простые деформации ϵ должны быть заменены их выражениями через натяжения согласно уравнениям (115), а „силы реакции“ $\bar{p}$, действующие на части поверхности Γ_2 , должны быть выражены через натяжения согласно уравнениям (117). — В качестве дифференциальных уравнений задачи получаются так называемые „условия интегрируемости“, которых мы здесь не приводим в явном виде. Согласно общей теории выполнение этих условий эквивалентно существованию „смещений“ u, v, w , связанных с натяжениями S посредством уравнений (114) и (115) и принимающих на поверхности Γ_2 заданные значения $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Значение принципа Кастилиано заключается в теоретическом отношении в том, что он служит очень важным примером, подтверждающим общий закон двойственности вариационных задач. В механике принцип Кастилиано имеет особенно важное значение, так как в ряде специальных случаев практически проще пользоваться этим принципом, чем принципом минимума потенциальной энергии. Это, например, относится к соответствующему принципу в теории изгиба балок, который сводится к обыкновенной задаче минимума.

14. Принцип Кастилиано в теории балок. Покажем на типичном примере, как принцип Кастилиано в теории балок выводится из принципа минимума потенциальной энергии. Рассмотрим балку, наглухо закрепленную на левом конце $x = -l$, подпертую в середине $x = 0$ и подверженную на правом конце $x = l$ действию силы P_1 и момента M_1 . Пусть, кроме того, балка имеет непрерывно распределенную нагрузку с плотностью $q(x)$ на единицу длины. Если обозначить через $u(x)$ вертикальный прогиб балки, то потенциальная энергия задается выражением:

$$U = \int_{-l}^{+l} \left[\frac{1}{2} (u'')^2 - qu \right] dx - P_1 u(l) + M_1 u'(l).$$

В положении равновесия балки это выражение должно достигнуть минимума, если брать в качестве допустимых функций сравнения все непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции $u(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(-l) = 0, \quad u'(-l) = 0, \quad u(0) = 0, \quad (119)$$

причем вторая производная $u''(x)$ предполагается кусочно-непрерывной.

Чтобы получить естественные условия, определяющие решение нашей задачи, введем функцию $M(x) = -u''(x)$ (равную изгибающему моменту с точностью до множителя, зависящего от материала). Эти условия выражаются тогда следующим образом: внутри обоих промежутков $(-l, 0)$ и $(l, 0)$ функция $M(x)$ и ее первая и вторая производные непрерывны и удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} M''(x) + q(x) &= 0, \\ (M - 0) - M(+0) &= 0, \\ M(l) - M_1 &= 0, \\ M'(l) - P_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Чтобы получить принцип Кастильяно, преобразуем предыдущую вариационную задачу следующим образом:

1. Заменим в U производную $u''(x)$ через $-M(x)$.
2. Умножим уравнение $M(x) + u''(x) = 0$ и уравнения (120) на произвольные множители и, проинтегрировав уравнения $\lambda(M'' + q) = 0$ и $\mu(M + u'') = 0$, прибавим полученные интегралы к выражению U .
3. Приравнявая нулю вариацию составленного таким путем выражения, мы получим ряд уравнений, из которых мы можем выразить произвольные множители через M . Заменяя в варируемом выражении произвольные множители их найденными значениями, мы получим выражение, равное взятой со знаком минус „работе деформации“:

$$\frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} M^2(x) dx,$$

так что задача сводится к нахождению минимума этого интеграла, причем допустимыми функциями сравнения являются функции $M(x)$, дважды непрерывно дифференцируемые внутри каждого из промежутков $(-l, 0)$ и $(0, l)$ и удовлетворяющие добавочным условиям (120).

Из этих добавочных условий можно определить функцию $M(x)$ с точностью до одной произвольной постоянной интегрирования (например одной из реакций в подпертых точках или момента в точке закрепления), и данная вариационная проблема сводится к обыкновенной задаче на минимум для определения этой постоянной.

Из предыдущего ясно, какой вид принимает это преобразование в случае других условий в отношении нагрузки и точек опоры балки; при этом, очевидно, принцип Кастильяно имеет смысл только тогда, когда число условий, касающихся точек опоры и закрепления балки, больше двух, т. е. в „статически неопределимых случаях“, ибо в противном случае момент $M(x)$ однозначно определяется уже с помощью одних только естественных условий задачи.

15. Вариационная задача о продольном изгибе стержня. Если на оба конца стержня действует в продольном направлении сжимающая сила P , то стержень может находиться в состоянии либо устойчивого, либо неустойчивого равновесия, т. е. при небольшом боковом изгибе стержень либо возвращается снова в свое первоначальное поло-

жение равновесия, либо он „искривляется“, в зависимости от того, меньше ли сила P некоторого верхнего предела P_0 или нет. Этот верхний предел P_0 называется „критической силой“. Если $P < P_0$, то потенциальная энергия стержня имеет в состоянии равновесия минимальное значение, по сравнению с достаточно малыми изгибаниями; при $P > P_0$ потенциальная энергия стержня в состоянии равновесия не обладает этим свойством минимума.

Если длина стержня в состоянии равновесия равна единице, то, обозначая боковой прогиб стержня через $u(x)$ ($0 \leq x \leq l$), мы получим, что потенциальная энергия стержня увеличивается при этом на величину, равную с точностью до постоянного множителя, зависящего от материала стержня, выражению:

$$U = \int_0^l (u'')^2 dx - P \int_0^l (u')^2 dx.$$

Первый член выражает энергию изгибания, второй — потенциальную энергию удлинения (как у нити).

Для достаточно малых значений силы P ¹⁾ при граничных условиях $u(0) = u(l) = 0$ минимум энергии U равен нулю. Но если P достаточно велико, то U может принимать отрицательные значения; для этой цели достаточно для любой допустимой функции u выбрать P так, чтобы

$$P > \frac{\int_0^l (u'')^2 dx}{\int_0^l (u')^2 dx}.$$

Таким образом критическая сила P_0 , т. е. максимальное значение силы P , при котором минимум U еще равен нулю, может быть определена как минимум выражения:

$$\frac{\int_0^l (u'')^2 dx}{\int_0^l (u')^2 dx}$$

при граничных условиях: $u(0) = u(l) = 0$ или же, что этому эквивалентно, как минимум интеграла:

$$\int_0^l (u'')^2 dx$$

¹⁾ Например при $P < \frac{1}{l^2}$; в самом деле, так как $\int_0^l u' dx = 0$, то имеется точка x_0 , для которой $u'(x_0) = 0$; тогда

$$u'(x) = \int_{x_0}^x u'' dx, \quad (u')^2 \leq l \int_0^l (u'')^2 dx, \quad \int_0^l (u')^2 dx \leq l^2 \int_0^l (u'')^2 dx.$$

при добавочном условии $\int_0^l (u')^2 dx = 1$ и граничных условиях $u(0) = u(l) = 0$.

Мы называем число $P_0 = \lambda$ первым собственным значением дифференциального уравнения:

$$u''' + \lambda u'' = 0$$

с граничными условиями $u(0) = u(l) = 0$, $u''(0) = u''(l) = 0$.

Такого рода задача собственных значений и способы их решения с помощью методов вариационного исчисления будут нами рассмотрены в ближайших двух главах.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IV.

Более подробные указания относительно литературы по вариационному исчислению можно найти в прекрасной библиографии Лека (Lecat):

Lecat M., Bibliographie du calcul des variations, 1850—1913, Gand-Paris 1913.

Lecat M., Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu'à 1850 comprenant la liste des travaux, qui ont préparé ce calcul, Gand-Paris 1913.

Мы приведем здесь лишь наиболее важные учебники.

Учебники и систематические обозрения.

Немецкое издание энциклопедии математики. Статьи:

Kneser A., Variationsrechnung, т. 2 A, статья 8, стр. 571—625. Доведена до 1900 г.

Zermelo E. und Hahn H., Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren, т. 2A, статья 8a, стр. 626—641. Доведена до 1904 г.

Hellinger E., Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Continua, т. 4D, статья 30, стр. 601—694. Доведена до 1913 г.

Французское издание энциклопедии:

Lecat M., Calcul des variations, т. II, вып. 6, статья 31, стр. 1—288. Доведена до 1913 г.

Moigno M. et Lindelöf L. L., Calcul des variations, Paris 1861.

Kneser A., Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1925.

Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909.

Hadamard J., Leçons sur le calcul des variations, I, Paris 1910.

Tonnelli L., Fondamenti del Calcolo delle Variazioni, I и II, Bologna 1921 и 1923.

Vivanti G., Elementi del Calcolo delle Variazioni. 1923.

Bliss G. A., Calculus of Variations, Chicago 1924.

ПРОБЛЕМЫ КОЛЕБАНИЙ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ.

Вариационные принципы физики привели нас в гл. IV, § 10 к типичным краевым задачам либо к задачам с начальными условиями для процессов равновесия и движения непрерывно протяженных физических систем. Поставленные там в частности задачи носят все линейный характер. В рамках систематической законченности мы рассмотрим эти вопросы лишь позднее во втором томе, в общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. Но мы все же хотим в этой и в следующей главах изложить ряд важнейших черт из теории линейных дифференциальных уравнений, в особенности поскольку они относятся к колебательным процессам. При этом в центре изучения будет стоять метод собственных функций.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ.

Начнем с нескольких общих замечаний о линейных задачах.

1. Общие замечания. Принцип наложения. Под линейным однородным дифференциальным выражением, или дифференциальным оператором, мы разумеем вообще функцию

$$\mathcal{L}[u] = Au + Bu_x + \dots + Cu_{xx} + \dots,$$

отнесенную функции u , т. е. линейную однородную комбинацию функции u и ее производных до какого-нибудь заданного порядка — *порядка дифференциального выражения*, — причем коэффициенты являются данными функциями независимых переменных. Основное свойство, характеризующее такой дифференциальный оператор, выражается следующим равенством:

$$\mathcal{L}[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 \mathcal{L}[u_1] + c_2 \mathcal{L}[u_2], \quad (1)$$

где c_1 и c_2 — какие угодно постоянные. Уравнение вида:

$$\mathcal{L}[u] = f(x, y, \dots),$$

где f — данная функция независимых переменных, представляет собой самое общее линейное дифференциальное уравнение. Если $f \equiv 0$, то дифференциальное уравнение называется однородным, в противном случае — неоднородным.

Линейные однородные дифференциальные операторы являются лишь частным, хотя в дальнейшем почти исключительно рассматриваемым при-

мером линейных однородных функциональных операторов. Другой такой оператор представляет, например, интегральное выражение:

$$\iint_G K(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

знакомое нам из теории интегральных уравнений, или оператор

$$\Theta[u] = \frac{2}{h^2 \pi} \int_0^{2\pi} \{u(x + h \cos \vartheta, y + h \sin \vartheta) - u(x, y)\} d\vartheta,$$

или разностный оператор

$$\frac{1}{h^2} \{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)\}.$$

Два последних, как это легко проверить, в пределе при $h \rightarrow 0$ переходят в дифференциальный оператор Δu в предположении, что u имеет непрерывные производные до второго порядка. Условие, что линейная комбинация таких линейных операторов равняется известной функции, дает линейное функциональное уравнение, примерами чего служат, кроме дифференциальных уравнений, также и интегральные и разностные уравнения. При этом вышеприведенное уравнение (1) вообще характеризует линейную однородную природу оператора $L[u]$.

Решения однородного дифференциального уравнения — и вообще однородного функционального уравнения — обладают следующим основным свойством, *свойством наложения (суперпозиции)*: Если u_1, u_2 — два решения, то и выражение $c_1 u_1 + c_2 u_2$ является решением при произвольных значениях постоянных c_1, c_2 . Вообще, можно комбинировать произвольно большое число частных решений $u_1, u_2, \dots$ с постоянными $c_1, c_2, \dots$, и при этом получится новое решение $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots$.

Сходящийся ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$, составленный из бесконечной последовательности решений $u_1, u_2, \dots$, наверно представляет собой решение в том случае, если возможно почленное применение к этому ряду дифференциальной операции $L[u]$.

Если известно решение $u(x, y, \dots, a)$ функционального уравнения $L[u] = 0$, зависящее еще от произвольного параметра a , то можно получить новые решения в следующем виде:

$$v = \int \psi(a) u(x, y, \dots; a) da,$$

причем $\psi(a)$ — произвольная функция, а область интегрирования может быть выбрана как угодно, при том лишь ограничении, что интеграл должен существовать и что должно быть дозволено выполнение процесса L под знаком интеграла; для дифференциальных операторов, при кусочно-непрерывной функции $\psi(a)$ и конечной области интегрирования, это условие, во всяком случае, выполняется.

Если полностью решено однородное уравнение, то для решения неоднородного потребуется знание одного лишь частного решения, так как все решения неоднородного уравнения получатся от прибавления одного его частного решения ко всем решениям однородного.

2. Однородные и неоднородные задачи. Краевые условия. Задачи, с которыми нам придется иметь дело, состоят в том, что требуется найти функцию, удовлетворяющую, во-первых, некоторому линейному дифференциальному уравнению и, во-вторых, еще дальнейшим условиям, а именно краевым или же начальным условиям (ср. гл. IV, § 10). Говорят, что задача носит однородный характер, если одновременно с решением u является решением и функция cu , при произвольном значении постоянного c . Для этого должно быть однородно не только дифференциальное уравнение, но и краевое условие. Такие однородные краевые условия выражаются преимущественно условными равенствами, связывающими значения, принимаемые искомой функцией u и ее производными $u_x, \dots$ на границе Γ рассматриваемой области G . Простейшим условием такого рода является $u=0$, или также $\frac{\partial u}{\partial n}=0$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает, по обыкновению, дифференцирование по направлению внешней нормали.

Если функция u подчинена линейным неоднородным краевым условиям, состоящим, например, в том, что заданы (не всюду исчезающие) краевые значения $u=f$, то можно следующим образом прийти к эквивалентной задаче с однородными краевыми условиями. Допустим, что дело идет об однородном уравнении $L[u]=0$ и что краевые значения f можно непрерывно продолжить внутрь области G таким образом, что $L[f]=g$ становится в области G непрерывной функцией положения; в таком случае, для $v=f-u$ получим дифференциальное уравнение $L[v]=g$ с однородным краевым условием $v=0$. Если, наоборот, предложено неоднородное уравнение с однородными краевыми условиями и известно одно частное решение неоднородного уравнения, то вычитанием получают задачу с однородным уравнением и неоднородными краевыми условиями. Можно вообще сказать: *Однородное дифференциальное уравнение с неоднородными краевыми условиями равносильно неоднородному дифференциальному уравнению с однородными краевыми условиями.*

3. Формальные соотношения. Сопряженные дифференциальные выражения. Формулы Грина. Разберем вкратце некоторые формальные соотношения, касающиеся линейных дифференциальных выражений. При этом мы будем рассматривать преимущественно такие дифференциальные выражения, которые, как в гл. IV, § 10, происходят из вариационной задачи с однородным квадратичным подынтегральным выражением, а именно так называемые *самосопряженные дифференциальные выражения*.

а) Одно независимое переменное. Квадратичному выражению

$$Q[u, u] = au'^2 + 2bu'u + du^2,$$

где a, b, d — данные функции x , а $u(x)$ — функциональный аргумент, соответствует симметрическое билинейное выражение:

$$Q[u, v] = au'v' + b(u'v + v'u) + duv,$$

так что выполняется равенство:

$$Q[u+v, u+v] = Q[u, u] + 2Q[u, v] + Q[v, v].$$

Принтегрируем выражение $Q[u, v]$ в интервале $x_0 \dots x_1$. Интегрируя по частям можно освободиться от производных функции v , и мы получим „формулу Грина“

$$\int_{x_0}^{x_1} Q[u, v] dx = - \int_{x_0}^{x_1} v L[u] dx + (au' + bu)v \Big|_{x_0}^{x_1}, \quad (2)$$

причем дифференциальное выражение

$$L[u] = (au')' + (b' - d)u$$

с точностью до множителя -2 совпадает с эйлеровым дифференциальным выражением для подынтегрального выражения $Q[u, u]$.

Вследствие симметричности выражения, $Q[u, v]$ точно так же получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} Q[u, v] dx = - \int_{x_0}^{x_1} u L[v] dx + (av' + bv)u \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (2')$$

и из (2) и (2') — симметричную формулу Грина:

$$\int_{x_0}^{x_1} (vL[u] - uL[v]) dx = a(u'v - v'u) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (2'')$$

Если вместо симметрического билинейного выражения $Q[u, v]$ исходить из произвольного билинейного выражения

$$B[u, v] = au'v' + bu'v + cv' + duv,$$

то с помощью того же приема — интегрирования по частям — получаются формулы следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} B[u, v] dx &= - \int_{x_0}^{x_1} vL[u] dx + (au' + cu)v \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} uM[v] dx + (av' + bv)u \Big|_{x_0}^{x_1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (vL[u] - uM[v]) dx = [a(u'v - v'u) + (c - b)uv] \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (4)$$

Дифференциальное выражение

$$M[v] = (av')' + (bv)' - cv' - dv$$

взаимно однозначно определяется дифференциальным выражением

$$L[u] = (au')' - bu' + (cu)' - du$$

с помощью требования, чтобы интеграл на левой стороне формулы (4) выражался только через значения функции и ее производных на границе. Оба эти выражения называются *взаимно сопряженными*. Если $L[u] = M[u]$ тождественно, то дифференциальное выражение $L[u]$ называется *самосопряженным*; его можно вывести, как это сделано выше, из некоторого квадратичного выражения $Q[u, u]$.

Если исходить из дифференциального выражения

$$pu'' + ru' + qu,$$

то для сопряженного выражения получается:

$$(pv)'' - (rv)' + qv,$$

а отсюда вытекает, что необходимым и достаточным условием того чтобы дифференциальное уравнение было самосопряженным, является выполнение соотношения:

$$p' = r.$$

С помощью соотношений $a = p$, $b' - d = q$ можно тогда для выражения $(pu')' + qu$ построить соответствующее квадратичное выражение $Q[u, u]$ разнообразными способами.

Посредством умножения на подходящий не исчезающий множитель $\rho(x)$ можно любое линейное дифференциальное выражение $pu'' + ru' + qu$ превратить в самосопряженное; надо лишь положить

$$\rho(x) = e^{\int \frac{r-p'}{p} dx}$$

С тем же успехом можно дифференциальное выражение $pu'' + ru' + qu$ сделать самосопряженным, введя вместо x новую независимую переменную, а именно:

$$x' = \int e^{\int \frac{r-p'}{p} dx} dx,$$

или вместо u новую зависимую переменную:

$$v = ue^{\int \frac{r-p'}{p} dx}$$

б) Несколько независимых переменных. Для линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка получаются совершенно аналогичные преобразования. Идею этих преобразований мы выясним на важнейшем примере квадратичного подынтегрального выражения:

$$Q[u, u] = p(u_x^2 + u_y^2) + qu^2$$

с полярной формой

$$Q[u, v] = p(u_x v_x + u_y v_y) + quv.$$

Интегрируя выражение $Q[u, v]$ по области G с кусочно-гладкой границей Γ , получим с помощью интегрирования по частям формулу Грина:

$$\iint_G Q[u, v] dx dy = - \iint_G v L[u] dx dy + \int_{\Gamma} p v \frac{du}{dn} ds, \quad (5)$$

где

$$L[u] = (p u_x)_x + (p u_y)_y - qu,$$

предполагая, что в замкнутой области G функция v непрерывна и имеет кусочно-непрерывные первые производные, между тем как у функции u требуется непрерывность первых и кусочная непрерывность вторых производных. При этом через s обозначена длина дуги и через $\frac{d}{dn}$ — дифференцирование по направлению внешней нормали.

Если v удовлетворяет тем же условиям, что u , то можно в формуле поменять местами u и v , и после вычитания обеих формул получим симметричную формулу Грина:

$$\iint_G (v L[u] - u L[v]) dx dy = \int_{\Gamma} p \left(v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} \right) ds. \quad (5')$$

Наше самосопряженное¹⁾ дифференциальное выражение $L[u]$ переходит при $p=1$, $q=0$ в выражение потенциала Δu , а формулы (5) и (5') — в известные формулы Грина из теории потенциала.

4. Линейные функциональные уравнения, как предельные случаи и аналоги систем линейных уравнений. Все дифференциальные уравнения можно рассматривать как предельные случаи уравнений в конечных разностях, заменяя отношения дифференциалов соответствующими отношениями разностей, причем приращение независимой переменной, так называемая ширина сетки, имеет значение h , а значения функции u рассматриваются исключительно в узловых точках решетки, координаты которых $x, y, \dots$ являются целыми кратными числу h . Дифференциальное уравнение переходит тогда в систему линейных уравнений для значений функции u в этих точках решетки. Подобным же образом можно и интегральные и другие функциональные уравнения заменить системами линейных уравнений. Во втором томе мы примем эту мысль за исходный пункт для подробного изучения дифференциальных уравнений, здесь же удовольствуемся тем, что воспользуемся аналогией между дифференциальными и разностными уравнениями как эвристическим принципом, поставив во главу угла предположение, что задачи, приводящие к линейным дифференциальным уравнениям, имеют совершенно аналогичные свойства с теми задачами на линейные уравнения, из которых первые получаются путем предельного перехода. Эта догадка подтвердится впоследствии при очень общих предположениях.

¹⁾ Точно так же, как и у обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, можно и дифференциальному выражению $L[u]$ с частными производными отнести сопряженное выражение $M[v]$ с помощью требования, чтобы $vL[u] - uM[v]$ было выражением типа дивергенции.

В частности, по отношению к нашим задачам на линейные дифференциальные уравнения имеет место следующая *альтернатива*: если относящаяся к однородному дифференциальному выражению однородная же задача имеет единственное решение $u=0$, то неоднородная задача всегда имеет одно и только одно решение. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то неоднородная имеет решение лишь при наличии некоторых ограничительных линейных условий, и в последнем случае это решение неоднозначно. Как и в гл. I, особую роль будет играть случай, когда в однородное дифференциальное выражение входит линейно параметр λ . Нас интересуют как раз те значения λ , *собственные значения* нашей задачи, при которых однородная задача имеет нетривиальное решение, *собственную или фундаментальную функцию*.

В задачах на линейные дифференциальные уравнения физики непрерывных систем, которыми в последующем займемся, замене дифференциальных уравнений уравнениями в конечных разностях соответствует замена непрерывной системы системой с конечным числом степеней свободы

§ 2. Системы с конечным числом степеней свободы.

Как и в гл. IV, § 10, будем рассматривать систему с n степенями свободы с обобщенными координатами $q_1, \dots, q_n$, которой кинетическая и потенциальная энергии заданы квадратичными формами:

$$T = \sum_{h,k=1}^n a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k; \quad U = \sum_{h,k=1}^n b_{hk} q_h q_k$$

с постоянными коэффициентами a_{hk}, b_{hk} .

Форма T — положительная определенная по своей природе, что же касается формы U , то мы *предполагаем*, что она положительная определенная, и в таком случае мы знаем, что при $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ имеет место устойчивое равновесие. Если некоторым из координат q_h дать различные постоянные отличные от нуля значения или наложить на q_h другие неоднородные связи, то установится новое состояние равновесия, отличное от первоначального равновесного положения $q_h = 0$. (Эта последняя постановка вопроса, которая при конечном числе степеней свободы не представляет особого интереса с математической точки зрения, при предельном переходе $n \rightarrow \infty$ приводит к типичным краевым задачам дифференциальных уравнений с частными производными.)

1. Собственные колебания. Нормальные координаты. Общая теория процесса. Общая задача о движении нашей системы формулируется с помощью следующих дифференциальных уравнений.

$$\sum_{k=1}^n (a_{hk} \ddot{q}_k + b_{hk} q_k) = P_h(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

$$(a_{hk} = a_{kh}, \quad b_{hk} = b_{kh}),$$

где функции $P_h(t)$ обозначают компоненты внешней силы, причем ищется

такое решение $q_h(t)$ этой системы дифференциальных уравнений, для которого заранее заданы значения $q_h(0)$ и $\dot{q}_h(0)$ ($h=1, 2, \dots, n$) (начальное положение и начальная скорость): Если внешние силы $P_h(t)$ равны нулю, то говорят о *свободном движении* или *свободном колебании системы*.

Полное представление процесса движения легко получается с помощью теории квадратичных форм, как она изложена в гл. I. Рассмотрим две положительные определенные квадратичные формы;

$$G = \sum_{h,k=1}^n a_{hk} x_h x_k, \quad F = \sum_{h,k=1}^n b_{hk} x_h x_k$$

и приведем их линейным преобразованием переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$x_h = \sum_{k=1}^n \tau_{hk} \xi_k, \quad \xi_h = \sum_{k=1}^n \tau_{hk} x_k, \quad (7)$$

к следующему виду:

$$G = \sum_{h=1}^n \xi_h^2, \quad F = \sum_{h=1}^n \lambda_h \xi_h^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — положительные числа, что вследствие определенности форм U и T всегда возможно. Введя, соответственно формулам (7), в уравнения (6) вместо координат $q_1, \dots, q_n$ новые, так называемые *нормальные координаты* $\eta_1, \dots, \eta_n$ с помощью формул

$$q_h = \sum_{k=1}^n \tau_{hk} \eta_k, \quad \eta_h = \sum_{k=1}^n \bar{\tau}_{hk} q_k, \quad (7')$$

получим:

$$T = \sum_{h=1}^n \dot{\eta}_h^2, \quad U = \sum_{h=1}^n \lambda_h \eta_h^2,$$

и уравнения движения преобразуются к следующему виду:

$$\ddot{\eta}_h + \lambda_h \eta_h = N_h(t),$$

где

$$N_h(t) = \sum_l P_l(t) \tau_{lh}$$

— „нормальные координаты“ внешней силы. В этих уравнениях все координаты η_h , которые требуется определить как функции времени, друг от друга отделены.

Впрочем, часто целесообразно бывает дать понятию нормальных координат несколько более общее определение, понимая под ними такие

координаты, в которых выражения энергий имеют следующий вид:

$$T = c \sum_{h=1}^n \dot{\eta}_h^2, \quad U = \sum_{h=1}^n \lambda_h^* \eta_h^2,$$

причем в этом случае $\lambda_h = \frac{\lambda_h^*}{c} = \nu_h^2$.

В случае свободного движения $N_h(t) = 0$, и решение тотчас же получается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta_h &= y_h \cos \nu_h(t - \varphi_h) & (y_h = \sqrt{\lambda_h}) \\ &= a_h \cos \nu_h t + b_h \sin \nu_h t & (h = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (8)$$

Величины a_h , b_h или y_h , φ_h являются здесь произвольными постоянными интегрирования. То свободное колебание, в котором все нормальные координаты, кроме h -й, — нули, между тем как движение h -й нормальной координаты дается уравнением $\eta_h = y_h \cos \nu_h(t - \varphi_h)$, называют *h*-м *главным* или *собственным колебанием* системы с *амплитудой* y_h и *фазой* φ_h . Если говорят просто о h -м главном колебании, то имеют в виду функцию $\eta_h = \cos \nu_h t$, т. е. берут для амплитуды значение 1, а для фазы значение 0. Значения ν_h называются *числами собственных колебаний* или *собственными частотами* или, пользуясь выражением, заимствованным из акустики, *высотами тонов* системы. Выражение h -го главного колебания в первоначальных координатах q_k можно получить с помощью формул преобразования (7'), подставляя в них вместо η_h значение $\cos \nu_h t$, а вместо всех остальных η значение нуль.

Всякое свободное движение системы есть наложение различных собственных колебаний с различными фазами и амплитудами. В $2n$ постоянных интегрирования $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ мы имеем в нашем распоряжении ровно столько произвольных параметров, сколько требуется для того, чтобы приспособить решение к произвольно заданному начальному состоянию, т. е. к заданным начальным значениям координат и скоростей.

Для того чтобы формально представить решение этой задачи, объединим величины $q_1, \dots, q_n$ в n -мерный вектор q . Обозначим через e_i вектор с компонентами $\tau_{1i}, \tau_{2i}, \dots, \tau_{ni}$ ($i = 1, 2, \dots, n$); тогда в силу формул (7') и (8) получим:

$$q(t) = \sum_{i=1}^n e_i y_i \cos \nu_i(t - \varphi_i).$$

Если начальное состояние охарактеризовать векторами $q(0)$ и $\dot{q}(0)$, то эта форма общего решения для свободного движения немедленно приводит к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} q(0) &= \sum_{i=1}^n e_i y_i \cos(\nu_i \varphi_i), \\ \dot{q}(0) &= \sum_{i=1}^n e_i y_i \nu_i \sin(\nu_i \varphi_i). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Если для простоты принять, что форма G уже является единичной формой $G = \sum_{i=1}^n x_i^2$, то „собственные векторы“ e_i образуют полную ортогональную систему векторов (ср. гл. I, § 1), и из (9) умножением на e_h получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} e_h \ddot{q}(0) &= y_h \cos(\nu_h \varphi_h), \\ e_h \dot{q}(0) &= \nu_h y_h \sin(\nu_h \varphi_h); \end{aligned}$$

с их помощью можно определить амплитуды y_h и фазы φ_h .

Сделаем еще следующее замечание: собственные колебания могут быть определены как такие движения системы, при которых отношения координат q_k друг к другу не зависят от времени, у которых, следовательно, q_k имеет вид: $q_k = v_k g(t)$, где v_k не зависит от времени. С помощью этой подстановки немедленно приходим от уравнений (6) при $P_i = 0$ к следующим уравнениям:

$$\frac{\sum_{k=1}^n b_{ik} v_k}{\sum_{k=1}^n a_{ik} v_k} = - \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}.$$

Замечая, что здесь в правой части стоит независимая от i и от t постоянная, которую обозначим через λ , получим немедленно для квадратичных форм G и F задачу о собственных значениях, выраженную уравнениями:

$$\sum_{k=1}^n (b_{ik} - \lambda a_{ik}) v_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

чем установлена связь с изложенным выше методом, покоящимся на преобразовании координат.

Для того чтобы затем решить также задачу о *вынужденном движении*, в которой внешние силы $P_h(t)$ одновременно не исчезают, достаточно найти одно единственное решение дифференциальных уравнений $\ddot{\eta}_h + \lambda_h \eta_h = N_h(t)$. Таким решением, для которого к тому же $\eta_h(0) = 0$ и $\dot{\eta}_h(0) = 0$, является¹⁾

$$\eta_h(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \int_0^t N_h(\tau) \sin \sqrt{\lambda_h} (t - \tau) d\tau, \quad (10)$$

а общее вынужденное движение получится тогда наложением этого частного движения на самое общее свободное движение.

Если внешняя сила $N_h(t)$ чисто периодическая с частотой ω_h , например $N_h(t) = a_h \cos \omega_h (t - \delta)$, то формула (10) показывает, что коль скоро

¹⁾ Это решение можно получить, заменяя непрерывно действующую внешнюю силу прерывными толчками, отделенными промежутками Δt , и совершая затем предельный переход $\Delta t \rightarrow 0$.

$\omega_k^2 \neq \lambda_h$, движение координаты η_h получается наложением чисто периодического колебания частоты ω_h и собственного колебания частоты $\sqrt{\lambda_h}$. Если же $\omega_h^2 = \lambda_h$ или, как говорят, возникает *резонанс*, то вынужденное движение координаты η_h уже не следует ритму возбуждения $N_h(t)$, но, как это легко вытекает из формулы (10),

$$\eta_h(t) = \frac{a_h t}{2\omega_h} \sin \omega_h(t - \delta) + \frac{a_h \sin \omega_h \delta}{2\omega_h^2} \sin \omega_h t,$$

и $|\eta_h|$ остается не ограниченной при возрастании t .

2. Общие свойства колебательных систем. Если расположить квадраты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ чисел колебаний в порядке возрастающей величины: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, то число λ_p , согласно гл. I, § 4, можно определить как наибольшее значение, которое может принять минимум

квадратичной формы $F = \sum_{h,k=1}^n b_{hk} x_h x_k$, когда переменные подчинены, во-

первых, условию $G = \sum_{h,k=1}^n a_{hk} x_h x_k = 1$, и, во-вторых, еще $p-1$ добавочному условию вида:

$$\sum_{h=1}^n a_{hj} x_h = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p-1) \quad (11)$$

с произвольно выбранными a_{hj} . Отсюда немедленно получаются некоторые общие теоремы об этих частотах и о соответствующих им высотах тонов. Эти теоремы были уже приведены и доказаны в гл. I, § 4 без указания их физического значения.

ТЕОРЕМА I. *p -й обертон колеблющейся системы является наивысшим из основных тонов всех систем, получающихся из данной наложением каких угодно $p-1$ связей вида (11).*

ТЕОРЕМА II. *Если система S благодаря наложению r ограничительных условий вида (11) переходит в систему S' с r связями, то частоты $\nu'_1, \dots, \nu'_{n-r}$ связанной системы не меньше соответствующих частот $\nu_1, \dots, \nu_{n-r}$ свободной системы и вместе с тем не больше частот $\nu_{r+1}, \dots, \nu_n$ свободной системы, т. е. имеют место следующие соотношения: $\lambda_p \leq \lambda'_p \leq \lambda_{p+r}$ и соответственно*

$$\nu_p \leq \nu'_p \leq \nu_{p+r} \quad (p=1, 2, \dots, n-r).$$

ТЕОРЕМА III. *При увеличении инертности основной тон и все обертоны падают или, по меньшей мере, не повышаются.*

При этом под увеличением инертности мы понимаем переход к системе с такой кинетической энергией T' , что $T' - T$ никогда не принимает отрицательных значений: потенциальная энергия пусть остается при этом неизменной.

ТЕОРЕМА IV. *При увеличении жесткости системы основной тон и все обертоны повышаются или, во всяком случае, не понижаются.*

При этом мы понимаем под увеличением жесткости переход к системе с той же кинетической энергией, но потенциальная энергия которой получается из данной прибавлением неотрицательной формы.

Едва ли нуждается в особом упоминании, что основной тон и обертоны изменяются в противоположном смысле, чем по теоремам II—IV, когда связи снимают, массы уменьшают или же систему расщепляют, т. е. уменьшают ее жесткость.

§ 3. Колебания струны.

Мы видели, что при конечном числе степеней свободы можно овладеть всей совокупностью движений, если знать только синхронные колебания. То же относится и к непрерывным колебательным системам. Мы у них будем искать такие свободные колебания, при которых отклонение u может быть представлено как произведение множителя $g(t)$, зависящего только от времени, на зависящий только от положения множитель $v(x)$, называемый *формой колебания* или множителем формы (*стоячие колебания*). Любой колебательный процесс можно тогда представить как наложение таких синхронных колебаний.

Мы выясним эти свойства на ряде важных примеров.

1. Свободные колебания однородной струны. Прежде всего рассмотрим простейший пример, а именно дифференциальное уравнение:

$$cu_{xx} = \rho u_{tt} \quad \text{или} \quad u_{xx} = \mu^2 u_{tt} \quad \left(\mu = \sqrt{\frac{\rho}{c}} \right) \quad (12)$$

закрепленной однородной струны с краевыми условиями

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

(ср. гл. IV, § 10, стр. 235, 236). В целях упрощения письма представим себе, что единица времени так выбрана, что $\mu = 1$. Сообразно с нашим общим планом будем искать такие функции, удовлетворяющие уравнению (12), которые расщепляются на множитель, зависящий только от времени, и множитель, зависящий только от места, т. е. могут быть представлены в таком виде:

$$u = v(x) g(t).$$

Дифференциальное уравнение (12) можно в таком случае привести к следующему виду:

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{g''(t)}{g(t)},$$

откуда вытекает, что обе стороны должны равняться одной и той же постоянной — λ , ибо одна сторона не зависит от x , а другая — от t . Из краевого условия $v(0)g(t) = v(\pi)g(t) = 0$ следует, что

$$v(0) = v(\pi) = 0.$$

Стало быть, функцию $v(x)$ следует определить из дифференциального уравнения:

$$v'' + \lambda v = 0 \quad (13)$$

и краевых условий

$$v(0) = v(\pi) = 0. \quad (13')$$

Эти требования не могут выполняться при произвольных значениях постоянной λ . Напротив, из вида общего решения дифференциального уравнения (13): $c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda} x}$ вытекает, что краевые условия выполнимы в том и только в том случае, если $\lambda = n^2$ есть квадрат целого числа n . Соответствующими решениями являются функции $v_n = \sin nx$. Числа $1, 2^2, 3^2, \dots$ и функции $\sin x, \sin 2x, \dots$ мы будем называть соответственно *собственными значениями* и *собственными функциями* нашей задачи, а самую задачу — *задачей о собственных значениях*, определенной дифференциальным уравнением (13) и краевыми условиями (13').

Для $g(t)$ получается вообще $g = a \cos nt + b \sin nt$ с произвольными постоянными a, b . Таким образом для всякого положительного целого значения n имеем решение дифференциального уравнения (12) в следующем виде:

$$\sin nx (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

представленные в такой форме синусоидальные или гармонические движения называются *собственными колебаниями* струны; числа $n = \nu_n$ — это соответствующие *собственные частоты*. Более общие решения можно получить в следующей форме:

$$u = \sum_n \sin nx (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

причем сумма может содержать как конечное, так и бесконечно большое число членов; в последнем случае, конечно, определенно предполагается, что ряд равномерно сходится и допускает двукратное почленное дифференцирование по каждой из двух переменных.

Возникает вопрос, можно ли подходящим выбором коэффициентов a_n, b_n приспособить решение к произвольно заданному при помощи функций $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ начальному состоянию, т. е. выбрать коэффициенты так, чтобы выполнялись равенства:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin nx.$$

Но теорема о разложении в теории рядов Фурье утверждает, что вышеприведенные разложения возможны при надлежащем определении постоянных a_n, b_n . В таком случае ряд, образованный с помощью определенных таким образом коэффициентов, действительно представляет искомое решение ¹⁾.

Совершенно аналогичные результаты получим, если струна подчинена другим краевым условиям. Если, например, начальная точка закреплена, т. е. $u(0, t) = 0$, а конечная точка упруго связана со своим положением

¹⁾ При этом предполагаем, что функции $\varphi, \psi, \varphi', \psi', \varphi'', \psi''$ — кусочно-гладкие. Можно, конечно, избежать этих значительных ограничений, если отказаться от разложения наших функций и их производных и ограничиться только тем, чтобы охарактеризовать эти функции с помощью их коэффициентов Фурье.

равновесия, что соответствует уравнению $u_x = -hu$ ($h > 0$)¹⁾, то в результате постановки $u(x, t) = v(x)g(t)$ получается следующая задача о собственных значениях: требуется определить постоянные $\lambda = \nu^2$ таким образом, чтобы дифференциальное уравнение $v'' + \lambda v = 0$ при краевых условиях $v(0) = 0$, $v'(\pi) + hv(\pi) = 0$ имело не исчезающее тождественно решение v . Первое краевое условие показывает, что функция v должна быть вида $\sin \nu x$, а второе дает для ν трансцендентное уравнение $h \sin \nu \pi = -\nu \cos \nu \pi$. Если $h \neq 0$, корни этого уравнения можно получить графически, беря сечения последовательных ветвей кривой $z = \operatorname{tg} \nu \pi$ в плоскости z, ν прямой линией $z = -\frac{1}{h} \nu$. Опять, стало быть, получается последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ с соответствующими фундаментальными функциями $\sin \nu_1 x, \sin \nu_2 x, \dots$ и собственными колебаниями $(a_1 \cos \nu_1 t + b_1 \sin \nu_1 t) \sin \nu_1 x, \dots$

Кстати, для n -й собственной частоты ν_n непосредственно получается „асимптотическое“ соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{n} = 1.$$

Если, в частном случае, конец струны „свободен“, т. е. $h = 0$ и, значит, $u_x = 0$, то $\nu_n = n - \frac{1}{2}$, и мы имеем:

$$v_n = \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x.$$

Решение уравнения (12) мы опять сможем искать в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_n \sin \nu_n x (a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t),$$

ожидая при этом, что подходящим выбором постоянных a_n, b_n можно будет приспособить это решение к произвольно заданному начальному состоянию. Для проверки этого предположения придется исследовать вопрос о разложимости произвольной функции $w(x)$ в промежутке $0 \leq x \leq \pi$ по функциям $\sin \nu_n x$, собственным функциям дифференциального уравнения (12), с краевыми условиями

$$v(0) = 0, \quad hv(\pi) = -v'(\pi), \quad (14)$$

что будет сделано в § 14. Однако укажем здесь же на свойство ортогональности функций $v_n = \sin \nu_n x$. Действительно, оказывается,

$$\int_0^\pi v_n v_m dx = 0 \quad \text{при } \nu_n \neq \nu_m, \quad (15)$$

в чем непосредственно убеждаемся, умножая уравнение $v_n'' + \nu_n^2 v_n = 0$

¹⁾ Ср. гл. IV, § 10, стр. 237, где это краевое условие выведено из факта появления в выражении потенциальной энергии добавочного краевого члена.

на v_m , уравнение $v_m'' + v_m^2 v_m = 0$ на v_n , вычитая одно из другого и интегрируя. В результате получим:

$$(v_n^2 - v_m^2) \int_0^\pi v_n v_m dx + \int_0^\pi \frac{d}{dx} (v_n' v_m - v_m' v_n) dx = 0,$$

откуда в силу (14) и вытекает свойство ортогональности.

2. Вынужденные движения. Движение струны с закрепленными концами под влиянием произвольной внешней силы $Q(x, t)$ получается из неоднородного дифференциального уравнения:

$$u_{xx} = u_{tt} - Q(x, t). \quad (16)$$

Для решения этой задачи представим себе, что функция $Q(x, t)$ в момент времени t разложена по фундаментальным функциям $\sin nx$:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin nx,$$

$$Q_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Q(x, t) \sin nx dx,$$

и решение будем искать в таком же виде:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin nx,$$

$$q_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin nx dx.$$

Дифференциальному уравнению (16) мы попытаемся удовлетворить, решая бесконечную последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-n^2 q_n(t) = \ddot{q}_n(t) - Q_n(t). \quad (17)$$

Общими решениями этих уравнений являются функции:

$$q_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^t \sin n(t-t') Q_n(t') dt' + a_n \cos nt + b_n \sin nt \quad (17')$$

с произвольными постоянными a_n, b_n (ср. стр. 269). Постоянные a_n, b_n должны быть определены по начальным условиям, так что — предполагая сходимость ряда и его почленную дифференцируемость — сумма

$$\sum_n q_n(t) \sin nx$$

представляет требуемое решение уравнения (16).

Другой путь к решению неоднородного уравнения будет развит в § 5, 2 и § 14, 1 в более общем аспекте.

В задаче о вынужденных движениях можно избежать пользования теоремой о разложении. Для этого рассматриваем величины $Q_n(t)$ и $q_n(t)$ как коэффициенты Фурье функций $Q(x, t)$ и $u(x, t)$, определенные выше приведенными равенствами — существование этого решения при этом предполагается, — и ставим себе задачей определить величины $q_n(t)$ через величины $Q_n(t)$. Умножая уравнение (16) на $\sin nx$ и интегрируя затем по основной области, после преобразования левой стороны интеграцией по частям тотчас получим (17) и отсюда опять формулу (17'). Вследствие полноты ортогональной системы функций $\sin nx$ функция $u(x, t)$ однозначно характеризуется полученными таким путем коэффициентами Фурье.

Как и в § 2, особенный интерес представляет опять случай, когда $Q_n(t)$ — чисто периодические функции:

$$Q_n(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

В этом случае, если $\omega^2 \neq n^2$, функции $q_n(t)$ составляются аддитивно из чисто периодической функции частоты ω и такой же функции частоты n , при наличии же резонанса $\omega^2 = n^2$ функция $q_n(t)$ является неограниченной (ср. стр. 270).

Обстоятельства, имеющие место у однородной колеблющейся струны, типичны для более общих непрерывных колебательных систем, которые составляют предмет дальнейших исследований этой главы. Существенными моментами являются при этом нахождение собственных колебаний, полнота системы этих колебаний и теорема о разложении. Однако в этих теоремах, в отличие от случая однородной струны, мы не сможем ссылаться на готовую теорию, наподобие теории рядов Фурье. Доказательства их, чтобы не прерывать хода мысли, приведем впоследствии, — в § 14.

3. Общий случай неоднородной струны и задача Штурм-Лиувилля. Рассмотрим теперь общий случай неоднородной струны:

$$(pu_x)_x = \rho u_{tt},$$

где $p(x)$ — модуль упругости, помноженный на площадь поперечного сечения, а $\rho(x)$ обозначает массу, отнесенную к единице длины. Задача состоит в том, чтобы найти решения этого уравнения, удовлетворяющие известным однородным краевым условиям. Пытаемся найти решение в форме $u = v(x)g(t)$ и при этом предположении приходим непосредственно к уравнению:

$$(pv')' : v\rho = \ddot{g} : g,$$

которое может выполняться лишь в том случае, если каждая его сторона равна одной и той же постоянной величине — λ . Для функции $v(x)$ получается тогда дифференциальное уравнение:

$$(pv')' + \lambda \rho v = 0, \quad (18)$$

а функция g должна удовлетворять дифференциальному уравнению $\ddot{g} + \lambda g = 0$. Если положить $\lambda = \nu^2$ (что отрицательных значений λ рас-

смаатривать не приходится, вскоре выяснится само собой), то u примет следующий вид:

$$u = v(x) (a \cos \omega t + b \sin \omega t),$$

причем функцию $v(x)$ придется определить из дифференциального уравнения (18), в согласии с краевыми условиями. Как и в частном случае однородной струны, возникает задача об определении тех „собственных значений“ λ дифференциального уравнения (18), для которых существует не исчезающее тождественно решение, удовлетворяющее краевым условиям. Это решение называют собственной или фундаментальной функцией, принадлежащей собственному значению λ ; оно определяется лишь с точностью до произвольного постоянного множителя.

В качестве краевых условий для начальной и конечной точки прежде всего напрашиваются каждый из следующих типов ¹⁾:

1. $v(0) = 0$ и $v(\pi) = 0$ (закрепленная струна);
2. $h_0 v(0) = v'(0)$ и $-h_1 v(\pi) = v'(\pi)$ (упруго связанный конец);
3. $v'(0) = 0$ и $v'(\pi) = 0$ (свободный конец).

или условие

$$4. \quad v(0) = v(\pi) \text{ и } p(0) v'(0) = p(\pi) v'(\pi),$$

которое в случае $p(0) = p(\pi)$ можно рассматривать как условие периодичности.

Сообразно с физическим смыслом нашей задачи мы будем предполагать в дальнейшем, что функции p и ρ положительны при $0 \leq x \leq \pi$. Затем, числа h_0, h_1 должны быть положительны, если положение покоя есть положение устойчивого равновесия ²⁾.

Формулированная таким образом задача о собственных значениях носит название задачи Штурм-Лиувилля (Sturm-Liouville), по имени ее первых и плодотворнейших исследователей. Ее можно еще несколько обобщить, рассматривая вместо уравнения (18) дифференциальное уравнение:

$$(pv')' - qv + \lambda \rho v = 0, \quad (19)$$

где q — заданная непрерывная функция. Для некоторых вопросов имеет значение то обстоятельство, что дифференциальные уравнения (18) и (19) можно преобразованием независимого либо зависимого переменного привести к простым нормальным формам. Например, пользуясь преобразованием $z = v\sqrt{\rho}$, приходим к виду:

$$\frac{d}{dx} (p^* z') - (q^* - \lambda) z = 0, \quad (20)$$

где

$$p^* = \frac{p}{\rho}, \quad q^* = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) + \frac{q}{\rho}.$$

¹⁾ Что именно эти типы выделяются, проще всего обосновать с точки зрения вариационного исчисления (ср. гл. IV и VI).

²⁾ Ср. гл. IV, § 10,2.

Точно так же можно при $q = 0$ преобразовать дифференциальное уравнение к виду:

$$z'' + \lambda \sigma z = 0, \quad \sigma = \rho p,$$

введя вместо x новую переменную $\xi = \int \frac{dx}{p(x)}$ и заменяя затем опять ξ через x .

Другое важное преобразование дифференциального уравнения (19) дается формулами:

$$u = \sqrt[4]{\rho p} v, \quad t = \int_0^x \sqrt{\frac{p}{\rho}} dx, \quad l = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{p}{\rho}} dx. \quad (20')$$

При этом уравнение (19) переходит в

$$u'' - ru + \lambda u = 0, \quad (19')$$

где r обозначает непрерывную функцию¹⁾.

Фундаментальным функциям v и (положительным) собственным значениям λ дифференциального уравнения (19) соответствуют собственные колебания струны с частотой $\nu = \sqrt{\lambda}$, изображаемые функциями:

$$v(x) (a_v \cos \nu t + b_v \sin \nu t).$$

И здесь фундаментальные функции наших задач типа Штурм-Лиувилля представляют собой системы ортогональных функций; свойство это получается к тому же без знания специальных свойств этих функций, из одного лишь дифференциального уравнения, а именно, если λ_n, λ_m — два различных собственных значения, v_n и v_m — принадлежащие им собственные функции, то, как и выше в п. 1, имеем:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^{\pi} \rho v_n v_m dx + \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} (p [v'_n v_m - v_n v'_m]) dx = 0,$$

причем второе выражение, вследствие однородности краевых условий обращается в нуль, так что для функций $\sqrt{\rho} v_i$ действительно выполня-

ется соотношение ортогональности: $\int_0^{\pi} \rho v_n v_m dx = 0$. Эти функции можно

предполагать нормированными, что мы и делаем в дальнейшем. В § 14 мы покажем, что собственные значения λ дифференциального уравнения (19) при заданных краевых условиях, будучи расположены по порядку их величины, образуют бесконечную последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, а принадлежащая им система фундаментальных функций представляет собою полную ортогональную систему. Далее, всякая

¹⁾ Функция $r = \frac{f''}{f} + \frac{q}{p}$, где $f = \sqrt[4]{\rho p}$.

удовлетворяющая краевым условиям задачи непрерывная функция $f(x)$, с кусочно-непрерывными первой и второй производными, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n, \quad c_n = \int_0^{\pi} \rho f v_n dx$$

по собственным функциям. Эта теорема о разложении делает возможным приспособление решения

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) (a_n \cos v_n t + b_n \sin v_n t)$$

к заданному начальному состоянию.

Собственные значения λ задачи Штурм-Лиувилля, за исключением задачи с условиями периодичности ¹⁾, все являются простыми, т. е. одному собственному значению λ не могут принадлежать две друг от друга линейно не зависящие собственные функции v , v^* . В самом деле, если бы существовали две такие собственные функции, то в форме $cv + c^*v^*$ содержалось бы всякое решение уравнения (19); в таком случае любое решение должно было бы удовлетворять одним и тем же заданным однородным краевым условиям, что противоречит тому обстоятельству, что можно, например, найти решение с произвольно наперед заданными значениями $v(0)$ и $v'(0)$, между тем как краевые условия 1—3 содержат соотношение между $v(0)$ и $v'(0)$.

Собственные значения $\lambda = v^2$ при $q \geq 0$, $h_0 \geq 0$, $h_1 \geq 0$ все положительны. Действительно, имеем:

$$\lambda = \int_0^{\pi} \rho v^2 dx = - \int_0^{\pi} [(pv')' v - qv^2] dx = \int_0^{\pi} (pv'^2 + qv^2) dx - pv'v \Big|_0^{\pi},$$

а правая сторона этого равенства в силу краевых условий 1—4 положительна. Положительность собственных значений играет существенную роль в том смысле, что благодаря ей все фундаментальные функции соответствуют колебательным процессам.

Если какое-нибудь собственное значение отрицательно, то вместо соответствующего собственного колебания появляется аperiодический процесс, но, как мы позже увидим, и при отрицательном q это может случиться лишь конечное число раз ²⁾.

Наконец, что касается вынужденных движений струны, то можно поступить так же, как в § 2 у однородной струны. Однако в частном случае, когда в неоднородном дифференциальном уравнении $(\rho u_x)_x = \rho u_{tt} - Q(x, t)$ возбуждающая сила является периодической функцией времени вида $Q(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$, применяют обыкновенно следующий

¹⁾ В последней задаче $\lambda = n^2$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ является двукратным собственным значением уравнения $u'' + \lambda u = 0$ с собственными функциями $\sin nx$ и $\cos nx$.

²⁾ См. гл. VI, § 2.

метод ¹⁾: предполагают решение в форме $u = v(x)e^{i\omega t}$ и немедленно получают для $v(x)$ соответствующее уравнению (18) неоднородное уравнение

$$(pv')' + \lambda pv = -\varphi(x) \quad (\lambda = \omega^2).$$

Для определения коэффициентов разложения решения $v(x)$,

$$\gamma_n = \int_0^\pi \rho v v_n dx,$$

умножаем наше дифференциальное уравнение на $v_n(x)$, интегрируем по основной области и преобразуем первый член интеграцией по частям. Тогда, принимая во внимание дифференциальное уравнение для v_n , немедленно получаем: $\gamma_n (\lambda_n - \lambda) = c_n$, и следовательно,

$$\gamma_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}, \quad \text{где } c_n = \int_0^\pi \varphi v_n dx.$$

Этот метод решения утрачивает смысл в случае резонанса, т. е. когда возбуждающая частота $\sqrt{\lambda} = \omega$ совпадает с одной из собственных частот $\sqrt{\lambda_n} = \omega_n$, а соответствующий коэффициент c_n отличен от нуля.

Случай произвольной возбуждающей силы $Q(x, t)$ можно привести к рассмотренному частному случаю, разлагая спектрально силу $Q(x, t)$ как функцию от t с помощью ряда или интеграла Фурье (ср. гл. II, § 5 и 6).

§ 4. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ.

Для краткости мы ограничимся случаем однородного стержня, ибо рассмотрение неоднородного не прибавит ничего поучительного к соображениям, изложенным в § 3. У дифференциального уравнения *поперечных колебаний однородного стержня*,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

дело идет опять об определении собственных колебаний, которые получим, полагая $u = v(x)g(t)$. Подобно предыдущему имеем:

$$-\frac{v^{IV}}{v} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda,$$

т. е.

$$v^{IV} - \lambda v = 0, \quad \ddot{g} + \lambda g = 0, \quad (21)$$

причем постоянная λ должна быть определена так, чтобы стержень на своих концах удовлетворял предписанным краевым условиям. Опять при-

¹⁾ Ср. аналогичное алгебраическое рассмотрение в гл. I, § 3, 6.

нимаем длину стержня равной π , а за положение равновесия — промежуток $0 \leq x \leq \pi$ и различаем разные типы краевых условий (ср. гл. IV, § 10):

1. $v''(x) = v'''(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \pi$ (свободный конец);
2. $v(x) = v''(x) = 0$ „ $x = 0$ „ $x = \pi$ (подпертый конец);
3. $v(x) = v'(x) = 0$ „ $x = 0$ „ $x = \pi$ (заделанный конец);
4. $v'(x) = v'''(x) = 0$ „ $x = 0$ „ $x = \pi$;
5. $v(0) = v(\pi), v'(0) = v'(\pi)$ }
 $v''(0) = v''(\pi), v'''(0) = v'''(\pi)$ } (периодичность).

Во всех этих случаях можно указать в явном виде собственные функции и собственные значения, так как известен общий интеграл первого из дифференциальных уравнений (21), а именно, если $\lambda \neq 0^1$, положив $\sqrt{\lambda} = \nu$, имеем:

$$v = c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x + c_3 e^{\nu x} + c_4 e^{-\nu x}$$

или

$$v = \xi_1 \cos \nu x + \xi_2 \sin \nu x + \xi_3 \operatorname{ch} \nu x + \xi_4 \operatorname{sh} \nu x.$$

Если $\lambda = 0$, общее решение вырождается в многочлен третьей степени:

$$v = \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2 + \xi_4 x^3.$$

Четыре однородных краевых условия, которым подчинен стержень, дают, теперь для четырех величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ четыре однородных уравнения вида $\sum_{k=1}^4 a_{ik} \xi_k = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), требующих исчезания определителя $|a_{ik}|$, т. е. некоторое трансцендентное уравнение для собственных значений λ . Каждый корень этого уравнения дает одну или несколько фундаментальных функций, которые можно выбрать нормированными.

В частности в случае стержня, *свободного на обоих концах*, получим для ν трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{ch} \nu \pi \cos \nu \pi = 1;$$

соответствующими (еще не нормированными) собственными функциями, не считая функции $\xi_1 + \xi_2 x$, принадлежащей двукратному собственному значению $\lambda = 0$, являются функции:

$$v = (\sin \nu \pi - \operatorname{sh} \nu \pi) (\cos \nu x + \operatorname{ch} \nu x) - (\cos \nu \pi - \operatorname{ch} \nu \pi) (\sin \nu x + \operatorname{sh} \nu x).$$

Решение для стержня, *заделанного на обоих концах*, можно получить из только что написанного решения для свободного стержня (за исключением собственной функции, принадлежащей значению $\lambda = 0$) двукратным дифференцированием, так как полученная таким путем функция удовлетворяет, во-первых, дифференциальному уравнению и, во-вторых, краевым условиям заделанного стержня; к тому же мы таким способом получаем любую собственную функцию заделанного стержня, ибо из всякой такой функции двукратным интегрированием, при подходящем выборе постоянных интегрирования, получается собственная функция свободного стержня.

¹⁾ Что $\lambda \geq 0$, доказывается таким же путем, как в § 3.

Собственными значениями являются корни того же трансцендентного уравнения, что и прежде; фундаментальные функции даются выражением:

$$v = (\sin v\pi - \operatorname{sh} v\pi) (-\cos vx + \operatorname{ch} vx) - \\ - (\cos v\pi - \operatorname{ch} v\pi) (-\sin vx + \operatorname{sh} vx).$$

В задаче о стержне, в противоположность задаче о колебании струны, не исключено появление кратных собственных значений. Например, в задаче о стержне, свободном на обоих концах, собственному значению $\lambda = 0$ соответствуют две друг от друга не зависящие нормированные фундамен-

тальные функции $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ и $v = x \sqrt{\frac{3}{\pi^3}}$. При переходе к заделанному

стержню путем двукратного дифференцирования обе эти фундаментальные функции и соответствующее им собственное значение $\lambda = 0$ пропадают.

Во всех случаях собственные функции дифференциального уравнения (21) образуют ортогональную систему функций, что можно доказать обычным способом, а именно, если λ_n, λ_m — два различных собственных значения, а v_n, v_m — соответствующие фундаментальные функции, то после двукратной интеграции по частям имеем:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^{\pi} v_n v_m dx = (v_n v_m''' - v_m v_n''' - v_n' v_m'' + v_m' v_n'') \Big|_0^{\pi},$$

а правая сторона этой формулы на основании однородных краевых условий обращается в нуль. Полнота системы собственных функций и теорема о разложимости произвольных функций с непрерывными первой и второй и кусочно-непрерывными третьей и четвертой производными имеет место и здесь, как это обнаружится из дальнейших рассуждений (§ 14).

В остальном теория поперечных колебаний стержня развивается совершенно аналогично теории струны, и нет нужды ее здесь подробнее излагать.

§ 5. КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ.

1. Общая задача об однородной мембране. Дифференциальное уравнение колебания однородной мембраны $\Delta u = u_{tt}$, так же как и рассмотренные до сих пор случаи, приводит к задаче о нахождении собственных значений, только здесь дифференциальное уравнение является уравнением с частными производными. Пусть мембрана покрывает область G плоскости x, y с контуром Γ ; остальные предположения и обозначения остаются те же, что в гл. IV, § 10, 3. Краевое условие возьмем сначала самое простое, а именно $u = 0$, т. е. будем рассматривать закрепленную мембрану. Положив $u(x, y, t) = v(x, y) g(t)$, получим тотчас для функций $v(x, y)$, $g(t)$ следующее соотношение:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda,$$

из которого вытекает, что λ должна быть постоянной, которую положим

равной v^2 . Функция $v(x, y)$ получается, как и выше, из следующей задачи: определить параметр λ как „собственное значение“ таким образом, чтобы существовала функция $v(x, y)$, непрерывная в области G вместе со своими производными, которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению:

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad (22)$$

исчезала бы на контуре и могла бы быть выбрана нормированной. Собственные значения λ должны быть положительными числами, как это уже подчеркнуто обозначением $\lambda = v^2$. В самом деле, применяя формулу Грина (ср. § 1) к уравнению (22), помноженному на v , имеем:

$$\iint_G (v_x + v^2) dx dy = - \iint_G v \Delta v dx dy = \lambda \iint_G v^2 dx dy,$$

откуда и вытекает положительность λ . Общее решение дифференциального уравнения $\frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda = -v^2$ имеет поэтому вид $g = a \cos vt + b \sin vt$ и, стало быть, является периодической функцией времени. Решение уравнения колебания

$$u(x, y, t) = v(x, y) (a \cos vt + b \sin vt)$$

соответствует тогда собственному колебанию с частотой $\nu = \sqrt{\lambda}$.

Существование собственных колебаний, точнее, существование бесконечной последовательности собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ и соответствующих собственных функций $v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y), \dots$, мы докажем впоследствии — в § 14; там же будут доказаны и соответствующие теоремы о разложении по ортогональным функциям и о полноте системы этих функций. Однако здесь же мы докажем свойство ортогональности фундаментальных функций, выражающееся в следующей теореме: две собственные функции v_l, v_k , принадлежащие различным собственным значениям λ_l, λ_k , взаимно ортогональны, т. е. выполняется тождество:

$$\iint_G v_l v_k dx dy = 0.$$

Доказательство ведется по хорошо знакомому нам уже образцу; с помощью формулы Грина и краевого условия $u = 0$ получим:

$$(\lambda_l - \lambda_k) \iint_G v_l v_k dx dy = - \iint_G (v_k \Delta v_l - v_l \Delta v_k) dx dy = 0.$$

Движение свободно колеблющейся закрепленной мембраны при произвольно заданных начальных условиях $u(x, y, 0) = f(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ можно попрежнему представить с помощью разложения в ряд по фундаментальным функциям, а именно в форме:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y) (a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t), \quad (23)$$

причем коэффициенты a_n , b_n определяются по начальным условиям следующими формулами:

$$a_n = \iint_G f(x, y) v_n(x, y) dx dy, \quad b_n = \frac{1}{v_n} \iint_G g(x, y) v_n(x, y) dx dy.$$

При этом предполагается, что ряд (23) сходится и допускает почленное дифференцирование достаточное число раз.

Совершенно аналогично, как у закрепленной мембраны, обстоит дело у мембраны с упруго связанными краями, что соответствует краевому условию вида $\frac{\partial u}{\partial n} = -\sigma u$, причем σ — положительная величина,

зависящая от положения на контуре. Задача об определении собственных значений формулируется точно так же, как это было сделано выше; точно так же производится определение коэффициентов из начальных условий на основании теоремы о разложении. Собственные значения λ здесь также положительные числа. Действительно, умножая дифференциальное уравнение (22) на v и интегрируя по области G , пользуясь формулой Грина из § 1 и краевым условием $\sigma v + \frac{\partial v}{\partial n} = 0$, получаем:

$$\lambda = \lambda \iint_G v^2 dx dy = \iint_G (v_x^2 + v_y^2) dx dy + \int_{\Gamma} \sigma v^2 ds.$$

Числа $\nu = \sqrt{\lambda}$ суть частоты соответствующих собственных колебаний. Фундаментальные функции, принадлежащие различным собственным значениям λ_i , λ_k , взаимно ортогональны.

Представляет интерес предельный случай $\sigma = 0$ — случай *свободной мембраны*, который может быть физически реализован при помощи надлежащих приспособлений. В то время как при всех остальных краевых условиях все собственные значения положительны, в этом случае существует собственное значение $\lambda = 0$ с принадлежащей ему собственной функцией $v(x, y) = \text{const}$.

2. **В ы н у ж д е н н ы е д в и ж е н и я.** Вынужденные движения мембраны, удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$\Delta u = u_{tt} - Q(x, y, t), \quad (24)$$

можно также трактовать по образцу § 3, 2. Либо разлагают как внешнюю силу $Q(x, y, t)$, так и искомую функцию u в ряд: $Q(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) v_n(x, y)$ и, соответственно, $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(x, y)$ по фундаментальным функциям $v_n(x, y)$ свободно колеблющейся мембраны, а затем определяют коэффициенты $u_n(t)$ из дифференциальных уравнений:

$$u_{nn} + \lambda_n u_n = q_n;$$

либо, предполагая, что внешняя сила периодическая, разлагают ее в ряд Фурье; тогда достаточно будет найти решение уравнения (24) лишь для случая чисто периодической силы $\varphi(x, y) e^{i\omega t}$ в виде функции $v(x, y) e^{i\omega t}$. Для функции $v(x, y)$ тотчас получается дифференциальное уравнение:

$$\Delta v + \lambda v = \varphi(x, y) \quad (\lambda = \omega^2), \quad (25)$$

решение которого мы, например, получим, разлагая $v(x, y)$ в ряд $v = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n v_n$; коэффициенты этого ряда, если положить $c_n = \iint_G \varphi v_n dx dy$, определяются аналогично тому, как на стр. 279, формулой:

$$\gamma_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} \quad (\lambda = \omega^2).$$

3. Узловые линии. Подобно тому, как у струны или стержня особый интерес представляют те точки, в которых исчезает какая-нибудь фундаментальная функция v_n , „узловые точки“ соответствующего собственного колебания $v_n e^{i\gamma_n t}$, в собственных колебаниях мембраны играют роль *узловые линии*, т. е. кривые $v_n(x, y) = 0$. Совершая собственные колебания, мембрана вдоль этих узловых линий остается всегда в покое. Мы не можем здесь заняться изложением вопроса об узловых линиях, но мы к нему вернемся при рассмотрении примеров (ср. также гл. VI, § 6).

4. Прямоугольная мембрана. Ввиду того, что собственные значения задачи о колебании мембраны зависят от формы и размеров последней, наша общая задача включает еще в себя большое количество частных вопросов, из которых мы некоторые выделим и рассмотрим здесь. Начнем с прямоугольной мембраны, покрывающей область G ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$). Для краевых условий $u = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ собственные значения и фундаментальные функции находятся без всяких затруднений. В первом случае собственными значениями являются числа

$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots),$$

а соответствующими фундаментальными функциями (не нормированными) являются произведения $\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$. Во втором случае собственными значениями являются числа

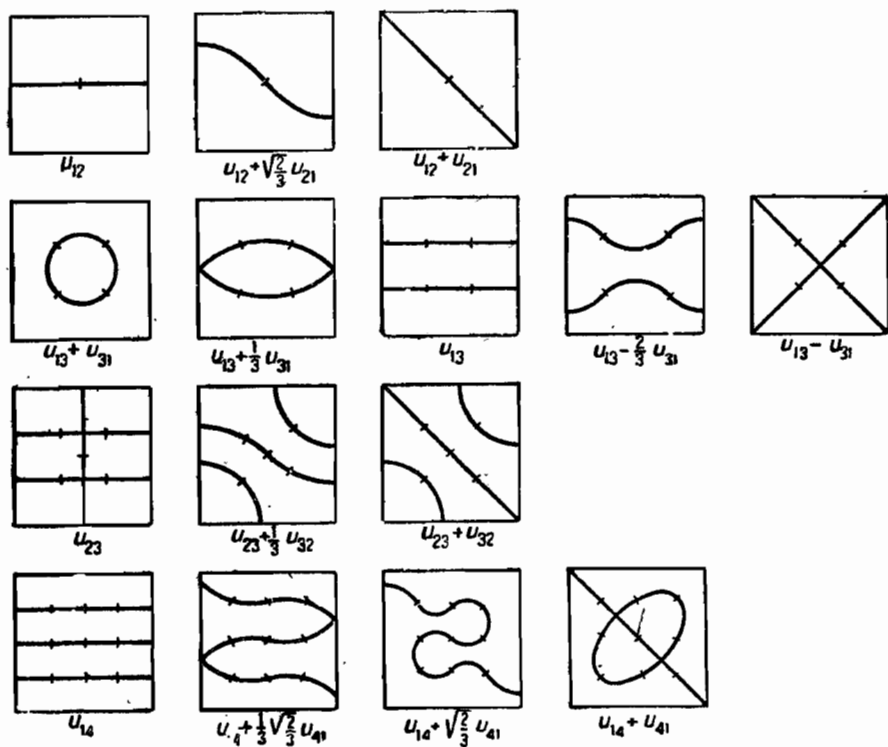
$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots),$$

которым соответствуют собственные функции $\cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}$; в этом случае имеется также собственное значение $\lambda = 0$, как уже было отмечено ранее. (Заметим, что собственные функции закрепленной мембраны можно получить из решений для свободной мембраны дифференцированием по x и y .)

Что мы таким путем получили все фундаментальные функции задачи, вытекает непосредственно из того, например, факта, что функции $\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$ образуют в области G полную ортогональную систему, так что иной собственной функции, ортогональной ко всем приведенным, быть не может. В самом деле, всякая другая фундаментальная функция, если ее собственное значение не совпадает ни с одним из данных выше значений λ , должна быть ортогональна ко всем приведенным произведе-

ниям синусов; если же ее собственное значение совпадает с одним из указанных выше значений λ , а сама эта функция линейно не зависит от принадлежащих этому собственному значению произведений синусов, то после вычитания надлежащей линейной комбинации этих произведений синусов остается функция, ортогональная к последним, а также, подобно предыдущему, и ко всем остальным произведениям синусов, и, следовательно, тождественно исчезающая.

Теоремы о разложении и т. д. здесь просто сводятся к сведениям, известным из гл. II, о рядах Фурье с двумя переменными.



Черт. 2. Узловые линии квадратной мембраны.

Пример прямоугольника показывает, что у мембраны вполне возможны *кратные собственные значения*. Это всегда бывает, если отношение сторон $a:b$ рационально; ибо в этом случае уравнение $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} =$
 $= \frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2}$ всегда имеет нетривиальные целые решения. Например, у квадрата $a=b=\pi$ таким решением является $m'=n$, $n'=m$, чему, при краевом условии $u=0$, соответствуют фундаментальные функции $\sin mx \sin ny$ и $\sin nx \sin my$.

Вопрос о показателе кратности какого-либо собственного значения сво-

дится тогда к задаче из теории чисел о числе способов, которым число y^2 можно представить как сумму двух квадратов:

$$y^2 = m^2 + n^2 \quad 1).$$

Узловыми линиями для собственных функций $\sin nx \sin my$ являются просто прямые, параллельные осям координат. Однако при кратных собственных значениях могут появиться и совершенно иные узловые линии, например, у квадрата — геометрическое место точек, в которых функция

$$\alpha \sin mx \sin ny + \beta \sin nx \sin my$$

равна нулю. На прилагаемых рисунках ²⁾ дано несколько характерных примеров такого рода случаев. В надписях под рисунками для сокращения положено $u_{mn} = \sin mx \sin ny$.

5. Круговая мембрана. Бесселевы функции. Круговая мембрана, радиус которой, изменив в случае надобности масштаб, можно принять равным единице, также допускает решение в явной форме. Дифференциальное уравнение задачи, согласно гл. IV, § 8, 2, принимает в полярных координатах следующий вид:

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta\vartheta} + \lambda v = 0. \quad (26)$$

Если будем опять рассматривать случай закрепленной мембраны, то краевое условие будет: $v(1, \vartheta) = 0$. Естественно искать решение дифференциального уравнения (26) в форме $v(r, \vartheta) = f(r)h(\vartheta)$, откуда сейчас же получается следующее соотношение:

$$\frac{r^2 \left(f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \lambda f(r) \right)}{f(r)} = - \frac{h''(\vartheta)}{h(\vartheta)} = c = \text{const.}$$

Так как функция $v(r, \vartheta)$, а стало быть, и $h(\vartheta)$ должны быть периодическими функциями от ϑ с периодом 2π — в противном случае v не была бы однозначной функцией точки, — постоянная c должна иметь значение $c = n^2$, где n — произвольное неотрицательное целое число. Имеем:

$$h(\vartheta) = a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta$$

и для $f(r) = y$ — дифференциальное уравнение:

$$r^2 y'' + r y' + (r^2 \lambda - n^2) y = 0, \quad (27)$$

и задача заключается в определении собственных значений λ , для которых существует непрерывное при $r=0$ решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее еще краевому условию $f(1)=0$.

¹⁾ По этому поводу ср. *Dirichlet-Dedekind*, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4 Aufl., § 68, S. 164—166, Braunschweig 1894.

²⁾ Они взяты частью из книги Покельса (Pockels), упомянутой в списке литературы.

После преобразования $r\sqrt{\lambda} = \rho$ ($\lambda \neq 0$) или $kr = \rho$, если положить $\lambda = k^2$, уравнение (27) переходит в

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dy}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) y = 0. \quad (28)$$

Решения этого уравнения — *дифференциального уравнения Бесселя*, — так называемые *бесселевы функции*, играют в анализе и в математической физике особую важную роль, и позже, в гл. VII, мы ими еще займемся подробнее. Здесь заметим лишь, что подстановкой в уравнение (28)

степенного ряда $y(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m$ получим решение:

$$y(\rho) = J_n(\rho) = \frac{\rho^n}{2^n n!} \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{2(2n+2)} + \frac{\rho^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - + \dots \right\},$$

которое называют *бесселевой функцией n -го порядка*. Уже простейшие признаки сходимости обнаруживают, что этот ряд сходится при всяком значении ρ , т. е. бесселевы функции $J_n(\rho)$ суть целые трансцендентные функции. В частности имеет место следующее разложение:

$$J_0(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{2^2} + \frac{\rho^4}{2^2 4^2} - \frac{\rho^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Заметим, далее, соотношение:

$$J'_0(\rho) = -J_1(\rho), \quad (29)$$

которое легко получается из разложения в ряд.

Решения уравнения (27) получатся теперь в следующем виде:

$$y_n = J_n(kr) \quad (k^2 = \lambda), \quad (30)$$

причем постоянную k следует определить из краевого условия $y_n(1) = 0$, т. е. из условия $J_n(k) = 0$. Следовательно, собственными значениями $\lambda = k^2$ уравнения (27) являются квадраты нулей бесселевых функций. Что касается вопроса о существовании этих нулей, то мы впоследствии покажем, что каждая из функций J_n действительно имеет бесконечное множество действительных нулей, которые мы обозначим через

$$k_{n,m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

При таком обозначении собственные функции запишутся в форме:

$$J_n(k_{n,m} r) (a \cos n \vartheta + \beta \sin n \vartheta).$$

При этом a и β остаются еще произвольными, откуда вытекает, что, если не считать фундаментальных функций, соответствующих значению $n = 0$, все собственные значения по меньшей мере двойные, ибо им принадлежат линейно независимые фундаментальные функции $J_n \cos n \vartheta$, $J_n \sin n \vartheta$. Узловыми линиями этих собственных функций являются окружности $\rho = \text{const}$ и радиусы $\vartheta = \text{const}$. Собственные колебания выражаются следующей формулой:

$$u = J_n(k_{n,m} r) (a \cos n \vartheta + \beta \sin n \vartheta) (a \cos k_{n,m} t + b \sin k_{n,m} t).$$

Если положить в основу более общее краевое условие $\frac{\partial u}{\partial r} = -\sigma u$, где σ — постоянное число, то в вышеприведенных наших рассуждениях все почти остается без изменения. Лишь краевое условие, из которого определяются собственные значения, гласит несколько иначе, а именно:

$$k J_n'(k) = -\sigma J_n(k).$$

Кроме найденных нами функций $J_n(k_{n,m}r)$ никаких других собственных функций не существует. Доказательство этого можно, например, вести, исходя из замечания, что всякая фундаментальная функция v является периодической функцией от ϑ периода 2π , имеющей непрерывные производные до второго порядка, и, стало быть, допускает разложение в ряд Фурье:

$$v(r, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\vartheta}.$$

Подставив этот ряд в дифференциальное уравнение (26), тотчас обнаружим, что каждый член $f_n(r) e^{in\vartheta}$ в отдельности удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Из общей теоремы о разложении вытекает, что функцию $w(r, \vartheta)$, исчезающую на периферии круга, а внутри него непрерывную вместе со своими производными до второго порядка, можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида:

$$w(r, \vartheta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} J_n(k_{n,m}r) \cos n(\vartheta - \vartheta_{n,m}).$$

В качестве частного случая, когда w не зависит от ϑ , в этом предложении содержится теорема о разложимости произвольной функции от v , непрерывной вместе со своими производными до второго порядка и исчезающей при $r=1$, в интервале $0 \leq r \leq 1$ в ряд по бесселевым функциям $J_0(k_{0,m}r)$.

Из общего соотношения ортогональности для фундаментальных функций уравнения мембраны получаем для бесселевых функций и, соответственно, для функций (30), после интегрирования по ϑ , следующее соотношение ортогональности:

$$\int_0^1 r J_n(k_{n,i}r) J_n(k_{n,j}r) dr = 0 \quad (i \neq j),$$

которое можно вывести и непосредственно из дифференциального уравнения (27) способом, которым мы уже не раз пользовались. Кстати, непосредственно можно также обнаружить, что ортогональность сохраняется и при более общем краевом условии $k J_n'(k) = -\sigma J_n(k)$.

Для нормирования этих функций $J_n(k_{n,m}r)$ мы воспользуемся соотношением:

$$2 \int_0^1 J_n^2(kr) r dr = J_n'^2(k), \quad (31)$$

которое доказывается следующим образом: помножим дифференциальное уравнение для $J_n(kr) = y$, а именно:

$$(ry')' + \left(rk^2 - \frac{n^2}{r}\right)y = 0,$$

на ry' и проинтегрируем его от 0 до r . После некоторых преобразований с помощью интегрирования по частям получим:

$$2k^2 \int_0^r ry^2 dr = (ry')^2 + (r^2 k^2 - n^2)y^2,$$

откуда при $r=1$, в силу соотношения $y(1) = J_n(k) = 0$, и вытекает равенство (31). Итак, функции

$$\frac{\sqrt{2}}{J'_n(k_{n,m})} J_n(k_{n,m} r)$$

являются *нормированными собственными функциями* уравнения (27). Более подробные сведения о бесселевых функциях читатель может найти в гл. VII и затем в специальных сочинениях.

6. Неоднородная мембрана. Обобщенное дифференциальное уравнение неоднородной мембраны

$$p\Delta u + p_x u_x + p_y u_y - qu = \rho(x, y) u_{tt},$$

где p и ρ имеют повсюду в области G положительные значения, приводит к задаче о собственных значениях, аналогичной общей задаче Штурм-Лиувилля из § 3, а именно к задаче об определении тех значений λ , для которых дифференциальное уравнение

$$L[v] + \lambda \rho v = p\Delta v + p_x v_x + p_y v_y - qv + \lambda \rho v = 0$$

имеет нормированное решение, удовлетворяющее заданным однородным краевым условиям. При помощи формулы Грина

$$\iint_G (v_2 L[v_1] - v_1 L[v_2]) dx dy = \int_{\Gamma} p \left(v_2 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} \right) ds = 0$$

[ср. 265, формула (5')] получается, как и выше, для фундаментальных функций v_i, v_j , принадлежащих различным собственным значениям λ_i, λ_j , следующее соотношение:

$$\iint_G \rho v_i v_j dx dy = 0.$$

Собственные функции мы определим вообще таким образом, чтобы функции $\sqrt{\rho} v_i$ образовали нормированную ортогональную систему, т. е. положим:

$$\iint_G \rho v_i^2 dx dy = 1.$$

Вопрос о существовании собственных значений, теорема о полноте и теорема о разложении, которая утверждает разложимость функции $f(x, y)$, удовлетворяющей краевым условиям и имеющей непрерывные производные до второго порядка, в ряд $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y)$, с коэффициен-

тами $c_n = \iint_G \rho f v_n dx dy$, — все эти вопросы рассмотрены в § 14 этой главы.

§ 6. Колебания пластинки.

1. Общие соображения. Вопрос о дифференциальном уравнении колебания однородной пластинки

$$\Delta \Delta u + u_{tt} = 0$$

мы будем излагать с возможной краткостью, упоминая лишь то, что возникает принципиально нового по сравнению с изложенным раньше. Задача о собственных значениях, которая опять получается из предположения $u = v(x, y)g(t)$, гласит так:

$$\Delta \Delta v - \lambda v = 0, \quad (32)$$

причем

$$\lambda = \nu^2, \quad g(t) = ae^{\pm i\nu t}$$

или

$$g(t) = a \cos \nu t + b \sin \nu t.$$

В качестве краевых условий приходится рассматривать условия, например, следующего типа:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{т. е. } v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

(закрепленная пластинка). Ортогональность двух фундаментальных функций, принадлежащих различным собственным значениям, доказывается тем же способом, что и раньше, причем следует воспользоваться теоремой Грина (§ 1). Единственное принципиальное отличие состоит в том, что задача о собственных значениях, рассматриваемая здесь, характеризуется двумя однородными краевыми условиями, в связи с тем обстоятельством, что мы здесь имеем дело с дифференциальным уравнением с частными производными четвертого порядка.

2. Круговая пластинка. Аналитических трудностей в этой задаче, естественно, значительно больше, чем у мембраны. Здесь, например, не удастся разрешить случай прямоугольной границы с помощью известных, явно выраженных функций. Единственным видом границы, для которого удастся такое явное рассмотрение, является окружность. Здесь мы также придем к бесселевым функциям, если введем полярные координаты r, θ . Полагая $\lambda = k^4$, можно привести дифференциальное уравнение к понятному без дальнейших пояснений символическому виду:

$$(\Delta \Delta - k^4) v = 0.$$

или

$$(\Delta - k^2)(\Delta + k^2)v = 0,$$

причем оператор Δ имеет следующее значение:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

Если представить себе, что функция v разложена в ряд Фурье:

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n(r) e^{in\vartheta},$$

то каждый член этого ряда сам по себе должен удовлетворять дифференциальному уравнению, а потому функция y_n должна быть решением следующего уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - k^2 \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} + k^2 \right) y = 0.$$

Можно сразу указать два друг от друга не зависящих решения этого дифференциального уравнения, регулярных при $r=0$, именно $J_n(kr)$ и $J_n(ikr)$, где $i = \sqrt{-1}$, а следовательно, функция

$$v(r, \vartheta) = J_n(kr) (a_1 \cos n\vartheta + b_1 \sin n\vartheta) + J_n(ikr) (a_2 \cos n\vartheta + b_2 \sin n\vartheta)$$

есть решение уравнения (32). Для того чтобы удовлетворить краевым условиям $v(1, \vartheta) = 0$, $v_r(1, \vartheta) = 0$, полагаем:

$$\begin{aligned} J_n(k) a_1 + J'_n(ik) a_2 &= 0, & J_n(k) b_1 + J'_n(ik) b_2 &= 0, \\ J'_n(k) a_1 + i J'_n(ik) a_2 &= 0, & J'_n(k) b_1 + i J'_n(ik) b_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда для собственной частоты k получается трансцендентное уравнение:

$$\frac{J'_n(k)}{J_n(k)} = \frac{i J'_n(ik)}{J_n(ik)};$$

как показывают разложения в ряд на стр. 287, мнимая единица i в действительности в это уравнение не входит. За дальнейшими подробностями мы и здесь отошлем читателя к литературе вопроса.

§ 7. Общие соображения о методе собственных функций.

После рассмотрения приведенных выше примеров полезно будет подчеркнуть основную сущность метода.

1. Применение метода к задачам о колебаниях и к задачам о равновесии. Рассмотренные нами задачи относились к следующему типу: пусть G — область изменения независимых переменных $x, \dots$, определяющих положение точки, а именно, смотря по числу независимых переменных, пусть G представляет либо интервал оси x , либо область плоскости x, y или пространства x, y, z с кусочно-гладкой границей. Состояние заполняющей область G непрерывной среды пусть характеризуется функцией $u(x, \dots; t)$, тождественное исчезновение которой соответ-

19*

ствуется положению устойчивого равновесия. Пусть, далее, $L[u]$ — определенное в области G самосопряженное линейное дифференциальное выражение относительно переменных $x, \dots$, полученное вариацией принадлежащей системе потенциальной энергии, $\rho(x, \dots)$ — заданная функция точки, представляющая плотность массы, а $Q(x, \dots; t)$ — заданная внешняя сила. Ищется такое решение дифференциального уравнения:

$$L[u] = \rho u_{tt} - Q, \quad (33)$$

которое на границе Γ области G удовлетворяет заданным однородным, не содержащим времени, краевым условиям и соответствует заданному начальному состоянию, определенному равенствами:

$$\begin{aligned} u(x, \dots; 0) &= \psi(x, \dots), \\ u_t(x, \dots; 0) &= \phi(x, \dots). \end{aligned}$$

У всех встречающихся функций предполагается непрерывность производных до наивысшего встречающегося в данной задаче порядка.

Сюда включен и случай равновесия, для которого надо принять, что все встречающиеся функции не зависят от времени и не дано начальных условий. Тогда мы вместо смешанной задачи о колебаниях с заданными краевыми и начальными условиями получим краевую задачу о равновесии.

Из свободных движений, т. е. из решений однородного дифференциального уравнения:

$$L[u] = \rho u_{tt}, \quad (33')$$

удовлетворяющих заданным однородным краевым условиям, выделяют собственные колебания требованием *синхронизма*: $u = v(x, \dots)g(t)$. Каждое такое собственное колебание соответствует постоянному значению λ , собственному значению, таким образом, что $g(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{g} + \lambda g = 0$, и, стало быть,

$$g(t) = a \cos \sqrt{\lambda} t + b \sin \sqrt{\lambda} t,$$

а $v(x, \dots)$ — уравнению:

$$L[v] + \lambda \rho v = 0, \quad (34)$$

причем функция v должна удовлетворять поставленным выше для u краевым условиям. Типичная задача — *задача о собственных значениях* — состоит теперь в том, чтобы определить такие значения параметра λ — *собственные значения*, — для которых однородное дифференциальное уравнение (34) имеет при заданных краевых условиях не исчезающие тождественно решения (*собственные или фундаментальные функции*). Тогда колебание, удовлетворяющее первоначальному уравнению (33'), изобразится формулой:

$$u = (a \cos \sqrt{\lambda} t + b \sin \sqrt{\lambda} t) v(x, \dots).$$

В случае конечной основной области G положение дела в общем таково: собственные значения λ образуют *бесконечную последователь-*

ность $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Существует система соответствующих фундаментальных функций $v_1, v_2, \dots$, которая является полной системой в смысле гл. II, § 1 и удовлетворяет соотношениям ортогональности ¹⁾

$$\int_G \rho v_i v_k d\tau = 0 \quad (i \neq k), \quad \int_G \rho v_i^2 d\tau = 1.$$

Больше того, имеет место еще теорема о разложении: всякая функция w с непрерывным $L[w]$, удовлетворяющая заданным однородным краевым условиям, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$w = \sum_{v=1}^{\infty} c_v v_v, \quad c_v = \int_G \rho w v_v d\tau$$

по фундаментальным функциям.

На основании этих фактов [которые, во всяком случае, нуждаются в особом доказательстве (см. § 14)] получаем бесконечную последовательность собственных колебаний $(a_v \cos \sqrt{\lambda_v} t + b_v \sin \sqrt{\lambda_v} t) v_v(x, \dots)$, наложением которых, при надлежащем выборе коэффициентов a_v и b_v , находим решение уравнения (33'), соответствующее заданным начальным условиям, а именно следует положить:

$$a_v = \int_G \rho \varphi v_v d\tau, \quad b_v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_v}} \int_G \rho \psi v_v d\tau.$$

Для неоднородного уравнения (33) при однородных краевых условиях — согласно § 1, 2 предположение однородных краевых условий у неоднородного уравнения не означает ограничения общности — решение $u(x, \dots; t)$ находят, определяя коэффициенты $\gamma_v(t)$ его разложения по функциям v_v . Для этой цели умножают дифференциальное уравнение (33) на v_v , интегрируют по области G , преобразовывают левую сторону с помощью формулы Грина (5'), § 1, пользуясь краевыми условиями, применяют затем дифференциальное уравнение для функции v_v и в результате получается уравнение:

$$\gamma_v + \lambda_v \gamma_v = Q_v(t),$$

где $Q_v(t)$ — заданный коэффициент разложения функции $Q(x, \dots; t)$ по функциям v_v . Наше дифференциальное уравнение для γ_v имеет частное решение:

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_v}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_v}(t - \tau) Q_v(\tau) d\tau.$$

Функция, образованная с помощью этих коэффициентов разложения, будет частным решением уравнения (33), а всякое другое решение можно получить прибавлением некоторого решения уравнения (33'), так что решение предложенной задачи с начальными условиями сведено к соответствующей задаче для однородного уравнения (33').

¹⁾ Символом $\int_G f d\tau$ мы обозначаем интеграл функции $f(x, \dots)$ по области G .

Задачу о равновесии, т. е. краевую задачу дифференциального уравнения

$$L[u] = -Q(x, \dots),$$

при однородных краевых условиях также можно решить с помощью фундаментальных функций. Как и выше, получаем для постоянных коэффициентов γ_v разложения искомого решения u по функциям v_v уравнение $\lambda_v \gamma_v = Q_v$; стало быть,

$$\gamma_v = \frac{1}{\lambda_v} \int_G Q v_v d\tau.$$

Таким образом, согласно теореме о разложении, решение дается следующей формулой:

$$u = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v_v}{\lambda_v} \int_G Q v_v d\tau.$$

Если бы позволено было поменять местами суммирование и интеграцию, то мы получили бы функцию:

$$K(x, \dots; \xi, \dots) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v_v(x, \dots) v_v(\xi, \dots)}{\lambda_v},$$

с помощью которой решение краевой задачи можно было бы записать в следующем виде:

$$u(x, \dots) = \int_G Q(\xi, \dots) K(x, \dots; \xi, \dots) d\tau,$$

причем интеграцию надо производить по переменным $\xi, \dots$.

Этой функции K , „функции Грина“ для дифференциального выражения $L[u]$, мы в § 14 дадим совершенно другое определение и сделаем ее исходной точкой более углубленного рассмотрения, перерастающего формальные рамки.

2. Задачи о собственных значениях в теории теплопроводности. Совершенно подобным же образом и теория теплопроводности приводит к задачам на определение собственных значений. Дифференциальное уравнение теплопроводности в однородных изотропных телах, при надлежащем выборе единиц времени и длины, гласит:

$$L[u] = u_t,$$

где u означает температуру, как функцию точки x, y, z и времени t . Излучение однородного тела G с поверхностью Γ в бесконечно простирающуюся среду постоянной нулевой температуры характеризуется на поверхности Γ краевым условием вида $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, где σ — положительная константа, зависящая от материала; т. е. падение температуры по направлению внутрь тела пропорционально температурному скачку изнутри наружу. Вопрос состоит в том, чтобы найти при этом

краевом условии такое решение уравнения теплопроводности, которое при $t=0$ переходит в заданное начальное состояние $\varphi(x, y, z)$.

Относительно u делаем предположение $u = v(x, y, z)g(t)$ и тогда получаем уравнение:

$$\frac{L[v]}{v} = \frac{\dot{g}}{g} = -\lambda.$$

Таким образом для функции v получается следующая задача о собственных значениях: $L[v] + \lambda v = 0$ в области G и $\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma v = 0$ на поверхности Γ ; решение дифференциального уравнения, соответствующее собственному значению λ и собственной функции v , имеет вид:

$$u = av e^{-\lambda t}.$$

Теорема о разложении по собственным функциям, как и раньше, дает возможность приспособить решение к заданному начальному состоянию, так что $u(x, y, z; 0)$ оказывается равной произвольно заданной функции $\varphi(x, y, z)$, непрерывной в области G вместе со своими производными первого и второго порядка и удовлетворяющей краевому условию. Если, скажем, $v_1, v_2, \dots$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ представляют собою соответственно полную систему нормированных фундаментальных функций и собственных значений, то искомое решение дается формулой:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y, z) e^{-\lambda_n t},$$

где $c_n = \iiint \varphi v_n dx dy dz$.

Заметим вкратце, что в силу положительности собственных значений) решение $u(x, y, z; t)$ с возрастанием t стремится асимптотически к нулю, как и следовало ожидать из физических соображений.

Если вместо однородного уравнения теплопроводности рассматривать неоднородное уравнение

$$L[u] = u_t - Q(x, y, z),$$

где заданная функция Q не должна зависеть от времени, и если поставить те же однородные краевые условия, что и выше, то по нашему общему методу получится решение $u(x, y, z; t)$, которое при $t \rightarrow \infty$ переходит в решение соответствующей краевой задачи для уравнения

$$L[u] = -Q(x, y, z).$$

3. Другие вопросы, приводящие к задачам о собственных значениях. Помимо рассмотренных вопросов, многочисленные вопросы анализа приводят к задачам о собственных значениях, т. е. к линейному дифференциальному уравнению (или другого типа функциональному уравнению) для функции u , содержащему параметр λ , который требуется определить в качестве „собственного значения“ таким образом, чтобы однородная краевая задача, кроме тривиального решения $u=0$,

имела еще нетривиальное решение. Эта постановка вопроса часто возникает в задачах, где один из аргументов играет особую роль. В таком случае пытаются найти решения, которые можно представить в виде произведения функции этого самого аргумента на функцию всех остальных, чтобы получить для этой последней функции задачу о собственных значениях. В ближайших параграфах мы рассмотрим еще ряд таких задач, возникающих из совершенно различных источников.

§ 8. КОЛЕБАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КОНТИНУУМОВ.

Вопросы колебаний трехмерных континуумов, например в акустике, теории упругости или электродинамике, требующие решения уравнения

$$\Delta u = u_{\mu\mu},$$

где Δu — дифференциальное выражение Лапласа в трех переменных, приводят к задаче о собственных значениях вида:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

с соответствующими однородными краевыми условиями.

Часто встречается случай, когда специальный вид основной области позволяет дальнейшее расщепление решений этой задачи и приводит таким образом к задачам о собственных значениях с меньшим числом независимых переменных.

Примером может служить цилиндрическая область, имеющая основанием область G плоскости x, y и ограниченная плоскостями $z=0, z=\pi$. В качестве краевого условия возьмем, например, $u=0$. Подстановкой $u=f(z)v(x, y)$ эту задачу можно свести к соответствующей задаче для плоской области G ; при этом получается:

$$-\frac{f''}{f} = \frac{\Delta v}{v} + \lambda = k = \text{const},$$

$$f = \sin \sqrt{k} z,$$

причем $k=1^2, 2^2, 3^2, \dots$; для v получается уравнение $\Delta v + (\lambda - n^2)v = 0$, собственные значения которого отличаются от собственных значений плоской области G лишь слагаемым $-n^2$, а фундаментальные функции совпадают с фундаментальными функциями плоской области G .

Что таким путем при заданных краевых условиях опять получаются все фундаментальные функции цилиндра, выводится из полноты системы этих функций способом, уже не раз примененным.

Если взять в частности цилиндр с прямоугольным основанием, т. е. прямоугольный параллелепипед, например куб $0 \leq x, y, z \leq \pi$, то получим таким путем, в качестве почти само собою разумеющегося решения задачи, собственные значения $l^2 + m^2 + n^2$ ($l, m, n = 1, 2, 3, \dots$) и собственные функции $\sin lx \sin my \sin nz$.

В качестве следующего примера рассмотрим уравнение колебания для шаровой области $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ радиуса 1. Введя полярные координаты

ты r, ϑ, φ , преобразуем уравнение колебания к виду (ср. гл. IV, § 8, 2):

$$\Delta u + \lambda u = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (u_\vartheta \sin \vartheta) \right] + \lambda u = 0;$$

пытаемся удовлетворить этому уравнению, полагая $u = Y(\vartheta, \varphi) f(r)$, где Y зависит только от φ и ϑ , а f — только от r . Имеем:

$$\frac{(r^2 f')' + \lambda r^2 f}{f} = - \frac{1}{Y \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{Y_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (Y_\vartheta \sin \vartheta) \right] = k,$$

причем k должно быть постоянно. Эта постоянная не может, однако, быть произвольной; она должна быть так выбрана, чтобы дифференциальное уравнение

$$\Delta^2 Y + k Y = \frac{1}{\sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{Y_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (Y_\vartheta \sin \vartheta) \right] + k Y = 0$$

имело решение, непрерывное на всей поверхности шара, т. е. периодическое относительно φ с периодом 2π и остающееся еще регулярным при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ (при приближении к этим точкам наше решение должно стремиться к пределу, не зависящему от φ). В гл. VII, § 5 мы увидим, что этому требованию можно удовлетворить лишь для значений $k = n(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), а именно шаровыми функциями $Y(\vartheta, \varphi)$ (ср. также § 9). Для функции $f(r)$ получается дифференциальное уравнение:

$$(r^2 f')' - n(n+1)f + \lambda r^2 f = 0,$$

для которого решениями, регулярными в нулевой точке, являются функции

$$S_n(\sqrt{\lambda} r) = \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} r)}{\sqrt{r}}$$

(ср. § 5 и § 10). Параметр λ следует теперь определить из краевого условия, например при краевом условии $u = 0$, из уравнения

$$J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Обозначая корни этого уравнения через $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots$, получим решения нашей краевой задачи в виде:

$$u = Y_n(\vartheta, \varphi) S_n(\sqrt{\lambda_{n,h}} r).$$

Что таким образом мы получаем полную ортогональную систему функций и, следовательно, все фундаментальные функции и собственные значения нашего дифференциального уравнения, будет доказано позже, в гл. VII, § 5.

§ 9. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ.

Краевая задача теории потенциала состоит в определении функции u , которая внутри области G удовлетворяет дифференциальному

уравнению $\Delta u = 0$, а на границе принимает заданные значения. Согласно § 1, 2 эту задачу можно привести к решению неоднородного уравнения $\Delta u = f$ при краевом условии $u = 0$. Решение этой задачи всегда можно найти методом, изложенным в § 7, разложением по фундаментальным функциям дифференциального уравнения:

$$\Delta v + \lambda v = 0.$$

Однако при некоторых специальном вида областях G можно притти к цели другим, более простым путем, при помощи процесса расщепления и приведения к фундаментальным функциям дифференциального выражения с меньшим числом независимых переменных. Покажем это на нескольких важных примерах.

1. Окружность, сфера, сферический слой. Прежде всего рассмотрим случай двух независимых переменных x, y , а в качестве области G возьмем окружность радиуса 1 с центром в начале. После преобразования выражения Δu к полярным координатам r, φ имеем задачу о решении дифференциального уравнения:

$$r(r u_r)_r + u_{\varphi\varphi} = 0$$

при заданных краевых значениях $u(1, \varphi) = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — периодическая, с периодом 2π , непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную первую производную. Отыскание решений однородного уравнения — без рассмотрения краевого условия — при помощи расщепления вида $u = v(r)w(\varphi)$ приводит обычным путем к задаче о собственных значениях уравнения:

$$w'' + \lambda w = 0,$$

причем в качестве краевых условий надо поставить условия периодичности $w(0) = w(2\pi)$, $w'(0) = w'(2\pi)$. Эта простая задача приводит к собственным значениям $\lambda = n^2$ (n — целое) и соответствующим собственным функциям $w = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$. Для множителя $v(r)$ получается дифференциальное уравнение $r(r v')' - n^2 v = 0$, имеющее линейно независимые решения $v = r^n$ и $v = r^{-n}$. Стало быть, имеем частные решения первоначального дифференциального уравнения, регулярные в круге радиуса 1, в форме:

$$(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n$$

с произвольными коэффициентами a_n и b_n . Эти решения можно также охарактеризовать как целые, рациональные относительно x и y , однородные степени n решения дифференциального уравнения $\Delta u = 0$.

Процессом наложения, на основании теории ряда Фурье, можно получить желаемое решение краевой задачи в виде:

$$u = \sum_0^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

причем коэффициенты a_n и b_n надо взять из разложения в ряд Фурье заданной функции $f(x)$ (ср. гл. IV, § 2, стр. 168),

Совершенно аналогично складываются обстоятельства в трех измерениях, если в качестве области G выбрана единичная сфера $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Место тригонометрических функций здесь занимают *шаровые функции Лапласа*. Преобразуя дифференциальное уравнение к полярным координатам r, ϑ, φ (ср. стр. 217 и 296), получим уравнение:

$$(r^2 u_r)_r + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\sin \vartheta} (u_\vartheta \sin \vartheta)_\vartheta = 0,$$

которое в результате процесса расщепления $u = v(r) Y(\vartheta, \varphi)$ приводит для v к дифференциальному уравнению:

$$(r^2 v')' - \lambda v = 0, \quad (35)$$

общее решение которого гласит:

$$v = c_1 r^{a_1} + c_2 r^{a_2},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а a_1, a_2 — корни квадратного уравнения:

$$a(a+1) = \lambda.$$

Для функции Y получаем поставленную уже в § 8 задачу о нахождении собственных значений дифференциального уравнения:

$$\Delta^* Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin \vartheta} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} Y_{\varphi\varphi} + (Y_\vartheta \sin \vartheta)_\vartheta \right] + \lambda Y = 0, \quad (36)$$

причем собственное значение λ следует так определить, чтобы дифференциальное уравнение имело не исчезающее тождественно решение, допускающее на всей сфере непрерывные производные первого и второго порядка.

Для того чтобы выяснить, какого поведения функций Y надо потребовать на полюсах сферы, т. е. при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, заметим, что выражение Δ инвариантно относительно вращений координатной системы, а следовательно, и выражение Δ^* на поверхности шара, т. е. выражение, получающееся из Δ при $r = 1$, должно оставаться инвариантным при введении иначе ориентированных полярных координат, т. е. другой системы кругов долготы и широты, так что особенность дифференциального уравнения (36) при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ кроется лишь в несимметричности координатной системы. В силу этого потребуем, чтобы при вращении системы координат полюса сферы утрачивали свое исключительное положение для функции Y , стало быть, чтобы Y , как функция положения точки на поверхности сферы, удовлетворяла повсюду одним и тем же условиям непрерывности.

Проще всего можно определить собственные значения λ и соответствующие собственные функции Y , если искать, как в § 8, целые радионатные относительно x, y, z и однородные степени n решения $u = U_n$ уравнения $\Delta u = 0$. Позже (гл. VII, § 5) мы увидим, что существует точно $2n + 1$ таких линейно независимых потенциалов n -й степени. Если записать их, после введения полярных координат, в форме $U_n = r^n Y_n(\vartheta, \varphi)$, то легко видеть, что функции Y_n являются решениями дифференциального уравнения (36). Собственное значение, принадлежащее

$2n+1$ функциям $Y_n(\vartheta, \varphi)$, оказывается

$$\lambda = n(n+1).$$

Что определенные таким образом функции Y_n дают всю систему фундаментальных функций нашей задачи, будет показано в гл. VII, § 5.

Далее, как и у функций Штурм-Лиувилля, получается свойство полноты и соответственно теорема о разложении, на основании которых суперпозицией решений: $u = \sum r^n Y_n$ можно получить решение уравнения $\Delta u = 0$, принимающее заданные значения на поверхности сферы.

Наряду с функцией $u = r^n Y_n$ и функция $u = r^{-(n+1)} Y_n$, имеющая начало особой точкой, также является решением уравнения $\Delta u = 0$. Стало быть, суперпозицией решений вида $r^n Y_n$ и $r^{-(n+1)} Y_n$ можно найти такое решение уравнения $\Delta u = 0$, которое на двух концентрических шаровых поверхностях принимает заданные значения и регулярно в слое, лежащем между ними.

Если искать в частности такие шаровые функции, которые зависят только от полярного угла ϑ , но не от долготы φ , полагая, следовательно, $Y_\varphi = 0$, то придем к дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} (Y_\vartheta \sin \vartheta)_\vartheta + \lambda Y = 0,$$

которое преобразованием $x = \cos \vartheta$ приводится к дифференциальному уравнению полиномов Лежандра [ср. (20) гл. II]. Стало быть, полиномы Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$ являются частными вида шаровыми функциями.

Можно притти к обобщению шаровых функций, если рассматривать произвольную область G на шаровой поверхности и искать регулярное в области G решение $Y(\vartheta, \varphi)$ дифференциального уравнения:

$$\Delta^* Y + \lambda Y = 0, \quad (36)$$

удовлетворяющее на границе области однородным краевым условиям, например исчезающее на границе. Принадлежащие этой области фундаментальные функции $Y_1, Y_2, \dots$ называются вообще обобщенными шаровыми функциями¹⁾. Из сделанных выше вычислений следует, что функция $r^\alpha Y(\vartheta, \varphi) = u(x, y, z)$ является решением дифференциального уравнения $\Delta u = 0$, непрерывным в конусе, имеющем основанием область G , а вершиной — центр шара всюду, за исключением, самое большее, нулевой точки, если α и λ связаны уравнением:

$$\alpha(\alpha+1) = \lambda.$$

Дифференциальное уравнение шаровых функций $\Delta^* Y + \lambda Y = 0$ является частным случаем общего дифференциального уравнения:

$$\Delta^* Y + \lambda Y = \frac{1}{\sqrt{eg-f^2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{e}{\sqrt{eg-f^2}} \frac{\partial Y}{\partial x} - f \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{g}{\sqrt{eg-f^2}} \frac{\partial Y}{\partial y} - f \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \lambda Y = 0,$$

принадлежащего любой кривой поверхности с линейным элементом $ds^2 = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2$. Об инвариантном характере этого дифферен-

¹⁾ Ср. Thomson W. and Tait P. G., Treatise on Natural Philosophy, т. 1, стр. 171—218, Cambridge 1886.

циального уравнения уже было упомянуто в гл. IV, § 8, 2. Его можно рассматривать как уравнение колебания „кривой мембраны“, лежащей на нашей поверхности. Для поверхности сферы при введении полярных координат оно переходит в уравнение (36).

2. Цилиндрическая область. Дальнейший пример представляет цилиндр, имеющий основанием область G плоскости x, y и ограниченный плоскостями $z=0, z=\pi$. Предположим, что краевые значения заданы на боковой поверхности тождественно равными нулю, а на поверхностях оснований — произвольными функциями, имеющими непрерывные производные до второго порядка и исчезающими на их границах Γ . Ищем теперь решение уравнения $\Delta u = 0$ в виде $u = f(z) v(x, y)$ и получаем непосредственно, подобно предыдущему, для функций f и v дифференциальные уравнения $\frac{f''}{f} = -\frac{\Delta v}{v} = \lambda$, где λ надо так определить,

чтобы для нее существовала собственная функция $v(x, y)$, исчезающая на контуре Γ . Если $v_1, v_2, \dots$ — полная система фундаментальных функций с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, то теорема о разложении

утверждает, что рядом вида $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{\sqrt{\lambda_n} z} + b_n e^{-\sqrt{\lambda_n} z}) v_n(x, y)$ при $z=0$

и $z=\pi$ можно представить заданные краевые значения на поверхностях оснований. Стало быть, этот ряд представляет собой решение нашей краевой задачи, если только он равномерно сходится и если равномерная сходимости сохранится и после того, как мы его продифференцируем один или два раза по любому из переменных x, y, z .

3. Задача Ламэ (Lamé). По существу самый общий случай, в котором краевую задачу теории потенциала можно процессом расщепления привести к задаче о нахождении функций одного единственного переменного, которые с своей стороны характеризуются задачей о собственных значениях, это случай *софокусного ортогонального шестигранника*. Под этим названием мы разумеем область, ограниченную попарно кусками двух эллипсоидов, двух однополых и двух двуполых гиперболоидов, принадлежащих к одному и тому же софокусному семейству

$$\frac{x^2}{s-e_1} + \frac{y^2}{s-e_2} + \frac{z^2}{s-e_3} = 1$$

(ср. гл. IV, § 8, 3). Почти все разобранные раньше случаи ¹ краевой задачи можно рассматривать как частные или предельные случаи этой „задачи Ламэ“. Если ввести, пользуясь обозначениями гл. IV, эллиптические координаты $\rho = f(u)$, $\sigma = g(v)$, $\tau = h(w)$, то уравнение потенциала $\Delta T = 0$ принимает следующий вид:

$$\Delta T = \frac{[g(v) - h(w)] T_{\rho\rho} + [f(u) - h(w)] T_{\sigma\sigma} + [f(u) - g(v)] T_{\tau\tau}}{[g(v) - h(w)] [f(u) - h(w)] [f(u) - g(v)]} = 0.$$

Попытаемся теперь удовлетворить этому уравнению предположением

$$T = U(u) V(v) W(w);$$

мы получим решение дифференциального уравнения $\Delta T = 0$, найдя решения следующих трех обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя произвольными постоянными λ , μ :

$$U'' + [\lambda f(u) + \mu] U = 0, \quad (37)$$

$$V'' - [\lambda g(v) + \mu] V = 0, \quad (38)$$

$$W'' + [\lambda h(w) + \mu] W = 0. \quad (39)$$

При этом переменные u, v, w лежат в различных интервалах, определенных условиями:

$$\rho_2 \leq f(u) \leq \rho_1, \quad \sigma_2 \leq g(v) \leq \sigma_1, \quad \tau_2 \leq h(w) \leq \tau_1,$$

которым соответствуют следующие условия:

$$u_2 \leq u \leq u_1, \quad v_2 \leq v \leq v_1, \quad w_2 \leq w \leq w_1.$$

Наш софокусный ортогональный шестигранник задан при этом условиями вида

$$\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1 \leq \tau_2 \leq \tau \leq \tau_1.$$

Если вместо u, v, w пользоваться координатами ρ, σ, τ и обозначать без различия независимую переменную через s , а зависимую — через Y , то уравнения (37), (38), (39) можно записать в общей форме:

$$\varphi(s) \frac{d^2 Y}{ds^2} + \frac{\varphi'(s)}{2} \frac{dY}{ds} + (\lambda s + \mu) Y = 0,$$

причем введено обозначение

$$4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) = \varphi(s).$$

Решения этого уравнения, так называемого *уравнения Ламэ*, представляют собою функции, зависящие от выбора постоянных λ, μ и не приводящиеся, вообще говоря, к элементарным трансцендентным функциям. Они носят название *функций Ламэ* и являются предметом многочисленных исследований, хотя до сего времени разработано относительно мало средств для их вычисления. Мы удовольствуемся здесь постановкой соответствующей задачи о собственных значениях. Краевую задачу теории потенциала для софокусного ортогонального шестигранника, очевидно, можно будет решить, если владеть ее решением для того частного случая, когда заданные краевые значения на пяти из шести граней суть нули. Решение общей краевой задачи представится тогда в виде суммы шести таких частных решений. Теперь пусть, например, $\tau = \tau_2$ — та грань, для которой не задано краевое значение нуль. В таком случае вопрос заключается в отыскании таких решений U, V, W уравнений Ламэ (37), (38), (39), для которых выполняются условия:

$$U(u_1) = U(u_2) = V(v_1) = V(v_2) = W(w_1) = 0,$$

между тем как для $W(w_2)$ не поставлено никакого условия. Произведение

$$T = U(u) V(v) W(w)$$

будет тогда решением уравнения $\Delta T = 0$, исчезающим при

$$\rho = \rho_2, \quad \rho = \rho_1, \quad \sigma = \sigma_2, \quad \sigma = \sigma_1, \quad \tau = \tau_1.$$

И вот, как будет выяснено, указанным условиям возможно удовлетворить не при всяких значениях постоянных λ, μ . Мы именно и поставим задачу: выбрать эти постоянные таким образом, чтобы можно было удовлетворить поставленным требованиям надлежащими функциями Ламэ U, V ; в таком случае всегда будет существовать и соответствующая функция W . Перед нами здесь задача о собственных значениях нового рода, так называемая *задача о собственных значениях с двумя параметрами*, в которой речь идет об определении пар друг другу соответствующих собственных значений λ, μ , для которых дифференциальное уравнение (37) имеет решение, исчезающее при $u = u_1$ и $u = u_2$, а дифференциальное уравнение (38) имеет решение, исчезающее при $v = v_1$ и $v = v_2$.

В этой задаче о собственных значениях дело обстоит вполне аналогично, как и в обыкновенной задаче с одним параметром, а именно: существует бесконечно большое число пар собственных значений λ_i, μ_i и соответствующих решений U_i, V_i нашей задачи. Всякая функция от u, v , непрерывная в прямоугольнике $u_2 \leq u \leq u_1, v_2 \leq v \leq v_1$ вместе со своими производными до второго порядка и исчезающая на контуре этого прямоугольника, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i U_i(u) V_i(v),$$

причем суммирование распространяется на все произведения Ламэ $U_i(u) V_i(v)$, принадлежащие парам собственных значений. Эти произведения Ламэ удовлетворяют, кроме того, условию ортогональности:

$$\iint_{u_2, v_2}^{u_1, v_1} [f(u) - g(v)] U_i(u) V_i(v) U_k(u) V_k(v) dv du = 0,$$

если они принадлежат различным парам собственных значений.

Для решения нашей краевой задачи отнесем функциям U, V такие функции $W_i(w)$, которые удовлетворяют уравнению (39) при $\lambda = \lambda_i, \mu = \mu_i$ и исчезают при $w = w_1$. (Что такое решение существует, следует из общих теорем существования в теории дифференциальных уравнений.) Функции $W_i(w)$ при $w = w_2$ не исчезают; ибо в противном случае функция $T = UVW$ была бы неисчезающим решением уравнения $\Delta T = 0$ с равными нулю краевыми значениями, что в силу элементарных фактов теории потенциала невозможно (ср. т. II).

Краевые значения, заданные на грани $w = w_2$, можно разложить в ряд вида:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i W_i(w_2) U_i(u) V_i(v);$$

тогда ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(u) V_i(v) W_i(w)$$

даст требуемое решение краевой задачи теории потенциала для нашего софокусного ортогонального шестигранника.

Необходимо заметить при этом, что, в связи с данной выше формулировкой теоремы разложения, на заданные значения функции T на гранях должно еще быть наложено то ограничение, что T исчезает на всех ребрах софокусного шестигранника. В действительности, однако, это ограничение не обязательно, на чем мы здесь, впрочем, останавливаться не будем.

Покажем еще, что наша задача о собственных значениях с двумя параметрами может быть естественным образом приведена к задаче с одним параметром привычной нам формы, но на уравнение с частными производными. В самом деле, возьмем функцию $Z(u, v) = U(u) V(v)$, причем $U(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (37), а $V(v)$ — дифференциальному уравнению (38); из этих двух уравнений, помножив первое на V , а второе на U и сложив их, получим для функции $Z(u, v)$ дифференциальное уравнение с частными производными:

$$Z_{uu} + Z_{vv} + \lambda [f(u) - g(v)] Z = 0. \quad (40)$$

Собственное значение $\lambda = \lambda_i$ и соответствующая фундаментальная функция $Z_i = U_i(u) V_i(v)$ решают задачу о собственных значениях этого дифференциального уравнения для прямоугольника $G: u_2 \leq u \leq u_1, v_2 \leq v \leq v_1$ при краевом условии $Z = 0$. [Заметим, что это дифференциальное уравнение можно было также получить из уравнения $\Delta T = 0$ подстановкой $T = Z(u, v) W(w)$.] Дифференциальное уравнение (40) имеет вид $\Delta Z + \lambda \rho Z = 0$, причем функция $\rho = f(u) - g(v)$ положительна во всем прямоугольнике G ; перед нами, стало быть, задача о собственных значениях с одним параметром λ совершенно в прежнем смысле, а для этой задачи вопросы о существовании фундаментальных функций и о теореме разложения полностью укладываются в привычную для нас схему. Забегая вперед с ответом на этот вопрос ¹⁾, мы можем, таким образом, утверждать существование для прямоугольника G бесконечного множества собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и соответствующих, исчезающих на границе фундаментальных функций $Z_1, Z_2, \dots$, по которым можно разложить произвольные, в очерченных выше рамках, функции. Остается только показать, что все собственные функции Z_i являются произведениями Ламэ $U(u) V(v)$ или, самое большее, суммами конечного числа произведений Ламэ, принадлежащих одному и тому же собственному значению λ .

Для этой цели обозначим полную систему собственных значений и фундаментальных функций уравнения (40) через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и $Z_1, Z_2, \dots$ соответственно. Пусть λ_n — одно из собственных значений; рассмотрим

¹⁾ См. §§ 14 и 15.

теперь задачу о собственных значениях обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 X}{du^2} + [\lambda_h f(u) + \mu] X = 0$$

при том же краевом условии $X = 0$ при $u = u_1$ и $u = u_2$. Обозначим соответствующую бесконечную последовательность собственных значений и нормированных собственных функций через $\mu_1, \mu_2, \dots$ и $X_1, X_2, \dots$ соответственно. По этим собственным функциям можно разложить всякую функцию, исчезающую при $u = u_1$ и $u = u_2$, непрерывную в интервале $u_2 \leq u \leq u_1$ вместе со своими производными до второго порядка, а в остальном совершенно произвольную. В частности эта теорема о разложимости справедлива и для функций $Z(u, v)$, зависящей еще от v как параметра; пишем это разложение в следующем виде:

$$Z(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(v) X_n(u),$$

причем

$$Y_n(v) = \int_{u_2}^{u_1} Z(u, v) X_n(u) du.$$

Продифференцируем Y_n дважды по v и преобразуем интеграцией по частям. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_n}{dv^2} &= \int_{u_2}^{u_1} Z_{vv}(u, v) X_n(u) du \\ &= \int_{u_2}^{u_1} \left(-Z_{uu} - \lambda_h [f(u) - g(v)] Z \right) X_n du \\ &= \int_{u_2}^{u_1} Z \left(-\frac{d^2 X_n}{du^2} - \lambda_h [f(u) - g(v)] X_n \right) du \\ &= \left((\mu_n + \lambda_h g(v)) \right) Y_n, \end{aligned}$$

т. е. Y_n есть фундаментальная функция дифференциального уравнения (38) для области $v_2 \leq v \leq v_1$ при заданном краевом условии. Другими словами, пара значений λ_h, μ_n с соответствующими функциями $X_n(u), Y_n(v)$ являются решением нашей двухпараметровой задачи о собственных значениях — если только соответствующая функция $Y_n(v)$ не исчезает тождественно. Но ведь на основании исходных рассуждений произведение $X_n Y_n$ является собственной функцией уравнения (40), принадлежащей собственному значению λ_h , а всякое собственное значение этого уравнения в силу общей теории (которая будет обоснована лишь в следующей главе) может обладать только конечной кратностью. Поэтому

среди функций $X_n Y_n$ обеих переменных u и v может встретиться лишь конечное число k линейно независимых. Кроме того, можно принять, что ни одна из функций X_n и Y_n не исчезает тождественно, ибо в противном случае соответствующий член можно просто опустить. Между всякими $k+1$ произведениями $X_n Y_n$ существует тогда линейное соотношение:

$$\sum_{v=1}^{k+1} c_v X_{n_v} Y_{n_v} = 0.$$

Если дать в этом равенстве переменному v такое значение, при котором все Y_{n_v} отличны от нуля, то получим линейное соотношение между всеми X_{n_v} . Но так как фундаментальные функции, принадлежащие различным собственным значениям μ , линейно независимы, выражение $Z = \sum X_n Y_n$ вообще может содержать лишь конечное число членов, что мы и имели в виду показать.

Теперь можно произвольную, с указанными выше ограничениями, функцию разложить по собственным функциям Z_p , и мы получаем таким образом следующий результат: всякая функция, непрерывная в прямоугольнике $u_2 \leq u \leq u_1$, $v_2 \leq v \leq v_1$ вместе со своими производными до второго порядка и исчезающая на его контуре, может быть разложена в ряд произведений Ламэ.

§ 10. Задачи штурм-лиувиллевского типа. Особые краевые точки.

При процессах расщепления, приводящих к задачам на определение собственных значений, часто получаются дифференциальные уравнения, принадлежащие к штурм-лиувиллевскому типу, т. е. уравнения вида:

$$(pu')' - qu + \lambda ru = 0,$$

с тем, однако, существенным отличием от случаев, рассмотренных в § 3, что в конечных точках основной области могут иметь место особенности дифференциального уравнения, например исчезание значения $p(0)$. Для этих особых точек из самого характера задачи получаются при этом некоторые условия, как, например, непрерывность или конечность решения или обращение его в бесконечность не выше заданного порядка, каковые условия принимают на себя роль однородного краевого условия.

1. Бесселевы функции. Примером может служить рассмотренное уже в § 5, 5 дифференциальное уравнение Бесселя:

$$(xu')' - \frac{n^2}{x} u + \lambda xu = 0, \quad (41)$$

которое получается в самых разнообразных вопросах математической физики. Сделанное в § 3, 3 предположение, что $p > 0$ во всей основной области $0 \leq x \leq 1$, здесь уже не имеет места, ибо $p(0) = 0$. Точка $x = 0$ является в смысле общей теории линейных дифференциальных уравнений *особой точкой дифференциального уравнения Бесселя, и требование, чтобы решение оставалось конечным в этой точке,*

будет для него специального вида краевым условием. Краевые условия нашей штурм-лиувиллевоу задачи гласят здесь так: решение остается конечным при $x=0$ и, например, исчезает при $x=1$. Фундаментальными функциями являются бесселевы функции $J_n(\sqrt{\lambda}x)$, причем $\lambda = \lambda_{n,m}$ определяется из краевого условия при $x=1$, как корень некоторого трансцендентного уравнения.

Если вместо бесселевых функций $u = J_n(\sqrt{\lambda}x)$ пожелаем рассматривать соответствующие ортогональные функции $z = \sqrt{x} J_n(\sqrt{\lambda}x)$, то можно их охарактеризовать как решения дифференциального уравнения:

$$z'' - \frac{n^2 - 1/4}{x^2} z + \lambda z = 0, \quad (42)$$

которое получается без затруднений из уравнения Бесселя.

(Мы имеем здесь пример того преобразования, которое в общем виде было приведено на стр. 276.)

Для функции

$$\xi = \frac{z}{x} = \frac{J_n(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{x}}$$

получается дифференциальное уравнение:

$$(\lambda^2 \xi')' - (n^2 - 1/4) \xi + \lambda x^2 \xi = 0. \quad (43)$$

2. Функции Лежандра любого порядка. Задачу того же типа представляет штурм-лиувиллевоу дифференциальное уравнение:

$$[(1-x^2)u']' + \lambda u = 0 \quad (44)$$

при следующих краевых условиях: u остается конечной для $x = +1$ и $x = -1$, обеих особых точек дифференциального уравнения; основной областью является $-1 \leq x \leq +1$. Из гл. II, § 8 мы знаем, что числа $\lambda = n(n+1)$ являются собственными значениями, а функции Лежандра $P_n(x)$ — собственными функциями этой задачи.

Нетрудно показать, что полиномы Лежандра — единственные решения этой задачи о собственных значениях. Доказательство вытекает, например, без дальнейших рассуждений из того известного уже из гл. II, § 8 факта, что функции Лежандра образуют полную ортогональную систему. Независимо от этого дадим нижеследующее прямое доказательство. Заметим, что одновременно с $u = f(x)$ удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению и функция $f(-x)$, а стало быть, удовлетворяют ему и функции $f(x) + f(-x)$ и $f(x) - f(-x)$, из которых одна — четная, другая — нечетная и одна, по крайней мере, не исчезает тождественно, ибо функция u , по предположению, не равна тождественно нулю. Итак, достаточно показать, что всякое четное и всякое нечетное решение u уравнения (44), непрерывное при $-1 \leq x \leq +1$, есть полином Лежандра и что при этом λ должно быть числом вида $n(n+1)$. Подставив u в виде степенного ряда

$$u = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v,$$

получим из уравнения (44) рекуррентную формулу:

$$a_{\nu} = \frac{(\nu-1)(\nu-2) - \lambda}{\nu(\nu-1)} a_{\nu-2}. \quad (45)$$

Если u — четная функция, то все a_{ν} с нечетным ν — нули; если же u — нечетная функция, то нулями будут коэффициенты a_{ν} с четным ν . Из уравнения (45) в случае $\nu - 2h > 0$ имеем:

$$a_{\nu} = \frac{1}{\nu} \left[1 - \frac{\lambda}{(\nu-1)(\nu-2)} \right] \left[1 - \frac{\lambda}{(\nu-3)(\nu-4)} \right] \cdots \left[1 - \frac{\lambda}{(\nu-2h+1)(\nu-2h)} \right] k a_k, \quad (46)$$

где $k = \nu - 2h$. Наш ряд для u обрывается в том и только в том случае, если λ — число вида $n(n+1)$; нетрудно убедиться, что в этом случае u представляет собой n -й полином Лежандра. Для всех иных значений λ получится бесконечный ряд, который, согласно элементарным признакам, сходится при $|x| < 1$. Дадим числу k определенное значение, притом столь большое, чтобы все сомножители написанного выше произведения были положительны (a_k можно считать положительным). Так как с возрастанием ν произведение, записанное при помощи квадратных скобок, в правой части формулы (46), в силу известных теорем, стремится к положительному предельному значению, то при $\nu > k$ наверно

$a_{\nu} > \frac{c}{\nu}$, где c — положительная постоянная. В силу этого сумма $\sum_{n=k}^{\nu} a_n x^n$ становится сколь угодно большой по абсолютной величине, когда $|x|$ достаточно близка к единице, а ν выбрано достаточно большим. Но отсюда следует, что $\lim_{x \rightarrow \pm 1} |u(x)| = \infty$, так что λ не может быть собственным значением¹⁾.

Из дифференциального уравнения полиномов Лежандра легко вывести другие ортогональные системы собственных функций методом, идея которого имеет далеко идущую общность. Дифференцируя уравнение (44) по x , получим дифференциальное уравнение для функции $u'(x)$, и так же точно, как и выше, окажется, что лишь при $\lambda = n(n+1)$ существует решение, регулярное в обеих конечных точках интервала, а именно $P_n'(x)$. Полученное таким путем для $P_n'(x)$ уравнение не является еще самосопряженным, но его можно сделать самосопряженным, введя функцию $P_n'(x) \sqrt{1-x^2} = z_n$ в качестве неизвестной. Тогда новое уравнение гласит так:

$$[(1-x^2)z']' - \frac{z}{1-x^2} + \lambda z = 0;$$

собственными значениями будут числа $\lambda = n(n+1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) с фундаментальными функциями:

$$z_n = \sqrt{1-x^2} P_n'(x).$$

¹⁾ С изложенным выше рассуждением, которое, кстати, находится в тесной связи с признаком сходимости Раабе и, соответственно, Гаусса, ср. Kneser A., Zur Theorie der Legendreschen Polynome, Tôhoku math. Journ., т. 5, стр. 1—7, 1914.

Функции $z_n = P_{n,1}(x)$ называются *сопряженными функциями Лежандра первого n -го порядка*. (Функции $P_n(x) = P_{n,0}(x)$ мы при случае будем называть функциями Лежандра нулевого порядка.) Функции Лежандра $P_{n,1}$ удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_{n,1} P_{m,1} dx = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Точно так же, дифференцируя уравнение (44) h раз, получим для функции

$$(V \sqrt{1-x^2})^h \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) = P_{n,h}(x)$$

дифференциальное уравнение:

$$[(1-x^2)z']' - \frac{h^2 z}{1-x^2} + \lambda z = 0 \quad (47)$$

с собственными значениями $\lambda = n(n+1)$ ($n = h, h+1, \dots$) и соответствующими собственными функциями $P_{n,h}(x)$, которые также взаимно ортогональны и называются *функциями Лежандра h -го порядка*. Их *нормирование* производится при помощи следующего легко доказываемого равенства:

$$\int_{-1}^{+1} P_{n,h}^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+h)!}{(n-h)!}$$

Что таким путем получены все собственные значения и фундаментальные функции дифференциального уравнения (47), доказывается таким же образом, как и для полиномов Лежандра.

3. Полиномы Якоби и Чебышева. Обобщение полиномов Лежандра представляют *полиномы Якоби* из гл. II, § 9, дифференциальное уравнение которых можно записать в следующей, также штурм-лиувиллевской, форме¹⁾:

$$[(1-x)^q (1+x)^{p-q+1} u']' + \lambda (1-x)^{q-1} (1+x)^{p-q} u = 0;$$

n -му полиному Якоби принадлежит собственное значение $\lambda = n(p+n)$ при краевых условиях: конечность при $x = \pm 1$. Что других решений этой краевой задачи, кроме полиномов Якоби, не существует, можно доказать так же, как и выше, двойким путем.

¹⁾ Промежуток изменения x в данном случае, в отличие от гл. II, взят $-1 \leq x \leq 1$. Связь между старым независимым переменным ξ и новым x дается формулой: $\xi = \frac{1-x}{2}$. Для нового независимого переменного дифференциальное уравнение (25'), стр. 83, имеет вид:

$$(1-x)(1+x)u'' - [2q - (p+1)(1-x)]u' + (p+n)u = 0$$

или в самосопряженном виде:

$$[(1-x)^q (1+x)^{p-q+1} u']' + \lambda (1-x)^{q-1} (1+x)^{p-q} u = 0.$$

(Прим. пер.)

Дальнейший пример представляют *полиномы Чебышева*, удовлетворяющие *штурм-лиувиллевскому дифференциальному уравнению*:

$$(V \overline{1-x^2} u')' + \frac{\lambda}{V \overline{1-x^2}} u = 0.$$

тоже при краевых условиях: регулярность при $x = \pm 1$. Собственное значение, принадлежащее полиному Чебышева $T_n(x)$, есть $\lambda = n^2$, и так же, как и выше, этим исчерпываются все собственные значения и фундаментальные функции.

4. Полиномы Эрмита и Лагерра. Аналогично определяются полиномы Эрмита $u = H_n(x)$ и соответствующие *эрмитовы ортогональные функции* $v = H_n e^{-\frac{x^2}{2}}$, как решения следующих задач о собственных значениях (ср. гл. II, § 9, 4):

$$(e^{-x^2} u')' + \lambda e^{-x^2} u = 0 \quad (48)$$

и соответственно

$$v'' + (1 - x^2) v + \lambda v = 0 \quad (49)$$

с собственными значениями $\lambda = 0, 2, 4, 6, \dots$. Основной областью является вся прямая $-\infty < x < \infty$, а краевое условие к уравнению (48) требует, чтобы фундаментальная функция u при $x = \pm \infty$ могла обращаться в бесконечность лишь того же порядка, как конечная степень x . Что кроме этих полиномов эрмитовская задача о собственных значениях других решений не имеет, можно показать следующим образом. Напишем дифференциальное уравнение (48) в виде: $u'' - 2xu' + \lambda u = 0$ и вместо u подставим

степенной ряд $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Как и выше, у дифференциального урав-

нения (44), можно принять, что u является четной или нечетной функцией, что, стало быть, в степенной ряд входят лишь только четные или только нечетные степени x . Дифференциальное уравнение дает для неисчезающих коэффициентов рекуррентную формулу $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)}$, откуда прежде всего следует, что наш ряд либо обрывается — именно, если $\lambda = 2n$, четному целому неотрицательному числу — и в этом случае дает полином Эрмита H_n , либо имеет бесконечное число неисчезающих коэффициентов и сходится для всех значений x . Коль скоро $2n - \lambda$ положительно, все коэффициенты a_n — одного знака. Так как во втором случае имеются члены $a_n x^n$ со сколь угодно большим n , которые превосходят при достаточно большом значении x всякую заданную степень x , то u не может быть фундаментальной функцией нашей задачи. Этим самым устанавливается, что полиномы Эрмита являются единственными решениями нашей задачи.

Полиномы Лагерра мы рассмотрим несколько подробнее, имея в виду их применение в дальнейшем (стр. 323). Основной областью является здесь положительная действительная ось $0 \leq x < \infty$, а дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Лагерра $u = L_n(x)$ для

собственного значения $\lambda = n$ (n — целое положительное число), гласит:

$$xu'' + (1-x)u' + \lambda u = 0 \quad (50)$$

(см. гл. II, § 9), или в самосопряженной форме:

$$(xe^{-x}u')' + \lambda e^{-x}u = 0,$$

причем в качестве краевых условий требуем: конечности решения при $x=0$ и обращения в бесконечность порядка не выше, чем некоторая положительная степень x при $x \rightarrow \infty$. Для соответствующих ортогональных функций

$$v = \omega_n = e^{-\frac{x}{2}} L_n$$

получается штурм-лиувиллево дифференциальное уравнение:

$$(xv')' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)v + \lambda v = 0,$$

причем в качестве краевого условия требуется регулярность решения при $x=0$. Заметим, наконец, что функции

$$w = S_n = x^{-\frac{1}{2}} \omega_n,$$

которые в дальнейшем встретятся, удовлетворяют самосопряженному дифференциальному уравнению:

$$(x^2w')' - \frac{x^2 - 2x - 1}{4}w + \lambda xw = 0,$$

причем требуется исчезание решения при $x \rightarrow \infty$. Соответствующими собственными значениями являются положительные целые числа $\lambda = n$.

Как и у функций Лежандра в п. 2, процессом дифференцирования и умножения на подходящих множителей приходим и здесь к лагерровским функциям высшего порядка, которые удовлетворяют аналогичным дифференциальным уравнениям. Прежде всего из уравнения (50) после m -кратного дифференцирования следует, что функции

$$u = L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$xu'' + (m+1-x)u' + (\lambda-m)u = 0, \quad (51)$$

которое можно записать в следующей самосопряженной форме:

$$(x^{m+1}e^{-x}u')' + x^m e^{-x}(\lambda-m)u = 0.$$

Соответствующие ортогональные функции

$$v = \omega_n^m = x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_n^m$$

удовлетворяют штурм-лиувиллевскому уравнению

$$(xv')' + \left(\frac{1-m}{2} - \frac{x}{4} - \frac{m^2}{4x} \right) v + \lambda v = 0, \quad (51')$$

а функции

$$w = S_n^m = x^{-\frac{1}{2}} \omega_n^m$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(x^2 w')' - \frac{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1}{4} w + \lambda x w = 0 \quad (51'')$$

для соответствующих собственных значений $\lambda = n$, где n — целое число, большее или равное m , а краевые условия разумеются сами собой из предыдущего.

Для того чтобы показать, что наши дифференциальные уравнения не имеют других собственных значений и собственных функций, вносим в уравнение (51) степенной ряд $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ и получаем для коэффициентов с помощью рекуррентной формулы следующее выражение:

$$a_{\nu} = \frac{a_0 (m-\lambda) \dots (m-\lambda+\nu-1)}{\nu! (m+1) \dots (m+\nu)}.$$

Замечаем, что при произвольно заданном значении λ коэффициенты этого ряда, начиная с некоторого определенного ν , имеют постоянный знак и что ряд сходится для всех значений x , стало быть, действительно представляет регулярное при $0 \leq x < \infty$ решение дифференциального уравнения (51). Для целого положительного $\lambda = n$ ($n > m$) ряд обрывается и представляет собою, следовательно, многочлен. При всяком другом значении λ легко получить оценку вида:

$$|a_{\nu}| > \frac{c}{\nu! \nu^r},$$

где c — надлежащая постоянная, а r — также подходящий положительный целый показатель. Но отсюда вытекает, что наше решение при $x \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности порядка не ниже чем $\frac{e^x}{x^r}$. Таким образом доказано, что оно не может быть фундаментальной функцией нашей задачи.

§ 11. ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЕВСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Специальный вид штурм-лиувиллевских дифференциальных уравнений позволяет, при общих предположениях относительно коэффициентов, вывести суждения о поведении всех решений как при возрастании параметра, так и при бесконечном возрастании независимых переменных.

1. Ограниченность при бесконечном возрастании независимого переменного. Представим себе, что дифференциальное уравнение, согласно формуле (19') на стр. 277, приведено к виду $u'' + \mu(x)u = 0$, и предположим, что $\mu(x)$ при $x \rightarrow \infty$ стремится к положительному пределу, который без ограничения общности можно принять равным единице. В таком случае, введя обозначение $\mu = 1 + \rho$, можно в основу нашего рассмотрения положить дифференциальное уравнение:

$$u'' + u + \rho u = 0. \quad (52)$$

Допущение $\rho \rightarrow 0$ мы заменим более жестким требованием:

$$|\rho| < \frac{\alpha}{x}, \quad |\rho'| < \frac{\alpha}{x^2}, \quad (53)$$

где α — положительная постоянная. При этом предположении мы утверждаем, что всякое решение дифференциального уравнения (52) ограничено при $x \rightarrow \infty$, что, впрочем, естественно, ибо близкое для больших значений x дифференциальное уравнение $u'' + u = 0$ имеет только ограниченные решения.

Для доказательства помножим уравнение (52) на u' , проинтегрируем его от положительного числа a , значение которого будет надлежащим образом выбрано позже, до x и получим:

$$u'^2 \Big|_a^x + u^2 \Big|_a^x = -2 \int_a^x \rho u u' dx = -\rho u^2 \Big|_a^x + \int_a^x \rho u^2 dx. \quad (54)$$

Отсюда непосредственно получается:

$$u^2(a) \leq u'^2(x) + u^2(x) \leq C(a) + |\rho(x)| u^2(x) + \int_a^x |\rho'| u^2 dx,$$

где $C(a)$ — выражение, зависящее только от нижнего предела a . Обозначив через $M = M(x)$ наибольшее значение функции $|u(\xi)|$ в интервале $a \leq \xi \leq x$, принимаемое этой функцией, скажем, в точке ξ , получим из последнего неравенства и неравенств (53):

$$M^2 \leq C(a) + \frac{M^2 \alpha}{\xi} + M^2 \alpha \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\xi} \right),$$

откуда

$$M^2 \left(1 - \frac{\alpha}{a} \right) \leq C(a).$$

Если теперь выбрать $a \geq 2\alpha$, то для M^2 получится независящая от x граница $2C(a)$, и наше утверждение доказано.

2. Уточнение результата (бесселевы функции). Если мы относительно дифференциального уравнения $u'' + u + \rho u = 0$ сделаем предположение, более жесткое, чем в п. 1, а именно, что порядок

исчезания $\rho(x)$ в бесконечности выше первого, например ¹⁾, что

$$\rho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (55)$$

то большая близость нашего дифференциального уравнения к уравнению $u'' + u = 0$ влечет за собою не только ограниченность решений, но и асимптотическое их приближение к тригонометрическим функциям.

Если положить

$$u = a \sin(x + \delta), \quad u' = a \cos(x + \delta),$$

где $a(x)$ и $\delta(x)$ — подлежащие определению функции x с производными a' и δ' (кстати, a нигде не может исчезать, ибо в противном случае u и u' исчезали бы одновременно в одной точке, а потому, в силу дифференциального уравнения (52), функция u исчезала бы тождественно), то u'' и u' можно вычислить двояким путем. Имеем:

$$u'' = a' \cos(x + \delta) - a(\delta' + 1) \sin(x + \delta) = -(1 + \rho) a \sin(x + \delta),$$

$$\operatorname{tg}(x + \delta) = \frac{a'}{a(\delta' - \rho)};$$

$$u' = a \cos(x + \delta) = a' \sin(x + \delta) + a(\delta' + 1) \cos(x + \delta),$$

$$\operatorname{tg}(x + \delta) = -\frac{a\delta'}{a'},$$

$$\operatorname{tg}^2(x + \delta) = -\frac{\delta'}{\delta' - \rho},$$

$$\delta' = \rho \sin^2(x + \delta), \quad (56)$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{-\delta'}{\operatorname{tg}(x + \delta)} = -\rho \sin(x + \delta) \cos(x + \delta). \quad (57)$$

Стало быть, каждая из функций a и δ имеет при $x \rightarrow \infty$ определенный предел. В самом деле, $\delta(x) = \delta(\beta) - \int_x^\beta \delta'(\xi) d\xi$; если дать β безгранично возрастать, то в силу уравнений (55) и (56) интеграл справа сходится, так как подинтегральное выражение имеет такой же порядок исчезания, как $\frac{1}{x^2}$. Следовательно, существует $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \delta(\beta) = \delta_\infty$; и последнее выражение для $\delta(x)$, кроме того, показывает, что

$$\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Аналогично получается из формулы (57) для $\frac{a'}{a} = \frac{d}{dx} \log a$ следующее

¹⁾ Мы пользуемся здесь общепринятым обозначением, на основании которого под $O[f(x)]$ разумеется функция $g(x)$, для которой отношение $\left| \frac{g(x)}{f(x)} \right|$ остается ограниченным при возрастании аргумента.

соотношение:

$$a(x) = a_{\infty} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

в котором, кстати, $a_{\infty} \neq 0$. Таким образом имеем для всякого решения u нашего дифференциального уравнения следующее асимптотическое выражение:

$$u = a \sin(x + \delta) = a_{\infty} \sin(x + \delta_{\infty}) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Этот результат можно непосредственно применить к дифференциальному уравнению:

$$u'' + \left(1 - \frac{m^2 - 1/4}{x^2}\right) u = 0,$$

решения которого, как показано на стр. 307, связаны с решениями $y_m(x)$ дифференциального уравнения Бесселя равенством:

$$u = y_m \sqrt{x}.$$

Стало быть, для этих решений $y_m(x)$ дифференциального уравнения Бесселя всегда справедливы асимптотические формулы следующего вида:

$$y_m(x) = \frac{a_{\infty}}{\sqrt{x}} \sin(x + \delta_{\infty}) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Значения a_{∞} и δ_{∞} для бесселевых функций $J_m(x)$ мы позже, в гл. VII, § 6, 2, определим из других соображений, причем окажется

$$a_{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \delta_{\infty} = -\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

3. Ограниченность решения при возрастании параметра. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям п. 1, можно доказать следующую теорему: *Решения штурм-лиувиллевского уравнения*

$$u'' - ru + \lambda u = 0, \quad (58)$$

где r — непрерывная функция, для интервала $0 \leq x \leq 1$, с нормирующим условием

$$\int_0^1 u^2 dx = 1$$

и краевыми условиями $u(0) = u(1) = 0$, остаются по абсолютной величине ниже границы, не зависящей от λ и от x .

Для доказательства помножим опять дифференциальное уравнение на u' и проинтегрируем от 0 до x . Получаем:

$$u'^2(x) + \lambda u^2(x) - 2 \int_0^x r u u' dx = u'^2(0) + \lambda u^2(0). \quad (59)$$

Для вычисления правой части интегрируем это равенство между пределами 0 и 1, в результате чего получим:

$$u'^2(0) + \lambda u^2(0) = \int_0^1 u'^2 dx + \lambda - 2 \int_0^1 d\xi \int_0^\xi r u u' dx. \quad (60)$$

Внеся это значение в (59) и оценив встречающиеся интегралы с помощью неравенства Шварца, имеем:

$$\lambda u^2 \leq u'^2 + \lambda u^2 \leq \lambda + \int_0^1 u'^2 dx + C_1 \sqrt{\int_0^1 u'^2 dx} \sqrt{\int_0^1 u^2 dx}, \quad (61)$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая ни от x , ни от λ . Из равенства

$$\int_0^1 u'^2 dx + \int_0^1 r u^2 dx = \lambda,$$

которое выводится знакомым нам способом путем умножения уравнения (58) на u и при помощи преобразования Грина, получаем:

$$\int_0^1 u'^2 dx \leq \lambda + C_2 \int_0^1 u^2 dx$$

и затем, по подстановке в (61):

$$\lambda u^2(x) \leq 2\lambda + C_1 \sqrt{\lambda} + C_3,$$

где C_2, C_3 — опять положительные числа, не зависящие от x и λ . Отсюда вытекает, что

$$u^2(x) \leq 2 + \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{C_3}{\lambda},$$

чем и доказывается наше утверждение.

В заключение заметим, что наш результат и наш метод доказательства остаются в силе и в том случае, если решения наших дифференциальных уравнений не ограничены более краевыми условиями. Подчеркнем, однако, что при большем числе независимых переменных аналогичный результат уже несправедлив¹⁾.

4. Асимптотическое выражение решений. Обнаружив ограниченность решений, мы сверх того докажем следующее предложение: для всякого нормированного в интервале $0 \leq x \leq 1$ решения урав-

¹⁾ Простой пример противного дают нормированные фундаментальные функции $\frac{\sqrt{2}}{J'_0(k_{0,m})} J_0(k_{0,m} r)$ — ср. стр. 289 — дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, исчезающие на окружности единичного круга (ср. W. Sternberg. Über die asymptotische Integration partieller Differentialgleichungen II, Math. Ann., т. 86, особенно стр. 292—295).

нения $u'' - ru + \lambda u = 0$ со значением $\lambda > 0$ существует такое решение уравнения $v'' + \lambda v = 0$, что

$$u = v + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Эта формула дает, таким образом, для больших значений λ асимптотическое выражение решений u через тригонометрические функции v . Для доказательства рассмотрим то решение уравнения $v'' + \lambda v = 0$, для которого $u(0) = v(0)$, $u'(0) = v'(0)$; тогда $u - v = w$ удовлетворяет уравнению:

$$w'' + \lambda w = ru.$$

Помножив это уравнение на $2w'$ и интегрируя от 0 до x , в силу того, что $w(0) = w'(0) = 0$, получим следующее равенство:

$$w'^2(x) + \lambda w^2(x) = 2 \int_0^x ruw' dx. \quad (62)$$

Если обозначить через M наибольшее значение $|w(x)|$, через M' — наибольшее значение $|w'(x)|$, в интервале $0 \leq x \leq 1$, то из (62) в результате применения неравенства Шварца к правой части, в связи с тем, что $\lambda > 0$, вытекает равенство:

$$M'^2 \leq M'C, \quad M' \leq C,$$

где C — положительная постоянная, не зависящая ни от λ , ни от x ; следовательно, на основании равенства (62):

$$\lambda M^2 \leq C^2,$$

а стало быть,

$$M \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}},$$

как мы и утверждали.

5. Асимптотическое выражение штурм-лиувиллевских фундаментальных функций. Для того случая, когда речь идет не о произвольных решениях дифференциального уравнения $(pu')' - qu + \lambda ru = 0$, но о фундаментальных функциях для интервала, скажем, $0 \leq x \leq \pi$ с крайними условиями $u(0) = u(\pi) = 0$, мы задачу об асимптотическом выражении поставим несколько иначе. Для этой цели предположим прежде всего, что дифференциальное уравнение приведено с помощью преобразования (20'); указанного на стр. 277, к виду:

$$z'' - rz + \lambda z = 0, \quad (63)$$

где новое независимое переменное t изменяется в интервале $0 \leq t \leq l$, а r обозначает функцию, непрерывную в этом интервале. Будем теперь сравнивать n -ю фундаментальную функцию z_n уравнения (63), принадлежащую собственному значению λ_n , с соответствующей n -й собственной функцией дифференциального уравнения $v'' + \lambda v = 0$.

В качестве удобного вспомогательного средства воспользуемся тем фактом, что выражение для z , представляющее интегральное уравнение

типа Вольтерры:

$$z(t) = a \sin \sqrt{\lambda} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t r(\tau) z(\tau) \sin \sqrt{\lambda} (t - \tau) d\tau \quad (64)$$

с произвольным постоянным a , дает те решения уравнения (63), которые исчезают при $t=0$, что непосредственно получаем из формулы (10) на стр. 269, подставляя в нее вместо N_h функцию rz .

Так как $z(t)$, согласно п. 3, остается ограниченной при всех значениях λ , то из (64) тотчас вытекает ограниченность постоянной a ¹⁾. Отсюда получается для a из уравнения (64) и из нормирующего условия

$$\int_0^1 z^2 dt = 1 \text{ точная оценка}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{l}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

и вытекающая из нее оценка для z :

$$z(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda} t = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Так как n -е собственное значение дифференциального уравнения λ_n с возрастанием n стремится к бесконечности (ср. гл. VI, § 2, 2), то отсюда непосредственно получим для n -й собственной функции $z_n(t)$ асимптотическое выражение:

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} O(1).$$

Но для λ_n имеется асимптотическая оценка (ср. гл. VI, § 2, 6):

$$\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} + O(1).$$

Следовательно,

$$\sqrt{\lambda_n} = n \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$\sin \sqrt{\lambda_n} t = \sin n \frac{\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Стало быть, для нормированных собственных функций дифференциального уравнения $z'' - rz + \lambda z = 0$ получается следующее асимптотическое выражение:

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n \frac{\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (65)$$

¹⁾ Впрочем, ограниченность функции $z(t)$ нетрудно обнаружить непосредственно из интегрального уравнения (64).

Соответствующим же образом, после дифференцирования интегрального уравнения (64), получается формула:

$$z'_n(t) = n \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \cos n \frac{\pi}{l} t + O(1). \quad (66)$$

Для исходного дифференциального уравнения полученный результат выражается следующими соотношениями:

$$u_n(x) = c_n \frac{\sin \left(n \frac{\pi}{l} \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx \right)}{\sqrt[4]{p\rho}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (67)$$

причем нормирующий множитель c_n определяется формулой:

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 \left(n \frac{\pi}{l} \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx \right)}{\sqrt{p\rho}} dx,$$

$$l_1 = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx.$$

Соответствующим образом имеем:

$$u'_n(x) = c_n \frac{n\pi}{l} \frac{\cos \left(n \frac{\pi}{l} \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx \right)}{\sqrt[4]{p\rho}} \sqrt{\frac{\rho}{p}} + O(1). \quad (68)$$

Точно таким же образом получают асимптотические выражения для фундаментальных функций и их производных и при более общих однородных краевых условиях. Выражения

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos n \frac{\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (69)$$

$$z'_n(t) = -\frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n \frac{\pi}{l} t + O(1) \quad (70)$$

справедливы вообще, коль скоро в краевом условии $z'(0) - hz(0) = 0$ коэффициент h остается конечным.

Кстати заметим, что из нашего интегрального уравнения (64) Вольтерры можно вывести даже значительно более точные выражения для фундаментальных функций и их производных, соответственно подчерк-

нумому уже в гл. III обстоятельству, что ряд Неймана такого интегрального уравнения Вольтерры всегда сходится¹⁾. Для вывода нет нужды возвращаться к общей теории; берем для a в (64) значение 1, отказываясь тем самым от нормирования, подставляем затем под знаком интеграла в правой части вместо функции $z(\tau)$ снова ее значение, даваемое интегральным уравнением; повторяя последовательно этот процесс и полагая для краткости $v(t) = \sin \sqrt{\lambda} t$, получим непосредственно следующую формулу:

$$\begin{aligned} z(t) = & v(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) r(\tau_1) \sin \sqrt{\lambda} (t - \tau_1) + \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 v(\tau_2) r(\tau_1) r(\tau_2) \sin \sqrt{\lambda} (t - \tau_1) \sin \sqrt{\lambda} (\tau_1 - \tau_2) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}^3} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_3 v(\tau_3) r(\tau_1) r(\tau_2) r(\tau_3) \sin \sqrt{\lambda} (t - \tau_1) \times \\ & \times \sin \sqrt{\lambda} (\tau_1 - \tau_2) \sin \sqrt{\lambda} (\tau_2 - \tau_3) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\sqrt{\lambda}^n} \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n z(\tau_n) r(\tau_1) \dots r(\tau_n) \sin \sqrt{\lambda} (t - \tau_1) \dots \sin \sqrt{\lambda} (\tau_{n-1} - \tau_n). \end{aligned} \quad (71)$$

Итак, мы видим, что этот ряд, расположенный по убывающим степеням $\sqrt{\lambda}$, можно продолжать до бесконечности и получить таким образом для $z(t, \lambda)$ ряд, сходящийся для всех значений $\lambda > 0$, расположенный по убывающим степеням $\sqrt{\lambda}$. Если оборвать ряд на n -м члене, то ошибка будет более высокого порядка малости, чем $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^n$. *Стало быть, ряд имеет асимптотический характер.*

§ 12. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ.

Собственные значения рассмотренных нами до сих пор задач образуют безгранично возрастающую числовую последовательность. Если же коэффициенты дифференциального уравнения имеют особую точку на границе основной области, прежде всего, однако, в том случае, если основная область простирается в бесконечность, спектр, т. е. совокупность собственных значений, может показывать совершенно другую картину.

¹⁾ См. *Liouville J.*, Journ. de math. pures et appl., т. 1, 2 (1836—1837) (см. перечень литературы), где встречаются интегральное уравнение Вольтерры и ряд Неймана.

В частности могут встретиться спектры, содержащие все числа какого-нибудь интервала значений переменной λ , так называемые *непрерывные спектры*. В отношении соответствующих собственных функций теорема о разложении переходит в этом случае в теорему о выражении с помощью интеграла типа Фурье.

1. Тригонометрические функции. Простейшую задачу такого рода представляет дифференциальное уравнение

$$u'' + \lambda u = 0$$

для интервала $-\infty < x < \infty$ с „краевым условием“: u ограничено в бесконечности. Очевидно, всякое неотрицательное число λ является собственным значением с собственными функциями $\sin \sqrt{\lambda} x$, $\cos \sqrt{\lambda} x$. Специальная интегральная теорема Фурье из гл. II, § 6 заменяет для этой задачи о собственных значениях теорему о разложении.

Появление непрерывного спектра можно себе уяснить точно так же, как и происхождение интеграла Фурье, из теоремы о разложении, исходя из задачи о собственных значениях для конечного интервала и совершая затем предельный переход к бесконечному интервалу.

2. Бесселевы функции. Аналогично обстоит дело и в задаче о собственных значениях дифференциального уравнения Бесселя:

$$(xu')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)u = 0$$

для интервала $0 \leq x < \infty$ при краевом условии ограниченности решения для $x=0$ и $x \rightarrow \infty$. Все бесселевы функции $u = J_n(\sqrt{\lambda} x)$ при $\lambda \geq 0$ являются фундаментальными функциями. Мы имеем, стало быть, непрерывный спектр из всех неотрицательных значений λ .

И здесь теорема о разложении заменяется теоремой о представлении произвольной функции $f(x)$ в виде интеграла, у которого областью интегрирования является спектр, т. е. континуум положительных чисел. Эта интегральная теорема гласит так:

$$f(x) = \int_0^{\infty} t J_n(tx) g(t) dt, \quad g(t) = \int_0^{\infty} \xi J_n(\xi t) f(\xi) d\xi.$$

Для того чтобы эти равенства были справедливы, достаточно выполнения следующих условий: 1) чтобы функция $f(x)$ была кусочно-гладкой при $x \geq 0$, 2) чтобы существовал интеграл

$$\int_0^{\infty} x |f(x)| dx,$$

и 3) если $n > 0$, чтобы было $f(0) = 0$. Доказательство этой интегральной теоремы мы дадим лишь позднее, в гл. VII, § 2.

3. Задача о собственных значениях уравнения колебания для бесконечной плоскости. Задача о собственных значениях дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ для всей плоскости x, y , при краевом условии ограниченности решения в бесконечном, допускает решение в двух различных видах. Во-первых, можно рассма-

тривать как фундаментальные функции все произведения тригонометрических функций вида $u = \sin \alpha (x - \xi) \sin \beta (y - \eta)$, причем ξ, η и α, β — произвольны, а собственным значением является $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$. Стало быть, и здесь собственным значением является всякое неотрицательное число λ , а всякому такому собственному значению, очевидно, принадлежит еще континуум собственных функций. Соответствующее интегральное выражение есть не что иное, как интегральная теорема Фурье для плоскости (ср. гл. II, § 6).

Другой тип фундаментальных функций мы получим по введении полярных координат r, φ в следующем виде:

$$u = J_n(\sqrt{\lambda} r) \sin n\varphi, \quad u = J_n(\sqrt{\lambda} r) \cos n\varphi$$

при любом целом n и любом неотрицательном λ . Спектром остается, само собою разумеется, и здесь континуум неотрицательных чисел $\lambda \geq 0$, между тем как каждому собственному значению $\lambda > 0$ принадлежит лишь счетное множество фундаментальных функций, в соответствии с целочисленным характером n . Представление произвольной функции достигается здесь разложением в ряд Фурье в отношении n и интегральным выражением каждого коэффициента относительно r сообразно с предыдущим пунктом (ср. гл. VII, § 2).

Эти последние фундаментальные функции можно, впрочем, рассматривать как линейную комбинацию произведений синусов с одним и тем же значением $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$. Существует именно формула

$$J_n(\sqrt{\lambda} r) e^{in\varphi} = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it} e^{ix\sqrt{\lambda} \cos t + iy\sqrt{\lambda} \sin t} dt$$

(ср. гл. VII, § 2, 4).

4. Задача Шредингера о собственных значениях (ср. также гл. VI, § 5). В недавнее время, в связи с физической теорией квантов, Шредингер¹⁾ натолкнулся на тип задач о собственных значениях, спектр которых обнаруживает совершенно иную структуру, чем рассмотренные до сих пор, а именно состоит из непрерывной и из дискретной части, причем дискретный спектр не простирается в бесконечность, но имеет конечную точку сгущения. В простейшей задаче Шредингера речь идет о дифференциальном уравнении

$$\Delta u + \frac{c}{r} u + \lambda u = 0 \quad (72)$$

в пространстве, причем c обозначает данную положительную постоянную, r, ϑ, φ — полярные координаты, а от собственных функций u требуется непрерывность в начале координат и конечность при $r \rightarrow \infty$. Умножая дифференциальное уравнение на шаровую функцию $Y_n(\vartheta, \varphi)$ и интегрируя по поверхности единичной сферы, получим для функции

$$v(r) = \iint u(r, \vartheta, \varphi) Y_n(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

¹⁾ Schrödinger E., Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig 1927.

обычным образом дифференциальное уравнение

$$v_{rr} + \frac{2}{r} v_r + \left(\lambda + \frac{c}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) v = 0, \quad (73)$$

и из фундаментальных функций v этого уравнения при тех же краевых условиях, что и выше, для $r=0$ и $r \rightarrow \infty$, умножением на Y_n получим фундаментальные функции $u = vY_n$ уравнения (72).

Введя вместо λ в качестве нового параметра величину

$$l = \frac{c}{2\sqrt{-\lambda}}$$

и вместо r переменную

$$z = 2\sqrt{-\lambda} r,$$

получим дифференциальное уравнение

$$v_{zz} + \frac{2}{z} v_z + \left(-\frac{1}{4} + \frac{l}{z} - \frac{n(n+1)}{z^2} \right) v = 0,$$

которое мы установили в § 10, формула (51"). Из проведенных там рассуждений вытекает, что при действительном l , т. е. отрицательном λ условие непрерывности в нулевой точке и конечности при $r \rightarrow \infty$ может быть выполнено лишь для целых значений $l > n$ и что решения даются производными полиномов Лагерра в следующем виде;

$$v = 2^n e^{-\frac{z}{2}} L_{l+n}^{(2n+1)}(z).$$

Следовательно, для первоначального дифференциального уравнения числа

$$\lambda = -\frac{c^2}{4l^2},$$

и только эти числа, являются отрицательными собственными значениями, которым принадлежат собственные функции:

$$u = r^n e^{-\frac{c}{2l}r} L_{l+n}^{(2n+1)}\left(\frac{c}{l}r\right) Y_n(\vartheta, \varphi).$$

При этом n , при заданном целом l , может пробегать все целые числа от 0 до $l-1$, а Y_n представляет каждый раз $2n+1$ линейно независимых шаровых функций. Найденный таким путем дискретный спектр состоит из бесконечного множества чисел с точкой сгущения нуль.

Далее, утверждаем, что уравнение (72) Шредингера имеет собственным значением всякое положительное число λ , т. е. обладает непрерывным спектром в виде континуума всех неотрицательных чисел.

Для доказательства подставим в (73) вместо v функцию $w = rv$, получится дифференциальное уравнение

$$w'' + \left(\lambda + \frac{c}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) w = 0$$

типа, рассмотренного в § 11, п. 1. Его решения w остаются, таким образом, ограниченными при всяком положительном λ , а решения $v = \frac{w}{r}$ стремятся к нулю при бесконечном возрастании r . Для того чтобы обнаружить, что всякое положительное число λ является собственным значением, остается лишь доказать существование при всяком $\lambda > 0$ регулярного в нулевой точке решения v . Этот факт можно получить из общей теории линейных дифференциальных уравнений. Но можно также непосредственно получить такое решение методом, не раз уже примененным нами, в виде постоянно сходящегося степенного ряда, причем целесообразно предварительно преобразовать наше дифференциальное уравнение подстановкой $z = r^{-n} e^{iV\lambda r} v$ в такое дифференциальное уравнение для z , у которого подстановка степенного ряда приводит к двучленной рекуррентной формуле.

§ 13. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ.

Если известны собственные значения λ_n и соответствующие нормированные и ортогональные собственные функции u_n линейного самосопряженного дифференциального уравнения

$$L[u_n] + \lambda_n u_n = 0 \quad (74)$$

для заданной области¹⁾ и заданных краевых условий, то с помощью важного для приложений метода приближений, так называемой *теории возмущений*, можно вычислить собственные значения и фундаментальные функции задачи о собственных значениях „близкого“ или „возмущенного“ дифференциального уравнения

$$L[\bar{u}_n] - \epsilon r \bar{u}_n + \bar{\lambda}_n \bar{u}_n = 0; \quad (75)$$

при этом краевые условия и область остаются те же; r обозначает заданную, непрерывную в основной области функцию, а ϵ — параметр; $\bar{u}_n$ и $\bar{\lambda}_n$ — фундаментальные функции и собственные значения новой задачи. В дальнейшем мы предполагаем, что как новые собственные значения, так и новые собственные функции допускают разложение по степеням параметра возмущения ϵ , причем от доказательства возможности такого разложения мы здесь воздержимся.

1. Простые собственные значения. Сначала предположим, что первоначальная, невозмущенная задача имеет только простые собственные значения. Соответственно этому предположению полагаем:

$$\bar{u}_n = u_n + \epsilon v_n + \epsilon^2 w_n + \dots \quad (76)$$

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_n + \epsilon \mu_n + \epsilon^2 \nu_n + \dots \quad (77)$$

Путем подстановки этих рядов в (75) получим дифференциальное уравнение (74) и затем следующие дифференциальные уравнения:

$$L[v_n] + \lambda_n v_n = r u_n - \mu_n u_n, \quad (78)$$

$$L[w_n] + \lambda_n w_n = r v_n - \mu_n v_n - \nu_n u_n, \quad (79)$$

¹⁾ При этом число измерений области безразлично. Интеграции в дальнейшем распространяются по всей области; элемент области обозначен здесь через dg .

из которых можно одно за другим определить возмущения различного порядка, т. е. величины $\mu_n, \gamma_n, \dots$ и $v_n, w_n, \dots$.

Для этой цели введем в качестве искомым величин коэффициенты разложения

$$a_{nj} = \int v_n u_j dg$$

функции v_n по фундаментальным функциям u_j , помножим уравнение (74) (заменив в нем индекс n через l) на v_n , а (78) на u_l и вычтем из второго уравнения первое; интегрируя полученное уравнение по основной области и преобразуя первый член в левой части с помощью формулы Грина с учетом краевых условий (скажем, исчезающие краевые значения) получим:

$$a_{nl}(\lambda_n - \lambda_l) = d_{nl} - \mu_n \delta_{nl},$$

причем $\delta_{nl} = 0$ при $n \neq l$ и $\delta_{nn} = 1$, и для сокращения положено

$$d_{nl} = \int r u_n u_l dg.$$

В результате имеем при $l = n$:

$$\mu_n = d_{nn} \quad (80)$$

и при $l \neq n$:

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l}.$$

Значение a_{nn} определяется из условия нормирования $\int \bar{u}_n^2 dg = 1$, из которого получается $\int u_n v_n dg = 0$, откуда $a_{nn} = 0$. Таким образом, если функции v_n можно разложить по функциям u_j , то

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{nj}}{\lambda_n - \lambda_j} u_j \quad (d_{nj} = \int r u_n u_j dg), \quad (81)$$

причем штрих у знака суммы указывает, что следует опустить член с индексом $j = n$.

После определения первого приближения аналогичным путем получаем второе:

$$w_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} u_j$$

с помощью уравнений (74) и (79), из которых подобно предыдущему вытекает:

$$b_{nl}(\lambda_n - \lambda_l) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} - \mu_n a_{nl} - \gamma_n \delta_{nl}. \quad (82)$$

Полагая $n = l$, получим второй возмущающий член для собственного значения, а именно:

$$\gamma_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jn};$$

полагая же $l \neq n$, получим:

$$b_{nl} = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_l} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} a_{jl} - \mu_n a_{nl} \right). \quad (83)$$

Для определения коэффициента b_{nn} опять прибегаем к нормирующему условию $\int \bar{u}_n^2 dg = 1$ и множитель при ϵ^2 приравниваем в нем нулю, откуда легко получить:

$$b_{nn} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}^2, \quad (84)$$

и второе приближение полностью определено.

Точно таким же образом определяются последовательно дальнейшие приближения.

2. Кратные собственные значения. В случае наличия кратных собственных значений, или, как иногда также выражаются, в случае „вырождения“, необходимо дальнейшее исследование. Для понимания рассуждения, достаточно предположить, что первое собственное значение уравнения (74) кратности α , т. е. что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\alpha = \lambda$, все же собственные значения λ_n с индексом $n > \alpha$ являются простыми. Усложнение, которое имеет здесь место, покоится на том факте, что в случае кратного собственного значения фундаментальные функции определены лишь с точностью до ортогонального преобразования и что при возмущении возможно ожидать непрерывного продолжения отдельных собственных функций лишь после надлежащего выбора системы этих функций, принадлежащих кратному собственному значению (ср. также гл. III, § 8, 4). Соответственно этому представим себе, что α фундаментальных функций, принадлежащих собственному значению λ , переведены в другую систему таких функций с помощью подлежащего еще определению ортогонального преобразования:

$$u_n^* = \sum_{j=1}^{\alpha} \gamma_{nj} u_j \quad (n = 1, 2, \dots, \alpha)$$

и положим

$$\bar{u}_n = u_n^* + \epsilon v_n + \epsilon^2 w_n + \dots,$$

причем как коэффициенты γ_{nj} , так и функции $v_n, w_n, \dots$ предстоит теперь определить. При $n > \alpha$ следует здесь положить $u_n^* = u_n$, и никаких изменений против рассуждений, проведенных в п. 1, не будет, вследствие чего можно ограничиться рассмотрением случаев $n = 1, 2, \dots, \alpha$. На основании последней формулы и дифференциального уравнения (75) получим для v_n и w_n следующие уравнения:

$$L[v_n] + \lambda_n v_n = \sum_{j=1}^{\alpha} r \gamma_{nj} u_j - \mu_n \sum_{j=1}^{\alpha} \gamma_{nj} u_j, \quad (85)$$

$$L[w_n] + \lambda_n w_n = r v_n - \mu_n v_n - \nu_n \sum_{j=1}^{\alpha} \gamma_{nj} u_j. \quad (86)$$

Помножив уравнение (85) на u_l и уравнение (74) (после замены в нем индекса n через l) на v_n и поступая затем, как в п. 1, получим, пользуясь обозначениями предыдущего пункта, уравнение

$$a_{nl}(\lambda_n - \lambda_l) = \sum_{j=1}^{\alpha} (d_{jl} - \mu_n \delta_{jl}) \gamma_{nj}, \quad (87)$$

стало быть, в частности для $l=1, 2, \dots, \alpha$:

$$0 = \sum_{j=1}^{\alpha} (d_{jl} - \mu_n \delta_{jl}) \gamma_{nj} \quad (l, n = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Из этих α^2 уравнений, по методам гл. I, § 2, определяются однозначно, с точностью до порядка их расположения, величины $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\alpha}$, как корни характеристического детерминантного уравнения

$$|d_{jl} - \mu_n \delta_{jl}| = 0.$$

В интересах простоты предположим, что все эти корни различны между собой, т. е. что форма $\sum_{j,l} d_{jl} x_j x_l$ имеет только отличные друг от друга собственные значения. В таком случае однозначно определена и ортогональная матрица (γ_{nj}) . Для удобства записи обозначим теперь фундаментальные функции $u_n^* = \sum_{j=1}^{\alpha} \gamma_{nj} u_j$ снова знаком u_n ; матрица (d_{nl}) является, стало быть, диагональной матрицей с элементами

$$d_{nn} = \mu_n,$$

между тем как остальные элементы — нули. Уравнения (87) дают теперь непосредственно для $l > \alpha$:

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l}. \quad (88)$$

Из нормирующего условия, как и в п. 1, вытекает $a_{nn} = 0$, для определения же величин a_{nl} ($l, n = 1, 2, \dots, \alpha, n \neq l$) придется воспользоваться еще уравнениями (86) для второго приближения; из них вытекают равенства (82), которые при $l, n = 1, 2, \dots, \alpha$ принимают следующий вид:

$$0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} - \mu_n a_{nl} - v_n \delta_{nl}$$

или, учитывая то обстоятельство, что (d_{jl}) ($j, l = 1, 2, \dots, \alpha$) — диагональная матрица с диагональными элементами μ_n :

$$0 = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} + u_{nl} \mu_l - \mu_n a_{nl} - v_n \delta_{nl}.$$

При $l=n$ это дает:

$$v_n = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jn}, \quad (89)$$

где коэффициенты a_{nj} уже определены по формуле (88). При $n \neq l$ имеем:

$$a_{nl} = \frac{1}{\mu_n - \mu_l} \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jl}.$$

Резюмируем полученный результат. Для α -кратного собственного значения $\lambda_1 = \lambda$ надо выбрать такую систему нормированных ортогональных собственных функций $u_1, \dots, u_\alpha$, чтобы матрица $d_{nl} = \int r u_n u_l dx$ оказалась диагональной матрицей с элементами d_{nn} . Тогда возмущение первого порядка для собственного значения дается формулой

$$\mu_n = d_{nn},$$

а возмущение первого порядка для фундаментальных функций — формулой

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} u_j,$$

причем

$$a_{nn} = 0$$

и

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l},$$

если по крайней мере один индекс l или n больше чем α и

$$a_{nl} = \frac{1}{d_{nn} - d_{ll}} \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} \frac{d_{nj} d_{jl}}{\lambda_n - \lambda_j},$$

если оба индекса l и n различны и не превышают α .

Совершенно аналогично получаются члены возмущения второго и высших порядков, из которых, кстати, возмущение второго порядка для n -го собственного значения получается из (89):

$$v_n = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} \frac{d_{nj}^2}{\lambda_n - \lambda_j}.$$

3. Пример к теории возмущений ¹⁾. Рассмотрим задачу о закрепленной в точках $x=0$ и $x=\pi$, свободно колеблющейся струне с постоянным коэффициентом упругости $p=1$ и с массовой плотностью $\rho(x)$, которая для всех значений x из интервала $0 \leq x \leq \pi$ мало отличается от постоянного значения ρ_0 и, стало быть, имеет вид $\rho(x) = \rho_0 + \varepsilon \sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — заданная функция, а ε обозначает „параметр возмущения“. Согласно § 3, имеем задачу о собственных значениях дифференциального уравнения:

$$\bar{u}_n'' + \bar{\lambda}_n [\rho_0 + \varepsilon \sigma(x)] \bar{u}_n = 0. \quad (90)$$

¹⁾ Cp. Rayleigh J. W. S., The Theory of Sound, 2 изд., т. I. стр. 115—118.

При $\epsilon = 0$ получается невозмущенная задача $u_n'' + \lambda_n \rho_0 u_n = 0$ с решением $\lambda_n = \frac{n^2}{\rho_0}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin nx$.

Для того чтобы получить первое приближение возмущенной задачи (90), достаточно (так как все собственные значения являются простыми) подставить в формулы (80) и (81) из п. 1.

$$\lambda_n = \frac{n^2}{\rho_0}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin nx$$

и

$$r(x) = -\lambda_n \sigma(x) = -\frac{n^2}{\rho_0} \sigma(x)^4.$$

Для возмущения первого порядка μ_n собственных значений получим:

$$\mu_n = -\frac{n^2}{\rho_0} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sigma(x) \sin^2 nx \, dx,$$

а для возмущения v_n в фундаментальных функциях:

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} u_j, \quad (91)$$

причем

$$a_{nj} = \frac{2}{\pi} \frac{n^2}{j^2 - n^2} \frac{1}{\rho_0} \int_0^\pi \sigma(x) \sin nx \sin jx \, dx \quad (j \neq n), \quad (92)$$

$$a_{nn} = 0.$$

Чтобы пояснить эти результаты на примере, рассчитаем вместе с Рэлеем (Rayleigh) смещение δx первого узла, соответствующего значению $n=2$ и у однородной струны лежащего в ее середине.

Так как мы предполагали разложимость функции u_n по степеням ϵ , можно δx написать в виде $\delta x = \epsilon \tau + \epsilon^2 (\dots)$. Для определения τ получится уравнение:

$$0 = u_2 \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon \tau + \dots \right) = u_2 \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon \tau + \dots \right) + \epsilon v_2 \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon \tau + \dots \right) + \epsilon^2 (\dots) = u_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) + \epsilon \left[\tau u_2' \left(\frac{\pi}{2} \right) + v_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] + \epsilon^2 (\dots).$$

4) Конечно, в п. 1 мы предполагали, что в возмущающем члене $\epsilon r(x)$ функция $r(x)$ не зависит от ϵ , между тем как в соответствующем возмущающем члене уравнения (90) функция $\bar{\lambda}_n \sigma(x)$ зависит еще от ϵ ; однако, так как в последующем нас будут занимать лишь возмущения первого порядка, мы имеем право, как легко видеть, положить $r(x) = -\lambda_n \sigma(x)$, где λ_n уже не зависит от ϵ .

Приравнивая нулю коэффициент при ϵ в этом уравнении и принимая во внимание (91) и $u_2(x) = \text{const} \times \sin 2x$, получим:

$$\tau = - \frac{v_2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{u_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} (a_{21} - a_{23} + a_{25} - \dots).$$

Если, например, неоднородность вызвана тем, что в точке $x = \frac{\pi}{4}$ помещена малая масса $\rho_0 x$, то при помощи легко выполнимого предельного перехода получим из формулы (92):

$$\begin{aligned} \epsilon \tau &= \frac{4x}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1^2 - 4} - \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{3^2 - 4} + \frac{\sin \frac{5\pi}{4}}{5^2 - 4} - \dots \right) \\ &= \frac{4x}{\pi \sqrt{2}} \left(\frac{1}{1^2 - 4} - \frac{1}{3^2 - 4} + \frac{1}{5^2 - 4} - \dots \right) \\ &= - \frac{2x}{\pi \sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots \right). \end{aligned}$$

Значение ряда в скобках есть

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\epsilon \tau = - \frac{x}{2}.$$

§ 14. Функция Грина (функция влияния) и приведение краевых задач дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям.

Расширим теперь круг наших рассуждений и сделаем принципиально новый шаг, полагая в основу не задачу о колебаниях или о собственных значениях, а краевую задачу, и разовьем независимо от всего предыдущего метод решения подобных краевых задач с помощью функции Грина (функции влияния). Этот метод естественно приводит наши дифференциальные уравнения с собственными значениями к симметрическим интегральным уравнениям и дает таким путем решение остающихся еще открытыми вопросов о существовании системы собственных функций, о полноте этой системы и о разложении по собственным функциям.

1. Функция Грина и краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений. Прежде всего рассмотрим линейное однородное самосопряженное дифференциальное выражение второго порядка:

$$L[u] = pu'' + p'u' - qu$$

для функции $u(x)$ в основной области G : $x_0 \leq x \leq x_1$, где p, p' и q — непрерывные функции от x и $p > 0$; соответствующее неоднородное дифференциальное уравнение гласит:

$$L[u] = -\varphi(x), \quad (93)$$

где $\varphi(x)$ обозначает функцию, кусочно-непрерывную в области G . Речь идет о краевой задаче: найти такое решение $u = f(x)$ уравнения (93), которое на границе области G удовлетворяет заданным однородным краевым условиям, например краевому условию $u = 0$ ¹⁾. При рассмотрении этой задачи напрашивается следующая мысль: мы истолковываем дифференциальное уравнение (93), сообразно с прежними рассуждениями, как условие равновесия струны под влиянием распределенной вдоль нее постоянной во времени силы, плотность которой дается функцией $\varphi(x)$. Совершим теперь предельный переход от непрерывно распределенной силы $\varphi(x)$ к *сосредоточенной* силе, т. е. к силе (величины 1 или другой величины), приложенной в точке $x = \xi$, и пусть $K(x, \xi)$ — смещение струны под влиянием этой сосредоточенной силы величины 1, причем наложенные на струну краевые условия остаются все время в силе. В таком случае действие непрерывно распределенной силы $\varphi(x)$ можно рассматривать как наложение действий непрерывно распределенных сосредоточенных сил, плотность которых в точке ξ равна $\varphi(\xi)$; можно, следовательно, ожидать, что искомое решение представится в виде:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (94)$$

Функция $K(x, \xi)$, которую мы будем называть *функцией влияния* или *функцией Грина* для дифференциального выражения $L[u]$, в силу своего определения, должна для всякого значения параметра ξ удовлетворять краевым условиям при $x = x_0$ и $x = x_1$; отсюда непосредственно вытекает, что функция $u(x)$, истокообразно представленная формулой (94) при помощи ядра $K(x, \xi)$ с плотностью источников $\varphi(x)$, тоже удовлетворяет этим краевым условиям.

Функция влияния $K(x, \xi)$ должна повсюду, кроме точки $x = \xi$, удовлетворять дифференциальному уравнению

$$L[K] = 0,$$

ибо она соответствует силе, равной нулю при $x \neq \xi$. В точке $x = \xi$ функция $K(x, \xi)$ должна обнаруживать особенность, на существование которой наводит следующее соображение: представим себе, что сосредоточенная сила возникла путем предельного перехода из силы $\varphi_\epsilon(x)$, которая в области G при $|x - \xi| > \epsilon$ равна нулю и общая величина которой дается равенством

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \varphi_\epsilon(x) dx = 1.$$

¹⁾ Напомним еще раз, что к этой задаче можно привести краевую задачу однородного дифференциального уравнения при неоднородных краевых условиях (ср. § 1, 2).

Соответствующее смещение струны обозначим через $K_\varepsilon(x, \xi)$; оно удовлетворяет, стало быть, уравнению $L[K_\varepsilon] = (pK_\varepsilon')' - qK_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon(x)$. Интегрируем это равенство между пределами $\xi - \delta$ и $\xi + \delta$, причем $\delta \geq \varepsilon$ может быть выбрано совершенно произвольно, но с тем, чтобы промежуток интегрирования оставался внутри области G . Имеем:

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{dK_\varepsilon}{dx} \right) + qK_\varepsilon \right] dx = -1.$$

Совершим теперь прежде всего предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ и допустим, что K_ε сходится при этом к непрерывной функции $K(x, \xi)$, имеющей повсюду, кроме точки $x = \xi$, непрерывную производную. Если заставим теперь также и δ стремиться к нулю, то для $K(x, \xi)$ получим следующее соотношение:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{dK(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=\xi-\delta}^{x=\xi+\delta} = -\frac{1}{p(\xi)},$$

характеризующее особенность функции Грина.

Это эвристическое рассуждение мы теперь обратим и превратим его в строгую математическую теорию. Определим прежде всего как *функцию Грина* для дифференциального выражения $L[u]$ при заданных однородных краевых условиях функцию $K(x, \xi)$ от x и ξ , удовлетворяющую следующим условиям:

1. $K(x, \xi)$ при фиксированном значении ξ является непрерывной функцией от x и удовлетворяет заданным однородным краевым условиям.

2. Производные первого и второго порядка от K по x непрерывны повсюду в области G , кроме точки $x = \xi$; в точке же $x = \xi$ первая производная делает скачок, определяемый следующей формулой:

$$\frac{dK(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = -\frac{1}{p(\xi)}. \quad (95)$$

3. K , как функция от x , повсюду в области G , кроме точки $x = \xi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[K] = 0$.

Заметим, кстати, что непрерывную функцию, удовлетворяющую условиям 2 и 3, но не обязательно однородным краевым условиям, называют *основным решением* дифференциального уравнения $L[u] = 0$.

Определенная таким образом функция Грина действительно дает то, что требовалось, а именно мы сейчас докажем следующую теорему, на существование которой наводят изложенные выше соображения.

Если $\varphi(x)$ — непрерывная или кусочно-непрерывная функция от x , то функция

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (96)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L[u] = -\varphi(x). \quad (97)$$

и краевым условиям. Если, наоборот, функция $u(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (97) и краевым условиям, то ее можно представить в форме (96). Для доказательства первого утверждения надо только применить элементарные правила дифференцирования интеграла по параметру. Этим путем, принимая во внимание (95), получаем последовательно следующие равенства:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int_{x_0}^{x_1} K'(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi; \\ u''(x) &= \int_{x_0}^x K''(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_x^{x_1} K''(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \\ &\quad + [K'(x, x-0) - K'(x, x+0)] \varphi(x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} K''(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + [K'(x+0, x) - K'(x-0, x)] \varphi(x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} K''(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi - \frac{\varphi(x)}{p(x)}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$p u'' + p' u' - q u = \int_{x_0}^{x_1} (p K'' + p' K' - q K) \varphi(\xi) d\xi - \varphi(x),$$

что в силу тождества $L[K] = 0$ и дает требуемое доказательство.

Для доказательства обратного утверждения воспользуемся снова формулой Грина (2'') из § 1, подставим в нее $v = K$ и применим ее к обоим промежуткам интеграции $x_0 \leq x \leq \xi$ и $\xi \leq x \leq x_1$. Из формулы разрыва (95) и краевых условий получится тогда непосредственно формула (96) с перестановкой букв x и ξ .

Точно таким же путем получим общее, если u не подчинено, как K , заданным однородным краевым условиям — скажем, $u(x_0) = u(x_1) = 0$ — выражение для u :

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + p K' u \Big|_{x_0}^{x_1},$$

в котором при $\varphi = 0$ содержится выражение решения краевой задачи для однородного дифференциального уравнения $L[u] = 0$ через краевые значения.

Функция Грина самосопряженного дифференциального выражения симметрична относительно параметра и аргумента, т. е. имеет место тождество

$$K(x, \xi) = K(\xi, x).$$

Доказательство вытекает почти непосредственно из формулы Грина [§ 1, (2'')], если в ней положить $v = K(\cdot, \eta)$, $u = K(x, \xi)$ и взять область интегрирования, составленную из трех отдельных отрезков $x_0 \leq x \leq \xi$, $\xi \leq x \leq \eta$, $\eta \leq x \leq x_1$; принимая во внимание условие раз-

рыва (95) в точках $x=\xi$ и $x=\eta$ и краевые условия, получим доказываемое утверждение. *Симметричность функции Грина во многих случаях выражает в отчетливой форме часто встречающийся в физике принцип взаимности: если сила, равная единице, приложенная в точке ξ , производит действие $K(x, \xi)$ в точке x , то сила, равная единице, приложенная в точке x , вызовет в ξ то же самое действие.*

2. Построение функции Грина и обобщенная функция Грина. Для построения функции Грина для $L[u]$ при заданных краевых условиях поступаем следующим образом. Рассмотрим решение $u_0(x)$ дифференциального уравнения $L[u]=0$, удовлетворяющее при $x=x_0$ заданному краевому условию, скажем, исчезающее при $x=x_0$; в таком случае $c_0 u_0(x)$ есть самое общее такое решение. Точно так же пусть $c_1 u_1(x)$ — семейство решений дифференциального уравнения $L[u]=0$, удовлетворяющих краевому условию при $x=x_1$. Тогда возможны два случая. Либо оба семейства отличны друг от друга, — что следует считать общим случаем —, либо они совпадают. В первом случае функции u_0, u_1 линейно независимы, т. е. на основании известной теоремы $u_0 u_1' - u_0' u_1 \neq 0$ ¹⁾, и ни в какой точке основной области кривая первого семейства не может касаться кривой второго семейства (так как в точке касания получилось бы противоречие с последним равенством). Возможно, стало быть, так выбрать обе постоянные c_0, c_1 , чтобы точка пересечения принадлежала заданной абсциссе $x=\xi$ в интервале G и чтобы скачок производной в этой точке имел в точности значение $-\frac{1}{p(\xi)}$. Таким путем мы получим функцию Грина выраженной в явном виде следующими формулами:

$$\begin{aligned} x \leq \xi: \quad u &= -\frac{1}{c} u_1(\xi) u_0(x) \\ x \geq \xi: \quad u &= -\frac{1}{c} u_0(\xi) u_1(x) \end{aligned} \quad c = p(\xi) [u_0(\xi) u_1'(\xi) - u_0'(\xi) u_1(\xi)] = \text{const.}$$

Во втором случае u_0 и u_1 отличаются лишь постоянным множителем; всякое решение первого семейства принадлежит в то же время и второму. Стало быть, функция $u_0(x)$ удовлетворяет в этом случае не только краевому условию в начальной точке, но и краевому условию на конце, и дифференциальное уравнение $L[u]=0$ имеет не исчезающее тождественно решение $u_0(x)$, удовлетворяющее краевым условиям. Это можно выразить еще и таким образом: $\lambda=0$ есть собственное значение дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$. Таким образом изложенное выше построение отказывается служить, функция Грина не существует.

Так как, согласно п. 1, построением функции Грина обеспечивается существование однозначного решения однородной краевой задачи для дифференциального уравнения $L[u] = -\varphi(x)$, то наши рассуждения показывают, что имеет место следующая *альтернатива*: При за-

¹⁾ В самом деле, $\Delta = u_0 u_1' - u_0' u_1 = \frac{c}{p}$, причем c постоянно, что нетрудно проверить. Достаточно для этого из заданного дифференциального уравнения вывести для Δ дифференциальное уравнение $p\Delta' + \Delta p' = 0$.

данных однородных краевых условиях либо дифференциальное уравнение $L[u] = -\varphi(x)$ имеет однозначно определенное решение $u(x)$ для всякой заданной правой части $\varphi(x)$, либо однородное уравнение $L[u] = 0$ имеет не исчезающее тождественно решение.

Далее докажем еще следующее: Во втором случае для разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения $L[u] = -\varphi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для решений $u_0(x)$ однородного уравнения $L[u_0] = 0$ и правой части $\varphi(x)$ выполнялось соотношение ортогональности:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) u_0(x) dx = 0.$$

Что это условие необходимо, обнаруживается непосредственно, если помножить дифференциальное уравнение $L[u] + \varphi(x) = 0$ на $u_0(x)$, интегрировать по области G и воспользоваться формулой Грина с учетом краевых условий. Что это условие также и достаточно, можно показать, введя вместо обыкновенной обобщенную функцию Грина. К последней тоже приводит эвристическое рассуждение, вытекающее из физических соображений. Напомним (ср. стр. 279), что собственное значение λ и соответствующая нормированная фундаментальная функция u имеют то значение, что наша струна под влиянием внешней силы вида $-\phi(x)e^{i\sqrt{\lambda}t}$ становится неустойчивой (резонанс), если не выполняется равенство

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x) u(x) dx = 0.$$

В рассматриваемом случае $\lambda = 0$ это означает неустойчивость под влиянием постоянной во времени внешней силы; в частности, под воздействием сосредоточенной силы с произвольной точкой приложения струна не может установиться в каком-нибудь положении равновесия. Если мы желаем подвергнуть систему действию такой сосредоточенной силы без того, чтобы система как угодно далеко отклонилась от своего положения равновесия, то необходимо ее прежде всего удержать с помощью вполне определенной, постоянной во времени противодействующей силы. Эту противодействующую силу можно выбрать произвольно, но только не ортогонально к фундаментальной функции $u_0(x)$, ибо в последнем случае эта сила не противодействовала бы возбуждению нулевой частоты. Удобнее всего взять противодействующую силу в симметрическом виде: $\phi(x) = -u_n(x) u_0(\xi)$; тогда функция влияния $K(x, \xi)$ сосредоточенной силы, приложенной в точке $x = \xi$, будет удовлетворять не только краевым условиям, но, исключая точку $x = \xi$, еще и дифференциальному уравнению

$$L[K] = u_0(x) u_0(\xi),$$

а при $x = \xi$ условию разрыва (95). Решение этой задачи может быть определено лишь до произвольной аддитивной функции $c(\xi) u_0(x)$. Эту неопределенность мы устраняем требованием

$$\int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) u_0(x) dx = 0$$

и функцию $K(x, \xi)$, определенную таким образом, назовем обобщенной функцией Грина для дифференциального выражения $L[u]$. В предположений, что $L[u]$ есть самосопряженное дифференциальное выражение, получим точно так же, как на стр. 333, *свойство симметричности* обобщенной функции Грина:

$$K(x, \xi) = K(\xi, x).$$

Читатель может уяснить себе эти рассуждения на простейшем примере однородной струны, свободной на обоих концах (ср. также § 15, 1). В этом примере фундаментальной функцией для $\lambda = 0$ является $u_0 = \text{const}$, и в качестве противодействующей силы мы возьмем повсюду вдоль струны одну и ту же постоянную силу.

Построение обобщенной функции Грина производится точно так же, как и построение обыкновенной функции Грина. При этом опираются на следующую теорему: Если дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ имеет не исчезающее тождественно решение u_0 ¹⁾, удовлетворяющее краевым условиям, то уравнение $L[v] = u_0(\xi) u_0(x)$ такого решения иметь не может. Действительно, из последнего уравнения, если помножить его на $u_0(x)$ и проинтегрировать по основной области с учетом краевых условий, вытекало бы равенство

$$u_0(\xi) \int_{x_0}^{x_1} u_0(x)^2 dx = \int_{x_0}^{x_1} v(x) L[u_0] dx = 0,$$

что противоречит предположению, что $\int_{x_0}^{x_1} u_0(x)^2 dx \neq 0$.

Обобщенная функция Грина играет ту же роль, которую выше играла обыкновенная функция Грина. Следует лишь заметить, что решение $w(x)$ дифференциального уравнения $L[w] = -\varphi(x)$ определено лишь до произвольной аддитивной функции $cu_0(x)$, а потому может

быть сделано однозначным при помощи требования $\int_{x_0}^{x_1} w u_0 dx = 0$. Теперь мы можем сформулировать следующую теорему: Если ортогональная к $u_0(x)$ и удовлетворяющая краевым условиям функция $w(x)$, имеющая непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производную, связана с кусочно-непрерывной функцией $\varphi(x)$ соотношением

$$L[w] = -\varphi(x),$$

то существует также соотношение

$$w(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (98)$$

¹⁾ Под решением дифференциального уравнения здесь подразумевается функция, удовлетворяющая этому дифференциальному уравнению во всем промежутке x_0, x_1 и поэтому непрерывная вместе со своей производной во всем промежутке. (Прим. пер.)

Обратно, из последнего соотношения, в случае если $\varphi(x)$ ортогональна к функции $u_0(x)$, вытекает предыдущее. Это обратное предложение содержит вторую часть теоремы, высказанной выше (стр. 335).

Доказательство ведется точно так же, как доказательство соответствующей теоремы для обыкновенной функции Грина, причем следует заметить, что всякая функция $w(x)$ вида (98) должна быть ортогональна к $u_0(x)$, так как функция Грина $K(x, \xi)$ обладает этим свойством.

У наших дифференциальных уравнений второго порядка $\lambda = 0$ во всяком случае является простым собственным значением, как мы узнали уже раньше. Однако, имея в виду более общие случаи, укажем вкратце, что в случае кратного собственного значения $\lambda = 0$ простейший симметрический способ построения обобщенной функции Грина получается, если выбрать противодействующую силу вида:

$$\phi(x) = -u_0(x)u_0(\xi) - u_1(x)u_1(\xi) - \dots,$$

а затем все дальнейшие рассуждения протекают по-предыдущему. При этом $u_0, u_1, \dots$ обозначают нормированные ортогональные фундаментальные функции, принадлежащие собственному значению $\lambda = 0$.

3. Эквивалентность краевой задачи дифференциального уравнения задаче решения интегрального уравнения. С помощью функции Грина мы достигнем теперь окончательного решения рассмотренной раньше задачи о собственных значениях тем, что перейдем от дифференциального уравнения к интегральному. Рассмотрим линейную совокупность дифференциальных уравнений, зависящую от одного параметра λ :

$$L[u] + \lambda \rho u = \phi(x) \quad (\rho(x) > 0), \quad (99)$$

где $\phi(x)$ — кусочно-непрерывная, $\rho(x)$ — положительная непрерывная функция, а u должна удовлетворять заданным краевым условиям, скажем $u = 0$. С помощью функции Грина для $L[u]$, существование которой при заданных краевых условиях мы здесь предполагаем, из формулы (94) для $\varphi(x) = \lambda \rho u - \phi$ получаем непосредственно следующее уравнение, совершенно эквивалентное уравнению (99):

$$u(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \rho(\xi) u(\xi) d\xi + g(x), \quad (100)$$

причем

$$g(x) = - \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \phi(\xi) d\xi$$

есть данная непрерывная функция от x . Определение решения u уравнения (99) при заданных краевых условиях эквивалентно, стало быть, решению интегрального уравнения (100). Однородному уравнению

$$L[u] + \lambda \rho u = 0 \quad (101)$$

соответствует однородное интегральное уравнение:

$$u(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \rho(\xi) u(\xi) d\xi$$

или, если ввести

$$u(x) \sqrt{\rho(x)} = z(x)$$

в качестве новой неизвестной функции, помножить интегральное уравнение на $\sqrt{\rho(x)}$ и положить $K(x, \xi) = K(x, \xi) \sqrt{\rho(x) \rho(\xi)}$:

$$z(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) z(\xi) d\xi. \quad (102)$$

Ядро $K(x, \xi)$ нашего интегрального уравнения (102) симметрично, так как $L(u)$ — дифференциальное выражение самосопряженное¹⁾; мы можем применить все соответствующие теоремы из гл. III, и из них мы тотчас получим для дифференциального уравнения (99) следующие результаты (отчасти, впрочем, явствующие уже из п. 2):

Между краевой задачей неоднородного дифференциального уравнения (99) и краевой задачей однородного дифференциального уравнения (101) при заданных однородных краевых условиях существует следующая альтернатива: *при твердо выбранном значении λ либо однородное дифференциальное уравнение (101) имеет лишь тождественно исчезающее решение — „ λ не является собственным значением уравнения (101)“; в этом случае неоднородное уравнение (99) имеет при произвольно выбранном $\phi(x)$ одно и только одно решение. Либо для значения $\lambda = \lambda_i$ однородное уравнение (101) имеет не исчезающее тождественно решение u_i — „ λ_i есть собственное значение уравнения (101) с соответствующей собственной функцией u_i “; в таком случае для разрешимости неоднородного дифференциального уравнения (99) при $\lambda = \lambda_i$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:*

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho u_i \phi dx = 0$$

для всех собственных функций u_i , принадлежащих собственному значению λ_i .

Далее: существует последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, причем $\lambda_n \rightarrow \infty$, с соответствующими собственными функциями $u_1, u_2, \dots$, которые образуют бесконечную систему функций, удовлетворяющих условиям ортогональности:

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho u_i u_k dx = 0 \quad (i \neq k), \quad \int_{x_0}^{x_1} \rho u_i^2 dx = 1.$$

Всякая функция $w(x)$, которую можно выразить истокообразно с помощью функции Грина $K(x, \xi)$ через кусочно-непрерывную функцию $\varphi(\xi)$ в виде

$$w(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

¹⁾ На этом выводе и его дальнейших следствиях основывается важность этого предположения, сделанного о дифференциальном выражении $L(u)$.

допускает разложение по собственным функциям в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \quad c_n = \int_{x_0}^{x_1} w \rho u_n dx.$$

Совокупность функций, разложимых по этой теореме, можно охарактеризовать еще иначе и притом проще. В силу основного свойства функции Грина из формулы (94) следует уравнение $L[w] = -\varphi(x)$; обратно, если перед нами какая-либо функция $w(x)$, удовлетворяющая краевым условиям и имеющая непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производную, то можно для нее построить распределение истоков $\varphi(x)$ при помощи равенства $L[w] = -\varphi(x)$. Мы получаем, стало быть, следующий результат: *Всякая удовлетворяющая краевым условиям функция $w(x)$ с непрерывной первой и кусочно-непрерывной второй производной допускает разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд*

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x).$$

Из этого предложения непосредственно вытекает, что *фундаментальные функции образуют полную ортогональную систему*. В самом деле, всякую непрерывную в области G функцию можно аппроксимировать в среднем с какой угодно точностью при помощи непрерывной, удовлетворяющей краевым условиям функции с непрерывными первой и второй производными, а стало быть, в силу упомянутой теоремы разложения, ее можно также аппроксимировать при помощи конечного агрегата вида:

$$\sum_{n=1}^m c_n u_n(x).$$

К уточнению теоремы о разложении нас приводит сделанное уже ранее замечание, что все собственные значения положительны (ср. стр. 278), что, стало быть, на языке теории интегральных уравнений, ядро $K(x, \xi)$ определено. Так как к тому же $K(x, \xi)$ — непрерывная функция от x и ξ , то можно применить теорему Мерсера из гл. III, § 5, 4, и мы приходим к выводу, что разложение в ряд ядра

$$K(x, \xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(\xi)}{\lambda_n} \quad (103)$$

и соответственно

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(\xi)}{\lambda_n} \quad (103')$$

сходится абсолютно и равномерно. Эта формула, которая представляет выражение функции Грина в явном виде через фундаментальные функции и кратко называется *билинейной формулой*, при постоянном ξ дает

разложение непрерывной функции с кусочно-непрерывной первой производной. Построив линейную комбинацию

$$S = a_1 K(x, \xi_1) + a_2 K(x, \xi_2) + \dots,$$

получаем непрерывную функцию, первая производная которой делает в заданных точках $\xi_1, \xi_2, \dots$ заданные скачки $-\frac{a_1}{p(\xi_1)}, -\frac{a_2}{p(\xi_2)}, \dots$ и которая разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям. Так как из всякой функции с кусочно-непрерывными первой и второй производными можно вычесть такую специально подобранную функцию S , чтобы разность удовлетворяла условиям приведенной выше теоремы разложения, мы приходим непосредственно к следующему результату: *для применимости теоремы о разложении достаточно, если производные первого и второго порядка непрерывной функции $w(x)$ кусочно-непрерывны.*

В этом пункте мы до сих пор предполагали, что функция Грина для $L[u]$ существует, т. е., согласно п. 2, что $\lambda=0$ не является собственным значением нашего дифференциального уравнения $L[u] + \lambda \rho u = 0$; если же это предположение не оправдывается, то следует лишь заменить обыкновенную функцию Грина обобщенной функцией Грина, и все дальнейшие рассуждения, касающиеся приведения задачи о собственных значениях уравнения (101) к интегральному уравнению, остаются в силе без изменений. Что касается теоремы разложения, то здесь появляется еще дополнительное условие ортогональности к собственной функции $u_0(x)$, принадлежащей значению $\lambda=0$. Но это условие совершенно исчезает из окончательной формулировки теоремы разложения, если к функциям, по которым производится разложение, причислить фундаментальные функции, принадлежащие собственному значению $\lambda=0$. Позже (гл. VI, § 1) при другом методе рассмотрения задачи о собственных значениях, на основе вариационного исчисления, отчетливо видно будет, что действительно появление собственного значения $\lambda=0$ не означает никакой особенности.

В заключение дадим еще разложение по собственным функциям для решения неоднородного уравнения (99). В согласии с прежней схемой, данной нами в § 3, 3 и оправданной теперь теоремой разложения, или непосредственно из теоремы теории интегральных уравнений из гл. III, формула (56), решение получается в следующем виде:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n(x), \quad \gamma_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}, \quad c_n = \int_{x_0}^{x_1} u_n(x) \phi(x) dx.$$

Эта формула делает очевидным то обстоятельство, что разрешимость уравнения (99) в том случае, если $\lambda = \lambda_i$ есть собственное значение, предполагает условием выполнение соотношения ортогональности $\int_{x_0}^{x_1} \phi u_i dx = 0$.

Выражаясь физически: *если внешняя сила в резонансе с одним из собственных колебаний, то стационарное состояние существует в том и только в том случае, если эта сила не совершает работы*

над системой, когда она колеблется в соответствующем чистом собственном тоне.

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка. У обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка не появляется никаких существенно новых соображений. Можно поэтому ограничиться рассмотрением одного типичного примера, а именно дифференциального уравнения однородного стержня $u^{IV} - \lambda u = 0$ и неоднородного стержня $u^{IV} - \lambda u = 0$ (ср. § 4). Мы и здесь под функцией влияния или функцией Грина $K(x, \xi)$ разумеем смещение стержня, находящегося в равновесии под влиянием единичной силы, приложенной в точке $x = \xi$, при заданных однородных краевых условиях. В точности тем же методом, что и раньше, получаются для этой функции следующие характеристические условия:

1. Функция $K(x, \xi)$ непрерывна при всяком значении параметра ξ вместе со своими двумя первыми производными и удовлетворяет заданным однородным краевым условиям.

2. Для каждого значения x , отличного от ξ , непрерывны также третья и четвертая производные по x . При $x = \xi$ выполняется, напротив, следующее условие разрыва:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [K'''(\xi + \epsilon, \xi) - K'''(\xi - \epsilon, \xi)] = -1.$$

3. Повсюду, кроме $x = \xi$, удовлетворяется дифференциальное уравнение:

$$K^{IV}(x, \xi) = 0.$$

Главное характеристическое свойство функции Грина выражается в в следующем предложении: если между непрерывной, удовлетворяющей краевым условиям функцией $u(x)$ с непрерывными производными первого, второго, третьего порядка и кусочно-непрерывной производной четвертого порядка, с одной стороны, и кусочно-непрерывной функцией $\varphi(x)$, с другой стороны, существует соотношение:

$$L[u] = u^{IV} = -\varphi(x),$$

то существует также соотношение:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

и обратно.

Решение задачи о собственных значениях дифференциального уравнения

$$u^{IV} - \lambda u = 0,$$

соответствующая теорема о разложении, теория неоднородного уравнения $u^{IV} - \lambda u = -\varphi(x)$ и т. д. развиваются здесь точно так же, как соответствующие вопросы в п. 3, с помощью приведения к интегральному уравнению с симметрическим ядром $K(x, \xi) = K(\xi, x) \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$. Результатом явля-

ется существование бесконечной системы собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и соответствующих фундаментальных функций $u_1, u_2, \dots$, обладающих тем свойством, что функции $\sqrt{\rho} u_i$ образуют полную ортогональную систему, и всякая функция $w(x)$, удовлетворяющая краевым условиям и имеющая непрерывные производные до третьего порядка и кусочно-непрерывную производную четвертого порядка, допускает разложение по этим функциям в абсолютно и равномерно сходящийся ряд. Теорема Мерсера¹⁾ утверждает, далее, существование билинейного соотношения:

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(\xi)}{\lambda_n},$$

из которого можно вывести, что справедливость теоремы разложения распространяется и на такие функции, которых третья производная лишь кусочно-непрерывна.

Вопрос о существовании и построении функции Грина или, соответственно, обобщенной функции Грина не представляет здесь никаких новых затруднений; он будет разъяснен на примерах в следующем параграфе.

5. Дифференциальные уравнения с частными производными. Точно те же идеи, что и у обыкновенных дифференциальных уравнений, приводят также и для уравнений с частными производными к функции Грина и к применению метода интегральных уравнений. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$\Delta v = -\varphi(x, y)$$

в плоскости x, y для какой-либо области G при однородном краевом условии, например $v=0$; оно характеризует форму закрепленной мембраны, находящейся в равновесии под влиянием постоянной во времени силы плотности $\varphi(x, y)$. Решение этого уравнения можно опять получить с помощью функции Грина $K(x, y; \xi, \eta)$, представляющей влияние сосредоточенной единичной силы, приложенной в точке ξ, η . Эта функция должна быть непрерывна вместе со своими производными до второго порядка повсюду, кроме точки $x=\xi, y=\eta$, должна удовлетворять дифференциальному уравнению $\Delta K=0$, а также заданному однородному краевому условию и наконец в месте нахождения *точечного источника* $x=\xi, y=\eta$ она должна обладать особенностью, характеризующей *единичную силу*. Характер этой особенности обнаружится, если окружить точечный источник кругом k радиуса ϵ , допустить наличие внешней силы плотности $\varphi_\epsilon(x, y)$, которая равна нулю вне круга k и для которой выполняется соотношение: $\iint_k \varphi_\epsilon(x, y) dx dy = 1$, и функцию Грина рассма-

тривать как предел при исчезающем ϵ того решения $K_\epsilon(x, y; \xi, \eta)$ уравнения $\Delta K = -\varphi_\epsilon$, которое удовлетворяет заданному краевому усло-

¹⁾ Ср. гл. III, § 5, 4; определенность ядра доказывается здесь таким же образом, как в задаче о колебании струны (ср. стр. 339).

вию. Интегрируя уравнение $\Delta K = -\varphi_\epsilon$ по кругу радиуса $\delta \geq \epsilon$ с окружностью χ и применяя формулу Грина (5') на стр. 265, получим:

$$\int_{\chi} \frac{\partial}{\partial r} K_\epsilon ds = -1,$$

причем под $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ разумеется расстояние от точки x, y до точки ξ, η , под s — длина дуги на окружности χ . Стало быть, наша функция Грина должна быть подчинена условию

$$\int_{\chi} \frac{\partial}{\partial r} K(x, y; \xi, \eta) ds = -1.$$

Этому условию мы удовлетворим, если потребуем, чтобы в окрестности точечного источника функция K имела следующий вид:

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

причем функция $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка по x и y (и сама является регулярной потенциальной функцией, так как $\log r$ при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнению потенциала).

Это эвристическое рассуждение мы теперь обратим и определим функцию K Грина при помощи следующих требований:

1. Функция $K(x, y; \xi, \eta)$ повсюду внутри области G , кроме точки $x = \xi, y = \eta$, где находится источник, непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка. Она имеет следующий вид:

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

где $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ непрерывна вместе с производными до второго порядка.

2. Функция K удовлетворяет заданным однородным краевым условиям.

3. Повсюду, кроме точки, где находится источник, удовлетворяется дифференциальное уравнение $\Delta K = 0$.

Функция Грина, определенная этими условиями, обладает *свойством симметричности*:

$$K(x, y; \xi, \eta) = K(\xi, \eta; x, y).$$

Доказательство этого закона симметрии, выражающего все то же отмеченное выше физическое свойство *взаимности*, получается и здесь почти непосредственно из формулы Грина. Применяем эту формулу для функций $K(x, y; \xi, \eta)$ и $K(x, y; \xi', \eta')$ к области, получающейся из G , если вырезать из нее по кругу k и k' радиуса ϵ с центром соответственно в точках ξ, η и ξ', η' ; совершая затем предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$ с учетом особенности функции Грина, получим непосредственно формулу симметрии в виде $K(\xi', \eta'; \xi, \eta) = K(\xi, \eta; \xi', \eta')$ (интеграл по контуру Γ области G исчезает в силу краевого условия).

Основное свойство функции Грина выражается и здесь в следующей теореме: *Если $u(x, y)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая однородным краевым условиям, — скажем, $u = 0$, — непрерывная в области*

G и имеющая в этой области непрерывные первые и кусочно-непрерывные вторые производные и если

$$L[u] = \Delta u = -\varphi(x, y),$$

то имеет место соотношение:

$$u(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

С другой стороны, если $\varphi(x, y)$ — какая-либо функция, непрерывная в области G вместе со своими производными первого порядка, то функция

$$u(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

непрерывная в области G , удовлетворяет краевому условию, обладает непрерывными производными первого и второго порядка и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta u = -\varphi(x, y).$$

Обратим внимание, что во второй части о характере дифференцируемости функции $\varphi(x, y)$ сделано более сильное предположение, чем в первой, в чем не было необходимости у обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первая часть теоремы и здесь почти непосредственно вытекает из формулы Грина (5'), стр. 265. Применяем ее для $v = K(x, y; \xi, \eta)$ к области $G - k$, получающейся из G , если вырезать вокруг точки x , y небольшой круг k радиуса ϵ с окружностью χ ; так как в области интегрирования $\Delta K = 0$ и интеграл по контуру Γ исчезает, то в формуле Грина остается

$$\int_{\chi} \left(u \frac{\partial K}{\partial n} - K \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iint_{G-k} K \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

При предельном переходе $\epsilon \rightarrow 0$ интеграл $\int_{\chi} u \frac{\partial K}{\partial n} ds$ стремится к u , а

$\int_{\chi} K \frac{\partial u}{\partial n} ds$ — к нулю, откуда получается искомый результат:

$$u = \iint_G K \varphi d\xi d\eta.$$

Вторую часть теоремы проще всего доказать с помощью искусственного приема, введенного Риманом, пользуясь при этом предположенной непрерывностью первых производных функции $\varphi(x, y)$ ¹⁾. Разложим функцию $u(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta$ на два слагаемых, соответ-

¹⁾ Действительно, одной лишь непрерывности функции φ недостаточно, чтобы позволить сделать заключение о существовании непрерывных вторых производных; однако предположение, сделанное в тексте, все же сильнее, чем это необходимо.

ствующих разложению функции Грина $K = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta)$, а именно $u = \phi + \chi$, причем

$$2\pi\phi(x, y) = -\iint_G \varphi(\xi, \eta) \log r d\xi d\eta,$$

$$\chi(x, y) = \iint_G \gamma(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Так как функция $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ всюду непрерывна вместе со своими производными до второго порядка, то $\Delta\chi$ можно образовать дифференцированием под знаком интеграла, и в силу того, что $\Delta\gamma = 0$, непосредственно получим и $\Delta\chi = 0$. Для вычисления Δu остается, стало быть, вычислить только $\Delta\phi$. Первую производную ϕ_x можно еще получить дифференцированием под знаком интеграла. По введении полярных координат r, ϑ интеграл $\iint_G \varphi(\xi, \eta) \log r d\xi d\eta$ принимает вид: $\iint_G \varphi r \log r dr d\vartheta$; если до введения полярных координат дифференцировать по x , то интеграл примет вид: $\iint_G \varphi \cos \vartheta dr d\vartheta$, причем подынтегральное выражение остается непрерывным. Полагая временно для сокращения $-\frac{\log r}{2\pi} = S(x, y; \xi, \eta)$, имеем:

$$\phi_x = \iint_G S_x \varphi d\xi d\eta.$$

Заметим теперь, что $S_x = -S_\xi$, что, стало быть, можно также писать:

$$\phi_x = -\iint_G S_\xi \varphi d\xi d\eta,$$

а эта формула позволяет при помощи интеграции по частям освободиться от производной S_ξ , после чего можно будет еще раз дифференцировать под знаком интеграла. Имеем:

$$\phi_x = -\int_{\Gamma} S \varphi d\eta + \iint_G S \varphi_\xi d\xi d\eta,$$

и далее:

$$\phi_{xx} = -\int_{\Gamma} S_x \varphi d\eta + \iint_G S_x \varphi_\xi d\xi d\eta = \int_{\Gamma} S_\xi \varphi d\eta - \iint_G S_\xi \varphi_\xi d\xi d\eta.$$

Точно так же получим:

$$\phi_{xy} = -\int_{\Gamma} S_\eta \varphi d\xi - \iint_G S_\eta \varphi_\eta d\xi d\eta$$

и тем самым

$$\Delta\phi = \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi ds - \iint_G (S_\xi \varphi_\xi + S_\eta \varphi_\eta) d\xi d\eta.$$

Если теперь двойной интеграл в правой части распространить не на всю область G , но на область G_ϵ , которая получается из G вырезыванием маленького круга k радиуса ϵ и окружности χ с центром в точке (x, y) , то можно писать:

$$\Delta\phi = \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi ds - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{G_\epsilon} (S_\xi \varphi_\xi + S_\eta \varphi_\eta) d\xi d\eta.$$

Двойной интеграл в правой части преобразуем по формуле Грина и, так как, повсюду в области G , $\Delta S = 0$, получим:

$$\Delta\phi = \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\chi} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\chi} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi ds.$$

Но, как мы уже раньше видели, интеграл по контуру χ при $\epsilon \rightarrow 0$ переходит в $-\varphi(x, y)$, и, стало быть, доказано, что u удовлетворяет „уравнению Пуассона“ $\Delta f = -\varphi$.

Для уравнения потенциала в трех измерениях $\Delta u = -\varphi(x, y, z)$ и для относящейся к нему задачи о собственных значениях уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

получаются дословно соответствующие результаты. Только в этом случае у функции Грина появляется другая особенность

$$\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

так что функция Грина $K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ должна иметь вид:

$$K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi r} + \gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta),$$

причем $\gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ непрерывна вместе с производными первого и второго порядка. Сама функция $\frac{1}{4\pi r}$ есть *основное решение дифференциального уравнения* $\Delta u = 0$ (ср. стр. 332 и § 15, 2 этой главы).

Вопрос о *существовании функции Грина* в случае дифференциальных уравнений с частными производными отнюдь не так легко исследовать, как для обыкновенных дифференциальных уравнений. Общее доказательство существования мы дадим лишь позднее, в связи с прямыми методами вариационного исчисления, а здесь мы должны ограничиться тем, что либо постулируем существование функции Грина, либо удовольствуемся теми случаями, в которых, как в ближайшем параграфе, удастся ее явное построение. Но коль скоро функция Грина имеется, дальнейшие рассуждения протекают совершенно параллельно аналогичным рассуждениям у обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим здесь задачу о собственных значениях дифференциального уравнения:

$$\Delta v + \lambda \rho(x, y) v = 0 \quad (104)$$

(причем $\rho > 0$) при заданных однородных краевых условиях.

Вследствие основного свойства функции Грина, из (104) непосредственно вытекает однородное интегральное уравнение:

$$v(x, y) = \lambda \iint_G K(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Если ввести симметрическое ядро

$$K = K \sqrt{\rho(x, y) \rho(\xi, \eta)},$$

то функция

$$u(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)} v(x, y)$$

удовлетворяет симметрическому однородному интегральному уравнению:

$$u(x, y) = \lambda \iint_G K(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (105)$$

и в силу обратимости этих соотношений задача о собственных значениях дифференциального уравнения (104) полностью эквивалентна соответствующей задаче для симметрического интегрального уравнения (105). Это интегральное уравнение допускает применение теории гл. III, ибо хотя ядро и обращается в одной точке области интегрирования в бесконечность, но такого порядка, что интеграл $\iint_G K(x, y; \xi, \eta)^2 d\xi d\eta$ существует и является непрерывной функцией переменных x, y . *Стало быть, существуют собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и принадлежащая им система собственных функций $u_1, u_2, \dots$ и соответственно $v_1, v_2, \dots$, причем функции u_n можно считать нормированными.*

Если $w(x, y)$ — какая-либо функция с непрерывными первыми и вторыми производными, удовлетворяющая краевому условию, то на основании нашей теоремы о функции Грина она может быть представлена истокообразно в виде:

$$w(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

при помощи функции $h = -\Delta w$. Имеем, таким образом, следующий результат: *Всякая удовлетворяющая краевым условиям функция $w(x, y)$, имеющая непрерывные производные до второго порядка, допускает разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд $w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y)$,*

$c_n = \iint_G \rho w v_n dx dy$ по фундаментальным функциям. Нормированные

фундаментальные функции $\sqrt{\rho} v_n$ образуют, стало быть, полную ортогональную систему функций.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений здесь необходимо отметить, что вследствие обращения в бесконечность функции Грина сюда нельзя применить теорему Мерсера, так что, несмотря на

положительно определенный характер ядра, нельзя заключать о существовании равенства:

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x, y) v_n(\xi, \eta)}{\lambda_n}.$$

Наша общая теория доказывает лишь более слабое соотношение:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_G \left(K - \sum_{n=1}^m \frac{v_n(x, y) v_n(\xi, \eta)}{\lambda_n} \right)^2 dx dy = 0.$$

Для общего самосопряженного дифференциального уравнения

$$p\Delta v + p_x v_x + p_y v_y - qv + \lambda p v = 0$$

рассуждения протекают совершенно параллельно только что проведенным, и мы можем ограничиться констатированием, что и результаты остаются дословно те же. Единственное отличие, которое следует отметить, состоит в том, что функция Грина должна теперь иметь следующий вид:

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{a(x, y; \xi, \eta)}{2\pi p(\xi, \eta)} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

причем $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ в окрестности точки ξ, η непрерывна вместе со своими производными до второго порядка (но, вообще говоря, уже не будет удовлетворять дифференциальному уравнению), а a обозначает подходящим образом определенную функцию, имеющую непрерывные производные до второго порядка и для которой выполняется тождество:

$$a(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1.$$

У дифференциальных уравнений с частными производными высшего порядка единственным существенным отличием тоже является лишь другой вид особенности, присущей функции Грина. Рассмотрим, например, — для двух независимых переменных — дифференциальное уравнение пластинки

$$\Delta \Delta v = -\varphi(x, y);$$

требование, которое мы в этом случае налагаем на функцию Грина, сверх краевых условий и условия $\Delta \Delta K = 0$, заключается в том, что мы предписываем ей следующий вид:

$$K = -\frac{1}{8\pi} r^2 \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

где $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ есть функция, непрерывная вместе со своими производными до четвертого порядка. Что указанная особенность действительно та, что требуется, т. е. соответствует единичной силе, читатель легко сам проверит. Кстати, подчеркнем, что сама функция $r^2 \log r$ является „основным решением“ дифференциального уравнения $\Delta \Delta v = 0$.

И в этом случае переход к интегральному уравнению доказывает существование собственных значений и соответствующей полной ортогональной системы собственных функций, по которым может

быть разложена в области G в абсолютно и равномерно сходящийся ряд всякая функция, удовлетворяющая краевым условиям и имеющая непрерывные производные до четвертого порядка.

§ 15. Примеры функций Грина.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Чтобы пояснить теории предыдущих параграфов на примерах, рассмотрим важнейшие из изученных ранее дифференциальных уравнений.

Функция Грина выражения

$$L[u] = u''$$

при краевых условиях $u(0) = u(1) = 0$ для интервала $(0, 1)$ есть

$$K(x, \xi) = \begin{cases} (1-\xi)x & \text{для } x \leq \xi, \\ (1-x)\xi & \text{„ } x \geq \xi. \end{cases}$$

При краевых условиях $u(0) = 0, u'(1) = 0$ функция Грина будет:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} x & \text{для } x \leq \xi \\ \xi & \text{„ } x \geq \xi. \end{cases}$$

Для интервала $-1 \leq x \leq +1$ и краевых условий

$$u(-1) = u(1) = 0$$

получается:

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{2} \left\{ |x - \xi| + x\xi - 1 \right\},$$

что можно также получить преобразованием из первого примера. Для интервала же $0 \leq x \leq 1$ при краевых условиях $u(0) = -u(1), u'(0) = -u'(1)$

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{2} |x - \xi| + \frac{1}{4}.$$

Функция Грина для дифференциального выражения

$$L[u] = xu'' + u',$$

относящегося к бесселевой функции нулевого порядка $J_0(x)$, для интервала $0 \leq x \leq 1$ и краевых условий „ $u(1) = 0, u(0)$ конечно“ определяется так:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} -\log \xi & \text{для } x \leq \xi, \\ -\log x & \text{„ } x \geq \xi. \end{cases}$$

Все это легко вывести и проверить на основании общих правил предыдущего параграфа. Гринова функция дифференциального выражения

$$L[u] = (xu')' - \frac{n^2}{x} u,$$

принадлежащего бесселевой функции $J_n(x)$ [ср. формулу (28)], при краевых условиях „ $u(1)=0$, $u(0)$ конечно“ имеет следующий вид:

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^n - (x\xi)^n \right] \quad (x \leq \xi)$$

и соответственно

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{\xi}{x} \right)^n - (x\xi)^n \right] \quad (x \geq \xi).$$

В качестве следующего примера рассмотрим дифференциальное выражение:

$$L[u] = \left((1-x^2) u' \right)' - \frac{h^2}{1-x^2} u,$$

которое при $h=0, 1, 2, \dots$ принадлежит шаровым функциям Лежандра нулевого, первого и т. д. порядка. Соответствующий интервал будет $-1 \leq x \leq +1$, краевые условия: конечность на обоих концах. Можно сразу указать решение уравнения $L[u]=0$, остающееся конечным

при $x=-1$, а именно: $c_1 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{h}{2}}$; точно так же решение, остаю-

щееся конечным при $x=+1$, равно $c_2 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{h}{2}}$. Из этих решений по правилам § 14, 2 составляется функция Грина следующим образом:

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2h} \left(\frac{1+x}{1-x} \frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{\frac{h}{2}} \quad (x \leq \xi),$$

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2h} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{h}{2}} \quad (x \geq \xi).$$

Этот метод отказывается служить лишь при $h=0$, как и должно быть согласно нашей общей теории, ибо при $h=0$ уравнение $L[u]=0$ имеет нормированное, всюду регулярное решение $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, удовлетворяющее обоим краевым условиям. Стало быть, здесь следует построить Гринovu функцию в обобщенном смысле, удовлетворяющую дифференциальному уравнению:

$$L[u] = \frac{1}{2}.$$

Нетрудно получить для этой функции следующее выражение:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \log [(1-x)(1+\xi)] + c & \text{для } x \leq \xi, \\ -\frac{1}{2} \log [(1+x)(1-\xi)] + c & \text{„ } x \geq \xi, \end{cases}$$

где $c = \log 2 - \frac{1}{2}$.

В качестве другого простого примера существования обобщенной функции Грина возьмем дифференциальное выражение:

$$L[u] = u'',$$

рассматриваемое в интервале $-1 \leq x \leq +1$ при краевых условиях периодичности: $u(-1) = u(+1)$, $u'(-1) = u'(+1)$. Так как $\frac{1}{\sqrt{2}}$ есть регулярное решение уравнения $L[u] = 0$, удовлетворяющее обоим краевым условиям (физически речь идет о струне, свободной на обоих концах), то необходимо построить обобщенную функцию Грина, удовлетворяющую дифференциальному уравнению.

$$u'' = \frac{1}{2}.$$

Нетрудно получить

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{2}|x - \xi| + \frac{1}{4}(x - \xi)^2 + \frac{1}{6}.$$

Пользуясь всеми этими гриновыми функциями как ядрами, можно теперь построить соответствующие интегральные уравнения, но нет необходимости выписывать их в явном виде. Зато мы рассмотрим следующие билинейные формулы, относящиеся к нашим примерам:

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi}{n^2} = \begin{cases} (1 - \xi)x & (x \leq \xi), \\ (1 - x)\xi & (x \geq \xi), \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \xi}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} = \begin{cases} x & (x \leq \xi), \\ \xi & (x \geq \xi), \end{cases}$$

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) P_n(\xi)}{n(n+1)},$$

где

$$K(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \log [(1-x)(1+\xi)] + \log 2 - \frac{1}{2} & \text{для } x \leq \xi, \\ -\frac{1}{2} \log [(1+x)(1-\xi)] + \log 2 - \frac{1}{2} & \text{„ } x \geq \xi. \end{cases}$$

В заключение отметим еще особо гриновы функции и интегральные уравнения, относящиеся соответственно к полиномам и ортогональным функциям Эрмита и Лагерра.

Дифференциальное уравнение (49) ортогональных функций Эрмита:

$$u'' + (1 - x^2)u + \lambda u = 0,$$

при краевом условии: регулярность в бесконечности, имеет число $\lambda = 0$ собственным значением. Во избежание необходимости построения обобщенной функции Грина рассмотрим значение $\lambda = -2$, которое наверно не является собственным значением (ср. стр. 310), и в соответствии с этим построим гринovu функцию для дифференциального выражения:

$$L[u] = u'' - (1 + x^2)u$$

при краевом условии исчезания при $x = \pm \infty$. Для того чтобы получить общее решение дифференциального уравнения $L[u] = 0$, исходим из замечания, что $u(x) = e^{\frac{x^3}{2}}$ есть решение этого уравнения. Полагаем общее решение в форме $u = we^{\frac{x^3}{2}}$ и для w получаем дифференциальное уравнение:

$$w'' + 2w'x = 0,$$

которое, помимо само собою разумеющегося решения $w = \text{const.}$, имеет еще решения:

$$w = c_1 \int_{c_2}^x e^{-x^3} dx.$$

Следовательно,

$$u = c_1 e^{\frac{x^3}{2}} \int_{c_2}^x e^{-x^3} dx.$$

Отсюда получаем частные решения, исчезающие соответственно при $x = +\infty$ и при $x = -\infty$:

$$ae^{\frac{x^3}{2}} \int_x^{\infty} e^{-t^3} dt \quad \text{и} \quad be^{\frac{x^3}{2}} \int_{-\infty}^x e^{-t^3} dt,$$

и с их помощью находим для функции Грина следующее выражение¹⁾:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^3 + \xi^3}{2}} \int_{-\infty}^x e^{-t^3} dt \int_{\xi}^{\infty} e^{-t^3} dt & \text{для } x \leq \xi, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^3 + \xi^3}{2}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^3} dt \int_x^{\infty} e^{-t^3} dt & \text{для } x \geq \xi, \end{cases}$$

причем коэффициент $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ появляется вследствие нормирования разрыва

¹⁾ Ср. Neumann R., Die Entwicklung willkürlicher Funktionen и т. д., Дисс. Breslau 1912.

на основании интегральной формулы:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Дифференциальное уравнение $L[u] + \lambda u = 0$ и соответственно интегральное уравнение $u(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi) u(\xi) d\xi$ имеют собственные значения $\lambda = 2n + 2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и фундаментальные функции

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

Ортогональные функции Лагерра $e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$xu'' + u' = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) u + \lambda u = 0$$

для собственных значений $\lambda = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Рассмотрим это дифференциальное уравнение для частного значения $\lambda = -1$ и определим $L[u]$ равенством:

$$L[u] = xu'' + u' - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) u.$$

Дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ имеет частное решение $e^{\frac{x}{2}}$. Полагаем общее решение в виде:

$$u = we^{\frac{x}{2}};$$

для w мы получим тогда совершенно подобно предыдущему:

$$w = c_1 \int_{c_2}^x \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

так что два частных решения, из которых первое регулярно при $x = 0$, а второе исчезает при $x = +\infty$, даются выражениями:

$$ae^{\frac{x}{2}} \text{ и } be^{\frac{x}{2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Из этих частных решений грина функция для поставленных в § 10 4 краевых условий составляется следующим образом:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} e^{\frac{x+\xi}{2}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt & \text{для } x \leq \xi, \\ e^{\frac{x+\xi}{2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt & \text{для } x \geq \xi. \end{cases}$$

Дифференциальное выражение

$$L[u] = u''$$

для интервала $-\infty < x < \infty$, с краевыми условиями: ограниченность при $x \rightarrow \pm\infty$, не имеет функции Грина в соответствии с тем обстоятельством, что однородное уравнение $u'' = 0$ имеет регулярное в бесконечности решение $u = \text{const}$. Напротив, дифференциальному выражению

$$L[u] = u'' - u$$

принадлежит гринова функция

$$\frac{1}{2} e^{-|x-\xi|},$$

а построенное с помощью этого ядра особенное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\xi|} \varphi(\xi) d\xi$$

имеет непрерывный спектр, состоящий из всех значений $\lambda = 1 + s^2 \geq 1$ с фундаментальными функциями $\frac{\cos sx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin sx}{\sqrt{\pi}}$ (ср. § 12). Билинейное соотношение заменяется здесь интегральной формулой:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos sx \cos s\xi + \sin sx \sin s\xi}{1 + s^2} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos s(x-\xi)}{1 + s^2} ds = \frac{1}{2} e^{-|x-\xi|}$$

В качестве примера гриновой функции дифференциального выражения четвертого порядка рассмотрим функцию Грина, принадлежащую дифференциальному выражению $L[u] = u^{IV}$ для интервала $0 \leq x \leq 1$ при краевых условиях $u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$ (стержень, заделанный на обоих концах). Без затруднений получается:

$$K(x, \xi) = \frac{x^2(\xi-1)^2}{6} (2x\xi + x - 3\xi) \quad \text{для } x \leq \xi$$

и соответствующее выражение для $x \geq \xi$.

2. Функция Грина выражения Δu для круга и шара. Самые простые и вместе с тем самые интересные примеры гриновых функций для дифференциальных выражений с частными производными доставляет дифференциальное выражение Лапласа Δu для плоских или пространственных областей. Для некоторых видов областей удастся выразить функции Грина явно через известные трансцендентные функции.

При этом целесообразно всегда представлять себе наглядное значение тех введенных выше для уравнения Лапласа функций, которые характеризуют поведение функции Грина в особой точке, причем для более подробного рассмотрения мы отсылаем к систематическому изложению теории потенциала во втором томе. Если рассматривать пространство трех измерений, то функция $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$ есть

ньютонов потенциал массы величины 1, сосредоточенной в точке ξ, η, ζ , т. е., дифференцируя это выражение по какой-либо из координат x, y, z , получим отрицательные компоненты силового поля, которое распространяет вокруг себя по закону тяготения Ньютона масса 1 в точечном источнике. Если в пространственной области G имеется непрерывное распределение масс с плотностью $\rho(x, y, z)$, то его потенциал представится интегралом вида:

$$u(x, y, z) = \iiint \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

причем интеграл берется по области G .

Этот потенциал распределения масс ρ удовлетворяет, как мы видели выше, вне области G уравнению $\Delta u = 0$, а в области G — поскольку функция ρ дифференцируема — уравнению $\Delta u = -4\pi\rho$.

Если в области G имеется распределение дискретных точечных масс, то его потенциал находят соответствующим суммированием по всем отдельным точкам, в которых сосредоточены притягивающие массы.

В случае двух независимых переменных x, y дело обстоит аналогичным образом. Вместо $\frac{1}{r}$ здесь появляется функция $\log \frac{1}{r}$, почему и говорят о *логарифмическом потенциале*.

Рассмотрим простейшее краевое условие, а именно $u = 0$, и прежде всего построим функцию Грина для круга и шара. К той и к другой нас приводит тот элементарно-геометрический факт, что окружность и сфера являются геометрическим местом всех точек, расстояния которых от двух точек P_1, P_2 находятся в постоянном отношении; точнее, если $P_1(\xi, \eta)$ [или соответственно (ξ, η, ζ)] — какая-либо точка внутри круга $x^2 + y^2 = 1$ (шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$), а точка P_2 с координатами

$$\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right)$$

является ее отражением относительно окружности или сферы (и, стало быть, непременно лежит вне круга или шара), если, далее, r_1, r_2 обозначают расстояния любой точки $P(x, y)$ [или соответственно (x, y, z)] от P_1 и P_2 , то отношение $r_1:r_2$ остается постоянным, когда точка P движется по окружности круга (по поверхности шара), а значение этого отношения равно соответственно $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ и $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Заметим теперь, что функции $-\frac{1}{2\pi} \log r_1, -\frac{1}{2\pi} \log r_2$ (функции $\frac{1}{4\pi r_1}, \frac{1}{4\pi r_2}$)

являются решениями уравнения $\Delta u = 0$ и что функции $-\frac{1}{2\pi} \log r_1$ и соответственно $\frac{1}{4\pi r_1}$ обладают в точке P_1 особенностью именно того типа,

который предписывается для основного решения. Таким образом функции

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

и

$$K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \right)$$

как раз и представляют собой функции Грина для круга и шара, принадлежащие краевому условию $u=0$, ибо эти функции на границе исчезают.

3. Функция Грина и конформное отображение. В случае двух независимых переменных можно вообще воспользоваться тем фактом из теории функций, что гринова функция дает конформное отображение области G на единичный круг. Пусть $\xi = f(x + iy)$ — аналитическая функция, конформно отображающая область G на единичный круг плоскости ξ таким образом, что точка ξ, η области G переходит в центр единичного круга; в таком случае выражение $-\frac{1}{2\pi} \log |f(x + iy)|$

есть искомая функция Грина для области G . Следовательно, мы знаем функцию Грина для всех тех областей, которые умеем отобразить конформно на круг. Тот факт, что таковыми являются все области, ограниченные кусочно-гладкими односвязными контурами, составляет содержание одной из важнейших теорем теории функций¹⁾.

4. Функция Грина уравнения потенциала для шаровой поверхности. Простой пример существования обобщенной функции Грина дает дифференциальное уравнение $\Delta^* u = 0$ (см. § 8 и § 9, 1) при условии регулярности на всей поверхности шара, за исключением точки,

где находится источник. Так как функция $u = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ удовлетворяет этому

условию, то необходимо построить обобщенную функцию Грина, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\Delta^* u = \frac{1}{4\pi}$. Эту функцию

легко получить, пользуясь свойством инвариантности выражения $\Delta^* u$ относительно любых вращений шара. Если источник P , поместить сначала на северном полюсе $\vartheta = 0$, то немедленно убеждаемся, что дифференциальному уравнению $\Delta^* u = \frac{1}{4\pi}$ можно удовлетворить функцией $-\frac{1}{2\pi} \log \left(2 \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$,

зависящей только от координаты ϑ . Стало быть, в силу инвариантности относительно вращений, если обозначить через $\rho(\vartheta, \varphi; \vartheta_1, \varphi_1)$ сферическое расстояние между двумя точками $P(\vartheta, \varphi)$ и $P_1(\vartheta_1, \varphi_1)$ шаровой поверхности, функция

$$K(\vartheta, \varphi; \vartheta_1, \varphi_1) = -\frac{1}{2\pi} \log \left(2 \sin \frac{\rho}{2} \right)$$

¹⁾ Ср. *Hurwitz-Courant, Funktionentheorie*, 3 Aufl. (Berlin, 1929), стр. 389—423, в особенности стр. 390—398.

является решением уравнения $\Delta^* u = \frac{1}{4\pi}$, нерегулярным лишь в точке $P = P_1$. Так как, кроме того, эта функция при $P = P_1$ обладает особенностью как раз требуемого типа, то она и представляет собой искомую функцию Грина. Если принять эту функцию за ядро интегрального уравнения

$$-2\pi Y(\vartheta, \varphi) = \lambda \iint_G \log \left(2 \sin \frac{\rho}{2} \right) Y(\vartheta_1, \varphi_1) d\vartheta_1 d\varphi_1,$$

то этому уравнению принадлежат, стало быть, $(2n+1)$ -кратные собственные значения $\lambda = n(n+1)$ и соответствующие собственные функции $Y = Y_n(\vartheta, \varphi)$ и только они.

5. Функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ для прямоугольного параллелепипеда¹⁾. Пусть ограничивающие прямоугольный параллелепипед плоскости будут $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$; $z = \pm \frac{c}{2}$.

Для определения принадлежащей краевому условию $u = 0$ функции Грина с установленными выше свойствами, обобщая естественным образом метод, примененный для шара (§ 15, 2), строим пространственную решетку, соответствующую данному параллелепипеду, с узловыми точками $\left(k + \frac{1}{2}\right)a$, $\left(m + \frac{1}{2}\right)b$, $\left(n + \frac{1}{2}\right)c$ ($k, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и повторно отражаем точку (ξ, η, ζ) в плоскостях решетки. В результате получается система точек $[ka + (-1)^k \xi, mb + (-1)^m \eta, nc + (-1)^n \zeta]$. Представим себе, что в каждой из этих точек сосредоточена единица массы, соответственно положительная или отрицательная, смотря по тому, четно или нечетно значение суммы $k + m + n$. В таком случае можно ожидать, что потенциал такого распределения масс на плоскостях решетки равен нулю, ибо на них взаимно компенсируется влияние отдельных единичных масс. Мы приходим таким образом к следующему выражению для K^2):

$$K = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{\sqrt{N(k, m, n; \xi, \eta, \zeta; x, y, z)}}, \quad (106)$$

где

$$N(k, m, n; \xi, \eta, \zeta; x, y, z) = \\ = [ka + (-1)^k \xi - x]^2 + [mb + (-1)^m \eta - y]^2 + [nc + (-1)^n \zeta - z]^2.$$

В выражении (106) необходимо, однако, еще исследовать порядок суммирования, так как сходимость может быть, самое большее, условной. Для этой цели обозначим вообще выражение $\varphi(k+1) - \varphi(k)$, где $\varphi(k)$ — любая функция от k , через $\Delta_k \varphi(k)$. В таком случае в выражении для K при фиксированных значениях k и m можно внутреннюю

¹⁾ Рассмотрением вопросов сходимости и проведением вычислений этого пункта мы обязаны А. Островскому (А. Ostrowski).

²⁾ Ср. Riemann B. und Hattendorf K., Schwere, Elektrizität und Magnetismus, 84—88, Hannover 1880.

сумму по n , опуская множитель $(-1)^{k+m}$, писать следующим образом:

$$N^1(k, m) = \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \Delta_n \frac{1}{\sqrt{N(k, m, n)}} = - \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \Delta_n \frac{1}{\sqrt{N(k, m, n)}},$$

так как $\lim_{|n| \rightarrow \infty} N(k, m, n) = \infty$. То же преобразование применяем к суммам по m и k и, так как $\lim_{|m| \rightarrow \infty} N^1(k, m) = 0$, получим, как сейчас будет доказано:

$$N''(k) = \sum_{m=\pm 1, \pm 3, \dots} \Delta_m N^1(k, m) = - \sum_{m=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \Delta_m N^1(k, m),$$

и далее

$$K = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \dots} \Delta_k N''(k) = - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \Delta_k N''(k),$$

ибо и $\lim_{|k| \rightarrow \infty} N''(k) = 0$. Окончательно получаем следующее разложение:

$$K = \pm \frac{1}{4\pi} \sum_k \sum_m \sum_n \Delta_k \Delta_m \Delta_n \frac{1}{\sqrt{N(k, m, n)}}, \quad (107)$$

где каждый из индексов суммирования пробегает либо все четные, либо все нечетные целые числа от $-\infty$ до $+\infty$, а перед всей суммой стоит знак плюс или минус, смотря по тому, производится ли суммирование четное или нечетное число раз по всем четным целым числам.

Для доказательства всех наших утверждений достаточно будет доказать абсолютную сходимость последней суммы, которая непосредственно вытекает из оценки общего члена этой суммы:

$$\begin{aligned} & \left| \Delta_k \Delta_m \Delta_n \frac{1}{\sqrt{N(k, m, n)}} \right| < \\ & < \frac{(d_1 |k| + c_1) (d_2 |m| + c_2) (d_3 |n| + c_3)}{(\sqrt{k^2 + m^2 + n^2})^7} < \frac{c}{(k^2 + m^2 + n^2)^2} \end{aligned} \quad (108)$$

при

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 < h, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < h, \quad k^2 + m^2 + n^2 > c_4(h). \\ d_1 = d_1(h), \dots, c_3 = c_3(h), \quad c = c(h). \end{aligned}$$

Эта оценка получается трехкратным применением теоремы дифференциального исчисления о среднем значении и неравенства $2ab < a^2 + b^2$. Одновременно обнаруживается также и равномерность сходимости относительно $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, если только суммирование производится по k, m, n , при условии $k^2 + m^2 + n^2 > c_4(h)$, так что $N(k, m, n)$ не исчезает ни для какой тройки этих значений k, m, n .

То же рассуждение обнаруживает также абсолютную и равномерную относительно $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ сходимость всех частных производных суммы (107), образованных почленным дифференцированием при $x^2 + y^2 + z^2 < h$, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < h$, $k^2 + m^2 + n^2 > c_4(h)$.

Теперь получается уже без затруднений, что выражение (107) есть искомая функция Грина; само собой разумеется, что выражения (106) и (107) имеют смысл лишь в том случае, если ни одно из значений

$N(k, m, n)$ не исчезает. Что требования 1 и 3 (§ 14, 5) выполняются, не нуждается в доказательстве. Для требования 2, скажем, в плоскости $x = \frac{a}{2}$, воспользуемся следующим видом выражения для K :

$$K = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \dots} \Delta_k N''(k).$$

Так как при $x = \frac{a}{2}$ конечные суммы $\sum_{k=\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (2l+1)} \Delta_k N''(k)$ исчезают,

потому что отдельные члены суммы попарно уничтожаются, получается $K=0$. Точно так же доказывается, что требование 2 выполняется на других плоскостях решетки. — Уже Риман представил сумму (106) в виде интеграла известных тета-произведений. Это выражение Римана для суммы (106) можно вывести следующим образом. Исходим из равенства:

$$\frac{2}{V\pi} \int_0^{\infty} e^{-st^2} dt = \frac{1}{V s} \quad (s > 0)$$

и подставляем в него вместо s выражение $N(k, m, n; x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$. Мы получаем тогда:

$$K = \frac{1}{2\pi V\pi} \sum_k \sum_m \sum_n \Delta_k \Delta_m \Delta_n \int_0^{\infty} e^{-Nt^2} dt.$$

Если бы можно было в этом выражении поменять местами суммирование и интегрирование, то получилось бы:

$$K = \frac{1}{2\pi V\pi} \int_0^{\infty} \sum_k \sum_m \sum_n \Delta_k \Delta_m \Delta_n e^{-Nt^2} dt = \frac{1}{2\pi V\pi} \int_0^{\infty} f_1 f_2 f_3 dt, \quad (109)$$

где три множителя под знаком интеграла обозначают следующие выражения:

$$f_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-t^2 [ka + (-1)^k \xi - x]^2},$$

$$f_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-t^2 [mb + (-1)^m \eta - y]^2},$$

$$f_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-t^2 [nc + (-1)^n \zeta - z]^2},$$

которые могут быть выражены через тета-функцию:

$$\vartheta_{00}(z, \tau) = \vartheta_0(z, \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \nu^2 \tau} e^{2i\pi \nu z}.$$

Прежде всего надо доказать формулу (109), причем главное затруднение доставляет точка $t=0$, так как наши три ряда вблизи значения $t=0$ не сходятся равномерно. Начнем с доказательства того, что суммирование по k и интегрирование можно поменять местами:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f_1 f_2 f_3 dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} f_2 f_3 e^{-t^2[ka + (-1)^k \xi - x]^2} dt. \quad (110)$$

Что можно поменять местами суммирование и интегрирование в интервале от 1 до ∞ , нетрудно усмотреть. Действительно, для остатка суммы f_1 при $t > 1$, $p > F(\xi, x) > 2$ справедлива оценка:

$$\left| \sum_{|k| > p} (-1)^k e^{-t^2[ka + (-1)^k \xi - x]^2} \right| < e^{-\frac{a^2}{4} t^2} \sum_{|k| > p} e^{-\frac{a^2}{2} t^2 k^2} < \\ < \frac{2e^{-\frac{a^2}{4} t^2}}{a^2} \sum_{|k| > p} \frac{1}{k^2} < \frac{2}{a^2} e^{-\frac{a^2}{4} t^2} \frac{1}{p-1} < \frac{4}{pa^2} e^{-\frac{a^2}{4} t^2},$$

а интеграл этого выражения от 1 до ∞ сходится к нулю с возрастанием p до ∞ . С другой стороны, на отрезке от 1 до ∞ f_2 и f_3 , очевидно, остаются равномерно ограниченными.

Для доказательства нашего права поменять местами суммирование и интегрирование в интервале от 0 до 1 достаточно будет на основании известного предложения показать ограниченность частных сумм подынтегрального выражения. Но каждая из двух сумм $\sum_{k=0}^{\infty}$ и $\sum_{k=1}^{-\infty}$, на которые разлагается f_1 , является знакоперевающимся рядом, члены которого, начиная с определенного k , монотонно убывают, причем это значение k зависит лишь от ξ и x , но не от t . Поэтому значение каждой частной суммы обоих рядов при всяком $t > 0$ заключено между определенными границами. С другой стороны, то же справедливо и для частных сумм выражений f_2 и f_3 , так что f_2 и f_3 тоже равномерно ограничены при $t > 0$. Стало быть, можно применить упомянутую теорему, и равенство (110) доказано. Совершенно аналогичным рассуждением доказывается также правомерность перемены порядка интеграции и суммирования по m и n в правой части (109), и это соотношение, стало быть, полностью доказано.

Выразим теперь K через функцию ϑ_{00} . Имеем:

$$f_1 = e^{-t^2(x-\xi)^2} \vartheta_{00} \left(-\frac{2at^2i(x-\xi)}{\pi}, \frac{4a^2t^2i}{\pi} \right) - \\ - e^{-t^2(x+\xi-a)^2} \vartheta_{00} \left(-\frac{2at^2i(x+\xi-a)}{\pi}, \frac{4a^2t^2i}{\pi} \right); \\ f_2 = e^{-t^2(y-\eta)^2} \vartheta_{00} \left(-\frac{2bt^2i(y-\eta)}{\pi}, \frac{4b^2t^2i}{\pi} \right) - \\ - e^{-t^2(y+\eta-b)^2} \vartheta_{00} \left(-\frac{2bt^2i(y+\eta-b)}{\pi}, \frac{4b^2t^2i}{\pi} \right);$$

$$f_3 = e^{-t^2(z-\zeta)^2} \vartheta_{00} \left(-\frac{2ct^2i(z-\zeta)}{\pi}, \frac{4c^2t^2i}{\pi} \right) - \\ - e^{-t^2(z+\zeta-c)^2} \vartheta_{00} \left(-\frac{2ct^2i(z+\zeta-c)}{\pi}, \frac{4c^2t^2i}{\pi} \right).$$

Применяем к каждому множителю формулу преобразования для тета-функции:

$$\vartheta_{00}(z, \tau) = e^{-\frac{\pi i}{\tau} z^2} \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \vartheta_{00} \left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau} \right)$$

с главным значением для корня. Если положить еще

$$q_x = e^{-\frac{x^2}{4a^2t^2}}, \quad q_y = e^{-\frac{y^2}{4b^2t^2}}, \quad q_z = e^{-\frac{z^2}{4c^2t^2}},$$

то получим:

$$f_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2at} \left[\vartheta_{00} \left(-\frac{x-\xi}{2a}, \frac{\pi i}{4a^2t^2} \right) - \vartheta_{00} \left(-\frac{x+\xi-a}{2a}, \frac{\pi i}{4a^2t^2} \right) \right] = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2at} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_x^{k^2} e^{-\frac{k(x-\xi)\pi i}{a}} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_x^{k^2} e^{-\frac{k(x+\xi-a)\pi i}{a}} \right] = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{at} \sum_{k=1}^{\infty} q_x^{k^2} \left(\cos \frac{k\pi(x-\xi)}{a} - \cos \frac{k\pi(x+\xi-a)}{a} \right) = \\ = \frac{2\sqrt{\pi}}{at} \sum_{k=1}^{\infty} q_x^{k^2} \sin \left(\frac{k\pi x}{a} - \frac{k\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{k\pi \xi}{a} - \frac{k\pi}{2} \right). \quad (111)$$

Аналогичные выражения получаются для f_2 , f_3 , и мы имеем для K :

$$K = \frac{4}{abc} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{k\pi x}{a} - \frac{k\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{k\pi \xi}{a} - \frac{k\pi}{2} \right) \dots \\ \dots \sin \left(\frac{n\pi \zeta}{c} - \frac{n\pi}{2} \right) e^{-\frac{\pi^2}{4t^2} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right)} dt.$$

Введя новую переменную интегриации $\frac{1}{t^2} = \tau$, получим:

$$K = \frac{2}{abc} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{4} \tau \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right)} \sin \left(\frac{k\pi x}{a} - \frac{k\pi}{2} \right) \dots \\ \dots \sin \left(\frac{n\pi \zeta}{c} - \frac{n\pi}{2} \right) d\tau.$$

Эта формула заменяет формулу разложения функции Грина по собственным функциям:

$$K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{8}{abc\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{a} - \frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi\xi}{a} - \frac{k\pi}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{n\pi\zeta}{c} - \frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}},$$

которую можно формально получить, переменив порядок суммирования и интегриации, но сходимость которой еще не доказана.

Простейшее выражение для K получается из (109) подстановкой $\tau = \frac{1}{t^2}$:

$$K = \frac{1}{32abc} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\vartheta_{00}\left(-\frac{x-\xi}{2a}, \frac{\pi i\tau}{4a^2}\right) - \vartheta_{00}\left(-\frac{x+\xi-a}{2a}, \frac{\pi i\tau}{4a^2}\right) \right] \dots \right. \\ \left. \dots \left[\vartheta_{00}\left(-\frac{z-\zeta}{2c}, \frac{\pi i\tau}{4c^2}\right) - \vartheta_{00}\left(-\frac{z+\zeta-c}{2c}, \frac{\pi i\tau}{4c^2}\right) \right] \right\} d\tau.$$

6. Функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ для внутренней области прямоугольника. Пусть стороны прямоугольника R параллельны осям, пусть одна вершина его в начале, а остальные в точках $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) . Пусть источник находится в точке (ξ, η) , а точка наблюдения (x, y) . Если $K(x, y; \xi, \eta)$ есть функция Грина, принадлежащая краевому условию $u = 0$, то K , как функция от x и y , должна внутри R удовлетворять уравнению $\Delta u = 0$, исчезать на контуре и лишь в точке (ξ, η) обладать особенностью типа $-\frac{1}{2\pi} \log r$, где

$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. Естественно теперь, аналогично случаю прямоугольного параллелепипеда, построить решетку, соответствующую прямоугольнику R , многократно отразить точку (ξ, η) в прямых решетки и каждую из полученных таким образом точек рассматривать как источник или сток поля мощности 1, смотря по тому, получилась ли она из точки (ξ, η) путем четного или нечетного числа отражений в прямых решетках.

Для того чтобы выразить потенциал X полученного таким образом распределения масс, можно было бы, как в предыдущем пункте, воспользоваться суммированием бесконечного ряда. Удобнее, однако, прибегнув к помощи теории функций, построить соответствующую аналитическую функцию $\varphi(\tau + iy) = X + iY$, действительной частью которой является X . Тогда функция

$$f(x + iy) = e^{2\pi(X + iY)} = e^{2\pi\varphi(x + iy)}$$

должна иметь в точке (ξ, η) и в точках, происшедших из нее путем отражений, соответственно простые нули и полюсы. Соединим теперь по четыре смежных прямоугольника нашей решетки в прямоугольники

новой решетки. Функция $f(x+iy)$ имеет в каждом прямоугольнике новой решетки два простых нуля и два простых полюса, которые рас-
пределены симметрично относительно начала координат и сравнимы по $\text{mod}(2a, 2b)$:

$$\begin{aligned} \text{нули:} & \quad c(\xi, \eta), (-\xi, -\eta), \\ \text{полюсы:} & \quad c(-\xi, \eta), (\xi, -\eta), \end{aligned}$$

соответственно.

Простейшей аналитической функцией этого рода является эллиптическая функция, имеющая в прямоугольнике периодов с вершинами (a, b) , $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$ указанные выше нули и полюсы и выражающаяся через соответствующую функцию σ следующим образом:

$$f(z) = \frac{\sigma(z - \xi - i\eta) \sigma(z + \xi + i\eta)}{\sigma(z - \xi + i\eta) \sigma(z + \xi - i\eta)},$$

где ¹⁾

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega} \left[\left(1 - \frac{z}{\omega} \right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{8} \frac{z^2}{\omega^2}} \right], \quad \omega = ka + lbi, \quad \begin{aligned} (k=0, \pm 1, \dots) \\ (l=0, \pm 1, \dots) \end{aligned}$$

Подставив это выражение в $f(z)$ и перемножив соответствующие множители, получим, полагая условно $e^{\frac{\xi\eta i}{\omega^2}} = 1$ при $\omega = 0$:

$$f(z) = \prod_{\omega = ka + lbi} \left[\frac{(z + \xi - 2\omega)(z - \xi - 2\omega)}{(z + \bar{\xi} - 2\omega)(z - \bar{\xi} - 2\omega)} e^{\frac{\xi\eta i}{\omega^2}} \right]. \quad \begin{aligned} (\xi = \xi + i\eta, \\ \bar{\xi} = \xi - i\eta; \\ k=0, \pm 1, \dots, \\ l=0, \pm 1, \dots) \end{aligned}$$

Остается нам еще только проверить, выполняется ли краевое условие, т. е. имеет ли $f(z)$ на контуре области R модуль 1.

При $z = x = \Re(z)$ множитель с $\omega = 0$ имеет модуль 1, а множителей с остальными значениями ω можно так сгруппировать попарно, соответственно комплексно-сопряженным значениям ω , чтобы числитель одной пары был сопряжен знаменателю другой. При $z = x + ih$ мы вычисляем наше двойное произведение, изменяя сначала l , а затем k .

В произведении, взятом по индексу l , показательный множитель $e^{\frac{\xi\eta i}{\omega^2}}$ можно опустить, так как сумма $\sum \frac{1}{\omega^2}$ по l при заданном k сходится

абсолютно и имеет действительное значение. Остальные сомножители группируем попарно, соединяя множитель, соответствующий значению $\omega = ka + lbi$, с множителем, соответствующим значению $\omega = ka - (l-1)bi$. Нетрудно видеть, что произведение такой пары имеет модуль 1.

Если же $z = iy$, то сначала изменяем l и при $|k| > 0$ группируем по два такие частные произведения, которые соответствуют значениям $\pm k$. Мы можем опять не обращать внимания на показательный множитель, ибо $\sum \frac{1}{\omega^2}$ по l сходится абсолютно и имеет действительное

¹⁾ Штрих при знаке произведения $\prod$ указывает здесь, что значение $\omega = 0$ следует опустить.

значение. Остальные множители соединяем опять в пары таким образом, чтобы одному множителю соответствовало значение $\omega = ka + lbi$, другому же $\omega = -ka + lbi$. Каждое такое парное произведение имеет модуль 1.

Наконец, рассматриваем случай $z = a + iy$, соединяя попарно множители, соответствующие значениям $\omega = ka + lbi$ и $\omega = -(k-1)a + lbi$, и перемножая затем по l . Таким образом для искомой функции Грина получается выражение:

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \Re \left(\log \frac{\sigma(z - \xi, \omega_1, \omega_2) \sigma(z + \xi, \omega_1, \omega_2)}{\sigma(z - \bar{\xi}, \omega_1, \omega_2) \sigma(z + \bar{\xi}, \omega_1, \omega_2)} \right) \\ (z = x + iy, \quad \xi = \xi + i\eta, \quad \bar{\xi} = \xi - i\eta, \quad \omega_1 = a, \quad \omega_2 = ib).$$

Построенная сейчас функция Грина может быть разложена по собственным функциям

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin k \frac{\pi}{a} x \sin m \frac{\pi}{b} y$$

всюду, за исключением окрестности источника, в абсолютно и равномерно сходящийся ряд, так как теория рядов Фурье утверждает разложимость функции, обладающей разрывом непрерывности только логарифмического типа. Это разложение гласит:

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \frac{\pi}{a} x \sin m \frac{\pi}{b} y \sin k \frac{\pi}{a} \xi \sin m \frac{\pi}{b} \eta}{\frac{m^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}}.$$

Мы имеем здесь пример функции Грина, для которой справедлива билинейная формула, не доказанная для общего случая.

7. Функция Грина для кругового кольца. Берем две ограничивающие окружности с центром в начале, произведение их радиусов полагаем равным единице (что может быть достигнуто надлежащим выбором единицы длины), и соответственно этому обозначаем радиус внутренней окружности k_1 через $q^{1/2}$, радиус внешней окружности k_2 через $q^{-1/2}$, причем q — правильная дробь. Если теперь источник поместим в точке c , которую будем пока считать лежащей на действительной и положительной оси, а через $z = x + iy$ обозначим переменную точку поля этого источника, причем обе точки находятся внутри кругового кольца R , то наша задача сводится к следующей задаче теории функций: определить аналитическую функцию $f(z)$, имеющую в точке c простой нуль, повсюду в R регулярную и на контуре кольца R имеющую модуль 1.

Из $f(z)$ можно будет тогда получить значение функции Грина при источнике c в точке поля z по формуле:

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \Re \log f(z).$$

Попытаемся искомую функцию $f(z)$ продолжить за пределы обеих окружностей для того, чтобы найти таким образом достаточное число требуемых теорией функций данных для ее построения. Для этой цели отнесем каждой точке z в R точку z_1 внутри k_1 при помощи равенства $zz_1 = q$. Если z приближается к окружности k_1 , то и z_1 приближается к этой окружности, и очевидно, что z_1 стремится к комплексно-сопряженной точке. Но $f(z)$ вследствие симметричности наших допущений следует рассматривать как действительную функцию, т. е. такую, которая в действительных точках принимает действительные значения и, вообще, в комплексно-сопряженных точках принимает комплексно-сопряженные значения. Поэтому $f(z)f\left(\frac{q}{z}\right)$ стремится к действительному положительному значению $|f(z_0)|^2$, когда z стремится к точке z_0 окружности k_1 . С другой стороны, $f(z)$ имеет на k_1 модуль 1. Стало быть, $f(z)$ удовлетворяет на k_1 равенству:

$$f(z)f\left(\frac{q}{z}\right) = 1, \quad (112)$$

и это равенство удовлетворяется тогда тождественно для всех значений z . Точно так же отражение в окружности k_2 дает второе функциональное уравнение:

$$f(z)f\left(\frac{1}{qz}\right) = 1. \quad (113)$$

Так как $f(z)$ имеет в точке c простой нуль, то из последовательного применения этих соотношений вытекает, что $f(z)$ имеет в точках

$$c, \quad q^{\pm 2}c, \quad q^{\pm 4}c, \quad \dots$$

простые нули и в точках

$$q^{\pm 1}c^{-1}, \quad q^{\pm 3}c^{-1}, \quad q^{\pm 5}c^{-1}, \quad \dots$$

простые полюсы, и, стало быть, функция $f(z)$ имеет те же нули и полюсы, что и функция

$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{c}\right) \frac{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - q^{2v} \frac{z}{c}\right) \left(1 - q^{2v} \frac{c}{z}\right)}{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - q^{2v-1} cz\right) \left(1 - q^{2v-1} \frac{1}{cz}\right)}.$$

Но эта функция $F(z)$ удовлетворяет следующим функциональным уравнениям типа (112) и (113):

$$F(z)F\left(\frac{q}{z}\right) = 1, \quad F(z)F\left(\frac{1}{qz}\right) = \frac{1}{qc^2},$$

что подтверждается простым вычислением. Следовательно, можно так определить постоянные a, b , чтобы функция $az^b F(z)$ удовлетворяла функциональным уравнениям (112), (113) и на k_1, k_2 имела модуль 1,

так как постоянные a, b получают действительные значения, а именно:

$$a = \pm \sqrt{c} q^{\frac{1}{4}}, \quad b = -\frac{1}{2} - \frac{\log c}{\log q}.$$

Выбирая для a отрицательное значение, имеем:

$$f(z) = q^{\frac{1}{4}} z^{-\frac{\log c}{\log q}} \left(\sqrt{\frac{z}{c}} - \sqrt{\frac{c}{z}} \right) \frac{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - q^{2v} \frac{z}{c} \right) \left(1 - q^{2v} \frac{c}{z} \right)}{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - q^{2v-1} cz \right) \left(1 - q^{2v-1} \frac{1}{cz} \right)}.$$

Это выражение может быть представлено с помощью тета-функций:

$$\vartheta_1(z) = -iCq^{\frac{1}{4}} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \prod_{v=1}^{\infty} (1 - q^{2v} e^{2i\pi z}) (1 - q^{2v} e^{-2i\pi z}),$$

$$\vartheta_0(z) = C \prod_{v=1}^{\infty} (1 - q^{2v-1} e^{2i\pi z}) (1 - q^{2v-1} e^{-2i\pi z}),$$

где

$$C = \prod_{v=1}^{\infty} (1 - q^{2v}).$$

Полагая $z = e^{2i\pi v}$, $c = e^{2i\pi a}$, получим:

$$f(z) = iz^{-\frac{2i\pi a}{\log q}} \frac{\vartheta_1(v-a)}{\vartheta_0(v+a)},$$

и действительная часть от $\log f(z)$ исчезает на k_1, k_2 , естественно, и при комплексных значениях c внутри R , и наша задача, стало быть, действительно решена.

§ 16. Дополнения к пятой главе.

1. Примеры на колебания струны. а) Оттянутая струна. Для случая оттянутой струны мы представим решение в виде наложения синхронных колебаний. Пусть в момент $t=0$ сообщено струне в точке $x=b$ смещение h , которое следует линейно продолжить до обоих концов; начальная скорость пусть будет нуль. Тогда разложение в ряд смещения $u(x, t)$ будет иметь следующий вид:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx \cos nt,$$

причем

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x, 0) \sin nx \, dx = \frac{2h}{\pi} \left(\int_0^b \frac{x}{b} \sin nx \, dx + \int_b^{\pi} \frac{\pi-x}{\pi-b} \sin nx \, dx \right) = \\ = \frac{2h}{n^2 b (\pi-b)} \sin nb;$$

таким образом

$$u(x, t) = \frac{2h}{b(\pi-b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nb \sin nx}{n^2} \cos nt.$$

б) Возбуждение импульсом. Аналогично можно рассмотреть случай, когда струне сообщается колебательное движение тем, что она выводится из положения равновесия импульсом, приложенным в точке $x=b$. Имеем:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \sin nt, \\ nb_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_t(x, 0) \sin nx \, dx.$$

Теперь необходимо совершить предельный переход, стягивая участок возбуждения в точку $x=b$, но так, чтобы интеграл

$$\int_0^{\pi} u_t(x, 0) \, dx = U$$

сохранял постоянное значение. В пределе получим:

$$b_n = 2U \frac{\sin nb}{\pi n}, \\ u(x, t) = 2U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nb}{\pi n} \sin nt.$$

в) Вынужденные движения. Общее решение дифференциального уравнения вынужденного колебания

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x) \cos nt$$

с периодической внешней силой гласит:

$$u = -\frac{2}{\pi} \cos nt \sum_{v=1}^{\infty} \sin vx \frac{\int_0^{\pi} f(x) \sin vx \, dx}{n^2 - v^2} + \\ + \sum_{v=1}^{\infty} \sin vx (a_v \sin vt + b_v \cos vt).$$

Полагая

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin vx \, dx = c_v,$$

при начальных условиях $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, получим для соответствующего интеграла:

$$u(x, t) = - \sum_{v=1}^{\infty} \sin vx \frac{c_v}{n^2 - v^2} (\cos nt - \cos vt).$$

В этой сумме, вообще говоря, преобладает тот член

$$\frac{-c_v}{n^2 - v^2} \sin vx (\cos nt - \cos vt),$$

в котором n меньше всего отличается от v . Лучше всего рассмотреть поведение этого члена, представив его в виде:

$$\frac{2c_v}{n^2 - v^2} \sin vx \sin \frac{n+v}{2} t \sin \frac{n-v}{2} t;$$

это выражение можно толковать как колебание $\sin \frac{n+v}{2} t$ с переменной амплитудой $\sin \frac{n-v}{2} t$. Колебание становится попеременно то сильнее, то слабее, получается явление „биений“. В пределе, при $n \rightarrow v$, интересующий нас член получает вид:

$$\frac{c_v}{v} \sin vx \sin vt \cdot \frac{t}{2},$$

и амплитуда возрастает со временем до бесконечности.

2. Колебания свободно подвешенного каната и бесселевы функции. Однородный канат длины и веса 1 подвешен вдоль оси x , положительное направление которой противоположно силе тяжести, и именно подвешен в точке $x=1$, так что свободный конец находится в точке $x=0$. Если теперь u есть смещение перпендикулярно оси x , то для u получается¹⁾ дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Подстановка

$$u = q(t) \varphi(x)$$

приводит к расщеплению:

$$\frac{\ddot{q}}{q} = -\lambda = \frac{(x\varphi')'}{\varphi}$$

и к краевому условию: $\varphi(1) = 0$, $\varphi(0)$ остается конечным.

¹⁾ Ср. Kneser A., Integralgleichungen, стр. 39–43.

Отсюда получается:

$$\varphi(x) = cJ_0(2\sqrt{\lambda x}),$$

где $J_0(x)$ обозначает бesselеву функцию нулевого порядка, причем из условия $J_0(2v) = 0$ определяется последовательность собственных частот $v = \sqrt{\lambda}$.

3. Дальнейшие примеры случаев колебательного уравнения, разрешимых в явном виде. Функции Матье (Mathieu).

а) Круговой сектор. Уравнение колебания $\Delta u + \lambda u = 0$ для кругового сектора, представленного в полярных координатах неравенствами $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$, также решается расщеплением: $u = f(r)g(\vartheta)$. По образцу § 9, в качестве системы собственных функций получается.

$$u_n = \sin \frac{n\pi\vartheta}{\alpha} J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r),$$

причем краевое условие взято $u = 0$, $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}$ — бesselева функция порядка $\frac{n\pi}{\alpha}$ (ср. гл. VII), а собственные значения $\lambda_{n,m}$ определяются из трансцендентного уравнения $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,m}}) = 0$.

б) Эллипс. Решение задачи о собственных значениях для эллипса получается при помощи введения эллиптических координат (см. гл. IV, § 8, 3). Имеем:

$$\Delta T + \lambda T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \ell_1^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial \ell_2^2} \right) + \lambda T = 0,$$

и подстановка $T = U(t_1) V(t_2)$ приводит к уравнению:

$$\frac{U''}{U} - \frac{V''}{V} = -\lambda(\lambda_1 - \lambda_2),$$

которое удовлетворяется в том и только в том случае, если U и V являются решениями дифференциальных уравнений:

$$U'' = -(\lambda_1 + \mu)U, \quad V'' = -(\lambda_2 + \mu)V$$

или

$$\frac{d^2 U}{d\lambda_1^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1 - e_1} + \frac{1}{\lambda_1 - e_2} \right) \frac{dU}{d\lambda_1} = - \frac{\lambda_1 + \mu}{4(\lambda_1 - e_1)(\lambda_1 - e_2)} U$$

и соответствующего уравнения для V .

Если положить

$$\frac{2\lambda_1 - e_1 - e_2}{e_1 - e_2} = \operatorname{ch} u,$$

$$\frac{2\lambda_2 - e_1 - e_2}{e_1 - e_2} = \cos v,$$

то u и v действительны; в результате получаются уравнения:

$$\frac{d^2 U}{du^2} = -(\lambda' \operatorname{ch} u + \mu') U,$$

$$\frac{d^2 V}{dv^2} = (\lambda' \cos v + \mu') V.$$

Решения этих уравнений, которые, кстати, при подстановке $u = iv$ переходят друг в друга, называются *функциями эллиптического цилиндра* или *функциями Матье* ¹⁾.

в) Циклический четырехугольник и циклидный шестиугольник. Все рассмотренные специальные области, для которых мы сумели решить уравнение колебания и уравнение потенциала методом расщепления, являются частными или предельными случаями четырехугольника либо шестигранника, образованного из софокусной системы циклических кривых или циклид (ср. § 9, 3).

4. Параметры в краевых условиях ²⁾. Упомянем еще вкратце, каким образом можно привести к интегральным уравнениям некоторые краевые задачи с параметрами в краевых условиях. Пусть, например, предложено дифференциальное уравнение $\Delta u = 0$ со следующим краевым условием на регулярной, граничной кривой Γ односвязной области G , целиком лежащей в конечной части плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u + h(s) = 0,$$

где n — внешняя нормаль, λ — параметр, $h(s)$ — заданная функция длины дуги s на кривой Γ . Воспользуемся той гриновой функцией $K(x, y; \xi, \eta)$ области G , у которой производные по нормали на контуре исчезают. Тогда формула Грина дает:

$$u(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} [\lambda u(x, y) + h(s)] K(x, y; \xi, \eta) ds,$$

где точка x, y пробегает кривую Γ . Если воспользоваться параметрическими уравнениями кривой Γ , $x = a(s)$, $y = b(s)$, то функция $K(x, y; \xi, \eta)$ обратится в симметрическую функцию $K(s, \sigma)$ двух переменных s, σ :

$$K(s, \sigma) = K[a(s), b(s); a(\sigma), b(\sigma)].$$

Полагаем еще

$$\begin{aligned} u[a(s), b(s)] &= \varphi(s), \\ \int_{\Gamma} K(s, \sigma) h(s) ds &= f(\sigma); \end{aligned}$$

тогда написанное выше соотношение для u примет следующий вид:

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma) - \lambda \int_{\Gamma} K(s, \sigma) \varphi(s) ds.$$

¹⁾ Ср. Whittaker E. T. and Watson G. N., A Course of Modern Analysis, 3-е изд., стр. 404—428, Cambridge 1920.

²⁾ Ср. Hilbert, Integralgleichungen, стр. 77—81.

Так как определение u по $\varphi(s)$ требует только решения первой краевой задачи, то придется исследовать лишь то интегральное уравнение, ядро которого только при $\sigma=s$ логарифмически бесконечно, так что общая теория применима к этому ядру.

Аналогичные рассуждения применимы к общему самосопряженному дифференциальному уравнению второго порядка эллиптического типа.

5. Тензоры Грина для систем дифференциальных уравнений. Идея, лежащая в основе введения функции Грина, допускает обобщение почти без видоизменения на задачи, в которых речь идет о системах дифференциальных уравнений, например, об определении вектора u (u_1, u_2, u_3) из дифференциального уравнения $L[u] = -f$, где $f(f_1, f_2, f_3)$ — заданный вектор. Под *гриновым тензором* $\mathfrak{G}$ дифференциального уравнения $L[u] = -f$, соответствующим заданным однородным краевым условиям, например, $u=0$, мы разумеем матрицу:

$$\mathfrak{G}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}$$

такого рода, что дифференциальное уравнение $L[u] = -f$ эквивалентно формуле:

$$u(x, y, z) = \iiint \mathfrak{G}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

и что всякий вектор u , представленный в этом виде, удовлетворяет краевым условиям. При этом под $\mathfrak{G}f$ мы понимаем вектор, получаемый посредством умножения общепринятым способом матрицы $\mathfrak{G}$ на вектор f , т. е. вектор с компонентами

$$K_{11}f_1 + K_{12}f_2 + K_{13}f_3, \quad K_{21}f_1 + K_{22}f_2 + K_{23}f_3, \quad K_{31}f_1 + K_{32}f_2 + K_{33}f_3.$$

Каждая вертикаль гринова тензора представляет собою вектор f_ξ , который, за исключением точки $x=\xi, y=\eta, z=\zeta$ (источника), непрерывен вместе со своими производными и удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[f_\xi] = 0$ и краевым условиям. Тип особенности, который этот вектор обладает в источнике, легко вывести из его физического смысла, который он сохраняет, как и в случае одного дифференциального уравнения, как функция влияния единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке $x=\xi, y=\eta, z=\zeta$. Тензор Грина удовлетворяет условиям симметрии:

$$K_{\mu\nu}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = K_{\nu\mu}(\xi, \eta, \zeta; x, y, z), \\ K_{lk}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = K_{kl}(\xi, \eta, \zeta; x, y, z).$$

когда скоро, как мы будем предполагать, дифференциальное выражение $L[u]$ самосопряженное, т. е. получается вариацией квадратичного дифференциального выражения, зависящего от вектора u и его первой производной. С помощью тензора Грина разрешается задача о собственных значениях и т. д. для дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$ совершенно аналогично, как в обыкновенном случае ¹⁾.

¹⁾ Ср. Hilbert D., Integralgleichungen, стр. 206—212.

6. Аналитическое продолжение решений уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$. Если решение уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ непрерывно вместе со своими производными до второго порядка в замкнутой области G , граница которой содержит прямолинейную часть I , и если функция u или ее производная по нормали $\frac{du}{dn}$ исчезает на I , то мы продолжим

функцию u в область G' , которая получается из G путем отражения в I , относя соответствующим друг другу точкам равно-противоположные значения при краевом условии $u=0$ и равные значения при краевом условии $\frac{du}{dn}=0$. Тогда полученная функция является в соединенной области $G + G'$ решением уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, непрерывным вместе со своими производными до второго порядка ¹⁾. Аналогичные теоремы справедливы для уравнения пластинки $\Delta \Delta u + \lambda u = 0$.

Условие теоремы можно еще более смягчить подобно тому, как это делается с принципом отражения в теории функций, для чего читатель найдет вспомогательные средства в дальнейшем изложении этой книги.

7. Теорема об узловых линиях решений уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$. Если внутри какой-либо области плоскости x, y , в которой функция u регулярна ²⁾, пересекается несколько ветвей кривой $u=0$, то в этой точке пересечения совокупность встречающихся в ней узловых линий образует равноугольную систему лучей. Эту теорему можно доказать, разлагая функцию u в окрестности рассматриваемой точки в степенной ряд.

8. Пример собственного значения бесконечно большой кратности. Рассмотрим произвольную плоскую область G , например круг, и для этой области задачу о собственных значениях уравнения $\Delta \Delta u - \lambda u = 0$, при краевых условиях $\Delta u = 0, \frac{\partial}{\partial n} \Delta u = 0$. Легко

получить бесконечное множество собственных значений λ_n и собственных функций u_n этой задачи, если заметить, что функции $\Delta u_n = v_n$ должны быть собственными функциями закрепленной пластинки, если только Δu_n не равно тождественно нулю. Таким образом мы получаем собственные значения, совпадающие с собственными значениями закрепленной пластинки, к которым присоединяется еще нуль, как собственное значение бесконечно большой кратности. В самом деле, при $\lambda = 0$ каждая из бесконечного множества линейно друг от друга независимых, регулярных в области G потенциальных функций удовлетворяет уравнению $\Delta \Delta u + \lambda u = 0$ при заданных краевых условиях.

9. Границы применимости теорем разложения. Для наших теорем о разложении по собственным функциям дифференциального уравнения

$$L[u] + \lambda ru = 0$$

¹⁾ Ср. *Courant R., Beweis des Satzes* и т. д., *Math. Zeitschrift*, т. 1, стр. 321—328, 1918.

²⁾ Нетрудно усмотреть, что всякое решение u , непрерывное вместе со своей производной, является регулярной аналитической функцией от x и y (ср. также т. II).

мы положили в основу предположение $\rho > 0$. Что это предположение существенно, показывает следующий пример. Пусть в дифференциальном уравнении $y'' + \lambda \rho y = 0$ для произвольного частичного интервала основной области $\rho = 0$. Тогда всякая собственная функция должна быть линейной в этом частичном интервале; стало быть, теорема о разложении не может быть справедлива для „произвольных“ функций.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ V.

- Böcher M.*, Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894.
 — Leçons sur les méthodes de Sturm, Paris 1917.
Courant R., Zur Theorie der kleinen Schwingungen, Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., т. II, стр. 278—285, 1922.
Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin 1912.
Hort W., Technische Schwingungslehre, 2-е изд., Berlin 1922.
Kneser A., Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2-е изд., Braunschweig 1922.
Pockels F., Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik, Leipzig 1891.
Rayleigh J. W., The Theory of Sound, 2 тома, London 1894, 1896. (Перепечатано без изменений 1926, 1929.)
Riemann B. und *Hattendorf K.*, Schwere, Elektrizität und Magnetismus, Hannover 1880.
Weber H., Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 2 тома, 4-е изд., Braunschweig 1900, 1901. 5-е изд., Braunschweig 1910, 1912.
v. Mises R. und *Frank Ph.*, Die partiellen Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Leipzig und Berlin 1925, 1927.
Whittaker E. T. and *Watson G. N.*, A Course of Modern Analysis, 3-е изд., Cambridge 1920.

ГЛАВА VI.

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ.

Уже в прошлой главе мы указали на тесную связь, существующую между задачей нахождения собственных значений дифференциального уравнения и такой же задачей для квадратичной формы. Задачи нахождения собственных значений рассмотренных нами дифференциальных уравнений эквивалентны задачам преобразования к главным осям соответствующих квадратичных форм, содержащих бесконечно много переменных. Если, например, выражения

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

и

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho u_t^2 dx$$

означают потенциальную и кинетическую энергию некоторого одномерного непрерывного многообразия, то достаточно положить

$$u = \sum_{v=1}^{\infty} f_v(t) \sin vx$$

и разложить функции p и ρ в ряды Фурье. Тогда оба выражения U и T для потенциальной и кинетической энергии принимают вид квадратичных форм от бесконечно многих переменных $\dot{f}_v$ и f_v . Если бы нам удалось найти такое ортогональное преобразование

$$f_v = \sum_{\mu=1}^{\infty} t_{v\mu} q_{\mu}, \quad \dot{f}_v = \sum_{\mu=1}^{\infty} t_{v\mu} \dot{q}_{\mu}$$

этих переменных в новые переменные q_{μ} и $\dot{q}_{\mu}$, при котором выражения T и U принимают вид:

$$T = \sum_{v=1}^{\infty} \dot{q}_v^2, \quad U = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v q_v^2,$$

то числа λ и будут собственными значениями рассматриваемой задачи колебаний. Собственные значения квадратичной формы от конечного

числа переменных характеризуются простыми экстремальными свойствами; поэтому естественно распространить этот способ определения собственных значений также и на случай форм от бесконечного числа переменных. Но вместо того, чтобы провести здесь все переходы к пределу и исследования сходимости, требующиеся для строгого обоснования этих эвристических рассуждений, мы предпочитаем вывести интересные нас экстремальные свойства, не вводя функций от бесконечно многих переменных и опираясь исключительно на общие методы вариационного исчисления.

При этом нам придется рассмотреть вместо квадратичных форм T и U два однородных квадратичных функционала. Этот путь приведет нас не только к новому более простому способу рассмотрения тех задач на нахождение собственных значений, которыми мы занимались в прошлой главе, но он даст нам также возможность глубже исследовать поведение собственных значений и собственных функций, особенно в случае многих независимых переменных, и обобщить полученные раньше результаты.

§ 1. Экстремальные свойства собственных значений.

1. Классические экстремальные свойства. Рассмотрим задачу нахождения собственных значений самосопряженного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка:

$$L[u] + \lambda ru = (pu_x)_x + (pu_y)_y - qu + \lambda ru = 0 \quad (p > 0, q > 0) \quad (1)$$

с двумя независимыми переменными x, y для области G , ограниченной одной или несколькими линиями Γ , имеющими кусочно-непрерывно вращающуюся касательную.

Граничное условие пусть имеет вид $u = 0$ или в более общем случае:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0,$$

где σ означает некоторую кусочно-непрерывную функцию, заданную на границе Γ , а $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по внешней нормали. Эквивалентные этим краевым задачам вариационные задачи относятся к следующим квадратичным функционалам:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_{\Gamma} p\sigma\varphi^2 ds, \quad (2)$$

где

$$D[\varphi] = \iint_G p(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy + \iint_G q\varphi^2 dx dy \quad (2')$$

и

$$H[\varphi] = \iint_G r\varphi^2 dx dy, \quad (3)$$

Этим квадратичным функционалам соответствуют следующие билинейные выражения:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}[\varphi, \psi] &= D[\varphi, \psi] + \int_{\Gamma} p \sigma \varphi \psi ds, \\ D[\varphi, \psi] &= \iint_G p (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y) dx dy + \iint_G q \varphi \psi dx dy, \\ H[\varphi, \psi] &= \iint_G \rho \varphi \psi dx dy,\end{aligned}$$

причем имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}[\varphi + \psi] &= \mathfrak{D}[\varphi] + 2\mathfrak{D}[\varphi, \psi] + \mathfrak{D}[\psi], \\ H[\varphi + \psi] &= H[\varphi] + 2H[\varphi, \psi] + H[\psi].\end{aligned}$$

При этом мы требуем, чтобы функциональный аргумент φ был непрерывен внутри G , включая границу Γ , и имел кусочно-непрерывные производные первого порядка.

Мы можем теперь получить собственные значения λ_n и соответствующие собственные функции u_n дифференциального уравнения (1) на основании следующих минимальных свойств:

Та из допустимых функций, для которой функционал $\mathfrak{D}[\varphi]$ достигает минимума при добавочном условии $H[\varphi] = 1$, является собственной функцией u_1 дифференциального уравнения (1) при естественном граничном условии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \sigma \varphi = 0;$$

минимальное значение функционала $\mathfrak{D}$ является соответствующим собственным значением.

Если же присоединить теперь к нашей задаче на безусловный минимум, кроме нормирующего условия

$$H[\varphi] = 1, \quad (3')$$

еще добавочное условие

$$H[\varphi, u_1] = 0,$$

то решение будет снова собственной функцией u_2 уравнения (1) с тем же граничным условием, а минимум $\mathfrak{D}[u_2] = \lambda_2$ будет соответствующим собственным значением.

Вообще задача на минимум $\mathfrak{D}[\varphi] = \min$ при нормирующем условии $H[\varphi] = 1$ и добавочных условиях

$$H[\varphi, u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

последовательно определяет собственные функции u_n уравнения (1) при граничном условии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \sigma \varphi = 0,$$

и соответствующее собственное значение λ_n равняется значению минимума $\mathfrak{D}[u_n]$

Вместо того, чтобы искать минимум $\mathfrak{D}[\varphi]$ при нормирующем условии $H[\varphi] = 1$, можно, отбросив это последнее условие, искать минимум отношения $\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{H[\varphi]}$, причем искомая функция определяется только с точностью до постоянного множителя.

В случае граничного условия $\varphi = 0$ мы должны только присоединить к условиям допустимости предыдущих вариационных задач со свободно варьируемыми граничными значениями функции φ граничное условие $\varphi = 0$. Тогда в выражении $\mathfrak{D}[\varphi]$ исчезает член $\int \rho \sigma \varphi^2 ds$, зависящий от граничных значений функции φ .

Теорема о том, что действительно существуют решения рассматриваемых задач на минимум, имеющие непрерывные производные второго порядка, требует особого доказательства. Мы приведем это доказательство позже во втором томе, опираясь на общую теорию прямых методов вариационного исчисления, и примем пока в виде постулата, что интересующие нас проблемы минимума действительно разрешимы.

Мы должны сначала доказать, что решения наших вариационных задач являются собственными функциями наших дифференциальных уравнений и, далее, что мы этим путем получаем все собственные функции дифференциального уравнения. Второе утверждение нами будет доказано в § 3 и будет следовать из того, что получающаяся при решении вариационной задачи система функций $u_1, u_2, \dots$ является, как нами будет установлено, полной системой. Чтобы доказать наше первое утверждение, мы могли бы опираться на общее правило множителей, приведенное в гл. IV, § 7. Однако мы приведем доказательство, независимое от этой теории.

Рассмотрим сначала первую из наших вариационных задач; мы можем допустить, что решение u_1 этой задачи заранее нормировано, т. е. удовлетворяет условию:

$$H[u_1] = 1.$$

Если обозначим через ξ некоторую функцию, удовлетворяющую тем же условиям непрерывности, что и функция φ , и в остальном совершенно произвольную, а через ϵ произвольную постоянную, то для любого значения ϵ и при $u = u_1$, $\lambda = \lambda_1$ должно иметь место неравенство:

$$\mathfrak{D}[u + \epsilon \xi] \geq \lambda H[u + \epsilon \xi],$$

откуда, принимая во внимание, что

$$\mathfrak{D}[u] = \lambda H[u],$$

следует:

$$2\epsilon \{ \mathfrak{D}[u, \xi] - \lambda H[u, \xi] \} + \frac{\epsilon}{2} (\mathfrak{D}[\xi] - \lambda H[\xi]) \geq 0.$$

Это неравенство может иметь место при всех значениях ϵ только тогда, если выполняется условие:

$$\mathfrak{D}[u, \xi] - \lambda H[u, \xi] = 0, \quad (4)$$

т. е. если обращается в нуль первая вариация выражения $\mathfrak{D} - \lambda H$. Преобразуем теперь выражение $\mathfrak{D}[u, \zeta]$ согласно формуле Грина:

$$\mathfrak{D}[u, \zeta] = - \iint_G \zeta L[u] dx dy + \int_{\Gamma} p \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) ds;$$

отсюда вследствие произвольности функции ζ и получается уравнение (1) и граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$$

для $u = u_1$ и $\lambda = \lambda_1$. Для второй задачи на минимум, в которой имеется еще добавочное условие $H[\varphi, u_1] = 0$, мы сначала получаем уравнение (4) при $u = u_2$ и $\lambda = \lambda_2$ только для функций ζ , удовлетворяющих условию:

$$H[\zeta, u_1] = 0. \quad (5)$$

Но для всякой непрерывной функции η , имеющей кусочно-непрерывные производные первого и второго порядка, мы можем определить число t так, чтобы функция $\zeta = \eta + t u_1$ удовлетворяла условию (5). Для этого достаточно положить $t = -H[u_1, \eta]$; замечая, далее, что в уравнении (4) мы имеем право вместо ζ взять в частности функцию u_2 , которая по условию удовлетворяет соотношению:

$$H[u_2, u_1] = 0, \quad (6)$$

мы получим, что

$$\mathfrak{D}[u_2, u_1] = 0. \quad (7)$$

Подставляя теперь в уравнение (4) нашу функцию $\zeta = \eta + t u_1$, получаем, что при $u = u_2$, $\lambda = \lambda_2$:

$$\mathfrak{D}[u, \eta] - \lambda H[u, \eta] + t \{ \mathfrak{D}[u, u_1] - \lambda H[u, u_1] \} = 0,$$

откуда, принимая во внимание уравнения (6) и (7), мы получаем:

$$\mathfrak{D}[u, \eta] - \lambda H[u, \eta] = 0, \quad (4')$$

т. е. уравнение (4) имеет место и для произвольных функций η или ζ независимо от того, удовлетворяют ли они или нет добавочному условию (5). Но отсюда непосредственно следует, что функция $u = u_2$ удовлетворяет при $\lambda = \lambda_2$ дифференциальному уравнению (1) и соответствующему граничному условию. Продолжая таким же путем дальше, мы убедимся, что вообще все решения u_i наших вариационных задач удовлетворяют при $\lambda = \lambda_i$, где λ_i — соответствующие значения минимума выражения $\frac{\mathfrak{D}[u]}{H[u]}$, дифференциальному уравнению (1) и заданному граничному условию; эти решения, нормированные согласно уравнению (3'), удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}[u_i] &= \lambda_i; & \mathfrak{D}[u_i, u_k] &= 0 \\ H[u_i] &= 1; & H[u_i, u_k] &= 0 \end{aligned} \right\} (i \neq k). \quad (8)$$

Полученные этим путем собственные значения удовлетворяют, во всяком случае, соотношению:

$$\lambda_{n-1} \leq \lambda_n, \quad (9)$$

ибо для n -го собственного значения нашей задачи на минимум область допустимых функций сравнений сужена по сравнению с $n-1$ -м собственным значением. Поэтому минимум λ_n не может быть меньше предыдущего минимума λ_{n-1} .

С помощью наших вариационных задач мы таким образом, получаем бесконечную последовательность собственных значений и собственных функций соответствующего дифференциального уравнения. Этими функциями, получающимися в качестве решений нашей последовательности вариационных задач, исчерпывается вся система собственных функций и собственных значений дифференциального уравнения, что является следствием из теоремы о полноте системы решений вариационных проблем, которая будет доказана в § 3, 1.

2. Дополнения и обобщения¹⁾. Само собой очевидно, что и остальные задачи о собственных значениях, рассмотренные нами в предыдущей главе, совершенно аналогичным образом могут быть сведены к проблемам вариационного исчисления. При этом является совершенно безразличным, идет ли речь о кратных или о простых интегралах и будут ли соответствующие дифференциальные уравнения Эйлера уравнениями второго или высшего порядка. Так, например, задача нахождения собственных значений дифференциального уравнения Штурм-Лиувилля

$$(pu')' - qu + \lambda pu = 0$$

при граничных условиях

$$u'(0) - h_1 u(0) = 0, \quad u'(\pi) + h_2 u(\pi) = 0$$

сводится к вариационной проблеме типа:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_0^\pi (p\varphi'^2 + q\varphi^2) dx + h_1 p(0) \varphi(0)^2 + h_2 p(\pi) \varphi(\pi)^2 = \min$$

при добавочном условии:

$$\int_0^\pi p\varphi^2 dx = 1$$

и без граничных условий; придавая h_1 и h_2 различные частные значения, мы получим любой из рассмотренных нами случаев однородных граничных условий; если h_1 или h_2 обращаются в бесконечность, то получаются в качестве предельных случаев граничные условия $u(0) = 0$ и $u(\pi) = 0$.

В тех особых предельных случаях, когда дифференциальное уравнение Штурм-Лиувилля имеет на концах основного промежутка особые точки, можно также определить собственные значения и собственные функции с помощью соответствующих вариационных проблем. Ограни-

¹⁾ Cp. Courant R., Über die Anwendung der Variationsrechnung... Acta math., 49.

чимся случаями полиномов Лежандра и бесселевых функций. Полиномы Лежандра получаются при

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_{-1}^{+1} (1-x^2) \varphi'^2 dx, \quad H[\varphi] = \int_{-1}^{+1} \varphi^2 dx,$$

причем функция φ не подчинена никаким граничным условиям.

Бесселева функция нулевого порядка $J_0(x\sqrt{\lambda})$ получается при

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_0^1 x \varphi'^2 dx, \quad H[\varphi] = \int_0^1 x \varphi^2 dx,$$

где функция φ может при $x=0$ свободно варьировать. Бесселевы функции m -го порядка для $m \geq 1$ получаются при

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_0^1 \left(x \varphi'^2 + \frac{m^2}{x} \varphi^2 \right) dx, \quad H[\varphi] = \int_0^1 x \varphi^2 dx$$

и при граничном условии $\varphi(0) = 0$.

Для самосопряженных дифференциальных уравнений высших порядков и с большим числом независимых переменных получаются совершенно аналогичные результаты. Так, для дифференциального уравнения колебаний пластинки

$$\Delta \Delta u - \lambda u = 0, \quad (10)$$

например для случая пластинки с неподвижно закрепленной границей (см. гл. IV, § 10), имеем:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] = \iint_G (\Delta \varphi)^2 dx dy, \quad H[\varphi] = \iint_G \varphi^2 dx dy,$$

причем на границе Γ области G

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Все рассмотрения и формулы п. 1 дословно остаются в силе и в этом случае.

Но и другие типы задач о собственных значениях, не рассмотренные нами в явном виде в гл. V, легко укладываются в рамки приведенной в п. 1 схемы. Вспомним, что если ρ означает плотность массы, непрерывно распределенной по некоторому континууму, то $\frac{1}{2} H[\varphi]$ выражает кинетическую энергию, а $\frac{1}{2} \mathfrak{D}[\varphi]$ — потенциальную энергию этого континуума. Является поэтому естественным рассмотреть и те случаи, когда наряду с массой, непрерывно распределенной по области G , имеются еще отдельные концентрированные массы. Так, например, в случае одномерной области G мы можем допустить, что

имеются еще массы, сосредоточенные в отдельных точках. Тогда кинетическая энергия задается выражением:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{H}[\varphi] = \frac{1}{2} \int_G \rho \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^h b_v \varphi(x_v)^2, \quad (11)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_h$ означают заданные точки области G , а b_v — некоторые постоянные. Этот вид функционала $\mathfrak{H}[\varphi]$ соответствует, следовательно, тому случаю, когда в точках $x_1, x_2, \dots, x_h$ сосредоточены массы b_v , причем мы здесь считаем все эти массы положительными. Обобщая таким же образом выражение для потенциальной энергии, мы получаем функционалы вида:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{D}[\varphi] = \frac{1}{2} \int_G \rho \varphi'^2 dx + \frac{1}{2} \int_G q \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^h a_v \varphi(x_v)^2. \quad (12)$$

К таким „задачам с нагрузкой“ мы можем применить в точности те же самые обозначения и рассуждения п. 1, и мы получим таким путем собственные значения и собственные функции задач этого типа. Эти собственные функции удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$L[u] + \lambda \rho u = (\rho u)' - qu + \lambda \rho u = 0 \quad (13)$$

всюду за исключением точек $x_1, \dots, x_h$. Для этих же точек получаются сами собой естественные граничные условия и условия разрыва, непосредственно вытекающие из условия обращения в нуль первой вариации. Умноженные на $\sqrt{\rho}$ собственные функции этих задач уже не ортогональны между собой. Условия ортогональности заменяются здесь условиями вида¹⁾:

$$\int_G \rho u_i u_j dx + \sum_{v=1}^h b_v u_i(x_v) u_j(x_v) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases} \quad (14)$$

Другой пример дают выражения:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_G \rho \varphi'^2 dx + \int_G q \varphi^2 dx \quad (15)$$

и

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \int_G \rho \varphi^2 dx + \iint_{G \times G} k(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy, \quad (15')$$

где $k(x, y)$ есть некоторая заданная симметрическая функция от x и y , причем мы для простоты предполагаем, что функционал $\mathfrak{H}[\varphi]$ не может принимать отрицательных значений. С помощью процесса, изложенного в п. 1, мы получаем в этом случае для собственных функций вместо дифференциального уравнения интегро-дифференциальное уравнение:

$$(\rho u)' - qu + \lambda \left[\rho u + \iint_G k(x, y) u(y) dy \right] = 0 \quad (16)$$

¹⁾ Г. Кнезер называет эти условия „ортогональностью с нагрузкой“.

с краевым условием, например, $u=0$. Обобщенные условия ортогональности для собственных функций этой задачи гласят так¹⁾:

$$\int_G u_i(x) u_j(x) dx + \iint_{G \times G} k(x, y) u_i(x) u_j(y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}$$

3. Задачи о собственных значениях для областей, состоящих из отдельных не связанных между собой кусков. Для всех задач, приводящих к разысканию собственных значений дифференциальных уравнений, имеет место следующее общее положение, которое пригодится нам позже.

Если область G состоит из нескольких не связанных между собой частичных областей $G', G'', \dots$, так что эти частичные области не имеют между собой общих внутренних точек, но могут иметь общие граничные точки, то совокупность собственных значений и собственных функций для всей области G состоит из совокупности всех собственных значений и собственных функций для отдельных частичных областей $G', G'', \dots$, причем каждую из этих собственных функций, определенную только внутри соответствующей частичной области, мы во всех остальных частичных областях полагаем равной нулю.

С физической точки зрения это положение выражает тот очевидный факт, что если в колебательном процессе участвуют несколько не связанных между собой многообразий, то колебания каждого из этих многообразий происходят независимо друг от друга.

Чтобы математически доказать наше утверждение, мы можем поступить двояким образом. Во-первых, мы можем исходить из определения собственных функций с помощью дифференциального уравнения. Тогда достаточно заметить, что собственные функции, определенные внутри какой-нибудь из частичных областей $G', G'', \dots$ и равные нулю вне этой области, а также все линейные комбинации, составленные из собственных функций этого рода, принадлежащих одному и тому же собственному значению, являются в то же время собственными функциями для всей области G . Обратно, всякая собственная функция для области G является, по меньшей мере, для одной из частичных областей собственной функцией этой частичной области, не обращающейся тождественно в нуль. Во-вторых, мы можем исходить из определения собственных значений с помощью наших вариационных задач и последовательно, шаг за шагом, доказать, что каждое собственное значение для всей области G является в то же время собственным значением для одной из частичных областей.

1) Если ввести, кроме собственных функций $u_i(x)$, функции

$$v_i(x) = u_i(x) + \int_G k(x, y) u_i(y) dy,$$

то можно эти условия рассматривать как „условия биортогональности“ между системой функций u_i , с одной стороны, и системой функций v_i — с другой, т. е. представить эти условия в виде:

$$\int_G u_i v_j dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

4. Максимально-минимальное свойство собственных значений. Так же, как в гл. I для случая квадратичных форм, приведенный выше способ последовательного определения n -го собственного значения и n -й собственной функции может быть и здесь заменен другим определением, не зависящим от определения предшествующих собственных значений и функций. Это второе определение непосредственно определяет n -е собственное значение и n -ю собственную функцию с помощью свойства, не предполагающего знания предыдущих собственных значений и функций.

Рассмотрим какую-нибудь из исследованных нами вариационных задач, сохраняя обозначения п. 1, и видоизменим условия задачи в том смысле, что вместо условий $H[\varphi, u_i] = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) мы подчиняем теперь функции φ $n-1$ условиям:

$$H[\varphi, v_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

где $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ означают совершенно произвольные функции, кусочно-непрерывные в области G . Решима ли эта вариационная задача и при каких условиях она разрешима, нас здесь не интересует. Во всяком случае, интеграл $D[\varphi]$, или более общее выражение $\mathfrak{D}[\varphi]$, имеет при рассматриваемых условиях некоторую нижнюю грань, зависящую от функций $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, которую мы обозначим через $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Мы утверждаем, что собственная функция v_n и собственное значение λ_n , которые раньше были нами последовательно определены с помощью зависимых вариационных задач, могут теперь после этого видоизменения рассматриваемых задач быть охарактеризованы с помощью следующей теоремы:

Пусть в области G заданы $n-1$ кусочно-непрерывных функций $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, и пусть $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ означает минимум или нижнюю грань всех возможных значений, которые может принимать выражение $\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{H[\varphi]}$ для любых внутри G непрерывных и имеющих кусочно-непрерывные производные функций φ , удовлетворяющих условиям

$$H[\varphi, v_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (17)$$

Тогда λ_n равняется наибольшему значению, которое может принять эта нижняя грань d , если варьировать систему функций $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, придавая им всевозможные допустимые значения. Это максимальное значение минимумов d достигается при $u = u_n$ и $v_1 = u_1, v_2 = u_2, \dots, v_{n-1} = u_{n-1}$.

Для случая граничного условия $u = 0$ мы и нашу вспомогательную вариационную задачу должны рассматривать не как свободную задачу, но дополнить ее добавочным граничным условием $\varphi = 0$ на границе Γ .

Для доказательства этой теоремы заметим прежде всего, что при $v_i = u_i$ ($1 \leq i \leq n-1$), действительно, согласно определению

$$d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} = \lambda_n.$$

Докажем, что при любом выборе $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ всегда имеет место

неравенство $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \leq \lambda_n$. Для этого достаточно построить такую специальную функцию φ , которая удовлетворяла бы условиям $H[\varphi, v_i] = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и для которой имеет место неравенство $\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n$. Но мы можем, в самом деле, получить такую функцию, полагая ее равной надлежащим образом выбранной линейной комбинации первых n собственных функций, т. е. полагая

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} c_i \mu_i,$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — некоторые постоянные. Тогда из $n-1$ условий (17) мы получаем $n-1$ линейных однородных условий для постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$, которым можно всегда удовлетворить; условие

$$H[\varphi] = \sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$$

служит только для нормирования остающегося еще неопределенным коэффициента пропорциональности. Так как, далее,

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \sum_{i,k=1}^n c_i c_k \mathfrak{D}[\mu_i, \mu_k],$$

причем

$$\mathfrak{D}[\mu_i, \mu_k] = 0 \text{ при } i \neq k \text{ и } \mathfrak{D}[\mu_i] = \lambda_i \text{ [ср. (8)],}$$

то

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i;$$

но

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1, \text{ а } \lambda_n \geq \lambda_i \text{ (} i = 1, 2, \dots, n),$$

поэтому

$$\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n.$$

Следовательно, минимум $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ подавно не может превосходить собственного значения λ_n , так что λ_n является, действительно, наибольшим из значений, которые может принимать минимум $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$.

§ 2. Общие следствия из экстремальных свойств собственных значений.

1. Общие теоремы. Результаты, полученные нами в предшествующих параграфах, приводят к целому ряду очень важных следствий, так как дают возможность связать максимально-минимальное свойство собственных значений с некоторыми простыми принципами вариационного исчисления. Первый из этих принципов выражает тот очевидный факт, что при усилении добавочных условий в какой-нибудь задаче минимума значение минимума не уменьшается, а при ослаблении добавочных условий минимум не возрастает. Второй принцип гласит:

если даны две задачи на разыскание минимума с одним и тем же классом допустимых функций φ и если для каждой допустимой функции φ выражение, минимум которого требуется определить в первой задаче, имеет значение не меньшее, чем выражение, рассматриваемое во второй задаче, то и значение минимума в первой задаче не может быть меньше значения минимума во второй задаче.

Чтобы с помощью этих принципов сравнить, между собой собственные значения двух проблем, мы должны устранить затруднение, возникающее при классическом определении собственных значений с помощью их минимального свойства и состоящее в том, что классы допустимых функций для различных собственных значений не совпадают между собой ввиду различия добавочных условий. Мы достигаем этого, определяя собственные значения с помощью их максимально-минимального свойства и получая этим путем для всех соответствующих вариационных проблем один и тот же класс допустимых функций, что делает возможным применение приведенных выше принципов.

Из первого принципа мы можем непосредственно вывести следующее важное следствие, касающееся всех колебательных процессов. Рассмотрим какую-нибудь колебательную систему, собственные колебания которой характеризуются с помощью задачи нахождения собственных значений рассмотренного типа. Заметим, что любые условия связи, которым должны подчиняться колебания системы, выражаются математически в виде добавочных условий, накладываемых на класс допустимых функций сравнения φ . Если в соответствующей проблеме разыскания максимума минимумов усилить ограничительные условия, накладываемые на функции φ , то для каждой заданной системы функций $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ нижняя грань $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ либо возрастает, либо остается без изменения, а потому и максимум этих нижних граней, т. е. n -е собственное значение, либо становится больше, либо остается без изменения при всяком усилении добавочных условий.

Обратно, при ослаблении добавочных условий n -е собственное значение либо становится меньше, либо не изменяется.

С физической точки зрения это означает следующее:

ТЕОРЕМА 1. *Если первоначально свободную колебательную систему подчинить каким угодно внешним условиям, то основной тон и все обертоны системы либо повышаются, либо остаются без изменения. Обратно, если освободить систему от условий, связывающих ее колебания, то как основной тон, так и все обертоны системы либо понижаются, либо не изменяются.*

Так, например, для случая колебаний закрепленной упругой мембраны мы получаем, что если мембрана закреплена не только вдоль границы, но также и вдоль других линий или кусков поверхности, то основной тон и все обертоны могут измениться лишь в сторону повышения. Наоборот, если мембрана в каком-нибудь месте разрывается, или, для случая колебаний пластинки, если материал пластинки в каком-нибудь месте получает „трещину“, то как основной тон, так и все обертоны могут измениться лишь в сторону понижения. В самом деле, в этом последнем случае для функций сравнения φ и для их производных на месте разрыва или трещины отпадают условия непрерывности.

Из нашего принципа мы получаем, далее, целый ряд важных общих теорем относительно распределения собственных значений для рассмотренных краевых задач. Первая теорема касается случая граничного условия $u=0$ и сравнивает распределение собственных значений для всей области G в целом с распределением собственных значений для частей этой области. Вторая теорема относится к случаю граничного условия $\frac{du}{dn}=0$. Дальнейшие теоремы рассматривают более общие граничные условия и сравнивают спектры¹⁾ дифференциального уравнения для различных граничных условий.

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим некоторое конечное число частичных областей $G', G'', G''', \dots$ заданной области G , не имеющих между собой общих внутренних точек. Обозначим через $A(x)$ число тех собственных значений дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$ при граничном условии $u=0$ для области G , которые не превышают верхней грани x , а через $A'(x), A''(x), A'''(x), \dots$ — числа соответствующих собственных значений для частичных областей $G', G'', G''', \dots$ при том же граничном условии и той же верхней грани x . Тогда имеет место неравенство:*

$$A(x) \geq A'(x) + A''(x) + A'''(x) + \dots$$

Эту теорему мы можем формулировать также и следующим образом: при граничном условии $u=0$ n -е собственное значение λ_n для всей области не превосходит n -го члена λ_n^* последовательности всех собственных значений, принадлежащих всем отдельным частичным областям $G^{(i)}$ и расположенных в порядке возрастания их величины, причем каждое собственное значение m -й кратности повторяется m раз.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из следующего замечания. Присоединим к условиям, определяющим собственное значение λ_n как максимальное значение минимумов рассматриваемого интеграла, в качестве нового добавочного условия, требование, чтобы функции сравнения φ обращались в нуль как вдоль всех границ частичных областей $G^{(i)}$, так и внутри всей части области G , не содержащейся ни в одной из частичных областей $G^{(i)}$. В силу формулированного выше основного принципа новое значение максимума минимумов при таком видоизменении условий задачи не меньше прежнего его значения. С другой стороны, видоизмененная таким образом вариационная проблема является как раз той проблемой, которая определяет n -е собственное значение для области, составленной из несвязанных кусков $G', G'', \dots$, т. е. новое значение максимума минимумов равно λ_n^* . Отсюда следует, что $\lambda_n \leq \lambda_n^*$; согласно утверждению теоремы.

В частности, мы получаем из доказанной только что теоремы следующее очень важное свойство собственных значений λ_n для граничного условия $u=0$, которое можно назвать *свойством монотонности*.

¹⁾ Спектром мы называем здесь, так же как и раньше, совокупность всех собственных значений.

ТЕОРЕМА 3. При граничном условии $u=0$ n -е собственное значение для области G не может быть больше n -го собственного значения для любой части области G при том же граничном условии¹⁾.

Для случая граничного условия $\frac{du}{dn}=0$ получаем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G', G'', G''', \dots$ означают некоторое конечное число частичных областей, заполняющих целиком область G и не имеющих между собой общих внутренних точек. Обозначим через $B(x)$ число собственных значений дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$ для области G при граничном условии $\frac{du}{dn}=0$, не превосходящих верхней грани x . Тогда $B(x)$ не превосходит общего числа соответствующих собственных значений данного дифференциального уравнения для всех частичных областей $G^{(i)}$, при том же граничном условии и при той же верхней грани x .

Эту теорему мы можем формулировать также и следующим образом: Пусть x_n^* означает n -й член последовательности всех собственных значений, взятых для каждой из частичных областей $G^{(i)}$ и принадлежащих граничному условию $\frac{du}{dn}=0$, расположенных в порядке возрастания их величины и повторяющихся сообразно с их кратностью. Тогда n -е собственное значение x_n области G больше (или равно), чем собственное значение x_n^* .

Доказательство здесь также получается почти непосредственно путем применения нашего первого общего принципа к вариационной проблеме, характеризующей n -е собственное значение x_n области G . В самом деле, если мы в этой проблеме расширим класс допустимых функций сравнения φ и будем считать допустимыми функции φ , имеющие вдоль граничных линий областей $G^{(i)}$ разрывы непрерывности такого рода, что при переходе через эти линии функция делает конечный скачок, то это ослабление ограничительных условий либо уменьшает значение максимума минимумов, либо оставляет его неизменным. С другой стороны, видоизмененная вариационная проблема дает согласно § 1, стр. 382 как раз n -е собственное значение для области, состоящей из несвязанных кусков $G^{(i)}$, при естественном граничном условии $\frac{du}{dn}=0$, т. е. число x_n^* . Таким образом соотношение $x_n \geq x_n^*$ доказано.

Следующие теоремы касаются взаимоотношений между спектрами дифференциального уравнения для различных типов граничных условий.

ТЕОРЕМА 5. Обозначим через λ_n n -е собственное значение дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$ для области G при граничном условии $u=0$, а через μ_n n -е собственное значение, соответствующее граничному условию $\frac{du}{dn} + \alpha u = 0$ или более общим условиям: $\frac{du}{dn} + \alpha u = 0$

¹⁾ И притом всегда будет меньше последнего, если речь идет о правильной частичной области, как это легко доказать, применяя рассуждение § 6.

вдоль одной части Γ' границы Γ и $u=0$ вдоль остальной части Γ'' границы. Тогда всегда имеет место неравенство:

$$\mu_n \leq \lambda_n.$$

Мы приходим к этому результату следующим образом: если в проблему, определяющую n -е собственное значение μ_n области G как максимум минимумов выражения $\mathfrak{D}[\varphi]$ и не содержащую никаких граничных условий, ввести затем требование, чтобы функция φ обращалась в нуль вдоль границы Γ области G , то значение каждого из минимумов, а потому и максимума этих минимумов от введения этого дополнительного условия не уменьшается. С другой стороны, новое значение максимума минимумов равно, очевидно, λ_n , так как в силу граничного условия выражение $\mathfrak{D}[\varphi]$ совпадает теперь с выражением $D[\varphi]$. Поэтому $\mu_n \leq \lambda_n$, что и требовалось доказать.

Добавление к теореме 5. Теорема 5 остается в силе и в том случае, когда граничное условие $\frac{du}{dn} + \sigma u = 0$ заменяется условием $u=0$ не вдоль всей границы Γ , а только вдоль некоторой части Γ' этой границы.

Доказательство такое же, как и для самой теоремы 5.

ТЕОРЕМА 6. Если в граничном условии $\frac{du}{dn} + \sigma u = 0$ изменить функцию σ так, чтобы во всех точках границы значения функции σ либо всюду увеличились, либо всюду уменьшились, то и все собственные значения изменяются при этом в том же самом направлении, что и функция σ , т. е. увеличиваются (или не изменяются) при увеличении σ и уменьшаются (или не изменяются) при уменьшении σ .

Этот очень важный факт также является непосредственным следствием максимально-минимального свойства собственных значений и выводится на основании второго из сформулированных выше принципов. В самом деле, если σ во всех точках границы изменяется в одном и том же направлении, то и выражение $\mathfrak{D}[\varphi]$ для всякой заданной функции φ изменяется в том же направлении, а потому и нижняя грань этого выражения при заданных функциях u_i и максимум этих нижних граней могут измениться при этом только в том же самом направлении.

Из теорем 5 и 6 видно, что собственные значения для различных граничных условий находятся между собой в характерной зависимости. Когда функция σ всюду монотонно растет от нуля до бесконечности, то и каждое собственное значение μ монотонно растет от значения, принимаемого им при граничном условии $\frac{du}{dn} = 0$, до его значения при условии $u=0$. Другими словами, условие $u=0$ является самым сильным из рассматриваемых условий (считая $\sigma \geq 0$), а условие $\frac{du}{dn} = 0$ является самым слабым. Что предел собственного значения μ_n при неограниченном увеличении σ действительно равняется λ_n , проще всего доказать, предварительно исследовав более подробно природу собственных функций. Так как это будет сделано нами лишь впоследствии, то мы не приводим здесь доказательства этого положения (см. т. II).

Мы увидим в п. 6, что *возрастание собственных значений с возрастанием σ происходит непрерывным образом*. Далее, исследование асимптотического распределения собственных значений покажет, что, несмотря на отмеченное только что поведение собственных значений, асимптотическое поведение n -го собственного значения не зависит от граничного условия, так как увеличение собственного значения, вызываемое возрастанием функции σ , становится при достаточно большом n сколь угодно малым по сравнению с величиной собственного значения.

Факты, сформулированные в теоремах 5 и 6, имеют очень простое физическое значение. Граничное условие $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ соответствует случаю, когда граница упруго связана с положением равновесия, причем величина удерживающей силы задается функцией σ (см. стр. 272). Наши теоремы выражают поэтому тот физический закон, что при возрастании этой силы все собственные частоты возрастают. Условие $\mu = 0$ соответствует тому случаю, когда удерживающая сила становится бесконечно большой, т. е. когда граница является абсолютно неподвижной.

Наконец, максимально-минимальное свойство собственных значений дает нам возможность исследовать зависимость собственных значений от коэффициентов дифференциального уравнения и области G , опираясь на второй из установленных нами в начале параграфа принципов.

ТЕОРЕМА 7. *Если в дифференциальном уравнении $L[u] + \lambda r u = 0$ коэффициент r изменяется во всех точках области в одном и том же направлении, то n -е собственное значение изменяется при любом граничном условии в противоположном направлении; при изменении же коэффициентов p или q в одном и том же направлении во всех точках области собственные значения изменяются в том же самом направлении. (В случае граничного условия $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ мы должны здесь предполагать, что $\sigma \geq 0$.)*

В самом деле, предположим сначала, что r изменяется всюду в одном и том же направлении. Тогда значение выражения $\mathfrak{D}[\varphi]$ для любой допустимой функции φ изменяется монотонно в том же направлении; поэтому и нижняя грань всех значений $\mathfrak{D}[\varphi]$ при заданных v_i , а вместе с тем и максимум этих нижних граней, т. е. n -е собственное значение, изменяется при этом в том же направлении, что и функция r . Если же мы будем монотонно изменять функцию r и придадим ей, например, значение $r' \geq r$, то для любой допустимой функции сравнения φ мы будем иметь

$$\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\iint_G r \varphi^2 dx dy} \geq \frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\iint_G r' \varphi^2 dx dy}.$$

Отсюда следует, что и нижняя грань левой части этого неравенства не может быть меньше (или соответственно при $r' \leq r$ больше) нижней грани правой части. При этом, образуя нижнюю грань стоящего справа выражения, мы должны в соответствии с заменой функции r функ-

цией ρ' брать вместо функций v_i функции $v'_i = v_i \frac{\rho}{\rho'}$. Так как системы функций v'_i пробегают все множество допустимых систем функций, когда системы функций v_i принимают все возможные допустимые значения, то отсюда следует, что максимум всех нижних граней для выражения, стоящего слева, не может быть меньше максимума всех нижних граней выражения, стоящего справа, откуда следует, что максимум этих нижних граней, т. е. n -е собственное значение, изменяется в направлении, противоположном направлению изменения функции ρ .

2. Неограниченное возрастание собственных значений. Докажем, что собственные значения λ_n рассматриваемых вариационных проблем неограниченно возрастают при возрастании n ; в частности из этого будет следовать, что всякое собственное значение имеет только конечную кратность и что только конечное число собственных значений могут быть отрицательными. Важнейшим следствием, вытекающим из неограниченного возрастания собственных значений, является, как мы увидим в § 3, 1, свойство полноты системы собственных функций, откуда, далее, будет следовать, что система собственных функций вариационной проблемы совпадает с системой собственных функций дифференциального уравнения.

Для доказательства (при этом нам не придется пользоваться условием, что $q > 0$) обозначим через p_M, q_M, ρ_M наибольшие, а через p_m, q_m, ρ_m наименьшие значения функций p, q и ρ внутри G и рассмотрим сначала случай граничного условия $u = 0$. Если мы заменим в выражениях $\mathfrak{D}$ и H функции p, q и ρ постоянными p_m, q_m и ρ_m или соответственно постоянными p_M, q_M и ρ_M , то мы получим новые вариационные проблемы с собственными значениями λ'_n и λ''_n . На основании теоремы 7 имеют место неравенства $\lambda'_n \leq \lambda_n \leq \lambda''_n$. Но нетрудно убедиться, что собственные значения λ'_n неограниченно возрастают. Например, для случая одного независимого переменного мы можем решить в явном виде соответствующее дифференциальное уравнение с помощью тригонометрических функций, причем собственными значениями этого дифференциального уравнения являются числа $\frac{p_m \nu^2 + q_m}{\rho_m}$ ($\nu = 1, 2, \dots$). Так как соб-

ственные значения λ'_n соответствующей вариационной проблемы содержатся в этой последовательности собственных значений дифференциального уравнения, то отсюда непосредственно вытекает наше утверждение, что $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Если, далее, принять во внимание, что, как мы упомянули выше и как нами будет скоро доказано, собственные значения вариационной проблемы образуют не только часть множества собственных значений дифференциального уравнения, но полностью его исчерпывают, то в нашем случае

$$\lambda'_n = \frac{p_m n^2 + q_m}{\rho_m}, \quad \lambda''_n = \frac{p_M n^2 + q_M}{\rho_M},$$

и отсюда следует, что отношение $\frac{\lambda_n}{n^2}$ при неограниченном возрастании n остается конечным и содержится между двумя положительными границами.

Чтобы оценить собственные значения λ'_n для случая большего числа измерений и для любой области G , сравним λ'_n с собственными значениями λ_n^* для квадрата, лежащего целиком внутри области G ; собственные значения λ_n^* целиком принадлежат множеству собственных значений соответствующего дифференциального уравнения, которые, как мы уже доказали в гл. V, § 14, неограниченно возрастают при возрастании n . Так как на основании теорем 3 и 7 $\lambda_n^* \leq \lambda'_n \leq \lambda_n$, то отсюда следует, что и $\lambda_n \rightarrow \infty$ при неограниченном возрастании n .

Мы не останавливаемся здесь на проведении этих рассмотрений для случая других граничных условий, тем более что из более точной асимптотической оценки собственных значений, которую мы получим ниже, само собой будет следовать неограниченное их возрастание. Приведем вместо этого другое доказательство неограниченного возрастания собственных значений, которое, по сравнению с приведенным только что доказательством, обладает тем принципиальным преимуществом, что не предполагает знания решений вариационных проблем в отдельных частных случаях¹⁾.

Рассмотрим сначала случай одного независимого переменного. Пусть рассматриваемая вариационная проблема имеет бесконечное множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, не превосходящих по своему абсолютному значению некоторой положительной верхней грани. Тогда из ограниченности совокупности чисел

$$\lambda_n = \int_{x_1}^{x_2} (p u_n'^2 + q u_n^2) dx + h_1 u_n(x_1)^2 + h_2 u_n(x_2)^2 \text{ и } \int_{x_1}^{x_2} p u_n^2 dx$$

непосредственно следует ограниченность совокупности значений

$$\int_{x_1}^{x_2} u_n'^2 dx \text{ и } \int_{x_1}^{x_2} u_n^2 dx,$$

если постоянные h_1 и h_2 не отрицательны (от этого ограничения легко освободиться на основании замечаний п. 5).

Воспользуемся теперь следующей леммой: если для некоторого множества функций $\varphi(x)$ интегралы $\int_G \varphi'^2 dx$ и $\int_G \varphi^2 dx$ ограничены, то функции $\varphi(x)$ равномерно непрерывны и равномерно ограничены в своей совокупности (см. гл. II, стр. 52). На основании принципа предельных точек (гл. II, § 2) можно поэтому выделить из последовательности собственных функций u_n равномерно сходящуюся подпоследовательность. Если мы

¹⁾ Этот метод принадлежит Фр. Реллиху: *Fr. Rellich, Ein Satz über mittlere Konvergenz, Gött. Nachr. (math.-phys. Kl.), 1930.*

обозначим эту подпоследовательность снова через u_n , то

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} H[u_n - u_m] = 0,$$

но, с другой стороны, в силу свойства ортогональности функций u_n мы имеем при $n \neq m$:

$$H[u_n - u_m] = 2.$$

Это противоречие доказывает справедливость теоремы.

В случае большего числа переменных, например двух переменных x и y , можно рассуждать точно таким же образом, опираясь на следующую лемму, которую мы приводим здесь без доказательства¹⁾:

Если для множества функций $\varphi(x, y)$, заданных в области G , оба выражения

$$\iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy \text{ и } \iint_G \varphi^2 dx dy$$

остаются ограниченными, то из множества функций φ можно выделить подпоследовательность φ_n , такую, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \iint_G (\varphi_n - \varphi_m)^2 dx dy = 0.$$

3. Асимптотическое поведение собственных значений для задачи Штурм-Лиувилля. Для случая задачи Штурм-Лиувилля максимально-минимальное свойство собственных значений дает возможность не только определить очень просто порядок роста n -го собственного значения, но и получить для него асимптотическое выражение. Преобразуем дифференциальное уравнение $(py')' - qu + \lambda py = 0$ с помощью приведенной на стр. 277 замены переменных к виду:

$$z'' - rz + \lambda z = 0, \quad (18)$$

где $r(t)$ есть некоторая непрерывная функция, причем первоначальные однородные граничные условия для промежутка $0 \leq x \leq \pi$ переходят в новые граничные условия такого же вида для промежутка $0 \leq t \leq l$.

Рассмотрим сначала случай: $y(0) = y(\pi) = 0$, так что $z(0) = z(l) = 0$. Соответствующая вариационная проблема определяет тогда собственные значения этого дифференциального уравнения как максимумы минимумов

выражения: $\int_0^l (z'^2 + rz^2) dx$. При этом мы опираемся на теорему, кото-

рая будет доказана нами позже (§ 3, 1), о том, что совокупность собственных функций и собственных значений дифференциального уравнения совпадает с совокупностью собственных функций и собственных значений соответствующей вариационной проблемы.

Если мы в предыдущем выражении отбросим член $\int_0^l rz^2 dx$, т. е. если

¹⁾ См. Rellich Fr., ibidem.

мы вместо него рассмотрим выражение: $\int_0^1 z'^2 dx$, то вследствие условия $\int_0^1 z^2 dx = 1$ второе выражение отличается от первого на величину, не превосходящую постоянной верхней границы r_M (максимум абсолютного значения r). Но максимумы минимумов второго интеграла равны собственным значениям $\mu_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$ дифференциального уравнения $z'' + \mu z = 0$ для интервала $(0, 1)$, и так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty$, то мы получаем отсюда асимптотическую формулу:

$$\lambda_n = \mu_n + O(1), \quad (19)$$

где $O(1)$ означает, как и раньше (стр. 314), число, остающееся ограниченным при возрастании n . Возвращаясь к первоначальным обозначениям, мы получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = \frac{1}{\pi^2} \left(\int_0^\pi \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx \right)^2. \quad (19')$$

Точно такая же оценка получается и при любых других граничных условиях, если заметить, что асимптотическое поведение собственных значений дифференциального уравнения $z'' + \mu z = 0$ не зависит от граничных условий (см. также § 4).

4. Дифференциальные уравнения, имеющие особые точки. Наша асимптотическая оценка легко распространяется на те случаи, когда дифференциальное уравнение имеет особые точки. Ограничимся рассмотрением дифференциального уравнения Бесселя:

$$xu'' + u' + \left(x\lambda - \frac{m^2}{x} \right) u = 0,$$

имеющего решениями бесселевы функции $J_m(x\sqrt{\lambda})$; зададим при этом в качестве граничных условий условие конечности функции u при $x=0$ и условие $u(1)=0$, тогда собственными значениями λ являются квадраты $\lambda_{m,n}$ нулей функции J_m (ср. стр. 307). В случае, когда $m \geq 1$, полезно ввести функции $v = \sqrt{x} J_m(x\sqrt{\lambda})$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$v'' + \left(\lambda - \frac{4m^2 - 1}{4x^2} \right) v = 0,$$

и определить собственные значения этого дифференциального уравнения в отличие от § 1, п. 2 с помощью максимума минимумов выражения $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$,

где

$$D[\varphi] = \int_0^1 \left(\varphi'^2 + \frac{4m^2 - 1}{4x^2} \varphi^2 \right) dx, \quad \text{а} \quad H[\varphi] = \int_0^1 \varphi^2 dx,$$

причем в качестве граничных условий мы задаем условия $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Так как $m \geq 1$, то $D[\varphi] \geq \int_0^1 \varphi'^2 dx$, так что $\lambda_n \geq n^2 \pi^2$. С другой стороны,

мы получим верхний предел значения λ_n , если усилим условия допустимости и введем требование $\varphi(x) = 0$ внутри интервала $0 \leq x \leq \varepsilon$, длину которого мы сейчас выберем подходящим образом, и если, кроме того, увеличим второй член выражения $D[\varphi]$, заменив его постоянной:

$$\frac{4m^2 - 1}{4\varepsilon^2} \int_0^1 \varphi^2 dx = \frac{c}{\varepsilon^2},$$

Отсюда непосредственно следует, что $\lambda_n \leq \frac{n^2 \pi^2}{(1 - \varepsilon)^2} + \frac{c}{\varepsilon^2}$. Если мы заставим теперь ε стремиться к нулю и выберем подходящим образом закон убывания ε , например, положим $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то мы получим асимптотическую формулу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n^2 \pi^2} = 1$$

для нулей $\sqrt{\lambda_{m,n}}$ функции J_m , так что полученная нами раньше асимптотическая формула для собственных значений регулярной проблемы остается в силе и в этом случае. Точно такое же соотношение получается и для других граничных условий, например для граничного условия $u'(1) = 0$.

Наш результат непосредственно распространяется на нули бесселевой функции нулевого порядка, если принять во внимание соотношение $J_0'(x) = -J_1(x)$ (см. стр. 287). Из этого соотношения следует, что собственные значения проблемы Бесселя при $m = 0$ и граничном условии $u'(1) = 0$ совпадают с собственными значениями этой проблемы в случае, когда $m = 1$, при граничном условии $u(1) = 0$ (не считая первого собственного значения, равного нулю).

Отсюда непосредственно следует справедливость асимптотической формулы при $m = 0$ ¹⁾.

5. Дальнейшие замечания относительно возрастания собственных значений. Случай, когда имеются отрицательные собственные значения. Если в вариационных проблемах п. 2 функция σ или соответственно числа h_1 и h_2 не отрицательны, как мы это до сих пор предполагали, равно как и функция q^2 , то непосредственно очевидно, что ни одно собственное значение

¹⁾ Другое доказательство для случая $m = 0$ будет приведено в § 7, 10.

²⁾ Функция p , а также r всегда считаются неотрицательными.

не может быть отрицательным. Рассмотрения п. 2 показывают, далее, что если функция q не всюду положительна, то может появиться только конечное число отрицательных собственных значений. Но это остается справедливым и в том случае, когда функция q или постоянные h_1 и h_2 принимают отрицательные значения. Это следует непосредственно из того, что и в этом случае собственные значения при возрастании n стремятся к бесконечности.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим для краткости случай функций от одного независимого переменного, изменяющегося в интервале $0 \leq x \leq \pi$, и оценим отрицательные члены, обусловленные граничными условиями, поступающим следующим образом:

Напишем тождество:

$$|y(0) - y(\xi)| = \left| \int_0^\xi y' dx \right|,$$

где ξ означает точку интервала $0 \leq x \leq t$, причем под t мы подразумеваем некоторое число, лежащее в интервале $0 < t \leq \pi$ и которое мы сейчас выберем подходящим образом.

Тогда на основании неравенства Шварца имеем:

$$|y(0) - y(\xi)| \leq \sqrt{t} \sqrt{\int_0^\pi y'^2 dx}.$$

откуда, обозначая через p_m минимум p , получаем, что

$$|y(0)| \leq |y(\xi)| + \sqrt{\frac{t}{p_m}} \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 dx}.$$

Если имеет место условие $\int_0^\pi p y'^2 dx = 1$, то имеется такое промежуточное значение ξ , что $y(\xi)^2 \leq \frac{1}{t p_m}$, где p_m означает минимум функции p .

Тогда

$$|y(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{t p_m}} + \sqrt{\frac{t}{p_m}} \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 dx}.$$

Выберем теперь число t следующим образом:

Пусть

$$\frac{1}{t} = \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 dx},$$

если стоящий под корнем интеграл превышает $\frac{1}{\pi^2}$; тогда t содержится в интервале $0 \leq x \leq \pi$. В противном случае мы полагаем $t = \pi$. Мы получаем отсюда:

$$y(0)^2 \leq c \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 dx} + c_1,$$

где c и c_1 суть постоянные, не зависящие от функции $y(x)$. Так как такая же оценка имеет место и для $y(\pi)$, то мы получаем отсюда следующее очень важное соотношение:

$$|h_1 y(0)^2 + h_2 y(\pi)^2| \leq C_1 \sqrt{\left| \int_0^\pi p y'^2 dx \right|} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные.

Далее, имеем:

$$\left| \int_0^\pi q y^2 dx \right| \leq C_3.$$

Таким образом мы, наконец, получаем:

$$\mathfrak{D}[y] \geq \int_0^\pi p y'^2 dx - C_4 \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 dx} - C_5 \geq \frac{1}{2} \int_0^\pi p y'^2 dx - C_6.$$

Так как собственные значения, соответствующие интегралу $\int_0^\pi p y'^2 dx$, неограниченно возрастают, то это же имеет место и для собственных значений, соответствующих выражению $\mathfrak{D}[y]$. Поэтому число отрицательных собственных значений останется и в этом случае конечным.

Для проблем в двумерной области получается совершенно аналогичным образом оценка:

$$\left| \int_\Gamma \rho \varphi^2 ds \right| \leq C_1 \sqrt{|D[\varphi]|} + C_2, \quad (20)$$

и из этой оценки вытекают такие же следствия относительно существенно положительного характера собственных значений ¹⁾.

Наконец, заметим, что и для общих вариационных проблем § 1, п. 2 можно с помощью совершенно аналогичных рассуждений доказать неограниченное возрастание собственных значений ²⁾.

6. Свойства непрерывности собственных значений. Рассмотрим сначала случай, когда функция p заменяется функцией p' , и пусть $0 < (1 - \epsilon) p \leq p' \leq (1 + \epsilon) p$, где ϵ означает некоторое положительное число. Тогда, согласно теореме 7, n -е собственное значение дифференциального уравнения, соответствующего функции p' , содержится между n -ми собственными значениями дифференциальных уравнений, соответствующих функциям $(1 - \epsilon) p$ и $(1 + \epsilon) p$ но эти последние собственные значения, очевидно, равны n -му собственному значению первоначального дифференциального уравнения, умноженному на $(1 - \epsilon)^{-1}$ и на $(1 + \epsilon)^{-1}$. Когда ϵ становится достаточно малым, то эти числа неограниченно сближаются между собой. Таким образом доказано, что n -е

¹⁾ Cp. Courant R., Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Math. Zeitschrift, Bd. 7, стр. 1—57, 1920, особенно стр. 13—17.

²⁾ См. Courant R., Über die Anwendung der Variationsrechnung, ..., Acta math., 49.

собственное значение изменяется непрерывно при непрерывном изменении p .

Точно так же n -е собственное значение зависит непрерывным образом от q . В самом деле, из соотношения $p \geq p_m$, где p_m — положительная постоянная, следует:

$$1 = \iint_G p \varphi^2 dx dy \geq p_m \iint_G \varphi^2 dx dy.$$

Таким образом интеграл $\int_G \varphi^2 dx dy$ остается ограниченным для всех допустимых функций φ .

Отсюда следует, что выражение $\mathfrak{D}[\varphi]$ изменяется сколь угодно мало при достаточно малом изменении функции q , и притом равномерно для всех допустимых функций q . Поэтому то же самое имеет место и для максимума минимумов выражения $\mathfrak{D}[\varphi]$.

Аналогичным путем мы убеждаемся в непрерывности изменения собственных значений при непрерывном изменении функции σ , содержащейся в граничном условии. Мы можем и здесь заранее предположить, что $\mathfrak{D}[\varphi]$ не превышает некоторой постоянной грани ¹⁾.

Тогда, согласно оценке (20), интеграл по контуру $\int_{\Gamma} \varphi^2 ds$, а вместе с тем и интеграл по контуру $\int_{\Gamma} p \sigma^2 \varphi ds$, не превосходит постоянной верхней грани. Поэтому, если мы изменим на достаточно малую величину функцию σ в интеграле по контуру $\int_{\Gamma} p \sigma \varphi^2 ds$, то этот интеграл изменяется сколь угодно мало и притом равномерно для всех допустимых функций φ ; следовательно, и выражение $\mathfrak{D}[\varphi]$, а вместе с тем и максимум минимумов $\mathfrak{D}[\varphi]$, изменяется на сколь угодно малую величину при достаточно малом изменении σ .

Совершенно таким же образом получается непрерывность зависимости собственных значений от функции p .

Итак, резюмируя вышесказанное, мы получаем:

ТЕОРЕМА 8. *n -е собственное значение дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$ для всех рассматриваемых граничных условий изменяется непрерывно при непрерывном изменении коэффициентов дифференциального уравнения.*

ТЕОРЕМА 9. *n -е собственное значение изменяется непрерывно при непрерывном изменении содержащейся в граничном условии $\frac{du}{dn} + \sigma u = 0$ функции σ .*

Исследуем, наконец, свойства непрерывности n -го собственного значения, рассматриваемого как функция области G , и покажем, что

¹⁾ Например, остается меньше чем n -е собственное значение при граничном условии $u = 0$ для какого-нибудь квадрата, лежащего внутри области G . Ибо согласно теоремам 3 и 5 n -е собственное значение для области G при первоначальном граничном условии не может быть больше, чем n -е собственное значение для такого квадрата при граничном условии $u = 0$. Поэтому, если ограничить этой верхней гранью допустимые значения $\mathfrak{D}[\varphi]$, то это не повлияет на решение данной вариационной проблемы.

если область G' достаточно мало отличается от области G , то и n -е собственное значение для области G' при соответствующих граничных условиях сколь угодно мало отличается от n -го собственного значения для области G . При этом мы должны, однако предварительно уточнить понятие *достаточно малого изменения области G* .

Если граничные условия содержат производные по нормали, то мы не можем ограничиться обычным в топологии требованием, чтобы точки границ областей G и G' были соответственно достаточно близки между собой, но должны присоединить еще условие, чтобы направления нормалей к границам этих областей в соответствующих точках достаточно мало отличались друг от друга. В самом деле, можно показать, что если области G и G' сколь угодно близки между собой в более слабом смысле, то n -е собственное значение может изменяться на конечную величину при бесконечно малом изменении области G !).

Аналитически мы можем выразить эту достаточную близость областей G и G' в более сильном смысле следующим образом.

Пусть область G , включая границу, переходит в область G' с помощью точечного преобразования:

$$x' = x + g(x, y), \quad y' = y + h(x, y), \quad (21)$$

где функции g и h во всей области G непрерывны и имеют кусочно непрерывные первые производные. Если при этом функции $g(x, y)$ и

4) Приведем следующий пример: пусть $L[\varphi] = \Delta \varphi$, $\rho = 1$ и пусть область G представляет собой квадрат со стороной, равной единице. Построим второй квадрат G_ϵ со стороной ϵ , лежащий вне квадрата G против середины одной из сторон G на расстоянии ϵ от нее, и пусть стороны G_ϵ параллельны сторонам G . Внутреннюю область квадрата G_ϵ мы соединим с внутренней областью квадрата G поперечной полоской S , ограниченной двумя прямыми длины ϵ , отстоящими одна от другой на расстоянии η . Пусть область G' состоит из квадратов G и G_ϵ и полоски S . Первое собственное значение для области G' при граничном условии $\frac{du}{dn} = 0$ равно нулю и соответствующая собственная функция есть $u_1 = \text{const}$. Если выбрать ширину η полоски S достаточно малой по отношению к числу ϵ , то мы сможем и второе собственное значение для области G сделать сколь угодно малым.

В самом деле, рассмотрим в G' функцию φ , которая в G_ϵ равна $-\frac{1}{\epsilon}$, в G равна постоянной c , а в S линейно убывает от c до $-\frac{1}{\epsilon}$. Выберем c так, чтобы интеграл от φ , взятый по области G' , обратился в нуль.

Если ϵ достаточно мало, то c сколь угодно мало отличается от нуля. Интеграл $D[\varphi]$, взятый по области G' , будет поэтому порядка $\frac{\eta}{\epsilon^3}$. Если мы положим теперь $\eta = \epsilon^4$, то этот интеграл будет сколь угодно мал, тогда как интеграл от φ^2 , взятый по G , сколь угодно мало отличается от единицы. Отсюда следует на основании классического минимального свойства собственных значений и собственных функций, что второе собственное значение для области G' будет сколь угодно малым.

Если мы теперь будем приближать ϵ к нулю, то второе собственное значение для области G' будет стремиться к нулю, если $\frac{\eta}{\epsilon^3}$ стремится к нулю. Но второе собственное значение для области G положительно; оно, следовательно, не является пределом второго собственного значения для области G' , несмотря на то, что граница области G' неограниченно приближается к границе области G .

$h(x, y)$, а также их производные первого порядка по своей абсолютной величине не превосходят достаточно малого положительного числа ϵ , то мы говорим, что степень близости между областями G и G' равна ϵ или что область G аппроксимируется областью G' с точностью до ϵ .

Если ϵ стремится к нулю, то мы говорим, что G' непрерывным образом переходит в область G . Докажем теперь следующую теорему:

ТЕОРЕМА 10. Если область G деформируется непрерывным образом в только что определенном смысле, то n -е собственное значение дифференциального уравнения $L[u] + \lambda \mu = 0$ для какого угодно из рассмотренных граничных условий изменяется при этом также непрерывным образом.

Для доказательства рассмотрим последовательность областей G' , для которых введенное выше число ϵ стремится к нулю. Разрешим уравнения (21) относительно x и y и, положив:

$$\varphi(x, y) = \varphi'(x', y'), \quad p(x, y) = p'(x', y') \quad \text{и т. д.}, \quad \sigma[x(s), y(s)] = \tau(s),$$

преобразуем оба интеграла, составляющие выражение $\mathfrak{D}[\varphi]$, в интеграл, взятый по области G' , и интеграл, взятый по границе Γ' этой области.

Мы получим тогда для области G' новую вариационную проблему с коэффициентами, очень мало отличающимися от первоначальных, и мы сможем доказать непрерывность изменения собственных значений с помощью методов, аналогичных методам, примененным при доказательстве теорем 8 и 9. Проведем подробнее эти вычисления.

Интеграл $D[\varphi]$ переходит в интеграл:

$$\iint_{G'} \left\{ p' \left[(\varphi'_{x'}(1+g_x) + \varphi'_{y'} h_x)^2 + (\varphi'_{x'} g_y + \varphi'_{y'}(1+h_y))^2 \right] + q' \varphi'^2 \right\} M^{-1} dx' dy', \quad (22)$$

где M означает функциональный определитель:

$$M = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x},$$

который при достаточно малом ϵ сколь угодно мало отличается от единицы.

Для интеграла по контуру мы получаем:

$$\int_{\Gamma} p \sigma \varphi^2 ds = \int_{\Gamma'} p' \tau(s) \varphi'^2 \frac{ds}{ds'} ds',$$

где ds' означает линейный элемент границы Γ' области G' .

Положим, далее,

$$D'[\varphi] = \iint_{G'} [p(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + q\varphi^2] dx dy, \quad \mathfrak{D}'[\varphi] = D'[\varphi] + \int_{\Gamma'} p\tau(s)\varphi^2 ds'.$$

Тогда подинтегральное выражение интеграла (22) отличается от подинтегрального выражения интеграла $D'[\varphi']$, во-первых, множителем M^{-1} , сколь угодно близким к единице, во-вторых, множителем $\frac{p}{p'}$, также

сколь угодно близким к единице, и, наконец, аддитивными членами, содержащими множители:

$$\varphi_{x'}'^2, \quad \varphi_{y'}'^2, \quad \varphi_{x'}'\varphi_{y'}' \text{ и } \varphi'^2,$$

умноженные на функции, стремящиеся к нулю при неограниченном убывании ε . На основании неравенства

$$2 \left| \iint_{G'} \varphi_{x'}'\varphi_{y'}' dx' dy' \right| \leq \iint_{G'} (\varphi_{x'}'^2 + \varphi_{y'}'^2) dx' dy',$$

мы получаем соотношение:

$$D[\varphi] = (1 + \delta) D'[\varphi'],$$

где через δ мы обозначаем, как и в следующих формулах, некоторую (правда, не одну и ту же) величину, стремящуюся вместе с ε к нулю.

Но при достаточно малом ε величина $\frac{ds}{ds'}$ также сколь угодно мало отличается от единицы, поэтому

$$\int_{\Gamma'} p' \tau(s) \varphi'^2 \frac{ds}{ds'} ds' = (1 + \delta) \int_{\Gamma'} p \tau(s) \varphi'^2 ds,$$

откуда получаем:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1 + \delta) \mathfrak{D}'[\varphi'].$$

Мы должны, далее, преобразовать добавочные условия (3'), (17) § 1 для всех функций φ . Получаем:

$$\iint_G \rho \varphi^2 dx dy = \iint_{G'} \rho' M^{-1} \varphi'^2 dx' dy' = 1,$$

$$\iint_G \rho \varphi v_i dx dy = \iint_{G'} \rho' M^{-1} \varphi' v_i dx' dy' = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1).$$

Введем вместо функций φ' и v_i функции φ'' и v_i' , отличающиеся от первых множителем $\sqrt{\frac{\rho' M^{-1}}{\rho}}$, стремящимся к единице, когда ε стремится к нулю, т. е. положим

$$\varphi'' = \sqrt{\frac{\rho' M^{-1}}{\rho}} \varphi'; \quad v_i' = \sqrt{\frac{\rho' M^{-1}}{\rho}} v_i.$$

Тогда функции φ'' и v_i' удовлетворяют соотношениям:

$$\iint_{G'} \rho \varphi''^2 dx' dy' = 1,$$

$$\iint_{G'} \rho \varphi'' v_i' dx' dy' = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Отсюда следует, во-первых, что

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1 + \delta) \mathfrak{D}'[\varphi''],$$

а во-вторых, что функция φ'' удовлетворяет условиям вариационной задачи, характеризующей n -е собственное значение для области G' , причем функции v'_i для области G' играют ту же роль, что функции v_i для области G . Так как системы функций v'_i пробегают вместе с системами функций v_i всю область допустимых систем функций, то отсюда следует, что и максимум минимумов стоящего слева выражения отличается от максимума минимумов выражения, стоящего справа, множителем, стремящимся к единице, когда ϵ стремится к нулю.

Таким образом теорема 10 доказана. Вместе с тем проведенное нами рассуждение дает возможность уточнить эту теорему следующим образом.

Добавление к теореме 10. Если область G' переходит в область G с помощью преобразования (21) и если при этом:

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| < \epsilon,$$

где ϵ означает некоторое сколь угодно малое положительное число, то существует такое, зависящее исключительно от ϵ , число τ_1 , стремящееся вместе с ϵ к нулю, что n -е собственные значения μ_n и μ'_n для областей G и G' при любых из рассмотренных граничных условий удовлетворяют для любого n соотношению:

$$\left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| < \tau_1.$$

В случае граничного условия $u=0$, не содержащего вовсе производной по нормали, теорема о непрерывности имеет место при более широких условиях, а именно:

ТЕОРЕМА 11. В случае граничного условия $u=0$ n -е собственное значение дифференциального уравнения $L[u] + \lambda r u = 0$ является непрерывной функцией области G и в том случае, если при непрерывной деформации области не соблюдается требование непрерывного изменения направления нормали.

В самом деле, если границы двух областей G и G' достаточно близки между собой и если направления нормалей в соседних точках отклоняются друг от друга на конечную величину, то мы можем всегда заключить эти две границы между границами двух областей B и B' , достаточно близких между собой в определенном выше более узком смысле. Так как n -е собственное значение при граничном условии $u=0$ является согласно теореме 3 монотонной функцией области, то n -е собственные значения областей G и G' лежат между n -ми собственными значениями областей B и B' ; но эти последние собственные значения на основании теоремы 10 сколь угодно близки между собой, что и доказывает теорему 11.

Если в предыдущих рассуждениях рассматривать ϵ как некоторое произвольное конечное число и не делать предельного перехода $\epsilon \rightarrow 0$, то мы получим следующий более общий результат.

Если две области G и G' переходят одна в другую с помощью точечного преобразования указанного выше вида, для которого абсо-

лютое значение функционального определителя заключается между конечными положительными границами, то, обозначая через λ_n и λ'_n n -е собственные значения для областей G и G' , мы получаем, что отношение $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}$ для достаточно большого n содержится между двумя положительными границами, не зависящими от n .

§ 3. ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ.

1. Полнота системы собственных функций. Для рассмотренных в § 1 и 2 вариационных задач, касающихся выражений вида $\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\mathfrak{H}[\varphi]}$, мы получили для собственных значений соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

При этом существенным было то обстоятельство, что выражение $\mathfrak{H}[\varphi]$ имеет определенный положительный характер и обращается в нуль только при $\varphi = 0$. Опираясь на этот факт бесконечного возрастания собственных значений, докажем теперь теорему о полноте в следующей форме:

Система собственных функций для выражения $\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\mathfrak{H}[\varphi]}$ является полной системой функций, а именно в том смысле, что для всякой непрерывной функции f и любого сколь угодно малого положительного числа ϵ существует такая линейная комбинация конечного числа собственных функций

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \omega_n,$$

для которой

$$\mathfrak{H}[f - \omega_n] < \epsilon.$$

Наилучшее приближение, т. е. наименьшее значение $\mathfrak{H}[f - \omega_n]$, достигается, когда коэффициенты a_i равняются коэффициентам Фурье:

$$a_i = c_i = \mathfrak{H}[f, u_i].$$

Для этих коэффициентов выполняется условие полноты:

$$\mathfrak{H}[f] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2. \quad (23)$$

Заметим сначала следующее: то, что наилучшее среднее приближение функции f посредством линейной комбинации первых n собственных функций, оцениваемое с помощью интеграла $\mathfrak{H}$, т. е. наименьшее значение выражения $\mathfrak{H}[f - \omega_n]$ достигается при $a_i = c_i = \mathfrak{H}[f, u_i]$, доказывается точно таким же образом, как и для любой системы ортогональных функций, на основании соотношений (8) из § 1. Далее, из соотношения:

$$0 \leq \mathfrak{H}\left[f - \sum_{i=1}^n c_i u_i\right] = \mathfrak{H}[f] - \sum_{i=1}^n c_i^2$$

непосредственно следует сходимость бесконечного ряда $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ и неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \mathfrak{H}[f].$$

Чтобы доказать справедливость не только этого неравенства, но и условия полноты (23), предположим сначала, что функция f удовлетворяет условиям допустимости, введенным при соответствующих вариационных задачах.

Тогда функция

$$\rho_n = f - \sum_{i=1}^n c_i u_i$$

удовлетворяет обобщенным условиям ортогональности, определяемой с помощью формы $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{H}[\rho_n, u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а поэтому согласно § 1 (7) выполняются также и условия ортогональности, определяемой с помощью формы $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{D}[\rho_n, u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (24)$$

Из условий ортогональности первого рода следует в силу минимального свойства собственного значения λ_{n+1} , что

$$\lambda_{n+1} \mathfrak{H}[\rho_n] \leq \mathfrak{D}[\rho_n]. \quad (25)$$

С другой стороны, $\mathfrak{D}[\rho_n]$ остается ограниченным, ибо

$$\mathfrak{D}[f] = \mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i\right] + 2\mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i, \rho_n\right] + \mathfrak{D}[\rho_n],$$

а потому в силу соотношений (24)

$$\mathfrak{D}[f] = \mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i\right] + \mathfrak{D}[\rho_n].$$

Но

$$\mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2,$$

откуда следует, что это выражение при неограниченном возрастании n остается больше некоторой постоянной нижней грани, ибо число отрицательных собственных значений конечно. Поэтому выражение $\mathfrak{D}[\rho_n]$ остается ограниченным сверху.

Из соотношения (25) и из неограниченного возрастания λ_{n+1} при $n \rightarrow \infty$ мы теперь заключаем, что при неограниченном возрастании n

$$\mathfrak{H}[f] - \sum_{i=1}^n c_i^2 = \mathfrak{H}[\rho_n] \rightarrow 0,$$

что и доказывает условие полноты (23) и вместе с тем полноту системы собственных функций.

Если непрерывная функция f не удовлетворяет условиям допустимости проблемы, то ее во всяком случае можно аппроксимировать с помощью функции f^* , удовлетворяющей этим условиям, и такой, что

$$\mathfrak{H}[f - f^*] < \frac{\varepsilon}{4};$$

функцию же f^* мы можем аппроксимировать с помощью функции:

$$f_n^* = \sum_{i=1}^n c_i^* u_i$$

так, чтобы

$$\mathfrak{H}[f^* - f_n^*] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда из соотношения

$$\mathfrak{H}[f - f_n^*] = \mathfrak{H}[f - f^*] + \mathfrak{H}[f^* - f_n^*] + 2\mathfrak{H}[f - f^*, f^* - f_n^*]$$

следует, если воспользоваться неравенством Шварца, что $\mathfrak{H}[f - f_n^*] < \varepsilon$, а в силу минимального свойства интеграла $\mathfrak{H}[\rho_n]$ тем более имеет место неравенство $\mathfrak{H}[\rho_n] < \varepsilon$; таким образом условие полноты доказано и для любой непрерывной функции f .

Из доказанного таким образом свойства полноты системы решений наших вариационных задач следует, что этими решениями исчерпывается вся система собственных функций соответствующего дифференциального уравнения (доказывается методом, часто применявшимся в гл. V; ср., например, стр. 284).

Из условия полноты (23) легко получить более общее соотношение для двух функций f и g :

$$\mathfrak{H}[f, g] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{H}[f, u_i] \mathfrak{H}[g, u_i]. \quad (23')$$

2. Теорема о разложении. В случае одного независимого переменного нетрудно теперь в дополнение к теореме о полноте доказать с нашей теперешней точки зрения теорему о разложении произвольных функций по собственным функциям и притом при значительно более широких условиях по сравнению с гл. V. Докажем, что всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям допустимости вариационной задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно

сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ по собственным функциям данной задачи.

Ведствие полноты системы ортогональных функций $\sqrt{\rho} u_n$ достаточно показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$, где $c_n = \int_0^{\pi} \rho f u_n dx$, равномерно сходится (см. гл. II, стр. 47). Для доказательства рассмотрим снова функцию $\rho_n = f - \sum_{v=1}^n c_v u_v$. Как мы видели выше, на стр. 403,

$$\mathfrak{D}[\rho_n] = \mathfrak{D}[f] - \sum_{v=1}^n c_v^2 \lambda_v.$$

При достаточно большом n , например при $n \geq N$, собственное значение $\lambda_{n+1} \geq 0$ и $\mathfrak{D}[\rho_n] \geq 0$; поэтому ряд $\sum_{v=1}^{\infty} c_v^2 \lambda_v$ сходится, ибо его члены при $v > N$ положительны. Из неравенства Шварца следует, далее, что:

$$\left(\sum_{n=h}^k c_n u_n(x) \right)^2 \leq \sum_{n=h}^k c_n^2 \lambda_n \sum_{n=h}^k \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n} \leq \sum_{n=h}^{\infty} c_n^2 \lambda_n \sum_{n=h}^{\infty} \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n}.$$

Но мы знаем из гл. V, § 11, 3, что $|u_n'(x)| < C$, где C означает постоянную, не зависящую от n . Так как согласно § 2, 2 и 3, отношение $\frac{\lambda_n}{n^2}$ содержится между конечными пределами и так как

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то отсюда следует, что сумма $\sum_{n=h}^k \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n}$ при возрастании h и k равномерно стремится к нулю при всех значениях x .

Таким образом и сумма $\sum_{n=h}^k |c_n u_n(x)|$ также равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании h и k ; но это означает, что рассматриваемый нами ряд сходится абсолютно и равномерно, что и доказывает теорему о разложении.

Наши рассуждения и результаты остаются справедливыми и в случае дифференциальных уравнений, имеющих особые точки, как, например, для собственных функций Лежандра и Бесселя. Однако в этом случае наше доказательство остается в силе только при том условии, если мы исключим из рассматриваемой области некоторую, сколь угодно малую окрестность особых точек, ибо для такой окрестности мы не доказали ограниченности нормированных собственных функций.

3. Обобщение теоремы о разложении. Полученные нами в гл. V, § 11, 5, асимптотические выражения для собственных функций Штурм-Лиувилля дают нам возможность существенно обобщить доказанную теорему о разложении и доказать следующую теорему:

Всякая кусочно-непрерывная в основной области функция, имеющая квадратично интегрируемую первую производную¹⁾, может быть разложена в ряд по собственным функциям, который сходится абсолютно и равномерно во всех замкнутых частичных областях основной области, не содержащих точек разрыва функции, а в точках разрыва сумма данного ряда равняется, как и в случае ряда Фурье, среднему арифметическому правого и левого предельных значений функции (заметим, что эта теорема не предполагает, что разлагаемая функция удовлетворяет граничным условиям).

Предположим сначала, как и в § 2, 3, что дифференциальное уравнение приведено к виду:

$$z'' - rz + \lambda z = 0, \quad (18)$$

где функция $z = z(t)$ определена в интервале $0 \leq t \leq l$. Рассмотрим ряд:

$$G(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(t) z_n'(\tau)}{\lambda_n},$$

где z_n означает n -ю собственную функцию рассматриваемого дифференциального уравнения при граничном условии $z = 0$.

Применяя асимптотические формулы (70) и (71) гл. V, а также формулу (19), мы получаем:

$$G(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{l} t \cos n \frac{\pi}{l} \tau}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t, \tau),$$

где $\phi_n(t, \tau) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, так что ряд $G(t, \tau)$ отличается на абсолютно и равномерно сходящийся ряд от ряда

$$\begin{aligned} G^*(t, \tau) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{l} t \cos n \frac{\pi}{l} \tau}{n} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{l} (t + \tau) + \sin n \frac{\pi}{l} (t - \tau)}{n}. \end{aligned}$$

Относительно этого ряда мы уже установили в гл. II, § 5, 1, что при постоянном τ он сходится равномерно и абсолютно относительно t во всяком замкнутом интервале, удовлетворяющем условиям $|t + \tau| > \epsilon$, $|t - \tau| > \epsilon$, где $\epsilon > 0$. Так как $t > 0$ и $\tau > 0$, то эти условия означают,

¹⁾ Под квадратичной интегрируемостью производной мы подразумеваем условие конечности интеграла от квадрата производной, взятого по какому-нибудь из конечного числа интервалов основной области, внутри которых функция остается непрерывной.

что этот интервал не может содержать точки $t = \tau$. Поэтому при $t \neq \tau$ наш ряд представляет собой непрерывную функцию; при $t = \tau$ сумма ряда получает разрыв непрерывности, делая конечный скачок, и сумма ряда при $t = \tau$ равняется согласно гл. II, § 5, среднему арифметическому правого и левого предельных значений этой функции.

Если для произвольной функции, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, мы устраним имеющиеся разрывы и, если нужно, достигнем выполнения граничных условий путем прибавления суммы вида:

$$\sum_i a_i G(t, \tau_i)$$

с подходящим образом подобранными коэффициентами a_i , то мы получим функцию, удовлетворяющую условиям доказанной уже в п. 2 теоремы о разложении, так что эта функция может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи. Но присоединенная сумма может быть, согласно полученному только что результату, также разложена в ряд по собственным функциям, и этот ряд обладает свойствами, перечисленными в формулированной выше теореме. Эта теорема, таким образом, доказана для случая разложения по собственным функциям дифференциального уравнения (18). Но если мы снова преобразуем переменные z и t в переменные u и x и приведем таким путем дифференциальное уравнение обратно к виду общего дифференциального уравнения типа Штурма-Лиувилля, то мы непосредственно получим теорему о разложении и по собственным функциям $y_n(x)$ первоначального дифференциального уравнения, так как эти собственные функции получаются из собственных функций z_n путем умножения на функции, нигде не обращающиеся в нуль и отличающиеся между собой только постоянными множителями.

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ.

Результаты, полученные нами в § 2, и примененные там методы дают нам возможность исследовать асимптотическое поведение n -го собственного значения при неограниченном возрастании n и в случае многих независимых переменных так же, как это нами уже было сделано в § 2, 2 и 3, для случая одного независимого переменного. Самым характерным результатом наших исследований, наиболее важным с точки зрения применений к различным физическим вопросам принципиального характера, явится тот факт, что для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами асимптотическое поведение собственных значений зависит не от формы, а исключительно от площади основной области.

1. Дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для прямоугольника. Для прямоугольника со сторонами a и b мы можем согласно гл. V, § 5, 4, задать в явном виде собственные функции и собственные значения дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, а

менно: при граничном условии $u=0$ мы получаем с точностью до нормирующего множителя выражения:

$$\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad (l, m = 1, 2, 3, \dots),$$

а при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$:

$$\cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad (l, m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Если мы обозначим число собственных значений, не превосходящих числа λ , в первом случае через $A(\lambda)$, а во втором случае через $B(\lambda)$, то эти числа совпадают с числом целочисленных решений неравенства:

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2},$$

причем l и m должны в первом случае удовлетворять условиям: $l > 0$, и $m > 0$, а во втором случае условиям $l \geq 0$, $m \geq 0$. Мы можем теперь легко получить для искомым функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ *простые асимптотические выражения* для больших значений λ . Так, например, $B(\lambda)$ в точности равняется числу узлов сети квадратов, параллельных осям координат со стороны, равной единице, лежащих внутри положительного квадранта эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda}{\pi^2}$. Отношение площади этого квадранта эллипса к числу лежащих в нем узлов рассматриваемой сети стремится к единице при неограниченном возрастании λ . В самом деле, если мы каждому узлу сети приведем в соответствие квадрат этой сети, лежащий вправо и выше данного узла, то область, составленная из квадратов, соответствующих узлам, лежащим внутри рассматриваемого квадранта эллипса, содержит в себе весь этот квадрант; если же отбросить те из квадратов сети, которые пересекаются с дугой эллипса и число которых мы обозначим через $R(\lambda)$, то оставшаяся область содержится внутри квадранта эллипса. Мы получаем, таким образом, неравенство:

$$B(\lambda) - R(\lambda) \leq \lambda \frac{ab}{4\pi} \leq B(\lambda).$$

Но дуга эллипса, заключенная в двух смежных граничных квадратах, имеет при достаточно большом λ длину, большую единицы; поэтому число $R(\lambda) - 1$ не превосходит удвоенной длины дуги четверти эллипса, которая растет пропорционально $\sqrt{\lambda}$. Отсюда получается искомая асимптотическая формула:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = \frac{ab}{4\pi} \quad \text{или} \quad B(\lambda) \sim \lambda \frac{ab}{4\pi}.$$

Точнее мы можем это записать так:

$$B(\lambda) = \frac{ab}{4\pi} \lambda + o(\sqrt{\lambda}),$$

где c означает независимую от λ постоянную, а $|\vartheta| < 1$. Это выражение справедливо для обоих рассмотренных граничных условий, т. е. и для $A(\lambda)$, так как число узлов сети на прямолинейных частях границы квадранта эллипса асимптотически равно числу $\frac{a+b}{\pi} \sqrt{\lambda}$. Если мы расположим собственные значения в последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ в порядке их возрастания, то мы можем на основании предыдущего асимптотически вычислить n -е собственное значение, полагая $A(\lambda_n) = n$ или $B(\lambda_n) = n$. Мы получаем:

$$\lambda_n \sim \frac{4\pi}{ab} A(\lambda_n) \sim \frac{4\pi}{ab} n$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{ab}.$$

2. Дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для областей, состоящих из конечного числа квадратов или кубов. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для области G , состоящей из конечного числа h квадратов (или кубов в случае трех независимых переменных). Площадь или соответственно объем такой области G равняется $f = ha^2$ или соответственно $V = ha^3$.

В дальнейшем мы будем обозначать всегда буквой ϑ число, лежащее между -1 и $+1$, а буквами c и C положительные постоянные и разрешим себе не вводить для различных чисел ϑ , c и C особых индексов, если по ходу рассуждения это не сможет привести ни к каким недоразумениям.

Остановимся сначала на случае двух независимых переменных. Пусть $A(\lambda)$ или $B(\lambda)$ означают числа собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ для области G , не превосходящих верхней грани λ , при граничных условиях $u = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Обозначим через $A_{Q_1}(\lambda)$, $A_{Q_2}(\lambda)$, ..., $A_{Q_h}(\lambda)$ соответствующие числа собственных значений для отдельных квадратов, составляющих область G , при граничном условии $u = 0$, а через $B_{Q_1}(\lambda)$, $B_{Q_2}(\lambda)$, ..., $B_{Q_h}(\lambda)$ соответствующие числа собственных значений при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Согласно п. 1 имеем:

$$A_{Q_i}(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta ca \sqrt{\lambda}; \quad B_{Q_i}(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta ca \sqrt{\lambda}. \quad (26)$$

Но из теоремы 5 в связи с теоремами 2 и 4 (см. § 2) следует, что $A_{Q_1}(\lambda) + A_{Q_2}(\lambda) + \dots + A_{Q_h}(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B_{Q_1}(\lambda) + \dots + B_{Q_h}(\lambda)$, а так как эти числа $A_{Q_i}(\lambda)$ и $B_{Q_i}(\lambda)$ задаются формулами (26), то мы отсюда заключаем, что

$$A(\lambda) = \frac{f}{4\pi} \lambda + \vartheta ca \sqrt{\lambda}.$$

Другими словами, имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 12. Для случая области, состоящей из конечного числа квадратов с площадью f и при всех рассмотренных выше граничных условиях, число $A(\lambda)$ собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, не превосходящих верхней границы λ , асимптотически равняется числу

$$\frac{f}{4\pi} \lambda,$$

т. е. имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{f\lambda} = \frac{1}{4\pi}. \quad (27)$$

Точнее, $A(\lambda)$ удовлетворяет для достаточно больших значений λ соотношению:

$$\left| \frac{4\pi}{f\lambda} A(\lambda) - 1 \right| < \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \quad (28)$$

где C означает некоторую постоянную, не зависящую от λ .

Если обозначить через ρ_n n -е собственное значение для любого из рассматриваемых граничных условий, то теорема 12 и соотношение (28) эквивалентны соотношению:

$$\rho_n = \frac{4\pi}{f} n + \vartheta c \sqrt{n}, \quad (29)$$

где снова $-1 \leq \vartheta \leq 1$, а c означает не зависящую от n постоянную. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить в соотношении (28) $A(\rho_n) = n$.

Теорема 12 сохраняет свою силу также и в том случае, когда в граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ функция σ может принимать отрицательные значения. Мы в этом убеждаемся, применяя доказательства § 2, 5. Заметим прежде всего, что согласно теореме 5 n -е собственное значение μ_n для рассматриваемого граничного условия $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ во всяком случае не может быть больше n -го собственного значения λ_n для граничного условия $u = 0$. Мы можем поэтому заранее предположить, что выражение

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_{\Gamma} p \sigma \varphi^2 ds,$$

максимум минимумов которого равен μ_n , не превосходит границы λ_n ни для какой допустимой функции сравнения φ ; решение вариационной задачи от этого нового ограничения, накладываемого на функции φ , не изменяется. Но согласно § 2, 5,

$$\left| \int_{\Gamma} p \sigma \varphi^2 ds \right| < c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} + c_2,$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные; поэтому

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} - c_2 < \mathfrak{D}[\varphi] < D[\varphi] + c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} + c_2.$$

Из условия $\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n$ следует, далее:

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{D[\varphi]} - c_2 < \lambda_n,$$

откуда вытекает, что порядок роста $D[\varphi]$ при неограниченном возрастании n не превосходит порядка роста λ_n , т. е. имеет место соотношение:

$$D[\varphi] < c_3 \lambda_n,$$

где c_3 снова означает некоторую постоянную.

Так как собственное значение $\lambda_n = \rho_n$ удовлетворяет соотношению (29), то при сделанных предположениях относительно φ имеет место неравенство:

$$D[\varphi] - c_4 \sqrt{n} \leq \mathfrak{D}[\varphi] \leq D[\varphi] + c_4 \sqrt{n},$$

и это неравенство сохраняется и для нижних граней выражений $D[\varphi]$ и $\mathfrak{D}[\varphi]$ при данных функциях $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, а вместе с тем и для максимумов этих нижних граней. Но этот максимум для $D[\varphi]$ является n -м

собственным значением при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, для которого соотношение (29) уже доказано. Поэтому отсюда непосредственно следует, что и максимум нижних граней выражения $\mathfrak{D}[\varphi]$, т. е. рассматриваемое n -е собственное значение μ_n , при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0$ также удовлетворяет этому соотношению, которое эквивалентно теореме 12.

Если вместо двух независимых переменных рассмотреть случай трех независимых переменных, то в предыдущих рассуждениях меняются только выражения $A_Q(\lambda)$ и $B_Q(\lambda)$ для числа собственных значений, не превосходящих границы λ , при граничных условиях $u = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, а именно:

$$A_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} \alpha^3 \lambda^{3/2} + \mathfrak{O}(\alpha^2 \lambda), \quad B_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} \alpha^3 \lambda^{3/2} + \mathfrak{O}(\alpha^2 \lambda). \quad (26')$$

Мы получаем таким образом в этом случае следующую теорему:

ТЕОРЕМА 13. Число $A(\lambda)$ собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, не превосходящих верхней границы λ , для многогранника, состоящего из конечного числа кубов, с объемом V , при всех рассматриваемых граничных условиях асимптотически равняется числу

$$\frac{V}{6\pi^2} \lambda^{3/2},$$

т. е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{V \lambda^{3/2}} = \frac{1}{6\pi^2}. \quad (27')$$

Точнее, выражение $A(\lambda)$ удовлетворяет в этом случае при достаточно больших значениях λ соотношению:

$$\left| \frac{6\pi^2 A(\lambda)}{V\lambda^{3/2}} - 1 \right| < C \frac{1}{V\lambda},$$

где C означает постоянную, не зависящую от λ^1 .

3. Распространение полученного результата на общее дифференциальное уравнение $L[u] + \lambda ru = 0$. Чтобы распространить полученные теоремы относительно асимптотического распределения собственных значений на случай общего самосопряженного дифференциального уравнения (1), представим себе, что квадраты или кубы, составляющие область G , разбиваются путем последовательного деления пополам их сторон на все более и более мелкие квадраты или кубы, и продолжим этот процесс разбиения до тех пор, пока разность между наибольшим и наименьшим значением функций p или ρ внутри одной и той же элементарной области не станет меньше произвольно заданного достаточно малого числа ε . Заметим, далее, что функция q не оказывает вообще никакого влияния на асимптотическое распределение собственных значений, так как выражение $\mathfrak{D}[\varphi]$ и максимумы минимумов этого выражения изменяются при отбрасывании функции q на конечную величину, а именно меньшую, чем $\frac{q_M}{\rho_m}$, где q_M и ρ_m имеют то же значение,

что и раньше. Мы можем поэтому предположить в дальнейшем, что $q = 0$.

Ограничимся рассмотрением плоской области, состоящей из конечного числа квадратов. Обозначим число квадратов снова через h , а длину сторон через a ; пусть $A'(\lambda)$ означает число собственных значений дифференциального уравнения $L[u] + \lambda ru = 0$ для области G , не превосходящих верхней границы λ , причем в качестве граничного условия может быть взято какое-нибудь из рассмотренных граничных условий; пред-

положим сначала, что в условии $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ функция $\sigma \geq 0$. Обозначим квадраты, составляющие область G , через $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$, соответствующие им числа собственных значений, не превосходящих λ , при граничном условии $u = 0$ обозначим через $A'_{Q_1}(\lambda), A'_{Q_2}(\lambda), \dots, A'_{Q_h}(\lambda)$, а при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ через $B'_{Q_1}(\lambda), B'_{Q_2}(\lambda), \dots, B'_{Q_h}(\lambda)$.

Согласно теоремам 2, 4 и 5 имеем:

$$A'_{Q_1}(\lambda) + A'_{Q_2}(\lambda) + \dots + A'_{Q_h}(\lambda) \leq A'(\lambda) \leq B'_{Q_1}(\lambda) + B'_{Q_2}(\lambda) + \dots + B'_{Q_h}(\lambda). \quad (30)$$

¹⁾ Невозможно дать более точную общую оценку погрешности, допускаемой при замене числа $A(\lambda)$ его асимптотическим значением, так как установленная нами верхняя грань порядка этой погрешности действительно достигается для случая квадрата или соответственно куба.

Но из теоремы 7, принимая во внимание соотношение (23), следует, что

$$A'_{Q_i}(\lambda) \geq \frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} A_{Q_i}(\lambda) + \delta c \sqrt{\lambda},$$

$$B'_{Q_i}(\lambda) \leq \frac{\rho_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} B_{Q_i}(\lambda) + \delta c \sqrt{\lambda},$$

где $\rho_M^{(i)}$ и $p_M^{(i)}$ означают максимальные значения, $\rho_m^{(i)}$ и $p_m^{(i)}$ — минимальные значения функций ρ и p в квадрате Q_i , а $A_{Q_i}(\lambda)$ и $B_{Q_i}(\lambda)$ означают, как и в предыдущем номере, числа тех собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, которые не превосходят верхней грани λ , причем для этих чисел $A_{Q_i}(\lambda)$ и $B_{Q_i}(\lambda)$ имеют место асимптотические формулы (26). В самом деле, если заменить в дифференциальном уравнении (1) функции p и ρ через $p_M^{(i)}$ и $\rho_m^{(i)}$, то каждое собственное значение согласно теореме 7 либо увеличится, либо останется без изменения, и поэтому число собственных значений, не превосходящих верхней границы λ , либо уменьшится либо останется без изменения. С другой стороны, дифференциальное уравнение (1) принимает при этом вид:

$$\Delta u + \lambda \frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} u = 0,$$

а собственные значения этого дифференциального уравнения равны собственным значениям дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, умноженным на $\frac{p_M^{(i)}}{\rho_m^{(i)}}$. Аналогичное происходит, если заменить p через $p_m^{(i)}$, а ρ через $\rho_M^{(i)}$.

Далее, из непрерывности функций ρ и p следует, что

$$\iint_G \frac{\rho}{p} dx dy = a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\rho_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} + \delta = a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} + \delta',$$

где числа $|\delta|$ и $|\delta'|$ становятся сколь угодно малыми, если квадраты Q_i достаточно малы, т. е. если длина сторон a достаточно мала. Отсюда мы получаем, применяя соотношение (30), точно так же, как и в п. 2:

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{\rho}{p} dx dy + \lambda \delta'' + \delta c \sqrt{\lambda},$$

где $|\delta''|$ может быть сделано сколь угодно малым.

*) Отсюда следует, что $A'_{Q_i}(\lambda) \geq A_{Q_i}(\frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} \lambda)$, но из асимптотической формулы (26) следует, что

$$A_{Q_i}(\frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} \lambda) = \frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} A_{Q_i}(\lambda) + \delta c \sqrt{\lambda}.$$

(Прим. перев.).

Но это соотношение эквивалентно следующей теореме относительно асимптотического распределения собственных значений:

ТЕОРЕМА 14. Число $A(\lambda)$ собственных значений дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$, не превосходящих верхней границы λ , для области G , состоящей из конечного числа квадратов, при любом из рассмотренных граничных условий асимптотически равняется

выражению: $\frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{\rho}{p} dx dy$, т. е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \iint_G \frac{\rho}{p} dx dy. \quad (31)$$

Первоначальное предположение $\sigma \geq 0$ является и в этом случае излишним, в чем легко убедиться таким же путем, как и в п. 2.

Те же рассуждения приводят для пространства к следующему результату:

ТЕОРЕМА 15. Число собственных значений дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$, не превосходящих границы λ , для области G , состоящей из конечного числа кубов, при любом из рассмотренных граничных условий асимптотически равняется выражению:

$$\frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2} dx dy dz,$$

т. е. имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2}} = \frac{1}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2} dx dy dz. \quad (32)$$

В заключение заметим, что все рассуждения последних двух пунктов можно точно таким же образом провести и для области несколько более общего вида, а именно для области, состоящей из конечного числа любых прямоугольников или прямоугольных параллелепипедов.

4. Законы асимптотического распределения собственных значений для произвольной области. Для того чтобы распространить изложенные в предыдущих пунктах законы асимптотического распределения собственных значений на произвольные области, мы должны аппроксимировать эти области с помощью квадратов или кубов, лежащих внутри рассматриваемой области. При этом новых рассмотрений потребует только оценка влияния отбрасываемой при аппроксимировании пограничной полосы.

Предположим сначала, что G представляет собой плоскую область, граница которой имеет непрерывно изменяющуюся кривизну, и рассмотрим исключительно дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$.

Предположим сначала несколько замечаний, относящихся к числу собственных значений этого дифференциального уравнения, не превос-

ходящих заданной верхней грани, для некоторых простых областей при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Пусть, во-первых, G представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a . Всякая собственная функция этого треугольника является в то же самое время собственной функцией для квадрата, получающегося из треугольника G путем зеркального отражения относительно гипотенузы, при том же граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Ибо непосредственно очевидно, что собственную функцию данного треугольника можно продолжить на отраженный треугольник, приписывая функции в точках, симметрично лежащих относительно гипотенузы, одинаковые значения; при этом граничное условие $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ сохраняется

вдоль всей границы квадрата. Поэтому n -е собственное значение треугольника является также собственным значением квадрата, а n -е собственное значение квадрата во всяком случае не больше n -го собственного значения треугольника, другими словами: *число собственных значений, не превосходящих данной верхней грани, при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ для треугольника, не больше соответствующего числа собственных значений для квадрата, т. е. числа, выражающегося формулой (26).*

Рассмотрим, во-вторых, случай, когда область G представляет собой произвольный прямоугольный треугольник с катетами a и b , и пусть $b < a$. Поместим вершину прямого угла в начале координат и направим катет a по оси x , катет b по оси y . Преобразуем треугольник G в равнобедренный прямоугольный треугольник G' с катетом a с помощью преобразования $\xi = x$, $\eta = \frac{a}{b}y$. Тогда выражение $D[\varphi]$ переходит в выражение:

$$D[\varphi] = \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{b}{a} d\xi d\eta,$$

а добавочное условие $H[\varphi] = 1$ переходит в условие:

$$\iint_{G'} \varphi^2 \frac{b}{a} d\xi d\eta = 1,$$

тогда как остальные добавочные условия $H[\varphi, v_i] = 0$ из § 1, 4, не изменяют своего вида. Мы можем поэтому, отбрасывая несущественный постоянный множитель $\frac{b}{a}$, входящий в оба интеграла, определить n -е собственное значение для треугольника G как максимум минимумов

взятого по области G' интеграла

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta,$$

причем все остальные условия имеют обычный для области G' вид. Так как по условию $\frac{a}{b} \geq 1$, так что:

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \geq \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta,$$

то и максимум минимумов левой части не может быть меньше максимума минимумов правой части, откуда следует, что n -е собственное значение для равнобедренного треугольника G' не может быть меньше n -го собственного значения для равнобедренного треугольника G , а потому и подавно не может быть меньше n -го собственного значения для квадрата со стороной a .

Таким образом при граничном условии $\frac{du}{dn} = 0$ число собственных значений, не превосходящих данной верхней грани, для прямоугольного треугольника с катетами a и $b < a$ не может быть больше соответствующего числа собственных значений для квадрата со стороной a и тем более не может быть больше соответствующего числа собственных значений для квадрата со стороной, большей, чем a .

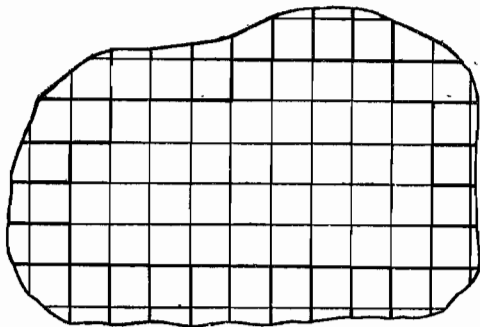
Точно так же число собственных значений, не превосходящих данной верхней грани, для произвольного прямоугольника не может быть больше соответствующего числа собственных значений для квадрата со стороной, большей, чем наибольшая сторона этого прямоугольника.

На основании этих фактов и с помощью теоремы 4 мы получаем возможность найти верхний предел для числа собственных значений, не превосходящих данной грани, в случае, когда рассматриваемая область образована из конечного числа прямоугольников и прямоугольных треугольников.

Применим теперь эти результаты для того, чтобы оценить влияние, оказываемое на распределение собственных значений пограничной полосой, откидываемой при аппроксимировании области G с помощью квадратов; для этой цели мы должны сперва точнее определить эту пограничную полосу. Мы предполагаем, что путем последовательного деления сторон мы сделали аппроксимирующие квадраты настолько мелкими, что внутри каждого из пограничных квадратов угол, на который поворачивается нормаль к границе области вдоль лежащей в этом квадрате части границы при переходе от одной точки дуги к другой, не превосходит наперед заданного сколь угодно малого числа η , величину которого мы выберем надлежащим образом.

Мы можем тогда составить прилежащую к границе Γ полосу из конечного числа r примыкающих друг к другу элементарных областей

$E_1, E_2, \dots, E_r$ следующего вида (черт. 3): каждая область E либо ограничена двумя взаимно перпендикулярными прямыми AB и AC , принадлежащими данной сети квадратов, длина которых содержится между a и $3a$ и куском границы BC , либо область E ограничена стороной квадрата AB , двумя перпендикулярными к AB отрезками AC и BD , длина которых содержится между a и $3a$ и частью границы CD (черт. 5). Из r таких областей мы составляем пограничную полосу, отбрасывая которую мы получаем вместо первоначальной области G область, состоящую из h квадратов Q_1 и $Q_2, \dots, Q_h$ ¹⁾. Число r , очевидно, не превосходит некоторой постоянной C ,



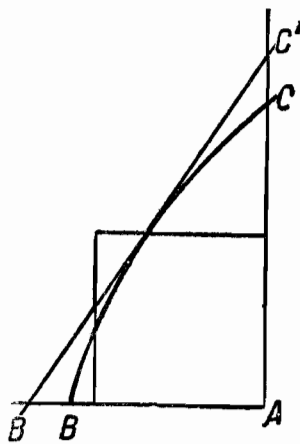
Черт. 3.

не зависящей от a и исключительно зависящей от отношения длины границы Γ к стороне a квадратов сети.

Чтобы получить верхнюю грань числа $B_E(\lambda)$ собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, не превосходящих грани λ , для элементарной области E при граничном

условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ мы должны найти нижнюю

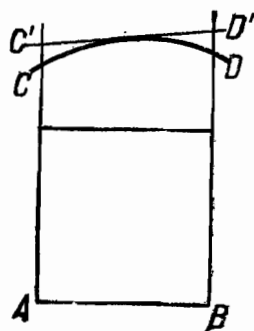
грань для n -го собственного значения. Для этой цели проведем в какой-нибудь точке дуги кривой, составляющей часть границы области E , касательную. Эта касательная образует вместе с прямолинейными частями границы E в зависимости от того, к какому типу принадлежит область E , либо область типа $AB'C'$ (черт. 4), т. е. прямоугольный треугольник, катеты которого при достаточно малом η будут меньше, чем $4a$, либо область типа $ABC'D'$, т. е. трапецию, у которой стороны AC' и BD' меньше $4a$ (черт. 5). Области $AB'C'$ и $ABC'D'$ мы обозначим через E' . Но область E можно всегда преобразовать



Черт. 4.

¹⁾ Предоставляем читателю самому провести это построение. Ограничимся следующим указанием. Мы сначала разбиваем границу на конечное число дуг тройкового рода. Вдоль дуг первого рода пусть касательная образует с осью x угол, не превосходящий 30° ; вдоль дуг второго рода пусть угол касательной с осью y не превосходит 30° , а вдоль дуг третьего рода пусть оба угла, образуемые касательной с осями координат, не будут меньше 20° . Пусть, далее, концы дуг первого рода имеют рациональные абсциссы, а концы дуг второго рода — рациональные ординаты. Тогда, чтобы провести описанное в тексте построение, нужно только построить достаточно мелкую сеть квадратов, стороны которой проходят через концы этих дуг.

в область E' с помощью преобразования вида (21), рассмотренного нами в § 2. Если, например, для областей первого типа мы примем A за полюс системы полярных координат с координатами ρ и ϑ и если линия BC в этих полярных координатах выражается уравнением $\rho = f(\vartheta)$, а прямая $B'C'$ — уравнением $\rho = g(\vartheta)$, то, полагая $\vartheta' = \vartheta$, $\rho' = \rho \frac{g(\vartheta)}{f(\vartheta)}$, мы получим преобразование криволинейного треугольника E в прямолинейный треугольник E' . Для областей второго типа $ABCD$ предположим, что AB является отрезком оси x и зададим прямую $C'D'$ уравнением $y = g(x)$, а кривую CD уравнением $y = f(x)$. Тогда мы получим искомое преобразование, полагая



Черт. 5.

$$x' = x, y' = y \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Если длина a стороны квадратов нашей сети достаточно мала, то угол, на который поворачивается касательная при перемещении вдоль дуги CB или CD , будет сколь угодно мал, и наши преобразования имеют в точности вид (21), причем величина, которую мы там обозначили через ϵ , может быть сделана сколь угодно малой. Но согласно добавлению к теореме 10 n -е собственные значения для областей E и E' отличаются тогда между собой лишь множителем, который для всех значений n равномерно стремится к единице, когда ϵ стремится к нулю. Следовательно, это же имеет место и для соответствующих выражений $B_E(\lambda)$ и $B_{E'}(\lambda)$, т. е. чисел собственных значений, не превосходящих λ , при граничном условии $\frac{du}{dn} = 0$.

Но область E' либо представляет собой прямоугольный треугольник со сторонами, меньшими $4a$, либо состоит из такого треугольника и из прямоугольника со сторонами, меньшими $3a$. Поэтому если a достаточно мало, то $B_E(\lambda)$ удовлетворяет неравенству:

$$B_E(\lambda) < c_1 a^2 \lambda + c_2 a \sqrt{\lambda}, \quad (33)$$

где c_1, c_2 означают некоторые надлежащим образом выбранные постоянные.

После этих подготовительных рассмотрений мы можем теперь вывести законы асимптотического распределения собственных значений для области G . Обозначим снова через $A(\lambda)$ число собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ для области G , не превосходящих λ , при граничном условии $\frac{du}{dn} + \sigma u = 0$, предполагая сначала, что $\sigma \geq 0$. Пусть область G разбита с помощью сети квадратов со стороной a на h квадратов $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$ и r пограничных областей $E_1, E_2, \dots, E_r$. Числа собственных значений, не превосходящих λ , для квадрата Q_i при граничных условиях $u = 0$ и $\frac{du}{dn} = 0$ обозначим через $A_i(\lambda)$

и соответственно через $B_i(\lambda)$. Соответствующие числа для областей E_i мы обозначим через $A_{E_i}(\lambda)$ и $B_{E_i}(\lambda)$ [причем нам понадобятся только числа $B_{E_i}(\lambda)$].

Согласно формулам (26) имеем:

$$A_i(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + a \vartheta_1 c_1 \sqrt{\lambda}; \quad B_i(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + a \vartheta_2 c_2 \sqrt{\lambda},$$

а согласно (33):

$$B_{E_i}(\lambda) = \vartheta_3 (c_3 \lambda a^2 + a c_4 \sqrt{\lambda}),$$

где через $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ мы обозначаем, как раньше, числа, содержащиеся между -1 и $+1$, а через $c_1, c_2, \dots$ обозначаем постоянные, не зависящие от a, i и λ .

Тогда имеем на основании теорем 5, 2 и 4:

$$A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \dots + A_n(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B_1(\lambda) + \dots + B_n(\lambda) + B_{E_1}(\lambda) + \dots + B_{E_r}(\lambda).$$

Далее,

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) + \dots + A_n(\lambda) &= \frac{ha^2}{4\pi} \lambda + \vartheta_1 c_1 ha \sqrt{\lambda} = \lambda \left[\frac{ha^2}{4\pi} + \frac{\vartheta_1 c_1 ha}{\sqrt{\lambda}} \right]; \\ B_1(\lambda) + \dots + B_n(\lambda) + B_{E_1}(\lambda) + \dots + B_{E_r}(\lambda) &= \\ &= \frac{ha^2}{4\pi} \lambda + \vartheta_2 c_2 ha \sqrt{\lambda} + \vartheta_3 ra^2 \lambda c_3 + \vartheta_3 rac_4 \sqrt{\lambda} = \\ &= \lambda \left[\left(\frac{ha^2}{4\pi} + \vartheta_3 c_3 ra^2 \right) + (ha\vartheta_2 c_2 + ra\vartheta_3 c_4) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right]. \end{aligned}$$

Но $ar < c_5$, так что член $a^2 r$ при неограниченном убывании a становится сколь угодно малым; так как, с другой стороны, для любого сколь угодно малого числа δ при достаточно малом a имеет место неравенство:

$$|ha^2 - f| < \delta,$$

то мы получаем отсюда:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1,$$

ибо мы можем свободно распоряжаться величиной a и выбрать такое постоянное сколь угодно малое значение a , чтобы множители при λ в написанных выше неравенствах были при достаточно больших значениях λ сколь угодно близки к числу $f/4\pi$.

Мы можем, наконец, отбросить ограничение $\sigma \geq 0$, ибо, повторяя рассуждение, проведенное в аналогичном месте в п. 2, мы убедимся, что в этом случае сохраняется тот же закон асимптотического распределения собственных значений. — Резюмируя наши результаты, мы получаем, таким образом, следующую теорему:

ТЕОРЕМА 16. Для всех рассмотренных граничных условий число $A(\lambda)$ собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$,

не превосходящих верхней грани λ , для области G асимптотически равно $\frac{\lambda f}{4\pi}$, т. е. имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1, \quad (34)$$

где f означает площадь области G .

При доказательстве мы предполагали, что граница Γ области G не имеет угловых точек. Однако все наши рассуждения и полученный результат остаются в силе и в том случае, когда имеется конечное число угловых точек. Точно так же наши предыдущие рассуждения остаются в силе и в том случае, если мы вместо дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ будем исходить из более общего дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$. Для этого случая мы получаем таким же путем, как и в п. 3 следующий результат:

ТЕОРЕМА 17. Число $A(\lambda)$ собственных значений дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$, не превосходящих верхней грани λ , для области G при всех рассмотренных граничных условиях асимптотически равняется выражению:

$$\frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{\rho}{p} dx dy,$$

т. е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \iint_G \frac{\rho}{p} dx dy.$$

С помощью таких же рассуждений, какие были нами проведены здесь для плоских областей, мы получаем для собственных значений пространственных областей следующие результаты:

ТЕОРЕМА 18. Число $A(\lambda)$ собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, не превосходящих грани λ , для пространственной области G , объем которой равен V , при всех рассмотренных граничных условиях асимптотически равняется числу $\frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} V$, т. е.

имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2} V} = \frac{1}{6\pi^2}. \quad (35)$$

ТЕОРЕМА 19. Соответствующее число собственных значений для общего дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$ асимптотически равно выражению:

$$\frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2} dx dy dz,$$

т. е. имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2}} = \frac{1}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{\rho}{p} \right)^{3/2} dx dy dz. \quad (36)$$

При этом предполагается, что область G ограничена конечным числом кусков поверхностей, имеющих непрерывно вращающуюся касательную плоскость, причем эти отдельные куски поверхностей не должны касаться друг друга, но могут образовать при пересечении ребра или угловые точки.

5. Законы асимптотического распределения собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в уточненной форме. Изложенная нами теория дает возможность уточнить законы асимптотического распределения собственных значений, выражаемые приведенными выше теоремами, т. е. оценить ошибку, допускаемую при замене выражения $A(\lambda)$ его асимптотическим значением. Мы проведем это исследование для дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$.

Для этого мы должны только целесообразнее использовать все возможности, которые нам дает аппроксимирование области G с помощью элементарных квадратов или кубов, и не выбирать эти элементарные области более мелкими и более многочисленными, чем нужно. Рассмотрим сначала случай плоской области G . Мы аппроксимируем G следующим образом: построим плоскую сеть квадратов со стороной, равной единице. Пусть h_0 квадратов $Q_1^0, Q_2^0, \dots, Q_{h_0}^0$ этой сети целиком лежат внутри G . Разобьем теперь все квадраты этой сети на четыре конгруэнтных квадрата со стороной, равной $\frac{1}{2}$. Пусть h_1 из этих квадратов, которые обозначим через $Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_{h_1}^1$, лежат внутри G и в то же время не содержатся внутри какого-нибудь из квадратов Q_i^0 . Разделив снова пополам стороны квадратов второй сети, получим третью, более мелкую сеть, которая дает нам еще h_2 новых квадратов $Q_1^2, Q_2^2, \dots, Q_{h_2}^2$, лежащих внутри G , но не содержащихся внутри какого-нибудь из квадратов Q_i^0 и Q_i^1 , и длина стороны которых равна $\frac{1}{2^2}$. Через t шагов мы получим h_t квадратов $Q_1^t, Q_2^t, \dots, Q_{h_t}^t$ со стороной $\frac{1}{2^t}$. Остаточную часть области G мы разобьем при этом согласно предписаниям предыдущего пункта на r элементарных областей $E_1, E_2, \dots, E_r$ указанного там вида, причем обозначенное там через a число равно теперь $\frac{1}{2^t}$.

При наших предположениях относительно границы области G имеют место следующие соотношения для чисел h_t и r :

$$h_t \leq 2^t c, \quad r \geq 2^t c, \quad (37)$$

где c означает некоторую постоянную, не зависящую от i и t и определяемую длиной границы области G).

1) Эти неравенства показывают, что сумма периметров квадратов Q^i или Q^t является величиной, порядок которой не превосходит порядка длины границы области G .

Обозначим снова числа собственных значений, не превосходящих грани λ , для областей G_m^i и E_m при граничном условии $u=0$ через $A_m^i(\lambda)$, $A_{E_m}(\lambda)$ и через $B_m^i(\lambda)$, $B_{E_m}(\lambda)$ при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. Тогда согласно теоремам 2, 4, 5, в случае, когда в граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ коэффициент $\sigma \geq 0$, имеют место неравенства:

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &\leq (B_1^0 + B_2^0 + \dots + B_{h_0}^0 + \dots + (B_1^t + B_2^t + \dots + B_{h_t}^t) + \\ &\quad + (B_{E_1} + B_{E_2} + \dots + B_{E_r})), \\ A(\lambda) &\geq (A_1^0 + A_2^0 + \dots + A_{h_0}^0) + \dots + (A_1^t + A_2^t + \dots + A_{h_t}^t). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Но в силу соотношений (26) и неравенства (33) предыдущего пункта правая часть первого неравенства равняется

$$\frac{1}{4\pi} \left(h_0 + \frac{h_1}{2^2} + \frac{h_2}{2^4} + \dots + \frac{h_t}{2^{2t}} + \frac{r \partial c}{2^{2t}} \right) \lambda + \\ + \vartheta_1 c_2 \left(h_0 + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2^2} + \dots + \frac{h_t}{2^t} + \frac{r}{2^t} \right) \sqrt{\lambda},$$

причем

$$h_0 + \frac{h_1}{2^2} + \frac{h_2}{2^4} + \dots + \frac{h_t}{2^{2t}} = f - \vartheta_2 c_2 \frac{r}{2^{2t}}.$$

Поэтому, принимая во внимание неравенства (37), мы можем правую часть первого неравенства представить в виде:

$$\frac{1}{4\pi} \left(f + \frac{c \vartheta_3 c_3}{2^t} \right) \lambda + \vartheta_4 c_4 (t+2) \sqrt{\lambda}.$$

Мы получаем, таким образом, что при достаточно больших значениях λ имеет место неравенство:

$$(B_1^0 + \dots + B_{h_0}^0) + \dots + (B_{E_1} + \dots + B_{E_r}) \leq \frac{f}{4\pi} \lambda + C \left(\frac{\lambda}{2^t} + t \sqrt{\lambda} \right), \quad (39)$$

где C означает не зависящую от λ и t постоянную.

Выберем теперь остающееся еще в нашем распоряжении число t так, чтобы оба члена выражения, заключенного в скобки, были приблизительно равны между собой, а именно положим t равным наибольшему целому числу, содержащемуся в $\frac{1}{2} \frac{\log \lambda}{\log 2}$; тогда мы получаем из неравенств (38) и (39), что при достаточно большом λ

$$A(\lambda) \leq \frac{f}{4\pi} \lambda + C \sqrt{\lambda} \log \lambda. \quad (40)$$

Точно такой же вид принимает и нижняя грань выражения $A(\lambda)$, причем постоянная C будет отрицательной.

Эти рассуждения основываются на предположении, что входящая в граничное условие функция σ нигде не отрицательна, так как только

при этом предположении имеет место первое из неравенств (38). Однако рассуждение, совершенно аналогичное рассуждению, приведенному нами в п. 2 и основывавшемуся на неравенстве (20) из § 2, 5, показывает, что полученные нами пределы для выражения $A(\lambda)$ сохраняются и в том случае, если мы отбросим это ограничительное условие. Мы получаем, таким образом, следующий общий уточненный асимптотический закон:

ТЕОРЕМА 20. *При всех рассмотренных граничных условиях порядок роста разности*

$$A(\lambda) - \frac{f}{4\pi} \lambda$$

при неограниченном возрастании λ не превосходит порядка роста выражения

$$\sqrt{\lambda} \log \lambda.$$

Аналогичные рассуждения, проведенные для пространства, приводят к следующей теореме:

ТЕОРЕМА 21. *При всех рассмотренных граничных условиях порядок роста разности*

$$A(\lambda) - \frac{V}{6\pi^2} \lambda^{3/2}$$

для пространственной области G с объемом V при неограниченном возрастании λ не превосходит порядка роста выражения:

$$\lambda \log \lambda.$$

§ 5. ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ШРЕДИНГЕРОВСКОГО ТИПА.

В главе V, § 12 мы рассмотрели задачу Шредингера, в которой речь идет о нахождении собственных значений для бесконечной области, и исследовали особенности спектра этой задачи. Мы теперь покажем здесь в общих чертах, как можно подойти к этой задаче с точки зрения вариационного исчисления; правда, результаты, которые получаются при этом, еще очень далеки от более или менее удовлетворительного решения задач этого рода во всей их полноте. Однако не только для задачи Шредингера, но и для задач более общего типа, приводящих к разысканию собственных значений для бесконечной области и которые уже не решаются с помощью представления решения в виде произведения вида $\varphi(r)\phi(\vartheta, \varphi)$, мы получим тот важный результат, что спектры этих задач содержат бесконечное, счетное множество отрицательных собственных значений.

Пусть дифференциальное уравнение, определяющее собственные значения, имеет вид:

$$\Delta u + Vu + \lambda u = 0, \quad (41)$$

причем на $u(x, y, z)$ налагается требование конечности в бесконечно удаленных точках пространства.

Мы предполагаем, что коэффициент $V(x, y, z)$, выражающий потенциальную энергию, взятую со знаком минус, остается положительным во всем пространстве и обращается в нуль в бесконечно удаленных точках, причем V удовлетворяет при достаточно большом r неравенствам:

$$\frac{A}{r^\alpha} \leq V \leq \frac{B}{r^\beta}, \quad (42)$$

где A и B — положительные постоянные, а показатели α и β удовлетворяют условию $0 < \beta \leq \alpha < 2$. Функция V может обратиться в бесконечность в начале координат¹⁾, причем порядок роста V в окрестности начала координат не должен превосходить грани $\frac{C}{r^\gamma}$, где $0 \leq \gamma < 2$.

При этом r означает расстояние точки x, y, z от начала.

Обозначим через $\int \dots dg$ интегрирование по всему пространству x, y, z . Тогда вариационная задача, определяющая собственное значение λ_n и собственную функцию u_n , сводится к нахождению максимума минимума выражения:

$$J[\varphi] = \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - V\varphi^2) dg \quad (43)$$

при добавочных условиях

$$\left. \begin{aligned} \int \varphi^2 dg &= 1, \\ \int \varphi v_\nu dg &= 0 \quad (\nu = 1, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

При этом функция $\varphi(x, y, z)$ должна быть непрерывной и иметь непрерывные первые производные, и, кроме того, должны существовать оба интеграла $\int \varphi^2 dg$ и $\int V\varphi^2 dg$; $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ снова означают некоторые кусочно-непрерывные функции.

Докажем сначала, что наша вариационная задача имеет смысл, т. е. что интеграл $J[\varphi]$ остается ограниченным снизу. Для этого воспользуемся тем, что функция V в силу сделанных предположений всюду удовлетворяет соотношению:

$$V \leq \frac{a}{r^2} + b,$$

причем, выбрав положительную постоянную b достаточно большой, мы можем придать положительной постоянной a сколь угодно малое значение. Поэтому

$$\int V\varphi^2 dg \leq a \int \frac{1}{r^2} \varphi^2 dg + b \int \varphi^2 dg. \quad (45)$$

¹⁾ Все наши дальнейшие рассуждения легко распространяются и на тот случай, когда V имеет конечное число особых точек такого же рода, как начало координат в рассматриваемом случае.

Воспользуемся теперь неравенством:

$$\int \frac{1}{r^2} \varphi^2 dg \leq 4 \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) dg, \quad (46)$$

которое получается следующим образом: положим $\phi = \varphi \sqrt{r}$, тогда

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = \frac{1}{r} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) - \frac{1}{r^2} \phi \phi_r + \frac{1}{4r^3} \phi^2,$$

и, следовательно,

$$\int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) dg \geq - \int \frac{1}{2r^2} (\phi^2)_r dg + \frac{1}{4} \int \frac{1}{r^3} \phi^2 dg.$$

Первый член справа может быть проинтегрирован в явном виде, и мы получим, что в силу условия конечности интеграла $\int \varphi^2 dg$ ¹⁾ этот член должен равняться нулю; второй член справа равняется $\frac{1}{4} \int \frac{1}{r^2} \varphi^2 dg$, и неравенство (46), таким образом, доказано.

На основании этого неравенства получаем из соотношения (45), что

$$J[\varphi] \geq (1 - 4a) \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) dg - b,$$

и так как мы можем выбрать a так, чтобы $a < \frac{1}{4}$, то $J[\varphi] \geq -b$, откуда следует, что выражение $J[\varphi]$ и собственные значения уравнения (41) ограничены снизу.

Чтобы найти теперь верхнюю грань собственных значений, усилим условия допустимости в нашей вариационной задаче, вводя дополнительное требование, чтобы функция φ обращалась в нуль вне шара K_R , описанного из начала координат радиусом R . Согласно нашим общим принципам n -е собственное значение $\nu_n(R)$ получающейся таким путем задачи для шара радиуса R удовлетворяет условию $\nu_n(R) \geq \lambda_n$; с другой стороны, собственное значение $\nu_n(R)$ легко оценить, сравнив его с собственным значением $\mu_n(R)$ дифференциального уравнения $\Delta u + \mu u = 0$ для шара K_R при граничном условии $u = 0$. В самом деле, так как в силу условия (42) функция V удовлетворяет внутри K_R условию $V \geq \frac{A}{R^\alpha}$ (при достаточно большом R), то

$$\int_{K_R} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - V \varphi^2) dg \leq \int_{K_R} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) dg - \frac{A}{R^\alpha} \int_{K_R} \varphi^2 dg.$$

¹⁾ В самом деле, из этого условия следует, что должна существовать последовательность значений $R_1, R_2, \dots, R_n$ таких, что интегралы $\int \varphi^2 dS$, взятые по поверхности шаров радиуса R_n , стремятся к нулю при неограниченном возрастании R_n . Мы должны сначала взять рассматриваемый интеграл по шару радиуса R_n и перейти затем к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда непосредственно следует, что

$$\nu_n(R) \leq \mu_n(R) - \frac{A}{R^a};$$

но $\mu_n(R) = \frac{1}{R^2} \mu_n(1)$, где $\mu_n(1)$ означает n -е собственное значение для шара радиуса 1. Мы получаем, таким образом:

$$\lambda_n \leq \frac{\mu_n(1)}{R^2} - \frac{A}{R^a}.$$

Так как $a < 2$, то при всяком заданном n можно выбрать R настолько большим, чтобы правая часть была отрицательной. Этим доказано, что наши вариационные задачи дают нам монотонную последовательность неубывающих отрицательных собственных значений.

Чтобы доказать, что эти собственные значения при возрастании n стремятся к нулю, мы оценим их величину, предполагая известными собственные значения χ_n специальной задачи Шредингера для случая $V = \frac{c}{r}$, для которых соотношение $\chi_n \rightarrow 0$ нами уже было доказано в гл. V, § 12, 4. Для этого заметим, что имеет место неравенство:

$$V \leq \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r} + k,$$

причем, выбрав достаточно большое значение b , мы можем сделать положительные постоянные a и k сколь угодно малыми. Тогда на основании наших принципов и применяя неравенство (46) мы получим:

$$\lambda_n \geq (1 - 4a) \chi_n - k,$$

где χ_n означает собственное значение специальной задачи Шредингера для случая $V = \frac{b}{(1-4a)r}$. Отсюда следует, что при достаточно большом n собственное значение λ_n превосходит число $-2k$ и стремится поэтому к нулю, так как число k может быть сделано сколь угодно малым.

То обстоятельство, что для рассматриваемой вариационной задачи существует, кроме того, непрерывный спектр положительных собственных значений, можно объяснить так: будем рассматривать задачу нахождения собственных значений для бесконечной области как предельный случай задачи для конечной области, например для шара K_R с бесконечно возрастающим радиусом R . Хотя n -е собственное значение $\nu_n(R)$ при возрастании R монотонно убывает и стремится, как это можно доказать, к пределу λ_n , где λ_n означает n -е собственное значение для всего пространства x, y, z , однако всякое положительное число является точкой накопления бесконечного множества собственных значений $\nu_n(R)$; ибо для конечных областей существуют бесконечно большие положительные собственные значения, и мы можем всегда выбрать такой закон одновременного возрастания чисел n и R , чтобы $\nu_n(R)$ стремилось при этом к любому наперед заданному положительному числу.

Теорему о том, что для задач с бесконечной основной областью G собственные значения стремятся к нулю, мы можем доказать и другим путем, не предполагая известными собственные значения частной задачи этого типа; это доказательство аналогично приведенному выше второму доказательству неограниченного возрастания собственных значений для конечной области.

Мы исходим при доказательстве из того, что если бы все собственные значения не превосходили некоторой постоянной верхней отрицательной грани, то мы могли бы, как мы сейчас это докажем, построить последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, для которой, во-первых, интегралы $D[\varphi] = \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) dg$ и $H[\varphi] = \int \varphi^2 dg$ остаются ниже некоторой постоянной верхней грани, а во-вторых, интеграл $F[\varphi] = \int V\varphi^2 dg$ превосходит постоянное положительное число, причем выполняются условия ортогональности:

$$F[\varphi_\nu, \varphi_\mu] = 0.$$

Вследствие ограниченности интегралов $D[\varphi]$ и $H[\varphi]$ мы можем на основании леммы, доказательство которой мы приводим ниже, выделить из последовательности функций φ_ν подпоследовательность φ_n такую, что $F[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$. Но так как $F[\varphi_n, \varphi_m] = 0$, то отсюда следовало бы соотношение $F[\varphi_n] + F[\varphi_m] \rightarrow 0$, что противоречит второму свойству нашей последовательности. — Последовательность функций φ_ν может быть построена следующим образом: рассмотрим первую из вариационных задач, определяющую первое собственное значение λ_1 . Для любого числа $\epsilon > 0$ мы можем найти такую функцию φ_1 , для которой

$$J[\varphi_1] = D[\varphi_1] - F[\varphi_1] \leq \lambda_1 + \epsilon,$$

тогда как

$$H[\varphi_1] = 1.$$

От этой задачи перейдем ко второй вариационной задаче (43), (44), определяющей второе собственное значение λ_2 . Если мы введем при этом в качестве добавочного условия требование:

$$\int V\varphi\varphi_1 dg = F[\varphi, \varphi_1] = 0,$$

то мы получим в силу максимально-минимального свойства собственного значения λ_2 в качестве минимума число, не превосходящее λ_2 . Мы можем поэтому найти такую функцию φ_2 , чтобы

$$D[\varphi_2] - F[\varphi_2] \leq \lambda_2 + \epsilon,$$

тогда как

$$H[\varphi_2] = 1; F[\varphi_1, \varphi_2] = 0.$$

Продолжая таким же образом, мы получим последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu, \dots$, для которой

$$\begin{aligned} D[\varphi_\nu] - F[\varphi_\nu] &\leq \lambda_\nu + \epsilon, \\ H[\varphi_\nu] &= 1; F[\varphi_\mu, \varphi_\nu] = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, \nu-1). \end{aligned}$$

Если числа λ_v не превосходят верхней границы -2ϵ , то для всех наших функций имеет место неравенство:

$$D[\varphi_v] - F[\varphi_v] \leq -\epsilon. \quad (47)$$

Из этого неравенства мы заключаем прежде всего, что выражение $D[\varphi_v]$ остается ограниченным, ибо из неравенств (45) и (46) следует, что

$$F[\varphi] \leq 4aD[\varphi] + bH[\varphi],$$

откуда

$$(1 - 4a)D[\varphi] \leq b.$$

С другой стороны, из неравенства (47) следует, что $F[\varphi] \geq \epsilon$. Таким образом наша последовательность функций φ обладает указанными выше свойствами.

Остается доказать упомянутую выше лемму: если задана последовательность функций φ_n , для которой $D[\varphi]$ и $H[\varphi]$ ограничены, то мы можем из этой последовательности выделить такую подпоследовательность φ_n , для которой $F[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$.

Эта лемма представляет собой обобщение приведенной выше (§ 2, 2) леммы Реллиха, на основании которой мы смогли доказать бесконечное возрастание собственных значений для конечной области. Ограничимся тем случаем, когда функция V регулярна в окрестности начала координат (если V обращается в начале координат в бесконечность и если порядок роста V ниже второго порядка, то лемма остается в силе и доказывается с помощью оценок, вполне аналогичных приводимым ниже).

Для доказательства построим последовательность шаров K_r с радиусами R_r . На основании упомянутой только что леммы Реллиха существует подпоследовательность φ_n функций φ_n , для которой $F[\varphi_n - \varphi_m]$ стремится к нулю, если мы будем этот интеграл брать только по внутренней части шара K_1 . Из этой подпоследовательности выделим вторую подпоследовательность, для которой стремится к нулю интеграл $F[\varphi_n - \varphi_m]$, взятый по внутренней части шара K_2 . Продолжаем этот процесс и образуем из этих подпоследовательностей обычным способом диагональную последовательность, которую мы снова обозначаем через φ_n . Тогда для этой последовательности интеграл $F[\varphi_n - \varphi_m]$, взятый по внутренней части какого-нибудь из шаров K_r , стремится к нулю. Чтобы доказать, что это остается в силе и если мы распространим интеграл $F[\varphi_n - \varphi_m]$ на все бесконечное пространство, достаточно показать, что этот интеграл, взятый по части пространства, лежащей вне шара K_r , не превосходит некоторой верхней грани, не зависящей от n и m и стремящейся к нулю при неограниченном возрастании R . Для этой цели заметим, что при достаточно большом R и $r \geq R$ функция V удовлетворяет, согласно предположению, неравенству $V \leq \frac{B}{r^\beta} \leq \frac{B}{R^\beta}$, откуда следует, что интеграл $F[\varphi_n - \varphi_m]$, взятый по части пространства, лежащей вне шара радиуса R , удовлетворяет неравенству:

$$F[\varphi_n - \varphi_m] \leq \frac{B}{R^\beta} H[\varphi_n - \varphi_m] \leq \frac{4B}{R^\beta},$$

что и доказывает наше утверждение.

§ 6. Узлы собственных функций

Исследование общих свойств собственных функций представляет несравненно большие трудности, чем исследование собственных значений. В то время как относительно поведения собственных значений получены, как мы видели в предыдущих параграфах, точные результаты большой степени общности, исследование собственных функций в общем виде еще очень мало продвинулось вперед, что и неудивительно, если принять во внимание, насколько разнообразны по своей природе все те различные классы функций, которые определяются с помощью задачи нахождение собственных значений. В следующей главе мы займемся более подробным исследованием некоторых специальных функций этого рода. В этом же параграфе мы остановимся на некоторых общих свойствах собственных функций рассмотренных задач.

Особенный интерес представляют те точки основной области G , в которых обращается в нуль какая-нибудь из собственных функций. Смотря по тому, является ли область G областью одного, двух, трех или большего числа измерений, мы говорим об *узловых точках*, об *узловых линиях*, об *узловых поверхностях* и т. д. В качестве общего термина мы называем многообразия нулей собственных функций *узлами*¹⁾.

Отметим прежде всего тот факт, доказательство которого непосредственно будет следовать из приводимой ниже теоремы, что *первая собственная функция вариационной задачи не может иметь узлов внутри основной области*. Эта функция имеет поэтому постоянный знак, а вследствие этого *все другие собственные функции*, ортогональные к первой, *обязательно имеют узловые точки*.

Основываясь на этом, можно установить некоторые общие положения относительно расположения и плотности распределения узлов. Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ при граничном условии $u = 0$. Пусть область G' целиком лежит внутри области G и не содержит ни одной узловой точки собственной функции u_n . Рассмотрим наименьшую область G'' , лежащую внутри G и содержащую область G' , все граничные точки которой являются узловыми точками функции u_n . Для этой области G'' функция u_n должна быть первой собственной функцией, а λ_n — наименьшим собственным значением. С другой стороны, согласно нашей общей теореме 3 первое собственное значение для области G'' не может быть больше первого собственного значения γ для области G' , так что $\gamma \geq \lambda_n$. Если, например, G' представляет собой окружность радиуса a , то $\gamma = \tau^2$, где τ есть наименьший нуль уравнения $J_0(a\tau) = 0$. Поэтому $\gamma \leq \frac{k_{0,1}^2}{a^2}$, где под $k_{0,1}$ мы подразумеваем в соответствии с обозначениями гл. V, § 5, 5 первый нуль бесселевой функции нулевого порядка.

¹⁾ Мы здесь принимаем без доказательства, что узловые линии или поверхности наших дифференциальных уравнений представляют собой кусочно-гладкие кривые или поверхности, разбивающие основную область на конечное число частных областей, имеющих кусочно-гладкую границу.

Мы получаем отсюда

$$a^2 \leq \frac{k_{0,1}^2}{\lambda_n}.$$

Это соотношение характеризует плотность сети узловых линий в той степени, в какой это представляется вообще возможным в общем случае. Если примем во внимание асимптотическое соотношение $\lambda_n \sim 4\pi \frac{n}{f}$ из § 4, то мы получим, что при достаточно большом

n всякий круг, площадь которого больше, чем $\frac{k_{0,1}^2}{4n}$, содержит внутри себя узловые точки n -й собственной функции. Если вместо круга мы возьмем квадрат со стороной a , то мы получаем аналогичным образом:

$$a^2 \leq 2 \frac{\pi^2}{\lambda_n}.$$

Предоставляем читателю вывести аналогичные неравенства для других задач с одной или многими независимыми переменными.

Мы можем, далее, доказать следующую общую теорему относительно узлов собственных функций: *если расположить собственные функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка*

$$L[u] + \lambda u = 0 \quad (\rho > 0)$$

для некоторой области G при любых однородных граничных условиях в порядке возрастания соответствующих собственных значений, то узловые линии n -й собственной функции u_n делят область G не более чем на n частичных областей, каково бы ни было число независимых переменных¹⁾.

Для простоты будем при доказательстве считать область G двумерной областью плоскости x, y и предположим, что граничное условие имеет вид $u = 0$. Пусть λ_n является n -м собственным значением, т. е. максимумом минимумов соответствующего интеграла $D[\varphi]$ при добавочных условиях:

$$\iint_G \rho \varphi^2 dx dy = 1, \quad (48)$$

$$\iint_G \rho \varphi v dx dy = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (49)$$

Предположим теперь, что узловые линии собственной функции u_n разбивают область G больше чем на n частичных областей. Обозначим эти частичные области через $G_1, G_2, \dots, G_n, G_{n+1}, \dots$ и определим n функций $w_1, w_2, \dots, w_n$, полагая функцию w_i равной нулю вне частичной области G_i и равной собственной функции u_n , умноженной на некоторый

¹⁾ См. Courant R., Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke, „Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys. Kl.)“, 1923, Sitzung vom 13 Juni.

нормирующий множитель, внутри G_i , причем этот нормирующий множитель мы выберем так, чтобы

$$\iint_G \rho w_i^2 dx dy = 1.$$

Если мы составим линейную комбинацию $\varphi = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$, удовлетворяющую условию:

$$\iint_G \rho \varphi^2 dx dy = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = 1,$$

и если примем во внимание, что каждая из функций w_i удовлетворяет уравнению

$$L[w_i] + \lambda_n \rho w_i = 0,$$

то мы убедимся путем интегрирования по частям, что для функции φ имеет место равенство:

$$D[\varphi] = \lambda_n.$$

Так как мы можем, далее, для произвольно заданных функций v_i всегда определить коэффициенты c_i так, чтобы функция φ удовлетворяла, кроме условия (48), также и условиям (49), то отсюда следует, что n -е собственное значение λ'_n нашего дифференциального уравнения для области $G' = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ при граничном условии $u = 0$ не может быть больше, чем λ_n ; поэтому $\lambda'_n = \lambda_n$, ибо согласно теореме 3 из § 2, 1 собственное значение λ'_n не может быть также и меньше, чем λ_n . Но отсюда следует согласно той же теореме 3, что для всякой промежуточной между G' и G области G'' , содержащей G' и содержащейся в G , n -е собственное значение также равно λ_n . Составим теперь последовательность таких областей $G', G'', G''', \dots, G^{(m)}$, из которых каждая содержит предыдущую, и образуем соответствующие им собственные функции $u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^m$, причем мы продолжаем эти функции на всю область G , полагая $u_n^{(j)} = 0$ вне $G^{(j)}$. Эти m функций линейно между собой независимы ¹⁾ и удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$L[u_n^{(j)}] + \lambda_n \rho u_n^{(j)} = 0.$$

Мы можем тогда определить m не обращающихся одновременно в нуль постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ так, чтобы линейная комбинация

$$\varphi = \gamma_1 u_n^{(1)} + \dots + \gamma_m u_n^{(m)}$$

¹⁾ Что эти функции линейно независимы между собой, следует непосредственно из того, что функция $u_n^{(h)}$ не может тождественно обратиться в нуль в какой-нибудь частичной области, лежащей внутри области $G^{(h)}$. Это утверждение, вытекающее для случая обыкновенных дифференциальных уравнений из теоремы о единственности, для уравнений с частными производными, является следствием эллиптического характера дифференциального уравнения. Мы вернемся к этому позже, во втором томе.

удовлетворяла $m-1$ условиям:

$$\iint_G \rho \varphi v_i dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m-1),$$

и так как в силу линейной независимости функций $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(m)}$ функция φ не обращается тождественно в нуль, то мы можем коэффициенты v_i так нормировать, чтобы функция φ удовлетворяла также условию (48). Поэтому в силу максимально-минимального свойства m -го собственного значения

$$D[\varphi] \geq \lambda_m.$$

С другой стороны, мы получаем непосредственным вычислением путем интегрирования по частям, что

$$D[\varphi] = \lambda_n.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, то при достаточно большом m должно иметь место неравенство: $\lambda_m > \lambda_n$; мы приходим таким образом к противоречию, которое доказывает, что число областей $G_1, G_2, \dots$ не может быть больше n . Само собой очевидно, что доказательство нашей теоремы протекает точно таким же образом и при другом числе независимых переменных ¹⁾.

В частном случае задачи Штурм-Лиувилля $(py)' - qu + \lambda py = 0$ мы можем значительно уточнить только что доказанную теорему. В этом случае число областей $G_1, G_2, \dots$ не может быть и меньше чем n , так что мы получим следующую теорему:

Узловые точки n -й собственной функции задачи Штурм-Лиувилля делят основной интервал в точности на n частей. Доказательство опирается на свойство непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра λ . Ограничимся для краткости дифференциальным уравнением $y'' + \lambda py = 0$. Обозначим через $y(x, \lambda)$ решение этого дифференциального уравнения, обращающееся в нуль при $x=0$ и непрерывно зависящее от параметра λ . Мы получаем непосредственно тождество:

$$y(x, \lambda_1) y'(x, \lambda) - y(x, \lambda) y'(x, \lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda) \int_0^x \rho y(x, \lambda) y(x, \lambda_1) dx.$$

Если $x=\xi$ является положительным нулем функции $y(x, \lambda)$, то

$$y(\xi, \lambda_1) y'(\xi, \lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \int_0^\xi \rho y(x, \lambda) y(x, \lambda_1) dx.$$

Пусть $\lambda_1 > \lambda$, и пусть λ_1 настолько мало отличается от λ , что стоящий справа интеграл имеет положительное значение. Тогда $y(\xi, \lambda_1)$ и

¹⁾ Доказанная здесь теорема может быть обобщена следующим образом: узловые линии всякой линейной комбинации первых n собственных функций делят основную область не более чем на n частичных областей. См. диссертацию Г. Герман, которая должна появиться в печати в ближайшем будущем.

$y'(\xi, \lambda)$ должны иметь одинаковые знаки. Предположим, что при $x = \xi$ функция $y(x, \lambda)$ переходит от отрицательных значений к положительным, так что $y'(\xi, \lambda)$ положительна [$y'(\xi, \lambda)$ не может обращаться в нуль одновременно с $y(\xi, \lambda)$]. Тогда $y(\xi, \lambda_1)$ также положительно. Но при достаточно малом значении разности $\lambda_1 - \lambda$ функция $y(x, \lambda_1)$ сколь угодно мало отличается от функции $y(x, \lambda)$ и должна поэтому в окрестности значения $x = \xi$ переходить от отрицательных значений к положительным; поэтому функция $y(x, \lambda_1)$ имеет нуль, лежащий слева от ξ , откуда следует ¹⁾, что при непрерывном возрастании λ все нули функции $y(x, \lambda)$ перемещаются влево. Первая собственная функция не имеет внутри основного интервала ни одного нуля, обращаясь в нуль только на обоих концах. Когда λ растет от первого собственного значения до второго, то второй нуль перемещается справа внутрь интервала и притом до тех пор, пока правый конец интервала не становится третьим нулем функции и т. д., что и доказывает высказанную нами теорему ²⁾.

¹⁾ Что при возрастании λ число нулей функции $y(x, \lambda)$ между 0 и ξ остается неизменным, следует также из того, что y и y' нигде не могут одновременно обратиться в нуль.

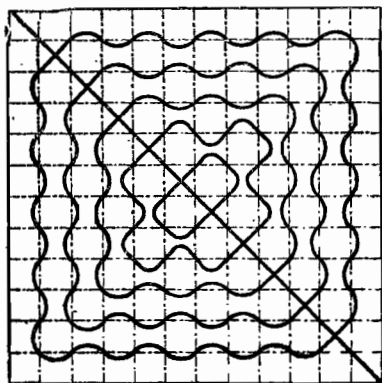
²⁾ Мы можем доказать эту теорему другим путем, не прибегая к свойству непрерывности, если будем исходить из следующей теоремы, справедливой также и в случае многих независимых переменных: если дважды дифференцируемое решение u дифференциального уравнения $L[u] + \lambda u = 0$ обращается в нуль на границе Γ замкнутой области B , сохраняя внутри области B постоянный знак, и если v является решением уравнения $L[v] + \mu v = 0$, где $\mu > \lambda$, то функция v должна внутри области B менять свой знак (при этом, понятно, исключается тот случай, когда u или v тождественно обращаются в нуль в области B). Доказательство получается непосредственно с помощью следующего соотношения, вытекающего из формулы Грина:

$$\iint_B [vL[u] - uL[v]] dx dy = (\mu - \lambda) \iint_B uv dx dy = \int_{\Gamma} v \frac{du}{dn} ds,$$

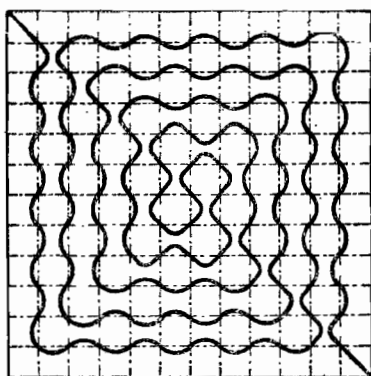
где $\frac{d}{dn}$ означает дифференцирование по внешней нормали границы Γ . Не ограничивая общности, мы можем предположить, что u и v имеют в B положительные значения; так как на Γ производная $\frac{du}{dn} \leq 0$, то если бы функция v не меняла знака внутри B , то стоящее справа выражение не было бы положительным, тогда как $(\mu - \lambda) \iint_B uv dx dy > 0$.

Применяя этот результат к задаче Штурм-Лиувилля для случая, когда, граничные значения равны нулю, мы заключаем, что из двух собственных функций той из них, которая имеет большее число нулей на основном промежутке, соответствует большее собственное значение, ибо для собственной функции, имеющей меньшее число нулей, существует такой интервал между двумя последовательными нулями этой функции, внутри которого содержится по меньшей мере один нуль другой собственной функции. Так как первая собственная функция не имеет внутри основного интервала ни одного нуля, а n -я собственная функция не может иметь больше $n - 1$ нулей, то эта последняя функция должна ровно $n - 1$ раз обращаться в нуль внутри основного интервала.

Доказанная только что теорема в противоположность предыдущему общему результату справедлива только для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных может случиться, что имеются сколь угодно большие значения n , для которых узловые линии собственной функции u_n делят основную область всего на две части. В качестве примера приведем¹⁾ дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для квадрата $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$. Легко убедиться, что принадлежащие собственным значениям $\lambda = 4r^2 + 1$ собственные функции



Черт. 6.



Черт. 7.

$\sin 2rx \sin y + \mu \sin 2ry \sin x$, где μ означает положительную постоянную, достаточно близкую к единице, имеют только одну узловую линию. На черт. 6 и 7 показано для случая $r=6$, как такая узловая линия получается путем непрерывной деформации из системы узловых линий при $\mu=1$.

§ 7. Дополнения и задачи к шестой главе.

1. Вывод минимальных свойств собственных значений из их полноты. Опираясь на свойство полноты системы собственных функций, определяемых вариационной задачей, мы доказали в настоящей главе, что этими функциями исчерпывается вся совокупность решений соответствующего дифференциального уравнения. Но может случиться, как, например, в случае тригонометрических функций и функций Лежандра, что нам заранее известно, что найденная система собственных функций данного дифференциального уравнения обладает свойством полноты. Тогда можно, наоборот, доказать, что эта система функций совпадает с системой функций, определяемых соответствующей вариационной задачей. Приведем это доказательство.

Пусть речь идет о дифференциальном уравнении:

$$L[u] + \lambda \rho u = 0$$

¹⁾ Cp. Stern A., Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen, Diss. Göttingen, 1925.

для двумерной области G и при граничном условии $u=0$. Пусть $u_1, u_2, \dots$ означают собственные функции этого дифференциального уравнения, $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — соответствующие собственные значения.

Докажем прежде всего, что для всех функций φ , непрерывных внутри G , имеющих в G непрерывные первые и кусочно-непрерывные вторые производные и, сверх того, удовлетворяющих граничному условию $\varphi=0$ на границе Γ области G и добавочным условиям:

$$\iint_G \rho \varphi^2 dx dy = 1, \quad (50)$$

$$\iint_G \rho \varphi u_i dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (51)$$

имеет место неравенство:

$$D[\varphi] \geq \lambda_n.$$

В самом деле, из формулы Грина и в силу граничного условия $\varphi=0$ следует, что

$$D[\varphi] = - \iint_G \varphi L[\varphi] dx dy.$$

Применяя, далее, условие полноты [см. формулу (23'), стр. 404] к функциям φ и $\frac{L[\varphi]}{\rho}$, мы получим:

$$D[\varphi] = - \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \iint_G u_i L[\varphi] dx dy, \quad (52)$$

где

$$\gamma_i = \iint_G \rho \varphi u_i dx dy.$$

Но из уравнения (52) мы получаем, снова применяя формулу Грина и принимая во внимание, что $L[u_i] = -\lambda_i \rho u_i$, соотношение:

$$D[\varphi] = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \gamma_i^2. \quad (53)$$

Так как в силу условия (51) $\gamma_i = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$, а в силу (50) и условия полноты имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 = 1,$$

то отсюда непосредственно следует, что если λ_i расположены в порядке их возрастания, то

$$D[\varphi] \geq \lambda_n.$$

Путем непосредственного вычисления мы получаем далее, как мы уже показали раньше, что

$$D[u_n] = \lambda_n,$$

что и доказывает минимальное свойство n -й собственной функции относительно определенного выше класса функций сравнения φ . Что это свойство сохраняется и относительно таких функций φ , для которых предполагается только непрерывность и существование кусочно-непрерывных первых производных, следует из того, что всякую такую функцию и ее производную всегда можно аппроксимировать с помощью функций, имеющих кусочно-непрерывные вторые производные, так, чтобы интеграл $D[\varphi]$ сколь угодно мало отличался от соответствующего интеграла для аппроксимирующей функции.

2. Отсутствие нулей у первой собственной функции. На стр. 429 мы охарактеризовали первую собственную функцию как единственную собственную функцию, не имеющую нулей внутри основной области. Приведем другое доказательство этого свойства первой собственной функции, основанное на методе, принадлежащем Якоби и часто применяемом в вариационном исчислении (*метод мультипликативной вариации*).

Ограничимся случаем дифференциального уравнения:

$$\Delta u - qu + \lambda u = 0.$$

Мы должны доказать следующую теорему: если существует такое решение u этого дифференциального уравнения, которое обращается в нуль на границе Γ области G , но не обращается в нуль нигде внутри G , то

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + q\varphi^2) dx dy \geq \lambda \iint_G \varphi^2 dx dy$$

для всех допустимых функций сравнения φ , причем равенство имеет место только для функций $\varphi = cu$, где c — постоянная. Для доказательства представим функцию φ в виде $\varphi = \eta u$, что возможно, так как u не обращается в нуль внутри G . Тогда

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iint_G [u^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2uu_x\eta\eta_x + 2uu_y\eta\eta_y + (u_x^2 + u_y^2)\eta^2 + qu^2\eta^2] dx dy.$$

Так как $2\eta\eta_x = (\eta^2)_x$, $2\eta\eta_y = (\eta^2)_y$, то, интегрируя по частям и принимая во внимание, что появляющиеся при этом интегралы, взятые по границе, обращаются в нуль, мы получаем:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iint_G [u^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) - u\Delta u\eta^2 + qu^2\eta^2] dx dy.$$

Принимая во внимание дифференциальное уравнение $\Delta u - qu + \lambda u = 0$, которому удовлетворяет функция u , мы получаем:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iint_G [u^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) + \lambda u^2\eta^2] dx dy \geq \lambda \iint_G u^2\eta^2 dx dy = \lambda \iint_G \varphi^2 dx dy,$$

причем равенство имеет место только в случае $\eta_x = \eta_y = 0$, т. е. для $\eta = \text{const}$, что и требовалось доказать.

3. Другие минимальные свойства собственных значений.

Задача. Доказать следующую теорему:

Задача нахождения минимума интегрального выражения:

$$D[v_1, v_2, \dots, v_n] = \mathfrak{D}[v_1] + \dots + \mathfrak{D}[v_n],$$

где в качестве систем функций сравнения $v_1, v_2, \dots, v_n$ допускаются все системы взаимно ортогональных и нормированных функций, непрерывных и имеющих кусочно-непрерывные производные в основной области, имеет решением систему функций:

$$v_i = u_i$$

или какую-нибудь систему функций, получающуюся из системы функций u_i путем ортогонального преобразования, где $u_1, u_2, \dots, u_n$ означают n первых собственных функций для данной области. Минимальное значение рассматриваемого функционала равняется $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Задача. Доказать следующую теорему:

Обозначим через $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ какие-нибудь непрерывные функции в области G и пусть $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ означает нижнюю грань интегрального выражения $\mathfrak{D}[\varphi]$ для функций φ , которые помимо обычных условий непрерывности удовлетворяют еще только единственному добавочному условию:

$$\iint_G \rho \varphi^2 dx dy - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\iint_G \rho \varphi v_i dx dy \right)^2 = 1.$$

Тогда n -е собственное значение λ_n равняется максимуму выражения $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, и этот максимум достигается при $v_1 = u_1; \dots, v_{n-1} = u_{n-1}; \varphi = u_n$. Эта формулировка любопытна в том отношении, что в нее входит только одно квадратичное добавочное условие и совершенно отбрасываются линейные добавочные условия. Зато, впрочем, это квадратичное добавочное условие принимает несколько более сложный вид и выходит за пределы обычных рамок изопериметрических задач.

Предоставляем читателю в виде задачи аналогично формулировать соответствующую элементарную задачу для квадратичных форм.

Другие формулировки задачи нахождения собственных значений, полезные при некоторых применениях, мы приведем здесь для частного случая дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ при граничном условии $u = 0$.

Найти минимум максимумов выражения:

$$H[\varphi] = \iint_G \varphi^2 dx dy$$

при добавочных условиях:

$$D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy = 1,$$

$$D[\varphi, v_i] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

где смысл термина „минимум максимумов“ очевиден. Этой задаче эквивалентна, далее, задача нахождения максимума минимумов выражения:

$$\iint (\Delta \varphi)^2 dx dy$$

при тех же добавочных условиях, причем только на функции сравнения φ должны быть наложены требования непрерывности первых производных и кусочной непрерывности вторых производных.

4. Асимптотическое распределение собственных значений для случая колебания пластины. Для дифференциального уравнения колебаний пластины

$$\Delta \Delta u - \lambda u = 0$$

при граничных условиях $u = 0$ и $\frac{du}{dn} = 0$ (закрепленная пластинка) имеет место асимптотическая оценка:

$$A(\lambda) \sim \frac{f}{4\pi} \sqrt{\lambda},$$

откуда следует:

$$\lambda_n \sim \left(\frac{4\pi n}{f} \right)^2;$$

при этом $A(\lambda)$ означает число собственных значений, не превосходящих грани λ , а λ_n означает n -е собственное значение, f — площадь пластинки. Мы можем поэтому сказать: n -е собственное значение закрепленной пластинки при неограниченном возрастании n асимптотически равняется квадрату n -го собственного значения закрепленной мембраны. В частности, это асимптотическое собственное значение здесь также не зависит от формы, а зависит исключительно от площади пластинки. Аналогичное имеет место и для случая трех измерений¹⁾.

5. Вывести законы асимптотического распределения собственных значений для дифференциального уравнения Штурм-Лиувилля (ср. результаты § 2, 3), а также для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, пользуясь методом § 4, 3.

6. Вывести законы асимптотического распределения собственных значений для самосопряженных дифференциальных уравнений эллиптического типа, к которым приводит любая вариационная задача с определенным положительным квадратичным функционалом.

7. Провести рассмотрение задач на нахождение пары собственных значений (задач с двумя параметрами, например проблема Ламэ, см. гл. V, § 9, 3) с помощью методов вариационного исчисления.

8. Задачи с граничными условиями, содержащими параметр λ . Рассмотренные нами в гл. V, § 16, 4 примеры задач на

¹⁾ См. Courant R., Über die Schwingungen eingespannter Platten, „Math. Zeitschr.“, т. XV, 1922, стр. 195—200.

разыскание собственных значений с граничными условиями, содержащими параметр λ , также легко сводятся к вариационным задачам. Так, например, чтобы найти функцию u , удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\Delta u = 0$ и граничному условию $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u$, мы должны решить следующую вариационную задачу: найти минимум интеграла

$$\iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy,$$

если на функции сравнения φ наложены условия, чтобы интеграл по контуру от φ^2 удовлетворял соотношению:

$$\int \varphi^2 ds = 1$$

и чтобы выполнялись еще некоторые другие добавочные линейные условия, выбранные подходящим образом. Предоставляем читателю провести подробнее эту мысль.

В случае, когда G является кругом радиуса, равного единице, решениями этой задачи служат гармонические функции $r^n \cos n\vartheta$, $r^n \sin n\vartheta$, а собственными значениями являются числа $\lambda_n = n^2$.

Вообще для любой области G можно показать, пользуясь методами, изложенными выше в настоящей главе, что собственное значение λ_n является величиной порядка n^2 , откуда вытекает согласно § 3, п. 1 полнота системы собственных функций, причем полнота определяется с помощью выражения

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \int_{\Gamma} \varphi^2 ds,$$

т. е. граничные значения собственных функций образуют полную систему функций от дуги s , откуда снова следует, что всякая гармоническая функция, регулярная в области G , может быть аппроксимирована в среднем с помощью собственных функций рассматриваемой краевой задачи.

9. Задачи на разыскание собственных значений для замкнутых поверхностей. Простейшим примером задачи на разыскание собственных значений для замкнутой поверхности служит задача, приводящая к шаровым функциям Лапласа, причем вместо граничных условий здесь вводится условие регулярности на всей поверхности. С помощью метода, изложенного в гл. VI, можно и в этом случае свести задачу к задаче нахождения минимума или соответственно максимума

минимумов отношения $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{H}}$, где $\mathfrak{D}$ представляет собой квадратичное выражение, содержащее производные функции φ , а $\mathfrak{H}[\varphi]$ — определенное положительное квадратичное выражение, не содержащее производных, причем оба эти выражения являются в этом случае интегралами, взятыми по данной замкнутой поверхности. Теория таких задач на разыскание собственных значений может быть распространена и на другие квадратичные дифференциальные выражения для замкнутых поверхностей.

10. Оценка собственных значений в случае наличия особых точек. В § 2, п. 4 мы рассмотрели на примере собственных значений бесселевых функций случай, когда дифференциальное уравнение имеет особую точку, причем для бесселевых функций нулевого порядка потребовалось отдельное исследование, опирающееся на специальные свойства бесселевых функций. Покажем, как можно избежать такого специального исследования с помощью общего приема, применимого и в других случаях. Речь идет о задачах, относящихся к выражениям:

$$D[\varphi] = \int_0^1 x \varphi'^2 dx, \quad H[\varphi] = \int_0^1 x \varphi^2 dx$$

и не содержащих граничного условия для точки $x=0$; для точки $x=1$ пусть задано граничное условие $\varphi(1)=0$. Введя в качестве искомой функции функцию $\sqrt{x}\varphi$, мы легко получим для n -го собственного значения λ_n нашей задачи оценку

$$\lambda_n \leq n^2 \pi^2,$$

а для числа $A(\lambda)$ собственных значений, не превосходящих верхней грани λ , мы получаем, таким образом, оценку:

$$A(\lambda) \geq \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda}.$$

Чтобы найти теперь нижний предел для λ_n или верхний предел для $A(\lambda)$, в чем в сущности и заключается специфическая трудность нашей задачи, мы поступаем следующим образом: выберем какое-нибудь сколь угодно малое положительное число ε , не превосходящее во всяком случае единицы, и обозначим через $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ числа собственных значений, не превосходящих верхней грани λ , для выражений:

$$D_1 = \int_0^\varepsilon x \varphi'^2 dx, \quad H_1 = \int_0^\varepsilon x \varphi^2 dx$$

и соответственно

$$D_2 = \int_\varepsilon^1 x \varphi'^2 dx, \quad H_2 = \int_\varepsilon^1 x \varphi^2 dx,$$

причем в точке $x=\varepsilon$ функции сравнения могут и не удовлетворять условию непрерывности, так что для обоих случаев граничная точка $x=\varepsilon$ не подчинена никаким граничным условиям. Тогда

$$A(\lambda) \leq B_1(\lambda) + B_2(\lambda).$$

Для $B_2(\lambda)$ мы получаем, применяя общие методы настоящей главы, асимптотическое соотношение:

$$\frac{B_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow \frac{1}{\pi} (1 - \varepsilon).$$

Что касается числа $B_1(\lambda)$, то мы его оцениваем следующим образом: увеличим H_1 , заменив его выражением:

$$H_1^* = \varepsilon \int_0^\varepsilon \varphi^2 dx,$$

и уменьшим D_1 , заменив его выражением:

$$D_1^* = \int_0^\varepsilon x \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi'^2 dx.$$

Обозначая через $B_1^*(\lambda)$ измененное число собственных значений, не превосходящих λ , мы, очевидно, получаем:

$$B_1(\lambda) \leq B_1^*(\lambda).$$

Но для измененной таким образом задачи мы можем получить в явном виде соответствующие собственные функции, преобразуя интервал $0 \leq x \leq \varepsilon$ в интервал $-1 \leq \xi \leq 1$ с помощью преобразования

$$x = (1 + \xi) \frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы получаем тогда в качестве собственных функций полиномы Лежандра от переменного ξ , а в качестве собственных значений числа $\frac{n(n+1)}{\varepsilon^2}$.

Отсюда следует, что $B_1(\lambda) \leq B_1^*(\lambda) \leq \varepsilon(1 + \delta)\sqrt{\lambda}$, причем при возрастании λ число δ стремится к нулю. Сопоставляя найденные результаты, мы получаем отсюда, принимая во внимание, что число ε может быть сделано сколь угодно малым, следующую асимптотическую оценку:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\pi}.$$

11. Минимальное свойство круглой мембраны или пластинки. Из всех закрепленных мембран или пластинок данного периметра или данной площади и при заданной постоянной плотности и упругости самый низкий основной тон дает мембрана или пластинка, имеющая форму окружности [доказательство для случая заданного периметра см. в первой из цитируемых ниже работ; для случая заданной площади см. работы Фабера ¹⁾ (Faber) и Э. Крана ²⁾ (E. Krahn)].

12. Задачи минимума для случая неравномерного распределения масс. Доказать следующие теоремы, представляющие интересные случаи применения вариационного исчисления.

¹⁾ *Faber G.*, Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche..., Bayr. Akad., 1923.

²⁾ *Krahn E.*, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, Math. Ann., 94.

Основной тон закрепленной струны с заданной постоянной упругостью и с заданной общей массой достигает минимума тогда, когда вся масса сконцентрирована в центре струны.

Доказать аналогичные теоремы для мембраны и пластинки.

13. Узловые точки для задачи Штурм-Лиувилля и принцип максимума минимумов. Теорема § 6 о том, что нули n -й собственной функции задачи Штурм-Лиувилля делят основную область на n частей, может быть доказана следующим образом¹⁾.

Если закрепить $n-1$ произвольно взятых внутренних точек колеблющейся струны, то основной тон получающейся таким путем системы n независимых струн совпадает с самым низким из основных тонов этих n частичных колебательных систем, отдельно взятых (см. § 1, п. 3). Основное колебание разложенной системы задается тогда функцией, выражающей основное колебание соответствующей частичной колебательной системы и равной нулю на остальных участках всей заданной системы.

Поэтому, если мы будем перемещать заданные узловые точки, то основной тон разложенной системы достигнет максимума в том случае, когда все n частичных систем будут иметь один и тот же основной тон. В самом деле, если две соседние части струны имеют разные основные тоны, то, перемещая общий узел этих двух частей, мы сможем понижать основной тон одной части и повышать основной тон другой части до тех пор, пока оба основных тона не достигнут одинаковой высоты. В рассматриваемом экстремальном случае основное колебание разложенной системы выражается с помощью непрерывно дифференцируемой функции, являющейся собственной функцией всей системы, принадлежащей соответствующему числу колебаний и обращающейся в нуль в $n-1$ точках первоначальной системы. Итак: если закрепить $n-1$ точек струны, выбрав эти точки так, чтобы разложенная система имела по возможности наиболее высокий тон, то в качестве решения получается собственная функция первоначальной системы, имеющая $n-1$ внутренних нулей. Если мы обозначим полученные таким путем собственные значения через μ_n , а соответствующие собственные функции через v_n , то во всяком случае $\mu_{n+1} \geq \mu_n$, так как безусловно существует по меньшей мере один такой интервал между двумя соседними нулями функции v_n , который содержит внутри себя в качестве правильной части один из интервалов между двумя соседними нулями функции v_{n+1} , а уменьшение интервала вызывает повышение основного тона (см. стр. 433, примечание).

Если мы теперь обозначим, как раньше, через λ_n собственные значения струны, расположенные в порядке возрастания, то мы видим, что $\mu_n \geq \lambda_n$, так как числа μ_n составляют часть множества чисел λ_n . С другой стороны, закрепление заданной узловой точки представляет собой специальный предельный случай общих линейных добавочных условий, накладываемых на функции сравнения в вариационных задачах, определяющих собственные значения λ_n (см. § 1, 4). Очевидно, что если ограничиться только добавочными линейными условиями этого специального типа, то соответствующий максимум минимумов, т. е. число μ_n ,

¹⁾ См. *Hohenemser*, „Ingenieurarchiv“, 1930, вып. 3, где проводится аналогичное рассуждение.

не может быть больше максимума минимумов всех вариационных задач с любыми добавочными линейными условиями, т. е. числа λ_n . Поэтому $\mu_n \leq \lambda_n$, и, принимая во внимание предыдущий результат, мы получаем, что $\mu_n = \lambda_n$. Теорема о числе нулей собственных функций Штурм-Лиувилля, таким образом, доказана.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VI.

Courant R., Beweis des Satzes, dass von allen homogenen Membranen gezebenen Umfanges und gegebener Spannung die Kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt, „Math. Zeitschr.“, т. I, стр. 321—28, 1918.

— Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, там же, т. VII, стр. 1—57, 1920.

— Über die Schwingungen eingespannter Platten, там же, т. XV, стр. 195—200, 1922.

— Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke, „Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys. Kl.)“, 1923, заседание от 13 июля.

— Über die Anwendung der Variationsrechnung., Acta math., 49.

Kneser A., Integralgleichungen (см. литературу к гл. III).

Liouville J., Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, „J. math. pures et appl.“, Ser. 1, т. I, стр. 25—235, 1836, там же, т. II, стр. 16—35, 418—433, 1837.

Weyl H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), „Math. Ann.“, т. LXXI, стр. 441—479, 1912.

— Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membrane von deren Begrenzung, „J. f. d. reine und angew. Math.“, т. CXXI, стр. 1—11, 1912.

— Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung, там же, стр. 163—181.

— Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze; там же, т. CXLIII, стр. 177—202, 1913.

Richardson R. G. D., Das Jakobische Kriterium der Variationsrechnung und die Oszillationseigenschaften linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Первое сообщение „Math. Ann.“, LXVIII, стр. 279. Второе сообщение „Math. Ann.“, LXXI, стр. 214.

— Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen eines Kleinschen Oszillationstheorems, „Math. Ann.“, LXXIII, стр. 289.

Считаю своим долгом отметить, что Ричардсон в прислании незадолго до начала мировой войны в редакцию „Mathematische Annalen“ и, к сожалению, неопубликованной рукописи, представлявшей набросок предполагавшейся работы, рассматривал задачу нахождения собственных значений дифференциальных уравнений эллиптического типа и другим путем получил результаты, имеющие очень много точек соприкосновения с результатами, изложенными в настоящей главе; это относится прежде всего к исследованию поведения собственных значений при расширении основной области и при возрастании коэффициентов, содержащихся в граничном условии, затем к исследованию зависимости собственных значений от коэффициентов дифференциального уравнения и, наконец, к теоремам о нулях собственных функций.

ГЛАВА VII.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, К КОТОРЫМ ПРИВОДЯТ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

В этой главе мы подробнее исследуем некоторые классы функций из тех, которые мы раньше определили, а именно бесселевы функции, функции Лежандра и общие шаровые функции Лапласа; при этом мы станем на несколько более общую точку зрения, чем в предыдущих главах, а именно: мы будем придавать независимой переменной произвольные комплексные значения и будем изучать наши функции как функции комплексного переменного методами теории функций. При этом мы будем рассматривать не только указанные функции, но и совокупность всех решений соответствующих дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти функции. Мы будем считать известным, что всякое такое линейное дифференциальное уравнение и в случае комплексной независимой переменной $z = x + iy$ имеет два линейно независимых решения, из которых самое общее решение может быть составлено линейно при помощи постоянных коэффициентов, и что все решения представляют регулярные аналитические функции от z повсюду, за исключением постоянных особых точек, задаваемых коэффициентами уравнения. Такого рода линейными дифференциальными уравнениями определяются многие новые и важные классы функций, которые не могут быть непосредственно выражены с помощью элементарных функций, но которые могут быть часто представлены при помощи интегралов от элементарных функций.

Чтобы получить решение линейного дифференциального уравнения

$$L[u] + \mu u = 0$$

в виде интегрального выражения, часто пользуются *методом интегрального преобразования*, который мы здесь сперва изложим в общем виде. Вместо неизвестной функции $u(z)$ вводят новую неизвестную функцию $v(\zeta)$ от комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью равенства:

$$u(z) = \int_C K(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta, \quad (1)$$

причем ядро преобразования $K(z, \zeta)$, которое должно быть аналитической функцией от каждой из комплексных переменных, и путь интегриро-

вания C следует каждый раз надлежащим образом выбрать. Тогда дифференциальное уравнение переходит в уравнение:

$$\int_C (L[K] + \mu K) v(\zeta) d\zeta = 0,$$

где дифференциальная операция L относится к переменной z ; при этом предполагается, что можно изменить порядок операций интегрирования и операции L .

Если теперь выбрать функцию K так, чтобы можно было заменить выражение $L[K]$ дифференциальным выражением $A[K]$, относящимся только к переменной ζ , т. е. подчинить $K(z, \zeta)$ уравнению с частными производными

$$L[K] = A[K],$$

и затем путем интегрирования по частям, допуская опять законность такого интегрирования, изгнать производные функции K , то предыдущий интеграл переходит в

$$\int_C K(z, \zeta) (B[v] + \mu v) d\zeta;$$

при этом $B[v]$ есть дифференциальное выражение, сопряженное с $A[v]$ (см. гл. V, § 1). К этому интегралу присоединяется еще выражение, зависящее от значений на концах пути интегрирования, которое можно сделать равным нулю при надлежащем выборе пути интегрирования. Если уравнение в частных производных, в выборе которого нам представлен большой простор, и преобразованное дифференциальное уравнение

$$B[v] + \mu v = 0$$

могут быть просто решены в явном виде и притом так, чтобы были справедливы предыдущие допущения, то при помощи этого метода получается решение $u(z)$ в указанной интегральной форме.

В анализе такие интегральные преобразования встречаются в различных видах. При ядре

$$K(z, \zeta) = e^{z\zeta} \text{ или } e^{i\alpha\zeta}$$

мы получаем, например, *преобразование Лапласа*, при

$$K(z, \zeta) = (z - \zeta)^\alpha$$

получаем *преобразование Эйлера*.

§ 2. Функции Бесселя.

Рассмотрим прежде всего дифференциальное уравнение Бесселя:

$$z^2 u'' + zu' + z^2 u - \lambda^2 u = 0. \quad (2)$$

Мы хотим найти и исследовать все его решения, причем мы будем считать независимую переменную z и параметр λ комплексными величинами.

1. Интегральное преобразование. Попробуем проинтегрировать уравнение (2) с помощью преобразования (1). Подставляя в дифференциальное уравнение, получаем:

$$\int_C (z^2 K_{zz} + z K_z + z^2 K - \lambda^2 K) v(\zeta) d\zeta = 0.$$

Налагаем теперь на функцию K требование удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$z^2 K_{zz} + z K_z + z^2 K + K_{\zeta\zeta} = 0,$$

однозначным и регулярным решением которого во всей плоскости z и во всей плоскости ζ является функция

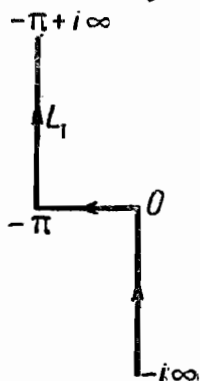
$$K(z, \zeta) = e^{\pm i z \sin \zeta}.$$

Дифференциальное уравнение (2) переходит в уравнение:

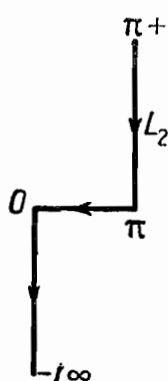
$$\int_C (K_{\zeta\zeta} + \lambda^2 K) v(\zeta) d\zeta = 0$$

или после интегрирования по частям в уравнение:

$$\int_C K(z, \zeta) \{v'' + \lambda^2 v\} d\zeta + \int_C \frac{\partial}{\partial \zeta} \{K_\zeta v - K v'\} d\zeta = 0.$$



Черт. 8.



Черт. 9.

Так как преобразованное дифференциальное уравнение $v'' + \lambda^2 v = 0$ имеет решения $e^{\pm i \lambda \zeta}$, то остается только определить надлежащим образом путь интегрирования. Для этого заметим, что на вертикальных отрезках путей, отмеченных на черт. 8 и 9 буквами L_1 и L_2 , действительная часть от $-iz \sin \zeta$ имеет отрицательное значение при $\Re z > 0$ ¹⁾ и с возрастанием $|\zeta|$ стремится к отрицательной бесконечности, причем порядок роста такой же, как у показательной функции. Полагая $K(z, \zeta) = e^{-iz \sin \zeta}$, мы видим, что добавочный член

$K_\zeta v - K v'$ стремится на L_1 и на L_2 с обеих сторон к нулю, и интегралы

$$\left. \begin{aligned} H_\lambda^1(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{-iz \sin \zeta + i \lambda \zeta} d\zeta, \\ H_\lambda^2(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{L_2} e^{-iz \sin \zeta + i \lambda \zeta} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹⁾ Под символом $\Re z$ мы разумеем действительную часть комплексного числа z , а под $\Im z$ — коэффициент при i в мнимой части этого числа, т. е. если $z = a + bi$, то $\Re z = a$, а $\Im z = b$. (Прим. перев.)

дают нам два решения дифференциального уравнения (2); это так называемые функции Ганкеля (Hankel). Легко видеть, что эти интегралы сходятся при $\Re z > 0$ и удовлетворяют тем условиям, которые нужны были для вывода их.

2. Функция Ганкеля. Функции Ганкеля $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ определены с помощью интегралов (3) только в правой полуплоскости $\Re z > 0$. Но можно без труда аналитически продолжить их следующим образом.

Полагая для краткости при постоянном значении $z = x + iy$

$$f(\xi) = -iz \sin \xi + i\lambda \xi,$$

$$\xi = \xi + i\eta, \quad \lambda = a + ib,$$

имеем:

$$\Re f(\xi) = y \sin \xi \operatorname{ch} \eta + x \cos \xi \operatorname{sh} \eta - b\xi - a\eta,$$

$$\Im f(\xi) = -x \sin \xi \operatorname{ch} \eta + y \cos \xi \operatorname{sh} \eta + a\xi - b\eta.$$

Если выбрать для вертикальных частей пути L_1 вместо абсцисс 0 и $-\pi$ абсциссы ξ_0 и $-\pi - \xi_0$, то взятый по этому пути L_1' интеграл $\int_{L_1'} e^{f(\xi)} d\xi$ будет сходящимся при тех значениях z , для которых

$$y \sin \xi_0 - x \cos \xi_0 < 0,$$

т. е. для тех, которые лежат в полуплоскости, ограниченной прямой

$$y \sin \xi_0 - x \cos \xi_0 = 0.$$

Для той части этой полуплоскости, которая лежит также в полуплоскости $x > 0$, можно пользоваться либо тем, либо другим путем интегрирования, и результат получается, как это следует из интегральной теоремы Коши, тот же самый. Но в другой части полуплоскости интеграл, взятый по новому пути, дает нам аналитическое продолжение функции $H_\lambda^1(z)$.

Если заставим теперь ξ_0 пробегать неограниченную последовательность положительных значений и неограниченную последовательность отрицательных значений, то постепенно получим все аналитическое продолжение функции $H_\lambda^1(z)$, а именно риманову поверхность, которая имеет в точке нуль точку разветвления, порядок которой зависит от λ .

При $\xi_0 = -\frac{\pi}{2}$ исчезает горизонтальная часть пути интегрирования, и мы получаем для $H_\lambda^1(z)$ интеграл:

$$H_\lambda^1(z) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \operatorname{ch} \eta - \lambda \eta} d\eta,$$

представляющий функцию в верхней полуплоскости $\Im z > 0$. Если в секторе

$$\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$$

точка z удаляется в бесконечность, то подынтегральное выражение на

всем пути интегрирования стремится к нулю; в силу равномерной сходимости интеграла в любой области $\Im z \geq \rho > 0$ стремится к нулю и функция $H_\lambda^1(z)$. Аналогичным образом получаем, что функция $H_\lambda^2(z)$ стремится к нулю, когда точка z удаляется в бесконечность в секторе

$$\pi + \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta.$$

Мы получаем, следовательно, следующий результат.

Функция Ганкеля $H_\lambda^1(z)$ стремится к нулю, когда переменная z , оставаясь внутри сектор $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ в верхней полуплоскости, стремится к бесконечности. Функция Ганкеля $H_\lambda^2(z)$ стремится к нулю, когда z стремится к бесконечности, оставаясь в секторе $\pi + \delta < \arg z < 2\pi - \delta$ нижней полуплоскости¹⁾.

Из поведения функций Ганкеля в бесконечности легко заключить, что ни одна из функций $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ не обращается в нуль тождественно и что при любом значении λ эти обе функции линейно независимы друг от друга.

Чтобы это обнаружить, мы докажем, что с возрастанием $|z|$ функция $H_\lambda(z)$ неограниченно возрастает на положительной части мнимой оси, а функция $H_\lambda^1(z)$ неограниченно возрастает на отрицательной части мнимой оси.

Для того чтобы получить выражение для $H_\lambda^2(z)$, которое сходилось бы вдоль положительной части мнимой оси, мы выбираем в качестве абсцисс вертикальных частей пути интегрирования L_2' значения $-\xi_0$ и $\pi + \xi_0$, где ξ_0 — произвольное число из интервала $0 < \xi_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Так как интегралы $\int e^{f(\xi)} d\xi$, взятые по этим вертикальным частям пути, с возрастанием y стремятся к нулю, то мы можем ограничиться исследованием остающейся части:

$$\int_{\pi + \xi_0}^{-\xi_0} e^{y \sin \xi - b\xi + ia\xi} d\xi,$$

или же интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} + \xi_0} \operatorname{ch} b\xi e^{y \cos \xi} \cos a\xi d\xi,$$

в чем легко убедиться путем подстановки $\xi = \xi' + \frac{\pi}{2}$. Но мы видим при $|a| \leq 1$ непосредственно, а при $|a| > 1$ с помощью несколько

¹⁾ Это утверждение справедливо только по отношению к рассматриваемой исходной ветви функции $H_\lambda(z)$ или $H_\lambda^2(z)$. Другие ветви выражаются в виде линейных комбинаций исходных ветвей и указанными свойствами не обладают.

более точных оценок¹⁾, что этот интеграл при $y \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает.

Аналогичное рассуждение можно провести и для функции $H_\lambda^1(z)$ на отрицательной части мнимой оси.

Из доказанной таким образом линейной независимости функций $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ следует, что при помощи функций Ганкеля мы можем выразить всю совокупность решений дифференциального уравнения Бесселя. В самом деле, любое решение можно представить в виде линейной комбинации:

$$c_1 H_\lambda^1(z) + c_2 H_\lambda^2(z).$$

Заметим еще, что функции $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ однозначно определяются дифференциальным уравнением (2) и поведением в бесконечности с точностью до множителя, не зависящего от z . Действительно, если бы существовали два линейно независимых решения уравнения Бесселя, которые обладали бы указанным свойством, скажем, для верхней полуплоскости, то этим свойством обладало бы и любое решение, следовательно, также и $H_\lambda^2(z)$. Но это противоречит только что доказанному положению, что $|H_\lambda^2(z)|$ на положительной части мнимой оси неограниченно возрастает.

Наконец рассмотрим еще функции Ганкеля при постоянном значении $z \neq 0$ в их зависимости от параметра λ . Так как подинтегральное выражение в (3) представляет аналитическую функцию от λ и интегралы равномерно сходятся в любой конечной области изменения λ , то функции Ганкеля являются аналитическими функциями от λ , а именно целыми трансцендентными функциями.

3. Бесселевы функции и функции Неймана. Для физики представляют интерес те решения дифференциального уравнения (2), которые при действительных значениях λ и z имеют действительные значения. Чтобы получить эти решения, мы полагаем

$$\left. \begin{aligned} H_\lambda^1(z) &= J_\lambda(z) + iN_\lambda(z), \\ H_\lambda^2(z) &= J_\lambda(z) - iN_\lambda(z); \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1) Выберем ξ_0 так, чтобы $\frac{\pi}{2} + \xi_0$ было кратным от $\frac{\pi}{2a}$. Тогда мы можем представить исследуемый интеграл в виде:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \operatorname{ch} b \xi e^{y \cos \xi} \cos a \xi d\xi = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \xi \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v \operatorname{ch} \frac{b}{a} \left(\xi + v \frac{\pi}{2} \right) e^{y \cos \frac{1}{a} \left(\xi + v \frac{\pi}{2} \right)} \right\} d\xi.$$

В этой сумме все более и более преобладающее значение с возрастанием y приобретает первый член, так как показатель $\cos \frac{1}{a} \xi$ по крайней мере на $1 - \cos \frac{\pi}{2a}$ больше любого из следующих показателей $\cos \frac{1}{a} \left(\xi + v \frac{\pi}{2} \right)$. Но этот первый член с возрастанием y неограниченно растет.

функция

$$J_{\lambda}(z) = \frac{1}{2} [H_{\lambda}^1(z) + H_{\lambda}^2(z)] \quad (5)$$

называется *функцией Бесселя* индекса λ , а

$$N_{\lambda}(z) = \frac{1}{2i} [H_{\lambda}^1(z) - H_{\lambda}^2(z)]$$

есть соответствующая *функция Неймана*. Так как определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{i}{2}$$

отличен от нуля для любого значения λ , то и функции $J_{\lambda}(z)$ и $N_{\lambda}(z)$ линейно независимы при всех значениях λ .

При действительных значениях z и λ функции Ганкеля $H_{\lambda}^1(z)$ и $H_{\lambda}^2(z)$ являются сопряженными комплексными функциями. В самом деле, заменяя ξ через $-\xi$ в выражении

$$\overline{H_{\lambda}^1(z)} = -\frac{1}{\pi} \int_{\bar{L}_1} e^{iz \sin \zeta - i\lambda \zeta} d\zeta,$$

где $\bar{L}_1$ есть зеркальное отражение пути L_1 в действительной оси, получаем:

$$\overline{H_{\lambda}^1(z)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\bar{L}_1} e^{-iz \sin \zeta + i\lambda \zeta} d\zeta;$$

так как путь $-\bar{L}_1$ есть путь L_2 , пробегаемый в отрицательном направлении, то

$$\overline{H_{\lambda}^1(z)} = -\frac{1}{\pi} \int_{L_2} e^{-iz \sin \zeta + i\lambda \zeta} d\zeta = H_{\lambda}^2(z).$$

Следовательно, при действительных значениях λ и z функция $J_{\lambda}(z)$ представляет действительную часть, а $N_{\lambda}(z)$ — коэффициент при i в мнимой части функции Ганкеля $H_{\lambda}^1(z)$, т. е. $J_{\lambda}(z)$ и $N_{\lambda}(z)$ имеют действительные значения.

Функция $H_{-\lambda}^{\nu}(z)$ ($\nu = 1, 2$) является решением дифференциального уравнения Бесселя при том же значении λ , что и $H_{\lambda}^{\nu}(z)$, так как в дифференциальное уравнение входит только λ^2 . Однако функции $H_{\lambda}^{\nu}(z)$ и $H_{-\lambda}^{\nu}(z)$ не могут быть линейно независимы, так как согласно п. 2 они одинаково ведут себя в бесконечности.

И действительно, если в выражение

$$H_{-\lambda}^1(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{-iz \sin \zeta - i\lambda \zeta} d\zeta$$

ввести новую переменную интегрирования $-\zeta - \pi$, то непосредственно получается соотношение:

$$H_{-\lambda}^1(z) = e^{i\lambda\pi} H_{\lambda}^1(z); \quad (6)$$

и аналогичным образом получаем:

$$H_{-\lambda}^2(z) = e^{-i\lambda\pi} H_{\lambda}^2(z). \quad (6')$$

Для бесселевых функций и функций Неймана с отрицательными индексами имеем:

$$J_{-\lambda}(z) = \frac{e^{i\lambda\pi} H_{\lambda}^1(z) + e^{-i\lambda\pi} H_{\lambda}^2(z)}{2}, \quad (7)$$

$$N_{-\lambda}(z) = \frac{e^{i\lambda\pi} H_{\lambda}^1(z) - e^{-i\lambda\pi} H_{\lambda}^2(z)}{2i}; \quad (7')$$

в противоположность функциям Ганкеля эти функции $J_{-\lambda}(z)$ и $J_{\lambda}(z)$ и соответственно $N_{-\lambda}(z)$ и $N_{\lambda}(z)$ линейно зависимы не при всяком значении параметра λ , а только в том случае, когда определитель

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} e^{i\lambda\pi} & e^{-i\lambda\pi} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \sin \lambda\pi$$

обращается в нуль, т. е. когда λ является целым числом. В этом случае

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad (8)$$

$$N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z). \quad (8')$$

Поэтому мы можем выразить, когда λ не является целым числом, *общее решение* дифференциального уравнения (2) в виде:

$$c_1 J_{\lambda}(z) + c_2 J_{-\lambda}(z).$$

В случае $\lambda = n$ общее решение выражают нижеследующей суммой:

$$c_1 J_n(z) + c_2 N_n(z);$$

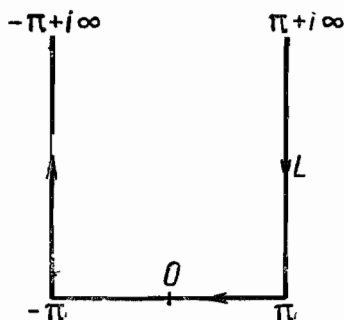
однако мы дальше увидим, что и в этом случае $N_n(z)$ можно просто вычислить с помощью $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ (см. п. 9).

4. Выражение бесселевых функций в виде интегралов. Если сложить интегралы (3), представляющие функции $H_{\lambda}^1(z)$ и $H_{\lambda}^2(z)$, то интегралы, взятые вдоль мнимой оси, взаимно уничтожаются; следовательно, в правой полуплоскости $\Re z > 0$ мы получаем для $J_{\lambda}(z)$ выражение:

$$J_{\lambda}(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L e^{-iz \sin \zeta + i\lambda \zeta} d\zeta, \quad (9)$$

где L есть путь, изображенный на черт. 10.

Если в частности λ является целым числом, то в силу периодичности



Черт. 10.

подинтегральной функции пропадают и интегралы вдоль вертикальных частей пути L ; мы получаем:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \xi - in\xi} d\xi \quad (10)$$

или

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \xi - n\xi) d\xi, \quad (10')$$

так как действительная часть подинтегрального выражения в интеграле (10) есть четная функция, а мнимая часть — нечетная функция. С помощью этих интегралов $J_n(z)$ определяется для любых значений z . Итак, мы видим, что функции Бесселя с целочисленным индексом однозначны и регулярны во всей плоскости и являются поэтому целыми функциями.

Выражение (10'), далее, обнаруживает, что $J_n(z)$ есть n -й коэффициент Фурье в разложении функции

$$e^{iz \sin \xi} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\xi}, \quad (11)$$

рассматриваемой как функция от ξ , в ряд Фурье. Мы можем также рассматривать это разложение как определение функций $J_n(z)$ при целых значениях n с помощью производящей функции $e^{iz \sin \xi}$.

При действительных значениях z и ξ из соотношения (11) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} \cos(z \sin \xi) &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) \cos n\xi, \\ \sin(z \sin \xi) &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) \sin n\xi, \end{aligned}$$

которые, однако, остаются справедливыми и для комплексных значений z и ξ . Замечая, что

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos(z \sin \xi) &= J_0(z) + 2 \sum_1^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\xi, \\ \sin(z \sin \xi) &= 2 \sum_1^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin (2n-1)\xi; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

в частности при $\xi = \frac{\pi}{2}$ имеем

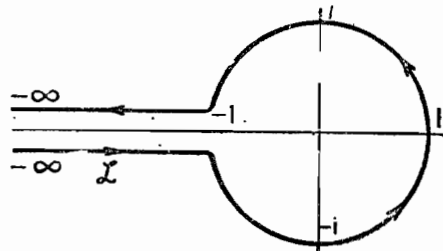
$$\begin{aligned} \cos z &= J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - \dots \\ \sin z &= 2J_1(z) - 2J_3(z) + \dots \end{aligned}$$

Если ввести в выражение (9) переменную интегрирования $\zeta' = e^{-\zeta}$, то получим:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta, \quad (13)$$

причем за путь интегрирования L следует взять отмеченный на черт. 11 путь, имеющий форму петли. Он идет вдоль нижнего края отрицательной части действительной оси до точки $\zeta = -1$, окружает начало координат вдоль единичной окружности и затем идет по верхнему краю отрицательной части действительной оси от $\zeta = -1$ до $-\infty$.

При целых значениях $\lambda = n$ интегралы вдоль прямолинейных отрезков взаимно уничтожаются, и мы получаем:



Черт. 11.

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} \zeta^{-n-1} d\zeta. \quad (14)$$

Следовательно, $J_n(z)$ является n -м коэффициентом разложения в ряд Лорана функции

$$e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \zeta^n. \quad (15)$$

И это разложение можно было бы использовать для определения $J_n(z)$ для целых значений n .

Если в выражении (13) выполнить преобразование $\zeta = \frac{2v}{z}$ сперва при условии, что z — действительное положительное число, то получим:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_L e^{v - \left(\frac{z}{2}\right)^2 v^{-1}} v^{-(\lambda+1)} dv \quad (16)$$

с тем же путем интегрирования L .

Так как интеграл в правой части сходится при всех значениях z , то выражение (16) представляет бесселевы функции при любых значениях z .

В частности мы видим, что отношение $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ является целой функцией от z при любом значении λ .

*) К этому выражению мы могли бы непосредственно прийти на основании метода, указанного в § 1, если бы мы подчинили ядро преобразования дифференциальному уравнению:

$$z^3 K_{zz} + z^2 K_z + z^2 K - \zeta (\zeta K)_\zeta = 0,$$

которому удовлетворяет функция $K = e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}$. Преобразование дифференциального уравнения имело бы тогда вид $[\zeta(\zeta v)]' - \lambda^2 v = 0$ и ему удовлетворяли бы решения $v = \zeta^{\pm \lambda - 1}$.

5. Другое выражение функций Ганкеля и бесселевых функций в виде интегралов. Обратимся теперь к другому выражению бесселевых функций в виде интегралов, которое получается, если составить дифференциальное уравнение для функции $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ и применить к нему преобразование Лапласа. Естественно ожидать, что таким образом получится простой результат, так как $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ есть однозначная функция от z . С этой целью вводим в уравнение

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) u = 0$$

вместо u новую переменную $w(z)$ при помощи соотношения:

$$u = w z^\lambda$$

и получаем уравнение:

$$z w'' + (2\lambda + 1) w' + z w = 0. \quad (17)$$

Полагая

$$w(z) = \int_C K(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta, \quad K = e^{z\zeta},$$

имеем:

$$\int_C [z K_{zz} + (2\lambda + 1) K_z + z K] v(\zeta) d\zeta = 0$$

или, так как в случае преобразования Лапласа имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} K_z &= \zeta K, \\ K_\zeta &= K z, \end{aligned}$$

а следовательно и $z K_{zz} = \zeta^2 K_\zeta$, то:

$$\begin{aligned} & \int_C \{ (1 + \zeta^2) K_\zeta + (2\lambda + 1) \zeta K \} v(\zeta) d\zeta = \\ &= - \int_C K(z, \zeta) \{ (1 + \zeta^2) v' - (2\lambda - 1) \zeta v \} d\zeta + \int_C \frac{\partial}{\partial \zeta} K [v(1 + \zeta^2)] d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение будет решено, если мы определим $v(\zeta)$ и путь C так, чтобы имело место уравнение:

$$(1 - \zeta^2) v'(\zeta) - (2\lambda - 1) \zeta v(\zeta) = 0$$

и чтобы функция $e^{z\zeta} v(\zeta) (1 + \zeta^2)$ принимала одинаковые значения на концах пути C ; мы получаем:

$$\frac{v'(\zeta)}{v(\zeta)} = \frac{2\lambda - 1}{1 + \zeta^2} \zeta$$

или

$$v(\zeta) = c (1 + \zeta^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$$

Следовательно,

$$\omega(z) = c \int_C e^{z\xi} (1 + \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi$$

или, вводя новую переменную интегрирования $\xi = i\xi'$, относя постоянный множитель $i(-i)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ к постоянной и обозначая новый путь интегрирования опять через C , имеем:

$$\omega(z) = c \int_C e^{iz\xi'} (\xi'^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi'.$$

Чтобы найти допустимый путь интегрирования, мы строим сперва риманову поверхность подинтегральной функции, соединяя обе точки разветвления $\xi = +1$ и $\xi = -1$ сечением и прикрывая вдоль этого сечения друг к другу бесчисленное множество листов. В частности мы можем провести это сечение вдоль двух лучей, исходящих из точек $+1$ и -1 в бесконечность. Разумая под C_1 и C_2 два пути, проходящие в основном листе римановой поверхности, каждый из которых окружает только один из лучей и не проходит через точки $+1$ и -1 (см. черт. 12, где лучи идут параллельно мнимой оси), мы видим, что интеграл $\omega(z)$ сходится на одном из этих путей для тех значений z , для которых вдоль луча $\Re(iz\xi')$ стремится к $-\infty$; вместе с тем выражение

$$Kv(\xi'^2 - 1) = (\xi'^2 - 1)^{\lambda + \frac{1}{2}} e^{iz\xi'}$$



Черт. 12.

стремится на обоих концах пути интегрирования к нулю, т. е. $\omega(z)$ является решением уравнения (17). Если луч образует с направлением оси ξ угол α , то предыдущее условие выполнено, если

$$y \cos \alpha + x \sin \alpha > 0,$$

т. е. если $z = x + iy$ лежит в определенной полуплоскости, ограниченной прямой $y \cos \alpha + x \sin \alpha = 0$. Мы можем, однако, таким же образом, как в п. 2, аналитически продолжить интегралы, если заставим α пробежать надлежащим образом выбранную бесконечную последовательность положительных значений и бесконечную последовательность отрицательных значений.

Если в частности возьмем на обоих путях $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (как это сделано на черт. 12), то оба интеграла сходятся в правой полуплоскости $\Re(z) > 0$. Если повернуть путь C_1 в положение положительной части действительной оси, то соответствующий интеграл сходится в верхней полуплоскости и стремится к нулю, когда z неограниченно возрастает в секторе

$$\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta \quad \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right),$$

Следовательно, на основании замечания в п. 2 интеграл может отличаться только множителем, не зависящим от z , от функции $\frac{H_\lambda^1(z)}{z^\lambda}$.

Итак,

$$b_1 H_\lambda^1(z) = z^\lambda \int_{C_1} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta,$$

и аналогично

$$b_2 H_\lambda^2(z) = z^\lambda \int_{C_2} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta.$$

Коэффициенты b_1 и b_2 , которые могут зависеть только от λ , являются комплексно сопряженными числами. Это следует для действительных значений λ из замечания п. 3, что функции Ганкеля при действительных значениях λ и z представляют сопряженно комплексные функции. В самом деле из соотношения

$$\overline{b_2 H_\lambda^2(z)} = -z^\lambda \int_{-\bar{C}_2} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$$

в силу того, что путь $-\bar{C}_2$ отличается от пути C_1 ¹⁾ только направлением обхода, непосредственно следует:

$$\overline{b_2 H_\lambda^2(z)} = b_1 H_\lambda^1(z),$$

и отсюда $\overline{b_2}(\lambda) = b_1(\lambda)$.

Так как функции Ганкеля, как было указано в п. 2, являются аналитическими функциями от λ и так как интегралы $\int_{C_1} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$, очевидно, представляют аналитические функции от λ , то и коэффициенты $b_1(\lambda)$ и $b_2(\lambda)$ являются аналитическими функциями от λ , и потому соотношение $\overline{b_2} = b_1$ имеет место при всех значениях λ .

Вычтем из первого интеграла второй, тогда мы можем преобразовать получающийся путь интегрирования в путь, имеющий вид восьмерки, изображенный на черт. 13, который обходит точку $+1$ в положительном смысле и точку -1 в отрицательном смысле. Мы получаем



Черт. 13.

$$z^\lambda \int_{\Re} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = b_1 H_\lambda^1(z) - b_2 H_\lambda^2(z) = b_1 H_\lambda^1(z) - \overline{b_1} H_\lambda^2(z).$$

Интеграл $\int_{\Re} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$ представляет целую функцию от z , так как подинтегральная функция есть целая функция от z , а путь интегри-

¹⁾ Здесь C_1 и C_2 идут параллельно мнимой оси (см. черт. 12) для того, чтоб обеспечить сходимость интегралов для положительных действительных значений z .

рования конечный. (Если $\lambda = n + \frac{1}{2}$, где n целое неотрицательное число, то на основании теоремы Коши значение интеграла равно нулю.) Кроме того интеграл является решением уравнения (17). Условимся рассматривать пока такие значения λ , для которых $\Re \lambda > 0$, $\lambda \neq n$ и $\lambda \neq n + \frac{1}{2}$, где $n \geq 0$ целое число. При этих условиях наш интеграл не равен тождественно нулю. В самом деле, при $z = 0$ он равен

$$2\pi i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}$$

(см. следующий п. 6). Отсюда следует, что b_1 и $b_2 = \bar{b}_1$, при этих значениях λ не равны нулю. Далее мы можем утверждать, что наш интеграл равен $c_1 \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$, где c_1 некоторое постоянное число. Действительно, общее решение уравнения (17) при наших условиях можно представить в виде:

$$c_1 \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} + c_2 \frac{J_{-\lambda}(z)}{z^\lambda}.$$

Но наш интеграл и функция $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ являются целыми функциями от z , между тем $\frac{J_{-\lambda}(z)}{z^\lambda}$ не является целой функцией от z , следовательно c_2 должно равняться нулю. Итак,

$$b_1 H_\lambda^1(z) - b_2 H_\lambda^2(z) = z^\lambda \int_{\Re} e^{iz\xi} (\xi^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi = c_1 J_\lambda(z).$$

Сравнивая с формулой (5) п. 3, имеем: $\frac{c_1}{2} = b_1 = -b_2 = -\bar{b}_1$, т. е. неравные нулю числа b_1 и b_2 отличаются только знаком и являются чисто мнимыми. Обозначив $\frac{1}{c_1}$ через c , получаем выражение для $J_\lambda(z)$, которое во всяком случае имеет место при наших условиях относительно λ :

$$J_\lambda(z) = cz^\lambda \int_{\Re} e^{iz\xi} (\xi^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi.$$

Чтобы определить постоянную c , мы сравниваем это выражение с выражением (16) и, полагая $z = 0$, находим соотношение:

$$c \int_{\Re} (\xi^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi = \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{v\sqrt{v^2 - 1}} dv.$$

Интеграл в левой части, как мы увидим в дальнейшем, имеет значение:

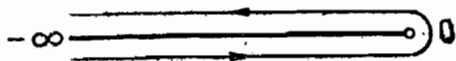
$$\int_{\mathfrak{H}} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = 2\pi i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}.$$

Чтобы вычислить значение интеграла в правой части, рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^v v^{t-1} dv$$

для действительных положительных значений t . Так как этот интеграл представляет аналитическую функцию от t , то достаточно свести его к известным аналитическим функциям при указанных значениях t .

Предполагая, что $t > 0$, мы можем стянуть круг радиуса 1 в точку — в начало координат; в самом деле, интеграл остается сходящимся, если путь интегрирования доходит до начала координат.



Черт. 14.

нат, так как показатель степени $t - 1$ больше чем -1 .

По теореме Коши значение интеграла не изменится, если интегрировать не по пути L , а от $-\infty$ до 0 под действительной осью и от 0 до $-\infty$ над действительной осью (черт. 14):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^v v^{t-1} dv = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 e^v v^{t-1} dv}_{\text{под}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} e^v v^{t-1} dv}_{\text{над}} \quad (\text{при } t > 0).$$

Полагаем $v = -w$, тогда первый интеграл равен:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 w^{t-1} e^{-(t-1)\pi i} e^{-w} (-dw) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} w^{t-1} e^{-(t-1)\pi i} e^{-w} dw,$$

а второй интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} w^{t-1} e^{(t-1)\pi i} e^{-w} (-dw),$$

следовательно, сумма равна:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} w^{t-1} e^{-w} (e^{t\pi i} - e^{-t\pi i}) dw;$$

так как $e^{t\pi i} - e^{-t\pi i} = 2i \sin \pi t$ и согласно определению

$$\int_0^{\infty} w^{t-1} e^{-w} dw = \Gamma(t),$$

то сумма интегралов равна:

$$\frac{\sin \pi t}{\pi} \Gamma(t).$$

Из формулы для гамма-функций

$$\Gamma(t) \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$$

получаем:

$$\frac{\sin \pi t}{\pi} \Gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-t)}.$$

Следовательно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L v^{t-1} e^v dv = \frac{1}{\Gamma(1-t)}.$$

Таким образом мы получаем для постоянной c значение:

$$c = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

и находим, наконец, для $J_\lambda(z)$ выражение:

$$J_\lambda(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{\mathfrak{H}} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta. \quad (18)$$

Это выражение имеет место для всех значений λ за исключением

$$\lambda = n + \frac{1}{2},$$

где n есть целое рациональное число, большее или равное нулю.

Для функций Ганкеля имеем соответствующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} H_\lambda^1(z) &= \frac{1}{\pi i} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{\mathfrak{C}_1} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta, \\ H_\lambda^2(z) &= -\frac{1}{\pi i} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{\mathfrak{C}_2} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (18')$$

Если $\Re(\lambda) > -\frac{1}{2}$, то из формулы (18) можно вывести часто употребляемую формулу:

$$J_{\lambda}(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} \int_{-1}^{+1} e^{iz\zeta} (1 - \zeta^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta. \quad (19)$$

Полагая $\zeta = \sin \tau$, получаем при условии $\Re(\lambda) > -\frac{1}{2}$ формулу:

$$J_{\lambda}(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \tau) (\cos \tau)^{2\lambda} d\tau. \quad (20)$$

6. Разложение бесселевых функций в степенные ряды. Можно получить разложение в степенной ряд функции $\frac{J_{\lambda}(z)}{z^{\lambda}}$, однозначной и регулярной во всей плоскости z , элементарным путем, если подставить, как мы это делали в гл. V, в дифференциальное уравнение (2) ряд:

$$u(z) = z^{\lambda} \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

и последовательно определять коэффициенты a_n . Но соответственно нашему ходу рассуждений мы здесь получим разложение в степенной ряд из интегральных выражений.

Мы исходим из формулы (18) и разлагаем функцию $e^{iz\zeta}$ в степенной ряд; при этом, чтобы иметь право применять эту формулу, мы предполагаем, что λ отлично от $n + \frac{1}{2}$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$). Так как этот ряд сходится равномерно в любой конечной области ζ , то мы можем почленно интегрировать и получаем:

$$J_{\lambda}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} i^n \int_{\Re} \zeta^n (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta.$$

При вычислении интегралов

$$\int_{\Re} \zeta^n (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$$

мы примем во внимание, что мы имеем дело с аналитическими функциями от λ и что поэтому достаточно определить эти функции для всех

значений λ , где $\Re(\lambda) > 0$. В этом случае мы можем стянуть путь интегрирования в отрезок $-1 \leq \xi \leq 1$, который пробегается с обеих сторон.

Значение подинтегрального выражения равно: справа над действительной осью и слева под ней:

$$e^{\pi i \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)} \xi^n (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}},$$

справа под действительной осью и слева над ней:

$$e^{-\pi i \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)} \xi^n (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}},$$

и следовательно:

$$\int_{\Re} \xi^n (\xi^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi = -2i \sin \pi \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 \xi^n (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi.$$

Интеграл, стоящий в правой части, обращается в нуль при нечетном n ; при четных значениях имеем:

$$\int_{\Re} \xi^{2n} (\xi^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi = 4i \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \int_0^1 \xi^{2n} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi.$$

Путем подстановки $\xi^2 = u$ получаем:

$$\int_{\Re} \xi^{2n} (\xi^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi = 2i \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \int_0^1 u^{n - \frac{1}{2}} (1 - u)^{\lambda - \frac{1}{2}} du.$$

Интеграл в правой части является эйлеровым интегралом первого рода. Из известного соотношения

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

следует:

$$\begin{aligned} \int_{\Re} \xi^{2n} (\xi^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\xi &= 2i \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) B \left(n + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2i \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(n + \lambda + 1 \right)}. \end{aligned}$$

Но $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, следовательно:

$$\Gamma \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{\Gamma \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)}.$$

Таким образом получаем:

$$\int_{\Re} \zeta^{2n} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = 2\pi i \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \Gamma(n + \lambda + 1)},$$

в частности при $n = 0$:

$$\int_{\Re} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = 2\pi i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \Gamma(\lambda + 1)}.$$

Подставляя найденные значения в наш ряд для $J_\lambda(z)$, получаем:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n + \lambda + 1)}$$

или, ввиду того что

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)}. \quad (21)$$

Коэффициенты $\frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)}$ не обращаются в нуль, если λ не является целым числом. Если λ целое число, то

$$\frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)} = 0 \quad \text{при } n + \lambda + 1 \leq 0,$$

$$\frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)} = \frac{1}{(n + \lambda)!} \quad \text{при } n + \lambda + 1 > 0.$$

Сделанное раньше допущение, что $\lambda \neq n + \frac{1}{2}$, оказывается ненужным для справедливости разложения (21), так как этот ряд равномерно сходится и при $\lambda = n + \frac{1}{2}$, а $J_\lambda(z)$, как мы уже видели, представляет аналитическую функцию от λ .

Так как ряд в формуле (21) сходится при всех значениях z , то $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ представляет целую трансцендентную функцию от z , если только он не сводится к многочлену или постоянной. Но последнее невозможно, так как $\Gamma(n + \lambda + 1)$ представляет конечное число за исключением тех случаев, когда λ есть целое отрицательное число; но и тогда в ряду

исчезает только конечное число членов, потому что коэффициент при z^{2n} при достаточно больших значениях n отличен от нуля; следовательно, ряд для $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ во всяком случае содержит бесчисленное множество отличных от нуля членов.

Из формулы (21) непосредственно ясно, что функция $J_\lambda(z)$ имеет при действительных значениях λ и z действительные значения, так как гамма-функция имеет действительные значения при действительных значениях аргумента.

7. Соотношения между бесселевыми функциями. Мы вывели для бесселевых функций разложение в степенной ряд и получили для них выражения с помощью интегралов; теперь мы перейдем к выводу некоторых общих свойств этих функций, исходя из их выражений в виде интегралов. Из формулы (см. стр. 453)

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_L v^{-(\lambda+1)} e^{v - \frac{z^2}{4v}} dv, \quad (16)$$

где L есть путь интегрирования, изображенный на черт. 11 (стр. 453), следует:

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L v^{-(\lambda+1)} e^{v - \frac{z^2}{4v}} dv.$$

Дифференцируем обе части по z^2 , причем в правой части будем дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_L v^{-(\lambda+1)} \left(\frac{-1}{4v}\right)^k e^{v - \frac{z^2}{4v}} dv.$$

Мы имеем право дифференцировать под знаком интеграла, так как вдоль пути интегрирования L имеет место неравенство $|v| \geq 1$ и вместе с тем при $|z| < h$ функция

$$\left| e^{-\frac{z^2}{4v}} \right| \leq e^{\left| \frac{z^2}{4v} \right|} \leq e^{h^2}$$

равномерно ограничена, т. е. правая часть представляет равномерно сходящийся интеграл от аналитической функции от z^2 . Умножая обе части последнего равенства на $z^{\lambda+k}$, замечаем, что справа стоит опять бесселева функция, и мы получаем:

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}, \quad (22)$$

или, записывая в иной форме:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = (-1)^k \frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}.$$

В частности при $k=1$ имеем:

$$\frac{d}{dz} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}, \quad (23)$$

т. е. рекуррентную формулу:

$$\frac{dJ_{\lambda}(z)}{dz} = \frac{\lambda}{z} J_{\lambda}(z) - J_{\lambda+1}(z), \quad (24)$$

которая при $\lambda = 0$ принимает вид:

$$J_1(z) = -\frac{dJ_0(z)}{dz}.$$

Исследуем еще особо случаи $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$. На основании формулы (21) имеем:

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n};$$

так как

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

то

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$$

Пользуясь формулой (23) при $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{d}{dz} \frac{J_{-\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{J_{\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}},$$

получаем:

$$\frac{d}{dz} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z = -\frac{J_{\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}},$$

т. е.

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z. \quad (25)$$

Разделив, находим:

$$\frac{J_{-\frac{1}{2}}(z)}{J_{\frac{1}{2}}(z)} = \operatorname{ctg} z.$$

Следовательно, функции Бесселя при $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ просто выражаются с помощью тригонометрических функций.

Из соотношений

$$J_{\lambda}(z) = \frac{H_{\lambda}^1(z) + H_{\lambda}^2(z)}{2},$$

$$J_{-\lambda}(z) = \frac{H_{\lambda}^1(z) e^{i\lambda\pi} + H_{\lambda}^2(z) e^{-i\lambda\pi}}{2},$$

при $\lambda = \frac{1}{2}$ следует:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{H_{\frac{1}{2}}^1(z) + H_{\frac{1}{2}}^2(z)}{2},$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{i \left[H_{\frac{1}{2}}^1(z) - H_{\frac{1}{2}}^2(z) \right]}{2}$$

или

$$-iJ_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{H_{\frac{1}{2}}^1(z) - H_{\frac{1}{2}}^2(z)}{2}.$$

Складывая, получаем:

$$H_{\frac{1}{2}}^1(z) = J_{\frac{1}{2}}(z) - iJ_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (\sin z - i \cos z) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz}, \quad (26)$$

а вычитая, получаем:

$$H_{\frac{1}{2}}^2(z) = J_{\frac{1}{2}}(z) + iJ_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (\sin z + i \cos z) = i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz}. \quad (26')$$

Эти выкладки иллюстрируют тот факт, о котором мы уже упоминали, что между функциями Бесселя, Неймана и Ганкеля существуют соотношения, аналогичные соотношениям между синусом, косинусом и показательной функцией. И в теоремах, которые мы дальше выведем, относительно распределения нулей мы снова заметим эту аналогию (см. п. 8).

На стр. 463 мы вывели соотношение:

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k} \frac{J_{\lambda}(z)}{z^{\lambda}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}. \quad (22)$$

Применим его к случаю $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{z} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\frac{1}{2}+k}(z)}{z^{\frac{1}{2}+k}},$$

тогда получим:

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^k \frac{(2z)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^k}{d(z^2)^k} \frac{\sin z}{z},$$

т. е. всякая бесселева функция $J_{k+\frac{1}{2}}(z)$ может быть выражена в виде произведения рациональной функции от z и от тригонометрических функций z на $\sqrt{z}$.

К другой рекуррентной формуле мы приходим, дифференцируя обе части равенства:

$$J_{\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\frac{z}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta.$$

Таким образом получаем:

$$J'_{\lambda}(z) = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \int_L e^{\frac{z}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} \zeta^{-\lambda} d\zeta - \int_L e^{\frac{z}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} \zeta^{-\lambda-2} d\zeta \right\},$$

или

$$J'_{\lambda}(z) = \frac{1}{2} \{ J_{\lambda-1}(z) - J_{\lambda+1}(z) \}. \quad (27)$$

Вычитая из последней формулы соотношение

$$J'_{\lambda}(z) = \frac{\lambda}{z} J_{\lambda}(z) - J_{\lambda+1}(z),$$

находим:

$$J_{\lambda-1}(z) + J_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} J_{\lambda}(z). \quad (28)$$

Это соотношение мы можем записать также следующим образом:

$$\frac{J_{\lambda-1}(z)}{J_{\lambda}(z)} = \frac{2\lambda}{z} - \frac{1}{\frac{J_{\lambda}(z)}{J_{\lambda+1}(z)}} = \frac{2\lambda}{z} - \frac{1}{\frac{2\lambda+2}{z} - \frac{1}{\frac{2\lambda+4}{z} - \dots}}$$

Таким образом мы представили отношение $\frac{J_{\lambda-1}(z)}{J_{\lambda+1}(z)}$ в виде бесконечной непрерывной дроби; однако мы здесь не можем останавливаться на исследовании сходимости этой дроби. Если умножим обе части на z , то непрерывная дробь примет вид:

$$z \frac{J_{\lambda-1}(z)}{J_{\lambda}(z)} = 2\lambda - \frac{z^2}{2\lambda+2} - \frac{z^2}{2\lambda+4} - \dots \quad (29)$$

При $\lambda = \frac{1}{2}$ имеем:

$$z \frac{J_{-\frac{1}{2}}(z)}{J_{\frac{1}{2}}(z)} = z \operatorname{ctg} z = 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \dots \quad (30)$$

Эта *бесконечная непрерывная дробь* для $\operatorname{ctg} z$ была известна уже в XVIII столетии, и с помощью этой непрерывной дроби Ламберт¹⁾ доказал иррациональность числа π , положив в ней $z = \frac{\pi}{4}$.

Для бесселевых функций с целочисленным индексом n имеет место следующая *теорема сложения*:

$$J_n(a+b) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(a) J_{n-\nu}(b). \quad (31)$$

Доказательство непосредственно вытекает из рассмотрения производящей функции $e^{i(a+b)\sin \zeta} = e^{ia\sin \zeta} \cdot e^{ib\sin \zeta}$. На основании этого имеем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a+b) e^{in\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(a) J_{n-\nu}(b) \right] e^{in\zeta},$$

откуда следует наше утверждение.

При $n=0$ имеет место несколько более общее соотношение:

$$J_0(\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}) = J_0(a) J_0(b) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{\nu}(a) J_{-\nu}(b) \cos \nu\alpha. \quad (32)$$

Для доказательства воспользуемся интегральным выражением (10) и запишем произведение $J_{\nu}(a) J_{-\nu}(b)$ в виде двойного интеграла:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\zeta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\zeta_2 e^{i(a\sin \zeta_1 + b\sin \zeta_2) - i\nu(\zeta_1 - \zeta_2)} d\zeta_2.$$

Но этот интеграл можно после некоторых преобразований привести к виду:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_0(\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}) e^{-i\nu\alpha} d\alpha,$$

а отсюда следует соотношение (32).

Наконец, заметим еще, что функция $f(r)$, удовлетворяющая некоторым условиям, может быть представлена с помощью бесселевых функций подобным же образом, как с помощью показательных функций на основании интегральной теоремы Фурье (см. гл. II, § 6 и гл. V, § 12).

Пусть $f(r)$ — непрерывная и кусочно гладкая функция, и пусть существует

$$\int_0^{\infty} r |f(r)| dr.$$

¹⁾ Lambert J. H., Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques, Hist. Acad., Berlin 1761, стр. 265—322, особенно стр. 269.

Тогда для каждого целого числа n и $r > 0$ справедлива формула:

$$f(r) = \int_0^{\infty} s ds \int_0^{\infty} t f(t) J_n(st) J_n(sr) dt. \quad (33)$$

К этой формуле приводит следующее рассуждение: полагаем

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta$$

и рассматриваем функцию:

$$g(x, y) = f(r) e^{in\vartheta},$$

которая в силу наших допущений относительно функции $f(r)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные производные повсюду за исключением окрестности начала координат. Применяя к этой функции $g(x, y)$ интегральную теорему Фурье для случая двух измерений (см. гл. II, § 6, п. 2) и изменяя порядок интегрирования двух внутренних интегралов, что требует, конечно, строгого обоснования, получим:

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux+vy)} du dv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) e^{-i(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta.$$

Вводя также для переменных интегрирования $\xi, \eta; u, v$ полярные координаты:

$$\begin{aligned} \xi &= s \cos \alpha, & u &= t \cos \beta, \\ \eta &= s \sin \alpha, & v &= t \sin \beta, \end{aligned}$$

получим:

$$f(r) e^{in\vartheta} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} t dt \int_{-\pi}^{\pi} e^{irt \cos(\beta-\vartheta)} d\beta \int_0^{\infty} s f(s) ds \int_{-\pi}^{\pi} e^{ina} e^{-ist \cos(\alpha-\beta)} d\alpha.$$

Применяя подстановку

$$\beta - \vartheta = \frac{\pi}{2} + \beta',$$

$$\alpha - \beta = \alpha' - \frac{\pi}{2}$$

и принимая во внимание периодичность показательной функции, приводим это выражение к виду:

$$f(r) e^{in\vartheta} = \frac{e^{in\vartheta}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} t dt \int_{-\pi}^{\pi} e^{-irt \sin \beta' + in\beta'} d\beta' \int_0^{\infty} s f(s) ds \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ist \sin \alpha' + in\alpha'} d\alpha';$$

выполнив при помощи формулы (10) интегрирования по α' и по β' , непосредственно получаем требуемое соотношение:

$$f(r) = \int_0^{\infty} t J_n(rt) dt \int_0^{\infty} s f(s) J_n(st) ds.$$

Вместо того чтобы доказывать законность изменения порядка интегри-

рования, мы можем вести доказательство формулы (33) также следующим способом, аналогичным методу доказательства интегральной формулы Фурье (гл. II, § 6). Мы пользуемся соотношением, имеющим место для любой кусочно-гладкой и обращающейся в нуль при $r=0$ функции $f(r)$:

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^a s f(s) P_v(s, r) ds, \\ P_v(s, r) &= \int_0^v t J_n(st) J_n(rt) dt, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где a есть произвольное положительное число $a > r > 0$. Это соотношение вполне соответствует интегралу Дирихле (гл. II) и аналогичным образом доказывается. Мы покажем, что при условии существования

интеграла $\int_0^\infty r |f(r)| dr$ интегрирование по s можно распространить до бесконечности. В самом деле, из тождества

$$P_v(r, s) = \frac{v}{s^2 - r^2} \{s J_n(vr) J_{n+1}(vs) - r J_n(vs) J_{n+1}(vr)\} \quad (r \neq s), \quad (35)$$

которое вытекает из формулы (36) следующего пункта, если принять во внимание рекуррентную формулу (24), следует, что $P_v(r, s)$ при постоянном значении $r \neq 0$ с возрастанием s стремится к нулю равномерно относительно v (можно воспользоваться, например, асимптотическими разложениями бесселевых функций, см. гл. V, § 11, п. 2 или гл. VII, § 6, п. 2). Поэтому и интеграл

$$\int_a^b s f(s) P_v'(r, s) ds$$

может быть сделан путем выбора достаточно большого значения a сколь угодно малым и притом равномерно относительно v и b . Отсюда следует наше утверждение, т. е. правильность формулы (33).

8. Нули бесселевых функций. В заключение выведем еще несколько теорем относительно нулей бесселевых функций¹⁾.

Бесселева функция $J_\lambda(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению.

$$J_\lambda''(z) + \frac{1}{z} J_\lambda'(z) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) J_\lambda(z) = 0.$$

Полагая

$$z = \xi_1 t, \quad \xi_1 = \text{const} \neq 0,$$

имеем:

$$J_\lambda''(\xi_1 t) + \frac{1}{\xi_1 t} J_\lambda'(\xi_1 t) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\xi_1^2 t^2}\right) J_\lambda(\xi_1 t) = 0.$$

¹⁾ См. также аналогичные рассуждения в гл. VI, § 2, п. 4.

Подобным же образом, полагая

$$z = \xi_2 t, \quad \xi_2 = \text{const} \neq 0,$$

имеем:

$$J''_{\lambda}(\xi_2 t) + \frac{1}{\xi_2 t} J'_{\lambda}(\xi_2 t) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\xi_2^2 t^2}\right) J_{\lambda}(\xi_2 t) = 0.$$

Из этих двух уравнений выведем новое уравнение, умножая первое на $\xi_1^2 t J_{\lambda}(\xi_2 t)$, второе на $-\xi_2^2 t J_{\lambda}(\xi_1 t)$ и складывая. Получаем:

$$\begin{aligned} & t [\xi_1^2 J''_{\lambda}(\xi_1 t) J_{\lambda}(\xi_2 t) - \xi_2^2 J''_{\lambda}(\xi_2 t) J_{\lambda}(\xi_1 t)] + \\ & + [\xi_1 J'_{\lambda}(\xi_1 t) J_{\lambda}(\xi_2 t) - \xi_2 J'_{\lambda}(\xi_2 t) J_{\lambda}(\xi_1 t)] + \\ & + (\xi_1^2 - \xi_2^2) t J_{\lambda}(\xi_1 t) J_{\lambda}(\xi_2 t) = 0. \end{aligned}$$

Сумма первых двух слагаемых представляет производную по t от функции

$$t [\xi_1 J'_{\lambda}(\xi_1 t) J_{\lambda}(\xi_2 t) - \xi_2 J'_{\lambda}(\xi_2 t) J_{\lambda}(\xi_1 t)];$$

интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до t , находим поэтому:

$$t [\xi_1 J'_{\lambda}(\xi_1 t) J_{\lambda}(\xi_2 t) - \xi_2 J'_{\lambda}(\xi_2 t) J_{\lambda}(\xi_1 t)] + (\xi_1^2 - \xi_2^2) \int_0^t t J_{\lambda}(\xi_1 t) J_{\lambda}(\xi_2 t) dt = 0. \quad (36)$$

Следовательно, интегрируя в пределах от 0 до 1, получим:

$$[\xi_1 J'_{\lambda}(\xi_1) J_{\lambda}(\xi_2) - \xi_2 J'_{\lambda}(\xi_2) J_{\lambda}(\xi_1)] + (\xi_1^2 - \xi_2^2) \int_0^1 t J_{\lambda}(\xi_1 t) J_{\lambda}(\xi_2 t) dt = 0. \quad (37)$$

Из этого уравнения мы можем сделать заключение относительно распределения корней функции $J_{\lambda}(z)$ (см. гл. VI, § 6).

Пусть ξ есть отличный от нуля корень функции $J_{\lambda}(z)$. Полагаем $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \bar{\xi}$, где $\bar{\xi}$ означает число, сопряженное с ξ . Следовательно, ξ_1 и ξ_2 совпадают только для действительных значений ξ .

Пусть λ имеет действительное значение, тогда при действительных значениях z функция $J_{\lambda}(z)$ также имеет действительные значения. Коэффициенты степенного ряда (21) имеют действительные значения; поэтому, если $J_{\lambda}(\xi)$ равно нулю, то и $J_{\lambda}(\bar{\xi}) = 0$. Следовательно, в уравнении (37) мы должны положить $J_{\lambda}(\xi_1) = J_{\lambda}(\xi_2) = 0$; тогда выражение в квадратных скобках обращается в нуль, и второе слагаемое принимает вид:

$$(\xi^2 - \bar{\xi}^2) \int_0^1 t |J_{\lambda}(\xi t)|^2 dt = 0.$$

Мы предположили, что ξ не равно нулю. Так как бesselова функция не равна тождественно нулю, то $\int_0^1 t |J_{\lambda}(\xi t)|^2 dt \neq 0$, следовательно,

$$\xi^2 - \bar{\xi}^2 = (\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi}) = 0,$$

т. е. $\xi = \bar{\xi}$ или $\xi = -\bar{\xi}$. Таким образом ξ есть либо действительное число, либо чисто мнимое. Итак, при действительных значениях $\lambda > -1$ бесселева функция $J_\lambda(z)$ может иметь только действительные или чисто мнимые корни.

Чтобы исследовать, как обстоит дело с чисто мнимыми корнями бесселевых функций, мы исходим из разложения в степенной ряд:

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}.$$

Полагая $z = ai$, где a — действительное число, не равное нулю, имеем:

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n! \Gamma(n+\lambda+1)}.$$

Так как λ имеет действительное значение, то $n+\lambda+1$ имеет для всех n , за исключением конечного числа, положительные значения; так как, далее, гамма-функция имеет при положительных значениях аргумента положительные значения, то все коэффициенты ряда, за исключением конечного числа в начале ряда, положительны. При больших значениях $|a|$ преобладающее влияние имеют более высокие степени, кроме того, при $a \neq 0$ всегда $\left(\frac{a}{2}\right)^{2n} > 0$, следовательно, $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} > 0$ при всех

достаточно больших значениях $|a|$. Итак, корни функции $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ могут встречаться только на конечном отрезке мнимой оси; поэтому $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ как целая трансцендентная функция может иметь только конечное число чисто мнимых корней. При $\lambda > -1$ функция $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ не может иметь чисто мнимых корней, так как в этом случае для всех значений n имеем:

$$n+\lambda+1 > 0, \quad \Gamma(n+\lambda+1) > 0;$$

все коэффициенты ряда имеют, следовательно, положительные значения, а потому и сумма ряда положительна. В частности при $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ не существует чисто мнимых корней.

Итак, имеем следующий результат: *при действительных значениях λ функция $J_\lambda(z)$ может иметь только конечное число чисто мнимых корней; при $\lambda > -1$ функция $J_\lambda(z)$ имеет только вещественные корни.*

Что функция $J_\lambda(z)$ имеет при целом положительном значении λ бесчисленное множество вещественных корней, доказано уже рассмотренными предыдущей главы, так как корни $J_n(z)$ представляют систему собственных значений дифференциального уравнения.

В заключение скажем еще о расположении действительных корней бесселевых функций.

Полагая при действительном значении λ

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = v, \quad J_\lambda(z) = vz^\lambda,$$

имеем (см. стр. 454):

$$zv'' + (2\lambda + 1)v' + zv = 0. \quad (17)$$

Если ξ есть положительный корень производной v' , то дифференциальное уравнение при $z = \xi$ переходит в

$$\xi v''(\xi) + \xi v(\xi) = 0,$$

т. е. в

$$v''(\xi) + v(\xi) = 0.$$

Отсюда следует, что в точке ξ не может обращаться в нуль также вторая производная $v''(\xi)$, ибо в противном случае и значение $v(\xi)$ равнялось бы нулю, но из условий $v(\xi) = 0$ и $v'(\xi) = 0$ вытекало бы, что решение $v(z)$ уравнения (17) тождественно равно нулю. Поэтому $v''(\xi)$ и $v(\xi)$ имеют разные знаки.

Пусть ξ_1 и ξ_2 ($> \xi_1$) — два последовательных положительных корня производной $v'(z)$, т. е. пусть $v'(z) \neq 0$ при $\xi_1 < z < \xi_2$. По теореме Ролля в промежутке между ξ_1 и ξ_2 лежит нечетное число корней v'' ; следовательно, $v''(\xi_1)$ и $v''(\xi_2)$, а вместе с тем и $v(\xi_1)$ и $v(\xi_2)$ имеют разные знаки. Следовательно, между ξ_1 и ξ_2 должно лежать нечетное число корней функции $v(z)$, т. е. по крайней мере один корень. С другой стороны, на основании теоремы Ролля в этом промежутке может лежать только один корень v , так как между двумя последовательными корнями функции v должно лежать нечетное число корней производной v' , но v' по условию не имеет корней между ξ_1 и ξ_2 . Итак, между ξ_1 и ξ_2 функция v имеет только один корень, т. е. между двумя последовательными положительными корнями производной v' лежит один и только один корень функции v . *Положительные корни v и v' взаимно отделяют друг друга; то же справедливо и для отрицательных корней.*

Мы вывели в п. 7 стр. 463 соотношение:

$$\frac{d}{dz} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = - \frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}, \quad (23)$$

т. е.

$$v' = - \frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}.$$

Так как корни функции v и корни ее производной v' взаимно отделяют друг друга и так как, далее,

$$v = \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}, \quad v' = - \frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}$$

и потому все положительные и отрицательные корни v и v' являются соответственно корнями функций $J_\lambda(z)$ и $J_{\lambda+1}(z)$, то мы имеем: *корни функции $J_\lambda(z)$ и корни функции $J_{\lambda+1}(z)$ взаимно отделяют друг друга.*

При $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ мы, например, нашли:

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z;$$

корнями первой функции являются числа:

$$\pm \frac{\pi}{2}, \quad \pm \frac{3\pi}{2}, \quad \pm \frac{5\pi}{2}, \dots, \quad \pm \frac{(2n+1)\pi}{2}, \dots,$$

корнями второй:

$$0, \quad \pm \pi, \quad \pm 2\pi, \dots, \quad \pm n\pi, \dots;$$

действительно, эти корни взаимно отделяют друг друга.

И в этом отношении функции Бесселя обнаруживают сходство с тригонометрическими функциями.

9. Функции Неймана. Если λ не является целым числом, то из соотношений:

$$J_{\lambda}(z) = \frac{1}{2} [H_{\lambda}^1(z) + H_{\lambda}^2(z)], \quad (5)$$

$$J_{-\lambda}(z) = \frac{1}{2} [e^{i\lambda\pi} H_{\lambda}^1(z) + e^{-i\lambda\pi} H_{\lambda}^2(z)] \quad (7)$$

можно определить $H_{\lambda}^1(z)$ и $H_{\lambda}^2(z)$. Мы получаем:

$$H_{\lambda}^1(z) = -\frac{1}{i \sin \lambda\pi} [J_{\lambda}(z) e^{-i\lambda\pi} - J_{-\lambda}(z)], \quad (38)$$

$$H_{\lambda}^2(z) = \frac{1}{i \sin \lambda\pi} [J_{\lambda}(z) e^{i\lambda\pi} - J_{-\lambda}(z)], \quad (38')$$

и вместе с тем

$$N_{\lambda}(z) = \frac{1}{2i} [H_{\lambda}^1(z) - H_{\lambda}^2(z)] = \frac{J_{\lambda}(z) \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda\pi}. \quad (39)$$

Однако это выражение неймановой функции с помощью $J_{\lambda}(z)$ и $J_{-\lambda}(z)$ неприменимо, когда λ есть целое число. В самом деле тогда и числитель $J_{\lambda} \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}$, рассматриваемый как функция от λ , и знаменатель $\sin \lambda\pi$ обращаются в нуль, причем λ является простым корнем этих функций. Но так как числитель при $z \neq 0$ и знаменатель являются аналитическими функциями от λ , то мы имеем право дифференцировать числитель и знаменатель, чтобы найти значение функций $N_{\lambda}(z)$ при целом значении λ . Переходя к пределу в частном

$$\frac{\frac{\partial J_{\lambda}(z)}{\partial \lambda} \cos \lambda\pi - J_{\lambda}(z) \pi \sin \lambda\pi - \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda}}{\pi \cos \lambda\pi},$$

находим, что при целом λ

$$N_{\lambda}(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_{\lambda}(z)}{\partial \lambda} - (-1)^{\lambda} \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} \right). \quad (40)$$

Легко непосредственно проверить, что полученное выражение является при целых значениях λ решением дифференциального уравнения. В самом деле, дифференцируя дифференциальное уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 J_\lambda(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dJ_\lambda(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) J_\lambda(z) = 0,$$

которое представляет тождество относительно λ , по λ , получаем:

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{z^2} J_\lambda(z).$$

Подобным же образом для $-\lambda$ имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{z^2} J_{-\lambda}(z).$$

Умножаем обе части второго уравнения на $(-1)^\lambda$ и вычитаем из первого уравнения, тогда в силу соотношения $J_\lambda(z) = (-1)^\lambda J_{-\lambda}(z)$, имеющего место при целых значениях λ , правая часть результирующего уравнения будет равна нулю; следовательно, решением дифференциального уравнения Бесселя при целом λ будет также функция

$$\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} = \pi N_\lambda(z) \quad (\lambda - \text{целое число}).$$

Только что выведенные соотношения между функцией Неймана $N_\lambda(z)$ и функциями $J_\lambda(z)$ и $J_{-\lambda}(z)$ дают нам возможность находить при помощи выражений для бесселевых функций соответствующие выражения для $N_\lambda(z)$. Так, например, из интегрального выражения (9) при $\lambda \neq n$ получаем:

$$N_\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi \sin \pi \lambda} \int_L e^{-iz \sin \zeta} (e^{i\lambda \zeta} \cos \pi \lambda - e^{-i\lambda \zeta}) d\zeta; \quad (41)$$

при $\lambda = n$ имеем:

$$N_n(z) = -\frac{i}{\pi^2} \int_L \zeta e^{-iz \sin \zeta} \cos n\zeta d\zeta \quad (n - \text{четное}), \quad (42)$$

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi^2} \int_L \zeta e^{-iz \sin \zeta} \sin n\zeta d\zeta \quad (n - \text{нечетное}). \quad (42')$$

Применяя интегральную формулу (20) из п. 5, получаем, например, для $N_0(z)$, ввиду того, что

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0},$$

формулу:

$$\pi N_0(z) = 2(C + \log 2) J_0(z) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \zeta) \log(z \sin^2 \zeta) d\zeta, \quad (43)$$

где C есть постоянная Эйлера.

Подобным же образом можно получить разложение в ряд для $N_\lambda(z)$ из разложений для $J_\lambda(z)$ и $J_{-\lambda}(z)$. Рассмотрим ближе тот случай, когда λ целое число. Имеем:

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}; \quad (21)$$

так как мы имеем право дифференцировать под знаком суммы по λ , то получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} &= \log \frac{z}{2} J_\lambda(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n+\lambda+1}, \\ \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} &= -\log \frac{z}{2} J_{-\lambda}(z) - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n-\lambda+1} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Определим прежде всего значения производных $\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}$ при целых значениях t . Из функционального соотношения

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad (t \neq 0, -1, -2, \dots)$$

путем логарифмического дифференцирования получаем:

$$\frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)} = \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

Применяя эту формулу k раз, имеем:

$$\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)} = \frac{1}{t+k} + \frac{1}{t+k-1} + \dots + \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Далее,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} = -\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma^2(t)} = -\frac{1}{\Gamma(t)} \cdot \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

Полагая в предыдущей формуле $t=1$, $k=n-1$, получаем:

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 - C$$

для $n=1, 2, 3, \dots$. Зная значения $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ для целых положительных значений t , мы вместе с тем знаем искомые значения производной $\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}$ в этих точках:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=1} = C,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} = -\frac{1}{(t-1)!} \left[\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2} + \dots + 1 - C \right] \quad \text{при } t=2, 3, \dots$$

Чтобы найти значения производной при целых отрицательных значениях t , мы решим уравнение:

$$\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)} = \frac{1}{t+k} + \frac{1}{t+k-1} + \dots + \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$

относительно $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$. Умножая затем обе части на $-\frac{1}{\Gamma(t)}$, получим:

$$-\frac{1}{\Gamma(t)} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{1}{\Gamma(t)} \left\{ \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \dots + \frac{1}{t+k-1} + \frac{1}{t+k} \right\} - \frac{1}{\Gamma(t)} \frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)}.$$

Если будем теперь неограниченно приближать t к $-k$ ($k=0, 1, 2, \dots$), то левая часть равенства, а следовательно и правая будет, стремиться к значению производной $\left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} \right)_{t=-k}$. Но при $t \rightarrow -k$ выражение $\frac{1}{\Gamma(t)}$ стремится к нулю, следовательно, в правой части остается только член $\frac{1}{\Gamma(t)} \cdot \frac{1}{t+k}$, так как сумма $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \dots + \frac{1}{t+k-1}$ и выражение $\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)}$ имеют конечные значения. Умножив числитель и знаменатель остающегося члена на $t(t+1)\dots(t+k-1)$ и приняв во внимание функциональное уравнение для гамма-функции, получим, что знаменатель равен $\Gamma(t+k+1)$ и стремится при $t \rightarrow -k$ к $\Gamma(1)=1$; так как числитель стремится при этом к $(-1)^k k!$, то:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(t)} \right)_{t=-k} = (-1)^k k!.$$

Подставив значения производной $\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}$ для целых значений t в ряды (44), мы при $\lambda=1, 2, \dots$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} \pi N_\lambda(z) &= \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} = \\ &= 2 J_\lambda(z) \left(\log \frac{z}{2} + C \right) - \left(\frac{z}{2} \right)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\lambda-1} \frac{(\lambda-n-1)!}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n} - \\ &\quad - \left(\frac{z}{2} \right)^\lambda \frac{1}{\lambda!} \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \dots + 1 \right\} - \\ &\quad - \left(\frac{z}{2} \right)^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2} \right)^{2n}}{n! (n+\lambda)!} + \left\{ \frac{1}{n+\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n+\lambda-1} + \dots + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

а при $\lambda = 0$ имеем:

$$\pi N_0(z) = 2 J_0(z) \left(\log \frac{z}{2} + C \right) - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n!]^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \right\}.$$

Последние разложения позволяют нам выяснить характер *особых точек*, которые могут встретиться в решениях дифференциального уравнения Бесселя.

Если не считать точки $z = \infty$, которая является существенной особой точкой для любого решения, не обращающегося тождественно в нуль, единственной особой точкой решений дифференциального уравнения Бесселя может служить точка $z = 0$.

Если λ не является целым числом, то общее решение можно представить с помощью функций $J_\lambda(z)$ и $J_{-\lambda}(z)$, и потому при $z = 0$ могут встретиться только особенности вида z^λ или $z^{-\lambda}$.

Если λ равно целому числу n , то решения могут иметь при $z = 0$, кроме полюса порядка n , еще логарифмическую особенность вида $z^n \log z$. В самом деле любое решение можно выразить как линейную комбинацию функций $J_n(z)$ и $N_n(z)$, а эти функции других особенностей не имеют.

В частности бesselевы функции $J_n(z)$ с целочисленным индексом n представляют решения, которые остаются регулярными и в точке $z = 0$.

§ 3. Шаровые функции Лежандра.

Мы в нескольких местах этой книги ¹⁾ исследовали шаровые функции Лежандра и получающиеся из них дифференцированием шаровые функции высшего порядка, при действительных значениях независимой переменной, и вывели много свойств этих функций. Теперь, переходя к комплексному переменному $z = x + iy$, мы выведем здесь для этих функций выражения с помощью интегралов и вместе с тем найдем остальные решения дифференциального уравнения Лежандра; при этом сама собой обнаружится возможность освободиться от ограничения, что параметр n в функции Лежандра $P_n(z)$ есть целое положительное число ²⁾.

1. Интеграл Шлефли. Из выражения (гл. II, § 8, стр. 77)

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

для полинома Лежандра n -го порядка на основании интегральной формулы Коши вытекает для любых комплексных значений z соотношение:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n (\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (46)$$

¹⁾ В гл. II, § 8 и гл. V, § 10, 2.

²⁾ Ср. *Whittaker E. T. and Watson G. N., A course of modern analysis*, 3-е издание, стр. 302—336, Cambridge 1920.

где путь интегрирования C в плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ окружает точку $\zeta = z$ и пробегается в положительном направлении. Это выражение, которое было дано Шлефли (Schläfli), приводит к важным следствиям и обобщениям. Прежде всего заметим, что мы можем непосредственно проверить, что интегральное выражение (46) удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра:

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dP_n}{dz} \right] + n(n+1) P_n = 0.$$

В самом деле, дифференцирование под знаком интеграла дает для левой части уравнения выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)}{2\pi i 2^n} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+3}} [(n+2)(1 - z^2) - 2z(\zeta - z) + n(\zeta - z)^2] d\zeta = \\ &= \frac{n+1}{2\pi i 2^n} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+3}} [2(n+1)\zeta(\zeta - z) - (n+2)(\zeta^2 - 1)] d\zeta = \\ &= \frac{n+1}{2\pi i 2^n} \int_C \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{(\zeta^2 - 1)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+2}} \right] d\zeta, \end{aligned}$$

которое должно равняться нулю, так как путь интегрирования C — замкнутая линия, а функция $\frac{(\zeta^2 - 1)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+2}}$ есть однозначная функция от ζ . Мы можем теперь воспользоваться этой проверкой, для того чтобы обобщить определение функции $P_n(z)$ на любые значения параметра n . Действительно, интеграл Шлефли (46) представляет для любого n решение дифференциального уравнения Лежандра, если только выражение $\frac{(\zeta^2 - 1)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+2}}$ при обходе пути интегрирования возвращается к своему первоначальному значению, т. е. тогда, например, когда путь интегрирования замкнут на римановой поверхности подинтегрального выражения. Но функция $P_n(z)$ уже не будет, вообще говоря, целой рациональной функцией от z и даже не будет однозначной аналитической функцией от z . Такой путь получаем следующим образом: разрежем плоскость ζ вдоль действительной оси от -1 до $-\infty$ и вдоль произвольного пути от точки 1 до точки z ; подобным же образом разрежем плоскость z от -1 до $-\infty$ и выберем за путь C замкнутую кривую, содержащую внутри точки $\zeta = z$ и $\zeta = +1$, обходя их в положительном направлении, и не содержащую точки $\zeta = -1$. Определенную таким образом функцию

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^\nu}{2^\nu (\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta, \quad (47)$$

Однозначную во всей взрезанной плоскости z , мы назовем *шаровой функцией Лежандра индекса ν* . Она удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра

$$[(1 - z^2) u']' + \nu(\nu + 1) u = 0 \quad (48)$$

и может быть охарактеризована как тот однозначно определенный интеграл этого уравнения, который при $z=1$ остается конечным¹⁾ и имеет значение

$$P_\nu(1) = 1.$$

Это непосредственно следует из интегрального выражения, если в нем z неограниченно приближать к единице. Так как дифференциальное уравнение не изменяется, если в нем заменить ν через $-\nu-1$, то отсюда вытекает тождество:

$$P_\nu(z) = P_{-\nu-1}(z),$$

проверка которого путем вычисления не так проста.

Функция $P_\nu(z)$ удовлетворяет, как читатель легко проверит, исходя из интегрального выражения, рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} P'_{\nu+1}(z) - zP'_\nu(z) &= (\nu+1)P_\nu(z), \\ (\nu+1)P_{\nu+1}(z) - z(2\nu+1)P_\nu(z) + \nu P_{\nu-1}(z) &= 0, \end{aligned} \quad (49)$$

из которых вторая была выведена для целых ν в главе II, § 8, п. 3.

2. Интегральные выражения Лапласа. Если действительная часть числа z положительна и $z \neq 1$, то мы можем выбрать за путь C окружность радиуса $|V^{z^2-1}|$ с центром в точке z , так как из неравенства $|z-1|^2 < |z+1||z-1| < |z+1|^2$, имеющего место при $\Re z > 0$ и $z \neq 1$, следует, что эта окружность обладает требуемыми свойствами. Вводя вещественную переменную интегрирования φ , полагаем $\xi = z + |z^2-1|^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \pi$; тогда из интеграла Шлефли непосредственно получаем первое интегральное выражение Лапласа:

$$P_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + V^{z^2-1} \cos \varphi)^\nu d\varphi, \quad (50)$$

причем выбираем ту ветвь многозначной функции $(z + V^{z^2-1} \cos \varphi)^\nu$, которая при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ принимает значение z^ν , где под z^ν разумеем „главное“ значение этой функции, в частности при положительном z и вещественном ν — действительное значение. Формула Лапласа справедлива и при $z=1$.

Формула $P_\nu = P_{-\nu-1}$ непосредственно приводит ко второму интегральному выражению Лапласа:

$$P_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(z + V^{z^2-1} \cos \varphi)^{\nu+1}}. \quad (51)$$

Заметим, что первое выражение в случае $\nu \leq -1$ и второе в случае $\nu \geq 0$ неприменимы для тех значений z , при которых выражение

¹⁾ Действительно, второй интеграл этого уравнения Q_ν , который мы определим в п. 3, становится при $z=1$ логарифмически бесконечным, а потому этим свойством обладает и всякий интеграл, линейно независимый от P_ν .

$z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi$ обращается в нуль на пути интегрирования. Следовательно, по крайней мере одно из них имеет место во всей плоскости z .

3. Функции Лежандра второго рода. Дифференциальное уравнение (48) должно кроме $P_\nu(z)$, иметь еще один линейно независимый интеграл. Мы можем его легко получить из интеграла Шлефли, если вместо прежнего пути выберем другой путь интегрирования. Такой путь дается кривой $\mathfrak{A}$, имеющей вид восьмерки, изображенной на черт. 13, если только точка z остается вне этой кривой. Определенная с помощью интеграла

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{4i \sin \pi \nu} \int_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2^\nu} \frac{(\xi^2 - 1)^\nu}{(\xi - z)^{\nu+1}} d\xi \quad (52)$$

аналитическая функция $Q_\nu(z)$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра. Она называется *функцией Лежандра второго рода* и представляет однозначную и регулярную функцию в плоскости z , взрезанной вдоль действительной оси от -1 до $+\infty$. В этом выражении мы сперва предполагаем, что ν не является целым числом, так как в противном случае выбранный нами нормирующий множитель $\frac{1}{\sin \pi \nu}$ становится бесконечным. Если действительная часть числа $\nu + 1$ имеет положительное значение и z не лежит в промежутке $-1 \leq \xi \leq 1$, то мы можем, стягивая путь интегрирования, написать (ср. вычисления на стр. 461):

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^\nu}{(z - \xi)^{\nu+1}} d\xi. \quad (53)$$

Эта формула применима и для целых значений ν .

Из выражения (52) легко заключить, что функция Q_ν при $z=1$ и $z=-1$ становится логарифмически бесконечной, если принять во внимание, что путь $\mathfrak{A}$ пересекает линии, соединяющие точку z с точками -1 и $+1$. Для отрицательных значений ν или для значений ν с отрицательной действительной частью можно определить Q_ν с помощью равенства:

$$Q_\nu(z) = Q_{-\nu-1}(z).$$

И для функций $Q_\nu(z)$ имеет место интегральное выражение, аналогичное интегралам Лапласа для $P_\nu(z)$. Сделав в интеграле (53), сперва при действительных значениях $z > 1$, подстановку:

$$\xi = \frac{e^\varphi \sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}}{e^\varphi - \sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}},$$

мы после некоторых вычислений получим:

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \varphi)^{\nu+1}} \quad (\nu > -1), \quad (54)$$

причем выбор однозначной ветви подинтегральной функции, которая сама по себе многозначна, производится таким же образом, как и раньше. Но эта формула справедлива для любых значений z в разрезанной от -1 до $+1$ плоскости z , за исключением, в случае $\nu \geq 0$, тех значений, при которых знаменатель на пути интегрирования обращается в нуль; знакомый с теорией функций читатель непосредственно выведет это заключение из того факта, что подинтегральное выражение в этой области представляет однозначную регулярную функцию от z .

Из равенства $Q_\nu = Q_{-\nu-1}$ мы непосредственно получаем вторую формулу:

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty (z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \varphi)^\nu d\varphi \quad (\nu < 0), \quad (55)$$

причем в случае $\nu \leq -1$ мы опять должны сделать указанное раньше предположение относительно значений z .

4. Сопряженные шаровые функции. (Функции Лежандра высшего порядка.) Для шаровых функций высшего порядка, которые мы определяем с помощью равенств (см. гл. V, § 10, п. 2, стр. 309):

$$P_{\nu h}(z) = (\sqrt{1 - z^2})^h \frac{d^h}{dz^h} P_\nu(z),$$

$$Q_{\nu h}(z) = (\sqrt{1 - z^2})^h \frac{d^h}{dz^h} Q_\nu(z),$$

мы путем дифференцирования интеграла Шлефли (47) и затем с помощью подстановки $\xi = z + \sqrt{z^2 - 1} \frac{1}{2} e^{i\varphi}$ из п. 2 получаем интегральные выражения, из которых мы приведем следующее:

$$P_{\nu h}(z) = (-1)^h \frac{(\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+h)}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^\nu \cos h\varphi d\varphi.$$

Из этой формулы мы видим, например, что все функции $P_{\nu h}(z)$, где $h > 0$, при $z = 1$ равны нулю.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ЛЕЖАНДРА, ЧЕБЫШЕВА, ЭРМИТА И ЛАГЕРРА.

Мы можем развить теорию дифференциального уравнения Лежандра и теорию рассмотренных во второй главе ортогональных функций также с помощью метода интегрального преобразования, изложенного в § 1. Наметим здесь в общих чертах этот путь.

1. Функции Лежандра. В дифференциальном уравнении Лежандра

$$L[u] = (1 - z^2)u'' - 2zu' = -\lambda(\lambda + 1)u \quad (56)$$

преобразование

$$u(z) = \int_C K(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta$$

приводит к условию

$$\int_C [(1-z^2)K_{zz} - 2zK_z + \lambda(\lambda+1)K] v(\zeta) d\zeta = 0.$$

Если ядро преобразования подчинить дифференциальному уравнению,

$$(1-z^2)K_{zz} - 2zK_z + \zeta(\zeta K)_{\zeta\zeta} = 0, \quad (57)$$

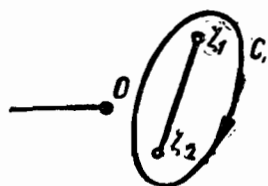
решением которого является функция $K = \frac{1}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}}$, и преобразовать интеграл, получающийся заменой $L[K]$ через $-\zeta(\zeta K)_{\zeta\zeta}$, при помощи интегрирования по частям, то для функции $v(\zeta)$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\zeta(v\zeta)'' - \lambda(\lambda+1)v = 0,$$

которое имеет решения $v = \zeta^\lambda$ и $v = \zeta^{-\lambda-1}$. Мы приходим, таким образом, к интегралам:

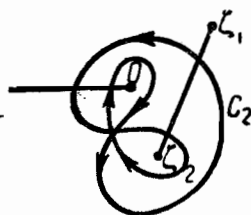
$$\left. \begin{aligned} P_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\zeta^{-\lambda-1}}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}} d\zeta, \\ Q_\lambda(z) &= \frac{1}{4i \sin \pi\lambda} \int_{C_2} \frac{\zeta^{-\lambda-1}}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

где C_1 и C_2 представляют изображенные на черт. 15 и 16 кривые, находящиеся на римановой поверхности подинтегрального выражения.



Черт. 15.

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= z + \sqrt{z^2 - 1} \\ \zeta_2 &= z - \sqrt{z^2 - 1} \end{aligned}$$



Черт. 16.

При помощи преобразования

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi$$

и соответствующей деформации пути интегрирования мы получаем интегралы Лапласа:

$$P_\lambda(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^{-\lambda-1} d\varphi, \quad (51)$$

$$Q_\lambda(z) = \int_0^\infty (z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \varphi)^{-\lambda-1} d\varphi \quad (\lambda > -1). \quad (54)$$

Выбранное нами ядро

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}},$$

как и любое другое ядро, удовлетворяющее уравнению (57), является *производящей функцией* дифференциального уравнения Лежандра. В самом деле, коэффициент $u_n(z)$ разложения

$$K(z, \zeta) = \sum_0^{\infty} u_n(z) \zeta^n$$

такого ядра есть интеграл предыдущего вида

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{K(z, \zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

и потому вследствие замкнутости пути интегрирования представляет решение дифференциального уравнения (56) при $\lambda = n$.

2. Функции Чебышева. В случае дифференциального уравнения Чебышева

$$L[u] = (1 - z^2)u'' - zu' = -\lambda^2 u \quad (59)$$

мы берем в качестве ядра K решение дифференциального уравнения

$$(1 - z^2)K_{zz} - zK_z + \zeta(\zeta K_z)_z = 0, \quad (60)$$

например,

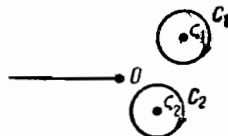
$$K(z, \zeta) = \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2z\zeta + \zeta^2},$$

и получаем таким образом решения вида:

$$\left. \begin{aligned} P_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2z\zeta + \zeta^2} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta, \\ Q_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2z\zeta + \zeta^2} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

При этом C_1 и C_2 (черт. 17) представляют замкнутые кривые, которые на римановой поверхности подинтегрального выражения окружают корни знаменателя:

$$\zeta_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \zeta_2 = z - \sqrt{z^2 - 1}.$$



Черт. 17.

Применяя интегральную формулу Коши, имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_\lambda(z) &= (z - \sqrt{z^2 - 1})^\lambda, \\ Q_\lambda(z) &= (z + \sqrt{z^2 - 1})^\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Сумма

$$T_\lambda(z) = \frac{1}{2^\lambda} [P_\lambda(z) + Q_\lambda(z)] = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^\lambda + (z - \sqrt{z^2 - 1})^\lambda}{2^\lambda},$$

которую можно представить также в виде интеграла

$$T_{\lambda}(z) = \frac{1}{2^{\lambda}} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2z\zeta + \zeta^2} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta,$$

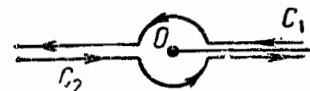
где путь интегрирования C должен теперь окружать обе точки ζ_1 и ζ_2 , переходит при $\lambda = n$ в n -й многочлен Чебышева.

3. Функции Эрмита. Для дифференциального уравнения Эрмита:

$$L[u] = u'' - 2zu' = -2\lambda u \quad (63)$$

мы выбираем функцию K , удовлетворяющую уравнению:

$$K_{zz} - 2zK_z + 2\zeta K_{\zeta} = 0, \quad (64)$$



Черт. 18.

для которого функция $e^{2\zeta - \zeta^2}$ является решением. Если возьмем за путь интегрирования C одну из кривых C_1 или C_2 , изображенных на черт. 18, то получим решения:

$$\left. \begin{aligned} P_{\lambda}(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{-\zeta^2 + 2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta, \\ Q_{\lambda}(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{-\zeta^2 + 2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Полусумма этих решений

$$H_{\lambda}(z) = \frac{1}{2} [P_{\lambda}(z) + Q_{\lambda}(z)],$$

т. е. интеграл

$$H_{\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\zeta^2 + 2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta,$$

где C — есть путь, изображенный на черт. 20, переходит при $\lambda = n$ в полином Эрмита $H_n(z)$.

Если $R(\lambda) < 0$, то мы можем провести путь интегрирования через начало координат и получаем, отвлекаясь от множителей, не зависящих от z , решения:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta^2 + 2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta \quad (66)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\zeta^2 + 2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta. \quad (67)$$

4. Функции Лагерра. Соответствующим образом в дифференциальном уравнении Лагерра

$$L[u] = zu'' + (1 - z)u' = -\lambda u \quad (68)$$

мы подчиняем функцию $K(z, \zeta)$ дифференциальному уравнению в частных производных:

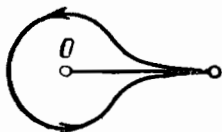
$$zK_{zz} + (1-z)K_z + \zeta K_\zeta = 0 \quad (69)$$

и приходим к интегралам вида:

$$\int_C \frac{e^{-\frac{z\zeta}{1-\zeta}}}{1-\zeta} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta. \quad (70)$$

При выборе пути интегрирования C следует обратить внимание на то, что точка $\zeta=1$ является существенно особой точкой подинтегрального выражения. Если возьмем в частности за C путь, изображенный на черт. 19, то интеграл

$$L_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\frac{z\zeta}{1-\zeta}}}{1-\zeta} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta \quad (71)$$



Черт. 19.

представляет решения, которые при $\lambda=n$ в основном тождественны с полиномами Лагерра.

Подстановка

$$u = \frac{\zeta}{1-\zeta}$$

приводит интеграл (71) к виду:

$$L_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-uz}}{u^{\lambda+1}} (1+u)^\lambda du, \quad (72)$$



Черт. 20.

где под C мы теперь разумеем путь, изображенный на черт. 20.

Заметим еще в заключение, что так же, как в случае дифференциального уравнения Лежандра, можно и в остальных разобранных здесь случаях рассматривать решение соответствующего уравнения в частных производных как *производящую функцию* семейства решений данного дифференциального уравнения. В частности те специальные ядра, которые мы здесь применяли, определяют при разложении их в степенной ряд полиномы Чебышева, Эрмита и Лагерра.

§ 5. Шаровые функции Лапласа.

Мы ввели в гл. V, § 8, стр. 297 шаровые функции Лапласа $Y_n(\vartheta, \varphi)$ как повсюду регулярные на поверхности шара фундаментальные функции дифференциального уравнения

$$\Delta^* Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} Y_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\sin \vartheta} (\sin \vartheta Y_\vartheta)_\vartheta + \lambda Y = 0, \quad (73)$$

соответствующие собственным значениям $\lambda = n(n+1)$. Тогда функции $r^n Y_n = U_n$ являются целыми рациональными функциями прямоугольных координат x, y, z , которые удовлетворяют дифференциальному уравне-

нию $\Delta U = 0$, однородны, и степень однородности равна n . Обратно, каждая целая рациональная функция n -го измерения U_n , удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\Delta U = 0$, будучи разделена на r^n , дает шаровую функцию Лапласа. Так как целая однородная функция степени n имеет $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ коэффициентов, а условие $\Delta U_n = 0$ налагает

$\frac{n(n-1)}{2}$ линейных однородных соотношений между коэффициентами [ибо

ΔU_n есть однородная функция $(n-2)$ -го измерения], то многочлен U_n должен иметь не менее чем $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1$ незави-

симых коэффициентов; следовательно, существуют по крайней мере $2n+1$ линейно независимых шаровых функций порядка n .

Мы в этом параграфе покажем, что предыдущие соотношения независимы, т. е. что существуют ровно $2n+1$ линейно независимых шаровых функций n -го порядка. Далее, мы докажем, что этими функциями Y_n действительно исчерпываются все фундаментальные функции, а числами $\lambda = n(n+1)$ исчерпываются все собственные значения нашей задачи; наконец, мы выразим эти функции с помощью функций Лежандра высшего порядка, с которыми мы встречались в § 3 этой главы и в гл. V, § 10, п. 2, стр. 309. Начнем с последнего пункта.

1. Нахождение $2n+1$ шаровых функций n -го порядка. К специальным шаровым функциям мы приходим с помощью часто применявшегося нами приема: мы полагаем $Y(\vartheta, \varphi) = p(\varphi) q(\vartheta)$. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (73) при $\lambda = n(n+1)$ и обозначая дифференцирование по φ штрихом, а по ϑ точкой, получаем:

$$\frac{p''(\varphi)}{p(\varphi)} = - \frac{(\sin \vartheta \dot{q}) \sin \vartheta}{q} - n(n+1) \sin^2 \vartheta = -\rho,$$

где ρ должно быть постоянным числом. Мы получаем, следовательно, для q уравнение

$$(\sin \vartheta \dot{q})' + \left[n(n+1) \sin \vartheta - \frac{\rho}{\sin \vartheta} \right] q = 0$$

и должны определить в нем параметр ρ так, чтобы существовало решение, регулярное при $\vartheta = 0$ и при $\vartheta = \pi$. Подстановкой $z = \cos \vartheta$ это уравнение преобразуется следующим образом:

$$\left[(1-z^2) q' \right]' + \left[n(n+1) - \frac{\rho}{1-z^2} \right] q = 0,$$

где штрихом обозначается дифференцирование по z и требуется найти решение, регулярное при $z = 1$ и $z = -1$. С этой задачей в несколько ином виде мы встречались в гл. V, § 10, п. 2, стр. 308. Мы знаем решения $\rho = h^2$, $q = P_{n,h}(z)$, причем $P_{n,h}(z)$ являются функциями Лежандра порядка h :

$$P_{n,h} = \left(\sqrt{1-z^2} \right)^h \frac{d^h}{dz^h} P_n(z);$$

h может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$. Так как p определяется из уравнения $p''(\varphi) + h^2 p(\varphi) = 0$ в виде $a_h \cos h\varphi + b_h \sin h\varphi$, то мы получаем решение уравнения (73) в виде:

$$Y(\vartheta, \varphi) = (a_h \cos h\varphi + b_h \sin h\varphi) P_{nh}(\cos \vartheta).$$

Следовательно, функция

$$Y_n = \frac{a_{n,0}}{2} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{h=1}^n (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta) \quad (74)$$

представляет шаровую функцию n -го измерения, зависящую от $2n + 1$ произвольных линейных параметров; мы сейчас увидим, что это есть самая общая шаровая функция n -го порядка. Все функции $\cos h\varphi P_{n,h}(\cos \vartheta)$, $\sin h\varphi P_{n,h}(\cos \vartheta)$ линейно независимы между собой, так как они попарно ортогональны. Мы будем называть их *симметрическими шаровыми функциями n -го порядка*.

2. Полнота полученной системы функций. Из теорем, доказанных нами раньше, непосредственно следует, что система функций $\cos h\varphi P_{n,h}(\cos \vartheta)$, $\sin h\varphi P_{n,h}(\cos \vartheta)$ представляет полную систему ортогональных функций на поверхности шара. Действительно, с одной стороны, функции $\sin h\varphi$, $\cos h\varphi$ образуют полную систему функций относительно φ , с другой стороны, для каждого значения h функции $P_{n,h}(z)$ образуют полную систему функций относительно z , так как система всех фундаментальных функций, получающихся в задаче на разыскание собственных значений, представляет всегда полную систему (гл. VI, § 3, п. 1). Теперь нам остается только вспомнить теорему гл. II, § 1, п. 6, которая содержит общее правило образования системы функций от двух переменных из систем функций, зависящих каждая только от одной переменной, для того чтобы убедиться в полноте нашей системы. Из этого результата непосредственно следует, что дифференциальное уравнение (73) не может иметь никаких других фундаментальных функций, кроме указанных, и, следовательно, не имеет других собственных значений, кроме чисел вида $n(n+1)$. Таким образом разрешены все вопросы, которые были поставлены раньше. Заметим, что таким путем мы получили трансцендентное доказательство того алгебраического факта, что существует ровно $2n + 1$ линейно независимых функций Y_n .

Этот алгебраический факт можно, разумеется, легко доказать и чисто алгебраическим путем. Рассмотрим произвольную целую однородную функцию степени n от x, y, z :

$$u = \sum a_{rst} x^r y^s z^t \quad (r + s + t = n);$$

каждый коэффициент a_{rst} можно представить в виде произведения некоторого числового множителя на n -ю частную производную $\frac{\partial^n u}{\partial x^r \partial y^s \partial z^t}$. Дифференциальное уравнение $u_{xx} = -u_{yy} - u_{zz}$ дает нам возможность заменить все частные производные $\frac{\partial^m u}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c}$, в которых дифференцирование по переменной x производится более одного раза, частными про-

изводными, в которых дифференцирование по x производится не более одного раза, например, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2 \partial y}$.

Следовательно, при условии $\Delta u = 0$ все коэффициенты многочлена u являются линейными комбинациями коэффициентов $a_{0,0,n}, a_{0,1,n-1}, \dots, a_{0,n,0}, a_{1,0,n-1}, \dots, a_{1,n-1,0}$, которые могут быть выбраны произвольно.

3. Теорема о разложении. На основании доказанных раньше (см., например, гл. V, § 14, п. 5) теорем мы можем утверждать, что любая непрерывная на поверхности шара и имеющая там непрерывные производные до второго порядка включительно функция $g(\vartheta, \varphi)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по шаровым функциям:

$$g(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n,0} P_n(\cos \vartheta)] + \sum_{h=1}^n (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta),$$

причем коэффициенты $a_{n,0}, a_{n,h}, b_{n,h}$ определяются на основании формул гл. V, § 10, п. 2, стр. 308 соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_{n,0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \\ a_{n,h} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-h)!}{(n+h)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\vartheta, \varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta) \cos h\varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \\ b_{n,h} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-h)!}{(n+h)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\vartheta, \varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta) \sin h\varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Распространением этого результата на функции $g(\vartheta, \varphi)$ более общего характера мы здесь заниматься не будем.

4. Интеграл Пуассона. Мы можем теперь написать решение краевой задачи теории потенциала для шара радиуса 1 с крайними значениями $g(\vartheta, \varphi)$ явно в следующем виде:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[a_{n,0} P_n'(\cos \vartheta) + \sum_{h=1}^n (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta) \right].$$

В силу равномерной сходимости при $r < r_0 < 1$ мы можем, вводя интегральные выражения (75), изменить порядок суммирования и интегрирования. Тогда можно просуммировать в конечной форме; для этого удобнее всего принять $\vartheta = 0$ и $\varphi = 0$ и заметить, что вследствие произвольности выбора северного полюса на поверхности шара результат должен иметь место для произвольной точки ϑ, φ на поверхности шара. Так как $P_n(1) = 1, P_{n,h}(1) = 0$ ($h = 1, 2, \dots, n$), мы получаем:

$$4\pi u(r, 0, 0) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos \vartheta) \right\} g(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

и здесь можно выполнить суммирование, если воспользоваться соотношением

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h^n P_n(z) = \frac{1-h^2}{(1-2hz+h^2)^{3/2}},$$

которое выводится из равенства, определяющего полиномы Лежандра, $\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) = (1-2hz+h^2)^{-1/2}$, и из равенства, получающегося из него дифференцированием по h .

После того как суммирование выполнено, мы можем представить себе полюс перенесенным и пишем результат в общем виде:

$$4\pi u(r, \vartheta, \varphi) = (1-r^2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{g(\vartheta', \varphi')}{\{r^2 - 2r[\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')] + 1\}^{3/2}} \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'. \quad (76)$$

Этот интеграл, называемый *интегралом Пуассона*, выражает гармоническую функцию внутри шара с помощью значений ее на поверхности и не содержит явно шаровых функций. Во втором томе мы еще вернемся к этому интегралу и выясним его значение для теории потенциала.

5. Выражение шаровых функций Максвелла-Сильвестра. Совершенно иное выражение для шаровых функций, связанное с физическим значением потенциала, дал Максвелл¹⁾. Мы здесь исследуем шаровые функции, руководствуясь основной идеей Максвелла и дополнительным замечанием Сильвестра, и получим таким образом новое изложение теории этих функций.

Мы берем за исходный пункт основной потенциал $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, соответствующий единичной массе, сосредоточенной в начале координат, и замечаем, что производная $v = \frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ ($n = \alpha + \beta + \gamma$) потенциальной функции u также удовлетворяет уравнению $\Delta v = 0$. В самом деле, дифференцированием получаем из равенства $\Delta u = 0$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \Delta u = \Delta \frac{\partial u}{\partial x}$$

и т. д. Поэтому и функция

$$a \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} + b \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} + c \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z},$$

где a , b и c — постоянные, представляет гармоническую функцию.

¹⁾ „A Treatise on Electricity and Magnetism“, т. 1, изд. 2-е, стр. 179–214, Oxford 1881.

Запишем ее, пользуясь символической линейной формой:

$$L = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z},$$

в виде $L \left(\frac{1}{r} \right)$ или также в виде

$$a \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial v},$$

причем $a = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, а $\frac{\partial}{\partial v}$ означает дифференцирование по направлению v , направляющие косинусы которого пропорциональны числам a , b и c ¹⁾. Этот потенциал, физически говоря, соответствует биполюю момента a и направления v . Вообще

$$u = C \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_n} = CL_1 L_2 \dots L_n \left(\frac{1}{r} \right) \quad (77)$$

представляет потенциальную функцию, соответствующую „мультиполю“ с осями $v_1, v_2, \dots, v_n$. При этом L_i означают линейные формы относительно операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, и коэффициенты их a_i, b_i, c_i определяют направления осей v_i . Легко видеть, что потенциал u имеет вид:

$$u = U_n(x, y, z) r^{-2n-1}, \quad (78)$$

где U_n есть целая рациональная однородная функция степени n относительно x, y, z . Функция U_n также удовлетворяет уравнению $\Delta U_n = 0$, что вытекает из следующей общей теоремы: *одновременно с функцией $u(x, y, z)$ является решением уравнения Лапласа функция*

$$\frac{1}{r} u \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2} \right)^2.$$

Полученные таким образом функции $U_n(x, y, z)$ представляют при $r=1$ согласно нашим прежним определениям (гл. V, § 9, п. 1, стр. 299) шаровые функции n -го порядка.

Так как каждое из встречающихся в формуле (77) n направлений характеризуется при помощи двух параметров и, кроме того, в потенциал u входит еще произвольный постоянный множитель, то в общем мы имеем $2n+1$ произвольных постоянных. Естественно поэтому ожидать, что в виде (77) могут быть представлены все шаровые функции

¹⁾ Если допустить, что a, b и c могут принимать и комплексные значения, то для тех значений a, b, c , для которых $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, нужно соблюдать необходимую предосторожность.

²⁾ Доказательство этой теоремы просто получается, если уравнение Лапласа преобразовать к полярным координатам (см. гл. IV, § 8, п. 2, стр. 217).

n -го порядка. Строгое доказательство этого положения мы проведем следующим образом: прежде всего представим $2n+1$ линейно независимых симметричных шаровых функций $P_{n,h}(\cos \vartheta) \cos h\varphi, P_{n,h}(\cos \vartheta) \sin h\varphi$ в виде потенциалов мультиполей. Отсюда непосредственно следует, что любая шаровая функция n -го порядка выражается в виде суммы потенциалов мультиполей. Наконец, мы докажем, что каждая такая сумма равна потенциалу мультиполя, который мы можем получить при помощи простого геометрического построения. Симметричные шаровые функции легко получить, рассматривая симметричные мультиполи. Пусть имеем n осей с направлениями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ в плоскости x, y , расположенных симметрично так, что каждые две соседних образуют угол $\frac{2\pi}{n}$. Полагая

$$\frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \nu_1 \partial \nu_2 \dots \partial \nu_n} = u_n = U_n r^{-2n-1} \quad (79)$$

и заметив, что левая часть инвариантна относительно вращений шара вокруг оси z на угол $\frac{2\pi}{n}$, мы непосредственно видим, что необращающаяся тождественно в нуль¹⁾ шаровая функция n -го порядка

$$u_n r^{n+1} = U_n r^{-n} = Y_n(\vartheta, \varphi),$$

как функция от φ , имеет период $\frac{2\pi}{n}$. Так как на основании п. 3 всякая шаровая функция n -го порядка может быть представлена в виде

$$\sum_{h=0}^n (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta),$$

то отсюда следует, что функция $Y_n(\vartheta, \varphi)$ должна иметь вид:

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = (a_{n,n} \cos n\varphi + b_{n,n} \sin n\varphi) P_{n,n}(\cos \vartheta) + a_{n,0} P_{n,0}(\cos \vartheta) = \left. \begin{aligned} &= a \cos n(\varphi - \varphi_0) P_{n,n}(\cos \vartheta) + a_{n,0} P_{n,0}(\cos \vartheta). \end{aligned} \right\} (80)$$

Но нетрудно видеть, что $P_{n,0}(\cos \vartheta) = P_{n,0} \left(\frac{z}{r} \right) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n}$.

Принимая, далее, во внимание произвол в выборе одной из осей ν_i , мы видим, что действительно всякую шаровую функцию вида

$$a \cos n(\varphi - \varphi_0) P_{n,n}(\cos \vartheta)$$

можно представить в виде линейной комбинации двух мультиполей:

$$\text{одного — вида (79), а другого — вида } \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n}.$$

¹⁾ Что потенциал мультиполя не может тождественно равняться нулю, будет доказано на стр. 494.

Чтобы получить выражение для остальных шаровых функций n -го порядка с помощью мультиполей, мы заметим, что функция u_n может быть представлена на основании формулы (80) в виде

$$u_n = f_n(x, y) g\left(\frac{z}{r}\right) r^{-n-1} + \beta \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n},$$

где $f_n(x, y) = \alpha \cos n(\varphi - \varphi_0)$, $f_n(0, 0) = 0$, а β — постоянное число. В этом выражении заменяем n через h и затем дифференцируем $n - h$ раз по z . Получающаяся таким образом потенциальная функция $u_{n,h}$ также имеет вид

$$u_{n,h} = f_h(x, y) g_1\left(\frac{z}{r}\right) r^{-n-1} + \beta \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n},$$

и отсюда мы можем заключить, что шаровая функция n -го порядка

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = u_{n,h} r^{n+1}$$

должна иметь вид $\alpha \cos h(\varphi - \varphi_0) \omega(\vartheta) + \beta_1 P_{n,0}(\cos \vartheta)$. Поэтому на основании п. 1 она должна иметь форму:

$$\text{Const} \times \cos h(\varphi - \varphi_0) P_{n,h}(\cos \vartheta) + \beta_1 P_{n,0}(\cos \vartheta). \quad (81)$$

Что таким образом можно получить любую функцию этого семейства, опять непосредственно следует из произвольности выбора направления одной оси.

Так как согласно п. 2 любую шаровую функцию порядка n можно представить в виде суммы $2n + 1$ шаровых функций вида (81), то ясно, что мы получим любую шаровую функцию n -го порядка, если образуем суммы потенциалов мультиполей:

$$u = \sum_{i+k+l=n} a_{ikl} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^i \partial y^k \partial z^l}. \quad (82)$$

Обратно, любая сумма такого вида, очевидно (см. стр. 485), дает шаровую функцию n -го порядка. Более того, если будем придавать коэффициентам a_{ikl} всевозможные значения, то получим, как сейчас покажем, каждую отдельную шаровую функцию бесчисленное множество раз.

Сначала мы еще докажем, что любая сумма предыдущего вида является потенциалом одного мультиполя с надлежаще выбранными осями. При этом мы будем пользоваться символической записью, а именно рассмотрим однородный многочлен n -й степени

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i+k+l=n} a_{ikl} \xi^i \eta^k \zeta^l$$

и запишем наш потенциал в виде $H \frac{1}{r}$, где ξ, η, ζ в выражении H надо заменить символами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$. Так как при этом

условии относительно ξ, η, ζ функция $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \frac{1}{r}$ тождественно равна нулю, то $H \frac{1}{r} = H_1 \frac{1}{r}$, если только разность $H - H_1$, рассматриваемая как многочлен относительно ξ, η, ζ , может быть представлена в виде $Q(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$, где Q — однородный многочлен $(n-2)$ -го измерения относительно ξ, η, ζ .

Теперь мы будем опираться на простую алгебраическую теорему, которой пользовался Сильвестр ¹⁾. Для каждого однородного многочлена n -й степени $H(\xi, \eta, \zeta)$ можно определить n линейных форм $L_1, L_2, \dots, L_n$ и многочлен $(n-2)$ -й степени $Q(\xi, \eta, \zeta)$ так, чтобы имело место соотношение вида

$$H = CL_1 L_2 \dots L_n + Q(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Если H имеет действительные коэффициенты, то линейные формы $L_1, L_2, \dots, L_n$ определяются с точностью до постоянных множителей однозначно требованием, чтобы их коэффициенты были действительными числами. Доказательство этой теоремы и геометрическое истолкование форм L_i мы дадим, чтобы не прерывать хода рассуждений, в конце этого пункта. Из теоремы Сильвестра вытекает наше утверждение относительно выражения суммы (82) в виде потенциала одного единственного мультиполя. В самом деле, разумея под ν_i направление, перпендикулярное к плоскости $L_i = 0$, мы получаем:

$$u = H \frac{1}{r} = C \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial \nu_1 \partial \nu_2 \dots \partial \nu_n},$$

что и дает нам искомое выражение.

Таким образом основные положения нашей теории установлены. Мы можем придать нашим рассуждениям несколько иной оборот, при котором можно избежать ссылок на результаты п. 1 и 2 и при котором более выпукло оттеняется чисто алгебраический характер наших теорем, но зато теряется связь с выражениями в явном виде. Мы начнем с замечания, что две функции $H \frac{1}{r}$ и $H_1 \frac{1}{r}$ тождественны между собой в том и только в том случае, когда разность $H^*(\xi, \eta, \zeta) = H(\xi, \eta, \zeta) - H_1(\xi, \eta, \zeta)$ делится на $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Первая часть этого утверждения, как мы уже отмечали, очевидна. Чтобы доказать вторую часть, мы должны обнаружить, что из соотношения $H^* \frac{1}{r} = 0$ следует делимость однородного многочлена $H^*(\xi, \eta, \zeta)$ на $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ ²⁾. Но согласно теореме Сильвестра имеем:

$$H^* = CL_1^* L_2^* \dots L_n^* + Q^*(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad (83)$$

¹⁾ Sylvester J. J., Note on spherical harmonics, Phil. Mag., т. 2, стр. 291—307 и 400, 1876; Papers, т. 3, стр. 37—51, Cambridge 1909.

²⁾ См. цитируемую далее работу А. Островского (стр. 496, сноска 1).

где $L_1^*, L_2^*, \dots, L_n^*$ означают линейные формы, которые в случае действительной функции H^* можно считать действительными. Если одна из форм L_i тождественно равна нулю, то наше утверждение очевидно. Если же ни одна из линейных форм не обращается тождественно в нуль, то

$$H^* \frac{1}{r} = C L_1^* L_2^* \dots L_n^* \frac{1}{r} = C \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y_1^* \partial y_2^* \dots \partial y_n^*};$$

вследствие того, что начало координат представляет особую точку, потенциал мультиполя в правой части может равняться нулю во всем пространстве только в том случае, если $C=0$. Действительно, в противном случае мы имели бы при надлежаще выбранном m ($0 \leq m < n$)

$$\text{соотношения: } \frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial y_1 \dots \partial y_m} = v_m \neq 0, \quad \frac{\partial v_m}{\partial y_{m+1}} = 0, \text{ и поэтому функция } v_m$$

должна была иметь на всякой параллели к оси y_{m+1} постоянные значения, что невозможно, так как начало координат является особой точкой. Таким образом имеем

$$H^*(\xi, \eta, \zeta) = Q^*(\xi, \eta, \zeta) \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2);$$

как мы и утверждали.

Как легко видеть, мы можем любую однородную функцию $H(\xi, \eta, \zeta)$ n -й степени привести и притом единственным образом к виду

$$H(\xi, \eta, \zeta) = G_n(\eta, \zeta) + \xi G_{n-1}(\eta, \zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) Q(\xi, \eta, \zeta). \quad (84)$$

При этом G_n означает однородную функцию n -го измерения только от η и ζ , G_{n-1} — функцию $(n-1)$ -го измерения, а Q — однородную функцию $(n-2)$ -го измерения. Разность двух функций n -й степени $H(\xi, \eta, \zeta)$ и $\bar{H}(\xi, \eta, \zeta)$ делится на $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ в том и только в том случае, если для соответствующих функций $G_n, G_{n-1}, \bar{G}_n, \bar{G}_{n-1}$ имеют место тождественные соотношения:

$$G_n = \bar{G}_n, \quad G_{n-1} = \bar{G}_{n-1}.$$

На основании только что доказанной вспомогательной теоремы мы имеем в форме $H \frac{1}{r}$ ровно $2n+1$ линейно независимых гармонических функций соответственно $2n+1$ коэффициентам, входящим в функции G_n и G_{n-1} , которыми мы можем располагать по нашему усмотрению. Следовательно, мы действительно можем всякую шаровую функцию порядка n представить как сумму потенциалов мультиполей. Однако, чтобы действительно получить выражение шаровой функции в этой форме, возможность чего мы доказали, надо будет в той или иной форме прибегнуть к рассуждениям, аналогичным ранее изложенным.

Остается только привести в заключение доказательство теоремы Сильвестра. Мы проведем это доказательство с помощью простого рассуждения из области алгебраической геометрии. Коническая поверх-

ность n -го порядка $H(\xi, \eta, \zeta) = 0$ в пространстве ξ, η, ζ пересекает на основании теоремы Безу абсолютный конус $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ ровно по $2n$ образующим, причем кратные пересечения, если таковые имеются, надо считать сообразно их кратности. Мы проводим через эти $2n$ образующих n плоскостей таким образом, чтобы каждая плоскость содержала две образующие и чтобы каждая образующая лежала на какой-нибудь из этих плоскостей. Пусть уравнения этих плоскостей:

$$L_i(\xi, \eta, \zeta) = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

При этом кратные образующие должны входить сообразно их кратности¹⁾. Рассмотрим теперь пучок конусов n -го порядка, содержащий два параметра λ и μ :

$$\lambda H + \mu L_1 L_2 \dots L_n = 0.$$

Каждый конус этого пучка пересекает абсолютный конус по указанным $2n$ образующим. Теперь возьмем произвольную образующую абсолютного конуса, отличающуюся от указанных, и определим отношение параметров $\lambda : \mu$ так, чтобы конус n -го порядка $\lambda H + \mu L_1 L_2 \dots L_n = 0$ проходил также и через эту образующую, что всегда возможно и дает для $\lambda : \mu$ значение, отличное от нуля и от бесконечности. Этот новый конус n -го порядка имеет с абсолютным конусом, представляющим конус второго порядка, более $2n$ общих образующих, что возможно только тогда, когда этот конус содержит в себе целиком конус второго порядка. Но это будет в том и только в том случае, когда левая часть равенства содержит выражение $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ в качестве множителя²⁾, т. е. если

$$\lambda H + \mu L_1 L_2 \dots L_n = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) Q.$$

1) Чтобы уточнить это правило, не прибегая к сложной общей алгебраической теории элиминирования, мы поступаем следующим образом. Мы униформизируем геометрический образ $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$, полагая, например,

$$\xi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \eta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \zeta = i = \sqrt{-1}.$$

Однородная функция n -го измерения $H(\xi, \eta, \zeta)$ переходит тогда при этой подстановке в рациональную функцию $H^*(t)$ степени $2n$ от t . Корни этой функции определяют общие образующие конусов $H(\xi, \eta, \zeta) = 0$ и $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$. Мы скажем, что общая образующая этих конусов является k -кратной, если соответствующее значение t является корнем k -й кратности уравнения $H^*(t) = 0$. Линейные формы $L_1, L_2, \dots, L_n$ надо выбрать таким образом, чтобы каждая общая образующая k -й кратности конуса $H = 0$ и абсолютного конуса была также k -кратной линией пересечения агрегата плоскостей $L_1 L_2 \dots L_n = 0$. Легко видеть, что это предписание можно всегда осуществить[†].

2) Первая часть утверждения очевидна; вторую часть проще всего можно доказать, если представить данную форму согласно формуле (84) в виде:

$$G_n(\eta, \zeta) + \xi G_{n-1}(\eta, \zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) Q(\xi, \eta, \zeta).$$

Если теперь η, ζ представляют любую пару значений, для которой $\eta^2 + \zeta^2 \neq 0$, то имеют место одновременно оба соотношения:

$$0 = G_n(\eta, \zeta) + \sqrt{-(\eta^2 + \zeta^2)} G_{n-1}(\eta, \zeta)$$

и

$$0 = G_n(\eta, \zeta) - \sqrt{-(\eta^2 + \zeta^2)} G_{n-1}(\eta, \zeta),$$

на основании которых мы непосредственно заключаем, что

$$G_n(\eta, \zeta) = 0, \quad G_{n-1}(\eta, \zeta) = 0.$$

Таким образом функции G_n и G_{n-1} равны нулю для всех пар значений η, ζ , для которых $\eta^2 + \zeta^2 \neq 0$, следовательно, они очевидно тождественно равны нулю.

Тем самым теорема Сильвестра доказана¹⁾. Вместе с тем дано простое геометрическое истолкование осей мультиполя, соответствующего шаровой функции.

Что касается условий действительности, надо обратить внимание на то, что хотя при действительной функции H все общие образующие должны быть мнимыми, но что они являются попарно сопряженно-комплексными, следовательно существует одна и только одна возможность расположить их на n действительных плоскостях.

§ 6. Асимптотические разложения.

Во многих случаях важно знать асимптотические выражения для наших функций при больших значениях входящих в них переменных или параметров. В предыдущей главе мы рассмотрели асимптотические выражения для штурм-лиувиллевских и бесселевых функций, ограничившись действительной областью изменения переменных. В этом параграфе мы ознакомимся с методами нахождения асимптотических выражений, которые по существу связаны с применением комплексных переменных и комплексных интегралов.

1. Формула Стирлинга. В качестве первого примера асимптотических разложений рассмотрим формулу Стирлинга; при выводе ее обнаружится основной принцип доказательства, которым нам в дальнейшем неоднократно придется пользоваться, хотя применять интегрирования в комплексной области мы в данном случае не будем. При $s > 0$ имеем:

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^{\infty} t^s e^{-t} dt = \\ &= s^{s+1} \int_0^{\infty} \tau^s e^{-s\tau} d\tau = \quad (t=s\tau) \\ &= s^{s+1} e^{-s} \int_0^{\infty} e^{-(\tau-1-\log \tau)} d\tau = \\ &= s^{s+1} e^{-s} \int_0^{\infty} e^{-s f(\tau)} d\tau \quad [f(\tau) = \tau - 1 - \log \tau].\end{aligned}$$

Подинтегральная функция в последнем интеграле при $\tau=1$ имеет значение, равное единице; при всех же остальных значениях τ она с возрастанием s стремится к нулю. Мы можем поэтому ожидать, что значение нашего интеграла при достаточно больших s в основном зависит от значений подинтегральной функции в небольшой окрестности точки $\tau=1$. Соответственно этому мы заменяем наш интеграл интегралом, взятым в пределах от $1-\epsilon$ до $1+\epsilon$ (причем $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$), и прежде

¹⁾ Эта алгебраическая теорема была использована в указанном месте Сильвестром, причем он ее не доказывает. А. Островский указал на необходимость дать доказательство для этой теоремы. См. Ostrowski A., *Mathematische Mitteilungen I. Die Maxwell'sche Erzeugung der Kugelfunktionen*, „Jahresber. deutsch. Mathem. Ver.“, т. XXXIII, 1924.

всего оцениваем погрешность, которая получается при отбрасывании интегралов от 0 до $1 - \varepsilon$ и от $1 + \varepsilon$ до ∞ . При $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$ имеем:

$$\tau - 1 - \log \tau = \int_{\tau}^1 \left(\frac{1}{u} - 1 \right) du \geq \int_{\tau}^1 (1 - u) du = \frac{1}{2} (\tau - 1)^2 \geq \frac{1}{8} (\tau - 1)^2,$$

а при $1 \leq \tau \leq 4$ имеем:

$$\tau - 1 - \log \tau = \int_1^{\tau} \left(1 - \frac{1}{u} \right) du \geq \frac{1}{4} \int_1^{\tau} (u - 1) du = \frac{1}{8} (\tau - 1)^2.$$

В интегралах

$$\int_0^{1-\varepsilon} e^{-sf(\tau)} d\tau, \quad \int_{1+\varepsilon}^4 e^{-sf(\tau)} d\tau$$

мы заменяем подинтегральную функцию ее наибольшим значением, которое достигается соответственно в точках $1 - \varepsilon$ и $1 + \varepsilon$, а это значение в свою очередь — верхней гранью $e^{-\frac{s}{8}\varepsilon^2}$. Таким путем получаем:

$$\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^4 \leq 4e^{-\frac{s\varepsilon^2}{8}}.$$

При $\tau \geq 4$ имеем:

$$\tau - 1 - \log \tau \geq \frac{3\tau}{4} - \log \tau > \frac{\tau}{4};$$

поэтому при $s > 4$

$$\int_4^{\infty} e^{-s(\tau - 1 - \log \tau)} d\tau < \int_4^{\infty} e^{-\frac{s\tau}{4}} d\tau < e^{-s} < e^{-\frac{s\varepsilon^2}{8}}.$$

Если выберем теперь $\varepsilon = s^{-\frac{2}{5}}$, то получим:

$$e^s s^{-s-1} \Gamma(s+1) = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(\tau)} d\tau + O\left(e^{-\frac{1}{8}s^{\frac{1}{5}}}\right)^1).$$

Чтобы приближенно вычислить интеграл, стоящий в правой части, мы будем опираться на соотношение:

$$f(\tau) = \frac{(\tau - 1)^2}{2} + (\tau - 1)^3 \phi(\tau),$$

в котором $\phi(\tau)$ означает регулярную функцию в интервале $\frac{1}{2} \leq \tau \leq \frac{3}{2}$,

¹⁾ Здесь обозначение $O[g(s)]$ имеет то же значение, что и в гл. V, § 11,

абсолютное значение которой не превосходит некоторой конечной грани M . Из этого соотношения мы выводим заключение, что при $1 - \epsilon < \tau < 1 + \epsilon$ имеют место неравенства:

$$e^{-\frac{s(\tau-1)^2}{2}} e^{-Ms - \frac{1}{5}} \leq e^{-sf(\tau)} \leq e^{-\frac{s(\tau-1)^2}{2}} e^{-Ms - \frac{1}{5}}$$

и далее, что

$$e^{-sf(\tau)} = e^{-s \frac{(\tau-1)^2}{2}} \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right].$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} e^{-sf(\tau)} d\tau &= \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} e^{-\frac{su^2}{2}} du = \\ &= \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \sqrt{\frac{2}{s}} \int_{-\epsilon\sqrt{\frac{s}{2}}}^{\epsilon\sqrt{\frac{s}{2}}} e^{-v^2} dv = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \left[1 + O\left(e^{-\frac{s\epsilon^2}{2}}\right) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right], \end{aligned}$$

т. е.

$$\Gamma(s+1) = s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi} \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right], \quad (85)$$

следовательно: $O,^{\circ}$

$$\Gamma(s+1) \approx \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s}. \quad (86)$$

2. Асимптотическое вычисление функций Ганкеля и Бесселя для больших значений аргументов. Подобным же образом мы можем вычислить асимптотически функцию Ганкеля $H_{\lambda}^1(z)$

внутри угла $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg z < \frac{\pi}{2} - \delta$ для больших $|z|$, пользуясь интегралом:

$$H_{\lambda}^1(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\frac{1}{2} z\right)^{\lambda}}{\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int e^{iz\tau} (\tau^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\tau$$

(см. § 2, п. 5), взятым по пути, изображенному справа на черт. 12, причем $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$, и, кроме того, мы принимаем, что $\log(\tau^2 - 1)$ при $\tau > 1$ имеет действительные значения. Не изменяя значения интеграла, мы можем повернуть разрез и путь, идущий вдоль одного из этих разрезав, в плоскости τ так, чтобы их направление образовало

с осью x угол $\frac{\pi}{2} - \arg z$. Применим подстановку

$$\tau - 1 = i \frac{u}{z},$$

тогда плоскость u окажется разрезанной вдоль двух горизонтальных лучей, идущих вправо соответственно из точек 0 и $2zi$; новый путь интегрирования окружает разрез, идущий вдоль положительной части действительной оси, причем в верхней полуплоскости путь пробегается

справа налево, а в нижней — слева направо. Разумея под $u^{\lambda - \frac{1}{2}}$ ту однозначную в разрезанной плоскости ветвь этой функции, которая получается, если считать значения на нижнем крае положительной части

действительной оси аргумента u равными нулю, а под $\left(1 + \frac{iu}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ — ту ветвь, которая при $u = 0$ имеет значение 1, получаем:

$$H_{\lambda}^1(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\pi \sqrt{2\pi z}} e^{i\left(z + \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \int e^{-u} u^{\lambda - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} du.$$

Если $\Re\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) > -1$, то можно петлю вокруг точки $u = 0$ стянуть

в точку и, следовательно, заменить наш интеграл интегралом, взятым вдоль нижнего края положительной части действительной оси от 0 до ∞ , к которому надо прибавить интеграл, взятый вдоль верхнего края от ∞ до 0. Но последний интеграл равен первому, умноженному на $-e^{-2\pi i\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}$. Поэтому после легких преобразований, в которых при-

ходится пользоваться формулой $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, получаем:

$$H_{\lambda}^1(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\lambda - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} du. \quad (87)$$

Последний множитель под знаком интеграла выражаем при помощи формулы Тейлора с остаточным членом Коши в виде определенного интеграла:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{ui}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} &= \sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{ui}{2z}\right)^{\nu} + \\ &+ \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{p} \left(\frac{ui}{2z}\right)^p \int_0^1 (1-t)^{p-1} \left(1 + \frac{tui}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2} - p} dt \end{aligned} \quad (88)$$

и замечаем, что для остаточного члена получается при этом удобная оценка.

В самом деле, для положительных значений u имеем:

$$\left| 1 + \frac{tui}{2z} \right| > \sin \delta; \quad \left| \arg \left(1 + \frac{tui}{2z} \right) \right| < \pi;$$

предполагая, далее, $\Re \left(\lambda - \frac{1}{2} - p \right) < 0$, что во всяком случае справедливо при достаточно больших значениях p , имеем:

$$\left| \left(1 + \frac{tui}{2z} \right)^{\lambda - \frac{1}{2} - p} \right| < e^{\pi |\Im(\lambda)|} (\sin \delta)^{\Re \left(\lambda - \frac{1}{2} - p \right)} = A_p,$$

где A_p не зависит от z и t . Подставляя выражение (88) в формулу (87) и почленно интегрируя, получаем:

$$H_{\lambda}^1(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i \left(z - \frac{\lambda \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \left[\sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{\nu} \Gamma \left(\lambda + \nu + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{i}{2z} \right)^{\nu} + R_p \right], \quad (89)$$

причем

$$|R_p| \leq A_p \left| p \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{p} \left(\frac{i}{2z} \right)^p \left\{ \int_0^1 (1-t)^{p-1} dt \int_0^{\infty} e^{-u} |u^{\lambda - \frac{1}{2} + p}| du \right\} \right|,$$

$$R_p = O(|z|^{-p}).$$

Таким же образом, а именно с помощью подстановки $\tau + 1 = \frac{i u}{z}$, мы получаем:

$$H_{\lambda}^2(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i \left(z - \frac{\lambda \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \left[\sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{\nu} \Gamma \left(\lambda + \nu + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{i}{2z} \right)^{\nu} + S_p \right], \quad (90)$$

$$S_p = O(|z|^{-p}).$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(z) &= \frac{1}{2} [H_{\lambda}^1(z) + H_{\lambda}^2(z)] = \\ &= \frac{1}{\Gamma \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)} \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{\nu} \frac{\Gamma \left(\lambda + \nu + \frac{1}{2} \right)}{(2z)^{\nu}} \left\{ (-1)^{\frac{\nu}{2}} \cos \left(z - \frac{\lambda \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + \\ &\quad + O \left(|z|^{-p - \frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (91)$$

где из двух выражений, стоящих внутри фигурных скобок, надо брать верхнее в случае четного ν и нижнее в случае нечетного ν . Ограничиваясь первым членом разложения, имеем:

$$J_{\lambda}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(|z|^{-\frac{3}{2}}), \quad (92)$$

тем самым определены пределы, о которых шла речь в гл. V, § 11, п. 2, а именно:

$$a_{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \delta_{\infty} = -\frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

3. Метод перевала. Во многих случаях можно применить более общий метод для асимптотического вычисления интегралов, называемый „методом перевала“ (Sattelpunktmethode). Если имеем интеграл

$$\int_C e^{zf(\tau)} d\tau,$$

взятый по пути C , на котором действительная часть функции $f(\tau)$ по мере приближения к обоим концам этого пути стремится к $-\infty$, то при больших положительных значениях z удаленные части пути интегрирования, т. е. те части, для которых действительная часть $\Re f(\tau)$ имеет большие отрицательные значения, будут оказывать тем меньшее влияние на значение интеграла, чем больше z . Мы попытаемся теперь так изменить путь интегрирования в плоскости комплексного переменного, чтобы та часть пути интегрирования, которая имеет решающее значение при вычислении интеграла, была по возможности меньше. Нам нужно, следовательно, выбрать такой путь, на котором $\Re f(\tau)$ как можно быстрее убывала бы по обе стороны от некоторого наибольшего значения*. Полагаем $\tau = u + iv$ и представляем себе, что $\Re f(\tau)$ изображена в виде поверхности, простирающейся над плоскостью u, v (поверхность имеет повсюду отрицательную кривизну); тогда мы достигнем цели, если нам удастся провести путь через точку перевала на этой поверхности так, чтобы по обе стороны от этой точки путь как можно более круто спускался к большим отрицательным значениям $\Re f(\tau)$. В таком случае для больших положительных значений z будет играть роль только ближайшая окрестность точки перевала.

Линии наиболее быстрого спада являются ортогональными траекториями линий уровня $\Re f(\tau) = \text{const}$, т. е. представляют кривые $\Im f(\tau) = \text{const}$. В точке перевала обращаются в нуль производные, взятые по направлению касательной к кривой $\Im f(\tau) = \text{const}$, от функций $\Re f(\tau)$ и $\Im f(\tau)$, а потому обращается в нуль также и производная $f'(\tau)$ самой функции $f(\tau)$. Следовательно, мы должны искать точки перевала среди корней уравнения

$$f'(\tau) = 0.$$

Вывод формулы Стирлинга подходит под этот метод, поскольку там действительная ось как раз и была требуемым путем, наиболее круто спускающимся от перевальной точки $\tau = 1$.

4. Применение метода перевала к вычислению функций Ганкеля и Бесселя для больших значений параметра и больших значений аргумента. Мы здесь со всей возможной краткостью проведем при помощи этого приема асимптотическое вычисление функции (см. формулу (3) на стр. 446):

$$H_{\lambda}^1(a\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{\lambda(-ia \sin \tau + i\tau)} d\tau$$

при действительном значении a и большом положительном значении λ . Разложим множитель при λ в показателе на действительную и мнимую части:

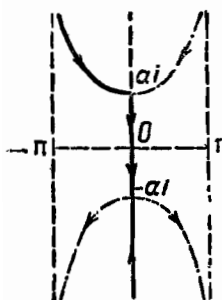
$$-ia \sin \tau + i\tau = f(\tau) = a \cos u \operatorname{sh} v - v + i(u - a \sin u \operatorname{ch} v).$$

Точки перевала являются корнями уравнения $a \cos \tau = 1$; через эти точки мы должны провести кривые $u - a \sin u \operatorname{ch} v = \text{const}$ и посмотреть, можно ли составить из них требуемые пути интегрирования.

1. Если $a < 1$, скажем $a = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}$ ($\alpha > 0$), то точками перевала являются точки $\tau = \pm ai$, а уравнения проходящих через них кривых будут:

$$u - a \sin u \operatorname{ch} v = 0 \rightarrow a \sin u \operatorname{ch} \alpha = 0.$$

Первая кривая состоит из мнимой оси $u = 0$ и ветви кривой, проходящей через точку $\tau = ai$ и приближающейся сверху неограниченно к прямым $u = \pi$ и $u = -\pi$, а вторая кривая состоит из мнимой оси $u = 0$ и ветви, проходящей через



Черт. 21.

к тем же прямым. Это показано на черт. 21, на котором отмечено стрелками направление возрастания действительной части функции $f(\tau)$. Составленная из отрезков кривых $\Im(f) = 0$ кривая, отмеченная на чертеже сплошной линией и пробегаемая снизу вверх, дает, если по ней интегрировать, очевидно, H_{λ}^1 ; в самом деле, эта кривая может быть преобразована в путь L_1 за исключением одной части ее, начало которой лежит сколь угодно высоко и которая находится целиком внутри полосы $-\pi \leq u \leq -\pi + \epsilon$, следовательно, значение интеграла вдоль

этой части может быть сделано сколь угодно малым. Действительная часть функции $-ia \sin \tau + i\tau$ достигает наибольшего значения $a - \operatorname{th} \alpha$ при $\tau = -ai$. Заменим опять (ср. стр. 496) путь L_1 прямолинейным куском L' , идущим от точки $(-a - \epsilon)i$ до точки

$(-a + \epsilon)i$, где $\epsilon = \lambda^{-\frac{2}{5}}$. Разлагая остающуюся часть пути интегрирования на две примыкающие конечные части и на две части, идущие в бесконечность, и производя оценку, совершенно аналогичную оценке в п. 1, получаем, что

$$\int_{-i\infty}^{(-a+\epsilon)i} e^{\lambda f(\tau)} d\tau + \int_{(-a+\epsilon)i}^{(-\pi+i\infty)} e^{\lambda f(\tau)} d\tau = e^{\lambda(a - \operatorname{th} \alpha)} O(e^{-\epsilon \lambda^{\frac{2}{5}}}),$$

где c_1 , как и дальше встречающиеся c_2 , c_3 и т. д., означает некоторое положительное постоянное число, не зависящее от λ (а следовательно, и от ε). В самом деле, на обоих конечных отрезках абсолютное значение подынтегрального выражения не больше тех значений, которые оно принимает в точках $(-a - \varepsilon)i$ и $(-a + \varepsilon)i$, а для этих значений имеет место указанная оценка. Для простирающихся в бесконечность кусков пути интегрирования легко указать верхнюю грань абсолютного значения подынтегрального выражения вида $e^{-c\lambda(s+c')}$, где s есть длина дуги пути интегрирования, а c и c' — положительные постоянные, не зависящие от λ и ε . Отсюда следует для абсолютного значения интегралов по этим частям оценка вида $O(e^{-c_2\lambda})$. На куске L' имеем:

$$\left| f(\tau) - \left[a - \operatorname{th} a + \frac{1}{2} f''(-ai)(\tau + ai)^2 \right] \right| < c_2 \varepsilon^3,$$

$$f''(-ai) = \operatorname{th} a,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} e^{\lambda f(\tau)} &= e^{\lambda \left(a - \operatorname{th} a + \operatorname{th} a \frac{(\tau + ai)^2}{2} \right)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{11}{5}}\right) \right], \\ \int_{(-a-\varepsilon)i}^{(-a+\varepsilon)i} e^{\lambda f(\tau)} d\tau &= e^{\lambda(a - \operatorname{th} a)} \int_{(-a-\varepsilon)i}^{(-a+\varepsilon)i} e^{\lambda \operatorname{th} a \frac{(\tau + ai)^2}{2}} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{11}{5}}\right) \right] = \\ &= i \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{th} a}} e^{\lambda(a - \operatorname{th} a)} \int_{-\varepsilon \sqrt{\frac{\lambda \operatorname{th} a}{2}}}^{\varepsilon \sqrt{\frac{\lambda \operatorname{th} a}{2}}} e^{-u^2} du \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{11}{5}}\right) \right] = \\ &= i \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{th} a}} e^{\lambda(a - \operatorname{th} a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \left[1 + O(e^{-c_3 \varepsilon^2}) \right] \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{11}{5}}\right) \right] = \\ &= i \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \operatorname{th} a}} e^{\lambda(a - \operatorname{th} a)} \left[1 + O(e^{-c_3 \varepsilon^2}) \right] \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{11}{5}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем:

$$H_{\lambda}^1(a\lambda) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \operatorname{th} a}} e^{\lambda(a - \operatorname{th} a)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{11}{5}}\right) \right]. \quad (93)$$

2. Если $a > 1$, например $a = \frac{1}{\cos \alpha}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), то мы имеем точки перевала $\tau = a$ и $\tau = -a$ и соответственно кривые

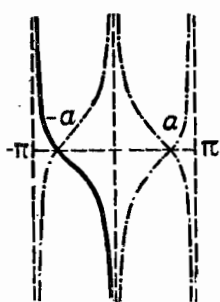
$$u - a \sin u \operatorname{ch} v = \pm (a - a \sin a), \text{ или } \operatorname{ch} v = \frac{u \mp (a - \operatorname{tg} a)}{a \sin u},$$

изображенные на черт. 22. При интегрировании по пути, изображенному сплошной линией, получаем $H_{\lambda}^{(1)}(z)$. Если заменим этот путь вблизи точки перевала прямолинейным отрезком, наклоненным под углом $-\frac{\pi}{4}$ к действительной оси, и соединительными отрезками ко-

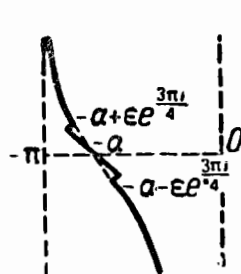
нечной длины, на которых $\Im f(\tau)$ не принимает больших значений, чем в точках $\tau = -a \pm \epsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}$ (черт. 23), и положим опять $\epsilon = \lambda^{-\frac{2}{5}}$, то получим таким же путем, как и раньше:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} e^{\lambda f(\tau)} d\tau &= e^{\lambda f(-a)} \int_{-\alpha - \epsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}}^{-\alpha + \epsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}} e^{\frac{\lambda}{2} f''(-a)(\tau + a)^2} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\ &= e^{\lambda(\lg a - a)} \int_{-\alpha - \epsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}}^{-\alpha + \epsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}} e^{-\frac{\lambda i}{2} \operatorname{tg} a (\tau + a)^2} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\ &= e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{tg} a}} e^{\lambda(\lg a - a)} \int_{-\epsilon \sqrt{\frac{\lambda \operatorname{tg} a}{2}}}^{+\epsilon \sqrt{\frac{\lambda \operatorname{tg} a}{2}}} e^{-u^2} du \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\ &= e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \operatorname{tg} a}} e^{\lambda(\lg a - a)} [1 + O(e^{-\epsilon^2 \lambda^2})] \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right], \\ H_{\lambda}^1(q) &= -e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{2\pi \lambda \operatorname{tg} a}} e^{\lambda(\lg a - a)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right]. \quad (94) \end{aligned}$$

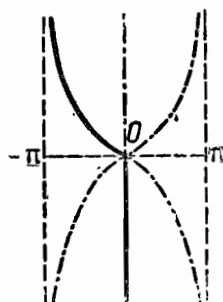
3. Если $a = 1$, то в точке перевала $\tau = 0$ обращается в нуль также и $f''(\tau)$. Кривая $\Im f(\tau) = u - \sin u \operatorname{ch} v = \Im f(0) = 0$ имеет поэтому три



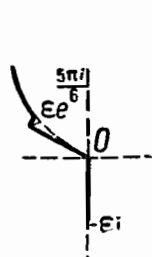
Черт. 22.



Черт. 23.



Черт. 24.



Черт. 25.

ветви, проходящие через точку $\tau = 0$ (черт. 24); одна из этих ветвей есть мнимая ось. Мы опять заменим криволинейную часть пути L_1 (этот путь на черт. 24 изображен сплошной линией), примыкающую к точке $\tau = 0$, прямолинейным отрезком (черт. 25), наклоненным к действительной оси под углом в $\frac{5\pi}{6}$ и имеющим длину $\epsilon = \lambda^{-\frac{1}{4}}$. Тогда для всех τ пути

интегрирования между $-\epsilon i$ и $\epsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}$ имеем:

$$\left| f(\tau) - \frac{i\tau^3}{6} \right| \leq c_1 \epsilon^5.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{L_1} e^{\lambda f(\tau)} d\tau &= \int_{-\epsilon i}^{\epsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\lambda f(\tau)} d\tau + O(e^{-c_1 \lambda \epsilon^8}), \\ \int_{-\epsilon i}^{\epsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\lambda f(\tau)} d\tau &= \int_{-\epsilon i}^{\epsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\frac{\lambda i \tau^3}{6}} d\tau \left[1 + O(\lambda^{-\frac{1}{4}}) \right], \\ \int_{-\epsilon i}^{\epsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\frac{\lambda i \tau^3}{6}} d\tau &= \int_0^{\frac{5\pi i}{6}} - \int_0^{-\epsilon i} = \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} + i \right) \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\lambda}{6}}} e^{-u^3} du; \end{aligned}$$

при последнем преобразовании мы полагаем в первом интеграле $\tau = \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} e^{\frac{5\pi i}{6}} u$, а во втором $-\tau = -\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} iu$. Правая часть последнего равенства равна:

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} + i \right) \int_0^{\infty} e^{-u^3} du [1 + O(e^{-c_2 \epsilon^8})],$$

если $\epsilon^8 \lambda$ остается больше некоторой положительной грани. Но

$$\int_0^{\infty} e^{-u^3} du = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-t^{\frac{2}{3}}} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

следовательно, окончательно получаем:

$$H_{\lambda}^1(\lambda) = -\frac{1}{3\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} + i \right) \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}\right) \right]. \quad (95)$$

Асимптотические формулы для $J_{\lambda}(a\lambda)$ получаем в случае $a \geq 1$ из выведенных здесь формул для $H_{\lambda}^1(a\lambda)$ и из формул, которые находятся совершенно аналогичным образом, для $H_{\lambda}^2(a\lambda)$:

$$H_{\lambda}^2(a\lambda) = i \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \operatorname{th} a}} e^{\lambda(a - \operatorname{th} a)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \quad (a < 1), \quad (96)$$

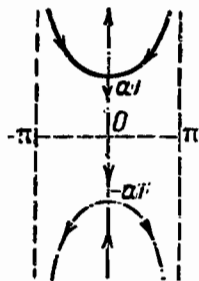
$$H_{\lambda}^2(a\lambda) = -e^{-\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \operatorname{tg} a}} e^{-\lambda(\operatorname{tg} a - a)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \quad (a > 1), \quad (96')$$

$$H_{\lambda}^2(\lambda) = -\frac{1}{3\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(e^{-\frac{5\pi i}{6}} - i \right) \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}\right) \right] \quad (a = 1), \quad (96'')$$

путем комбинирования по формуле:

$$J_{\lambda}(x) = \frac{1}{2} [H_{\lambda}^1(x) + H_{\lambda}^2(x)].$$

Но в случае $a < 1$ мы получаем таким образом для главного члена значение нуль. В этом случае мы можем выбрать также для получения J_{λ} путь интегрирования, изображённый на черт. 26 сплошной линией, и тем же методом получаем:



Черт. 26.

$$J_{\lambda}(a\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda \operatorname{th} a}} e^{\lambda(\operatorname{th} a - a)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right].$$

5. Общие замечания по поводу метода перевала. Мы воспользовались методом перевала для вычисления асимптотических формул, которые представляют только первые члены асимптотических рядов, получающихся с помощью принципа, намеченного в начале. Что касается этих рядов, мы отсылаем к подробному изложению у Watson G. N., *A treatise on the theory of Bessel Functions*, Cambridge 1922 и к оригинальным работам, особенно к статье Debye P., *Math. Ann.*, т. LXVII, стр. 535—558, 1909.

Впрочем, при применении метода перевала не является необходимым выбирать путь интегрирования в точности указанным образом; достаточно только, чтобы этот путь при больших значениях параметра, по которому производится разложение, достаточно близко подходил к указанному положению. Таким образом Г. Фабер получил целый ряд асимптотических разложений, например для полиномов Эрмита и Лагерра [см. Faber G., *Sitzungsber. Akad. München (math.-phys. Kl.)*, 1922, стр. 285—304].

6. Метод Дарбу. Другой метод для вывода асимптотических формул принадлежит Дарбу¹⁾. Пусть рассматриваемые величины a_{ν} заданы как коэффициенты степенного ряда, т. е. при помощи производящей функции $K(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \xi^{\nu}$. Если известны особые точки этой функции на окружности круга сходимости (пусть это будет окружность $|\xi|=1$, $\xi=e^{i\varphi}$) и если можно путем вычитания известных функций $f_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \xi^{\nu}$ достигнуть того, чтобы разность $K - f_n$ при приближении к окружности круга сходимости равномерно сходилась к некоторой n раз непрерывно дифференцируемой функции от φ , то коэффициенты $a_{\nu} - a_{n\nu}$ степенного ряда

$$K(\xi) - f_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} - a_{n\nu}) \xi^{\nu}$$

¹⁾ Darboux C., Mémoire sur l'approximation des fonctions des très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, *Journ. math. pures et appl.*, серия 3, т. 4, стр. 5—56 и стр. 377—416, 1878. См. также Haar A., Über asymptotische Entwicklungen, *Math. Ann.*, 96.

являются коэффициентами Фурье n раз непрерывно дифференцируемой (при $n=0$ непрерывной) функции от φ и удовлетворяют поэтому согласно гл. II, § 5, п. 3 условию:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{n-1} |a_\nu - a_n| = 0;$$

следовательно, значения a_{ν} дают при больших значениях ν тем лучшее приближение к a_n , чем больше n .

7. Применение метода Дарбу к асимптотическому разложению полиномов Лежандра. Применим этот метод к полиномам Лежандра $P_\nu(z)$, которые определены при помощи производящей функции:

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z) \zeta^\nu. \quad (97)$$

Допустим сперва, что $-1 < z < 1$, и положим $z = \cos \varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Тогда $1-2z\zeta+\zeta^2 = (\zeta - e^{i\varphi})(\zeta - e^{-i\varphi})$; радиус круга сходимости равен единице, и на окружности его лежат особые точки $\zeta = e^{\pm i\varphi}$. Чтобы получить разложения функции K по степеням $\zeta - e^{\pm i\varphi}$, мы условимся под $\sqrt{\zeta - e^{\pm i\varphi}}$ разумеать следующее:

$$\sqrt{\zeta - e^{\pm i\varphi}} = e^{\pm i\frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 - \zeta e^{\mp i\varphi}},$$

где квадратный корень справа означает ту ветвь функции, которая выражается биномиальным рядом¹⁾. Тогда

$$\begin{aligned} K(z, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\zeta - e^{i\varphi}} [\zeta - e^{i\varphi} + (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})]}^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{e^{+\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \frac{1}{\sqrt{\zeta - e^{i\varphi}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{\zeta - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} \right)^\nu = \\ &= \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \frac{1}{\sqrt{\zeta - e^{-i\varphi}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{\zeta - e^{-i\varphi}}{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}} \right)^\nu. \end{aligned}$$

Полагаем

$$f_n(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{\nu=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{(\zeta - e^{i\varphi})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^\nu} + e^{-\frac{3\pi i}{4}} \frac{(\zeta - e^{-i\varphi})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})^\nu} \right\},$$

тогда $K - f_n$ на окружности круга сходимости является непрерывной функцией, имеющей непрерывные производные первых n порядков.

¹⁾ Следовательно, если a — число положительное, то для $\zeta = e^{i\varphi} - a$ корень $\sqrt{\zeta - e^{i\varphi}}$ должен быть чисто мнимым и иметь положительный знак; наоборот, для $\zeta = e^{-i\varphi} - a$ корень $\sqrt{\zeta - e^{-i\varphi}}$ должен иметь чисто мнимое отрицательное значение. Условие, принятое в тексте, согласуется с требованием, налагаемым формулой (97), чтобы при $\zeta = 0$ корень $\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}$ имел значение $+1$.

Следовательно, разлагая f_n по степеням ξ , имеем:

$$f_n(z, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{\nu=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)_{\nu} \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4} - \frac{\varphi + \pi}{2} i + \nu(\varphi + \pi) i} \frac{(1 - \xi e^{-\varphi i})^{\nu - \frac{1}{2}}}{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^{\nu}} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{3\pi i}{4} + \frac{\varphi + \pi}{2} i - \nu(\varphi + \pi) i} \frac{(1 - \xi e^{\varphi i})^{\nu - \frac{1}{2}}}{(e^{-\varphi i} - e^{\varphi i})^{\nu}} \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{\nu=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)_{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \left(-\frac{1}{2}\right)_{\mu} \xi^{\mu} \left\{ \frac{e^{\frac{3\pi i}{4} - \frac{\varphi + \pi}{2} i + \nu(\varphi + \pi) i - \mu(\varphi + \pi) i}}{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^{\nu}} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4} + \frac{\varphi + \pi}{2} i - \nu(\varphi + \pi) i + \mu(\varphi + \pi) i}}{(e^{-\varphi i} - e^{\varphi i})^{\nu}} \right\} = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{n\mu}(z) \xi^{\mu},$$

где

$$p_{n\mu} = \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{\nu=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)_{\nu} \left(-\frac{1}{2}\right)_{\mu} \frac{1}{(2 \sin \varphi)^{\nu}} \left\{ e^{\frac{\pi i}{4} + (\nu - \mu - \frac{1}{2})\varphi i + \frac{\nu \pi i}{2} - \mu \pi i} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\pi i}{4} - (\nu - \mu - \frac{1}{2})\varphi i - \frac{\nu \pi i}{2} + \mu \pi i} \right\},$$

или

$$p_{n\mu} = \frac{2}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{\nu=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)_{\nu} \left(-\frac{1}{2}\right)_{\mu} \frac{(-1)^{\mu}}{(2 \sin \varphi)^{\nu}} \cos \left[\frac{\pi}{4} (1 + 2\nu) + \left(\nu - \mu - \frac{1}{2}\right)\varphi \right]; \quad (9)$$

отсюда получаем

$$P_{\mu}(z) = p_{n\mu}(z) + O(\mu^{-n}),$$

причем равномерно во всяком интервале

$$-1 + \varepsilon < z < 1 - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Если принять во внимание, что $p_{n+1, \mu} - p_{n, \mu} = O(\mu^{-n-1})$, то отсюда следует, что

$$P_{\mu}(z) = p_{n\mu}(z) + O(\mu^{-n-1}).$$

Если ограничиться первым членом в этом асимптотическом разложении, то получим:

$$P_{\mu}(z) = \frac{2}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \frac{1 \cdot 3 \dots (2\mu - 1)}{2 \cdot 4 \dots 2\mu} \cos \left[\frac{\pi}{4} - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\varphi \right] + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (99)$$

Если z не является действительным числом, заключенным в промежуток между -1 и $+1$, то одна из особых точек ξ_1 по абсолютному значению меньше единицы, а другая ξ_2 по абсолютному значению больше единицы, так как $\xi_1 \xi_2 = 1$.

На окружности круга сходимости $|\xi| = |\xi_1|$ лежит только особая точка ξ_1 , и только эту особую точку нам приходится принимать во внимание. Если мы поэтому преобразуем первые n членов разложения функции $K(z, \xi)$ по степеням $\xi - \xi_1$ в степенной ряд относительно ξ , то коэффициенты его представляют асимптотические выражения для $P_{\mu}(z)$, с той, однако, разницей по сравнению с предыдущим случаем, что теперь имеет место соотношение:

$$|\xi_1|^n (P_{\mu} - \dot{p}_{n\mu}) = O(\mu^{-n-1}).$$

ПРИМЕЧАНИЯ.

К стр. 71 (1-я строка снизу):

Интеграл Дирихле (Courant-Hilbert, 1-е издание, стр. 54—55).

Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция, a — произвольное положительное число, тогда имеет место формула:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt = \frac{1}{2} [f(x+0) - f(x-0)];$$

интеграл, находящийся в левой части этой формулы, принято называть интегралом Дирихле. Прежде всего докажем, что интегралы $\int_{\eta}^a$ и $\int_{-a}^{-\eta}$ при произвольно малом постоянном значении η стремятся к нулю, когда $v \rightarrow \infty$. Применяем к первому из этих интегралов интегрирование по частям:

$$-\frac{1}{v} \int_{\eta}^a \frac{f(x+t)}{t} \frac{d(\cos vt)}{dt} dt = -\frac{1}{v} \left[\frac{f(x+t)}{t} \cos vt \Big|_{\eta}^a + S \right] + \frac{1}{v} \int_{\eta}^a \cos vt \frac{d}{dt} \frac{f(x+t)}{t} dt.$$

S означает сумму скачков функции $\frac{f(x+t)}{t} \cos(vt)$ внутри интервала (η, a) .

Так как выражение в квадратных скобках и подинтегральное выражение интеграла, находящегося в правой части, остаются ограниченными при постоянном значении η , то наше утверждение доказано. Совершенно таким же образом проводится доказательство и для второго интеграла.

Чтобы найти предел интеграла $\int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt$, рассмотрением которого мы можем ограничиться, мы рассмотрим разность

$$\int_0^{\eta} f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt - f(x+0) \int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt = \int_0^{\eta} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin vt dt,$$

причем число η выбираем настолько малым, чтобы производная от $f(x+t)$ была непрерывна при $0 < t \leq \eta$, а также в интервале $-\eta \leq t < 0$.

Так как первый множитель под знаком интеграла остается по абсолютному значению ограниченным и $\leq M^+$, где M^+ означает верхнюю грань абсолютных значений производной от $f(x+t)$ при $0 < t \leq \eta$, то наша разность по абсолютному значению $\leq M^+ \eta$. Подобным же образом получаем, что разность

$$\int_{-\eta}^0 f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt - f(x-0) \int_{-\eta}^0 \frac{\sin vt}{t} dt = \int_{-\eta}^0 \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \sin vt dt$$

по абсолютному значению меньше M_{η}^{-} , где M^{-} — верхняя грань абсолютных значений $f'(x+t)$ при $-\eta < t < 0$. Таким образом мы получаем:

$$\left| \int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt - [f(x+0) + f(x-0)] \int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt \right| \leq (M^{+} + M^{-}) \eta,$$

так как, очевидно,

$$\int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt = \int_{-\eta}^0 \frac{\sin vt}{t} dt.$$

Это неравенство имеет место равномерно для всех $v \geq 0$. Но так как M^{+} и M^{-} безусловно не возрастают, если число $\eta > 0$ уменьшается, то достаточно только обнаружить справедливость равенства

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Путем подстановки $vt = u$ находим:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{v\eta} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

Но из соотношения (см. стр. 514, 515)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

интегрированием по частям находим:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = -\frac{\sin^2 t}{t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du,$$

т. е. получаем искомое равенство. Доказанную формулу можно, как это сделал Дирихле в своей классической работе ¹⁾, положить в основание теории рядов Фурье.

К стр. 89 (9-я строка сверху):

1. Функцию $F(x)$ строим следующим образом. Выбираем такое число A , чтобы

$\int_A^{\infty} f^2(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}$ (это возможно, так как по условию интеграл $\int_0^{\infty} f^2(x) dx$ существует). Далее строим непрерывную функцию $F(x)$, равную нулю при $x \geq A$, а в интервале $0 \leq x \leq A$, отличающуюся от $f(x)$ только в весьма малой окрестности каждой точки разрыва так, чтобы (см. стр. 49)

$$\int_0^A [F(x) - f(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

¹⁾ См. *Dirichlet P.G.L.*, Sur la convergence des séries trigonometriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. J. reine angew. Math., т. 4, стр. 157—169, 1829; собрание сочинений, т. I, стр. 117—132, Berlin 1889.

тогда

$$\int_0^{\infty} [f(x) - F(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

(16-я строка сверху):

II. В самом деле, мы можем выбрать такой многочлен $a_1 + a_2 \xi + \dots + a_n \xi^{n-1}$, чтобы

$$\left| \frac{\varphi(\xi)}{\xi} - a_1 - \dots - a_n \xi^{n-1} \right| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{или} \quad [\varphi(\xi) - a_1 \xi - \dots - a_n \xi^n]^2 < \varepsilon \xi^2,$$

следовательно,

$$\int_0^1 [\varphi(\xi) - a_1 \xi - \dots - a_n \xi^n]^2 \frac{d\xi}{\xi} < \int_0^1 \varepsilon \xi d\xi = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Производя подстановку $\xi = e^{-x}$, получаем:

$$\int_0^{\infty} [F(x) - a_1 e^{-x} - \dots - a_n e^{-nx}]^2 dx < \varepsilon.$$

(8-я строка снизу):

III. После того как по данному ε мы фиксировали число n , мы можем аппроксимировать в среднем каждую функцию $a_k e^{-kx}$ при помощи функции $Q_k(x)$, представляющей линейный агрегат ортогональных функций Лагерра, так, чтобы

$$\int_0^{\infty} [a_k e^{-kx} - Q_k(x)]^2 dx < \alpha \quad (k=1, \dots, n).$$

Далее, пользуясь неравенством Шварца, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [F(x) - (Q_1 + \dots + Q_n)]^2 dx &= \int_0^{\infty} [(F(x) - a_1 e^{-x} - \dots - a_n e^{-nx}) + \\ &+ (a_1 e^{-x} - Q_1) + \dots + (a_n e^{-nx} - Q_n)]^2 dx = \int_0^{\infty} [F(x) - a_1 e^{-x} - \dots - a_n e^{-nx}]^2 dx + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} [F(x) - a_1 e^{-x} - \dots - a_n e^{-nx}] (a_k e^{-kx} - Q_k) dx + \\ &+ \sum_{k, l=1}^n \int_0^{\infty} (a_k e^{-kx} - Q_k) (a_l e^{-lx} - Q_l) dx \leq \varepsilon + 2n \sqrt{\alpha \varepsilon} + n^2 \alpha. \end{aligned}$$

Выбирая $\alpha = \frac{\varepsilon}{n^2}$, находим, что рассматриваемый интеграл меньше 4ε . Наконец, полагая для краткости $Q_1 + \dots + Q_n = Q(x)$, находим:

$$\int_0^{\infty} [f(x) - Q(x)]^2 dx = \int_0^{\infty} [(f - F) + (F - Q)]^2 dx < \varepsilon + 2 \sqrt{\varepsilon \cdot 4\varepsilon} + 4\varepsilon = 9\varepsilon.$$

К стр. 95 (4-я строка сверху):

Приведем здесь доказательство этой интересной теоремы (Courant-Hilbert, 1-е издание, стр. 48, 49).

Подставляя вместо a_v и b_v их выражения в виде интегралов, имеем:

$$\left. \begin{aligned} s_1(x) &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \\ s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} (a_v \cos vx + b_v \sin vx) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \cos vt \cos vx + \sin vt \sin vx \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \cos v(t-x) \right\} dt \quad (n=2, 3, \dots); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

так как подинтегральное выражение имеет период 2π , то мы можем также записать $s_n(x)$ в виде:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \cos vt \right\} dt. \quad (1')$$

Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \cos vt &= \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{e^{ivt} + e^{-ivt}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{v=-n+1}^{n-1} e^{ivt} = \frac{1}{2} \frac{e^{-i(n-1)t} - e^{int}}{1 - e^{it}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(n-\frac{1}{2})t} - e^{-i(n-\frac{1}{2})t}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sin(n-\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

следовательно,

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t} dt. \quad (1'')$$

Итак,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n} = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{1 - \cos nt}{1 - \cos t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы доказать соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$, заметим, что для функции

$f(x) = 1$ все частичные суммы $S_n(x)$, а следовательно, и их среднее арифметическое равны единице, т. е.

$$1 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) dt. \quad (4)$$

Умножая равенство (4) на $f(x)$ и вычитая из равенства (3), получаем:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x)] \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \quad (5)$$

Пусть ϵ — произвольно малое положительное число; в силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ можно определить такое зависящее только от ϵ число $\delta = \delta(\epsilon)$ в интервале $0 < \delta < \pi$, чтобы при $|t| \leq \delta$ для всех значений x имело место неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Разбивая интеграл в формуле (5) на три интеграла:

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi}$$

и обозначая для краткости подинтегральную функцию через $\omega(t)$, а максимум, $|f(x)|$ через M , имеем:

$$\left| \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\delta} \omega(t) dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2\pi n} \int_0^{\delta} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{\epsilon}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \epsilon,$$

$$\left| \frac{1}{2\pi n} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \omega(t) dt \right| \leq \frac{2M}{2\pi n} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) dt < \frac{M}{\pi n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

$$\left| \frac{1}{2\pi n} \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \omega(t) dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2\pi n} \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{\epsilon}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \epsilon,$$

следовательно,

$$|S_n(x) - f(x)| \leq 2\epsilon + \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Но при достаточно больших значениях $n > n_0(\epsilon)$ имеем:

$$\frac{2M}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \epsilon,$$

следовательно,

$$|S_n(x) - f(x)| \leq 3\epsilon.$$

Тем самым доказано соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x),$$

а вместе с тем и полнота системы тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos vx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin vx}{\sqrt{\pi}} \quad (v=1, 2, \dots).$$

Замечание. Из формулы (4) нетрудно путем перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ вывести формулу:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно,

$$1 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt,$$

так как

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt,$$

в чем непосредственно убеждаемся подстановкой $t = 2\pi - v$. Выберем теперь столь малое положительное число δ , чтобы при $0 \leq u \leq \delta < 1$ имело место неравенство:

$$1 \leq \left(\frac{u}{\sin u} \right)^2 < 1 + \epsilon,$$

где ϵ — произвольно малое, наперед заданное положительное число. Разобьем наш интеграл на два и перепишем предыдущую формулу следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\delta} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt + \frac{1}{\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\delta} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 dt + \\ &+ \frac{1}{\pi n} \int_0^{\delta} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \left[\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 - 1 \right] dt + \frac{1}{\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

В первом интеграле полагаем: $\frac{nt}{2} = u$, тогда он примет вид:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{n\delta}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2} du,$$

второй интеграл меньше

$$\frac{\varepsilon}{\pi n} \int_0^{\frac{\delta}{2}} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du < \frac{4\varepsilon}{\pi},$$

так как

$$0 \leq \left[\left(\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right)^2 - 1 \right] < \varepsilon$$

в промежутке интегрирования (кроме того,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \int_0^1 \frac{\sin^2 u}{u^2} du + \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du < \int_0^1 du + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} = 1 + 1);$$

наконец, третий интеграл меньше

$$\frac{1}{\pi n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\pi} dt < \frac{1}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

При неограниченном возрастании n первый интеграл стремится к

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du,$$

третий интеграл стремится к нулю. Отсюда ввиду произвольности ε заключаем, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = 1$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}.$$

К стр. 105 (16-я строка снизу):

Немецкий термин „quellenmässig“, который мы переводим „истокообразно“, подсказан физическими применениями. Пусть, например, изучается стационарное распределение температуры в стержне, расположенном вдоль оси s от $s=a$ до $s=b$ (основной промежуток интегрирования) и пусть $K(s, t)$ есть температура, вызванная в любой точке s стержня наличием в точке t источника тепла мощности 1.

В таком случае функцию $g(s) = \int K(s, t) h(t) dt$ (2) можно истолковать как установившееся распределение температуры в стержне, усеянном вдоль всей своей длины от $s=a$ до $s=b$ источниками тепла мощности $h(s)$. Функция $h(s)$ есть „плотность распределения источников“. Таким образом функция $g(s)$ формулы (2) представлена с помощью источников (Quelle) или истоков. Отсюда термин: функция, представленная истокообразно. Читатель найдет другие аналогичные примеры в § 14 пятой главы.

К стр. 455 (15-я строка снизу):

$$(\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} = t^{(\lambda - \frac{1}{2}) \log(\zeta^2 - 1)};$$

во взрезанной плоскости (черт. 12) значения $\arg(\zeta - 1)$ и $\arg(\zeta + 1)$ будут однозначно определены, если мы примем $\arg(\zeta - 1)$ и $\arg(\zeta + 1)$ равными нулю для положительных значений $\zeta > 1$. Тогда

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg(\zeta - 1) < \frac{\pi}{2}$$

и в тех же пределах изменяется $\arg(\zeta + 1)$. Вдоль пути C_1 условимся считать $\arg(\zeta^2 - 1) = \arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1)$; тем самым значение $(\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ во взрезанной плоскости однозначно определяется. Вдоль пути C_2 будем считать

$$\arg(\zeta^2 - 1) = \arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1) + 2\pi,$$

т. е. берем другую ветвь функции $(\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}$. При таком условии значения функции $(\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ в точках пути C_2 будут для действительных λ комплексно сопряженными со значениями этой функции в точках пути C_1 , симметричных первым относительно мнимой оси.

В самом деле, обозначая через $\arg(\zeta + 1)$ угол, отсчитываемый во взрезанной плоскости по часовой стрелке от отрицательного направления действительной оси, по симметрии имеем:

$$\arg(-\bar{\zeta} - 1) = \overline{\arg(\zeta + 1)}, \text{ и } \arg(-\bar{\zeta} + 1) = \overline{\arg(\zeta - 1)},$$

но

$$\overline{\arg(\zeta + 1)} = -\pi - \arg(\zeta + 1) \text{ и } \overline{\arg(\zeta - 1)} = -\pi - \arg(\zeta - 1),$$

следовательно,

$$\arg(-\bar{\zeta} - 1) + \arg(-\bar{\zeta} + 1) = -[\arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1) + 2\pi].$$

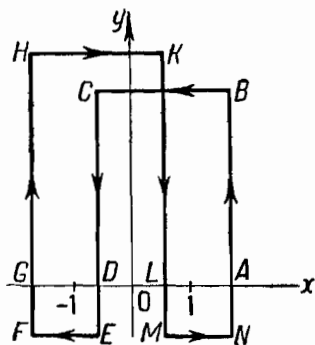
К стр. 456 (6-я строка снизу):

Вдоль пути $\mathfrak{A}$ мы считаем: $\arg(\zeta^2 - 1) = \arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1)$, причем в точке A пересечения этого пути справа с действительной осью мы принимаем:

$$\arg(\zeta - 1) = 0 \text{ и } \arg(\zeta + 1) = 0$$

и непрерывно изменяем значения этих аргументов, вдоль пути $\mathfrak{A}$ в направлении обхода. Путь $\mathfrak{A}$ мы можем заменить контуром $ABCDEF G H K L M N A$, изображенным на чертеже A .

В самом деле, по теореме Коши путь $ABCD O$ эквивалентен части пути $\mathfrak{A}$, лежащей в первой четверти, путь $ODEFG$ эквивалентен части пути $\mathfrak{A}$, лежащей в третьей четверти, и аналогично для остальных двух частей.



Черт. А.

Если неограниченно удалять отрезки BC и HK пути интегрирования, параллельные действительной оси, то значения интегралов вдоль этих отрезков будут стремиться к нулю. Интеграл вдоль пути $KLMNAB$, при этом в пределе будет равен интегралу вдоль пути C_1 , так как значения $\arg(\zeta - 1)$ и $\arg(\zeta + 1)$ вдоль части AB определены одинаково в обоих случаях, а вдоль части $KLMNA$ значения $\arg(\zeta - 1)$ на 2π больше соответствующих значений на пути C_1 , а значения $\arg(\zeta + 1)$ на 2π меньше, следовательно, и в данном случае значения $\arg(\zeta^2 - 1)$ одинаковы на обоих путях. Аналогично убеждаемся в том, что интеграл вдоль пути $CDEFGU$ переходит в интеграл, взятый в обратном направлении по пути C_2 . Действительно, $\arg(\zeta + 1)$ имеет одинаковое значение на обоих путях, $\arg(\zeta - 1)$ имеет значение на 2π большее, чем на пути C_2 , следовательно, в обоих случаях значения $\arg(\zeta^2 - 1) = \arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1) + 2\pi$.

К стр. 457 (12-я строка снизу):

Формула (16) на стр. 453 дает:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{J_{-\lambda}(z)}{z^{-\lambda}} = \frac{1}{2\lambda 2\pi i} \int_L e^{zv} (-\lambda + 1) dv,$$

интеграл в правой части равен $\frac{1}{2\lambda \Gamma(1-\lambda)}$ (см. стр. 458, 459), т. е. не равен нулю, если λ не является целым числом. Но в таком случае

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{J_{-\lambda}(z)}{z^\lambda} = \infty,$$

так что $z=0$ является особой точкой функции $\frac{J_{-\lambda}(z)}{z^\lambda}$.

К стр. 470 (16-я строка сверху):

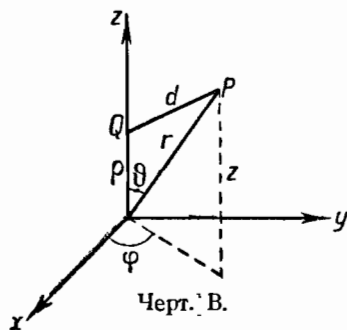
При этом мы принимаем, что $\lambda > -1$, так как только в этом случае мы имеем право интегрировать от нуля. Легко видеть, что, и при отрицательных значениях $\lambda > -1$ произведение $t [\xi_1 J'_\lambda(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2 J'_\lambda(\xi_2 t) J_\lambda(\xi_1 t)]$ при $t=0$ равно нулю.

К стр. 471 (11-я строка снизу):

$J_\lambda(z)$ имеет бесчисленное множество действительных корней. Гурвиц (Hurwitz) доказал¹, что если λ лежит между $-(2s+1)$ и $-(2s+2)$, где $s \geq 0$ — целое число, то $J_\lambda(z)$ имеет $4s+2$ комплексных корней, из коих два чисто мнимые; если λ лежит между $-2s$ и $-(2s+1)$, то $J_\lambda(z)$ имеет $4s$ комплексных корней (чисто мнимых нет). См. Watson, A treatise on the theory of Bessel Functions, гл. XV, стр. 483.

К стр. 491 (8-я строка снизу):

I. Для доказательства берем произвольную точку $P(x, y, z)$, полярные координаты которой обозначим через r, ϑ, φ , и точку Q на оси Z , расстояние которой ρ от начала O меньше r . Обозначив расстояние между точками P и Q через d , имеем:



Черт. В.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \rho)^2} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta}.$$

¹ Math. Ann., XXXIII, 1889, стр. 246–266,

Разложим функцию $\frac{1}{d}$, рассматриваемую как функцию от ρ , в ряд Маклорена

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} + \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho} \right]_{\rho=0} \rho + \dots + \left[\frac{\partial^n \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho^n} \right]_{\rho=0} \frac{\rho^n}{n!} + \dots,$$

но

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial (z - \rho)},$$

следовательно,

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho} \right]_{\rho=0} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z}$$

и вообще

$$\left[\frac{\partial^n \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho^n} \right]_{\rho=0} = (-1)^n \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n};$$

итак, получаем:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \rho + \dots + (-1)^n \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n} \frac{\rho^n}{n!} + \dots;$$

с другой стороны, имеем:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2\rho}{r} \cos \vartheta + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \frac{\rho^n}{r^n}.$$

Сравнивая оба разложения, получаем искомое соотношение:

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n}.$$

К стр. 491 (3-я строка снизу):

II. Если повернуть все оси мультиполя на угол γ , то потенциал нового мультиполя будет отличаться от прежнего только тем, что угол φ придется заменить углом $\varphi - \gamma$, так как в системе координат, повернутой на угол γ вокруг оси z , выражение для потенциала осталось бы без изменения (непосредственным вычислением можно показать, что φ_0 есть угол между осью x и осью ν_1 , что $\alpha = -\frac{1}{2^{n-1}}$ и что потенциал мультиполя при нечетном n равен нулю для точек, лежащих на оси z).

К стр. 508 (18-я строка снизу):

Это выражение удобнее представить, пользуясь формулой Валлисса, в виде:

$$P_\mu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi \mu \sin \varphi}} \cos \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right] + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

так как

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2\mu-1)}{2 \cdot 4 \dots 2\mu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right).$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Абеля интегральное уравнение 146
 Адамар, оценка определителя 32—33
 Амплитуда 268
 Аппроксимирование в среднем 44
 — теорема Вейерштрасса об аппроксимировании 58
 — одновременное аппроксимирование производных 61
 Аргумент функциональный 156
 Асимптотическое поведение
 — — бесселевых функций 314—315, 498—506
 — — функций Лежандра 507—508
 — — собственных функций Штурм-Лиувилля 312—320
 Асимптотическое поведение собственных значений 120, 273, 384—402
 — — — у дифференциального уравнения Бесселя 393—394
 — — — в задаче Штурм-Лиувилля 392
 Асимптотическое число измерений 56
 Асимптотические разложения 496—508
 Бесконечно большое число переменных 35, 48—49, 148—149, 165—171
 Бесконечно возрастание собственных значений 120, 273, 390
 Бесконечно малое линейное преобразование 35—36
 Бесселевы функции 286, 306, 350, 368, 380, 445—477
 — — асимптотическое поведение при больших значениях аргумента 314, 498
 — — при больших значениях параметра 393
 — — выражение бесселевых функций в виде интегралов 451—460
 — — интегральная теорема 321, 467—468
 — — нули бесселевых функций 469—473
 — — особые точки 477
 — — соотношения между бесселевыми функциями 463—467
 Бесселевы функции, степенной ряд 460—463
 — — теорема сложения 467
 Бесселя неравенство для систем векторов 4
 — — для систем функций 45
 Биения 368
 Билинейная интегральная форма 114
 Билинейная форма 10
 Билинейная формула для итерированных ядер 127
 Билинейное соотношение 339, 342, 348
 Биортогональности условия 382
 Биполь 490
 Брахистохрона 158
 Вариационная производная 175
 Вариация первая 176, 198—205
 — вторая 205
 — в случае переменной области интегрирования 246
 Вейерштрасс, теорема об аппроксимировании 58
 — теорема об экстремумах непрерывных функций 20—21, 152
 — условие для угловых точек 245
 Векторы 1—3
 Взаимное ядро 130
 Взаимно обратные формулы для определенных интегралов 74—75, 91
 Взаимность в вариационных задачах с дополнительными условиями 153
 Влияния функция см. Гринова функция
 Возмущений теория 324—328
 — — пример к теории возмущений 328—330
 Волновая поверхность 205
 Вольтерра, интегральное уравнение 146, 317—320
 Вынужденное движение 269, 274, 278, 283, 367
 Выродившиеся квадратичные формы 24
 — ядра 106
 Высота гона 268
 Гаара теорема 192—193
 Гамильтона принцип 233—234
 Гаммерштейна теорема 150
 Ганкеля функции 447—451, 454—460
 — — асимптотическое вычисление для больших значений аргумента 498—500

- Ганикеля функции для больших значений аргумента и параметра 502—506
 — — особые точки 477
 Геодезические линии 158, 178, 204
 Гиббса явление 98
 Главные колебания 268
 Гладкие, кусочно-гладкие функции 41
 Гладкость множества функций 54
 Градиент в функциональном пространстве 214
 Грама определитель 31—32, 100
 Граница, свободная вариация на границе 198—201
 Граничные условия см. Краевые условия
 Гринава функция 294, 330—348
 — — дифференциального уравнения Бесселя 349—350
 — — дифференциального уравнения Лагерра 353
 — — дифференциального уравнения Лежандра 350
 — — дифференциального уравнения Эрмита 351—352
 — — для круга и шара 354—356
 Гринава функция для прямоугольника 362—364
 — — для прямоугольного параллелепипеда 357—362
 — — для шаровой поверхности 356—357
 — — и конформное отображение 356
 — — и краевая задача 330—337, 342—346
 — — обобщенная 335
 — — построение 334—335
 — — примеры 349—366
 — — симметричность 333, 343
 — — существование 345
 Гринovy тензоры 371
 Дарбу, метод асимптотического вычисления 506—508
 Движение вынужденное 269, 274, 278, 283, 367
 Делитель элементарный 39
 Дивергенция, выражение типа дивергенции 182—185, 242, 265
 Дини теорема 50
 Диполь см. Биполь
 Дирихле, задача Дирихле 167—170
 — интегральная формула 71
 — разрывный множитель 75—76
 Дюбуа-Реймона теорема 190
 Единичная сила см. Сосредоточенная сила
 Естественные граничные условия 198
 Жесткость, увеличение жесткости 27, 271
 Задачи о собственных значениях
 — асимптотическое поведение 312—320
 — для замкнутых поверхностей 439
 — определение 272, 292
 — с непрерывным спектром 320—324
 — Шредингера 322—324
 — Штурм-Лиувилля 275, 306, 312—320
 Замкнутые системы функций 102—103
 Измеримые точечные множества 101
 Изопериметрическая задача
 — — для многоугольников 162—163
 — — на кривой поверхности 244
 — — решение Гурвица 90
 — — уравнение Эйлера 207—209
 Изопериметрические задачи 159—161, 207—210
 Инвариантность дифференциальных уравнений Эйлера 213—221
 Инвариантные вариационные задачи 248
 Индикатрисса 244
 Инерция, закон инерции квадратичных форм 25
 Интеграл Дирихле 71
 — Лебега 100—103
 — Пуассона 488—489
 — Фурье 70—76
 Интегралы уравнений движения систем материальных точек 250—252
 Интегральная теорема для бесселевых функций 321, 467—469
 — — Фурье 70—76
 Интегральная форма, билинейная и квадратичная 113 и след.
 Интегральное преобразование, метод и. п. 444—445, 446, 481—485
 Интегральные выражения
 — — бесселевых функций 451—460
 — — функций Ганкеля 447, 459—460
 — — Лагерра 484—485
 — — Лежандра 477—483
 — — Неймана 474
 — — Чебышева 483—484
 — — Эрмита 484
 Интегральные уравнения (линейные)
 — — первого рода 147
 — — второго рода или Фредгольма 104
 — — третьего рода или полярные 149
 — — Вольтерра 146, 317—320
 — — неоднородные 126, 138—139
 — — однородные 104
 — — особенные 142—143
 — — симметрические 113—131, 137—138
 — — применение к задачам о собственных значениях дифференциального уравнения 330—348
 Интегральные формулы Мелина 95—98
 Интегродифференциальные уравнения 381

- Истокообразно представленные функции 105
Итерированные ядра 127
- Канат, колебание каната, подвешенного за один конец 368
Каноническая форма вариационных задач 229
Канонические дифференциальные уравнения 230
Кастильяно, принцип Кастильяно 253, 256
Квадратичная форма 10—12, 20—30
— интегральная форма 113 и след.
Кели, теорема Кели 19
Келлог, метод определения собственных функций 145
Кинетическая энергия 233
Колебание, уравнение колебания 271, 275, 282, 290, 369
Колебание, примеры на уравнение колебания 369—370
Конечные разности, метод конечных разностей 165
Континуумы, колебания трехмерных континуумов 296—297
Конформное отображение 356
Координаты нормальные 267
— полярные 216
— эллиптические 217
— эллиптические вырождающиеся 220—221
Краёвое условие теории потенциала 239, 297—306
Краевые условия естественные 198—205
— однородные и неоднородные 262
— содержащие параметр 370, 438—439
— для колеблющейся струны 276
— для колеблющегося стержня 280
Кратное собственное значение 120
Кратность собственного значения 105, 120
Кратчайшие линии 158, 178, 204
Критическая сила 258
Кусочно-гладкие функции 41
— непрерывные функции 41
- Лагерь, дифференциальное уравнение Лагерра, применение метода интегрального преобразования 484—485
— полиномы и ортогональные функции Л. 81, 86, 89, 310—312, 323, 353, 484—485
Лагранж, уравнения движения Лагранжа 234
— множитель Лагранжа 153, 211, 222 и след.
Ламэ, функции Ламэ, уравнение Ламэ, задача Ламэ 301—306
Лаплас, интегральное выражение шаровых функций Лежандра 479—481, 482
Лаплас, преобразование Лапласа 445, 454
— шаровые функции см. Шаровые функции Лапласа
Лебег, теория Лебега 51, 52
— интеграл Лебега 100, 101
— теорема сходимости Лебега 101
Лежандр, дифференциальное уравнение Лежандра, применение метода интегрального преобразования 481, 482
— полиномы Лежандра 77—80, 307, 308, 380, 483, 507, 508
— условие Лежандра в вариационном исчислении 175, 205
— шаровые функции Лежандра см. Шаровые функции Лежандра
Линейная зависимость векторов 2
— функций 43
Линейное преобразование 5, 14
Линейные уравнения 1, 5 и след.
Лиувиль см. Штурм-Лиувиль
Логарифмический потенциал 355
- Максвелл, теория шаровых функций Максвелла 489—496
Максимальная последовательность 163
Максимально-минимальное свойство собственных значений 28—30, 122, 383
Малые колебания 235
Матрица 6 и след.
Матье, функции Матье 369, 370
Мелин, формулы обращения Мелина 95
Мембрана, потенциальная энергия 238
— вариационная задача и дифференциальное уравнение 237—240
— однородная 281—289
— неоднородная 289
— круговая 286—289
— прямоугольная 284—286
— „кривая“ 300
— минимальное свойство 441
Мера независимости 32, 55—56
Мера точечного множества 100—101
Мерсер, теорема Мерсера 128
Минимальные поверхности 171, 182
Минимальные последовательности 163
Минимальные свойства
— собственных значений 434, 437
— собственных функций 149
Множество, мера точечного множества 100—101
— меры нуль 101
Множитель Эйлера-Лагранжа 153, 211, 222 и след.
Мультипликативная вариация 436
Мультиполь 490
Мюнц, теорема о полноте системы степеней 94
- Нагрузка, задачи с нагрузкой 381
— ортогональные полиномы, соответствующие нагрузке $p(x)$ 80—81

- Наложение, принцип наложения 261
 Начальное состояние 241
 Неголономные условия 212
 Независимость, мера независимости 32, 55—56
 Неймана ряд 8, 16, 130—131, 320
 Неймана функции 449—451, 473—476
 — интегральные выражения 474
 — особые точки 477
 — разложения в степенной ряд 475—477
 Неограниченное возрастание собственных значений 120, 273, 390
 Неоднородная мембрана 289—290
 — струна 275—279
 Неоднородные интегральные уравнения 126, 138—139
 — краевые условия 262
 Неопределенное ядро 114
 Непрерывная зависимость от ядра 139—140
 Непрерывность, кусочная непрерывность 41
 — свойства непрерывности собственных значений 396
 Непрерывный спектр 320—324
 Нормальные координаты 267
 Норм. вектора 2
 — функции 42
 Нормированные векторы 2
 — функции 42
 Нули бесселевых функций 429, 469—473
 Нули собственных функций 429—434
 Ньютонов потенциал 354—355

 Обертон 270
 Обращение, формулы обращения Меллиа 95—98
 Однородная мембрана 281—289
 — струна 271—275
 Однородная форма дифференциального уравнения Эйлера 193
 Однородные интегральные уравнения 104
 Однородный стержень 279
 Окрестность функции 157
 Определенная квадратичная форма 11
 Определенное ядро 114
 Ортогонализация системы векторов 4
 — — функций 43—44
 Ортогональная система векторов, полная 3, 4
 — — функций, полная 46
 Ортогональные векторы 3
 — преобразования 12—14, 48—49
 — функции 42
 Ортогональные системы специальные см. Бесселевы функции, Эрмита полиномы, Лагерра полиномы, Якобиевы полиномы, Шаровые функции
 Лапласа, Шаровые функции Лежандра, Чебышева полиномы
 Ортогональные системы, принадлежащие несимметрическому ядру 147
 Основное решение 332, 346
 Основной тон 270
 Особенные интегральные уравнения 142—143
 Особые точки бесселевых функций 477
 Отображение конформное 356
 Отрицательные собственные значения 394

 Перевал, метод перевала 501, 506
 Пикар, теорема Пикара о разрешимости интегрального уравнения 148
 Пластика, потенциальная энергия 241
 — вариационная задача и дифференциальное уравнение 241—243
 — задача о собственных значениях 290—291
 — круговая 290—291
 — минимальное свойство 441
 — асимптотическое распределение собственных значений 438
 Плотность спектра 93
 Плотные системы функций 93
 Площадей теорема 251
 Полная ортогональная система векторов 3, 4
 — — — функций 46
 — — — функций многих переменных 49—50
 Полнота системы
 — полиномов Лагерра 88
 — полиномов Лежандра 77
 — полиномов Эрмита 88
 — собственных функций дифференциального уравнения 339, 331—342, 347, 402
 — степеней 58—61
 — тригонометрических функций 61—62
 — шаровых функций Лапласа 487
 — штурм-лиувиллевских собственных функций 339
 — соотношение или условие полноты 4, 46
 Полярное интегральное уравнение 149
 Полярные координаты, преобразование Δx к полярным координатам 216—217
 Потенциал Ньютона 354—355
 — логарифмический 355
 — теория потенциала 166—171, 297—306, 342—348, 354—366
 — уравнение потенциала 182
 Предельные точки, принцип предельных точек 52
 Преобразование
 — бесконечно большого числа переменных 48—49
 — бесконечно малое линейное 35—36

- Преобразование вариационных задач 222—233
- дифференциального выражения Δu 216
 - интегральное преобразование дифференциального уравнения 444—445, 446, 481—485
 - интегральное п. Мелина 95—98
 - квадратичной формы к главным осям 20—30
 - Лапласа 445, 454
- Преобразование линейное 5 и след.
- ортогональное 12—14, 48—49
 - унитарное 14
 - , формула преобразования тета-функции 68—69
 - Фридрихса 225, 226
 - Эйлера 445
- Продольный изгиб 258
- Произведение скалярное
- векторов 1—2
 - функций 42
- Производящие функции 452, 453, 483, 485
- Пространство функций 51
- Прямые методы вариационного исчисления 162
- Пуассон
- интеграл Пуассона 488—489
 - уравнение Пуассона 346
 - формула суммирования Пуассона 69
- Равностепенная непрерывность 52, 105
- Разложение, теоремы о разложении 339—340, 342, 347, 348, 349, 373, 404—407, 488
- Разрешающее ядро 130, 131
- Разрыв, условия разрыва 381
- Резольвента билинейной формы 16
- квадратичной формы 26—28
 - линейного интегрального уравнения 130, 135
- Рисса-Фишера теорема 102
- Ритц, метод решения вариационных задач 163—165
- Ряд Неймана 8, 16, 130, 320
- Фурье 62—70
- Свет, кратчайшее время распространения света, принцип Ферма 153
- Световые лучи 153, 158, 179, 205, 243
- Свободные края, свободная вариация на границе 198—201
- Сильвестр, алгебраическая теорема Сильвестра 493, 494—496
- выражение шаровых функций Максвелла-Сильвестра 489—496
- Симметризация, ядро, допускающее симметризацию 150
- Симметрическое ядро 113—124
- Скалярное произведение векторов 1—2
- — функций 42
- Собственная частота 268, 272
- Собственные векторы 21, 269
- Собственные значения 15, 23—24, 113—124, 272, 292, 375 и след.
- — кратные 120
 - — бесконечно большой кратности 372
 - —, задачи, о собственных значениях см. Задачи о собственных значениях
 - — их распределение 385—402 407—423
 - — их существование 28—30, 113—124, 338, 341—342, 347, 348
 - — максимально-минимальное свойство 28—30, 122—124, 383
 - — оценки 439—441
 - — экстремальные свойства 375
- Собственные колебания 268, 272
- Собственные функции 105, 272
- —, их существование 338, 341—342, 347, 348—349
- Сопряженное дифференциальное выражение 262—265
- Сосредоточенная сила 331, 342
- Спектральное разложение 92—93
- Спектр матрицы 15
- Спектр унитарной матрицы 39—40
- дифференциального уравнения 320, 321
 - дискретный, имеющий конечную точку сгущения 322—324
 - непрерывный 92—93, 320—324, 426
- Стационарные функции и кривые 176
- Стержень, потенциальная энергия 237
- вариационная задача и дифференциальное уравнение 237
 - естественные краевые условия 237
 - задача о собственных значениях 279—281
 - однородный 279
- Стирлинг, формула Стирлинга 496—498
- Струна, потенциальная энергия 236
- вариационная задача и дифференциальное уравнение 236
 - неоднородная 275—279
 - однородная 271—275
 - оттянутая 366—367
 - примеры на колебание струны 366—368
- Суммирование, формула суммирования Пуассона 69
- Суммируемые функции 100
- Суперпозиция, принцип суперпозиции 261
- Сходимость в среднем 102
- , теоремы сходимости Лебега 101
- Тензор Грина 371
- Теплопроводность, задачи о собственных значениях в теории теплопроводности, дифференциальное уравнение теплопроводности 294—295
- Тета-функции, применения 360—362, 366

- Тета-функции, функциональное уравнение 68—69
 Томсона принцип в электростатике 253
 Тон, высота тона 268
 Трансверсальность 201—205
- Угловые точки, условие Вейерштрасса-Эрдмана для угловых точек 245
 Узловые линии 284, 286, 287, 372
 Узловые точки 284, 429 и след., 442
 Унитарная матрица 9
 Унитарное преобразование 14
 Условия разрыва 332, 334, 335, 340, 341, 381
- Фаза 268
 Фейер, теорема Фейера о суммировании 94—95
 Ферма, принцип Ферма 153
 Фишер-Рисса теорема 102
 Форма билинейная 10
 — интегральная 113
 — квадратичная 11
 Формы, зависящие от бесконечно большого числа переменных 35
 Фредгольм, теоремы Фредгольма 107, 109
 — формулы Фредгольма 132—135
 Фридрихса преобразование 225, 226
 Фундаментальная лемма вариационного исчисления 174
 Фундаментальные функции см. Собственные функции
 Функционал 155
 Функциональное пространство 51
 Функциональное уравнение тета-функции 68—69
 Функциональный аргумент 156
 Фурье, коэффициенты Фурье 44, 63
 — — — порядок их малости 67
 — интеграл Фурье 70—76
 — ряд Фурье 62—70
- Характеристические числа 19, 23
- Центр тяжести, теорема о движении центра тяжести 251
 Цепная линия 160, 210
 Цилиндрические функции см. Бесселевы функции, Ганкеля функции, Матье, функции Матье, Неймана функции
- Чебышева дифференциальное уравнение, применение метода интегрального преобразования 483—484
 — полиномы 81, 82—83, 309—310, 483, 485
 Число измерений последовательности функций 56, 136, 137, 138
- Шаровые функции Лапласа 297, 298—299, 485—496
 — — выражение Максвелла-Сильвестра 489—496
 — — симметрические 487
 — — полнота системы шаровых функций Лапласа 487
 — — теорема о разложении 488
 Шаровые функции Лежандра 307—309, 350, 477—481
 — — асимптотические формулы 507—508
 — — второго рода 480—481
 — — высшего порядка 309, 481
 — — дифференциальное уравнение 79—80
 — — интегральные выражения 477—483
 — — как частный случай шаровых функций Лапласа 300
 — — производящая функция 79, 483
 — — рекуррентные формулы 479
 — — сопряженные 309, 481
 Шаровые функции обобщенные 300
 Шварц, неравенство Шварца для векторов 2
 — — — для функций 42
 Шестигранник, софокусный ортогональный 301
 Шлефли, интегральное выражение шаровых функций Лежандра 477—479
 Шмидт, метод вывода теорем Фредгольма 143—144
 Шредингер, задача Шредингера о собственных значениях 322—324
 — задачи о собственных значениях шредингеровского типа 423
 Штейнера задача 154
 — решение изопериметрической задачи 162—163
 Штурм-Лиувилля задача о собственных значениях 275—278, 306—312, 312—320, 379, 432
- Эйлер, дифференциальное уравнение Эйлера 175
 — преобразование Эйлера 445
 Экстремали 175, 178
 — ломаные 245
 Элементарный делитель 39
 Эллиптические координаты 217
 — — вырождающиеся 220—221
 Эллиптические функции 218, 219
 Энергия, интеграл энергии 253
 Энског 144
 Эрдман, условие для угловых точек 245
 Эрмита дифференциальное уравнение, применение метода интегрального преобразования 484
 — ортогональные функции 351
 — полиномы 310, 484
 — полиномы, их производящая функция 485

- Ядро, определение 104
— выродившееся 106
Ядро итерированное 127
— определенное 114
— разрешающее или взаимное 130, 135
- Ядро симметрическое 113—124
— допускающее симметризацию 150
— несимметрическое 145, 147
Якоби, полиномы Якоби 81, 83, 309—310