

Ф. М. МОРС и Г. ФЕШБАХ

МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

С. П. АЛЛИЛУЕВА, Н. С. КОШЛЯКОВА,
А. Д. МЫШКИСА и А. Г. СВЕШНИКОВА

Т О М

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1958

METHODS
OF
THEORETICAL PHYSICS

Phillip M. Morse

Professor of Physics
Massachusetts Institute of Technology

Herman Feshbach

Associate Professor of Physics
Massachusetts Institute of Technology

Part I: chapters 1 to 8

New York Toronto London
McGraw-Hill Book Company, Inc.
1953

АННОТАЦИЯ

Двухтомный курс Ф. Морса и Г. Фешбаха занимает особое место в литературе по математической физике. Он написан физиками для физиков и инженеров и показывает в действии математические методы, наиболее успешно применяемые при изучении различных полей.

В книге излагается ряд важнейших разделов современной математики в плане их применения к задачам физики и техники. Большим достоинством является то, что авторы всюду стремятся выяснить основные идеи, существо и физический смысл излагаемых методов. Поэтому книга представляет значительный интерес и для математиков, которым она покажет новые стороны известных им методов. Некоторые из излагаемых методов (например, метод теории возмущений во втором томе) успешно применяются физиками, но еще недостаточно известны математикам и ждут своего математического обоснования. И физики и математики найдут в книге большое число подробно разобранных примеров важных прикладных задач.

Курс Морса и Фешбаха лежит на стыке физики и математики. Он отличается от обычных курсов математической физики своей значительно большей физичностью, а от курсов теоретической физики тем, что в нем основное место уделяется разработке математического аппарата.

Книга будет полезной студентам, аспирантам и научным работникам математических, физических и инженерных специальностей и вообще всем лицам, сталкивающимся с применением современной математики.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый вниманию читателей в русском переводе двухтомный курс «Методов теоретической физики» весьма своеобразен и, пожалуй, не имеет аналогов среди распространенных у нас книг. Написанный физиками (имя одного из которых — Филиппа Морса — хорошо известно нашим читателям) для физиков и инженеров, этот курс содержит глубокое и разностороннее изложение математической теории основных полей, рассматриваемых в физике. С содержанием книги читатель может познакомиться по подробному оглавлению, а установки авторов достаточно ясно освещены в их предисловии. Сделаем только несколько общих замечаний.

Хотя математическая литература, предназначенная для нематематиков (физиков или инженеров), насчитывает большое число книг, однако значительная ее часть не полностью отвечает своему назначению. Стремление к современному уровню математической строгости, отбор материала с традиционных математических позиций и другие проявления «узковедомственного» математического подхода приводят к тому, что многие из этих книг являются лишь сокращенными вариантами университетских курсов, предназначенных для математиков. Это влечет за собой, с одной стороны, неоправданное усложнение и перегруженность изложения «неработающим» материалом, а с другой стороны, приводит к тому, что многие математические идеи и методы, часто уже давно «принятые на вооружение» прикладниками, освещаются чрезвычайно слабо или даже совсем не освещаются лишь из-за того, что их пока ещё не удается достаточно строго изложить. В результате очень часто получается, что физик или инженер, изучив математический курс и встретившись затем с применением математики, вынужден овладевать рядом новых методов, понятий и терминов, перестраивая в какой-то степени свою «математическую психологию». Поэтому наряду с традиционными курсами насущно необходимы и такие книги, в которых математические понятия и методы излагались бы в том плане (с той же «математической психологией», с теми же ассоциациями, на том же уровне строгости и т. п.), в каком они впоследствии должны применяться. Курс Морса и Фешбаха и является одной из таких книг, причем он охватывает ряд важнейших отделов современной математики.

Думается, что авторы со своей задачей в целом справились. Физики и другие специалисты, применяющие современную математику, найдут в книге очень много интересного материала, освещенного с естественной для них точки зрения, — как достаточно популярного, но оригинально изложенного, так и недостаточно распространенного, хотя и весьма полезного. Мы надеемся, что книга окажется очень интересной и для математиков (если, конечно, они не будут предъявлять к ней требований, которым она и не должна удовлетворять); она не только показывает математику с точки зрения «потребителя» и содержит ряд важных недо-

статочно популярных фактов, но и освещает, как это ни парадоксально с первого взгляда, многие математические соотношения более глубоко, чем это делается в «чисто математической» литературе (к примеру свойства функции Грина рассмотрены во многих книгах, однако при этом очень редко объясняется, *почему* эта функция — функция влияния — появляется при решении краевых задач для однородных уравнений; можно было бы привести и ряд других примеров). Особо хочется отметить живой и образный язык книги, а также большое число подробно разработанных важных примеров.

Книга не лишена недостатков. Изложение не всюду проводится наиболее простым и ясным образом. Порой авторы, нарушая свой собственный стиль, пускаются в обсуждение излишних математических «тонкостей», что при принятом в книге уровне математической строгости не является убедительным и может только запутать читателя. Иногда изложение становится, пожалуй, слишком небрежным, в результате чего появляются ошибочные утверждения, а также ошибки в знаках, коэффициентах и т. п. Замеченные ошибки при переводе были исправлены, однако, учитывая сложность работы над переводом этой книги, нельзя поручиться за то, что все ошибки были замечены. В связи с этим следует предупредить читателя о необходимости известной бдительности, если он захочет воспользоваться книгой не для ознакомления с понятиями, идеями и методами в освещаемых областях, а только в качестве справочника формулировок и формул.

Из сказанного ясно, что книгу нельзя рекомендовать в качестве учебника для первого ознакомления с трактруемыми в ней вопросами. Однако, как нам кажется, читатели (и математики, и физики, и инженеры; и знающие предмет и изучающие его) найдут в ней много интересных идей, полезных методов и важных фактов, и книга займет свое место в литературе по математической физике.

В процессе перевода книги над ней работала большая группа переводчиков и редакторов. Наибольшей опасностью для нас был соблазн «улучшать» авторов, что нарушило бы характер и целевую установку книги и в конечном счете привело бы к ее ухудшению. Поэтому мы старались без особой надобности не отступать от оригинала. В частности, мы старались сохранить своеобразную терминологию авторов. В некоторых случаях добавлены небольшие пояснительные примечания; незначительные исправления внесены прямо в текст. Ряд довольно туманных мест оставлен без изменения, так как и они всегда содержат какое-то «рациональное зерно», которое может оказаться полезным читателю. Несколько пополнена библиография, главным образом указаниями на распространенные у нас источники.

Книга издается в двух томах исключительно по техническим причинам, ибо эти тома по существу представляют собой единое целое. Некоторые вопросы освещаются как в первом, так и во втором томе, разумеется, с различных точек зрения. Вследствие этого справочный аппарат (предметный указатель и указатель используемых обозначений) сделан общим и помещен во втором томе. Ряд указаний о пользовании книгой, в частности о том, как рассматривать стереоскопические рисунки, читатель найдет в предисловии авторов.

Упомянем в заключение, что некоторые символы применяются в разных местах книги в разных смыслах. Например, знак $\approx$ асимптотического равенства означает иногда стремление к единице отношения левой части к правой, иногда отличие левой части от правой на величину того или иного порядка малости. Впрочем, смысл употребляемых символов всегда ясен из контекста.

Работа по переводу книги распределилась следующим образом: Д. А. Васильков перевел гл. 3, 4 и § 1, 2 гл. 8; Ю. И. Гросберг — гл. 11 и § 1, 2 гл. 12; В.-К. И. Карабегов — § 7 гл. 1, § 3, 4 и 5 гл. 8, гл. 10; В. И. Левин — § 1 — 6 гл. 1; А. М. Молчанов — гл. 9; А. Д. Мышкис — гл. 5, 6 и 7; А. Г. Свешников — гл. 13; В. С. Ялтуновский — гл. 2 и § 3 гл. 12. Редактировали: § 3 гл. 12 — С. П. Аллилуев; гл. 5, 6, 7, 8 и 13 — **Н. С. Кошляков**; гл. 1, 2, 3, 4 и 9 — А. Д. Мышкис; гл. 10, 11 и § 1, 2 гл. 12 — А. Г. Свешников. Весь текст книги был просмотрен С. П. Аллилуевым.

Редакторы.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Этот трактат вырос из курса лекций, читанных тем или другим из авторов на протяжении последних шестнадцати лет. Сама книга находилась в процессе подготовки в течение более чем половины этого времени, хотя, правда, было много перерывов, больших и малых. Проблемой не последней важности являлось при этом достигнуть надлежащего понимания в вопросе о том, что должно составить основное содержание книги и как это содержание должно быть представлено.

Современная теоретическая физика представляет собой весьма обширную область; изложение всех относящихся сюда предметов не поместилось бы и на пятифутовой книжной полке, и оно находится далеко за пределами возможностей и интересов авторов. Но не все участки этой области в наше время интенсивно разрабатываются; части, в которых за последние двадцать лет сделаны наиболее примечательные успехи, связаны главным образом не столько с частицами, сколько с полями, с волновыми функциями, силовыми полями, электромагнитным и акустическим потенциалами, т. е. со всем, что является решениями дифференциальных уравнений в частных производных, определенными краевыми условиями. Именно на этом общем подходе и концентрируется внимание в настоящем трактате. Пятьдесят лет назад он мог бы быть назван «Дифференциальные уравнения в частных производных физики» или «Краевые задачи». Сегодня, по причине распространенности концепции и методов теории поля, не будет, быть может, неподходящим использование более общего названия.

Но даже и эта ограниченная область не могла бы быть освещена в двух томах курса. Описание физических понятий и экспериментальных методов всех тех отраслей физики, которые пользуются полями, заняло бы огромнейшую полку, причем в этом описании дублировалось бы основное содержание многих прекрасных книг, а единство предмета, имеющее основное значение, в нем было бы погребено в массе деталей. И в самом деле, единство теорий полей лежит в аналитическом аппарате, в тех математических средствах, которые эти теории используют для получения решений. Этот аппарат остается в своей сущности одним и тем же, изучаем ли мы поле, соответствующее нейтральному мезону, или сигналу радара, или звуковой волне, или облаку диффундирующих нейтронов. Вследствие этого предлагаемый курс в первую очередь дает представление тех математических средств, которые оказались наиболее полезными при изучении основных физических конструкций, связанных с полями, а также дает ряд примеров, показывающих, как эти средства могут быть использованы при решении различных физических задач. При этом сообщаются только те физические сведения, которые необходимы, чтобы сделать примеры понятными.

Однако мы не утверждаем, что этот труд является математическим сочинением. Физик, использующий математику как орудие, может также

воспользоваться своими физическими знаниями для того, чтобы так дополнить уравнения, как чистый математик не рискнет (и не должен рисковать) это сделать. Например, он может пользоваться представлением о точечном заряде; математик же должен добиваться выяснения аналитических капризов дельта-функции Дирака. Физик обычно отправляется от уже описанного и измеренного решения дифференциального уравнения в частных производных; математик же часто вынужден детально разрабатывать сеть теорем и лемм, чтобы точно показать, когда данное уравнение имеет единственное решение. Рассуждения, приводимые в этой книге, будут, мы надеемся, понятны и удовлетворительны для физиков и инженеров, для которых написана эта работа; математик же зачастую не сочтет их достаточно строгими.

Будучи ограничен в этих двух различных направлениях — в количестве физического материала и в математической строгости, — наш трактат, надо надеяться, является сравнительно замкнутым и завершенным. Предполагается, что читатель владеет физикой в объеме знаний, даваемых физическими факультетами; математическая же подготовка предполагается в объеме обычных курсов анализа и дифференциальных уравнений. Дальнейший необходимый математический материал из векторного и тензорного анализа и из теории линейных дифференциальных и интегральных уравнений, относящийся к нашему предмету, излагается в тексте.

Изложение ведется в довольно замкнутом стиле, так что лишь изредка приходится прибегать к выражению «можно показать», столь расстраивающему читателя. Даже на ранней стадии обсуждения основного математического аппарата сделана попытка сопоставить уравнения и методы с физическими свойствами полей, являющихся главным объектом изучения. Во многих случаях выводы даны дважды, сначала в полунтуитивной манере, чтобы выявить физическую сущность вопроса, а затем со всеми символами и уравнениями, чтобы достигнуть необходимой степени строгости. Иногда часть рассуждения повторяется в позднейшей главе с другой точки зрения, чтобы избежать чрезмерного количества ссылок; это было признано желательным, хотя и повлекло за собой некоторое увеличение объема книги.

Мы старались освободиться от тривиальных и слишком частных примеров решений. В результате, конечно, включенные примеры, для того чтобы выявить все то, что есть в них интересного, часто требуют длинных и сложных объяснений; однако эта книга и предназначена как раз для того, чтобы объяснить, насколько трудные задачи могут быть решены, а такое объяснение не может быть иллюстрировано простыми примерами. Вариационные методы в применении к задачам дифракции, итерационные методы, используемые при вычислении рассеяния волн на нерегулярных границах, вычисление сходящихся рядов для собственных состояний, возмущенных сильными потенциалами взаимодействия, — все эти методы обнаруживают свою подлинную силу только тогда, когда они применяются в задачах, неразрешимых иным способом.

Другой общий принцип также работал в направлении удлинения рассуждений. Авторы предпочитали, так часто, как только это было возможно, «атаковать» задачи «в лоб», стараясь не «зарыться в них». Они предпочитали попытаться показать, как находить решение нового и незнакомого уравнения, вместо того чтобы приводить список выражений, относительно которых кто-то нашел, что они являются решениями интересных задач. Однако некоторого количества «раздражающих» примеров, в которых решение появляется, так сказать, с неба, а затем доказывается, что оно в самом деле является решением, нельзя было избежать. Обычно такие примеры занимают меньше места и легче типографски воспроизво-

дятся; однако в большом количестве они вызывают у изучающего состояние подавленности или фатализма.

Мы надеемся, что эта работа окажется также сравнительно замкнутой и в отношении численных таблиц и списков употребительных формул. Таблицы и перечни основных свойств, помещенные в конце каждой главы, резюмируют основные результаты этой главы и позволяют легко обозреть основные свойства наиболее часто используемых функций. Вместо того чтобы рассеивать литературные ссылки по всему тексту, мы собрали их также в конце каждой главы; это позволяет легче находить их в случае надобности. Сюда были включены только названия тех книг и статей, относительно которых авторы чувствовали, что они будут полезны читателю, дополняя материал данной главы; эти ссылки отнюдь не предназначены для указания приоритета или кульминационных точек исторического развития. Историческое развитие теории, являющейся основным предметом этой книги, было бурным и потребовало усилий многих знаменитых личностей. Методы переоткрывались и получали новое имя почти всякий раз, как обнаруживалась новая ветвь физики. Полное библиографическое описание потребовало бы сотен страниц, многие из которых были бы очень скучны. Мы давали ссылки, чтобы помочь читателю понять предмет, а не для того, чтобы закрепить за каждым исследователем «свою долю». Искренне говоря, мы дали ссылки на те работы, которые мы сами знаем и которые мы нашли полезными.

Была сделана попытка координировать выбор символов для обозначения различных определяемых и используемых функций. В тех случаях, когда символы, используемые в литературе, прочно установились, как, например, для бесселевых функций, мы следовали принятым обозначениям. Когда же имелось несколько различных символов, выбирался тот, который логически лучше подходил к остальному материалу и вызывал меньше повторений, как это было сделано в случае функций Матье. В немногих случаях функции были перенормированы, чтобы сделать их более удобными для употребления; этим новым функциям даны новые обозначения, как в случае полиномов Гегенбауера. Соотношение между используемыми в этой книге обозначениями и другими обозначениями, которые достаточно часто появляются в физической литературе, указано в Приложении; там же дан общий указатель символов.

Таблиц, помещенных в Приложении, будет достаточно для большинства вычислений, относящихся к основному предмету этой книги. Мы предпочли включить большое количество таблиц с ограниченными диапазонами и точностью, нежели давать немного таблиц с большим числом входов и значащих цифр. Табулировано большинство функций, используемых в реально возникающих физических задачах, но некоторые вспомогательные функции, такие, как гамма-функция или эллиптические функции, не представлены, равно как и некоторые функции со слишком многими независимыми параметрами, такие, как гипергеометрические функции. Некоторые функции, такие, как параболические и сфероидальные волновые функции, мы хотели включить, но их полные основные таблицы еще не опубликованы.

Некоторые из чертежей в этой книге, относящиеся к трем измерениям, выполнены для стереоскопического рассматривания. Их можно рассматривать либо при помощи какого-либо обычного стереоскопа, либо же без какого бы то ни было дополнительного приспособления, расслабляя фокусирующие мускулы глаз и заставляя каждый глаз смотреть на соответствующий ему рисунок. При этом следует делать такое усилие, которое нужно было бы для того, чтобы рассмотреть нечто, находящееся за плоскостью рисунка. Само собой разумеется, что эти рисунки можно рас-

смаатривать и как обычные перспективные, не обращая внимания на то, что они дублированы. Однако читатель, научившийся после недолгих упражнений «стереоскопическому видению», будет рассматривать эти рисунки с удовольствием.

Авторам при выполнении их задачи помогали многие. Сотни аспирантов, которые слушали соответствующий курс с 1935 года, вольно или невольно помогли при выборе порядка изложения и при отборе относящихся сюда примеров. Они исправили почти все опечатки литографированного издания записей лекций, на которых базируется эта книга; однако они еще не имели времени устранить те неизбежные ошибки, которые имеются в этом издании. Любой из читателей может помочь в этом, обратив внимание авторов на те ошибки, которые он заметит.

Была также и более специализированная помощь. Доказательство теоремы Коши, данное на стр. 334, было предложено Р. Боасом. В чтении рукописи и корректур участвовали профессора Дж. А. Стрэттон и Н. Г. Франк, доктора Гарольд Левин, К. У. Ингард, Вальтер Хойзер, Роберт и Джейн Пис, С. Рубинов, а также Ф. М. Юнг, М. К. Ньюстейн, Л. Сартори, Дж. Литтл, Э. Ломон и Ф. Дж. Корбатó. Всех их следует поблагодарить за многочисленные исправления и улучшения; на них не должно взыскивать вину за ошибки и неудобоваримые выражения, которые, без сомнения, еще остались. Мы выражаем также благодарность профессору Юлиану Швингеру за беседы и советы, стимулировавшие нашу работу.

*Филипп М. Морс,
Герман Фешбах.*

Май 1953.

Типы полей

Нашей задачей в предлагаемой книге является рассмотрение математического аппарата, используемого при расчете и анализе разных типов полей, встречающихся в современной физике. Наше внимание будет в первую очередь обращено на выявление взаимосвязи между уравнениями и физическими свойствами полей, причем временами мы будем жертвовать математической строгостью, если она не содействует выяснению физической сущности вопроса. Математическая строгость важна, и ею нельзя пренебрегать, но физик-теоретик должен в первую очередь добиваться полного понимания физического смысла употребляемой символики, без чего формальная строгость не может принести ему никакой пользы. Существуют другие руководства, в которых математическая строгость полностью выдержана; настоящая же книга достигнет своей цели, если ее читатель получит ясное физическое представление о разнообразных уравнениях полей, которые встречаются в современной теоретической физике, а также полностью уяснит себе физическую сущность математического аппарата, применяемого для решения этих уравнений.

В настоящей главе мы рассмотрим общие свойства разных полей и представления этих полей в различных системах координат. Вторая глава будет посвящена рассмотрению различных типов дифференциальных уравнений с частными производными, которые описывают эти поля; а третья глава — связи между этими уравнениями и основными вариационными принципами, развитыми в классической динамике Гамильтоном и другими учеными. Несколько дальнейших глав будет посвящено математическому аппарату, необходимому для решения этих уравнений, а в остальной части книги мы рассмотрим решение отдельных уравнений.

Практически вся современная физика имеет дело с полями: потенциальными полями, полями вероятностей, электромагнитными, тензорными и спинорными полями.

С математической точки зрения поле представляет собой систему функций от координат точки в пространстве. С точки зрения, принятой в этой книге, поле есть некоторая удобная математическая идеализация физической ситуации, в которой *протяженность* является существенным элементом, т. е. которая не может быть исследована в терминах положения конечного числа частиц. Поперечное отклонение струны, находящейся под воздействием статических сил; от ее положения равновесия представляет собой очень простой пример одномерного поля; отклонение y различно для разных частей струны, так что y можно рассматривать как функцию расстояния x вдоль струны. Плотность, температуру и давление в жидкости, в которой распространяются звуковые волны, можно рассматривать как функцию трех координат и времени. Поля такого типа, очевидно, являются лишь приближенной идеализацией физической ситуации, так как они не учитывают атомных свойств материи. Мы можем назвать их *материальными полями*.

Другие поля являются конструкциями, позволяющими изучать проблему *действия на расстоянии*, в которой относительное движение и положение одного тела влияют на движение и положение другого тела. Потенциальные и силовые поля, электромагнитные и гравитационные поля служат примерами таких полей. Считают, что такие поля вызваны некоторым количеством материи, а значение поля в некоторой точке рассматривают как меру воздействия этого количества материи на некоторое пробное тело, помещенное в рассматриваемой точке. В последнее время стало очевидным, что многие из этих полей также являются лишь приближенной идеализацией действительной физической ситуации, так как они не учитывают различных квантовых законов, которым подчиняется материя. В некоторых случаях теория этих полей может быть так изменена, чтобы более или менее удовлетворительным образом учитывались эти квантовые законы.

Наконец, поля могут строиться для «объяснения» квантовых законов. Примерами являются волновая функция Шредингера и спинорные поля, ассоциируемые с электроном Дирака. Во многих случаях значение такого поля в точке пространства тесно связано с вероятностью. Например, квадрат модуля волновой функции Шредингера является мерой вероятности присутствия элементарной частицы. Существующие квантовые теории поля встречаются со многими фундаментальными трудностями и поэтому представляют собой одну из передовых линий фронта современной теоретической физики.

В большинстве случаев поля, рассматриваемые в настоящей книге, оказываются решениями дифференциальных уравнений с частными производными, чаще всего линейных уравнений второго порядка, однородных или неоднородных. Для того чтобы получить такие уравнения, часто приходится упрощать действительную физическую ситуацию, причем подобное упрощение может быть оправдано некоторыми прагматическими соображениями. Например, решением волнового уравнения является лишь «сглаженная плотность» газа, что, однако, оказывается достаточным для изучения звуковых волн, а значительно более сложные вычисления фактических движений молекул газа немного добавили бы к нашим знаниям о звуке.

Эта тенденция втиснуть физическую ситуацию в прокрустово ложе дифференциальных уравнений с частными производными приводит к тому, что получаемые поля оказываются одновременно и более и менее правильными, чем «фактические» состояния. Решение дифференциального уравнения обладает в большей части пространства и времени большей степенью гладкости, чем соответствующая физическая ситуация, но математически оно обычно имеет конечное число разрывов, значительно более «резких», чем те, которые «фактически» имеют место. Если упрощение было не слишком далеко идущим, то большинство величин, которые могут быть вычислены с помощью поля, достаточно хорошо соответствуют их измеренным значениям. В каждом случае, однако, обнаруживаются некоторые расхождения между вычисленными и измеренными значениями, что объясняется либо «слишком гладким» поведением поля на большей части его протяжения, либо наличием в математически построенном поле разрывов и бесконечностей, отсутствующих в «действительности». Иногда эти расхождения тривиальны в том смысле, что внесение в конструкцию поля дополнительных усложнений с целью получить лучшее соответствие с экспериментом не приводит к принципиальному изменению самой теории явления; в некоторых же случаях эти расхождения далеко не тривиальны, и изменения в теории, необходимые для достижения лучшего соответствия с экспериментом, затрагивают коренным

образом основные понятия и определения. Для физика-теоретика важно различать тривиальные и нетривиальные расхождения между теорией и экспериментом.

Один из признаков того, что поле часто представляет собой упрощение физической реальности, состоит в определении поля при помощи предела некоторого отношения. Поле плотностей жидкости, в которой распространяется звуковая волна, определяется посредством «плотности в данной точке», которая является пределом отношения массы жидкости, заключенной в некотором объеме, окружающем данную точку, к величине этого объема при стягивании этого объема к «нулю». Электрическая напряженность «в данной точке» является пределом отношения силы, действующей на пробный заряд в этой точке, к его величине при стремлении величины пробного заряда к «нулю». Величина квадрата модуля волновой функции Шредингера есть предел отношения вероятности присутствия элементарной частицы в некоторой области, окружающей данную точку, к объему этой области при сжимании этой области к «нулю» и т. д. Аккуратное определение смещения «точки» колеблющейся струны также должно использовать предел некоторого отношения.

Мы подчеркиваем здесь эти тривиальные с математической точки зрения замечания потому, что техника предельных отношений должна при определении и вычислении полей применяться с осторожностью. Иными словами, для того чтобы получить результаты, соответствующие «действительности», следует тщательно определить содержание понятия «нуль» в предыдущих рассуждениях. Например, объем, встречающийся в определении поля плотностей жидкости, должен быть на несколько порядков меньше куба наименьшей длины волны распространяющегося звука, если мы хотим, чтобы взятое отношение приводило к достаточно точному решению волнового уравнения. С другой стороны, этот объем нельзя уменьшать до величины, сравнимой с размерами атома, иначе соответствующее отношение потеряет необходимые свойства гладкости и не будет уже нам полезным. Если принять во внимание эти ограничения, то нетрудно понять, почему описание звуковых волн при помощи поля, являющегося решением волнового уравнения, оказалось бы неадекватным, если бы «длина волн» стала меньше межатомных расстояний.

Аналогичным образом мы определяем электрическое поле при помощи пробного заряда, который должен быть достаточно мал, чтобы не влиять на распределение зарядов, «порождающих» поле. Но если размеры пробного заряда уменьшить до порядка малости заряда электрона, то следует ожидать трудности, связанной с атомистичностью зарядов (которая, однако, необязательно должна возникнуть).

В некоторых случаях предельное отношение может рассматриваться при как угодно малых величинах его членов. Поля вероятностей волновой механики являются настолько «мелкозернистыми», насколько мы это можем себе в настоящее время представить.

1.1. Скалярные поля

Когда рассматриваемое поле оказывается просто числом — значением некоторой функции точки пространства и времени, — оно называется *скалярным*. Отклонения струны или мембраны от их положения равновесия представляют собой скалярные поля. Плотность, давление и температура жидкости, определенные ранее через предельные отношения, также являются скалярными полями. Как уже отмечалось, при вычислении этих отношений объем не может быть уменьшен до атомных размеров,

так как понятия плотности, давления и т. д. утрачивают смысл для отдельных молекул. Отношения, определяющие эти поля, должны приближаться к «макроскопическому пределу», когда объем мал по сравнению с объемом, занимаемым всей жидкостью, но все еще достаточно велик по сравнению с размерами атома; иначе понятие скалярного поля оказывается физически бессодержательным.

Все эти скалярные поля обладают свойством *инвариантности* относительно преобразований пространственных координат (инвариантность относительно преобразований временной и пространственных координат мы рассмотрим далее в этой главе). Численное значение поля в точке остается одним и тем же независимо от того, как выражены координаты этой точки. Форма математического выражения поля может меняться в зависимости от выбора системы координат. Например, поле, выраженное в прямоугольных координатах, может иметь вид $\psi = y$; в сферических координатах оно будет иметь иной вид: $\psi = r \sin \theta \sin \varphi$, но в любой системе координат в точке $x = 10$, $y = 10$, $z = 0$ ($r = \sqrt{200}$, $\varphi = 45^\circ$, $\theta = 90^\circ$) оно имеет значение $\psi = 10$. Этому следует противопоставить поведение x -компоненты скорости потока жидкости, где с изменением системы координат может измениться и направление оси x . Поэтому численное значение x -компоненты скорости в данной точке будет изменяться с изменением направления оси x .

Это свойство инвариантности скаляра будет играть важную роль в дальнейших рассмотрениях, и его следует отличать от инвариантности формы некоторых уравнений относительно некоторых преобразований координат. Для таких упомянутых выше скалярных полей, как поля плотности, температуры или электрического потенциала, свойство инвариантности совершенно очевидно из самого определения поля. Однако это не всегда так для менее простых полей. В некоторых случаях свойство инвариантности должно быть использовано как пробный камень, позволяющий найти правильное выражение для данного поля.

Поверхности уровня. Поверхности, определенные уравнением $\psi = \text{const}$, где ψ обозначает скалярное поле, называются *поверхностями уровня*. Поверхности уровня являются очевидными обобщениями линий уровня на топографической карте. В теории потенциала они называются эквипотенциальными поверхностями, в теории теплопроводности — изотермическими поверхностями и т. д. Они образуют семейство непересекающихся поверхностей, которые часто оказываются полезными в качестве одного из семейств координатных поверхностей, наиболее естественной для данной проблемы системы координат. Например, если полем является хорошо известный потенциал

$$\psi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2},$$

то поверхностями уровня (в данном случае поверхностями постоянного потенциала) являются концентрические сферы радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$; поэтому естественными координатами для этой задачи являются сферические: r , θ , φ . Другая система поверхностей вместе с соответствующей системой координат показана на рис. 1.1. Поверхности $\mu = \text{const}$ могут рассматриваться как эквипотенциальные поверхности вокруг круглого заряженного диска радиуса c , лежащего в плоскости xy ($\mu = 0$).

Производные скаляра ψ по прямоугольным координатам x , y , z измеряют скорость, с которой изменяется поле при перемещении в пространстве. Например, изменение ψ при перемещении из точки (x, y, z) в точку

$(x + dx, y + dy, z + dz)$ равно

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \vec{c/s} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (1.1.1)$$

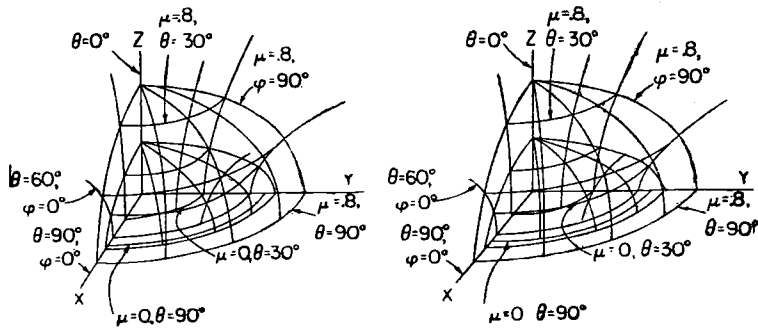
Если обе точки лежат на одной и той же поверхности уровня, то $d\psi = 0$, и дифференциальное уравнение этих поверхностей имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0. \quad (1.1.2)$$

Смещение (dx, dy, dz) перпендикулярно к поверхности уровня, если составляющие смещения удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dx}{\partial \psi / \partial x} = \frac{dy}{\partial \psi / \partial y} = \frac{dz}{\partial \psi / \partial z}. \quad (1.1.3)$$

Эти соотношения являются дифференциальными уравнениями семейства кривых, называемых *нормальными линиями*, которые в каждой точке



Р и с. 1.1. Примеры поверхностей уровня $\mu = \text{const}$, где $c \operatorname{ch} \mu = \frac{1}{2} \sqrt{(r+c)^2 + z^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(r-c)^2 + z^2}$, $\theta = \text{const}$, где $c \cos \theta = \frac{1}{2} \sqrt{(r+c)^2 + z^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(r-c)^2 + z^2}$ и $\varphi = \text{const}$, где $\lg \varphi = \frac{y}{x}$.

перпендикулярны поверхности уровня, проходящей через эту точку. В сочетании с поверхностями уровня они могут быть использованы при определении естественной для данного поля системы координат. Например, для поля $\psi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ поверхностями уровня являются (как было отмечено выше) сферы, а нормальными линиями — радиальные лучи, что наводит нас на мысль о сферических координатах r, θ, φ (хотя эти элементы и не определяют полностью эту систему).

Нормальные линии имеют направление наиболее быстрого изменения ψ . Небольшие вычисления, основанные на уравнениях (1.1.1) и (1.1.3), показывают, что изменение ψ при смещении на расстояние ds вдоль нормальной линии равно

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} ds.$$

Квадратный корень в этом выражении называется *величиной градиента* ψ . Свойства градиента будут подробно рассмотрены несколько позже в настоящей главе.

Лапласиан. Чрезвычайно важное свойство скалярного поля выражается посредством его вторых производных. В простейшем одномерном случае,

когда ϕ является поперечным отклонением струны от ее прямолинейного положения равновесия, вторая производная $d^2\phi/dx^2$ непосредственно связана с разностью между значением ϕ в точке x и средним значением ϕ в соседних точках. С точностью до малых второго порядка включительно имеем

$$\begin{aligned}\phi(x) - \frac{1}{2} [\phi(x-dx) + \phi(x+dx)] &= \\ &= -\frac{1}{2} \{[\phi(x+dx) - \phi(x)] - [\phi(x) - \phi(x-dx)]\} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2} (dx)^2.\end{aligned}$$

Следовательно, если вторая производная отрицательна, ϕ в точке x больше, чем среднее значение ϕ в точках $x+dx$ и $x-dx$, так что график ϕ будет обращен в точке x своей выпуклостью кверху. Если вторая производная равна нулю, то график ϕ не искривлен.

Нетрудно видеть, что уравнение, описывающее форму натянутой гибкой струны, находящейся под воздействием поперечной силы $F(x)$, отнесенной к единице длины струны, должно содержать эту вторую производную. Действительно, чем больше поперечная сила в некоторой точке, тем больше должна быть кривизна струны в этой точке, для того чтобы натяжение T вдоль струны имело большую поперечную составляющую, которая уравновешивает силу. Как показывает более подробное исследование, которое мы проведем позже, уравнение, описывающее форму струны, имеет вид

$$T \frac{d^2\phi}{dx^2} = -F(x).$$

Будем теперь искать трехмерный аналог этой меры кривизны ϕ . Разность между значением ϕ в точке и средним значением ϕ в соседних точках оказывается равной $-\frac{1}{6} (dx dy dz)^2 \nabla^2\phi$, где

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (1.1.4)$$

является очевидным обобщением одномерного оператора второй производной. Математическая операция образования правой части уравнения (1.1.4) обозначается символом ∇^2 (читается «набла квадрат») и называется *оператором Лапласа*. Результат этой операции, произведенной над функцией, называется *лапласианом* ϕ . Если $\nabla^2\phi$ отрицателен в некоторой точке, то поле ϕ имеет тенденцию концентрироваться в этой точке. Прямым следствием этого высказывания является тот факт, что скалярная функция $\phi(x, y, z)$ не может достигать своего максимального или минимального значения в области, в которой $\nabla^2\phi = 0$. Это — весьма важный факт.

Уравнение $\nabla^2\phi = 0$, называемое *уравнением Лапласа*, встречается в физике столь часто, что полезно иметь ясное представление о его значении. Поэтому мы приведем без доказательств ряд фактов, касающихся решений уравнения Лапласа, которые будут доказаны ниже в настоящей главе.

Представим себе идеально упругую мембрану в состоянии равновесия, находящуюся под воздействием равномерного натяжения, приложенного к ее краю. Если край мембраны лежит в некоторой плоскости, то и мембрана будет лежать в этой плоскости. Если плоская форма края будет нарушена, то и мембрана перестанет быть плоской. Это искажение мембраны может быть представлено функцией $\phi(x, y)$ — отклонением точки (x, y) мембраны, перпендикулярным к этой плоскости. Оказывается, что это отклонение удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа $\nabla^2\phi = 0$.

Последнее уравнение просто соответствует утверждению, что натяжение выравнивает все «выпучивания» мембраны, что отклонение в любой точке равно среднему значению отклонений в соседних точках. Мы видим, что уравнение Лапласа для мембраны соответствует требованию, что мембрана принимает форму, требующую наименьшего растяжения.

Дополнительная нагрузка мембраны, перпендикулярная к плоскости равновесия $\psi = 0$, вызывает «выпучивание» мембраны. Как будет показано далее, лапласиан ψ в точке нагруженной мембраны пропорционален нагрузке, отнесенной к единице площади в этой точке. Можно сказать, что двумерный оператор Лапласа измеряет «выпучивание» мембраны.

Обобщение этого рассмотрения на три измерения труднее представить, но в принципе оно столь же просто. Мы можем представить себе, что скалярная функция ψ соответствует концентрации некоторого вещества в растворе. Трехмерный аналог «выпучивания» может быть назван «сгущенностью».

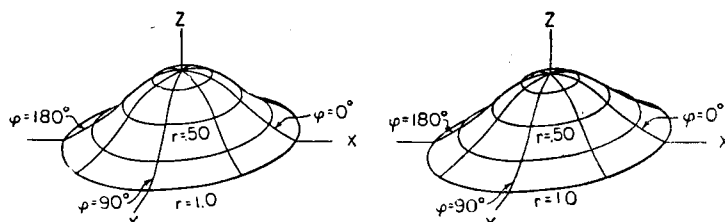


Рис. 1.2. Форма круглой мембраны, равномерно нагруженной ($\nabla^2\psi = \text{const}$) от $r=0$ до $r=1/2$ и свободной от нагрузки ($\nabla^2\psi = 0$) от $r=1/2$ до $r=1$; край мембраны $r=1$ закреплен.

Если есть тенденция вещества «сгущаться» в некоторой точке, то лапласиан концентрации будет отрицателен в этой точке. Если $\nabla^2\psi = 0$, то вещество вообще не имеет «сгущений», его плотность распределяется так, чтобы различия в концентрации, порождаемые краевыми условиями, максимально сглаживались. Как и в двумерном случае, уравнение Лапласа соответствует требованию, чтобы ψ в каждой точке было равно среднему значению ψ в соседних точках.

Наличие электрических зарядов плотности ρ вызывает (отрицательную) концентрацию электрического потенциала ψ , так что $\nabla^2\psi = -\rho/\epsilon$, где ϵ — постоянная. Наличие распределенных источников тепла Q в твердом теле вызывает концентрацию температуры T , так что $\nabla^2 T = -KQ$, где K — постоянная. Вообще во многих случаях на скалярное поле влияет функция источника $q(x, y, z)$ (которая сама является скалярным полем, удовлетворяющим некоторым другим уравнениям), причем это влияние описывается уравнением

$$\nabla^2\psi = -q. \quad (1.1.5)$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона*. Мы будем его подробнее рассматривать в этой главе позже и уделим много места его решению в дальнейших главах книги.

1.2. Векторные поля

Мы рассмотрели в предварительном порядке ряд полей, которые характеризуются в каждой точке одной единственной величиной. Такие поля были названы скалярными полями. Многие другие поля требуют для своего полного определения задания в каждой точке *величины и направления*. Такие поля называются *векторными полями*. Они также часто могут быть определены в терминах пределов отношений, хотя здесь определения, как

правило, более сложны, чем для скалярных полей. Сила, действующая на некоторую массу жидкости в гравитационном или электрическом поле, является вектором, имеющим величину и направление. Предел отношения этой силы к объему, занимаемому той массой жидкости, на которую сила воздействует, при уменьшении этого объема определяет в каждой точке пространства некоторый вектор, задающий *силовое поле*. Как и для скалярных полей, в некоторых случаях оказывается важным не допускать уменьшения объема до атомных размеров.

Иногда векторное поле легче всего определяется через скалярное отношение, которое уже само учитывает направление. Например, в случае проводника, через который течет ток, можно представить себе инструмент, который измерял бы силу тока, проходящего через элемент площади dA с центром в некоторой точке проводника. Тогда мы нашли бы, что измеренная сила тока зависит не только от величины dA , но и от ориентации элемента dA . Измерения соответствовали бы формуле $J dA \cos \vartheta$, где ϑ — угол между нормалью к dA и некоторым направлением, характеристическим для данного распределения тока. Величиной вектора поля в данной точке будет, следовательно, J , а его направлением будет то, от которого отсчитывается угол ϑ .

Векторные поля в трех измерениях определяются заданием *трех* количеств в каждой точке: величины и двух углов, определяющих направление, или трех составляющих (компонент) вектора по трем осям координат. Четырехмерные векторы будут рассмотрены позже.

Набранные жирным шрифтом заглавные латинские буквы ($\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$) обозначают в настоящей книге векторы; соответствующие буквы, набранные обычным шрифтом (A , F , X), обозначают величины соответствующих векторов (обычный шрифт будет, как правило, применяться для обозначения скалярных величин). Составляющие $\mathbf{A}$ по трем осям координат будут обозначаться через A_x , A_y , A_z . Вектор единичной длины в направлении $\mathbf{A}$ обозначается через $\mathbf{a}$; единичные векторы в направлении осей x , y , z обозначаются, как обычно, через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Единичные векторы вдоль криволинейных осей координат будут обозначаться через $\mathbf{a}$ с индексом, указывающим соответствующую ось (например, в полярных координатах единичный вектор в направлении r обозначается через $\mathbf{a}_r$, в направлении ϑ — через $\mathbf{a}_\vartheta$ и т. д.). Если не оговорено противное, используются правые системы координат: при вращении от x к y правый винт, расположенный вдоль оси z , будет иметь поступательное движение в положительном направлении оси z , или, что то же, наблюдатель, стоящий лицом к доске и видящий на ней ось x , направленную вправо, и ось y , направленную вверх, смотрит на плоскость xy со стороны положительных z .

В этих обозначениях векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяют следующим общим отношениям:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A\mathbf{a} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}, \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k},\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

дающим определения составляющих и векторного сложения.

Векторы не инвариантны относительно замены координат в том же смысле, как скаляры, так как составляющие изменяются с изменением направления осей координат. Свойства преобразований векторов будут рассмотрены ниже.

Умножение векторов. Два вектора могут быть перемножены двумя различными путями: один тип умножения приводит к скаляру, другой — к вектору. *Скалярное произведение* двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (*произведение*

с точкой) равно произведению величины одного из них на проекцию другого на направление первого:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \vartheta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (1.2.2)$$

где ϑ — угол между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Выражение $AB \cos \vartheta$ не зависит от выбора системы координат, примененной для вычисления составляющих A_x и т. д., так что значение скалярного произведения не зависит от системы координат. Скалярное произведение является поэтому истинным скаляром, простейшим инвариантом, который может быть образован из двух векторов.

Скалярное произведение полезно для выражения многих физических величин: работа, совершаемая при перемещении тела, равна скалярному произведению силы на перемещение; плотность электрической энергии в пространстве пропорциональна скалярному произведению электрической напряженности и электрической индукции и т. д. Скалярное произведение двух единичных векторов равно косинусу угла между ними. Максимальное значение скалярного произведения двух векторов достигается, когда оба вектора параллельны (и одинаково направлены); оно равно нулю, когда они перпендикулярны. В некотором смысле скалярное произведение есть мера равнонаправленности двух векторов.

Векторное произведение $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ двух векторов является вектором, величина которого равна площади параллелограмма, определенного этими двумя векторами, а направление перпендикулярно к этому параллелограмму. Выбор того конца перпендикуляра, который должен быть снабжен стрелкой, произвольно определяется тем условием, чтобы тройка $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ была правой: если правый винт расположить перпендикулярно к $\mathbf{A}$ и к $\mathbf{B}$, то вращение от $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ должно придавать винту поступательное движение в направлении $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. В правой прямоугольной системе координат

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - B_y A_z) \mathbf{i} + (A_z B_x - B_z A_x) \mathbf{j} + (A_x B_y - B_x A_y) \mathbf{k}, \quad (1.2.3)$$

$$\text{Величина } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = AB \sin \vartheta.$$

Отметим, что векторное произведение некоммукативно, так как $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Аксиальные векторы. Хотя (как мы далее увидим) векторное произведение двух векторов является вектором, обладающим при преобразованиях большинством свойств «истинного» вектора, здесь имеется все же одно важное различие. Векторное произведение, определенное равенством (1.2.3), меняет знак при переходе от правой системы координат к левой. Это один из аспектов того факта, что векторное произведение имеет скорее свойства ориентации элемента площади, нежели стрелки. Направление, связанное с элементом площади, определено однозначно как направление, нормальное к элементу, однако нет обязательного правила¹⁾ для выбора положительной стороны элемента. Площадь определяет, так сказать, древко стрелы, но не говорит о том, с какой стороны должен быть наконечник. Этот вопрос должен быть решен каким-либо полностью произвольным правилом, как, например, указанным выше правилом (правого винта), которого мы и будем придерживаться.

Вообще векторы с данным «древком» (т. е. с заданной несущей прямой и данной длины), но с заменяемыми стрелками называются *аксиальными*

¹⁾ Имеется в виду правило, не зависящее от ориентации системы координат. — Прим. перев.

векторами (они иногда называются также *псевдовекторами*). В дальнейшем мы увидим, что три составляющие аксиального вектора фактически являются тремя компонентами трехмерного кососимметрического тензора второго порядка. Кососимметрический тензор можно представить аксиальным вектором в трехмерном пространстве.

Как указывалось выше, аксиальный вектор, связанный с элементом площади dA , можно записать в виде

$$dA = \mathbf{n} dA = d\mathbf{x} \times d\mathbf{y},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к элементу и где $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{y}$ — векторы, соответствующие составляющим элементам dx и dy . Если применяются первые два обозначения, необходимо дополнительно указать, какая сторона элемента считается положительной; если используется последнее обозначение, наше правило правого винта автоматически решает и этот вопрос.

Другие аксиальные векторы также могут быть представлены в виде векторного произведения: момент количества движения материальной частицы относительно некоторой точки равен векторному произведению вектора, представляющего импульс частицы, и радиус-вектора частицы; момент силы равен векторному произведению вектора силы и вектора, представляющего плечо, и т. д. Вращение определяет плоскость и ось, нормальную к этой плоскости, т. е. характеристики аксиального вектора. В соответствии с нашим правилом направление вектора, изображающего вращение, совпадает с поступательным движением правого винта при рассматриваемом вращении.

Полезным примером произведения трех векторов является *смешанное тройное произведение*

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1.2.4)$$

Это выражение равно объему (или объему, взятому со знаком минус) параллелепипеда с ребрами $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Оно представляет собой скаляр, являющийся скалярным произведением аксиального вектора и истинного вектора, и меняет знак при переходе от правой к левой системе координат, а также при перестановке двух векторов; поэтому такой скаляр называется иногда *псевдоскаляром*. Заметим, что скалярное произведение двух аксиальных векторов (или двух истинных векторов) является «истинным» скаляром без неопределенности в знаке.

В частности, правилами умножения единичных векторов являются:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \dots = 0, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Линии тока. Как уже было указано, векторное поле определяется заданием вектора в каждой точке пространства или, другими словами, заданием вектора, являющегося функцией x, y, z : $\mathbf{F}(x, y, z)$. В большинстве интересующих нас случаев этот вектор является непрерывной функцией x, y, z , за исключением либо изолированных точек, или *особенностей*, либо изолированных линий — *особых линий*. Там, где вектор непрерывен, мы можем определить *линии тока* поля, которые являются *линиями*, касательными в каждой точке к вектору в этой точке. Дифференциальные уравнения этих линий выводятся из требования пропорциональности

составляющих dx , dy , dz смещения вдоль линии и составляющих F_x , F_y , F_z вектора поля в данной точке

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (1.2.6)$$

[ср. с уравнениями (1.1.3)].

В некоторых простых случаях эти уравнения могут быть проинтегрированы, что дает уравнения семейства линий тока.

Например, если $F_x = -ay$, $F_y = ax$, $F_z = b(x^2 + y^2)$, то линии тока являются винтовыми линиями. Уравнение $dx/F_x = dy/F_y$ превращается

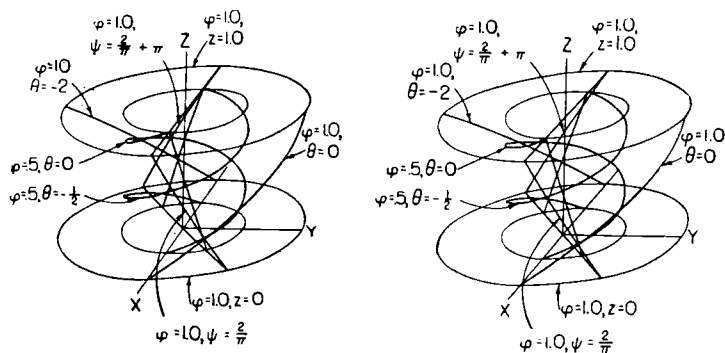


Рис. 1.3. Винтовые линии тока θ , $\varphi = \text{const}$ с псевдопотенциальными поверхностями $\psi = \text{const}$ (см. стр. 26).

в $x dx = -y dy$; интегрируя его, находим уравнение кругового цилиндра $x^2 + y^2 = \varphi^2$, где φ — произвольная постоянная, частично определяющая выбор линии тока. Уравнение

$$\frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

превращается в

$$\frac{\varphi^2 dy}{\sqrt{\varphi^2 - y^2}} = \frac{a dz}{b}$$

(если выразить x из уравнения, связывающего x и y). Интегрируя его, находим

$$z = \frac{b\varphi^2}{a} \arcsin \frac{y}{\varphi} + \theta = \frac{b}{a} (x^2 + y^2) \arctg \frac{y}{x} + \theta,$$

где θ — другая постоянная интегрирования, которая необходима для полного определения линии тока. Уравнения

$$\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = z - \frac{b}{a} (x^2 + y^2) \arctg \frac{y}{x}$$

определяют дважды бесконечное семейство линий тока, причем каждая отдельная линия тока задается парой значений φ и θ .

Другим примером является $F_x = \frac{x}{r^3}$, $F_y = \frac{y}{r^3}$, $F_z = \frac{z}{r^3}$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Уравнения для линий тока сводятся к системе

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Первое из уравнений этой системы дает $\ln x = \ln y + \text{const}$ или $x/y = \text{const}$. Аналогично мы находим, что либо x/z , либо $y/z = \text{const}$ или $(x^2 + y^2)/z^2 =$

$= \text{const}$. Наиболее удобной формой выражения постоянных интегрирования является (по аналогии с предыдущим примером)

$$\varphi = \text{arctg} \frac{y}{x}, \quad \theta = \text{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

И в этом примере выбор значений для φ и θ определяет индивидуальную линию тока; она является в данном случае полупрямой, исходящей из начала координат.

С другой точки зрения φ и θ могут рассматриваться как функции x , y , z и называются *функциями тока*. Значения φ и θ в некоторой точке выделяют линию тока, проходящую через эту точку. Еще с одной точки зрения два семейства поверхностей $\varphi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ могут рассматриваться как семейства координатных поверхностей некоторой обобщенной

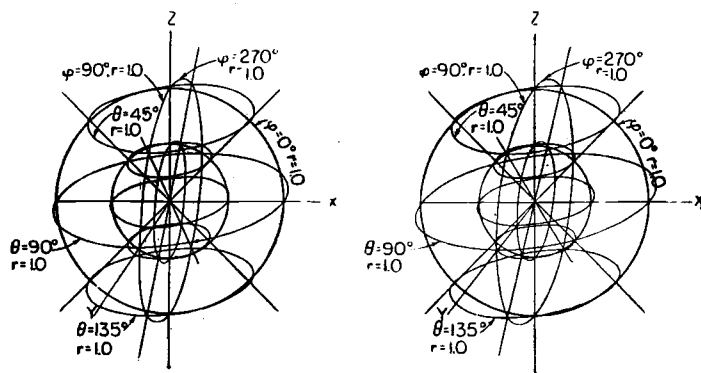


Рис. 1.4. Радиальные линии тока и сферические эквипотенциальные поверхности для поля вокруг точечного источника.

системы координат. Пересечением двух таких поверхностей $\varphi = \varphi_0$ и $\theta = \theta_0$ является линия тока, соответствующая паре значений (φ_0, θ_0) ; это — координатная линия в новой системе координат.

Потенциальные поверхности. Линии тока могут также определять другое семейство поверхностей, перпендикулярных к ним (если только эти линии не «закручиваются» так, что такого семейства поверхностей не существует). По аналогии с уравнением (1.1.2) уравнение такой поверхности имеет вид

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \quad (1.2.7)$$

в соответствии с тем фактом, что любой вектор смещения на поверхности должен быть перпендикулярным к $\mathbf{F}$.

В некоторых случаях это уравнение интегрируемо. Если существует такая функция ϕ , что

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x, \quad \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y, \quad \mu \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_z,$$

то уравнением семейства поверхностей будет $\phi = \text{const}$. Величина μ может быть функцией x , y , z ; она называется *интегрирующим множителем*. Критерий того, существует ли уравнение поверхностей в интегральной

форме, может быть получен следующим образом. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} F_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + F_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + F_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \\ = \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] + \\ + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (1.2.8) \end{aligned}$$

Это выражение равно нулю, если функция ψ с указанными свойствами существует. Обратно, если выражение

$$F_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + F_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + F_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

оказывается равным нулю, то интегрирование дифференциального уравнения для поверхностей, перпендикулярных к линиям тока, возможно¹⁾. Другими словами, если вектор с составляющими

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

по осям x, y, z перпендикулярен к вектору $\mathbf{F}$ в каждой точке, то можно получить уравнение нормальных поверхностей в интегральной форме $\psi(x, y, z) = \text{const}$. Подробнее этот вектор будет рассмотрен ниже. Функция ψ называется *псевдопотенциальной функцией*.

В некоторых случаях μ постоянно и может быть положено равным -1 , так что

$$F_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Позже будет объяснено, почему выбирается знак минус. В этих случаях функция ψ называется *потенциальной функцией* векторного поля $\mathbf{F}$, а поверхности $\psi = \text{const}$ называются *эквипотенциальными поверхностями*²⁾. Для того чтобы это имело место, каждая из разностей

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

должна быть равна нулю, как в этом можно убедиться, заменив выражения для составляющих $\mathbf{F}$ производными функции ψ .

В других случаях уравнение поверхностей не интегрируемо ни при помощи интегрирующего множителя, ни без него; тогда невозможно найти хорошо ведущее себя семейство поверхностей, всюду перпендикулярных линиям тока. Мы еще вернемся к этому рассмотрению на стр. 29.

В первом примере предыдущего пункта, где линиями тока являются винтовые линии, вектор с составляющими

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 2by, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -2bx, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2a$$

перпендикулярен к вектору $\mathbf{F}$. Поэтому дифференциальное уравнение (1.2.7) семейства поверхностей интегрируемо. После умножения уравнения

¹⁾ Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, ГТТИ, М.—Л., 1950, гл. IX, § 2.—Прим. перев.

²⁾ В некоторых местах книги под потенциальной функцией понимается не ψ , а $-\psi$. —Прим. ред.

на интегрирующий множитель $\mu = (x^2 + y^2)^{-1}$ мы получаем в левой части полный дифференциал. Полагая

$$\phi = \arctg \frac{y}{x} + \frac{b}{a} z,$$

находим, что

$$F_x = a(x^2 + y^2) \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_y = a(x^2 + y^2) \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad F_z = a(x^2 + y^2) \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

так что проинтегрированное уравнение, соответствующее уравнению (1.2.7), в этом случае имеет вид $\phi = \text{const}$. Система поверхностей $\phi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ образует систему обобщенных координатных поверхностей (которые в данном случае не являются взаимно перпендикулярными), наиболее естественную для рассматриваемого векторного поля. Значения φ и θ в некоторой точке определяют линию тока, проходящую через эту точку, а значение ϕ определяет положение точки на этой линии тока.

Во втором рассмотренном выше примере все разности

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

равны нулю, так что уравнение (1.2.7) интегрируется непосредственно без применения интегрирующего множителя. Функция

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

поэтому является потенциальной функцией, а сферические поверхности $\phi = \text{const}$ являются эквипотенциальными поверхностями. Компоненты F связаны с ϕ требуемыми соотношениями

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} = -F_x, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} = -F_y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{z}{r^3} = -F_z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Система координат, соответствующая линиям тока и эквипотенциальным поверхностям, является сферической

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В этом случае координатные поверхности взаимно-перпендикулярны.

Если для данного векторного поля F существует семейство эквипотенциальных поверхностей, то это поле может быть представлено через скалярное потенциальное поле ϕ , и тогда, как правило, гораздо легче вычислить сначала это скалярное поле, а векторное поле получить дифференцированием.

Поверхностные интегралы. Векторные поля и их линии тока обладают рядом общих свойств, играющих важную роль для наших целей. Одним из этих свойств является «расхождение» или «поток» линий тока, отнесенное к данной области, причем это понятие учитывает как тот случай, когда линии тока начинаются в этой области или пропадают в ней, так и тот случай, когда они просто переходят через область с одной ее стороны до другой. Другим интересным свойством является мера «закрученности» линий, независимо от того, находятся ли в векторном поле «завихрения» или нет.

Расхождение линий тока из области может быть измерено при помощи *поверхностного интеграла*. Предположим, что мы рассматриваем

элемент площади поверхности, ограничивающей область, представленный бесконечно малым аксиальным вектором $d\mathbf{A}$, равным по величине площади элемента и направленным перпендикулярно к поверхности. Скалярное произведение $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ равно тогда произведению площади элемента поверхности на составляющую вектора $\mathbf{F}$, нормальную к поверхности. Если вектор поля $\mathbf{F}(x, y, z)$ представляет вектор скорости движения жидкости, то $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ равно объему жидкости, протекающему через элемент поверхности (в единицу времени), а $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ равен объему всей жидкости, протекающей (в единицу времени) через ту поверхность, по которой распространяется интегрирование. Знак интеграла зависит от выбора направлений аксиальных векторов $d\mathbf{A}$, т. е. от того, направлены ли эти векторы от одной стороны поверхности или от другой. Абсолютная величина этого интеграла иногда называется *числом линий тока поля, пересекающих поверхность* (являющуюся областью интегрирования), — термин, который определяет, что следует понимать под «числом линий тока».

Если поверхность, по которой производится интегрирование, является замкнутой и если векторы $d\mathbf{A}$ направлены *от области*, ограниченной поверхностью, то интеграл будет записываться в виде

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

и называться *поток вектора $\mathbf{F}$ из области*, ограниченной замкнутой поверхностью интегрирования. Если $\mathbf{F}$ есть вектор скорости жидкости, то этот интеграл равен «расходу жидкости» в рассматриваемой области. Ограничивающая эту область поверхность не обязана состоять из одной связной части, ограничивающей односвязную область; область может быть ограничена несколькими поверхностями, например одной внутренней и одной внешней (или даже несколькими внутренними поверхностями). В этом случае внешняя ограничивающая поверхность может лежать в бесконечности, так что область будет состоять из всего пространства, внешнего относительно одной или нескольких замкнутых поверхностей. Векторы $d\mathbf{A}$ в точках внутренних поверхностей должны быть направлены *внутрь* от рассматриваемой внешней области.

Интеграл $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ является мерой числа линий тока, берущих свое начало внутри области. Если таких линий нет, т. е. все линии тока проходят с одной стороны границы области до другой, то этот интеграл равен нулю.

Источник. Один простой пример векторного поля представляет для нас особый интерес; он иллюстрирует важное свойство потока вектора. Это тот случай, когда все линии тока берут свое начало в одной точке O , причем вектор $\mathbf{F}$ в точке P имеет величину Q/r^2 и направлен вдоль r . Величина r есть расстояние от O до P , как показано на рис. 1.5, а точка O называется *простым источником* линий тока; Q называется *мощностью источника*. Элемент поверхностного интеграла в этом случае равен

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{r^2} \cos \theta dA.$$

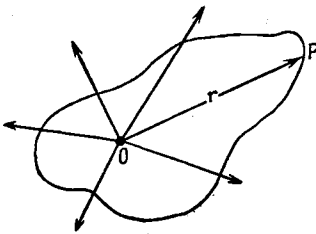
Но $dA(\cos \theta/r^2)$ равно $d\Omega$ — элементу телесного угла, под которым из точки O виден элемент площади dA , когда нормаль к этому элементу наклонена под углом θ к радиусу. Поток вектора в этом случае сводится к $Q \oint d\Omega$, что равно нулю, если O лежит вне области, ограниченной

поверхностью интегрирования, и равно $4\pi Q$, если O лежит внутри этой области. Более подробное рассмотрение, аналогичное приведенному выше, показывает, что это справедливо для замкнутых поверхностей любой формы и строения, ограничивающих область.

Изложенное выше дает нам довольно окольный путь для определения простого источника. Более непосредственным было бы определение простого источника мощности Q как точечной особенности векторного поля, обладающей тем свойством, что поток вектора из любой области, содержащей эту особенность (и не содержащей других), равен $4\pi Q$.

Полученный результат может быть сформулирован в виде равенств

$$\oint \frac{Q}{r^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{A} = \begin{cases} 0, & \text{если источник находится вне области,} \\ 4\pi Q, & \text{если источник находится внутри области.} \end{cases} \quad (1.2.9)$$



Здесь $\mathbf{a}_r$ обозначает единичный вектор, направленный от O вдоль r .

Иногда векторное поле является наложением полей, порожденных несколькими простыми источниками: одним в точке O_1 мощности Q_1 , другим в точке O_2 мощности Q_2 и т. д. Другими словами,

$$\mathbf{F} = \sum \frac{Q_n}{r_n^2} \mathbf{a}_{rn},$$

где r_n — расстояние от точки O_n до P , а $\mathbf{a}_{rn}$ — единичный вектор, направленный вдоль r_n . В этом случае поток вектора будет равен

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \sum \oint \frac{Q_n}{r_n^2} \mathbf{a}_{rn} \cdot d\mathbf{A} = \sum' 4\pi Q_n, \quad (1.2.10)$$

Рис. 1.5. Векторное поле вокруг точечного источника. Элемент интеграла, выражающего поток вектора.

где штрих у суммы означает суммирование по тем источникам, которые содержатся внутри области, ограниченной поверхностью интегрирования, а сумма без штриха распространяется на все источники.

Криволинейные интегралы. Вместо интегрирования нормальной составляющей вектора по поверхности можно также интегрировать его составляющую вдоль линии. Если $d\mathbf{s}$ — векторный элемент дуги вдоль некоторого пути, то интеграл $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, взятый вдоль этого пути, называется *криволинейным интегралом* $\mathbf{F}$ (вдоль соответствующего пути). Если $\mathbf{F}$ — вектор силы, то криволинейный интеграл является работой, совершенной вдоль пути; если $\mathbf{F}$ — электрическая напряженность, то криволинейный интеграл равен э. д. с. между концами пути и т. д.

Вообще говоря, значение криволинейного интеграла между двумя точками зависит от выбора пути между ними. В некоторых случаях, однако, оно зависит только от положения конечных точек. Это имеет место в случае, рассмотренном на стр. 25, где составляющие $\mathbf{F}$ являлись производными некоторой потенциальной функции ϕ . В таком случае криволинейный интеграл от точки O до другой точки P вдоль некоторого пути A равен по абсолютной величине и обратен по знаку криволинейному интегралу, взятому в обратном направлении от P к O вдоль какого-либо другого пути B . Поэтому интеграл вдоль замкнутого пути от O по A к P и затем обратно вдоль B к O для такого поля равен нулю. Вообще же говоря, криволинейный интеграл векторного поля вдоль замкнутого пути не равен нулю.

Криволинейный интеграл вдоль замкнутого пути обозначается

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

и называется *циркуляцией* $\mathbf{F}$ вдоль этого пути. Этот интеграл является мерой «закрученности» линий тока поля. Например, если линии тока замкнуты (как, например, линии магнитной напряженности вокруг проводника, по которому идет ток), то криволинейный интеграл $\mathbf{F}$ вдоль таких линий будет, конечно, отличен от нуля. Этот интеграл называется *циркуляцией* потому, что если $\mathbf{F}$ представляет вектор скорости в потоке жидкости, то $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ является мерой циркуляции жидкости вдоль выбранного замкнутого пути.

Мы видели, что в том случае, когда векторное поле имеет потенциальную функцию, циркуляция равна нулю. Поэтому мы называем все

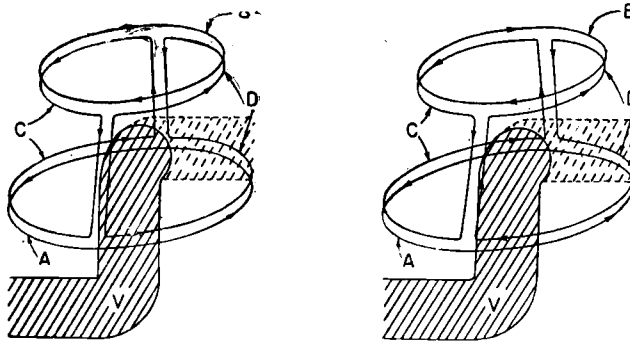


Рис. 1.6. Пути для интеграла циркуляции вокруг вихревых областей.

поля, имеющие потенциальные функции, *полями без циркуляции* или *безвихревыми* полями. В полях, для которых существуют псевдопотенциалы, циркуляция не обязательно должна быть равна нулю. Это будет иметь место только в том случае, когда $\text{grad } \mu$ (см. стр. 25) в каждой точке параллелен $\mathbf{F}$.

Существуют векторные поля, которые являются безвихревыми всюду вне некоторой области пространства; точнее, в этих полях циркуляция по замкнутому пути, охватывающему эту область, отлична от нуля, а циркуляция по замкнутому полю, не охватывающему эту область, равна нулю. По аналогии с задачей о потоке жидкости мы будем такую область, «порождающую» циркуляцию, называть *вихревой областью*. Вихревые области должны иметь форму трубки, которая не имеет ни начала, ни конца. Она должна либо уходить в обе стороны в бесконечность, либо иметь форму «баранки». Действительно, если бы вихревая область заканчивалась как V (см. рис. 1.6), то это означало бы, что циркуляция по пути A отлична от нуля, тогда как интегралы по путям B , C и D равны нулю. Однако нетрудно усмотреть, что если интеграл по A отличен от нуля и, например, интегралы по B и C равны нулю, то интеграл по D не может быть равен нулю. Это следует из того, что интегралы по соседним параллельным частям путей, проходимых в противоположных направлениях, взаимно уничтожаются, так что сумма всех четырех интегралов по A , B , C и D должна быть равна нулю. Поэтому, если интегралы по B и C равны нулю, то интеграл по D должен быть равен

интегралу по A , взятому с обратным знаком, который по условию отличен от нуля. Следовательно, вихревая область не может заканчиваться на V , а должна продолжаться каким-то образом, как, например, показано пунктирной штриховкой на рис. 1.6. (При этом рассуждении мы молчаливо предполагаем, что поле непрерывно вне вихревой области; в противном случае положение может быть совершенно иным.)

Вихревая область может, конечно, «разветвляться» на несколько трубок, из которых одни могут замыкаться, а другие — уходить в бесконечность. Доказанное выше утверждение может быть обобщено и на этот случай; в дифференциальной форме соответствующая общая теорема будет приведена на стр. 51.

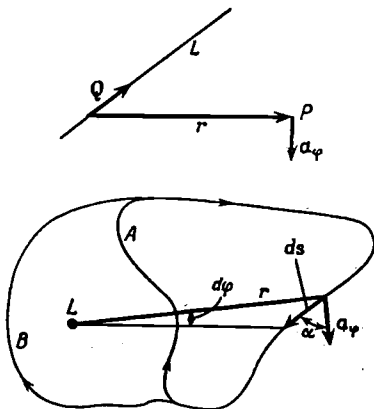


Рис. 1.7. Векторное поле вокруг линии вихрей. Элемент циркуляции.

Вихревая линия. Простейшим видом вихревой области является *простая вихревая прямая линия*, поле которой дается уравнением

$$\mathbf{F} = \frac{2}{r} (\mathbf{Q} \times \mathbf{a}_r) = \frac{2Q}{r} \mathbf{a}_\varphi, \quad (1.2.11)$$

где $\mathbf{Q}$, называемый иногда *вектором завихренности*, является вектором произвольной длины, направленным вдоль вихревой прямой линии L . Пусть $\mathbf{q}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{Q}$. Вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен к $\mathbf{Q}$ и идет от L к точке P , в которой рассматривается вектор поля $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}_r$ — единичный вектор в том же направлении и $\mathbf{a}_\varphi = \mathbf{q} \times \mathbf{a}_r$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{a}_r$ и к $\mathbf{Q}$.

Для пути в плоскости, перпендикулярной к L , циркуляция в этом поле равна

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2Q \oint \frac{\cos \alpha}{r} ds,$$

где α — угол между $d\mathbf{s}$ и $\mathbf{a}_\varphi$.

Вторая часть рис. 1.7 показывает, что $ds (\cos \alpha) / r = d\varphi$ — элементу угла вращения $\mathbf{r}$ вокруг L . Поэтому циркуляция сводится к интегралу $2Q \oint d\varphi$, который может быть непосредственно вычислен. Так, для пути B , обходящего L , он равен $4\pi Q$, а для пути A , не обходящего L , он равен нулю. Это рассмотрение может быть обобщено на пути, не лежащие в плоскости, перпендикулярной к L , и окончательный результат для поля простой вихревой линии имеет вид

$$\oint \left(\frac{2Q}{r} \right) \mathbf{a}_\varphi \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} 0, & \text{если путь не обходит } L, \\ \pm 4\pi Q, & \text{если путь один раз обходит } L, \end{cases} \quad (1.2.12)$$

справедливый для всевозможных путей. Знак плюс следует брать, если при интегрировании обход L совершается по часовой стрелке, если смотреть в направлении положительных Q ; знак минус — если обход совершается в противоположном направлении.

Особенности полей. Интересно отметить параллелизм между свойствами интеграла, выражающего поток вектора вблизи простого источника, рассмотренными на стр. 28, и только что рассмотренными свойствами интеграла циркуляции вблизи вихревой линии. Источник и вихревая

линия являются простейшими примерами *особенностей* векторных полей. В результате наших дальнейших рассмотрений мы убедимся в том, что особенности, подобные этим, являются обычно наиболее важными моментами, характеризующими скалярные и векторные поля. Физическая сущность задачи, как правило, тесно связана с типом особенностей поля. Точно так же математические свойства решений дифференциальных уравнений определяются характером особенностей, которыми обладают уравнения и их решения. Нам придется много заниматься физическими и математическими свойствами особенностей в полях.

Поле, порождаемое простым источником, расходится из точки, а поле, порождаемое вихревой линией, вращается вокруг этой линии. Источники можно распределить вдоль линий, или поверхностей, или даже по некоторому объему, а вихревые линии — по поверхностям или по объему, но их нельзя стянуть в точку. Это связано с тем фактом, что для вращения требуется ось, т. е. линия, вокруг которой происходит вращение.

Циркуляция и поток вектора в любых полях обладают одним интересным общим свойством, а именно, «аддитивностью». Например, на рис. 1.8 циркуляция вдоль пути C равна сумме циркуляций по путям A и B , так как интегрирование по внутренней части D путей A и B совершается в противоположных направлениях и соответствующие интегралы взаимно уничтожаются, а остатки в сумме дают интеграл по пути C . Аналогично поток из любой области равен сумме потоков из всех частей области, которые ее составляют. Это также объясняется тем, что интегралы по поверхностям, проходящим внутри исходной области, встречаются парами и взаимно уничтожаются, так что сумма остающихся интегралов равна интегралу по поверхности, ограничивающей эту исходную область.

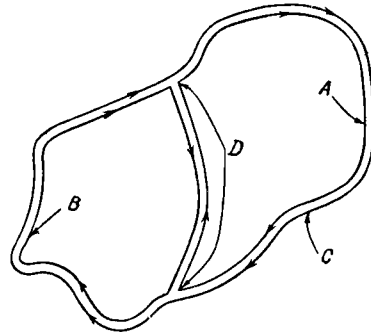


Рис. 1.8. Аддитивность циркуляции.

1.3. Криволинейные координаты

До сих пор мы молчаливо предполагали, что рассматриваемые поля могут быть выражены через три прямоугольные декартовы координаты x, y, z (четвертая координата, время, будет рассмотрена позже). Векторные и скалярные поля всегда могут быть так выражены, но часто оказывается гораздо более удобным выразить их в других системах координат. Мы уже видели, что иногда оказывается возможным построить некоторую «естественную» для данного векторного поля систему координат, используя для этого линии тока и потенциальные поверхности. Во многих случаях природа поля определяется указанием его поведения на некоторой граничной поверхности или указанием характера и расположения его особенностей (или тем и другим); при этом часто оказывается, что «естественная» для поля система координат каким-то простым образом связана с граничной поверхностью или с распределением особенностей (или и с тем и с другим). В этих «естественных» координатах выражение поля часто принимает простой и удобообозримый вид, тогда как в координатах x, y, z это выражение становится очень сложным, а необходимые вычисления — почти невыполнимыми.

В силу этих и ряда других соображений, с которыми мы ознакомимся при дальнейшем углублении в наш предмет, полезно сейчас заняться выражениями полей, а также дифференциальных и интегральных операторов, которые действуют на них, в обобщенных трехмерных координатах. Мы ограничимся *ортогональными* координатами, для которых три семейства координатных поверхностей взаимно перпендикулярны, так как задачи, требующие неортогональных координат, почти никогда не решаются точно. Техника же приближенного решения таких задач обычно использует решения в ортогональной системе координат.

Обобщенная система координат состоит из трех семейств поверхностей, уравнения которых в декартовой системе координат имеют вид $\xi_1(x, y, z) = \text{const}$, $\xi_2(x, y, z) = \text{const}$, $\xi_3(x, y, z) = \text{const}$ (мы предполагаем, что читатель достаточно хорошо знаком со свойствами декартовых

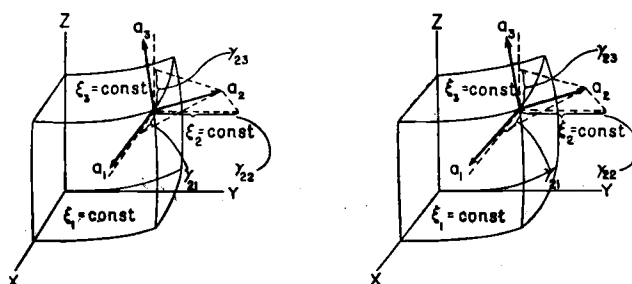


Рис. 1.9. Элемент криволинейной системы координат с единичными векторами $\mathbf{a}_n$ и направляющими косинусами γ_{nm} .

координат x, y, z , так что нет необходимости заниматься ими здесь). Эти равенства определяют ξ_1, ξ_2 и ξ_3 как функции от x, y и z . Во многих случаях оказывается более удобным обратить уравнения и выразить x, y, z через ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Линии пересечения этих поверхностей образуют три семейства кривых (вообще говоря) линий. От точки (x, y, z) или (ξ_1, ξ_2, ξ_3) мы откладываем три единичных вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, каждый из которых касателен к проходящей через эту точку соответствующей координатной линии криволинейной системы. Это новая тройка единичных векторов, через которые мы можем выразить векторное поле $\mathbf{F}$. Повторяем, что векторы $\mathbf{a}$ имеют *единичную* длину, скажем 1 см (или какая-либо другая примененная единица длины), т. е. ту же длину, что и векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Для ортогональных систем координат векторы $\mathbf{a}$ в каждой точке взаимно перпендикулярны.

Направляющие косинусы. Обозначим направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{a}_1$ относительно старых осей через $\alpha_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{i}$, $\beta_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{j}$, $\gamma_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}$; направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}_2$ — через $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и т. д. В общем случае эти направляющие косинусы изменяются от точки к точке, т. е. α, β и γ являются функциями ξ_1, ξ_2, ξ_3 . В силу свойств направляющих косинусов имеем равенства

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2 = 1, \quad n = 1, 2, 3,$$

справедливые для всех значений координат.

Если новые единичные векторы $\mathbf{a}$ взаимно перпендикулярны в каждой точке, то новая система координат *ортогональна*. В этом случае

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ являются направляющими косинусами $\mathbf{i}$ относительно векторов $\mathbf{a}$, и девять введенных направляющих косинусов симметричны относительно обеих систем координат. Чтобы подчеркнуть эту симметрию, мы введем новые обозначения:

$$\alpha_n = \gamma_{n1}, \quad \beta_n = \gamma_{n2}, \quad \gamma_n = \gamma_{n3},$$

так что

$$\mathbf{a}_n = \gamma_{n1} \mathbf{i} + \gamma_{n2} \mathbf{j} + \gamma_{n3} \mathbf{k}; \quad \mathbf{i} = \sum_n \gamma_{n1} \mathbf{a}_n,$$

и т. д.

Так как $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$ и т. д., указанные соотношения между направляющими косинусами и единичными векторами приводят к ряду уравнений, связывающих значения γ_{mn} :

$$\sum_s \gamma_{ms} \gamma_{ns} = \sum_s \gamma_{sm} \gamma_{sn} = \delta_{mn}, \quad (1.3.1)$$

где δ_{mn} — дельта-функция Кронекера, или символ Кронекера, равный нулю, если $m \neq n$, и равный единице при $m = n$.

Обращаясь к равенству (1.2.4), мы отмечаем, что если система координат ξ правая (система x, y, z предполагается правой), то определитель $|\gamma_{mn}|$ равен $+1$; если ξ образуют левую систему, то этот определитель равен -1 . Используя соотношения (1.2.5) или решая уравнения (1.3.1) относительно одного из γ , мы найдем, что

$$\gamma_{mn} = \pm M_{mn}, \quad (1.3.2)$$

где знак плюс имеет место в случае, когда ξ образуют правую систему координат, а знак минус — когда они образуют левую систему. Величина M_{mn} является алгебраическим дополнением γ_{mn} в определителе $|\gamma_{mn}|$:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}\gamma_{32}, \\ M_{12} &= \gamma_{23}\gamma_{31} - \gamma_{21}\gamma_{33}, \\ M_{31} &= \gamma_{12}\gamma_{23} - \gamma_{13}\gamma_{22} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Следует, конечно, иметь в виду, что соотношения (1.3.1) и (1.3.2) остаются в силе и в том случае, когда речь идет о *двух произвольных* ортогональных системах, а не только о декартовой системе и одной произвольной ортогональной системе. В равенстве (1.3.2) знак плюс имеет место, если обе системы правые или обе левые; знак минус — если одна из них правая, а другая левая.

Так как мы предположили, что наша криволинейная система координат ортогональна, то любой вектор $\mathbf{F}$ в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) может быть представлен разложением на составляющие по направлениям новых единичных векторов

$$\mathbf{F} = \sum_m F_m \mathbf{a}_m, \quad \text{где } F_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_m.$$

Используя направляющие косинусы γ_{mn} , легко показать, что между этими составляющими и декартовыми составляющими F имеют место соотношения

$$\begin{aligned} F_m &= \gamma_{m1} F_x + \gamma_{m2} F_y + \gamma_{m3} F_z = \alpha_m F_x + \beta_m F_y + \gamma_m F_z, \\ F_x &= \sum_m \gamma_{m1} F_m = \sum_m \alpha_m F_m \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Любая система трех величин, определенных относительно систем координат так, что выбору x, y, z соответствует тройка функций от x, y, z , а выбору ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответствует другая тройка функций от ξ_1, ξ_2, ξ_3 , может рассматриваться как система составляющих некоторого вектора в том и только в том случае, когда эти две тройки функций связаны между собой соотношениями вида (1.3.3).

Коэффициенты Ламе. Проведенные выше рассмотрения не окажут нам, однако, существенной помощи, если значения направляющих косинусов α, β, γ в каждой точке останутся неизвестными. Как правило, нам задаются уравнения новых координатных поверхностей; исходя из них, мы должны вывести выражения для направляющих косинусов. Например, обычное определение сферических координат $z = \xi_1 \cos \xi_2, x = \xi_1 \sin \xi_2 \cos \xi_3, y = \xi_1 \sin \xi_2 \sin \xi_3$ не дает непосредственно α, β, γ , выраженных через ξ_1, ξ_2, ξ_3 (ξ_1 — сферическая координата r , ξ_2 — сферическая координата θ , ξ_3 — сферическая координата φ).

Необходимая нам связь обычно устанавливается при помощи элемента дуги. Длина ds бесконечно малого вектора дается в ортогональной системе координат формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_n h_n^2 d\xi_n^2.$$

Простая подстановка показывает, что

$$h_n^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_n} \right)^2 = \left[\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (1.3.4)$$

Величина h_n называется *коэффициентом Ламе* (масштабным множителем) для координаты ξ_n . Изменению $d\xi_n$ этой координаты соответствует смещение $h_n d\xi_n$ см вдоль координатной линии. В общем случае h_n изменяется от точки к точке.

Отметим, что для вывода выражений коэффициентов h через координаты ξ необходимо выразить старые координаты x, y, z через новые ξ_1, ξ_2, ξ_3 , как это было сделано выше для сферических координат. Такой способ записи соотношений между двумя координатными системами является, как правило, наиболее целесообразным.

Так как $h_n d\xi_n$ представляет собой величину смещения, соответствующего $d\xi_n$, то скорость смещения вдоль ξ_n -линии при перемещении точки параллельно оси x равна $h_n \partial \xi_n / \partial x$. Эта величина равна, следовательно, направляющему косинусу $\alpha_n = \gamma_{n1}$. Аналогично, если x выразить через ξ , то скорость смещения вдоль оси x относительно смещения вдоль ξ_n -линии будет равна $(1/h_n)(\partial x / \partial \xi_n)$, что также равно $\gamma_{n1} = \alpha_n$. Таким образом, направляющие косинусы осей ξ_n относительно осей x, y, z могут быть выражены через производные ξ по x, y, z или через производные x, y, z , по ξ :

$$\begin{aligned} \gamma_{n1} = \alpha_n &= \frac{1}{h_n} \frac{\partial x}{\partial \xi_n} = h_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x}, \quad \gamma_{n2} = \beta_n = \frac{1}{h_n} \frac{\partial y}{\partial \xi_n} = h_n \frac{\partial \xi_n}{\partial y}, \\ \gamma_{n3} = \gamma_n &= \frac{1}{h_n} \frac{\partial z}{\partial \xi_n} = h_n \frac{\partial \xi_n}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

в зависимости от того, выражены ли x, y, z через ξ или ξ — через x, y, z .

Соотношения (1.3.5) полезны, но применяются не так часто, как этого можно было бы ожидать. Интересно отметить, что все дифференциальные выражения, которые мы далее получим и будем в дальнейшем неоднократно применять, требуют для их вычисления в обобщенной си-

стеме координат только коэффициентов h , но не γ . Очевидно, что масштаб новых координат и изменение масштаба от точки к точке выражают существенные свойства координат. Направления же координатных

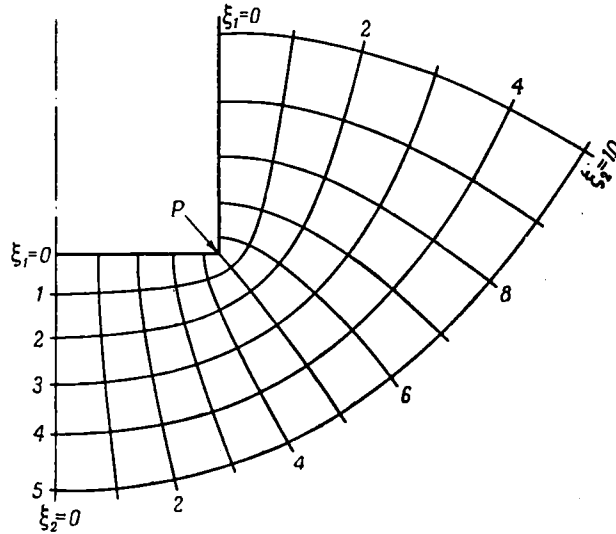


Рис. 1.10. Ортогональная система координат с переменными коэффициентами Ламе h . В данном случае $h_1=h_2$ всюду, а в точке P — точке концентрации системы — $h_1=h_2=0$.

линий в данной точке по отношению к осям x, y, z играют сравнительно меньшую роль.

Кривизна координатных линий. Например, даже изменение направления единичных векторов $\mathbf{a}$ может быть выражено через коэффициенты h . Выражения для этих изменений подсказываются рис. 1.11.

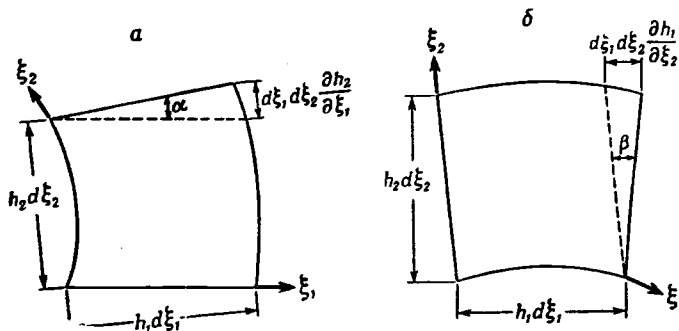


Рис. 1.11. Изменение направления единичных векторов $\mathbf{a}_n$.

Из рис. 1.11, а мы видим, что изменение $\mathbf{a}_1$, соответствующее изменению ξ_2 , равно $\mathbf{a}_2 \alpha$, где

$$\alpha = \frac{d\xi_1}{h_1} \frac{d\xi_2}{d\xi_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} = \frac{a_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}.$$

Аналогично из рис. 1.11, б находим, что изменение a_1 , соответствующее изменению ξ_1 , имеет составляющую в направлении ξ_2 , равную

$$-\beta = -\frac{d\xi_1}{h_2} \frac{d\xi_2}{d\xi_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2},$$

и аналогичную составляющую в направлении ξ_3 . Таким образом, мы приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_1} &= -\frac{a_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}, & \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} &= \frac{a_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial a_1}{\partial \xi_3} &= \frac{a_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial \xi_2} &= -\frac{a_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_3} - \frac{a_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial a_2}{\partial \xi_3} &= \frac{a_3}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} &= \frac{a_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}, \\ \frac{\partial a_3}{\partial \xi_3} &= -\frac{a_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} - \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial a_3}{\partial \xi_1} &= \frac{a_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}, & \frac{\partial a_3}{\partial \xi_2} &= \frac{a_2}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Мы можем доказать справедливость этих формул, выражая a через i, j, k , производя соответствующие дифференцирования и используя определения коэффициентов h из равенств (1.3.4). Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{i}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{j}{h_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{k}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \right] = \\ &= h_1 a_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1} \right) + \frac{1}{h_1} \left[i \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + j \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + k \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right] = \\ &= -a_1 \frac{\partial \ln h_1}{\partial \xi_2} + \frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left[\frac{a_1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left[\frac{a_1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \right] + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left[\frac{a_1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \xi_1} + \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial z}{\partial \xi_2} + \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \right] \right\}, \end{aligned}$$

или ¹⁾

$$\frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} = -a_1 \frac{\partial \ln h_1}{\partial \xi_2} + \frac{a_1}{2h_1^2} \frac{\partial h_1^2}{\partial \xi_2} + \frac{a_2}{2h_1 h_2} \frac{\partial h_2^2}{\partial \xi_1} = \frac{a_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}$$

в соответствии с приведенным выше выражением.

Кривизна координатной поверхности $\xi_1 = \text{const}$ может быть легко вычислена при помощи формул (1.3.6). Единичный вектор a_1 , перпендикулярный к поверхности, при смещении ds в направлении ξ_2 -линии изменяется на $\frac{1}{h_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} ds$. Это изменение имеет направление ξ_2 -линии и является мерой кривизны поверхности $\xi_1 = \text{const}$ в направлении ξ_2 -линии. Точнее, величина $a_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2}$ обратна радиусу кривизны нормального сечения рассматриваемой поверхности в направлении ξ_2 -линии в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ; если эта величина положительна, то ξ_2 -линия в положительном направлении ξ_1 выпукла, а если она отрицательна, то вогнута.

¹⁾ Сумма коэффициентов при a_3 равна нулю, что можно показать хотя бы при помощи дифференцирования тождеств

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_m} \frac{\partial x}{\partial \xi_n} + \frac{\partial y}{\partial \xi_m} \frac{\partial y}{\partial \xi_n} + \frac{\partial z}{\partial \xi_m} \frac{\partial z}{\partial \xi_n} = 0 \quad (m \neq n)$$

по третьему ξ . — Прим. ред.

Нетрудно показать, что полная кривизна поверхности $\xi_1 = \text{const}$ в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) равна

$$C = -\left(\frac{a_2}{h_2}\right) \cdot \left(\frac{\partial a_1}{\partial \xi_2}\right) - \left(\frac{a_3}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{\partial a_1}{\partial \xi_3}\right) = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3),$$

где знак указывает направление вогнутости. Эта формула и соответствующие формулы для поверхностей $\xi_2 = \text{const}$ и $\xi_3 = \text{const}$ будут в дальнейшем полезными при вычислении восстанавливающей силы искривленной поверхности в напряженном состоянии.

В качестве простого примера рассмотрим сферические координаты r, θ, φ ; здесь кривизна r -поверхности равна $-2/r$, так как сфера вогнута внутрь и искривлена как в направлении θ , так и в направлении φ (чем объясняется множитель 2). Кривизна конической поверхности $\theta = \text{const}$ равна $(-1/r) \operatorname{ctg} \theta$, а плоскость $\varphi = \text{const}$ имеет кривизну нуль.

Во всяком случае, как только нам известны выражения x, y, z через новые координаты, соотношения (1.3.4)–(1.3.6) позволяют вычислить масштаб новой системы, составляющие вектора по осям этой системы, их изменения и много других важных выражений, которые будут рассмотрены ниже.

Элемент объема и другие формулы. Другой величиной, играющей важную роль в дальнейшем, является элемент объема в новой системе координат. Так как элементам $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$ соответствуют смещения $h_1 d\xi_1, h_2 d\xi_2, h_3 d\xi_3$ вдоль взаимно-перпендикулярных направлений, объем прямоугольного параллелепипеда, определенного этими дифференциалами, равен

$$dv = h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (1.3.7)$$

Это — элемент объема в новой системе координат. Он, конечно, всегда положителен.

Для примера рассмотрим упомянутую выше сферическую систему координат $x = \xi_1 \sin \xi_2 \cos \xi_3, y = \xi_1 \sin \xi_2 \sin \xi_3, z = \xi_1 \cos \xi_2$. Для коэффициентов Ламе находим следующие выражения:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \xi_1, \quad h_3 = \xi_1 \sin \xi_2.$$

Направляющие косинусы единичных векторов в направлении сферических осей поэтому равны

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin \xi_2 \cos \xi_3, & \alpha_2 &= \cos \xi_2 \cos \xi_3, & \alpha_3 &= -\sin \xi_3, \\ \beta_1 &= \sin \xi_2 \sin \xi_3, & \beta_2 &= \cos \xi_2 \sin \xi_3, & \beta_3 &= \cos \xi_3, \\ \gamma_1 &= \cos \xi_2, & \gamma_2 &= -\sin \xi_2, & \gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Они удовлетворяют соотношениям ортогональности, приведенным на стр. 33.

Элемент объема в новой системе координат $dv = \xi_1^2 \sin \xi_2 \cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$, а составляющие вектора по направлениям новых осей равны

$$\begin{aligned} F_1 &= F_x \sin \xi_2 \cos \xi_3 + F_y \sin \xi_2 \sin \xi_3 + F_z \cos \xi_2, \\ F_2 &= F_x \cos \xi_2 \cos \xi_3 + F_y \cos \xi_2 \sin \xi_3 - F_z \sin \xi_2, \\ F_3 &= -F_x \sin \xi_3 + F_y \cos \xi_3. \end{aligned}$$

Если функции F_x, F_y, F_z выражены через ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то новые составляющие выражаются только через новые координаты и преобразование будет завершено.

Вращение осей. Другим примером преобразования координат является тот случай, когда новая система координат, также прямоугольная,

повернута относительно старой на углы Эйлера θ , Φ , ψ (см. рис. 1.12). Уравнения преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} x &= (\sin \psi \sin \Phi + \cos \psi \cos \Phi \cos \theta) \xi_1 + \\ &\quad + (\cos \psi \sin \Phi - \sin \psi \cos \Phi \cos \theta) \xi_2 + \sin \theta \cos \Phi \xi_3, \\ y &= (\sin \psi \cos \Phi - \cos \psi \sin \Phi \cos \theta) \xi_1 + \\ &\quad + (\cos \psi \cos \Phi + \sin \psi \sin \Phi \cos \theta) \xi_2 - \sin \theta \sin \Phi \xi_3, \\ z &= -\cos \psi \sin \theta \xi_1 + \sin \psi \sin \theta \xi_2 + \cos \theta \xi_3. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Коэффициенты Ламе в этом случае все равны единице, как и следовало ожидать, так как это преобразование не изменяет масштаба осей.

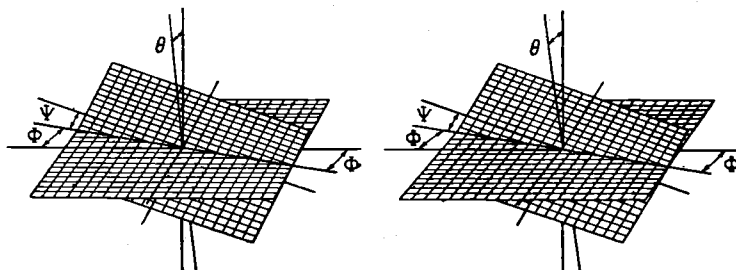


Рис 1.12. Вращение осей с указанием углов Эйлера.

Направляющие косинусы для этого преобразования являются коэффициентами линейных уравнений (1.3.8)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin \psi \sin \Phi + \cos \psi \cos \Phi \cos \theta \quad \text{и т. д.}, \\ \beta_1 &= \sin \psi \cos \Phi - \cos \psi \sin \Phi \cos \theta \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

При помощи этих направляющих косинусов можно получить формулы преобразования вектора.

Законы преобразования векторов. Мы видели, что для того, чтобы три функции точки могли служить тремя составляющими некоторого вектора, они должны преобразовываться в соответствии с правилами, содержащимися в соотношениях (1.3.3) и (1.3.5). Если мы преобразуем составляющие из одной криволинейной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_3 к другой системе ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 с коэффициентами Ламе h'_1, h'_2, h'_3 , то составляющие в новой системе должны выражаться через составляющие в старой системе формулами

$$F'_n = \sum_m \gamma_{nm} F_m, \quad (1.3.9)$$

где

$$\frac{h_m}{h'_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_n} = \gamma_{nm} = \frac{h'_n}{h_m} \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_m}.$$

Так как $h_m d\xi_m$ и $h'_n d\xi'_n$ являются расстояниями в сантиметрах, то новые составляющие F'_n измерены в тех же единицах, что и старые. Если мы, развивая какую-либо новую теорию, найдем, что некоторые три величины преобразуются согласно соотношениям (1.3.9), то мы можем быть вполне уверены, что найдены составляющие некоторого вектора.

Здесь уместно исследовать преобразование векторного произведения $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Вспомним, что на стр. 21 было отмечено, что $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ не является

истинным вектором. Сейчас мы увидим, почему это так. Используя соотношения (1.3.9), мы найдем, что составляющая $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ по ξ'_1 равна

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}' \times \mathbf{B}')_1 &= A'_2 B'_3 - A'_3 B'_2 = \sum_{m,n} (\gamma_{2m} \gamma_{3n} - \gamma_{3m} \gamma_{2n}) A_m B_n = \\ &= \sum_{m>n} (\gamma_{2m} \gamma_{3n} - \gamma_{3m} \gamma_{2n}) (A_m B_n - A_n B_m). \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Используя соотношения (1.3.2) (легко видеть, что эти соотношения остаются в силе и для рассматриваемых здесь общих преобразований, лишь бы обе системы были ортогональными), мы находим, что

$$(\mathbf{A}' \times \mathbf{B}')_1 = \pm \sum_n (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_n \gamma_{1n}, \quad (1.3.11)$$

где знак плюс имеет место, если обе системы правые или обе левые, а знак минус — если одна из них правая, а другая левая [кроме того, равенства (1.3.11) справедливы только для ортогональных систем].

Отсюда следует, что $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ — аксиальный вектор.

Равенство (1.3.9) также дает нам способ легко различать истинные и аксиальные векторы, так как они ведут себя по-разному при преобразовании правой системы в левую. Простым примером такого преобразования является *изменение направления осей* (инверсия) $\xi_1 = -x$, $\xi_2 = -y$, $\xi_3 = -z$. Если составляющие истинного вектора суть A_x , A_y , A_z , то $A_1 = -A_x$, $A_2 = -A_y$, $A_3 = -A_z$, т. е. составляющие истинного вектора при таком преобразовании меняют знак. С другой стороны, для аксиального вектора $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ при этом перемены знака не произойдет, так что составляющие аксиального вектора при изменении направления всех осей на обратные не меняют знака.

Аналогично истинный скаляр, или инвариант, примером которого является $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, не изменяется при изменении направления всех осей на обратные. С другой стороны, псевдоскаляр, как например $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, при этом меняет свой знак на обратный.

Использование соотношений (1.3.9) для установления того, являются ли три величины составляющими некоторого вектора или нет, может оказаться весьма громоздким. Другой способ заключается в использовании инвариантов, образованных при помощи этих величин. Например, если $\sum A_i B_i$ является инвариантом, а B_i суть составляющие истинного вектора, то и A_i должны быть составляющими истинного вектора. Несколько примеров приложений этого метода встретятся нам дальше в этой же главе.

Контравариантные и ковариантные векторы. Существуют еще два способа записи составляющих вектора, которые иногда используются, состоящие в применении разных «единичных векторов» для разложения $\mathbf{F}$ на составляющие. Допустим, что «единичные векторы» определены как векторы $\hat{\mathbf{a}}_n = h_n \mathbf{a}_n$ переменной длины, так что $\hat{\mathbf{a}}_n$ соответствует единичному изменению ξ_n , а не имеет длину в 1 см (как $\mathbf{a}_n$). Вектор $\mathbf{F}$ через эти новые «единичные векторы» может быть записан в виде

$$\mathbf{F} = \sum_n f^n \hat{\mathbf{a}}_n, \quad f^n = \frac{F_n}{h_n}.$$

В этом случае новые «составляющие» преобразуются по формулам

$$(f^n)' = \sum_m f^m \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_m} = \sum_m f^m \left(\frac{h_m}{h'_n} \right)^2 \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_n}. \quad (1.3.12)$$

Величины f^n называются *контравариантными* составляющими вектора в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Они отличаются от «фактических» составляющих множителем, обратным коэффициенту Ламе; они дают вектор только в том случае, когда эти составляющие умножаются на «единичный вектор» $\mathbf{a}_n = h_n \mathbf{a}_n$.

Если рассматривать «единичные векторы» $\hat{\mathbf{a}}^n = \mathbf{a}_n / h_n$ вдоль координатных линий с масштабом, обратным координатному, то соответствующие «составляющие» будут

$$f_n = h_n F_n, \quad \mathbf{F} = \sum_n f_n \hat{\mathbf{a}}^n,$$

и в этом случае f_n преобразуется по формулам:

$$(f_n)' = \sum_m f_m \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_n'} = \sum_m f_m \left(\frac{h_n'}{h_m} \right)^2 \frac{\partial \xi_n'}{\partial \xi_m}. \quad (1.3.13)$$

Величины f_n называются *ковариантными* составляющими вектора в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Эти формулы преобразований обладают несколько большей формальной симметрией, нежели формулы (1.3.9) для обычных составляющих, так как коэффициенты h не входят под знаком суммы хотя бы в одно из выражений (1.3.12) и (1.3.13). Это сомнительное преимущество часто сводится на нет тем фактом, что новые составляющие не обязательно сохраняют свою размерность при переходе от одной координаты к другой. Например, в сферических координатах, если $\mathbf{F}$ имеет размерность длины, составляющие F_r, F_θ, F_φ после преобразования все еще имеют размерность длины, тогда как f^θ и f^φ безразмерны, а f_θ и f_φ имеют размерность площади.

Мы вернемся к этим обозначениям позже, когда будем говорить о тензорах. Там мы обнаружим, что составляющие f полезны в предварительных рассмотрениях задачи, когда формальная симметрия их формул преобразования может упростить выкладки. Но когда приходится проводить подробные вычисления, то, как правило, оказывается проще использовать «фактические» составляющие F_n , которые всегда имеют ту же размерность, что и $\mathbf{F}$, и единичные векторы $\mathbf{a}_n$, которые всегда имеют единичную длину.

1.4. Дифференциальный оператор ∇

После того как мы рассмотрели основные принципы преобразований координат и указали, как можно распознавать скаляры и векторы по их формулам преобразований, можно перейти к изучению общих дифференциальных свойств векторов. Выше мы изучали свойства в целом или макроскопические свойства векторных полей при помощи поверхностных и криволинейных интегралов. Теперь мы хотим подробно изучить их микроскопические свойства. По аналогии с дифференциальным оператором d/dx , который, действуя на скалярную функцию $\phi(x)$, переводит ее в производную, выражающую наклон графика ϕ , мы имеем дифференциальный оператор, действующий по всем трем координатам, который, будучи приложен к скалярным или векторным полям, переводит их в другие поля. Получаемые таким образом поля являются мерою скорости изменения исходного поля от точки к точке.

Градиент. Скорость изменения скаляра $\phi(x, y, z)$ изображается вектором, направление которого совпадает с направлением наискорейшего возрастания ϕ , а величина равна этой максимальной скорости

возрастания. Мы уже указывали [см. формулу (1.1.1)], что изменение ϕ при переходе из точки с радиусом-вектором $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ в соседнюю точку $\mathbf{A} + d\mathbf{s}$, где элементарное смещение $d\mathbf{s} = i dx + j dy + k dz$, равно $d\phi = d\mathbf{s} \cdot \text{grad } \phi$, причем

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1.4.1)$$

Если $d\mathbf{s}$ лежит на поверхности уровня $\phi = \text{const}$, то $d\phi$ должно быть равно нулю, так что вектор $\text{grad } \phi$ должен быть перпендикулярен к поверхности уровня. Максимальное значение $d\phi$ соответствует $d\mathbf{s}$, перпендикулярному к этой поверхности, и в этом случае (как уже было отмечено выше)

$$d\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2} ds.$$

Величина, обозначаемая символами $\text{grad } \phi$ или $\nabla \phi$ (читается «набла» ϕ), является, таким образом, мерой скорости изменения скалярного поля ϕ в точке (x, y, z) . Для того чтобы показать, что она является действительно вектором, мы должны установить, что она преобразуется в соответствии с формулами (1.3.9). Это нетрудно сделать, так как очевидно, что выражение градиента в криволинейных координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеет вид

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{a_1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}. \quad (1.4.2)$$

Если мы теперь преобразуем это выражение к другой системе координат ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 , предполагая, что оно является вектором, мы придем к той же форме в новых координатах, что и в старых. В самом деле, используя соотношения (1.3.9) и тождества

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi'_n} = \sum_m \frac{\partial \phi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_n},$$

мы получим

$$\nabla \phi = \sum_m \frac{a_m}{h_m} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_m} = \sum_n a'_n \sum_m \left(\frac{1}{h_m} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_m} \right) \left(\frac{h_m}{h'_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_n} \right) = \sum_n \frac{a'_n}{h'_n} \frac{\partial \phi}{\partial \xi'_n},$$

как и должно быть, если $\text{grad } \phi$ есть вектор, выражаемый в любой системе ортогональных координат формулой (1.4.2).

Отметим, что $\text{grad } \phi$ является истинным, а не аксиальным вектором. Это доказывается тем фактом, что $d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{s}$ является истинным скалярным инвариантом.

Так как $d\mathbf{s}$ — истинный вектор, $\text{grad } \phi$ также должен быть истинным вектором. Заметим также, что циркуляция градиента равна нулю

$$\oint \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{s} = \oint d\phi = 0.$$

То обстоятельство, что циркуляция градиента всегда равна нулю, уже было отмечено на стр. 28.

Это краткое рассмотрение служит для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что если мы выражаем некоторую «физическую» величину через коэффициенты Ламе h в системе координат ξ , то в другой системе координат ξ' она должна выразиться формулой *того же вида* через коэффициенты h' .

Производная по направлению. В наших уравнениях будет иногда встречаться величина $\mathbf{B} \cdot \text{grad } \phi$. Если $\mathbf{B}$ — единичный вектор, эта величина называется *производной ϕ по направлению* единичного вектора $\mathbf{B}$; она пред-

ставляет собой скорость изменения ψ в направлении $\mathbf{B}$. Независимо от того, является ли $\mathbf{B}$ единичным вектором или нет,

$$\mathbf{B} \cdot \text{grad } \psi = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \psi = B_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + B_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + B_z \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{B_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + \frac{B_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + \frac{B_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3}.$$

Скалярный оператор $(\mathbf{B} \cdot \nabla) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad})$ может быть также применен к вектору, что дает

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} = \mathbf{i} (\mathbf{B} \cdot \text{grad } A_x) + \mathbf{j} (\mathbf{B} \cdot \text{grad } A_y) + \mathbf{k} (\mathbf{B} \cdot \text{grad } A_z).$$

В криволинейных координатах это выражение становится более сложным, потому что единичные векторы $\mathbf{a}$ также являются переменными [см. формулы (1.3.6)]. Используя формулы (1.3.6), можно найти, что ξ_1 -составляющая рассматриваемого вектора равна

$$[(\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A}]_1 = \frac{B_1}{h_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} + \frac{B_2}{h_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{B_3}{h_3} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} + \\ + \frac{A_2}{h_1 h_2} \left[B_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - B_2 \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \right] + \frac{A_3}{h_1 h_3} \left[B_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi_3} - B_3 \frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} \right]. \quad (1.4.3)$$

Остальные составляющие получаются из этой формулы круговой подстановкой индексов. Первые три слагаемых в правой части формулы (1.4.3) в сумме равны $\mathbf{B} \cdot \text{grad } A_1$; остальные слагаемые являются поправками, возникающими вследствие того, что направления новых осей меняются от точки к точке.

Элементарные повороты. Один из типов преобразований координат, который будет представлять для нас в дальнейшем особый интерес, получается в результате бесконечно малого вращения прямоугольной декартовой системы координат вокруг некоторой оси, проходящей через начало. Предположим, что вектор $d\omega$ по величине равен углу вращения (выраженному в радианах), а по направлению совпадает с осью вращения и указывает в сторону поступательного движения правого винта, вращаемого вместе с координатной системой. Точка с радиус-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ при вращении с системой координат получит смещение, представляемое вектором $d\omega \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times d\omega$. Если, наоборот, точку считать фиксированной в пространстве, то ее координаты в вращаемой системе (которые мы будем снабжать штрихом) будут связаны с ее координатами в исходной системе до вращения соотношением $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r} \times d\omega$, или

$$\begin{aligned} x' &= x + (y d\omega_z - z d\omega_y), \\ y' &= y + (z d\omega_x - x d\omega_z), \\ z' &= z + (x d\omega_y - y d\omega_x). \end{aligned}$$

Мы могли бы также записать: $\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}' \times d\omega$. [Эти соотношения справедливы только для очень малых поворотов; иначе мы должны применить уравнения (1.3.8), правые части которых отличаются от приведенных выше на бесконечно малые высших порядков относительно θ и $\Phi + \phi$.]

Допустим теперь, что некоторое скалярное поле ψ медленно вращается (поле может быть, например, плотностью медленно вращающегося твердого тела). Благодаря этому вращению значение поля ψ' в фиксированной точке пространства связано с значением поля ψ в этой точке до вращения соотношением

$$\psi'(x, y, z) = \psi(x, y, z) + (\mathbf{r} \times d\omega) \cdot \text{grad } \psi = \psi(x, y, z) - (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \cdot d\omega, \quad (1.4.4)$$

так как $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B}$ для любой тройки векторов. Поэтому вектор $\mathbf{r} \times \nabla \psi$ является мерой воздействия на поле ψ всякого рода элементарных поворотов (инфинитезимальных вращений); чтобы получить изменение поля при элементарном повороте $d\omega$, нужно только образовать скалярное произведение этого вектора на $d\omega$. Если ось вращения перпендикулярна к вектору $\mathbf{r} \times \nabla \psi$, то малое вращение не отражается на ψ ; если ось вращения параллельна $\mathbf{r} \times \nabla \psi$, то эффект вращения будет максимальным. Так как любое поле вида $f(r)$ инвариантно относительно вращений, то

$$\mathbf{r} \times \nabla [f(r) g(\vartheta, \varphi)] = f(r) [\mathbf{r} \times \nabla g(\vartheta, \varphi)].$$

Дивергенция. Существуют две дифференциальные операции, приложения которых к векторному полю играют важную роль. Одна приводит к скаляру, который указывает скорость изменения числа линий тока, другая — к вектору, характеризующему степень закрученности линий тока.

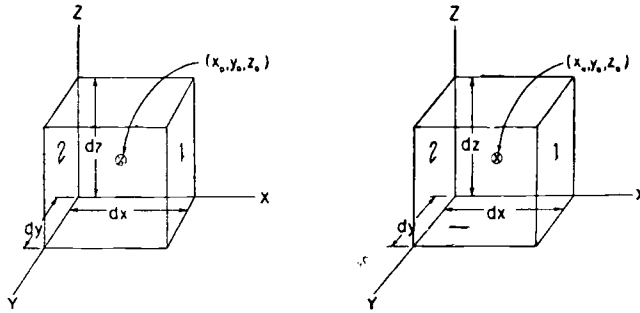


Рис. 1.13. Поток вектора и дивергенция векторного поля.

Первая операция может быть получена предельным переходом из потока вектора при стягивании замкнутой поверхности в точку, а вторая — аналогичным процессом, примененным к циркуляции.

Чтобы получить указанный скаляр, мы сначала вычислим поток вектора $\mathbf{F}$ изнутри элемента объема $dx dy dz$ с центром в точке (x_0, y_0, z_0) . Разлагая в ряд Тейлора x -составляющую F в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , найдем

$$F_x = F_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F_x}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F_x}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial F_x}{\partial z} (z - z_0) + \dots$$

[Здесь $\partial F_x / \partial x$ и т. д. обозначают значения производных в точке (x_0, y_0, z_0) .] Поверхностный интеграл нормальной составляющей F по грани 1 (см. рис. 1.13) равен

$$\int_1 F_x dA = dy dz \left[F_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right] +$$

+ высшие степени дифференциалов.

Поверхностный интеграл по грани 2 равен

$$- \int_2 F_x dA = - dy dz \left[F_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right] +$$

+ высшие степени дифференциалов,

причем знак минус перед интегралом и перед скобками объясняется тем, что интегрируется составляющая F по направлению внешней нормали,

которая на грани 2 равна $-F_x$. Сумма поверхностных интегралов по этим двум граням поэтому просто равна $(\partial F_x / \partial x) dx dy dz$, если не считать величин высших порядков малости. Аналогичные выражения получаются для двух других пар противоположных граней, так что с точностью до величин высших порядков малости

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Это выражение является векторным аналогом дифференциала du скалярной функции $u(x)$ одной переменной x . Аналогом производной является поток, отнесенный к единице объема в точке (x, y, z) . Эта скалярная величина называется *дивергенцией* вектора $\mathbf{F}$ в точке (x, y, z) и обозначается через

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{\text{объем} \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}}{\text{объем}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (1.4.5)$$

Дивергенция равна скорости возрастания числа линий тока, отнесенной к единице объема.

В соответствии с приведенным основным определением, дивергенция поля $\mathbf{F}$ в точке P является свойством поля $\mathbf{F}$, характеризующим его

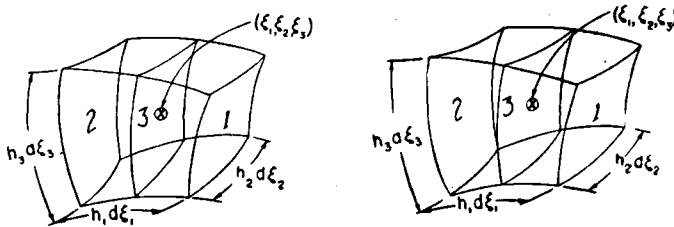


Рис. 1.14. Поток и дивергенция в криволинейных координатах.

поведение в окрестности P ; значение дивергенции не должно зависеть от выбора системы координат. Можно, конечно, предполагать, что выражение оператора дивергенции в обобщенных криволинейных координатах будет иметь математическую форму, отличную от его выражения в декартовых координатах; тем не менее численное значение $\operatorname{div} \mathbf{F}$ в точке P должно быть одним и тем же в любых системах координат. Если преобразование координат состоит только в повороте и не связано с растяжением или сжатием (т. е. если все h равны единице), то не только значение дивергенции, но и форма ее выражения должна оставаться неизменной. В конечном счете это и понимается под скалярным инвариантом.

Для того чтобы найти выражение дивергенции в обобщенных координатах, рассмотренных на стр. 34, мы вернемся к основному определению $\operatorname{div} \mathbf{F}$ и вычислим поток изнутри элемента объема, определенного элементарными смещениями $h_n d\xi_n$ в новой системе. Поток через грань 1 (см. рис. 1.14) равен

$$d\xi_2 d\xi_3 \left\{ F_1 h_2 h_3 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (F_1 h_2 h_3) \right] d\xi_1 \right\}.$$

Мы должны были учесть коэффициенты $h_2 h_3$ под знаком производной во втором слагаемом вследствие того, что поток через грань 1 отличается от потока через сечение 3, проходящее через центр (ξ_1, ξ_2, ξ_3) элемента, как благодаря тому, что F_1 изменяется с изменением ξ_1 , так и благодаря

тому, что в криволинейных координатах площадь грани 1 отличается от площади грани 3; именно, $h_2 h_3$ также зависит от ξ_1 . Поэтому оба коэффициента должны быть включены под знак производной.

Поток через грань 2 равен

$$-d\xi_2 d\xi_3 \left\{ F_1 h_2 h_3 - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (F_1 h_2 h_3) \right] d\xi_1 \right\},$$

а поток через обе грани, следовательно, равен

$$d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (F_1 h_2 h_3).$$

Таким образом, дивергенция $\mathbf{F}$ в обобщенных координатах равна

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}}{dV} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (F_3 h_1 h_2) \right], \quad (1.4.6)$$

где $dV = h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ — объем элементарного параллелепипеда.

Это выражение, конечно, отлично по форме от выражения (1.4.5) в декартовых координатах. Для того чтобы показать, что оба эти выражения принимают одно и то же значение в данной точке, мы прибегнем к прямому преобразованию первого из них во второе, используя для этого уравнения преобразования, приведенные на стр. 33—35. Выразим F_x, F_y, F_z через F_1, F_2, F_3 по формулам (1.3.3) и (1.3.5). После вычисления некоторых производных и перегруппировки членов, мы найдем, что,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{1}{h_1} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right] + \\ &+ \frac{1}{h_2} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \frac{\partial F_2}{\partial z} \right] + \frac{1}{h_3} [\dots] + \\ &+ F_1 \left[\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial (1/h_1)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial (1/h_1)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \frac{\partial (1/h_1)}{\partial z} \right] + F_2 [\dots] + F_3 [\dots] + \\ &+ \frac{F_1}{h_1} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \right] + \frac{F_2}{h_2} [\dots] + \frac{F_3}{h_3} [\dots]. \end{aligned}$$

Выражения, заключенные в первые и четвертые скобки, могут быть приведены к более простому виду, если учесть, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

так что соответствующие слагаемые в сумме равны

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} + F_1 \frac{\partial (1/h_1)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{F_1}{h_1} \right).$$

Выражение, заключенное в седьмые скобки, может быть развернуто с учетом того, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad \text{и т. д.}$$

Используя соотношения

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \quad \text{и т. д.,}$$

следующие из формул (1.3.5), и группируя слагаемые, мы найдем, что соответствующее слагаемое равно

$$\frac{F_1}{h_1} \left[\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1^2} \right) + \frac{1}{h_2^2} (\dots) + \frac{1}{h_3^2} (\dots) \right].$$

Но из соотношений (1.3.4), определяющих коэффициенты h , мы видим, что выражение, заключенное в первые круглые скобки, равно $\frac{1}{2} \frac{\partial h_1^2}{\partial \xi_1}$, так что все приведенное выше выражение равно

$$\frac{F_1}{2h_1} \left[\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial h_1^2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial h_2^2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial h_3^2}{\partial \xi_1} \right] = \frac{F_1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_2 h_3)}{\partial \xi_1}.$$

Таким образом, первое, четвертое и седьмое слагаемые в исходном выражении для $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ в сумме дают

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{F_1}{h_1} \right) + \frac{F_1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_2 h_3)}{\partial \xi_1} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (F_1 h_2 h_3),$$

т. е. первое слагаемое в выражении (1.4.6). Аналогично получаются и два других слагаемых в этом выражении. Тем самым преобразование закончено, и мы действительно убеждаемся в том, что $\operatorname{div} \mathbf{F}$ в декартовых координатах имеет в любой данной точке то же значение, что и $\operatorname{div} \mathbf{F}$, выраженная в какой-либо другой ортогональной системе координат. Поэтому мы можем назвать $\operatorname{div} \mathbf{F}$ *инвариантом* относительно преобразований координат.

Между прочим, этими несколько громоздкими выкладками мы показали, что поток изнутри инфинитезимальной поверхности зависит только от объема, заключенного в этой поверхности, и не зависит от ее формы, т. е. не зависит от того, имеем ли мы дело с элементом объема в декартовых или криволинейных координатах. Мы могли бы также доказать инвариантность $\operatorname{div} \mathbf{F}$, проверив это последнее утверждение непосредственно, не прибегая к проведенным утомительным вычислениям.

Теорема Гаусса. Свойство аддитивности потока и определение $\operatorname{div} \mathbf{F}$ позволяют получить очень важный и полезный метод вычисления потока изнутри любой области пространства. В силу свойства аддитивности поток изнутри всей области должен быть равен сумме потоков изнутри всех элементарных областей, заключенных внутри данной области. В силу равенства (1.4.5) интегралы по элементам объема dv могут быть записаны в виде $\operatorname{div} \mathbf{F} dv$, так что должна иметь место важная теорема дивергенции

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint \operatorname{div} \mathbf{F} dv, \quad (1.4.7)$$

где объемный интеграл распространяется на всю область, ограниченную поверхностью, по которой распространяется интегрирование в поверхностном интеграле в левой части. Равенство (1.4.7) называется *теоремой Гаусса*¹⁾.

Эта теорема подчеркивает тесную связь, которая должна существовать между поведением векторного поля на замкнутой поверхности и его поведением всюду внутри этой поверхности. Она соответствует довольно очевидному свойству линий тока: алгебраическое число линий тока, выходящих из замкнутой поверхности, должно быть равно числу таких линий, «начинающихся» внутри поверхности.

Решение уравнения Пуассона. Более того, сопоставление теоремы Гаусса с упоминавшимися ранее фактами относительно векторных полей

¹⁾ В отечественной литературе обычно применяется более правильное название «теорема Остроградского». — *Прим. ред.*

и источников [см. равенства (1.2.9)] позволяет получить полезное решение уравнения Пуассона $\nabla^2 \varphi = -q(x, y, z)$ [уравнение (1.1.5)], где q — ограниченная функция x, y, z , исчезающая на бесконечности, а решение φ подчинено единственному требованию, что оно также равно нулю на бесконечности. Наводящим соображением здесь является образование векторного поля $\mathbf{F} = \text{grad } \varphi$ и применение к этому полю теоремы Гаусса

$$\oint (\text{grad } \varphi) \cdot d\mathbf{A} = \iiint (\nabla^2 \varphi) dv$$

для любой области c , ограниченной замкнутой поверхностью S .

Другое наводящее соображение состоит в том, что векторное поле $(Q/r^2) \mathbf{a}_r$ простого источника оказывается градиентом скалярного потенциала $\varphi = -Q/r$.

Объединяя эти факты, мы можем высказать предположение, что решением уравнения Пуассона $\nabla^2 \varphi = -q(x, y, z)$ является интеграл

$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{q(x', y', z')}{4\pi R} dx' dy' dz', \quad (1.4.8)$$

где $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ есть расстояние от точки x, y, z до точки x', y', z' . Величина φ будет стремиться к нулю на бесконечности, если потребовать еще, например, чтобы $\iiint |q| dx dy dz < \infty$.

Чтобы доказать, что φ является решением, образуем векторное поле

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \text{grad } \varphi = - \iiint \frac{q(x', y', z')}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R dx' dy' dz',$$

где $\mathbf{a}_R$ — единичный вектор направления от точки x', y', z' к точке x, y, z . Далее образуем поток вектора $\mathbf{F}$ изнутри замкнутой поверхности S , ограничивающей некоторую область c пространства. Используя соотношение (1.4.7), найдем, что

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_c (\nabla^2 \varphi) dx dy dz = - \oint_S d\mathbf{A} \iiint \frac{q(x', y', z')}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R dx' dy' dz',$$

где, конечно, $\nabla^2 \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi)$. Последний интеграл распространяется на все значения x', y', z' и на все значения x, y, z на поверхности S . Порядок интегрирования может быть обращен, и мы рассмотрим сначала интегрирование по S , в котором подинтегральной функцией является

$$\frac{q(x', y', z')}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R dx' dy' dz'.$$

Применяя к интегралу потока для этой подинтегральной функции равенства (1.2.9), мы видим, что он равен $q(x', y', z') dx' dy' dz'$, если точка x', y', z' лежит внутри S , и равен нулю, если эта точка лежит вне S . Поэтому интеграл по $dx' dy' dz'$ равен интегралу от функции q по области c , и окончательный результат представится в виде

$$\iiint_c (\nabla^2 \varphi) dx dy dz = - \iiint_c q(x', y', z') dx' dy' dz'.$$

Таким образом, мы показали, что интеграл от $\nabla^2 \varphi$ по любой области c равен интегралу от $-q$ по той же области, *какой бы формы и каких бы размеров эта область ни была*.

Отсюда нетрудно заключить, что интеграл (1.4.8) является решением уравнения Пуассона $\nabla^2 \varphi = -q$, где q — разумно ведущая себя функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. Это решение — не единственное, так как мы можем добавить к φ любое решение уравнения Лапласа

$\nabla^2\phi = 0$ и все равно получим решение уравнения $\nabla^2\phi = -q$ с тем же самым q .

Характер решения ϕ , которое мы добавляем, зависит от краевого условия конкретной задачи. Если ϕ должно стремиться к нулю на бесконечности, то ϕ вообще не надо добавлять, так как ϕ , заданное интегралом (1.4.8), само уже стремится к нулю на бесконечности (при условии, что q ведет себя так же). Мы могли бы, конечно, попытаться найти решение уравнения Лапласа, равное нулю на бесконечности и отличное от нуля в некоторой области, но такая попытка не увенчалась бы успехом потому, что ни одно решение уравнения Лапласа не может иметь ни максимума, ни минимума (см. стр. 18), а функция, равная нулю на бесконечности и не имеющая ни максимума, ни минимума, должна быть всюду равна нулю. Следовательно, функция ϕ , заданная интегралом (1.4.8), является единственным решением, если краевое условие требует исчезновения на бесконечности.

При других краевых условиях решением будет сумма ϕ и такого решения ψ уравнения $\nabla^2\psi = 0$, что $\phi + \psi$ удовлетворяет соответствующему краевому условию. Весь этот вопрос будет гораздо подробнее рассмотрен в гл. 7.

Ротор (вихрь). Остается рассмотреть дифференциальный оператор, который преобразует вектор в другой вектор. Этот оператор, являющийся мерой «завихренности» векторного поля, так же связан с интегралом циркуляции, рассмотренным на стр. 29, как оператор дивергенции связан с интегралом потока. Чтобы найти завихренность векторного поля в точке P , мы вычислим циркуляцию вокруг элемента площади, содержащего P , и разделим ее на площадь элемента. Нетрудно сразу же обнаружить, что в этом случае предельный переход более сложен, чем при определении дивергенции, так как результат зависит от ориентации элемента площади.

Рис. 1.15. Интеграл циркуляции и ротор векторного поля.

Например, если элемент площади перпендикулярен оси x , то интеграл циркуляции вдоль пути на рис. 1.15 равен

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_1 F_y dy + \int_2 F_z dz - \int_3 F_y dy - \int_4 F_z dz = \\ &= F_y(x_0, y_0, z_0) dy - \frac{\partial F_y}{\partial z} \frac{dz}{2} dy + F_z(x_0, y_0, z_0) dz + \frac{\partial F_z}{\partial y} \frac{dy}{2} dz - \\ &- F_y(x_0, y_0, z_0) dy - \frac{\partial F_y}{\partial z} \frac{dz}{2} dy - F_z(x_0, y_0, z_0) dz + \frac{\partial F_z}{\partial y} \frac{dy}{2} dz = \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dy dz,\end{aligned}$$

где мы использовали первые члены ряда Тейлора для F_y и F_z . С другой стороны, циркуляция вокруг элемента, перпендикулярного оси y , равна $\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) dx dz$ и т. д. Если элемент параллелен оси z , но образует угол θ с осью x (как показано на рис. 1.16), то вычисление циркуляции несколько сложнее. Например, смещение ds вдоль пути 1 соответствует изменению $-ds \cos \theta$ абсциссы x и изменению $ds \sin \theta$ ординаты y . Аналогично в средней точке пути 2 F_z имеет значение

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{ds}{2} \cos \theta \cdot \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{ds}{2} \sin \theta \cdot \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

Принимая все это во внимание, найдем в данном случае для циркуляции выражение

$$\begin{aligned}
 & (F_y ds \sin \theta - F_x ds \cos \theta) - \frac{dz}{2} \left(ds \sin \theta \frac{\partial F_y}{\partial z} - ds \cos \theta \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \\
 & + F_z dz + dz \left(\frac{ds}{2} \sin \theta \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{ds}{2} \cos \theta \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - \\
 & - (F_y ds \sin \theta - F_x ds \cos \theta) - \frac{dz}{2} \left(ds \sin \theta \frac{\partial F_y}{\partial z} - ds \cos \theta \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) - \\
 & - F_z dz + dz \left(\frac{ds}{2} \sin \theta \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{ds}{2} \cos \theta \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) = \\
 & = \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \sin \theta + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \cos \theta \right] dz ds.
 \end{aligned}$$

Циркуляция вокруг элемента произвольной ориентации в пространстве представляется еще более сложной формулой.

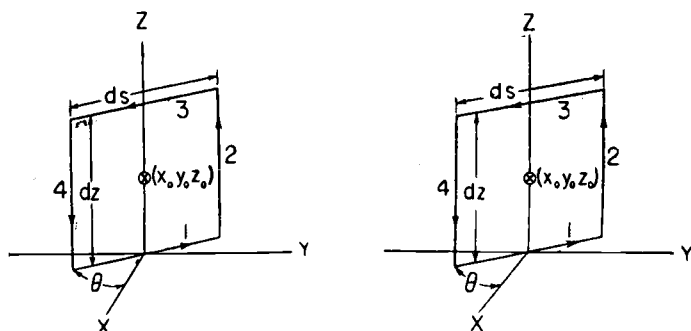


Рис. 1.16. Циркуляция под углом к оси.

Однако все значительно упрощается, если мы будем рассматривать величины

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

как, соответственно, x , y , z -компоненты некоторого вектора. В самом деле тогда оказывается, что циркуляция вокруг элемента площади dA равна просто составляющей этого вектора по направлению, перпендикулярному к элементу, умноженной на dA . Так, например, направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к элементу, изображенному на рис. 1.16, равны $(\sin \theta, \cos \theta, 0)$, и составляющая указанного вектора по направлению этой прямой, умноженная на $ds dz$, как раз и дает полученный нами выше результат.

Таким образом определенный вектор называется *ротором* (вихрем) $\mathbf{F}$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{F}. \quad (1.4.9)$$

Циркуляция вокруг элемента площади dA равна, следовательно, $d\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{F}$, где $d\mathbf{A}$ — аксиальный вектор, соответствующий элементу площади. Вектор $\text{rot } \mathbf{F}$ является мерой «завихренности» поля в точке (x, y, z) . Если $\mathbf{F}$ является скоростью в потоке жидкости, то направление $\text{rot } \mathbf{F}$ в точке P совпадает с направлением оси вращения жидкости, находящейся в окрестности P (согласованным по правилу правого винта с направлением самого вращения), а длина $\text{rot } \mathbf{F}$ равна удвоенной угловой скорости вращения этой части жидкости.

Ротор является оператором, аналогичным векторному произведению, так же как дивергенция аналогична скалярному произведению. Отметим,

что $\text{rot } \mathbf{F}$ является аксиальным вектором, если $\mathbf{F}$ — истинный вектор, так как интеграл циркуляции является скаляром, а $d\mathbf{A}$ — аксиальный вектор и, следовательно, $\text{rot } \mathbf{F}$ также должен быть аксиальным вектором.

Чтобы завершить наше рассмотрение, мы должны еще показать, что $\text{rot } \mathbf{F}$ ведет себя как вектор, т. е. преобразуется как таковой. В обобщенных координатах элемент площади, перпендикулярный к оси ξ_1 , показан на рис. 1.17. Рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас к выражению для циркуляции по пути, изображенному на рис. 1.15, показывают, что в данном случае

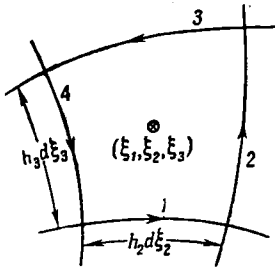


Рис. 1.17. Циркуляция в криволинейных координатах.

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \left[h_2 F_2 - \frac{1}{2} d\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_2 F_2) \right] d\xi_2 + \left[h_3 F_3 + \frac{1}{2} d\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_3 F_3) \right] d\xi_3 - \left[h_2 F_2 + \frac{1}{2} d\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_2 F_2) \right] d\xi_2 - \left[h_3 F_3 - \frac{1}{2} d\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_3 F_3) \right] d\xi_3.$$

Это выражение после упрощения и деления на площадь $h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3$ дает ξ_1 -составляющую ротора. Дальнейшие вычисления показывают, что выражение для ротора в обобщенных координатах имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 F_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial (h_2 F_2)}{\partial \xi_3} \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 F_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial (h_3 F_3)}{\partial \xi_1} \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 F_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (h_1 F_1)}{\partial \xi_2} \right]. \quad (1.4.10)$$

Чтобы показать, что этот вектор и вектор (1.4.9) тождественны, рассмотрим ξ_1 -составляющую вектора (1.4.9) $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{C}$. По формулам (1.3.3) она равна

$$C_1 = \alpha_1 C_x + \beta_1 C_y + \gamma_1 C_z = h_1 \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right].$$

Но по формуле (1.4.10) при помощи соотношений (1.3.2) и (1.3.5) мы также находим, что

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi_3} \frac{\partial F_x}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial F_x}{\partial \xi_3} + \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \frac{\partial F_y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \frac{\partial F_y}{\partial \xi_3} + \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \frac{\partial F_z}{\partial \xi_2} - \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \frac{\partial F_z}{\partial \xi_3} \right] = \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_3} \frac{\partial z}{\partial \xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \right) \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_3} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} - \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \right) \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_3} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \right) \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \right] = \\ &= h_1 \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right], \end{aligned}$$

откуда и вытекает, что формулы (1.4.9) и (1.4.10) определяют один и тот же вектор. Чтобы показать, что $\text{rot } \mathbf{F}$ — аксиальный вектор, когда $\mathbf{F}$ — истинный вектор, заметим, что выбор направления обхода в интеграле циркуляции вокруг элемента площади был произволен. Изменение направления этого обхода на обратное привело бы к изменению знака ротора на противоположный.

Вихревые линии. Вектор $\text{rot } \mathbf{F}$ определяет новое векторное поле с новыми линиями тока. Эти линии называются *вихревыми линиями*

поля $\mathbf{F}$. Например, для поля $F_x = -ay$, $F_y = ax$, $F_z = 0$ $\text{rot } \mathbf{F}$ имеет направление орта $\mathbf{k}$ и по длине всюду равен $2a$. Линиями тока поля $\mathbf{F}$ являются окружности в плоскостях, перпендикулярных оси z . Для поля $F_x = -ay$, $F_y = ax$, $F_z = b(x^2 + y^2)$, рассмотренного на стр. 23, $\text{rot } \mathbf{F}$ имеет составляющие $2by$, $-2bx$, $2a$. Мы видели, что винтовые линии тока для этого поля определяются семействами поверхностей $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\psi = z - \frac{b}{a}(x^2 + y^2) \text{arctg } \frac{y}{x}$. Методами, которые мы рассматривали на стр. 25, можно установить, что вихревые линии определяются поверхностями $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\psi = z + \frac{a}{b} \text{arctg } \frac{y}{x}$.

В обоих примерах вихревые линии всюду перпендикулярны линиям тока. Это, однако, не всегда так. Например, для поля $F_x = az$, $F_y = ax$, $F_z = ay$ $\text{rot } \mathbf{F} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ не перпендикулярен к $\mathbf{F}$.

Вихревые линии любого поля обладают следующим очень интересным свойством: *они нигде не начинаются и нигде не кончаются*. Это соответствует рассмотренному на стр. 29 свойству вихревых трубок и может быть доказано при помощи свойств ротора. Утверждение, что линии тока нигде не начинаются и нигде не кончаются, равносильно тому, что дивергенция соответствующего векторного поля всюду равна нулю, так как тогда по формуле Гаусса (1.4.7) поток изнутри любой замкнутой поверхности равен нулю. Однако дивергенция любого ротора равна нулю, так как по самому определению

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y} = 0.$$

Поэтому простейший способ получения векторного поля с равной нулю дивергенцией состоит в образовании ротора какого-нибудь другого поля; этим приемом часто пользуются в теории электромагнетизма.

Теорема Стокса. Существует теорема о роторе, аналогичная теореме о дивергенции, выраженной формулой (1.4.7); теорема о роторе может быть выведена из его основного определения и свойства аддитивности интеграла циркуляции, установленного на стр. 31. Рассмотрим любую поверхность S , ограниченную замкнутой линией (или замкнутыми линиями) L , разобьем S на элементы dA и сложим все циркуляции вокруг этих элементов. По нашему определению ротора эта сумма может быть записана в виде $\int \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$, где $d\mathbf{A}$ — вектор, соответствующий dA , и где интегрирование производится по всей поверхности S . В соответствии с рассмотрениями на стр. 27 этот интеграл определяет число вихревых линий, пересекающих поверхность S . В то же время вследствие свойства аддитивности интеграла циркуляции $\int \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ должен быть равен циркуляции по контуру (или контурам) L ,

$$\int \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1.4.11)$$

Это — *теорема Стокса*; она позволяет вычислить циркуляцию по любому контуру. Она является еще одним соотношением, связывающим поведение векторного поля на границе области с его поведением внутри области; в данном случае это соотношение устанавливает, что циркуляция по контуру должна быть равна числу вихревых линий, охватываемых контуром.

Векторный оператор ∇ . Так же как оператор дивергенции является аналогом скалярного произведения векторов, оператор ротора является аналогом векторного произведения. Чтобы сделать эту аналогию более совершенной, мы можем определить *векторный оператор ∇* , называемый *наблой*, с составляющими, заданными формулой

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (1.4.12)$$

В терминах этого оператора три дифференциальных оператора, рассмотренные в настоящем параграфе, могут быть символически записаны в виде

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi, \quad \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Некоторые формулы, содержащие векторный оператор ∇ , действующий на произведение двух величин, могут быть упрощены. Формулы

$$\begin{aligned} \text{grad } (\phi \Phi) &= \phi \text{ grad } \Phi + \Phi \text{ grad } \phi, \\ \text{div } (a \mathbf{F}) &= a \text{ div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \text{grad } a, \\ \text{div } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}, \\ \text{rot } (a \mathbf{B}) &= a \text{ rot } \mathbf{B} + (\text{grad } a) \times \mathbf{B}, \\ \text{rot } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

легко выводятся непосредственно из определений градиента, дивергенции и ротора.

§1.5. Аппарат векторного и тензорного исчисления

Аналогия между ∇ и вектором имеет, однако, лишь символический характер, так как мы не можем указать направление и длину оператора ∇ и сказать, что ∇ перпендикулярен $\mathbf{F}$, если $\text{div } \mathbf{F} = 0$, или что $\text{rot } \mathbf{F}$ перпендикулярен ∇ , как мы могли бы, если бы ∇ был настоящим вектором; даже перпендикулярность $\text{rot } \mathbf{F}$ и $\mathbf{F}$ не обязана иметь место. Эта аналогия становится еще более слабой, если сделать попытку выразить ∇ в обобщенных координатах, так как оказывается, что для разных его применений ∇ должен иметь разные представления:

$\nabla = \mathbf{a}_1 h_1^{-1} \partial / \partial \xi_1 + \mathbf{a}_2 h_2^{-1} \partial / \partial \xi_2 + \mathbf{a}_3 h_3^{-1} \partial / \partial \xi_3$ для градиента,

$\nabla = (h_1 h_2 h_3)^{-1} [\mathbf{a}_1 \partial (h_2 h_3) / \partial \xi_1 + \mathbf{a}_2 \partial (h_1 h_3) / \partial \xi_2 + \mathbf{a}_3 \partial (h_1 h_2) / \partial \xi_3]$ для дивергенции,

а для ротора вообще нельзя указать никакого представления. Для того чтобы понять, как преобразуются эти операторы, и уметь легко составлять более сложные выражения, мы должны углубиться в аппарат тензорного исчисления.

Ковариантные и контравариантные векторы. Тензорное исчисление было создано как аппарат для эффективного решения задач дифференциальной геометрии, но этот аппарат оказался существенно полезным и при изучении общей теории относительности. Мы коснемся тензорного исчисления кратко, лишь в той мере, которая необходима для уяснения методов вычисления дифференциальных векторных операторов в криволинейных координатах. Мы будем по-прежнему рассматривать только ортогональные координаты в трехмерном пространстве, хотя тензорное исчисление достаточно мощно и для рассмотрения неортогональных координат в пространстве любого числа измерений.

В связи с соотношениями (1.3.12) и (1.3.13) мы определили составляющие контравариантных и ковариантных векторов и их законы преобразования. Если F_n — составляющие обыкновенного вектора в трехмерной ортогональной системе координат с коэффициентами Ламе h_n , то величины $f_n = h_n F_n$ называются *ковариантными* составляющими вектора в той же системе координат, а величины $f^n = F_n/h_n$ — *контравариантными* составляющими. Таким образом, если f_n — составляющие ковариантного вектора, то $f^n = f_n/h_n^2$ — соответствующие составляющие контравариантного вектора в той же системе координат.

Как мы показали [формулы (1.3.12) и (1.3.13)], правила преобразования этих векторов при переходе от системы координат ξ_n к системе ξ'_n состоят в следующем:

$$(f_m)' = \sum_n f_n \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi'_m}, \quad (f^m)' = \sum_n f^n \frac{\partial \xi'_m}{\partial \xi_n}. \quad (1.5.1)$$

Мы уже указывали на то, что эти формулы обладают математическим преимуществом формальной симметрии, но новые «векторы» имеют ряд недостатков с точки зрения физика. Один из них состоит в разной размерности составляющих этих векторов; если обычный вектор имеет размерность длины, то составляющие соответствующего контравариантного вектора имеют размерность своей координаты, а размерность ковариантных составляющих, вообще говоря, также отлична от обеих этих размерностей.

Для контравариантных векторов индексы, обозначающие различные составляющие, ставятся наверху для того, чтобы отличить их от ковариантных составляющих. Существует, конечно, возможность смешения составляющих настоящих векторов и ковариантных векторов, так как и те и другие пишутся с нижними индексами. В нашей книге это не окажется существенным затруднением, ввиду того что мы редко рассматриваем ковариантные векторы, а там, где они встречаются, их характер специально оговаривается. Составляющая F_n без такой особой оговорки будет всегда относиться к настоящему вектору.

Величины $\partial\psi/\partial\xi_1$, $\partial\psi/\partial\xi_2$, $\partial\psi/\partial\xi_3$ являются составляющими ковариантного вектора; они должны быть разделены соответственно на h_1 , h_2 , h_3 для того, чтобы стать составляющими настоящего вектора, именно $\text{grad } \psi$.

Величины b_{ij} , b^{ij} , b_j^i называются составляющими соответственно *ковариантного*, *контравариантного* и *смешанного тензора* второго порядка системе координат ξ , если они преобразуются по формулам

$$b'_{ij} = \sum_{m,n} b_{mn} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_i} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi'_j}, \quad b'^{ij} = \sum_{m,n} b^{mn} \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi'_j}{\partial \xi_n}, \quad b_j^i = \sum_{m,n} b_n^m \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi'_j}. \quad (1.5.2)$$

Попарные произведения составляющих двух ковариантных векторов являются составляющими ковариантного тензора. Если векторы контравариантны, то тензор также будет контравариантным. Если A_i и B_j — составляющие двух обыкновенных векторов, то $(h_i/h_j) A_i B_j = c_j^i$ являются составляющими смешанного тензора.

Для смешанного тензора величина $\sum_m b_m^m$, называемая *свернутым* тензором, не меняется при преобразовании координат, так как

$$\sum_n b_n'^n = \sum_{\{m,k,n\}} b_k^m \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi'_k} = \sum_{k,m} b_k^m \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_m} = \sum_m b_m^m.$$

Такую величину мы называли *скаляром*; она также часто называется

инвариантом. Скалярное произведение двух векторов является свернутым тензором $\sum_n A_n B_n = \sum_n \frac{h_n}{h_n} A_n B_n$ и поэтому является инвариантом.

Аксиальные векторы. При рассмотрении свойств векторного произведения мы должны учитывать ортогональность и ориентацию наших обобщенных координат. Дальнейшая разработка полученных на стр. 33 формул, выведенных из соотношений $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$ и т. д. подобно тому, как выводятся соотношения (1.2.5), показывает, что при переходе от одной ортогональной системы к другой

$$\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi'_\mu} \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi'_\nu} - \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi'_\mu} \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi'_\nu} \right) = \frac{h'_1 h'_2 h'_3}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial \xi'_i},$$

причем, если обе системы — правые, тройки (i, j, k) и (λ, μ, ν) должны быть циклическими перестановками тройки $(1, 2, 3)$. При помощи этой формулы мы находим, что для любого тензора f_{ij} величины

$$c^i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} (f_{jk} - f_{kj}), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ или } 2, 3, 1 \text{ или } 3, 1, 2,$$

являются составляющими контравариантного вектора, так как по формулам преобразования тензоров

$$\frac{f'_{12} - f'_{21}}{h'_1 h'_2 h'_3} = \sum_{m, n} \frac{f_{mn}}{h'_1 h'_2 h'_3} \left[\frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_1} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi'_2} - \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_2} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi'_1} \right] = \sum_n c^n \left(\frac{\partial \xi'_3}{\partial \xi'_n} \right) = (c^3)' \text{ и т. д. } \}$$

Точно так же $h_1 h_2 h_3 (f^{jk} - f^{kj}) = c_i$ являются составляющими ковариантного вектора. Отметим, что эти векторы — аксиальные, как это следует из произвольности правила выбора последовательности индексов $(1, 2, 3)$ и т. д. Отметим также, что эти определения имеют место только для трех измерений.

Таким образом, если A_m, B_n, C_k — составляющие обыкновенных векторов и a_m, b_n, c_k — составляющие соответствующих ковариантных векторов, то i -я составляющая векторного произведения $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j = \frac{1}{h_k h_j} (a_j b_k - a_k b_j) = h_i c^i, \quad (1.5.3)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3 \text{ или } 2, 3, 1 \text{ или } 3, 1, 2.$$

Заметим опять, что это имеет место только для трех измерений.

Символы Кристоффеля. Для рассмотрения свойств дивергенции и ротора мы должны ввести некоторые полезные обозначения, называемые символами Кристоффеля, и изучить их свойства. Эти символы определяются для ортогональных координат следующим образом:

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ i \ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_i}, \quad \left\{ \begin{matrix} i \\ i \ j \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_j}, \quad \left\{ \begin{matrix} j \\ i \ i \end{matrix} \right\} = -\frac{h_i}{(h_j)^2} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_j}, \quad (1.5.4)$$

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} = 0, \text{ если } i, j, k \text{ все отличны друг от друга.}$$

Эти символы являются мерами кривизны координатных осей. По формулам (1.3.6) изменения направлений единичных векторов $\mathbf{a}_i$ могут быть выражены через символы Кристоффеля следующим простым образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (h_i \mathbf{a}_i) = \sum_n h_n \mathbf{a}_n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \ j \end{matrix} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\mathbf{a}_i}{h_i} \right) = - \sum_n \left(\frac{\mathbf{a}_n}{h_n} \right) \left\{ \begin{matrix} i \\ n \ j \end{matrix} \right\}. \quad (1.5.5)$$

Но единичный вектор $\mathbf{a}_i$ дает направление оси ξ_i в точке $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а h_i является масштабом этой координаты, т. е. h_1 равно фактическому расстоянию между точками (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, разделенному на приращение координаты $d\xi_1$. Поэтому вектор $h_i \mathbf{a}_i$ дает и направление и масштаб координаты ξ_i в точке P . Скорость изменения этого вектора относительно изменения координаты ξ_j является также вектором, i -я составляющая которого дает изменение масштаба, а две остальные составляющие, перпендикулярные к $\mathbf{a}_i$, определяют изменение направления; n -я составляющая этой скорости равна $h_n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \ j \end{smallmatrix} \right\}$.

Мы замечаем, что символы Кристоффеля симметричны относительно двух нижних индексов. Это означает, что вектор, представляющий скорость изменения $h_i \mathbf{a}_i$ относительно ξ_j , равен по величине и направлению вектору, представляющему скорость изменения $h_j \mathbf{a}_j$ относительно ξ_i . Это соответствует тому факту, что если масштаб координаты ξ_i меняется при изменении ξ_j , то направление ξ_j -линии меняется при изменении ξ_i , и наоборот. В этом легко убедиться на рис. 1.11.

Символы Кристоффеля не являются тензорами. Можно показать, что правило их преобразования задается формулой

$$\sum_{m,n} \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ m \ n \end{smallmatrix} \right\}' \frac{\partial \xi'_m}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_s} = - \frac{\partial^2 \xi'_i}{\partial \xi_k \partial \xi_s} + \sum_n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \ s \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_n}, \quad (1.5.6)$$

где штрих обозначает величины, выраженные в новых координатах ξ'_i . Хотя символы Кристоффеля и не являются тензорами, они могут быть очень полезными при образовании производных, имеющих уже тензорный характер, от векторов. Обычная производная $\partial f_i / \partial \xi_j$ не является тензором, в первую очередь потому, что координаты криволинейные, и изменение направления координатных линий влияет на составляющие вектора, вследствие чего производная учитывает не только изменения самого вектора, но и приводящие изменения составляющих. Другими словами, в криволинейных координатах составляющие производной вектора не являются производными его составляющих. Чтобы найти правильные выражения для составляющих производной, мы должны сначала продифференцировать сам вектор, а затем уже образовать составляющие производного вектора.

Ковариантная производная. Например, если f^i — составляющие контравариантного вектора, то настоящий вектор $\mathbf{F} = \sum_n \mathbf{a}_n h_n f^n$. Производная этого вектора по ξ_j может быть приведена к виду

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_j} = \sum_n \mathbf{a}_n h_n \frac{\partial f^n}{\partial \xi_j} + \sum_m f^m \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\mathbf{a}_m h_m) = \sum_n \mathbf{a}_n h_n \left[\frac{\partial f^n}{\partial \xi_j} + \sum_m f^m \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \ j \end{smallmatrix} \right\} \right].$$

Поэтому составляющими контравариантного вектора, соответствующего скорости изменения обыкновенного вектора $\mathbf{F}$ относительно ξ_j , являются величины

$$f^{i,j} = \frac{\partial f^i}{\partial \xi_j} + \sum_m f^m \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ m \ j \end{smallmatrix} \right\}, \quad (1.5.7)$$

где f^i — составляющие контравариантного вектора, соответствующего $\mathbf{F}$. Эти составляющие производной уже содержат поправку на кривизну координатных линий, и составляющие вектора $h_n f^{n,j}$ соответствуют фактическому изменению исходного вектора в зависимости от ξ_j . Запятая перед нижним индексом обозначает производную.

Величины f^i_j являются составляющими тензора, поскольку они ковариантны по индексу i и контравариантны по индексу j . Это можно показать, используя формулы (1.5.4) и (1.5.6):

$$\begin{aligned} (f^i_j)' &= \frac{\partial}{\partial \xi_j'} \sum_k f^k \left(\frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_k} \right) + \sum_{m,k} f^k \frac{\partial \xi_m'}{\partial \xi_k} \left\{ \begin{matrix} i \\ m' j \end{matrix} \right\}' = \\ &= \sum_{k,s} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi_j'} \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left(f^k \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_k} \right) + \sum_{k,n,m,s} f^k \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi_j'} \frac{\partial \xi_n'}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_m'}{\partial \xi_k} \left\{ \begin{matrix} i \\ m n \end{matrix} \right\}' = \\ &= \sum_{n,s} \frac{\partial f^n}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi_j'} + \sum_{k,s} f^k \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi_j'} \left[\frac{\partial^2 \xi_i'}{\partial \xi_s \partial \xi_k} + \sum_{m,n} \frac{\partial \xi_n'}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_m'}{\partial \xi_k} \left\{ \begin{matrix} i \\ m n \end{matrix} \right\}' \right] = \\ &= \sum_{n,s} \left[\frac{\partial f^n}{\partial \xi_s} + \sum_k f^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k s \end{matrix} \right\} \right] \left(\frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi_j'} \right) = \sum_{n,s} f^n_{,s} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi_j'} \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, f^i_j являются составляющими смешанного тензора второго порядка. Этот тензор называется *ковариантной производной* контравариантного вектора с составляющими f^i .

Аналогично если f_i — составляющие ковариантного вектора, то $F = \sum (a_n/h_n) f_n$ является обыкновенным вектором и

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \sum_n \left(\frac{a_n}{h_n} \right) \left[\frac{\partial f_n}{\partial \xi_j} - \sum_m f_m \left\{ \begin{matrix} m \\ n j \end{matrix} \right\} \right]$$

также является обыкновенным вектором. Поэтому величины

$$f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} - \sum_m f_m \left\{ \begin{matrix} m \\ i j \end{matrix} \right\} \quad (1.5.8)$$

являются составляющими ковариантного вектора, соответствующего скорости изменения F относительно ξ_j . Эти величины образуют ковариантный тензор второго порядка, называющийся ковариантной производной ковариантного вектора с составляющими f_i .

Определение ковариантного дифференцирования может быть распространено и на тензоры

$$\begin{aligned} f_{ij,k} &= \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \xi_k} \right) - \sum_m f_{im} \left\{ \begin{matrix} m \\ j k \end{matrix} \right\} - \sum_n f_{nj} \left\{ \begin{matrix} n \\ i k \end{matrix} \right\}, \\ f^{ij}_{,k} &= \left(\frac{\partial f^{ij}}{\partial \xi_k} \right) + \sum_m f^{im} \left\{ \begin{matrix} i \\ m k \end{matrix} \right\} + \sum_n f^{nj} \left\{ \begin{matrix} j \\ n k \end{matrix} \right\}, \\ f^i_{j,k} &= \left(\frac{\partial f^i_j}{\partial \xi_k} \right) - \sum_m f^i_m \left\{ \begin{matrix} m \\ j k \end{matrix} \right\} + \sum_n f^n_j \left\{ \begin{matrix} n \\ i k \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

и т. д. Эти величины являются составляющими тензора *третьего порядка*; они преобразуются по формулам, являющимся очевидными обобщениями формул (1.5.2). Из формул (1.5.9) можно усмотреть, что для ковариантного дифференцирования имеют место обычные правила дифференцирования, например правило дифференцирования произведения $(a_i b_j)_{,k} = a_i b_{j,k} + a_{i,k} b_j$ и т. д.

Тензорные обозначения для дивергенции и ротора. С помощью введенных определений мы можем теперь выразить дифференциальные

операции div и rot в симметричной форме. Свернутый тензор

$$\begin{aligned} \sum_n f^n_{,n} &= \sum_n \frac{\partial f^n}{\partial \xi_n} + \sum_{n,m} f^n \left\{ \begin{matrix} m \\ n \ m \end{matrix} \right\} = \\ &= \sum_n \frac{\partial f^n}{\partial \xi_n} + \sum_{m,n} f^n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \ln h_m = \sum_n \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_n} (f^n h_1 h_2 h_3) \end{aligned}$$

в силу сказанного выше о таких тензорах является скалярным инвариантом. Если здесь положить $f^n = F_n/h_n$, где F_n — составляющие обыкновенного вектора, то свернутый тензор оказывается *дивергенцией* F

$$\sum_{i,n} \left(\frac{F_n}{h_n} \right)_{,n} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n} F_n \right) = \text{div } F. \quad (1.5.10)$$

Инвариантность дивергенции вытекает отсюда непосредственно как следствие общих правил тензорного исчисления.

Выше мы также показали, что для ортогональных координат величины

$$c^i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} (f_{j,k} - f_{k,j}), \quad ijk = 123, 231, 312,$$

являются составляющими контравариантного вектора. Если положить $f_n = h_n F_n$, где F_n — составляющие обыкновенного вектора, то величины $h_k c^k$ также являются составляющими обыкновенного вектора. Выбирая определенную составляющую и используя определение символов Кристоффеля, найдем, например,

$$\begin{aligned} h_1 c^1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} (F_3 h_3) - (F_3 h_3) \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\ln h_3) - (F_2 h_2) \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\ln h_2) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (F_2 h_2) + \right. \\ &\quad \left. + (F_2 h_2) \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\ln h_2) + (F_3 h_3) \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\ln h_3) \right\}, \end{aligned}$$

что, в соответствии с формулой (1.4.10), дает ξ_1 -составляющую обыкновенного вектора $\text{rot } F$.

Другие дифференциальные операторы. Ознакомившись с техникой тензорного исчисления и с определениями ковариантного дифференцирования, мы можем теперь без тех утомительных осложнений, с которыми мы встречались раньше, составлять правильные выражения для векторных и скалярных комбинаций векторов, скаляров и операторов. Аппарат тензорного исчисления сам заботится об устранении всех этих осложнений.

Мы можем, например, быть уверены в том, что комбинация $\sum_n b^n a_{i,n}$ является i -й составляющей некоторого ковариантного вектора, h_i -кратной соответствующей компоненте некоторого обыкновенного вектора. Полагая $b^n = B_n/h_n$ и $a_i = h_i A_i$, где A и B — обыкновенные векторы, мы получаем, по делению на h_i составляющие обыкновенного вектора, ξ_i -составляющая которого равна

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{h_1} \sum_n \frac{B_n}{h_n} (h_1 A_1)_{,n} = \frac{1}{h_n} \sum_n \frac{B_n}{h_n} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_n} (h_1 A_1) - \sum_m h_m A_m \left\{ \begin{matrix} m \\ 1 \ n \end{matrix} \right\} \right] = \\ &= \left[\sum_n \frac{B_n}{h_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} (A_1) + \frac{A_2}{h_1 h_2} \left(B_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - B_2 \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \right) + \frac{A_3}{h_1 h_3} \left(B_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi_3} - B_3 \frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Сопоставление с формулой (1.4.3) показывает, что этот вектор есть $(B \cdot \text{grad}) A$. Так аппарат тензорного исчисления опять позволяет находить составляющие векторного оператора в любой ортогональной системе координат.

Стенографический метод записи в тензорном исчислении позволяет записывать формулы в виде, пригодном для любой системы координат. Как только записано тензорное равенство, в котором нижние и верхние индексы в каждой части соответствуют друг другу, то можно быть уверенным в том, что это равенство будет иметь место в любой системе координат. Это отвечает общей цели теоретической физики, которая стремится выразить законы в форме, не зависящей от системы координат.

Лапласиан, определенный равенством (1.1.4), также может быть получен в общей форме при помощи тензорного исчисления

$$\nabla^2 \psi = \text{div}(\text{grad } \psi) = \sum_n \left(\frac{1}{h_n^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right)_{,n} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right]. \quad (1.5.11)$$

Как мы уже отмечали на стр. 19, лапласиан ψ является мерой «сгущенности» ψ .

Лапласиан может быть приложен и к векторному полю F , что дает также вектор, который может рассматриваться как мера сгущенности направления или длины вектора F . Составляющие по осям x, y, z этого вектора получаются приложением лапласиана к x -, y -, z -составляющим вектора F . Чтобы получить его составляющие в произвольной системе координат, используем соотношения

$$\begin{aligned} \nabla^2 F &= \text{grad}(\text{div } F) - \text{rot}(\text{rot } F), \\ (\nabla^2 F)_i &= h_i \sum_n \frac{1}{h_n^2} \left[\left(\frac{F_i}{h_i} \right)_{,n} \right]_{,n} = \frac{1}{h_i} \sum_n \frac{1}{h_n^2} [(h_i F_i)_{,n}]_{,n}. \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Первое из этих соотношений легко проверяется в декартовых координатах; оно справедливо, конечно, и в любой системе координат. Второе соотношение показывает, что вектор $\nabla^2 F$ выражается через контра- и ковариантные векторы, образованные двойным ковариантным дифференцированием F_i/h_i или $h_i F_i$ с последующим свертыванием получающегося тензора третьего порядка. Запись окончательной формулы для $\nabla^2 F$ сложна, но для конкретных систем координат, которыми мы в основном пользуемся, эта формула значительно упрощается.

Первое соотношение (1.5.12) интересно само по себе, так как оно показывает, что в выражение $\nabla^2 F$ входит $\text{rot } F$. Если F — скорость потока несжимаемой жидкости, то $\text{div } F = 0$ и $\nabla^2 F = -\text{rot}(\text{rot } F)$. Поэтому для того чтобы вектор, дивергенция которого равна нулю, имел лапласиан, отличный от нуля, нужно, чтобы не только он сам был завихрен, но и чтобы его вихревые линии также были завихрены.

Другие операторы второго порядка. Другие комбинации двух операторов ∇ менее важны, чем лапласиан ∇^2 ; однако и они иногда встретятся в наших уравнениях, так что имеет смысл кратко рассмотреть их здесь.

Некоторые из этих операторов равны нулю. Равенство

$$\text{rot}(\text{grad } \psi) \equiv \nabla \times (\nabla \psi) = 0 \quad (1.5.13)$$

было уже использовано в § 1.2, где мы показали, что если вектор является градиентом потенциальной функции, то его ротор должен быть равен нулю. Равенство

$$\text{div}(\text{rot } F) \equiv \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 \quad (1.5.14)$$

уже рассматривалось на стр. 51, где было показано, что вихревые линии не могут ни начинаться, ни обрываться.

Равенство (1.5.13) связано с одним свойством полей, которое рассматривалось на стр. 24 — 26, а именно, что если ротор поля всюду равен нулю,

то это поле может быть представлено в виде градиента некоторого скаляра, называемого *потенциальной функцией*¹⁾. Равенство (1.5.14) связано со сходным свойством, которое может быть легко установлено, а именно, что если дивергенция поля равна нулю, то это поле может быть представлено в виде ротора некоторого вектора, называемого *вектор-потенциалом* данного поля с нулевой дивергенцией.

Оператор $\text{grad}(\text{div}) = \nabla(\nabla \cdot)$ прилагается к вектору и дает вектор. Он измеряет изменение дивергенции данного поля и отличается от лапласиана этого поля F на величину $\text{rot}(\text{rot } F)$, как это видно из формулы (1.5.12). Оператор $\text{rot}(\text{rot}) = \nabla \times (\nabla \times)$, последний из операторов второго порядка, определен, таким образом, через два предыдущих оператора. Все эти выражения могут быть записаны в тензорной форме.

Вектор как сумма градиента и ротора. Мы теперь достигли такой степени владения векторными формулами, что можем доказать следующее предложение: любое векторное поле F , если оно, конечно, однозначно и непрерывно и обращается в нуль на бесконечности, может быть представлено в виде суммы градиента некоторого скаляра φ и ротора некоторого вектора A , дивергенция которого равна нулю

$$F = \text{grad } \varphi + \text{rot } A, \quad \text{div } A = 0. \quad (1.5.15)$$

Функция φ называется *скалярным потенциалом* поля¹⁾ F , а A — его *векторным потенциалом*; эта теорема называется *теоремой Гельмгольца*.

Для доказательства этого утверждения мы должны показать, как, зная F , можно вычислить φ и A , а для этого мы должны воспользоваться решением уравнения Пуассона $\nabla^2 \varphi = -q$, которое было дано формулой (1.4.8):

$$\varphi = \iiint \frac{q(x', y', z')}{4\pi R} dx' dy' dz', \quad R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Рассматривая по отдельности составляющие вектора, мы убеждаемся в том, что решение векторного уравнения Пуассона $\nabla^2 F = -q$ может быть получено в таком же виде с заменой лишь φ на F и q на q . Кроме того, мы покажем, что решение φ , A — единственное, если только интеграл от F по всему пространству конечен. Если же это не так, если, например, одна из составляющих вектора $F = ax$, то мы можем положить $F = ax$ внутри сферы очень большого радиуса и считать $F = 0$ вне этой сферы. После выполнения всех вычислений можно устремить радиус сферы к бесконечности. Если мы имеем дело с полем в ограниченной области, то мы можем за F взять значение поля внутри этой области и положить $F = 0$ вне ее. Во всех случаях, когда F само не обращается в бесконечность, можно сделать $\int F dv$ конечным.

Чтобы вычислить φ и A , сначала вычислим векторную функцию

$$W = \iiint \frac{F(x', y', z')}{4\pi R} dx' dy' dz', \quad (1.5.16)$$

которая является решением векторного уравнения Пуассона $\nabla^2 W = -F$. Отсюда видно, что если мы положим $\text{div } W = -\varphi$ и $\text{rot } W = A$, то [используя векторную формулу (1.5.12)] придем к представлению (1.5.15)

$$F = -\nabla^2 W = -\text{grad}(\text{div } W) + \text{rot}(\text{rot } W) = \text{grad } \varphi + \text{rot } A.$$

¹⁾ Потенциальная функция, введенная здесь, отличается знаком от той, которая была введена ранее. — *Прим. ред.*

Так как $\mathbf{W}$ однозначно определено интегралом (1.5.16), то и φ и $\mathbf{A}$ определены однозначно, если только интеграл от $\mathbf{F}$ конечен (что может быть всегда достигнуто указанным выше приемом, если только $\mathbf{F}$ не обращается в бесконечность где-либо на конечном расстоянии от начала).

Мы можем выразить φ и $\mathbf{A}$ в несколько более простом виде, если мы воспользуемся симметрией функции $1/R$ относительно (x, y, z) и (x', y', z') и заметим, что градиент $1/R$ по (x, y, z) ($\text{grad } 1/R$) равен $-\text{grad}' 1/R$, где $\text{grad}' 1/R$ означает градиент $1/R$ по (x', y', z') . По теореме Гаусса (1.4.7) мы имеем

$$-\text{div } \mathbf{W} = \int \mathbf{F} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{4\pi R} \right) dv' = \oint \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}'}{4\pi R} - \int \frac{\text{div}' \mathbf{F}}{4\pi R} dv',$$

или

$$\varphi = - \iiint [\text{div}' \mathbf{F}(x', y', z') / 4\pi R] dx' dy' dz',$$

где $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}' / 4\pi R$ распространяется по достаточно удаленной замкнутой поверхности, на которой $\mathbf{F}$ всюду равно (или может быть сделано равным) нулю.

Аналогично, используя соотношение, родственное теореме Гаусса, именно

$$\int \text{rot } \mathbf{B} dv = - \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{A}, \quad (1.5.17)$$

мы можем преобразовать выражение для $\mathbf{A}$ к более простому виду

$$\text{rot } \mathbf{W} = \int \mathbf{F} \times \text{grad}' \left(\frac{1}{4\pi R} \right) dv' = \oint \frac{\mathbf{F} \times d\mathbf{A}'}{4\pi R} + \int \frac{\text{rot}' \mathbf{F}}{4\pi R} dv',$$

или

$$\mathbf{A} = \iiint [\text{rot}' \mathbf{F}(x', y', z') / 4\pi R] dx' dy' dz'.$$

Следовательно, φ и $\mathbf{A}$ могут быть получены непосредственно из дивергенции и ротора $\mathbf{F}$, если $\mathbf{F}$ удовлетворяет указанным выше условиям.

Это свойство любого векторного поля быть единственным образом представимым в виде суммы двух полей: одного $\text{rot } \mathbf{A}$, без дивергенции, и другого $\text{grad } \varphi$, безвихревого, — составляет утверждение *теоремы Гельмгольца*. Оно будет очень полезно нам в настоящей книге, особенно в гл. 13, и будет еще рассмотрено с другой точки зрения в п. 2.3.¹⁾

1.6. Аффиноры и другие векторные операторы

Мы уже рассматривали свойства векторных полей и их соответствие различным физическим явлениям с целью приобрести «физическое чутье» применительно к понятию векторного поля. Теперь мы должны ознакомиться с физическими эквивалентами тензорных форм, определенных соотношениями (1.5.2). Эти формы имеют в трех измерениях девять составляющих, тогда как вектор имеет только три. В тензорном поле эти девять составляющих могут изменяться от точки к точке; они преобразуются при замене системы координат по формулам (1.5.2).

Аффиноры. Так же как мы определяли «настоящие» векторы в отличие от их контравариантных и ковариантных видов, мы должны здесь

¹⁾ Следует отметить, что указанная единственность представления имеет место для всего пространства или при наличии необходимых краевых условий. Вообще же говоря, каждое из полей-слагаемых определено с точностью до градиента гармонической функции. — *Прим. ред.*

определить *аффинор* (dyadic) как совокупность девяти составляющих A_{ij} (функций трех координат), преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой по правилу

$$(A_{ij})' = \sum_{m,n} \frac{h_m h_n}{h_i' h_j'} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_i'} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_j'} A_{mn} = \sum_{m,n} \frac{h_i' h_j'}{h_m h_n} \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_j'}{\partial \xi_n} A_{mn} = \\ = \sum_{m,n} \frac{\tilde{h}_i'}{h_m} \frac{h_n}{h_j'} \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_j'} A_{mn} = \sum_{m,n} \gamma_{im} \gamma_{jn} A_{mn}. \quad (1.6.1)$$

Аффинор как целое с составляющими, подчиненными соотношениям (1.6.1), будет обозначаться готической заглавной буквой $\mathfrak{A}$. Соотношение между составляющими аффинора и составляющими соответствующих контравариантного, ковариантного и смешанного тензоров могут быть выведены из соотношений (1.5.2)

$$a^{mn} = A_{mn}/h_m h_n, \quad a_{mn} = h_m h_n A_{mn}, \quad a_n^m = h_n A_{mn}/h_m. \quad (1.6.2)$$

Можно сразу записать два общих свойства аффинора $\mathfrak{A}$: его свертка

$$|\mathfrak{A}| = \sum_m A_{mm} = \sum_m a_m^m \quad (1.6.3)$$

является скалярным инвариантом, значение которого в любой точке не зависит от выбора системы координат; и в соответствии с формулами (1.5.3) величина

$$\langle \mathfrak{A} \rangle = a_1 [A_{23} - A_{32}] + a_2 [A_{31} - A_{13}] + a_3 [A_{12} - A_{21}] \quad (1.6.4)$$

является аксиальным вектором, так как она преобразуется как вектор (a_m по-прежнему обозначают единичные векторы в трех направлениях правой системы координат). Инвариант $|\mathfrak{A}|$ может быть назван *следом* или *коэффициентом расширения* аффинора, а вектор $\langle \mathfrak{A} \rangle$ называется *вектором вращения* аффинора; вскоре обнаружатся основания для введения этих терминов.

Аффинор может сочетаться с вектором, образуя вектор

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{mn} a_m A_{mn} B_n, \quad \mathbf{B} \cdot \mathfrak{A} = \sum_{mn} B_m A_{mn} a_n. \quad (1.6.5)$$

Применяя правила преобразования векторов и аффиноров, можно показать, что эти величины преобразуются как векторы («настоящие» векторы). Этот результат наводит на мысль о следующей формальной записи аффинора через его девять составляющих по осям

$$\mathfrak{A} = a_1 A_{11} a_1 + a_1 A_{12} a_2 + a_1 A_{13} a_3 + a_2 A_{21} a_1 + a_2 A_{22} a_2 + a_2 A_{23} a_3 + \\ + a_3 A_{31} a_1 + a_3 A_{32} a_2 + a_3 A_{33} a_3. \quad (1.6.6)$$

Выражения $a_m a_n$ не являются ни скалярными, ни векторными произведениями единичных векторов, а должны рассматриваться как такие операторы, что скалярное произведение $(a_m a_n) \cdot \mathbf{B} = B_n a_m$ является вектором вдоль оси ξ_m , длины, равной составляющей $\mathbf{B}$ в направлении ξ_n и т. д.

Отметим, что, вообще говоря, вектор $\mathbf{B} \cdot \mathfrak{A}$ не совпадает с вектором $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B}$. Аффинор $\mathfrak{A}^*$, образованный из $\mathfrak{A}$ перестановкой индексов в каждой составляющей ($A_{mn}^* = A_{nm}$), называется *сопряженным* с $\mathfrak{A}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathfrak{A}^*$ и $\mathbf{B} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* \cdot \mathbf{B}$.

Аффиноры как векторные операторы. Рассмотрения последнего пункта подсказывают одно из самых полезных свойств аффиноров: они

являются операторами, переводящими один вектор в другой вектор. Новый вектор получается из старого по определенной системе правил, представленной девятью составляющими A_{ij} . Значения этих составляющих определяют, как новый вектор отличается от старого по длине и направлению. Это различие в длине и направлении зависит, конечно, и от направления исходного вектора. Векторный оператор, представленный аффинором, не является наиболее общим видом векторного оператора (другие виды мы рассмотрим ниже), но он отвечает столь многим физическим явлениям, что заслуживает подробного изучения.

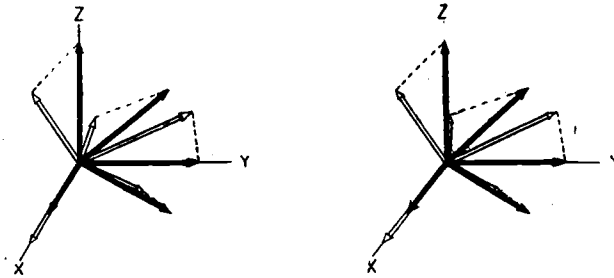


Рис. 1.18. Преобразование векторного поля аффинором

$$\mathbf{i}(1,5\mathbf{i} + 0,2\mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{j} - 0,4\mathbf{k}) + \mathbf{k}(0,5\mathbf{j} + 0,6\mathbf{k}).$$

Черные векторы представляют исходное поле; светлые векторы — преобразованное поле.

Примеры явлений, которые могут быть представлены при помощи векторных операторов, встречаются во многих разделах физики. Например, зависимость между угловым моментом $\mathbf{M}$ твердого тела и его угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ имеет вид $\mathbf{M} = \mathfrak{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$, где $\mathfrak{J}$ — аффинор моментов инерции. Далее вектор скорости $\mathbf{v}$ жидкости, которая под давлением просачивается через анизотропную пористую среду, вообще говоря, не совпадает по направлению с градиентом давления, а связан с ним аффинорным соотношением $\text{grad } p = \mathfrak{K} \cdot \mathbf{v}$, где $\mathfrak{K}$ — аффинор сопротивления. Аналогично зависимость между электрической напряженностью и электрической поляризацией в изотропном диэлектрике также имеет аффинорный характер. Наиболее известный пример аффиноров получается при деформации упругого тела, которая будет вскоре рассмотрена.

Понятие аффинора как векторного оператора, а также указанные выше соотношения приводят нас к следующим правилам алгебры аффиноров:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= \sum_{m,n} \mathbf{a}_m [A_{mn} + B_{mn}] \mathbf{a}_n = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} &= \sum_{m,n} \mathbf{a}_m \left[\sum_i A_{mi} B_{in} \right] \mathbf{a}_n \neq \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}, \\ c\mathfrak{A} &= \sum_{m,n} \mathbf{a}_m (cA_{mn}) \mathbf{a}_n = \mathfrak{A}c. \end{aligned} \quad (1.6.6')$$

Первое соотношение показывает, что сложение аффиноров коммутативно и что аффинор общего вида может быть построен как сумма аффиноров более простых видов. Второе соотношение показывает, что аффинор, умноженный на аффинор, есть вновь аффинор и что умножение аффиноров *некоммутативно*. Третье соотношение определяет умножение на скаляр. Умножение на вектор было уже определено. Скалярное «двухточечное» произведение $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \sum_{m,n} A_{mn} B_{nm} = |\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}|$ является, конечно, полностью свернутой формой.

Существуют, конечно, нулевой аффинор $\mathfrak{O}$ и единичный аффинор $\mathfrak{I}$, называемый также *идемфактором*

$$\mathfrak{O} \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \mathfrak{I} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}, \quad \mathfrak{I} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3,$$

где $\mathbf{F}$ — любой вектор.

Можно также определить $\mathfrak{A}^{-1}$, аффинор, *обратный* к $\mathfrak{A}$, как аффинор, который, будучи умножен на $\mathfrak{A}$, дает идемфактор

$$(\mathfrak{A}^{-1}) \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A}^{-1}) = \mathfrak{I}.$$

Аффинор, обратный к нулевому аффинору, естественно, не определен. Через девять составляющих аффинора $\mathfrak{A}$ составляющие обратного аффинора выражаются следующим образом:

$$[(\mathfrak{A}^{-1})]_{mn} = \frac{A'_{nm}}{\Delta_A},$$

где A'_{mn} — алгебраическое дополнение элемента A_{mn} в определителе

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение умножения аффиноров влечет за собой то, что аффинор, сопряженный к произведению $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$, выражается через сопряженные к $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ формулой

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})^* = (\mathfrak{B}^* \cdot \mathfrak{A}^*),$$

так что переход в произведении к сопряженному аффинору связан с перестановкой сомножителей. Аналогично выражается аффинор, обратный произведению $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}^{-1}$.

Так как аффинор определен в каждой точке пространства его девятью составляющими по ортогональным осям [причем эти составляющие изменяются при вращении координат по формулам (1.6.1)], то он может быть построен в виде комбинации векторов, содержащих девять независимых параметров. Так как вектор определяется в каждой точке тремя величинами, то аффинор может быть, например, образован при помощи трех произвольно выбранных векторов $\mathbf{A}_m$

$$\mathfrak{A} = \mathbf{a}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1^* \mathbf{a}_1 + \mathbf{A}_2^* \mathbf{a}_2 + \mathbf{A}_3^* \mathbf{a}_3, \quad (1.6.7)$$

где $\mathbf{a}$ — единичные векторы ортогональной правой системы координат. Сопряженным аффинором будет

$$\mathfrak{A}^* = \mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \mathbf{A}_1^* + \mathbf{a}_2 \mathbf{A}_2^* + \mathbf{a}_3 \mathbf{A}_3^*.$$

Эти равенства определяют векторы $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{A}_n^*$. Их взаимосвязь дана ниже. Вектор $\mathbf{A}_m$ может быть назван *составляющим* вектором по оси ξ_m . Для произвольного аффинора он может иметь любое направление и любую длину. Вектор $\mathbf{B}$, направленный вдоль ξ_m -линии, преобразуется операцией $\mathbf{B} \cdot \mathfrak{A}$ в вектор, имеющий направление $\mathbf{A}_m$, а операцией $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B}$ — в вектор, имеющий направление $\mathbf{A}_m^*$.

Нетрудно видеть, что составляющие векторы связаны с девятью составляющими A_{mn} аффинора $\mathfrak{A}$ по осям ξ_1, ξ_2, ξ_3 [см. формулы (1.6.6)] формулами

$$\mathbf{A}_m = \sum_n A_{mn} \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{A}_m^* = \sum_n \mathbf{a}_n A_{nm}.$$

В декартовых координатах x, y, z аффино́р может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= iA_x + jA_y + kA_z = A_x^*i + A_y^*j + A_z^*k, \\ A_x &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3, \quad \alpha_m = i \cdot a_m, \\ A_y &= \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3, \quad \beta_m = j \cdot a_m, \\ A_z &= \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3, \quad \gamma_m = k \cdot a_m.\end{aligned}$$

В более общем виде аффино́р может быть представлен как сумма комбинаций векторов¹⁾

$$\mathfrak{A} = \sum_m A_m B_m,$$

причем для такого представления произвольного аффино́ра в этой сумме должно быть не менее трех членов.

Симметрические и кососимметрические аффино́ры. Аффино́р Aa_1a_1 является особенно простым векторным оператором; он переводит любой вектор F в вектор длины $A(a_1 \cdot F)$, имеющий направление a_1 . Он является симметрическим аффино́ром, так как его составляющие в любой декартовой системе координат симметричны относительно индексов. Например, в системе координат x, y, z его составляющие равны

$$\begin{aligned}A_{xx} &= A\alpha_1^2, \quad A_{yy} = A\beta_1^2, \quad A_{zz} = A\gamma_1^2, \\ A_{xy} &= A_{yx} = A\alpha_1\beta_1, \quad A_{xz} = A_{zx} = A\alpha_1\gamma_1, \quad A_{yz} = A_{zy} = A\beta_1\gamma_1,\end{aligned}$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — направляющие косинусы a_1 в системе x, y, z .

Наиболее общим видом симметрического аффино́ра является

$$\mathfrak{A}_s = a_1 A_1 a_1 + a_2 A_2 a_2 + a_3 A_3 a_3, \quad (1.6.8)$$

где a_1, a_2, a_3 — любая тройка взаимно-ортогональных единичных векторов. Так как симметрический аффино́р содержит только шесть независимых параметров (три пары его составляющих равны), то задание определенного симметрического аффино́ра однозначно определяет три постоянных A_1, A_2, A_3 и направления в пространстве трех взаимно-ортогональных единичных векторов a_1, a_2, a_3 [которые задаются эйлеровыми углами ϕ, Φ, θ , см. формулы (1.3.8)]. Обращаясь к соотношениям (1.6.7), мы видим, что для того, чтобы аффино́р был симметрическим, должна существовать такая тройка единичных векторов a , для которой составляющий вектор A_1 параллелен a_1 и т. д.

Обратно, любой симметрический аффино́р может быть представлен в виде (1.6.8), и значения A и направления a могут быть найдены, так как формула (1.6.8) показывает, что симметрический оператор $\mathfrak{A}_s$, действуя на вектор в любом из трех взаимно-ортогональных направлений a_1, a_2 или a_3 , меняет только длину этого вектора, но не изменяет его направления, тогда как векторы в направлениях, отличных от a_1, a_2 и a_3 , переводятся в векторы с измененными направлениями. Эти специальные направления, в которых оператор не изменяет направления вектора, называются *главными осями* аффино́ра.

Направляющие косинусы главной оси a_1 аффино́ра

$$\mathfrak{A}_s = A_x ii + B_z ij + B_y ik + B_z ji + A_y jj + B_x jk + B_y ki + B_x kj + A_z kk$$

¹⁾ В нашей литературе вместо «комбинация векторов» говорят «неопределенное или диадное произведение векторов (или просто «диада»)». — Прим. пер.

могут быть найдены посредством решения уравнения

$$\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_1 = A_1 \mathbf{a}_1, \quad (1.6.9)$$

которое является математическим выражением данного выше определения главной оси. Уравнение (1.6.9) является первым встретившимся нам примером задачи на собственные значения, но скоро мы познакомимся и с другими такими задачами, например при рассмотрении «векторных пространств» в квантовой механике, в теории волнового движения и во многих других вопросах теории поля. Единичные векторы $\mathbf{a}_i$, дающие направления главных осей, называются *собственными векторами*, а постоянные A_1 , A_2 , A_3 — *собственными значениями*.

Для решения уравнения (1.6.9) положим $\mathbf{a}_1 = \alpha_1 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j} + \gamma_1 \mathbf{k}$. Подставляя это выражение в обе части уравнения, мы найдем три линейных однородных уравнения

$$(A_x - A_1) \alpha_1 + B_z \beta_1 + B_y \gamma_1 = 0,$$

$$B_z \alpha_1 + (A_y - A_1) \beta_1 + B_x \gamma_1 = 0,$$

$$B_y \alpha_1 + B_x \beta_1 + (A_z - A_1) \gamma_1 = 0.$$

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при α_1 , β_1 , γ_1 , равен нулю

$$\begin{vmatrix} A_x - A_1 & B_z & B_y \\ B_z & A_y - A_1 & B_x \\ B_y & B_x & A_z - A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение третьей степени относительно A_1 , мы найдем три корня, соответствующие трем числам A_1 , A_2 , A_3 . Этот определитель известен под названием *векового определителя*. Он всегда возникает при решении задач на собственные значения при помощи линейной комбинации векторов вида, принятого нами для $\mathbf{a}_1$.

Каждому из трех чисел A_i будет соответствовать система значений α_i , β_i , γ_i , которая дает направляющие косинусы i -й главной оси. Эти оси взаимно перпендикулярны, что может быть показано следующим образом. Так как $\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_1 = A_1 \mathbf{a}_1$ и $\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_2 = A_2 \mathbf{a}_2$, то, в силу симметрии $\mathfrak{A}_s$,

$$0 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot \mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_2 = (A_1 - A_2) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2.$$

Но A_1 и A_2 , как правило, не равны, так что последнее равенство может иметь место только в случае $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$.

Можно показать, что след или коэффициент расширения является инвариантом

$$A_x + A_y + A_z = A_1 + A_2 + A_3,$$

как это, конечно, и должно быть, так как это выражение является скалярным инвариантом $|\mathfrak{A}_s|$ аффинора. Мы теперь видим, почему этот скаляр называется коэффициентом расширения: он равен утроенному производимому аффинором $\mathfrak{A}_s$ среднему относительному удлинению векторов, направленных вдоль трех главных осей. Другой термин, «след» (по аналогии со следом крупной дичи), является картинным, но удобопонятным описанием этой величины.

Отметим, что вектор $\langle \mathfrak{A}_s \rangle$, образованный для симметрического аффинора, равен нулю и что для симметрического аффинора $\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathfrak{A}_s$, где $\mathbf{F}$ — произвольный вектор. Другими словами, всякий симметрический аффинор совпадает с сопряженным себе.

В кососимметрическом аффиноре диагональные составляющие A_{nn} равны нулю, а внедиагональные составляющие меняют знак при перестановке индексов: $A_{mn} = -A_{nm}$. Наиболее общий кососимметрический аффинор содержит только три независимых параметра. Он всегда может быть представлен в виде

$$\mathcal{A}_a = \mathbf{R} \times \mathfrak{S} = -ijR_z + ikR_y + jiR_z - jkR_x - kiR_y + kjR_x, \quad (1.6.10)$$

где $\mathfrak{S} = ii + jj + kk$ — идемпоттор. Выбор кососимметрического аффинора однозначно определяет вектор $\mathbf{R}$, который равен минус половине вектора вращения $\langle \mathcal{A}_a \rangle$ этого аффинора. Отметим, что коэффициент расширения кососимметрического аффинора равен нулю. Отметим также, что для любого вектора $\mathbf{F}$ операция $\mathcal{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}_a \rangle \times \mathbf{F}$ дает вектор, перпендикулярный к $\mathbf{F}$, а также перпендикулярный к вектору вращения $\langle \mathcal{A}_a \rangle$.

Задача на собственные значения может быть также поставлена и для кососимметрического аффинора

$$\mathcal{A}_a \cdot \mathbf{a} = \mathbf{R} \times \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a};$$

формально решая это уравнение, мы получим «главные оси» $\mathcal{A}_a$. Составление векового определителя показывает, что три значения λ суть $A_1 = 0$, $A_2 = iR$ и $A_3 = -iR$, так что два корня чисто мнимы. Единичным вектором вдоль главной оси, соответствующей $\lambda = A_1 = 0$, является $\mathbf{a}_R$, параллельный $\mathbf{R}$; два других единичных вектора невещественны. Сумма $A_1 + A_2 + A_3 = 0$, как это и должно быть, так как коэффициент расширения кососимметрического аффинора равен нулю.

Легко видеть, что любой аффинор может быть представлен в виде суммы симметрического и кососимметрического аффиноров

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_a,$$

$$(\mathcal{A}_s)_{mn} = \frac{1}{2} (A_{mn} + A_{nm}), \quad (\mathcal{A}_a)_{mn} = \frac{1}{2} (A_{mn} - A_{nm}).$$

Преобразованием к главным осям (которые всегда вещественны) мы можем представить симметрическую часть $\mathcal{A}_s$ в форме (1.6.8), а надлежащим выбором вектора $\mathbf{R}$ — кососимметрическую часть $\mathcal{A}_a$ в форме (1.6.10).

Мы можем, конечно, искать главные оси самого аффинора $\mathcal{A}$, решая уравнение

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$$

непосредственно (до разделения аффинора на симметрическую и кососимметрическую части). Это приводит к вековому уравнению

$$\begin{vmatrix} A_{xx} - \lambda & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} - \lambda & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого кубического уравнения можно обозначить через $\lambda = A_1, A_2, A_3$, а соответствующие собственные векторы вдоль главных осей — через

$$\mathbf{e}_1 = \alpha_1 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j} + \gamma_1 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_2 = \alpha_2 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \gamma_2 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_3 = \alpha_3 \mathbf{i} + \beta_3 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}.$$

Из алгебры известно, что взятый с обратным знаком коэффициент при λ^2 , $A_{xx} + A_{yy} + A_{zz}$, равен сумме корней $A_1 + A_2 + A_3$. Известно также, что либо все три корня вещественны, либо один из них веществен, а два

других мнимы и комплексно сопряжены (при условии, что все девять составляющих A_{mn} аффинора $\mathcal{A}$ вещественны). Когда все три корня вещественны, то и все три собственных вектора e_m вещественны, но когда два из корней мнимы, то соответствующие два собственных вектора тоже мнимы. Чтобы избежать этого осложнения, обычно сначала отделяют кососимметрическую часть $\mathcal{A}_a$ и находят главные оси симметрической части $\mathcal{A}_s$, так как ее собственные значения и собственные векторы обязательно вещественны (если составляющие самого аффинора $\mathcal{A}$ вещественны).

Вращение осей и унитарные аффиноры. Специальный тип векторного оператора соответствует такому преобразованию, которое можно назвать *жестким вращением*. Рассматривая несколько векторов $\mathbf{F}$ как своего рода координатный репер (каркас), мы будем под операцией жесткого вращения понимать такое вращение всех векторов $\mathbf{F}$, при котором этот репер вращается как *твердое* тело, т. е. с сохранением длин всех $\mathbf{F}$ и углов между ними. Если эти векторы $\mathbf{F}$ являются, например, радиус-векторами точек некоторого твердого тела, то рассматриваемой операции соответствует вращение этого твердого тела вокруг начала координат.

Допустим, что мы представим такую векторную операцию специальным аффинором $\mathcal{G}$ с составляющими γ_{mn} и т. д. Для того чтобы преобразованный вектор $\mathcal{G} \cdot \mathbf{F}$ имел ту же длину, что и $\mathbf{F}$, для любого $\mathbf{F}$ должно выполняться следующее условие:

$$(\mathcal{G} \cdot \mathbf{F}) \cdot (\mathcal{G} \cdot \mathbf{F}) = \sum_{l,n} \left[\sum_m \gamma_{mn} \gamma_{ml} \right] F_n F_l = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = \sum_n F_n^2, \quad l, m, n = x, y, z,$$

или, другими словами,

$$\sum_m \gamma_{mn} \gamma_{ml} = \delta_{nl} = \begin{cases} 1, & l = n, \\ 0, & l \neq n. \end{cases} \quad (1.6.11)$$

Аффиноры, составляющие которых удовлетворяют этому условию, называются (по причине, которая вскоре будет ясной) унитарными аффинорами¹⁾. Между прочим, если γ удовлетворяют этому условию, то, как легко показывается, для любой пары векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ их скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ остается неизменным при преобразовании, осуществляемом $\mathcal{G}$:

$$(\mathcal{G} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathcal{G} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

а следовательно (так как длины векторов остаются неизменными), оператор $\mathcal{G}$ сохраняет неизменными и углы между векторами. Легко показать также, что если аффиноры $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ представляют жесткое вращение, то и аффинор $\mathcal{G} \cdot \mathcal{H}$ имеет составляющие, удовлетворяющие соотношениям (1.6.11), т. е. также представляет жесткое вращение. Таким образом, произведение унитарных аффиноров есть также унитарный аффинор.

Оказывается, что всевозможные вещественные значения составляющих γ , соответствующие всем вещественным вращениям вокруг центра, могут быть выражены через эйлеровы углы вращения, [фигурирующие

¹⁾ Действительные матрицы, элементы которых удовлетворяют условиям (1.6.11), принято называть ортогональными. Унитарными матрицами называются матрицы с комплексными элементами, удовлетворяющими условиям, которые, в случае если все элементы действительны, превращаются в условия (1.6.11). — *Прим. ред.*

в формулах (1.3.8). Если составляющие аффинора $\mathfrak{G}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\gamma_{xx} &= \sin \psi \sin \Phi + \cos \psi \cos \Phi \cos \theta, \\ \gamma_{xy} &= \cos \psi \sin \Phi - \sin \psi \cos \Phi \cos \theta, \quad \gamma_{xz} = \sin \theta \cos \Phi, \\ \gamma_{yx} &= \sin \psi \cos \Phi - \cos \psi \sin \Phi \cos \theta, \\ \gamma_{yz} &= \cos \psi \cos \Phi + \sin \psi \sin \Phi \cos \theta, \quad \gamma_{zz} = -\sin \theta \sin \Phi, \\ \gamma_{zx} &= -\cos \psi \sin \theta, \quad \gamma_{zy} = \sin \psi \sin \theta, \quad \gamma_{zz} = \cos \theta,\end{aligned}$$

то, как видно на рис. 1.12, это преобразование соответствует повороту жесткого векторного репера на угол ψ вокруг оси z с последующим поворотом на угол θ вокруг оси y и заключительным поворотом (уже повернутого репера) еще раз вокруг оси z на угол $-\Phi$.

Несложные выкладки показывают, что оператор $\mathfrak{G}$, составляющие которого имеют указанный выше вид, удовлетворяет условиям (1.6.11) и тем самым обладает всеми свойствами поворота осей. Действительно, прежде всего аффинор, соответствующий произведению $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — унитарны, также унитарен и представляет вращение, получающееся в результате поворота осей на углы, определяемые аффинором $\mathfrak{B}$ с последующим поворотом на углы, определяемые аффинором $\mathfrak{A}$. Поэтому утверждение, сделанное в предыдущем абзаце, означает, что $\mathfrak{G}$ с указанными составляющими равно произведению $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$, где три унитарных множителя имеют вид

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{G} &= \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

и представляют соответственно элементарные повороты на три эйлеровых угла. Составляющие этого произведения вычисляются по формулам (1.6.6').

Причина, по которой эти вращающие аффиноры называются унитарными, состоит в том, что определитель, составленный из их элементов, равен 1 [как легко усматривается с помощью соотношений (1.6.11)]. Но еще более полезное свойство может быть обнаружено сопоставлением определений обратного и сопряженного аффинора с соотношениями (1.6.11). Оказывается, что если $\mathfrak{G}$ — унитарный аффинор [удовлетворяющий условиям (1.6.11)], то

$$\mathfrak{G}^{-1} = \mathfrak{G}^*, \text{ или } \mathfrak{G}^* \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{I}. \quad (1.6.12)$$

Обратно, если для некоторого аффинора $\mathfrak{G}$ выполняются соотношения (1.6.12), то его составляющие удовлетворяют условиям (1.6.11). Так как $\mathfrak{G}^* \cdot \mathfrak{G}$ отдаленно напоминает квадрат длины вектора, то можно сказать, что «величина» унитарного аффинора равна «единице».

Возвращаясь к формулам (1.3.8) поворота системы координат, мы видим, что если вектор $\mathbf{F}$ разложен на составляющие по осям x, y, z , то составляющие $\mathfrak{G} \cdot \mathbf{F}$ являются составляющими $\mathbf{F}$ по осям ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Таким образом, унитарный аффинор $\mathfrak{G}$ представляет изменение составляющих вектора, происходящее вследствие поворота системы координат. Поэтому вместо того, чтобы рассматривать систему координат как фиксированную, а вектор как изменяющийся, мы можем в данном случае рассматривать вектор как неизменный по длине и направлению, а сис-

тому координат — как вращающуюся, причем новые составляющие вектора $\mathbf{F}$ определяются из $(\mathcal{G} \cdot \mathbf{F}^1)$.

Если унитарный аффинор может представлять изменение составляющих вектора в результате поворота осей координат, то возникает вопрос, нельзя ли изменения составляющих общего аффинора $\mathcal{A}$ в результате того же поворота осей также выразить через тот же унитарный аффинор. Ответ должен быть положительным, как это можно усмотреть из последнего равенства (1.6.1) или из следующих рассуждений: если $\mathcal{G}$ — унитарный аффинор, представляющий поворот осей, и если $\mathcal{A}$ — любой аффинор, преобразующий вектор $\mathbf{A}$ в вектор $\mathbf{B}$, $\mathcal{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$, то $\mathcal{G} \cdot \mathbf{A}$ и $\mathcal{G} \cdot \mathbf{B}$ дают соответственно новые составляющие $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$; из соотношения же между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ мы находим, что

$$\mathcal{G} \cdot \mathbf{B} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathcal{G} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{G}^{-1}) \cdot (\mathcal{G} \cdot \mathbf{A}) = (\mathcal{G} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{G}^*) \cdot (\mathcal{G} \cdot \mathbf{A}),$$

т. е. что аффинор $\mathcal{G} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{G}^*$ переводит преобразованный вектор $\mathbf{A}$ в преобразованный вектор $\mathbf{B}$, а это, очевидно, и является *определением преобразованного аффинора* $\mathcal{A}$. Другими словами, составляющие аффинора $\mathcal{G} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{G}^*$ являются составляющими $\mathcal{A}$ в новой системе координат, полученной поворотом, производимым унитарным аффинором $\mathcal{G}$.

В частности, если $\mathcal{G}_A$ представляет поворот осей x, y, z , переводящий их в главные оси симметричного аффинора $\mathcal{A}_s$, то преобразованный аффинор $\mathcal{G}_A \cdot \mathcal{A}_s \cdot \mathcal{G}_A^*$ имеет простую диагональную форму

$$\mathcal{G}_A \cdot \mathcal{A}_s \cdot \mathcal{G}_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Независимо от того, какой поворот представляется унитарным аффинором $\mathcal{G}$ с вещественными составляющими, преобразованный аффинор $\mathcal{G} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{G}^*$ симметрический, если $\mathcal{A}$ симметрический, и кососимметрический, если $\mathcal{A}$ кососимметрический.

Аффинорные поля. До сих пор мы рассматривали свойства аффинора в отдельной точке пространства. Аффинорное поле есть совокупность девяти величин, преобразующихся по формулам (1.6.1) и являющихся функциями x, y, z или ξ_1, ξ_2, ξ_3 . В каждой точке пространства аффинор представляет собой оператор, переводящий вектор в данной точке в другой вектор, причем само преобразование вектора в вектор меняется от точки к точке. С другой точки зрения можно сказать, что коэффициент расширения, главные оси и вектор вращения аффинора — все являются функциями точки.

Аффинорное поле $\mathcal{A}$ с составляющими A_{mn} может быть получено ковариантным дифференцированием векторного поля $\mathbf{F}$ [см. формулу (1.5.8)]

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \left(\frac{1}{h_m h_n} \right) f_{m,n} = \left(\frac{1}{h_m h_n} \right) (h_m F_m)_{,n}, \\ A_{mm} &= \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{F_m}{h_m} \right) + \frac{1}{h_m} \sum_n \frac{F_n}{h_n} \frac{\partial h_m}{\partial \xi_n}, \\ A_{mn} &= \frac{1}{h_n} \frac{\partial F_m}{\partial \xi_n} - \frac{F_n}{h_n h_m} \frac{\partial h_m}{\partial \xi_n}, \quad m \neq n. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

¹⁾ Более точно: старые компоненты вектора $\mathbf{F}$ выражаются через новые, полученные после преобразования осей аффинором $\mathcal{G}$, по тем же формулам, по которым (старые) компоненты $\mathcal{G} \cdot \mathbf{F}$ выражаются через (старые же) компоненты $\mathbf{F}$. Чтобы выразить по тем же формулам новые компоненты через старые, надо оси координат преобразовать аффинором $\mathcal{G}^*$. — Прим. ред.

Как уже было показано [формула (1.5.10) и далее], коэффициент расширения $|\mathfrak{A}|$ этого аффинора равен $\text{div } \mathbf{F}$, а вектор вращения $\langle \mathfrak{A} \rangle = \text{rot } \mathbf{F}$. Этот аффинор, следовательно, симметрический только тогда, когда $\mathbf{F}$ — безвихревой вектор.

Аффинор, определенный формулами (1.6.13), может быть символически записан в виде $\mathbf{F}\nabla^1$ с составляющими по осям x, y, z , задаваемыми формулой

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{i} \mathbf{A}_x^* + \mathbf{j} \mathbf{A}_y^* + \mathbf{k} \mathbf{A}_z^*, \\ \mathbf{A}_x^* &= \text{grad } F_x, \quad \mathbf{A}_y^* = \text{grad } F_y, \quad \mathbf{A}_z^* = \text{grad } F_z.\end{aligned}\quad (1.6.14)$$

Сопряженным аффинором, очевидно, является

$$\mathfrak{A}^* = \nabla \mathbf{F} = \mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \mathbf{A}_x^* \mathbf{i} + \mathbf{A}_y^* \mathbf{j} + \mathbf{A}_z^* \mathbf{k}.$$

Приращение вектора $\mathbf{F}$, соответствующее вектору $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$, получается воздействием оператора $\nabla \mathbf{F}$ на $d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{F}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} dz = d\mathbf{F}. \quad (1.6.15)$$

Симметрический аффинор, соответствующий $\nabla \mathbf{F}$, равен, конечно, $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{F} + \mathbf{F}\nabla)$; он имеет равный нулю вектор вращения.

Изменение аффинорного поля от точки к точке может быть вычислено при помощи дифференциального оператора ∇ . Например,

$$\nabla \cdot \mathfrak{A} = \mathbf{i} \cdot (\partial \mathfrak{A} / \partial x) + \mathbf{j} \cdot (\partial \mathfrak{A} / \partial y) + \mathbf{k} \cdot (\partial \mathfrak{A} / \partial z)$$

есть вектор, который получается в результате ковариантного дифференцирования соответствующего смешанного тензора с последующим свертыванием возникающего тензора третьего порядка

$$\left(\frac{1}{h_n} \right) \sum_m a_{n,m}^m = \left(\frac{1}{h_n} \right) \sum_m \left(\frac{h_n A_{mn}}{h_m} \right)_{,m} = (\nabla \cdot \mathfrak{A})_n.$$

С помощью разложения на составляющие векторы, приведенного в формуле (1.6.7), для этого вектора получаем выражение $(\partial \mathbf{A}_x / \partial x) + (\partial \mathbf{A}_y / \partial y) + (\partial \mathbf{A}_z / \partial z)$, тогда как сопряженный вектор

$$\mathfrak{A} \cdot \nabla = \nabla \cdot \mathfrak{A}^* = \mathbf{i} (\text{div } \mathbf{A}_x) + \mathbf{j} (\text{div } \mathbf{A}_y) + \mathbf{k} (\text{div } \mathbf{A}_z). \quad (1.6.16)$$

Физический смысл этого вектора будет рассмотрен ниже.

Существует также аффинор, образованный при помощи оператора ротора

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathfrak{A} &= \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} = \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial y} \right) = \\ &= (\text{rot } \mathbf{A}_x^*) \mathbf{i} + (\text{rot } \mathbf{A}_y^*) \mathbf{j} + (\text{rot } \mathbf{A}_z^*) \mathbf{k}.\end{aligned}\quad (1.6.17)$$

Наряду с этими дифференциальными свойствами аффиноров имеют место также интегральные свойства, аналогичные теоремам Гаусса и Стокса [формулы (1.4.7) и (1.4.11)]. Для интеграла, распространенного

¹⁾ При этом надо иметь в виду, что здесь, вопреки обычным правилам, дифференцирование в ∇ действует на $\mathbf{F}$, хотя ∇ и стоит позади $\mathbf{F}$. — *Прим. ред.*

по замкнутой поверхности, имеем

$$\oint d\mathbf{A} \cdot \mathfrak{B} = \int \nabla \cdot \mathfrak{B} dv, \quad (1.6.18)$$

где интеграл в правой части распространяется по объему «внутри» поверхности и элемент поверхности $d\mathbf{A}$ направлен «изнутри» во внешнее пространство, а $\mathfrak{B}$ — произвольный аффинор. Каждый из интегралов является, конечно, вектором. Для криволинейного интеграла по замкнутому контуру имеем

$$\oint ds \cdot \mathfrak{B} = \int d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathfrak{B}), \quad (1.6.19)$$

где интеграл в правой части распространяется по поверхности, опирающейся на этот контур, а $\mathfrak{B}$ — произвольный аффинор.

Деформация упругих тел. Важным применением аффинорной алгебры является представление деформации упругих тел. Твердое тело движется и вращается как целое, но упругое тело способно еще, кроме того, изменять взаимное расположение своих внутренних частей. Для такого тела смещение части, находившейся в исходном положении в точке (x, y, z) , выражается суммой трех векторов

$$\mathbf{D}(x, y, z) = \mathbf{T} + \mathbf{P}(x, y, z) + \mathbf{s}(x, y, z),$$

где $\mathbf{T}$ — постоянный вектор, представляющий средний перенос тела, $\mathbf{P}$ — часть смещения, учитывающая среднее вращение вокруг центра тяжести, и $\mathbf{s}$ — дополнительное смещение, возникающее благодаря деформации тела. По определению, $\mathbf{s}$ равен нулю в центре тяжести тела и равен нулю всюду, если тело абсолютно твердое.

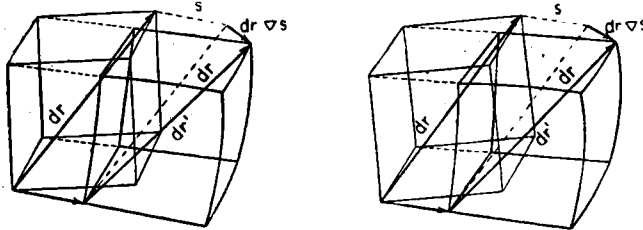


Рис. 1.19. Смещения в упругой среде, вызывающие смещение $\mathbf{s}$ относительно центра массы и деформацию, представляемую аффинором $\mathfrak{D} = \nabla \mathbf{s}$.

Вообще говоря, $\mathbf{s}$ гораздо меньше, чем могут быть $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$. Сейчас мы забудем про $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ и сосредоточим наше внимание исключительно на $\mathbf{s}$, так как мы не интересуемся движением тела в целом, а только его внутренними смещениями и деформациями.

Относительное смещение $\mathbf{s}$ не является, однако, хорошей мерой локальной деформации упругой среды, так как $\mathbf{s}$ является полным относительным смещением точки (x, y, z) , которое даже при сравнительно равномерном распределении напряжений в среде может быть тем больше, чем дальше точка (x, y, z) отстоит от центра тяжести. Нам нужна дифференциальная величина, измеряющая деформацию в точке (x, y, z) . Она получается вычислением изменения вектора $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$, соединяющего точки (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz)$ деформированного тела. Точка (x, y, z) смещается на вектор $\mathbf{s}(x, y, z)$, а точка $(x + dx, y + dy, z + dz)$ — на вектор $\mathbf{s}(x + dx, y + dy, z + dz)$. Изменение $d\mathbf{r}$ вследствие

деформации с точностью до величин второго порядка малости равно

$$dx \frac{\partial s}{\partial x} + dy \frac{\partial s}{\partial y} + dz \frac{\partial s}{\partial z} = \mathbf{dr} \cdot \nabla s$$

[в силу формулы (1.6.15)]. Поэтому вектор $\mathbf{dr}$ переходит при деформации в вектор $\mathbf{dr}'$, характеризующий новое относительное положение точек, где

$$\mathbf{dr}' = \mathbf{dr} \cdot (\mathfrak{J} + \mathfrak{D}); \quad \mathfrak{D} = \nabla s. \quad (1.6.20)$$

Аффино́р $\mathfrak{D}$ является дифференциальным оператором, характеризующим деформацию в точке (x, y, z) . Как было разъяснено на стр. 64, он может быть разбит на симметрическую и кососимметрическую части:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{K} + \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{K} = -\frac{1}{2} (\text{rot } s) \times \mathfrak{J},$$

$$\mathfrak{S} = i e_{11} \mathbf{i} + j e_{22} \mathbf{j} + k e_{33} \mathbf{k} + e_{12} (\mathbf{i} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{i}) + e_{13} (\mathbf{i} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{i}) + e_{23} (\mathbf{j} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{j}) = \frac{1}{2} (\nabla s + s \nabla),$$

$$e_{11} = \frac{\partial s_x}{\partial x} \text{ и т. д.}, \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) \text{ и т. д.} \quad (1.6.21)$$

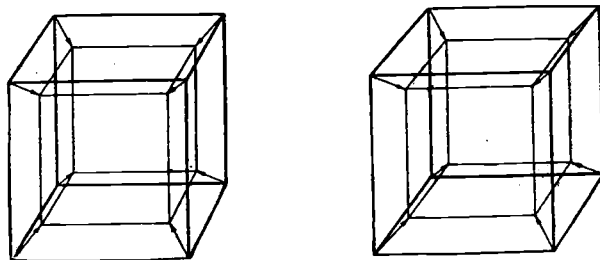
Аффино́р $\mathfrak{K}$ соответствует вращению элемента объема вокруг (x, y, z) , производимому деформацией среды. Ось вращения лежит в направлении $\text{rot } s$, а угол вращения, измеренный в радианах, равен длине $\frac{1}{2} \text{rot } s$. Отметим, что этот член не происходит от вращения тела как целого (так как эта часть движения была нами специально исключена из рассмотрений); он фигурирует вследствие закручивания материала при деформации. Этот тип вращения отсутствует, если $\text{rot } s = 0$.

Симметрический аффино́р $\mathfrak{S}$ называется *аффино́ром чистой деформации* в точке (x, y, z) . Если он равен нулю, то в рассматриваемой точке напряженное состояние отсутствует.

Как уже указывалось, всегда можно найти три взаимно-ортогональных направления — главные оси с единичными векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, с помощью которых симметрический аффино́р $\mathfrak{S}$ представляется в виде

$$\mathfrak{S} = a_1 e_1 \mathbf{a}_1 + a_2 e_2 \mathbf{a}_2 + a_3 e_3 \mathbf{a}_3. \quad (1.6.22)$$

Три величины e_1, e_2, e_3 называются *главными удлинениями* в точке (x, y, z) . Прямоугольный параллелепипед со сторонами $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$, ребра которого направлены вдоль главных осей, после деформации остается



Р и с. 1.20. Изменение элемента упругой среды при простом сжатии.

прямоугольным параллелепипедом (что уже не будет иметь места, если его ребра наклонены к главным осям), но длины его сторон станут равными $(1 + e_1) d\xi_1, (1 + e_2) d\xi_2, (1 + e_3) d\xi_3$. Поэтому относительное *увеличение объема* параллелепипеда равно

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3 = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \text{div } s = |\mathfrak{D}|. \quad (1.6.23)$$

Величина θ , коэффициент расширения аффино́ра $\mathfrak{D}$ (в любой системе координат), называется *коэффициентом объемного расширения* среды

в точке (x, y, z) . Этот коэффициент θ также равен относительному *уменьшению плотности* среды в точке (x, y, z) (с точностью до малых второго порядка относительно величин e).

Типы деформаций. Простейшим типом напряженного состояния является тот, которому соответствует постоянный аффинор, не зависящий от положения точки; такая деформация называется *однородной*. Простейшим типом однородной деформации является *простое растяжение*, соответствующее смещению s и аффинору чистой деформации $\mathfrak{E}$, заданным формулами

$$s = e(xi + yj + zk), \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = e\mathfrak{I}. \quad (1.6.24)$$

Этот тип деформации изотропен; любые оси являются главными осями: отсутствует вращение вследствие деформации. Коэффициент объемного расширения $\theta = 3e$.

Другой тип однородной деформации, называемый *чистым сдвигом*, получается при $e_1 = -e_2 = \frac{1}{2}e$, $e_3 = 0$, так что

$$s = \frac{1}{2}e(xi - yj), \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E} = \frac{1}{2}e(ii - jj).$$

Коэффициент объемного расширения равен нулю, так как растяжение вдоль оси x компенсируется сжатием вдоль оси y . Если повернуть систему

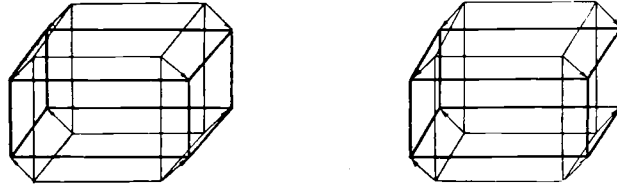


Рис. 1.21. Изменение элемента упругой среды при чистом сдвиге, задаваемом аффинором $e(ii - jj)$.

координат на 45° вокруг оси z ($\sqrt{2}x = x' + y'$, $\sqrt{2}y = x' - y'$), то смещение и аффинор чистой деформации примут вид

$$s = \frac{1}{2}e(x'j' + y'i'), \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \frac{1}{2}e(i'j' + j'i').$$

Этот тип деформации называется *чистым сдвигом*. Если его сочетать с жестким вращением среды на угол, равный $\frac{1}{2}e$ радиан, соответствующим аффинору $\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}e(i'j' - j'i')$, то результирующее смещение и сдвиг

$$s = ey'i', \quad \mathfrak{D} = ej'i' \quad (1.6.25)$$

соответствуют так называемому *простому сдвигу в направлении y'* . Все смещение происходит в направлении оси x' , слои среды скользят друг над другом, как это можно проделать с колодой игральнх карт.

Другой тип однородной деформации с коэффициентом объемного расширения, равным нулю, соответствует растяжению в направлении оси x и соответствующему сжатию в направлениях осей y и z

$$[s = e\left(xi - \frac{1}{2}yj - \frac{1}{2}zk\right), \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = e\left(ii - \frac{1}{2}jj - \frac{1}{2}kk\right)]. \quad (1.6.26)$$

Такого рода деформация возникает в материале типа резины, который растягивается в направлении оси x . Эту деформацию можно назвать *растяжением с сохранением объема*.

Самая общая однородная деформация, отнесенная к ее главным осям, может быть получена наложением простого растяжения, сдвига и растяжения с сохранением объема по всем трем направлениям. Последующий поворот осей дает наиболее общий вид для $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{S}$.

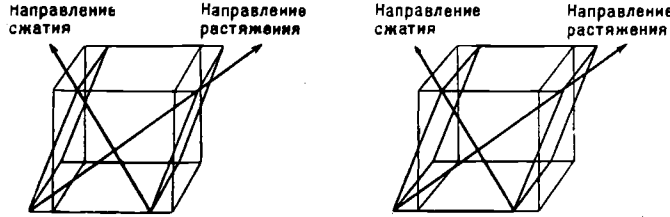


Рис. 1.22. Изменение элемента упругой среды при простом сдвиге, задаваемом аффинором eji .

Простым типом неоднородной деформации является винтовое закручивание в направлении оси x :

$$\mathfrak{s} = ex(yk - zj),$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S} = e[iyk - izj + jxk - kxj], \quad (1.6.27)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} e [2x(jk - kj) + y(ik - ki) + z(ji - ij)] = -e \left[xi - \frac{1}{2} yj - \frac{1}{2} zk \right] \times \mathfrak{I},$$

$$\mathfrak{S} = e[y(ki + ik) - z(ij + ji)].$$

Это соответствует повороту элемента в точке (x, y, z) вокруг оси x на угол в ex радиан [член $exjk - exkj$ в $\mathfrak{D}$, см. формулу (1.6.10)] и сдвигу в направлении оси x , пропорциональному длине вектора $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, соединяющему точку (x, y, z) с осью x [член $eyik - ezi j$ в $\mathfrak{D}$, см. формулы (1.6.25)].

Напряжения в упругой среде. Силы, действующие внутри упругой среды, которые вызывают деформации, называются *напряжениями*. Они

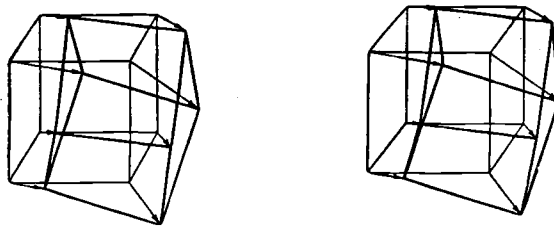


Рис. 1.23. Изменение элемента упругой среды при кручении, задаваемом формулами (1.6.27).

также лучше всего представляются аффинорами. Сила, действующая на элемент $dydz$, перпендикулярный оси x , равна $F_x dydz$, где F_x не обязан быть параллелен оси x . Аналогично обозначим через F_y и F_z силы, действующие на элементы, перпендикулярные к осям y и z , и отнесенные к единице площади. Легко может быть показано, что сила, действующая на элемент площади, представленный аксиальным вектором $d\mathbf{A}$, равна $\mathfrak{T} \cdot d\mathbf{A}$, где

$$\mathfrak{T} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}.$$

Более подробное рассмотрение соотношения между силами $\mathbf{F}$ и площадями $d\mathbf{A}$ подтверждает, что $\mathfrak{T}$ является аффинором и преобразуется как всякий аффинор.

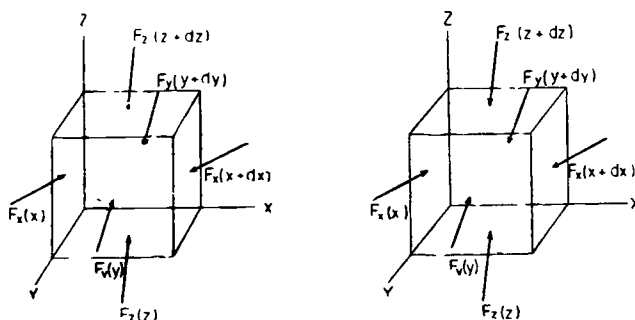


Рис. 1.24. Силы, действующие на грани элемента упругой среды, соответствующие аффинору напряжений $\mathbf{F}_x\mathbf{i} + \mathbf{F}_y\mathbf{j} + \mathbf{F}_z\mathbf{k}$.

При статическом равновесии эти силы не должны приводить во вращение ни одну часть среды. Рассмотрение моментов, действующих на элемент объема среды, показывает, что

$$(\mathbf{F}_x)_y = (\mathbf{F}_y)_x \text{ и т. д.}$$

Следовательно, аффинор $\mathfrak{T}$ — симметрический и равен своему сопряженному $\mathfrak{T}^* = \mathbf{i}\mathbf{F}_x + \mathbf{j}\mathbf{F}_y + \mathbf{k}\mathbf{F}_z$. При помощи главных осей и соответствующих ортогональных единичных векторов $\mathbf{a}_n$ мы можем записать $\mathfrak{T}$ в виде

$$\mathfrak{T} = T_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + T_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + T_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3,$$

где постоянные T_n называются *главными напряжениями* по главным осям. Существуют различные простые типы напряжений, аналогичные рассмотренным типам деформаций. Если, например, $T_2 = T_3 = 0$, то мы имеем *растягивающее напряжение* вдоль направления $\mathbf{a}_1$; если $T_2 = -T_1$ и $T_3 = 0$, то мы имеем *срезающее напряжение*, и т. д. Скаляр $|\mathfrak{T}|$ равен утроенному давлению в точке, взятому с обратным знаком.

Статическая взаимосвязь между напряжением и деформацией в изотропном упругом теле. Если некоторая среда может находиться в равновесии при наличии срезающих напряжений, то говорят, что она упругая. Если упругие свойства среды не зависят от направления, то она называется *изотропной*. Когда оба эти требования выполняются, то оказывается, что главные оси деформации всюду совпадают с главными осями напряжений и что деформации, порождаемые тремя главными напряжениями, независимы друг от друга и аддитивны. Например, эффект главного напряжения T_1 состоит в простом объемном расширении и удлинении в направлении $\mathbf{a}_1$. Другими словами, уравнениями, связывающими главные напряжения и главные удлинения, будут

$$T_n = \lambda(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_n, \quad n = 1, 2, 3,$$

где постоянные λ и μ определены упругими свойствами среды.

В декартовой системе координат x, y, z аффиноры напряжений и деформаций принимают более общий симметрический вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= T_{xx}\mathbf{i}\mathbf{i} + \dots + T_{xy}(\mathbf{i}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{i}) + \dots, \\ \mathfrak{S} &= e_{xx}\mathbf{i}\mathbf{i} + \dots + e_{xy}(\mathbf{i}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{i}) + \dots \end{aligned}$$

Уравнения, связывающие $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{S}$ и их составляющие, могут быть получены преобразованием главных осей

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &= \lambda |\mathfrak{S}| \mathfrak{J} + 2\mu \mathfrak{S}, \\ T_{xx} &= \lambda (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{xx} \quad \text{и т. д.}, \\ T_{xy} &= 2\mu e_{xy} \quad \text{и т. д.}\end{aligned}\tag{1.6.28}$$

Когда напряжения представляют собой изотропное давление, $\mathfrak{X} = -P\mathfrak{J}$, деформация является всесторонним сжатием и

$$\mathfrak{S} = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu} \mathfrak{J}.$$

Константа $\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) = P/\theta$ является поэтому *модулем всестороннего сжатия* изотропной упругой среды. Если напряжение срезающее $\mathfrak{X} = S(\mathbf{ii} - \mathbf{jj})$, то деформация является чистым сдвигом $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(S/\mu)(\mathbf{ii} - \mathbf{jj})$, так что μ есть *модуль сдвига* среды. Когда напряжение описывается аффинором $\mathfrak{X} = T\mathbf{ii}$, т. е. является простым растяжением в направлении оси x , аффинор деформации имеет вид

$$\mathfrak{S} = \frac{T}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} [2(\lambda + \mu)\mathbf{ii} - \lambda(\mathbf{jj} + \mathbf{kk})];$$

он представляет растяжение в направлении оси x и сжатие в направлениях осей y и z . Величина $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ называется *модулем Юнга* материала. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению $\lambda/2(\lambda + \mu)$ называется *коэффициентом Пуассона*.

Аффинорные операторы. Для того чтобы иметь возможность рассмотреть связь между аффинором напряжений и аффинором деформаций для неизотропных сред, мы должны ввести операторы, которые преобразуют аффиноры подобно тому, как аффиноры преобразуют векторы. Составляющие должны иметь четыре индекса и должны преобразовываться по формулам, аналогичным формулам (1.6.1),

$$(G_{ijkl})' = \sum_{mnrs} \gamma_{im} \gamma_{jn} \gamma_{kr} \gamma_{ls} G_{mnrs}.$$

Эти операторы могут быть названы *тетрадиками* (tetradic) и обозначены древнееврейскими буквами (чтобы отличить их от других операторов). Например, символ, представляющий 81 составляющую G_{ijkl} , пусть будет $\mathfrak{A}$ (гимель), а соотношение, определяющее характер преобразования аффинора, имеет вид

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} : \mathfrak{A}, \quad \text{или} \quad B_{mn} = \sum_{rs} G_{mnrs} A_{rs}.\tag{1.6.29}$$

Тетрадик может быть представлен через неопределенное произведение двух аффиноров аналогично тому, как аффинор может быть представлен через неопределенное произведение двух векторов. Особенно простым тетрадином, например, является $\mathfrak{Y}(\text{аин}) = \mathfrak{J}\mathfrak{J}$, который преобразует всякий аффинор в постоянную, умноженную на идемфактор:

$$\mathfrak{Y} : \mathfrak{B} = |\mathfrak{B}| \mathfrak{J}, \quad Y_{mnrs} = \delta_{mn} \delta_{rs}.$$

Существует, конечно, единичный тетрадик $\mathfrak{I}$ (код), который воспроизводит любой аффинор, и сопряженный к нему $\mathfrak{I}^*$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} : \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}, \quad (\mathfrak{I}^*) : \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*, \\ I_{mnrs} &= \delta_{mr} \delta_{ns}, \quad I_{mnrs}^* = \delta_{ms} \delta_{nr}.\end{aligned}$$

В этих обозначениях аффинор напряжений выражается для изотропных тел через аффинор чистой деформации следующим образом:

$$\mathfrak{I} = [\lambda \mathbf{y} + \mu' + \mu'^*]: \mathfrak{E},$$

где тетрадик в квадратных скобках имеет столь простой вид благодаря изотропности среды. Для неизотропных сред это соотношение более сложно, и составляющие тетрадика $\mathbf{7}$ (дает)

$$\mathfrak{I} = \mathbf{7}: \mathfrak{E}, \quad T_{mn} = \sum_{rs} D_{mnrs} S_{rs},$$

в основном, не равны нулю. Так как и $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{E}$ — симметрические аффиноры, то должны иметь место равенства $D_{mnrs} = D_{nmrs}$ и $D_{mnrs} = D_{mnsr}$, а также $D_{mnrs} = D_{rsmn}$. Благодаря этим симметриям число независимых составляющих $\mathbf{7}$ сводится к 21. Эти составляющие называются *упругими константами* неизотропного тела.

Можно было бы развить анализ тетрадиков, определить их «главные оси» и остальные свойства вполне аналогично тому, как мы это делали для аффиноров. Однако недостаток места и меньшая значимость этого вопроса для наших целей не позволяют нам этого.

Комплексные числа и кватернионы как операторы. Прежде чем мы перейдем к менее известным полям, полезно сделать обзор одного типа векторных операторов, который настолько известен, что часто упускается из виду. Использование комплексных чисел для представления векторов в двух измерениях тривиально, но не всегда достаточно ясно понимают, что комплексное число может также представлять линейный векторный оператор в двух измерениях.

Комплексные числа и функции комплексного переменного будут подробно рассмотрены в гл. 4, так как мы во всей книге будем пользоваться комплексными числами при решении наших задач. Все, что нам нужно здесь, состоит в следующем: вещественная единица 1 может рассматриваться как единичный вектор вдоль оси x , а мнимая единица $i = \sqrt{-1}$ — как единичный вектор вдоль оси y ; тогда двумерный вектор с составляющими x и y может быть представлен комплексным числом $z = x + iy$. Такая величина удовлетворяет обычным правилам сложения векторов (т. е. для этого нужно сложить составляющие) и умножения на скаляр (т. е. $az = ax + iay$).

Вектор, являющийся зеркальным отображением z в оси x , называется *комплексно-сопряженным* к z , $\bar{z} = x - iy$. Угол между z и осью x равен $\text{arctg}(y/x)$, а квадрат длины z равен $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 = \bar{z}z$. Заметим, что умножение комплексных чисел не соответствует правилам умножения трехмерных векторов. Если $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то $wz = zw = (ux - vy) + i(uy + vx)$ вновь является *вектором* в плоскости x, y . Произведение wz не является ни скалярным произведением этих векторов (скалярное произведение $ux + vy$ является вещественной частью wz), ни их векторным произведением (векторное произведение по величине равнялось бы мнимой части wz , но его направление должно было бы быть перпендикулярно к w и к z , что требует третьего измерения). Фактически произведение wz двух комплексных чисел в большей степени соответствует воздействию аффинора w особого рода на вектор z .

Операция умножения на w изменяет и направление и длину z . Чтобы записать это в обычной векторной и аффинорной форме, надо было бы вектор z записать в виде $xi + yj$, а аффинор w — в виде $uii - vjj + vji + ujj$, т. е. в виде комбинации кососимметрического аффинора $v(ji - ij)$ и сим-

метрического аффинора $u(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j})$ с главными осями по осям x и y . Этот аффинор, очевидно, не является самым общим двумерным линейным оператором (так как он содержит только два независимых параметра); это — оператор особенно простого типа, который, как мы сейчас увидим, изменяет направление любого вектора на постоянный угол, а его длину в постоянном отношении.

Комплексное число, символически представляемое в показательной форме $e^{i\theta}$ (где θ — вещественное число), по формуле Эйлера равно

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Рассматривая его как оператор, мы заключаем, что оно *поворачивает любой вектор z на угол θ радиан (против часовой стрелки) и не изменяет длины z* . Следовательно, оператор $w = Ce^{i\theta}$ [$C^2 = u^2 + v^2$, $\theta = \arctg(v/u)$], будучи умножен на любой вектор $z = x + iy$, поворачивает z на угол θ и увеличивает его длину в C раз. Многие наши решения будут иметь вид произведения некоторой комплексной величины ϕ на временной множитель $e^{-i\omega t}$. Этот множитель вращает вектор ϕ с постоянной угловой скоростью ω , и если (как это часто бывает) физическое решение является вещественной частью указанного произведения, то решение будет синусоидально колебаться во времени с циклической частотой $\nu = \omega/2\pi$.

Распространение этого типа представления величин на трехмерное пространство невозможно, вследствие чего мы и должны применять более сложный аппарат векторов и аффиноров. Гамильтон показал, однако, что векторы и операторы в *четырёхмерном* пространстве могут быть представлены при помощи довольно очевидного обобщения комплексных чисел, так называемых *кватернионов*.

Пусть число 1 представляет единичный вектор в четвертом измерении, и обозначим единичные векторы в трехмерном пространстве через i, j, k , правила перемножения которых аналогичны правилам для $\sqrt{-1}$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Тогда трехмерный вектор можно представить величиной $ix + jy + kz$, а общий кватернион $q = a + ib + jc + kd$ представляет четырехмерный вектор. Сопряженный четырехмерный вектор имеет вид $q^* = a - ib - jc - kd$, так что квадрат длины q равен $|q|^2 = q^*q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, что является простым распространением правила для обычных комплексных чисел на кватернионы.

Как и для комплексных чисел, произведение кватернионов pq может рассматриваться как результат операции, переводящей четырехмерный вектор q в четырехмерный вектор pq . Если $q = a + ib + jc + kd$ и $p = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$, то

$$pq = (a\alpha - \beta b - \gamma c - \delta d) + i(\alpha b + \beta a + \gamma d - \delta c) + \\ + j(\alpha c - \beta d + \gamma a + \delta b) + k(\alpha d + \beta c - \gamma b + \delta a) \quad (1.6.30)$$

является новым кватернионом, представляющим новый четырехмерный вектор. Отметим, что умножение кватернионов некоммукативно, т. е. что $pq \neq qp$. Мы не можем продолжать это рассмотрение дальше, хотя связь между кватернионами и пространственно-временными векторами в теории относительности будет еще упомянута ниже (заметим лишь, что p не может представлять самый общий четырехмерный аффинор).

Полезно, однако, рассмотреть один специальный кватернион, который является интересным обобщением комплексного числа $e^{i\theta}$. Применяя правила умножения для i, j, k и разлагая показательную функцию в ряд,

можно показать, что если $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, то

$$e^{\theta(i\alpha + j\beta + k\gamma)} = \cos \theta + \sin \theta (i\alpha + j\beta + k\gamma),$$

что является аналогом формулы Эйлера для $e^{i\theta}$. Показатель представляет собой трехмерный вектор длины θ и направления, определяемого направляющими косинусами α, β, γ , тогда как все выражение является кватернионом единичной длины. Отметим, что любой кватернион может быть представлен в виде

$$Qe^{\theta(i\alpha + j\beta + k\gamma)},$$

где Q — длина четырехмерного вектора, а угол θ и направляющие косинусы определяют направление вектора в четырехмерном пространстве. Можно ожидать, что, по аналогии с комплексным числом $e^{i\theta}$, этот оператор (при $Q=1$) каким-то образом связан с оператором вращения, хотя ясно, что эта связь не может быть столь простой, как в комплексной плоскости.

Правильный путь здесь может подсказать следующее интересное соотношение: если f — вектор в кватернионном обозначении $f = ix + jy + kz$, то кватернион

$$f' = x'i + y'j + z'k = e^{(\theta/2)(i\alpha + j\beta + k\gamma)} f e^{-(\theta/2)(i\alpha + j\beta + k\gamma)},$$

где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ представляет вектор, получающийся из вектора f поворотом на угол θ вокруг оси с направляющими косинусами α, β, γ . Заметим, что угол поворота вокруг этой оси равен θ , а не $\theta/2$. Это можно показать в общем случае, однако выкладка становится проще, если мы возьмем частный случай вращения вокруг оси x . Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} f' &= e^{\theta i/2} (ix + jy + kz) e^{-\theta i/2} = \\ &= ix + j(y \cos \theta - z \sin \theta) + k(y \sin \theta + z \cos \theta), \end{aligned}$$

что соответствует повороту y - и z -составляющих f на угол θ в плоскости yz , т. е. повороту всего вектора f на угол θ вокруг оси x . Доказательство в общем случае требует более громоздких выкладок.

Мы можем следующим образом обобщить этот результат: пусть дан кватернион q , выраженный через его длину Q и «оператор направления» $e^{\theta(i\alpha + j\beta + k\gamma)}$; мы можем формально образовать «квадратные корни» из него

$$\zeta = \sqrt{Q} e^{(\theta/2)(i\alpha + j\beta + k\gamma)} \quad \text{и} \quad \zeta^* = \sqrt{Q} e^{-(\theta/2)(i\alpha + j\beta + k\gamma)}.$$

Тогда вектор $f = ix + jy + kz$ преобразуется в вектор f' , направление которого получается из направления вектора f поворотом на угол θ вокруг оси с направляющими косинусами α, β, γ и длина которого равна длине вектора f , т. е. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, умноженной на Q ; это преобразование осуществляется при помощи операции

$$f' = \zeta f \zeta^*.$$

Последующая такая же операция еще одного вращения и изменения длины, представляемая кватернионами η и η^* , дает

$$f'' = \eta f' \eta^* = \eta \zeta f \zeta^* \eta^*.$$

Геометрический факт, что два последовательных вращения дают различные результаты в зависимости от порядка, в котором они выполняются, находит свое выражение в том, что произведение кватернионов η и ζ (так же, конечно, как и η^* и ζ^*) некоммукативно. Число Q называется *тензором* (tensor на латинском языке — «растягивающий»), а показательный множитель — *верзором* (versor — «поворачивающий») оператора ζ .

Самый общий поворот четырехмерного вектора, представляемого кватернионом $q = w + ix + jy + kz$, дается формулой

$$q' = e^{\theta(i\alpha + j\beta + k\gamma)} q e^{-\varphi(i\lambda + j\mu + k\nu)},$$

где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ и $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$. Когда и θ и φ — мнимые углы, то это преобразование соответствует преобразованию Лоренца, рассмотренному в следующем параграфе.

В дальнейших частях этой главы и в § 2.6 нам придется рассматривать обобщения верзора $\mathcal{Q} = e^{i\mathcal{A}}$, где $\mathcal{A}$ — общий аффинорный оператор. Эта функция всегда связана с вращением вектора $\mathbf{F}$, на который действует оператор $\mathcal{A}$, и во многих случаях преобразование вращения представляется формулой

$$\mathbf{F}' = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathcal{Q}^*,$$

как и в случае кватернионов.

Абстрактные векторные пространства. Трехмерные понятия векторов и аффинорных операторов, рассмотренные нами выше, могут быть обобщены на абстрактные пространства с любым числом измерений, часто даже со счетным множеством измерений. Это обобщение стало одним из наиболее мощных математических орудий, в особенности потому, что оно позволяет синтезировать и яснее понимать очень многие результаты из самых различных областей. Мы кратко рассмотрим здесь это обобщение, иллюстрируя его физическими примерами.

Один из простейших примеров использования абстрактного векторного пространства встречается при применении нормальных координат для описания движения связанных осцилляторов. Число нормальных координат, т. е. число измерений соответствующего пространства, равно числу степеней свободы осциллятора. Конфигурация, или *состояние*, системы описывается вектором в этом пространстве. Главные оси пространства соответствуют особым «элементарным» состояниям движения, причем самое общее движение оказывается линейной суперпозицией этих «элементарных» состояний.

Эти движения можно уяснить себе рассмотрением системы на рис. 1.25. «Элементарных» движений — два: (1) массы колеблются в одном и том же направлении, т. е. двигаются вместе; (2) массы колеблются в противоположных направлениях, т. е. сначала движутся друг к другу, затем друг от друга и т. д. Эти движения называются элементарными, так как существует определенная простая частота для каждого из типов движений. Самое общее движение системы является линейной суперпозицией этих «элементарных» движений и в результате не имеет определенной частоты.

Построим теперь двумерное пространство, нужное нам для описания этой системы. Мы можем, например, откладывать смещение x_1 одной из масс по какой-либо оси, а смещение x_2 другой массы по перпендикулярной оси. Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы в направлении этих осей; тогда общий вектор в этом пространстве $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$.

Уравнения движения имеют вид

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2, \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -(k_1 + k_2) x_2 + k_2 x_1$$

или в векторной форме

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mathcal{A} \cdot \mathbf{r},$$

где $\mathfrak{A}$ — аффинор $\mathbf{e}_1 A_{11} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 A_{12} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 A_{21} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 A_{22} \mathbf{e}_2$, и

$$A_{11} = k_1 + k_2, \quad A_{12} = -k_2 = A_{21}, \quad A_{22} = k_1 + k_2.$$

«Элементарные» движения $\mathbf{R}$ имеют определенную угловую частоту ω , и поэтому они должны удовлетворять уравнению $\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -\omega^2 \mathbf{R}$;

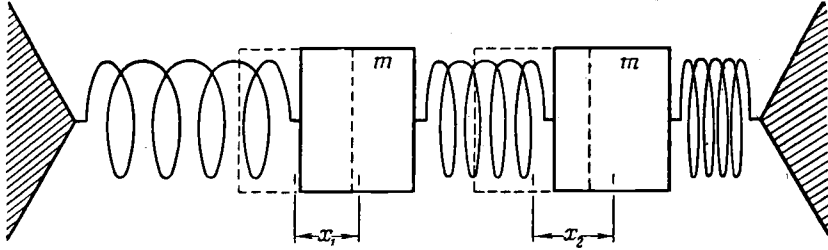


Рис. 1.25. Связанные осцилляторы.

следовательно, уравнение движения для $\mathbf{R}$ примет вид

$$\begin{vmatrix} A_{11} - m\omega^2 & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Используя полученные выше результаты, мы найдем, что существуют два элементарных решения $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, ортогональных друг к другу. Их направления можно, очевидно, использовать для новых осей координат, так что любой вектор в этом двумерном пространстве (т. е. любое движение) может быть представлен в виде линейной суперпозиции двух элементарных движений. Квадрат косинуса угла между вектором $\mathbf{F}$ и осью $\mathbf{R}_1$ дает долю элементарного движения $\mathbf{R}_1$ в движении, представляемом вектором $\mathbf{F}$, и аналогичное значение имеет квадрат косинуса угла между $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}_2$; сумма этих долей равна, как и должно быть, единице (как сумма квадратов направляющих косинусов). Другими словами, квадрат косинуса дает долю общей энергии системы, приходящуюся на движение типа $\mathbf{R}_1$.

Возвращаясь к уравнениям движения, мы теперь видим, что движение системы можно рассматривать как серию последовательных инфинитезимальных поворотов, производимых оператором $\mathfrak{A}$, причем масштаб времени определяется уравнением. Элементарные решения $\mathbf{R}_i$ обладают тем важным свойством, что они не поворачиваются со временем, так как оператор $\mathfrak{A}$, действуя на $\mathbf{R}_i$, восстанавливает его направление без изменений. Таким образом, $\mathbf{R}_i$ являются *стационарными* состояниями движения.

Эти рассуждения можно, конечно, распространить на случай N масс, последовательно соединенных пружинами. Такая система может служить одномерной моделью кристалла. Для этой системы потребуется пространство N измерений. Мы будем иметь N элементарных состояний движения, которые определяют систему фиксированных взаимно-ортогональных направлений в абстрактном векторном пространстве.

Собственные векторы и собственные значения. Геометрический характер этих абстрактных пространств полностью определяется оператором $\mathfrak{A}$. Главные оси оператора идут по направлениям векторов $\mathbf{e}_n$ (мы будем через $\mathbf{e}_n$ обозначать единичные векторы в абстрактном пространстве в отличие от обозначения $\mathbf{a}_n$ единичного вектора в обычном

трехмерном пространстве), которые определяются уравнением

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{e}_n = A_n \mathbf{e}_n, \quad (1.6.31)$$

где A_n — числа, называемые *собственными значениями* $\mathcal{A}$. Векторы $\mathbf{e}_n$, называемые *собственными векторами* $\mathcal{A}$, взаимно-ортогональны и служат для определения осей координат в пространстве. Любой вектор в этом пространстве является тогда линейной комбинацией собственных векторов. Это наводит на естественную мысль о целесообразности классификации различных типов операторов, встречающихся в физике, и рассмотрения соответствующих абстрактных векторных пространств. Мы более или менее полно охватим все случаи, если ограничимся операторами, встречающимися в квантовой механике.

Операторы в квантовой механике. Абстрактная формулировка квантовой механики, данная Дираком и фон Нейманом, опирается в значительной степени на понятия, возникающие при рассмотрении связанных осцилляторов, проведенном выше. Состояние системы описывается вектором абстрактного пространства, обычно бесконечномерного. Определение термина «состояние», употребляемого здесь, несколько затруднительно; он указывает на некоторую связь между типом системы, которую мы рассматриваем (числом частиц, видами сил и т. п.), начальными условиями для положения или скорости и т. д. и методами, применяемыми для наблюдения системы; все это станет в дальнейшем ясным. Один из основных постулатов квантовой теории состоит в том, что наблюдение системы нарушает, т. е. изменяет, ее состояние. В абстрактном векторном пространстве это означает, что вектор, представляющий состояние системы, испытывает в результате наблюдения, например положения частицы или ее энергии, некоторый поворот. Так как поворот может быть совершен при помощи аффинорного оператора в абстрактном пространстве, мы приходим к заключению, что *наблюдение должно быть представлено оператором*. Таким образом, механические величины, как, например, энергия, положение, импульс и др., должны быть представлены операторами. (Следовало бы говорить, что *наблюдение* этих величин должно быть представлено операторами, но удобнее говорить более кратко, как мы это сделали в предыдущей фразе.)

Как можно точно определить эти механические величины, имея в виду, что измерение энергии и т. п. изменяет состояние системы?

Наши предыдущие рассуждения приводят к мысли, что это окажется возможным только для некоторых специальных состояний, именно для состояний, описываемых собственными векторами (главными осями в случае обычного пространства) соответствующих операторов. Например, собственные векторы оператора энергии $\mathcal{E}$ удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{E} \cdot \mathbf{e}_n = E_n \mathbf{e}_n.$$

Это уравнение утверждает, что для собственных векторов $\mathbf{e}_n$ (т. е. для некоторых особых состояний, представляемых направлениями $\mathbf{e}_n$ в векторном пространстве) измерение энергий *не* изменяет состояния системы. Только в этом случае можно быть уверенным в том, что наблюдение дает точное значение энергии.

Каков же смысл постоянной E_n в этом уравнении? Обычно принимается, что можно нормировать оператор $\mathcal{E}$ так, чтобы E_n были в точности равны энергиям состояний, представляемых векторами $\mathbf{e}_n$. Это, конечно, автоматически имеет место в обычных трехмерных случаях, рассмотренных выше. Например, собственные значения аффинора момента

инерции как раз равны трем главным моментам инерции, а собственные значения аффинора напряжений суть главные напряжения.

Непосредственно очевидно, что такие две величины, как энергия и импульс, будут одновременно измеримы (или *наблюдаемы*, как говорит Дирак), если собственные векторы оператора энергии совпадают с собственными векторами оператора импульса. *Необходимое и достаточное условие для одновременной измеримости двух величин состоит в том, чтобы соответствующие им операторы коммутировали.* Необходимость следует из того факта, что если вектор e_n является собственным вектором и для $\mathfrak{E}$ и для p , то $\mathfrak{E} \cdot p \cdot e_n = p \cdot \mathfrak{E} \cdot e_n$. Так как по предположению любой вектор является линейной комбинацией (суперпозицией) векторов e_n , то мы найдем, что $\mathfrak{E} \cdot p \cdot e = p \cdot \mathfrak{E} \cdot e$ для любого вектора состояния e .

Доказательство достаточности в утверждении, приведенном курсивом, несколько более трудно. Рассмотрим собственный вектор e_n оператора $\mathfrak{E}$. Предположим коммутативность $\mathfrak{E} \cdot (p \cdot e_n) = E_n (p \cdot e_n)$. Отсюда следует, что $p \cdot e_n$ является собственным вектором оператора $\mathfrak{E}$ с собственным значением E_n . Если существует только один собственный вектор с собственным значением E_n , то мы сразу заключаем, что $p \cdot e_n$ должно быть пропорционально e_n , что и доказывает требуемое утверждение. Если же существуют несколько собственных векторов e_{nm} с собственным значением E_n (это так называемый случай вырождения), то мы можем только заключить, что $p \cdot e_{ni} = \sum_m p_{mi} e_{nm}$. В этом подпространстве, в котором все собственные векторы имеют собственное значение E_n , мы можем теперь найти главные оси, т. е. собственные векторы оператора p и, таким образом, найти состояния, в которых и p и $\mathfrak{E}$ одновременно измеримы.

Очевидным, но важным следствием является то, что если два оператора не коммутируют, то соответствующие величины не могут быть одновременно измеримыми.

Важным примером операторов, не все из которых коммутируют, являются операторы, представляющие положение (x, y, z) и соответствующие составляющие импульса (p_x, p_y, p_z); для них

$$\begin{aligned} x y &= y x \text{ и т. д.,} & p_x x - x p_x &= \hbar/i, \\ p_x p_y &= p_y p_x \text{ и т. д.,} & p_x y &= y p_x \text{ и т. д.}^1) \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка h , деленная на 2π . Эти соотношения являются основными уравнениями квантовой теории. (См. далее гл. 2.)

Направляющие косинусы и вероятности. Что можно сказать о состоянии e , если этот вектор является не собственным вектором оператора энергии $\mathfrak{E}$, а линейной комбинацией собственных векторов e_n ? Используя аналогию с абстрактным пространством связанных осцилляторов, будем рассматривать квадрат косинуса угла между вектором состояния e и собственным вектором e_n как долю e , находящуюся в «состоянии e_n ». Чтобы это выразить более физическим языком, можно сказать, что если измеряется энергия ряда идентичных систем, находящихся в состоянии e , то доля числа измерений, дающих энергию E_n , будет равна квадрату косинуса угла между e и e_n в абстрактном векторном пространстве системы. Для многих операторов в квантовой механике этот косинус является комплексным числом (что свидетельствует о возможности интерференции между собственными векторами с произвольными фазами). В таком случае употребляется квадрат модуля косинуса. Изменения, кото-

¹⁾ Здесь и далее при записи произведения операторов, а также оператора и вектора иногда пропускается точка. — *Прим. ред.*

рые надо внести в математический аппарат абстрактного векторного пространства в связи с введением комплексных косинусов, будут рассмотрены ниже.

Вероятности и неопределенности. Применительно к одному измерению мы можем истолковать квадрат модуля косинуса как вероятность того, что состояние e будет иметь энергию E_n . Среднее значение энергии для состояния e будет тогда равно $\sum_n E_n (e_n \cdot e)^2$ или $E_{cp} = (e \mathfrak{E} e)$. Эта формула правильна только для случая вещественных косинусов; соответствующее обобщение на комплексные косинусы будет дано ниже.

Это позволяет нам рассмотреть результаты измерений двух величин, которые не являются одновременно измеримыми. Допустим, например, что $e(x)$ — вектор состояния, для которого координата x известна точно. Какова тогда вероятность того, что эта система будет иметь импульс p_x , если собственный вектор этого импульса равен $f(p_x)$? Наш формализм дает на это следующий ответ: $|e(x) \cdot f(p_x)|^2$. Среднее значение импульса равно $e p_x$. Можно также выразить среднеквадратическое отклонение измерения p_x от его среднего

$$(\Delta p_x)_{cp}^2 = e (p_x - p_x)^2 e.$$

Только когда e является собственным вектором для p_x , величина p_x для состояния e будет точно известна, и тогда мы будем иметь $\Delta p_x = 0$. Величина Δp_x называется *неопределенностью* в измерении p_x .

Комплексное векторное пространство. Мы должны теперь обобщить понятия векторного пространства так, чтобы иметь возможность рассматривать комплексные косинусы. В этом случае длина вектора не может уже определяться суммой квадратов его составляющих по осям координат, так как эти квадраты могут оказаться неположительными, что противоречит нашим обычным представлениям о длине. Ясно, что единственным путем для получения положительных количеств в определении длины является образование суммы квадратов *модулей* составляющих. Простой способ достигнуть этого в рамках нашего формализма состоит в введении второго пространства того же числа измерений, «комплексно-сопряженного» первому. Пусть единичные векторы первого пространства суть $e_1, e_2, \dots$, тогда соответствующие единичные векторы в комплексно-сопряженном пространстве обозначим через $e_1^*, e_2^*, \dots$. Каждому вектору $e = \sum_i A_i e_i$ с составляющими A_i в первом пространстве сопоставляется в комплексно-сопряженном пространстве вектор $e^* = \sum_i e_i^* \bar{A}_i$ с составляющими $\bar{A}_i$ (A_i и $\bar{A}_i$ — комплексно-сопряженные числа). Скалярное произведение (операцию, существенную для определения длины) мы теперь определим следующим образом:

$$e_i^* \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Скалярное произведение e_i и e_j не будет определено, да оно и не нужно. Теперь ясно, что длина вектора e должна быть в данном случае связана с

$$e^* \cdot e = \sum_i |A_i|^2 \geq 0,$$

величиной заведомо неотрицательной. «Длина» e , обозначаемая $|e|$, определяется как $\sqrt{e^* \cdot e}$.

Из этих определений вытекает ряд важных следствий. Из них, например, следует, что если $e^* \cdot e = 0$, то $|e| = 0$. Легко проверить, что если e и f — два произвольных вектора, то

$$e^* \cdot f = \overline{f^* \cdot e}.$$

Векторы в обычном пространстве обладают тем свойством, что их скалярное произведение не больше произведения их длин

$$AB \geq A \cdot B.$$

Это так называемое *неравенство Шварца*¹⁾; в обобщенной форме оно должно также иметь место в абстрактном векторном пространстве, так как оно вытекает из того факта, что квадрат «длины» вектора не может быть меньше нуля, т. е. положителен. Например, если e и f — два вектора а a и b — два комплексных числа, то

$$(\bar{a}e^* - \bar{b}f^*) \cdot (ae - bf) \geq 0.$$

Если положить $a = \sqrt{(f^* \cdot f)(e^* \cdot e)}$ и $b = \sqrt{(e^* \cdot e)(f^* \cdot e)}$, то это неравенство переходит в

$$\sqrt{(e^* \cdot e)(f^* \cdot f)} \geq \sqrt{(f^* \cdot e)(e^* \cdot f)} \quad \text{или} \quad |e| \cdot |f| \geq |f^* \cdot e|, \quad (1.6.33)$$

что и представляет собой обобщенную форму неравенства Шварца. Это неравенство будет ниже использовано при выводе соотношения неопределенности Гейзенберга.

Другим неравенством, также имеющим свой аналог в обычном векторном пространстве, является *неравенство Бесселя*, которое по существу утверждает, что сумма длин двух сторон треугольника никогда не меньше длины третьей стороны

$$|e| + |f| \geq |(e + f)|. \quad (1.6.34)$$

Обобщенные аффиноры. Перейдем теперь к рассмотрению операторов в комплексных векторных пространствах. Рассмотрим сначала линейное преобразование, поворачивающее оси пространства в другую систему ортогональных осей

$$e'_i = \sum_n e_n \gamma_{ni},$$

где e'_i — единичный вектор в направлении i -й оси новой системы координат, а e_n — единичные векторы в исходной системе. Соотношение между e'_i и $(e'_i)^*$ должно быть таким же, как и между любыми двумя сопряженными векторами, так что

$$(e'_i)^* = \sum_n \bar{\gamma}_{ni} e_n^*.$$

Мы можем теперь составить аффинорный оператор, который, действуя на вектор e_i , переводит его в новый вектор e'_i . Этот аффинор имеет вид

$$\mathcal{G} = \sum_{n,i} e_n \gamma_{ni} e_i^*, \quad (1.6.35)$$

так что

$$\mathcal{G}e_i = \sum_n e_n \gamma_{ni} = e'_i.$$

¹⁾ В нашей литературе оно обычно более правильно называется неравенством Коши — Буняковского. — *Прим. ред.*

Структура аффинора показывает, что мы должны векторы без звездочки помещать всегда при умножении *справа* от оператора, а векторы с звездочкой — *слева*. Полезное свойство аффинорного оператора выражается формулой

$$(e^* \mathcal{G}) f = e^* (\mathcal{G} f),$$

так что скобки вообще не нужны, и мы будем, как правило, писать просто $e^* \cdot \mathcal{G} \cdot f$.

Наше обобщение таково, что произведение операторов, как и произведение обычных аффиноров, есть вновь оператор

$$\mathcal{G} \cdot \mathcal{L} = \left(\sum_{n,i} e_n \gamma_{ni} e_i^* \right) \cdot \left(\sum_{j,k} e_j \lambda_{jk} e_k^* \right) = \sum_{n,k} e_n \left(\sum_j \gamma_{ni} \lambda_{jk} \right) e_k^*,$$

так что (n, k) -я составляющая оператора $\mathcal{G} \cdot \mathcal{L}$ равна

$$(\mathcal{G} \mathcal{L})_{nk} = \sum_j \gamma_{nj} \lambda_{jk}.$$

Возвращаясь теперь к оператору вращения $\mathcal{G}$, определенному формулой (1.6.35), мы замечаем, что $e_j^* \cdot \mathcal{G}$ не дает $(e_j^*)^*$. Оператор, вращающий e_i^* , обозначим через $\mathcal{G}^*$ и определим его так, чтобы

$$e_i^* \mathcal{G}^* = (e_i^*)^*.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{G}^*$ связан с оператором $\mathcal{G}$ соотношением

$$(\mathcal{G} \cdot e_i)^* = e_i^* \cdot \mathcal{G}^*.$$

Оператор $\mathcal{G}^*$, связанный с оператором $\mathcal{G}$ таким соотношением, называется *эрмитово-сопряженным* к $\mathcal{G}$. Записывая это соотношение при помощи составляющих, мы находим

$$\sum_n e_n^* \bar{\gamma}_{ni} = \sum_n (\gamma^*)_{in} e_n^*,$$

так что

$$\gamma_{ni} = (\gamma^*)_{in}. \quad (1.6.36)$$

Это равенство означает, что (i, n) -я составляющая эрмитово-сопряженного аффинора $\mathcal{G}^*$ получается образованием комплексно-сопряженного числа к (n, i) -составляющей $\mathcal{G}$. Понятие эрмитовой сопряженности есть обобщение понятия сопряженного аффинора, данного на стр. 61. Эрмитово-сопряженный оператор к произведению двух операторов $\mathcal{G} \cdot \mathcal{L}$ есть $(\mathcal{G} \cdot \mathcal{L})^* = \mathcal{L}^* \cdot \mathcal{G}^*$. Эрмитово-сопряженный оператор к произведению комплексного числа на оператор есть произведение комплексно-сопряженного числа на эрмитово-сопряженный оператор.

Эрмитовы операторы. Самосопряженный оператор (совпадающий со своим эрмитово-сопряженным), т. е. такой, что

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^*, \quad \text{или} \quad \gamma_{nm} = \bar{\gamma}_{mn},$$

называется *эрмитовым оператором*. Все классические симметрические аффинорные операторы являются эрмитовыми, так как их составляющие вещественны. Операторы в квантовой механике, соответствующие измеримым величинам, также должны быть эрмитовы, так как их собственные значения должны быть вещественны (ведь в конечном счете результаты фактических измерений суть вещественные числа). Чтобы это доказать, заметим, что если собственные значения a_n оператора $\mathcal{A}$ вещественны, то $e^* \cdot \mathcal{A} \cdot e$ вещественно для любого e , так как e можно разложить по собственным векторам e_n , что даст для $e^* \cdot \mathcal{A} \cdot e$ ряд с вещественными

членами. Пусть $e = f + bg$; тогда $\bar{b}(g^* \cdot \mathfrak{A} \cdot f) + b(f^* \cdot \mathfrak{A} \cdot g)$ вещественно. Но это возможно только в том случае, когда $g^* \cdot \mathfrak{A} \cdot f$ комплексно сопряжено с $f^* \cdot \mathfrak{A} \cdot g$, т. е. равно $g^* \cdot \mathfrak{A}^* \cdot f$. Следовательно, $g^* \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^*) \cdot f = 0$ для любых f и g , а поэтому $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$.

Оператор поворота $\mathfrak{G}$, определенный формулой (1.6.35), принадлежит к еще более узкому классу. Составляющие γ_{mn} являются направляющими косинусами, так что следует ожидать, что оператор имеет в каком-то смысле «единичную длину». Так как поворот осей координат в векторном пространстве не изменяет величины скалярного произведения, то для произвольных векторов состояния e и f должно быть

$$(e^* \cdot \mathfrak{G}^*) \cdot (\mathfrak{G} \cdot f) = e^* \cdot f.$$

Поэтому $\mathfrak{G}^* \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}$ — идемпоттор $\sum_n e_n e_n^*$. Это показывает, что эрмитово-сопряженный оператор к $\mathfrak{G}$ совпадает с его обратным оператором:

$$\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^{-1}.$$

Такой оператор с «единичной длиной» называется *унитарным оператором*. Оператор поворота, определенный формулой (1.6.35), является унитарным оператором [см. также формулы (1.6.12)].

Большинство операторов в квантовой механике эрмитовы; их собственные значения вещественны, но эффект их приложения к векторам состояний состоит и в повороте и в изменении длины. Кроме того, встречаются и несколько полезных унитарных операторов; их собственные значения не все вещественны, но эффект их приложения к векторам состояний состоит только во вращении без изменения длины.

Примеры унитарных операторов. Важные примеры унитарных операторов встречаются в теории распространения волн, квантовой механике и кинетической теории газов. Например, описание того, как в месте сопряжения двух волноводов (скажем, разного поперечного сечения) отражаются волны, распространяющиеся вдоль них, может быть дано с помощью *аффинора отражения*. Этот оператор переводит в соответствующем абстрактном пространстве собственный вектор падающей волны в собственный вектор отраженной волны. Условие унитарности является по существу требованием консервативности процесса. Равенство $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^{-1}$ сводится к теореме взаимности, т. е. взаимозаменяемости источника и приемника. Мы подробнее остановимся на этом в дальнейших главах.

Унитарный оператор может быть построен из эрмитова оператора $\mathfrak{L}$ следующим образом:

$$\mathfrak{G} = (1 + i\mathfrak{L})/(1 - i\mathfrak{L})^1.$$

Оператор, эрмитово-сопряженный к $\mathfrak{G}$, равен $(1 - i\mathfrak{L})/(1 + i\mathfrak{L})$, так что $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{G}^* = \mathfrak{I}$ и $\mathfrak{G}$ унитарно. Если $\mathfrak{G}$ — аффинор отражения, то формула для $\mathfrak{G}$ дает соотношение, существующее между коэффициентами отражения, составляющими $\mathfrak{G}$, и коэффициентами *импеданса*, составляющими аффинор импеданса $\mathfrak{L}$.

Другим способом получения из эрмитова оператора $\mathfrak{A}$ унитарного оператора $\mathfrak{G}$ является следующий:

$$\mathfrak{G} = e^{i\mathfrak{A}}, \quad (1.6.37)$$

¹⁾ здесь и в некоторых местах далее 1 означает идемпоттор $\mathfrak{I}$. — Прим. ред.

где $e^{i\mathfrak{R}}$ определено степенным рядом $1 + i\mathfrak{R} + \frac{1}{2}(i\mathfrak{R})^2 + \dots$. Для $\mathfrak{G} = (1 + i\mathfrak{Z})/(1 - i\mathfrak{Z})$ мы имеем, например, $\mathfrak{G} = e^{i\mathfrak{R}}$, где $\mathfrak{R} = 2 \operatorname{arctg} \mathfrak{Z}$. В терминах приведенного выше физического примера это последнее преобразование соответствует использованию для описания отраженной волны сдвига фаз при отражении вместо самого коэффициента отражения.

Часто вектор является функцией параметра (в качестве типичного параметра мы возьмем время t), причем вектор вращается при изменении параметра. Унитарный оператор, соответствующий этому вращению, оказывается полезным во многих задачах. Нетрудно вывести его общий вид. Назовем его $\mathfrak{D}(t)$. Тогда по нашему определению

$$\mathfrak{D}(t_1) \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{e}(t_1 + t_0),$$

где t_1 и t_0 — частные значения параметра t . Более того,

$$\mathfrak{D}(t_2) \mathfrak{D}(t_1) \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{e}(t_1 + t_0 + t_2) = \mathfrak{D}(t_1 + t_2) \mathbf{e}(t_0),$$

так что

$$\mathfrak{D}(t_2) \mathfrak{D}(t_1) = \mathfrak{D}(t_1 + t_2).$$

Чтобы это равенство имело место для всех t_2 и t_1 , $\mathfrak{D}$ должно быть показательной функцией t . Так как этот оператор должен быть унитарным, то он должен иметь вид

$$\mathfrak{D} = e^{i\mathfrak{H}t},$$

где $\mathfrak{H}$ — некоторый неизвестный эрмитов оператор.

Чтобы найти уравнение вращательного движения вектора $\mathbf{e}$, мы приложим $\mathfrak{D}$ к $\mathbf{e}(t)$, изменяя t на инфинитезимальное dt . Тогда $\mathfrak{D} = 1 + i\mathfrak{H}dt$, так что

$$(1 + i\mathfrak{H}dt) \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(t + dt), \text{ или } \mathfrak{H}\mathbf{e}(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}. \quad (1.6.38)$$

Оператор $\mathfrak{H}$ находится, конечно, из физических соображений. В квантовой механике, например, если t — время, то $\mathfrak{H}$ пропорционален функции Гамильтона, в которой классические переменные — импульсы и координаты положения заменены соответствующими операторами.

Преобразование операторов. В предыдущем рассмотрении мы имели дело с вращением вектора при изменении параметра, от которого он зависит. Этот эффект изменения параметра может быть получен также вращением «пространства» при фиксированном векторе, т. е. приданием параметрической зависимости всем встречающимся операторам. Другими словами, мы изменяем значение операторов при изменении параметра, оставляя векторы неподвижными. Посмотрим, как это должно быть сделано, чтобы получить картину, эквивалентную той, которую мы имели при вращающихся векторах и фиксированных операторах. Пусть вращение векторов задается унитарным оператором

$$\mathfrak{G}\mathbf{e} = \mathbf{e}', \quad \mathfrak{G}\mathbf{f} = \mathbf{f}' \text{ и т. д.}$$

Соответствующее эквивалентное изменение $\mathfrak{Z}$ на $\mathfrak{Z}'$ можно найти, исходя из требования, чтобы соотношение между $\mathfrak{Z} \cdot \mathbf{e}'$ и $\mathbf{f}'$ (первая картина: $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ изменяются, $\mathfrak{Z}$ не изменяется) было бы такое же, как между $\mathfrak{Z}' \cdot \mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ (вторая картина: $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ не изменяются, $\mathfrak{Z}$ преобразовывается в $\mathfrak{Z}'$). В алгебраической записи

$$\mathbf{f}' \cdot \mathfrak{Z} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{f} \cdot \mathfrak{Z}' \cdot \mathbf{e}.$$

Подставляя сюда соотношение между f' и f и вспоминая, что $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$, мы найдем, что

$$f'^* \cdot \mathcal{L} \cdot e' = f^* \cdot (\mathcal{U}^{-1} \mathcal{L} \mathcal{U}) \cdot e, \text{ или } \mathcal{L}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{L} \mathcal{U}. \quad (1.6.39)$$

Исследуем теперь эффект этого унитарного (или, как его иногда называют, *канонического*) преобразования с точки зрения свойств $\mathcal{L}$. Сначала покажем, например, что собственные значения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ совпадают. Пусть

$$\mathcal{L}' e = L' e.$$

Отсюда

$$(\mathcal{U}^{-1} \mathcal{L} \mathcal{U}) \cdot e = L' e.$$

Умножая обе части на $\mathcal{U}$, получим

$$\mathcal{L} (\mathcal{U} e) = L' (\mathcal{U} e).$$

Это означает, что если e — собственный вектор оператора $\mathcal{L}'$ с собственным значением L' , то $\mathcal{U} \cdot e$ — собственный вектор оператора $\mathcal{L}$ с тем же собственным значением. Это сохранение собственного значения оказывается иногда очень полезным свойством, так как если $\mathcal{L}$ — сложный оператор, то можно попытаться подобрать такое преобразование $\mathcal{U}$, которое дает более простой оператор $\mathcal{L}'$ с собственными значениями, совпадающими с собственными значениями оператора $\mathcal{L}$.

Вследствие соотношения между оператором и его эрмитово-сопряженным оператором мы можем записать

$$(\mathcal{U}^{-1} \mathcal{L} \mathcal{U})^* = \mathcal{U}^* \mathcal{L}^* (\mathcal{U}^{-1})^* = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{L}^* \mathcal{U}.$$

Следовательно, эрмитов оператор остается эрмитовым и после унитарного преобразования.

Унитарное преобразование не изменяет соотношений между операторами. Например, если

$$\mathcal{L} \mathcal{M} = \mathcal{N},$$

то

$$\mathcal{U}^{-1} \mathcal{L} \mathcal{U} \mathcal{U}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{N} \mathcal{U}, \text{ или } \mathcal{L}' \mathcal{M}' = \mathcal{N}'.$$

Два унитарных преобразования, примененные одно за другим, соответствуют преобразованию, которое также является унитарным. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — унитарные операторы, то

$$(\mathcal{F} \mathcal{G})^* \mathcal{F} \mathcal{G} = (\mathcal{G}^* \mathcal{F}^*) \mathcal{F} \mathcal{G} = \mathcal{I},$$

что и доказывает наше утверждение.

Мы можем, наконец, рассмотреть, что произойдет с оператором $\mathcal{L}$ после преобразования унитарным оператором $\mathcal{D}(t) = e^{i\mathcal{H}t}$. Это позволит нам вычислить изменение оператора, соответствующее изменению параметра t . Преобразованный оператор

$$e^{-i\mathcal{H}t} \mathcal{L} e^{i\mathcal{H}t} = \mathcal{L}'.$$

Удобно, очевидно, ввести вместо $\mathcal{L}'$ обозначение $\mathcal{L}(t)$, полагая $\mathcal{L} = \mathcal{L}(0)$, так что

$$\mathcal{L}(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \cdot \mathcal{L}(0) \cdot e^{i\mathcal{H}t}.$$

Скорость изменения $\mathcal{L}$ относительно t может быть получена из приращения

$$\mathcal{L}(t + dt) - \mathcal{L}(t) = e^{-i\mathcal{H} dt} \cdot \mathcal{L}(t) \cdot e^{i\mathcal{H} dt} - \mathcal{L}(t),$$

так что

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{L} \quad [\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(t)]. \quad (1.6.40)$$

Оператор $\mathfrak{H}$ зависит, конечно, от конкретной физической задачи. Например, во многих вопросах квантовой механики $\mathfrak{H}$ является оператором Гамильтона, а t — время; получающееся уравнение называется *уравнением движения Гейзенберга*. Уравнение (1.6.40) имеет широкие приложения; для оператора $\mathfrak{H}$, связанного с параметром вращения t векторов состояния соотношением (1.6.38), производная любого другого оператора $\mathfrak{L}$, связанного с той же системой, пропорциональна коммутатору $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{L} - \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H}$.

Операторы квантовой механики. Применим теперь некоторые из этих результатов к операторам, встречающимся в квантовой механике. Вспомним, что среднее результатов измерений некоторой величины (энергии, импульса и т. д.), представленной оператором $\mathfrak{p}$, в системе, находящейся в состоянии, изображаемом вектором $\mathbf{e}$, равно $p_{\text{ср.}} = (\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{p} \cdot \mathbf{e})$. Отметим также, что система, находящаяся в состоянии, представляемом вектором $\mathbf{e}$ (коротко, в состоянии $\mathbf{e}$), с вероятностью, равной квадрату модуля косинуса угла $|\langle \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}' \rangle|^2$, оказывается также в состоянии $\mathbf{e}'$.

В силу последнего пункта это утверждение можно сформулировать и в терминах унитарных операторов. Допустим, что мы найдем унитарный оператор $\mathfrak{g}$, переводящий собственный вектор $\mathbf{e}(a_n)$ оператора $\mathfrak{A}$ с собственным значением a_n в собственный вектор $\mathbf{e}'(b_m)$ оператора $\mathfrak{B}$ с собственным значением b_m

$$\mathfrak{g}(a, b) \mathbf{e}(a_n) = \mathbf{e}'(b_m).$$

Применяя теперь формулу (1.6.35), мы видим, что *вероятность того, что измерение $\mathfrak{B}$ даст значение b_m , если $\mathfrak{A}$ имеет значение a_n , равна*

$$|\mathbf{e}^*(a_n) \cdot \mathbf{e}'(b_m)|^2 = |\mathbf{e}^*(a_n) \mathfrak{g}(a, b) \mathbf{e}(a_n)|^2 = |\gamma_{nn}(a, b)|^2. \quad (1.6.41)$$

Здесь можно использовать неравенство Шварца (1.6.33) для установления связи между квантовыми уравнениями (1.6.32) и соотношением неопределенности Гейзенберга. Мы уже показали, что если два оператора не перестановочны, то они не могут быть одновременно измеримыми; если один из них измерен точно, то другой не может быть точно известен. С физической точки зрения что-то, присущее измерению одного, уничтожает наше одновременное точное знание другого. С математической точки зрения существует взаимность между их неопределенностями. Как уже указывалось, неопределенность ΔA в измерении оператора $\mathfrak{A}$ определена формулой

$$(\Delta A)^2 = \mathbf{e}^* \cdot (\mathfrak{A} - a)^2 \cdot \mathbf{e}, \quad a = \mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}$$

(для состояния $\mathbf{e}$).

Чтобы применить эти общие формулы к квантовым соотношениям (1.6.32), определим операторы

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \mathfrak{p}_x - p_x, & p_x &= \mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{p}_x \cdot \mathbf{e}, \\ \Delta x &= \mathfrak{x} - x, & x &= \mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{x} \cdot \mathbf{e}, \end{aligned}$$

так что $\sqrt{\mathbf{e}^* \cdot (\Delta x)^2 \cdot \mathbf{e}}$ есть неопределенность в измерении x в состоянии $\mathbf{e}$. По формулам (1.6.32) мы можем теперь показать, что

$$\Delta p_x \cdot \Delta x - \Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar/i.$$

Взяв среднее значение этого выражения для состояния e , получим

$$(\Delta p_x \cdot e)^* \cdot (\Delta x \cdot e) - (\Delta x \cdot e)^* (\Delta p_x \cdot e) = \hbar/i.$$

Левая часть этого равенства равна удвоенной мнимой части $(\Delta p_x \cdot e)^* \cdot (\Delta x \cdot e)$, так что мы можем заключить, что

$$|(\Delta p_x \cdot e)^* \cdot (\Delta x \cdot e)| \geq \hbar/2.$$

Но по неравенству Шварца (1.6.33) произведение длин векторов никогда не меньше модуля их скалярного произведения. Таким образом, мы окончательно находим, что

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \geq \hbar/2.$$

Это неравенство и является знаменитым соотношением неопределенности Гейзенберга. Оно показывает, что одновременное точное измерение какой-либо координаты и соответствующей составляющей импульса невозможно и что если предпринимаются одновременные измерения, то произведение соответствующих неопределенностей не может быть меньше $\hbar/2$.

Спиновые операторы. В предыдущем разделе были высказаны утверждения, имеющие весьма общий характер, и теперь для уяснения некоторых понятий необходимо обратиться к примеру. Для последующего изложения полезен пример спина электрона. Эксперимент показывает, что для составляющей магнитного момента электрона по каждому заданному направлению существуют только два допустимых значения. Поэтому следует ожидать, что подобным же образом будет ограничено и число допустимых значений для собственного момента количества движения электрона. Момент количества движения частицы относительно начала координат выражается через ее положение относительно начала координат и ее импульс p следующим образом:

$$\mathfrak{M}_x = \eta p_z - \zeta p_y, \quad \mathfrak{M}_y = \zeta p_x - \eta p_z, \quad \mathfrak{M}_z = \eta p_y - \zeta p_x.$$

Прежде всего мы, используя квантовые уравнения (1.6.32), вычислим коммутатор для компонент $\mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x \mathfrak{M}_y - \mathfrak{M}_y \mathfrak{M}_x &= (p_z \zeta - \zeta p_z)(\eta p_y - \eta p_x) = i\hbar \mathfrak{M}_z, \\ \mathfrak{M}_y \mathfrak{M}_z - \mathfrak{M}_z \mathfrak{M}_y &= i\hbar \mathfrak{M}_x, \quad \mathfrak{M}_z \mathfrak{M}_x - \mathfrak{M}_x \mathfrak{M}_z = i\hbar \mathfrak{M}_y. \end{aligned} \quad (1.6.42)$$

Эти уравнения показывают, что точно знать все три компоненты спина электрона мы не можем; в самом деле, если мы точно знаем значение $\mathfrak{M}_z$, то мы не можем знать значений $\mathfrak{M}_x$ и $\mathfrak{M}_y$.

Используя эти уравнения попарно, мы можем показать, что

$$\mathfrak{M}_z(\mathfrak{M}_x \pm i\mathfrak{M}_y) - (\mathfrak{M}_x \pm i\mathfrak{M}_y)\mathfrak{M}_z = \pm \hbar(\mathfrak{M}_x \pm i\mathfrak{M}_y)$$

или

$$\mathfrak{M}_z(\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y) = (\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)(\mathfrak{M}_z + \hbar)$$

и

$$\mathfrak{M}_z(\mathfrak{M}_x - i\mathfrak{M}_y) = (\mathfrak{M}_x - i\mathfrak{M}_y)(\mathfrak{M}_z - \hbar).$$

(1.6.43)

Пусть известно, что значением $\mathfrak{M}_z$ является $m\hbar$; этому соответствует вектор состояния a_m (т. е. a_m служит собственным вектором $\mathfrak{M}_z$ соответствующим собственному значению $m\hbar$). Отправляясь от этого вектора состояния a_m , мы видим, что вектор $(\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)a_m$ является собственным вектором для $\mathfrak{M}_z$, соответствующим собственному значению $(m+1)\hbar$, если только $(\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)a_m$ отличен от нуля, и что $(\mathfrak{M}_x - i\mathfrak{M}_y)a_m$ является

собственным вектором для $\mathfrak{M}_z$, соответствующим собственному значению $(m-1)\hbar$, если только $(\mathfrak{M}_x - i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m$ отличен от нуля, так как из уравнений (1.6.43) имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_z(\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m &= (\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)[(\mathfrak{M}_z + \hbar)\mathbf{a}_m] = \\ &= (m+1)\hbar[(\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m] \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

В частном случае спина электрона мы для обозначения момента количества движения будем пользоваться буквой $\mathfrak{S}$, вместо буквы $\mathfrak{M}$. Для того чтобы m имело только два допустимых значения, отличающихся друг от друга на единицу (как того требуют записанные выше уравнения), и для того, чтобы эти значения были симметричными относительно направления оси z , допустимыми значениями $\mathfrak{S}_z$ должны служить $+\hbar/2$ (с собственным вектором $\mathbf{a}_+$) и $-\hbar/2$ (с собственным вектором $\mathbf{a}_-$) и должны удовлетворяться соотношения

$$(\mathfrak{S}_x + i\mathfrak{S}_y)\mathbf{a}_+ = 0 \text{ и } (\mathfrak{S}_x - i\mathfrak{S}_y)\mathbf{a}_- = 0.$$

Следовательно, спиновые операторы действуют на эти два собственных вектора, а также умножаются друг на друга по следующим правилам:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_x\mathbf{a}_+ &= (\hbar/2)\mathbf{a}_-, \quad \mathfrak{S}_y\mathbf{a}_+ = (i\hbar/2)\mathbf{a}_-, \quad \mathfrak{S}_z\mathbf{a}_+ = (\hbar/2)\mathbf{a}_+, \\ \mathfrak{S}_x\mathbf{a}_- &= (\hbar/2)\mathbf{a}_+, \quad \mathfrak{S}_y\mathbf{a}_- = -(i\hbar/2)\mathbf{a}_+, \quad \mathfrak{S}_z\mathbf{a}_- = -(\hbar/2)\mathbf{a}_-, \\ \mathfrak{S}_x\mathfrak{S}_y &= (i\hbar/2)\mathfrak{S}_z = -\mathfrak{S}_y\mathfrak{S}_x, \quad \mathfrak{S}_y\mathfrak{S}_z = (i\hbar/2)\mathfrak{S}_x = -\mathfrak{S}_z\mathfrak{S}_y, \\ \mathfrak{S}_z\mathfrak{S}_x &= (i\hbar/2)\mathfrak{S}_y = -\mathfrak{S}_x\mathfrak{S}_z, \quad (\mathfrak{S}_x)^2 = (\mathfrak{S}_y)^2 = (\mathfrak{S}_z)^2 = (\hbar/2)^2.\end{aligned}\tag{1.6.44}$$

Здесь мы имеем довольно простое обобщение понятия оператора. «Спиновое пространство» является двумерным пространством, одно из направлений которого соответствует тому состоянию, при котором z -составляющая спина наверняка равна $\hbar/2$, а перпендикулярное направление соответствует тому состоянию, при котором $\mathfrak{S}_z$ наверняка равняется $-\hbar/2$. (Теперь делается очевидным, что это пространство состояний является удобной математической фикцией и не имеет ничего общего с «реальным» пространством.) Единичный вектор состояния, имеющий промежуточное направление, соответствует такому состоянию, при котором $\mathfrak{S}_z$ иногда бывает положительной величиной и иногда отрицательной, а относительная частота двух этих исходов зависит от квадрата косинуса угла между этим единичным вектором и двумя осями координат для $\mathfrak{S}_z$.

Оператор $2\mathfrak{S}_x/\hbar$ отражает каждый вектор состояния относительно прямой, образующей с осями угол в 45° , т. е. меняет ролями положительные и отрицательные составляющие. Поэтому собственными векторами для $\mathfrak{S}_x$ должны быть векторы $(1/\sqrt{2})(\mathbf{a}_+ \pm \mathbf{a}_-)$, соответствующие повороту осей координат в спиновом пространстве на 45° при повороте направления квантования в действительном пространстве на 90° (соответствующие, например, изменению направления магнитного поля, при котором спин электрона, ориентированный по оси z , станет ориентированным по оси x). Поэтому, если мы знаем, что $\mathfrak{S}_z$ равно $\hbar/2$, то значения $\hbar/2$ и $-\hbar/2$ для $\mathfrak{S}_x$ являются равновероятными.

Далее, два собственных вектора для $\mathfrak{S}_y$ суть $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_+ \pm i\mathbf{a}_-)$ и соответствуют мнимому повороту в спиновом пространстве (напомним, что квадрат длины комплексного вектора такого вида равен скалярному произведению комплексно-сопряженного вектора на данный).

Кватернионы. С абстрактной точки зрения операторы

$$i = 2\mathfrak{S}_x/i\hbar, \quad j = 2\mathfrak{S}_y/i\hbar, \quad k = 2\mathfrak{S}_z/i\hbar$$

совместно с единичным оператором $\mathfrak{I}a = a$ и нулевым оператором оказываются близкими по формальным свойствам к аффинорным операторам. Они действуют на вектор (в данном случае на вектор в двумерном спинорном пространстве) и в результате получается новый вектор. Эти операторы можно складывать и перемножать, причем получаются операторы того же класса. Таблица умножения для этих новых операторов имеет вид

$$i^2 = j^2 = \mathfrak{k}^2 = -1; \quad ij = \mathfrak{k} = -ji; \quad j\mathfrak{k} = i = -\mathfrak{k}j; \quad \mathfrak{k}i = j = -i\mathfrak{k}. \quad (1.6.45)$$

Довольно любопытно, что операторы с точно такими же свойствами изучил Гамильтон, пытаясь обобщить понятие комплексного числа, задолго до того, как стала развиваться квантовая механика. Как говорилось на стр. 78, величину $i = \sqrt{-1}$ можно сопоставить операции поворота на 90° в комплексной плоскости. Для этого простого оператора таблица умножения ограничивается равенством $i^2 = -1$, где 1 есть единичный оператор. Каждой точке (x, y) на комплексной плоскости соответствует комплексное число $z = x + iy$, причем квадрат расстояния до начала координат равен $|z|^2 = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Для того чтобы получить дальнейшее формальное обобщение, следует использовать три величины i, j и $\mathfrak{k}$, определенные в уравнении (1.6.45), для образования кватерниона (см. стр. 78)

$$p = a + bi + cj + d\mathfrak{k}.$$

Квадрат длины здесь получается умножением p на его сопряженное

$$p^* = a - bi - cj - d\mathfrak{k}; \quad |p|^2 = pp^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Поэтому единственным кватернионом с нулевой длиной является тот, у которого a, b, c и d одновременно равны нулю. Добавим, что кватернион, обратный данному, легко находится

$$1/p = p^*/|p|^2.$$

Кватернион можно соотнести повороту вокруг некоторой оси в трехмерном пространстве; направляющие косинусы этой оси должны быть пропорциональны постоянным b, c и d , а угол поворота определяется при помощи отношения a^2 к $b^2 + c^2 + d^2$. Поскольку эти величины представляют теперь главным образом исторический интерес, то к сказанному о них на стр. 78 и последующих нужно добавить очень немного. Однако спинорные операторы тесно связаны с этими величинами.

Операторы вращения. Унитарные операторы того типа, который определяется уравнением (1.6.37), весьма тесно связаны с общими операторами момента количества движения (а именно, пропорциональны им). Изучение этих операторов даст нам возможность найти новые применения методов, развитых в разделе, посвященном абстрактным пространствам, и в тоже время поможет дальнейшему уяснению свойств моментов количества движения в квантовой механике.

Предположим, что вектор e из абстрактного пространства зависит от ориентации вектора g в обычном пространстве, как от параметра. Если мы теперь повернем g вокруг оси x на угол θ_x , то e должен будет совершить поворот в абстрактном пространстве. Оператор, который нужно применить к e , для того чтобы получить этот новый вектор, задается уравнением (1.6.37). В данном случае мы пишем

$$\mathfrak{D}_x = e^{i(\mathfrak{M}_x/\hbar)\theta_x},$$

причем здесь $\mathfrak{M}_x$ является оператором. Аналогично можно определить операторы $\mathfrak{D}_y$ и $\mathfrak{D}_z$ через величины θ_y и θ_z . В большинстве случаев имеем $\mathfrak{D}_x \mathfrak{D}_y \neq \mathfrak{D}_y \mathfrak{D}_x$, так как вращение вектора $\mathbf{r}$ вокруг оси x не коммутирует с вращением этого вектора вокруг оси y .

Тем не менее легко видеть, что для бесконечно малого вращения на величины $(d\theta)_x$, $(d\theta)_y$, $(d\theta)_z$ эти повороты коммутируют и соответствующий оператор в абстрактном пространстве имеет вид $1 + (i/\hbar) \times (\mathfrak{M}_x d\theta_x + \mathfrak{M}_y d\theta_y + \mathfrak{M}_z d\theta_z)$. Так как действие этого инфинитезимального оператора на вектор $\mathbf{e}$ не может зависеть от ориентации осей x, y, z , то, следовательно, $\mathfrak{M}_x d\theta_x + \mathfrak{M}_y d\theta_y + \mathfrak{M}_z d\theta_z$ должен быть инвариантным относительно вращения. Так как $(d\theta_x, d\theta_y, d\theta_z)$ являются тремя составляющими пространственного вектора, то, следовательно, $(\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z)$ также должны являться тремя составляющими некоторого вектора $\mathfrak{M}$ и должны преобразовываться, например, так, как преобразуются x, y, z в уравнении (1.3.8), ибо тогда этот оператор будет простым скалярным произведением, которое инвариантно относительно вращения.

Так как $\mathfrak{M}$ есть вектор, он должен преобразовываться как вектор.

В частности, если оси координат повернуты вокруг оси z на угол $d\theta_z$, то соотношения между старыми и новыми составляющими имеют вид

$$\mathfrak{M}'_z = \mathfrak{M}_z, \quad \mathfrak{M}'_y = d\theta_z \mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y, \quad \mathfrak{M}'_x = \mathfrak{M}_x - d\theta_z \mathfrak{M}_y. \quad (1.6.46)$$

Однако $\mathfrak{M}_z$ есть оператор, связанный с вращением в векторном пространстве, и он зависит от параметра θ_z , аналогично тому, как оператор $\mathfrak{Q}$ в уравнении (1.6.38) зависит от t . Более точно: этот оператор связан со скоростью изменения вектора состояния $\mathbf{e}$ уравнением

$$\frac{1}{\hbar} \mathfrak{M}_z \mathbf{e} = \frac{1}{i} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta_z}.$$

Поэтому для любого другого оператора, связанного с этой системой, скорость изменения по отношению к θ_z должна задаваться уравнением вида (1.6.40).

Например, скорость изменения оператора $\mathfrak{M}_x$ по отношению к параметру θ_z задается уравнением

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial \theta_z} = \frac{1}{\hbar} (\mathfrak{M}_z \mathfrak{M}_x - \mathfrak{M}_x \mathfrak{M}_z).$$

Но из уравнения (1.6.46) $\partial \mathfrak{M}_x / \partial \theta_z = -\mathfrak{M}_y$, и мы получаем соотношение

$$i\hbar \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z \mathfrak{M}_x - \mathfrak{M}_x \mathfrak{M}_z,$$

идентичное последнему из уравнений (1.6.42) для операторов момента количества движения.

Однако в этом выводе операторный вектор $\mathfrak{M}$ рассматривается в связи с бесконечно малым поворотом осей в обычном пространстве. В результате оказалось, что, поскольку речь идет об абстрактном пространстве, этот оператор совпадает с оператором момента количества движения, определенным равенством (1.6.42). Причиной этого совпадения служит, конечно, тот факт, что измерение момента количества движения системы приводит обычно к повороту системы в пространстве (если только состояние не соответствует собственному вектору оператора $\mathfrak{M}$), точно так же, как измерение импульса $\mathbf{p}$ обычно приводит к изменению положения системы.

В терминах аппарата абстрактного векторного пространства оператор

$$g = e^{i(\mathfrak{M}_z/\hbar)\theta_z}$$

осуществляет необходимое изменение ориентации векторов состояния, соответствующее повороту обычного пространства на угол θ_z вокруг оси z . Так как в силу уравнений (1.6.43) собственными значениями оператора $\mathcal{M}_z$ являются $m_z \hbar$, где m_z — либо целое число, либо полуцелое [в зависимости от того, что подлежит изучению — обычный (орбитальный) момент количества движения или спин], то, действуя на собственный вектор оператора $\mathcal{M}_z$, оператор g не меняет ни величины, ни направления этого вектора

$$e^{i(\mathcal{M}_z/\hbar)\theta_z} e(m_z) = e^{im_z\theta_z} e(m_z).$$

Все эти вопросы квантовой механики и исчисления операторов будут изучены более подробно в следующей главе.

1.7. Преобразование Лоренца, 4-векторы, спиноры

Вплоть до настоящего момента мы изучали векторы и другие величины в трехмерном пространстве, и некоторые из формул и утверждений, полученных нами при рассмотрении аксиальных векторов, ротора вектора и векторного умножения, остаются корректными только для трех измерений. Поскольку в этой книге в большинстве случаев речь идет только о трех пространственных измерениях, такое ограничение допустимо и эти результаты имеют значительную ценность. Однако во многих случаях возникает необходимость в четвертом измерении — времени. В классической механике оно не вносит дополнительных осложнений, так как предполагается, что ни одна из физически возможных операций не может так повернуть ось времени, чтобы совместить ее с одной из пространственных осей или наоборот, и, следовательно, направление времени считается одним и тем же для всех наблюдений. Если бы это предположение оказалось правильным, то единственными реализуемыми преобразованиями были бы преобразования трехмерного пространства, а время являлось бы неким дополнительным понятием и в физике находил бы применение только изучавшийся до сих пор трехмерный анализ.

Собственное время. Однако, как показывается в современной электродинамике и обосновывается в теории относительности, существуют такие физически возможные преобразования, в которых участвует время как измерение; и если относительная скорость двух наблюдателей сравнима со скоростью света, то направления времени для них существенно не параллельны. Это не означает, что время просто является еще одним пространственным измерением, так как в формулах оно отличается от трех пространственных измерений мнимым множителем $i = \sqrt{-1}$. Оказывается, что если некоторый объект в пространстве передвигается на величины dx , dy , dz за время dt относительно наблюдателя A , то время, измеряемое наблюдателем B , движущимся вместе с объектом, будет равно $d\tau_B$, где

$$(d\tau_B)^2 = dt^2 - \left(\frac{1}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2); \quad (1.7.1)$$

здесь c — скорость света, а $d\tau_B$ называется *собственным временем* наблюдателя B ($dt = d\tau_A$ есть, очевидно, собственное время наблюдателя A). До тех пор, пока скорости dx/dt и прочие малы по сравнению со скоростью c , значения собственных времен $d\tau_A$ и $d\tau_B$ мало отличаются

друг от друга, но если относительная скорость приблизительно равна c , различие этих промежутков времени может оказаться значительным.

Уравнение (1.7.1) аналогично трехмерному уравнению для полного дифференциала расстояния вдоль линии $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, и аналогия делается более наглядной, если записать уравнение (1.7.1) в виде

$$(icd\tau_B)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (icdt)^2.$$

Траектория, по которой движется объект в пространстве-времени, называется его *мировой линией*, а расстояние вдоль нее измеряет собственное время объекта. Это уравнение показывает, что собственные времена двух наблюдателей, движущихся один относительно другого, связаны *мнимым поворотом*, а величина поворота зависит от относительной скорости этих наблюдателей.

Преобразование Лоренца. Сначала, чтобы сделать изложение возможно более простым, предположим, что относительная скорость двух наблюдателей параллельна оси x , в силу чего связанные с ними оси y и z остаются параллельными. Мы предположим также, что их относительная скорость u постоянна, так что угол между их мировыми линиями все время постоянен и преобразование от одной пространственно-временной системы к другой является простым (мнимым) поворотом. Рассмотрение относительных ускорений наблюдателей привело бы нас к сложным вопросам общей теории относительности, включение которых в данную книгу не является необходимым.

Преобразование, соответствующее повороту в плоскости (x, ict) на мнимый угол $i\alpha$, имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch} \alpha + ct' \operatorname{sh} \alpha, \\ y &= y', \quad z = z', \\ ct &= x' \operatorname{sh} \alpha + ct' \operatorname{ch} \alpha, \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

где (x, y, z, t) — пространственно-временные координаты, связанные с наблюдателем A , а (x', y', z', t') — соответствующие координаты, связанные с наблюдателем B , движущимся с относительной скоростью u , параллельной оси x . Для того чтобы ось времени для B двигалась относительно A со скоростью u (или наоборот), мы должны иметь

$$u = c \operatorname{th} \alpha, \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \quad \operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

Следовательно, мы можем записать преобразование в более привычной форме

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \\ y &= y', \quad z = z', \\ t &= \frac{(ux'/c^2) + t'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Между прочим, это преобразование показывает, что если наблюдатель B движется относительно наблюдателя A со скоростью $u = c \operatorname{th} \alpha$, а наблюдатель C движется относительно B со скоростью $v = c \operatorname{th} \beta$ (имеющей то же направление, что и u), то C имеет относительно A скорость, равную

$$c \operatorname{th} (\alpha + \beta) = (u + v) / [1 + (uv/c^2)].$$

Эта система уравнений, связывающая пространственно-временные координаты двух наблюдателей, движущихся с постоянной относительной скоростью, называется *преобразованием Лоренца*. Оно является симметричным преобразованием, в котором уравнения, выражающие x', t' через x, t , можно получить из уравнений (1.7.3) взаимной заменой штрихованных и нештрихованных величин и изменением знака u . В этом можно убедиться, выражая x', t' через x и t . Преобразование Лоренца является весьма частным случаем замены координат, так как оно представляет собой простой (мнимый) поворот в пространственно-временной плоскости, но его будет достаточно для большинства разбираемых в этой книге вопросов, связанных с пространством-временем.

Уравнения для общего преобразования Лоренца, соответствующего относительной скорости $u = c \tanh \alpha$, направление которой задается сферическими углами ϑ и φ относительно оси z , имеют вид

$$\begin{aligned} x &= [1 + \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta (\cosh \alpha - 1)] x' + \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \vartheta (\cosh \alpha - 1) y' + \\ &\quad + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta (\cosh \alpha - 1) z' + \cos \varphi \sin \vartheta (\sinh \alpha) ct', \\ y &= \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \vartheta (\cosh \alpha - 1) x' + [1 + \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta (\cosh \alpha - 1)] y' + \\ &\quad + \sin \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta (\cosh \alpha - 1) z' + \sin \varphi \sin \vartheta (\sinh \alpha) ct', \\ z &= \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta (\cosh \alpha - 1) x' + \sin \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta (\cosh \alpha - 1) y' + \\ &\quad + [1 + \cos^2 \vartheta (\cosh \alpha - 1)] z' + \cos \vartheta (\sinh \alpha) ct', \\ ct' &= \cos \varphi \sin \vartheta (\sinh \alpha) x' + \sin \varphi \sin \vartheta (\sinh \alpha) y' + \\ &\quad + \cos \vartheta (\sinh \alpha) z' + (\cosh \alpha) ct'. \end{aligned}$$

Когда $\varphi = 0^\circ$ и $\vartheta = 90^\circ$, эти уравнения сводятся к простому виду, заданному уравнениями (1.7.2).

Для этого преобразования все коэффициенты Ламе h равны единице, так как оно является вращением без растяжения. Очевидно, что здесь коэффициенты Ламе включают четыре измерения

$$(h_n)^2 = \sum_{m=1}^4 \left(\frac{\partial x_m}{\partial x_n} \right)^2, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 = x, y, z, ict.$$

Так как коэффициенты h все равны единице, то нет необходимости различать ковариантные, контравариантные и «истинные» векторные составляющие.

Четырехмерные инварианты. Точно так же, как и в случае трех измерений, весьма полезным для нас будет разыскание тех величин, которые не изменяются при преобразовании Лоренца. Иными словами, значение такой величины, измеренное любым наблюдателем, движущимся с любой постоянной скоростью (меньшей скорости света), будет одним и тем же. Эти величины аналогичны тем скалярным величинам, которые мы изучали выше, и во многих случаях соответствуют измеримым величинам, так как, согласно теории относительности, многие физические величины должны иметь одно и то же значение при измерении их различными наблюдателями, движущимися с различными скоростями. Такие величины называются *лоренц-инвариантными*.

Для движущейся без ускорения частицы пространственно-временная длина данной части ее мировой линии является четырехмерным инвариантом. Если перемещение этой частицы в системе координат, связанной с наблюдателем B , равно x' , а длительность этого перемещения во времени, связанном с тем же наблюдателем, равна t' , то квад-

рат собственной длины мировой линии равен

$$s^2 = (ct')^2 - (x')^2.$$

Для наблюдателя A , согласно уравнению (1.7.3), квадрат собственной длины равен

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 = \frac{1}{1-(u/c)^2} \left[(ct')^2 + 2ux't' + \left(\frac{ux'}{c} \right)^2 - (x')^2 - 2ux't' - (ut')^2 \right] = (ct')^2 - (x')^2,$$

то есть имеет то же значение. Квадрат длины той же мировой линии для наблюдателя, движущегося вместе с этой частицей, должен равняться квадрату его собственного времени, умноженному на c^2 ; это значение также совпадает с предыдущими.

Поэтому в теории относительности ни пространственная длина линии, ни длительность времени не являются инвариантами. Пространственная длина линии для наблюдателя A , движущегося вместе с линией, равна измеренному в один и тот же момент времени, связанного с A , расстоянию $x_2 - x_1$ между точками на двух мировых линиях. Для наблюдателя B , движущегося со скоростью u , пространственная длина той же линии определяется расстоянием между точками на тех же мировых линиях, измеренным в один и тот же момент времени, связанного с B , т. е. для $t'_2 = t'_1$. Согласно уравнениям (1.7.3), мы имеем

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-(u/c)^2}};$$

следовательно, расстояние, измеренное наблюдателем B , движущимся относительно этой линии, равно

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{1-(u/c)^2}$$

и оказывается короче расстояния, измеренного A , так как отличается множителем $\sqrt{1-(u/c)^2}$. Так как видимые размеры объектов изменяются в зависимости от относительной скорости наблюдателя, то и видимая плотность материи также не является инвариантной относительно преобразования Лоренца.

Многие другие величины, являвшиеся скалярами в трех измерениях (т. е. для очень малых относительных скоростей), оказываются не инвариантными в пространстве-времени. Например, масса тела не является четырехмерным инвариантом. Точным инвариантом является некоторая комбинация массы и кинетической энергии тела, соответствующая релятивистской зависимости между массой и энергией. Это будет доказано после того, как мы изучим четырехмерные векторы.

4-векторы. Сказанное до сих пор дает основание предполагать, что, распространяя наши концепции на векторы в четырех измерениях, мы также столкнемся с некоторыми неожиданностями. Как и 3-вектор, 4-вектор должен иметь инвариантную длину, но только теперь этой длиной должна служить собственная длина в пространстве и времени. Две точки (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) и (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) при измерении наблюдателем B определяют 4-вектор

$$F'_1 = x'_2 - x'_1, \dots, F'_4 = c(t'_2 - t'_1).$$

Для наблюдателя A , движущегося относительно B со скоростью u (в направлении x), компонентами этого вектора являются

$$F_1 = \frac{F'_1 + (uF'_4/c)}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, F_2 = F'_2, F_3 = F'_3, F_4 = \frac{(uF'_1/c) + F'_4}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

и, таким образом, для этого преобразования Лоренца направляющие косинусы равны:

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \text{ch } \alpha, & \gamma_{22} &= \gamma_{33} = 1, & \gamma_{44} &= \text{ch } \alpha, & \gamma_{14} &= \gamma_{41} = \text{sh } \alpha, \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \gamma_{24} = \gamma_{42} = \gamma_{34} = \gamma_{43} = 0, \\ \text{th } \alpha &= u/c.\end{aligned}\quad (1.7.4)$$

Это преобразование компонент типично для 4-векторов. Заметим, что «сумма» квадратов четырех компонент $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - F_4^2$ инвариантна, как это и должно быть.

Очень важное значение имеет вектор, являющийся четырехмерным обобщением импульса частицы, движущейся относительно наблюдателя A с постоянной скоростью u в направлении оси x . Для наблюдателя B , движущегося вместе с частицей, масса частицы равна m_0 , а собственное время — τ . Относительно наблюдателя A частица проходит расстояние dx за время dt , где $(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx/c)^2$. Пространственная компонента вектора импульса не может равняться $m_0(dx/dt)$, так как было бы трудно найти соответствующую временную компоненту, чтобы получающийся в результате квадрат длины был инвариантом. С другой стороны, если выбрать пространственную компоненту равной величине $m_0(dx/d\tau)$, которая преобразуется так же, как и dx , т. е.

$$p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau} = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad p_t = m_0 c \frac{dt}{d\tau} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad u = \frac{dx}{dt},$$

где τ является собственным временем рассматриваемой частицы (и, следовательно, наблюдателя B), то квадрат длины p будет равен $p_x^2 - p_t^2 = -(m_0 c)^2$, а эта величина инвариантна.

Для наблюдателя C , движущегося относительно A со скоростью $v = c \text{th } \beta$ в направлении x , вектор импульса преобразуется согласно уравнению (1.7.4)

$$\begin{aligned}p'_x &= p_x \text{ch } \beta + p_t \text{sh } \beta = m_0 c \text{sh } (\alpha + \beta) = m_0 u' / \sqrt{1 - (u'/c)^2}, \\ p'_t &= p_x \text{sh } \beta + p_t \text{ch } \beta = m_0 c \text{ch } (\alpha + \beta) = m_0 c / \sqrt{1 - (u'/c)^2},\end{aligned}$$

где $u = c \text{th } \alpha$ есть скорость частицы относительно A , а $u' = c \text{th } (\alpha + \beta)$ — ее скорость относительно наблюдателя C . Таким образом, определение импульса как 4-вектора согласуется с данным ранее правилом сложения скоростей.

Поэтому 4-вектор, соответствующий импульсу, измеренному наблюдателем A , для частицы, движущейся относительно A со скоростью u , равен

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{m_0 (dx/dt)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, & p_y &= \frac{m_0 (dy/dt)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, & p_z &= \frac{m_0 (dz/dt)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \\ p_t &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, & u^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,\end{aligned}\quad (1.7.5)$$

где x, y, z, t являются координатами частицы для наблюдателя A .

Временная компонента этого импульса пропорциональна полной энергии частицы относительно наблюдателя A ,

$$E = c p_t = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \dots,$$

которая не инвариантна относительно преобразования Лоренца. Это уравнение показывает также, что полная энергия может быть разделена

на энергию покоя и на нерелятивистскую кинетическую энергию только тогда, когда u мала по сравнению с c .

Другим 4-вектором является пространственно-временной градиент $\square \phi$ некоторой скалярной функции ϕ от (x, y, z, t) , где

$$(\square \phi)_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ и т. д., } (\square \phi)_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Так как коэффициенты Ламе все равны единице, а, следовательно, все символы Кристоффеля равны нулю, эти компоненты являются также компонентами четырехмерной ковариантной производной от ϕ . Следовательно, сокращенная производная второго порядка

$$\square^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.7.6)$$

является лоренц-инвариантной. Оператор $\square^2$ называется *даламбертианом*. С формальной точки зрения он аналогичен трехмерному оператору Лапласа ∇^2 . Однако, как мы увидим в дальнейшем, ввиду наличия отрицательного знака перед временным членом решения уравнения Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$ существенно отличаются от решений уравнения $\square^2 \phi = 0$, которое является *волновым уравнением* для волн, движущихся со скоростью света c .

Тензор напряжения-энергии. По аналогии с трехмерным случаем можно построить аффиноры или тензоры для четырех измерений, преобразующиеся при преобразованиях Лоренца по формулам, которые легко определить, обобщая сказанное в предыдущем параграфе. Интересный и полезный пример такого тензора получается при распространении на четырехмерный случай аффинора напряжений для упругой среды, определенного формулами (1.6.28). Каждая из девяти компонент T_{ij} напряжений имеет размерность дина на квадратный сантиметр или грамм, деленный на сантиметр и на квадрат секунды; они преобразуются согласно правилам, имеющим место в трехмерном случае. По аналогии с предыдущим рассмотрением вектора импульса частицы мы должны ожидать, что временная компонента четырехмерного тензора может оказаться пропорциональной плотности энергии заданной среды. Другими словами, эта четвертая компонента должна быть связана с членом ρc^2 , выражающим полную энергию (где ρ — плотность массы для данной среды), который имеет размерность грамм, деленный на сантиметр и на квадрат секунды.

Поэтому мы полагаем, что тензор напряжения-энергии P_{ij} в точке (x, y, z, ct) среды имеет для наблюдателя A , неподвижного относительно помещающейся в (x, y, z, ct) части среды, следующие компоненты:

$$\begin{aligned} P_{11} &= T_{xx} \text{ и т. д., } P_{12} = T_{xy} = P_{21} = T_{yx} \text{ и т. д.,} \\ P_{14} &= P_{24} = P_{34} = P_{41} = P_{42} = P_{43} = 0, \\ P_{44} &= c^2 \rho_0, \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

где ρ_0 — плотность среды в (x, y, z, ct) , как ее измерил бы наблюдатель A .

Если эти величины являются компонентами истинного 4-тензора, то компоненты P , измеренные наблюдателем B , движущимся относительно среды, находящейся в (x, y, z, ct) , со скоростью u в направлениях x , должны определяться общими правилами преобразования

$$\begin{aligned} P'_{mn} &= \sum_{ij} \frac{\partial \xi'_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_j} P_{ij}, \quad \xi'_1 = \xi_1 \cosh \alpha + \xi_4 \sinh \alpha, \\ \xi'_2 &= \xi_2, \quad \xi'_3 = \xi_3, \quad \xi'_4 = \xi_1 \sinh \alpha + \xi_4 \cosh \alpha, \quad c \tanh \alpha = u. \end{aligned}$$

В результате преобразования получим

$$\begin{aligned}
 P'_{11} &= T_{xx} \operatorname{ch}^2 \alpha + \rho_0 c^2 \operatorname{sh}^2 \alpha, & P'_{12} &= P'_{21} = T_{xy} \operatorname{ch} \alpha, \\
 P'_{13} &= P'_{31} = T_{xz} \operatorname{ch} \alpha, & P'_{22} &= T_{yy}, & P'_{33} &= T_{zz}, \\
 P'_{23} &= P'_{32} = T_{yz}, & P'_{14} &= P'_{41} = (T_{xx} + \rho_0 c^2) \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha, \\
 P'_{24} &= P'_{42} = T_{xy} \operatorname{sh} \alpha, & P'_{34} &= P'_{43} = T_{xz} \operatorname{sh} \alpha, \\
 P'_{44} &= T_{xx} \operatorname{sh}^2 \alpha + \rho_0 c^2 \operatorname{ch}^2 \alpha.
 \end{aligned} \tag{1.7.8}$$

Пространственные компоненты (P'_{11} , P'_{22} и т. д.) оказываются компонентами напряжения, какими их измерил бы наблюдатель B в этой среде, если принять во внимание конечную скорость света, а компонента P'_{44} оказывается равной эффективной плотности, измеренной наблюдателем B , умноженной на c^2 . Исследование компоненты P'_{14} показывает, что ее можно рассматривать как величину, пропорциональную плотности параллельного оси x потока импульса среды, как ее измерил бы наблюдатель B . Соответственно компоненты P'_{24} и P'_{34} должны быть пропорциональны потокам импульса в направлениях y и z , как их измерил бы наблюдатель B .

Следовательно, мы приходим к важному и интересному результату, который может быть проверен как дальнейшим анализом, так и экспериментом: относительное движение преобразует напряжение в поток импульса и наоборот. Более того, так как в системе, неподвижной относительно данной среды (наблюдатель A), мы можем проверить, что свернутые тензорные уравнения

$$\sum_n \left(\frac{\partial P_{mn}}{\partial \xi_n} \right) = 0$$

или (в компонентах T)

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = 0 \text{ и т. д., } \quad \frac{\partial}{\partial t} (c\rho_0) = 0$$

являются справедливыми, то эти уравнения должны быть справедливыми также для наблюдателей, движущихся относительно данной среды (или, что то же, для среды, движущейся относительно наблюдателя). Например, если определить вектор импульса M относительно наблюдателя B как вектор с пространственными компонентами

$$\begin{aligned}
 M_x &= (1/c) (\rho_0 c^2 + T_{xx}) \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha = P'_{41}/c, \\
 M_y &= P'_{42}/c, \quad M_z = P'_{43}/c,
 \end{aligned}$$

а плотность относительно наблюдателя B как

$$\rho = \rho_0 \operatorname{ch}^2 \alpha + (T_{xx}/c^2) \operatorname{sh}^2 \alpha = P'_{44}/c^2,$$

то одно из преобразованных уравнений должно иметь вид

$$\sum_n \left(\frac{\partial P'_{4n}}{\partial \xi'_n} \right) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x'} + \frac{\partial M_y}{\partial y'} + \frac{\partial M_z}{\partial z'} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0,$$

где штрихами снабжены те координаты, которые соответствуют наблюдателю B . Очевидно, что это уравнение является уравнением неразрывности для данной среды, связывающим плотность импульса (или поток массы) с изменением плотности массы ρ . Остальные три преобразованных уравнения оказываются уравнениями движения этой среды.

Спиновое пространство и пространство-время. Одним из самых интересных выводов в современной теоретической физике является заключение о том, что двумерное «пространство состояний», связанное со спином электрона, и четырехмерное пространство-время, описывающее движение электрона, находятся в тесной связи. В предыдущем параграфе мы начали обсуждение вопроса о спиновом пространстве, соответствующем двум возможным спиновым состояниям электрона, и показали, что изменение направления спина на 180° в обычном пространстве (опрокидывание спина) соответствует повороту вектора состояния в спиновом пространстве на 90° . В этом есть некоторая аналогия с соотношением между векторами на комплексной плоскости, соответствующими (-1) и $\sqrt{-1}$, и при желании пофантазировать можно рассматривать спиновое пространство как свособразный «квадратный корень» по отношению к обычному пространству. В самом деле, можно показать, что двумерное спиновое пространство является «пространством квадратного корня», причем не для трехмерного пространства, а для четырехмерного пространства-времени. Более определенно мы найдем, что четыре компоненты аффинора в спиновом пространстве могут быть отождествлены с компонентами 4-вектора в пространстве-времени.

Чтобы показать это, мы должны рассматривать компоненты векторов в спиновом пространстве и даже сами единичные векторы как комплексные величины, имеющие комплексно-сопряженные (a и $\bar{a}$ для компонент, являющихся числами, и e и e^* для векторов состояния), так что $a\bar{a}$ и $e \cdot e^*$ являются вещественными положительными числами. Мы начнем с двух взаимно-перпендикулярных векторов состояния e_1 и e_2 (для них комплексно-сопряженными являются e_1^* и e_2^*), представляющих состояния, при одном из которых спин расположен в некотором определенном направлении, а при другом — в противоположном. Для того чтобы два комплексных вектора могли быть названы единичными ортогональными векторами, должны выполняться соотношения

$$e_1 \cdot e_1^* = e_1^* \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2^* = e_2^* \cdot e_2 = 1$$

и

$$e_1 \cdot e_2^* = e_1^* \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1^* = e_2^* \cdot e_1 = 0.$$

Значения комплексных величин $e_1 \cdot e_1$, $e_1 \cdot e_2$, $e_2^* \cdot e_1^*$ и т. д. роли не играют.

Любой лежащий в спиновом пространстве вектор может быть выражен при помощи этих двух векторов:

$$s = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad s^* = \bar{a}_1 e_1^* + \bar{a}_2 e_2^*,$$

и любой аффинор в спиновом пространстве может быть представлен в виде

$$\mathfrak{S} = c_{11} e_1 e_1^* + c_{12} e_1 e_2^* + c_{21} e_2 e_1^* + c_{22} e_2 e_2^*. \quad (1.7.9)$$

Аффинор в спиновом пространстве называется *спинором второго порядка*. Он имеет обычные для аффиноров свойства, переводя вектор состояния в спиновом пространстве в другой вектор состояния

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \cdot s &= (c_{11} a_1 + c_{12} a_2) e_1 + (c_{21} a_1 + c_{22} a_2) e_2, \\ s^* \cdot \mathfrak{S} &= (\bar{a}_1 c_{11} + \bar{a}_2 c_{21}) e_1^* + (\bar{a}_1 c_{12} + \bar{a}_2 c_{22}) e_2^*. \end{aligned}$$

Чтобы придать физический смысл этим определениям, мы должны найти связь между изменением компонент спинора a_i и компонент аффинора c_i , под действием преобразования Лоренца и их же изменением при пово-

роте осей в спиновом пространстве. Например, величины, являющиеся лоренц-инвариантными, должны также оставаться инвариантными при повороте осей в спиновом пространстве. В силу наших предыдущих замечаний мы должны потребовать, чтобы четыре компоненты c_{ij} спинора второго порядка в спиновом пространстве преобразовывались подобно компонентам 4-вектора в обычном пространстве-времени. *Аффинор в спиновом пространстве есть вектор в пространстве-времени*; тем самым достигнута наша цель представить спиновое пространство как «пространство квадратного корня».

Спиноры и 4-векторы. До сих пор мы не разбирали тех специфических правил преобразования для спинового пространства, благодаря которым компоненты c_{ij} спинора второго порядка преобразуются подобно компонентам 4-вектора. Наиболее общее преобразование задается следующим образом:

$$\begin{aligned} e'_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2, & e_1^{*'} &= \bar{\alpha}_{11}e_1^* + \bar{\alpha}_{12}e_2^*, \\ e'_2 &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2, & e_2^{*'} &= \bar{\alpha}_{21}e_1^* + \bar{\alpha}_{22}e_2^*, \\ e_1 &= \alpha_{22}e'_1 - \alpha_{12}e'_2, & e_1^* &= \bar{\alpha}_{22}e_1^{*'} - \bar{\alpha}_{12}e_2^{*'}, \\ e_2 &= -\alpha_{21}e'_1 + \alpha_{11}e'_2, & e_2^* &= -\bar{\alpha}_{21}e_1^{*'} + \bar{\alpha}_{11}e_2^{*'}, \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

где нужно считать

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1, \quad \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21} = 1,$$

для того чтобы масштаб в новых координатах совпадал с масштабом в старых.

Под действием этого преобразования в спиновом пространстве компоненты произвольного спинора подвергаются следующей замене:

$$c_{mn} = \sum_{ij} c'_{ij} \alpha_{im} \bar{\alpha}_{jn}. \quad (1.7.11)$$

Чтобы наиболее надежным путем двигаться дальше, нужно найти функцию от c , инвариантную относительно преобразований α в спиновом пространстве, которую затем можно сделать инвариантной относительно преобразования Лоренца. Используя правила, по которым перемножаются α , мы легко можем показать, что одним из инвариантов является величина $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ (это можно показать подстановкой и перемножением, с учетом того, что $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ и т. д.). Эту величину можно сделать также лоренц-инвариантной, если связать компоненты c с компонентами F_n некоторого 4-вектора таким способом, чтобы

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = c^2 F_4^2 - F_1^2 - F_2^2 - F_3^2,$$

потому что такая комбинация из F , стоящая в правой части этого равенства, инвариантна. Это можно осуществить многими способами, но наиболее прост следующий:

$$\begin{aligned} c_{11} &= cF_4 + F_1, & F_4 &= (1/2c)(c_{11} + c_{22}), \\ c_{22} &= cF_4 - F_1, & F_3 &= (i/2)(c_{12} - c_{21}), \\ c_{12} &= F_2 - iF_3, & F_2 &= (1/2)(c_{12} + c_{21}), \\ c_{21} &= F_2 + iF_3, & F_1 &= (1/2)(c_{11} - c_{22}). \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

Преобразование Лоренца для спиноров. Для наблюдателя B (штрихованные координаты), движущегося со скоростью u в направлении x отно-

сительно данного электрона, находящегося в покое относительно наблюдателя A (нестрихованные координаты), компоненты F преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} cF_4 &= cF'_4 \operatorname{ch} \alpha + F'_1 \operatorname{sh} \alpha, & F_1 &= F'_1 \operatorname{ch} \alpha + cF'_4 \operatorname{sh} \alpha, \\ F_2 &= F'_2, & F_3 &= F'_3, & u &= c \cdot \operatorname{th} \alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, преобразование компонент спинора имеет вид

$$\begin{aligned} c_{11} &= c'_{11} e^\alpha, & c_{12} &= c'_{12}, & c_{21} &= c'_{21}, \\ c_{22} &= c'_{22} e^{-\alpha}, & e^\alpha &= \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}, \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

а преобразование соответствующих направляющих косинусов при повороте единичных векторов в спиновом пространстве имеет вид

$$\alpha_{11} = e^{\alpha/2}, \quad \alpha_{22} = e^{-\alpha/2}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0. \quad (1.7.14)$$

Поэтому любой вектор состояния в спиновом пространстве, имеющий относительно наблюдателя A вид $s = a_1 e_1 + a_2 e_2$, превращается в $s' = a_1 e^{\alpha/2} e'_1 + a_2 e^{-\alpha/2} e'_2$ относительно наблюдателя B , движущегося относительно A со скоростью $u = c \cdot \operatorname{th} \alpha$.

Естественно, что формулы перехода для s и α в случае более общего преобразования Лоренца будут сложнее приведенных здесь, но и они могут быть разработаны теми же методами. Любая пара комплексных величин, удовлетворяющих условиям преобразования для компонент вектора состояния в спиновом пространстве, называется *спинором первого порядка*; четверка величин, удовлетворяющих условиям преобразования, для компонент s , заданных уравнениями (1.7.9) – (1.7.11), называется *спинором второго порядка* и т. д. Уравнения (1.7.12) дают соотношения между компонентами спинора и компонентами 4-вектора для рассмотренного нами простого преобразования Лоренца.

Пространственный поворот спиноров. В качестве следующего примера соотношения «квадратного корня» между компонентами спинора и компонентами вектора мы рассмотрим случай, когда временная координата не меняется, а пространственные координатные оси поворачиваются на соответствующие углы Эйлера, указанные на стр. 38. Под действием этого преобразования временная компонента любого 4-вектора остается неизменной, и потому, согласно уравнению (1.7.12), сумма $c_{11} + c_{22}$ должна остаться неизменной. Выражая $c_{11} + c_{22}$ через компоненты α , мы видим, что для чистого пространственного поворота, когда $c_{11} + c_{22} = c'_{11} + c'_{22}$, мы должны иметь

$$\bar{\alpha}_{1n} \alpha_{1m} + \bar{\alpha}_{2n} \alpha_{2m} = \bar{\alpha}_{n1} \alpha_{m1} + \bar{\alpha}_{n2} \alpha_{m2} = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad n, m = 1, 2.$$

Этот результат не является неожиданным, так как следствием из него будет $e'_n e_n^* = 1$, а мы должны были ожидать, что «длина» вектора состояния при пространственном повороте останется неизменной. Объединяя все условия, содержащие α , мы увидим, что

$$\bar{\alpha}_{11} = \alpha_{22}, \quad \bar{\alpha}_{12} = -\alpha_{21} \text{ и т. д.} \quad (1.7.15)$$

Выпишем выражения для преобразований компонент F при пространственном повороте [модифицируя уравнения (1.3.8) и заменяя F_z на F_1 ,

F_x на F_2 и F_y на F_3]

$$\begin{aligned} F'_2 &= [\cos \Phi \cos \theta \cos \psi - \sin \Phi \sin \psi] F_2 + \\ &\quad + [\sin \Phi \cos \theta \cos \psi + \cos \Phi \sin \psi] F_3 - \sin \theta \cos \psi F_1, \\ F'_3 &= -[\cos \Phi \cos \theta \sin \psi + \sin \Phi \cos \psi] F_2 - \\ &\quad - [\sin \Phi \cos \theta \sin \psi - \cos \Phi \cos \psi] F_3 + \sin \theta \sin \psi F_1, \\ F'_1 &= \sin \theta \cos \Phi F_2 + \sin \theta \sin \Phi F_3 + \cos \theta F_1, \quad F'_4 = F_4 \end{aligned}$$

и подставим эти выражения в уравнение (1.7.12) как для штрихованных, так и для нештрихованных компонент, чтобы получить уравнения преобразования для c

$$c'_{12} = -\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) e^{i\psi} (c_{11} - c_{22}) + \cos^2(\theta/2) e^{i(\psi+\Phi)} c_{12} - \sin^2(\theta/2) e^{i(\psi-\Phi)} c_{21}$$

и т. д. При помощи направляющих косинусов α связь этой компоненты с нештрихованными выражается уравнением

$$c'_{12} = \alpha_{22}\alpha_{21}c_{11} + \alpha_{22}^2c_{12} - \alpha_{21}^2c_{21} - \alpha_{21}\alpha_{22}c_{22}.$$

Здесь мы обратили уравнения (1.7.11) и использовали равенства (1.7.15).

Сравнивая последние два уравнения, мы находим, что направляющие косинусы α для поворота в спиновом пространстве, соответствующего пространственному повороту с углами Эйлера Φ, θ, ψ [см. уравнения (1.3.8) и рис. 1.6], равны

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(\theta/2) e^{-i(\psi+\Phi)/2}, \quad \alpha_{21} = -\sin(\theta/2) e^{i(\psi-\Phi)/2}, \\ \alpha_{12} &= \sin(\theta/2) e^{-i(\psi-\Phi)/2}, \quad \alpha_{22} = \cos(\theta/2) e^{i(\psi+\Phi)/2}, \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

где мы вновь прибегли к равенствам (1.7.15), чтобы распутать эти уравнения. Поэтому при этом повороте пространственной системы координат вектор состояния в спиновом пространстве $s = a_1 e'_1 + a_2 e'_2$ превращается в $s = [a_1 \cos(\theta/2) e^{-i\psi/2} - a_2 \sin(\theta/2) e^{i\psi/2}] e^{-i\Phi/2} e_1 +$

$$+ [-a_1 \sin(\theta/2) e^{-i\psi/2} + a_2 \cos(\theta/2) e^{i\psi/2}] e^{i\Phi/2} e_2.$$

Это уравнение показывает, что углы поворота в спиновом пространстве равны половинам углов поворота в обычном пространстве. Поворот на 180° ($\theta = \pi, \Phi = \psi = 0$) переводит $s = a_1 e'_1 + a_2 e'_2$ в $s = a_2 e_1 - a_1 e_2$, а это есть поворот на 90° в спиновом пространстве.

Обычно представляют интерес преобразования (1.7.14) и (1.7.16). Все другие случаи могут быть разобраны тем же способом при помощи уравнений (1.7.12). Несмотря на то, что мы начали обсуждение этих вопросов, стремясь удовлетворить довольно неопределенному условию, мы развили теорию величины, преобразующейся вполне определенным образом при общем повороте координат (включая поворот Лоренца) и все же не являющейся тензором, в соответствии с ранее проведенными рассуждениями. При первоначальном изучении спиноров этот факт казался совершенно неожиданным.

Спиновые векторы и тензоры. В спиновом пространстве можно найти четверку простых аффиноров, ведущих себя подобно единичным векторам в пространстве-времени:

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= e_1 e_1^* + e_2 e_2^* = \mathfrak{I}, \\ \sigma_1 &= e_1 e_2^* + e_2 e_1^*, \\ \sigma_2 &= i(e_2 e_1^* - e_1 e_2^*), \\ \sigma_3 &= e_1 e_1^* - e_2 e_2^*. \end{aligned} \quad (1.7.17)$$

Эти величины действуют на спинные векторы e следующим образом:

$$\sigma_4 \cdot e_n = e_n, \quad \sigma_1 \cdot e_1 = e_2, \quad \sigma_2 \cdot e_1 = ie_2, \quad \sigma_3 \cdot e_1 = e_1 \quad \text{и т. д.}$$

Сравнение с уравнениями (1.6.44) показывает, что величины $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ равны спинным операторам для электрона, умноженным на $2/\hbar$. Они называются *спинными операторами Паули*. Величина σ_4 есть, очевидно, единичный аффинор. Мы видим также, что $i\sigma_1, i\sigma_2, -i\sigma_3$ в точности совпадают с кватернионными операторами Гамильтона.

Теперь мы можем переписать спинорный аффинор, заданный уравнением (1.7.9), в виде 4-вектора, используя уравнения (1.7.12) и (1.7.17):

$$\mathfrak{S} = cF_4\sigma_4 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3, \quad (1.7.18)$$

где «единичные векторы» σ являются операторами, действующими на векторы состояния в спинном пространстве, а компоненты F представляют собой обычные числа, преобразующиеся подобно компонентам обычного 4-вектора. Итак, мы видим, наконец, каким образом операторы в спинном пространстве могут действовать подобно векторам пространства-времени. Распространение этого рассуждения на преобразование отражения $\mathbf{r}' \rightarrow -\mathbf{r}$ и его согласование со спинным пространством требует, чтобы мы рассматривали e^* и e как независимые величины, так что преобразование одной в другую оказывается возможным. Однако мы не будем углубляться дальше в эти вопросы, скажем только, что вектор σ преобразуется подобно *аксиальному* вектору (см. задачу 1.34).

Можно перейти к образованию спинорных форм, преобразующихся подобно аффинорам в пространстве-времени. Например, спинор четвертого порядка

$$\sum_{\mu, \nu} \sigma_\mu \sigma_\nu F_{\mu\nu} = \sigma_4 (F_{11} + F_{22} + F_{33} + F_{44}) + \sigma_1 (F_{14} + F_{41} + iF_{23} - iF_{32}) + \\ + \sigma_2 (F_{24} + F_{42} + iF_{31} - iF_{13}) + \sigma_3 (F_{34} + F_{43} + iF_{12} - iF_{21})$$

имеет компоненты $F_{\mu\nu}$, которые ведут себя подобно компонентам аффинора в пространстве-времени. Особо важной формой является свернутый тензор, образованный умножением спинорного вектора на его сопряженный

$$(\sigma_4 cF_4 + \sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_2 + \sigma_3 F_3) (\sigma_4 cF_4 - \sigma_1 F_1 - \sigma_2 F_2 - \sigma_3 F_3) = \\ = \sigma_4 (c^2 F_4^2 - F_1^2 - F_2^2 - F_3^2) \quad (1.7.19)$$

и дающий квадрат длины 4-вектора. Это соотношение будет использовано, когда мы перейдем к рассмотрению теории электрона Дирака.

Оператор вращения в спинорной форме. Обращаясь к исследованиям Гамильтона о кватернионах (см. стр. 78), можно прийти к весьма интересному и полезному спинорному оператору, для которого направляющие косинусы α спинных векторов служат компонентами:

$$\mathfrak{R} = \alpha_{11}e_1e_1^* + \alpha_{21}e_1e_2^* + \alpha_{12}e_2e_1^* + \alpha_{22}e_2e_2^* = \\ = \sum_n R_n \sigma_n, \quad R_1 = \frac{1}{2} (\alpha_{12} + \alpha_{21}), \\ R_2 = \frac{1}{2i} (\alpha_{12} - \alpha_{21}), \quad R_3 = \frac{1}{2} (\alpha_{11} - \alpha_{22}), \quad R_4 = \frac{1}{2} (\alpha_{11} + \alpha_{22}). \quad (1.7.20)$$

Согласно уравнениям (1.7.10), α являются направляющими косинусами, связывающими в спинном пространстве штрихованные и нештрихованные единичные векторы e . Если они имеют значения, задаваемые фор-

мулами (1.7.16), то они соответствуют повороту пространственных осей координат на углы Эйлера θ , ψ , Φ . Как мы показали выше, спинорный оператор, имеющий вид $\mathfrak{H}$, преобразуется так же, как вектор, и это подчеркивается тем, что мы записываем его при помощи его компонент R «вдоль» единичных спиновых векторов σ .

Однако вектор $\mathfrak{H}$ (или спинорный оператор, в зависимости от того, какая из точек зрения подчеркивается) имеет ту специфическую особенность, что его компоненты

$$\begin{aligned} R_1 &= i \sin(\theta/2) \sin[(\Phi - \psi)/2], & R_2 &= i \sin(\theta/2) \cos[(\Phi - \psi)/2], \\ R_3 &= i \cos(\theta/2) \sin[(\Phi + \psi)/2], & R_4 &= \cos(\theta/2) \cos[(\Phi + \psi)/2] \end{aligned}$$

сами связаны с частным видом преобразования, определенным углами θ , ψ , Φ . (Это не означает, что вектор $\mathfrak{H}$ не может быть выражен при помощи любых координат, получающихся вращением на любые углы; это означает только, что он особым образом связан с одним частным случаем поворота осей на углы θ , ψ , Φ .)

Можно ожидать, что этот вектор обладает особой симметрией относительно этого поворота, так как если единичные векторы e' связаны с векторами e теми же самыми углами [см. (1.7.10) и (1.7.16)], то тогда оказывается, что выражение для $\mathfrak{H}$, содержащее штрихованные векторы, не отличается от выражения с нештрихованными векторами

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \alpha_{11} e_1 e_1^* + \alpha_{21} e_1 e_2^* + \dots = \\ &= [\alpha_{11} \bar{\alpha}_{22} \bar{\alpha}_{22} - \alpha_{21} \bar{\alpha}_{22} \bar{\alpha}_{21} - \alpha_{12} \bar{\alpha}_{21} \bar{\alpha}_{22} + \alpha_{22} \bar{\alpha}_{21} \bar{\alpha}_{21}] e_1' e_1'^* - \\ &- [\alpha_{11} \bar{\alpha}_{22} \bar{\alpha}_{12} - \alpha_{21} \bar{\alpha}_{22} \bar{\alpha}_{11} - \alpha_{12} \bar{\alpha}_{21} \bar{\alpha}_{12} + \alpha_{22} \bar{\alpha}_{21} \bar{\alpha}_{11}] e_1' e_2'^* + \dots = \\ &= \bar{\alpha}_{22} e_1' e_1'^* - \bar{\alpha}_{12} e_1' e_2'^* + \dots = \alpha_{11} e_1' e_1'^* + \alpha_{21} e_1' e_2'^* + \dots, \end{aligned}$$

как это можно доказать, используя правила перемножения для α .

Однако $\mathfrak{H}$ является также и оператором, действующим на спиновые векторы. В действительности под действием этого оператора каждый спиновый вектор поворачивается именно так, как он повернулся бы при преобразовании $e \rightarrow e'$. Согласно уравнениям (1.7.10), имеем:

$$\mathfrak{H} \cdot e_n = e_n'; \quad \mathfrak{H}^* \cdot e_n^* = e_n'^*, \quad (1.7.21)$$

где

$$\mathfrak{H}^* = \bar{\alpha}_{11} e_1^* e_1 + \bar{\alpha}_{21} e_1^* e_2 + \bar{\alpha}_{12} e_2^* e_1 + \bar{\alpha}_{22} e_2^* e_2.$$

Другой оператор $\mathfrak{H}^{-1}$ осуществляет обратное преобразование $e' \rightarrow e$. Из уравнений (1.7.10) видно, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^{-1} &= \alpha_{22} e_1^* e_1 - \alpha_{21} e_1^* e_2 - \alpha_{12} e_2^* e_1 + \alpha_{11} e_2^* e_2 = \\ &= \alpha_{22} e_1' e_1'^* - \alpha_{21} e_1' e_2'^* - \alpha_{12} e_2' e_1'^* + \alpha_{11} e_2' e_2'^*; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathfrak{H}^{-1} \cdot e_n' = e_n, \quad (\mathfrak{H}^{-1})^* \cdot e_n'^* = e_n^*.$$

Но, так как $\bar{\alpha}_{22} = \alpha_{11}$, $\bar{\alpha}_{12} = -\alpha_{21}$ и т. д., мы можем также показать, что

$$e_n \cdot (\mathfrak{H}^{-1})^* = e_n' \quad \text{и} \quad e_n^* \cdot \mathfrak{H}^{-1} = e_n'^*$$

и что

$$e_n' \cdot \mathfrak{H}^* = e_n \quad \text{и} \quad e_n'^* \cdot \mathfrak{H} = e_n^*, \quad (1.7.22)$$

откуда видна тесная взаимосвязь между оператором $\mathfrak{H}$ и его обратным $\mathfrak{H}^{-1}$.

Особо важным свойством оператора $\mathfrak{R}$ является то, что он не только порождает вращение векторов в спиновом пространстве, но и, кроме того, может вызвать связанное с первым вращение 4-векторов в обычном пространстве. Например, спинор

$$\mathfrak{S} = c_{11}e_1e_1^* + c_{12}e_1e_2^* + c_{21}e_2e_1^* + c_{22}e_2e_2^*$$

(где c имеют любые значения) преобразуется как 4-вектор [см. уравнение (1.7.18)] с компонентами F_n [см. уравнения (1.7.12)]. Вектор, образованный воздействием оператора $\mathfrak{R}$ «справа и слева» на $\mathfrak{S}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R}^{-1} &= c_{11}e'_1e_1'^* + c_{12}e'_1e_2'^* + c_{21}e'_2e_1'^* + c_{22}e'_2e_2'^* = \\ &= F_1\sigma'_1 + F_2\sigma'_2 + F_3\sigma'_3 + F_4\sigma'_4, \end{aligned} \quad (1.7.23)$$

имеет те же компоненты F_n , но теперь они являются компонентами в разложении по штрихованным единичным векторам, повернутым относительно нештрихованных. Поэтому воздействие оператором $\mathfrak{R}$ справа и слева действительно повернуло вектор $\mathfrak{S}$ на величину, задаваемую углами θ , ψ и Φ . В соответствии с соотношением «квадратного корня» между спиновым пространством и пространством-временем мы должны были воздействовать на спиновый вектор оператором $\mathfrak{R}$ один раз, чтобы произвести поворот, но чтобы получить поворот 4-вектора на соответствующую величину, на него надо подействовать дважды.

Заметим, что здесь мы имели дело с поворотами на конечные углы. Если же поворот бесконечно мал, то углы Эйлера θ и $(\Phi + \psi)$ делаются малыми и поворот может быть представлен при помощи бесконечно малого вектора $\Delta\omega$, направление которого дает ось поворота, а длина — угол поворота в радианах. Рассмотрение свойств векторного произведения показывает, что операция перехода от обычного трехмерного вектора A к другому вектору A' при помощи бесконечно малого поворота задается уравнением

$$A' = A + \Delta\omega \times A. \quad (1.7.24)$$

Изучение приведенных на стр. 105 уравнений для поворота, содержащих углы Эйлера, показывает, что если θ и $(\Phi + \psi)$ малы, то

$$(\Delta\omega)_1 \simeq -(\Phi + \psi), \quad (\Delta\omega)_2 \simeq -\theta \sin \psi, \quad (\Delta\omega)_3 \simeq -\theta \cos \psi.$$

Рассмотрение уравнений для компонент $\mathfrak{R}$ приводит к соответствующей системе уравнений

$$\begin{aligned} R_4 &= 1, \quad R_3 = (i/2)(\Phi + \psi), \quad R_1 = -(i/2)\theta \sin \psi, \\ R_2 &= (i/2)\theta \cos \psi, \end{aligned}$$

когда θ и $(\Phi + \psi)$ малы.

Следовательно, для бесконечно малого поворота, представленного вектором $\Delta\omega$, спинорный оператор вращения равен

$$\mathfrak{R} \rightarrow \sigma_4 + (i/2)[(\Delta\omega)_1\sigma_1 + (\Delta\omega)_2\sigma_2 + (\Delta\omega)_3\sigma_3]. \quad (1.7.25)$$

Эти уравнения иногда можно использовать, чтобы проверить, не подчиняются ли компоненты какого-либо неизвестного оператора правилам преобразования 4-векторов.

Задачи к главе 1

1.1. При постоянном ϕ поверхности, заданные уравнением

$$(x^2 + y^2) \cos^2 \phi + z^2 \operatorname{ctg}^2 \phi = a^2, \quad 0 < \phi < \pi,$$

являются эквипотенциальными поверхностями. Выразить ψ через x, y, z ; подсчитать направляющие косинусы нормали к поверхности ψ в точке x, y, z . Показать, что ψ является решением уравнения Лапласа. Каков вид поверхности $\psi = \text{const}$? $\psi = 0$? $\psi = \pi$?

1.2. Уравнение

$$[\sqrt{x^2 + y^2} - \psi]^2 + z^2 = \psi^2 - a^2, \quad a < \psi < \infty,$$

при фиксированном ψ определяет одну из поверхностей, образующих семейство. Каков вид этой поверхности? Каков вид поверхности в предельных случаях $\psi = a$, $\psi = \infty$? Выразить ψ через x, y, z и подсчитать направляющие косинусы нормали к поверхности ψ в точке x, y, z . Является ли ψ решением уравнения Лапласа?

1.3. Компонентами векторного поля являются

$$F_x = 2zx, \quad F_y = 2zy, \quad F_z = a^2 + z^2 - x^2 - y^2.$$

Показать, что, интегрируя уравнения линий тока, можно получить функции тока φ и μ , где

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}{2a\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{cth} \mu.$$

Показать, что существует псевдопотенциал, равный ψ , где

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2az} = \operatorname{ctg} \psi.$$

Показать, что поверхности, на которых соответственно φ , μ , ψ постоянны, являются взаимно-ортогональными.

1.4. Три компоненты векторного поля суть

$$F_x = 3xz, \quad F_y = 3yz, \quad F_z = 2z^2 - x^2 - y^2.$$

Проинтегрировав уравнения линий тока, получить функции тока

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \theta = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

и показать, что псевдопотенциал равен

$$\psi = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Является ли ψ решением уравнения Лапласа?

1.5. Вычислить для силовых полей задач 1.3 и 1.4 поток через сферу радиуса r с центром в начале, а также через две полусферы: одну соответствующую $z < 0$, вторую $-z > 0$ (замыкаемые диском в плоскости $z = 0$). Вычислить поток через те же поверхности для векторного поля

$$F_x = \frac{x}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}, \quad F_y = \frac{y}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}, \\ F_z = \frac{z-a}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}.$$

1.6. Вычислить циркуляцию вдоль лежащей в плоскости xy окружности радиуса r с центром в начале координат для поля

$$F_x = \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad F_y = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2}, \\ F_z = 0.$$

Для поля задачи 1.3 вычислить циркуляцию вдоль окружности, определяемой уравнениями $\varphi = 0$, $\mu = \text{const}$.

1.7. Параболические координаты определяются следующими уравнениями:

$$\lambda = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}, \quad \mu = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z},$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

Описать координатные поверхности (или дать их набросок). Выразить коэффициенты Ламе и направляющие косинусы для этой системы через x, y, z . Выразить x, y, z через λ, μ, φ и отсюда получить коэффициенты Ламе и направляющие косинусы как функции от λ, μ, φ . Выписать выражения для $\text{rot } \mathbf{F}$, $\nabla^2 \psi$. Подсчитать составляющие по λ, μ, φ следующего векторного поля

$$F_x = \frac{x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad F_y = \frac{y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad F_z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

в виде функции от λ, μ, φ . Выразить дивергенцию $\mathbf{F}$ через λ, μ, φ .

1.8. Функции тока φ, μ и псевдопотенциал ψ , данные в задаче 1.3, образуют тороидальную систему координат. Описать эти поверхности (или дать их набросок). Найти коэффициенты Ламе как функции x, y, z , а также как функции μ, ψ, φ . Выписать выражения для $\text{rot } \mathbf{F}$, $\text{div } \mathbf{F}$ и $\nabla^2 U$. Найти выражения составляющих вектора $\mathbf{F}$ из этой же задачи вдоль координатных линий тороидальной системы; вычислить направление его линий тока.

1.9. Семейство поверхностей, которое можно использовать в качестве семейства координатных поверхностей, задается уравнением

$$\ln(x^2 + y^2) - z = \xi$$

при постоянных ξ . Показать, что два семейства, образующих вместе с данным трехмерную систему координат, имеют вид

$$\eta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

т. е. показать, что эти семейства взаимно ортогональны. Эта система координат может быть названа экспоненциальной. Почему? Подсчитать коэффициенты Ламе и направляющие косинусы для преобразования компонент вектора.

1.10. Бисферическая система координат определяется уравнениями

$$x = \frac{a \sin \vartheta \cos \varphi}{\text{ch } \mu - \cos \vartheta}, \quad y = \frac{a \sin \vartheta \sin \varphi}{\text{ch } \mu - \cos \vartheta}, \quad z = \frac{a \text{ sh } \mu}{\text{ch } \mu - \cos \vartheta}.$$

Описать эти поверхности (или дать их наброски) и определить фактические промежутки изменения μ, ϑ, φ . Подсчитать коэффициенты Ламе и направляющие косинусы. Выписать выражения лапласиана и градиента. Показать, что поверхности μ имеют постоянную кривизну, т. е. показать, что величина

$$\frac{1}{h_\vartheta} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial \vartheta} = \frac{1}{h_\varphi} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial \varphi}$$

не зависит от ϑ и φ и что поэтому эти поверхности являются сферами.

1.11. Выписать выражения для компонент производных по направлению $(\mathbf{a}_\vartheta \cdot \nabla) \mathbf{A}$ и $(\mathbf{a}_\varphi \cdot \nabla) \mathbf{B}$ в сферических координатах и в сфероидальных координатах

$$x = a \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \sin \varphi, \\ z = a \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta.$$

1.12. Скалярная функция $\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в ортогональной криволинейной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 может быть превращена в вектор умножением на единичный вектор $\mathbf{a}_1$, нормальный к координатным поверхностям ξ_1 . Другой вектор может быть получен как $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 \phi)$. Показать, что $\mathbf{A}$ касателен к поверхности ξ_1 . Какому уравнению должна удовлетворять ϕ и какие условия должны быть наложены на коэффициенты Ламе, чтобы вектор $\mathbf{A}$ удовлетворял уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0?$$

1.13. Пользуясь тензорной записью, найти выражение для $\nabla \times (u \nabla u)$ в общих ортогональных криволинейных координатах.

1.14. Мы можем определить кривизну координатных поверхностей ξ_n по направлению ξ_m как составляющую по $\mathbf{a}_m$ скорости изменения $\mathbf{a}_n$ по отношению к расстоянию в направлении $\mathbf{a}_m$. Выразить обе кривизны поверхности ξ_n при помощи символов Кристоффеля.

1.15. Вывести выражения для символов Кристоффеля и для ковариантной производной компонент $f_i = h_i F_i$ для бисферических координат, приведенных в задаче 1.10, и для параболических координат, определенных равенствами

$$x = \lambda \mu \cos \varphi, \quad y = \lambda \mu \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2).$$

1.16. Дать явные выражения компонент симметрического аффинора $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla)$ для сфероидальных координат, приведенных в задаче 1.11, и для эллиптических цилиндрических координат, задаваемых равенствами

$$x = a \operatorname{ch} \lambda \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{sh} \lambda \sin \varphi, \quad z = z.$$

Дать также выражения для лапласиана вектора в обеих системах.

1.17. Найти главные оси аффинора деформаций

$$\mathfrak{S} = -\mathbf{i} \left(\frac{1}{2} + \alpha y^2 \right) \mathbf{i} - \mathbf{j} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \alpha y^2 \right) \mathbf{j} + \mathbf{k} \mathbf{k} - \alpha xy (\mathbf{i} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{i})$$

в точке (x, y, z) . Чему равны удлинения вдоль этих осей (главные удлинения)?

1.18. Разбить аффинор

$$\mathfrak{A} = \mathbf{i} \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} \mathbf{j} + \mathbf{k} \mathbf{k} + \sqrt{2\alpha^2 - 4} \mathbf{i} \mathbf{j} + \sqrt{2} \alpha \mathbf{k} \mathbf{j} + \beta (\mathbf{j} \mathbf{k} - \mathbf{k} \mathbf{j})$$

на симметричную и кососимметричную части. Найти вектор вращения для кососимметричного аффинора и главные оси симметричного аффинора. Какой вид будет иметь аффинор после приведения к этим главным осям?

1.19. Написать разложение аффинора

$$\mathfrak{D} = z (\mathbf{i} \mathbf{j} - \mathbf{j} \mathbf{i}) - y \mathbf{k} \mathbf{i} + x \mathbf{k} \mathbf{j}$$

на составляющие в цилиндрических координатах

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z.$$

После этого выделить его симметричную и кососимметричную части и определить вектор вращения для кососимметричной части и главные оси для симметричной.

1.20. Вектор смещения $\mathbf{s}$ можно представить в виде суммы градиента скалярного потенциала φ и вихря векторного потенциала $\mathbf{A}$. Получить в случае общих ортогональных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 выражение аффинора напряжений

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla), \quad \mathbf{s} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

через φ и компоненты $\mathbf{A}$ вдоль ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Выписать явный вид этих выражений для цилиндрических координат r, φ, z и для сферических координат r, ϑ, φ .

1.21. В некоторых случаях, вектор смещения $\mathbf{s}$ для упругой среды может быть представлен выражением $\mathbf{s} = \operatorname{rot} (a_2 \psi)$, где ψ — некоторая функция цилиндрических координат r, φ, z . Показать, что когда $\psi = r^2 f(\varphi, z) + g(r, z)$, то все три диагональных члена аффинора равны нулю. Найти аффинор деформаций и определить главные оси и главные удлинения для случая $\psi = z r^2 \cos \varphi$.

1.22. Показать, что возможные смещения упругой среды, дающие нулевые диагональные члены в тензоре деформаций $\mathbb{S}$, записанном для сферических координат r, ϑ, φ , могут быть представлены в виде суммы двух векторов $\operatorname{rot} (a_\varphi r \sin \vartheta g(\varphi))$ и $\operatorname{rot} a_\vartheta r f(\vartheta)$. Найти аффинор деформаций, главные оси и главные удлинения для двух случаев

$$\mathbf{s} = \operatorname{rot} (a_\varphi r \sin \vartheta \cos \varphi) \text{ и } \mathbf{s} = \operatorname{rot} (a_\vartheta r \sin (2\vartheta)).$$

1.23. Три связанных осциллятора удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \omega^2 y_1 = k^2 y_2, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \omega^2 y_2 = k^2 y_1 + k^2 y_3, \quad \frac{d^2 y_3}{dt^2} + \omega^2 y_3 = k^2 y_2.$$

Выразить эти уравнения при помощи абстрактного векторного пространства и векторных операторов. Найти главные оси оператора и таким образом собственные частоты этой системы.

1.24. Система из $N-1$ связанных осцилляторов имеет следующее уравнение движения в абстрактном векторном представлении:

$$(d^2/dt^2) \mathbf{R} + \omega^2 \mathbf{R} = k^2 \mathbb{U} \cdot \mathbf{R},$$

где $\mathbf{R} = \sum_{n=0}^N y_n(t) \mathbf{e}_n$, с граничными условиями $y_0 = y_N = 0$; здесь оператор $\mathbb{U}$ действует на единичные векторы $\mathbf{e}_n$ (соответствующие амплитуде колебаний y_n для n -го осциллятора) согласно уравнению

$$\mathbb{U} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{n-1} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_{n+1}.$$

Показать, что главные оси этого оператора $\mathbb{U}$ имеют направления

собственных векторов

$$\mathbf{a}_m = C_m \sum_{n=0}^N \sin\left(\frac{\pi nm}{N}\right) \mathbf{e}_n, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N-1,$$

иными словами, что $\mathcal{U} \cdot \mathbf{a}_m = u_m \mathbf{a}_m$. Найти собственные значения u_m и, таким образом, допустимые частоты этой системы. Найти такие значения постоянных C_m , чтобы новые векторы $\mathbf{a}_m$ были единичными векторами. Показать, что векторы $\mathbf{a}_m$ взаимно-ортогональны.

1.25. Доказать неравенство треугольника

$$|\mathbf{e}| + |\mathbf{f}| \geq |\mathbf{e} + \mathbf{f}|.$$

1.26. Эрмитов оператор $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий неравенству $(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{H} \cdot \mathbf{e}) \geq 0$ для всех векторов $\mathbf{e}$, называется *положительно определенным*. Показать, что если $\mathfrak{H}$ — положительно определенный оператор, то

$$|\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{H} \cdot \mathbf{f}| \leq \sqrt{(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{H} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{f}^* \cdot \mathfrak{H} \cdot \mathbf{f})}.$$

1.27. а. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}}) = i [\mathfrak{S}, e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}}]$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}}) = (i)^2 [\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}}]],$$

где

$$[\mathfrak{S}, \mathfrak{X}] = [\mathfrak{S}\mathfrak{X} - \mathfrak{X}\mathfrak{S}] \quad \text{и} \quad [\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, \mathfrak{X}]] = \mathfrak{S}[\mathfrak{S}, \mathfrak{X}] - [\mathfrak{S}, \mathfrak{X}]\mathfrak{S}.$$

б. Из «а» получить разложение

$$e^{i\lambda \mathfrak{S}} \mathfrak{A} e^{-i\lambda \mathfrak{S}} = \mathfrak{A} + i\lambda [\mathfrak{S}, \mathfrak{A}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, \mathfrak{A}]] + \frac{(i\lambda)^3}{3!} [\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, [\mathfrak{S}, \mathfrak{A}]]] + \dots$$

в. Показать, что если $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — два оператора, таких, что $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] = i$, то

$$e^{b\mathfrak{q}} e^{a\mathfrak{p} + b\mathfrak{q}} e^{-b\mathfrak{q}} = e^{-iab} e^{a\mathfrak{p} + b\mathfrak{q}}.$$

1.28. Если $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{f}_n$ — два множества ортогональных векторов (т. е. $\mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{f}_p = 0$), то проекционный оператор $\mathfrak{P}$ на множество $\mathbf{e}_n$ определяется равенствами $\mathfrak{P}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n$, $\mathfrak{P}\mathbf{f}_p = 0$. Показать, что

а. $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}$.

б. $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$.

в. Если $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$ и выбрано множество таких векторов $\mathbf{e}_n$, что $\mathfrak{P}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n$, то $\mathfrak{P}$ есть оператор проектирования на это множество.

г. Если $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ являются операторами проектирования на два различных множества векторов, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ был проекционным оператором, будет $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1 = 0$.

1.29. Четырехмерной системой координат, аналогичных сферическим, является система $(\tau, \alpha, \vartheta, \varphi)$, где

$$\begin{aligned} x_4 (= ict) &= c\tau \operatorname{ch} \alpha, & x &= ict \operatorname{sh} \alpha \cos \vartheta, \\ y &= ict \operatorname{sh} \alpha \sin \vartheta \cos \varphi, & z &= ict \operatorname{sh} \alpha \sin \vartheta \sin \varphi, \end{aligned}$$

а преобразованием Лоренца служит любое преобразование, оставляющее масштаб τ инвариантным. Вычислить коэффициенты Ламе и направля-

ющие косинусы и показать, что уравнение $\square^2 \phi = 0$ преобразуется к виду

$$\frac{1}{c^2 \tau^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{sh}^2 \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c^2 \tau^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau^3 \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \right] = 0.$$

Показать, что решением этого уравнения является $\phi = (1/\tau^3) \operatorname{ch} \alpha$. Найти составляющие по x, y, z, t 4-вектора, являющегося четырехмерным градиентом ϕ . Показать, что это есть истинный 4-вектор.

1.30. Частица с массой покоя m_0 , двигаясь со скоростью v в направлении x , сталкивается с другой частицей, находившейся в состоянии покоя (относительно наблюдателя A) и имевшей ту же массу покоя. Частицы отскакивают друг от друга без изменения суммарной энергии-импульса, причем частица, наносившая удар, отклоняется от оси x на угол θ (относительно того же наблюдателя). Найти 4-векторы энергии-импульса для обеих частиц до и после столкновения относительно наблюдателя A (неподвижного до момента удара относительно частицы, получившей удар) и относительно наблюдателя B , неподвижного относительно центра инерции этой пары. Объяснить получающееся различие.

1.31. Для наблюдателя A , неподвижного относительно некоторой жидкости, эта жидкость находится под однородным изотропным давлением p . Вычислить ее плотность, плотность импульса и давление в жидкости для наблюдателя B , движущегося относительно жидкости со скоростью, равной $0,8$ скорости света.

1.32. Найти направляющие косинусы преобразования спиновых векторов, соответствующего комбинации из преобразования Лоренца (вдоль оси x) и пространственного поворота.

1.33. Пусть достоверно известно, что спин электрона ориентирован в положительном направлении оси x для наблюдателя, находящегося в покое относительно этого электрона. С какими вероятностями для наблюдателя B , движущегося относительно этого электрона вдоль оси x со скоростью u , спин может быть расположен в положительном или отрицательном направлении оси x ? Какова вероятность, что для наблюдателя A спин этого электрона будет расположен под углом 45° к положительному направлению оси x ? А для наблюдателя B ?

1.34. Пусть σ является трехкомпонентным векторно-спиновым оператором с компонентами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

а. Показать, что если A — вектор, то

$$(\sigma \cdot A) \sigma = A + i(\sigma \times A),$$

$$\sigma (\sigma \cdot A) = A - i(\sigma \times A),$$

$$\sigma \times \sigma = 2i\sigma,$$

$$\sigma \times (\sigma \times A) = i(\sigma \times A) - 2A.$$

б. Показать, что если a — единичный вектор, а λ — постоянная, то

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \exp(i\lambda \sigma \cdot a) = -\exp(i\lambda \sigma \cdot a)$$

и, следовательно,

$$\exp(i\lambda \sigma \cdot a) = \cos \lambda + i(\sigma \cdot a) \sin \lambda.$$

Таблица наиболее употребительных векторных и аффинорных соотношений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z; & \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \mathbf{i} (A_y B_z - A_z B_y) + \\
 & & &+ \mathbf{j} (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k} (A_x B_y - A_y B_x), \\
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}, \\
 \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}, \\
 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}, \\
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \\
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] \mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \mathbf{D} = \\
 &= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \mathbf{B} - [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \mathbf{A}, \\
 \nabla u &= \text{grad } u, & \nabla \cdot \mathbf{F} &= \text{div } \mathbf{F}, & \nabla \times \mathbf{F} &= \text{rot } \mathbf{F}, \\
 \nabla (uv) &= u \nabla v + v \nabla u, & \nabla \cdot (u \mathbf{A}) &= (\nabla u) \cdot \mathbf{A} + u \nabla \cdot \mathbf{A}, \\
 \nabla \times (u \mathbf{A}) &= (\nabla u) \times \mathbf{A} + u \nabla \times \mathbf{A}, \\
 \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \\
 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0, & \nabla \times (\nabla u) &= 0, & \nabla \cdot (\nabla u) &= \nabla^2 u, \\
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}, \\
 \iiint (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv &= \iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}; & \iiint (\nabla \times \mathbf{F}) dv &= - \iint \mathbf{F} \times d\mathbf{A}, \\
 \iiint (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi) dv &= \iint \varphi (\nabla \psi) \cdot d\mathbf{A} - \iint \psi \nabla^2 \varphi dv,
 \end{aligned}$$

где тройные интегралы берутся по всему объему, ограниченному замкнутой поверхностью A , а двойные интегралы — по этой поверхности A (вектор $d\mathbf{A}$ направлен *наружу*).

$$\iint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

где двойной интеграл берется по площади, ограниченной замкнутой кривой C , а одномерный интеграл — по кривой C против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с конца вектора $d\mathbf{A}$.

Векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ может быть представлено при помощи скалярного потенциала ϕ и векторного потенциала $\mathbf{A}$

$$\mathbf{F} = \text{grad } \phi + \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Если поле $\mathbf{F}$ обращается в нуль на бесконечности, то выражения ϕ и $\mathbf{A}$ через $\mathbf{F}$ имеют вид

$$\phi = - \iiint \frac{\text{div } \mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dx' dy' dz', \quad \mathbf{A} = \iiint \frac{\text{rot } \mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dx' dy' dz',$$

где $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$.

$$\mathfrak{A} = \mathbf{i} \mathbf{A}_x + \mathbf{j} \mathbf{A}_y + \mathbf{k} \mathbf{A}_z, \quad \mathfrak{A}^* = \mathbf{i} \mathbf{A}_x^* + \mathbf{j} \mathbf{A}_y^* + \mathbf{k} \mathbf{A}_z^* = \mathbf{A}_x \mathbf{i} + \mathbf{A}_y \mathbf{j} + \mathbf{A}_z \mathbf{k},$$

$$|\mathfrak{A}| = \mathbf{i} \cdot \mathbf{A}_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_z, \quad \langle \mathfrak{A} \rangle = \mathbf{i} \times \mathbf{A}_x + \mathbf{j} \times \mathbf{A}_y + \mathbf{k} \times \mathbf{A}_z,$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_x^* B_x + \mathbf{A}_y^* B_y + \mathbf{A}_z^* B_z = \mathbf{i} (\mathbf{A}_x \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{j} (\mathbf{A}_y \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{k} (\mathbf{A}_z \cdot \mathbf{B}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_x^*) B_x + \frac{1}{2} (\mathbf{A}_y + \mathbf{A}_y^*) B_y + \frac{1}{2} (\mathbf{A}_z + \mathbf{A}_z^*) B_z - \frac{1}{2} \langle \mathfrak{A} \rangle \times \mathbf{B},$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathbf{A}_x^* B_x + \mathbf{A}_y^* B_y + \mathbf{A}_z^* B_z,$$

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \mathbf{A}_x^* \cdot \mathbf{B}_x + \mathbf{A}_y^* \cdot \mathbf{B}_y + \mathbf{A}_z^* \cdot \mathbf{B}_z = |\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}|,$$

$$\begin{aligned}
\nabla F &= \mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial z}, & \mathbf{F} \nabla &= \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} = (\nabla F)^*, \\
\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}), \\
\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}), \\
\nabla \cdot \mathfrak{A} &= (\partial A_x / \partial x) + (\partial A_y / \partial y) + (\partial A_z / \partial z) = \mathbf{i} \text{div}(\mathbf{A}_x^*) + \mathbf{j} \text{div}(\mathbf{A}_y^*) + \mathbf{k} \text{div}(\mathbf{A}_z^*), \\
\nabla \cdot (\nabla F) &= \nabla^2 F, & \nabla \cdot (\mathbf{F} \nabla) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \nabla^2 \mathbf{F} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}, \\
\nabla \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\nabla \cdot \mathfrak{A}) \cdot \mathbf{B} + |\mathfrak{A} \cdot (\nabla \mathbf{B})|.
\end{aligned}$$

Таблица свойств криволинейных координат

Для ортогональных криволинейных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с единичными векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, линейным элементом $ds^2 = \sum_n h_n^2 (d\xi_n)^2$ и коэффициентами Ламе h_n , где

$$h_n^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_n} \right)^2 \right] = \left[\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1},$$

дифференциальные операторы принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\text{grad} \phi &= \nabla \phi = \sum_n \mathbf{a}_n \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_n}, \\
\text{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{A_n}{h_n} \right), \\
\text{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{l, m, n} h_l \mathbf{a}_l \left[\frac{\partial}{\partial \xi_m} (h_n A_n) - \frac{\partial}{\partial \xi_n} (h_m A_m) \right], \\
l, m, n &= 1, 2, 3 \text{ или } 2, 3, 1 \text{ или } 3, 1, 2, \\
\text{div grad} \phi &= \nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_n} \right], \\
\nabla \mathbf{A} &= (\nabla \mathbf{A})_s + (\nabla \mathbf{A})_a, & (\nabla \mathbf{A})_a &= \frac{1}{2} (\text{rot} \mathbf{A}) \times \mathfrak{S}, \\
(\nabla \mathbf{A})_s &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla) = \sum_m \left[\frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{A_m}{h_m} + \mathbf{A} \cdot \text{grad}(\ln h_m) \right] \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m < n} \left[\frac{h_m}{h_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{A_m}{h_m} + \frac{h_n}{h_m} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{A_n}{h_n} \right] (\mathbf{a}_m \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_n \mathbf{a}_m),
\end{aligned}$$

$\mathbf{a}$ элемент объема равен $h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = dV$.

Для цилиндрических координат

$$\xi_1 = r, \quad \xi_2 = \varphi, \quad \xi_3 = z$$

имеем $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1, dV = r dr d\varphi dz$.

$$\begin{aligned}
\text{grad} \phi &= \mathbf{a}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\
\text{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\
\text{rot} \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\varphi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right), \\
\nabla^2 \phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r \left[\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \mathbf{a}_\varphi \left[\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] + \mathbf{a}_z \nabla^2 A_z, \\ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla) &= \mathbf{a}_r \frac{\partial A_r}{\partial r} \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\varphi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{A_r}{r} \right] \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \mathbf{a}_z + \\ &+ \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi \mathbf{a}_r) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial z} \right] (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_z + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_r) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \right] (\mathbf{a}_\varphi \mathbf{a}_z + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_\varphi).\end{aligned}$$

Для сферических координат $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \vartheta$, $\xi_3 = \varphi$ имеем $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \sin \vartheta$, $dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$.

$$\begin{aligned}\text{grad } \psi &= \mathbf{a}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\mathbf{a}_\vartheta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{a}_r}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\mathbf{a}_\vartheta}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \\ &+ \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right], \\ \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r \left[\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \\ &+ \mathbf{a}_\vartheta \left[\nabla^2 A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \\ &+ \mathbf{a}_\varphi \left[\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right], \\ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla) &= \mathbf{a}_r \frac{\partial A_r}{\partial r} \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\vartheta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{A_r}{r} \right] \mathbf{a}_\vartheta + \\ &+ \mathbf{a}_\varphi \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\vartheta}{r} \text{ctg } \vartheta \right] \mathbf{a}_\varphi + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A_\vartheta}{r} \right) \right] (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\vartheta + \mathbf{a}_\vartheta \mathbf{a}_r) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A_\varphi}{r} \right) \right] (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi \mathbf{a}_r) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{A_\varphi}{\sin \vartheta} \right) \right] (\mathbf{a}_\vartheta \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi \mathbf{a}_\vartheta).\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

В предисловии уже упоминалось, что эта литература не претендует на полноту. Включены только те книги и статьи, которые, по мнению авторов, содержат полезные дополнения к данному тексту.

Общие справки по материалу этой главы:

- Вебстер А. Г. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения математической физики, ч. 1—2, ГТТИ, М.—Л., 1933—1934.
 Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, Гостехиздат, М., 1951.
 Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1954.

- Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1950.
 Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ГТТИ, Л.—М., 1937.
 Jeffreys H. J., Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1946.
 Joos G., Lehrbuch der theoretischen Physik, Lpz., 1956.
 Margenau H., Murphy G. M., The Mathematics of Physics and Chemistry, New York, 1943.
 Murnaghan F. D., Introduction to Applied Mathematics, New York, 1948.
 Slater J. C., Frank N. H., Introduction to Theoretical Physics, New York, 1933.

Дополнительный материал по векторному и тензорному анализу:

- Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. АН СССР, М., 1951.
 Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, Изд. иностр. лит., М., 1950.
 Шилов Г. Е., Лекции по векторному анализу, Гостехиздат, М., 1954.
 Craid H. V., Vector and Tensor Analysis, New York, 1943.
 Gibbs J. W., Vector Analysis, ed. by E. B. Wilson, New York, 1901.
 Phillips H. B., Vector Analysis, New York, 1933.
 Rutherford D. E., Vector Methods Applied to Differential Geometry, etc., Edinburgh, 1944.
 Weatherburn C. E., Elementary and Advanced Vector Analysis, 2 vols., London 1928.

Книги по теории упругости:

- Ляв А., Математическая теория упругости, М.—Л., 1935.
 Тимошенко С. П., Теория упругости, ОНТИ, М., 1937.
 Brilouin L., Les tenseurs en mécanique et en élastique, Paris, 1938.
 Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, New York, 1946.

Работы, содержащие полезные сведения по различным аспектам теории абстрактного векторного пространства:

- Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, М., 1950.
 Ван-дер Варден Б., Метод теории групп в квантовой механике, ГТИ Украины, Харьков, 1938.
 Дирак П., Основы квантовой механики, Глав. ред. тех.-теор. лит-ры, Л.—М., 1937.
 Кондон Е. и Шортли Г., Теория атомных спектров, Изд. иностр. лит., М., 1949.
 Шифф Л., Квантовая механика, Изд. иностр. лит. М., 1957.
 Laporte O., Uhlenbeck G. E., Application of Spinor Analysis to Maxwell and Dirac Equations, Phys. Rev., 37, 1380 (1931).
 Von Neumann J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932.
 Rojansky V. B., Introductory Quantum Mechanics, New York, 1938.
 Stone M. H., Linear Transformations in Hilbert Space, American Mathematical Society, New York, 1932.

Книги, содержащие разделы, посвященные специальной теории относительности:

- Бергман П., Введение в теорию относительности, Изд. иностр. лит., М., 1947.
 Голдстейн Г., Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.
 Ландау Л., Лифшиц Е., Теория поля, ГТТИ, М., 1948.
 Эддингтон А., Математическая теория относительности, Гос. научно-техн. изд. Украины, Харьков—Киев, 1933.
 Corben H. C., Stehle P., Classical Mechanics, Chaps. 17 and 18, New York, 1950.
 Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, New York, 1934.

Уравнения полей

Физические явления, которые могут быть описаны с помощью полей, связаны с положением точек и со временем таким образом, что обычно эту связь можно выразить посредством дифференциальных уравнений с частными производными. Изменение поля в какой-либо точке влияет на его значения в соседних точках, эти последние изменения отражаются на значениях в точках более отдаленных и так далее; имеет место взаимозависимость, которая наиболее естественно выражается через пространственные и временные частные производные. Таким образом, поле, соответствующее определенной физической ситуации обычно является решением некоторого дифференциального уравнения с частными производными, а именно частным решением, удовлетворяющим определенной совокупности подходящих для данной ситуации «граничных условий».

Большая часть этой книги будет посвящена отысканию для специальных видов дифференциальных уравнений с частными производными частных решений, удовлетворяющих данным граничным и начальным условиям. Однако эта и следующая главы будут посвящены рассмотрению способов нахождения дифференциальных уравнений, соответствующих данной физической задаче. Этот процесс выделения наиболее важных взаимозависимостей в изучаемом явлении с целью выражения и изучения их в дифференциальной форме является одной из наиболее трудных задач физика-теоретика.

Мы не будем пытаться рассмотреть все дифференциальные уравнения с частными производными, которые оказались полезными в физике; это потребовало бы полного обзора всей физики. Даже относительно тех уравнений, которые здесь выводятся, мы будем предполагать, что физическая сторона дела достаточно известна и что рассматриваемые величины не требуют подробных пояснений. Такие пояснения можно найти в других источниках. Нас здесь интересует лишь процесс получения дифференциального уравнения из условий физической задачи.

Мы обнаружим, что некоторые типы дифференциальных уравнений вновь и вновь появляются в самых разнообразных ситуациях и что, следовательно, детальное изучение решений этих сравнительно немногочисленных уравнений даст нам возможность решать проблемы в чрезвычайно большом числе случаев, представляющих интерес с точки зрения физики.

2.1. Гибкая струна

Прежде чем перейти к более сложным вопросам, полезно подвергнуть детальному рассмотрению пример одномерной задачи, с тем чтобы выявить некоторые приемы и понятия в их простейшей форме. Гибкая натянутая

струна является хорошим примером этого рода, так как он достаточно нагляден и хорошо знаком большинству читателей.

Физическим прототипом здесь является струна нижнего регистра фортепиано, представляющая собой более или менее равномерно нагруженную проволоку, натянутую между двумя абсолютно жесткими зажимами. Такая струна обладает жесткостью, но, как показывает опыт, сопротивление перемещению струны из положения ее равновесия в значительно большей степени вызвано ее натяжением, нежели жесткостью. Поэтому при выводе уравнения струны обычно допускают упрощение, пренебрегая жесткостью (в некоторых книгах по колебаниям и теории звука исследуется и влияние жесткости и устанавливается, в каких случаях ею заведомо можно пренебречь). Другие упрощающие предположения состоят в том, что масса струны равномерно распределена вдоль ее длины, что натяжение также равномерно и что отклонение точки струны от положения равновесия мало по сравнению с расстоянием этой точки от ближайшего закрепленного конца струны. Два последних предположения не независимы друг от друга.

Форма такой струны в любой момент может быть выражена через ее отклонение от положения равновесия. Более точно: каждую точку струны мы задаем ее расстоянием x от некоторой начальной точки, измеренным в тот момент, когда струна находилась в положении равновесия (имела форму прямолинейного отрезка, соединяющего точки опоры). Перемещение $\phi(x)$ точки x , отсчитываемое от ее положения равновесия, есть функция x (а иногда и времени). Если рассматривать движение только в плоскости, то поле $\phi(x)$, соответствующее этому примеру, будет скалярным одномерным полем.

Силы, действующие на элемент струны. Рассматривая рис. 2.1, мы видим, что при малом наклоне $\partial\phi/\partial x$ струны результирующая сила $F_T(x)dx$, действующая на участок струны между точками x и $x+dx$, вызванная натяжением T струны, равна

$$F_T(x)dx = T(\partial\phi/\partial x)_{x+dx} - T(\partial\phi/\partial x)_x \quad \text{или} \quad F_T(x) = T(\partial^2\phi/\partial x^2) \quad (2.1.1)$$

и имеет направление, примерно совпадающее с направлением перпендикуляра к линии равновесия. Эта результирующая сила, вызванная натяжением, действующим на элемент струны в точке x , которая стремится вернуть струну в положение равновесия, пропорциональна скорости изменения наклона струны в точке x . Она стремится выпрямить каждый участок струны: если кривизна положительна, она направлена вверх, если кривизна отрицательна, она направлена вниз. Таким образом, сила зависит только от формы участка струны в непосредственной близости от точки x и не зависит от формы струны в целом. Однако если струну предоставить действию этой силы, то струна только тогда придет в равновесие, когда *каждый* участок струны станет прямолинейным. Таким образом, дифференциальное уравнение струны, хотя и имеет дело только с формой каждого элементарного участка струны, в итоге налагает определенные ограничения на форму всей струны в целом.

В действительности на струну фортепиано действуют и другие силы — сила, вызванная жесткостью струны (которой, как мы уже говорили, во многих случаях можно пренебречь), и сила трения воздуха, в котором струна движется, а также и некоторые другие силы.

Сила трения при движении в воздухе также относительно мала; если нас интересует движение в течение короткого промежутка времени или же форма струны, когда она неподвижна, этой силой также можно пренебречь. Другие силы, которые могут играть роль — это сила тяжести,

действующая на каждый участок струны (если струна натянута горизонтально), и сила, исходящая от молоточка фортепиано, или пальца арфиста, или смычка скрипача. Какие из этих сил нужно включить в уравнение, определяющее форму струны, зависит от того, какой частный случай рассматривается.

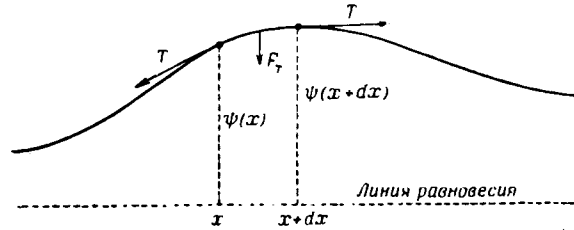


Рис. 2.1. Силы натяжения T , приложенные к элементу струны, и их равнодействующая F_T .

Уравнение Пуассона. Струна может быть подвергнута, например, действию не зависящих от времени поперечных сил, распределенных по ее длине, и нас может интересовать форма равновесия струны, возникшая в результате одновременного действия этих внешних сил и сил, вызванных натяжением. В этом случае зависимость от времени отсутствует и дифференциальное уравнение, определяющее форму струны, имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -f(x), \quad f(x) = \frac{F(x)}{T}, \quad (2.1.2)$$

где поперечная сила, приложенная к элементу струны, лежащему между x и $x+dx$, равна $F(x)dx$. Здесь эта приложенная поперечная сила уравновешена в каждой точке результирующей поперечной силой, вызванной натяжением T . Уравнение (2.1.2) представляет собой одномерный случай уравнения Пуассона.

В качестве одного из случаев, описываемых этим уравнением, рассмотрим горизонтальную струну, на которую действует сила тяжести, вызванная ее собственным весом. Если каждый сантиметр длины струны весит ρg , то сила $F(x)$ равна $-\rho g$, где g — ускорение силы тяжести. Общим решением полученного уравнения $d^2\psi/dx^2 = \rho g/T$ является $\psi = a + bx + (\rho g/2T)x^2$, где a и b определяются из «граничных условий». Если оба конца струны закреплены жестко (т. е. если их смещениями можно пренебречь) и находятся друг от друга на расстоянии L , то эти граничные условия имеют вид $\psi = 0$ при $x=0$ и при $x=L$. Нетрудно видеть, что квадратичная функция от x со старшим членом $(\rho g/2T)x^2$, обращающаяся в нуль при $x=0$ и при $x=L$, имеет вид $\psi = (\rho g/2T)x(x-L)$. Это, следовательно, и есть решение задачи. Форма струны — парабола с приблизительно постоянной кривизной $\rho g/T$ и наибольшим смещением в середине струны¹⁾.

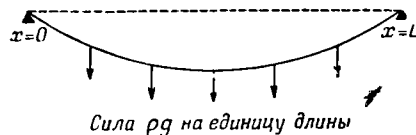


Рис. 2.2. Форма натянутой струны, находящейся под действием поперечных сил тяжести.

Некоторые интересные общие свойства решений уравнения (2.1.2) вытекают из того факта, что ψ входит в уравнение в первой степени. Например, если ψ есть решение уравнения (2.1.2) для заданной функции

¹⁾ При малых по абсолютной величине значениях $\partial\psi/\partial x$ (что имеет место в рассматриваемом случае) кривизна струны $(\partial^2\psi/\partial x^2) \cdot [1 + (\partial\psi/\partial x)^2]^{-3/2}$ приблизительно равна $\partial^2\psi/\partial x^2$. —Прим. ред.

$f(x)$, то af есть решение уравнения $d^2\psi/dx^2 = -af(x)$. Это новое решение часто также удовлетворяет тем же граничным условиям, что и ψ (это имеет место, например, для струны с двумя закрепленными концами). Аналогично если ψ_1 есть решение уравнения $d^2\psi/dx^2 = -f_1$ и ψ_2 — решение уравнения $d^2\psi/dx^2 = -f_2$, то $\psi = \psi_1 + \psi_2$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -f_1 - f_2. \quad (2.1.3)$$

Оба эти свойства будут многократно использованы в этой книге.

Сосредоточенная сила. Дельта-функция. Во многих случаях, имеющих практический интерес, поперечная сила приложена лишь к малому участку струны. Это внушает мысль о довольно очевидной идеализации — о силе, приложенной в «одной точке» струны. С математической точки зрения эта идеализация соответствует рассмотрению предельного случая силы

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi - \frac{\Delta}{2}, \\ \frac{F}{\Delta}, & \xi - \frac{\Delta}{2} < x < \xi + \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \xi + \frac{\Delta}{2} < x \end{cases}$$

при стремлении к нулю длины Δ участка струны, к которому приложена сила.

Подобные идеализации сосредоточенных сил, электрических зарядов и т. д. будут очень полезны в наших последующих рассуждениях. Они все могут быть выражены с помощью одной «патологической функции», называемой *дельта-функцией*:

$$\delta(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & x < -\frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} < x < \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \frac{\Delta}{2} < x. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Мы называем ее «патологической функцией» потому, что она не обладает «физически нормальными» свойствами непрерывности и дифференцируемости в точке $x = 0$ ¹⁾. Однако если от этой функции не требовать слишком много, она окажет значительную помощь в дальнейшем исследовании многих задач. Вспоминая обычное определение интеграла, как предела сумм, можно вывести следующее интегральное правило для дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi - x) d\xi = f(x). \quad (2.1.5)$$

Тесно связанной с дельта-функцией и иллюстрирующей интегральные свойства последней является *единичная ступенчатая функция*

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

¹⁾ Дельта-функция даже не является функцией в обычном понимании этого слова, представляя собой простейший пример *обобщенных функций*. См. об этом Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций, вып. 1, Изд. иностр. лит., М., 1958. — *Прим. ред.*

Эта функция является также не совсем обычной: дифференцирование ее возможно только с известными предосторожностями¹⁾.

Обращаясь теперь к задаче о решении уравнения (2.1.2), мы сначала ищем решение уравнения в случае силы, сосредоточенной в точке $x = \xi$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\delta(x - \xi).$$

Решение этого уравнения ψ удовлетворяет однородному уравнению $d^2\psi/dx^2 = 0$ во всех точках, где $x \neq \xi$. Чтобы изучить поведение ψ в точке $x = \xi$, интегрируем обе части уравнения по промежутку от $x = \xi - \varepsilon$ до $x = \xi + \varepsilon$, где ε — исчезающе малая величина. Воспользовавшись равенством (2.1.6), мы видим, что в точке $x = \xi$ угловой коэффициент касательной к графику решения должен иметь единичный скачок. Если опоры жесткие, то форма струны длины L для силы $F = T$, сосредоточенной в $x = \xi$, определяется равенствами

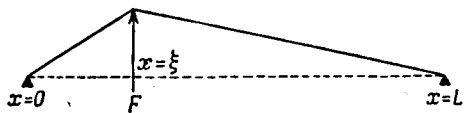


Рис. 2.3. Форма струны, на которую действует одна сила в точке $x = \xi$.

$$\psi = G(x|\xi) = \begin{cases} \frac{x(L-\xi)}{L}, & 0 < x < \xi, \\ \frac{\xi(L-x)}{L}, & \xi < x < L. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Функция $G(x|\xi)$ называется *функцией Грина* уравнения (2.1.2) для точки $x = \xi$. Отсюда мы видим, что решение для струны, находящейся под действием силы F , сосредоточенной в точке $x = \xi$, имеет вид $(F/T)G(x|\xi)$ и что решение для двух сил — одной F_1 , сосредоточенной в точке ξ_1 , и другой F_2 , сосредоточенной в ξ_2 , — имеет вид $(F_1/T)G(x|\xi_1) + (F_2/T)G(x|\xi_2)$.

Переходя от сумм к интегралам и пользуясь равенством (2.1.5), мы видим, что форма равновесия струны, на которую действует не зависящая от времени поперечная сила $F(x)$ и которая находится под действием натяжения T между двумя жесткими опорами, удаленными друг от друга на расстояние L , определяется равенством

$$\psi = \int_0^L \frac{F(\xi)}{T} G(x|\xi) d\xi. \quad (2.1.8)$$

Таким образом, функция Грина, которая является решением для случая силы, сосредоточенной в точке $x = \xi$, может быть использована и для получения решения уравнения Пуассона в случае, когда сила имеет произвольный вид и распределена вдоль струны.

Этот прием получения решения общего уравнения с помощью интеграла, содержащего функцию Грина, которая является решением простого частного случая уравнения, подробнее будет рассмотрен дальше.

Волновое уравнение. В связи с другими задачами нам представляется более интересным изучение движения струны после того, как приложенные силы исчезли, чем нахождение устойчивой формы струны под влиянием приложенных поперечных сил. Простейший случай, который является также одним из наиболее интересных, — это случай, когда можно пренебречь всеми силами, кроме сил, вызванных натяжением T струны. Если масса струны равномерно распределена и составляет ρ g

¹⁾ Из приведенного соотношения (2.1.6) видно, что производной единичной ступенчатой функции является дельта-функция. — *Прим. ред.*

на единицу длины, уравнение поперечного движения получается приравняванием произведения $\rho(dx)(\partial^2\psi/\partial t^2)$ массы каждого элемента длины струны на его ускорение поперечной силе, вызванной натяжением и действующей на тот же элемент $Tdx(\partial^2\psi/\partial x^2)$, определенной равенством (2.1.1). Полученное уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (2.1.9)$$

по причинам, которые вскоре станут ясными, называется *волновым уравнением*. Оно утверждает, что поперечное ускорение любого участка струны пропорционально кривизне этого участка¹⁾.

Волна может быть грубо описана как некоторая конфигурация среды (форма струны, распределение плотностей в жидкости и т. д.), перемещающаяся по среде с определенной скоростью. Скорость распространения волны не связана necessarily со скоростью любого участка среды. В самом деле, для волн, определяемых простым уравнением (2.1.9), скорость волны совершенно не зависит от скорости участков среды; другими словами, если уравнение (2.1.9) имеет место, то скорость любой волны на струне будет одна и та же, какую бы форму ни имела эта волна. Волна движется *вдоль* струны со скоростью c , в то время как точка струны движется *поперек* струны вверх и вниз со скоростью $\partial\psi/\partial t$, определяемой формой проходящей волны.

Представление для волны этого типа может быть найдено, если принять, что отклонение струны от положения равновесия есть функция от $x - ct$ для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , и от $x + ct$ для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x . Чтобы показать, что уравнение (2.1.9) определяет

такое движение, можно сделать замену переменных, взяв за новые переменные величины $\xi = x - ct$ и $\eta = x + ct$.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Следовательно, уравнение (2.1.1) принимает вид

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Решением этого уравнения служит $\psi = f(\xi) + F(\eta)$, где f и F — любые функции, удовлетворяющие требованиям непрерывности и имеющие малые амплитуды, что было предположено при выводе уравнения (2.1.9). Как мы увидим дальше, это и будет наиболее общим решением уравнения (2.1.9), так что наиболее общее движение струны всегда представляет собой наложение волны, движущейся направо, и другой волны, движущейся налево, причем обе волны движутся с постоянной скоростью, одной и той же для обеих волн, и имеют неизменную форму.

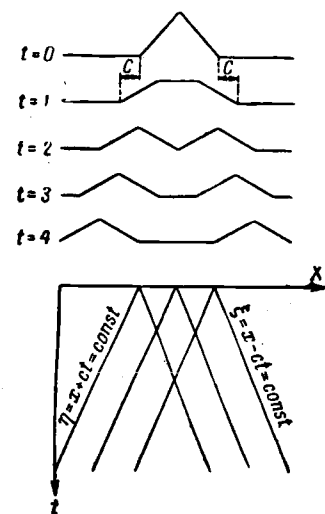


Рис. 2.4. Волновое движение струны; показаны волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

ставляет собой наложение волны, движущейся направо, и другой волны, движущейся налево, причем обе волны движутся с постоянной скоростью, одной и той же для обеих волн, и имеют неизменную форму.

¹⁾ См. примечание на стр. 121. — Прим. ред.

Заметим, что в случае, когда c есть скорость света, волновое уравнение будет инвариантным относительно преобразования Лоренца, так как тогда выражение $(\partial^2\psi/\partial x^2) - (1/c^2)(\partial^2\psi/\partial t^2)$ является скаляром, полученным сверткой тензора второго порядка $\partial^2\psi/\partial x_n \partial x_m$, и, следовательно, инвариантно относительно пространственно-временного вращения, имеющего вид, рассмотренный в первой главе. Линии $\xi = x - ct$ и $\eta = x + ct$ представляют собой мировые линии нулевой собственной длины ($c^2 dt^2 - dx^2 = 0$) и изображают лучи света.

Простое гармоническое движение, уравнение Гельмгольца. Иногда волновое движение в его зависимости от времени будет синусоидальным, так что можно выделить (как часто говорят, «отделить») множитель, зависящий только от времени и имеющий вид $e^{-i\omega t}$. Так как мы условились применять только действительную часть комплексного решения, этот множитель и дает синусоидальную зависимость от времени. Постоянная ω называется *угловой скоростью* колебания, а величина $\nu = \omega/2\pi$ — *частотой* колебания волны.

Подставив выражение $\psi = \gamma(x)e^{-i\omega t}$ в волновое уравнение (2.1.9), получим для пространственной части ψ уравнение

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \gamma = 0, \quad (2.1.10)$$

которое называется *уравнением Гельмгольца*.

Мы увидим дальше в этой книге (но будет хорошим упражнением для читателя — показать самому это теперь), что функция Грина [см. исследование уравнения (2.1.7)] этого уравнения для бесконечной струны, соответствующая силе $T e^{-i\omega t}$, сосредоточенной в точке $x = 0$, имеет вид

$$G(x|0) = \begin{cases} \frac{i}{2} \frac{c}{\omega} e^{-i\omega x/c}, & x < 0, \\ \frac{i}{2} \frac{c}{\omega} e^{i\omega x/c}, & x > 0. \end{cases}$$

Общее выражение для любой приложенной силы, имеющей синусоидальную зависимость от времени с частотой $\omega/2\pi$, получается в виде интеграла, аналогичного интегралу (2.1.8).

Волновая энергия. Так как волны распространяются в обоих направлениях с постоянной скоростью и не изменяя своей формы, естественно ожидать, что волновая энергия, однажды сообщенная струне, распространяется без потерь. Полная энергия струны составляется из суммы кинетических энергий отдельных элементов струны

$$K. \mathcal{E}. = \frac{1}{2} \rho \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx$$

(интегрирование производится по длине струны) и полной потенциальной энергии струны. Если форма струны в момент t определяется функцией $\psi(x, t)$, то потенциальная энергия может быть найдена, если вообразить, что эта форма струны получилась под действием поперечной распределенной силы такой величины, что, двигая медленно струну, она перемещает ее из положения равновесия и придает ей окончательную форму $\psi(x, t)$. Можно принять, что промежуточные формы струны определяются функцией $\beta\psi$, где β меняется от нуля до единицы по мере того, как струна движется. Чтобы достигнуть промежуточной формы струны $\beta\psi$, нужно к элементу ее dx приложить силу $-T\beta(\partial^2\psi/dx^2)dx$; работа этой силы при перемещении этого элемента из положения $\beta\psi$

в положение $(\beta + d\beta)\phi$ равна $-T\phi(\partial^2\phi/\partial x^2)dx\beta d\beta$. Полная работа, соответствующая движению струны из положения равновесия ($\beta=0$) к ее окончательному положению $\phi(\beta=1)$, равна, следовательно,

$$\text{П. Э.} = -T \int \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx \int_0^1 \beta d\beta = -\frac{1}{2} T \int \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx.$$

Полная энергия, которой обладает участок струны от точки $x=a$ до $x=b$, имеет поэтому вид

$$\begin{aligned} W(a, b) &= \text{К.Э.} + \text{П.Э.} = \frac{1}{2} \rho \int_a^b \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_a^b \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} T \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_a^b, \end{aligned}$$

где окончательная симметричная форма получена интегрированием по частям члена, определяющего потенциальную энергию.

Если концы a и b струны жестко закреплены, то ϕ равно нулю в точках a и b и последний член в симметричном выражении обращается в нуль. Таким образом, энергия всей струны пропорциональна интегралу по длине струны от квадрата скорости каждого элемента, сложенного с произведением c^2 на квадрат наклона каждого элемента.

Применение этого выражения для подсчета энергии только части струны не дает единственно возможного результата, так как вопрос об энергии «концов» выбранного участка не может быть решен однозначно. Вполне определенной величиной является энергия всей струны, включая опоры, так как только эта энергия сохраняется. Этот факт может быть показан более наглядно, если подсчитать потенциальную энергию части струны другим способом и убедиться в том, что это дает другой результат. Например, из-за отличия формы $\phi(x)$ от формы равновесия струна растягивается. Соответствующая избыточная энергия, вызванная растяжением, будет как раз потенциальной энергией струны, так как она равна работе, произведенной главной (горизонтальной) составляющей натяжения T . Длина элемента dx струны благодаря растяжению становится равной $\sqrt{1 + (\partial\phi/\partial x)^2} dx$. Потенциальная энергия, получающаяся в результате действия постоянной силы T , таким образом, имеет величину

$$\text{П. Э.} = +T \int_a^b \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] dx.$$

Последнее выражение с точностью до членов второго порядка равно

$$\text{П. Э.} = \frac{1}{2} T \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx,$$

так что энергия $W(a, b)$ имеет вид

$$W(a, b) = \frac{1}{2} \rho \int_a^b \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (2.1.11)$$

Сравнивая это с нашим предыдущим выражением, мы видим, что оба они различаются слагаемым $-\frac{1}{2} T [\phi \partial \phi / \partial x]_a^b$, которое зависит только

от значений в концах a и b . Каждый из этих результатов одинаково пригоден для всей струны, так как если a и b являются концами ее (которые жестко или свободно закреплены¹⁾, так что энергия не передается опорам), то оба выражения совпадают друг с другом. Только в этом случае результат будет единственным. Так как выражение (2.1.11) проще, мы будем употреблять его в дальнейших рассуждениях.

Поток энергии. Скорость изменения энергии части струны, лежащей между a и b , получается дифференцированием $W(a, b)$ по времени

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(a, b) &= \rho \int_a^b \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right] dx = \\ &= T \int_a^b \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right] dx = T \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} W(a, b) = T \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_a^b = T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=b} - T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=a}. \quad (2.1.12)$$

Эти два члена представляют собой поток энергии внутрь струны или изнутри ее через два конца. Если $-T(\partial\psi/\partial t)(\partial\psi/\partial x)$ представляет собой поток энергии в положительном направлении оси x через точку x , то первый член правой части представляет поток энергии внутрь участка струны через его правый конец ($b > a$), а второй член — поток энергии внутрь участка струны через левый конец.

Нетрудно проверить, что $-T(\partial\psi/\partial t)(\partial\psi/\partial x)$ равно потоку энергии вдоль струны в положительном направлении оси x , так как $-T(\partial\psi/\partial x)$ равно поперечной силе, с которой часть струны, лежащая слева от x , действует на часть струны, расположенную правее, вызывая ее движение, а $\partial\psi/\partial t$ есть поперечная скорость точки x струны. Сила, умноженная на скорость, как известно, равна мощности или потоку энергии.

В этой связи член $-T(\partial\psi/\partial x)$ аналогичен напряжению в линии электропередачи в некоторой точке, а $\partial\psi/\partial t$ аналогично силе тока, проходящего через ту же точку. Произведение этих двух величин равно передаваемой мощности.

Мощность и волновой импеданс. Аналогия с линией передачи может быть продолжена и далее. Для переменных токов комплексное отношение напряжения к силе тока называется импедансом, или полным сопротивлением линии. Часто этот импеданс²⁾ является функцией частоты переменного тока, но иногда, а именно когда импеданс есть чистое омическое сопротивление, он не зависит от частоты.

¹⁾ На свободно закрепленном конце $\partial\psi/\partial x = 0$. — *Прим. ред.*

²⁾ Так как для обозначения изменения во времени мы употребляем показательную функцию с отрицательным показателем $e^{-i\omega t}$, то знак членов реактанса (реактивного сопротивления или мнимой части импеданса) будет противоположен знаку соответствующих выражений, принятых в электротехнике. Их легко получить, поставив знак минус перед i . Например, если $Z = R - iX$, то X будет тем же самым членом реактивного сопротивления, который встречается в электротехнических инженерных обозначениях. Таким образом, формулы импеданса, употребляемые в этой книге, переходят в формулы в инженерных обозначениях при помощи замены $-i$ всюду на $+j$.

Аналогичным электрическому импедансу является комплексное отношение поперечной движущей силы к поперечной скорости, которое можно назвать механическим импедансом. Для простой струны, достаточно длинной для того, чтобы волны не отражались от правого конца (который предполагается находящимся в $x = \infty$), смещение точки x , вызванное синусоидальной волной, идущей в направлении возрастания x , может быть представлено выражением $\psi = A_+ e^{i(\omega/c)(x-ct)}$. Сила и скорость в точке x равны

$$-T \frac{\partial \psi}{\partial x} = -iT \frac{\omega}{c} \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi.$$

Следовательно, поток энергии через точку x , т. е. среднее значение произведения действительных частей этих двух выражений, есть

$$\text{мощность} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 |A_+|^2 = \frac{1}{2} \rho c |U_+|^2, \quad T = \rho c^2$$

для синусоидальной волны, распространяющейся в положительном направлении оси x . Величина $U_+ = -i\omega A_+$ может быть названа *амплитудой скорости* струны (но не волны) для синусоидальной волны.

Импеданс в точке x для этой простой волны равен

$$Z_\omega = \frac{-T(\partial\psi/\partial x)}{\partial\psi/\partial t} = \rho c. \quad (2.1.13)$$

Эта величина называется *волновым импедансом* струны. Для простой струны в случае волн, распространяющихся в одном направлении, он постоянен и не зависит ни от x , ни от частоты. На самом деле для получения этого выражения для волнового импеданса не обязательно рассматривать, как мы делали, распространяющуюся в одном направлении волну такого специального вида. Для любой волны $f(x-ct)$, распространяющейся в положительном направлении оси x , поперечная сила равна $-Tf'(x-ct)$ (здесь штрих обозначает производную), соответствующая поперечная скорость равна $-cf'(x-ct)$ и отношение силы к скорости, следовательно, равно $T/c = \rho c$; оно не зависит ни от x и t ни от формы волны.

Конечно, если мы имеем дело с волнами обоих направлений, импеданс будет зависеть от частоты и положения точки. Если $\psi = [A_+ e^{i\omega x/c} + A_- e^{-i\omega x/c}] e^{-i\omega t}$, тогда средний поток энергии, полученный как осреднение выражения (2.1.12) по циклу, равен

$$\text{мощность} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 [|A_+|^2 - |A_-|^2]$$

и импеданс равен

$$Z(x) = \rho c \frac{A_+ e^{i\omega x/c} - A_- e^{-i\omega x/c}}{A_+ e^{i\omega x/c} + A_- e^{-i\omega x/c}}.$$

В этой главе встретится много случаев, в которых аналогия с напряжением, силой тока, мощностью и импедансом может быть с пользой применена и обобщена. Например, в волновых движениях всех видов можно обычно найти две величины, получаемые из волновой функции, такие, что их произведение равно потоку энергии в волне, а их отношение может быть принято за обобщенный импеданс. В большинстве этих случаев, когда волна перемещается только в одном направлении, импеданс является действительной постоянной, не зависящей от положения и частоты; в этих случаях это постоянное значение может быть названо *волновым импедансом* изучаемого волнового движения.

Более сложные выражения импеданса для более сложных форм волнового движения легче всего дать через этот волновой импеданс как масштабный множитель. Например, для струны постоянная $\rho c = T/c = \sqrt{\rho T}$ является масштабным множителем в общем выражении импеданса.

Вынужденное движение струны. Как пример применения обобщенного понятия импеданса рассмотрим движение струны длины l , поддерживаемой в точке $x=l$ под натяжением T зажимом (не являющимся абсолютно жестким) и приводимой в движение поперечной силой в точке $x=0$. Отношение синусоидальной поперечной силы, действующей на зажим в точке $x=l$ и являющейся действительной частью выражения $F_l e^{-i\omega t}$, и поперечной скорости зажима $U_l e^{-i\omega t}$, вызванной силой, называется *поперечным механическим импедансом зажима* $Z_l = F_l/U_l$. Эта величина зависит обычно от частоты $\omega/2\pi$, но внутри известных границ не зависит от амплитуды F_l и U_l .

Форма струны может быть представлена с помощью комбинации синусоидальной волны $A_+ e^{i(\omega x/c) - i\omega t}$, идущей из источника ($x=0$) к зажиму ($x=l$), и другой волны $A_- e^{-i(\omega x/c) - i\omega t}$, отраженной от зажима и движущейся назад к источнику:

$$\phi = [A_+ e^{i\omega x/c} + A_- e^{-i\omega x/c}] e^{-i\omega t} = A \operatorname{ch} \left[\frac{i\omega x}{c} + \pi\alpha_0 - i\pi\beta_0 \right] e^{-i\omega t},$$

где

$$A_+ = \frac{1}{2} A e^{\pi(\alpha_0 - i\beta_0)}, \quad A_- = \frac{1}{2} A e^{-\pi(\alpha_0 - i\beta_0)}.$$

Следовательно, поперечная сила, с которой струна действует на зажим, равна

$$\begin{aligned} F_l e^{-i\omega t} &= -T (\partial\phi/\partial x)_{x=l} = \\ &= -i\omega\rho c [A_+ e^{i(\omega/c)l} - A_- e^{-i(\omega/c)l}] e^{-i\omega t} = \\ &= -i\omega\rho c A \operatorname{sh} [i(\omega l/c) + \pi\alpha_0 - i\pi\beta_0] e^{-i\omega t} = \\ &= Z_l U_l e^{-i\omega t} = Z_l (-\partial\phi/\partial t)_{x=l} = \\ &= -i\omega Z_l [A_+ e^{i(\omega/c)l} + A_- e^{-i(\omega/c)l}] e^{-i\omega t} = \\ &= -i\omega Z_l A \operatorname{ch} [i(\omega l/c) + \pi\alpha_0 - i\pi\beta_0] e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Для получения четырех последних выражений мы воспользовались определением поперечного механического импеданса зажима.

Из этих уравнений мы можем выразить через импеданс Z_l комплексное отношение амплитуд волн A_- , A_+ , а также постоянные α_0 , β_0 ¹⁾

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{\rho c - Z_l}{\rho c + Z_l} e^{2i\omega l/c}, \quad \alpha_0 - i\beta_0 = \frac{1}{\pi} \operatorname{ar th} \left(\frac{Z_l}{\rho c} \right) - i \frac{2l}{\lambda}, \quad (2.1.14)$$

где $\lambda = c/v = 2\pi c/\omega$ — длина волн, распространяющихся по струне. Отношение A_-/A_+ называется *отношением стоячих волн* или, иначе, *коэффициентом отражения*. Если Z_l чисто мнимое, т. е. является чистым реактивным сопротивлением, то $|A_-/A_+| = 1$, так что амплитуды падающей и отраженной волн равны, как это и должно быть, хотя, конечно, *фаза* отраженной волны будет отлична от фазы падающей волны. Связь между коэффициентом отражения и Z_l , устанавливаемая в (2.1.14), является примером соотношений между унитарным оператором отражения и опе-

¹⁾ См. примечание на стр. 127.

ратором импеданса, которые были рассмотрены в параграфе, посвященном абстрактным векторным пространствам. Из (2.1.14) видим, что граничное условие в точке $x=l$ определяет сдвиг фаз и отношение амплитуд падающей и отраженной волн. Если эти величины известны, то отношение Z_0 приложенной силы к скорости в точке $x=0$ приложения силы, которое является для струны *импедансом точки приложения силы*, может быть найдено сразу

$$Z_0 = \rho c \frac{1 - (A_-/A_+)}{1 + (A_-/A_+)} = \rho c \operatorname{th} [\pi (\alpha_0 - i\beta_0)]. \quad (2.1.15)$$

Другими словами, если известна сила, может быть вычислена скорость струны в точке $x=0$, равно как и выражения A_+ , A_- , A , ψ . Например, если приложенная сила есть $f(\omega) e^{-i\omega t}$, то волна определяется выражением

$$\begin{aligned} \psi(\omega, x, t) &= \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{-i\omega Z_0} \frac{\operatorname{ch}(i(\omega x/c) + \pi\alpha_0 - i\pi\beta_0)}{\operatorname{ch}(\pi\alpha_0 - i\pi\beta_0)} = \\ &= \frac{f(\omega)}{-i\omega \rho c} e^{-i\omega t} \left[\operatorname{cth}(\pi\alpha_0 - i\pi\beta_0) \cos \frac{\omega x}{c} + i \sin \frac{\omega x}{c} \right]. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Переходная характеристика. Интеграл Фурье. Так же как и в случае уравнения Пуассона, рассмотренного на стр. 121, решение для нескольких различных сил, действующих одновременно, равно сумме решений для этих сил, действующих отдельно. Например, если действуют силы всех частот и полную поперечную силу, действующую в конце $x=0$, струны можно выразить в форме интеграла

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.1.17)$$

то форма струны как функция x и t определяется равенством

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega, x, t) d\omega, \quad (2.1.18)$$

где $\psi(\omega, x, t)$ дается выражением (2.1.16).

В главе 4 мы покажем, что весьма многие функции от t могут быть выражены с помощью интегралов типа, приведенного в равенстве (2.1.17) (интегралы этого вида называются *интегралами Фурье*), и мы увидим там, как найти $f(\omega)$, если $F(t)$ известно. Следовательно, интеграл (2.1.18) дает общее решение задачи о движении струны под действием приложенной в конце её поперечной силы, почти в любом физически реализуемом случае. Техника решения аналогична технике применения функции Грина, затронутой при выводе формулы (2.1.8); она подскажет нам также подобные методы решения других уравнений, которые дальше встретятся в этой главе. Сначала находят решение для «силы» особенно простого вида, зависящей от некоторого параметра (точки приложения для уравнения Пуассона, частоты для волнового уравнения). Сила общего вида может быть тогда получена в виде интеграла от простой силы, взятого по параметру; полученное решение будет выражаться также аналогичным интегралом от простого решения, взятым по тому же параметру. Это — общий принцип техники применения функции Грина; он будет рассмотрен в гл. 7 и в некоторых других местах этой книги.

Операторные уравнения струны. Прежде чем закончить разбор задачи о волновом движении простой струны, интересно наметить другой подход к задаче, связанный с рассмотрением операторов в абстрактном

векторном пространстве, изложенный в гл. 1 и далее в этой главе. Начнем с рассмотрения струны, состоящей из совокупности материальных точек одинаковой массы, соединенных между собой невесомыми участками струны, имеющими равные длины. Сначала предположим, что имеется лишь конечное число N таких точек (очевидно, недостаточное приближение к равномерной струне), а потом будем приближаться к действительной струне, заставив N стремиться к бесконечности. Таким образом мы обнаружим связь между связанными осцилляторами, разобранными на стр. 80, и гибкой струной.

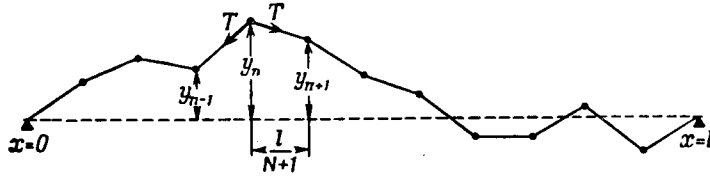


Рис. 2.5. Смещения материальных точек, лежащих на упругой струне.

Мы аппроксимируем струну постоянной плотности, находящуюся под натяжением T между двумя жесткими зажимами, удаленными друг от друга на расстояние l , посредством N равноудаленных материальных точек, каждая из которых имеет массу $\rho l/N$ и удалена от соседних точек на расстояние $l/(N+1)$. Беглый взгляд на рис. 2.5 показывает, что если смещение n -й массы от положения равновесия есть y_n , то действующая на эту массу поперечная сила, вызванная смещением соседних масс, равна

$$(N+1)T \left\{ \frac{y_{n+1} - y_n}{l} + \frac{y_{n-1} - y_n}{l} \right\} = (N+1) \frac{T}{l} (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n).$$

(Последнее выражение в скобках является, конечно, разностным аналогом второй производной.) Следовательно, наша система совокупных уравнений движения N частиц имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_1 &= \omega_0^2 y_2, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_2 &= \omega_0^2 (y_1 + y_3), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^2 y_n}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_n &= \omega_0^2 (y_{n-1} + y_{n+1}), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^2 y_N}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_N &= \omega_0^2 y_{N-1}, \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

где $\omega_0^2 = N(N+1)(T/\rho l^2)$.

Будем теперь считать смещения y_n составляющими вектора y в абстрактном векторном пространстве N измерений; единичные векторы этого пространства, расположенные вдоль осей координат, обозначим через e_n . Правые части уравнений можно рассматривать как результат действия аффинора $\omega_0^2 \mathcal{U}$, который преобразует вектор e_n в вектор с единичными компонентами вдоль e_{n-1} и e_{n+1} . Аффинор $\mathcal{U}$ назовем *оператором единичного сдвига*, так как он сдвигает индекс n на единицу в ту и другую стороны. Оператор $\mathcal{U}$ может быть записан следующим образом через

торы e :

$$\mathcal{U} = e_1 e_2 + e_2 (e_1 + e_3) + \dots + e_n (e_{n-1} + e_{n+1}) + \dots + e_N e_{N-1}. \quad (2.1.20)$$

Таким образом, уравнение, определяющее вектор y , изображающий смещение всех частиц,

$$y = \sum_{n=1}^N y_n e_n$$

может быть записано так:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\omega_0^2 y = \omega_0^2 \mathcal{U} \cdot y.$$

Собственные векторы оператора единичного сдвига. Решение дифференциального уравнения для y производится легче, если использовать собственные векторы u_n оператора $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} \cdot u_n = \gamma_n u_n,$$

где u_n — единичный вектор, направленный по главной оси оператора $\mathcal{U}$. Подставив в уравнение для y вместо y вектор u_n , получим уравнение, определяющее зависимость u_n от времени

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_0^2 (2 - \gamma_n) u_n = 0,$$

так что зависимость u_n от времени выражается множителем $e^{-i\omega_0 \sqrt{2-\gamma_n} t}$. Выражение вектора u_n через единичные векторы e_m найдем, решив приведенное выше уравнение для собственных значений.

Пусть u_n выражено через e_m с помощью равенства

$$u_n = \sum_{m=1}^N \gamma_{nm} e_m,$$

где величины γ являются направляющими косинусами преобразования. Тогда γ удовлетворяют уравнениям

$$\gamma_{n,m-1} - \gamma_n \gamma_{n,m} + \gamma_{n,m+1} = 0; \quad (2.1.21)$$

в первом и последнем уравнениях, т. е. при $m=1$ и $m=N$, величины γ_{n0} и $\gamma_{n,N+1}$, естественно, опущены. Однако и эти два уравнения можно записать в том же виде, если мы предположим, что величины $\gamma_{n,0}$ и $\gamma_{n,N+1}$ всегда равны нулю.

Решение уравнений (2.1.21) получается с помощью тригонометрической формулы

$$\cos \alpha \sin m\alpha = \frac{1}{2} \sin [(m-1)\alpha] + \frac{1}{2} \sin [(m+1)\alpha].$$

В самом деле, положив $\gamma_{nm} = A \sin m\alpha_n$ (зависимость от времени подразумевается) и $\gamma_n = 2 \cos \alpha_n$, мы удовлетворим всем уравнениям. Одно из дополнительных условий, именно $\gamma_{n0} = 0$, также выполняется; второе требование $\gamma_{n,N+1} = 0$ может быть удовлетворено, если положим, что α_n равно $n\pi/(N+1)$. Так как

$$\sum_{m=1}^N \sin \frac{mn\pi}{N+1} \sin \frac{mn'\pi}{N+1} = \begin{cases} 0 & n' \neq n, \\ \frac{1}{2} (N+1), & n' = n, \end{cases}$$

то значения постоянных A можно выбрать так, чтобы γ были нормированными направляющими косинусами, а u — единичными векторами, если

$\mathbf{e}$ — единичные векторы. Окончательные результаты таковы:

$$\mathbf{u}_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{m=1}^N y_m \sin \frac{mn\pi}{N+1} \exp \left[-2i\omega_0 t \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \right],$$

$$\mathfrak{U} \cdot \mathbf{u}_n = 2 \cos [n\pi/(N+1)] \mathbf{u}_n. \quad (2.1.22)$$

Таким образом, мы нашли совокупность N взаимно-ортогональных единичных векторов в абстрактном векторном пространстве; эти векторы направлены вдоль главных осей оператора $\mathfrak{U}$ (т. е. являются собственными векторами оператора $\mathfrak{U}$).

В этой новой системе координат решение уравнения движения для вектора $\mathbf{y}$, представляющего движение N частиц, получается непосредственно

$$\sum_{m=1}^N y_m \mathbf{e}_m = \mathbf{y} = \sum_{n=1}^N U_n \mathbf{u}_n =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n,m=1}^N U_n \mathbf{e}_m \sin \frac{mn\pi}{N+1} \exp \left[-2i\omega_0 t \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \right].$$

Следовательно,

$$y_m = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^N U_n \sin \frac{mn\pi}{N+1} \exp \left[-2i\omega_0 t \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} \right]. \quad (2.1.23)$$

Допустимые частоты равны $\omega_n/2\pi$, где $\omega_n = 2\omega_0 \sin [n\pi/2(N+1)]$. Составляющие движения $\mathbf{u}_n$ называются *нормальными видами движения*.

Если вначале частицы были смещены на расстояния y_n° и все имели начальные скорости, равные нулю, то значения U_n могут быть найдены с помощью первых уравнений стр. 132

$$(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_n)_{t=0} = U_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{m=1}^N y_m^\circ \sin \frac{mn\pi}{N+1}. \quad (2.1.24)$$

Таким образом, коэффициенты разложений y_m могут быть выражены через начальные значения y_m° и направляющие косинусы преобразования.

Предельный случай непрерывной струны. Для того чтобы перейти от набора N частиц к непрерывной струне, мы увеличиваем N до бесконечности, так что каждая «точка» струны отмечается своим значением n , отличным от других значений. Если струна действительно непрерывна, то N равно несчетной бесконечности, а это означало бы, что соответствующее абстрактное векторное пространство имеет несчетное множество взаимно-перпендикулярных направлений. Такое векторное пространство представить себе довольно трудно, но мы можем утешить себя тем, что здесь такие тонкости с различением типов бесконечности являются скорее академическими, так как на самом деле струна непрерывна лишь приближенно и наши теперешние решения недействительны для частей, размеры которых равны размерам атома или меньше их. Мы можем успокоить себя также тем, что только малое подпространство такого «сверхвекторного» пространства соответствует физической стороне дела, так как из непрерывности следует, что значения y_n и y_{n+1} должны сближаться друг с другом при стремлении к нулю расстояний между последовательными точками.

Во всяком случае, для непрерывной струны можно отказаться от бесчетного множества индексов m , а характеризовать точки расстоянием x от одного из концов, т. е. положить $x = ml/(N+1)$. Кроме того, так как N столь велико, то разницей между N и $N+1$ можно пренебречь. Однако индекс n , которым отмечены различные допустимые виды движения, вовсе не имеет нужды становиться бесконечным или непрерывным, так как мы обычно интересуемся небольшим (в пределах первой сотни или около того) количеством допустимых частот. Таким образом, n будет сохранять целые значения, и n/N будет мало. Более точно, переход совершается следующим образом:

$$\omega_n \rightarrow \frac{n\pi c}{l}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad e_m \rightarrow e(x), \quad y = \sum_x y(x) e(x),$$

$$y \rightarrow \sqrt{\frac{N}{2}} \sum_n Y_n u_n = \sum_{n,x} Y_n e(x) \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-i\omega_n t},$$

$$y(x) = \sum_n Y_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-i\omega_n t}.$$

Последнее равенство дает обычный ряд Фурье для свободных колебаний однородной струны между жесткими зажимами. Функция $\sin(n\pi x/l) e^{-i\omega_n t}$, дающая форму n -го нормального колебания, является функцией преобразования, заменяющей счетное множество собственных векторов u_n оператора $\mathcal{U}$ бесчетным множеством единичных векторов $e(x)$, каждый из которых соответствует отдельной точке непрерывной струны. Суммирование по всем этим точкам обозначено символом суммирования $\sum_x$, хотя его можно было бы выразить также с помощью интеграла по x . Предельный случай уравнения (2.1.24), например, лучше выражается через интеграл. Мы положим Y_n равным предельному значению $U_n \sqrt{2/(N+1)}$, так что уравнения, выражающие Y_n через начальные значения смещений y_n^0 (если начальные скорости равны нулю), имеют вид

$$Y_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N y_m^0 \sin \frac{m n \pi}{N} \right\}, \quad \text{где } m \rightarrow \frac{xN}{l}.$$

Число слагаемых этой суммы по m , лежащих между x и $x+dx$, будет, следовательно, равно $(N/l) dx$. Таким образом, сумма для Y_n в пределе будет равна интегралу

$$Y_n = \frac{2}{l} \int_0^l y^0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

который является обычным интегралом для коэффициентов ряда Фурье и дает амплитуды различных нормальных колебаний.

Предположим теперь, что расстояние между зажимами безгранично возрастает (мы помещаем начало координат в средней точке струны); тогда другой способ предельного перехода, который подробно изложен в гл. 4, приводит нас к общему решению в случае волнового движения бесконечной струны, подвергнутой первоначально смещению $y^0(x)$ и освобожденной в момент $t=0$:

$$y(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-\alpha)} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} y^0(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi. \quad (2.1.25)$$

Действительная часть этого выражения дает истинное смещение точки x в момент t .

Наконец, интересно посмотреть, какой вид принимает в пределе оператор $\mathbb{U}$ для непрерывной струны. Чтобы подойти к уравнению для вектора $\mathbf{y}$, мы ищем предел выражения, полученного в результате применения оператора $\omega_0^2 [\mathbb{U} - 2]$ к вектору $\mathbf{y} = \sum_m y_m \mathbf{e}_m \rightarrow \sum_x y(x) \mathbf{e}(x)$. До перехода к пределу применение оператора давало для составляющих y_m вектора

$$\omega_0^2 [\mathbb{U} - 2] \cdot \mathbf{y} = \frac{N(N+1)T}{pl^2} \sum_{n=1}^N [(y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})] \mathbf{e}_n.$$

Так как расстояние между частицами становится все меньше и меньше, разность $y_{n+1} - y_n$ приближенно можно заменить дифференциалом $dy(x)$, а расстояние между частицами $l/(N+1)$ — дифференциалом dx . Следовательно, $(N/l)(y_{n+1} - y_n)$ при переходе к пределу дает dy/dx , и приведенное выше выражение превращается в

$$\omega_0^2 [\mathbb{U} - 2] \cdot \mathbf{y} \rightarrow c^2 \sum_x \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} \mathbf{e}(x),$$

так что уравнение движения для $\mathbf{y}$ в пределе принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2} = \sum_x \frac{\partial^2 y(x)}{\partial t^2} \mathbf{e}(x) = c^2 \sum_x \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} \mathbf{e}(x)$$

и, следовательно, уравнение для функции преобразования $y(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

т. е. совпадает с волновым уравнением (2.1.9).

Таким образом, проделав окольный путь через абстрактное векторное пространство, мы снова пришли к дифференциальному уравнению в частных производных для волнового движения простой струны. Этот экскурс мы предприняли потому, что подобные рассуждения будут проводиться и в дальнейшем в этой главе там, где другие пути совершенно не так прямы и просты, как в случае струны.

Влияние трения. До сих пор мы пренебрегали сопротивлением движению струны со стороны окружающей среды (воздуха или воды). Для движений с малой амплитудой это сопротивление противоположно направлению движения каждого элемента длины и пропорционально его скорости. Сила, действующая на элемент, лежащий между x и $x+dx$, пропорциональна скорости $\partial\psi/\partial t$ этого элемента и направлена в сторону, противоположную этой скорости. Коэффициент пропорциональности R обычно зависит от частоты колебаний струны, но в случае, когда вязкость среды достаточно велика, он не зависит от частоты. Этот последний случай наиболее прост, и мы с него начнем.

Уравнение движения, если принять во внимание натяжение и трение среды, без учета жесткости и внутреннего трения струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial \psi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad k = \frac{R}{2\rho}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Благодаря трению свободные колебания, конечно, становятся затухающими. Если струна натянута между двумя жесткими зажимами, нахо-

дящимися друг от друга на расстоянии l , то форма нормальных колебаний не изменяется трением и по-прежнему будет иметь вид $\sin(\pi nx/l)$. В то же время отдельные колебания затухают с течением времени, так как решение этого уравнения имеет вид

$$\phi = \sum_n A_n \sin \frac{\pi nx}{l} e^{-kt - i\omega_n t}, \quad \omega_n^2 = \frac{\pi n c}{l} - k^2.$$

Если k зависит от частоты, то для n -го нормального колебания оно будет иметь значение, соответствующее величине ω_n , так что различные колебания будут затухать с различными скоростями.

С другой стороны, если струна имеет очень большую длину и приводится в движение на одном конце действием синусоидальной силы $F e^{-i\omega t}$, то волны будут затухать при перемещении по струне в большей степени, чем с течением времени. Решение в этом случае имеет вид

$$\phi = A e^{i\alpha x - i\omega t}, \quad \alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{T} + i \frac{R \omega}{T};$$

следовательно, α имеет положительную мнимую часть, которая и вызывает затухание в направлении движения волны.

Уравнение диффузии. В одном из возможных предельных случаев силы вязкости могут полностью преобладать над инерционными силами, так что уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad x^2 = \frac{R}{T}. \quad (2.1.26)$$

Это уравнение много раз будет встречаться в этой книге. Так как оно также описывает поведение некоторого растворенного вещества, диффундирующего в растворителе (где ϕ — плотность растворенного вещества), то обычно его называют *уравнением диффузии*¹⁾.

Так же как и в случае волнового уравнения (2.1.9), здесь имеет место тенденция к выпрямлению искривленных участков, но здесь *скорость* любого участка струны пропорциональна и противоположна по знаку кривизне этого участка, тогда как в волновом уравнении *ускорение* пропорционально кривизне и противоположно ей по знаку. Короче говоря, мы и здесь по существу имеем дело с условием равновесия. Для волнового уравнения скорость движения искривленного участка непрерывно возрастает до тех пор, пока он не сделается прямолинейным, и только тогда скорость начинает уменьшаться, что и вызывает колебательное движение. В случае же уравнения диффузии скорость любого участка становится равной нулю, как только этот участок окончательно выпрямляется, так что здесь колебательного движения нет. Таково предполагаемое поведение струны, не имеющей массы, движущейся в вязкой жидкости, когда затухание больше критического.

В случае волнового уравнения общее решение может быть выражено в виде результата наложения друг на друга двух волн, движущихся в противоположных направлениях $f(x+ct) + F(x-ct)$, что объясняется симметричностью соотношений между x и t в уравнении. В уравнении диффузии этой симметрии нет, и поэтому не существует простого выражения для общего решения. Кроме того, здесь имеется различие между положительным и отрицательными направлениями времени, что вытекает из того факта, что производная по времени, входящая в уравнение, есть

¹⁾ Уравнение (2.1.26) называют также уравнением теплопроводности. — Прим. ред.

производная первого порядка, тогда как в волновом уравнении она является производной второго порядка.

Например, если струна имеет синусоидальную форму $Ae^{i\omega x/c}$, то для волнового уравнения зависимость от времени имеет также синусоидальный характер $e^{-i\omega t}$. Но для уравнения диффузии множитель, дающий зависимость от времени, имеет вид $e^{-(\omega/\kappa c)^2 t}$ и не является симметричным относительно времени. Для положительного времени синусоидальная форма затухает экспоненциально (по закону показательной функции), но рассматривая обратное течение времени, мы видим, что амплитуда волны безгранично возрастает, когда t становится все больше и больше (по абсолютной величине), оставаясь отрицательным. Чем меньше длина волны флуктуаций (т. е. чем больше ω), тем быстрее функции затухают в положительном направлении времени и тем быстрее они растут в отрицательном. Как мы покажем детально дальше, для волнового уравнения можно и предсказать дальнейшее движение, и восстановить предшествующее движение, если известно состояние в данный момент. Для уравнения диффузии возможно только предсказание, попытки восстановить прошлое приводят только к расходящимся выражениям.

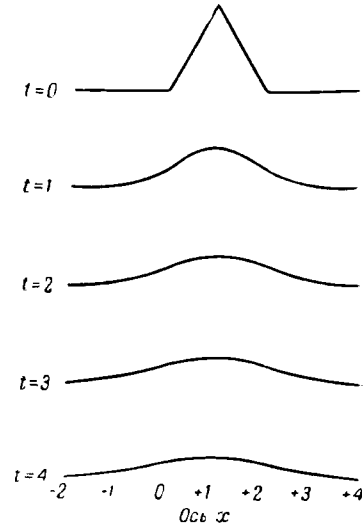


Рис. 2.6. Последовательные графики решения уравнения диффузии; верхняя кривая относится к начальному моменту.

Уравнение Клейна — Гордона. Один из видов уравнений, встречающихся в квантовой механике (применяется для описания скалярного мезонного поля), может быть также иллюстрирован с помощью гибкой струны, на которую действуют дополнительные силы жесткости, вызванные средой, окружающей струну. Если, например, струна заделана в тонкий резиновый лист (или если она расположена вдоль оси резинового цилиндра, внешняя поверхность которого остается неизменной), то дополнительно к восстанавливающей силе, вызванной натяжением струны, появится восстанавливающая сила, вызванная влиянием резины на каждый участок струны. Если смещение элемента dx струны в точке x равно $\phi(x)$, то эта восстанавливающая сила будет равна $-K\phi dx$, где K — постоянная, зависящая от упругих свойств и распределения резины.

Таким образом, уравнение движения струны имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu^2 \phi, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}, \quad \mu^2 = \frac{K}{T}, \quad (2.1.27)$$

где ρ — линейная плотность, а T — натяжение струны. Это уравнение в квантовой механике называется *уравнением Клейна — Гордона*. Заметим, что в случае, когда c есть скорость света, это уравнение, как и волновое уравнение, инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца, так что решения этого уравнения ведут себя соответствующим образом относительно пространственно-временных вращений специальной теории относительности.

Влияние на такую струну постоянной единичной поперечной силы, приложенной в точке $x = \xi$, отличается от влияния такой силы на струну, находящуюся под действием только натяжения. Форма упруго

подкрепленной струны бесконечной длины, соответствующая форме (2.1.7), в этом случае дается уравнением

$$G(x|\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} e^{\mu(x-\xi)}, & x < \xi, \\ \frac{1}{2\mu} e^{\mu(\xi-x)}, & x > \xi. \end{cases} \quad (2.1.28)$$

В случае обычной струны, находящейся под действием одного натяжения, мы должны были считать струну имеющей конечную длину, так как конечные опоры были только «якорями», препятствовавшими силе переместить струну на неопределенно большое расстояние. Напротив, в данном случае упругая среда, в которой заключена струна, поглощает почти полностью влияние силы; точное положение точек опоры важно только для частей струны, находящихся на малых по сравнению с $1/\mu$ расстояниях от обоих концов. Следовательно, в этом случае можно взять функцию Грина, не зависящую от конечных точек (т. е. для бесконечной струны). Формула показывает, что часть среды, удаленная от точки приложения силы на расстояние примерно $1/\mu$, поглощает большую часть силы и смещение струны за пределами этого расстояния становится весьма малым.

В случае, когда приложенные поперечные силы произвольного вида распределены вдоль струны, соответствующая форма струны выражается интегралом от функции Грина, определенной уравнением (2.1.28); общая форма такого интеграла дана в равенстве (2.1.8).

Если упруго подкрепленная струна натянута между жесткими зажимами, находящимися друг от друга на расстоянии L , она может колебаться; при этом последовательные нормальные виды движения аналогичны по форме нормальным колебаниям для струны без упругой оболочки, но отличаются от них частотой.

Ряд Фурье для свободных колебаний общего типа имеет вид

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n^2 = c^2 \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \mu^2 \right].$$

Допускаемые здесь частоты, благодаря наличию слагаемого μ^2 , пропорционального коэффициенту упругости K окружающей струну среды, все будут больше соответствующих частот для обычной струны. Этот результат не является неожиданным, так как добавленная жесткость среды должна увеличить собственные частоты.

Вынужденное движение упруго подкрепленной струны. Струна, заделанная в резину и приводимая в движение на одном конце поперечной переменной силой, также обнаруживает известные характерные особенности в поведении по сравнению с обычной струной.

Решение уравнения для волны, распространяющейся только вправо, соответствующее случаю бесконечно длинной струны, имеет вид

$$\phi = \begin{cases} A \exp[-x\sqrt{\mu^2 - (\omega/c)^2} - i\omega t], & \omega^2 < \mu^2 c^2 = K/\rho, \\ A \exp\{i(\omega/c)\} [x\sqrt{1 - (\mu c/\omega)^2} - ct], & \omega^2 > K/\rho. \end{cases} \quad (2.1.29)$$

При очень больших частотах приложенной силы волновое движение очень похоже на движение обычной струны; только скорость волны¹⁾ всегда

¹⁾ Имеется в виду фазовая скорость. — Прим. ред.

несколько больше c и отличается от c множителем $1/\sqrt{1-(\mu c/\omega)^2}$. Здесь снова добавочные упругие силы стремятся «ускорить» волны. Волновое число $2\pi/\lambda = \sqrt{(\omega/c)^2 - \mu^2}$ не является более линейной функцией от частоты. Таким образом, дополнительно подкрепленная струна ведет себя подобно *диспергирующей среде*. Общая волна составлена из волн, имеющих различные значения ω ; эти волны больше не удерживаются вместе, но расходятся из их начального положения в последовательность волн, все более и более

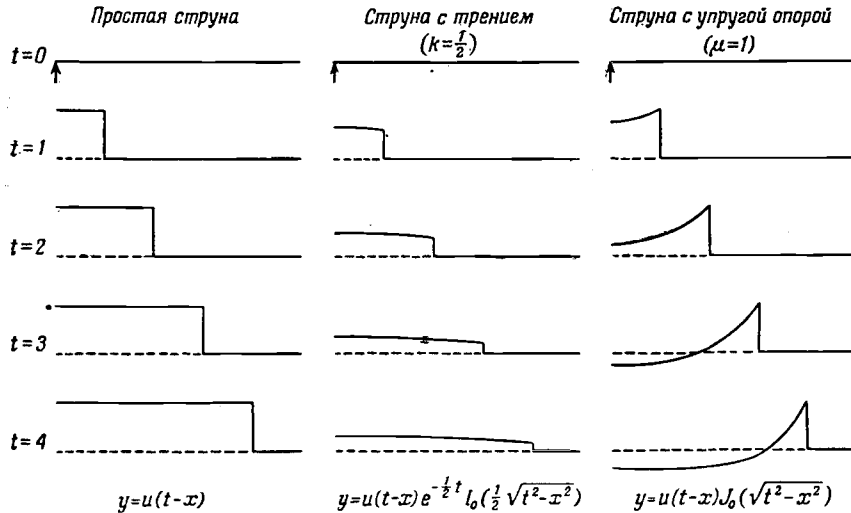


Рис. 2.7. Последовательное изменение формы трех видов струн, приведенных в движение у левого конца в момент $t=0$.

рассеянных вдоль всей длины струны. Конечно, это поведение значительно отличается от поведения волны, движущейся по обыкновенной, не подкрепленной струне, так как там среда не была диспергирующей и форма волны не изменялась по мере ее распространения.

При низких частотах влияние упругой среды преобладает над влиянием инерции массы струны, и для частот, меньших чем $(1/2\pi)\sqrt{K/\rho}$, уже вообще не будет подлинного волнового движения; точки струны движутся взад и вперед, имея одну и ту же фазу, причем величина отклонения от положения равновесия будет наибольшей вблизи точки приложения силы и быстро убывает по мере удаления от приводимого в движение конца.

Волновой импеданс для струны этого типа вычисляется аналогично тому, как была получена формула (2.1.13):

$$Z_{\omega} = \begin{cases} \frac{iT}{\omega} \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}, & \omega < \mu c, \\ \mu c \sqrt{1 - \left(\frac{\mu c}{\omega}\right)^2}, & \omega > \mu c. \end{cases} \quad (2.1.30)$$

При высоких частотах волновой импеданс имеет действительное значение и мало отличается от значения μc импеданса для простой струны. Однако при уменьшении частоты волновой импеданс убывает, а скорость волны возрастает до тех пор, пока при $\omega = \mu c = \sqrt{K/\rho}$ волновой импеданс не станет равным нулю, а скорость волны равной бесконечности. Это — частота резонанса для массы струны и упругости среды.

При более низких частотах импеданс будет мнимым, и здесь нет подлинного волнового движения.

Резюме. Различные причины побудили нас подробно рассмотреть движения гибкой струны. Во-первых, наши рассуждения при изучении струны являются простым примером тех рассмотрений, которые встретятся при изучении других уравнений полей. В каждом случае мы будем рассматривать различные уравнения, получающиеся в предположении, что та или другая сила становится преобладающей; таким образом, изучая различные предельные случаи, мы достигнем достаточно полного понимания наиболее общего случая. Во-вторых, различные типы движения струны дают нам очень наглядное представление о формах решений многих важных дифференциальных уравнений с частными производными, к которым приводит нас изучение многих физических явлений. Те же уравнения появляются часто и тогда, когда они соответствуют физическим состояниям, которые представить себе наглядно гораздо труднее. В-третьих, технические приемы решения, которые здесь были затронуты в связи с физическими проблемами, имеют обычно применение во многих других задачах, и ссылка на простое решение задачи в случае струны поможет нам лучше понять и другие более сложные вопросы.

Мы теперь расширим область наших рассуждений и изучим несколько типичных физических явлений, имеющих большое значение, чтобы показать, какие типы полей могут быть использованы для описания этих явлений и каким дифференциальным уравнениям с частными производными должны удовлетворять эти поля.

2.2. Волны в упругой среде

Для нашего первого изучения трехмерной задачи о взаимной связи физических явлений с дифференциальными уравнениями полей вернемся к задаче о поведении упругой среды (которую мы начали рассматривать в § 1.6), чтобы поставить вопрос о волновом движении в такой среде. Как и в случае струны, мы предполагаем, что смещения точек среды малы и что нас не интересуют перенос или вращение среды в целом. Пусть смещение $s(x, y, z; t)$ элемента $dx dy dz$ среды в точке x, y, z в момент времени t мало и его вращение, вызванное деформацией, также мало. Инерциальное сопротивление элемента, вызванное ускорением изменения величины s , равно $(\partial^2 s / \partial t^2) \rho dx dy dz$, где ρ — плотность среды.

В § 1.6 мы определили аффино́р напряжений $\mathfrak{Z} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = iF_x + jF_y + kF_z$, сказав, что сила, действующая на элемент $d\mathbf{A}$ поверхности среды, равна $\mathfrak{Z} \cdot d\mathbf{A}$. Например, сила, действующая на грань $dy dz$ элемента, перпендикулярную к оси x , равна $F_x dy dz$. Таким образом, результирующая сила, действующая на элемент $dx dy dz$ и обусловленная разностью значений F_x на грани $dy dz$ элемента и на противоположной его грани, равна $dx (\partial F_x / \partial x) dy dz$; поэтому результирующая сила, полученная от действия сил на все грани элемента, равна $\nabla \cdot \mathfrak{Z} dx dy dz$.

Но в уравнении (1.6.28) мы показали, что аффино́р напряжений $\mathfrak{S}$ связан с аффино́ром деформаций соотношением $\mathfrak{Z} = \lambda |\mathfrak{S}| \mathfrak{S} + 2\mu \mathfrak{S}$, где μ есть модуль сдвига среды и $\lambda + \left(\frac{2}{3} \mu\right)$ — ее модуль всестороннего сжатия (отношение изотропного давления к относительному уменьшению объема).

Из формулы (1.6.21) мы имеем соотношение между $\mathfrak{S}$ и смещением s , даваемое символически равенством $\mathfrak{S} = \frac{1}{2} (\nabla s + s \nabla)$. Сопоставляя все эти уравнения, мы окончательно приходим к уравнению движения среды

под действием ее собственных восстанавливающих сил упругости

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} &= \nabla \cdot [\lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{s} + \mu \nabla \mathbf{s} + \mu \mathbf{s} \nabla] = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} + \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{s} = \\ &= (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Здесь мы использовали равенство (1.5.12) для преобразования векторных операторов.

Продольные волны. Форма уравнения движения наводит на мысль, что по крайней мере часть вектора можно выразить через градиент скалярного потенциала ϕ , так как тогда уравнение значительно упрощается. Если $\mathbf{s} = \operatorname{grad} \phi$, то уравнение для ϕ

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla^2 \phi = \frac{1}{c_c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}; \quad c_c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (2.2.2)$$

является как раз *волновым уравнением* для скалярного волнового потенциала ϕ и представляет собой обобщение уравнения (2.1.9) на случай трехмерного пространства. Скорость распространения волн c_c будет тем больше, чем больше модули λ и μ (т. е. чем больше жесткость среды), и тем меньше, чем больше ρ (т. е. чем больше плотность среды).

Когда решение уравнения (2.2.1) является градиентом скаляра, аффинорный оператор $\mathfrak{D} = \nabla(\nabla\phi)$ симметричен, аффинор вращения $\mathfrak{R}$ равен нулю и $\mathfrak{D} = \mathfrak{S}$ является аффинором чистой деформации. В случае такого решения отсутствует скручивание среды и имеются только растяжения и сжатия. Волны этого рода называются *продольными* или волнами безвихревого расширения. Они могут также распространяться в жидкой и газообразной среде, где модуль сдвига μ равен нулю.

Но градиент скалярного потенциала, как известно, не является наиболее общим векторным полем, возможным для смещений $\mathbf{s}$, как было показано на стр. 59. Для определения наиболее общего векторного поля необходимы три скалярные функции положения по одной для каждой компоненты, в то время как градиент скаляра определяется единственной функцией — потенциалом. Следовательно, для задания самого общего решения уравнения (2.2.1) нужны еще две другие скалярные функции точки.

Конечно, можно найти уравнения для каждой декартовой компоненты $\mathbf{s}$, но тогда мы получили бы три уравнения, каждое из которых содержит все три компоненты и которые нужно решать совместно, что очень громоздко.

Поперечные волны. Для получения других решений гораздо лучше воспользоваться некоторыми свойствами векторного оператора ∇ , как мы это делали для градиента потенциала; так как вихрь градиента равен нулю, то один из членов уравнения выпал и мы получили волновое уравнение скалярного потенциала. Этот результат [совместно с результатом (1.5.15)] наводит на мысль о том, чтобы испытать вихрь некоторого вектора, так как дивергенция вихря равна нулю и, следовательно, член, содержащий дивергенцию, выпадет. В связи с этим в качестве другого решения для $\mathbf{s}$ возьмем $\operatorname{rot} \mathbf{A}$; полученное для $\mathbf{A}$ уравнение имеет вид

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}; \quad (2.2.3)$$

оно является, как дальше мы покажем, также волновым уравнением. Скорость c_s этой волны меньше скорости продольной волны, будучи про-

порциональной корню квадратному из модуля сдвига μ вместо корня квадратного из комбинации $\lambda + 2\mu$. Это указывает на то, что эта часть решения есть *волна сдвига*, который здесь и на самом деле имеет место. Так как для этого вида смещений коэффициент объемного расширения $\theta = \text{div } s$ [см. формулу (1.6.23)] равен нулю, то здесь не будет ни расширения, ни сжатия и, следовательно, деформация должна иметь вид сдвига. Мы будем называть обычно этот тип волны поперечной волной (волной равнообъемного искажения формы).

Такое разделение общего решения на продольную часть, которая является градиентом скалярного потенциала ϕ , и поперечную часть, являющуюся вихрем векторного потенциала A , по методу, изложенному на стр. 59, является очень удобным, так как получающиеся две волны движутся с различными скоростями; всякое другое разделение решения привело бы к волнам, содержащим части обоих решений и, следовательно, имеющим обе скорости, что, конечно, является более громоздким.

Однако на первый взгляд два решения, которые мы получили, содержат в себе много лишнего. Раньше мы отметили, что для того, чтобы дать наиболее общее выражение для вектора s , нужны только три независимые функции положения; здесь же мы имеем их четыре — одну для скалярного потенциала и три — для компонент векторного потенциала. Но это излишество только кажущееся, так как мы не используем всех степеней свободы векторного потенциала A . В процессе составления вихря вектора A для получения s мы пренебрегаем частью A , именно частью, которая может быть представлена как градиент скаляра, и используем только ту часть, для которой дивергенция равна нулю. Таким образом, часть A , применяемая для составления общего выражения для s , определяется только двумя независимыми функциями положения, и они вместе со скалярным потенциалом и являются необходимыми тремя функциями.

Придавая нашим рассуждениям другой вид, мы скажем, что любое векторное решение уравнения (2.2.1) можно разбить на две части: *продольную часть*, имеющую равный нулю вихрь, которая всегда (см. стр. 59) может быть представлена как градиент скалярного потенциала, и *поперечную часть*, дивергенция которой равна нулю и которая всегда может быть представлена (см. стр. 60) как вихрь векторного потенциала. Уравнение (2.2.2) показывает, что если решение вначале было продольным, оно продолжает оставаться продольным, и если оно вначале было поперечным, оно будет оставаться поперечным все время, пока величины λ и μ имеют одни и те же значения. Если же λ или μ или обе величины резко изменяются на граничной поверхности или меняются непрерывно в некоторой области пространства, то может произойти отражение волны и при этом продольная и поперечная волны могут перемешаться.

В настоящем случае продольная часть соответствует волновому движению с определенной скоростью, а поперечная часть соответствует волновому движению с другой, меньшей скоростью. В действительности здесь имеются две независимые поперечные части. Одна из них может быть взята как вихрь некоторого решения A уравнения (2.2.3) [между прочим, вихрь решения уравнения (2.2.3) является также решением уравнения (2.2.3), как можно легко проверить]. Эта часть называется *первым поперечным решением*. Другая поперечная часть может быть получена как вихрь первого решения [которое пропорционально, как легко проверить, той части A , для которой дивергенция равна нулю]. Эту часть будем называть *вторым поперечным решением* уравнения (2.2.1).

Волновое движение в трехмерном пространстве. Волны на простой струне могут быть только двух общих типов: волны, которые движутся вправо и изображаются общей функцией $F(x - ct)$, и волны, перемещающиеся влево и изображаемые с помощью функции $f(x + ct)$. В трехмерном пространстве возможно значительно большее количество типов волновых движений. Ограничиваясь пока случаем скалярного волнового потенциала ϕ , мы получим, конечно, простое обобщение одномерной волны

$$\phi = f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - ct), \quad (2.2.4)$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, а $\mathbf{a}$ — единичный вектор некоторого произвольного направления, определенного сферическими углами θ и ϕ (см. рис. 2.8). Движение волны происходит здесь всегда в одном направлении, и замечания, сделанные в § 2.1 относительно одномерных волн, могут быть применены здесь без всяких изменений. По причинам, которые вскоре станут ясными, такие волны называются *плоскими волнами*.

Неотъемлемой частью нашего представления о трехмерных волнах является движение *фронта волны*. Гребни и впадины волны часто сохраняются без изменения при их движении вперед, что может быть представлено с помощью поверхностей всюду перпендикулярных направлению движения волны и перемещающихся со скоростью распространения волн c . Эти поверхности называются *поверхностями постоянной фазы*, или просто *фазовыми поверхностями*. Для простой плоской волны вида

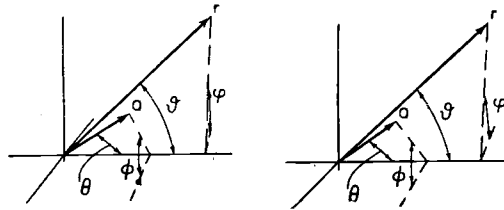


Рис. 2.8. Единичный вектор распространения волны $\mathbf{a}$ и радиус-вектор $\mathbf{r}$.

$f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - ct)$ такими поверхностями являются плоскости $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$, перпендикулярные к единичному вектору $\mathbf{a}$, указывающему направление движения волны. Если волна является синусоидальной и представлена в форме комплексной показательной функции $\phi = Ae^{i(\omega/c)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - ct)}$, то для всех точек какой-либо из этих поверхностей волновая функция имеет одно и то же значение фазового угла комплексной показательной функции (что и является причиной того, что эти поверхности называются фазовыми поверхностями).

Мы можем спросить, существуют ли другие типы волн в трехмерном пространстве, для которых гребни и впадины остаются неизменными при продвижении волны? Небольшое исследование будет достаточным, чтобы убедиться в том, что только плоские волны вида, данного равенством (2.2.4), сохраняют при движении полностью их форму и размер. Однако могут существовать волны, отличные от плоских, которые сохраняют свою форму, но не сохраняют размеров; такие волны имеют вид

$$\phi = A(x, y, z) f[\varphi(x, y, z) - ct]. \quad (2.2.5)$$

Функция f обеспечивает движение волны, а поверхности $\varphi = \text{const}$ являются поверхностями постоянной фазы; множитель A вызывает изменение размера волны от точки к точке.

Подставив это выражение в волновое уравнение $\nabla^2 \psi = (1/c^2) (\partial^2 \psi / \partial t^2)$, получим

$$f \nabla^2 A + (f'/A) \operatorname{div} [A^2 \operatorname{grad} \varphi] + A f'' [\operatorname{grad}^2 \varphi - 1] = 0,$$

где штрихи обозначают производные функции f по ее аргументу. Если f есть произвольная функция ее аргумента $\varphi - ct$, то коэффициенты при f , f' и f'' должны быть равны нулю

$$\nabla^2 A = 0, \quad [\operatorname{grad} \varphi]^2 = 1, \quad \operatorname{div} [A^2 \operatorname{grad} \varphi] = 0. \quad (2.2.6)$$

Последнее уравнение эквивалентно утверждению, что вектор $A^2 \operatorname{grad} \varphi$ является вихрем некоторого вектора, второе равенство показывает, что $\operatorname{grad} \varphi$ есть единичный вектор. Эти ограничения на A и φ достаточно строги, и поэтому нельзя найти много решений. Другими словами, лишь немногие типы волн сохраняют свою форму при движении в пространстве.

Одно из решений этих уравнений имеет сферические фронты волны $\varphi = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; амплитуда такого решения изменяется обратно пропорционально расстоянию r от центра волны и имеет вид $A = B/r$ (B — постоянная). Решение

$$\psi = \frac{B}{r} f(r - ct)$$

представляет собой сферическую волну, расходящуюся из центра $r = 0$. Естественно, здесь может существовать также сходящаяся волна $(D/r) F(r + ct)$.

Другой способ изучения той же общей задачи состоит в том, чтобы найти, какие криволинейные координатные поверхности могут являться фронтами волны. Если волновое уравнение в некоторой системе координат имеет решения, являющиеся функциями только одной из трех координат, то решение, определяющее проходящую волну, может быть образовано из тех решений, которые будут иметь одну из систем координатных поверхностей своими поверхностями постоянной фазы.

Предположим, что мы выбрали систему ортогональных криволинейных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_3 и единичными векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Согласно равенству (1.5.11), волновое уравнение в этих координатах имеет вид

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.2.7)$$

Для упрощения зависимость от времени дается в виде показательного множителя $e^{-i\omega t}$. Если, кроме того, остальную пространственную часть ψ можно разложить на три множителя, каждый из которых зависит только от одной координаты, уравнение называется *разделяющимся*; в этом случае то или другое из трех семейств координатных поверхностей может быть семейством фазовых поверхностей. Другими словами, если уравнение

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right) + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \psi = 0$$

приводит к решениям, зависящим только от ξ_1 , то волновое уравнение будет разделяющимся по отношению к координате ξ_1 .

Если можно найти одно решение этого уравнения, то можно составить два независимых решения $y(\xi_1)$ и $Y(\xi_1)$ (это будет доказано в гл. 5), и комбинация

$$y + iY = A(\xi_1) e^{(i\omega/c)\varphi(\xi_1)}$$

послужит нам выражением для простой гармонической волны, имеющей координатные поверхности $\xi_1 = \text{const}$ в качестве поверхностей постоянной фазы

$$\psi = (y + iY) e^{-i\omega t} = A(\xi_1) e^{i(\omega/c) [\varphi(\xi_1) - ct]}. \quad (2.2.8)$$

Эта форма волны представляет собой более частный случай, чем волна, данная уравнением (2.2.5), так как мы ограничились здесь синусоидальной зависимостью от времени. В обмен на это упрощение мы получаем, что ограничительные требования, налагаемые на A и φ , не так строги, как в (2.2.6). Например, $\text{grad } \varphi$ здесь не обязательно единичный вектор, что соответствует утверждению, что поверхности постоянной фазы не везде перемещаются со скоростью c . Функции A и φ могут зависеть от ω , так что форма волны может быть различной для различных частот. Тем не менее мы снова находим, что лишь немногие формы волнового фронта допускают распространение волн в некоторой степени неизменной формы. Как мы увидим в гл. 5, только небольшое количество систем координат приводит к разделяющимся уравнениям. Таким образом волновое уравнение довольно разборчиво относительно допускаемой формы волнового фронта.

Дальнейшее обсуждение этих вопросов здесь бесполезно. Достаточно заметить только, что имеется тесная связь между свойствами системы координат, допускающей разделенные решения волнового уравнения (т. е. решения, состоящие из множителей, каждый из которых является функцией только одной координаты), и возможностью для соответствующих координатных поверхностей быть поверхностями постоянной фазы для некоторой волны. В гл. 5 мы рассмотрим проблему делимости более подробно.

Векторные волны. Теперь надо вернуться к волнам сдвига, которые не могли быть представлены с помощью скалярной волновой функции, но могут быть изображены с помощью векторного потенциала, с исчезающей дивергенцией и удовлетворяющего уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение также может иметь решения в виде плоских волн

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} \times \mathbf{a}) f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - ct), \quad (2.2.9)$$

где $\mathbf{B}$ — некоторый постоянный вектор и, следовательно, $(\mathbf{B} \times \mathbf{a})$ — постоянный вектор, перпендикулярный к единичному вектору $\mathbf{a}$, указывающему направление распространения волны. Так как величина вектора $\mathbf{A}$ не изменяется при перемещении вдоль линии, по которой направлен $\mathbf{A}$ (т. е. так как градиент f перпендикулярен к $\mathbf{B} \times \mathbf{a}$), дивергенция $\mathbf{A}$ равна нулю, как это и требуется. Вихрь вектора $\mathbf{A}$ есть вектор, перпендикулярный к $\mathbf{A}$ и к $\mathbf{a}$

$$\text{rot } \mathbf{A} = (\text{grad } f) \times (\mathbf{B} \times \mathbf{a}) = [\mathbf{B} - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})] f',$$

и вихрь этого вектора снова параллелен вектору $\mathbf{A}$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{a}) f'' = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

что, конечно, и должно быть, так как $\mathbf{A}$ удовлетворяет векторному волновому уравнению (2.2.3). Направления векторов $\mathbf{A}$ и $\text{rot } \mathbf{A}$ оба перпендикулярны к направлению вектора $\mathbf{a}$, т. е. к направлению распро-

странения волны, что является поводом для наименования этих волн поперечными.

Здесь также имеется векторный потенциал, определяющий сферическую векторную волну, аналогичную скалярной сферической волне $(B/r)f(r-ct)$, рассмотренной раньше. Если $\mathbf{a}_r$ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса r , $\mathbf{a}_\varphi$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{a}_r$ и к оси сферических координат и $\mathbf{a}_\vartheta = \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_r$ — третий единичный вектор, перпендикулярный к обоим прежним, то вектор $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_\vartheta/r)f(r \pm ct)$ является решением векторного волнового уравнения, пригодным всюду, кроме точек сферической оси $\vartheta = 0$. Например, для расходящейся волны

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} f'(r-ct)$$

и

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{a}_\vartheta}{r} f''(r-ct) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Вектор $\text{rot } \mathbf{A}$, очевидно, также является решением векторного волнового уравнения, так что наиболее общая расходящаяся сферическая векторная волна имеет вид

$$\frac{\mathbf{a}_\vartheta}{r} f(r-ct) + \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} F(r-ct).$$

Более сложный вопрос о разделимости векторного волнового уравнения будет рассмотрен позже.

Интегральные представления. Более общие типы волн можно построить, складывая плоские волны различных направлений. Как показано на рис. 2.8, вектор $\mathbf{a}(\theta, \phi)$ есть единичный вектор распространения, имеющий направление, определяемое сферическими углами θ и ϕ , а $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор длины r , направление которого определяется углами ϑ и φ . Наиболее общий вид скалярной волны может быть представлен с помощью интеграла

$$\phi = \int d\phi \int \sin \theta d\theta f[\phi, \theta; \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}(\theta, \phi) - ct], \quad (2.2.10)$$

где f есть проходящая волна, форма которой зависит от углов θ и ϕ . Интегрирование производится обычно в пределах от 0 до 2π для ϕ и от 0 до π для θ , но эти пределы могут быть и мнимыми или комплексными (так, например, от 0 до $\pi/2 + i\infty$ для θ).

Наиболее общая векторная волновая функция может быть составлена подобным же образом

$$\mathbf{A} = \int d\phi \int \sin \theta d\theta \mathbf{F}[\phi, \theta; \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}(\theta, \phi) - ct], \quad (2.2.11)$$

где $\mathbf{F}(\phi, \theta; z)$ есть векторная функция от ϕ , θ и z ; направление вектора $\mathbf{F}(\phi, \theta; z)$ перпендикулярно к направлению $\mathbf{a}(\theta, \phi)$. Так как каждый элемент, стоящий под знаком интеграла, является поперечной волной, то результат интегрирования имеет дивергенцию, равную нулю.

Тем же способом можно также выразить и более частные случаи волн. Например, в очень важном случае простой гармонической волны с временным множителем $e^{-i\omega t}$ выражение для скалярной волны принимает вид

$$\phi = \int d\phi \int Y(\phi, \theta) e^{i(\omega/c)(r \cos \vartheta - ct)} \sin \theta d\theta, \quad (2.2.12)$$

где $r \cos \vartheta = r[\cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos(\phi - \varphi)] = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}(\theta, \phi)$ и $Y(\phi, \theta)$ — неко-

торая функция сферических углов. Для векторного решения $\mathbf{Y}$ есть вектор, перпендикулярный к $\mathbf{a}$ для каждого значения θ и ϕ . В дальнейших главах мы увидим, что чрезвычайно полезно выражать все решения волнового уравнения в такой интегральной форме.

Напряжение и деформация. Возвращаясь в область физики после этого вторжения в область математики, подсчитаем напряжения в среде, соответствующие различным видам волновых движений. Для волн расширения (продольных), проходящих направо вдоль оси x , скалярный потенциал есть $\phi = f(x - c_s t)$ и смещение среды в точке x, y, z в момент времени t равно

$$\mathbf{s} = \text{grad } \phi = \mathbf{i} f'(x - c_s t); \quad f'(\xi) = (d/d\xi) f(\xi). \quad (2.2.13)$$

Аффино́р деформации имеет вид $\mathfrak{S} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla] = \mathbf{i} \mathbf{i} f''(x - c_s t)$, а аффино́р напряжения равен

$$\mathfrak{T} = \lambda \mathfrak{S} \text{div } \mathbf{s} + \mu (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla) = [(\lambda + 2\mu) \mathbf{i} \mathbf{i} + \lambda (\mathbf{j} \mathbf{j} + \mathbf{k} \mathbf{k})] f''(x - c_s t),$$

$$f''(\xi) = \frac{d^2}{d\xi^2} f(\xi). \quad (2.2.14)$$

Другими словами, сила, действующая на единичную площадку, перпендикулярную оси x , направлена вдоль оси x и имеет величину $(\lambda + 2\mu) f''$, тогда как сила, действующая на единичную площадку, параллельную оси x , перпендикулярна к площадке и равна $\lambda f''$. Движение происходит целиком в направлении оси x . Сдвига здесь нет.

Для волны сдвига (поперечной), проходящей направо вдоль оси x со смещениями среды, параллельными оси z , векторный потенциал имеет вид $\mathbf{A} = \mathbf{j} F(x - c_s t)$, и смещение среды в точке x, y, z в момент t равно

$$\mathbf{s} = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{k} F'(x - c_s t), \quad F'(\xi) = (d/d\xi) F(\xi). \quad (2.2.15)$$

Аффино́р деформации имеет выражение $\mathfrak{S} = (\mathbf{i} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{i}) F''(x - c_s t)$, а аффино́р напряжений равен

$$\mathfrak{T} = \mu (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla) = \mu (\mathbf{i} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{i}) F''(x - c_s t), \quad F''(\xi) = (d^2/d\xi^2) F(\xi), \quad (2.2.16)$$

так как $\text{div } \mathbf{s}$ равна нулю. В этом случае сила, действующая на единичную площадку, перпендикулярную оси x , направлена вдоль оси z и имеет величину $\mu F''$; сила, действующая на площадку, перпендикулярную оси z , направлена вдоль оси x и также равна $\mu F''$. Усилий, приложенных к площадке, перпендикулярной оси y , здесь нет. Эта деформация является, конечно, чистым сдвигом в плоскости xz .

Волновая энергия и импеданс. Чтобы найти потенциальную энергию некоторого объема среды, если ее аффино́р деформации есть $\mathfrak{S} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla)$, а аффино́р напряжений равен $\mathfrak{T} = \lambda \mathfrak{S} + 2\mu \mathfrak{S}$, мы сперва найдем приращение потенциальной энергии, когда смещение $\mathbf{s}$ среды в точке x, y, z возрастает на малую величину $\delta \mathbf{s}$. Работа сил напряжения среды в этом объеме может быть подсчитана с помощью скалярного произведения усилия $(\mathfrak{T} \cdot d\mathbf{A})$, действующего на каждый элемент $d\mathbf{A}$ поверхности рассматриваемого объема, и смещения $\delta \mathbf{s}$ этого элемента

$$\delta w = \iint \delta \mathbf{s} \cdot (\mathfrak{T} \cdot d\mathbf{A}) = \iiint [\text{div} (\mathfrak{T} \cdot \delta \mathbf{s})] dv,$$

где первый интеграл распространен на поверхность, ограничивающую

рассматриваемый объем, а второй на сам этот объем. Чтобы вывести второй интеграл из первого, мы воспользовались теоремой Гаусса (1.4.7).

Однако манипуляции с компонентами показывают, что для вектора $\mathbf{A}$ и аффинора $\mathfrak{B}$ имеет место следующая формула:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{B} \cdot \mathbf{A}) = (\nabla \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathbf{A} + \mathfrak{B} : (\nabla \mathbf{A}), \quad \text{где } \mathfrak{B} : \mathfrak{D} = \sum_{mn} B_{mn} D_{nm} = |\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}|.$$

Таким образом,

$$\iiint \operatorname{div}(\mathfrak{I} \cdot \delta \mathbf{s}) dv = \iiint [(\nabla \cdot \mathfrak{I}) \cdot \delta \mathbf{s} + \mathfrak{I} : (\nabla \delta \mathbf{s})] dv.$$

Так как $(\nabla \cdot \mathfrak{I}) dv$ есть результирующая сила, действующая на элемент объема dv , которая равна нулю, когда среда находится в равновесии (а это и имеет место, когда мы определяем потенциальную энергию), то подинтегральная функция в интеграле потенциальной энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} : (\nabla \delta \mathbf{s}) &= \mathfrak{I} : \delta \left[\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla) \right] = \mathfrak{I} : \delta \mathfrak{S} = \\ &= [\lambda |\mathfrak{S}| + 2\mu \mathfrak{S} : \delta \mathfrak{S}] = \delta \left[\frac{1}{2} \mathfrak{I} : \mathfrak{S} \right] = \delta \left[\frac{1}{2} |\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{S}| \right], \end{aligned}$$

где $|\mathfrak{I} \cdot \nabla \mathbf{s}| = |\mathfrak{I} \cdot \mathbf{s} \nabla|$, так как $\mathfrak{I}$ симметрично. Полученное выражение дает приращение потенциальной энергии, соответствующее приращению смещения $\delta \mathbf{s}$. Поэтому ясно, что полная потенциальная энергия поля смещения $\mathbf{s}$ дается интегралом по объему

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \iiint (\mathfrak{I} : \mathfrak{S}) dv = \frac{1}{2} \iiint [\lambda |\mathfrak{S}|^2 + 2\mu \mathfrak{S} : \mathfrak{S}] dv = \\ &= \frac{1}{2} \iiint \left\{ \lambda (\operatorname{div} \mathbf{s})^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dv. \quad (2.2.17) \end{aligned}$$

Кинетическая энергия равна, конечно, интегралу от $\frac{1}{2} \rho (\partial \mathbf{s} / \partial t)^2$, распространенному на тот же объем. Полная плотность энергии в среде равна поэтому

$$w = \frac{1}{2} \rho (\partial \mathbf{s} / \partial t)^2 + \frac{1}{2} |\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{S}|, \quad W = \iiint w dv. \quad (2.2.18)$$

Для плоских волн расширения и сдвига, данных уравнениями (2.2.13) и (2.2.15), плотности энергии принимают вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \rho c_s^2 [f'']^2 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) [f'']^2 = (\lambda + 2\mu) [f''(x - c_s t)]^2, \\ w &= \frac{1}{2} \rho c_s^2 [F'']^2 + \frac{1}{2} \mu [F'']^2 = \mu [F''(x - c_s t)]^2. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Поток энергии через любую данную замкнутую поверхность может быть получен посредством определения скорости изменения полной энергии внутри поверхности. Используя в процессе вычислений уравнение (2.2.1), найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \iiint \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \right) + |\mathfrak{I} \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}| \right] dv = \\ &= \iiint \left[\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) \cdot \nabla \mathfrak{I} + |\mathfrak{I} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right)| \right] dv = \\ &= \iiint \operatorname{div} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) \cdot \mathfrak{I} \right] dv = \iint \left[\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) \cdot \mathfrak{I} \right] \cdot d\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Последний интеграл, являясь поверхностным интегралом, должен быть равен потоку энергии через поверхность, вызванному возрастанием W . Он же со знаком минус впереди равен результирующему *потоку* энергии через замкнутую поверхность *наружу*.

Таким образом, вектор, определяющий плотность потока энергии в среде, в которой распространяются упругие волны, равен

$$\mathbf{S} = - \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \cdot \mathfrak{T}. \quad (2.2.20)$$

Этот результат не является неожиданным; $\partial s / \partial t$ есть скорость частицы среды в точке x, y, z . Усилие, приложенное к элементу поверхности $d\mathbf{A}_u$, перпендикулярной к $\partial s / \partial t$, равно $\mathfrak{T} \cdot d\mathbf{A}_u$, а мощность равна силе, умноженной на скорость. Так как размерность $\mathfrak{T}$ есть сила на единицу площади, размерность $\mathbf{S}$ есть мощность на единицу площади.

Для плоской продольной волны, данной уравнениями (2.2.13) и (2.2.14), переносимая мощность равна

$$S = i(\lambda + 2\mu) c_s [f''(x - c_s t)]^2, \quad (2.2.21)$$

а для поперечной плоской волны, данной уравнениями (2.2.15) и (2.2.16), она равна

$$S = i\mu c_s [F''(x - c_s t)]^2. \quad (2.2.22)$$

Плотность потока энергии для плоской упругой волны обычно называется *интенсивностью* волны. Мы видим, что в каждом случае величина интенсивности равна плотности энергии, умноженной на скорость волны. В плоской волне энергия перемещается со скоростью, равной скорости волны.

В приведенных случаях величины $c_s f''$ и $c_s F''$ — амплитуды скорости среды — можно рассматривать как аналоги плотности электрического тока, а величины $(\lambda + 2\mu) f''$ и $\mu F''$ — амплитуды приложенных усилий — как аналоги электрической напряженности. Произведение этих двух величин дает плотность мощности. Отношение их дает величину, которая может быть названа *импедансом среды* для волн рассматриваемого типа. Для волн сжатия импеданс равен $(\lambda + 2\mu)/c_s = \rho c_s$, а для волн сдвига $\mu/c_s = \rho c_s$.

2.3. Движение жидкости

Жидкость отличается от упругого тела тем, что она не оказывает сопротивления при сдвиге. Мы не можем надеяться найти связь смещения жидкости с тензором напряжений, так как напряжение сдвига может изменяться с течением времени, тогда как смещение остается постоянным, и наоборот, при постоянном напряжении сдвига смещение может изменяться. Требуется, чтобы постоянная *скорость* сдвига вызывала бы постоянное усилие сдвига в жидкости.

Это указывает (если это еще было неясно!), что поведение жидкости удобнее выражать с помощью скоростей, чем с помощью перемещений. Употребляются два способа описания движения жидкости — один, учитывающий скорость каждой частицы жидкости в каждый момент времени, и другой, в котором рассматривается скорость движения жидкости в каждой точке пространства для каждого момента времени. В первом способе векторное поле следует за частицами жидкости в их движении, во втором — поле отнесено к постоянной системе коор-

динат и вектор в данной точке определяет скорость той части жидкости, которая в данный момент находится в этой точке.

Два способа описания движения жидкости отдаленно соответствуют атомистическому представлению о жидкости и представлению о жидкости, как о непрерывной среде. Реальная жидкость является, конечно, совокупностью молекул, каждая из которых движется под влиянием сил. Некоторые из этих сил являются *внутренними*, вызванными воздействием других соседних молекул; характер этих сил определяет сжимаемость жидкости. Другие силы являются *внешними* и вызываются телами, находящимися на некотором расстоянии; таковы, например, силы тяжести, электрические силы; эти силы действуют более или менее одинаково на все молекулы, находящиеся в данной малой области.

Исследуя первый способ описания, мы должны начать с того, чтобы охарактеризовать каждую молекулу ее положением в пространстве при $t=0$; чтобы иметь возможность детально определить последующие движения молекул, мы должны также знать их начальные скорости. Однако для многих проблем достаточно знать только среднее положение и скорость молекул в каждом элементе объема (например, $dx\,dy\,dz$ в точке x_0, y_0, z_0), имеющем большие размеры сравнительно с величиной молекул, но малые по сравнению со всей протяженностью рассматриваемой жидкости. Когда эти средние получены, внутренние силы взаимно уничтожаются (за исключением задачи определения связи между давлением и плотностью) и остаются только внешние силы, действующие на часть жидкости, находящуюся в рассматриваемом элементе. С помощью этого приема осреднения мы получаем уравнения движения жидкости в целом, в которых не учитывается разрывность ее строения и которые соответствуют непрерывному, не имеющему зернистого строения приближению к реальной жидкости. Рассуждения в § 2.4 покажут, как совершается этот переход от слишком детализированного молекулярного изображения жидкости к сглаженному среднему ее изображению. Второй способ описания обычно начинается сразу с рассмотрения сглаженного приближения. Средние скорости частиц такой жидкости, близких в момент t к фиксированной точке x, y, z , считаются функциями t , как будто жидкость действительно непрерывна.

Мы предпочитаем второй способ изображения, так как он более соответствует типам полей, изученных в других частях этой главы. Вектор $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ есть скорость той части жидкости, которая находится в момент t в точке x, y, z . Выражение $\text{div } \mathbf{v}$ есть поток жидкости из «области вблизи x, y, z », так что $dx\,dy\,dz\,\text{div } \mathbf{v}$ есть поток жидкости из элемента $dx\,dy\,dz$ наружу. Если $\text{div } \mathbf{v}$ везде равна нулю, то жидкость

несжимаема. Вектор $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ представляет циркуляцию жидкости «около точки x, y, z »; он называется *вихревым вектором* жидкости (см. стр. 49). Если $\mathbf{w}$ всюду равен нулю, поток жидкости называется *безвихревым* (в этом случае вектор $\mathbf{v}$ является градиентом скалярного потенциала скорости).

Все это напоминает нам основные понятия, связанные с векторным полем, изучение которого проведено в § 1.2. В самом деле, мы использовали там пример движения жидкости, чтобы облегчить описание векторного поля; некоторые термины, такие как вихрь, линии тока и поток были выбраны для того, чтобы аналогия была более полной. Мы можем теперь вернуться к этой точке зрения, чтобы получить некоторые количественные характеристики движения жидкости.

Например, линии тока изображают средние траектории отдельных частиц жидкости. Дифференциальные уравнения этих линий имеют вид

$dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z$. Количество линий тока, пересекающих данную поверхность, равно интегралу потока $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$, распространенному на эту поверхность, также равно среднему потоку жидкости через эту поверхность и т. д. Если вихрь отсутствует (т. е. $\text{rot } \mathbf{v} = 0$) и существует потенциал скоростей, то линии тока везде ортогональны к эквипотенциальным поверхностям и дают естественную систему координат для нашей задачи.

Уравнение неразрывности. Прежде чем перейти к деталям, следует указать два общих свойства поля скоростей жидкости. Одно из них касается связи между суммарным потоком и изменением плотности жидкости. Если $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, а ρ — плотность жидкости в точке x, y, z в момент t , то $\rho \mathbf{v}$ есть вектор, представляющий поток массы через квадратный сантиметр и $dx dy dz \text{ div } (\rho \mathbf{v})$ дает тогда суммарное истечение массы из элемента объема $dx dy dz$. Так как масса не возникает и не исчезает в большинстве рассматриваемых случаев, это истечение массы равно потере массы $\rho dx dy dz$ жидкости в этом элементе. Другими словами,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } (\rho \mathbf{v}). \quad (2.3.1)$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности* жидкости. Из этого уравнения очевидно, что для жидкости постоянной плотности ρ (несжимаемая жидкость) суммарный поток $\text{div } \mathbf{v}$ должен быть равен нулю.

В отдельных задачах удобно предположить, что жидкость возникает (или исчезает) в некоторой точке или точках. Такие точки называются *источниками* (или *стоками*) жидкости. Естественно, что в этих точках уравнение неразрывности не имеет места.

Второе общее свойство поля скоростей движущейся жидкости связано с тем, что система координат векторного поля не перемещается вместе с жидкостью. Чтобы найти скорость изменения векторного свойства $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ жидкости в выделенной частице жидкости (положение частицы дается радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в момент t) или вблизи нее, мы не можем взять скорость изменения $\mathbf{F}$ в точке x, y, z , т. е. $\partial \mathbf{F} / \partial t$, так как выделенная частица не остается обычно в одной точке. Изменение $\mathbf{F}$, которое нас интересует, равно разности между значением $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ в точке x, y, z , где по предположению находилась частица жидкости в момент t , и значением $\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, t + dt)$ в точке $x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt$, где находится частица в момент $t + dt$. Эта разность в развернутой форме, если ограничиться только членами первого порядка, имеет вид $d\mathbf{F} = [\partial \mathbf{F} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F}] dt$. Скорость изменения свойства $\mathbf{F}$ *жидкости*, обозначаемая символом полной производной, дается поэтому уравнением

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F} \quad (2.3.2)$$

через скорость изменения функции $\mathbf{F}$ в точке x, y, z во времени (равную частной производной $\mathbf{F}$ по t) и через скорость изменения функции $\mathbf{F}$ при переходе от точки x, y, z к соседним точкам (определяемую членом $\nabla \mathbf{F}$).

Например, ускорение части жидкости, находившейся «в» точке x, y, z в момент t , равно

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (v^2) - 2\mathbf{v} \times \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Вторая форма этого выражения получается перестановкой компонент вектора, а третья форма — заменой выражения $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ вихревым вектором $\mathbf{w}$. Согласно рассуждению, приведенному на стр. 49, величина вектора $\mathbf{w}$ равна угловой скорости частиц жидкости, «близких» к точке x, y, z , а направление вектора $\mathbf{w}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта, вращающегося вместе с жидкостью.

Скорость изменения скалярных свойств жидкости подсчитывается таким же образом. Скорость изменения плотности данного элемента жидкости, оказавшегося в момент t «в» точке x, y, z , при его дальнейшем движении, подсчитанная этим способом, оказывается равной

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho. \quad (2.3.4)$$

Но уравнение неразрывности дает $\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$, так что

$$\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.3.5)$$

Решения для несжимаемых жидкостей. Если плотность ρ жидкости везде постоянна, уравнение, определяющее $\mathbf{v}$, принимает вид $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

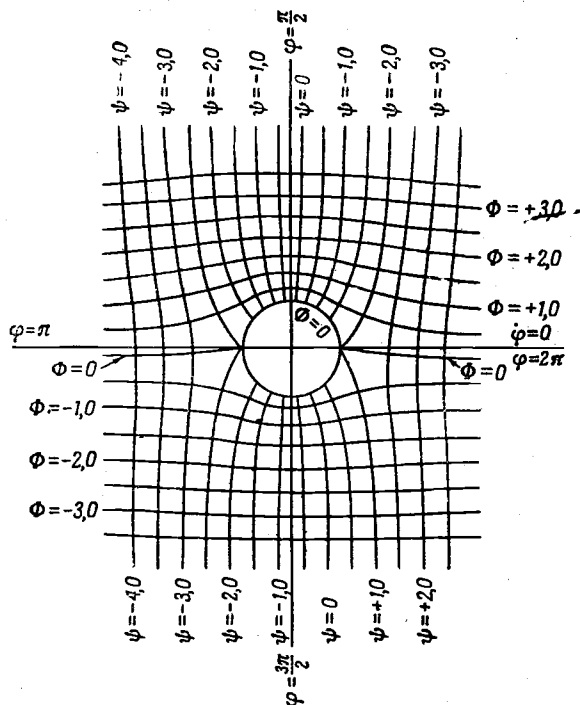


Рис. 2.9. Эквипотенциальные линии ψ и линии тока Φ в двумерном потоке несжимаемой жидкости.

Наличие циркуляции вызывает разрыв потенциала ψ при $\varphi=0$.

Наиболее общее решение этого уравнения может быть выражено с помощью скалярного и векторного потенциала (как показано на стр. 59)

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi; \quad \nabla^2 \psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = 0. \quad (2.3.6)$$

$\mathbf{A}$ может быть любым достаточно правильным векторным полем, удовлетворяющим граничным условиям. Уравнение для потенциала скоростей ϕ называется *уравнением Лапласа*. Оно будет весьма подробно изучено в этой книге позже. Линии тока, рассмотренные на стр. 23 для безвихревого поля, будут, конечно, перпендикулярны к поверхностям, на которых потенциал скоростей сохраняет постоянное значение.

Если вихри отсутствуют, то $\mathbf{A} = 0$ и скорость полностью определяется скалярным потенциалом. Если, кроме того, линии тока лежат в параллельных плоскостях, потенциал скоростей может быть сделан функцией только двух координат и движение называется двумерным (или плоским) потоком. Этот частный случай имеет большое число важных применений в аэродинамике. Здесь линии тока и потенциальные линии образуют двумерную ортогональную систему криволинейных координат.

Уравнение линий тока (см. стр. 23) имеет вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \text{или} \quad -v_y dx + v_x dy = 0.$$

Следовательно, если $v_y = -\partial\Phi/\partial x$ и $v_x = \partial\Phi/\partial y$, то

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy = 0 \quad \text{или} \quad \Phi(x, y) = \text{const}$$

вдоль линии тока. Функция Φ называется *функцией тока*: она связана с потенциалом скоростей ϕ соотношениями

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x}; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

которые называются *уравнениями Коши — Римана*; значительно подробнее они будут изучены в гл. 4 в связи с функциями комплексного переменного.

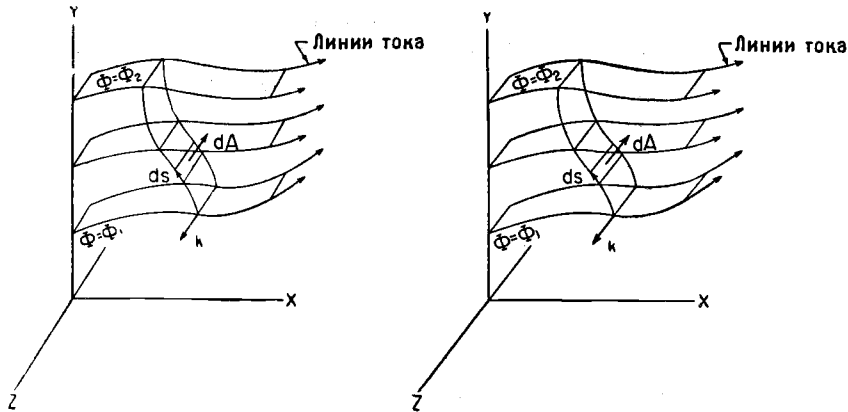


Рис. 2.10. Интеграл потока в двумерном случае.

Раньше мы упоминали, что «плотность линий тока» является мерой полного потока и, следовательно, мерой скорости жидкости. Это легко показать в случае двумерного потока, так как интеграл потока $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ между двумя линиями тока $\Phi(x, y) = \Phi_2$ и $\Phi(x, y) = \Phi_1$ может быть приведен к криволинейному интегралу в плоскости xy . Речь идет об интеграле потока между двумя плоскостями, параллельными плоскости xy и удаленными друг от друга на расстояние, равное единице; за элемент площади $d\mathbf{A}$ можно взять узкую полоску, длина которой равна

единице, а ширина равна ds , где ds — длина элемента дуги кривой, идущей от Φ_1 к Φ_2 в плоскости xy .

Направление $d\mathbf{A}$, конечно, перпендикулярно к направлению ds ; именно, $d\mathbf{A} = ds \times \mathbf{k}$, где, само собой разумеется, ds всегда перпендикулярно к $\mathbf{k}$. Интеграл потока равен тогда

$$\int_1^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_1^2 \mathbf{v} \cdot (ds \times \mathbf{k}) = \int_1^2 (\mathbf{v} \times ds) \cdot \mathbf{k} = \int_1^2 (v_x dy - v_y dx) = \int_1^2 d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Другими словами, полный поток жидкости вдоль области, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$ и поверхностями, определенными линиями тока 1 и 2, равен разности значений Φ_2 и Φ_1 функции тока.

Обычные граничные условия в потоке жидкости требуют, чтобы направления скоростей в точках границы были касательными ко всем ограничивающим поверхностям. Если вязкость значительна, мы должны потребовать, чтобы жидкость в непосредственной близости к поверхности двигалась вместе с поверхностью, иначе говоря, если поверхность неподвижна, то и касательная компонента скорости на границе должна быть равна нулю. Однако если вязкость невелика, можно с достаточным основанием принять, что жидкость может скользить вдоль поверхности без заметного торможения, так что допускается конечная тангенциальная компонента скорости вблизи поверхности.

Примеры. Несколько простых примеров, может быть, разъяснят некоторые из этих утверждений и определений. Скалярный потенциал и соответствующее поле скоростей, данные уравнениями

$$\phi = -\frac{Q}{r}; \quad \mathbf{v} = \frac{Q}{r^2} \mathbf{a}_r, \quad (2.3.7)$$

приводят, как было показано на стр. 27, в случае простирающейся неограниченной жидкости к точечному источнику жидкости в начале

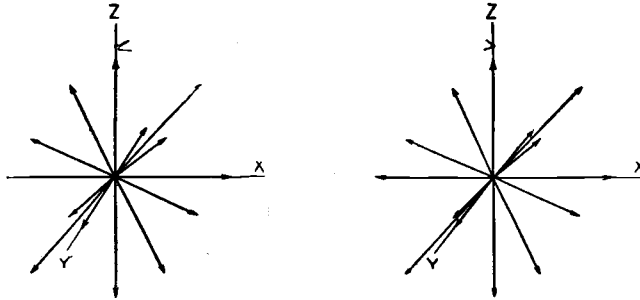


Рис. 2.11. Линии тока для точечного источника.

координат ($r=0$). Как показано в уравнении (1.2.9), полный поток из источника равен $4\pi Q$; эта величина называется *мощностью источника*.

Так как здесь векторный потенциал отсутствует, то вектор $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$, определяющий вихревое движение (см. стр. 150), равен нулю и поток является *безвихревым*.

Другой случай представляет собой поток сдвига, который получается, когда жидкость находится между двумя плоскими параллельными поверхностями (например, $z=0$ и $z=1$), одна из которых движется относительно другой. Если поверхность $z=0$ неподвижна, а поверхность $z=1$ движется в направлении оси x с единичной скоростью,

жидкость между ними, как говорят, подвергается действию единичной скорости сдвига. Поле скоростей остается неподвижным относительно обеих поверхностей и равномерно распределено между ними; оно определяется векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2} z^2 \mathbf{j}; \quad \mathbf{v} = z \mathbf{i}. \quad (2.3.8)$$

Здесь нет результирующего потока ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), а вихревой вектор $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{j}$ постоянен во всей области.

Иным примером поля скоростей, имеющего и векторный и скалярный потенциалы, является следующий, выраженный в цилиндрических координатах r, φ, z :

$$\phi = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \omega a^2 \varphi, & r > a, \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \omega r^2 \mathbf{a}_z, & r < a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

где ω — угловая скорость жидкости внутри цилиндра $r = a$. Вектор скорости тогда имеет вид

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \omega r \mathbf{a}_\varphi, & r < a, \\ \frac{\omega a^2}{r} \mathbf{a}_\varphi, & r > a. \end{cases}$$

Вихревой вектор $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ равен $\omega \mathbf{a}_z$ (как этого и надо было ожидать из его определения на стр. 49) для $r < a$ и равен нулю при $r > a$. Заме-

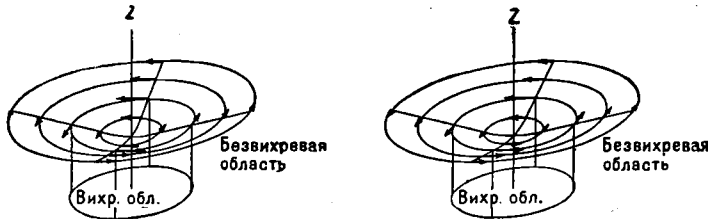


Рис. 2.13. Скорости движения, линии тока и поверхность нулевого давления (свободная поверхность) для простого завихрения.

тим, что при $r > a$ поле скоростей является полем, находящимся вне простой вихревой линии, данной уравнением (1.2.11). Здесь мы предпочли сделать область вихревого движения конечной ($r < a$), вместо того чтобы сконцентрировать ее в бесконечно узкой окрестности прямой линии, как это было сделано в гл. 1.

Напряжения в жидкостях. Прежде чем идти в этом анализе дальше, нужно изучить внутренние напряжения в жидкости. Конечно, здесь имеется давление, которое может быть вызвано силами тяжести или другими силами, действующими на жидкость, или может быть вызвано сжатием жидкости либо и теми и другими причинами.

Кроме того, имеются также напряжения трения, обусловленные *скоростью изменения деформации*, пропорциональные вектору скорости $\mathbf{v}$, вместо вектора смещения $\mathbf{s}$, как это было в случае упругого тела. Мы видели на стр. 72, что деформация упругого тела может быть представлена с помощью симметрического аффинора $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla)$. Скорость изменения этой деформации является также аффинором

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla).$$

Множитель расширения $|\mathfrak{U}| = \operatorname{div} \mathbf{v}$ в силу уравнения неразрывности пропорционален скорости изменения плотности жидкости (эта скорость равна нулю, если жидкость несжимаема). «Остаток» $\mathfrak{U}_s$, который может быть представлен с помощью аффинора

$$\mathfrak{U}_s = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) - \frac{1}{3} \mathfrak{S} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad |\mathfrak{U}_s| = 0,$$

соответствует скорости чистого сдвига и изображает форму скорости изменения аффинора деформации для несжимаемых жидкостей.

Перейдем теперь к рассмотрению формы аффинора напряжения и зависимости ее от скорости деформации. Если жидкость неподвижна, то единственным напряжением является статическое давление p , которое будет вполне симметричным

$$\mathfrak{T} = -p \mathfrak{S},$$

так что сила, действующая на элемент площади $d\mathbf{A}$, равна $-pd\mathbf{A}$ (знак минус обозначает давление, отрицательное натяжение). Если жидкость расширяется без сдвига ($\mathfrak{U}_s = 0$), то возможно возникновение трения чистого расширения, а также изменение давления из-за скорости расширения (это имеет место для всех жидкостей, кроме одноатомных газов). В этом случае напряжение будет иметь вид

$$\mathfrak{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathfrak{S},$$

где λ можно назвать *коэффициентом трения расширения*.

Если, кроме того, налицо и скорость сдвига жидкости, то существует и пропорциональное ей напряжение сдвига $2\eta \mathfrak{U}_s$, где η называется *коэффициентом вязкости*. Полный аффинор напряжения поэтому связан с давлением и со скоростью деформации следующим уравнением:

$$\mathfrak{T} = -p \mathfrak{S} + \lambda \mathfrak{S} |\mathfrak{U}| + 2\eta \mathfrak{U}_s = -(p + \gamma \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathfrak{S} + \eta (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla), \quad (2.3.10)$$

где $\gamma = \frac{2}{3} \eta - \lambda$ может быть названо вторым коэффициентом вязкости. Это уравнение аналогично уравнению (1.6.28) для напряжений в упругом теле, но только там, где раньше стояло смещение $\mathbf{s}$, теперь стоит скорость $\mathbf{v}$ (и, конечно, добавлен член, содержащий давление). Однако это различие не тривиально, так как сила, пропорциональная скорости, является диссипативной силой, в то время как напряжения в (1.6.28) — консервативны.

Можно, конечно, было бы допустить, что постоянные γ и η являются аффинорами, а не скалярами, однако ожидать, что имеет место такое усложнение, здесь менее обосновано, чем при изучении изотропных твердых тел. Мы полагаем, что жидкость изотропна и экспериментальные данные подтверждают это.

Возвращаясь к нашим примерам, мы можем использовать выражение аффинора $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$ в сферических координатах, данное на стр. 117

для вычисления тензора напряжения

$$\mathfrak{T} = \left(-p + \frac{2\eta Q}{r^3} \right) \mathfrak{I} - \frac{6\eta Q}{r^3} \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r, \quad (2.3.11)$$

соответствующего потоку в случае простого источника, данного уравнением (2.3.7). Другими словами, сила, действующая на элемент поверхности, перпендикулярный к радиус-вектору, есть сила сжатия, величина которой равна $p + (4\eta Q/r^3)$, в то время как сила сжатия, действующая на любую площадку, перпендикулярную предыдущей, равна $p - (2\eta Q/r^3)$. Поэтому при наличии вязкости ($\eta > 0$) сила, действующая на элемент жидкости, не будет изотропной и для достаточно мощного потока (Q велико) или для достаточно малого r ; сила, действующая «поперек» радиальной линии тока, становится натяжением, в то время как сила, действующая «вдоль» линии тока, всегда является сжатием. Силы такого рода должны, конечно, изменять форму элемента жидкости при его перемещении от источника по радиусу; этот элемент должен расширяться во всех направлениях, перпендикулярных к радиусу, и соответственно сжиматься в радиальном направлении. Если жидкость вязкая, такую деформацию производит неизотропная сила. Постоянная γ не фигурирует здесь, так как мы предположили, что жидкость несжимаема и $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

В случае единичной скорости сдвига, данного уравнением (2.3.8), тензор напряжения равен

$$\mathfrak{T} = -p\mathfrak{I} + \eta(\mathbf{k}\mathbf{i} + \mathbf{i}\mathbf{k}). \quad (2.3.12)$$

Здесь сила, действующая на единицу площади неподвижной поверхности ($z=0$), равна $\mathfrak{T} \cdot \mathbf{k} = -p\mathbf{k} + \eta\mathbf{i}$. Компонента $-p\mathbf{k}$, нормальная к поверхности, дает, конечно, давление (знак минус указывает на то, что сила направлена к поверхности). Компонента $\eta\mathbf{i}$ параллельна направлению движения верхней плоскости ($z=1$) и вызвана вязкостью жидкости; именно здесь в точности осуществлены условия, соответствующие основному определению коэффициента вязкости жидкости η (η есть величина тангенциальной силы, действующей на единицу площади при единичной скорости сдвига).

В последнем примере, данном уравнением (2.3.9), имеем для напряжения

$$\mathfrak{T} = \begin{cases} -p\mathfrak{I}, & r < a, \\ -p\mathfrak{I} - \frac{4\eta\omega a^2}{r^2}(\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi \mathbf{a}_r), & r > a. \end{cases} \quad (2.3.13)$$

В той части жидкости, где $r < a$, имеется только напряжение, являющееся изотропным давлением, что, впрочем, неудивительно, так как эта часть жидкости вращается, как твердое тело с угловой скоростью ω . Вне этого вихревого стержня при $r > a$ имеется сдвиг жидкости; сила, действующая на единицу площади площадки, перпендикулярной к r , имеет тангенциальную компоненту $-(4\eta\omega a^2/r^2)\mathbf{a}_\varphi$, вызывающую тормозящее действие жидкости вне цилиндра радиуса r на жидкость, находящуюся внутри этого цилиндра (и наоборот).

Сила, действующая на элемент жидкости в точке x, y, z , равна, как мы установили, $(\nabla \cdot \mathfrak{T} + \mathbf{F}) dx dy dz$. Она должна быть равна ускорению $d\mathbf{v}/dt$ элемента, умноженному на его массу $\rho dx dy dz$. Вытекающее отсюда

уравнение (которое получено с помощью формул стр. 116)

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{F} + \nabla \cdot [-(p + \gamma \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathfrak{I} + \eta (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)] = \\ &= \mathbf{F} - \text{grad} \left[p - \left(\frac{1}{3} \eta + \lambda \right) \text{div} \mathbf{v} \right] + \eta \nabla^2 \mathbf{v} = \quad (2.3.14) \\ &= \mathbf{F} - \text{grad} \left[p - \left(\frac{4}{3} \eta + \lambda \right) \text{div} \mathbf{v} \right] - \eta \text{rot rot} \mathbf{v},\end{aligned}$$

где $\gamma = \frac{2}{3} \eta + \lambda$, служит для вычисления давления, если известна скорость; оно дает также возможность подсчитать поступательные или колебательные движения. Это уравнение вместе с уравнением неразрывности (2.3.1) и с уравнением состояния, связывающим давление и сжатие жидкости, является основным во всех многообразных проблемах динамики жидкостей. Различные частные случаи его получаются, если тот или другой член исчезающе мал.

Уравнение Бернулли. Простейший случай соответствует установившемуся движению несжимаемой жидкости, для которого $\partial \mathbf{v} / \partial t$ и $\text{div} \mathbf{v}$ равны нулю. Предположим дополнительно, что внешняя сила $\mathbf{F}$ может быть получена из потенциальной энергии V , $\mathbf{F} = -\text{grad} V$, и используем векторное соотношение

$$\frac{1}{2} \text{grad} v^2 = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}2\eta \text{rot} \mathbf{w} - 2\rho \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= -\text{grad} U, \\ U &= V + p + \frac{1}{2} \rho v^2; \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v}.\end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Скалярную величину U можно рассматривать как плотность энергии движущейся жидкости. Первый член в выражении для U равен плотности потенциальной энергии положения, обусловленной внешними силами, последний член равен плотности кинетической энергии. Если движение жидкости *безвихревое*, вихревой вектор $\mathbf{w}$ равен нулю и U всюду постоянно для потока данного вида. В этом случае скорость жидкости определяем через потенциал скорости при помощи граничных условий и потом находим давление из уравнения

$$p = U - V - \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (2.3.16)$$

где U — постоянная, определяемая из граничных условий. Это уравнение называется *уравнением Бернулли* для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$).

Заметим, что, как может получиться, в некоторых областях для решения требуется достаточно большая скорость, так что давление, найденное по этой формуле, делается отрицательным. В принципе это произойти не может, так как иначе возникла бы кавитация и граничные условия должны были бы быть изменены.

Очень многие задачи, представляющие практический интерес, могут быть решены с достаточной степенью точности, если допустить, что поток определяется потенциалом скоростей (т. е. что поток безвихревой), который удовлетворяет уравнению Лапласа. Давление в любой точке может быть найдено из уравнения Бернулли. Тем же способом могут быть решены даже многие задачи аэродинамики, хотя воздух далеко не является несжимаемым. Только в случае, когда скорость значительной

части воздуха приближается к скорости звука, полученное приближение оказывается непригодным. Более сложный случай *сверхзвукового* потока будет затронут далее в этом параграфе.

Как пример безвихревого движения несжимаемой жидкости мы снова рассмотрим поток жидкости из простого источника, данный уравнением (2.3.7). Если пренебречь гравитационным потенциалом, давление, как функция r , будет иметь вид $p_\infty - (\rho Q^2/2r^4)$, где p_∞ — давление на бесконечном расстоянии от источника. Мы видим, что если действительные размеры источника достаточно малы (r — достаточно мало), то давление может оказаться отрицательным и появится кавитация.

В заключение рассмотрим случай вертикального вихря радиуса a , определенного уравнением (2.3.9). Теперь мы примем во внимание гравитационный потенциал $V = \rho g z$. При $r > a$ вихревой вектор $\mathbf{w}$ равен нулю, так что U постоянно. Предположим, что жидкость, когда она неподвижна, имеет свободную поверхность ($p = 0$) при $z = 0$. Постоянное значение U в таком случае должно быть таким, что $p = 0$ при $z = 0$ и при $r = \infty$, так что

$$\rho g z + p + \frac{\rho \omega^2 a^4}{2r^2} = 0, \quad r > a.$$

При $r < a$ вихревой вектор $\mathbf{w}$ не равен нулю, но $\text{rot } \mathbf{w} = 0$, так что

$$\text{grad } U = 2\rho \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 2\rho \omega^2 r \mathbf{a}_r.$$

Определив отсюда интегрированием U и выбрав постоянную интегрирования так, чтобы давление было непрерывным при $r = a$, получим

$$\rho g z + p + \frac{\rho \omega^2}{2} (2a^2 - r^2) = 0, \quad r < a.$$

Уравнение свободной поверхности есть уравнение поверхности $p = 0$

$$z = \begin{cases} \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - 2a^2), & r < a, \\ -\frac{\omega^2 a^4}{2gr^2}, & r > a. \end{cases} \quad (2.3.17)$$

В обоих рассмотренных случаях вязкость не влияет на давление, так как в уравнении, определяющем давление для установившегося движения несжимаемой жидкости, содержится единственный член, зависящий от вязкости, и этот член содержит также $\text{rot } \mathbf{w}$; в наших же простых примерах $\text{rot } \mathbf{w} = 0$. Можно рассмотреть другие примеры, в которых $\text{rot } \mathbf{w}$ не равен нулю и, следовательно, вязкость влияет на давление; однако в примерах этого рода чаще всего $\mathbf{v}$ и p зависят от времени.

Волновое уравнение. В качестве первого примера неустановившегося движения рассмотрим колебания с малой амплитудой. В этом случае в уравнении (2.3.14) можно пренебречь членами, содержащими квадрат $\mathbf{v}$, и мы получаем более простое уравнение

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } (p + V) + \left(\frac{4}{3} \eta + \lambda \right) \text{grad } \text{div } \mathbf{v} - \eta \text{rot } \text{rot } \mathbf{v}, \quad (2.3.18)$$

где мы снова положили $\mathbf{F} = -\text{grad } V$; здесь мы более не предполагаем, что жидкость несжимаема.

Чтобы пойти дальше, нужно рассмотреть связь между давлением и сжатием жидкости. Поток материи, вытекающий из любого элемента объема, уменьшает давление сжимаемой жидкости; именно для упругой жидкости, если только сжатие невелико, скорость изменения p пропорциональна дивергенции $\mathbf{v}$, $\partial p / \partial t = -\chi \text{div } \mathbf{v}$. Постоянная χ называется

модулем сжатия рассматриваемой жидкости. Если смещения малы, это равенство можно выразить через смещение $\mathbf{s}$

$$p = -\kappa \operatorname{div} \mathbf{s}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \mathbf{v}.$$

На стр. 59 мы видели, что каждое векторное поле может быть единственным образом разбито на две части, одна из которых является градиентом, а другая — вихрем. Это обстоятельство мы используем здесь дважды; во-первых, положим, что неизвестная скорость $\mathbf{v}$ равна сумме градиента *потенциала скоростей* ψ и вихря векторного потенциала $\mathbf{A}$. Подставив это в (2.3.18), мы приравняем отдельно градиенты и вихри в обеих частях. Равенство вихрей дает

$$\rho \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.3.19)$$

Это уравнение не является векторным волновым уравнением, но представляет собой векторный аналог уравнения диффузии, упомянутого на стр. 136, и будет рассмотрено в § 2.4. Так как здесь содержится производная по времени только первого порядка, а не второго, то решения этого уравнения не будут истинными волнами, распространяющимися с определенной скоростью и имеющими неизменную энергию; эти решения определяют возмущения, затухающие с течением времени и уменьшающиеся при распространении в пространстве. Эти решения будут рассмотрены более подробно в гл. 12. Отметим, что эти волны не влияют на давление. Заметим также, что уравнение для вихря $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ совпадает с уравнением для $\mathbf{A}$. Для нас не должно быть неожиданным, что наличие вязкости вызывает распространение вихревого движения.

Собирая члены с градиентами в обеих частях уравнения, полученного из (2.3.18), и дифференцируя обе части по времени, получим окончательно уравнение для продольных волн

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \lambda \right) \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \quad (2.3.20)$$

$$c^2 = \frac{\kappa}{\rho}.$$

Если вязкость сжатия $\frac{4}{3} \eta + \lambda$ мала, то в жидкости распространяются обычные волны сжатия со скоростью c и все замечания, сделанные относительно волн сжатия в упругой среде, применимы и здесь. Если эта вязкость не равна нулю, то нужно ввести еще член, характеризующий затухание. Например, для простых гармонических волн в случае, когда зависимость от времени выражена множителем $e^{-i\omega t}$, уравнение для второго множителя, выражающего зависимость ψ от положения точки в пространстве, имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2 \psi}{c^2 - i(\omega/3\rho)(4\eta + 3\lambda)} = 0.$$

Другими словами, функция ψ содержит в качестве пространственного множителя показательную функцию с комплексным показателем, определяющую пространственное затухание волны.

С другой стороны, если построена стоячая волна, для которой часть, зависящая от положения точки в пространстве, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$, то уравнение для зависимости ψ от времени имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \lambda \right) k^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + c^2 k^2 \psi = 0.$$

Это уравнение является уравнением колебаний, затухающих с течением времени.

Безвихревой поток сжимаемой жидкости. Нашим следующим примером иного рода движения жидкости, представленного уравнением (2.3.14), будет установившееся безвихревое движение сжимаемой жидкости. Это — важный в аэродинамике случай, когда скорость жидкости приближается к рассмотренной в предыдущем пункте скорости распространения волны сжатия $c = \sqrt{\kappa/\rho}$. Так как приводимые рассуждения почти всегда применяются к потоку воздуха, мы можем, кроме того, наше выражение для сжимаемости κ считать приспособленным для случая газа.

Мы не можем здесь углубляться в подробное рассмотрение термодинамики идеального газа; для справок по этому вопросу имеется большое число книг. Нам здесь нужно только записать два уравнения, связывающих давление p , плотность ρ и температуру T газа, подвергающегося адиабатическому расширению (расширению без потери тепла, содержащегося в газе):

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (2.3.21)$$

где индексами 0 обозначены давление, плотность и температура в стандартных условиях (например, когда жидкость неподвижна). Эти уравнения можно написать иначе, связав давление и плотность газа с его энтропией S :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = A e^{\alpha S}.$$

Адиабатическое расширение газа является расширением при постоянной энтропии S . Постоянная γ равна отношению удельных теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме (ее значение для воздуха равно 1,405).

Продифференцировав это уравнение при постоянном S , найдем $dp/p = \gamma d\rho/\rho$, а воспользовавшись уравнением неразрывности (2.3.5), получим $dp/p = -\gamma dt \operatorname{div} \mathbf{v}$. Сравнивая этот результат с определением модуля сжатия κ , мы видим, что $\kappa = \gamma p$ и что скорость звука (волн сжатия) в газе при давлении p и плотности ρ равна

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (2.3.22)$$

В потоке сжимаемого газа как давление, так и плотность (а следовательно, и скорость звука) меняются от точки к точке внутри газа. Связь между этими величинами получается из уравнений (2.3.15), причем мы снова начинаем с рассмотрения безвихревого установившегося потока ($\mathbf{w} = 0$, $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$; мы также пренебрегаем потенциалом V). Так как теперь ρ не остается постоянным, то интегрирование уравнения $\operatorname{grad} U = 0$ несколько сложнее, чем раньше. И давление, и плотность оказываются функциями скорости воздуха v в любой точке. Максимум давления p_0 и соответствующие значения плотности ρ_0 и скорости звука c_0 достигаются в тех точках, где $v = 0$ (точки застоя). В любой другой точке, согласно уравнениям (2.3.15) и (2.3.21), имеем

$$v^2 = -2 \int_{v=0}^v \frac{dp}{\rho} = 2 \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \int_p^{p_0} p^{-1/\gamma} dp = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right].$$

Это равенство указывает на то, что существует максимум скорости потока

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}},$$

когда давление равно нулю. Такова будет, например, скорость истечения в пустоту. Для воздуха при температуре 15°C ($T_0 = 288$) в точках застоя эта предельная скорость составляет $75\,700\text{ см/сек}$. При этой предельной скорости скорость звука равна нулю (так как давление равно нулю). В точках застоя воздух неподвижен и скорость звука $\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ максимальна. Поэтому, когда v меняется от нуля до $v_{\max}$, безразмерное отношение $M = v/c$ меняется от нуля до бесконечности. Это отношение называется *числом Маха* в точке для потока воздуха. Если число Маха меньше единицы, поток называется *дозвуковым*, если оно больше единицы, поток будет *сверхзвуковым*.

Формулы, выражающие давление, плотность, температуру, скорость звука и число Маха в некоторой точке через скорость потока v в этой точке и через давление p_0 и плотность ρ_0 в точке застоя, имеют вид:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \left[1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} = p_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}; \\ \rho &= \rho_0 \left[1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right]^{1/(\gamma-1)} = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{2/(\gamma-1)}; \\ T &= T_0 \left[1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right] = T_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^2; \\ c &= \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)(v_{\max}^2 - v^2)}; \\ M &= \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \frac{v^2}{v_{\max}^2 - v^2}}; \\ v_{\max} &= \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}} = 75\,700\text{ см/сек}; \\ c_0 &= v_{\max} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 34\,100\text{ см/сек}. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Скорость v_s , для которой число Маха M равно единице (скорость жидкости равна скорости звука), оказывается равной $\sqrt{(\gamma-1)/(\gamma+1)} v_{\max} = 31\,100\text{ см/сек}$ для воздуха при температуре 15°C ($T_0 = 288$) в точках застоя. Для этой скорости давление, плотность и т. д. равны: $p_s = 0,528 p_0$; $\rho_s = 0,685 \rho_0$; $T_s = 0,832 T_0 = 240^\circ\text{K} = -33^\circ\text{C}$; $c_s = v_s$.

Дозвуковой и сверхзвуковой потоки. Различные примеры показывают важность области, где $M=1$, и обнаруживают, что явления в газовом потоке, скорость которого превышает указанную (сверхзвуковой поток), совершенно отличны от явлений в газовом потоке, скорость которого меньше указанной (дозвуковой поток). В качестве очень простого примера рассмотрим воздушный поток, набегающий на очень малый неподвижный предмет, находящийся в точке P (рис. 2.14). Наличие этого предмета постоянно тормозит движение воздуха перед ним, что непрерывно вызывает звуковую волну впереди него. Если скорость воздуха меньше скорости звука, эти волны от препятствия в точке P могут распространяться против течения и, так сказать, предупреждать среду о предстоящей встрече с этим препятствием. Если же воздух движется быстрее звука, то предостережение не может быть послано навстречу и расширяющиеся фронты волн относятся по течению, как видно на

правой части рис. 2.14. Огибающая этих волн является «носовой волной» возмущения и называется *линией* или *поверхностью Маха*. Первое сообщение о наличии препятствия в точке P появляется лишь тогда, когда воздух наталкивается на линию или поверхность Маха. Между прочим,

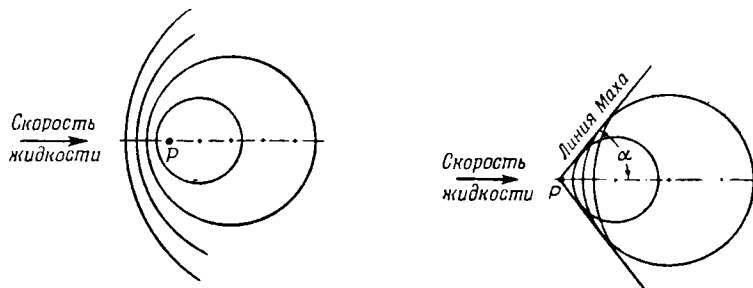


Рис. 2.14. Распространение возмущения в жидкости, вызванного небольшим препятствием в точке P при дозвуковой (слева) и сверхзвуковой (справа) скорости потока.

нетрудно видеть, что угол наклона этих линий к оси потока, так называемый *угол Маха*, дается равенством

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M} = \arcsin \frac{c}{v}.$$

Позже мы снова вернемся к линиям Маха.

В качестве второго примера рассмотрим поток воздуха в трубе с переменным поперечным сечением $S(x)$ (см. рис. 2.15). Для того чтобы

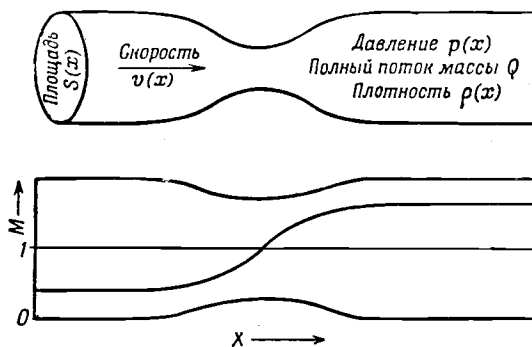


Рис. 2.15. Поток воздуха в трубе с переменным поперечным сечением.

Нижний график показывает три возможных хода изменения величины $M=v/c$ вдоль трубы.

воздух не накапливался где-либо (т. е. чтобы поток был установившимся), необходимо, чтобы через каждое поперечное сечение в единицу времени проходила одна и та же масса Q воздуха. Если поперечное сечение трубы меняется не слишком быстро с изменением x и если внутренняя поверхность трубы гладкая, то плотность и скорость почти одинаковы во всех точках каждого поперечного сечения; поэтому с достаточно хорошим приближением мы можем считать p , ρ и v функциями одного только x . Для такого приближения в случае установившегося потока имеем

$$Q = S(x) \rho(x) v(x) = \frac{S p_0}{v_{\max}^{2/(\gamma-1)}} (v_{\max} - v^2)^{1/(\gamma-1)} v$$

или

$$\ln S = \frac{2}{\gamma-1} \ln v_{\max} + \ln \left(\frac{Q}{\rho_0} \right) - \ln v - \frac{1}{\gamma-1} \ln (v_{\max}^2 - v^2).$$

Дифференцируя по x последнее уравнение и пользуясь выражением для c из (2.3.23), получаем

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} (M^2 - 1); \quad M = \frac{v}{c}. \quad (2.3.24)$$

Поэтому если поток всюду дозвуковой ($M < 1$), то при уменьшении размеров S скорость воздуха v *возрастает*, и наоборот; если же поток всюду является сверхзвуковым ($M > 1$), то при *убывании* S скорость воздуха *убывает*, и наоборот. В обоих случаях при максимуме или минимуме S скорость v также достигает максимума или минимума. Эти случаи показаны на нижней части рис. 2.15.

Тем не менее, если давление p_0 , полный поток Q и т. д. подобраны надлежащим образом, число Маха M может оказаться равным 1 там, где S достигает минимума. В этом случае при обращении dS/dx в нуль dv/dx может не быть равным нулю и скорость при прохождении газа через узкое сечение трубы может возрасти от дозвуковой до сверхзвуковой (конечно, скорость может быть и вначале сверхзвуковой, а в конце — дозвуковой). Этот случай изображен средней кривой нижней части рис. 2.15.

Потенциал скорости. Линейное приближение. Теперь мы должны вывести уравнение, которое даст нам возможность рассчитать векторное поле скоростей, удовлетворяющее любым заданным граничным условиям. Как и в случае безвихревого потока несжимаемой жидкости, предположим, что это поле может быть получено из скалярного поля потенциала скоростей $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$. Уравнение для ϕ получается из уравнения неразрывности (2.3.1) при $\partial \rho / \partial t = 0$:

$$0 = \text{div} (\rho \mathbf{v}) = \text{div} \left[\frac{\rho_0}{v_{\max}^{2/(\gamma-1)}} (v_{\max}^2 - v^2)^{1/(\gamma-1)} \mathbf{v} \right]$$

или

$$0 = \text{div} [(v_{\max}^2 - v^2)^{1/(\gamma-1)} \mathbf{v}].$$

Следовательно, если $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$, то

$$\nabla^2 \phi = J; \quad J = \sum_{m,n=1}^3 \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_m} \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_m \partial x_n}, \quad (2.3.25)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и $c^2 = \frac{1}{2} (\gamma - 1) (v_{\max}^2 - |\text{grad } \phi|^2)$.

Для двумерного потока уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2.3.26)$$

Здесь существует также функция тока Φ , определяющая линии тока и измеряющая поток массы воздуха между двумя линиями тока. Мы найдем эту функцию из уравнения неразрывности для установившегося потока $\text{div} (\rho \mathbf{v}) = 0$, так как можно положить

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial x};$$

тогда $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ автоматически обращается в нуль. Подобно тому как мы видели на стр. 154, полный поток массы между двумя линиями тока (на единицу расстояния по оси z) равен произведению ρ_0 на разность значений Φ для двух рассматриваемых линий тока. Уравнение для Φ аналогично уравнению для ψ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho c} \right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho c} \right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] = -2 \left(\frac{\rho_0}{\rho c} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (2.3.27)$$

Уравнение (2.3.25) не является, конечно, линейным относительно ψ ; его очень трудно решить точно. Если M мало (дозвуковой поток), в первом приближении величиной J можно пренебречь и уравнение сведется к линейному уравнению Лапласа, характеризующему несжимаемые жидкости. Когда найдено решение ψ_0 уравнения Лапласа для интересующего нас частного случая, с помощью уравнения для J можно, исходя из ψ_0 , вычислить J_0 для каждой точки. Тогда второе приближение к истинному значению ψ можно получить, решив уравнение Пуассона $\nabla^2 \psi = J_0$ и т. д.

Однако, если M не мало, такие методы итераций не могут быть использованы и нужно применять другие приближенные методы. Один из приемов полезен в случае, когда поток незначительно отличается от равномерного потока $\mathbf{v} = \mathbf{v}_u$, где $\mathbf{v}_u$ — постоянно. В этом случае направление невозмущенного потока можно считать совпадающим с направлением оси x , и мы можем положить

$$\mathbf{v} = v_u \mathbf{i} + \mathbf{v}_1; \quad \psi = v_u \cdot x + \psi_1,$$

где $\mathbf{v}_1$ мало сравнительно с $\mathbf{v}_u$, хотя $\mathbf{v}_u$ не обязательно является малым сравнительно с c . С точностью до величин первого порядка относительно малого количества $\mathbf{v}_1/c$ имеем

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} (1 - M_u^2) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \approx 0, \quad (2.3.28)$$

где $M_u^2 = [2/(\gamma - 1)] [v_u^2/(v_{\max}^2 - v_u^2)] = v_u^2/c_u^2$ есть квадрат числа Маха для невозмущенного потока.

Это уравнение, будучи линейным относительно ψ_1 , может быть решено, и тем самым установившийся поток может быть определен вблизи неровностей граничных поверхностей, если только эти неровности не вызывают вблизи себя значительных изменений скорости воздуха.

Линии Маха и ударные волны. Уравнение (2.3.28) снова показывает существенное различие между дозвуковым и сверхзвуковым потоками. Это различие можно иллюстрировать в двумерном случае, когда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} (1 - M_u^2) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = 0. \quad (2.3.29)$$

Если M_u меньше единицы, это уравнение преобразуется в уравнение Лапласа для ψ_1 путем изменения масштаба для y (полагаем $y' = y\sqrt{1 - M_u^2}$, $x' = x$). Поэтому линии тока и эквипотенциальные поверхности напоминают линии тока и эквипотенциальные поверхности для потока несжимаемой жидкости, но только растянуты в направлении оси y в $1/\sqrt{1 - M_u^2}$ раз.

Если же M_u больше единицы, мы не можем преобразовать наше уравнение в уравнение Лапласа, так как знак перед членом, содержащим $\partial^2 \psi_1 / \partial x^2$, становится отрицательным и уравнение больше напоминает

волновое уравнение (см. стр. 124) с заменой t на x и с «волновой скоростью» $c_u = 1/\sqrt{M_u^2 - 1}$. Решения полученного уравнения имеют вид

$$\psi_1 = f(y - c_u x) + F(y + c_u x).$$

Как было упомянуто на стр. 163, любая неправильность формы границы (которая здесь, очевидно, является плоскостью, параллельной плоскости xz) порождает «носовую волну», которая образует угол $\alpha = \arctg c_u = \arcsin \frac{1}{M_u}$ с осью x , направлением невозмущенного движения. Этот угол является углом Маха, упомянутым на стр. 163.

В двумерном случае мы можем также получить приближенное уравнение для функции тока Φ , рассмотренной на стр. 164. Предположим, что $\Phi = (\rho/\rho_0) v_u y + \Phi_1$; подставляя это в уравнение (2.3.27) и пренебрегая членами высшего порядка, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} (1 - M_u^2) + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (2.3.30)$$

аналогичное приближенному уравнению для поправки к потенциалу скоростей ψ .

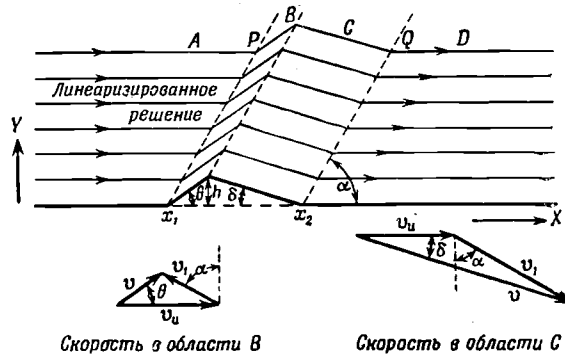


Рис. 2.16. Двумерный сверхзвуковой поток; линеаризованное решение.

Векторные диаграммы показывают способ определения скоростей в областях В и С; скорость в областях А и D равна v_u .

В качестве примера рассмотрим поток воздуха, движущегося со сверхзвуковой скоростью вдоль поверхности, совпадающей в основном с плоскостью xz ; однако в некоторой точке на этой плоскости имеется складка, образующая неправильность на границе, параллельную оси z , как показано на рис. 2.16. Если высота h этой складки невелика, то пригодны приближения, даваемые уравнениями (2.3.29) и (2.3.30), и функция тока Φ_1 и потенциал скоростей ψ_1 являются в этом случае функциями от $y - c_u x$ или, что то же самое, от $x - y/\sqrt{M_u^2 - 1}$. Функция от $y + c_u x$ в этом случае не нужна (почему?). Поэтому изменение скорости v_1 перпендикулярно к линии Маха, т. е. образует угол α с осью y .

Если граничная поверхность дана уравнением $y = B(x)$, причем $B(x)$ равно нулю при $x > x_2$ и при $x < x_1$, то функция тока такова:

$$\Phi = v_0 y - B(x - y/\sqrt{M_u^2 - 1}).$$

Линии тока $\Phi = \text{const}$ изображены в верхней части рис. 2.16. Заметим, что линии тока не возмущаются в области А слева от линии Маха (x_1, P),

а также и в области D справа от линии Маха (x_2, Q) ; обе эти линии наклонены к оси x под углом Маха $\alpha = \arcsin \frac{1}{M_u}$.

Фактическая скорость v (для этого приближения) в областях B и C рис. 2.16 может быть найдена графически, если воспользоваться следующими двумя очевидными фактами: во-первых, вектор v должен быть параллелен линиям тока, т. е. должен образовать угол θ с осью x , и, во-вторых, вектор v_1 перпендикулярен к линии Маха, т. е. образует угол α с осью y . Графическое построение показано на рис. 2.16. Так как v_1 , по предположению, меньше чем v_u , то для скорости воздуха, его плотности, числа Маха и потока массы мы имеем следующие приближенные выражения для двух областей:

$$\begin{aligned} \text{Область } B \quad v &\approx v_u (1 - \theta \operatorname{tg} \alpha), \\ \rho &\approx \rho_u (1 + M_u^2 \theta \operatorname{tg} \alpha), \\ \rho v &\approx \rho_u v_u [1 + (M_u^2 - 1) \theta \operatorname{tg} \alpha], \\ M &\approx M_u \left[1 - \frac{v_{\max}^2 \theta \operatorname{tg} \alpha}{v_{\max}^2 - v_u^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Область } C \quad v &\approx v_u (1 + \delta \operatorname{tg} \alpha), \\ \rho &\approx \rho_u (1 - M_u^2 \delta \operatorname{tg} \alpha), \\ \rho v &\approx \rho_u v_u [1 - (M_u^2 - 1) \delta \operatorname{tg} \alpha], \\ M &\approx M_u \left[1 + \frac{v_{\max}^2 \delta \operatorname{tg} \alpha}{v_{\max}^2 - v_u^2} \right]. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что для потока в области B , несмотря на *уменьшение* скорости воздуха v , поток ρv массы через единичную площадку *возрастает*. Изображение линий тока также подтверждает это, так как на рис. 2.16 видно, что эти линии тока в области B расположены ближе друг к другу, чем в области A , а этому сопутствует возрастание потока массы, как было выяснено на стр. 165. При пересечении первой линии Маха скорость воздуха резко уменьшается и воздух сжимается, при пересечении второй линии Маха движение ускоряется и воздух расширяется, при пересечении третьей линии скорость уменьшается до первоначальной величины и воздух сжимается до первоначального состояния.

Если граница в самом деле искажена так сильно, как изображено на рис. 2.16 (т. е. если углы θ и δ действительно так велики, как показано), то v_1 не будет очень мало сравнительно с v_u и первое приближение не будет достаточным для того, чтобы рассчитать движение. Непосредственно возникающая трудность состоит в том, что угол Маха для воздуха в области B заметно отличается от угла Маха для воздуха в области A , если только скорости v заметно отличаются друг от друга в этих областях. Возникает вопрос: каков должен быть угол между осью x и линией Маха, отделяющей друг от друга области A и B ? Должен ли он совпадать с углом $\alpha_u = \arcsin(1/M_u)$, соответствующим области A , или с углом Маха, соответствующим движению воздуха в области B (последний угол больше чем α_u)? Подробное изучение точного решения показывает, что угол между осью x и действительным «фронтом удара» является промежуточным между двумя указанными выше углами и что воздух при пересечении этого фронта испытывает практически мгновенное изменение состояния; его скорость, плотность и давление становятся равными соответствующим величинам в области B .

Линии Маха, соответствующие областям B и C , расходятся (как показано пунктирными линиями Oa и Ob на рис. 2.17); в области, расположенной между ними, в точном решении происходит *непрерывное* изменение от состояния, соответствующего области B , к состоянию, соответствующему области C . Изменения давления вдоль линии тока H также показаны на рис. 2.17. Здесь видно, что при переходе от области более быстрого движения к области, где скорость меньше, давление *возрастает* скачкообразно, в то время как обратное изменение происходит более плавно.

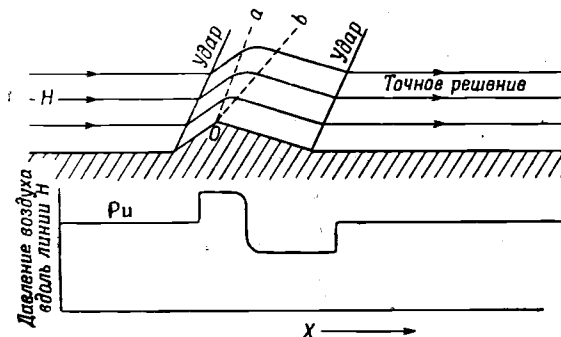


Рис. 2.17. Двумерный сверхзвуковой поток; точное решение.

Показаны линии тока и распределение давления вдоль H .

Еще очень многое можно было бы сказать здесь об аэродинамике сверхзвуковых скоростей, но это слишком далеко отвлекло бы нас от нашей цели в этой главе. Мы здесь изучаем приемы получения уравнений полей, а не занимаемся исчерпывающим рассмотрением различных отделов физики.

2.4. Диффузия и другие явления просачивания жидкости

В предыдущем параграфе мы молча предполагали, что рассматриваемая жидкость одна заполняет пространство, что внутри жестких границ, соответствующих изучаемой задаче, нет других жидкостей или твердых тел, мешающих потоку жидкости. Однако многие интересные задачи связаны с просачиванием жидкости через пористое твердое тело (или через другую жидкость), которое в каждой точке взаимодействует с диффундирующей жидкостью. Примерами могут служить проникновение жидкости через пористую среду, или движение особых жидкостей, например свободных электронов, через газ, или нейтронов через вещество. Весьма важным является вопрос о расчете потока тепла через вещество. Тепло является, конечно, внутренней энергией самого вещества, но оно ведет себя во многих отношениях так, как будто бы оно было жидкостью с «плотностью» и скоростью потока, которые могут быть измерены.

Во всех этих случаях мы все еще можем говорить об эффективной плотности ρ рассматриваемой жидкости, равной средней массе на единицу объема (или количеству тепла на единицу объема и т. д.) в каждой точке, даже в том случае, когда каждый элемент объема содержит также другую жидкость или твердое тело. Во многих случаях мы не можем говорить о средней скорости (что такое скорость тепла, например?), но мы можем всегда говорить о *потоке массы* (или полном потоке тепла и т. д.) через квадратный сантиметр в каждой точке. Это количество J

является вектором и равно $\rho \mathbf{v}$, если здесь имеется такое понятие, как скорость жидкости $\mathbf{v}$.

Вообще говоря, рассматриваемая жидкость не исчезает (хотя в случае, когда жидкость представляет собой нейтронный газ, некоторые нейтроны исчезают благодаря поглощению их ядрами), так что уравнение неразрывности обычно сохраняется

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (2.4.1)$$

Однако, начиная с этого момента, наши рассуждения зависят от того, какую именно жидкость мы изучаем.

Поток жидкости через пористое твердое тело. Например, для жидкости, просачивающейся сквозь пористое твердое тело, обычно можно пренебречь расширением и сжатием жидкости, т. е. положить $\partial \rho / \partial t = 0$. Можно пренебречь также вязкостью, так как влияние ее мало по сравнению с силами трения при просачивании; кроме того, можно пренебречь вихревыми движениями. Таким образом, поток массы $\mathbf{J}$ можно рассматривать как градиент скалярного потенциала, удовлетворяющего уравнению Лапласа $\operatorname{div} [\operatorname{grad} \phi] = \nabla^2 \phi = 0$, как и в случае безвихревого потока несжимаемой жидкости. Отличие от других случаев, рассмотренных в предыдущем параграфе, имеется в уравнении движения, определяющем давление в каждой точке. В настоящем случае это различие состоит в наличии силы, заставляющей жидкость течь через поры; в первом приближении эта сила пропорциональна потоку.

Исходя из уравнения (2.3.14) мы видим, что уравнением для потока массы в данном случае является уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + R\mathbf{J} = \mathbf{F} - \operatorname{grad} p, \quad (2.4.2)$$

где $\mathbf{F}$ — внешняя сила (тяжести и т. д.), действующая на единицу объема жидкости, p — давление, а R — *удельное сопротивление потоку* со стороны пористого материала. Когда пористое вещество оказывает одинаковое сопротивление во всех направлениях, R можно считать скаляром; для неізотропного вещества R будет аффинором, действующим на $\mathbf{J}$. Если движение установившееся, причем $\mathbf{J} = \operatorname{grad} \phi$ и $\mathbf{F}$ является также градиентом потенциальной функции V , это уравнение принимает вид

$$\operatorname{grad} (V - p) = R \operatorname{grad} \phi,$$

а в случае, когда R — постоянно, оно дает просто $p = V - R\phi$, что и служит для определения давления p в каждой точке.

Диффузия. Более интересные проблемы возникают в случае сжимаемой жидкости, а также в случаях, когда вообще нельзя говорить о «силах», действующих на элемент жидкости. Таковы случаи потока тепла, диффузии одной жидкости через другую и диффузии нейтронов через вещество. В случае потока тепла понятие силы, действующей на жидкость, не имеет смысла; в случае диффузии нейтронов существенными силами являются внутренние силы, вызывающие столкновения между нейтронами и частицами вещества.

Ни в одном из этих случаев уравнение движения (2.4.2) не применимо. Поток вызывается не внешними силами и не градиентами давлений, а просто градиентом концентрации. Жидкость по тем или иным причинам стремится перемещаться из точек с более высокой плотностью к точкам с меньшей плотностью, причем поток пропорционален градиенту плот-

ности

$$\mathbf{J} = -a^2 \text{grad } \rho; \quad (2.4.3)$$

постоянная a называется *постоянной диффузии*. Комбинируя это с уравнением неразрывности (2.4.1), получаем *уравнение диффузии*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a^2 \nabla^2 \rho, \quad (2.4.4)$$

которое уже встречалось нам на стр. 136 и 160.

В случае потока тепла ρ есть «количество тепла» в единичном объеме; оно пропорционально температуре $\rho = CT$, где C — теплоемкость вещества *на единицу объема*. Так как уравнение теплового потока имеет вид $\mathbf{J} = -K \text{grad } T$, где K — теплопроводность вещества, то, очевидно, T является решением уравнения диффузии при $a^2 = K/C$.

Доказательство того, что, например, поток нейтронного газа удовлетворяет приближенно уравнению (2.4.3), и определение соответствующей постоянной диффузии требуют подробного изучения механизма диффузии нейтронов; это будет намечено позже в данном параграфе. В таком случае диффузия является следствием беспорядочного движения частиц жидкости, а постоянная диффузии является мерой сопротивления, оказываемого этому движению другим присутствующим веществом.

Уравнение диффузии (2.4.4) отличается от волнового уравнения (2.2.2) тем, что оно содержит производную первого порядка по времени вместо производной второго порядка. Это соответствует тому факту, что диффузия является необратимым процессом подобно движению при наличии трения, при котором энергия теряется (или энтропия возрастает), в то время как волновое движение является обратимым и консервативным. В одномерном случае уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

является простейшей формой *параболического уравнения с частными производными*. Как отмечено на стр. 136, плотность жидкости здесь изменяется так же, как изменяются смещения точек струны в случае полного затухания; плотность жидкости здесь стремится к тому, чтобы стать везде постоянной, причем никогда не «перебарщивает» настолько, чтобы возникли колебания, как это имело место для волновых и вибрационных движений.

Фазовое пространство и функция распределения. Прежде чем идти дальше в изучении диффузии, нам надо будет рассмотреть подробно движения частиц диффундирующей жидкости; это значит, что мы должны на время отказаться от представления о жидкости как о непрерывной, гладкой среде и рассмотреть ее атомистическое, разрывное строение. Такое исследование целесообразно выполнить именно в этой главе, если только удастся показать, как можно описать поведение большого числа атомов с помощью непрерывных полей, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям с частными производными, а также показать, как свойства отдельных атомов связаны с постоянными, содержащимися в уравнениях поля.

Такая связь устанавливается, конечно, с помощью методов кинетической теории. Пусть наша жидкость состоит из N атомов (или молекул), каждый из которых имеет массу m . «Состояние» n -го атома в любой момент задается его положением и скоростью (для молекул существуют еще другие внутренние движения, которые здесь нет надобности рассматривать). Положение атома может быть задано с помощью *радиус-вектора*

$\mathbf{r} = ix + jy + kz$, проведенного к атому из некоторого начала координат; скорость этого атома может быть задана с помощью вектора, изображающего количество движения или *импульс* $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = ip_x + jp_y + kp_z$. Таким образом, состояние атома (в той мере, как это нам здесь нужно) может быть задано положением точки в шестимерном *фазовом пространстве* с координатами x, y, z, p_x, p_y, p_z . Методы кинетической теории дают способы, при помощи которых можно перейти от движения отдельных атомов в фазовом пространстве, движений, вызванных влиянием внешних и внутренних (межатомных) сил, к средним движениям множества атомов.

Переход совершается с помощью *функции распределения*. Для определения этой функции рассмотрим жидкость частного вида, состоящую из N атомов, удовлетворяющих данным начальным и граничным условиям обычного типа. В некоторый момент атомы этой жидкости изображаются множеством N точек в фазовом пространстве. В одних областях фазового пространства имеется концентрация точек, в других областях они расположены очень редко. Если N — достаточно большое число, мы обнаружим тенденцию к «гладкости» густоты этого множества точек. Мы можем записать среднюю плотность точек в различных областях фазового пространства, и эта плотность будет меняться более или менее гладким образом от точки к точке. Предположим теперь, что для подобного множества N атомов мы снова имеем те же начальные и граничные условия, и рассмотрим распределение этих N точек в фазовом пространстве в соответствующий момент времени. Так как начальные и граничные условия являются условиями макроскопическими и относятся только к средним положениям атомов, то второе множество точек не будет в точности совпадать точка в точку с первым множеством. Однако *средняя плотность* точек будет более или менее одинакова в обоих случаях.

Предположим, что мы проделали тот же самый опыт не дважды, а много раз, отправляясь от N атомов, подчиненных условиям, тождественным друг другу с макроскопической точки зрения. Тогда можно получить *плотность вероятности* $f(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ для каждой точки фазового пространства, так что величина $\int dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ указывает, для какой части из общего числа опытов какая-нибудь из рассматриваемых точек находится в момент t внутри элемента $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ фазового пространства в точке $\mathbf{r}, \mathbf{p}$. Функция f называется *функцией распределения*. Если мы рационально поставим наш эксперимент, мы найдем, что f будет достаточно непрерывной функцией $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ и t ; можно ожидать, что она будет удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению, которое будет служить звеном, связывающим микроскопические взаимодействия между атомами жидкости и макроскопические движения жидкости в целом.

Мы можем получить макроскопические свойства жидкости, рассмотренные в предыдущем параграфе, с помощью интегралов, содержащих функции распределения. Обозначим элемент объема в фазовом пространстве через $dV_x dV_p$, где $dV_x = dx dy dz$ и $dV_p = dp_x dp_y dp_z$; иногда применяются сферические координаты r, ϑ, φ в обычном пространстве и p, θ, ϕ в пространстве импульсов; в этом случае соответствующие элементы объема принимают вид $dV_x = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ и $dV_p = p^2 dp \sin \theta d\theta d\phi$.

Прежде всего, интеграл от функции f , распространенный на всю часть пространства, лежащую внутри границ, будет как раз равен числу атомов жидкости

$$\iiint \iiint \iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_x dV_p = N. \quad (2.4.5)$$

Среднее число частиц на единицу объема обычного пространства будет

равно интегралу от f по пространству импульсов; это число после умножения его на m — массу отдельной частицы — дает плотность

$$\rho(x, y, z, t) = m \iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_p, \quad (2.4.6)$$

упомянутую в этом параграфе раньше. Полный средний импульс, отнесенный к единице объема, т. е. к одному кубическому сантиметру,

$$\mathbf{J}(x, y, z, t) = \iiint \mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_p, \quad (2.4.7)$$

является вектором $\mathbf{J}$ потока массы, рассмотренным раньше. Полная кинетическая энергия жидкости равна

$$U = \frac{1}{2m} \iiint p^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_x dV_p. \quad (2.4.8)$$

Если пренебречь силами, действующими между атомами, она равна полной внутренней энергии газа и пропорциональна его температуре. Эти интегралы показывают, что f должно стремиться к 0 для возрастающих значений p настолько быстро, чтобы интеграл для U не был расходящимся.

Одно из дифференциальных свойств функции f имеет общую значимость и связано с уравнением неразрывности (2.4.1). Все частицы в данном элементе dV_p пространства импульсов перемещаются с одной и той же скоростью $\mathbf{p}/m$. Внутри элемента dV_x в точке $\mathbf{r}(x, y, z)$ в момент t содержится $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_x dV_p$ таких частиц; в момент $t + dt$ они будут находиться в точке $\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m) dt$. Следовательно, плотность вероятности f в точке $\mathbf{r}$ в момент t должна быть равна плотности в точке $\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m) dt$ в момент $t + dt$ для частиц, имеющих импульс $\mathbf{p}$:

$$f\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} dt, \mathbf{p}, t + dt\right) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t).$$

Разлагая левую часть в ряд и сохраняя только члены, содержащие первые степени dt , получим *уравнение неразрывности* для функции распределения

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \text{grad} [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)], \quad (2.4.9)$$

где оператор градиента действует на f , как на функцию, зависящую только от x, y, z . Сопоставив это уравнение с уравнениями (2.4.6) и (2.4.7), непосредственно получаем обычную форму уравнения неразрывности (2.4.1). Оно может быть видоизменено благодаря влиянию иных факторов, что будет рассмотрено дальше.

Давление и уравнение состояния. Очень простой пример покажет, как можно использовать функцию распределения, чтобы связать сглаженное давление, рассмотренное в предыдущем параграфе, с движениями отдельных частиц. Рассмотрим сосуд, имеющий объем V и содержащий N атомов газа, равномерно распределенных внутри него; термином «равномерно распределенных» мы отмечаем, что f не зависит от $\mathbf{r}$ внутри V . Чтобы газ остался равномерно распределенным, f не должно зависеть от t и $\mathbf{J}$ должен всюду равняться нулю. Для удовлетворения всем этим требованиям проще всего предположить, что $f = (N/4\pi V) \phi(p)$, где ϕ является функцией одной только величины p импульса частицы,

причем эта функция имеет следующие свойства:

$$\int_0^{\infty} \phi(p) p^2 dp = 1; \quad \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} \phi(p) p^4 dp = \varepsilon. \quad (2.4.10)$$

Первый интеграл определяет произвольную постоянную, от которой зависит величина ϕ (т. е. *нормирует* ϕ), так что $\phi p^2 dp$ есть вероятность того, что частица газа имеет величину импульса, заключенную между p и $p + dp$. Величина ε является тогда средней кинетической энергией частицы.

Подставив это выражение f в интегралы, определяющие указанные величины, связанные с полем, получим

$$\rho = \frac{Nm}{V}; \quad \mathbf{J} = 0; \quad U = N\varepsilon.$$

Следует отметить, что предположение о том, что f равно $(N/4\pi V) \phi(p)$, налагает известные ограничения на природу стенок сосуда, ограничивающих объем V . Во-первых, эти стенки должны отталкивать обратно внутрь V *каждую* частицу, ударяющуюся о них, и не допускать утечки этих частиц; иначе N и f будут изменяться с течением времени. Во-вторых, при отражениях частиц от стенки должно сохраняться распределение импульсов, даваемое функцией $\phi(p)$; так что образы частиц, только что отраженных от стенки сосуда, не должны отличаться, по крайней мере с точки зрения распределения скоростей, от образов неотраженных частиц. Это вовсе не значит, что каждая частица должна отбрасываться так же, как и в случае вполне упругих стенок; это значит только, что для каждой частицы, отраженной с уменьшенной энергией, существует частица, энергия которой после отражения возрастает. Иначе распределение f изменялось бы при приближении к границе и, следовательно, f не могла бы быть независимой от $\mathbf{r}$.

Предположим теперь, что эти несколько необычные требования выполнены, и изучим среднее поведение таких частиц, близких к некоторому участку граничной стенки. Предположим, что этот участок будет плоским, и расположим оси координат так, чтобы он лежал в плоскости yz , причем сторона, соответствующая отрицательным значениям x , обращена к газу, а сторона, соответствующая положительным значениям x , лежит внутри стенки. Рассматривая тогда функцию f при $x=0$, найдем, что все частицы, для которых p_x положительно, еще не ударились о стенку, а все те, для которых это значение отрицательно, уже отразились от нее.

Мы теперь в состоянии поставить вопрос о том, какое свойство частиц газа вызывает постоянное давление на стенки сосуда. Очевидно, это — взаимодействие при отражении между стенкой и частицами газа, ударяющимися в эту стенку, то самое взаимодействие, которое отталкивает частицы обратно внутрь сосуда после удара. Так как действие равно противодействию, мы можем сказать, что сила, с которой газ действует на квадратный сантиметр поверхности, будет та же самая, что и сила, с которой квадратный сантиметр поверхности действует на ударяющиеся частицы, отбрасывая их назад внутрь газа. Так как сила равна скорости изменения импульса, эта реакция стенки равна среднему изменению импульсов всех частиц, ударяющихся в стенку в течение одной секунды. Число частиц, соответствующих элементу импульса dV_p для импульса p , которые ударяются о единичную площадку плоскости yz в течение секунды, равно $v_x (N/4\pi V) \phi(p) dV_p =$

$= (N/4\pi V_m) \phi(p) p^3 dp \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$, где для этих ударяющихся частиц $0 < \theta < \pi/2$. Полное среднее изменение импульса для каждой из этих частиц равно $2p_x = 2p \cos \theta$, так что сила, с которой квадратный сантиметр площадки действует на газ (и, следовательно, величина давления), нормальна к поверхности и имеет среднее значение

$$\frac{N}{4\pi V_m} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^\infty 2p^4 \phi(p) dp = P = \frac{2N_s}{3V} = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$$

[в силу формулы (2.4.10)]. Таким образом, получаем уравнение, связывающее давление P , объем V и внутреннюю кинетическую энергию U ,

$$PV = \frac{2}{3} U, \text{ или } P = \frac{2}{3} E\rho, \quad (2.4.11)$$

которое называется *уравнением состояния* газа. Величина $E = U/Nm$ есть кинетическая энергия единицы массы газа, а $\rho = Nm/V$ — средняя плотность газа.

Мы могли бы показать теперь, что при уменьшении объема такого сосуда с отражающими стенками (это соответствует *адиабатическому* сжатию, см. стр. 161) E изменяется пропорционально $(\gamma - 1)$ -й степени плотности (здесь γ — постоянная для рассматриваемого газа, равная для воздуха 1,4) и что, таким образом, давление при адиабатическом сжатии пропорционально γ -й степени плотности ρ . Однако это нас завело бы слишком далеко от нашей цели, и мы должны перейти к рассмотрению соотношения между внутренними силами, действующими в жидкости, и диффузионными свойствами жидкости.

Средняя длина свободного пробега и эффективное сечение рассеяния. Отдельные частицы (атомы, молекулы) газа удалены друг от друга достаточно далеко, так что большую часть времени они двигаются как свободные тела с постоянными импульсами. Только изредка сближаются они друг с другом настолько, что на движение их начинают влиять их взаимные силовые поля. Поэтому движение каждой частицы можно разбить на две части: *свободный полет*, когда на частицах не сказывается влияние других частиц, и кратковременная часть, в течение **которой** импульсы меняются благодаря мгновенному сближению с другой частицей, после чего частица снова возвращается к свободному полету; однако скорость ее отлична от первоначальной. Эти мгновенные встречи с другими частицами, в течение которых импульс каждой частицы существенно меняется, называются *столкновениями*. В случае прохождения нейтронов через твердое тело столкновение происходит между нейтроном и ядром одного из атомов твердого тела, но и при этом наши рассуждения остаются в силе.

Если достигнуто термодинамическое равновесие, то при этих столкновениях будет в среднем сохраняться энергия и, следовательно, столкновения можно считать упругими. Среднее количество изменений направления движения зависит от закона действия сил между частицей и «мишенью», которой может быть ядро атома в случае движения нейтронов или другой атом, подобный движущемуся, в случае газа. Простейшее предположение состоит в том, что закон действия силы аналогичен закону взаимодействия двух бильiardных шаров; сила равна нулю, если расстояние между центрами больше чем R , для расстояний же меньших чем R появляется значительная сила отталкивания; такое предположение близко к действительности в достаточно большом количестве случаев. Бильiardные шары, если они вообще сталкиваются,

отскакивают одинаково часто во всех направлениях, и аналогичное явление отмечается во многих реальных случаях, особенно когда относительные скорости не очень велики. Если масса «мишени» имеет тот же порядок величины, что и масса ударяющейся частицы, это равномерное распределение углов рассеяния при столкновении имеет место относительно системы координат, движущейся вместе с центром тяжести сталкивающейся пары, благодаря чему исследование становится несколько сложным.

Чтобы избежать трудностей, мы сначала изучим случаи, в которых мишень значительно более массивна, чем ударяющаяся частица, что, например, имеет место, когда частицами являются нейтроны, а мишенями — тяжелые ядра или частицами служат фотоны, а мишенями — частицы пыли в воздухе. В этих случаях мы будем считать, что мишени были и остаются неподвижными и что n_i из них случайным образом распределены внутри каждого кубического сантиметра. Каждую мишень можно представить себе как упругий шар радиуса R , а частицы — как материальные точки. Здесь мы можем пренебречь столкновениями между частицами и сосредоточить свое внимание на столкновениях между частицами и мишенями.

Первый вопрос, на который следует ответить, касается относительной частоты столкновений между частицами и расположенными случайным образом мишенями. Вероятность того, что столкновение происходит после того, как частица прошла расстояние x , но раньше, чем она прошла расстояние $x + dx$, пропорциональна числу, показывающему, какая часть площади тонкого пространственного слоя толщины dx , перпендикулярного к пути частицы, заполнена мишенями. Площадь *эффективного поперечного сечения* мишени равна $Q_e = \pi R^2$; число мишеней, лежащих внутри слоя толщины dx , в основании которой лежит единичная площадка, равно $n_i dx$. Часть единичной площадки, прегражденная мишенями, выражается поэтому числом $\pi R^2 n_i dx = Q_e n_i dx$, и вероятность столкновения на участке пути подвижной частицы от x до $x + dx$ равна этой величине, умноженной на вероятность $P(x)$ того, что частица прошла расстояние x без столкновений. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для $P(x)$

$$\frac{d}{dx} P(x) = -Q_e n_i P(x), \text{ или } P(x) = e^{-Q_e n_i x}; \quad (2.4.12)$$

здесь мы приняли (вполне обоснованно), что вероятность $P(0)$ прохождения по крайней мере нулевого расстояния от момента последнего столкновения до ближайшего равна единице (это достоверный факт).

Таким образом, мы получили выражение вероятности того, что свободный пробег между двумя столкновениями имеет длину x , выразив эту вероятность через плотность n_i мишеней и площадь их *эффективного сечения* Q_e для столкновений между частицами и атомами-мишенями. Подробный подсчет силового поля между частицей и мишенью нужен, таким образом, только для определения значения Q_e , когда оно встречается при вычислении средних длин свободного пробега между столкновениями.

Средняя длина пути между столкновениями равна

$$\lambda = \int_0^{\infty} P(x) dx = \frac{1}{Q_e n_i}, \quad (2.4.13)$$

где длина λ называется *средним свободным пробегом* частицы среди множества мишеней.

В случае обыкновенного газа средний свободный пробег частицы является пробегом между столкновениями с другими подобными частицами, так как здесь мишенями являются также молекулы газа. В случае более плотной среды, например такой, как жидкость, средний свободный пробег имеет приблизительно ту же величину, что и среднее расстояние $\bar{R}$ между частицами; поэтому здесь частица никогда не будет долго свободна от влияния соседних частиц; но даже и здесь выражение для вероятности $P(x)$ сохраняет силу. Можно сказать, что частицы жидкости соприкасаются с атомами того вещества (атомами-мишенями), через которое просачиваются, в среднем только после прохождения расстояния, равного среднему свободному пробегу.

Возможность столкновений оставляет нам другой путь, при котором функция распределения изменяется от точки к точке и с течением времени. Например, частицы из элемента импульсов dV_p с импульсом p в течение промежутка времени dt проходят расстояние $dx = (p/m) dt$ и часть их, выражаемая числом $(Q_e n_i p/m) dt$, испытывает столкновения. Те, которые испытывают столкновения, изменяют направления своих импульсов и, следовательно, исчезают из элемента импульсов dV_p . Поэтому имеется скорость убывания функции f , проистекающая из столкновений и определяющаяся равенством

$$df(r, p, t) = - \frac{Q_e n_i p}{m} f(r, p, t) dt. \quad (2.4.14)$$

Но здесь имеет место также и возрастание функции f , вызванное столкновениями, так как существуют также частицы, первоначально находившиеся в других элементах импульсов, которые после столкновений отбрасываются *внутрь* dV_p . Предположив (как мы это и делали

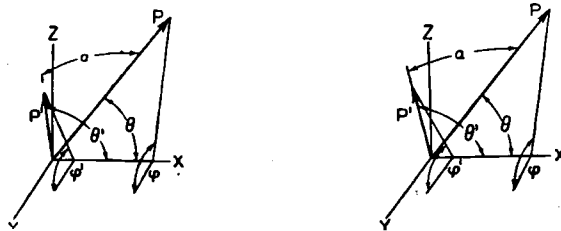


Рис. 2.18. Импульсы и углы диффундирующей частицы до и после столкновения с атомом-мишенью среды

до сих пор), что частицы рассеиваются во всех направлениях с одинаковыми вероятностями и что не происходит изменения скорости частиц при рассеянии любой группы частиц, подвергшихся столкновению, мы найдем, что часть всех частиц, выражаемая числом $d\omega/4\pi$, будет рассеиваться в направлениях движения, лежащих внутри телесного угла $d\omega$. Рассматривая рис. 2.18, мы видим, что если в элементе импульсов $dV_p = d\phi' \sin \theta' d\theta' (p')^2 dp'$ находилось $f(r, p', t) dV_p$ частиц, то в элемент импульсов $dV_p = d\phi \sin \theta d\theta p^2 dp$ за время dt попадут $(Q_e n_i p/4\pi m) \times f(r, p', t) dV_p d\phi' \sin \theta' d\theta' dt$ частиц (p равно p' , как мы предполагали до сих пор). Полное возрастание $f(r, p, t)$, вызванное рассеянием частиц в последний элемент импульсов, равно интегралу от этого количества, распространенному на все начальные направления движения, определенные углами θ' и ϕ' ,

$$df(r, \theta, \phi, p, \theta, \phi, t) = \frac{Q_e n_i p}{4\pi m} \int \int f(r, \theta, \phi, p, \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' dt. \quad (2.4.15)$$

Диффузия света, интегральное уравнение. Простой, но поучительный пример применения этих уравнений относится к распространению света через пластинку матового стекла (или слой тумана); освещенность предполагается одинаковой во всех точках поверхности пластинки (например, плоскости yz), так что f не зависит от y и z и является функцией только x . Этот пример впервые изучал Милн в связи с потоком света в атмосфере звезд; он называется *проблемой Милна*. «Частицами» являются фотоны, имеющие одинаковые импульсы; в силу симметрии функция f зависит от угла θ между вектором $\mathbf{p}$ и осью x и не зависит от ϕ . Поэтому f можно записать, как $f(x, \theta, t)$. Если достигнуто устойчивое состояние, то скорости изменения f , как данные в (2.4.9) и вызванные зависимостью f от x , так и данные в (2.4.14) и (2.4.15) и обусловленные столкновениями, взаимно уничтожаются и получающееся уравнение для f имеет вид

$$\cos \theta \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, \theta) = -n_i Q_i f(x, \theta) + \frac{1}{2} n_i Q_e \int_0^\pi f(x, \theta') \sin \theta' d\theta'$$

(мы сократили уравнение на общий множитель p/m). Решение этого интегро-дифференциального уравнения позволит нам определить любые требуемые свойства диффундирующего света. Мы здесь учли как возможность поглощения фотонов рассеивающей средой (частицами тумана или какой-либо другой средой), так и возможность рассеяния. Поэтому Q_i есть сумма эффективного сечения рассеяния Q_e и эффективного сечения поглощения Q_a . Само собой разумеется, что Q_a не входит в член, содержащий интеграл, так как этот член соответствует фотонам, отброшенным после столкновения в направлении, определяемом углом θ , а поглощенные фотоны столкновений не испытывают.

Если мы за единицу измерения расстояний примем средний свободный пробег, то $x = \xi/n_i Q_i = \lambda \xi$ и наше уравнение примет вид

$$\cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \theta) = -f(\xi, \theta) + \frac{1}{2} \kappa \int_0^\pi f(\xi, \theta') \sin \theta' d\theta', \quad (2.4.16)$$

где $\kappa = Q_e/Q_i$ — отношение эффективного сечения рассеяния к полному. Член, стоящий в левой части уравнения, представляет зависимость f от движения частицы. Первый член правой части дает изменение f , вызванное поглощением и рассеянием; второй член правой части выражает изменение f , вызванное отражениями в первоначальное направление.

Изменяя нормировку f , мы можем добиться того, чтобы

$$c \int_0^\pi \cos \theta f(\xi, \theta) \sin \theta d\theta = J(\xi), \quad (2.4.17)$$

где правая часть есть средний поток световой энергии через единичную площадку за секунду в направлении положительной оси x в точке ξ . Постоянная c есть скорость света. Тогда интеграл

$$\int_0^\pi f(\xi, \theta) \sin \theta d\theta = \rho(\xi) \quad (2.4.18)$$

равен средней плотности световой энергии в точке ξ .

Предположим теперь, что пластинка рассеивающего материала ограничена плоскостями $x=0$ и $x=x_0$ и что поток $I(\theta)$ падает на поверх-

ность $x=0$, как показано на рис. 2.19. Функция I может меняться произвольным образом с изменением θ в пределах от 0 до $\pi/2$, но она должна быть равна нулю при $(\pi/2) \leq \theta \leq \pi$, так как эти границы для θ соответствуют потоку из пластинки и не могут соответствовать падающему потоку. Это распределение потока, проникающего внутрь пластинки, постепенно изменяется, по мере того как составляющие его фотоны ударяются о мишени и поглощаются или рассеиваются. Часть потока,

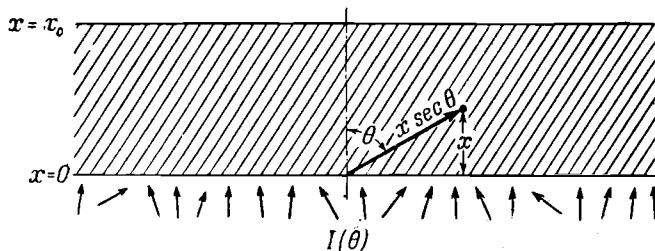


Рис. 2.19. Диффузия света в пластинке из рассеивающего материала.

Задана интенсивность падающего света $I(\theta)$

образующая с осью x угол θ , при проникновении на расстояние $x = \lambda \xi$ внутрь пластинки проходит внутри ее вещества $\xi \sec \theta$ средних свободных пробегов и в силу уравнения (2.4.12) сохраняется только $e^{-\xi \sec \theta}$ ее первоначальной величины. Поэтому одна часть $f(\xi, \theta)$ имеет выражение $I(\theta) e^{-\xi \sec \theta}$.

Другая часть соответствует фотонам, отразившимся по крайней мере один раз. Число фотонов, отраженных на расстоянии ξ' свободных пробегов от передней границы пластинки, будет пропорционально плотности $\rho(\xi')$, определенной формулой (2.4.18), а число таких фотонов, достигших глубины ξ под углом θ , будет пропорционально величине $\rho(\xi') e^{-|\xi - \xi'| \sec \theta}$, где ξ' меньше ξ , если θ меньше $\pi/2$, и больше ξ при θ большем чем $\pi/2$ (рассеяние назад). Следовательно, есть основание ожидать, что решение уравнения (2.4.16), определяющее функцию распределения, имеет следующую общую форму:

$$f(\xi, \theta) = \begin{cases} I(\theta) e^{-\xi \sec \theta} + \frac{1}{2} \kappa \sec \theta \int_0^{\xi} e^{(\xi' - \xi) \sec \theta} \rho(\xi') d\xi', & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} \kappa \sec \theta \int_{\xi_0}^{\xi} e^{(\xi - \xi') \sec \theta} \rho(\xi') d\xi', & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (2.4.19)$$

Это, конечно, еще не будет решением задачи, так как мы еще не вычисляли плотности ρ . Однако ρ является более простой функцией, чем f , так как оно зависит только от ξ и не зависит от θ .

Для того чтобы показать, что (2.4.19) правильно определяет вид функции f , преобразуем (2.4.16) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \theta) + \sec \theta f(\xi, \theta) = \frac{1}{2} \kappa \rho(\xi) \sec \theta.$$

Предполагая, что ρ известно, мы найдем, что решение этого линейного неоднородного уравнения, подчиненное условию $f(0, \theta) = I(\theta)$, совпадает в точности с (2.4.19) (мы, конечно, учитываем различие между значениями θ , меньшими $\pi/2$, и значениями θ , большими $\pi/2$). Чтобы найти уравнение для определения ρ , умножим уравнение (2.4.19) на $\sin \theta d\theta$ и проинтегри-

руем его по θ

$$\rho(\xi) = \rho_0(\xi) + \frac{1}{2} \kappa \int_0^{\xi_0} E_1(|\xi - \xi'|) \rho(\xi') d\xi', \quad (2.4.20)$$

$$\rho_0(\xi) = \int_0^{\pi/2} e^{-\xi \sec \theta} I(\theta) \sin \theta d\theta,$$

$$E_1(|\xi - \xi'|) = \int_1^\infty e^{-|\xi - \xi'| y} \frac{dy}{y}, \quad y = \sec \theta.$$

Это интегральное уравнение стандартного типа, который будет подробно исследован дальше. Если ξ_0 равно бесконечности, уравнение называется уравнением типа Винера — Хопфа. Уравнение устанавливает, что значение ρ в точке ξ зависит от значений ρ внутри интервала, равного среднему свободному пробегу, заключающего точку ξ .

Диффузия света, дифференциальное уравнение. Мы переходим теперь к выводу дифференциального уравнения для ρ и J , которое связано с уравнением диффузии, так что дальнейшее рассмотрение интегрального уравнения откладывается. Хотя, как оказывается, интегральное уравнение является точным, а дифференциальное — только приближенным, дифференциальное уравнение решается настолько проще, что целесообразно пользоваться его решениями, если только они пригодны.

Дифференциальное уравнение типа уравнения диффузии дает хорошее приближение всегда, когда относительное изменение ρ или J невелико на протяжении среднего свободного пробега. Это возможно, пока эффективное сечение поглощения Q_a мало сравнительно с эффективным сечением упругого рассеяния Q_e и пока не требуется слишком много подробностей относительно поведения ρ и J на расстоянии одного свободного пробега от границы, так как в этом случае функция распределения f почти не зависит от угла θ , определяющего направление импульса, и результирующий поток J значительно меньше, чем среднее квадратичное величины ρ .

Утверждение, что поток J мал, равносильно тому, что функция распределения может быть приближенно выражена так:

$$f(\xi, \theta) \approx \frac{1}{2} \rho(\xi) + \frac{3}{2} \cos \theta \frac{J(\xi)}{c}, \quad (2.4.21)$$

если только J/c значительно меньше, чем ρ . Согласно уравнениям (2.4.17) и (2.4.18), поток и плотность как раз равны величинам J и ρ в этом выражении. Это простейшая функция от θ , для которой значения ρ и J могут быть независимыми.

Предположим, что мы составили уравнение, эквивалентное уравнению (2.4.16), содержащее, однако, производную по времени. За единицу времени примем среднее время свободного пробега для фотонов λ/c . В силу уравнений (2.4.9), (2.4.14) и (2.4.15) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} f(\xi, \theta, \tau) = & -\cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \theta, \tau) - \frac{1}{2} \alpha \rho(\xi, \tau) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\pi [f(\xi, \theta', \tau) - f(\xi, \theta, \tau)] \sin \theta' d\theta', \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

где $\xi = (n_i Q_i x)$, $\tau = (n_i Q_i ct)$, $p/m = c$, $\alpha = Q_a/Q_i = 1 - \kappa$. Подставляя сюда вместо f его приближенное выражение через ρ и J (2.4.21), получаем

довольно сложное интегро-дифференциальное уравнение. Однако последний член, содержащий интеграл по θ' , может быть упрощен. В выражении $[f(\xi, \theta', \tau) - f(\xi, \theta, \tau)]$ члены, содержащие ρ , взаимно уничтожаются и квадратная скобка превращается в $\frac{3}{2} [\cos \theta' - \cos \theta] \cdot (1/c) J(\xi, \tau)$; интегрируя это, получим $-(3/c) J(\xi, \tau) \cos \theta$.

Полученное уравнение можно разделить на два уравнения, если умножить его на $\sin \theta d\theta$ и проинтегрировать и, кроме того, умножить на $\cos \theta \sin \theta d\theta$ и проинтегрировать. Эти интегрирования устраняют зависимость от θ и приводят к двум уравнениям, связывающим ρ и J . Первое из них

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial \xi} - \alpha \rho \quad (2.4.23)$$

является как раз уравнением неразрывности (2.4.1) для данного случая, выраженным в безразмерных переменных τ и ξ и учитывающим потерю фотонов, вызванную поглощением (член $\alpha \rho$). Если, кроме того, за среднее время свободного пробега в кубе, ребро которого равно среднему свободному пробегу, добавляются q фотонов, то величина q должна быть добавлена к правой части уравнения.

Второе уравнение

$$\frac{1}{c} \left[\frac{\partial J}{\partial \tau} + J \right] \approx -\frac{1}{3} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

связано с уравнением диффузии, содержащим градиент (2.4.3). Оно имеет дополнительный член $\partial J / \partial \tau$, дающий скорость изменения величины J за среднее время свободного пробега. Так как при диффузии происходят довольно медленные изменения, этот член незначителен по сравнению с J , так что со степенью точности, принятой здесь, второе уравнение имеет вид

$$J \approx -\frac{c}{3} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}. \quad (2.4.24)$$

Таким образом, при диффузии фотонов градиент плотности фотонов вызывает медленный поток в сторону более низкой плотности.

Комбинируя уравнения (2.4.23) и (2.4.24), получаем уравнение диффузии для плотности фотонов

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \approx \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - \alpha \rho + q. \quad (2.4.25)$$

Постоянная диффузии при наших единицах длины и времени равна точно $\sqrt{1/3}$ [см. уравнение (2.4.4)]. Если где-либо функция источника q велика, там ρ стремится быстро возрасти; если где-либо плотность сильно сконцентрирована ($\partial^2 \rho / \partial \xi^2$ численно велико, но отрицательно), там ρ стремится быстро убывать. Так как сюда входит только первая производная по τ , то решение не будет обратимым относительно времени, как это было бы для волнового уравнения.

Функция распределения с той же точностью выражается следующим равенством:

$$f(\xi, \theta) \approx \frac{1}{2} \rho(\xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \cos \theta \quad (2.4.26)$$

через решение уравнения (2.4.25). Это выражение пригодно, если только $\partial \rho / \partial \xi$ мало по сравнению с ρ .

Для типичного решения уравнения (2.4.25) мы можем вернуться к решению, соответствующему установившемуся состоянию, в случае

пластинки из рассеивающего материала. Предположим, что поток, падающий на поверхность $x=0$, имеет интенсивность I и полностью направлен в положительную сторону оси x , т. е. $I^{(h)} = I\delta$, где $\delta = \delta(1 - \cos \theta)$ есть дельта-функция, рассмотренная на стр. 122. Мы также предполагаем, что пластинка имеет бесконечную толщину ($x_0 = \infty$). Та часть падающих фотонов, которая внутри пластинки еще не сталкивалась с рассеивающими мишенями, очевидно, не может быть представлена приближенной формулой (2.4.26); однако мы можем эту часть рассмотреть отдельно [обозначим ее через $f_i = (I/c)e^{-\xi\delta}$] и считать, что уравнение (2.4.25) применяется только к тем фотонам, которые испытали по крайней мере одно столкновение. Для этой части решения падающие фотоны появляются внутри пластинки в точке, где они испытывают свое первое столкновение, как если бы внутри вещества был распределен источник мощности $q = (1 - \alpha)Ie^{-\xi/c}$ (множитель $1 - \alpha = \kappa$ появляется потому, что только отраженные, но не поглощенные фотоны участвуют в диффузии). Диффузионная часть плотности ρ_d поэтому является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \rho_d}{\partial \xi^2} - 3\alpha \rho_d \approx -\frac{3}{c}(1 - \alpha)Ie^{-\xi},$$

которое получается из (2.4.25) в результате подстановки вместо q его величины и приравнивания производной по времени нулю (так как состояние установившееся).

Решение этого уравнения имеет вид

$$\rho_d \approx \frac{3I}{c} \frac{1 - \alpha}{1 - 3\alpha} \left[e^{-\sqrt{3\alpha}\xi + (1 - \sqrt{3\alpha})\Delta} - e^{-\xi} \right], \quad (2.4.27)$$

где постоянная Δ выбирается так, чтобы удовлетворить граничному условию при $\xi = 0$.

Так как α — отношение поглощения к рассеянию при столкновениях — предполагается малым, то первая экспонента при возрастании ξ убывает медленнее второй; на значительном расстоянии внутри пластинки плотность пропорциональна величине $e^{-\sqrt{3\alpha}\xi}$. Иначе говоря, глубина проникновения внутрь пластинки зависит только от относительной частоты поглощения фотонов. Полная функция распределения имеет вид

$$f(\xi, \theta) \approx f_i + \frac{3I}{2c} \frac{1 - \alpha}{1 - 3\alpha} \{ [1 + \sqrt{3\alpha} \cos \theta] e^{-\sqrt{3\alpha}\xi + (1 - \sqrt{3\alpha})\Delta} - (1 + \cos \theta) e^{-\xi} \}. \quad (2.4.28)$$

В интервале среднего свободного пробега от границы $\xi = 0$ часть функции распределения, соответствующая диффузии, с точностью до первых степеней малых величин ξ , Δ и α становится равной

$$\frac{3I}{2c} \cdot \frac{1 - \alpha}{1 + \sqrt{3\alpha}} [(\xi + \Delta) - (1 - \xi) \cos \theta]$$

и соответствующая часть плотности становится равной $(3I/c) \times [(1 - \alpha)/(1 + \sqrt{3\alpha})](\xi + \Delta)$. Из этих разложений видно, что любое решение уравнения (2.4.25) непригодно вблизи границы $\xi = 0$, если граничные условия требуют, чтобы Δ было мало, так как в случае, когда $\xi + \Delta$ невелико сравнительно с единицей, член, содержащий $\cos \theta$, не будет больше мал сравнительно с членом, не содержащим θ , и то приближение, на котором был основан вывод уравнения (2.4.25), больше не имеет места.

Граничные условия. Для того чтобы видеть, какое значение должно иметь Δ и какой вид примут f и ρ вблизи границы, мы должны вернуться

к точному уравнению для f и к интегральному уравнению (2.4.20) для ρ , так как равенства (2.4.26) и (2.4.28) для f , очевидно, неточны на граничной поверхности $\xi = 0$, где слева нет рассеивающего вещества. В этой точке единственной частью функции распределения при значениях θ , меньших чем $\pi/2$ (соответствующей фотонам, входящим в вещество из внешнего пространства), должен быть падающий поток. Диффузионная часть функции распределения должна быть для значений θ , лежащих между нулем и $\pi/2$, равна нулю. Выражение (2.4.26), конечно, не может удовлетворить этому требованию, какие бы значения ни имели ρ и $\partial\rho/\partial\xi$. Можно только удовлетворить требованию в среднем, если положить среднее значение функции $f(0, \theta) \cos \theta$ в промежутке $0 \leq \theta \leq \pi/2$, равным нулю. Это требование приводит к приближенным граничным условиям [см. также равенство (2.4.34)]

$$\int_0^{\pi/2} \rho \cos \theta \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 0 \text{ или}$$

$$\rho \approx \Delta \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \text{ при } \xi = 0, \quad \Delta \approx \frac{2}{3}; \quad (2.4.29)$$

это означает, что постоянную Δ , входящую в уравнения (2.4.27) и (2.4.28), нужно считать равной $2/3$, чтобы удовлетворялись граничные условия,

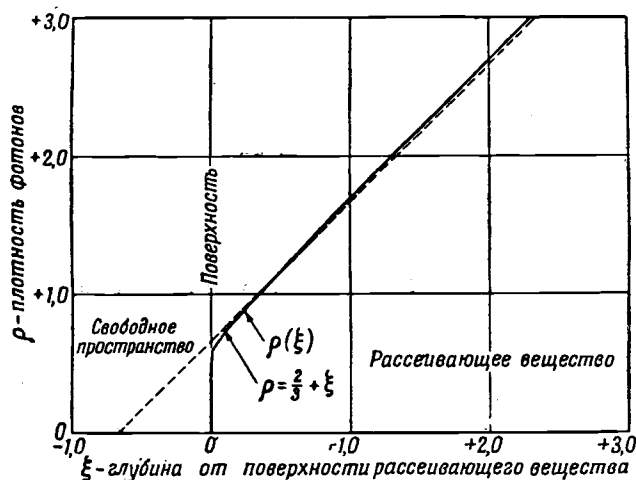


Рис. 2.20. Плотность диффундирующих частиц вблизи поверхности раздела.

Сплошной линией показано точное решение, пунктирной — приближенное, полученное из уравнения диффузии.

насколько это возможно при данной аппроксимации. Даже эта формула не будет слишком точной, так как $\partial\rho/\partial\xi$ вблизи точки $\xi = 0$ наверняка не будет малым по сравнению с ρ ; таким образом, любое использование уравнения диффузии для подсчета ρ вблизи границы является весьма сомнительным делом.

Только наше возвращение к интегральному уравнению (2.4.20) позволяет нам выяснить законность этих приближений. К сожалению, мы еще не в состоянии довести до конца решение уравнения (2.4.20), так что мы здесь только сошлемся на результаты; приемы решения интегральных уравнений этого типа будут рассмотрены в гл. 8 и 12.

Все это станет более ясным, если мы сравним результаты для более простого случая звездных атмосфер, рассмотренного Милном. Здесь

фотоны возникают значительно ниже поверхности слоя, диффундируют вверх через внешние рассеивающие слои и излучаются через поверхность во внешнее пространство. Толщина этих верхних слоев во много раз превосходит средний свободный пробег, так что мы снова можем предположить, что x_0 весьма велико. Однако при этом здесь нет потока, падающего сверху на внешнюю сторону поверхности $x=0$, так что интегральное уравнение имеет вид

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\xi - \xi'|) \rho(\xi') d\xi'; \quad (2.4.30)$$

это уравнение называется *уравнением Милна*. Функция E_1 определена формулой (2.4.20). Для простоты мы здесь предположили, что $x \rightarrow 1$, иными словами, что поглощения в веществе нет, а имеется только рассеяние.

Решение приближенного уравнения диффузии (2.4.25) в предположении, что α и q равны нулю, удовлетворяющее граничным условиям (2.4.29), имеет вид

$$\rho \approx A(\xi + \Delta), \quad \Delta \approx \frac{2}{3}. \quad (2.4.31)$$

Для функции распределения по углам потока, излучаемого поверхностью во внешнее пространство, получаем приближенное выражение

$$f \approx \Delta - \cos \theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \quad (2.4.32)$$

Решение интегрального уравнения (2.4.30) приводит к следующему выражению для функции плотности:

$$\rho \approx A \{ \xi + 0,7104 [1 - 0,3429 E_2(\xi) + 0,3159 E_3(\xi)] \};$$

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} u^{-n} e^{-uz} du, \quad (2.4.33)$$

погрешность которого не превосходит 0,3% на всем промежутке изменения ξ . Так как и E_2 , и E_3 быстро стремятся к нулю при возрастании ξ , мы видим, что при ξ , превышающем 1 (глубже, чем один свободный пробег под поверхностью), приближенное решение, данное в (2.4.31), вполне пригодно; только Δ должно быть равно 0,7104 вместо 2/3. На расстоянии от поверхности, меньшем чем средний свободный пробег, действительная плотность падает ниже приближенного решения на некоторую величину, как показывает рис. 2.20.

Точное решение для углового распределения потока, исходящего от поверхности, имеет выражение слишком сложное для того, чтобы его стоило выписать здесь. Оно изображено на рис. 2.21 и сравнивается здесь с распределением, полученным по приближенной формуле (2.4.32). Соответствие, как видим, не слишком плохое.

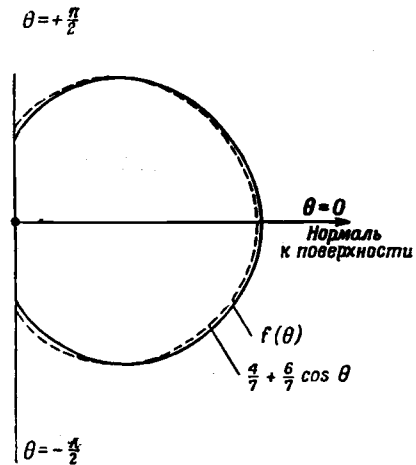


Рис. 2.21. Полярная диаграмма интенсивности частиц, испускаемых с поверхности рассеивающей среды при различных углах испускания θ .

Сплошной линией показано точное решение, пунктирной — приближенное, полученное из уравнения диффузии.

Во всяком случае, мы видим, что решение уравнения диффузии дает лучшее приближение к точному решению, чем мы были вправе ожидать, если мы потребуем, чтобы оно удовлетворяло следующим граничным условиям на каждой свободной границе:

плотность на поверхности $\simeq 0,7104$ значения производной от плотности по внутренней нормали к поверхности (2.4.34)

Здесь при дифференцировании расстояние измеряется в средних свободных пробегах. Только во внешней части рассеивающего вещества на расстоянии меньшем, чем величина свободного пробега от поверхности, действительная плотность значительно отличается от вычисленной на основе этих соглашений. Внутри вещества решение уравнения диффузии, удовлетворяющее этому граничному условию, дает вполне хорошие результаты, и даже угловое распределение излучения, идущего от поверхности, достаточно хорошо изображается с помощью приближенной формулы (2.4.32).

Интересно отметить, что многие полезные расчеты, относящиеся к диффузии нейтронов через твердые тела, могут быть также проведены с помощью уравнения диффузии и граничных условий (2.4.34).

Влияние неизотропного рассеяния. Рассмотрим теперь случай, когда диффундирующие частицы рассеиваются не во всех направлениях равномерно; временно предположим, однако, что в процессе рассеяния энергия не теряется. Вероятность того что частица отскакивает внутрь элемента телесного угла $d\omega$, вместо того чтобы не зависеть от угла и быть равной $(Q_e/4\pi)d\omega$, теперь будет иметь выражение $\sigma(\alpha)d\omega$, где α — угол рассеяния внутрь элемента телесного угла $d\omega$. Как показано на рис. 2.18, частица вначале имела импульс $\mathbf{p}'$, а после столкновения имеет импульс $\mathbf{p}$. Соотношение между σ и эффективным сечением для упругого рассеяния имеет вид

$$Q_e = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi \sigma(\alpha) \sin \alpha d\alpha; \quad d\omega = \sin \alpha d\alpha d\beta. \quad (2.4.35)$$

Существует также связанное с Q_e эффективное сечение Q_m , называемое *эффективным сечением передачи импульса*, которое выражается через σ с помощью интеграла

$$Q_m = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi \sigma(\alpha) (1 - \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (2.4.36)$$

Если рассеяние одинаково во всех направлениях (т. е. если σ постоянная), то $Q_m = Q_e$. Если больше частиц отскакивают назад ($\alpha > 90^\circ$), чем вперед ($\alpha < 90^\circ$), то Q_m больше, чем Q_e ; в противоположном случае — наоборот. Обе величины Q_m и Q_e , а также Q_a — эффективное сечение поглощения частиц зависят от импульса налетающей частицы.

Мы по-прежнему предполагаем, что величина импульса частицы не изменяется при столкновении и что внешние силы не действуют на частицы. Мы допустим, что в каждой точке пространства направление потока $\mathbf{J}$ совпадает с направлением градиента функции распределения f . Это предположение до некоторой степени предопределяет решение, но это несущественно, так как можно доказать, что это предположение на самом деле осуществляется. Однако сделать предположение, а потом убедиться в его справедливости настолько облегчает дело, что мы, может быть, можем извинить на этот раз подобную перестановку в рассуждениях. Вместе с требованием о том, чтобы часть f , зависящая от угла,

была очень мала (что необходимо для того, чтобы уравнение диффузии имело силу), все это соответствует предположению, что [см. (2.4.21)]

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \simeq \frac{1}{4\pi m} \rho(\mathbf{r}, p, t) + \frac{3}{4\pi p^2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t), \quad (2.4.37)$$

где ρ и $\mathbf{J}$ определены уравнениями (2.4.6) и (2.4.7) и направление $\mathbf{J}$ совпадает с направлением $\text{grad } \rho$, который на рис. 2.18 направлен вдоль полярной оси (так что $\mathbf{p} \cdot \mathbf{J} = pJ \cos \theta$). Отметим, что ρ и $\mathbf{J}$ все еще являются функциями величины импульса p , поэтому они являются плотностью и потоком частиц данной скорости. Чтобы получить средние величины, рассмотренные на стр. 172, мы проводим осреднение по импульсам

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty p^2 \rho(\mathbf{r}, p, t) dp, \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty p^2 \mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t) dp;$$

мы можем также определить и другие средние значения

$$p_{\text{ср.}} = \int_0^\infty p^3 \rho(\mathbf{r}, p, t) dp, \quad E_{\text{ср.}} = \frac{1}{2m} \int_0^\infty p^4 \rho(\mathbf{r}, p, t) dp. \quad (2.4.38)$$

Скорость изменения функции f , обусловленная свойствами неразрывности, дается по-прежнему уравнением (2.4.9). Скорость убывания f , вызванная поглощением, равна $(n_t Q_a p/m) f$. Скорость изменения f вследствие упругого рассеяния на основании уравнений (2.4.14) и (2.4.15) равна

$$-\frac{3n_t J}{4\pi m} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sigma(\alpha) [\cos \theta - \cos \theta'] \sin \theta' d\theta'.$$

Здесь мы выбрали за направление $\mathbf{J}$ направление полярной оси, показанной на рис. 2.18. Однако лучше полярную ось направить вдоль окончательного импульса; в этом случае $\cos \theta'$ надо заменить на $\cos \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos(\beta - \phi)$, где θ и ϕ постоянны, а α и β — углы рассеяния, по которым выполняется интегрирование. Учитывая уравнение (2.4.36) и соответствующее видоизменение уравнения (2.4.22) (σ зависит от угла рассеяния α , но не от угла β ориентации относительно полярной оси), мы окончательно получаем дифференциальное уравнение для ρ и $\mathbf{J}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{3m}{p^2} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \approx & -\frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad } \rho - \frac{3}{p^2} \mathbf{p} \cdot \text{grad } (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}) - \frac{n_t}{m} Q_a p \rho - \\ & - \frac{3}{p} n_t Q_a \mathbf{p} \cdot \mathbf{J} - \frac{3}{p} n_t Q_m \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

Приближение первого порядка. Уравнение диффузии. Как мы отметили при выводе уравнения (2.4.24), членом, содержащим $\partial \mathbf{J} / \partial t$, можно пренебречь, когда мы имеем дело со сравнительно малыми скоростями изменения $\mathbf{J}$ при диффузии. Некоторые из оставшихся членов меняют знак при изменении направления $\mathbf{p}$ на противоположное, другие члены при этом знака не меняют; все члены, содержащие $\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}$ ($\text{grad } \rho$ имеет то же направление, что и $\mathbf{J}$), меняют знак, но член, содержащий $\mathbf{p} \cdot \text{grad } (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})$, знака не меняет, так же как и члены, содержащие ρ . Поэтому, в силу симметрии, мы можем разделить уравнение (2.4.39) на два уравнения, которые служат для выражения ρ и $\mathbf{J}$ через $\mathbf{r}(x, y, z)$, $\mathbf{p}$ и t .

Первое из этих двух уравнений может быть записано так:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \approx -\frac{p}{3n_t Q_m} \text{grad } \rho(\mathbf{r}, p, t), \quad Q = Q_m + Q_a, \quad (2.4.40)$$

что, конечно, подтверждает наше предположение о том, что направления $\mathbf{J}$ и $\text{grad } p$ одинаковы. Величина $1/n_i Q$ является средним свободным пробегом частицы, когда учтены и поглощение и упругие столкновения. Отметим, что в этом более тщательном анализе эффективное сечение передачи импульса Q_m [см. (2.4.36)] играет большую роль, чем упругое эффективное сечение Q_e . Уравнение (2.4.40) тесно связано с уравнением (2.4.3) для средней диффузии. Величины Q , p и $\mathbf{J}$ в этом уравнении являются функциями величины импульса p (т. е. скорости частиц), и для приведения к (2.4.3) надо произвести осреднение по p . Поэтому для частиц, имеющих импульс p , постоянная диффузии пропорциональна корню квадратному из произведения p на средний свободный пробег. Уравнение, связывающее среднюю плотность и средний поток, имеет вид

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{3m} p_{\text{ср.}} \lambda_{\text{ср.}} \text{grad } [p(\mathbf{r}, t)], \quad \lambda_{\text{ср.}} = \frac{1}{p_{\text{ср.}}} \int_0^\infty \frac{p^3}{n_i Q} p(\mathbf{r}, p, t) dp,$$

что эквивалентно уравнению (2.4.3). Поэтому, как мы увидим ниже, величина $\sqrt{p_{\text{ср.}} \lambda_{\text{ср.}} / 3m}$ равна постоянной диффузии для среднего распределения.

Рассмотрим теперь ту часть уравнения (2.4.39), члены которой не меняют знака при изменении направления p на противоположное. Все эти члены, за исключением одного, не зависят от угла θ , определяющего направление p , однако член, содержащий $p \cdot \text{grad } (p \cdot \mathbf{J})$ является функцией θ . Это, конечно, указывает на то, что предположение, содержащееся в уравнении (2.4.37) относительно формы функции распределения f , было только приближенным. Можно приближенно удовлетворить соотношению, если произвести осреднение по всем направлениям p . Такой процесс осреднения не вносит изменения в члены вида $m (\partial p / \partial t)$ или $n_i Q_a p p$, но такие члены, как $p \cdot \text{grad } p$, будут иметь среднее значение, равное нулю. Единственный сложный член можно преобразовать, применяя уравнение (2.4.40) и проводя разложение по компонентам вектора p

$$\begin{aligned} -\frac{3}{p^2} p \cdot \text{grad } [p \cdot \mathbf{J}] &= \frac{1}{p n_i Q m} p \cdot \text{grad } [p \cdot \text{grad } p] = \\ &= \frac{1}{p n_i Q m} \left\{ p_x \left[p_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p_y \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + p_z \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \right] + \right. \\ &\quad \left. + p_y \left[p_z \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + p_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + p_z \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} \right] + \right. \\ &\quad \left. + p_z \left[p_x \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + p_y \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + p_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если осреднить эти члены по всем направлениям вектора p , то слагаемые, содержащие смешанные множители типа $p_x p_y$, $p_x p_z$ и т. д., обратятся в нуль, в то время как p_x^2 , p_y^2 , p_z^2 будут иметь средние значения, равные $\frac{1}{3} p^2$, так что все выражение примет простой вид $(p/3n_i Q m) \nabla^2 p$.

Второе уравнение, получающееся из (2.4.39), принимает поэтому вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, p, t) \approx \frac{p}{3n_i Q m} \nabla^2 p(\mathbf{r}, p, t) - n_i Q_a \frac{p}{m} p(\mathbf{r}, p, t) + q \quad (2.4.41)$$

и служит для определения плотности частиц, имеющих импульс величины p . Функция q есть функция источника, дающая количество частиц, имеющих импульс p и «возникающих» в течение секунды в кубическом сантиметре в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t .

Теперь нетрудно получить уравнение диффузии для средней плотности. С помощью средних значений, определенных в (2.4.38), и пользуясь величинами

$$a^2 = \frac{1}{3m} p_{\text{ср.}} \lambda_{\text{ср.}}, \quad q = \int_0^\infty p^2 q(p) dp, \quad \kappa = \frac{n_l}{m \rho(\mathbf{r}, t)} \int_0^\infty Q_a p^3 \rho(\mathbf{r}, p, t) dp,$$

получим окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \approx a^2 \nabla^2 \rho(\mathbf{r}, t) - \kappa \rho(\mathbf{r}, t) + q; \quad (2.4.42)$$

это — уравнение диффузии с двумя дополнительными членами, соответствующими уничтожению и возникновению частиц. Как мы видели, это уравнение пригодно только в тех случаях, где $mJ/p_{\text{ср.}}$ много меньше чем ρ (или по крайней мере мы не можем быть уверены в его пригодности, если $mJ/p_{\text{ср.}}$ не будет очень мало сравнительно с ρ). Граничные условия на граничной поверхности, вне которой нет рассеивающих мишеней, даются уравнением (2.4.34).

Единичные решения. По аналогии с нашими рассуждениями относительно волнового уравнения и уравнения Пуассона мы ищем решение уравнения (2.4.42), представляющее возникновение единственной частицы в момент времени $t=0$ в начале координат [$q = \delta(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z)$]. Решение должно быть сильно сконцентрировано около начала координат при малых значениях t и с течением времени должно все больше и больше распространяться. Можно попытаться выразить решение для случая неограниченного пространства через функцию ошибок в пространстве [$\rho = B(t) e^{-r^2 D(t)}$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$], и в конце концов можно показать, что требуемым решением уравнения (2.4.42) является (предполагая, что κ — постоянная)

$$\rho = G(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ (4\pi a^2 t)^{-3/2} e^{-(r^2/4a^2 t) - (\kappa t)}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.4.43)$$

Показательная функция непригодна для отрицательных значений t ; если t положительно, но бесконечно мало, то ρ является дельта-функцией вблизи начала (как это и должно быть), но когда t возрастает дальше от значения $t=0$, плотность выравнивается все больше и больше (на самом деле в соответствии с нашими замечаниями на стр. 181 уравнение диффузии, а следовательно, и его решение не пригодно до тех пор, пока после появления частицы не пройдет промежуток времени несколько больший, чем среднее время свободного пробега $1/n_l Q_{\text{ср.}} v_{\text{ср.}}$). Если имеется поглощение (κ не равно нулю), решение в целом экспоненциально убывает, так что интеграл от G , взятый по всему пространству (т. е. вероятность того, что частица еще не поглощена), равен $e^{-\kappa t}$.

Если частицы возникают во всей области на протяжении некоторого промежутка времени, так что они в количестве $q(x_0, y_0, z_0; t) dx_0 dy_0 dz_0 dt$ порождаются в элементарном объеме $dx_0 dy_0 dz_0$, расположенном в точке x_0, y_0, z_0 , за промежуток времени между моментами t и $t+dt$, тогда то же самое рассуждение, которое привело нас к формуле (2.1.8), показывает, что получающаяся плотность частиц в неограниченном пространстве в точке x, y, z в момент времени t равна

$$\rho = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 q(x_0, y_0, z_0; \tau) G(x-x_0, y-y_0, z-z_0; t-\tau). \quad (2.4.44)$$

Это решение, а также и другие будут очень подробно рассмотрены в этой книге дальше.

Когда достигается установившееся состояние и p больше не зависит от времени, соответствующее поле является решением уравнения Гельмгольца (см. стр. 125), так как уравнение (2.4.42) тогда принимает вид

$$a^2 \nabla^2 p - \kappa p = -q.$$

В этом случае знак члена, содержащего p , противоположен знаку соответствующего члена в уравнении Гельмгольца, полученного из волнового уравнения и приведенного на стр. 125.

Потеря энергии при столкновении. До сих пор мы предполагали, что атомы вещества (мишени), через которое диффундируют частицы жидкости, жестко закреплены в пространстве, так что столкновения вполне упругие и потери энергии в веществе не происходит. Это, конечно, является идеализацией истинного состояния, которая лишь в немногих случаях мало отличается от действительности (как в случае рассеяния фотонов, рассмотренном раньше). Во много большем числе случаев, представляющих интерес, атомы-мишени также движутся и не являются бесконечно более тяжелыми по сравнению с диффундирующими частицами, так что эти частицы при столкновениях могут терять (а также и приобретать) кинетическую энергию. Исследование наиболее общего случая возможно, но утомительно, оно отвлекло бы нас в сторону от нашей цели дальше, чем это желательно. Мы в наших рассуждениях продвинемся здесь лишь настолько, чтобы показать, какие новые эффекты возникают при потере части энергии при столкновениях.

Предположим, что атомы-мишени имеют массу M , которая значительно больше массы m частиц жидкости, а также, что частицы жидкости имеют в среднем намного большую кинетическую энергию, чем атомы-мишени. В этом случае атомы-мишени можно считать неподвижными в момент ударов частиц, а также предположить, что только малая часть кинетической энергии теряется при каждом отдельном столкновении.

Элементарный анализ баланса импульсов и кинетической энергии показывает, что если начальный импульс частицы равен p' а ее окончательный импульс после ее отклонения на угол α (см. рис 2.18) равен p , то с точностью до членов первого порядка относительно малой величины m/M имеем:

$$p \simeq p' \left[1 - \frac{m}{M} (1 - \cos \alpha) \right], \quad p' \simeq p \left[1 + \frac{m}{M} (1 - \cos \alpha) \right]. \quad (2.4.45)$$

В силу уравнений (2.4.35) и (2.4.36) мы можем сказать, что с точностью до членов первого порядка относительно малой величины m/M для частицы с первоначальным импульсом p'

$$\left. \begin{aligned} &\text{средняя потеря кинетической энергии при упругом} \\ &\text{столкновении равна произведению } 2tQ_m/MQ_e \text{ на ее пер-} \\ &\text{воначальную кинетическую энергию;} \\ &\text{средняя потеря величины импульса при упругом столк-} \\ &\text{новении равна произведению } tQ_m/MQ_e \text{ на ее первоначальный импульс } p'; \\ &\text{среднее уменьшение передней компоненты импульса при} \\ &\text{упругом столкновении равно произведению } Q_m/Q_e \text{ на ее} \\ &\text{первоначальный передний импульс } p', \end{aligned} \right\} \quad (2.4.46)$$

где среднее число упругих столкновений частиц, имеющих импульс p , равно $n_i Q_e p / m$ в секунду. Третье утверждение означает, что среднее значение компоненты окончательного импульса по направлению первоначального движения $(p \cdot p' / p')$ равно $[1 - (Q_m / Q_e)] p'$. Между прочим, эти утверждения поясняют, почему Q_m мы называем эффективным сечением передачи импульса.

Вернемся теперь к рассмотрению уравнений (2.4.14) и (2.4.15), дающих скорость изменения функции распределения $f(r, p, t)$, вызванного упругими столкновениями. Скорость убывания f , вызванного рассеянием частиц из элемента импульсов $dV_p = p^2 dp d\varphi \sin \theta d\theta$ (см. рис. 2.18), равна, как и прежде,

$$\frac{Q_e n_i p}{m} f(r, p, \theta, \varphi, t) dV_p = \\ = \frac{n_i p^3}{m} dp \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi \sigma(p, \alpha) \sin \alpha d\alpha f(r, p, \theta, \varphi, t).$$

Скорость возрастания f , обусловленного частицами, отброшенными *внутри* элемента dV_p из элемента импульсов $dV_{p'} = (p')^2 dp' d\varphi' \sin \theta' d\theta'$, равна

$$\frac{n_i}{m} \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi [(p')^3 \sigma(p', \alpha) f(r, p', \theta', \varphi', t) dp'] \sin \alpha d\alpha.$$

Но согласно уравнению (2.4.45) p' отличается от p на малую величину $(pm/M)(1 - \cos \alpha)$. Выражение, стоящее в квадратных скобках, может быть разложено в ряд Тейлора по степеням (pm/M) , что даст в качестве первого приближения

$$p^3 dp \left\{ \sigma(p, \alpha) f(r, p, \theta', \varphi', t) + \frac{m}{Mp^3} (1 - \cos \alpha) \frac{\partial}{\partial p} [p^4 \sigma(p, \alpha) f(r, p, \theta', \varphi', t)] \right\}.$$

Мы допустили, что распределение частиц почти изотропно и что движение переноса мало по сравнению с случайным движением частиц в соответствии с уравнением (2.4.37), где mJ/p мало сравнительно с p . Мы допустили также, что вектор J параллелен полярной оси θ и φ . При этих предположениях оба выражения могут быть объединены и упрощены и мы получаем результирующую скорость изменения f , вызванного приростом и потерей частиц при рассеянии

$$\frac{n_i p^3}{4\pi m} dp \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi \left\{ \frac{3}{p} \sigma(p, \alpha) [\cos \theta' - \cos \theta] J(r, p, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{Mp^3} (1 - \cos \alpha) \frac{\partial}{\partial p} [p^4 \sigma(p, \alpha) p(r, p, t)] \right\} \sin \alpha d\alpha = \\ = \frac{n_i p}{4\pi m} dV_p \left[-\frac{3}{p^2} Q_m p \cdot J + \frac{1}{Mp^3} \frac{\partial}{\partial p} (p^4 Q_m p) \right]. \quad (2.4.47)$$

Первый член этого выражения был выведен раньше [см. равенства (2.4.38) и следующие]; второй член — новый, он представляет изменение функции f , вызванное потерей энергии при столкновении.

Другая часть скорости изменения, которая должна быть принята во внимание, дается в уравнении (2.4.9), соответствующем уравнению неразрывности. Изменение имеет вид

$$-\frac{dV_p}{4\pi m^2} p \cdot \text{grad } p - \frac{3}{4\pi p^2 m} dV_p p \cdot \text{grad } (p \cdot J), \quad (2.4.48)$$

если подставить приближенное выражение f , данное в уравнении (2.4.37).

Действие внешней силы. Учитывая влияние на функцию f потери энергии при столкновениях, необходимо также принять во внимание возможность приобретения энергии частицами благодаря наличию внешнего силового поля. Если, например, частицами являются электроны, движущиеся через газ, то электрическое поле может вызвать движение переноса и изменить функцию распределения f . Мы предположим, что действует постоянная сила $\mathbf{F}$, параллельная потоку $\mathbf{J}$. (Мы не будем рассматривать случай, когда имеется внешняя сила и одновременно $\text{grad } \rho$ отличен от нуля, поэтому в нашем исследовании в этом параграфе $\mathbf{J}$ направлено *либо* параллельно $\mathbf{F}$, *либо* параллельно $\text{grad } \rho$, смотря по тому, какой из этих векторов отличен от нуля.)

Если приложить силу $\mathbf{F}$, импульс каждой частицы изменится; частицы, имевшие импульс $\mathbf{p}$ в момент времени t , будут иметь импульс $\mathbf{p} + \mathbf{F} dt$ в момент $t + dt$. Рассуждая подобно тому, как мы это делали при выводе уравнения неразрывности (2.4.9), мы должны принять, что плотность следует за ускоряемыми частицами, т. е. $f(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \mathbf{F} dt, t + dt) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$; таким образом, скорость изменения величины $f dV_p$, вызванная внешним полем, равна

$$\begin{aligned} & - \left[F_x \frac{\partial f}{\partial p_x} + F_y \frac{\partial f}{\partial p_y} + F_z \frac{\partial f}{\partial p_z} \right] dV_p = \\ & = -F \left[\cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{p} (1 - \cos^2 \theta) \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} \right] dV_p = \\ & = -\frac{F}{4\pi} \left[\frac{\cos \theta}{m} \frac{\partial \rho}{\partial p} + 3 \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{J}{p} \right) + \frac{3J}{p^2} (1 - \cos^2 \theta) \right] dV_p. \quad (2.4.49) \end{aligned}$$

Наконец, комбинируя выражения (2.4.47) – (2.4.49) и добавляя член $-n_i Q_a p \rho / m$, соответствующий поглощению частиц, получаем выражение, дающее скорость изменения ρ и J , вызванного столкновениями, ускорением переноса и поглощением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{3m}{p} \cos \theta \frac{\partial J}{\partial t} \simeq & -\frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad } \rho - \frac{3}{p^2} \mathbf{p} \cdot \text{grad } (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}) - \\ & - F \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial p} - 3mF \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{J}{p} \right) - \frac{3mFJ}{p^2} (1 - \cos^2 \theta) - \\ & - 3n_i Q_m J \cos \theta + \frac{n_i}{M p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^4 Q_m \rho) - \frac{1}{m} n_i Q_a p \rho - 3n_i Q_a J \cos \theta. \quad (2.4.50) \end{aligned}$$

Это уравнение может быть разделено на два, если воспользоваться симметрией относительно θ (или относительно направления $\mathbf{p}$); решение полученных уравнений позволит определить $\rho(\mathbf{r}, p, t)$ и $\mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t)$. Далее будут рассмотрены два примера, оба в условиях установившегося состояния, в случаях, когда члены, соответствующие потере энергии, играют существенную роль при решении.

Равномерный перенос, вызванный силовым полем. В качестве первого примера рассмотрим равномерно распределенные частицы, движущиеся через среду под влиянием постоянной силы $\mathbf{F}$. Такого, например, движение электронов в газе под действием электрического поля. Здесь $\text{grad } \rho$ равен нулю и вектор переноса $\mathbf{J}$ должен быть параллелен $\mathbf{F}$. Для установившегося состояния $\partial f / \partial t$ равно нулю; предположим, кроме того, что Q_a равно нулю. Остаточные члены уравнения (2.4.50) умножим на $\sin \theta d\theta$ или на $\cos \theta \sin \theta d\theta$ и проинтегрируем по θ ; получим два уравнения:

$$F \frac{\partial}{\partial p} (pJ) = \frac{n_i}{Mm} \frac{\partial}{\partial p} (p^4 Q_m \rho), \quad \frac{\partial \rho}{\partial p} = -\frac{3n_i Q_m}{F} J. \quad (2.4.51)$$

Первое уравнение после интегрирования дает

$$Fp^2J(p) = \frac{n_t}{Mm} p^5 Q_m p(p) - Kp.$$

Постоянная интегрирования K оказывается равной нулю, в чем можно убедиться с помощью следующего рассуждения: интегрируя последнее уравнение (при $K=0$) еще раз относительно p , получим уравнение баланса энергии [см. (2.4.38)]

$$FJ = \int_0^\infty \frac{p^2}{2m} \cdot \frac{2mQ_m}{MQ_e} \cdot \frac{n_t Q_e p}{m} \rho(p) p^2 dp.$$

Левая часть как раз равна энергии, полученной от силового поля F за одну секунду в одном кубическом сантиметре благодаря потоку плотности J переноса частиц. Выражение $(p^2/2m) (2mQ_m/MQ_e)$, стоящее в правой части, как показывает уравнение (2.4.46), дает среднюю кинетическую энергию, потерянную при столкновении и соответствующую импульсу p ; $n_t Q_e p/m$ есть число столкновений частицы за секунду и $\rho(p) p^2 dp$ есть число частиц в кубическом сантиметре, имеющих импульсы, лежащие между p и $p+dp$; таким образом, интеграл как раз равен полной энергии, теряемой благодаря столкновениям одним кубическим сантиметром за одну секунду. Если устойчивое состояние достигнуто, то количество энергии, потерянной при столкновениях, должно быть равно количеству энергии, приобретенной от силового поля, и потому наше уравнение удовлетворяется. Следовательно, K должно быть равным нулю.

Теперь можно вернуться ко второму из уравнений (2.4.51) и найти зависимость ρ от p . Так как $J(p) = (n_t Q_m / m M F) p^3 \rho(p)$, то, интегрируя, получим

$$\rho(p) = A \exp \left[-\frac{3m}{M} \int_0^p \left(\frac{n_t Q_m p}{m F} \right)^2 p dp \right], \quad (2.4.52)$$

где A выбрано так, чтобы интеграл в (2.4.38) был равен ρ , средней плотности частиц. Если Q_m не зависит от плотности, то

$$\rho(p) = A e^{-h^4 p^4}, \quad h^4 = \frac{3m}{M} \left(\frac{n_t Q_m}{2Fm} \right)^2, \quad A = 3,2642 \rho h^3.$$

С помощью этой функции распределения мы можем выразить среднюю кинетическую энергию $\varepsilon_{\text{ср.}}$ частиц и среднюю скорость переноса $v_{\text{ср.}}$, вызванные влиянием поля, через энергию $\varepsilon_e = F/n_t Q_m$ и скорость $v_e = \sqrt{2F/mn_t Q_m}$, которые приобрела бы частица при движении под действием поля из состояния покоя за величину среднего свободного пробега. Эти величины равны

$$\varepsilon_{\text{ср.}} = 0,4270 \left(\frac{M}{m} \right)^{1/2} \varepsilon_e, \quad v_{\text{ср.}} = 0,6345 \left(\frac{m}{M} \right)^{1/4} v_e.$$

Эти равенства верны только, если Q_m не зависит от p . Отсюда видно, что средняя энергия тем больше, чем тяжелее атомы по сравнению с частицами, так как при увеличении M/m частицы могут терять при столкновениях меньше энергии. С другой стороны, средняя скорость переноса убывает при возрастании M/m .

Этот пример мало связан с уравнением диффузии, но он показывает, как уравнения, определяющие функцию распределения f , могут быть приспособлены в различных случаях к очень обширному многообразию условий и явлений. Он показывает, например, что распределение скоро-

стей электронов, движущихся в газе под влиянием электрического поля, не является распределением Максвелла, вызванным тепловым перемешиванием; здесь содержится четвертая степень скорости (вместо квадрата) в показателе. Это, конечно, верно до тех пор, пока средняя кинетическая энергия электронов много выше средней кинетической тепловой энергии атомов газа, через который переносятся электроны. В противном случае нельзя было бы считать, что атомы газа находятся в состоянии относительного покоя и распределение электронов должно было изменяться на основе максвелловского закона распределения скоростей.

Уменьшение скорости частиц при столкновениях. Уравнение диффузии появляется в следующем (и последнем) примере, который интересен при изучении замедления нейтронов в «замедлителе». Мы рассмотрим здесь зависящие от x, y, z решения уравнения (2.4.50), когда $\mathbf{F}$ равно нулю и когда принимается во внимание замедляющее действие столкновений.

Предположим, что частицы появляются в некоторой части пространства все с одним и тем же начальным импульсом p_0 ; они сталкиваются с атомами и постепенно замедляются и в то же время разбрасываются. Так как здесь процесс установившийся, новые частицы непрерывно появляются и заменяют те, скорость которых уменьшилась; функция распределения не зависит от времени, но зависит от импульса p и от пространственных координат. Как мы увидим, $\mathbf{J}$ в этом случае параллелен градиенту p .

Импульс может быть принят за меру среднего «возраста» отдельной частицы, так как эта частица появляется, имея импульс p_0 . Когда этот возраст увеличивается, распределение в пространстве изменяется; поэтому можно надеяться найти уравнение, связывающее зависимость f от точки пространства с зависимостью ее от возраста частиц тем же способом, каким уравнение диффузии связывает зависимость f от точки пространства с ее зависимостью от времени для случая неустановившегося состояния.

Среднее уменьшение импульса p при столкновении, как показывает (2.4.46), определяется равенством

$$\frac{dp}{d\tau} \simeq - \frac{mQ_m}{MQ} p,$$

где τ есть среднее число столкновений, которым подверглась частица; следовательно, мы имеем соотношение между v и τ

$$\tau - \tau_0 = \int_p^{p_0} \frac{MQ}{mQ_m} \frac{dp}{p}. \quad (2.4.53)$$

Величина $\tau - \tau_0$ называется *возрастом частицы в распределении*; она заменяет время, когда мы рассматриваем случай установившегося состояния при наличии замедления.

Возвращаясь снова к уравнению (2.4.50), мы опускаем члены, содержащие силу и производную по времени, но включаем члены, характеризующие потерю энергии и поглощение. Член, зависящий от источника q , аналогичный соответствующему члену в (2.4.41), не включается, так как он введен в «начальном условии» при $\tau = \tau_0$. Если мы умножим на $\cos \theta$ и проинтегрируем по всем направлениям θ , мы получим, как и раньше [см. (2.4.40)],

$$\mathbf{J} = - \frac{p}{3n_l Q_m} \text{grad } p, \quad Q = Q_m + Q_a.$$

На этот раз уравнение получается точным, так как теперь мы имеем дело с установившимся состоянием, так что производная по времени от $\mathbf{J}$ равна нулю, в то время как раньше она была очень малой и мы ею пренебрегали.

Подставляя это обратно в (2.4.50) и осредняя по всем направлениям, мы получим [по поводу члена, содержащего $\text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})$ см. стр. 186]

$$-\frac{m n_i}{M p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^4 Q_m p) = \frac{p}{3 n_i Q} \nabla^2 p - n_i Q_a p p.$$

Полагая $\psi = (n_i Q_m p^4 / M)$ и подставляя вместо p его выражение через τ из (2.4.53), получим окончательно уравнение для ψ , имеющее вид уравнения диффузии

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{3 n_i^2 Q^2} \nabla^2 \psi - \alpha \psi, \quad \alpha = \frac{Q_a}{Q}, \quad (2.4.54)$$

где вместо времени мы имеем $(\tau - \tau_0)$ — возраст частиц, имеющих импульс p . Физический смысл величины ψ вскоре станет ясным.

Решения этого уравнения полностью аналогичны решениям обычного уравнения диффузии. Например, если частицы с импульсом p_0 первоначально появляются в сконцентрированной области пространства, то распределение более медленных частиц будет более равномерным; эта равномерность будет тем больше, чем больше τ (т. е. чем меньше p/p_0). Если только установившееся состояние достигнуто, мы можем сделать перепись всех частиц, находящихся в данный момент времени в данном кубическом сантиметре, чтобы определить количество тех из них, импульсы которых попадают в данный промежуток (или, вернее, для которых τ лежит в данном интервале $d\tau$). Из полученной плотности относительно τ можно найти функцию ψ в точке как функцию τ ; наоборот, если ψ известна, мы можем предсказать результаты переписи.

Чтобы определить «начальное значение» ψ_0 , т. е. значение функции ψ при $\tau = \tau_0$, мы должны установить связь между количеством частиц на кубический сантиметр, появляющихся за секунду в данной точке, и полной потерей импульсов за секунду в одном кубическом сантиметре, т. е. произведением числа частиц в одном кубическом сантиметре на величину потери частицей импульса за секунду. Потеря импульса при столкновении, согласно утверждению (2.4.46), равна в среднем $m p Q_m / M Q_a$. Число столкновений в секунду, приходящихся на одну частицу, равно $n_i Q_a p / m$, так что полная величина потери импульса одной частицей в секунду равна $dp/dt = n_i Q_m p^2 / M$. Так как число частиц в одном кубическом сантиметре, имеющих импульс в данном промежутке импульсов dp , равно, согласно (2.4.38), $p^2 p dp$, то полная потеря импульса в одном кубическом сантиметре за промежуток времени dt равна $p^2 p (dp/dt) dt = n_i Q_m p^4 p dt / M$. Следовательно, величина $n_i Q_m p^4 / M = \psi(\tau)$ равна полному числу частиц, имеющих в данное время импульсы, превышающие p , но таких, что через секунду их импульсы становятся меньше чем p . Это полная скорость уменьшения импульсов.

Например, если в каждом кубическом сантиметре ограниченной части пространства каждую секунду появляется n_0 частиц, то ψ_0 будет равно n_0 всюду в этой ограниченной области (предполагается, что частицы появляются изотропно, т. е. все направления p_0 равновероятны). Если границы области полностью отражают частицы, то ψ при всех значениях τ не будет зависеть от пространственных координат и решение уравне-

ния (2.4.54) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \psi &= n_0 e^{-(Q_a/Q)(\tau-\tau_0)} \quad \text{при } \tau > \tau_0, \\ \text{или } \psi &= n_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{mQ_a/MQ_m}, \quad \text{если } \frac{Q_m}{Q} \text{ не зависит от } p \end{aligned} \right\} \quad (2.4.55)$$

и количество частиц, импульсы которых лежат между p и $p+dp$, равно

$$p^2 p dp = \frac{M\psi}{n_l Q_m p^2} dp = \frac{n_0 M}{n_l Q_m p^2} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{mQ_a/MQ_m} dp$$

при $p < p_0$. Последняя форма решения пригодна лишь в случае, когда Q_m/Q не зависит от p . Если отсутствует поглощение ($Q_a=0$), то ψ не зависит от τ и p будет обратно пропорциональным величине $p^4 Q_m$. Это и должно иметь место, так как при отсутствии поглощения быстрота ψ уменьшения импульсов должна быть одна и та же для всех скоростей. Это решение, конечно, влечет за собой существование бесконечно большого числа частиц с бесконечно малыми скоростями. Если бы наше исследование потери энергии при столкновениях сохраняло силу в пределе при обращении скорости в нуль, то такое бесконечное количество должно было бы существовать, чтобы достичь установившегося состояния. В действительности, конечно, атомы среды не остаются полностью в покое, и поэтому для достаточно малых скоростей частиц приведенное выше рассуждение, предполагающее, что частицы всегда теряют энергию, становится неприменимым. Поэтому равенство (2.4.55) непригодно для частиц, имеющих кинетическую энергию той же величины или меньшую, чем средняя энергия атомов.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда в точке x_0, y_0, z_0 неограниченного пространства появляется (изотропно) в секунду одна частица с импульсом p_0 . Тогда ψ при $\tau=\tau_0$ будет равно дельта-функции $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$; используя те самые методы, которые привели нас к формуле (2.4.43), получим $\psi = G(x-x_0, y-y_0, z-z_0 | \tau-\tau_0)$, где $G(x, y, z | \tau-\tau_0) =$

$$= \begin{cases} 0, & \tau < \tau_0, \\ \left[\frac{3n_l^2 Q^2}{4\pi(\tau-\tau_0)} \right]^{3/2} \exp \left[-\frac{3n_l^2 Q^2 r^2}{4(\tau-\tau_0)} - \frac{Q_a}{Q}(\tau-\tau_0) \right], & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (2.4.56)$$

$$\tau = \int_p^\infty \frac{MQ}{mQ_m} \cdot \frac{dp}{p}, \quad \rho(r, p) = \frac{M\psi}{n_l Q_m p^4}.$$

Наконец, мы можем решить задачу, если на кубический сантиметр в точке x_0, y_0, z_0 неограниченного пространства в секунду появляется изотропно $q(x_0, y_0, z_0 | p_0) dp_0$ частиц, импульсы которых лежат между p_0 и p_0+dp_0 . Количество частиц, появляющихся в секунду между пределами «возраста» τ_0 и $\tau_0+d\tau_0$, будет тогда равно $(p_0 m Q_m / MQ) q(x_0, y_0, z_0 | \tau_0) d\tau_0$, где p_0 связано с τ_0 так же, как p и τ связаны в уравнении (2.4.56). Получающееся установившееся распределение в пространстве частиц с различными импульсами p можно вывести из выражения для ψ

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z | \tau) &= \frac{mQ_m}{MQ} \int_{-\infty}^{\tau} p_0 d\tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \times \\ &\times q(x_0, y_0, z_0 | \tau_0) G(x-x_0, y-y_0, z-z_0 | \tau-\tau_0), \end{aligned} \quad (2.4.57)$$

где количество частиц, имеющих импульсы в промежутке между p и $p+dp$, рассчитанное на один кубический сантиметр, равно $p^2 p dp = (M\phi/n, p^2 Q_m) dp$. При некоторых простых формах функции q интегрирование может быть выполнено и таким образом может быть получено замкнутое аналитическое выражение для ϕ .

Резюме. Можно указать много других применений уравнения диффузии. Для его появления требуется только, чтобы некоторая величина (плотность, парциальное давление, количество теплоты и т. д.) удовлетворяла двум условиям: во-первых, она должна подчиняться уравнению неразрывности, то есть скорость изменения этой величины с течением времени должна быть равна дивергенции потока этой величины, взятой со знаком минус, во-вторых, поток этой величины должен быть пропорционален градиенту этой величины, взятому с обратным знаком. Другие случаи будут рассмотрены в гл. 12.

Так как уравнение содержит производную по времени лишь первого порядка, в то время как производные по координатам имеют второй порядок, решения уравнения диффузии необратимы во времени. Почти все другие уравнения, которые мы будем рассматривать, изображают обратимые в термодинамическом смысле явления, в то время как уравнение диффузии изображает возрастание энтропии (мы к этому вернемся в следующей главе). Все это, грубо говоря, равносильно утверждению, что явления, изображаемые уравнением диффузии, имеют статистический характер.

2.5. Электромагнитное поле

Понятие поля играет большую роль еще в одной важной отрасли физики, а именно в учении об электричестве. Некоторые элементарные частицы вещества обладают электрическими зарядами и большая часть их, если не все, имеют магнитные моменты. Электромагнитная теория разработана для описания их взаимодействий в целом (взаимодействия между отдельными частицами обычно включают квантовые явления, которые мы опишем в этой главе позже).

Как и в случае полей, встречавшихся раньше в этой главе, электрический заряд часто удобнее рассматривать как непрерывную жидкость, чем как множество заряженных частиц. Классическая электромагнитная теория имеет дело с полями, порождаемыми различными расположениями такой жидкости, а также и взаимодействиями этих полей с другими частями жидкости. Конечно, можно было бы изучать силы, с которыми одна часть жидкости (или одна частица) действует на другую часть (или частицу), вовсе не говоря о поле. Однако представляется значительно более простым и, быть может, также лучшим расчленить задачу на две части: первую — о «создании» электромагнитного поля при наличии того или иного распределения зарядов и токов, и вторую — о влиянии этого поля на распределение зарядов и токов.

Электростатическое поле. Воздействие одной заряженной частицы на другую вполне аналогично взаимодействию тяготения. Величина силы, действующей на каждую частицу, обратно пропорциональна квадрату их расстояния друг от друга и прямо пропорциональна произведению величин их зарядов; направление силы совпадает с направлением прямой линии, соединяющей частицы (пока частицы остаются в покое одна относительно другой). В случае тяготения сила, всегда притягивающая, и величина гравитационного заряда пропорциональна массе частицы;

между двумя электрическими зарядами действует сила отталкивания, если заряды имеют один и тот же знак, и сила притяжения, когда заряды противоположных знаков.

Сила, действующая на какую-либо частицу или часть заряда, будет, следовательно, пропорциональна величине ее собственного заряда. Таким образом, мы можем определить векторное поле, называемое *электростатическим* (или *гравитационным*) *полем* $\mathbf{E}$, которое в какой-либо точке является отношением силы, действующей на пробную частицу, помещенную в эту точку, к величине заряда этой частицы. Вектор $\mathbf{E}$ называется электрической (или гравитационной) *напряженностью* поля в точке. Это поле, определяемое суммой сил, величины которых обратно пропорциональны квадратам расстояний от различных имеющихся зарядов, является полем, определенным некоторым числом точечных источников, рассмотренным на стр. 28. Мы показали в (1.2.10), что для полей такого типа поток через любую замкнутую поверхность изнутри наружу равен произведению 4π на сумму зарядов всех частиц, расположенных внутри неё.

До тех пор пока мы рассматриваем лишь макроскопические эффекты, мы можем не обращать внимания на микроскопические неправильности поля, возникающие благодаря тому, что заряды сосредоточены на отдельных частицах, а не распределены непрерывно; нам надо рассматривать только поля, осредненные по элементарным кускам поверхности, имеющим площадь большую сравнительно с расстояниями между частицами, но малую по сравнению со всей поверхностью. Если это возможно, полученное среднее поле эквивалентно полю, возникающему при непрерывном «сглаженном» распределении зарядов; в этом случае мы можем не беспокоиться по поводу точного положения каждой отдельной частицы. Мы можем «вблизи» точки x, y, z выбрать элемент объема $dx dy dz$, содержащий достаточно большое количество частиц. Величина полного заряда внутри этого объема равна средней плотности заряда «в точке» x, y, z , умноженной на $dx dy dz$. Эта величина пропорциональна потоку через поверхность рассматриваемого элемента, а этот поток, согласно равенству (1.4.5), равен произведению $dx dy dz$ на дивергенцию поля $\mathbf{E}$.

Таким образом, рассматривая макроскопические явления, мы можем заменить множество заряженных частиц гладким распределением заряда с плотностью $\rho(x, y, z, t)$. Как показывает равенство (1.4.5), в случае, когда эта плотность не зависит от времени, получающееся статическое поле $\mathbf{E}$ связано с ρ уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho.$$

Коэффициент пропорциональности ϵ зависит от среды и называется *диэлектрической постоянной* среды. Если ϵ меняется от точки к точке, то удобнее рассматривать связанное с $\mathbf{E}$ векторное поле $\mathbf{D}$, называемое полем электрической индукции, причем

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}. \quad (2.5.1)$$

Выразив $\mathbf{D}$ через ρ и зная ϵ , найдем $\mathbf{E}$, а потом определим и силу $\rho\mathbf{E}$, действующую на кубический сантиметр электрической жидкости.

Как было показано на стр. 59, вектор $\mathbf{E}$ всегда может быть выражен через вихрь векторного и градиент скалярного потенциала. Но, так как дивергенция вихря равна нулю, векторный потенциал для $\mathbf{E}$ не определяется уравнением (2.5.1) и поэтому не входит в выкладки в электростатике. Скалярный потенциал φ для $\mathbf{E}$ должен удовлетворять следующему уравнению:

$$\operatorname{div} [\epsilon \operatorname{grad} \varphi] = \epsilon \nabla^2 \varphi + (\operatorname{grad} \epsilon) \cdot (\operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (2.5.2)$$

Если ε — постоянно, то это уравнение превращается в уравнение Пуассона для φ [см. (2.1.2)].

В случае тяготения величина ε везде постоянна и в уравнении для напряженности берется противоположный знак $\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi\rho/\varepsilon$, соответствующий тому, что сила всегда является силой притяжения, а не отталкивания. В этом случае также существует скалярный потенциал, являющийся всюду решением уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho/\varepsilon$.

Магнитостатическое поле. Ферромагнитные материалы, атомы которых имеют не нейтрализованные магнитные моменты, ведут себя так, как если бы они были заполнены магнитной жидкостью¹⁾, подобной электрической жидкости, рассмотренной сейчас нами. Если поместить единичный положительный магнитный заряд, на него будет действовать сила, определяемая векторным полем $\mathbf{H}$, аналогичным электрическому полю $\mathbf{E}$. Диэлектрической постоянной ε здесь соответствует магнитная проницаемость μ , а вектору электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ соответствует магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$.

Тем не менее важным различием между электричеством и магнетизмом является отсутствие магнитных зарядов. Уравнение для поля магнитной индукции $\mathbf{B}$ в отличие от уравнения (2.5.1) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.5.3)$$

Конечно, можно было бы считать $\mathbf{B}$ градиентом скалярного потенциала, обязательно удовлетворяющего уравнению Лапласа (2.3.6), однако удобнее воспользоваться тем фактом, что дивергенция вихря любого вектора равна нулю, и выразить $\mathbf{B}$ с помощью векторного потенциала $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.

В этих рассуждениях мы пока рассматривали магнитостатическое поле, не учитывая того факта, что магнитное поле оказывается связанным с потоком электрических зарядов, т. е. с электрическим током. Например, если вдоль прямолинейного провода, диаметром которого можно пренебречь, течет ток I (направление вектора совпадает с направлением тока вдоль провода), то магнитное поле вокруг провода дается равенством

$$\mathbf{H} = \frac{2I \times \mathbf{r}}{r^2},$$

где $\mathbf{r}$ — есть вектор, перпендикулярный проводу и идущий от провода к точке, в которой измеряется $\mathbf{H}$.

Но это как раз поле, порожденное простым вихрем, рассмотренное на стр. 30. Принимая во внимание это, а также определение вихревого вектора, данное на стр. 49, получаем общую связь между $\mathbf{B}$ и постоянным током. Если заряженная жидкость движется, то произведение скорости $\mathbf{v}$ заряда на его плотность ρ называется плотностью тока $\mathbf{J}$; этот вектор определяет величину заряда, проходящего в секунду через один квадратный сантиметр, и имеет в каждой точке направление скорости заряда. Вектор $\mathbf{J}$ связан с вихревым вектором поля $\mathbf{H}$ простым уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J}. \quad (2.5.4)$$

(Между прочим, может оказаться, что имеется ток, но нет свободных зарядов; так будет, если ток получается в результате движения

¹⁾ Так как не существует магнитных зарядов, а можно рассматривать только магнитные моменты, то было бы более логично выводить уравнения для магнитного поля, рассматривая вращающий момент, действующий на магнитный диполь. Однако это не книга по электромагнетизму и нас можно извинить (как мы надеемся) за то, что мы экономим место, выводя наши уравнения по аналогии с электростатикой вместо того, чтобы затратить еще несколько страниц на более логичный вывод, который во всех подробностях дан в таких, например, книгах, как Дж. А. Страттон. Теория электромагнетизма, ГТТИ, 1948, или Frank. Introduction to Electricity and Optics.

в противоположных направлениях равных количеств положительных и отрицательных зарядов.)

Наоборот, в магнитном поле возникает сила, действующая на ток. Сила, действующая на один кубический сантиметр движущегося заряда в точке x, y, z , равна

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.5.5)$$

Для решения вопросов, связанных с установившимся состоянием, этих уравнений достаточно. Заряд вызывает появление электростатического поля ($\mathbf{E}, \mathbf{D}$), ток вызывает появление магнитного поля ($\mathbf{H}, \mathbf{B}$). В свою очередь электростатическое поле действует на заряд, а магнитное поле — на ток. Электрическое поле возникает под действием статических зарядов и само вызывает силы, действующие на заряды; магнитное поле возникает при наличии движущихся зарядов и само вызывает силы, действующие на движущиеся заряды. Может быть установлена довольно искусственная аналогия между скалярным потенциалом, определяющим электрическое поле, и скалярным волновым потенциалом для волн чистого расширения в упругой среде, а также между векторным потенциалом, определяющим магнитное поле, и векторным волновым потенциалом для волн сдвига. Однако здесь не может быть волнового движения, так как мы рассматриваем только стационарное состояние.

Для неограниченного пространства, содержащего конечное установившееся распределение зарядов и токов и имеющего диэлектрическую постоянную ϵ , везде одну и ту же, в соответствии с равенством (1.4.8) решение уравнения (2.5.2) имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} \rho(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (2.5.6)$$

где

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

и $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \mathbf{D} = -\epsilon \text{grad } \varphi.$

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ может быть выбран так, чтобы его дивергенция была равна нулю (ибо нас интересует только та часть вектора $\mathbf{A}$, которая имеет ненулевой вихрь). Так как $\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}$, то из уравнения (2.5.4) имеем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi\mu \mathbf{J}, \quad (2.5.7)$$

а из уравнения (1.5.16) —

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mu \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} \mathbf{J}(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (2.5.8)$$

где

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}.$$

Зависимость от времени. До сих пор мы рассматривали лишь установившееся состояние, когда $\partial \rho / \partial t$ и $\text{div } \mathbf{J}$ равны нулю [$\text{div } \mathbf{J}$ должна быть равна нулю, если $\partial \rho / \partial t$ равна нулю в силу уравнения неразрывности (2.3.1)]. Если же ρ и $\mathbf{J}$ меняются с течением времени, уравнения (2.5.1) и (2.5.4) должны стать связанными друг с другом, так как уравнение неразрывности связывает между собой плотность заряда

и поток заряда. При этом надо связать единицы заряда, силы тока и напряженности поля в этих двух уравнениях. Если мы пользуемся системой единиц *MKS* (метр—килограмм—секунда), уравнения остаются прежними при ϵ , равной для вакуума $\epsilon_0 \simeq \frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$, и при μ , равной для вакуума $\mu_0 \approx 10^{-7}$. Мы предпочитаем, однако, пользоваться смешанной системой Гаусса, измеряя заряды в статических кулонах, ток — в статических амперах, магнитное поле — в электромагнитных единицах (μ для вакуума становится равной 1) и электростатическое поле — в электростатических единицах (ϵ для вакуума будет равна 1). Тогда уравнение (2.5.4) для установившегося состояния принимает вид

$$-c \operatorname{rot} \mathbf{H} = -4\pi \mathbf{J}, \quad (2.5.9)$$

а уравнение (2.5.5) принимает вид $\mathbf{F} = (1/c) \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, где $c = \sqrt{1/\mu_0 \epsilon_0} \simeq 3 \cdot 10^8$ м/сек $= 3 \cdot 10^{10}$ см/сек.

Так как уравнение неразрывности $\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div} \mathbf{J}$ остается в силе, мы должны получить тождество, взяв дивергенцию от (2.5.9) и производную по времени от (2.5.1) и приравняв их друг к другу. Однако левые части полученных уравнений оказываются неодинаковыми, так как в одной из них содержится член $\operatorname{div} (\partial \mathbf{D} / \partial t)$. Это не удивительно, так как оба эти уравнения выведены для стационарных полей, благодаря чему член, содержащий производную $\mathbf{D}$ по времени, должен был исчезнуть. Уравнение для магнитного поля, зависящего от времени, очевидно, должно иметь вид

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}, \quad (2.5.10)$$

что подтверждается и опытом. Это уравнение называется уравнением *магнитной индукции* или контурным законом Ампера для $\mathbf{H}$. Магнитное поле появляется не только при наличии электрического тока; изменение электрического поля также вызывает появление магнитного поля.

Уравнения Максвелла. Мы уже почти пришли к симметричной форме уравнений поля; мы имеем два уравнения, в которых содержатся дивергенции векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ [уравнения (2.5.1) и (2.5.3)], и одно уравнение, содержащее вихрь вектора $\mathbf{H}$ [уравнение (2.5.10)]. Для получения симметричной формы уравнений нам недостает четвертого уравнения, содержащего $\operatorname{rot} \mathbf{E}$. Однако четвертое уравнение не может быть полностью симметричным уравнением (2.5.10), так как если не существует магнитного заряда, то тем более не существует и магнитного тока. Наиболее близко можно подойти к симметрии, составив уравнение, связывающее $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ и $\partial \mathbf{B} / \partial t$. Это уравнение также подтверждается опытом; оно называется законом *электрической индукции* Фарадея и связывает изменение магнитного поля с вихрем электрического поля. Экспериментальные данные показывают, что в правую часть этого уравнения нужно ввести множитель $-1/c$. Таким образом, можно выписать четыре симметричных уравнения, связывающих поля с токами:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} 4\pi \mathbf{J}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, & \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

называемые *уравнениями Максвелла*. Сила, действующая на кубический сантиметр движущегося заряда, равна

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.5.12)$$

Эти уравнения являются основными уравнениями, определяющими классическое электромагнитное поле, получающееся при «сглаживании» зарядов и плотности тока.

Уравнения для скалярного и векторного потенциала также изменятся, если эти потенциалы зависят и от времени. Мы по-прежнему полагаем $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, так как тогда равенство $\text{div } \mathbf{B} = 0$ автоматически выполняется. Подставив это в уравнение для $\text{rot } \mathbf{E}$, получим

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad \text{или} \quad \text{rot} \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0.$$

Вектор, вихрь которого равен нулю, может быть получен из скалярной потенциальной функции, так что вектор $[\mathbf{E} + (1/c) (\partial \mathbf{A} / \partial t)]$ будет градиентом некоторого скаляра. В случае установившегося состояния мы имели $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, где φ — скалярный потенциал; в общем случае мы можем функцию φ определить равенством

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.5.13)$$

Подставив эти выражения для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ в уравнение для $\text{rot } \mathbf{H}$ (и приняв, что ε и μ — постоянные), получаем

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon}{c} \left[\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right] + \frac{1}{c} 4\pi \mathbf{J}$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \text{grad} \left[\text{div } \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \frac{\mu}{c} 4\pi \mathbf{J}.$$

Это уравнение для $\mathbf{A}$ является обобщением уравнения (2.5.7), если величина, заключенная в квадратные скобки, равна нулю. Так как до сих пор определена только та часть вектора $\mathbf{A}$, для которой вихрь отличен от нуля, то всегда возможно подобрать дивергенцию $\mathbf{A}$ таким образом, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.5.14)$$

Подставляя $\mathbf{E}$ и $\text{div } \mathbf{A}$ из уравнений (2.5.13) и (2.5.14) в последнее уравнение Максвелла, определяющее $\text{div } \mathbf{D}$ (опять-таки предполагается, что μ и ε — постоянны), мы получим уравнение для скалярного потенциала. Совместно с окончательным уравнением для $\mathbf{A}$ имеем

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu \mathbf{J}}{c}, \quad (2.5.15)$$

что служит для определения скалярного и векторного потенциалов, если известны ρ и $\mathbf{J}$. Если ρ и $\mathbf{J}$ равны нулю, эти уравнения превращаются в волновые уравнения с волновой скоростью, равной $c\sqrt{1/\varepsilon\mu}$ в гауссовых единицах (или $\sqrt{1/\varepsilon\mu}$ в системе MKS). Когда ε и μ обе равны единице (в вакууме), скорость волн равна скорости света $3 \cdot 10^{10}$ см/сек; в действительности она и является скоростью света. Из этих уравнений мы видим, что соотношение (2.5.14) между φ и $\mathbf{A}$ является следствием уравнения неразрывности для ρ и $\mathbf{J}$. По аналогии с волнами в упругой среде мы назовем волны, связанные с φ , продольными волнами, а волны, связанные с $\mathbf{A}$, — поперечными.

Запаздывание и релаксация. Рассуждая так же, как и при выводе интеграла (1.4.8) для решения уравнения Пуассона в неограниченном пространстве, мы можем показать, что решения уравнений для $\varphi(x, y, z, t)$

и $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ в неограниченном пространстве при конечном распределении $\rho(x, y, z, t)$ и $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi^0(x, y, z, t) &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R\epsilon} \rho\left(x', y', z', t - \frac{R}{c'}\right) dx' dy' dz', \\ \mathbf{A}^0(x, y, z, t) &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{Rc} \mathbf{J}\left(x', y', z', t - \frac{R}{c'}\right) dx' dy' dz',\end{aligned}\quad (2.5.16)$$

где $c'^2 = c^2/\epsilon\mu$, и, как и раньше, $R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$.

Эти интегральные решения показывают, что заряд и ток в точке x', y', z' влияют на потенциалы в точке x, y, z с запозданием на промежуток времени R/c' . Действие потенциала *запаздывает* на промежуток времени, в течение которого волна, движущаяся со скоростью $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, проходит расстояние между точками x', y', z' и x, y, z . Так как волновое уравнение симметрично относительно изменения направления отсчета времени, мы можем получить другие решения, заменив в подынтегральных выражениях $t - (R/c')$ на $t + (R/c')$. Однако до настоящего времени такие «опережающие» потенциалы почти не применяются на практике.

Задавая потенциалы, мы «переопределяем» соответствующие поля или, что то же, одному полю может соответствовать более чем одно семейство потенциалов. Решения, определяемые равенствами (2.5.16), могут быть видоизменены добавлением к каждому из них различных функций, связанных только требованием выполнения равенства (2.5.14). Другими словами, мы можем взять любую функцию χ , удовлетворяющую подходящим граничным условиям, и образовать новые решения уравнений (2.5.15), полагая

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 - \text{grad } \chi, \quad \varphi = \varphi^0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (2.5.17)$$

Тогда $\text{div } \mathbf{A} + (\mu\epsilon/c)(\partial\varphi/\partial t) = -\nabla^2\chi + (\mu\epsilon/c^2)(\partial^2\chi/\partial t^2)$, так что уравнения для новых $\mathbf{A}$ и φ могут отличаться от уравнений (2.5.15). Однако электрическое и магнитное поля (которые поддаются измерению) не зависят от выбора χ . При определении вихря вектора $\mathbf{A}$ (для получения $\mathbf{B}$), член, содержащий $\text{grad } \chi$, исчезает, а при подсчете $\mathbf{E}$ по уравнению (2.5.13) члены, содержащие $\text{grad } (\partial\chi/\partial t)$, уничтожаются. Эта инвариантность реальных полей при таких изменениях потенциалов, которые оставляют в силе уравнение (2.5.14), называемая *калибровочной*, или *градиентной инвариантностью*, будет вновь рассмотрена позже¹⁾.

Решения уравнений Максвелла в областях, не содержащих свободных зарядов, могут быть при помощи этих изменений упрощены. В этом случае само φ является решением волнового уравнения, так что мы можем подобрать χ таким образом, чтобы φ оказалось равным нулю; тогда можно вовсе не рассматривать скалярного потенциала. Это означает в связи с уравнением (2.5.14), что $\mathbf{A}$ будет иметь дивергенцию, равную нулю; необходимые уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0, \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - 4\pi\mu \frac{\mathbf{J}}{c}.\end{aligned}\quad (2.5.18)$$

Даже при наличии свободных зарядов мы можем выбрать $\mathbf{A}$ так, чтобы $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Тогда на основании уравнений (2.5.14) и (2.5.15) скалярный потенциал должен быть решением уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho/\epsilon$.

¹⁾ В обычном определении градиентной инвариантности выполнение условия (2.5.14) не требуется.—Прим. ред.

Внутри металлических проводников нет свободных зарядов, а плотность тока пропорциональна $\mathbf{E}$, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, где σ — удельная *проводимость* металла. В этом случае уравнение для векторного потенциала становится однородным

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + 4\pi \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - c^2 \nabla^2 \mathbf{A} = 0. \quad (2.5.19)$$

Это уравнение очень похоже на уравнение (2.3.20) затухающих волн сжатия в жидкости. Член, содержащий $\partial \mathbf{A} / \partial t$, вызывает появление в решении множителя затухания, зависящего либо от времени, либо от положения точки в пространстве, либо от того и другого вместе, как и в случае волн сжатия.

Например, если волна является гармонической с частотой $\omega/2\pi$, зависимость от положения точки в пространстве выражается уравнением

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} [\mu \varepsilon \omega^2 + 4\pi i \mu \sigma \omega] \mathbf{A} = 0,$$

если зависимость от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$. Это, как и на стр. 137, представляет собой **затухание** волны в пространстве. С другой стороны, для стоячих волн, где $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$, уравнение, определяющее зависимость от времени, принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{c^2 k^2}{\mu \varepsilon} \mathbf{A} = 0$$

и соответствует колебаниям, затухающим с течением времени. Такие свободные колебания тока внутри проводника называются *релаксационными* колебаниями.

Преобразование Лоренца. В пространстве, где μ и ε обе равны единице, скорость распространения волн равна c , т. е. скорости света. В этом случае следует ожидать, что уравнения (2.5.11) и (2.5.15), связывающие поля и потенциалы с током и зарядами, имеют простую связь с преобразованием Лоренца, рассмотренным в § 1.7. Оператор ($\mu = \varepsilon = 1$)

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

называемый *оператором Даламбера* (даламбертианом), очевидно [см. (1.7.6)] обладает инвариантностью формы относительно преобразования Лоренца (см. стр. 100). Говоря, что уравнения для $\mathbf{A}$ и φ являются инвариантами преобразования Лоренца, мы подразумеваем, что они имеют ту же форму для каждого наблюдателя независимо от его относительной скорости (до тех пор, пока она постоянна). Это будет иметь место, если величина $(J_x, J_y, J_z, i\rho c) = \mathbf{I}$ есть 4-вектор, преобразующийся по формулам (1.7.4). Наиболее простой способ проверить, что $\mathbf{J}$ является 4-вектором, состоит в том, чтобы показать, что его «скалярное произведение» на какой-либо 4-вектор является инвариантом преобразования Лоренца. Известным четырехмерным векторным оператором является четырехмерный градиент с компонентами

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \square.$$

«Скалярное произведение» этих двух величин

$$\square \cdot \mathbf{I} = \text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

равно нулю в силу уравнения неразрывности [уравнение (2.3.1) и стр. 199]. Нуль наверняка является инвариантом преобразования Лоренца, так что мы доказали, что $\mathbf{I}$, включающий в себя $\mathbf{J}$ и $i\rho c$, является 4-вектором. Другими словами, выраженные в координатах

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$$

компоненты

$$I_1 = \mathbf{J}_x, \quad I_2 = \mathbf{J}_y, \quad I_3 = \mathbf{J}_z, \quad I_4 = i\rho c$$

и

$$V_1 = A_x, \quad V_2 = A_y, \quad V_3 = A_z, \quad V_4 = i\varphi$$

являются компонентами двух 4-векторов. Уравнения

$$\square \cdot \mathbf{I} = \sum_n \frac{\partial I_n}{\partial x_n} = 0 \quad \text{и} \quad \square \cdot \mathbf{V} = \sum_n \frac{\partial V_n}{\partial x_n} = 0,$$

инвариантны относительно преобразования Лоренца, являются как раз уравнением неразрывности и уравнением (2.5.14), связывающим $\mathbf{A}$ и φ . Совокупность четырех уравнений для четырех компонент уравнения

$$\square^2 \mathbf{V} = -\frac{4\pi \mathbf{I}}{c}$$

представляет собой инвариантные относительно преобразования Лоренца уравнения (2.5.15), волновые уравнения потенциалов.

Электрическое и магнитное поля *не* являются 4-векторами. На основании уравнения (2.5.13) (и вспоминая, что при $\varepsilon = \mu = 1$ имеем $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$) получаем

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \left[\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right],$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = i \left[\frac{\partial V_4}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_4} \right].$$

Но выражения, стоящие в квадратных скобках, являются компонентами кососимметричного тензора (или, лучше сказать, четырехмерного аффинора) $\mathfrak{F}$ с компонентами

$$f_{mn} = \frac{\partial V_n}{\partial x_m} - \frac{\partial V_m}{\partial x_n}, \quad f_{11} = f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0,$$

$$f_{12} = -f_{21} = H_z, \quad f_{13} = -f_{31} = -H_y, \quad f_{23} = -f_{32} = H_x,$$

$$f_{14} = -f_{41} = -iE_x, \quad f_{24} = -f_{42} = -iE_y, \quad f_{34} = -f_{43} = -iE_z.$$

Уравнения Максвелла можно теперь записать в форме, инвариантной относительно преобразования Лоренца. Компоненты уравнения $\square \cdot \mathfrak{F} = (4\pi/c) \mathbf{I}$

$$\sum_n \frac{\partial f_{mn}}{\partial x_n} = \frac{4\pi}{c} I_m \quad (2.5.20)$$

соответствуют уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{при} \quad m=4 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad \text{при} \quad m=1, 2, 3.$$

Уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{E} + (1/c)(\partial \mathbf{H}/\partial t) = 0$, которые соответствуют выражениям $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ через потенциалы $\mathbf{A}$ и φ [уравнения (2.5.13) и $\mathbf{H} = (1/\mu) \operatorname{rot} \mathbf{A}$], могут быть теперь записаны в форме уравнений

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} = 0,$$

которые, как можно доказать, являются также инвариантами преобразования Лоренца [поскольку для случая трехмерного пространства равенство (1.5.3) показывает, что величины $c_{23} - c_{32} = b_1$ и т. д. являются компонентами трехмерного вектора, то для четырехмерного пространства величины $c_{123} + c_{231} + c_{312} = b_4$ и т. д. являются компонентами псевдовектора].

В качестве примера применения к полям преобразования Лоренца мы начнем с координат x'_i и т. д., потенциалов A'_i и т. д. и полей E'_i и т. д. для наблюдателя B , неподвижного относительно штрихованных координат. Для наблюдателя A , движущегося относительно B со скоростью $u = c \tanh \alpha$ вдоль оси x , координаты, ток, заряд и потенциалы принимают вид [см. уравнения (1.7.2) и (1.7.4)]

$$\begin{aligned} x &= x' \cosh \alpha + ct' \sinh \alpha, & y &= y', & z &= z', \\ ct &= x' \sinh \alpha + ct' \cosh \alpha, \\ J_x &= J'_x \cosh \alpha + cp' \sinh \alpha, & J_y &= J'_y, & J_z &= J'_z, \\ cp &= J'_x \sinh \alpha + cp' \cosh \alpha, \\ A_x &= A'_x \cosh \alpha + \varphi' \sinh \alpha, & A_y &= A'_y, & A_z &= A'_z, \\ \varphi &= A'_x \sinh \alpha + \varphi' \cosh \alpha, \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

$$\tanh \alpha = \frac{u}{c}, \quad \sinh \alpha = \frac{u}{\sqrt{c^2 - u^2}}, \quad \cosh \alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

Мы должны были ожидать, что новая компонента тока по оси x содержит член с p' , так как заряд теперь движется; но трудно было ожидать, что новая плотность заряда содержит слагаемое, зависящее от компоненты тока по оси x .

Поля, являясь компонентами тензора, подчиняются соответствующим правилам преобразования

$$E_x = if_{14} = i \sum_{mn} \gamma_{1m} \gamma_{4n} f'_{mn} = i \cosh^2 \alpha f_{14} + i \sinh^2 \alpha f_{41} = if'_{14} = E'_x \text{ и т. д.,}$$

так что

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= E'_y \cosh \alpha + H'_z \sinh \alpha, & E_z &= E'_z \cosh \alpha - H'_y \sinh \alpha, \\ H_x &= H'_x, & H_y &= H'_y \cosh \alpha - E'_z \sinh \alpha, & H_z &= H'_z \cosh \alpha + E'_y \sinh \alpha. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Мы видим, что электрическое и магнитное поля при движении перемешиваются; оно moreover и не удивительно, так как мы видели раньше, что неподвижный заряд порождает только электрическое поле, заряд же движущийся порождает также и магнитное поле.

Калибровочное преобразование. Хотя в наших формальных рассуждениях и удобнее считать, что векторный и скалярный потенциалы являются компонентами 4-вектора, однако они, вообще говоря, меняются при преобразовании Лоренца не таким простым способом. Конечно, электрическое и магнитное поля должны преобразовываться, как элементы четырехмерного аффинора f_{nm} , так как они являются физически измеримыми величинами и должны удовлетворять уравнениям Максвелла, согласующимся с преобразованием Лоренца. Но при рассмотрении потенциалов, как было указано на стр. 201, имеется известная свобода выбора. Если мы свяжем потенциалы A и φ обычным уравнением $\operatorname{div} A + (1/c)(\partial \varphi / \partial t) = 0$, то потенциал $(A, i\varphi)$ окажется 4-вектором. Но если мы произведем калибровочное преобразование вида $A' = A - \operatorname{grad} \chi$, $\varphi' = \varphi + (1/c)(\partial \chi / \partial t)$, где χ является решением волнового уравнения, то новые потенциалы $(A', i\varphi')$ уже не обязательно образуют 4-вектор, хотя поля, полученные с их помощью, совпадают с полями, полученными до преобразования.

Инвариантность полей при калибровочном преобразовании потенциалов дает нам возможность выбора либо такой формы для потенциалов, которая при преобразовании Лоренца ведет себя, как 4-вектор, но может оказаться не особенно простой для вычисления, либо такой формы, которая легко вычисляется в частной системе Лоренца, но поведение которой при преобразовании Лоренца труднее изучить.

Например, если для частной системы Лоренца мы выберем калибровку так, чтобы $\text{div } \mathbf{A} = 0$, то мы сможем более полно, чем при любом другом выборе калибровки, провести разделение между «продольными» и «поперечными» полями (для этой системы Лоренца). Уравнения для новых $\mathbf{A}$ и φ (которые мы будем обозначать через $\mathbf{A}^\circ$ и φ°) можно получить, повторив вычисления, сделанные между выводами уравнений (2.5.13) и (2.5.15); при новом предположении $\text{div } \mathbf{A}^\circ = 0$. Уравнение для скалярного потенциала упрощается; оно принимает вид

$$\nabla^2 \varphi^\circ = -\frac{4\pi\rho}{c^2}, \quad (2.5.23)$$

то есть становится уравнением Пуассона, которое всегда играет основную роль в случаях установившегося состояния. Однако в данном случае мы не требуем, чтобы ρ было независимым от времени; скалярный потенциал φ° должен изменяться без запаздывания в зависимости от изменения ρ , так как здесь нет члена $(1/c^2)(\partial^2 \varphi / \partial t^2)$, вызывающего запаздывание (это само по себе делает ясным, что φ° не может быть временной компонентой четырехмерного вектора). Так как уравнение Пуассона обычно решить легче, чем неоднородное волновое уравнение, то уравнение (2.5.23) решается проще, чем первое из уравнений (2.5.15). Получающийся потенциал φ° обусловлен свободным зарядом ρ .

Если уравнение (2.5.23), выражающее φ° через свободный заряд, решено, то может быть решено и уравнение для соответствующего $\mathbf{A}^\circ$

$$\text{rot rot } \mathbf{A}^\circ + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^\circ}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J} - \frac{\epsilon\mu}{c} \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t} \right), \quad (2.5.24)$$

если считать в нем φ° уже известным. Полученное решение обусловлено только поперечным током, или током несвободных зарядов, так как $\mathbf{J}$ может быть расщеплено на два слагаемых (см. стр. 59): одно $\mathbf{J}_l$ с дивергенцией, равной нулю, может быть представлено как вихрь некоторого вектора, другое $\mathbf{J}_t$ с вихрем, равным нулю, может быть записано как градиент некоторого скаляра

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t, \quad \mathbf{J}_l = \text{grad } Q, \quad \mathbf{J}_t = \text{rot } \mathbf{C}.$$

Но в силу уравнения неразрывности, связывающего $\mathbf{J}$ и ρ , имеем $\text{div } \mathbf{J} = \text{div } \mathbf{J}_l = -(\partial \rho / \partial t)$, уравнение, связывающее *продольную* часть $\mathbf{J}$ со скоростью изменения свободного заряда. Сравнив это уравнение с продифференцированным по времени уравнением (2.5.23) (и вспомнив, что $\nabla^2 = \text{div grad}$), найдем, что

$$\mathbf{J}_l = \frac{\epsilon}{4\pi} \text{grad} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t}.$$

Поэтому уравнение (2.5.24) можно переписать в форме, зависящей только от *поперечного* тока $\mathbf{J}_t$, который не связан со скоростью изменения свободного заряда

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}^\circ) + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^\circ}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J}_t.$$

Поэтому, если свободного заряда ρ нет и весь ток — поперечный, φ° может быть сделано равным нулю и поля могут быть подсчитаны

с помощью одного только векторного потенциала A° . Если же имеется свободный заряд, φ° вычисляется в зависимости от него, однако на A° этот заряд не влияет. (Заметим, что эта калибровка не является лоренц-инвариантной.)

Поле движущегося заряда. В качестве примера приложения общих преобразований, рассмотренных выше, найдем поле, порожденное точечным зарядом, движущимся вдоль оси x со скоростью $u = c \operatorname{th} \alpha$. Мы можем найти это поле, подсчитав запаздывающие потенциалы из уравнений (2.5.16); можно также найти статическое поле от неподвижного заряда, а затем перейти к движущейся системе с помощью приведенного только что преобразования Лоренца. Второй путь, как мы вскоре увидим, проще.

Рассмотрим сначала неподвижный точечный заряд Q , находящийся в начале координат штрихованной системы. Тогда потенциалы и поля в точке (x', y', z') будут

$$\varphi' = \frac{Q}{r'}, \quad A' = 0, \quad E' = \frac{Q}{(r')^3} \mathbf{r}', \quad H' = 0,$$

где $\mathbf{r}' = ix' + jy' + kz'$. Это поле, образованное простым источником, рассмотрено на стр. 27.

Перейдем теперь к системе нештрихованных координат, движущейся со скоростью $u = c \operatorname{th} \alpha$ в направлении оси x . В момент времени t заряд находится на расстоянии ut по оси x от начала координат. Связь между штрихованными и нештрихованными координатами дается уравнениями (2.5.21) или равенствами

$$\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \alpha - ct \operatorname{sh} \alpha, & y' &= y, & z' &= z \\ ct' &= -x \operatorname{sh} \alpha + ct \operatorname{ch} \alpha, \\ \operatorname{ch} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}, & \operatorname{sh} \alpha &= \frac{u/c}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Величина r' также должна быть выражена в нештрихованных координатах

$$(r')^2 = (x - ut)^2 \operatorname{ch}^2 \alpha + y^2 + z^2 = \frac{s^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = s^2 \operatorname{ch}^2 \alpha,$$

где $s^2 = (x - ut)^2 + (y^2 + z^2) \left[1 - \frac{u^2}{c^2} \right]$.

Принимая во внимание уравнения (2.5.21), мы видим, что потенциалы для движущегося заряда можно взять в форме [пользуясь калибровкой (2.5.14)]

$$\varphi = \varphi' \operatorname{ch} \alpha = \frac{Q}{s}, \quad A = i\varphi' \operatorname{sh} \alpha = \frac{Q}{sc} \mathbf{u}, \quad (2.5.25)$$

где $\mathbf{u} = iu$ есть вектор, представляющий постоянную скорость заряда в нештрихованной системе координат. Воспользовавшись уравнениями (2.5.22) или продифференцировав соответствующим образом потенциалы, мы получим электрическое и магнитное поля движущегося заряда

$$\mathbf{E} = Q \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{s^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{E}, \quad (2.5.26)$$

где $\mathbf{r} = (x - ut)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — вектор, идущий от заряда к точке x, y, z , в которой производятся измерения; положение заряда рассматривается в момент измерения t .

Надо заметить, что в случае, когда величиной u^2 можно пренебречь по сравнению с c^2 , s становится равным r и получаются известные выражения для полей медленно движущегося заряда

$$\mathbf{E} \simeq Q \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H} \simeq \frac{Q}{c} \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Точные выражения, данные в (2.5.26), приводят к некоторым искажениям вследствие того, что они содержат релятивистскую поправку, зависящую от максимальной, не равной бесконечности относительной скорости c . Например, эквипотенциальные поверхности для φ не являются сферами, а представляют собой сплюснутые сфероиды, малые оси которых по направлению совпадают с направлением движения заряда; отношение малой и большой осей этих сфероидов равно $\sqrt{1 - (u^2/c^2)}$. В предельном случае, при высшей скорости частицы ($u \rightarrow c$), поле сжимается в тонкий диск, перпендикулярный к $\mathbf{u}$, в центре которого находится заряд Q ; практически мы имеем здесь дело с плоским волновым импульсом.

Можно предположить, что эти потенциалы и поля должны быть запаздывающими, то есть что они должны быть выражены через обычные потенциалы, соответствующие некоторому более раннему положению заряда. Наивное рассмотрение уравнений (2.5.16) подсказывает нам, что φ должно быть равно Q , деленному на r_r , где r_r — расстояние между точкой x, y, z и положением заряда в момент времени на r_r/c более ранний, чем t — момент измерения потенциала в точке x, y, z . Изучение рис. 2.22 показывает, что величина s , содержащаяся в выражениях потенциалов, не равна r_r — длине отрезка PQ_r , но равна длине отрезка PR , где QR перпендикулярно к PR . В самом деле, s равно

$$r_r + \frac{u}{c} X_r = r_r \left[1 - \frac{1}{c} \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{u} \right],$$

где $\mathbf{a}_r$ — единичный вектор, направленный от точки Q_r к точке P . Поэтому потенциалы могут быть выражены через расстояния и направления, соответствующие положению заряда в момент $t - (r_r/c)$, что и понимается под запаздывающим потенциалом. Если мы сможем выяснить, как при вычислении φ из уравнения (2.5.16) появляется неожиданный множитель $[1 - (1/c) \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{u}]$, мы полностью согласуем друг с другом два метода вычисления потенциалов (и, как это обычно бывает при таком согласовании, немного больше познакомимся с математической физикой).

Причина трудности заключается в отмеченном на стр. 150 различии двух способов описания движения жидкости. Уравнения (2.5.16) для запаздывающих потенциалов содержат под знаком интеграла множители, определяющие заряд и плотность тока в системе координат, неподвижной относительно наблюдателя. Однако в случае движущейся частицы распределение плотности заряда остается постоянным, если оно выражено в системе координат, неподвижной относительно частицы (т. е. движущейся относительно наблюдателя). Пренебрегая преобразованием координат, которое должно быть сделано раньше интегрирования, мы в результате теряем необходимый множитель $[1 - (1/c) \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{u}]$.

Это показано на второй части рис. 2.22, где мы увеличили рисунок настолько, чтобы показать размеры частицы и распределение заряда. Отсюда видно, что как бы мала ни была частица, ее движение должно быть

принято во внимание при выполнении интегрирования. Для той части заряда, которая удалена от наблюдателя на расстояние r_r , мы берем положение частицы в момент $t - (r_r/c)$, для части же заряда, удаленной на расстояние $r_r + dr_r$, мы берем положение в момент $t - (r_r/c) - (dr_r/c)$, учитывая смещение dr_r/c назад вдоль оси x . С помощью несложного рассуждения можно убедиться в том, что при интегрировании величина заряда dq , находящегося внутри элемента объема $dA dr_r$, равна не $\rho dA dr_r$,

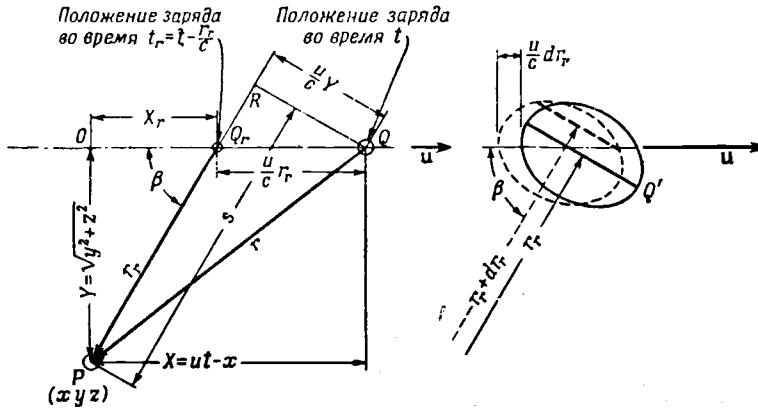


Рис. 2.22. Расстояния и углы, встречающиеся при вычислении запаздывающих потенциалов для заряда Q , движущегося со скоростью u по отношению к наблюдателю, находящемуся в точке P .

как было бы, если бы заряд не двигался, а $[1 + (u/c) \cos \beta] \rho dA dr_r$. Поэтому $\rho dA dr_r$ равно $dq [1 + (u/c) \cos \beta]^{-1}$ и, если размеры частицы достаточно малы, интеграл (2.5.16) становится равным

$$\int \frac{dq}{r_r [1 + (u/c) \cos \beta]} = \frac{Q}{r_r [1 - (1/c) \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{u}]} = \frac{Q'}{s},$$

что в точности совпадает со значением, полученным нами в уравнении (2.5.25) с помощью преобразования Лоренца статического потенциального поля.

Таким образом, мы видим, что потенциал, вызванный в момент t движущимся зарядом, отличается от потенциала, соответствующего этому заряду в более раннем положении, множителем, связывающим скорость частицы в этом более раннем положении со скоростью светового сигнала, идущего от частицы к наблюдателю, т. е. множителем $[1 - (u/c) \cdot \mathbf{a}_r]$. Это более раннее положение частицы может быть определено, если мы представим себе, что частица посылает световые сигналы к наблюдателю; положение, использованное в уравнениях (2.5.25) и (2.5.26), является тем, из которого посланный световой сигнал достигает наблюдателя точно в момент t .

Между прочим, уравнения (2.5.25) для потенциалов сохраняют свою силу даже в том случае, когда скорость частицы u изменяется с течением времени, если мы будем считать, что s равно $r_r [1 - (u/c) \cdot \mathbf{a}_r]$ ¹⁾. Выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при наличии ускорения заряда будут, конечно, отличаться от тех, которые даны в уравнениях (2.5.26), так как u

¹⁾ Потенциалы произвольно движущегося точечного заряда, записанные в форме (2.5.25), с заменой s на $r_r [1 - \frac{u}{c} \cdot \mathbf{a}_r]$, называются потенциалами Льежара — Вихерта. — Прим. ред.

теперь зависит от времени и это должно быть учтено при дифференцировании.

Сила и энергия. Трехмерный вектор $\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + (1/c) \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ определяет силу, действующую на кубический сантиметр тока и заряда. Этот вектор является пространственной частью 4-вектора, «временная компонента» которого пропорциональна работе на кубический сантиметр, производимой полем в секунду при наличии тока, т. е. величине $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$. Рассмотрение уравнений (2.5.20) показывает, что величина $\mathbf{k}$ с компонентами

$$k_m = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^4 f_{mn} I_n, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad (2.5.27)$$

и является этим 4-вектором; пространственные компоненты $\mathbf{k}$ равны трем компонентам вектора $\mathbf{F}$, а временная компонента $k_4 = i(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}/c)$.

Интеграл от ck_4/i по объему, лежащему внутри некоторой замкнутой поверхности, равен полной величине работы поля за единицу времени, затраченной внутри этого объема на перемещение заряда; эта величина должна быть равна скорости уменьшения внутренней энергии U , которой поле обладало в данном объеме, минус мощность, излучающаяся через поверхность, ограничивающую объем. Воспользовавшись уравнениями (2.5.11) и предполагая, что ϵ и μ не зависят от времени, получим

$$\begin{aligned} \iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV &= \frac{c}{4\pi} \iiint \mathbf{E} \cdot \left[\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] dV = \\ &= \frac{c}{4\pi} \iiint \left[\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} \right] dV = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV - \frac{c}{4\pi} \iiint \text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint U dV - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}, \end{aligned}$$

где

$$U = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{и} \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2.5.28)$$

Как и ожидалось, мы здесь имеем скорость изменения интеграла по объему минус интеграл потока. Величина U , фигурирующая в скорости изменения интеграла по объему, должна быть плотностью энергии поля, а вектор $\mathbf{S}$, содержащийся в выражении интеграла потока, должен быть плотностью потока энергии поля. Вектор $\mathbf{S}$ называется *вектором Пойнтинга*.

Возвращаясь к уравнению (2.5.27) для 4-вектора $\mathbf{k}$ силы-мощности (полагая снова $\epsilon = \mu = 1$) и подставляя в него вместо I_m их выражения через производные функций f_{mn} , получаем

$$k_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} f_{mr} \frac{\partial f_{rs}}{\partial x_s}.$$

Представляет некоторый интерес показать, что 4-вектор $\mathbf{k}$ может быть получен свертыванием тензора «напряжения-энергии» $\mathcal{T}$, где

$$T_{ms} = -\frac{1}{4\pi} \sum_r f_{mr} f_{sr} + \frac{1}{16\pi} \sum_{r,n} (f_{rn})^2 \delta_{ms}. \quad (2.5.29)$$

Свернутая форма имеет вид

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} T_{ms} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} f_{mr} \frac{\partial f_{sr}}{\partial x_s} - \frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} \frac{\partial f_{mr}}{\partial x_s} f_{sr} + \frac{1}{8\pi} \sum_{r,n} f_{rn} \frac{\partial f_{rn}}{\partial x_m}.$$

Первая сумма равна как раз k_m , так как $f_{sr} = -f_{rs}$. В третьей сумме мы воспользуемся соотношениями $\frac{\partial f_{rn}}{\partial x_m} = -\frac{\partial f_{mr}}{\partial x_n} - \frac{\partial f_{nm}}{\partial x_r}$, приведенными на стр. 203. Получаем, меняя обозначения индексов суммирования,

$$-\frac{1}{8\pi} \sum_{r, n} f_{rn} \left(\frac{\partial f_{mr}}{\partial x_n} + \frac{\partial f_{nm}}{\partial x_r} \right) = \frac{1}{8\pi} \sum_{r, s} \frac{\partial f_{mr}}{\partial x_s} f_{sr} + \frac{1}{8\pi} \sum_{k, n} f_{kn} \frac{\partial f_{mn}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r, s} \frac{\partial f_{mr}}{\partial x_s} f_{sr},$$

что полностью уничтожает вторую сумму. Итак,

$$k_m = \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} T_{ms},$$

где

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) \quad \text{и т. д.,} \\ T_{12} &= \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + H_x H_y) = T_{21} \quad \text{и т. д.,} \\ T_{14} &= \frac{i}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x = \frac{i}{c} S_x = T_{41} \quad \text{и т. д.,} \\ T_{44} &= \frac{1}{8\pi} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) = U. \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

Тензор $\mathfrak{T}$ называется *тензором напряжения-энергии Максвелла*. Он аналогичен тензору напряжения-энергии, определенному в уравнении (1.7.8). Пространственные компоненты могут рассматриваться как своего рода электромагнитные напряжения; пространственно-временные компоненты, пропорциональные потоку энергии, можно рассматривать как величины, пропорциональные импульсу поля; член T_{44} определяет плотность энергии поля, аналогичную рассмотренной раньше плотности массы среды.

Поверхности проводников и диэлектриков. Два типа граничных условий часто встречаются в вопросах электромагнетизма; граничные условия, связывающие поля на поверхности, разделяющей два диэлектрика, где диэлектрическая постоянная ϵ (или магнитная проницаемость μ) резко меняет свое значение и граничные условия на свободных поверхностях металлического проводника. В случае границы между двумя диэлектриками обычно можно пренебречь проводимостью среды и предположить, что нет ни свободных зарядов, ни тока. Граничные условия, связывающие нормальные и тангенциальные составляющие электрического поля по обе стороны от границы, могут быть получены из уравнений Максвелла (2.5.11).

Выберем, как показано на рис. 2.23, элементарный контур и подсчитаем циркуляцию $\mathbf{E}$ по этому контуру. При малом l этот интеграл (приближенно) равен $l |\text{rot } \mathbf{E}|$. Если l мало по сравнению с l , циркуляция вдоль указанного контура равна $l (E^\circ - E_i^i)$, где E°, E_i^i — тангенциальные компоненты полей по обе стороны границы. В случае стационарного состояния $\text{rot } \mathbf{E}$ должен быть равен нулю, так что E_i° и E_i^i должны равняться между собой.

Поток поля $\mathbf{D}$, взятый по показанной на рис. 2.23 поверхности, равен $A (D_n^\circ - D_n^i)$, если δ исчезающе мало (здесь D_n° и D_n^i — нормальные компоненты поля $\mathbf{D}$); согласно определению, этот интеграл пропорционален $\text{div } \mathbf{D}$. При отсутствии свободных зарядов $\text{div } \mathbf{D}$ равна нулю, так что нормальные компоненты поля $\mathbf{D}$ меняются непрерывно при пересечении границы.

Подобно этому для границы, при пересечении которой меняется проницаемость μ , в случае установившегося состояния будут непрерывны нормальные компоненты поля $\mathbf{B}$ и тангенциальные компоненты поля $\mathbf{H}$. Нетрудно вывести соответствующие граничные условия и для потенциалов.

Металлический проводник имеет большую электропроводность σ , и, следовательно, малое время релаксации (см. стр. 202). Во многих случаях, включающих и случай полей с периодами колебаний, большими, чем это время релаксации, можно предположить, что проводимость металлического проводника равна бесконечности, а время релаксации его равно нулю. Свободный заряд может находиться только на поверхности такого проводника, причем распределение этого заряда как раз таково, чтобы уничтожить внешнее электрическое поле, так как внутри идеального проводника электрическое поле не может существовать.

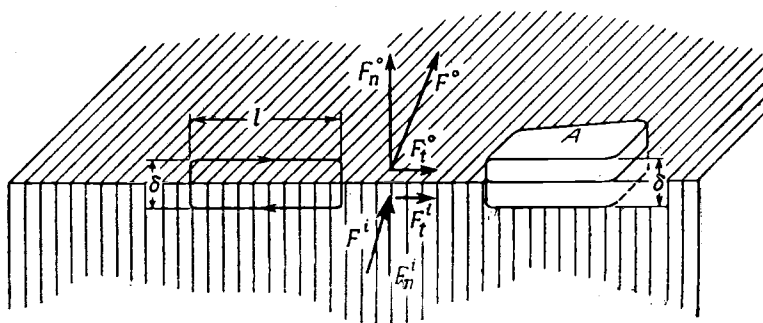


Рис. 2.23. Элементарные контуры и площадки для нахождения связи внутренних и внешних полей у граничных поверхностей.

Прежде всего на внешней стороне поверхности проводника тангенциальная составляющая электрического поля E_t^o должна быть равна нулю; векторы электрического поля всюду в точках поверхности нормальны к ней. Воспользовавшись элементарной площадкой, показанной на рис. 2.23, мы видим, что поток поля $\mathbf{D}$ будет равен AD^o , так как $\mathbf{D}^o$ нормально к поверхности, а $\mathbf{D}^i$ равно нулю. Для того чтобы это имело место, нужно, чтобы на поверхности проводника имелся заряд с поверхностной плотностью $\rho = D^o/4\pi$ [для того чтобы удовлетворялось уравнение (2.5.1)]. Так как векторы электрического поля всюду в точках поверхности проводника нормальны к этой поверхности, то эта поверхность должна быть эквипотенциальной $\varphi = \text{const}$ (по крайней мере в случае установившегося состояния).

Поведение магнитного поля вблизи проводника лучше рассмотреть на примере.

Передача волн и импеданс. В качестве примера решения уравнений Максвелла рассмотрим в предварительном порядке поле внутри concentрической линии передачи, состоящей из двух длинных коаксиальных цилиндров, являющихся проводниками; пространство между цилиндрами заполнено однородной средой с постоянными диэлектрической постоянной ϵ , магнитной проницаемостью μ и проводимостью σ (см. рис. 2.24). Предположим, что внешний радиус внутреннего цилиндра равен a , внутренний радиус внешнего цилиндра равен b ; обозначим через z расстояние по оси от одного из концов линии и через r — расстояние точки от оси.

Можно предположить, что в пространстве между проводниками нет свободных зарядов, так что нужно пользоваться только векторным потенциалом и можно применять уравнения (2.5.18) и (2.5.19). Электрическое поле должно быть нормальным к поверхностям обоих проводников, и, следовательно, векторы поля направлены по радиусам при $r=a$ и при $r=b$. Для достижения этого проще всего предположить, что поле E везде радиально; последнее проще всего получается, если предположить, что векторы векторного потенциала A везде направлены по радиусам. В то же время $\operatorname{div} A$ должна быть равна нулю; если A радиально ($A = A_r$), то $\operatorname{div} A = (1/r) (\partial/\partial r) (rA)$, как указано на стр. 116. Чтобы дивергенция A была равна нулю, нужно, чтобы модуль вектора A был равен произведению $1/r$ на функцию от z , φ и t (так как тогда rA не



Рис. 2.24. Поля и токи в случае concentрической линии передачи (бронированный провод).

зависит от r и производная этого произведения по r равна нулю). В простейшем случае мы предположим, что A не зависит от φ

$$A = \frac{a_r}{r} \psi(z, t). \quad (2.5.31)$$

Ссылаясь опять на стр. 117, мы видим, что лапласиан от A имеет вид

$$\nabla^2 A = a_r \left[\nabla^2 \left(\frac{\psi}{r} \right) - \left(\frac{\psi}{r^3} \right) \right] = \frac{a_r}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

так что уравнение (2.5.19) дает для части ψ амплитуды векторного потенциала, зависящей от z и t , следующее простое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4\pi i \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.5.32)$$

Уравнение этого вида встречалось в наших рассуждениях при изучении движения струны на стр. 135. Решения этого уравнения определяют волны, затухающие либо с течением времени, либо в зависимости от расстояния.

Предположим теперь, что линия передачи подвергается в конце $z=0$ воздействию с частотой $\omega/2\pi$. В этом случае зависимость от времени будет простой гармонической, т. е. ψ будет иметь множитель $e^{-i\omega t}$, а затухание будет происходить при перемещении в пространстве вдоль оси z . Подставляя в (2.5.32) $\psi = e^{-i\omega t} \psi_1(z)$, получаем

$$\frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + \left[\frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2} + \frac{4\pi i \mu \sigma \omega}{c^2} \right] \psi_1 = 0.$$

Решение в этом случае выражается через показательные функции

$$\psi_1 = \beta e^{-xz + i(\omega/c)(nz - ct)} + \gamma e^{xz - i(\omega/c)(nz - ct)}, \quad (2.5.33)$$

где

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} - \frac{1}{2}} \simeq \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \sigma \ll \varepsilon\omega$$

и

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} + \frac{1}{2}} \simeq \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \sigma \ll \varepsilon\omega.$$

Первый член представляет собой синусоидальную волну, распространяющуюся в направлении положительных z со скоростью c/n , с затуханием, пропорциональным χ . Второй член определяет синусоидальную волну, движущуюся в направлении отрицательных z с теми же скоростью и затуханием. Это наиболее общее решение с колебаниями частоты $\omega/2\pi$, зависящее от времени по синусоидальному закону. Если волна порождается в конце $z=0$, то остается только первое слагаемое и $\gamma=0$.

Поля в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i\beta\omega}{cr} \mathbf{a}_r e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)} = \left(\frac{i\omega}{c}\right) \mathbf{A}, \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{a}_\varphi \frac{i\beta}{r} \left(\frac{\omega n}{c} + ix\right) e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)} = \left(n + \frac{ix}{\omega}\right) \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.5.34)$$

Электрическое поле направлено по радиусам, как это и требовалось первоначально. Разность потенциалов между внутренним и внешним проводниками равна

$$V = \int_a^b E dr = \frac{i\beta\omega}{c} \ln \frac{b}{a} e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)};$$

если напряжение в конце $z=0$ имеет вид $V_0 e^{-i\omega t}$, то будем иметь $\beta = [V_0 c / i\omega \ln(b/a)]$ и напряжение между проводниками в точке z будет равно

$$V(z) = V_0 e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)}.$$

На поверхностях обоих проводников сосредоточивается заряд с поверхностной плотностью $D/4\pi = \varepsilon E/4\pi$. Полный заряд, находящийся на поверхности внутреннего проводника, составляет на единицу длины $(2\pi a)(\varepsilon E/4\pi)$ или

$$\frac{\varepsilon V_0}{2 \ln(b/a)} e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)} = \frac{\varepsilon V(z)}{2 \ln(b/a)};$$

таков же, конечно, и заряд на единицу длины внутренней поверхности наружного проводника. Очевидно, емкость концентрической линии, рассчитанная в той же системе единиц, составляет $\varepsilon/2 \ln(b/a)$ на единицу длины.

Магнитными силовыми линиями являются концентрические окружности, что указывает на то, что ток идет вдоль внутреннего проводника. Его силу можно подсчитать с помощью правила циркуляции $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi I$, получающегося из уравнений (2.5.4) или (1.2.12). Произведя вычисления, получим

$$I(z) = \frac{V_0}{2 \ln(b/a)} \left(n + \frac{ix}{\omega}\right) e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)}.$$

Сила тока затухает с возрастанием z , так как происходит утечка части тока через частично проводящий материал, находящийся между идеально проводящими цилиндрами. Если бы среда была полностью не проводя-

щей ($\sigma = 0$), тогда волна не затухала бы (κ было бы равно нулю) и ток I имел бы ту же фазу, что и напряжение V .

Отношение напряжения в любой точке к силе тока

$$Z = \frac{2 \ln(b/a)}{n + i(\kappa c/\omega)} \quad (2.5.35)$$

называется *характеристическим импедансом* линии передачи. Если среда полностью не проводит электричества ($\kappa = 0$), этот импеданс будет действительным (чистое «омическое» сопротивление).

Параллелизм между этим определением и рассуждениями стр. 128 относительно волн на струне совершенно ясен. Можно, конечно, получить импеданс линии передачи и при наличии отраженной волны, как это было сделано для струны; можно также составить интегралы Фурье для переходной характеристики линии.

Между прочим, следует отметить, что так как V пропорционально E , а I пропорционально H , то импеданс, подсчитанный выше, пропорционален отношению между E и H . Во многих случаях электромагнитного излучения, когда нельзя подсчитать V или I , все же возможно найти отношение между E и H в каждой точке. Это отношение часто называют *импедансом* среды или волны. Например, для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в положительном направлении оси x в открытом пространстве ($\epsilon = \mu = 1$), векторный потенциал имеет вид $A_0 e^{i(\omega/c)(x-ct)}$, где A_0 — вектор, перпендикулярный к оси x . Поля имеют вид

$$\mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} (A_0) e^{i(\omega/c)(x-ct)}, \quad \mathbf{H} = i \frac{\omega}{c} (\mathbf{i} \times A_0) e^{i(\omega/c)(x-ct)} = \mathbf{i} \times \mathbf{E}. \quad (2.5.36)$$

В этом случае импеданс равен единице (в той же системе единиц). Если ϵ и μ не равны единице, импеданс равен $\sqrt{\mu/\epsilon}$.

Уравнения Прока. Все уравнения теории электромагнетизма эквивалентны лоренц-инвариантному требованию, состоящему в том, чтобы оператор Даламбера от потенциалов, являющийся 4-вектором, был пропорционален 4-вектору, представляющему заряд и плотность тока. Это — обобщение на случай 4-векторов неоднородного волнового уравнения для струны

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f(x, t),$$

которое было рассмотрено в § 2.1. Проводя дальнюю аналогию, можно сказать, что электромагнитные потенциалы имеют инерцию и своего рода «восстанавливающую силу», так же как и простая струна, находящаяся под действием натяжения; это свойство заставляет поле в какой-либо точке стремиться к тому, чтобы сделаться средним по отношению к значениям поля в окружающих точках. Ток здесь аналогичен приложенной силе f .

Мы видели в § 2.1, что, если струна заключена в упругую оболочку, так что каждый участок струны стремится вернуться к положению равновесия, в волновом уравнении должен быть добавлен дополнительный член, пропорциональный ψ . Можно и для векторных потенциалов составить подобное уравнение с дополнительным членом, пропорциональным потенциалам

$$\square^2 \mathbf{V} - \alpha^2 \mathbf{V} = \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} - \alpha^2 \mathbf{V} = -\frac{4\pi \mathbf{I}}{c}, \quad (2.5.37)$$

$$\mathbf{I} = (J_x, J_y, J_z, ic\rho), \quad \mathbf{V} = (A_x, A_y, A_z, i\varphi),$$

которое аналогично уравнению, полученному из (2.1.27) прибавлением неоднородного члена, содержащего силовую функцию. Уравнение для скалярного поля без свободного члена называется уравнением Клейна-Гордона; оно пригодно для описания поведения скалярного мезонного поля. Аналогичное уравнение для четырехмерного векторного потенциала называется *уравнением Прока*; его можно применить к описанию поведения частицы, имеющей единичный спин (если такая частица существует!). Соответствующие уравнения для полей в случае $\mu = \nu = 1$ (свободное пространство), если ток равен нулю, имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \alpha^2 \mathbf{A}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = -\alpha^2 c \varphi, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5.38)$$

[при другой калибровке см. стр. 205 и уравнение (3.4.21)].

Наличие этого дополнительного члена заметно влияет на решение, как это имело место и в случае струны. Поля быстро стремятся к нулю везде, кроме ближайших окрестностей заряда или тока. Например, потенциал вокруг точечного заряда равен $Qe^{-\mu r}/r$ и стремится к нулю много быстрее, чем обычный потенциал Q/r . Подобная потенциальная функция¹⁾ рассматривалась при изучении связи между нуклонами (протонами или нейтронами) в атомном ядре. Поэтому уравнения Прока, а также и уравнение Клейна — Гордона (для скалярного случая) могут быть использованы в теории ядра.

2.6. Квантовая механика

На протяжении всей этой главы мы указывали случаи, когда «сглаженное», непрерывное поле может заменить распределение масс и зарядов, имеющее на самом деле дискретный характер. Пока мы интересовались макроскопическими явлениями, мы могли вместо беспорядочного распределения частиц рассматривать регулярную функцию положения, значение которой пропорционально средней плотности частиц. Однако, введя электромагнитное поле, мы приходим к существенно новой связи между непрерывными полями и дискретными частицами, к связи, которая является основой современной квантовой теории.

Существует два основных различия между прежними взаимосвязями полей и частиц и новыми, квантовыми связями между ними. Прежде всего, величина классического поля пропорциональна средней плотности частиц или, что обычно то же самое, вероятности наличия частицы. В квантовой же теории *квадрат* модуля поля пропорционален вероятности наличия частицы. Это различие более существенно, чем могло бы показаться с первого взгляда. Оно обозначает, например, что классические поля всегда выражаются *действительными числами*, так как они должны равняться плотностям или вероятностям, являющимся действительными числами. Правда, во многих случаях и для классических полей мы будем выполнять наши вычисления, пользуясь комплексными числами, но всегда при этом будет ставиться условие, что только

¹⁾ Потенциал Юкава. — Прим. ред.

действительная часть (или в некоторых случаях только мнимая часть) этих чисел представляет поле. Напротив, в квантовой механике само поле может быть комплексной величиной, так как только квадрат его модуля (который всегда действителен) пропорционален вероятности наличия частицы. Более того, во многих случаях важно, чтобы комплексная величина, сопряженная квантовому полю, была отлична от самого поля; таким образом, поле необходимо должно быть комплексным.

Во-вторых, связь между классическим полем и соответствующим ему распределением частиц только допускается, но в принципе не требуется. В принципе можно всегда отказаться от понятия поля и рассчитывать индивидуальные движения самих частиц. Производить расчеты с непрерывным полем, конечно, несравненно легче, чем вычислять движения отдельных частиц, но выбор того или другого является делом соглашения и отнюдь не обязателен. С другой стороны, связь между квантовыми полями и соответствующими им частицами необходима, а не просто допускается. Основные принципы квантовой теории запрещают нам отказываться от понятия поля и рассчитывать подробно движения отдельных частиц. Они утверждают, что полное описание положений и движений соответствующих частиц невозможно получить экспериментально и что поэтому такое описание не имеет физического смысла. Только плотность вероятности, пропорциональная квадрату модуля поля, может быть измерена и имеет физический смысл.

Смысл этих общих положений может быть лучше понят на специальных примерах.

Фотоны и электромагнитное поле. Отложим на время вопрос о связи между движениями электронов и 4-вектором заряда-тока; предположим, что каким-то способом мы нашли значения J и ρ , с помощью которых можно рассчитать электромагнитное поле, подчиненное граничным условиям, налагаемым потребностями эксперимента. Сосредоточим наше внимание на влияниях такого поля на другие заряженные частицы, электроны и ионы.

Когда электромагнитная волна наталкивается на фотографическую пластинку или поглощается металлической поверхностью, количество энергии на квадратный сантиметр фронта волны, которое может быть отдано галоидному кристаллу или затрачено на приведение фотозлектрона в движение, равно интенсивности радиации, величине вектора Пойнтинга $(c/4\pi)(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$. Эта величина пропорциональна квадратам амплитуд потенциалов, а в случае, когда эти потенциалы являются комплексными величинами, она пропорциональна квадратам их модулей. Поле будет действовать с данной энергией на галоидные крупинки или на электроны, движущиеся по своим траекториям; полная потеря энергии будет равна произведению общего количества частиц, испытавших воздействие, на среднюю величину энергии, отданной каждой частице. Так как частицы, испытавшие воздействие, распределены не непрерывно, нельзя надеяться на то, что ответ будет однородным вдоль всего фронта волны. Однако можно ожидать, что чем сильнее радиация, тем большее число частиц подвергнется значительному воздействию и в силу этого окончательный результат будет более однородным. Это в действительности и происходит; особенности квантовой теории сказываются только при уменьшении интенсивности (при неизменной частоте) до очень малых значений.

Само поле будет подобно непрерывному как при больших, так и при малых значениях его интенсивности. Можно было бы ожидать, что

реакция фотографической пластинки или фотоэлектронов в металле постарается оставаться, насколько возможно, непрерывной при уменьшении интенсивности, причем уменьшение энергии будет происходить более или менее в равной степени как из-за уменьшения числа частиц, подвергшихся воздействию, так и из-за уменьшения количества энергии, поглощенной каждой частицей. Однако, как ясно показывают многочисленные опыты, этого *не* происходит. Энергия, поглощенная фотоэлектроном, не уменьшается; только количество порождаемых фотоэлектронов уменьшается при уменьшении интенсивности. Это обстоятельство проще всего объяснить, если предположить, что энергия электромагнитного поля переносится дискретными частицами, каждая из которых несет в себе определенное количество энергии. Когда частица света поглощается фотоэлектроном, она оставляет одно и то же количество энергии, какова бы ни была интенсивность радиации. Изменение интенсивности отражается только на *количестве* имеющихся частиц света, но не влияет на их индивидуальную энергию.

Как повторно показали многочисленные опыты, каждая из этих «частиц» света, называемых *фотонами*, несет в себе энергию, пропорциональную частоте ν поля радиации $E = h\nu$, где h — постоянная Планка. Скорости этих частиц в свободном пространстве равны, конечно, скорости света c . Плотность их распределения определяется величиной интенсивности соответствующего классического поля. Такое описание электромагнитного поля с помощью фотонов не является конкурирующим «объяснением» фактов электромагнитного взаимодействия с веществом; оно дает дополнительное описание этих фактов не более и не менее верное, чем описание с помощью классического поля. Фотон не является «реальными» в классическом смысле, так как мы не можем ни рассчитать траекторию отдельного фотона, ни предсказать точно его положение и направление движения в данный момент времени. Лучшее, что можно сделать, — это подсчитать вероятность наличия фотона в данной точке в данный момент; эта вероятность выражается через квадрат значения классического поля в этой точке в этот момент времени. Частица не имеет смысла отдельно от интенсивности поля, и само поле может быть сделано ощутимым только при помощи фотонов.

В качестве поясняющего примера рассмотрим поток света, падающий на поверхность металла, снабженную приспособлением для регистрации выбрасываемых фотоэлектронов. Предположим, что интенсивность в разных точках поверхности, подсчитанная с помощью классических полей, дается графически кривой, изображенной на верхней части рис. 2.25. Если интенсивность очень мала и экспозиция короткая, выделяется только небольшое число фотоэлектронов, благодаря чему очень трудно восстановить кривую распределения интенсивности по изображениям фотоэлектронов. Однако если интенсивность и экспозиция возрастают, выделяется все больше и больше фотоэлектронов и относительные значения плотности точек могут быть измерены все с большей и большей точностью. При очень большой интенсивности распределение точек становится совсем «гладким» и с большой точностью следует изменениям классического поля.

Даже электростатические силы, действующие между двумя постоянными зарядами, могут быть «объяснены» с помощью фотонов. Наличие зарядов вызывает обмен фотонами; некоторое количество их появляется у одного заряда и исчезает у другого. Это количество связано с энергией поля, и комбинированное действие этих фотонов «производит» силы, могущие быть измеренными и действующие на каждый заряд. В этом случае для подсчета этих сил удобнее, конечно, пользоваться точкой

зрения поля, так же как при расчете эффекта Комптона удобнее стоять на точке зрения частиц.

Энергия фотона пропорциональна частоте поля. Но энергия частицы равна временной компоненте 4-вектора, пространственные компоненты которого пропорциональны импульсу частицы, а частота является временной компонентой 4-вектора, пространственные компоненты которого пропорциональны волновому числу (величине, обратной длине волны) волны. Таким образом, наша комбинация волны и частицы приводит

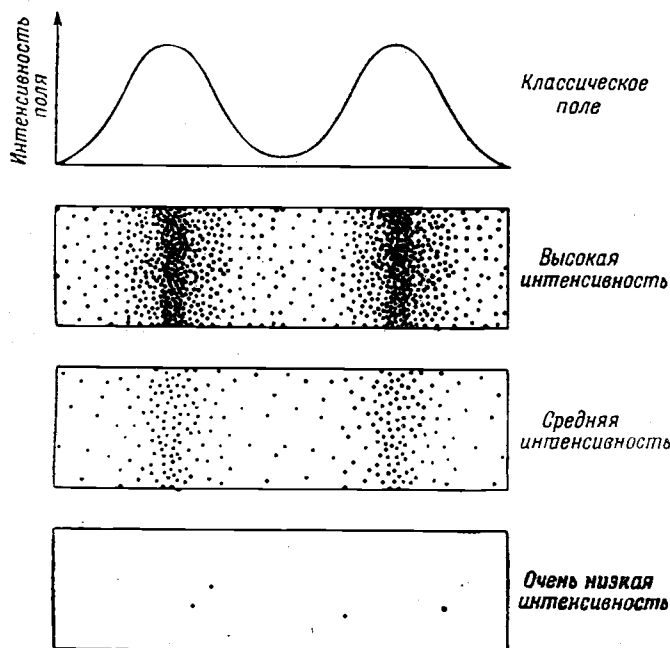


Рис. 2.25.

Точки указывают места, в которые попадают отдельные фотоны. При высокой интенсивности плотность распределения соответствует классическому полю; при низкой интенсивности ясно заметен случайный характер процесса.

к следующим соотношениям между энергией и частотой и между импульсом и волновым числом:

$$\text{энергия} = h\nu; \text{импульс} = \frac{h}{\lambda}, \quad (2.6.1)$$

которые содержат «квантовую постоянную» h .

Фотоны и электромагнитные волны являются не единственным примером этой новой, сложной двойственности между волной и частицей. Опыты Дэвиссона и Г. П. Томсона, а также многих последующих исследователей доказали, что элементарные частицы материи — электроны, протоны и нейтроны — управляются «волновой функцией», непрерывным полем, удовлетворяющим волновому уравнению (подробности этого будут рассмотрены в этом параграфе позже). Детали траекторий отдельных частиц даже в принципе не могут быть измерены с произвольно большой точностью. Мы можем подсчитать и предсказать только вероятность наличия частицы в данной точке в данный момент времени; эта вероятность пропорциональна квадрату модуля волновой функции. Параллелизм со случаем фотон — поле дополняется тем, что энергия и импульс частицы

также связаны с частотой и волновым числом волновой функции уравнениями (2.6.1).

Соотношение неопределенности. Теперь целесообразно рассмотреть подробнее вторую особенность квантового поля — тот факт, что невозможно «отказаться» от волновой функции для получения подробности движения отдельной частицы. Предположим, что луч монохроматического света (или пучок электронов) падает на экран, имеющий две щели на некотором расстоянии друг от друга, как показано на рис. 2.26. Некоторая часть света (или электронного пучка) пройдет через щели и может быть обнаружена на пластинке P . Согласно классической волновой теории, интенсивность освещения пластинки изменяется благодаря интерференции; именно точки, в которых интенсивность наибольшая, расположены под таким углом θ , для которого $\sin \theta = n\lambda/a$, а точки минимальной интенсивности — под углом θ , для которого

$$\sin \theta = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda}{a},$$
 где n — целое число.

Наша чувствительная пластинка укажет отдельные частицы, фотоны или электроны, и при значительной интенсивности плотность таких частиц вполне соответствует интерференционной картине, получающейся с помощью волнового уравнения. Чтобы понять, почему мы не можем «отказаться» от плотности вероятности данной волновой функции, попытаемся сделать это и посмотрим, к чему это приведет нас. Попытаемся проследить за фотоном (или электроном), когда он проходит через щель и падает на пластинку, где и обнаруживается. Не все частицы движутся по одному и тому же пути, так как не все они попадают в одно и то же место пластинки. Но проходит ли фотон, за путем которого мы пытаемся следить, через одну щель, или через другую, или через обе щели? Если он проходит только через одну щель, почему оказывается настолько вероятнее, что он попадет в точки, соответствующие углам θ , где $\sin \theta = n\lambda/a$, чем в точки, соответствующие промежуточным углам? Утверждение, что вероятность того, что фотон попадет в некоторую данную точку пластинки, зависит от расстояния a между щелью, через которую он прошел, и щелью, через которую он не проходил, приводит к абсурду; это и доказывает невозможность достаточно точного исследования путей отдельных частиц. До тех пор пока местонахождение фотонов (или электронов) определяется через квадрат величины волновой функции, попытки описания пути отдельной частицы всегда будут приводить нас к подобным логическим противоречиям.

Мы можем попытаться заставить фотоны пройти через щель A , закрыв щель B . Но тогда мы не получим интерференционных полос на пластинке. Этим мы не разрешаем парадокса, мы только разрушаем эксперимент.

Из сказанного следует, что мы не можем быть уверены в том, каков поперечный импульс фотона на протяжении его пути от щели до пластинки, и что любая попытка точно измерить этот импульс разрушает эксперимент так, что ничто другое не может быть точно измерено. Мы могли бы, например, попытаться измерить поперечный импульс, измерив

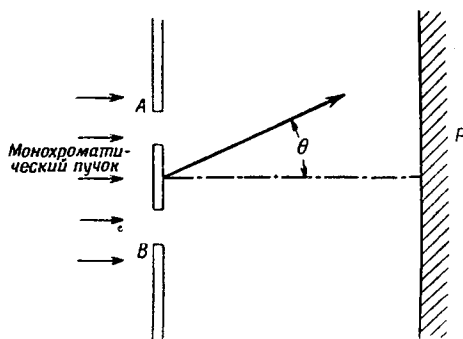


Рис. 2.26. Интерференция света в случае двух щелей.

импульс, сообщенный экрану, когда частица проходит через щель и изменяет направление своего движения. Но для того чтобы измерить импульс отдачи, нужно, чтобы экран имел малую массу и был свободно подвешен так, чтобы он мог заметно двигаться при отдаче; но если все это имеет место, мы не можем быть уверены в точном положении экрана, когда частица проходит через щель.

Факт состоит в том, что мы никогда не можем измерить одновременно положение и импульс с произвольно большой степенью точности. Рис. 2.27 показывает, как сделать это утверждение более определенным. Здесь частицы должны пройти через одну щель ширины Δx . Согласно теории дифракции Фраунгофера, волны, проходящие через щель ширины Δx , будут диффрагировать, разворачиваясь в расходящийся пучок.

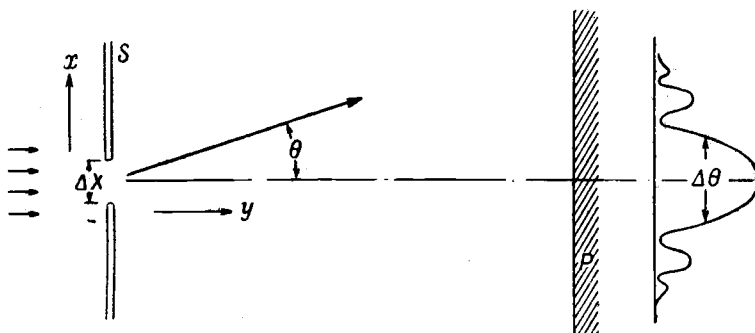


Рис. 2.27. Диффракция света, проходящего через единственную щель шириной Δx .

Кривая справа показывает классическое распределение интенсивности освещения экрана P .

окруженный диффракционными полосами, как показано в правой части рисунка на кривой сглаженной интенсивности. Теория диффракции утверждает, что угловая ширина $\Delta\theta$ основного пучка приблизительно равна $\lambda/\Delta x$. Но этот угол является мерой нашей неуверенности относительно поперечного импульса фотона после того, как он прошел через щель; вероятнее всего, что значения этого поперечного импульса лежат между границами $\frac{1}{2}\Delta p \simeq \frac{1}{2}p\Delta\theta$ и $-\frac{1}{2}\Delta p \simeq -\frac{1}{2}p\Delta\theta$, где p — импульс частицы в направлении оси y , т. е. в направлении первоначального движения частицы. Но, согласно уравнению (2.6.1), имеем $p = h/\lambda$, так что $\Delta p \simeq p\Delta\theta \simeq (h/\lambda)(\lambda/\Delta x)$ или

$$\Delta p \Delta x \lesssim h. \quad (2.6.2)$$

Это соотношение называется *соотношением неопределенности Гейзенберга*; оно является одним из основных соотношений квантовой физики.

Приспособление со щелью, показанное на рис. 2.27, дает метод измерения положения частицы только в направлении x . Пучок частиц, движущихся в направлении y , падает на экран. Положение любой из частиц в пучке до ее удара об экран неизвестно, но после того, как она прошла через щель, мы можем сказать, что знаем ее координату x (или по крайней мере *знали* ее координату x сразу после того, как она прошла через щель) в пределах неопределенности Δx . Но так как поведение частицы подчиняется волновому уравнению с соответствующей частотой и длиной волны, данными в уравнении (2.6.4), самый факт ее

прохождения через щель влечет за собой неопределенность относительно направления ее последующего движения; самый факт, что мы измерили ее координату x , влечет за собой неопределенность в компоненте по оси x ее импульса. Соотношение волна — частица нуждается во взаимосвязи между неопределенностью в нашем измерении x и неопределенностью в соответствующем импульсе; эта связь дана в уравнении (2.6.2), которое содержит вездесущую постоянную h . Чем точнее мы измеряем x (то есть чем уже щель), тем менее точно мы знаем импульс после измерения.

Можно представить себе многие другие эксперименты для измерения положения и импульса, но анализ показывает, что все они приводят к тому же результату, пока мы имеем в виду квант, то есть взаимосвязь волна — частица. Например, мы можем пустить луч света на электрон и определить положение этого электрона, наблюдая под микроскопом отраженный свет. Однако свет при отражении от электрона ведет себя сам подобно частице, и это отражение сообщает электрону известный импульс отдачи. Мы не можем быть уверены относительно направления этой отдачи, так как линза микроскопа имеет конечные размеры, и мы не знаем, через какую часть линзы прошел отраженный фотон, прежде чем мы его увидели. Мы могли бы уменьшить неопределенность относительно направления импульса отдачи, уменьшив угловую апертуру микроскопа, но по законам дифракции это уменьшило бы разрешающую силу микроскопа и поэтому увеличило бы неопределенность относительно положения, в котором находился электрон в момент столкновения. Если провести все преобразования, то связь между неопределенностью в положении электрона в момент отражения фотона и неопределенностью в последующем импульсе электрона снова дается соотношением (2.6.2).

Затруднение (если это можно назвать затруднением) состоит в том, что физические сущности нельзя дробить неограниченно. Мы не можем осветить электрон бесконечно малым количеством света; наименьшее возможное количество света все еще нарушает состояние электрона на конечную величину. Самый факт, что материя (а также электромагнитное излучение и т. д.) встречается только в конечных порциях, приводит к неустранимым неточностям во всех наших экспериментах, что делает неизбежным соотношение неопределенности. Рассматриваем ли мы взаимосвязь «волна — частица», содержащуюся в уравнениях (2.6.1), как «объяснение» соотношения неопределенности, содержащегося в уравнении (2.6.2), или наоборот, оба они являются различными выражениями следствий из существенно атомистического взаимодействия поля и материи; обе эти точки зрения имеют общее клеймо — постоянную h .

Сопряженные переменные и скобки Пуассона. Положение x и импульс p_x являются на языке классической динамики каноническими сопряженными переменными. Соотношение неопределенности сохраняет силу для любой пары сопряженных переменных: угол и момент количества движения, энергия и время и т. д. Мы рассмотрим этот вопрос классической динамики несколько подробнее в ближайшей главе; здесь мы сошлемся только на некоторые выводы теории преобразований прикосновения, чтобы осветить это понятие сопряженных переменных. Предположим, что мы можем полностью выразить конфигурацию некоторой консервативной динамической системы в данный момент t с помощью некоторой подходящей системы координат $q_1, q_2, \dots, q_n$. Мы можем тогда выразить *кинетический потенциал* $L = T - V$, разность между кинетической и потенциальной энергиями (иногда называемую *функцией Лагранжа*), через координаты q и их производные по времени $\dot{q}_m = dq_m/dt$.

Импульс p_m , сопряженный координате q_m , определяется тогда для рассматриваемой динамической системы формулой

$$p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}. \quad (2.6.3)$$

Кинетический потенциал, полная энергия или какое-либо другое свойство системы может быть выражено через переменные q и p вместо переменных q и $\dot{q}$. По многим причинам употребление величин p и q предпочтительнее перед применением величин q и $\dot{q}$.

Существуют, конечно, и многие другие системы координат и сопряженных импульсов, с помощью которых можно полностью выразить поведение динамической системы. Преобразование, позволяющее перейти от величин $q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n$, описывающих состояние системы, к другим переменным $Q_1, Q_2, \dots, Q_n; P_1, P_2, \dots, P_n$, с помощью которых также может быть описано состояние той же системы, называется *преобразованием прикосновения*. Эти новые координаты $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ можно выбрать любым способом, но так, чтобы и с их помощью можно было бы полностью описать рассматриваемую конфигурацию в любой момент. Кинетический потенциал L системы может быть выражен через Q и $\dot{Q}$, и тогда величины P могут быть найдены из формулы (2.6.3).

Другой способ нахождения соотношений, включающих величины Q и P , основан на применении *скобок Пуассона*. Предположим, что мы выразили две функции динамической системы u и v через исходные переменные q и p . Скобки Пуассона функций u и v определяются тогда равенством

$$(u, v) = \sum_{m=1}^n \left[\frac{\partial u}{\partial p_m} \frac{\partial v}{\partial q_m} - \frac{\partial u}{\partial q_m} \frac{\partial v}{\partial p_m} \right]. \quad (2.6.4)$$

Эти выражения подробнее будут рассмотрены в гл. 3.

Значение скобки (u, v) будет одним и тем же независимо от выбора координат $q_1, q_2, \dots, q_n$, если только эти координаты достаточны для полного описания конфигурации системы и если сопряженные импульсы определены равенствами (2.6.3). Легко убедиться в том, что

$$(u, p_m) = -\frac{\partial u}{\partial q_m} \quad \text{и} \quad (u, q_m) = \frac{\partial u}{\partial p_m}.$$

Интересное и полезное свойство таких выражений состоит в том, что если u и v являются сопряженными переменными, то их скобка Пуассона равна единице. Таким образом, полная совокупность координат Q_m и сопряженных импульсов P_m для рассматриваемой системы удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} (Q_i, Q_j) &= 0, & (P_i, P_j) &= 0, & i, j &= 1, \dots, n, \\ (P_i, Q_j) &= 0, & i, j &= 1, \dots, n, & i &\neq j, \\ (P_m, Q_m) &= 1, & m &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Мы находим также, что $(u, v) = 1$, когда u и v выражены через любые новые координаты Q и импульсы P , если эта скобка была равна единице в старой системе q и p .

Наиболее общий вид соотношение неопределенности приобретает поэтому для любых двух функций u и v динамических переменных p и q данной системы. Если скобка Пуассона (u, v) равна постоянной K (если

она равна K в одной системе координат, то она будет равна K и во всякой другой), то произведение неопределенностей при одновременном измерении u и v равно $K\hbar$; вообще

$$\Delta u \Delta v \simeq |(u, v) \hbar|_{\text{ср.}}, \quad (2.6.6)$$

где индекс «ср.» указывает на то, что должно быть взято среднее в смысле квантовой механики (оно определено на стр. 224), если (u, v) не является постоянной.

Взаимосвязь волна — частица, а также соотношение неопределенности, наведенные нам экспериментальными данными, подразумевают и требуют такую формулировку основ динамики, которая говорила бы нам о том, что мы должны знать относительно поведения системы, но которая не говорила бы о том, чего мы не можем знать.

В итоге рассуждений этого пункта мы можем сказать, что двойственность волна — частица, проявляемая как излучением, так и материей, требует существенного изменения описания физических явлений, данного Ньютоном и Максвеллом, описания, в котором все координаты и соответствующие им импульсы могли быть точно измерены, а потому траектории частиц были полностью известны. Квантовая механика утверждает, что такие точные знания невозможны, что чем более настойчивы попытки получить их, тем более сильно исказится траектория. Эта неотъемлемая неопределенность вытекает из того факта, что имеется своего рода волна, связанная с частицей; эта волна может интерферировать сама с собой. Интенсивность волны (т. е. квадрат ее модуля) связана с вероятностью нахождения частицы в данной точке. Проблема единственной частицы является центральной проблемой квантовой механики; эта проблема будет некоторое время привлекать наш главный интерес. Если ее решить, все еще остается проблема совокупности частиц, свободных или взаимодействующих. Эта проблема включает в себя квантование полей, в том числе, например, и поля вероятностей, рассмотренного выше; в последнем случае часто говорят также о вторичном квантовании.

Основные постулаты квантовой теории. Количественная формулировка этих идей требует применения символического исчисления состояний такого рода, как затронутое в гл. 1. Состояние системы имеет смысл, хорошо определенный в классической физике. Например, траектория или орбита частицы описывает ее состояние; прежде чем описывать состояние плоской электромагнитной волны, нужно знать направление вектора поляризации и т. д. В квантовой физике может быть известно не так много фактов относительно системы. Тем не менее, если бы мы пожелали остаться в полном неведении относительно одной из пары сопряженных переменных, мы могли бы другую определить точно. Вообще здесь имеется некоторое количество измерений, которые можно выполнить одновременно. Совокупность результатов таких измерений может быть принята за описание состояния системы. В самом деле, в квантовой физике это является максимумом того, что можно сказать относительно системы.

Измерение, выполненное над системой, изменяет систему. Для наглядного представления этого факта лучше всего построить абстрактное векторное пространство, вектор которого представляет собой данное состояние системы. Это, конечно, можно сделать в классической физике так же, как и в квантовой; этот прием мы применяли, например, при изучении связанных осцилляторов в параграфе, посвященном абстрактным пространствам, или при изучении колебаний струны в этой главе. Как мы сказали, влияние измерения изменяет состояние, т. е. повора-

чивает вектор, представляющий состояние в векторном пространстве. Таким образом, измерение может быть представлено *оператором* в абстрактном пространстве; каждой динамической переменной соответствует определенный оператор.

Вообще измерение значения данной динамической переменной нарушает состояние данной системы, так что последующие измерения той же переменной дадут другие результаты; все, что можно получить с помощью этих повторных измерений, — это среднее значение и средние отклонения или неопределенность. Только для небольшого количества из всех возможных состояний неопределенность равна нулю и каждое измерение данного количества приводит к одному и тому же значению. Если измерение этого единственного значения достаточно для задания состояния, то вектор состояния должен быть *собственным вектором* оператора, представляющего эту переменную (определенным на стр. 82). Если для задания состояния требуются значения более чем одного переменного, то вектор состояния, для которого неопределенность одного из этих переменных равна нулю, не будет обязательно собственным вектором; однако можно доказать, что совокупность собственных векторов всегда может быть найдена.

Чтобы резюмировать некоторые наши рассуждения из гл. 1, обозначим через $\mathfrak{P}$ оператор, соответствующий импульсу системы; пусть состояния, для которых неопределенность измерения p равна нулю, изображаются векторами p_n (собственные векторы оператора $\mathfrak{P}$). Тогда, согласно уравнению (1.6.31), имеем

$$\mathfrak{P} \cdot p_n = p_n p_n,$$

где p_n — одно из измеренных значений импульса (мы выбираем длину вектора p_n так, чтобы p_n было измеренным значением); оно называется *собственным значением* оператора $\mathfrak{P}$ для состояния, обозначенного через p_n . Так как p_n должно быть действительным числом, оператор $\mathfrak{P}$ должен быть *эрмитовым* оператором, согласно определению, данному на стр. 86 (другими словами, оператор $\mathfrak{P}$ равен своему сопряженному оператору $\mathfrak{P}^*$).

Если система находится в произвольном состоянии, соответствующем вектору состояния e , импульс, вообще говоря, не может быть точно измерен. Можно определить только среднее значение результатов ряда измерений. Как указано на стр. 83, вектор e может быть записан в виде суммы произведений собственных векторов p_m на соответствующие компоненты вектора e в направлениях p_m , выражаемые скалярными произведениями $p_m^* \cdot e$. В гл. 1 мы показали, что векторы p_m взаимно-перпендикулярны и нормированы так, что скалярные произведения $p_m^* \cdot e$ эквивалентны направляющим косинусам, хотя вообще и являются комплексными числами. Это значит, что сумма квадратов модулей направляющих косинусов равна единице

$$\sum_m |p_m^* \cdot e|^2 = 1, \text{ где } e = \sum_m p_m (p_m^* \cdot e).$$

Это уравнение подсказывает, что величину $|p_m^* \cdot e|^2$ можно считать вероятностью, а именно вероятностью того, что измерение величины p в состоянии e приводит к значению p_m (т. е. вероятностью того, что состояние e находится в состоянии p_m). Поэтому среднее значение p для состояния e равно

$$p_{\text{ср.}} = \sum_m p_m |p_m^* \cdot e|^2 = \left[\sum_n (e^* \cdot p_n) p_n^* \right] \cdot \mathfrak{P} \cdot \left[\sum_m (p_m (p_m^* \cdot e)) \right] = e^* \cdot \mathfrak{P} \cdot e$$

Это среднее того самого типа, который содержится в уравнении (2.6.6).

На стр. 83 мы показали, что если две динамические переменные не измеримы одновременно, то соответствующие им операторы не перестановочны, т. е. $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$. В этом параграфе мы затратили некоторое время на выяснение того, что данный импульс p и сопряженная ему координата q не могут быть одновременно измерены, если принять во внимание свойства физических взаимодействий, существенно обусловленных атомистичностью и наличием комбинации волна — частица. Поэтому коммутатор $[p \cdot q - q \cdot p]$ (который в дальнейшем будем обозначать через $[p, q]$) не равен нулю. Важно найти, чему он равен.

Прежде всего, $[p, q]$ должен быть чисто мнимым, так как $(e^* \cdot p \cdot q \cdot e)$ является комплексным сопряженным с $(e^* \cdot q \cdot p \cdot e)$ для любого вектора e (так как $q^* = q$ и $p^* = p$) и разность между этими двумя величинами (представляющая собой среднее значение $[p, q]$ для состояния e) должна быть поэтому чисто мнимой. Во-вторых, мы доказали на стр. 91, что величина коммутатора $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ пропорциональна произведению неопределенностей $(\Delta a \Delta b)$. Комбинируя все это (а также и выводы из эксперимента), мы приходим к уравнению $[p, q] = \hbar/i$ (где $\hbar = h/2\pi$), уже полученному раньше [уравнение (1.6.32)].

Учитывая уравнение (2.6.6), связывающее квантовые неопределенности с выражением классической скобки Пуассона, мы, наконец, приходим к *основному уравнению квантовой механики*; это уравнение устанавливает связь между двумя операторами, представляющими две динамические переменные некоторой системы, и скобкой Пуассона для соответствующих классических переменных:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} - \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = (a, b) \frac{\hbar}{i} = \frac{\hbar}{i} \left\{ \sum_m \left[\frac{\partial a}{\partial p_m} \frac{\partial b}{\partial q_m} - \frac{\partial a}{\partial q_m} \frac{\partial b}{\partial p_m} \right] \right\}; \quad (2.6.7)$$

здесь, если (a, b) не сводится к постоянной, мы должны считать эту скобку функцией операторов p_m и q_m . Нужно, однако, сделать предупреждение о том, что *порядок* выписывания множителей (pqr вместо qpr^2 и т. д.) для некоммутирующих операторов играет роль и что уравнение (2.6.7) выполняется только тогда, когда для написания скобки Пуассона **выбран** правильный порядок множителей (см. стр. 226). Это очень интересное уравнение связывает операторы квантовой механики в абстрактном векторном пространстве с чисто классическими динамическими функциями. Оно представляет собой не единственное уравнение, которое можно придумать, чтобы удовлетворить общим требованиям, намеченным на предыдущей странице, но является простейшим уравнением этого рода и его оправдание заключается в правильности вытекающих из него результатов.

Подведем итог выводов этого параграфа. В квантовой механике состояние задается значениями тех величин, которые могут быть одновременно измерены для этого состояния. Соответствующие им операторы оставляют состояние неизменным и попарно перестановочны друг с другом. Конечно, эти операторы не являются функциями друг друга. В этом можно убедиться, составив оператор, перестановочный с одним, но не перестановочный с другим. Если операторы не перестановочны, они удовлетворяют соотношению неопределенности, данному уравнением (2.6.6).

Независимые квантовые переменные и функции от операторов. Существует, конечно, много функций динамических переменных системы, которые должны превратиться в операторы. Функция одного переменного (например, p_m или q_n), которая может быть определена классическим способом с помощью ряда по степеням этого переменного, может быть очень просто преобразована таким образом, что любая такая функция,

взятая, например, от $\mathfrak{p}_m$, перестановочна с $\mathfrak{p}_m$ и ее значение может быть точно найдено, если $\mathfrak{p}_m$ может быть точно измерено. Собственное значение функции может быть подсчитано, исходя из собственного значения $\mathfrak{p}_m$. Наконец, если оператор $\mathfrak{F}$ перестановочен с оператором $\mathfrak{p}$ и если каждый оператор, перестановочный с $\mathfrak{p}$, перестановочен также с $\mathfrak{F}$, то можно сказать, что $\mathfrak{F}$ есть функция оператора $\mathfrak{p}$.

Однако во многих случаях, когда два оператора перестановочны, один из них все же не является функцией другого. Так, многие системы требуют задания нескольких независимых операторов, чтобы полностью определить состояние. Операторы $\mathfrak{p}_n$ и $\mathfrak{q}_m$ ($n \neq m$) независимы и перестановочны, согласно равенству (2.6.7). Однако ни один из них не является функцией другого, так как можно найти много операторов, перестановочных с $\mathfrak{p}_n$, но не перестановочных с $\mathfrak{Q}_m$ (например, любая функция оператора $\mathfrak{p}_m$). Фактически если два оператора перестановочны, но можно найти третий оператор, перестановочный с одним из них, но не перестановочный с другим, то, наверное, первые два оператора независимы друг от друга.

Если мы имеем дело с функциями двух сопряженных переменных, то с помощью уравнения (2.6.7) и пользуясь инвариантностью скобок Пуассона при преобразованиях прикосновения (т. е. при переходе от одной совокупности сопряженных переменных к любой другой полной совокупности) мы видим, что

$$[\mathfrak{F}(q_n, p_n), \mathfrak{Q}_n] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_n}, \quad [\mathfrak{F}(q_n, p_n), \mathfrak{P}_n] = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q_n}, \quad (2.6.8)$$

причем производные в правых частях переводятся в операторы после того, как произведено дифференцирование. Прежде чем переводить в оператор любую функцию сопряженных переменных, нужно внимательно расположить их в определенном порядке, так как эти переменные могут быть не перестановочны. (Например, классическая функция $p^2 q$ может перейти в $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}$, или в $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}$, или в $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$, а собственные векторы каждого из этих операторов различны.) Часто правильный порядок может быть найден только с помощью проб или под контролем опыта.

Предположим, например, что нужно найти квантово-механический оператор, соответствующий импульсу, сопряженному со сферическим углом $\varphi = \arctg(y/x)$. В классическом смысле — это компонента z момента количества движения, равная $x p_y - y p_x$; так как $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{p}_y$ перестановочны (так же, как $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{p}_x$), квантово-механический оператор может быть составлен сразу в виде $\mathfrak{x} \mathfrak{p}_y - \mathfrak{y} \mathfrak{p}_x$. Легко проверить, воспользовавшись уравнениями (2.6.8), что

$$[(\mathfrak{x} \mathfrak{p}_y - \mathfrak{y} \mathfrak{p}_x), \mathfrak{L}] = \frac{\hbar}{i}. \quad (2.6.9)$$

Рассмотрим более сложный пример. Требуется найти в квантовой механике эквивалент «радиальному импульсу» p_r , сопряженному радиальной координате $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Классический радиальный импульс равен

$$p_r = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi = \frac{x p_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y p_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Это выражение не имеет единственного эквивалента в квантовой механике, так как, например, $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{p}_x$ не перестановочны. Форма, для которой точно выполняется правило коммутатора, получается непосредственно из написанного выше выражения, то есть

$$\left[\frac{\mathfrak{x}}{r} \mathfrak{p}_x + \frac{\mathfrak{y}}{r} \mathfrak{p}_y, r \right] = \frac{\hbar}{i}. \quad (2.6.10)$$

Так как мы требуем, чтобы оператор был эрмитовым, то должна быть использована симметричная форма.

Собственные векторы для координат. До сих пор мы довольно подробно рассматривали правила перестановочности, которые могут быть выведены из уравнения (2.6.7). Обратимся теперь к исследованию собственных значений этих операторов. Во-первых, мы покажем, что собственные значения оператора q непрерывны. Чтобы убедиться в этом, мы покажем, что если существует собственное значение q оператора q , то может быть образован собственный вектор с собственным значением $q + dq$.

Предположим, что $e(q)$ — собственный вектор оператора q , такой, что $q \cdot e(q) = qe(q)$. На вектор $e(q)$ будем действовать оператором

$$\mathfrak{D} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p dq\right) = 1 - \frac{i}{\hbar} p dq.$$

Вектор $\mathfrak{D} \cdot e(q)$ является собственным вектором оператора q с собственным значением $q + dq$, так как

$$\begin{aligned} q \cdot \mathfrak{D} \cdot e(q) &= \left[q - \frac{i}{\hbar} q p dq \right] e(q) = \left[q + \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{i} - p q \right) dq \right] e(q) = \\ &= (q + dq) \left(1 - \frac{i}{\hbar} p dq \right) e(q) = (q + dq) \mathfrak{D} \cdot e(q), \end{aligned}$$

так что

$$\mathfrak{D} \cdot e(q) = e(q + dq).$$

Для получения этого мы воспользовались коммутационным правилом $[p, q] = \hbar/i$.

Заметим, что при изучении колеблющейся струны на стр. 134 мы нашли другой случай с непрерывным распределением собственных значений.

Отметим также, что

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} p q'\right) \cdot e(q) = e(q + q'). \quad (2.6.11)$$

На стр. 133 мы отметили возможные осложнения при рассмотрении собственных векторов для несчетного множества собственных значений. Различные собственные векторы $e(q)$ для различных значений q перпендикулярны ко всем другим собственным векторам последовательности, так что наверное $e(q)$ не является непрерывной функцией от q . Поэтому результат следующих действий

$$\left[1 - \frac{i}{\hbar} p \Delta q \right] \cdot e(q) = e(q + \Delta q)$$

или

$$p \cdot e(q) = i\hbar \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \left[\frac{e(q + \Delta q) - e(q)}{\Delta q} \right] \quad (2.6.12)$$

не обозначает, что правая часть пропорциональна производной вектора $e(q)$ по переменному q , так как разность $[e(q + \Delta q) - e(q)]$ не стремится к нулю непрерывным образом при стремлении Δq к нулю. [Отметим, что этот результат следует непосредственно из уравнения (2.6.7) и может быть написан для любой пары канонических сопряженных переменных при непрерывном распределении собственных значений для одной из переменных.]

Тот факт, что q имеет континуум значений, вызывает также некоторые трудности при решении вопроса о том, какой функцией от q и q' является скалярное произведение $e^*(q) \cdot e(q')$. Можно предполагать, что эта функция должна быть равна нулю для всех значений q и q' , кроме значений, для которых $q = q'$, что приводит к разрывной функции. Оказывается, что наиболее удобно определить ее с помощью интеграла. Очевидную формулу $\sum_n e_m^* \cdot e_n = 1$, справедливую для дискретных собствен-

ных векторов, мы распространим на случай континуума $\int_{-\infty}^{\infty} e^*(q) \cdot e(q') dq' = 1$.

Это равенство определяет величины векторов e (см. стр. 231).

Функции преобразования. Интегрируя по q , мы можем составить интегралы, содержащие $e(q)$ и равные пределам сумм подинтегральных выражений для всех значений q между пределами интегрирования. Например, произвольный вектор состояния f может быть выражен в виде суммы всех различных собственных векторов для q

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(q) e(q) dq, \quad (2.6.13)$$

где $|f(q)|^2 dq$ есть вероятность того, что частица находится между q и $q + dq$, когда система имеет состояние f . Величина $f(q)$, будучи пропорциональна направляющему косинусу угла между f и $e(q)$, является комплексным числом и представляет собой обычную функцию непрерывного переменного q . Аналогия между этим интегралом и интегралом Фурье станет более ясной, если развить это рассуждение.

Этим способом, интегрируя собственные векторы оператора положения q , мы можем поставить в соответствие каждому вектору состояния f обыкновенную функцию $f(q)$, которая называется *функцией преобразования*¹⁾, так как она определяет связь между f и векторами $e(q)$. Собственный вектор другого оператора может быть, конечно, выражен через векторы $e(q)$. Например, если $\mathfrak{A} \cdot e(a) = a e(a)$, то можно написать

$$e(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(a|q) e(q) dq, \quad (2.6.14)$$

где $|\psi(a|q)|^2 dq$ есть вероятность того, что координата системы имеет значение, лежащее между q и $q + dq$, когда состояние системы таково, что переменное, представляемое оператором $\mathfrak{A}$, наверное имеет значение a . Такая функция преобразования была рассмотрена на стр. 134.

Если мы не хотим полагаться на наше умение производить вычисления с векторами состояния, мы можем всегда перейти к вычислениям над функцией $f(q)$. Например, среднее значение динамической величины, представляемой оператором $\mathfrak{A}$, когда система находится в состоянии f , имеет вид

$$f^* \cdot \mathfrak{A} \cdot f = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(q) [e^*(q) \cdot \mathfrak{A} \cdot e(q')] f(q') dq',$$

¹⁾ Функция $f(q)$ называется обычно волновой функцией в x -представлении. — Прим. ред.

так что, зная результат действия оператора на вектор $e(q)$, мы можем выразить результат действия оператора на любой другой вектор состояния f через функцию преобразования $f(q)$.

Например, мы можем вычислить результат действия оператора p , являющегося канонически сопряженным координатному оператору q , на произвольный вектор состояния f . Пользуясь уравнением (2.6.12), имеем

$$\begin{aligned} p \cdot f &= \int_{-\infty}^{\infty} f(q) p \cdot e(q) dq = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta q} \left[\frac{e(q + \Delta q) - e(q)}{\Delta q} \right] f(q) dq = \\ &= \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta q} \left[\frac{f(q) - f(q - \Delta q)}{\Delta q} \right] e(q) dq = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right] e(q) dq. \quad (2.6.15) \end{aligned}$$

Другими словами, результат действия оператора p на вектор состояния f соответствует результату действия аналитической операции $(\hbar/i) (\partial/\partial q)$ на функцию преобразования $f(q)$. Так как $f(q)$ — обыкновенная функция, дифференциальный оператор имеет обычный смысл. Повторяя эти рассуждения, найдем, что оператору $b(p)$ соответствует оператор $b(\hbar/i)^n (\partial^n/\partial q^n)$, действующий на $f(q)$. Таким образом, если функцию $\mathfrak{B}(p)$ оператора p можно разложить в степенной ряд, то соответствующий оператор, действующий на функцию $f(q)$, получается подстановкой вместо p дифференциального оператора $(\hbar/i) (\partial/\partial q)$.

Было бы нетрудно с помощью уравнений (2.6.5) и (2.6.7) обобщить эти замечания. Рассмотрим полную совокупность координат q_m ($m=1, \dots, n$), с помощью которой можно задавать конфигурацию данной системы (в классическом смысле). Найдём импульсные переменные p_m , сопряженные с q так, чтобы удовлетворялись уравнения (2.6.5), содержащие скобки Пуассона. Каждое динамическое переменное $B(p, q)$ системы может быть выражено через p и q . Квантово-механический оператор $\mathfrak{B}$, соответствующий классической величине B , может быть получен, если подставить в B операторы p_m и q_m вместо величин p_m и q_m . Этот оператор, действуя на абстрактный вектор f , представляющий состояние системы, изменяет его величину и (или) направление. Если вместо исследования действия оператора $\mathfrak{B}(p, q)$ на f мы предпочтем изучить соответствующее влияние на функцию преобразования $f(q_1, q_2, \dots, q_n)$, то мы можем воспользоваться следующим обобщением уравнения (2.6.15):

$$\mathfrak{B}(p, q) f = \int \dots \int \mathcal{B} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q \right) f(q_1, \dots, q_n) dq_1 \dots dq_n e(q_1, \dots, q_n) \quad (2.6.16)$$

Здесь дифференциальный оператор $\mathcal{B}$ под знаком интеграла, действующий на функцию преобразования $f(q_1, \dots, q_n)$, образован заменой каждого p_m в классической функции $B(p, q)$ через $(\hbar/i) (\partial/\partial q_m)$. И в $\mathfrak{B}$, и в соответствующем дифференциальном операторе, действующем на $f(q)$, мы должны быть внимательны к порядку множителей p и q в каждом члене B , ибо сопряженные операторы p_m и q_m не перестановочны, что видно из уравнений

$$\begin{aligned} [p_m, q_n] &= \frac{\hbar}{i} \delta_{mn}; \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases} \\ [p_m, p_n] &= 0 = [q_m, q_n], \end{aligned}$$

которые соответствуют уравнениям (2.6.5), содержащим скобки Пуассона. Как было определено раньше, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ обозначает коммутатор $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A})$.

Операторные уравнения для функций преобразования. Например, вместо применения векторного уравнения

$$\mathfrak{B}(p, q) \cdot \mathbf{b}_m = b_m \mathbf{b}_m$$

для определения собственных векторов $\mathbf{b}_m$ и собственных значений b_m можно воспользоваться соответствующим дифференциальным уравнением

$$\mathcal{B}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi(b_m | q) = b_m \psi(b_m | q) \quad (2.6.17)$$

для нахождения функций преобразования $\psi(b_m | q)$ и их собственных значений b_m для оператора $\mathfrak{B}$. Собственные векторы $\mathbf{b}_m$ (если в них есть потребность) могут быть найдены с помощью формул

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m &= \int \dots \int \psi(b_m | q) \mathbf{e}(q) dq_1 \dots dq_n, \\ \mathbf{b}_m^* &= \int \dots \int \bar{\psi}(b_m | q) \mathbf{e}^*(q) dq_1 \dots dq_n. \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Вероятность того, что конфигурация системы определяется значениями координат, лежащими между q_1 и $q_1 + dq_1, \dots, q_n$ и $q_n + dq_n$, когда B имеет значение b_m , равна $|\psi(b_m | q)|^2 dq_1 \dots dq_n$, а среднее значение динамической переменной $A(p, q)$, когда B имеет значение b_m , равно

$$(\mathbf{b}_m^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{b}_m) = \int \dots \int \bar{\psi}(b_m | q) \mathcal{A}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi(b_m | q) dq_1 \dots dq_n. \quad (2.6.19)$$

Так как совокупность собственных векторов $\mathbf{b}_n$ может быть также использована для разложения произвольного вектора состояния, мы имеем аналогично

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{b}_m = \sum_s (\mathbf{b}_s^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{b}_m) \mathbf{b}_s,$$

$$(\mathbf{b}_s^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{b}_m) = \int \dots \int \bar{\psi}(b_s | q) \mathcal{A}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi(b_m | q) dq_1 \dots dq_n, \quad (2.6.20)$$

так как

$$(\mathbf{b}_s^* \cdot \mathbf{b}_m) = \delta_{sm}; \quad \delta_{sm} = \begin{cases} 0, & s \neq m, \\ 1, & s = m. \end{cases}$$

Таким образом, многие операции алгебры векторов состояний проходят параллельно интегральным и дифференциальным операциям, совершаемым над функциями преобразования. К настоящему моменту должно быть ясно, что эти функции преобразования некоторым образом связаны с волновыми функциями, рассмотренными довольно смутно в начале этого параграфа. Квадраты их величин связывают между собой вероятность того, что система имеет данную конфигурацию (например, что частица находится в данной точке), и вероятность того, что система находится в данном состоянии, характеризуемым собственным значением b_m . Эти функции характерны для нового анализа квантовых явлений; они соответствуют тем типам фактов, которые можно надеяться найти для динамической системы, взамен точных данных о траекториях, интересующих нас в классической динамике. Конечно, если содержащиеся здесь энергии и импульсы настолько велики, что соответствующие период $1/\nu$ и длина волны, определенные формулами (2.6.1), намного меньше, чем промежутки времени и расстояния, связанные с системой, то эти функции преобразования сжимаются к лучам, близко соответствующим траекториям классической динамики; допустимые состояния системы близко соответствуют при этом различным, возможным в классической механике начальным условиям.

Преобразование к пространству импульсов. До сих пор мы выражали наши векторы состояния через основную систему векторов $e(q)$ для непрерывно изменяющихся координат $q_1, \dots, q_n$ системы. Тем не менее все можно выразить также и через сопряженные импульсы $p_1, \dots, p_n$, так как между величинами p и q имеется симметрия в выражениях классических скобок Пуассона и квантового коммутатора. Мы получаем совокупность собственных векторов $e(p)$ для всего несчетного множества допустимых значений импульсов $p_1, \dots, p_n$, и всякий другой вектор состояния можно выразить через интеграл

$$b_m = \int \dots \int \psi(b_m | p) e(p) dp_1 \dots dp_n, \quad (2.6.21)$$

аналогичный интегралом (2.6.18).

Воспользовавшись коммутационными соотношениями операторов p и q , мы можем показать, что действие оператора q на вектор состояния b_m соответствует действию операции $-(\hbar/i)(\partial/\partial p)$ на функцию преобразования $\psi(b_m | p)$. Уравнения, соответствующие равенствам (2.6.17) и (2.6.20), имеют вид

$$\mathcal{Q} \left(p, -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \psi(b_m | p) = b_m \psi(b_m | p)$$

и

$$(b_s^* \cdot \mathcal{A} \cdot b_m) = \int \dots \int \bar{\psi}(b_s | p) \mathcal{A} \left(p, -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \psi(b_m | p) dp_1 \dots dp_n.$$

Величина $|\psi(b_m | p)|^2 dp_1 \dots dp_n$ является, само собой разумеется, вероятностью того, что система попадает в элемент импульсов $dp_1 \dots dp_n$, если ее состояние дается величиной b_m .

Для того чтобы дополнить это описание, мы нуждаемся в знании соотношений между собственными векторами $e(q)$ для координат и собственными векторами $e(p)$ для импульсов. Эти соотношения можно было бы также использовать для преобразования функции $\psi(b_m | q)$ в функцию $\psi(b_m | p)$ и обратно. Как и раньше, имеем:

$$e(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p | q) e(q) dq, \quad (2.6.22)$$

где мы для простоты рассматриваем только одну координату и один сопряженный импульс. Функция преобразования $\psi(p | q)$ связывает состояние, в котором мы точно знаем положение частицы (и не имеем сведений об импульсе), с состоянием, в котором мы точно знаем импульс частицы, но не имеем сведений об ее положении (это последнее соответствует нашим знаниям о частице, находящейся слева от экрана на рис. 2.26 и 2.27). Чтобы найти $\psi(p | q)$, мы воспользуемся уравнением $pe(p) = pe(p)$ для собственного вектора оператора p и преобразуем его, опираясь на уравнения (2.6.22) и (2.6.15)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \psi(p | q) - p \psi(p | q) \right] e(q) dq = 0,$$

для всех значений p и q . Таким образом, $\psi(p | q)$ равна $s \exp[(i/\hbar)pq]$, где s — нормирующая постоянная.

Функция «нормируется» так (см. стр. 228), чтобы выполнялось равенство $e^*(p) \cdot e(p') = \delta(p - p')$, где δ — дельта-функция Дирака, опре-

деляемая уравнениями (см. также стр. 122)

$$\delta(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2}\Delta, \\ 1/\Delta, & -\frac{1}{2}\Delta < x < \frac{1}{2}\Delta, \\ 0, & \frac{1}{2}\Delta < x. \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta(x-z) dz = f(x), \quad (2.6.23)$$

Выразим сначала $e^*(p)$ и $e(p')$ через векторы $e(q)$

$$e^*(p) \cdot e(p') = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dq' e^{-(i/\hbar)pq + (i/\hbar)p'q'} [e^*(q) \cdot e(q')] = \delta(p - p').$$

Но $[e^*(q) \cdot e(q')] = \delta(q - q')$, так что интегрирование по q' дает

$$\delta(p - p') = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{(i/\hbar)(p'-p)q}.$$

Этот последний интеграл не будет вполне сходящимся, но и дельта-функция также не является функцией, ведущей себя хорошо. Лучше было бы воспользоваться определением функции $\delta(p - p')$ и проинтегрировать обе части приведенного выше уравнения по p' в промежутке от $p - \frac{1}{2}\Delta$ до $p + \frac{1}{2}\Delta$ (было бы, может быть, надежнее, если бы мы интегрировали сначала по p' , а потом по q' , чем в обратном порядке, но результат будет один и тот же)

$$\begin{aligned} \int_{p - \frac{1}{2}\Delta}^{p + \frac{1}{2}\Delta} \delta(p - p') dp' &= 1 = c^2 \int_{-\frac{1}{2}\Delta}^{\frac{1}{2}\Delta} dz \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{(i/\hbar)zq} = \\ &= 2c^2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \sin(q\Delta/2\hbar) (dq/q) = c^2 \cdot 2\pi\hbar. \end{aligned}$$

Следовательно, $c = 1/\sqrt{2\pi\hbar} = 1/\sqrt{\hbar}$ и $\psi(p|q) = [1/\sqrt{2\pi\hbar}] e^{(i/\hbar)pq}$. Поэтому функции преобразования $f(q)$ и $f(p)$ ¹⁾ для вектора состояния f связаны следующими уравнениями:

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(q) e^{-(i/\hbar)pq} dq$$

и

$$f(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{(i/\hbar)pq} dp = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq' f(q') e^{2\pi i/\hbar (q-q')p}. \quad (2.6.24)$$

Это последнее уравнение встречалось раньше (см. уравнение 2.1.25) и будет очень подробно рассмотрено в гл. 4. Правая часть его является одной из форм интеграла Фурье.

¹⁾ Функция $f(p)$ называется обычно волновой функцией в p -представлении (ср. с примечанием на стр. 228). — Прим. ред.

Заслуживает упоминания физическое истолкование координатно-импульсной функции преобразования. Так как $|\psi(p|q)|^2$ является постоянной, то вероятность $|\psi(p|q)|^2 dq$ того, что частица, имеющая импульс p , находится между точками q и $q+dq$, не зависит от q , а вероятность $|\psi(p|q)|^2 dp$ того, что частица, находящаяся в точке q , имеет импульс, заключенный между p и $p+dp$, не зависит от p . Это является естественным следствием из соотношения неопределенности Гейзенберга, которое утверждает, что если p известно точно ($\Delta p \rightarrow 0$), то частица с одинаковой вероятностью может находиться где угодно ($\Delta q \rightarrow \infty$), и наоборот.

Заметим, во-вторых, что $e^{(i/\hbar)pq}$, рассматриваемая как функция координаты q , могла быть множителем, зависящим от координаты, для проходящей плоской волны $\exp[(2\pi i/\hbar)p(q-ut)]$ длины $\hbar/p$ и частоты $up/\hbar$, распространяющейся с некоторой скоростью u . Мы еще не изучили зависимость векторов состояния и функций преобразования от времени, но легко видеть, что соотношение $\lambda = (\hbar/p)$ является таким, которое мы рассмотрели [см. уравнение (2.6.1)], когда начали говорить о волнах и частицах. Рассматривая это соотношение, мы должны ожидать, что величина $(\hbar \times \text{частота}) = up$ будет соответствовать энергии частицы, хотя мы пока еще не в состоянии определить скорость распространения волн u .

Появление функции преобразования, связывающей состояние, в котором частица имеет импульс p , с ее положением q , имеет существенную связь с нашим предварительным рассмотрением волн и частиц. Для состояния, в котором частица может иметь либо импульс p , либо импульс p' , собственный вектор имеет вид $\frac{1}{2} \sqrt{2} [e(p) + e^{i\varphi} e(p')]$, а функция преобразования будет равна

$$\psi(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} [e^{(2\pi i/\hbar)pq} + e^{(2\pi i/\hbar)p'q+i\varphi}]$$

и представляет собой пространственную часть двух линейно наложенных друг на друга волн с различными длинами. Сюда включена произвольная разность фаз φ , значение которой можно определить при более точном задании состояния. Вероятность $|\psi|^2 dq$ нахождения частицы между q и $q+dq$ на этот раз не будет везде одной и той же, так как две части волны интерферируют, создавая узлы и пучности на протяжении волны. Так как мы теперь не уверены относительно импульсов, то можем уточнить положение частицы в пространстве.

Для состояния f , соответствующего широкому интервалу импульсов, как показано в уравнении (2.6.24), интерференция отдельных волн может быть такова, что $f(q)$ велико только вблизи q_0 (т. е. наиболее вероятное положение частицы — положение вблизи q_0) и состояние может быть таким, в котором положение частицы достаточно точно известно.

Функция Гамильтона и уравнение Шредингера. Одной из наиболее общих «постоянных движения» в классической динамике является полная энергия системы; действительно, она постоянна для всякой консервативной системы. Классическое исследование динамики таких систем, проведенное Гамильтоном, основано на применении «функции Гамильтона» $H(p, q)$ (см. стр. 270), которая равна полной энергии системы, кинетической плюс потенциальной, выраженной через координаты и сопряженные импульсы (в то время как функция L Лагранжа обычно равна разности между кинетической и потенциальной энергиями, функция Гамильтона H равна их сумме). Уравнения, связывающие скорость изменения во времени координат q_m с импульсами, имеют вид

$$\dot{q}_m = \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad (2.6.25)$$

что соответствует уравнениям (2.6.3). Уравнения движения, связывающие ускорения с силами, имеют тогда вид

$$\dot{p}_m = \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}. \quad (2.6.26)$$

Эти уравнения подробнее будут рассмотрены в гл. 3.

В квантовой механике вектор состояния $e(E)$ данной системы, имеющей определенную энергию E [$e(E)$, является собственным вектором, соответствующим собственному значению E энергии], может быть определен из уравнения

$$\mathfrak{H}(p, q) \cdot e(E) = Ee(E), \quad (2.6.27)$$

где оператор $\mathfrak{H}$ получается из классической функции Гамильтона посредством замены величин p_m и q_m соответствующими операторами. Правильный порядок операторов в различных членах не определяется полностью классической функцией $H(p, q)$, однако этот порядок обычно может быть установлен с помощью проб, как указано на стр. 226.

Конечно, нельзя и думать решить уравнение, содержащее абстрактные операторы и векторы состояния. Может оказаться легче решить соответствующее дифференциальное уравнение для функции преобразования $\psi(E|q)$, квадрат модуля которой измеряет плотность вероятности различных конфигураций системы, если мы знаем, что энергия равна E . Принимая во внимание уравнение (2.6.17), мы видим, что искомое уравнение имеет вид

$$\mathcal{H}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi(E|q) = E\psi(E|q), \quad (2.6.28)$$

где каждое p_m в выражении H заменено на операцию $(\hbar/i)(\partial/\partial q)$, действующую на $\psi(E|q)$. Это уравнение называется *уравнением Шредингера* для системы.

Уравнение Шредингера часто оказывается имеющим общий вид уравнения Гельмгольца (2.1.10), которое получается, когда из волнового уравнения выделена зависимость от времени. Чтобы яснее показать это, построим уравнение Шредингера для частицы, имеющей массу m и находящейся под действием поля с потенциалом V (сила $= -\text{grad } V$). Соответствующими координатами q являются декартовы координаты x, y, z . Кинетическая энергия равна $\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = T$, а кинетический потенциал $L = T - V$. Импульс p_x в соответствии с уравнением (2.6.3) равен $\partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$ и т. д. Выражая T и V через p и q , мы в конце концов получим классическую функцию Гамильтона

$$H(p, q) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z).$$

Уравнение Шредингера получается подстановкой вместо суммы квадратов импульсов произведения $-(\hbar^2)$ на сумму производных второго порядка (лапласиан):

$$\left[-\mathcal{H}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) + E \right] \psi(E|q) = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E - V \right] \psi(E|x, y, z) = 0$$

или

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x, y, z)] \psi = 0.$$

В областях, где $E > V$, ψ — осциллирующая функция; в областях, где $E < V$, решение изображается показательной функцией и будет либо убывать, либо безгранично возрастать по своей величине. Это следует сравнить с уравнением (2.1.10).

Мы можем, конечно, составить аналогичное уравнение для функции преобразования от E к импульсу p . Для этого в $H(p, q)$ вместо каждого q нужно подставить дифференциальный оператор $-(\hbar/i)(\partial/\partial p)$. Иногда это сделать труднее, так как V часто является более сложной функцией переменных q , чем T — переменных p [как, например, истолковать оператор, образованный из $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, когда мы заменим x через $-(\hbar/i)(\partial/\partial p_x)$ и т. д.]. Можно, конечно, сначала определить $\psi(E|q)$, а $\psi(E|p)$ найти с помощью преобразования Фурье, данного в уравнении (2.6.24). Более прямой путь, который можно продемонстрировать на уравнении Гамильтона для одной частицы, заключается в следующем:

$$H = T(p) + V(q); \quad T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2); \quad q = x, y, z.$$

Операция, соответствующая кинетической энергии, имеет выражение

$$\mathfrak{T}e(E) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \psi(E|p) dp_x dp_y dp_z e(p).$$

Для потенциальной энергии мы можем применить второе преобразование к векторам $e(p)$

$$\mathfrak{V} \cdot e(E) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{V} \cdot e(p') \psi(E|p') dp'_x dp'_y dp'_z$$

и на основании уравнения (2.6.20)

$$\mathfrak{V} \cdot e(p') = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} [e^*(p) \cdot \mathfrak{V} \cdot e(p')] e(p) dp_x dp_y dp_z,$$

где

$$\begin{aligned} [e^*(p) \mathfrak{V} \cdot e(p')] &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(p|q) V(q) \psi(p'|q) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y, z) e^{(i/\hbar)[x(p'_x - p_x) + y(p'_y - p_y) + z(p'_z - p_z)]} dx dy dz = V_{pp'}. \end{aligned}$$

Поэтому вместо дифференциального уравнения для $\psi(E|p)$ мы имеем интегральное уравнение

$$(1/2m)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \psi(E|p) + \int \int \int_{-\infty}^{\infty} V_{pp'} \psi(E|p') dp'_x dp'_y dp'_z = E \psi(E|p),$$

которое, конечно, полностью эквивалентно уравнению

$$\mathcal{H}\left(p, -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}\right) \psi(E|p) = E \psi(E|p).$$

Какое из двух уравнений легче решить, зависит от вида функции H . Если V может быть разложено на простые многочлены относительно q ,

то, по-видимому, проще решать дифференциальное уравнение; в противном случае предпочтительнее интегральное уравнение.

Гармонический осциллятор. Для иллюстрации приведенных общих принципов будет полезно рассмотреть квантовую механику одномерного гармонического осциллятора.

Сначала составим оператор, соответствующий функции Гамильтона H . Для частицы с массой m на пружине с постоянной жесткостью K функция Гамильтона выражается равенством

$$H(p, q) = (1/2m) p^2 + \frac{1}{2} K q^2,$$

так что уравнение для собственного вектора оператора энергии имеет вид

$$\mathfrak{H} \cdot e = \left[(p^2/2m) + \frac{1}{2} K q^2 \right] e(E) = E e(E). \quad (2.6.29)$$

Мы, конечно, могли бы составить соответствующее уравнение Шредингера

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \left(E - \frac{1}{2} K q^2 \right) \right] \psi(E; q) = 0$$

и решить его относительно ψ методом, который будет изложен в этой книге позже. Однако в настоящее время будет более поучительным найти сразу $e(E)$.

Отметим, что классическая функция Гамильтона может быть разложена на множители

$$H = \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} - i\omega q \right) \left(\frac{p}{m} + i\omega q \right); \quad \omega^2 = \frac{K}{m}.$$

Квантово-механический оператор не может быть так легко разложен на множители, но, следя за порядком p и q и пользуясь коммутационным соотношением $p \cdot q - q \cdot p = \hbar/i$, получим

$$\frac{1}{2} m \mathfrak{G}_- \cdot \mathfrak{G}_+ = \mathfrak{H} + \frac{1}{2} \hbar \omega; \quad \frac{1}{2} m \mathfrak{G}_+ \cdot \mathfrak{G}_- = \mathfrak{H} - \frac{1}{2} \hbar \omega,$$

где

$$\mathfrak{G}_+ = (p/m) + i\omega q \quad \text{и} \quad \mathfrak{G}_- = (p/m) - i\omega q = \mathfrak{G}_+^*.$$

Умножив еще раз на $[(p/m) \pm i\omega q]$ и преобразовав результаты, получим

$$\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{G}_+ = \mathfrak{G}_+ \cdot [\mathfrak{H} + \hbar \omega]; \quad \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{G}_- = \mathfrak{G}_- \cdot [\mathfrak{H} - \hbar \omega]. \quad (2.6.30)$$

Эти уравнения показывают, что если имеется собственный вектор $e(E)$ оператора $\mathfrak{H}$ с собственным значением E , то вектор $\mathfrak{G}_- \cdot e(E)$ является также собственным вектором оператора $\mathfrak{H}$ с собственным значением $(E + \hbar \omega)$ [т. е. равен $A e(E + \hbar \omega)$, где A — некоторая нормирующая постоянная], а вектор $\mathfrak{G}_+ \cdot e(E)$ будет также собственным вектором для $\mathfrak{H}$ с собственным значением $(E - \hbar \omega)$ [т. е. равен $B e(E - \hbar \omega)$]. Это означает, что при наличии одного собственного значения E оператора $\mathfrak{H}$ существует также бесконечная последовательность собственных значений $(E + n\hbar \omega)$, где n — любое целое положительное или отрицательное число.

Этот результат является довольно неожиданным, так как в классической механике мы не могли ожидать возможности отрицательных значений энергии. Более тщательное изучение уравнений (2.6.30) и связанных с ними утверждений показывает, что мы можем избавиться от несприятных отрицательных энергий, если значение E выберем осторожно.

Дело в том, что мы должны были сказать, что вектор $\mathcal{G}_- \cdot \mathbf{e}(E)$ является собственным вектором с собственным значением $(E - \hbar\omega)$, *если только вектор $\mathcal{G}_- \cdot \mathbf{e}(E)$ не равен нулю*. Поэтому, если мы не должны допускать значения энергии меньшие, чем некоторое минимальное значение $E_{\min}$, мы должны иметь

$$\mathcal{G}_- \cdot \mathbf{e}(E_{\min}) = 0$$

или

$$0 = \mathcal{G}_+ \cdot \mathcal{G}_- \cdot \mathbf{e}(E_{\min}) = \left(\mathfrak{H} - \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \cdot \mathbf{e}(E_{\min}) = \left(E_{\min} - \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \mathbf{e}(E_{\min}).$$

В действительности такой выбор является не просто более удобным; только такой выбор имеет физический смысл. В самом деле, если бы допустили отрицательное собственное значение для энергии, квадрат соответствующего собственного вектора $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}$ должен был бы быть *отрицательным*. Так как отрицательные вероятности не имеют смысла, то допустимым является *только* указанный выше выбор.

Следовательно, наименьшее собственное значение энергии равно $\frac{1}{2} \hbar\omega$ и последовательность допустимых значений энергии дается равенством

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

различные собственные векторы могут все быть выражены через наинизший $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(E_{\min})$, где $\mathfrak{H} \cdot \mathbf{e}_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \mathbf{e}_0$.

Мы должны теперь нормировать собственные векторы так, чтобы было $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} = 1$. Предположим, что $\mathbf{e}_0^* \cdot \mathbf{e}_0 = 1$. Ближайший вектор $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}(E_{\min} + \hbar\omega) = A_1 \mathcal{G}_+ \cdot \mathbf{e}_0$. Для определения A_1 полагаем

$$1 = \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_1 = |A_1|^2 \mathbf{e}_0^* \cdot \mathcal{G}_- \cdot \mathcal{G}_+ \cdot \mathbf{e}_0 = \frac{2}{m} |A_1|^2 \mathbf{e}_0^* \cdot \left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \cdot \mathbf{e}_0 = \frac{2\hbar\omega}{m} |A_1|^2.$$

Поэтому $\mathbf{e}_1 = i(m/2\hbar\omega)^{\frac{1}{2}} \mathcal{G}_+ \cdot \mathbf{e}_0$, где $\mathfrak{H} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{3}{2} \hbar\omega \mathbf{e}_1$.

Продолжая рассуждать так же и дальше, мы покажем, что

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{i^n n!} \left[i \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} \mathcal{G}_+ \right]^n \cdot \mathbf{e}_0, \quad \text{где } \mathfrak{H} \cdot \mathbf{e}_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \mathbf{e}_n. \quad (2.6.31)$$

Таким образом, мы решили задачу определения собственных значений и собственных векторов этого оператора Гамильтона. Средние значения других функций от операторов p и q могут быть определены с помощью операторов $\mathcal{G}$.

Уравнение для наинизшей функции преобразования может быть получено заменой уравнения $\mathcal{G}_- \cdot \mathbf{e}_0 = 0$ дифференциальным уравнением для $\psi_0(q)$

$$\frac{\hbar}{im} \frac{d\psi_0}{dq} - i\omega q \psi_0 = 0,$$

которое имеет решение

$$\psi_0 = \left[\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right]^{1/4} e^{-\frac{1}{2} x^2}, \quad x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2 dq = 1.$$

Дифференциальный оператор, соответствующий оператору $\mathcal{G}_+$, имеет вид

$$G_+ = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{m}} \left[\frac{d}{dx} - x \right].$$

Воспользовавшись уравнением (2.6.31) и переведя его в уравнение для n -й волновой функции, имеем

$$\psi_n = \left[\frac{m\omega}{\pi\hbar 4^n (n!)^2} \right]^{1/4} \left[\frac{d}{dx} - x \right]^n e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dq = 1, \quad q = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} x.$$

Таким образом, мы без особых трудностей получили выражения для различных волновых функций.

Этот пример, возможно, показал, что прямые действия с операторами и собственными функциями в конце концов не трудны, а в некоторых случаях эти действия могут быть даже легче, чем вычисление сначала волновых функций.

Кстати, соотношение неопределенности может подсказать нам, что наше состояние минимальной энергии не может иметь места при нулевой энергии, так как при энергии, равной нулю, обе величины, p и q , были бы равны нулю; но в силу соотношения неопределенности невозможно одновременно знать точные значения p и q . Наименьшее количество энергии должно быть настолько большим нуля, чтобы произведение возможного изменения q на амплитуду колебания p было не меньше чем $\hbar$. Подставив необходимые значения, мы увидим, что минимум энергии не может быть меньше чем $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

Зависимость от времени. Чтобы дополнить наше рассмотрение квантовой механики, теперь необходимо ввести переменную времени t , что позволит развить кинематику, а в конце и динамику, так что мы сможем формулировать уравнения движения в квантовой механике.

В классической механике время появляется двумя существенно различными путями. В случае консервативных полей время является только неявной переменной, т. е. употребляется как *параметр*, с помощью которого может быть описано движение. В самом деле, в случае двух или трех измерений время может быть полностью исключено, и движение может быть описано заданием траектории. Пространственные координаты и временная координата играют не одинаковые роли. Тем не менее в релятивистской механике время и пространство входят в теорию на равных правах, так как при преобразовании Лоренца пространство и время могут перемешиваться. Поэтому в настоящей релятивистской теории переменная времени должна истолковываться совершенно иначе, чем в нерелятивистской теории. Это различие сохраняется, когда мы переходим к квантовой механике.

Время также появляется и как *явная* переменная, если силовое поле неконсервативно, или если силовое поле меняется с течением времени (например, поле, вызванное другой движущейся системой), или, наконец, при формулировке начальных условий. Во всех этих случаях временная переменная нужна для описания силового поля, действующего на систему, так что временная координата и пространственные координаты употребляются аналогичным образом.

Это раздвоение появляется также и в квантовой механике. Например, в соответствии с $\Delta p_x \Delta x \approx \hbar$ имеет место соотношение неопределенности

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar, \quad (2.6.32)$$

где ΔE измеряет неопределенность энергии, а Δt — неопределенность во вре-

мени. Подобного соотношения можно было бы ожидать на основе релятивистских требований; в самом деле, здесь в точности повторяется рассуждение Де Бройля, употребленное им, когда он открыл соотношение $\lambda = h/p$ из $v = E/h$. По аналогии с нашим выводом уравнения коммутатора $[p_x, \mathcal{E}] = \hbar/i$ из соотношения неопределенности (2.6.2) можно было бы попытаться из уравнения (2.6.32) получить коммутатор между оператором, соответствующим энергии, и оператором, соответствующим времени. Но это рассуждение не было бы точным, так как соотношение неопределенности (2.6.32) применимо *только тогда, когда время входит как явная переменная*.

Иначе говоря, когда время не входит явно в описание силового поля, то время на самом деле является параметром. Измерение его наблюдателем (например, с помощью наблюдения за часами) никак не отражается на рассматриваемой системе. Это измерение не может повлиять, например, на энергию такой системы. Но если время явно содержится в описании силового поля, то неопределенность во времени влечет за собой неопределенность силы, а следовательно, и энергии.

В рассмотренном примере связи между ΔE и Δt рассматривается измерение времени движения между двумя точками 1 и 2 с помощью волны, например световой волны. Использование волны, частота (а следовательно, и энергия) которой точно известна, потребовало бы бесконечной протяженности волны. Время движения было бы поэтому полностью неизвестным ($\Delta t \rightarrow \infty$, $\Delta E \rightarrow 0$). Точность измерения времени движения возрастает, если воспользоваться заслонкой, помещенной в точке 1, которая в некоторый момент, скажем при $t = 0$, открывается, и второй заслонкой (в действительности применяются зеркала), помещенной в точке 2, которая должна открыться через некоторое время. Легко видеть, что измеренная скорость есть скорость волнового пакета ширины во времени, равной Δt , где Δt промежуток времени между действием двух заслонок. Однако такой волновой пакет должен состоять из наложенных друг на друга волн с различными частотами (интеграл Фурье). Эти частоты размазаны в интервале, примерно равном $1/\Delta t$, так что $\Delta \omega \Delta t \approx 1$ или $\Delta E \Delta t \approx \hbar$. Ясно, что функция Гамильтона, описывающая этот опыт, *зависит от времени*; временная переменная требуется для описания взаимодействия между материей (заслонки) и излучением. Характерно, что зависимость от времени обусловлена тем фактом, что все взаимодействующие системы (например, оператор заслонки) не включены в рассмотрение.

Резюмируя, мы видим, что соотношение неопределенности (2.6.32) применяется только тогда, когда функция Гамильтона явно зависит от времени. Если зависимость от времени неявная, это соотношение не применимо, и само время может рассматриваться как параметр. Это янусоподобное поведение отражается в том факте, что вывод уравнения Шрёдингера, зависящего от времени, может различаться в зависимости от обстоятельств. К счастью для релятивистских обобщений квантовой механики можно найти единый вывод, пригодный в обоих случаях.

Время как параметр. В интересах простоты и ясности лучше рассмотреть нерелятивистский случай с консервативными полями, т. е. те случаи, когда классическая нерелятивистская функция Гамильтона не зависит от времени, так что временная переменная может быть принята за параметр. В гл. 1 (стр. 88) мы уже показали, что изменение с течением времени направления вектора состояния может быть получено с помощью унитарного оператора. Мы показали там, что

$$e^{-(i/\hbar)\mathcal{H}t'} \cdot e(t) = e(t + t'),$$

где оператор $\mathfrak{H}$ пока не определен. В самом деле, при построении кинематики выбор $\mathfrak{H}$ будет одним из решающих шагов. Здесь мы написали $-(\mathfrak{H}/\hbar)$ вместо $\mathfrak{H}$ для того, чтобы согласовать это уравнение с уравнением (2.6.11), связывающим $\mathfrak{p}$ и q . В гл. 1 мы также показали, что

$$\mathfrak{H} \cdot e = i\hbar \frac{\partial e}{\partial t}, \quad (2.6.33)$$

где мы также ввели дополнительный множитель $-(1/\hbar)$. Это уравнение аналогично уравнению (2.6.12) для результата действия оператора $\mathfrak{p}$ на вектор $e(q)$. Но имеется существенное различие, позволяющее нам написать здесь $\partial e/\partial t$, в то время как такой предельный переход в (2.6.12) был недопустим. В уравнении (2.6.12), дающем результат действия оператора $\mathfrak{p}$, мы имеем дело с собственными векторами $e(q)$ оператора q , так что каждый $e(q)$ перпендикулярен к другим, и это не давало возможности взять предел. В настоящем случае t — только параметр; e не является его собственным вектором, так как t не является оператором. Все собственные векторы системы с оператором $\mathfrak{H}$ являются непрерывными функциями параметра t и вращаются в абстрактном пространстве при возрастании t . Следовательно, мы здесь можем говорить о производной вектора e по t . Оператор $(\mathfrak{H}/i\hbar) dt$ вызывает бесконечно малое вращение вектора от его направления в момент t до его направления в момент $t + dt$, и это различие направлений непрерывно уменьшается, когда dt стремится к нулю.

Кинематика в классической механике занимается изменениями с течением времени переменных, определяющих положение, таких, как, например, q . Для того чтобы иметь возможность получить необходимые аналогии в квантовой механике и таким образом определить $\mathfrak{H}$, нам нужно рассмотреть изменение операторов с течением времени. В нашем изложении квантовой механики в этой главе до сих пор предполагалось, что оператор не зависит от времени, поскольку он действует на свои собственные векторы, так что уравнение $\mathfrak{F} \cdot f = f f$ дает то же самое собственное значение f для всех значений времени (пока $\mathfrak{F}$ явно не зависит от t).

Во многих случаях вектор состояния сам меняется с течением времени таким способом, как мы сейчас рассматривали. Однако мы можем также предполагать, что вектор состояния не зависит от времени, и возложить ответственность за все изменения с течением времени на оператор. Эта формальная замена, конечно, не должна влиять на измеряемые величины, такие, например, как собственные значения f или коэффициенты разложения, определенные в уравнении (2.6.20). Другими словами, оператор $\mathfrak{U}(t)$, содержащий время как параметр, может быть получен из постоянного оператора $\mathfrak{U}(0)$ с помощью уравнения (2.6.33) и требования, чтобы величина

$$f^*(t) \cdot \mathfrak{U}(0) \cdot f(t) = f^*(0) \cdot \mathfrak{U}(t) \cdot f(0) = f^*(0) \cdot e^{-(i/\hbar)\mathfrak{H}t} \mathfrak{U}(0) e^{-(i/\hbar)\mathfrak{H}t} \cdot f(0)$$

не зависела от t . Следовательно, равенство

$$\mathfrak{U}(t) = e^{(i/\hbar)\mathfrak{H}t} \mathfrak{U}(0) e^{-(i/\hbar)\mathfrak{H}t} \quad (2.6.34)$$

и дает зависимость $\mathfrak{U}(t)$ от t , если мы должны рассматривать этот оператор как зависящий от времени.

Предположив, что t становится бесконечно малым dt , мы получим уравнение, связывающее скорость изменения оператора $\mathfrak{U}(t)$ с течением времени с неизвестным пока оператором $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{U}(dt) = \left[1 + \frac{i}{\hbar} \mathfrak{H} dt \right] \mathfrak{U}(0) \left[1 - \frac{i}{\hbar} \mathfrak{H} dt \right]$$

или

$$\hat{\mathfrak{H}} \cdot \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \cdot \hat{\mathfrak{H}} = [\hat{\mathfrak{H}}, \mathfrak{A}] = \frac{\hbar}{i} \frac{\mathfrak{A}(dt) - \mathfrak{A}(0)}{dt} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} \mathfrak{A}. \quad (2.6.35)$$

Из того, как получено это уравнение, видно, что выражение $d\mathfrak{A}/dt$ можно рассматривать как скорость изменения с течением времени оператора $\mathfrak{A}$, если мы оставляем векторы состояния постоянными и считаем оператор $\mathfrak{A}$ переменным во времени; это выражение можно также рассматривать как оператор, соответствующий классической скорости изменения динамической переменной A , если оставить операторы постоянными, а векторы состояния изменять.

Например, оператор, соответствующий скорости изменения

q_m координаты q_m , может быть найден из (2.6.35):

$$\dot{q}_m = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathfrak{H}}, q_m] = \frac{\partial \hat{\mathfrak{H}}}{\partial p_m}; \quad (2.6.36)$$

здесь для получения последнего выражения мы воспользовались уравнением (2.6.8). Но это последнее выражение является как раз тем, которое нужно для определения природы оператора $\hat{\mathfrak{H}}$. В пределе, при больших энергиях и импульсах, это операторное уравнение сводится к классическим уравнениям в обычных переменных. Это может быть верно, если оператор $\hat{\mathfrak{H}}$ получается из функции Гамильтона для системы заменой входящих в нее переменных p и q соответствующими операторами. Другими словами, если $\hat{\mathfrak{H}}$ является оператором Гамильтона уравнения (2.6.27), то уравнение (2.6.36) соответствует классическому уравнению (2.6.25).

Этот результат можно перепроверить, так как если в уравнении (2.6.35) положить $\mathfrak{A} = p_m$ и воспользоваться равенством (2.6.8), то мы опять получим

$$\dot{p}_m = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathfrak{H}}, p_m] = - \frac{\partial \hat{\mathfrak{H}}}{\partial q_m}, \quad (2.6.37)$$

что соответствует классическому уравнению (2.6.26).

Таким образом, можно сделать вывод, что операторные уравнения движения в квантовой механике имеют в точности ту же самую форму, что и их классические аналоги, но с заменой классических переменных p и q соответствующими операторами $\hat{p}$ и $\hat{q}$. Например, уравнение движения Ньютона принимает вид $m(d^2q/dt^2) = -(\partial \mathfrak{H}/\partial q)$. Взяв средние значения для любого из этих уравнений, убеждаемся непосредственно, что классическая ньютонова орбита является в точности *средней* для всех возможных орбит квантовой механики¹⁾. Другими словами, влияние соотношения неопределенности состоит во введении флуктуаций от классической орбиты. При осреднении они устраняются. Конечно, среднее значение квадратов отклонений не равно нулю и потому может быть наблюдаемо, но в пределе при больших энергиях неопределенность становится ничтожной и квантовая механика незаметно переходит в классическую механику. Это утверждение известно как *принцип соответствия*. Двойственным ему для уравнений является утверждение, что в пределе коммутатор $(i/\hbar)[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ переходит в классическую скобку Пуассона (A, B) . Из соответствия между коммутатором и скобкой Пуассона следует, что *каждая классическая постоянная движения является также квантово-механической постоянной движения*.

¹⁾ Это утверждение не совсем точное. При усреднении правой части уравнения получим $-\partial \mathfrak{H}/\partial q$, что, вообще говоря, не совпадает с $-\partial \bar{q}/\partial q$. — Прим. ред.

Мы, конечно, можем пожелать иметь дело с функциями преобразования вместо собственных векторов. Эти функции также изменяются с течением времени; в соответствии с уравнением (2.6.33) мы имеем зависящее от времени уравнение Шредингера

$$\mathcal{H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\psi(t, q) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, q), \quad (2.6.38)$$

где $H(p, q)$ — классическая функция Гамильтона, и вектор состояния, зависящий от времени, выражается интегралом

$$\mathbf{e}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, q) \mathbf{e}(q) dq.$$

Для стационарных состояний имеем, очевидно,

$$\mathfrak{H} \cdot \mathbf{e}(E) = i\hbar \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = E \mathbf{e}(E),$$

так что

$$\mathbf{e}(E, t) = \mathbf{e}(E, 0) e^{-i(E/\hbar)t}, \quad (2.6.39)$$

где E — собственное значение энергии. Таким образом, зависимость от времени для стационарного состояния является простой гармонической зависимостью с частотой, равной значению энергии, деленному на $\hbar$, так что соотношение Планка $E = h\nu$, данное в (2.6.1), удовлетворяется.

Таким образом, мы показали, что функция преобразования $\psi(E, q)$ является «волновой функцией», о которой мы говорили в начале этого параграфа. Квадрат величины ее дает плотность вероятности различных конфигураций системы, а интегралы вида $\int \bar{\psi} \mathcal{H} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q \right] \psi dq$ дают средние значения последовательности измерений динамической переменной $B(p, q)$, когда система находится в состоянии, соответствующем ψ . Эта плотность вероятности и эти средние значения исчерпывают все, что может быть получено экспериментально для системы. Для больших систем, имеющих значительную энергию, результаты будут очень мало отличаться от точных предсказаний классической динамики, но для атомных систем неопределенности пропорционально велики и результаты могут существенно отличаться от классических.

Мы показали также, что эти функции преобразования имеют волновые свойства и им сопутствуют интерференционные эффекты, которые влияют на плотность вероятности. Волновое число для волны в данном направлении равно произведению $1/\hbar$ на компоненту импульса в этом направлении, а частота волны равна произведению $1/\hbar$ на энергию системы, как указано в соотношении (2.6.1). Только применяя аппарат теории абстрактных векторов и операторов, а также пользуясь функциями преобразования, возможно построить теорию атомной динамики, которая соответствовала бы экспериментально установленным фактам, например таким, как необходимые неопределенности, возникающие при наблюдениях атомных систем.

Функция Гамильтона, зависящая от времени. Обсудив случай, когда время не входит явно в выражение энергии H , причем тогда время играет скорее роль параметра, чем оператора, рассмотрим теперь случай, когда H зависит явно от времени t . В этом случае время, применяемое при описании изменения энергии, должно рассматриваться скорее как оператор (так же, как и координаты), чем как параметр, удобный для того, чтобы следить за развитием движения системы.

Различие становится яснее с точки зрения квантовой механики, чем с классической точки зрения, так как в квантовой механике мы можем отличать оператор, соответствующий времени, от непрерывного распределения его собственных значений. В классической механике мы проводим различие, обозначая явно входящее время через q_t , так что полная энергия является функцией от $q_t, q_1, q_2 \dots q_n$ и импульсов $p_1, p_2 \dots p_n$, которую мы формально обозначаем через $H(q_t, p, q)$.

Эта функция дает надлежащие классические уравнения движения (2.6.25) и (2.6.26) для $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n$ и $\dot{p}_1, \dot{p}_2 \dots \dot{p}_n$, но не дает соответствующей совокупности уравнений для q_t . На самом деле мы еще не рассматривали сопряженного импульса p_t . Таким образом в случаях когда H явно зависит от времени, мы должны изменить функцию Гамильтона так, чтобы новая функция Гамильтона $H(p_t, q_t; p, q)$ удовлетворяла уравнению

$$\dot{q}_t = \frac{dq_t}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_t}.$$

Но прежде чем решать вопрос о форме H , мы должны выяснить, какой смысл имеет q_t . Так как q_t является явным временем, то надо ожидать, что в классической динамике оно будет пропорционально временному параметру t и что в действительности $dq_t/dt = 1$. Следовательно, новая функция Гамильтона Θ должна быть связана с полной энергией $H(q_t; p, q)$ и с новым импульсом p_t уравнением

$$\Theta(p_t, q_t; p, q) = H(q_t; p, q) + p_t. \quad (2.6.40)$$

Тогда уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial p_m} = \dot{q}_m, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial q_m} = -\dot{p}_m, \quad m = t, 1, 2, \dots, n. \quad (2.6.41)$$

Можно показать, что полная скорость изменения Θ с течением времени (обусловленная изменением всех p и всех q с течением времени) равна нулю, так как, пользуясь уравнениями (2.6.41), (2.6.25) и (2.6.26), имеем:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial q_t} \dot{q}_t + \frac{\partial \Theta}{\partial p_t} \dot{p}_t + \sum_m \left[\frac{\partial \Theta}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \Theta}{\partial p_m} \dot{p}_m \right] = 0.$$

Таким образом, новая функция Гамильтона остается постоянной, хотя полная энергия H явно изменяется с течением времени. Кроме того, можно добавить подходящее слагаемое так, чтобы сделать эту постоянную равной нулю: $\Theta = H + p_t = 0$. Это значит, что величина p_t , сопряженная переменная к явному времени q_t , в точности равна значению полной энергии, взятому со знаком минус, $p_t = -E$ (мы пишем E , так как H должно быть выписано как явная функция от q_t и от других p и q , в то время как E является численным значением, изменяющимся с течением времени). Таким образом, явное время является сопряженным к значению энергии, взятому со знаком минус.

Выражения классических скобок Пуассона можно также обобщить, включив в них новую пару переменных

$$(u, v) = \sum_m \left[\frac{\partial u}{\partial p_m} \frac{\partial v}{\partial q_m} - \frac{\partial u}{\partial q_m} \frac{\partial v}{\partial p_m} \right], \quad m = t, 1, \dots, n.$$

Скобка Пуассона, содержащая функцию Гамильтона, может быть вычислена с помощью уравнений (2.6.41)

$$\begin{aligned} (\Theta, v) &= \sum_m \left[\frac{\partial \Theta}{\partial p_m} \frac{\partial v}{\partial q_m} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_m} \frac{\partial v}{\partial p_m} \right] = \\ &= \sum_{m=1}^n \left[\frac{\partial v}{\partial q_m} \frac{dq_m}{dt} + \frac{\partial v}{\partial p_m} \frac{dp_m}{dt} \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial q_t} + \frac{\partial \Theta}{\partial q_t} \frac{\partial v}{\partial p_t} \right] = \frac{dv}{dt}, \end{aligned} \quad (2.6.42)$$

так как $\partial v / \partial q_t = \partial v / \partial t$ и $\partial \Theta / \partial q_t = 0$.

Введение явного времени и его сопряженного импульса в квантовую механику теперь осуществляется непосредственно. Мы вводим оператор q_t , имеющий несчетную, непрерывную последовательность собственных значений t , которые *могут* быть использованы для задания частных состояний, представляющих интерес. Сопряженный оператор p_t имеет собственные значения, равные допускаемым значениям энергии, взятым со знаком минус. Эти операторы входят наравне с операторами для различных координат и импульсов конфигураций. Коммутатор равен

$$[p_t, q_t] = \frac{\hbar}{i},$$

так что соответствующее соотношение неопределенности имеет вид $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$. Операторы p_t и q_t перестановочны со всеми другими p и q . Уравнения (2.6.8) и (2.6.11) также остаются в силе для этой пары.

Оператор Гамильтона $\mathfrak{H}$ получается теперь заменой в функции полной энергии величин p_m и q_m соответствующими им операторами, причем явное время заменяется оператором q_t ; значит,

$$\mathfrak{H} = H(q_t; p, q) + p_t. \quad (2.6.43)$$

Унитарный оператор, преобразующий вектор состояния для момента t в вектор состояния для момента t' , имеет форму $\exp[(i/\hbar) \mathfrak{H}(t' - t)]$ [см. уравнение (2.6.11)]. Уравнение движения вектора состояния e принимает вид

$$\mathfrak{H} \cdot e(t) = i\hbar \lim \left[\frac{e(t + dt) - e(t)}{dt} \right], \quad (2.6.44)$$

аналогичный уравнению (2.6.12), а уравнение движения для оператора $\mathfrak{H}$ таково:

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = \frac{\hbar}{i} \frac{d\mathfrak{H}}{dt}.$$

В частности,

$$q_t = \frac{i}{\hbar} [\mathfrak{H}, q_t] = \frac{i}{\hbar} [p_t, q_t] = \mathfrak{Z},$$

где $\mathfrak{Z}$ — постоянный оператор, преобразующий каждый вектор в самого себя (в гл. 1 мы называли его идемпотентом).

Мы теперь можем перейти к свойствам функций преобразования для систем в случае, когда функция Гамильтона явно зависит от времени. Функцию преобразования от q к E (часто называемую волновой функцией Шредингера) мы по-прежнему определяем равенством

$$e(0) = \int \dots \int \psi(0 | q, t) dt dq_1 \dots dq_n e(q, t),$$

где t — собственное значение оператора q_t , q_m — собственное значение оператора q_m и 0 — собственное значение для оператора $\mathfrak{H}$, данного в уравнении (2.6.43).

Раньше было показано, что оператор $\mathbf{p}_m$, действующий на вектор $\mathbf{e}$, соответствует дифференциальному оператору $(\hbar/i)(\partial/\partial q_m)$, действующему на функцию преобразования; точно так же здесь оператор $\mathbf{p}_i$ соответствует дифференциальному оператору $(\hbar/i)(\partial/\partial t)$, действующему на ψ . Дифференциальное уравнение для ψ , соответствующее векторному уравнению $\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e} = 0$, имеет вид

$$\mathcal{H}\left(t; \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi(q, t) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = 0. \quad (2.6.45)$$

Это уравнение называется зависящим от времени уравнением Шредингера; его следует сравнить с (2.6.38), где время рассматривалось просто как параметр. Как мы видим, оно получается в результате закономерного расширения описанного ранее метода замены классического уравнения для зависящей от времени функции Гамильтона уравнением квантовой механики для волновой функции ψ . Величина $|\psi|^2$ есть плотность вероятности данной конфигурации в данный момент времени. Среднее значение плотности тока частицы в любой точке, как можно видеть, пропорционально величине

$$\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} = \int \dots \int \bar{\psi} \frac{\hbar}{i} \text{grad } \psi dq_1 \dots dq_n,$$

за исключением того, что эта величина не будет обязательно действительной. Тем не менее мы можем теперь подсчитать, каков ток.

Частица в электромагнитном поле. Например, для частицы с зарядом e (заряд электрона равен $-e$) и массой m , движущейся в электромагнитном поле с потенциалами $\mathbf{A}$ и φ , сила, действующая на частицу [на основании уравнения (2.5.12)], равна $e[\mathbf{E} + (1/cm)\mathbf{p} \times \mathbf{H}]$, и полная энергия (нерелятивистская) частицы равна

$$H(\mathbf{p}, q) = \frac{1}{2m} \left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] + e\varphi,$$

как будет показано в ближайшей главе (стр. 283). Чтобы получить дифференциальное уравнение для ψ , подставим $(\hbar/i)(\partial/\partial q)$ вместо каждого $\mathbf{p}$ в выражении H . Здесь нет неясности в порядке множителей в члене $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$; если $\text{div } \mathbf{A} = 0$, тогда правильный порядок есть $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$. Уравнение, полученное для ψ , имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{e\hbar}{imc} \mathbf{A} \cdot \text{grad } \psi + \left[\frac{e^2 A^2}{2mc^2} + e\varphi \right] \psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (2.6.46)$$

Как и в уравнении (2.6.45), в этом уравнении явно содержится мнимая величина i . Это означает, что уравнение для комплексной сопряженной функции $\bar{\psi}$ имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{e\hbar}{imc} \mathbf{A} \cdot \text{grad } \bar{\psi} + \left(\frac{e^2 A^2}{2mc^2} + e\varphi \right) \bar{\psi} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = 0.$$

Если $e\psi\bar{\psi}$ является для электромагнитных уравнений плотностью заряда ρ , то плотность тока $\mathbf{J}$ должна быть такой, чтобы выполнялось уравнение неразрывности $(\partial \rho / \partial t) + \text{div } \mathbf{J} = 0$. Применим уравнения для ψ и $\bar{\psi}$, чтобы определить $\mathbf{J}$. Умножив уравнение для ψ на $\bar{\psi}$, а уравнение для $\bar{\psi}$ — на ψ и вычтя результаты, получим

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\bar{\psi} \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \bar{\psi}) - \frac{ie\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \text{grad } (\bar{\psi} \psi) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\psi} \psi) = 0.$$

Но на основе правил векторных операций мы можем показать, что

$$\bar{\psi} \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \bar{\psi} = \operatorname{div} (\bar{\psi} \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \bar{\psi})$$

и если $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то $\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} (\bar{\psi} \psi) = \operatorname{div} (\mathbf{A} \bar{\psi} \psi)$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} (e \bar{\psi} \psi) + \operatorname{div} \left[\frac{e \hbar}{2im} (\bar{\psi} \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \bar{\psi}) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} \bar{\psi} \psi \right] = 0$$

и если $\rho = e \bar{\psi} \psi$, то плотность тока оказывается равной

$$\mathbf{J} = \frac{e \hbar}{2im} (\bar{\psi} \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \bar{\psi}) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} \bar{\psi} \psi. \quad (2.6.47)$$

Это выражение вещественно и, так как ρ и $\mathbf{J}$ удовлетворяют уравнению неразрывности, можно предполагать, что они являются выражениями, которые можно подставить в уравнения Максвелла вместо зарядов и тока. Отметим, что эти выражения являются лишь вероятностными плотностями, а не «истинными плотностями» в классическом смысле. Тем не менее этот вывод находится в согласии с нашим новым пониманием того, что является наблюдаемым; так как «истинные» положения и импульсы отдельных электронов мы не можем знать точно, то из волновой функции должны вытекать пригодные выражения только для плотностей. Как сказано в начале этого параграфа, они содержат квадраты модуля величины ψ , характеризующие квантовые плотности и вероятности.

Относительность и спин. Соотношение между четырьмя импульсными операторами для отдельной частицы и соответствующими дифференциальными операторами, действующими на функцию преобразования $\psi(\mathbf{q}, t)$ (пустое место перед вертикальной чертой обозначает, что ψ можно взять для любого собственного вектора и собственного значения)

$$p_m \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_m}, \quad q_m = x, y, z, t, \quad (2.6.48)$$

является соотношением между четырехмерными векторами, которое может удовлетворять требованиям специальной теории относительности. Тем не менее зависящее от времени уравнение Шредингера (2.6.46) не является инвариантом преобразования Лоренца, даже в случае свободного движения, когда $\mathbf{A}$ и φ равны нулю. Пространственные операторы содержатся в выражениях вторых производных, а оператор времени — в выражении первой производной, и никакая комбинация p_x^2 , p_y^2 , p_z^2 и $p_t = -E$ не может быть инвариантом преобразования Лоренца.

Трудность дежит, конечно, в том, что выражение, которое мы применяли для $H(p, q)$ в случае частицы, находящейся в электромагнитном поле, не было релятивистски инвариантным, но являлось просто первым приближением к правильной релятивистской функции Гамильтона. Эта величина может быть получена, если, комбинируя четырехмерный вектор $p_x, p_y, p_z, -(i/c)H$ (см. стр. 99) с четырехмерным вектором $A_x, A_y, A_z, i\varphi$ (см. стр. 203), составить инвариантное относительно преобразования Лоренца уравнение

$$-\left(p_x - \frac{e}{c} A_x\right)^2 - \left(p_y - \frac{e}{c} A_y\right)^2 - \left(p_z - \frac{e}{c} A_z\right)^2 + \left(\frac{1}{c} H - \frac{e}{c} \varphi\right)^2 = m^2 c^2. \quad (2.6.49)$$

Отсюда можно получить релятивистское выражение для функции Гамильтона

$$H(p, q) = e\varphi + c \sqrt{m^2 c^2 + p^2 - (2e/c) \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + (e/c)^2 A^2}. \quad (2.6.50)$$

Это и есть та функция, которая должна быть превращена в дифференциальный оператор, чтобы получить правильное зависящее от времени уравнение Шредингера.

Однако этот результат ставит только более трудную задачу: как интерпретировать оператор, содержащий квадратный корень из второй производной? Понятно, мы могли бы разложить радикал в ряд по возрастающим степеням $1/m^2c^2$ (функция Гамильтона на стр. 245 представляет собой два первых члена такого ряда с отброшенным постоянным слагаемым mc^2), но такой ряд содержал бы все производные высших порядков функции ψ и дал бы чрезвычайно «неаккуратное» уравнение, если даже можно было бы надеяться на его сходимость. Возможное решение заключается в том, чтобы воспользоваться уравнением (2.6.49) в том виде, как оно написано, помня, что величина $-(1/c)H$ является четвертой компонентой вектора импульса и должна быть заменена через $(\hbar/ic)(\partial/\partial t)$. Если поля равны нулю, это приводит к уравнению

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi = 0, \quad (2.6.51)$$

которое является *уравнением Клейна — Гордона* [см. (2.1.27)].

Это уравнение для функции преобразования является релятивистски инвариантным, но имеет тот недостаток, что если $e|\psi|^2$ есть плотность заряда, то величина, данная в (2.6.47), не является плотностью тока. В самом деле, интеграл от $|\psi|^2$, распространенный на все пространство, не будет больше всегда постоянным, как это имеет место для решения уравнения (2.6.46), так что не ясно, будет ли $e|\psi|^2$ плотностью заряда. Мы отложим до следующей главы разыскание точных выражений для ρ и для J ; необходимо только установить здесь, что уравнение Клейна — Гордона не является точным уравнением для электронов или для любой частицы со спином.

Зависящее от времени уравнение Шредингера (2.6.46) является вполне удовлетворительным для частиц, движущихся медленно по сравнению со скоростью света, но оно не учитывает двух обстоятельств: относительности и спина. Мы знаем, что электрон имеет спин, и рассмотрели в § 1.6 и 1.7 свойства спиновых операторов. Эти спиновые операторы соответствуют дополнительной степени свободы электрона, которой, по-видимому, отвечают новые координата и импульс. Следовательно, если бы мы пожелали, мы могли подсчитать функцию преобразования, содержащую эту новую координату, и получить выражение для оператора спина посредством дифференцирования по этой координате. Так как правила действий со спиновым оператором очень просты, обычно легче иметь дело с вектором состояния.

Поэтому функции, употребляемые здесь, являются смешанными, состоящими из функций преобразования для пространственных компонент и компоненты времени, а также вектора состояния $\mathbf{a}$ для части, соответствующей спину. Полный вектор состояния может быть, таким образом, представлен следующим равенством:

$$e(E, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(E | q_1, q_2, \dots, q_n) e(q_1, \dots, q_n) \mathbf{a}(s) dq_1 \dots dq_n,$$

где s — то или другое из двух собственных значений $\pm \hbar/2$ спинного оператора $\mathcal{S}$ и $\mathbf{a}$ — один из спиновых векторов, определенных в уравнениях (1.6.44). Поэтому если мы имеем функцию Гамильтона (нерелятивистскую), которая содержит оператор спина $\mathcal{S}$, так же как и p и q , а также и время, то гибридный вектор волновой функции и спина имеет

вид $\Psi = \phi_+ (|q, t) a(\hbar/2) + \phi_- (|q, t) a(-\hbar/2)$ и уравнение принимает вид

$$\mathcal{H}\left(t, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q; \mathfrak{S}\right) \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi = 0,$$

что соответствует уравнению (2.6.45). Среднее значение величины $B(p, q; \mathfrak{S})$ для состояния, обозначенного через Ψ , равно тогда

$$\int \dots \int \bar{\Psi} \mathcal{H}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q; \mathfrak{S}\right) \Psi dq_1 \dots dq_n,$$

где часть оператора, связанная с $\mathfrak{S}$, действует на спинорные векторы a , а дифференциальные операторы действуют на волновую функцию ϕ .

Но это решение все еще не дает нам волновой функции (для частицы), которая содержала бы спин и была бы релятивистской. Чтобы достигнуть этого, мы обратимся к спинорным операторам, рассмотренным в § 1.7. Единичные векторы $\sigma_1, \dots, \sigma_4$, определенные в уравнении (1.7.17), дают операторы, которые ведут себя подобно компонентам четырехмерного вектора. Они действуют на векторы состояния e , которые имеют только два различных направления: одно соответствует z -компоненте спина, равной $\hbar/2$, другое — компоненте, равной $-(\hbar/2)$ (направление оси z произвольно). Возникает мысль, что для получения волнового уравнения, инвариантного относительно преобразования Лоренца и содержащего спин, необходимо составить скалярное произведение четырехмерного вектора $p_x, p_y, p_z, p_t/c = -E/c$ на четырехмерный векторный спинорный оператор. Так как скалярное произведение двух четырехмерных векторов является инвариантом преобразования Лоренца, мы получим таким образом волновое уравнение, которое содержит первую производную по времени [как в уравнении (2.6.45), но не в (2.6.51)] и которое является также релятивистским [как уравнение (2.6.51), но не (2.6.45)]. Мы можем надеяться с помощью такого уравнения составить уравнение неразрывности так, чтобы можно было определить плотность заряда и тока [как мы это сделали в формуле (2.6.47) для решений уравнений (2.6.45)].

Простейшей формой такого уравнения является та, в которой результат действия скалярного произведения четырехмерных векторов σ и p на спинор e приравнен произведению постоянной на e ; для волновой функции Ψ , равной, как и раньше, сумме двух функций положения, умноженных на два спинорных вектора, мы должны иметь

$$\frac{\hbar}{i} \left[\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \Psi = \left[\text{const} - \frac{\hbar}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi,$$

так как $\sigma_4 = \mathfrak{S}$ и E для волновой функции заменяется через $-(\hbar/i)(\partial/\partial t)$. Трудность заключается только в том, что вектор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ является аксиальным вектором (см. стр. 106), в то время как градиент есть истинный вектор, так что величина, стоящая в скобках в правой части уравнения, будет псевдоскаляром (см. стр. 22), меняющим знак при перемене ориентации координат. Чрезвычайно трудно видеть, какую основную постоянную мы могли бы найти так, чтобы она была псевдоскаляром; в самом деле, это настолько трудно, что мы вынуждены искать менее простую форму, которая позволила бы обойтись без псевдоскаляра.

Такая менее простая форма состоит из пары уравнений

$$(\sigma \cdot p) e = \left[a + \frac{E}{c} \right] f; \quad (\sigma \cdot p) f = \left[b + \frac{E}{c} \right] e,$$

где e и f — различные векторы состояния. Исключая f и пользуясь задачей 1.33, мы обнаруживаем, что $b = -a$; a тогда может быть настоящим скаляром, а не псевдоскаляром, и e отлично от f . Любопытно

отметить, что эта пара уравнений аналогична уравнениям электромагнитного поля в свободном пространстве

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

здесь опять-таки мы не могли бы описать электромагнитное поле с помощью только одного вектора (скажем $\mathbf{E}$), пользуясь вихревым оператором в одной части равенства и производной по времени — в другой. Действительно, если попробовать рассмотреть уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

то вихревой оператор меняет знак при переходе от правой к левой системе координат, в то время как $\partial/\partial t$ знака не меняет. Поэтому a должно было бы быть псевдоскаляром, что было бы истинным бедствием для электромагнетизма, как и в случае волнового уравнения для e .

Величины e и f можно считать векторами одного и того же спинного пространства, связанного с приведенными выше уравнениями так же, как мы считаем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ векторами одного и того же трехмерного пространства. Но так как e и f — независимые векторы (в том же смысле, что и $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) и так как спинное пространство не является настолько «физическим», как трехмерное пространство, то обычно рассматривают f как вектор *другого спинного пространства*, перпендикулярного к пространству, в котором находится e . Другими словами, мы составляем *четырёхмерное* спинное пространство со взаимно-перпендикулярными единичными векторами e_1, e_2, e_3, e_4 и обеспечиваем независимость векторов e и f друг от друга тем, что вектор e считаем комбинацией e_1 и e_2 , а вектор f — комбинацией e_3 и e_4 .

При такой интерпретации переход от e к f является вращением из одного подпространства в другое; это вращение может быть представлено оператором ρ таким, что $\rho \cdot e = f$ и $\rho \cdot f = e$. Аналогичным образом замена a на $(-a)$ в приведенной выше паре уравнений может быть выражена в операторной форме с помощью оператора ρ_0 такого, что $\rho_0 e = e$ и $\rho_0 f = -f$. С помощью этих представлений два уравнения, написанные выше, могут быть объединены теперь в одно уравнение

$$\rho \cdot (\sigma \cdot p) e = [-\rho_0 a + (E/c)] e, \quad (2.6.52)$$

где e стоит вместо e или f .

Мы теперь должны распространить наши операторные определения спинного оператора σ на четырёхмерное пространство; эти определения вместе с детализированными определениями ρ , ρ_0 и $\alpha = \rho \cdot \sigma$ имеют вид

$$\begin{array}{llll} \sigma_x e_1 = e_2, & \sigma_x e_2 = e_1, & \sigma_x e_3 = e_4, & \sigma_x e_4 = e_3, \\ \sigma_y e_1 = ie_2, & \sigma_y e_2 = -ie_1, & \sigma_y e_3 = ie_4, & \sigma_y e_4 = -ie_3, \\ \sigma_z e_1 = e_1, & \sigma_z e_2 = -e_2, & \sigma_z e_3 = e_3, & \sigma_z e_4 = -e_4, \\ \rho e_1 = e_3, & \rho e_2 = e_4, & \rho e_3 = e_1, & \rho e_4 = e_2, \\ \rho_0 e_1 = e_1, & \rho_0 e_2 = e_2, & \rho_0 e_3 = -e_3, & \rho_0 e_4 = -e_4, \\ \alpha_x e_1 = e_4, & \alpha_x e_2 = e_3, & \alpha_x e_3 = e_2, & \alpha_x e_4 = e_1, \\ \alpha_y e_1 = ie_4, & \alpha_y e_2 = -ie_3, & \alpha_y e_3 = ie_2, & \alpha_y e_4 = -ie_1, \\ \alpha_z e_1 = e_3, & \alpha_z e_2 = -e_4, & \alpha_z e_3 = e_1, & \alpha_z e_4 = -e_2. \end{array} \quad (2.6.53)$$

Заметим, что оператор ρ перестановочен с операторами $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, но что $\rho \rho_0 + \rho_0 \rho = 0$. Оператор ρ_0 поэтому перестановочен с оператором

рами σ , но не перестановочен с α . В матричной форме эти операторы имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \rho &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \alpha_0, & \alpha_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\end{aligned}$$

при этом, начиная отсюда, символы α_0 и ρ_0 мы будем считать взаимозаменяемыми.

Операторное уравнение (2.6.52), действующее на некоторый вектор e , являющийся комбинацией единичных четырехмерных векторов e_1, e_2, e_3, e_4 , мы можем составить с помощью этих операторов следующим образом:

$$[\rho(\sigma \cdot p) + \rho_0 a] \cdot e = (E/c) e$$

или

$$[\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \rho_0 a] \cdot e = (E/c) e. \quad (2.6.54)$$

Мы должны теперь «возвести в квадрат» это уравнение, чтобы получить форму его, аналогичную форме (2.6.49).

Уравнение Дирака. Если электромагнитное поле равно нулю, уравнение (2.6.49) принимает вид

$$[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2 c^2] = (p_t/c)^2.$$

Взяв уравнение (2.6.54) и возведя в квадрат операторы в обеих частях (и помня о том, что $\alpha_x \alpha_y$ не равно $\alpha_y \alpha_x$ и т. д.), получаем

$$\{[\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 + \rho_0^2 a^2] + [\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x] p_x p_y + [\alpha_z \rho_0 + \rho_0 \alpha_z] \alpha p_z\} \cdot e = (p_t/c)^2 e.$$

Чтобы это уравнение соответствовало уравнению (2.6.49) в написанной выше формуле, должно быть

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \rho_0^2 = 1; \quad \alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = \dots = \alpha_z \rho_0 + \rho_0 \alpha_z = 0 \quad (2.6.55)$$

и

$$a = mc.$$

Изучение уравнений (2.6.53) показывает, что операторы, определенные там, удовлетворяют требованиям (2.6.55), так что мы, наконец, получили релятивистское уравнение для отдельной частицы массы m , которое содержит член с первой степенью оператора, соответствующего E (или

оператора p_i). Для получения этого уравнения мы были вынуждены расширить наше «спиновое пространство» от двух до четырех измерений. Два из этих состояний спина (e_1, e_2) соответствуют члену $+mc^2$ в выражении полной энергии, а другие два соответствуют члену $(-mc^2)$, отрицательной энергии. Мы знаем теперь, что состояние с отрицательной энергией связано с позитроном—частицей, имеющей заряд, противоположный заряду электрона, но одинаковую с ним массу.

Волновое уравнение для отдельной частицы, имеющей заряд e и массу m , в электромагнитном поле является уравнением для комбинации волновой функции и спинового вектора

$$\begin{aligned}\Psi &= \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3 + \psi_4 e_4, \\ \bar{\Psi} &= \bar{\psi}_1 e_1^* + \bar{\psi}_2 e_2^* + \bar{\psi}_3 e_3^* + \bar{\psi}_4 e_4^*,\end{aligned}\quad (2.6.56)$$

где ψ —функции от x, y, z и t , а e —ортогональные единичные векторы в спиновом пространстве. Уравнение, называемое *уравнением Дирака*, имеет вид

$$\begin{aligned}\left[\alpha_0 mc + \alpha_x \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_y \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y \right) + \right. \\ \left. + \alpha_z \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} A_z \right) + e\varphi \right] \Psi = \left\{ \alpha_0 mc \Psi + \alpha \cdot \left[\frac{\hbar}{i} \text{grad } \Psi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi \right] + \right. \\ \left. + e\varphi \Psi \right\} = -\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \quad (2.6.57)\end{aligned}$$

где оператор α представляет собой вектор с компонентами $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ и где $\alpha_0 = \rho_0$. Операторы подчиняются правилам, содержащимся в равенствах (2.6.53) и (2.6.55). Уравнение для $\bar{\Psi}$ получается из (2.6.57) при перемене знаков у всех членов, содержащих i .

Мы должны теперь посмотреть, приводят ли все эти изыскания к уравнению, допускающему разумные выражения для плотности заряда и тока. Представляется целесообразным за плотность заряда принять выражение

$$\rho = e \bar{\Psi} \Psi = e [|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2]; \quad (2.6.58)$$

рассуждая, как прежде, умножая уравнение для Ψ на $\bar{\Psi}$, а уравнение для $\bar{\Psi}$ —на Ψ и вычитая результаты, мы получаем

$$-(\partial/\partial t) (\bar{\Psi} \Psi) = c [\bar{\Psi} \alpha \cdot \text{grad } \Psi + \Psi \alpha \cdot \text{grad } \bar{\Psi}] = c \text{div} (\bar{\Psi} \alpha \Psi).$$

Поэтому вектор с компонентами

$$\begin{aligned}ce (\bar{\Psi} \alpha_x \Psi) &= ce [\bar{\psi}_1 \psi_4 + \bar{\psi}_2 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_2 + \bar{\psi}_4 \psi_1] = J_x, \\ ce (\bar{\Psi} \alpha_y \Psi) &= -ice [\bar{\psi}_1 \psi_4 - \bar{\psi}_2 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_2 - \bar{\psi}_4 \psi_1] = J_y, \\ ce (\bar{\Psi} \alpha_z \Psi) &= ce [\bar{\psi}_1 \psi_3 - \bar{\psi}_2 \psi_4 + \bar{\psi}_3 \psi_1 - \bar{\psi}_4 \psi_2] = J_z\end{aligned}\quad (2.6.59)$$

является вектором плотности тока $\mathbf{J}$.

Интересно отметить, что, в то время как плотность импульса частицы равна $\bar{\Psi} \mathbf{p} \Psi = (\hbar/i) \bar{\Psi} \text{grad } \Psi$, плотность скорости оказывается равной $c \bar{\Psi} \alpha \Psi$. Это может быть показано другим способом. Подставим в уравнение Гамильтона $\partial H/\partial p = \dot{q} = u$ выражение (2.6.50) (для простоты мы не включаем поля и предполагаем, что ось x направлена вдоль $\mathbf{p}$ или $\mathbf{u}$). Тогда

$$u = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} \quad \text{или} \quad p = \frac{mu}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

[см. уравнение (1.7.5)] и

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \sqrt{1-(u/c)^2}.$$

Сравнивая это классическое выражение полной энергии свободной частицы (релятивистское) с уравнением (2.6.54), мы видим, что при переходе к уравнению Дирака вместо скорости частицы u ставится векторный оператор $\boldsymbol{\alpha}$, а вместо $\sqrt{1-(u/c)^2}$ — оператор α_0 .

Преобразования операторов $\boldsymbol{\alpha}$, спинового вектора $\mathbf{e}$ и волновой функции при лоренцовом вращении пространства—времени или при вращении пространства могут быть выполнены на основе изложенного в § 1.7. Например, если преобразование соответствует относительной скорости $u = c \operatorname{th} \theta$ вдоль оси x , величины p и Λ преобразуются по правилам, справедливым для четырехмерных векторов

$$p_x = p'_x \operatorname{ch} \theta + \frac{1}{c} p'_t \operatorname{sh} \theta; \quad p_y = p'_y; \quad p_z = p'_z; \quad p_t = p'_t \operatorname{ch} \theta + c p'_x \operatorname{sh} \theta.$$

Спиновые векторы $\mathbf{e}$ преобразуются согласно формуле $\mathbf{e}' = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}$, где

$$\mathbf{g} = e^{\theta \boldsymbol{\alpha}_x / 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\theta \boldsymbol{\alpha}_x}{2} \right)^n = \operatorname{ch} \frac{\theta}{2} + \boldsymbol{\alpha}_x \operatorname{sh} \frac{\theta}{2},$$

так как $\boldsymbol{\alpha}_x^2 = 1$. Сопряженный оператор $\mathbf{g}^*$, такой, что $\mathbf{e} = \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{e}'$, равен в этом случае $\mathbf{g}$. Поэтому новая волновая функция имеет вид

$$\Psi' = \mathbf{g} \Psi = \operatorname{ch} (\theta/2) [\psi_1 \mathbf{e}_1 + \psi_2 \mathbf{e}_2 + \psi_3 \mathbf{e}_3 + \psi_4 \mathbf{e}_4] + \operatorname{sh} (\theta/2) [\psi_4 \mathbf{e}_1 + \psi_3 \mathbf{e}_2 + \psi_2 \mathbf{e}_3 + \psi_1 \mathbf{e}_4]. \quad (2.6.60)$$

Операторы $\boldsymbol{\alpha}$ преобразуются по формуле $\mathbf{g}^* \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{g} = \boldsymbol{\alpha}'$. Для симметрии мы полагаем $\boldsymbol{\alpha}'_t = \mathfrak{J}/c$ [см. уравнение (1.7.17)], где $\mathfrak{J}$ — идемпоттор. Имеем тогда

$$\begin{aligned} \alpha'_t &= \alpha_t \operatorname{ch} \theta + (1/c) \alpha_x \operatorname{sh} \theta, \\ \alpha'_x &= \alpha_x \operatorname{ch} \theta + c \alpha_t \operatorname{sh} \theta, \\ \alpha'_y &= e^{\theta \alpha_x / 2} \alpha_y e^{\theta \alpha_x / 2} = e^{\theta \alpha_x / 2} e^{-\theta \alpha_x / 2} \alpha_y = \alpha_y, \\ \alpha'_z &= \alpha_z; \quad \alpha'_0 = \alpha_0, \end{aligned}$$

так что $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ преобразуются подобно четырехмерному вектору. Поэтому скалярное произведение $\boldsymbol{\alpha}$ на четырехмерный вектор импульса является инвариантом преобразования Лоренца, так что

$$\sum_{xyzt} \alpha_x p_x = [\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \alpha_t p_t] = \sum_{xyzt} \mathbf{g}^* \alpha_x \mathbf{g} p'_x = \sum_{xyzt} \alpha'_x p'_x.$$

Поэтому уравнение в нештрихованных координатах можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\sum_{xyzt} \alpha_x \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \alpha_0 mc \right] \Psi = \\ &= \left[\sum \mathbf{g}^* \alpha_x \mathbf{g} \left(p'_x - \frac{e}{c} A'_x \right) + \mathbf{g}^* \alpha_0 mc \mathbf{g} \right] \Psi = \\ &= \mathbf{g}^* \left[\sum \alpha_x \left(p'_x - \frac{e}{c} A'_x \right) + \alpha_0 mc \right] \Psi; \end{aligned}$$

при этом получается уравнение в штрихованных координатах.

Для вращения в пространстве на угол θ около оси x оператор вращения для величин e и α выражается достаточно хорошими равенствами

$$g = e^{-\theta \alpha_y \alpha_z / 2}, \quad g^* = e^{\theta \alpha_y \alpha_z / 2} \quad (2.6.61)$$

и уравнения преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} p_t &= p'_t, \quad p_x = p'_x, \quad p_y = p'_y \cos \theta + p'_z \sin \theta, \\ p_z &= -p'_y \sin \theta + p'_z \cos \theta, \quad e' = g e, \quad \alpha' = g^* \alpha g. \end{aligned}$$

Более сложные вращения всегда могут быть разложены на несколько вращений рассмотренных здесь типов; соответствующие операторы вращения g являются произведениями отдельных g для составляющих простых вращений, взятых в надлежащем порядке.

Полный момент количества движения. В качестве упражнения на применение операторов α и σ мы покажем, что в случае отсутствия электромагнитного поля полный момент количества движения частицы не является только механическим моментом $\mathcal{M}$ [см. уравнение (1.6.42)], но представляет собой комбинацию момента $\mathcal{M}$ и спинового вектора σ . Другими словами, мы должны включить спин частицы для того, чтобы получить постоянную движения, которую мы называем полным моментом количества движения. На основании уравнения (2.6.35) мы видим, что для постоянной движения, изображаемой оператором $\mathcal{H}$, мы должны иметь

$$\mathcal{H} - \mathcal{H} \mathcal{H} = 0,$$

где $\mathcal{H}$ — оператор Гамильтона.

В данном случае, при равенстве нулю потенциалов Λ и φ , мы имеем для оператора Гамильтона, согласно уравнению (2.6.57),

$$\mathcal{H} = \alpha_0 m c^2 + c (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z).$$

Оператор для компоненты вдоль оси z механического момента количества движения имеет вид $\mathcal{M}_z = \mathcal{H} p_y - p_y \mathcal{H}$. Составим коммутатор $\mathcal{H} \mathcal{M}_z - \mathcal{M}_z \mathcal{H}$, чтобы показать, что он не равен нулю. Здесь операторы α перестановочны с операторами p и координатами, операторы p перестановочны друг с другом, так что в $\mathcal{H}$ только член с $\alpha_x p_x$ не перестановочен с первым членом $\mathcal{M}_z$ и только член с $\alpha_y p_y$ не перестановочен со вторым членом $\mathcal{M}_z$, так что

$$\mathcal{H} \mathcal{M}_z - \mathcal{M}_z \mathcal{H} = -c \alpha_y p_x (p_y \mathcal{H} - \mathcal{H} p_y) + c \alpha_x p_y (p_x \mathcal{H} - \mathcal{H} p_x).$$

Но $p_x \mathcal{H} - \mathcal{H} p_x = (\hbar/i)$ и т. д., и наше выражение оказывается равным

$$\mathcal{H} \mathcal{M}_z - \mathcal{M}_z \mathcal{H} = -(\hbar c/i) (p_x \alpha_y - p_y \alpha_x),$$

что, конечно, не равно нулю, так что $\mathcal{M}_z$ не является постоянной движения.

Пользуясь правилами (2.6.53) применения операторов, мы можем показать, что [сравните с уравнениями (1.6.44)]

$$\begin{aligned} (\sigma_x)^2 &= (\sigma_y)^2 = (\sigma_z)^2 = 1, & \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x = i \sigma_z, \\ \sigma_x \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_x = -i \sigma_y, & \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y = i \sigma_x. \end{aligned} \quad (2.6.62)$$

Кроме того, так как оператор p перестановочен с операторами σ и так как $\alpha = p \sigma$, мы можем получить другие уравнения

$$\sigma_x \alpha_x = \alpha_x \sigma_x = p, \quad \alpha_x \sigma_z = -\sigma_z \alpha_x = i \alpha_y, \quad \alpha_y \sigma_z = -\sigma_z \alpha_y = i \alpha_x \text{ и т. д.}$$

Следовательно, мы можем показать, что

$$\mathcal{H} \sigma_z - \sigma_z \mathcal{H} = (2c/i) (p_x \alpha_y - p_y \alpha_x).$$

Сравнивая между собой коммутаторы для $\mathfrak{M}_z$ и σ_z , мы видим, что комбинация $[\mathfrak{M}_z + (\hbar/2)\sigma_z]$ перестановочна с $\mathfrak{H}$ и, таким образом, является постоянной движения. Это верно также для компонент по осям x и y .

Таким образом, полный момент количества движения, являющийся постоянной движения, равен сумме механического (орбитального) момента $\mathfrak{M}$ и произведения $\hbar/2$ на спиновой вектор σ .

Волновая функция свободного поля. В качестве другого примера мы получим волновую функцию, когда отсутствует внешнее поле. Для случая свободного поля уравнение Дирака (2.6.57) принимает вид

$$\alpha_0 mc\Psi + \frac{\hbar}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \text{grad } \Psi = -\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Решением этого уравнения является

$$\Psi = [A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 + A_4 \mathbf{e}_4] e^{(i/\hbar)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)}, \quad (2.6.63)$$

где A — численные коэффициенты, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор, вектор $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$ — классический вектор импульса с компонентами p_x , p_y , p_z , которые являются постоянными, а не операторами; число E есть величина энергии электрона для состояния, обозначенного через Ψ .

Подставив это в уравнение Дирака, выполнив дифференцирование и спинорные операции в соответствии с равенствами (2.6.53), мы окончательно получим (не уменьшая общности, мы положили $p_z = p$, $p_x = p_y = 0$)

$$[(mc^2 - E)A_1 + cpA_3]\mathbf{e}_1 + [(mc^2 - E)A_2 - cpA_4]\mathbf{e}_2 + \\ + [(-mc^2 - E)A_3 + cpA_1]\mathbf{e}_3 + [(-mc^2 - E)A_4 - cpA_2]\mathbf{e}_4 = 0.$$

Отсюда следует, что четыре коэффициента при векторах равны нулю; это приводит к четырем однородным уравнениям для четырех коэффициентов A : двум, содержащим A_1 и A_3 , и двум, содержащим A_2 и A_4 . Обе пары могут быть решены, если выполняется равенство $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$. Таким образом, имеем четыре решения: два соответствуют значению энергии

$$E = -mc^2 \sqrt{1 + (p/mc)^2} \underset{p \ll mc}{\approx} -\left[mc^2 + \frac{1}{2}(p^2/m) \right]$$

и имеют вид

$$\Psi_1 = C[-\beta \mathbf{e}_1 + (1 + \gamma) \mathbf{e}_3] e^{(i/\hbar)(pz + mc^2 \gamma t)}, \\ \Psi_2 = C[\beta \mathbf{e}_2 + (1 + \gamma) \mathbf{e}_4] e^{(i/\hbar)(pz + mc^2 \gamma t)}; \quad (2.6.64)$$

другие два соответствуют значению энергии

$$E = +mc^2 \gamma \underset{\beta \rightarrow 0}{\approx} \left[mc^2 + \frac{1}{2}(p^2/m) \right],$$

имеют вид

$$\Psi_3 = C[(1 + \gamma) \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_3] e^{(i/\hbar)(pz - mc^2 \gamma t)}, \\ \Psi_4 = C[(1 + \gamma) \mathbf{e}_2 - \beta \mathbf{e}_4] e^{(i/\hbar)(pz - mc^2 \gamma t)},$$

где $\beta = (p/mc)$ и $\gamma = \sqrt{1 + \beta^2}$, а C — нормирующая постоянная. Функции Ψ_1 и Ψ_3 соответствуют спину $\hbar\sigma_z/2$, равному $+\hbar/2$ (так как $\sigma_z\Psi_1 = \Psi_1$ и т. д.), а Ψ_2 и Ψ_4 соответствуют спину $-\hbar/2$.

Резюме. В этой главе мы постарались наметить основные связи между различными явлениями в классической и квантовой физике и различными видами полей, рассмотренными в гл. 1. Эту связь обычно можно представить, с известной степенью приближения, с помощью дифференциальных уравнений, задающих поведение от точки к точке поля, кото-

рое должно описывать частное физическое явление. В классической физике мы обнаружили, что надо было провести осреднение атомистических дискретностей; в квантовой физике мы нашли, что принцип неопределенности мешает нашему «изучению» непрерывной волновой функции, являющейся корнем квадратным из вероятности; оказалось, что разрывные детали траекторий элементарных частиц невозможно измерять и предсказывать. В обоих случаях мы пришли к непрерывному полю — скалярному, векторному или аффинорному, подчиненному дифференциальному уравнению с частными производными и заданному однозначно посредством некоторой совокупности граничных условий (или начальных условий, или тех и других вместе).

Мы видели, что одни и те же поля и одни и те же дифференциальные уравнения оказываются в связи со многими и различными физическими явлениями. Мы нашли, например, что скалярное поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа, может представлять или электрическое поле вблизи группы зарядов, или плотность диффундирующей жидкости в стационарных условиях, или потенциал скорости установившегося течения несжимаемой жидкости, или гравитационный потенциал вблизи группы материальных тел и т. д. С точки зрения этой книги этот недостаток математической оригинальности со стороны природы дает большую экономию сил и времени. Занимаясь изучением решений одного уравнения, мы одновременно будем решать несколько дюжин задач из различных областей физики.

Мы не углублялись в подробности относительно физической стороны различных примеров, рассмотренных в этой главе; эта книга в основном занимается решением уравнений, если они уже получены. Например, в области квантовой механики мы преодолели искушение выйти за рамки беглого наброска новой точки зрения в динамике. Изложение достаточно только для того, чтобы позже, при изучении решений уравнений Шрёдингера и Дирака, можно было понять физический смысл решений. Превышение этого сделало бы данный параграф учебником по квантовой механике, что было бы совершенно излишним.

Для подробного изучения затронутых физических явлений пригодны другие книги, посвященные различным отделам физики.

Нельзя отрицать того, что на рассмотрение уравнений квантовой механики затрачено времени больше, чем на уравнения классических полей. Эти более новые уравнения менее привычны, и, таким образом, они дают возможность показать, какие способы рассуждений должны быть использованы при выводе новых уравнений полей для описания новых явлений. Классические уравнения полей выдержали проверку нескольких поколений ученых, и логическая структура связи с «действительностью» сделалась «второй природой» физиков. В квантовой механике мы еще не закончили полностью процесс рационализации, преобразующий «работающие» непривычные уравнения в логически обоснованную теорию, «очевидную для каждого».

Новое уравнение для описания нового явления редко выводится впервые с помощью строгих логических рассуждений из хорошо известных физических фактов; достаточно строгий вывод уравнения удается обычно получить только тогда, когда теория становится «очевидной». Первое получение уравнения обычно приходит менее дедуктивным путем, с помощью аналогий, «работы назад», а также постоянного применения современного аналога бритвы Оккама¹⁾. В уравнении Дирака, например,

¹⁾ «Бритвой Оккама» называют изречение этого философа: «*Essentia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*» («Сущности не должны быть увеличиваемы в числе без необходимости»). — *Прим. ред.*

мы придерживались определенной общей формы уравнения, так как было вероятно, что уравнение должно быть релятивистски инвариантным и мы искали *простейшее* уравнение, которое привело бы нас к «разумным» (т. е. не чрезмерно сложным) выражениям для заряда, тока и других измеримых количеств. Результат мог показаться на первый взгляд не очень простым, но читателю достаточно немного дней исследования (или чтения старых номеров журналов, выпущенных в тот период когда выводилось уравнение Дирака), чтобы убедиться в том, что много легче составить более сложные уравнения, чем найти уравнение более простое.

Среди общих принципов, которые можно использовать для того, чтобы наметить направление поисков новых уравнений, одним из наиболее важных является требование инвариантности, в частности инвариантности относительно преобразования Лоренца. Но существуют и другие пути. Например, обычно сначала ищут линейные уравнения; часто применяют оператор Лапласа.

Когда уравнение составлено, необходимо исследовать все входящие в него величины, чтобы убедиться в том, достаточно ли они «соответствуют» различным физическим величинам. Обычно здесь встречается, например, плотность энергии; тогда соответствующая выбранная величина не должна обладать неприятным свойством становиться где-либо и когда-либо отрицательной. В качестве путеводной нити при получении уравнения Дирака мы выбрали выражения для плотности тока и плотности заряда, а также требование, чтобы эти выражения удовлетворяли уравнению неразрывности. Формальным аппаратом для получения этих вспомогательных величин является вариационный метод, который мы рассмотрим в ближайшей главе. Когда эти величины обоснованы, можно решить, являются ли они слишком сложными или нет.

Другой полезный способ испытать уже составленное уравнение состоит в том, чтобы найти другое физическое явление, к которому можно было бы применить то же самое уравнение. Свойство решений уравнения Клейна — Гордона могут быть изучены с помощью струны в резиновой оболочке (см. стр. 139), которая удовлетворяет тому же самому уравнению и которую легче представить себе, чем волновую функцию, так как движения струны достаточно хорошо известны. Аналогии этого вида встречаются в теоретической физике повсюду и приводят к своего рода перекрестному опылению, чрезвычайно полезному. Раннее изучение переменного электрического тока было значительно облегчено благодаря аналогии с более знакомым механическим осциллятором. Теперь, когда «каждый слышал» про переменные токи, мы склонны и при изучении других видов колебательных и волновых движений (даже механического осциллятора) говорить об импедансах, емкостях и т. д.

В ближайшей главе мы подробно рассмотрим аналогию между поведением поля и вариационными принципами классической динамики, развитыми Гамильтоном. Мы найдем, что эта аналогия является полезным унифицирующим фактором при изучении всех уравнений, рассмотренных в этой главе (а также и других).

Задачи к главе 2

2.1. Мембрана натянута на одной стороне герметического сосуда, так что на нее действуют одновременно и ее натяжение T и избыток давления воздуха внутри сосуда.

Показать, что

$$p = -\frac{\rho c^2}{V} \int \Psi dA,$$

если Ψ обозначает отклонение мембраны от положения равновесия; ρ , V являются плотностью и объемом воздуха в сосуде в состоянии равновесия, а c — скорость звука в воздухе.

Показать, что уравнение движения мембраны имеет поэтому вид

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Psi - \frac{\rho c^2}{VT} \int \Psi dA,$$

где $v^2 = T/\sigma$, T — натяжение, а σ — масса единицы площади мембраны. Какие допущения сделаны при выводе этого уравнения?

2.2. Пусть бесконечная упругая среда обладает пьезоэлектрическими свойствами относительно сжатия в направлении оси x и электрического поля в направлении оси y (при смещении s в направлении оси x электрическая напряженность E и вектор электрической индукции D направлены по оси y). Диэлектрическая поляризация P , также в направлении y , связана с D и E обычным уравнением $D = E + \epsilon P$, а с компонентой напряжения $X = T_{xx}$ и E — уравнением связи $P = \delta X + \chi E$, где χ — диэлектрическая восприимчивость, а δ — пьезоэлектрическая постоянная. С другой стороны, деформация $S_{xx} = u$ связана с напряжением и электрической напряженностью уравнением $u = \sigma X + \delta E$, где σ — величина, обратная модулю упругости. С помощью уравнений упругости и уравнений Максвелла составить два совокупных уравнения для движения волн сжатия вдоль оси x . Показать, что возможны две электроупругие волны; одна, движущаяся со скоростью несколько меньшей, чем волны безвихревого расширения (когда значение δ равно нулю), и другая — со скоростью несколько большей, чем скорость чистых электромагнитных волн.

2.3. Во время прохождения звуковой волны через вещество температура областей сжатия выше средней температуры, в то время как в областях расширения температура ниже средней. Эта разность температур вызывает поток тепла от одной части вещества к другой.

а. Показать, что уравнения потока тепла и распространения звука имеют вид

$$\begin{aligned} \partial T / \partial t &= (\partial T_0 / \partial \rho_0)_S (\partial \rho / \partial t) + (k / c_p \rho_0) \nabla^2 T, \\ \partial^2 \rho / \partial t^2 &= (\partial p_0 / \partial \rho_0)_T \nabla^2 \rho + (\partial p_0 / \partial T_0)_\rho \nabla^2 T, \end{aligned}$$

где индекс нуль употребляется для обозначения значений при равновесии.

б. Предположим, что T и ρ распространяются как плоские волны

$$T = A \exp[i(kx - \omega t)]; \quad \rho = B \exp[i(kx - \omega t)].$$

Показать, что k и ω связаны равенством

$$0 = i(k/c_p \rho_0 \omega) [(\partial p_0 / \partial \rho_0)_T k^2 - \omega^2] - \{\omega^2 - k^2 [(\partial p_0 / \partial \rho_0)_T + (\partial T_0 / \partial \rho_0)_S (\partial p_0 / \partial T_0)_\rho]\}.$$

Определить скорость распространения волн при $k/c_p \rho_0 \omega \ll 1$, при $k/c_p \rho_0 \omega \gg 1$. Рассмотреть распространение волн при $k/c_p \rho_0 \omega \simeq 1$.

2.4. Проводящая жидкость (электропроводность σ , проницаемость μ) при движении вызывает магнитное поле, которое в свою очередь влияет на движение жидкости. Показать, что уравнения, связывающие скорость v

и магнитную индукцию $\mathbf{B}$, имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \left(\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \right) \nabla^2 \mathbf{B},$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \left(\frac{c}{4\pi\mu} \right) [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})].$$

2.5. При растворении в соответствующем растворителе многие соли расщепляются на положительные и отрицательные ионы. Под влиянием электрического поля они диффундируют. Показать, что уравнение, описывающее движение положительных ионов, в предположении, что они движутся в вязкой среде с их установившейся скоростью, имеет вид

$$\partial c_1 / \partial t = A_1^2 \nabla^2 c_1 + B_1 Q \text{div} (c_1 \text{grad } \varphi),$$

где c_1 — концентрация, A_1^2 — постоянная диффузии, B_1 — отношение установившейся скорости к приложенной силе, Q — ионный заряд и φ — электростатический потенциал. Показать, что φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi (F/e) (c_1 - c_2),$$

где F — постоянная Фарадея.

2.6. Частицы микроскопических размеров находятся в состоянии беспорядочного движения, называемого броуновским движением, вызываемого молекулярными столкновениями. Пусть количество частиц, имеющих в момент t_0 положение между x_0 и $x_0 + dx_0$ и скорости между v_0 и $v_0 + dv_0$, равно $f(x_0, v_0, t_0) dx_0 dv_0$. Пусть число, указывающее, какая часть этих частиц в момент τ находилась в области между x и $x + dx$ и имела скорости между v и $v + dv$, равно $w(\Delta x, \Delta v, \tau | x_0, v_0, t_0) dx dv$, где $\Delta x = x - x_0$; $\Delta v = v - v_0$, $\tau = t - t_0$.

а. Показать, что

$$f(x, v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\Delta x, \Delta v, \tau | x_0, v_0, t_0) f(x_0, v_0, t_0) dx_0 dv_0.$$

б. Показать, что для малых τ , Δx и Δv

$$\frac{\partial f(x, v, t_0)}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f \overline{\Delta x}}{\tau} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f \overline{\Delta v}}{\tau} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f \overline{\Delta x^2}}{\tau} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \left(\frac{f \overline{\Delta x \Delta v}}{\tau} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{f \overline{\Delta v^2}}{\tau} \right) \right\},$$

где

$$\overline{\Delta x} = \overline{\Delta x}(x, v, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x w(\Delta x, \Delta v, \tau | x, v, t_0) dx_0 dv_0$$

с соответствующими определениями других средних величин.

в. Если частицы движутся в вязкой жидкости и если молекулярные столкновения беспорядочны, то $\overline{\Delta v} = -\alpha v \tau$ и $\overline{\Delta v^2} = A \tau$, где α и A — постоянные. Показать, что в пределе при малых τ

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (vf) + \alpha \frac{\partial}{\partial v} (vf) + \frac{1}{2} A \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

г. Показать, что в условиях стационарного состояния

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dx = F_0 e^{-(1/A)v^2}.$$

Показать, что среднее значение n -й степени скорости, определенное равенством

$$\bar{v}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v^n f(x, v) dx dv,$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{v}^n}{dt} = -n\alpha\bar{v}^n + \frac{1}{2}An(n-1)\bar{v}^{n-2}.$$

2.7. а. Пусть два оператора a и a^* подчиняются следующему правилу перестановочности:

$$aa^* - a^*a = 1.$$

Показать, что собственными значениями оператора a^*a являются $0, 1, 2, 3, \dots$. Если соответствующими состояниями будут e_n , показать, что

$$ae_n = \sqrt{n}e_{n-1}; \quad a^*e_n = \sqrt{n+1}e_{n+1}.$$

б. Пусть два оператора a и a^* подчиняются следующему правилу перестановочности:

$$aa^* + a^*a = 1;$$

пусть также $aa = 0$, $a^*a^* = 0$. Показать, что собственными значениями оператора a^*a будут только 0 и 1 . Если e_0 и e_1 будут соответствующими состояниями, показать, что

$$a^*e_0 = e_1, \quad a^*e_1 = 0, \quad ae_0 = 0, \quad ae_1 = e_0.$$

2.8. Пусть электрон движется в кулоновом поле ядра, имеющего заряд Z .

а. Полагая

$$r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2},$$

доказать, что соответствующий сопряженный импульс p_r равен

$$p_r = (1/r)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\hbar).$$

б. Показать, что оператор Гамильтона для электрона может быть записан следующим образом:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{\mathfrak{L}^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r},$$

где $\mathfrak{L}$ является оператором момента количества движения.

в. Определить значения энергии E_n электрона, имеющего данный момент количества движения l , пользуясь следующим методом. Найти оператор $\mathfrak{A}(r)$ такой, что

$$(p_r + i\mathfrak{A})(p_r - i\mathfrak{A})e_{nl} = \left(2m\mathfrak{H}_l + \frac{m^2e^4Z^2}{\hbar^2l^2}\right)e_{nl},$$

$$(p_r - i\mathfrak{A})(p_r + i\mathfrak{A})e_{nl} = \left(2m\mathfrak{H}_{l-1} + \frac{m^2e^4Z^2}{\hbar^2l^2}\right)e_{nl}.$$

Показать отсюда, что E_{nl} не зависит от l , что для данного E_{nl} существует максимум величины l , который мы обозначим через $n-1$. Выразить E_{nl} через n .

2.9. Показать, что при преобразовании

$$\mathbf{e} = \exp(-i\mathfrak{A}_0 t/\hbar)\mathbf{f}$$

уравнение Шредингера

$$(\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1) e = i\hbar (\partial e / \partial t)$$

принимает вид

$$\mathfrak{H}_1(t) f = i\hbar (\partial f / \partial t),$$

где

$$\mathfrak{H}_1(t) = \exp(i\mathfrak{H}_0 t / \hbar) \mathfrak{H}_1 \exp(-i\mathfrak{H}_0 t / \hbar).$$

Показать, что

$$f = \mathfrak{U} f_0,$$

где

$$\mathfrak{U} = 1 + (1/i\hbar) \int_{-\infty}^t \mathfrak{H}_1(t') dt' + (1/i\hbar)^2 \int_{-\infty}^t \mathfrak{H}_1(t') dt' \int_{-\infty}^{t'} \mathfrak{H}_1(t'') dt'' + \dots,$$

а f_0 не зависит от времени. Связать f_0 с решениями уравнения

$$\mathfrak{H}_0 e_0 = i\hbar (\partial e_0 / \partial t).$$

2.10. Разложить решение e волнового уравнения Дирака следующим образом:

$$e = f + g; \quad f = \frac{1}{2} (1 + \alpha_0) e; \quad g = \frac{1}{2} (1 - \alpha_0) e.$$

Показать, что

$$f^* \cdot g = 0$$

и что

$$(E + eV + mc^2) f = c [\alpha \cdot (p + eA/c)] g,$$

$$(E + eV + mc^2) g = -c [\alpha \cdot (p + eA/c)] f.$$

Показать для состояний с положительной энергией при малых eA и eV сравнительно с mc^2 , что $g^* \cdot g \ll f^* \cdot f$.

2.11. Определить совокупность четырех состояний e_i , которые удовлетворяют уравнению Дирака для неподвижной частицы

$$(\alpha_0 mc^2) e_i = E_0 e_i.$$

Показать, что четыре решения уравнений Дирака для частицы с импульсом p имеют вид

$$[c(\alpha \cdot p) + \alpha_0(mc^2 + |E|)] e_i,$$

где

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4.$$

Стандартные формы некоторых уравнений с частными производными теоретической физики

Номера уравнений

Уравнение Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$.

(1.1.4), (2.3.6)

Векторная форма $\text{rot rot } A = 0$; $\text{div } A = 0$.

Уравнение Пуассона $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$.

(1.1.5), (2.1.2) (2.5.2)

Векторная форма $\text{rot rot } A = 4\pi J$; $\text{div } A = 0$.

(2.5.7)

Уравнение Гельмгольца $\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$. (2.1.10)

Векторная форма $\text{rot rot } \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} = 0$; $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Волновое уравнение $\square^2 \phi = \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$. (2.1.9), (2.2.2)

Векторная форма $\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$;
 $\text{div } \mathbf{A} = 0$. (2.2.3), (2.5.15)

Уравнение диффузии $\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$. (2.4.4)

Векторная форма $\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$;
 $\text{div } \mathbf{A} = 0$. (2.3.19)

Уравнение Клейна — Гордона $\square^2 \phi = \mu^2 \phi$. (2.1.27)

Векторная форма $\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu^2 \mathbf{A} = 0$;
 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ (Уравнение Прока). (2.5.37)

Уравнения Максвелла $\text{div } \mathbf{B} = 0$; $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$; $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} 4\pi\mathbf{J}$;
 $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$; $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$; $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$. (2.5.11)

Уравнения для электромагнитных потенциалов

$\square^2 \varphi = -4\pi\rho/\epsilon$, $\square^2 \mathbf{A} = -4\pi\mu\mathbf{J}/c$,
 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\text{div } \mathbf{A} = -\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ (2.5.15)

(относительно видов этих уравнений при других калибровках см. стр. 201 и 315).

Уравнение упругих волн (изотропная среда)

$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \nabla \cdot [\lambda \mathfrak{J} \text{div } \mathbf{s} + \mu (\nabla \mathbf{s}) + \mu (\mathbf{s} \nabla)] = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{s} - \mu \text{rot rot } \mathbf{s}$. (2.2.1)

Уравнение вязкой жидкости

$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \nabla \cdot [-(p + \gamma \text{div } \mathbf{v}) \mathfrak{J} + \eta (\nabla \mathbf{v}) + \eta (\mathbf{v} \nabla)]$, (2.3.14)
 $\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left[p - \left(\frac{4}{3} \eta + \lambda \right) \text{div } \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right] - \eta \text{rot rot } \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$,

где $\lambda = \frac{2}{3} \eta - \gamma$.

Уравнение Шредингера для одной частицы с массой m при потенциале V

$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V\phi = i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}$, $|\phi|^2$ — плотность вероятности. (2.6.38)

Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле

$\alpha_0 mc \Psi = \boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \text{grad } \Psi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) + \left(\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - e\varphi \Psi \right) = 0$; (2.6.57)

$\Psi = \sum_{n=1}^4 e_n \phi_n$, $\Psi^* \cdot \Psi$ — плотность вероятности.

ЛИТЕРАТУРА

Сочинения общего характера, затрагивающие материал этой главы:

- Вебстер А. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 1—2, ГТТИ, М., 1933—1934.
 Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, Изд. иностр. лит., М., 1950.
 Ландау Л., Лифшиц Е., Теория поля, ГТТИ, М., 1948.
 Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций (1 вып.), Изд. иностр. лит., М., 1958.
 Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, М., 1950.
 Рэлей Дж., Теория звука, Гостехиздат, М., 1955.
 Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1954.
 Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
 Франк Ф. Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ОНТИ, М., 1937.
 Joos G., Lehrbuch der theoretischen Physik, Leipzig, 1956.
 Lindsay R. B., Margenau H., Foundations of Physics, New York, 1936.
 Margenau H., Murphy G. M., Mathematics of Physics and Chemistry, New York, 1943.
 Slater I. C., Frank N. H., Introduction to Theoretical Physics, New York, 1933.
 Schaeffer C., Einführung in die theoretische Physik, 3 v. Berlin, 1937.

Дополнительная литература, представляющая интерес в связи с учением о колебаниях и звуке:

- Coulson C. A., Waves, a Mathematical Account of the Common Types of Wave Motion, Edinburgh, 1941.
 Lamb H., The Dynamical Theory of Sound, London, 1925.
 Morse P. M., Vibration and Sound, New York, 1948.

Книги по теории упругости и упругим колебаниям:

- Ляв А., Математическая теория упругости, ГТТИ, М., 1935.
 Тимошенко С., Теория упругости, ГТТИ, М., 1934.
 Brillouin L., Les tenseurs en mécanique et en elastique, Paris, 1938.
 Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, New York, 1946.

Дополнительная литература по гидродинамике и движению волн сжатия:

- Зауэр Р., Введение в газовую динамику, ГТТИ, М., 1947.
 Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, Гостехиздат, М., 1955.
 Ламб Г., Гидродинамика, ГТТИ, М., 1947.
 Ландау Л. Д. и Лифшиц Е., Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.
 Chapman S., Cowling T. G., Mathematical Theory of Non-uniform Gases, Cambridge, New York, 1939¹⁾.
 Hadamard G. S., Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique, Paris, 1903.
 Milne-Thomson L. M., Theoretical Hydrodynamics, London, 1938.

Книги по диффузии, тепловому потоку и теории переноса:

- Лоренц Г. А., Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, ГТТИ, М., 1953.
 Chandrasekhar S., Radiative Transfer, Oxford, New York, 1950.
 Chapman S., Cowling T. G., Mathematical Theory of Non-uniform Gases, Cambridge, New York, 1939¹⁾.
 Fowler R. H., Statistical Mechanics, Cambridge, New York, 1936.
 Hopf E., Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, New York, 1934.

Книги по теории электромагнетизма, в особенности по основным понятиям теории:

- Страттон Дж. А., Теория электромагнетизма, ГТТИ, М., 1948.
 Тамм И. Е., Основы теории электричества, Гостехиздат, М., 1954.
 Abraham M., Becker R., Classical Theory of Electricity and Magnetism, Glasgow, 1932.

¹⁾ Готовится к печати русское издание.—Прим. ред.

Van Vleck I. H., Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities, Oxford, New York, 1932.

Изложение основных принципов квантовой механики с различных точек зрения:

Ван-дер-Варден Б., Метод теории групп в квантовой механике, Харьков, 1938.
Де Бройль Л., Магнитный электрон, Госуд. научно-техн. изд. Украины, Харьков, 1936.

Дирак П., Основы квантовой механики, ГТТИ, М., 1932.

Зоммерфельд А., Волновая механика, Гостехиздат, Л.—М., 1933.

Зоммерфельд А., Строение атома и спектры, т. 2, ГИТТЛ, М., 1956.

Кондон Е., Шортли Г., Теория атомных спектров, Изд. иностр. лит., М., 1949.

Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Квантовая механика, ч. 1, ГТТИ, М.—Л., 1948.

Шифф Л., Квантовая механика, Изд. иностр. лит., М., 1957.

Bohm D., Quantum Theory, New York, 1951¹⁾.

Jordan P., Anschauliche Quantentheorie, Berlin, 1936.

Kemble E. C., Fundamental Principles of Quantum Mechanics, New York, 1937.

Kramers H. A., Grundlagen der Quantentheorie, Leipzig, 1938.

J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932.

¹⁾ Готовится к печати русское издание.

Поля и вариационный принцип

Употребление превосходной степени прилагательных позволяет в сжатой форме выразить общий принцип, охватывающий широкий круг явлений. Так, например, утверждения, что прямая есть кратчайшая линия, соединяющая две точки, или что окружность есть кратчайшая линия, охватывающая плоский участок заданной площади, с обманчивой простотой описывают определенные геометрические объекты. Говоря, что электрический ток в сети, состоящей из сопротивлений, распределяется так, что наименьшая часть его энергии превращается в тепло, мы тем самым даем описание постоянного тока, охватывающее множество индивидуальных случаев, не прибегая к сложному математическому аппарату (последний, впрочем, неизбежно появляется при попытке применить этот общий принцип к тому или иному индивидуальному случаю). Утверждение, что некоторая физическая система эволюционирует так, что известная функция ее поведения принимает наименьшее (или наибольшее) значение, часто оказывается как исходной точкой теоретических исследований, так и конечным продуктом дистилляции соотношений, связывающих некоторые явления в какой-либо обширной области физики.

Математическая формулировка принципа, содержащего «прилагательное в превосходной степени», обычно состоит в том, что интеграл от некоторой функции, характерной для рассматриваемой системы, при происходящей в действительности эволюции системы принимает значение меньшее (или большее), чем при любой другой мыслимой эволюции, подчиняющейся известным, весьма общим условиям, характеризующим самое систему. Подинтегральную функцию обозначим L ; она зависит от некоторого числа переменных, характеризующих систему (координат, амплитуд поля или других величин) и от производных этих переменных по переменным интегрирования (т. е. от скоростей или градиентов полей и т. п.). Если переменные интегрирования обозначены $x_1, \dots, x_m$, переменные, характеризующие систему, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, их производные $\partial\varphi_r/\partial x_s = \varphi_{rs}$, то интеграл, который требуется минимизировать, можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} L\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, x\right) dx_1, \dots, dx_m. \quad (3.1.1)$$

Отыскивая минимум этого интеграла, мы можем получить дифференциальные уравнения с частными производными, управляющие величинами φ как функциями от x , и еще целый ряд сведений. Такой метод отыскания величин φ называется *вариационным методом*.

В этой главе мы сначала укажем общий прием, с помощью которого вариационный метод приводит к уравнениям, определяющим искомые функции φ , затем в качестве хорошо разработанного примера, показывающего пользу применения этого метода, мы более детально рассмотрим

вариационные принципы классической динамики; далее мы перейдем к применению вариационного метода к исследованию различных полей, с которыми мы встретимся в этой книге.

3.1. Вариационный интеграл и уравнения Эйлера

Функция L в интеграле, которому мы стремимся придать минимальное (или максимальное) значение, называется *плотностью функции Лагранжа* рассматриваемой системы. Она представляет собой *функцию от функций* основных параметров системы. Так, в классической динамике основным параметром служит время, а в качестве функций выступают координаты и скорости элементов системы в различные моменты времени, по мере ее движения, обусловленного приложенными силами и начальными условиями. В случае поля основными параметрами являются координаты, определяющие точки, в которых измеряется поле, а их функциями являются компоненты поля и их градиенты; эти функции определяются расположением «источников» (или зарядов) в пространстве и граничными условиями.

Таким образом, требование, чтобы интеграл от L принимал наименьшее (или наибольшее) значение, означает, что функции, через которые выражена L (координаты и скорости или компоненты и градиенты), должны быть выбраны так, чтобы интеграл (3.1.1.) принимал наименьшее (наибольшее) возможное значение. Функции φ должны быть таковы, чтобы значение интеграла (3.1.1.), зависящего от этих φ и их производных $\partial\varphi/\partial x$, было наименьшим из тех, которые он может принимать при заданных условиях, определяемых существом задачи.

Для решения этой вариационной задачи мы сведем ее прежде всего к системе уравнений, определяющей наилучший выбор функций φ .

Уравнения Эйлера. Но перед тем как сделать этот первый шаг, мы должны уточнить, что именно мы понимаем под «минимизацией интеграла» и «наилучшим выбором функций». Для этого предположим, что мы произвольным образом выбрали функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ параметров $x_1, \dots, x_m$. Этот произвольный выбор определит, разумеется, функции $\varphi_{rs} = \partial\varphi_r/\partial x_s$ и тем самым однозначно определится значение $\mathcal{L}$ согласно формуле (3.1.1). Изменим теперь немного функции φ ; пусть изменение функции φ_r выражается в виде $\varepsilon_r \eta_r$, где η_r — произвольная функция параметров, а ε_r — малая величина, не зависящая от параметров. Вместо $\varepsilon_r \eta_r$ часто пишут кратко $\delta\varphi_r$ и рассматривают $\delta\varphi$ как произвольно малую «вариацию» функции φ . Изменения φ повлекут за собой изменения компонент φ_{rs} градиентов. Те и другие связаны соотношениями $\partial(\varepsilon_r \eta_r)/\partial x_s = \varepsilon_r \eta_{rs}$. В вариационных обозначениях эти соотношения имеют вид $\delta\varphi_{rs} = \partial(\delta\varphi_r)/\partial x_s$.

Разложив L в ряд Тейлора, мы обнаружим, что главная часть (члены первого порядка малости) приращения интеграла $\mathcal{L}$, вызванного малыми вариациями функций φ , может быть представлена в виде

$$\delta\mathcal{L} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} \sum_{r=1}^n \varepsilon_r \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_r} \eta_r + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L}{\partial \varphi_{rs}} \frac{\partial \eta_r}{\partial x_s} \right) dx_1 \dots dx_m.$$

Допустим, что параметры выбраны так, что все пределы интегрирования постоянны и все η обращаются в нуль при $x_i = a_i$ и b_i . Это имеет место, в частности, тогда, когда значения a_i и b_i параметров соответствуют каким-то физическим границам, где на φ наложены некоторые граничные условия. Обычно именно так и бывает, поэтому мы вводим здесь

такое предположение; более общий случай, когда пределы интегрирования переменны, будет затронут ниже.

Проинтегрировав по частям $(\partial L / \partial \varphi_{rs}) (\partial \eta_r / \partial x_s)$ по x_s , мы получим

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \varphi_{rs}} \eta_r \right]_{a_s}^{b_s} - \int_{a_s}^{b_s} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{rs}} \eta_r dx_s.$$

В этом выражении первое слагаемое равно нулю, так как $\eta_r = 0$ при $x_s = a_s$ и $x = b_s$. Таким образом, первая вариация $\delta \mathcal{L}$, т. е. главная часть приращения интеграла $\mathcal{L}$, равна

$$\delta \mathcal{L} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} \sum_{r=1}^n \varepsilon_r \left[\frac{\partial L}{\partial \varphi_r} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{rs}} \right) \right] \eta_r dx_1 \dots dx_m. \quad (3.1.2)$$

Если $\delta \mathcal{L}$ отлично от нуля, то $\mathcal{L}$ не может достигать при $\varepsilon_r = 0$ ни максимума, ни минимума. Если же $\delta \mathcal{L} = 0$ независимо от (малых) значений ε_r , то это означает, что при выбранных φ интеграл $\mathcal{L}$ как функция переменных ε_r имеет при $\varepsilon_r = 0$ *либо минимум, либо максимум, либо минимакс*. Какая из этих возможностей действительно реализуется, обычно удается выяснить из физических соображений; если же это неясно, то можно вычислить следующий член ряда Тейлора для $\mathcal{L}$ (второго порядка относительно ε_r) и посмотреть, положителен он, отрицателен или равен нулю. Ради экономии места мы условимся впредь говорить «минимум» вместо «минимум или максимум или минимакс» и «минимизировать» вместо «отыскивать значение, соответствующее минимуму или максимуму или минимаксу».

Мы видим, что для того, чтобы $\mathcal{L}$ имело экстремальное значение (максимум или минимум), необходимо выбрать такие φ , при которых в (3.1.2) коэффициенты при всех ε_r обращаются в нуль. Итак, для определения функций φ получается следующая система уравнений:

$$\sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{rs}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_r}, \quad r = 1, \dots, n, \quad (3.1.3)$$

где $\varphi_{rs} = \partial \varphi_r / \partial x_s$. Эти уравнения, служащие для отыскания оптимальных φ , называются *уравнениями Эйлера*. В этой главе мы будем широко ими пользоваться.

В связи с полученными выводами следует сделать несколько общих замечаний. Прежде всего, если описанный вариационный принцип претендует на универсальную применимость, то $\mathcal{L}$ должно быть инвариантом, а плотность функции Лагранжа L , или частное от деления L на скалярный множитель, входящий в выражение элемента интегрирования, должны быть инвариантны относительно преобразований координат в пространстве параметров (переменных интегрирования). Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем для отыскания других плотностей функций Лагранжа.

Другое замечание, еще более общего характера, состоит в том, что вариационный принцип скорее способствует унификации теории, нежели получению первых результатов в новом направлении. Обычно оказывается, что дифференциальные уравнения, описывающие то или иное явление, выводятся раньше, чем находится плотность функции Лагранжа L , посредством которой эти уравнения можно получить только что описанным методом. Это несколько не умаляет роли плотности функции Лагранжа, так как весьма полезно выяснить, какую именно физическую величину

следует минимизировать для того, чтобы получить дифференциальные уравнения исследуемого явления, а сам вид вариационных уравнений часто подсказывает плодотворные аналогии и обобщения.

Уравнения связи. Во многих случаях интеграл Лагранжа, подлежащий минимизации, подчиняется еще одному или нескольким условиям, налагающим дальнейшие ограничения на независимые переменные и параметры. В таких случаях для получения ответа мы прибегаем к методу множителей Лагранжа. Как работают эти множители, лучше всего показать на примере.

Пусть требуется найти максимум функции $f(x, y)$. Если нет никаких дополнительных условий, то мы решаем систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (3.1.4)$$

которая определит пару (или пары) значений (x_0, y_0) переменных x и y , точку (или точки), где f имеет максимум, минимум или седловую точку (минимакс); соответствующее значение функции есть $f(x_0, y_0)$. Поскольку f представляет собой функцию двух независимых переменных, для отыскания стационарных точек (x_0, y_0) нужны два уравнения (3.1.4). Типичный пример изображен на рис. 3.1, где функция f описана своими линиями уровня.

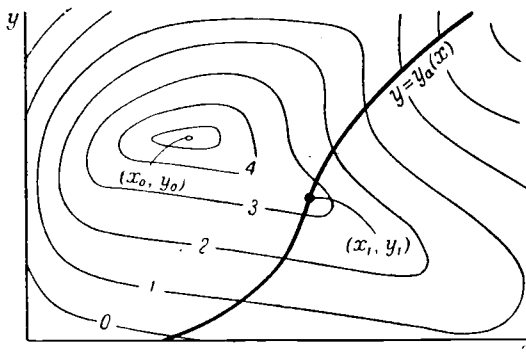


Рис. 3.1. Точка максимума (x_0, y_0) функции $f(x, y)$, представленной линиями уровня 0, 1, 2, ... Точка максимума (x_1, y_1) на линии $y = y_a(x)$.

Теперь предположим, что ищется максимум функции $f(x, y)$ на линии, заданной уравнением связи $y = y_a(x)$. Эта линия, вообще говоря, не проходит через точку (x_0, y_0) , поэтому искомая точка (или точки) (x_1, y_1) может не совпасть с (x_0, y_0) (см. рис. 3.1). Эти (x_1, y_1) можно найти, подставив в f выражение y через x из уравнения связи. Получив таким образом функцию f вдоль линии как функцию одного переменного x , мы вычисляем ее производную и решаем уравнение

$$\frac{d}{dx} f(x, y_a(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy_a}{dx} [y_a(x)] = 0. \quad (3.1.5)$$

Искомая точка максимума будет определяться одним из корней x_1 уравнения (3.1.5) и соответствующим значением $y_1 = y_a(x_1)$.

Однако эта же задача может быть решена другим методом, на первый взгляд более сложным и совершенно отличным от того, который приводит к уравнению (3.1.5). Пусть $g(x, y) = 0$ — уравнение связи. Введем еще третье неизвестное λ и попробуем минимизировать новую функцию $f + \lambda g$ при соблюдении условия $g = 0$. При этом нам придется решать систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = 0, \quad (3.1.6)$$

отыскивая одновременно значения x , y и λ .

Непосредственно не очевидно, что найденные из (3.1.6) x и y совпадают со значениями x , $y_a(x)$, найденными с помощью уравнения (3.1.5). Связь между ними станет яснее, если уравнение связи $g(x, y) = 0$ можно представить в виде $y_a(x) - y = 0$, как предполагалось выше. В этом

случае первые два уравнения системы (3.1.6) примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{dy_a}{dx} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda = 0.$$

Выразив λ из второго уравнения и подставив его в первое, мы получим

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy_a}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

т. е. как раз уравнение (3.1.5). Таким образом, в этом простом случае метод множителей Лагранжа дает тот же результат, что и первый, непосредственный метод. Так будет и в других случаях. При этом если в разобранном простом случае метод множителей более громоздок, чем метод, основанный на применении уравнения (3.1.5), то в более сложных случаях он оказывается более простым.

В применении к задаче об отыскании минимума интеграла (3.1.1) метод множителей Лагранжа может быть сформулирован следующим образом: пусть $L(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s)$ ($s=1, 2, \dots, m$; $r=1, 2, \dots, n$) — плотность функции Лагранжа, а уравнения связи имеют вид

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} G_t \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, x \right) dx_1 \dots dx_m = C_t, \quad (3.1.7)$$

где C — постоянные ($t=1, 2, \dots, k$; $k < m$); берется вспомогательный интеграл

$$\mathcal{L}' = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} L' \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, x \right) dx_1 \dots dx_m,$$

где

$$L' = L(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s) + \sum_{t=1}^k \lambda_t G_t(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s) \quad (3.1.8)$$

и требуемые φ и значения λ отыскиваются из новых уравнений Эйлера

$$\sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial L'}{\partial \varphi_{rs}} = \frac{\partial L'}{\partial \varphi_r}, \quad (3.1.9)$$

к которым добавляются k уравнений (3.1.7). В этом случае метод множителей Лагранжа бесспорно является наиболее простым.

3.2. Принцип Гамильтона и классическая динамика

В классической динамике параметром является время t , а величинами φ в функции Лагранжа служат координаты q , определяющие в каждый момент времени конфигурацию системы. Если система имеет n степеней свободы, то можно выбрать n независимых координат $q_1, \dots, q_n$, которые будут полностью определять конфигурацию системы; соответствующие скорости будут $\dot{q}_r = dq_r/dt$. Как бы ни были выбраны координаты q , кинетическая энергия инерциальной системы всегда представляет собой некоторую квадратичную форму относительно скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad (3.2.1)$$

коэффициенты a которой могут зависеть от координат q . Если система *консервативна* (т. е. ее полная механическая энергия с течением времени остается постоянной), то внешняя сила, действующая на систему, может быть представлена как градиент некоторой скалярной потенциальной функции, т. е. обобщенные силы, соответствующие координатам q_r , выражаются в виде

$$F_r = - \frac{\partial V}{\partial q_r}. \quad (3.2.2)$$

Потенциальная энергия может явно зависеть от t , но она не является функцией скоростей $\dot{q}$.

В том случае, когда система консервативна, вариационный принцип, определяющий уравнения движения, называется *принципом Гамильтона* и в качестве функции Лагранжа берется *кинетический потенциал* (см. стр. 224) $T - V$. Получающееся уравнение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0 \quad (3.2.3)$$

гласит, что под действием консервативных сил при любых допустимых начальных условиях система движется так, что разность кинетической и потенциальной энергий имеет минимальное (или в редких случаях максимальное) среднее по времени.

Уравнения Лагранжа. Уравнения Эйлера для координат в рассматриваемом случае:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial (T - V)}{\partial q_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.4)$$

называются *уравнениями Лагранжа* движения системы. Левые части этих уравнений представляют ускорения системы, а правые части — соответствующие силы, внешние (выведенные из потенциальной энергии V) плюс «кинетические силы» (такие, как центробежные), обусловленные самим движением системы. Когда эти силы не консервативны, то есть не существует потенциальной энергии, вариационный принцип приводит к уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{r=1}^n F_r \delta q_r \right) dt = 0$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial q_r} + F_r. \quad (3.2.5)$$

Уравнения Лагранжа принадлежат к числу самых употребительных уравнений классической динамики.

Кинетическая и потенциальная энергии представляют собой скаляры, инвариантные относительно преобразований координат; следовательно, они могут быть выражены через любые обобщенные координаты, и в любой системе таких координат уравнения Лагранжа будут иметь одинаковую форму. В любом случае величина

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = p_r$$

называется r -м импульсом. Таким образом, уравнения Лагранжа можно представить в виде

$$\frac{dp_r}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial q_r} & \text{в случае консервативной системы,} \\ F_r & \text{в общем случае.} \end{cases}$$

Если в качестве q мы возьмем прямоугольные координаты, то T будет зависеть лишь от $\dot{q}$ и не будет зависеть от q , и уравнения Лагранжа сведутся к обычным уравнениям Ньютона

$$\frac{d}{dt} (\text{импульс}) = \text{сила}.$$

Таким образом, принцип Гамильтона в простой инвариантной форме охватывает все уравнения классической динамики.

Энергия и функция Гамильтона. В том случае, когда система консервативна, функцией координат и импульсов, сохраняющей постоянное значение при движении системы, является полная энергия E системы — сумма кинетической и потенциальной энергий.

Эта последняя, выраженная через координаты q и импульсы p , называется функцией Гамильтона (гамильтонианом) системы и обозначается H . Так как функция Лагранжа L равна $T - V$, а полная энергия $E = T + V$, то $E = 2T - L$. Поэтому уравнение, к которому приводит вариационный принцип, может быть записано в форме $\delta \int (2T - E) dt = 0$, а отсюда можно получить уравнения, связывающие гамильтонову функцию со скоростями и ускорениями. Хотя при этом получаются лишь новые формы «старых» уравнений движения, но они оказываются особенно хорошо приспособленными для перевода на язык квантовой механики.

Прежде всего нужно представить величину $2T - E$, зависящую от q и $\dot{q}$, как функцию от q и p . Импульс p_r , как было отмечено выше, получается дифференцированием кинетической энергии T по $\dot{q}_r$. Выразив p_r через $\dot{q}_r$, мы легко исключим $\dot{q}$ из L и T . В силу (3.2.1)

$$p_r = \sum_{s=1}^n a_{rs} \dot{q}_s$$

и, следовательно,

$$2T = \sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r = L + H. \quad (3.2.6)$$

Это уравнение дает ответ на вопрос, который до сих пор мы себе не задавали: можно ли выразить H только через q и p , полностью исключив $\dot{q}$? В самом деле, взяв вытекающее из (3.2.6) равенство $H = \sum p \dot{q} - L$ (в котором L , будучи функцией от q и $\dot{q}$, в то же время не может быть в общем случае выражена только через q и p) и придав величинам q , p и $\dot{q}$ малые приращения, мы получим

$$dH = \sum p d\dot{q} + \sum \dot{q} dp - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \sum \frac{\partial L}{\partial q} dq.$$

Так как, по определению, $p = \partial L / \partial \dot{q}$, то

$$dH = \sum \dot{q} dp - \sum \frac{\partial L}{\partial q} dq.$$

Итак, полное приращение функции H выражается через приращения q и p , поэтому H можно выразить *только* через q и p (впрочем, если L зависит явно от t , то $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$ и H оказывается функцией от q , p и t).

Если энергия выражена через p и q (и через t , если это необходимо), то ее называют функцией Гамильтона и обозначают H . Вариация интеграла $\int L dt$ принимает при этом вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (2T - H) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^n \left(p_r \delta \dot{q}_r + \dot{q}_r \delta p_r - \frac{\partial H}{\partial q_r} \delta q_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} \delta p_r \right) dt,$$

где δq и δp означают вариации значений q и p , принимаемых вдоль реальной траектории (эти вариации соответствуют ранее употреблявшимся величинам $\epsilon \eta$). Интегрируя по частям слагаемые $p_r \delta \dot{q}_r = p_r (d\delta q_r/dt)$, мы расщепим вариацию подинтегральной функции на части, одна из которых вызвана вариацией координат q , а другая — вариацией импульсов p

$$\delta \int L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^n \left[\left(-\dot{p}_r - \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) \delta q_r + \left(\dot{q}_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} \right) \delta p_r \right] dt = 0.$$

В силу предположения, что p можно варьировать независимо от q , каждое из выражений в круглых скобках в отдельности должно обращаться в нуль, и мы придем к другой форме уравнений движения

$$\dot{q}_r = \partial H / \partial p_r, \quad \dot{p}_r = -(\partial H / \partial q_r), \quad (3.2.7)$$

которые называются *каноническими гамильтоновыми уравнениями*. Они применялись несколько раз в предыдущей главе (см. стр. 222 и 233). Мы вновь применим их в этой главе позже.

Легко видеть, что тогда, когда гамильтонова функция не зависит от времени *явно*, она не изменяется с течением времени. Действительно, в этом случае

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt},$$

а это выражение в силу уравнений (3.2.7) тождественно равно нулю и, следовательно, при движении системы H сохраняет постоянное значение (т. е. *полное* изменение H со временем для консервативных систем равно нулю). Иногда H явно зависит от времени, но и в этих случаях изменение q и p с течением времени не влияет на H и $dH/dt = \partial H/\partial t$, то есть полное изменение функции H происходит лишь за счет того, что t является одним из ее аргументов; заметим, между прочим, что, как мы уже видели, $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$.

Импеданс. В гл. 2 (стр. 128) мы ввели понятие механического импеданса как отношения гармонической движущей силы $F_0 e^{-i\omega t}$ к соответствующей скорости. Если система линейна, то это отношение не зависит от амплитуды колебаний и является функцией от ω и констант системы. Как мы увидим в следующей главе, введение импеданса дает возможность свести изучение реакции системы как функции времени к изучению импеданса как функции частоты. Последняя задача часто оказывается более простой.

Во всяком случае, канонические уравнения (3.2.7) позволяют нам подойти к понятию импеданса с новой точки зрения. Заметим сначала,

что если координате q_r соответствует внешняя сила F_r , то канонические уравнения примут вид

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r + \frac{\partial H}{\partial q_r} = F_r.$$

Мы видим, что каждому из уравнений Лагранжа второго порядка соответствует пара канонических уравнений первого порядка как раз такого вида, какой удобен для вычисления импеданса (если система такова, что для нее импеданс имеет смысл). Действительно, если r -й координате соответствуют внешняя сила F_r и скорость $\dot{q}_r$, то отношение F_r к $\dot{q}_r$ равно как раз

$$Z_r = \frac{p_r + (\partial H / \partial \dot{q}_r)}{(\partial H / \partial p_r)}.$$

С этой новой точки зрения мы можем представить себе, что мы изучаем основные свойства системы, «испытывая» ее воздействием сил, изменяющихся гармонически. Мы прилагаем такого рода силу поочередно к каждой координате и измеряем отношение этой силы к соответствующей скорости. Если эти отношения не зависят от амплитуды, то с их помощью можно восстановить систему. Обратно, если известна функция Лагранжа системы, мы можем для любой координаты вычислить импеданс. Положим $q_r = A_r e^{i\omega t}$ (в гл. 2 и много раз в дальнейшем мы изображаем с помощью множителя $e^{-i\omega t}$ простое гармоническое колебание; здесь и в гл. 4 мы будем рассматривать Z при *всех* значениях ω , положительных, отрицательных и мнимых, так что можно сначала вычислять Z и при положительных показателях). Из равенства $p_r = \partial L / \partial \dot{q}_r$ мы можем вычислить p_r как функцию от $\dot{q}_r$ и тем самым выразить p_r через $e^{i\omega t}$ и амплитуду A_r . Далее, мы можем выразить таким же образом $\partial H / \partial p_r$, $\partial H / \partial \dot{q}_r$ и, следовательно, отношение Z_r . Если это последнее не зависит от A и от времени, то оно представляет собой импеданс.

Пусть потенциальная энергия системы достигает минимума, равного $V_{\min}$, при некоторых определенных значениях координат q . Приняв эту точку минимума за начало отсчета, мы получим, что при малых q , т. е. при малых отклонениях от точки минимума, потенциальная энергия выражается в виде *квадратичной функции* от q :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r,s} b_{rs} q_r q_s + V_{\min}, \quad (3.2.8)$$

т. е. мы получим выражение, сходное с (3.2.1). Иногда этот минимум — не абсолютный, а зависит от состояния «динамического равновесия». Например, может оказаться, что один из импульсов, скажем p_n , постоянен; тогда $\partial H / \partial q_n = 0$. В таком случае q_n может быть исключено из уравнений и постоянную p_n можно рассматривать как некоторую характеристику системы, определяемой меньшим числом координат. При этом в выражении потенциальной энергии могут появиться дополнительные члены, зависящие от p_n , «вызванные» движением с постоянным импульсом (их можно назвать *динамическими потенциальными энергиями*). Эта новая система может иметь точки равновесия там, где «динамические» силы уравновешиваются «истинными» силами, и тогда вблизи точек равновесия потенциальная энергия опять будет выражаться в виде (3.2.8), где некоторые из b зависят от постоянной p_n (которая уже не рассматривается как импульс).

Итак, при достаточно малых отклонениях системы от (динамического или иного) равновесия гамильтонова функция H представляет собой квадратичную функцию импульсов и координат. Приложенная сила F_r имеет выражение

$$\dot{p}_r + \frac{\partial H}{\partial q_r} = \sum_m (a_{rm} \ddot{q}_m + b_{rm} \dot{q}_m).$$

Это можно проще записать в абстрактной векторной форме. Координату q_r назовем r -й компонентой вектора смещения $\mathbf{q}$, а F_r — r -й компонентой вектора силы $\mathbf{F}$. Тогда соотношения, связывающие векторы силы, смещения и ускорения, можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \mathfrak{A} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathfrak{B} \cdot \dot{\mathbf{q}},$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — аффиноры, имеющие соответственно компоненты a_{mn} и b_{mn} . Если теперь вектор $\mathbf{F}$ является простым гармоническим с частотой $\omega/2\pi$, то $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 e^{i\omega t}$, где $\mathbf{F}^0$ — постоянный вектор, и установившаяся скорость $\dot{\mathbf{q}}$ имеет вид $\mathbf{U} e^{i\omega t}$, где компоненты U_r вектора $\mathbf{U}$ — комплексные числа с модулями, равными амплитудам скоростей $\dot{q}_r$.

В этом случае предыдущее соотношение может быть записано в виде

$$\mathbf{F}^0 = \mathfrak{Z} \cdot \mathbf{U}, \quad (3.2.9)$$

где

$$\mathfrak{Z}(\omega) = i\omega \mathfrak{A} - \frac{i}{\omega} \mathfrak{B}$$

называется *аффинором импеданса* системы вблизи рассматриваемой точки равновесия. Итак, понятие импеданса всегда имеет смысл достаточно близко от точек равновесия (если таковые имеются). Диагональный элемент Z_{mm} называется *входным импедансом*, соответствующим m -й координате, а элемент Z_{mn} ($m \neq n$) — *переносным импедансом*, соответствующим паре координат с номерами m и n . Всегда можно (см. стр. 64) преобразовать $\mathfrak{Z}$ к главным осям, т. е. перейти к *нормальным координатам* q_r^0 , в которых все переносные импедансы равны нулю, а диагональные элементы $Z_r^0(\omega)$ представляют собой *главные значения* импеданса. Такое преобразование может быть различным при различных ω . Через $\mathfrak{Z}$ и $\mathbf{F}^0$ можно выразить также смещения $\mathbf{q} = \mathbf{A} e^{i\omega t}$

$$\mathbf{F} = i\omega \mathfrak{Z} \cdot \mathbf{A} = (-\omega^2 \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot \mathbf{A},$$

где $|A_m|$ — амплитуда смещения по координате q_m .

Переход к нормальным координатам представляет собой частный случай *поворота* осей в абстрактном векторном пространстве. Новые координаты q' связаны со старыми q формулами

$$q'_r = \sum_{m=1}^n \gamma_{rm} q_m,$$

где $\sum_{m=1}^n \gamma_{rm} \gamma_{sm} = \delta_{rs}$. Другими словами, матрица (абстрактный векторный оператор) с элементами γ_{mn} — унитарная. Сами числа γ_{rm} играют роль направляющих косинусов (см. стр. 32). В случае преобразования поворота они не зависят от q_r . Как было показано на стр. 66, сумма диа-

гональных элементов $\mathfrak{Z}$ остается инвариантной при поворотах, т. е.

$$|\mathfrak{Z}| = \sum_{m=1}^n Z_{mm} = \sum_{m=1}^n Z_m^o;$$

подобной же инвариантностью обладает и определитель

$$\Delta_Z = |Z_{mn}| = Z_1^o(\omega) Z^o(\omega) \dots Z_n^o(\omega).$$

Полезно еще вычислить аффино́р $\mathfrak{Y}$, обратный по отношению к $\mathfrak{Z}$, т. е. такой, для которого

$$\mathbf{U} = \mathfrak{Y} \cdot \mathbf{F}^o, \quad \mathbf{A} = (1/i\omega) \mathfrak{Y} \cdot \mathbf{F}^o, \quad \mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Y} = \mathfrak{I},$$

где $\mathfrak{I}$ — тождественный оператор (идемфактор). Согласно сказанному на стр. 63, компоненты Y_{mn} и Z_{mn} связаны соотношениями

$$Y_{mr} = Z'_{mr}/\Delta_Z,$$

где Z'_{mr} — алгебраическое дополнение элемента Z_{mr} в определителе Δ_Z . Далее очевидно, что $\mathfrak{Y}$ имеет те же главные оси, что $\mathfrak{Z}$, и главные значения аффино́ра $\mathfrak{Y}$ равны

$$Y_m^o = 1/Z_m^o.$$

$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}^{-1}$ называется *аффино́ром полной проводимости (адмитанса) системы*.

Если определитель Δ_Z равен нулю, то $\mathfrak{Y}$, конечно, не может быть вычислен. Это происходит тогда, когда значение угловой скорости ω обращает в нуль одно из главных значений Z_m^o импеданса. Вспомнив, как именно $\mathfrak{Z}$ зависит от ω , мы заметим, что определитель

$$(-i\omega)^n \Delta_Z = |\omega^2 a_{mr} - b_{mr}| = (-i\omega)^n Z_1^o(\omega) Z_2^o(\omega) \dots Z_n^o(\omega)$$

представляет собой многочлен n -й степени относительно ω^2 ; последний обращается в нуль при n определенных значениях ω^2 (некоторые из них могут совпадать). Так как порядок нумерации главных осей произволен, то можно считать, что $Z_r^o(\omega)$ обращается в нуль при $\omega = \pm \omega_r$, где $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ расположены в порядке возрастания. Отсюда будет следовать, что главные значения импеданса могут быть представлены в виде

$$\{Z_r^o(\omega) = i\omega M_r - (i/\omega) K_r = \frac{i}{\omega} M_r (\omega^2 - \omega_r^2) = \frac{1}{Y_r^o(\omega)}, \quad (3.2.10)$$

где M_r и $K_r = \omega_r^2 M_r$ — постоянные, определяемые значениями a_{mr} и b_{mr} . Таким образом, мы видим, что главные значения импеданса консервативной системы чисто мнимые и представляют собой нечетные функции от ω , то есть $Z(-\omega) = -Z(\omega)$.

При $\omega = \pm \omega_r$ амплитуда колебаний, соответствующих r -й нормальной координате, оказывается бесконечной (за исключением случая, когда $F_r^o = 0$) и установившегося решения не существует. Частоты $\omega_r/2\pi$, соответствующие корням ω_r определителя Δ_Z , называются *резонансными частотами системы*.

Заметим, между прочим, что постоянные M_r и K_r , так же как ω_r^2 , положительны, так как в противном случае потенциальная энергия не достигла бы абсолютного минимума при $q = 0$.

Канонические преобразования. Уравнения (3.2.7) отличаются заманчивой простотой. Прежде всего, вместо уравнений Лагранжа (3.2.4) второго порядка мы имеем пары уравнений первого порядка, которые для описания p и q должны решаться совместно. Это распадение переменных, описывающих состояние системы, на две самостоятельных группы p и q

выражает отличительную особенность классической динамики: силе пропорционально *ускорение*, то есть вторая производная; поэтому, как начальное положение, так и начальная скорость могут быть выбраны произвольно. Величины q являются обобщенными компонентами положения, а величины p связаны с соответствующими скоростями таким образом, что соотношения между q и p выступают в симметричной форме.

Канонические уравнения (3.2.7) являются теми основными уравнениями, которые связывают p и q для заданной системы и в то же время определяют поведение самой системы. Выбор гамильтоновой функции H переменных p и q определяет семейство пар p и q , связанных уравнениями (3.2.7), при данной гамильтоновой функции H величины p и q называются *канонически сопряженными переменными* для функции H (или просто *сопряженными переменными*).

Одна и та же, система, разумеется, может быть¹⁾ описана различными координатами (и сопряженными импульсами). Так же как теория поля стала яснее после исследования того, как влияют на компоненты поля преобразования координат, так и здесь рассмотрение эффекта перехода от одних сопряженных переменных p и q к другим помогает уяснить дело. Для этого можно было бы, идя окольным путем, заменить q новыми координатами Q , способными описать конфигурацию рассматриваемой системы, выразить функцию Лагранжа L через Q и $\dot{Q}$, найдя по уравнениям $P_r = \partial L / \partial \dot{Q}_r$ сопряженные импульсы P и, наконец, составить новую функцию Гамильтона $K = \Sigma P \dot{Q} - L$, выраженную через новые сопряженные переменные P и Q . Но можно указать прием одновременного преобразования сопряженных пар p, q в новые пары P, Q , оставляющего инвариантным форму уравнений (3.2.7). Такие преобразования называются *каноническими преобразованиями*.

Канонические преобразования связаны с семейством преобразований, которые математики называют *преобразованиями прикосновения* (контактными преобразованиями). Это — преобразования *линейных элементов* (т. е. *положения и направления*), а не точек. А так как мы хотим преобразовывать как координаты q , определяющие положение системы, так и импульсы p , связанные с направлением движения системы, то связь между теми и другими преобразованиями очевидна. В основу преобразования прикосновения кладется некоторая функция S старых и новых координат.

В качестве примера рассмотрим двумерный случай (см. рис. 3.2), когда S есть функция от x, y и x', y' . Каждой точке P пространства (x, y) (т. е. каждой паре фиксированных значений x и y) ставится в соответствие кривая C в пространстве (x', y') , изображаемая уравнением

$$S(x, y; x', y') = \text{const}^1);$$

обратно, каждой точке плоскости (x', y') таким же образом ставится в соответствие некоторая кривая в плоскости (x, y) . Если точка в плоскости (x, y) описывает какую-нибудь кривую K , то соответствующее семейство кривых в плоскости (x', y') может иметь *огibaющую* E , которую мы сопоставляем с кривой K . Таким образом, точкам плоскости (x, y) поставлены в соответствие кривые в плоскости (x', y') , а кривым в плоскости (x, y) — *огibaющие* семейств кривых в плоскости (x', y') . Поэтому каждому линейному элементу (т. е. точке плюс направление) в плоскости (x, y) ставится в соответствие некоторый линейный элемент в плоскости (x', y') .

¹⁾ Эта константа в дальнейших рассуждениях фиксирована. — *Прим. ред.*

Возьмем в плоскости (x, y) две точки (x, y) и $(x+dx, y+dy)$, определяющие линейный элемент, и постараемся получить соответствующий ему линейный элемент в плоскости (x', y') . Кривые в плоскости (x', y') , отвечающие точкам (x, y) и $(x+dx, y+dy)$, имеют уравнения

$$S(x, y; x', y') = C,$$

$$S(x+dx, y+dy; x', y') = S(x, y; x', y') + \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy = C$$

(последнее с точностью до бесконечно малых второго порядка). Если

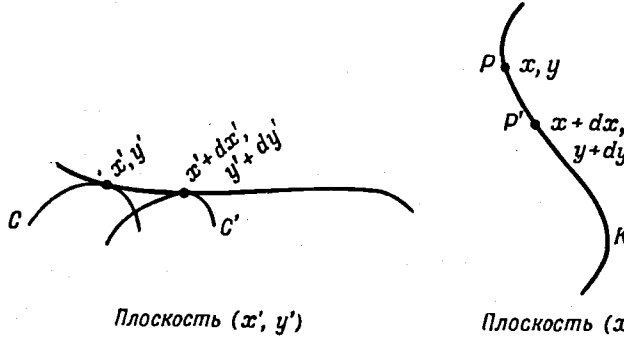


Рис. 3.2. Преобразование прикосновения в двумерном случае.

положить $dx = \dot{x} ds$ и $dy = \dot{y} ds$, где $\dot{y}/\dot{x}$ — угловой коэффициент заданного линейного элемента, то мы придем к системе уравнений

$$S(x, y; x', y') = C, \quad \dot{x} \frac{\partial S}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial S}{\partial y} = 0,$$

решив которую, мы получим точку (x', y') , соответствующую точке (x, y) . Направление огибающей в точке (x', y') мы получим, взяв в первом из уравнений дифференциалы по штрихованным аргументам

$$\frac{\partial S}{\partial x'} dx' + \frac{\partial S}{\partial y'} dy' = 0$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial x'} \dot{x}' + \frac{\partial S}{\partial y'} \dot{y}' = 0,$$

где $dx' = \dot{x}' ds$, $dy' = \dot{y}' ds$. Симметрия полученных уравнений относительно производных свидетельствует о симметрии преобразования по отношению к обеим плоскостям.

Поясним сказанное на простом примере. Пусть $S = (x - x')^2 + (y - y')^2$ — функция, определяющая преобразование, и $C = R^2$. Точке $x = a$, $y = b$ отвечает в плоскости (x', y') окружность радиуса R с центром в (a, b) . Если мы рассмотрим линейный элемент, определенный точками (a, b) и $(a+dx, b)$, то при этом $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 0$, и мы получим систему уравнений

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = R^2, \quad 2(x' - a) = 0.$$

Огибающей окружностей радиуса R с центрами на прямой $y' = b$ служит пара прямых $y' = b \pm R$. Поэтому преобразованный элемент будет определяться (бесконечно близкими) точками $(a, b \pm R)$ и $(a+dx, b \pm R)$.

Заметим, что этот пример указывает на тесную связь между преобразованиями прикосновения и принципом Гюйгенса.

В случае динамической системы с гамильтоновой функцией H , не зависящей явно от времени, как мы вскоре покажем, выражение $\sum p dq - \sum P dQ$ как функция от p и q (или от P и Q и т. д.) представляет собой полный дифференциал, если переход от p, q к P, Q осуществляется с помощью канонического преобразования. При этом функция S может быть получена интегрированием выражения

$$dS = \sum p_r dq_r - \sum P_r dQ_r.$$

Как функция от P и Q , S будет функцией, определяющей преобразование прикосновения.

При таком преобразовании сохраняется вариационный принцип Гамильтона и, следовательно, не изменяется вид канонических уравнений (3.2.7); действительно, добавив в уравнении, определяющем dS , выражение $(K - H)dt$ (равное нулю, так как K есть новая гамильтонова функция) и проинтегрировав по времени, мы получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum p \dot{q} - H \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum P \dot{Q} - K \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} dS.$$

Если концевые точки t_0 и t_1 фиксированы, то интеграл от dS не будет меняться при деформации пути интегрирования, поэтому $\delta \int \left(\sum P \dot{Q} - K \right) dt$ будет равно нулю, коль скоро $\delta \int \left(\sum p \dot{q} - H \right) dt = 0$.

Итак, преобразование, определяемое полученной функцией S , представляет собой каноническое преобразование, и величины P, Q и K связаны уравнениями

$$\dot{Q}_r = \partial K / \partial P_r, \quad \dot{P}_r = -(\partial K / \partial Q_r),$$

т. е. каноническими уравнениями (3.2.7).

Даже тогда, когда H (а следовательно, и K) явно зависит от времени, функцию S можно получить, интегрируя уравнение

$$\sum p_r \dot{q}_r - H - \sum P_r \dot{Q}_r + K = dS/dt,$$

или то же уравнение, записанное в дифференциалах,

$$\sum p_r dq_r - \sum P_r dQ_r + (K - H) dt = dS,$$

где dS — полный дифференциал. Так как в любом случае

$$dS = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial S}{\partial Q_r} dQ_r \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt,$$

то, приравняв коэффициенты при дифференциалах, мы получим выражения импульсов через координаты, участвующие в преобразовании

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}, \quad P_r = -\frac{\partial S}{\partial Q_r}, \quad K - H = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.2.11)$$

Скобки Пуассона. Изучение инвариантов канонических преобразований охватывает большую часть основных понятий классической динамики. Одним из таких инвариантов является энергия H (если только H не зависит от t явно). Целый класс инвариантов наиболее удобно выразить

посредством скобок Пуассона. Так называется для произвольных двух функций u и v от p и q выражение [см. формулу (2.6.4)]

$$(u, v) = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial p_r} \frac{\partial v}{\partial q_r} - \frac{\partial u}{\partial q_r} \frac{\partial v}{\partial p_r} \right).$$

Скобки Пуассона обладают рядом интересных алгебраических свойств, по форме напоминающих свойства производных. Так, если c — постоянная, не зависящая от p и q , то

$$(u, c) = 0;$$

далее, выполняются соотношения

$$(u, v + w) = (u, v) + (u, w), \quad (u + v, w) = (u, w) + (v, w),$$

$$(uv, w) = u(v, w) + v(u, w) \text{ и т. д.}$$

Скобки Пуассона антисимметричны, т. е. $(u, v) = -(v, u)$. Причина пользы этих скобок заключается в том, что они инвариантны относительно канонических преобразований. Если q, p и Q, P связаны друг с другом так, что выражение $\sum p dq - \sum P dQ$ является полным дифференциалом, то для любой пары функций u и v переменных p, q (или P, Q)

$$(u, v) = - \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_r} \frac{\partial v}{\partial p_r} - \frac{\partial u}{\partial p_r} \frac{\partial v}{\partial q_r} \right) = - \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial Q_r} \frac{\partial v}{\partial P_r} - \frac{\partial u}{\partial P_r} \frac{\partial v}{\partial Q_r} \right).$$

Таким образом, если уравнения динамики записаны посредством скобок Пуассона, то они инвариантны относительно канонических преобразований. Так, канонические уравнения движения (3.2.7) можно записать в виде

$$\dot{q}_r = (H, q_r), \quad \dot{p}_r = (H, p_r).$$

В самом деле, из канонических уравнений и самого определения скобок Пуассона вытекает, что для любой функции u переменных p и q

$$\frac{du}{dt} = (H, u), \quad \frac{\partial u}{\partial q_r} = (p_r, u), \quad \frac{\partial u}{\partial p_r} = (u, q_r).$$

Скобками Пуассона можно также пользоваться для выяснения того, является ли некоторое заданное преобразование преобразованием прикосновения. Система n координат q и сопряженных импульсов связана с другой системой n координат Q и сопряженными импульсами некоторым преобразованием прикосновения тогда и только тогда, когда

$$(Q_r, Q_s) = 0, \quad (P_r, P_s) = 0, \quad (P_r, Q_s) = \delta_{rs},$$

где $\delta_{rs} = 0$ или 1 соответственно при $r \neq s$ и при $r = s$.

Интеграл действия. Заметим, что функция S , определяющая преобразование, имеет размерность действия и что если рассматривать S как функцию от q при фиксированных Q , то вектор p , будучи градиентом функции S , ортогонален поверхности $S = \text{const}$. Другими словами, выбор значений переменных Q и функции K определяет семейство поверхностей действия $S = \text{const}$ и семейство траекторий системы, ортогональных этим поверхностям. С некоторой точки зрения Q можно рассматривать как начальные данные, а последующее поведение системы — как «развитие» преобразования прикосновения с течением времени.

Дифференциальное уравнение, определяющее функцию действия S как функцию начальных и конечных значений координат, можно получить, записав условие, состоящее в том, что гамильтонова функция остается постоянной $H(p, q) = E$, и введя в него $\partial S / \partial q$, вместо каждого p , согласно уравнениям (3.2.11). В результате мы получим дифференциальное уравнение

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = E, \quad (3.2.12)$$

называемое *уравнением Гамильтона — Якоби*. Его решение представляет собой функцию n переменных q , величины E и n постоянных интегрирования, которые мы можем обозначить $Q_2, \dots, Q_n$, а (последними мы можем при этом так распорядиться, чтобы α было просто аддитивным постоянным). Если мы положим $E = Q_1$, то остальные Q сможем рассматривать как новые координаты системы. Согласно (3.2.11), сопряженными импульсами будут $P_r = -\partial S / \partial Q_r$ и преобразованные координаты и импульсы будут удовлетворять каноническим уравнениям

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = -\frac{\partial H}{\partial E} = -1, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial Q_r} = 0 \quad (r = 2, \dots, n),$$

так как при этом $K = H$ и H не зависит от постоянных Q_r , служащих начальными данными. Таким образом, уравнения движения можно будет записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial E} = t + c_1, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_r} = c_r \quad (r = 2, \dots, n),$$

где c — другая система постоянных (соответствующих, наряду с Q , начальным данным). Следует отметить, что P_1 связано с величиной q_t (см. стр. 243).

Интересна и важна связь уравнения Гамильтона — Якоби с уравнением Шредингера (2.6.28) $\mathcal{H}[(\hbar/i)(\partial/\partial q), q]\psi = E\psi$ для волновой функции ψ в квантовой механике, но на этом мы не можем останавливаться. Нужно, впрочем, заметить следующее: если положить $\psi = e^{(i/\hbar)S}$, то тогда, когда S настолько больше $\hbar$, что $(i/\hbar)(\partial^2 S / \partial q^2)$ пренебрежимо мало по сравнению с $(i/\hbar)^2 (\partial S / \partial q)^2$, уравнение Шредингера приводится к уравнению Гамильтона — Якоби. В пределе, при больших значениях действия и энергии, поверхности постоянной фазы волновой функции ψ превращаются в поверхности постоянного действия S для соответствующей классической системы. Волновая механика переходит в геометрическую механику так же, как волновая оптика переходит в геометрическую оптику при исчезающе малых длинах волн.

Мы изложили здесь значительную часть классической динамики, не разбавленную примерами. Прежде чем перейти собственно к предмету настоящей главы, т. е. к приложению вариационного принципа к теории полей, мы укрепим наши позиции, рассмотрев несколько примеров.

Двумерный осциллятор. Полезным примером может служить движение массы, помещенной на конце упругого стержня, который может изгибаться в двух направлениях. При малых колебаниях движение массы происходит в плоскости, и в качестве координат q_1 и q_2 массы можно взять прямоугольные координаты, выбрав в качестве направлений для осей координат главные направления сил упругости, так что сила в направлении q_1 будет пропорциональна только q_1 , и аналогично для q_2 . При этом кинетическая энергия массы будет равна $\frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$. Если упругость одинакова по обоим направлениям, то потенциальная энергия полу-

чит выражение $\frac{1}{2} m \omega^2 (q_1^2 + q_2^2)$. Уравнения Лагранжа (3.2.4) совпадут с уравнениями Ньютона

$$\ddot{q}_1 = -\omega^2 q_1, \quad \ddot{q}_2 = -\omega^2 q_2,$$

и их решениями будут q_1 и q_2 , зависящие от t синусоидально с частотой $\omega/2\pi$.

Сопряженные импульсы суть, разумеется, $p_1 = m\dot{q}_1$, $p_2 = m\dot{q}_2$, так что функцией Гамильтона явится

$$H(p, q) = (1/2m) [p_1^2 + p_2^2 + m^2 \omega^2 (q_1^2 + q_2^2)]. \quad (3.2.13)$$

Хотя решения уже получены из уравнений Лагранжа, но для того, чтобы проиллюстрировать основные понятия и величины, введенные выше, мы попытаемся решить задачу при помощи преобразования прикосновения. Было бы удобно, если бы новые импульсы оказались постоянны, а для этого достаточно получить новую гамильтонову функцию K , не зависящую от Q_1 и Q_2 .

Проще всего положить K пропорциональной $P_1 + P_2$, так как при этом $\dot{P} = -\partial K/\partial Q = 0$. В силу уравнений $\dot{Q} = \partial K/\partial P$, Q будут пропорциональны времени t . Это приводит к следующему преобразованию:

$$q = A \sin(\omega t), \quad p = m\omega A \cos(\omega t), \quad Q \propto \omega t \text{ и } P \propto A^2 {}^1),$$

то есть

$$Q_1 = \arctg(m\omega q_1/p_1), \quad Q_2 = \arctg(m\omega q_2/p_2), \\ P_1 = (1/2m\omega) (p_1^2 + m^2 \omega^2 q_1^2), \quad P_2 = (1/2m\omega) (p_2^2 + m^2 \omega^2 q_2^2).$$

Величина $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - P_1 dQ_1 - P_2 dQ_2$, если ее выразить через p и q , имеет вид $\frac{1}{2} (p_1 dq_1 + q_1 dp_1 + p_2 dq_2 + q_2 dp_2)$ и является полным дифференциалом функции

$$S = \frac{1}{2} (p_1 q_1 + p_2 q_2) = \frac{1}{2} m\omega [q_1^2 \operatorname{ctg}(Q_1) + q_2^2 \operatorname{ctg}(Q_2)], \quad (3.2.14)$$

которая и определяет искомое преобразование. Значит, это — преобразование прикосновения. Выразив p , q через P , Q , мы получим

$$q_1 = \sqrt{2/m\omega} \sqrt{P_1} \sin Q_1, \quad q_2 = \sqrt{2/m\omega} \sqrt{P_2} \sin Q_2, \\ p_1 = \sqrt{2m\omega} \sqrt{P_1} \cos Q_1, \quad p_2 = \sqrt{2m\omega} \sqrt{P_2} \cos Q_2. \quad (3.2.15)$$

Мы видим, что новой гамильтоновой функцией является

$$K = \omega (P_1 + P_2).$$

Так как мы осуществили преобразование прикосновения, то уравнения Гамильтона (3.2.7) по-прежнему выполняются, и в силу того, что $\dot{Q} = \partial K/\partial P$, мы получим

$$Q_1 = \omega t + \varphi_1, \quad Q_2 = \omega t + \varphi_2.$$

Так как $\dot{P} = -\partial K/\partial Q = 0$, то P_1 и P_2 постоянны.

Решение получено, так как мы можем, подставив эти простые выражения в (3.2.15), получить формулы, выражающие координаты и импульсы через время и энергию движения K .

¹⁾ $\propto$ — знак пропорциональности. — Прим. ред.

Заметим, что P имеют размерность действия, а Q представляют собой углы. Действительно, если проинтегрировать $p dq$ по периоду колебаний и выразить результат через P и Q , то получится

$$\int p dq = 2P \int_0^{2\pi} \cos^2 Q dQ = 2\pi P$$

— величина, пропорциональная P . Эти канонически сопряженные переменные Q и P так и называются соответственно *угловой переменной* и *переменной действия*. Любая задача, связанная с колебательным процессом, имеющая синусоидальные решения, может быть упрощена и решена посредством должным образом подобранного преобразования прикосновения, вводящего эти переменные.

Возвращаясь к двумерному гармоническому осциллятору, мы можем также вместо прямоугольных координат q_1, q_2 выразить движение в полярных координатах r, φ . Соответствующее преобразование прикосновения запишется в виде

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \varphi = \arctg(q_2/q_1), \quad (3.2.16)$$

$$p_r = (1/r)(p_1 q_1 + p_2 q_2), \quad p_\varphi = (p_2 q_1 - p_1 q_2),$$

а гамильтонова функция получит выражение

$$K = (1/2m)[p_r^2 + p_\varphi^2/r^2 + m^2 \omega^2 r^2]. \quad (3.2.17)$$

Так как $\partial K/\partial \varphi = 0$, то величина p_φ — *момент количества движения* системы постоянна. Нетрудно видеть, что это, верно, независимо от того, каково выражение потенциальной энергии; коль скоро последняя зависит от r и не зависит от φ . Дальше, если нужно, можно воспользоваться решением в прямоугольных координатах.

Заряженная частица в электромагнитном поле. Бывают случаи, когда не очевидно, каков должен быть вид функции Лагранжа $L = T - V$, фигурирующей в вариационном интеграле (3.2.3). Так бывает, в частности, тогда, когда появляются силы, порожденные полем. Во многих таких случаях для получения правильного ответа приходится сопоставлять имеющиеся сведения о скалярных инвариантах системы с рассмотрением простейших предельных случаев.

Например, когда рассматривается заряженная частица в электромагнитном поле, следует ли энергию взаимодействия между магнитным полем и движением частицы считать частью кинетической энергии T (поскольку она зависит от скорости частицы) или отнести ее к потенциальной энергии V (раз она обусловлена воздействием поля)? Мы начнем с того, что перечислим все скалярные инварианты (в трехмерном пространстве) частицы и поля. Инвариантом должна быть сама функция Лагранжа $L = T - V$, так как принцип Гамильтона действует при любом выборе системы координат в пространстве. Кинетическая энергия $\frac{1}{2} m v^2$ частицы, взятой сама по себе, будучи пропорциональна скалярному квадрату вектора $\mathbf{v}$, также является инвариантом. Инвариантен и электрический потенциал φ (в трехмерном пространстве). Инвариантны также квадраты напряженностей E^2 и H^2 электрического и магнитного полей и квадрат A^2 векторного потенциала. Оба поля получаются из потенциалов посредством дифференцирования, а силы, действующие на частицу, получаются дифференцированием функции Лагранжа [см. формулы (3.2.2) и (3.2.4)], поэтому естественно ожидать, что в функцию Лагранжа частицы

войдут только потенциалы A и φ . Другим инвариантом, который может появиться, является скалярное произведение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$.

На частицу действуют силы $e\mathbf{E} = -e \operatorname{grad} \varphi - (e/c) (\partial \mathbf{A} / \partial t)$ [в силу (2.5.13)] и $(e/c) \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (e/c) \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}$ [см. (2.5.5)], и их выражение должно получаться, согласно уравнениям Лагранжа (3.2.4), дифференцированием функции L . Так как при этом должна появиться производная от A по времени, то в выражение L войдет произведение $\mathbf{v}$ и $\mathbf{A}$, предположительно $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$. При рассмотрении уравнения для самой частицы (уравнения, описывающие поля, мы пока не рассматриваем) в него не войдут члены второй степени относительно A . Итак, L для частицы должна быть комбинацией членов, содержащих v^2 , $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ и φ .

Первым из них, очевидно, является $\frac{1}{2} m v^2$, кинетическая энергия частицы. Член, содержащий φ , представляет собой потенциальную энергию; последняя, если частица несет заряд e , равна $-e\varphi$. Третий член должен дать $-(e/c) (\partial A / \partial t)$, т. е. второе слагаемое в выражении $e\mathbf{E}$ и, кроме того, $(e/c) \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Так как $\operatorname{grad} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{A})$ (см. стр. 116), то третий член, видимо, должен иметь вид $(e/c) \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$. Поэтому функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле должна иметь выражение

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + (e/c) \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi. \quad (3.2.18)$$

Заметив, что аргументами A и φ служат координаты x, y, z частицы в момент t , мы сможем записать три уравнения (3.2.4) (для трех координат) в виде одного векторного уравнения. Так как

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = m v_x + \frac{e}{c} A_x = p_x,$$

то таким векторным уравнением будет

$$\frac{d}{dt} \left(m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \operatorname{grad} L = -e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{A}).$$

Слагаемое, входящее в выражение $\mathbf{E}$ [см. (2.5.13)], содержит частную производную по времени $\partial \mathbf{A} / \partial t$, характеризующую изменение $\mathbf{A}$ в фиксированной точке пространства. В то же время левая часть последнего уравнения есть полная производная $\mathbf{A}$ по времени, т. е. скорость изменения $\mathbf{A}$ для движущейся частицы. В силу (2.3.2) для точки, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{A}).$$

Поэтому векторное уравнение движения частицы сводится к виду

$$\frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = -e \operatorname{grad} \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.2.19)$$

который соответствует выражению (2.5.12) для эффективной силы, действующей на заряженную частицу.

Теперь мы можем составить для рассматриваемой частицы функцию Гамильтона. Импульсом частицы является вектор, компонента которого, скажем, по оси x , есть $\partial L / \partial v_x$

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} + (e/c) \mathbf{A}.$$

В рассматриваемом случае скорость частицы должна непрерывно изменяться под действием поля, поэтому величина $m \mathbf{v}$ не может «сохраняться». Если мы все-таки хотим иметь закон сохранения импульса,

то мы не должны $\mathbf{p}$ приравнять $m\mathbf{v}$. Согласно (3.2.6) функция Гамильтона есть

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \left(m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\varphi = \\ = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (3.2.20)$$

Это выражение встречалось на стр. 245 и 246.

Этот пример дает нам некоторое представление о том, каким образом аппарат классической динамики охватывает поля и взаимодействие с полями. Импульсы перестают быть просто пропорциональны скоростям, менее ясным становится, что есть кинетическая энергия, или H , или L , и для получения правильных выводов приходится в большей мере полагаться на формальные уравнения, такие, как (3.2.4), (3.2.6) и (3.2.7), чем на «интуицию».

В качестве частного примера рассмотрим частицу с массой m , несущую заряд e , в постоянном магнитном поле с напряженностью $B = mc\omega/e$, направленной вдоль оси z . Скалярный потенциал $\varphi = 0$, а векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{mc\omega}{2e} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Функцией Лагранжа служит

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m\omega (-\dot{x}y + \dot{y}x),$$

где $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$; импульсы выражаются в виде

$$p_x = m \left(\dot{x} - \frac{1}{2} \omega y \right), \quad p_y = m \left(\dot{y} + \frac{1}{2} \omega x \right).$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega \frac{dx}{dt}$$

имеют решения

$$x = R \sin(\omega t + \alpha) + x_0, \quad y = R \cos(\omega t + \alpha) + y_0,$$

изображающие вращательное движение по окружности радиуса R с центром в (x_0, y_0) . Функция Гамильтона равна, разумеется,

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{1}{2} m\omega y \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{1}{2} m\omega x \right)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 = \frac{1}{2} mv^2.$$

Заметим, что радиус орбиты равен v/ω , где ω равно произведению напряженности B магнитного поля на e/mc .

Упрощение функции Гамильтона достигается преобразованием прикосновения

$$x = \sqrt{1/m\omega} [\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2], \quad p_x = \frac{1}{2} \sqrt{m\omega} [\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2], \\ y = \sqrt{1/m\omega} [\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2], \quad p_y = \frac{1}{2} \sqrt{m\omega} [-\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2].$$

В том, что это — преобразование прикосновения, можно убедиться с помощью равенств (2.6.4), содержащих скобки Пуассона, взяв в этих последних P и Q в качестве независимых переменных. Эти преобразова-

ния, после подстановки в H , дают новую функцию Гамильтона

$$K = \omega P_1.$$

В силу (3.2.7) P_1 , P_2 и Q_2 оказываются постоянны, а Q_1 зависит от времени линейно с коэффициентом пропорциональности, равным ω — угловой скорости частицы при движении по окружностям.

Релятивистская частица. Другой пример применения уравнений классической динамики, который понадобится нам в дальнейшем в этой главе, относится к описанию поведения частицы, движущейся со столь большой скоростью, при которой нельзя пренебрегать отношением v^2 к c^2 . Выше было отмечено, что L не является лоренц-инвариантом. Действительно, вариационный интеграл $\int L dt$, взятый вдоль мировой линии частицы, должен быть таким инвариантом. Если частица движется со скоростью u относительно наблюдателя, то дифференциал dt времени наблюдателя связан с дифференциалом собственного времени $d\tau$ частицы соотношением $d\tau = \sqrt{1 - (u/c)^2} dt$. Из инвариантности $\int L dt = \int (L/\sqrt{1 - (u/c)^2}) d\tau$ и $d\tau$ следует инвариантность подинтегральной функции $L/\sqrt{1 - (u/c)^2}$. Таким образом, L выражается в виде некоторого лоренцова инварианта, умноженного на $\sqrt{1 - (u/c)^2}$.

Например, для свободно движущейся частицы релятивистская функция Лагранжа есть

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - (u/c)^2} \approx -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2, \quad u \ll c. \quad (3.2.21)$$

Написанное выражение представляет собой кинетическую энергию минус энергия покоя $m_0 c^2$; из него следовало еще вычесть потенциальную энергию, если бы она имелась. Дифференцируя L по компонентам u , мы получим импульс

$$p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

[см. (1.7.5)].

Функцией Гамильтона будет служить

$$\begin{aligned} H = pu - L &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \\ &= m_0 c^2 \sqrt{1 + (p/m_0 c)^2} \approx m_0 c^2 + \left(\frac{1}{2m_0} \right) p^2 + \dots, \quad p \ll m_0 c. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Этим выражением мы пользовались на стр. 246 и 252 в связи с уравнением Дирака для электрона. Это выражение, разумеется, представляет собой временную компоненту некоторого 4-вектора, пространственными компонентами которого служат компоненты вектора cp . Слагаемое, соответствующее потенциальной энергии, если оно фигурирует, также должно быть временной компонентой некоторого 4-вектора.

Диссипативные системы. Наконец, прежде чем обратиться к применению принципа Гамильтона к теории полей, мы введем аппарат, позволяющий исследовать диссипативные системы (т. е. такие системы, в которых нельзя пренебрегать трением) так, как будто они были консервативны (т. е. с пренебрежимо малым трением). Уловка будет состоять в том, что одновременно с заданной системой, имеющей обычное трение, рассматривается ее «зеркальное отражение», обладающее *отрицательным* трением

и поглощающее ту энергию, которая теряется заданной системой. При этом полная энергия остается постоянной, и мы можем получить инвариантную функцию Лагранжа ценой утраты «реального смысла» некоторых побочных результатов.

Рассмотрим в качестве примера одномерный осциллятор с трением, движение которого описывается уравнением

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = 0. \quad (3.2.23)$$

Мы хотим получить это уравнение с помощью некоторой функции Лагранжа, применив обычный вариационный метод. Для этого мы чисто формально составим выражение

$$L = m(\dot{x}\dot{x}^*) - \frac{1}{2}R(x^*\dot{x} - x\dot{x}^*) - Kxx^* \quad (3.2.24)$$

и будем рассматривать его как функцию Лагранжа, в которую входят две координаты x и x^* . Координата x^* изображает «зеркально отраженный» осциллятор с отрицательным трением. Применив обычные выкладки, мы получим импульсы

$$p = m\dot{x}^* - \frac{1}{2}R\dot{x}, \quad p^* = m\dot{x} + \frac{1}{2}R\dot{x},$$

имеющие, впрочем, мало общего с действительным количеством движения осциллятора. Однако наш аппарат, продолжая действовать формально, даст нам уравнения Лагранжа для той и другой системы

$$m\ddot{x}^* - R\dot{x}^* + Kx^* = 0, \quad m\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = 0.$$

Уравнение, содержащее x , совпадает с исходным уравнением (3.2.23).

Уравнение с x^* , как уже говорилось выше, содержит $-R\dot{x}^*$, что соответствует отрицательному трению.

Функцией Гамильтона является

$$\begin{aligned} H = p\dot{x} + p^*\dot{x}^* - L &= m\dot{x}\dot{x}^* + Kxx^* = \\ &= (1/m)\left(p + \frac{1}{2}R\dot{x}^*\right)\left(p^* - \frac{1}{2}R\dot{x}\right) + Kxx^*. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

H остается постоянной в связи с тем, что амплитуда координаты x^* растет так же быстро, как убывает амплитуда x . В постоянстве H легко убедиться, умножив первое из уравнений Лагранжа на x , второе — на x^* и сложив их.

Этот прием позволяет нам оперировать с диссипативными системами так, как если бы они были консервативными. Хотя он не может конкурировать с другими способами решения тогда, когда таковые известны, но совершенно необходим при изучении диссипативных полей, например, в случае уравнения диффузии. Заметим, что, хотя ранее мы считали L квадратичной функцией от $\dot{q}$, здесь L содержала член $\dot{x}\dot{x}^*$; это указывает на то, что подобные случаи далеко не типичны.

Импеданс и полная проводимость для диссипативных систем. Сейчас целесообразно вернуться к рассмотрению механического импеданса (см. стр. 271—274) и выяснить, что получится при наличии сил сопротивления. Как мы видели, если система обладает динамическим или статическим равновесием, то можно ввести такие координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые равны нулю в точке равновесия. При достаточно малых отклонениях от положения равновесия потенциальная энергия может быть пред-

ставлена в виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{m,r} b_{mr} x_m x_r + V_0 = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathbf{x} + V_0,$$

где $\mathfrak{B}$ — аффино́р с элементами b_{mr} , а $\mathbf{x}$ — n -мерный вектор с компонентами x_r . Кинетическая энергия, как всегда, задается формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{m,r} a_{mr} \dot{x}_m \dot{x}_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{A} \cdot \dot{\mathbf{x}},$$

где $\mathfrak{A}$ — аффино́р с элементами a_{mr} .

При наличии трения m -й координате соответствует сила сопротивления, которую можно представить в виде

$$\sum_r r_{mr} \dot{x}_r = (\mathfrak{R} \cdot \dot{\mathbf{x}})_m,$$

где $\mathfrak{R}$ — аффино́р сопротивления, компонентами которого служат r_{mr} . Недиагональные элементы $\mathfrak{R}$, как и в случае кинетической и потенциальной энергий, соответствуют связям различных смещений x_m .

Следуя образцу (3.2.24), запишем функцию Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} L &= \sum_{m,r} [a_{mr} \dot{x}_m \dot{x}_r - \frac{1}{2} r_{mr} (x_m \dot{x}_r - \dot{x}_m x_r) - b_{mr} x_m x_r] = \\ &= \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^* \cdot \mathfrak{R} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

где $\mathbf{x}^*$ — вектор, сопряженный с $\mathbf{x}$. Вектор импульса и сопряженный с ним вектор имеют вид

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{A} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^* \cdot \mathfrak{R}, \quad \mathbf{p}^* = \mathfrak{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathfrak{R} \cdot \mathbf{x},$$

а функция Гамильтона

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}^* - L = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^* \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathbf{x} = \\ &= \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^* \cdot \mathfrak{R} \right) \cdot (\mathfrak{A}^{-1}) \cdot \left(\mathbf{p}^* - \frac{1}{2} \mathfrak{R} \cdot \mathbf{x} \right) + \mathbf{x}^* \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

где $\mathfrak{A}^{-1}$ — аффино́р, обратный по отношению к $\mathfrak{A}$, т. е. такой, что $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E}$.

Изменения p^* вызываются обобщенной силой, соответствующей смещению x_m , а не зеркально отраженному смещению. Каноническое уравнение Гамильтона, соответствующее m -й координате, имеет вид

$$F_m = \dot{p}_m^* + (\partial H / \partial x_m^*);$$

в абстрактном векторном пространстве эти уравнения могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \dot{\mathbf{p}}^* + \sum_{m=1}^n (\partial H / \partial x_m^*) \mathbf{e}_m = \dot{\mathbf{p}}^* + \frac{1}{2} \mathfrak{R} \cdot (\mathfrak{A}^{-1}) \cdot \left(\mathbf{p}^* - \frac{1}{2} \mathfrak{R} \cdot \mathbf{x} \right) + \mathfrak{B} \cdot \mathbf{x} = \\ &= \mathfrak{A} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathfrak{R} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathfrak{B} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Если движущие силы имеют колебательный характер, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 e^{i\omega t}$, то все отклонения (при установившемся движении) будут представлять собой колебания с той же частотой $\mathbf{x} = \mathbf{A} e^{i\omega t}$ (компонентами вектора $\mathbf{A}$ будут служить A_m — амплитуды колебаний по m -й координате); скорость выра-

зится в виде $\mathbf{x} = \mathbf{U}e^{i\omega t}$ (где $\mathbf{U}$ имеет компоненты U_m). F° связано с $\mathbf{A}$ и с $\mathbf{U}$ соотношениями

$$\mathbf{F} = \mathfrak{Z} \cdot \mathbf{U} = i\omega \mathfrak{Z} \cdot \mathbf{A}, \quad Z_{mr} = i\omega a_{mr} + r_{mr} + (1/i\omega) b_{mr}. \quad (3.2.29)$$

Аффино́р импеданса теперь комплексный, а не чисто мнимый. Действительная часть каждого из его элементов называется активным *сопротивлением* (*резистансом*), мнимая часть — реактивным сопротивлением (*реактансом*). Обратный аффино́р $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}^{-1}$ легко вычислить, зная определитель $\Delta_Z = |\mathbf{Z}_{mr}|$

$$Y_{mr} = Z'_{mr}/\Delta_Z; \quad Z'_{mr} = \partial \Delta_Z / \partial Z_{mr}. \quad (3.2.30)$$

Здесь Z'_{mr} — алгебраическое дополнение элемента Z_{mr} в определителе Δ_Z . $\mathfrak{Y}$ называется *аффино́ром полной проводимости* (*адмитанса*); действительная часть каждой из его компонент называется активной *проводимостью* (*кондуктансом*), мнимая часть — реактивной *проводимостью* (*сусептансом*).

Так как $\mathfrak{Z}$ — симметричный аффино́р, для него можно найти главные оси. Будучи приведен к главным осям (иначе говоря, записан в *нормальных координатах*) аффино́р $\mathfrak{Z}$ принимает диагональную форму; при этом диагональные элементы Z_r носят название *главных значений импеданса*. Определитель Δ_Z оказывается равным произведению этих главных значений, так что

$$(-i\omega)^n \Delta_Z = |\omega^2 a_{mr} - i\omega r_{mr} - b_{mr}| = (-i\omega Z_1) (-i\omega Z_2) \dots (-i\omega Z_n). \quad (3.2.31)$$

Так как все диагональные элементы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{B}$ положительны, то такой определитель может быть разложен на n множителей вида $M\omega^2 - iR\omega - K$, где коэффициенты M , R и K положительны. Расположим эти множители в порядке возрастания действительных частей их корней $i(R/2M) \pm \pm (1/2M) \sqrt{4KM - R^2}$. Множитель $i\omega Z_1$ имеет наименьшее значение $\sqrt{(K_1/M_1) - (R_1/2M_1)^2}$, остальные значения выражаются аналогично (кроме тех множителей, которые, в силу неравенства $R^2 > 4KM$, имеют чисто мнимые корни; такие множители мы расположим в порядке *убывания* абсолютных величин корней). Таким образом, r -е главное значение импеданса равно

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{i}{\omega} [M_r \omega^2 - iR_r \omega - K_r] = \frac{iM_r}{\omega} [\omega^2 - 2ik_r \omega - \omega_r^2 - k_r^2] = \\ &= \frac{iM_r}{\omega} (\omega - ik_r - \omega_r)(\omega - ik_r + \omega_r), \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

где $k_r = (R_r/2M_r)$, $\omega_r = \sqrt{(K_r/M_r) - k_r^2}$, коль скоро $K_r/M_r > k_r^2$. Постоянные M_r , R_r , K_r , k_r и ω_r все определяются значениями a_{mr} , r_{mr} и b_{mr} .

Аффино́р $\mathfrak{Y}$ становится бесконечным при $2n$ различных комплексных значениях ω , из которых n вида $\omega_r + ik_r$ имеют положительные действительную и мнимую части и расположены так, что $\omega_{m-1} \leq \omega_m$, а остальные n имеют вид $-\omega_r + ik_r$, то есть при соответственно тех же мнимых частях имеют действительные части противоположного знака. Иначе говоря, если нанести эти корни на комплексной плоскости, то все они окажутся над действительной осью, причем те, у которых $\omega < 0$, окажутся симметричны относительно мнимой оси корням с $\omega > 0$ (если среди k_r^2 есть большие K_r/M_r , то соответствующие корни окажутся на самой мнимой оси над действительной осью). Найденные корни соответствуют свободным колебаниям системы; зависимость r -го нормального колебания от времени определяется множителем $e^{-k_r t + i\omega_r t}$, а компоненты смещения будут пропорциональны компонентам единичного вектора вдоль r -й оси системы нор-

мальных координат в абстрактном векторном пространстве. Вид множителя, содержащего t , свидетельствует о том, что эти колебания — затухающие.

Сопряженным координатам, конечно, также соответствуют аффиноры импеданса и адмитанса, с помощью которых можно выразить зависимость между силами $F_m^* = \dot{p}_m + \partial H / \partial x_m$ и скоростями $\dot{x}_m^*$. Компоненты этих аффиноров отличаются от соответствующих компонент $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Y}$ только тем, что они имеют отрицательные сопротивления вместо положительных. Иначе говоря, компоненты $-i\omega\mathfrak{Z}^*$ являются комплексно сопряженными по отношению к компонентам $-i\omega\mathfrak{Z}$, что отвечает указанному выше зеркальному соответствию.

3.3 Скалярные поля

В классической динамике задача оказывается решенной, когда получены выражения координат системы как функций времени; вариационный интеграл, служащий для отыскания решения, представляет собой интеграл по времени от функции Лагранжа, выраженной через координаты и их производные по времени. Материальные поля, рассмотренные в предыдущей главе (упругая деформация, диффундирующая плотность, потенциал скоростей жидкости), представляют собой «сглаженные» средние от величин, характеризующих поведение сложных систем, образованных множеством частиц. Для решения задач такого рода мы можем взять уравнения движения частиц и затем, усреднив эти уравнения, получить уравнения поля, как это делалось, по крайней мере в принципе, в гл. 2. Или же, прежде чем минимизировать интеграл, мы можем усреднить функцию Лагранжа для всей системы и получить вариационный интеграл для *поля*; так мы и будем поступать в этой главе.

Во многих случаях получается поле скалярной функции от времени и координат, которые и служат параметрами интеграции. Само поле варьируется для отыскания минимума интеграла от функции Лагранжа, и уравнения Эйлера (3.1.3) оказываются уравнениями в частных производных, выражающими зависимость поля от координат и времени.

Гибкая струна. Эти замечания мы проиллюстрируем на простом примере натянутой гибкой струны; этот пример послужит нам ориентиром при рассмотрении более сложных задач. Мы начнем с того, что составим функцию Лагранжа для каждого атома струны (следовало бы, конечно, начать с уравнения Шредингера, но здесь мы рассматриваем движения многих миллионов атомов, поэтому квантовыми эффектами можно пренебречь и воспользоваться законами классической динамики).

Полная кинетическая энергия равна

$$T = \sum_{s=1}^N \frac{1}{2} m_s v_s^2,$$

где N — число наличных атомов. Движение каждого атома в элементе струны между x и $x+dx$ можно рассматривать как векторную сумму среднего движения $(\partial\psi/\partial t)\mathbf{j}$ этого элемента [для простоты мы предполагаем, что такое движение происходит в плоскости, ортогональной струне; среднее смещение точки x струны от положения равновесия обозначено $\psi(x)$] и колебательных движений $\mathbf{w}_s$ отдельных атомов около этого среднего движения. Полная кинетическая энергия элемента струны равна

поэтому

$$T = \frac{1}{2} \sum_{dx} m_s (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi} \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_s + w_s^2) \quad \left(\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \right),$$

где члены $\mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_s$ имеют среднее по времени значение, равное нулю. Суммирование произведено по всем частицам, содержащимся в элементе струны длины dx . Так как сейчас нас не интересуют колебания отдельных атомов, то мы не станем составлять индивидуальные лагранжевы уравнения для координат, соответствующих скоростям $\mathbf{w}_s$. Следовательно, мы выбросим последние слагаемые в скобках не потому, что они пренебрежимо малы (в действительности они соответствуют внутренней тепловой энергии струны и не малы в совокупности), а потому, что мы не хотим сейчас рассматривать эти движения молекул. Вторыми слагаемыми в скобках мы пренебрегаем потому, что их производные по $\dot{\psi}$ (входящие в уравнение Лагранжа для ψ) имеют средние по времени, равные нулю. Итак, интересующая нас полная кинетическая энергия выражается в виде

$$T = \frac{1}{2} \rho \int \dot{\psi}^2 dx, \quad (3.3.1)$$

где ρdx равно сумме масс m_s всех частиц, содержащихся в участке струны между x и $x + dx$.

Потенциальная энергия струны представляет собой сложную функцию координат всех атомов системы. В ней также можно выделить слагаемое, выражающее среднее приращение потенциальной энергии струны, когда последняя смещается на $\psi(x)$ от положения равновесия, и слагаемое, соответствующее индивидуальным отклонениям частиц от их среднего положения; последнее мы отбросим, как и при выводе формулы (3.3.1). Первое же слагаемое мы найдем, подсчитав работу, которая затрачивается на растяжение струны, когда ее выводят из положения равновесия. Если натяжение струны равно T_0 , то эта работа равна произведению T_0 на приращение длины струны при условии, что это последнее мало по сравнению с длиной. Таким образом, интересующая здесь нас часть потенциальной энергии выразится в виде

$$V = T_0 \int_0^l \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] dx \approx \frac{1}{2} T_0 \int_0^l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.3.2)$$

если только $(\partial \psi / \partial x)^2 \ll 1$ и струна натянута между точками $x=0$ и $x=l$.

Итак, для усредненного поперечного движения струны в заданной плоскости функция Лагранжа равна

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - V &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad c^2 = \frac{T_0}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Она представляет собой взятый вдоль всей длины струны интеграл от плотности функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \rho [(\partial \psi / \partial t)^2 - c^2 (\partial \psi / \partial x)^2].$$

Как и раньше, мы стремимся к тому, чтобы минимизировать интеграл

функции $\mathcal{L}$ по времени. Эта задача приводит к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial x)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0;$$

это — уравнение колебаний струны [см. (2.1.9)].

Волновое уравнение. Итак, одномерное волновое уравнение — уравнение колебаний струны — было выведено, исходя из требования, чтобы при соответствующем усреднении и при соблюдении начальных и краевых условий разность между полной кинетической энергией струны и ее потенциальной энергией принимала наименьшее возможное значение. Руководствуясь этим полезным замечанием, мы сумеем получить ряд других результатов.

Если, например, к струне приложена сила, действующая перпендикулярно оси x и распределенная так, что в точке x сила, приходящаяся на единицу длины струны, равна $F(x)$, то к потенциальной энергии нужно еще добавить $-F\psi$; если струна погружена в упругую среду (см. стр. 137), то нужно еще добавить слагаемое вида $\frac{1}{2} K\psi^2$. Окончательное выражение плотности функции Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} K\psi^2 + F\psi,$$

и мы получим такое уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = F - K\psi,$$

что согласуется с уравнением (2.1.27).

Импульсу в динамике точки здесь будет соответствовать производная $\mathcal{L}$ по $\dot{\psi}$; соответствующую плотность

$$p = \partial L / \partial \dot{\psi} = \rho (\partial \psi / \partial t) \quad (3.3.4)$$

называют *плотностью канонического импульса*. В случае струны, как мы видим, она равна импульсу единичного отрезка струны, движущегося со скоростью $\partial \psi(x) / \partial t$.

Плотность функции Гамильтона, согласно (3.2.6), есть

$$\begin{aligned} H = p\dot{\psi} - L &= \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} K\psi^2 - F\psi = \\ &= \frac{1}{2\rho} p^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K\psi^2 - F\psi \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

[ср. с (2.1.14)]. Интеграл от H , взятый вдоль струны, представляет собой полную энергию, но, в отличие от классической динамики, H зависит не только от p и ψ , но еще и от $\partial \psi / \partial x$. Естественно поэтому ожидать, что и уравнения, соответствующие гамильтоновым каноническим уравнениям (3.2.7), окажутся более сложными. С помощью принципа Гамиль-

тона, интегрируя в двух слагаемых по частям, мы получим

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\partial} \int dt \int dx [p\dot{\psi} - H(p, \psi, \psi')] = \\ &= \int dt \int dx [\dot{\psi} \dot{\partial} p + p \dot{\partial} \dot{\psi} - (\partial H / \partial p) \dot{\partial} p - (\partial H / \partial \psi) \dot{\partial} \psi - (\partial H / \partial \psi') \dot{\partial} \psi'] = \\ &= \int dt \int dx \{ [\dot{\psi} - (\partial H / \partial p)] \dot{\partial} p - [\dot{p} + (\partial H / \partial \psi) - (\partial / \partial x) (\partial H / \partial \psi')] \dot{\partial} \psi \}, \end{aligned}$$

где

$$\dot{\psi} = \partial \psi / \partial t, \quad \dot{p} = \partial p / \partial t, \quad \psi' = \partial \psi / \partial x,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial H}{\partial \psi}. \quad (3.3.6)$$

Полученные уравнения отличаются от канонических присутствием члена $\partial H / \partial \psi'$. Комбинируя эти уравнения, мы придем к уравнению движения струны

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - K \psi + F.$$

Положение оказывается более сложным по сравнению с динамикой точки из-за того, что функция ψ , соответствующая координате q в динамике, зависит не только от параметра t , но и от параметра x . Это означает, что соотношения между импульсами, полем и градиентом поля сложнее соотношений, описываемых каноническими уравнениями (3.2.7).

Большая сложность этих соотношений ясна также с точки зрения теории относительности. Мы видели на стр. 99, что энергия частицы есть временная компонента некоторого 4-вектора, пространственные компоненты которого пропорциональны импульсу. В то же время в рассматриваемом случае плотность энергии

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - L = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} - L$$

оказывается 4,4-компонентой некоторого тензора $\mathfrak{W}$; последний имеет компоненты

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}'} - L = -\frac{1}{2} \rho (\dot{\psi})^2 - \frac{1}{2} T (\psi')^2 + \frac{1}{2} K \psi^2 - F \psi, \\ W_{41} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}'} = -T \dot{\psi} \psi', \quad W_{14} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \rho \dot{\psi} \psi', \\ W_{44} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - L = H. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Эти компоненты удовлетворяют уравнениям дивергенции

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{11}}{\partial x} + \frac{\partial W_{14}}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K \psi - F \right] = 0, \\ \frac{\partial W_{41}}{\partial x} + \frac{\partial W_{44}}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \left[\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K \psi - F \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

имеющим интересное физическое истолкование. Взяв сначала второе из этих уравнений и проинтегрировав его по x от a до b , мы получим

$$-\int_a^b \left(\frac{\partial W_{44}}{\partial t} \right) dx = -\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b H dx = [W_{41}]_a^b.$$

Но в силу (2.1.2) W_{41} представляет собой поток энергии вдоль струны; он, очевидно, связан с изменением энергии H так, как описывается этим уравнением. Таким образом, второе уравнение (3.3.8) представляет собой уравнение неразрывности потока энергии вдоль струны.

Первое уравнение (3.3.8) связывает изменение во времени потока энергии с распределением натяжения вдоль струны, так как $W_{14} = -W_{41}/c^2$ имеет размерность плотности импульса, связанного с потоком энергии волнового движения. Интегрируя первое уравнение (3.3.8), мы получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b W_{14} dx = [W_{11}]_a^b;$$

отсюда видно, что если W_{14} есть плотность волнового импульса, то W_{11} — сила, которую можно назвать *волновым напряжением*. Это уравнение утверждает, таким образом, что скорость изменения волнового импульса на каком-либо участке струны равна разности значений волнового напряжения на концах участка.

Плотность волнового импульса $P = W_{14}$ теснее связана с самим волновым движением, нежели плотность канонического импульса $p = \rho(\partial\psi/\partial t)$, так как p есть *поперечный* импульс в различных участках струны, а P связано с потоком энергии *вдоль* струны, обусловленным волновым движением.

Кстати, уравнения (3.3.6) можно использовать для доказательства того, что интеграл от плотности функции Гамильтона есть константа движения, не зависящая от времени; в самом деле

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^l H(p, \psi, \psi') dx &= \int_0^l \left[\frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial H}{\partial \psi'} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right] dx = \\ &= \int_0^l \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi'} + \frac{\partial H}{\partial \psi'} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right] dx = \left[\dot{\psi} \frac{\partial H}{\partial \psi'} \right]_0^l = 0, \end{aligned}$$

так как $\dot{\psi}$ или $\partial H/\partial \psi'$ обращаются в нуль на концах струны.

Уравнение Гельмгольца. Когда струна совершает простые гармонические колебания, ее отклонения от оси x выражаются функцией $\psi(x, t) = Y(x)e^{-i\omega t}$, где функция Y удовлетворяет *уравнению Гельмгольца*

$$(d^2Y/dx^2) + k^2Y = 0, \quad k = \omega/c,$$

в котором значение k определяется краевыми условиями. Это уравнение можно получить также, исходя из вариационного принципа.

В качестве плотности функции Лагранжа можно взять член $-T(dY/dx)^2$, отвечающий потенциальной энергии. Получение ненулевого решения можно гарантировать, добавив к вариационному уравнению

$$\delta \int_0^l \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 dx = 0$$

дополнительное требование, чтобы средняя квадратичная амплитуда Y была отлична от нуля, например, чтобы

$$\int_0^l Y^2(x) dx = 1.$$

Согласно сказанному на стр. 267, такая вариационная задача может быть решена методом множителей Лагранжа. Мы включаем дополнительное требование (уравнение связи) тем, что будем минимизировать интеграл

$$\int_0 \left[\lambda Y^2 - \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 \right] dx,$$

где λ — множитель, который заодно должен быть найден. Уравнение Эйлера такой задачи совпадает с уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \lambda Y = 0,$$

и искомые значения λ окажутся равными требуемым значениям k^2 .

Потенциал скоростей. Переходя к трехмерному случаю, рассмотрим движение жидкости (см. § 2.3). Если это движение безвихревое, то скорость жидкости может быть представлена как градиент потенциала скоростей ψ . Плотность кинетической энергии выразится при этом в виде

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (3.3.9)$$

Если жидкость несжимаема, то потенциальная энергия постоянна и плотность функции Лагранжа L совпадает с T . Уравнение Эйлера (3.1.3) в этом случае сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \psi = 0.$$

Таким образом, уравнение Лапласа, описывающее установившееся безвихревое движение несжимаемой жидкости, выражает требование, чтобы при выполнении заданных начальных и краевых условий *полная кинетическая энергия жидкости имела наименьшее возможное значение*.

Если жидкость сжимаема, но вязкость ее пренебрежимо мала, то появится плотность потенциальной энергии, которая выражается через потенциал скоростей ψ . Эта энергия равна работе $p dV$, которая должна быть затрачена на то, чтобы единицу объема жидкости перевести из стандартных условий (относящихся к плотности и т. д.) в условия, поставленные в задаче. Допустим, что такой переход сопровождается относительно малыми изменениями соответствующих величин по сравнению с их значениями в стандартных условиях; если в стандартных условиях плотность равна ρ , то мы считаем, что в условиях задачи она равна $\rho(1+s)$, где s — весьма мало по сравнению с единицей. Элемент жидкости, имеющий объем 1 см^3 в стандартных условиях, при плотности, равной $\rho(1+s)$, будет занимать объем $(1-s) \text{ см}^3$ (с точностью до величин первого порядка относительно малой величины s).

Для отыскания потенциальной энергии нужно знать, как при изменении состояния жидкости связаны между собой давление и плотность.

Так, например, в случае газа отношение давления к плотности выражается формулой (2.3.21) (см. стр. 161). В рассматриваемом случае давление в стандартных условиях мы обозначим p_0 , а давление в условиях задачи $p_0 + p$. Такие обозначения общеприняты в акустике (заметим, что в этом пункте p означает давление, а не канонический импульс). Уравнение (2.3.21) в этих обозначениях примет вид

$$1 + (p/p_0) = (1+s)^\gamma \approx 1 + \gamma s,$$

то есть

$$p \approx \rho c^2 s, \quad (3.3.10)$$

где в случае газа $c^2 = \gamma p_0 / \rho$. Для других жидкостей избыточное давление также пропорционально относительному приращению плотности [так что формула (3.3.10) остается справедливой], но постоянная c^2 определяется различными свойствами рассматриваемой жидкости. Как мы вскоре увидим, c в некоторых случаях равна скорости звука в жидкости.

Когда жидкость при переходе от стандартных условий к реальным подвергается сжатию, элемент жидкости, занимавший объем dV , получит новый объем $dV(1-s) = dV[1 - (p/\rho c^2)]$. Работа, затраченная на такое сжатие

$$\int_0^s p dV ds = \frac{dV}{\rho c^2} \int_0^p p dp = \left(\frac{1}{2\rho c^2} \right) p^2 dV,$$

и есть потенциальная энергия сжатия элемента объема dV . Следовательно, плотность потенциальной энергии равна $p^2/2\rho c^2$.

Но мы еще отсюда не можем составить вариационное уравнение, так как нам надо связать p с потенциалом скоростей ϕ , хотя вполне можно было бы составить вариационные уравнения для скаляра p , а не ϕ . Требуемую связь проще всего найти из уравнения (2.3.14). Если коэффициентами вязкости η и λ можно пренебречь и внешняя сила F равна нулю, то $\rho(\partial \mathbf{v}/\partial t) = -\text{grad } p$. Если потенциал скоростей существует, то $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$ и, приравняв градиенты, мы получим уравнение

$$p = -\rho(\partial \phi / \partial t) + C_0, \quad (3.3.11)$$

где постоянная интегрирования C_0 обычно приравнивается нулю. Таким образом, давление представляет собой временную компоненту 4-вектора, пространственные компоненты которого равны компонентам скорости жидкости.

Волны сжатия. Теперь мы можем составить выражение плотности функции Лагранжа для малых колебаний невязкой сжимаемой жидкости

$$L = T - V = \frac{1}{2} \rho \left\{ |\text{grad } \phi|^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\}. \quad (3.3.12)$$

Это — инвариантная плотность, интеграл которой (по времени и пространству) должен быть минимизирован. Особенность ее в том, что скорость выражена производными по координатам, а сила — производной по времени; объясняется это тем, что скорость представляет собой вектор (градиент), а сила (давление) — скаляр.

Уравнением Эйлера (3.1.3) для такой плотности функции Лагранжа служит волновое уравнение в трехмерном пространстве

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

где c — скорость распространения волн.

Интересно отметить, что по сравнению с уравнением колебаний струны, производные пространственные и производные по времени меняются ролями. Здесь производные ϕ по координатам соответствуют кинетической энергии, а производная по времени — энергии потенциальной.

Здесь так называемая «плотность канонического импульса» $\partial L / \partial \dot{\phi}$ [см. (3.3.4)] пропорциональна давлению, а совсем не скорости жидкости. Поэтому простые методы, связанные с использованием канонически сопряженных переменных q и p , применимые в динамике точки, должны быть заменены более сложными. При этом оказывается полезен 4-аффино́р $\mathfrak{X}$ с

компонентами

$$W_{ij} = L\delta_{ij} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial (\partial\psi/\partial x_j)}, \quad (3.3.13)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j=i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict.$$

Компонента W_{44} есть плотность энергии

$$W_{44} = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 + |\text{grad } \psi|^2 \right] = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2\rho c^2} p^2 = H, \quad (3.3.14)$$

интеграл от которой не зависит от времени (это можно показать так же, как это было сделано на стр. 292 для случая струны).

Пространственно-временные компоненты аффинора $\mathfrak{S}$ пропорциональны некоторому 3-вектору S

$$W_{k4} = W_{4k} = \frac{i\rho}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial x_k} = \frac{1}{ic} \rho v_k = \frac{1}{ic} S_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.3.15)$$

S задает направление и величину потока энергии, обусловленного волновым движением. Вектор $P = S/c^2$, имеющий размерность плотности импульса, называется *плотностью импульса поля*. С другой стороны, вектор $\rho S/p = \rho v$ представляет собой плотность импульса движущейся жидкости.

Заметим также, что 4-дивергенции векторов, образованных из $\mathfrak{S}$, все равны нулю. Это можно показать, взяв

$$\sum_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_j \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial L}{\partial \psi_j} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_j} \right) \right],$$

где $\psi_j = \partial\psi/\partial x_j$. Если L зависит от x_i только через посредство функции ψ и ее производных, то,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \psi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i},$$

и с помощью уравнений Эйлера (3.1.3) мы приходим к равенствам

$$\sum_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_j} \right) \right] = 0,$$

доказывающим наше утверждение относительно дивергенций в том случае, когда L не зависит от x явно. Отсюда мы можем получить уравнение неразрывности для S и H

$$\text{div } S + (\partial H / \partial t) = 0,$$

которое показывает, что если H — плотность энергии, то S — вектор плотности потока энергии (это было отмечено раньше). Хотя интеграл от H по всему пространству постоянен, значение H в любой точке может изменяться с течением времени, так как энергия может перераспределяться в объеме, занятом жидкостью.

Волновой импеданс. Возвращаясь к уравнению Лагранжа-Эйлера для ψ , мы видим, что если к ψ приложена «плотность сил» f , то f будет связано с приращением ψ уравнением

$$f = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial\psi/\partial x_i)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = - \left(\frac{\rho}{c^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) + \rho \text{div} (\text{grad } \psi).$$

В классической динамике мы можем обычно приложить силу к одной из координат системы и найти соотношение между приложенной силой

и перемещением или скоростью системы (см. стр. 272). Но в случае поля сила, сконцентрированная в точке, как правило, вызывает бесконечное смещение этой точки; для того же, чтобы вызвать физически реализуемый эффект, сила должна действовать на некоторый объем или на площадь. Обычно бывает так, что внешняя сила оказывается приложенной к некоторому участку поверхности, ограничивающей поле. Так, например, вибрирующая мембрана громкоговорителя служит источником звуковых волн в жидкости, а эти волны в свою очередь воздействуют на мембрану. Мерой этого воздействия (реакции) служит *акустический импеданс* жидкости перед мембраной, характеризующий тип возбуждаемых волн.

Если сила приложена к поверхности, служащей границей поля, то для отыскания полной реакции следует интегрировать уравнение Лагранжа-Эйлера по всему объему, заключенному в этой поверхности. При этом мы получим

$$-\frac{\rho}{c^2} \iiint \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dv + \rho \iint \text{grad } \phi \cdot dA,$$

где второе слагаемое преобразовано в поверхностный интеграл по формуле Гаусса [см. (1.4.7)]. Любая сила, действующая на ϕ по граничной поверхности, уравнивается этим слагаемым, поэтому если F — «сила», действующая на ϕ , рассчитанная на единицу площади, то $F = \rho \text{ grad } \phi$. Если F изменяется гармонически $F = F_0 e^{-i\omega t}$, то соответствующая скорость изменения ϕ (соответствующая скорости) равна $-i\omega\phi$, так что отношение поверхностной плотности силы к скорости изменения ϕ равно

$$-F/i\omega\phi = -(\rho/i\omega\phi) \text{ grad } \phi.$$

В силу того, что в рассматриваемом случае по сравнению с задачами динамики градиент и производная по времени меняются ролями, то величина $i\omega\phi$ пропорциональна давлению, а $\text{grad } \phi$ пропорционален скорости жидкости. В акустике обычно аналогом внешней силы мы считаем не F (которое представляет собой «силу», вызывающую изменение ϕ), а давление, поэтому приведенное выше отношение соответствует скорее адмитансу, чем импедансу.

Обычно *акустический адмитанс* определяется равенством

$$Y = v/p = \frac{1}{i\omega\rho\phi} \text{ grad } \phi; \quad (3.3.16)$$

здесь p означает давление в какой-либо точке граничной поверхности, где приложена внешняя сила, а v — скорость жидкости в этой же точке. Чтобы вычислить Y , надо сначала решить волновое уравнение для отыскания поля, порожденного вибрацией данного участка границы, после чего можно будет вычислить $(1/i\omega\rho\phi) \text{ grad } \phi$ для различных таких участков; если нужно, интегрируя, мы найдем акустический адмитанс всей поверхности, воздействующей на поле.

Адмитанс Y представляет собой вектор, так как v — вектор, а p — скаляр. Обычно бывает достаточно вычислить *нормальный акустический адмитанс* — нормальную (к границе поля) составляющую Y_n вектора Y , равную

$$Y_n = (1/i\omega\rho\phi) (\partial\phi/\partial n).$$

Обратная величина

$$Z_n = 1/Y_n = i\omega\rho\phi (\partial\phi/\partial n)^{-1}$$

называется *нормальным акустическим импедансом*. Она равна отношению давления в граничной точке, где действует внешняя сила, к нормальной

составляющей скорости жидкости в той же точке. Так как эта скорость равна скорости движения самой поверхности, то нормальный импеданс является наиболее важной частью импеданса.

Плоская волна. В качестве примера тех разнообразных величин, о которых мы так бойко здесь говорили, рассмотрим особенно простой вид волнового движения, *плоскую волну*. Такая волна изображается формулой

$$\psi = C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t},$$

где $C = |C| e^{i\varphi}$ — постоянная, определяющая амплитуду и фазу φ потенциала скоростей, а $\mathbf{k}$ — постоянный вектор длины ω/c , указывающий направление движения волны. Соответствующие волновые поверхности представляют собой плоскости, перпендикулярные вектору $\mathbf{k}$, движущиеся по направлению $\mathbf{k}$ со скоростью c .

Выражения давления и скорости жидкости в случае плоской волны можно получить, зная потенциал скоростей, с помощью ранее полученных соотношений. Они соответственно равны действительным частям выражений

$$p = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega\rho C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t},$$

$$\mathbf{v} = \text{grad } \psi = i\mathbf{k} C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}.$$

Иначе говоря, значение давления в точке x, y, z в момент t равно $-\omega\rho |C| \sin [(\omega/c)(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct) + \varphi]$, где α, β, γ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{k}$ и $|\mathbf{k}| = \omega/c$. Жидкость движется по направлению вектора $\mathbf{k}$, т. е. перпендикулярно фронту волны, а скорость в случае плоской волны совпадает по фазе с давлением.

Для вычисления тензора напряжения-энергии надо взять действительные части обеих величин, так как его компоненты представляют собой многочлены второй степени, содержащие ψ . Обозначив

$$\Omega = (\omega/c)(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct) + \varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi,$$

будем иметь

$$\psi = |C| \cos \Omega, \quad p = -\omega\rho |C| \sin \Omega, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{k} |C| \sin \Omega,$$

$$W_{44} = H = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p^2}{2\rho c^2} = \frac{\rho\omega^2}{c^2} |C|^2 \sin^2 \Omega,$$

$$S = p\mathbf{v} = \rho\omega\mathbf{k} |C|^2 \sin^2 \Omega = \mathbf{P}c^2,$$

$$W_{11} = -\frac{\rho\omega^2}{c^2} \alpha^2 |C|^2 \sin^2 \Omega,$$

$$W_{12} = -\frac{\rho\omega^2}{c^2} \alpha\beta |C|^2 \sin^2 \Omega,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы вектора распространения (волнового вектора) $\mathbf{k}$. Следовательно, тензор напряжения-энергии для плоской волны может быть представлен матрицей

$$\mathfrak{B} = -\frac{\rho\omega^2}{c^2} |C|^2 \sin^2 \Omega \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & -i\alpha \\ \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma & -i\beta \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma^2 & -i\gamma \\ i\alpha & i\beta & i\gamma & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости для $\mathfrak{W}$ уравнений дивергенции

$$\sum_{n=1}^4 \frac{\partial W_{mn}}{\partial x_n} = 0$$

и в том, что пространственные компоненты $\mathfrak{W}$ преобразуются, как аффинор.

Одна из главных осей пространственной части $\mathfrak{W}$ направлена вдоль $\mathbf{k}$; двумя другими служат любые два взаимно-перпендикулярных направления, ортогональных $\mathbf{k}$. Если ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты, соответствующие этим осям, то относительно них $\mathfrak{W}$ принимает вид

$$\mathfrak{W} = \frac{\rho\omega^2}{c^2} |C|^2 \sin^2 \left[\frac{\omega}{c} (\xi_1 - ct) \right] \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все компоненты оказываются пропорциональными квадрату частоты и квадрату амплитуды волны.

Можно представить себе, что плоская волна вызвана колебаниями плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}$, совершающимися в направлении $\mathbf{k}$, причем скорость колебаний равна $\text{grad } \psi = i\mathbf{k} C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$. Акустический адмитанс, являющийся мерой реакции волны на колеблющуюся плоскость, равен в этом случае

$$\mathbf{Y} = \mathbf{v}/p = \mathbf{k}/\rho\omega = \frac{1}{\rho c} \mathbf{a}_k,$$

где $\mathbf{a}_k$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с $\mathbf{k}$. Следовательно, акустический импеданс, нормальный к фронту плоской волны, равен ρc , т. е. имеет действительное значение. Другими словами, плоская волна порождает резистивный импеданс¹), действующий на колеблющуюся плоскость, не зависящий от частоты. Импедансы волн другой формы будут еще рассмотрены в этой книге.

Уравнение диффузии. Переходя к уравнениям, описывающим диссипативные процессы, такие, как течение вязкой жидкости или диффузия, мы воспользуемся формальным приемом, описанным на стр. 285. Например, в случае уравнения диффузии плотность функции Лагранжа равна

$$L = -(\text{grad } \psi) \cdot (\text{grad } \psi^*) - \frac{1}{2} a^2 \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \quad (3.3.17)$$

где ψ — концентрация диффундирующего вещества, a^2 — постоянная диффузии; ψ^* относится к зеркально отраженной системе, в которой происходит процесс, обратный диффузии. Плотности канонических импульсов выразятся в виде

$$p = \partial L / \partial \dot{\psi} = -\frac{1}{2} a^2 \dot{\psi}^*, \quad p^* = +\frac{1}{2} a^2 \dot{\psi};$$

они, впрочем, имеют мало общего с физическими импульсами.

Уравнения Эйлера для этой плотности функции Лагранжа имеют вид

$$\nabla^2 \psi = a^2 (\partial \psi / \partial t), \quad \nabla^2 \psi^* = -a^2 (\partial \psi^* / \partial t). \quad (3.3.18)$$

¹ См. стр. 287.—Прим. ред.

Уравнение относительно ψ — обычное уравнение диффузии; второе уравнение относится к зеркально отраженной системе, поглощающей столько же энергии, сколько теряет исходная система.

Плотность функции Гамильтона равна $\text{grad } \psi \cdot \text{grad } \psi^*$; интеграл ее по объему не зависит от времени. Она представляет собой 4,4-компоненту тензора $\mathfrak{H}$, определяемого равенствами

$$W_{ij} = L\delta_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \psi_j} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \psi_j^*}, \quad (3.3.19)$$

где $\psi_j = \partial \psi / \partial x_j$. Компоненты W_{ik} содержат компоненты вектора $\text{grad } \psi$, определяющего направление и величину потока диффузии.

Метод введения «зеркально отраженного» поля ψ^* с целью образовать функцию Лагранжа, из которой получается уравнение диффузии, может быть, слишком уж искусственен для того, чтобы ожидать от него существенных физических выводов. Он рассмотрен здесь затем, чтобы показать возможность применения вариационного метода к диссипативным системам; кроме того, введение подобных полей ψ^* оказывается необходимым в некоторых задачах квантовой физики, и задача о диффузии может служить полезной подготовкой к этим более сложным задачам.

Аналогичный прием может быть использован для построения функции Лагранжа в том случае, когда при рассмотрении потока жидкости учитывается вязкость.

Уравнение Шредингера. Нечто похожее может быть использовано для вывода уравнения Шредингера (2.6.38), хотя оно и не диссипативно. Волновая функция ψ принимает комплексные значения, поэтому ее действительную и мнимую части можно рассматривать как самостоятельные (независимые) переменные или, что то же самое, можно рассматривать отдельно (как независимые полевые переменные) скалярное поле ψ и скалярное поле комплексно-сопряженной функции ψ^* . При этом произведение $\psi\psi^*$ будет действительным и при оптимальном выборе обеих переменных будет равно плотности вероятности для наличия частицы, т. е. для конфигурации системы, описываемой координатами x .

В качестве примера рассмотрим отдельную частицу с массой m , находящуюся под действием потенциального поля $V(x, y, z)$. Плотность функции Лагранжа оказывается равной

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m} (\text{grad } \psi^*) \cdot (\text{grad } \psi) - \frac{\hbar}{2i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) - \psi^* V \psi; \quad (3.3.20)$$

искомые ψ и ψ^* должны сообщать наименьшее значение интегралу

$$\mathcal{L} = \iiint L \, dv \, dt.$$

Уравнения Лагранжа — Эйлера получаются при этом

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -V\psi^*, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -V\psi,$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V\psi^* = -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}. \quad (3.3.21)$$

Легко видеть, что эти уравнения соответствуют уравнению (2.6.38). Если взять классическую функцию Гамильтона $H(p, q) = (1/2m)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$ для частицы и заменить в ней $p_x, \dots$ символами $(\hbar/i)(\partial/\partial x), \dots$, действующими на ψ , то (2.6.38) превратится в первое из уравнений (3.3.21). Уравнение, содержащее комплексно-сопряженную функцию ψ^* , получится изменением знака при i в слагаемом, содержащем производную по времени.

Два канонических импульса выражаются в виде

$$p = \partial L / \partial \dot{\psi} = -(\hbar \psi^* / 2i), \quad p^* = \hbar \psi / 2i. \quad (3.3.22)$$

Они бывают нужны при «вторичном квантовании», которое часто применяется в современной квантовой физике, но не рассматривается нами в этой книге. Тензор напряжения-энергии $\mathfrak{W}$ имеет компоненты, определяемые равенствами

$$W_{mn} = \psi_m^* \frac{\partial L}{\partial \psi_n^*} + \psi_m \frac{\partial L}{\partial \psi_n} - \delta_{mn} L, \quad (3.3.23)$$

где

$$\psi_m = \frac{\partial \psi}{\partial x_m}, \quad x_m = x, y, z, t, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Плотностью энергии служит 4,4-компонента $\mathfrak{W}$

$$H = W_{44} = \frac{\hbar^2}{2m} \text{grad } \psi^* \cdot \text{grad } \psi + \psi^* V \psi.$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае, как и в уравнении диффузии, производные по времени (которые соответствуют величинам $\dot{q}$) входят в L линейно, в отличие от классической динамики, где $\dot{q}$ входят в L в виде квадратичной формы $\sum a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$. А когда $\dot{q}$ входят в L линейно, канонические импульсы $\partial L / \partial \dot{q}$ не зависят от $\dot{q}$, а лишь от q , поэтому p и q не являются независимыми переменными. В таком случае гамильтонова функция $H = \sum p \dot{q} - L$ зависит только от q и не зависит от p и от $\dot{q}$, а канонические уравнения не будут, конечно, иметь вид (3.3.6). Как в уравнении диффузии, так и в уравнении Шредингера, p представляет собой функцию от ψ^* , а p^* — функцию от ψ , поэтому нам не удастся получить одно каноническое уравнение для p , другое для q , а придется получить одно уравнение для ψ и другое — для ψ^* . Как всегда,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = 0 &= \delta \int dt \int dv [p \dot{\psi} + \dot{\psi}^* p^* - H(\psi, \psi^*, \psi_n, \psi_n^*)] = \\ &= \int dt \int dv [\delta p \dot{\psi} + p \delta \dot{\psi} + \dot{\psi}^* \delta p^* + \delta \dot{\psi}^* p^* - \\ &\quad - \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right) \delta \psi - \left(\frac{\partial H}{\partial \psi^*} \right) \delta \psi^* - \sum_n \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_n} \right) \delta \psi_n - \sum_n \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_n^*} \right) \delta \psi_n^*], \end{aligned}$$

где $\psi_2 = \partial \psi / \partial y$, $\psi_3 = \partial \psi / \partial z$ и т. д. Но теперь $\delta p = (dp/d\psi^*) \delta \psi^*$, и, интегрируя по частям, мы получим $\int dt p \delta \dot{\psi} = - \int dt \dot{p} \delta \psi = - \int dt \dot{\psi}^* (dp/d\psi^*) \delta \psi$ и т. д. Как и раньше, мы будем также иметь

$$- \int dv \sum_n \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_n} \right) \delta \psi_n = \int dv \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_n} \right) \delta \psi \text{ и т. д.}$$

Подставив все эти выражения в интеграл, выражающий $\delta \mathcal{L}$, мы найдем, что $\delta \mathcal{L}$ окажется равным интегралу от некоторого выражения, умноженного на $\delta \psi$, плюс некоторое другое выражение, умноженное на $\delta \psi^*$. Так как $\delta \mathcal{L}$ должно обращаться в нуль при произвольных $\delta \psi$ и $\delta \psi^*$, то оба множителя при $\delta \psi$ и $\delta \psi^*$ должны быть равны нулю, и мы придем к таким

двум уравнениям:

$$\begin{aligned}\psi \left[\frac{dp}{d\psi^*} - \frac{dp^*}{d\psi} \right] &= \frac{\partial H}{\partial \psi^*} - \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_n^*} \right), \\ \psi^* \left[\frac{dp^*}{d\psi} - \frac{dp}{d\psi^*} \right] &= \frac{\partial H}{\partial \psi} - \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_n} \right).\end{aligned}\quad (3.3.24)$$

Это — новые канонические уравнения; если применить их к гамильтоновой функции для уравнения диффузии или для уравнения Шредингера, то мы снова получим уравнения движения (3.3.18) или (3.3.21). Не ясно, впрочем, насколько полезными окажутся уравнения (3.3.24), так как не видно, чтобы они давали больше, чем уравнения Лагранжа — Эйлера.

Вектор плотности потока энергии в шредингеровском случае равен

$$S = iW_{41} + jW_{42} + kW_{43} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^* \text{grad } \psi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \text{grad } \psi^* \right]. \quad (3.3.25)$$

S совместно с плотностью энергии W_{44} удовлетворяет уравнению неразрывности $\text{div } S + \partial H / \partial t = 0$.

Плотность импульса поля представляется вектором

$$P = iW_{14} + jW_{24} + kW_{34} = -(\hbar/2i) [\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \psi^*]. \quad (3.3.26)$$

Обращаясь к стр. 246, мы замечаем, что (когда магнитное поле равно нулю) плотность тока, соответствующая функции ψ , равна $J = -(e/m)P$, так что P оказывается связанным с плотностью потока вероятности частицы, описываемой волновой функцией ψ .

Уравнение Клейна—Гордона. Подобным же образом можно рассмотреть уравнение Клейна—Гордона (2.6.51), могущее служить волновым уравнением для релятивистской частицы (хотя для электрона или протона оно неверно). Здесь мы снова используем два независимых поля ψ и ψ^* . Величины $(\hbar/i)(\partial\psi/\partial x, \partial\psi/\partial y, \partial\psi/\partial z, \partial\psi/\partial(ict))$ служат компонентами некоторого 4-вектора, так же как соответствующие производные от ψ^* . Скомбинировав их с 4-вектором $(A_x, A_y, A_z, i\varphi)$ электромагнитного потенциала так, как это следует из уравнения (2.6.49), мы получим плотность функции Лагранжа для «частицы» с зарядом e и массой m в электромагнитном поле

$$\begin{aligned}L = & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\text{grad } \psi^* + \frac{ie}{\hbar c} A \psi^* \right) \cdot \left(\text{grad } \psi - \frac{ie}{\hbar c} A \psi \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{c} \right)^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \frac{ie}{\hbar} \varphi \psi^* \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar} \varphi \psi \right) + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi^* \psi \right].\end{aligned}\quad (3.3.27)$$

Отсюда можно получить уравнение Лагранжа — Эйлера для ψ

$$\sum_{n=1}^4 \frac{\partial}{\partial \zeta_n} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_n^*} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} = 0,$$

где $\zeta_1 = x$, $\zeta_2 = y$, $\zeta_3 = z$, $\zeta_4 = t$, $\psi_n^* = \partial\psi^*/\partial\zeta_n$, приводящее к уравнению Клейна—Гордона при наличии электромагнитного поля

$$\sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_n} - \frac{ie}{\hbar c} A_n \right)^2 \psi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar} \varphi \right)^2 \psi = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi. \quad (3.3.28)$$

Такой же вид имеет уравнение для ψ^* . При выводе мы несколько раз должны воспользоваться соотношением $\text{div } A + (1/c)(\partial\varphi/\partial t) = 0$. Когда

$\mathbf{A}$ и φ равны нулю, уравнение (3.3.28) упрощается и принимает вид (2.6.51).

Для простоты дальнейшие рассуждения проведем в предположении, что $\mathbf{A}$ и φ равны нулю. При этом функция Лагранжа примет вид

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m} (\text{grad } \psi^*) \cdot (\text{grad } \psi) + \frac{\hbar^2}{2mc^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} mc^2 \psi^* \psi, \quad (3.3.29)$$

а канонические импульсы получают выражения

$$p = (\partial L / \partial \dot{\psi}) = (\hbar^2 / 2mc^2) (\partial \psi^* / \partial t), \quad p^* = (\hbar^2 / 2mc^2) (\partial \psi / \partial t); \quad (3.3.30)$$

4,4-компонента тензора напряжения-энергии

$$W_{mn} = \psi_m^* \frac{\partial L}{\partial \psi_n^*} + \psi_m \frac{\partial L}{\partial \psi_n} - \delta_{mn} L \quad (3.3.31)$$

является, конечно, плотностью энергии H . Ее можно выразить через канонические импульсы p , p^* , функции ψ , ψ^* и их градиенты

$$\begin{aligned} W_{44} &= \frac{\hbar^2}{2m} (\text{grad } \psi^*) \cdot (\text{grad } \psi) + \frac{\hbar^2}{2mc^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} mc^2 \psi^* \psi = \\ &= \frac{2mc^2}{\hbar^2} (p^* p) + \frac{\hbar^2}{2m} (\text{grad } \psi^*) \cdot (\text{grad } \psi) + \frac{1}{2} mc^2 \psi^* \psi = H. \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Отсюда с помощью канонических уравнений (3.3.6) мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2mc^2}{\hbar^2} p^*, \\ \frac{\partial p^*}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial \psi_n^*} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_n^*} \right) - \frac{\partial H}{\partial \psi^*} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{1}{2} mc^2 \psi \end{aligned}$$

и еще два уравнения для $\partial \psi^* / \partial t$ и $\partial p / \partial t$. Эти уравнения снова дают уравнения Клейна—Гордона для ψ и ψ^* .

Вектор плотности импульса поля равен

$$\mathbf{P} = iW_{14} + jW_{24} + kW_{34} = \frac{\hbar^2}{2mc^2} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \text{grad } \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \text{grad } \psi^* \right], \quad (3.3.33)$$

а вектор $\mathbf{S}$ плотности потока энергии есть $-c^2 \mathbf{P}$.

Выражения плотности тока и заряда для этого уравнения можно вывести разными способами. Можно, например, — этот прием окажется полезен в дальнейшем, — забегая вперед, обратиться к уравнению (3.4.11) и заметить, что то слагаемое в выражении функции Лагранжа, которое включает взаимодействие между электромагнитными потенциалами и током, выражается в виде $(1/c) \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - q\varphi$. Поэтому такой же вид должно иметь то слагаемое в (3.3.27), в которое входят ψ и потенциалы, т. е.

$$\frac{\hbar e}{2imc} \mathbf{A} \cdot [\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \psi^*] + \frac{\hbar e}{2imc^2} \varphi \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right).$$

Отсюда мы заключаем, что вектор плотности тока должен выражаться в виде

$$\mathbf{J} = (e\hbar/2im) [\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \psi^*], \quad (3.3.34)$$

т. е. должен совпадать с выражением (2.6.47) для уравнения Шредингера при $\mathbf{A}$ и φ , равных нулю. Соответствующее выражение плотности зарядов при $A=0$ и $\varphi=0$ есть

$$\rho = -\frac{e\hbar}{2imc^2} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right]; \quad (3.3.35)$$

это выражение *отлично* от того, которое соответствует уравнению Шредингера. Действительно, выражение (3.3.35) не обязательно сохраняет определенный знак (зависящий от знака e), а это не вполне удобно для волновой функции (если только мы не имеем в виду рассматривать заряды переменного знака!).

Между прочим, эти выражения для $\mathbf{J}$ и ρ могут быть получены и из самих уравнений Клейна—Гордона так же, как на стр. 246 были выведены $\mathbf{J}$ и ρ для уравнения Шредингера.

3.4. Векторные поля

Если поле, потребное для описания какого-либо физического явления, имеет несколько компонент, исследование усложняется, но общие принципы, изложенные выше, остаются в силе. Независимыми переменными, которые должны быть подобраны так, чтобы интеграл от плотности функции Лагранжа L принимал минимальное значение, служат компоненты $\psi_1, \dots, \psi_n$, являющиеся функциями от параметров x, y, z, t (или любых других четырехмерных координат). L есть инвариантная функция от ψ_i и их производных $\psi_{ij} = \partial\psi_i/\partial\xi_j$ ($\xi_1 = x, \xi_2 = y, \xi_3 = z, \xi_4 = t$), и мы должны минимизировать интеграл

$$\mathcal{L} = \iiint\int L(\psi_i, \psi_{ij}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4.$$

Уравнения Эйлера, то есть уравнения движения поля, имеют вид

$$\sum_{s=1}^4 \frac{\partial}{\partial\xi_s} \left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}} \right) = \frac{\partial L}{\partial\psi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{i4}} \right) = \frac{\partial L}{\partial\psi_i} - \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial\xi_s} \left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}} \right). \quad (3.4.1)$$

Заметим, что интеграл Лагранжа $\mathcal{L}$ и соответствующие уравнения Лагранжа—Эйлера обладают своего рода «калибровочной инвариантностью» (см. стр. 205). Значение $\mathcal{L}$ не изменяется от прибавления к L 4-дивергенции какой-либо 4-векторной функции от ψ_i и их производных, обращающейся в нуль на границе поля. Действительно, такой четырехкратный интеграл от 4-дивергенции равен четырехмерному аналогу потока этой векторной функции сквозь границу поля, а такой поток равен нулю, так как сама функция равна нулю на границе. Так как $\mathcal{L}$ не изменяется при замене L на $L' = L + \nabla \cdot \mathbf{F}$, то новая плотность функции Лагранжа L' также удовлетворяет уравнениям Лагранжа—Эйлера (3.4.1). Таким образом, $\mathcal{L}$ и уравнения Лагранжа—Эйлера инвариантны относительно замены L на L' .

Общие свойства поля. Величина $p_i = \partial L / \partial\psi_{i4}$ называется плотностью канонического импульса для i -й компоненты ψ_i , хотя, как мы уже видели, часто она имеет отдаленное отношение к тому, что обычно называют импульсом. Тем не менее величина $\partial p_i / \partial t$, участвующая в уравнениях Эйлера, аналогична произведению массы на ускорение в более простых системах. Следовательно, величина

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial\psi_i} - \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial\xi_s} \left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}} \right),$$

равная скорости изменения p_i во времени, аналогична компоненте силы, соответствующей компоненте ψ_i поля. Первое слагаемое $\partial L / \partial \psi_i$ обычно бывает обусловлено наличием внешних сил, действующих на поле. Второй член часто представляет собой эффект воздействия самого поля на его i -ю компоненту в точке x, y, z, t .

Тензор $\mathfrak{W}$ с компонентами

$$W_{ij} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi_i} \frac{\partial L}{\partial \psi_{rj}} - \delta_{ij} L \quad (3.4.2)$$

представляет собой тензор напряжения-энергии. Его временная компонента W_{44} есть плотность энергии H поля; интеграл от нее не зависит от времени.

Так же, как и раньше, можно показать, что H может быть выражено через ψ_r , канонические импульсы p_r и градиенты ψ_{rj} . Действуя так же, как на стр. 290, мы можем получить канонические уравнения Гамильтона посредством вариационного принципа. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial t} = \psi_{r4} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{\partial p_r}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_{rj}} \right) - \frac{\partial H}{\partial \psi_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Из них также можно вывести уравнения движения (3.4.1).

Тензор $\mathfrak{W}$ часто оказывается несимметричным, что может вызвать серьезные затруднения, поскольку мы привыкли к тому, что аффиноры напряжения симметричны. Если нам желательно пользоваться симметричными аффинорами, то этого можно добиться, воспользовавшись «калибровочной инвариантностью» функции $\mathcal{L}$ и уравнений Лагранжа. Мы прибавим к функции плотности L дивергенцию некоторой специальной векторной функции от ψ и от их производных и в то же время подберем масштаб по каждой из координат так, чтобы тензор $\mathfrak{W}$ стал симметричен, а W_{44} по-прежнему было плотностью энергии. То, что точный вид тензора напряжения-энергии оказывается неопределенным, аналогично неопределенности выражения плотности энергии струны (см. стр. 126). Впрочем, эта неопределенность лишь формальная, так как она не сказывается на физически измеримых величинах.

Как было показано на стр. 295, 4-вектор, получаемый дифференцированием, имеющий компоненты

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\partial W_{ij}}{\partial \xi_j} = 0, \quad (3.4.3)$$

равен нулю.

Следует заметить, однако, что доказательство равенств (3.4.3) основывается на предположении, что L и $\mathfrak{W}$ зависят от параметров ξ_j *только через посредство функций* ψ_r . Если в L (а следовательно, и в $\mathfrak{W}$) входят еще и другие члены (такие, как потенциалы или плотности тока), зависящие явно от ξ , то левые части (3.4.3) будут равны некоторым выражениям, содержащим производные этих дополнительных членов по ξ . Явная зависимость L от координат имеет место только тогда, когда само поле порождается некоторой совокупностью частиц или материальной средой (такой, как электрический ток). Например, лоренцова сила, действующая на электрон, выражается через компоненты поля в определенной точке пространства, именно в той, где находится электрон. Взаимодействие же различных частей поля выражается интегралами, распро-

страненными по всему пространству, и поэтому зависимость от координат проявляется только через посредство ϕ .

Во всяком случае тогда, когда L и $\mathfrak{W}$ зависят от ξ только через ϕ , тождества (3.4.3) выполняются, и в этом случае 3-вектор

$$\mathbf{S} = iW_{41} + jW_{42} + kW_{43} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \left[i \frac{\partial L}{\partial \psi_{r1}} + j \frac{\partial L}{\partial \psi_{r2}} + k \frac{\partial L}{\partial \psi_{r3}} \right] \quad (3.4.4)$$

удовлетворяет уравнению неразрывности $\text{div } \mathbf{S} + (\partial H / \partial t) = 0$. Следовательно, он должен представлять плотность потока энергии поля. Этот вектор можно назвать *интенсивностью поля*.

Дополнительный вектор

$$\mathbf{P} = iW_{14} + jW_{24} + kW_{34} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial L}{\partial \psi_{r4}} \text{grad } \phi_r \quad (3.4.5)$$

имеет размерность импульса, отнесенного к единице объема, и может быть назван *плотностью импульса поля*. Если функция L видоизменена так, что тензор $\mathfrak{W}$ оказывается симметричным, то $\mathbf{P} = \mathbf{S}$; в любом случае вектор $\mathbf{P}$ тесно связан с вектором $\mathbf{S}$.

Пространственная часть тензора $\mathfrak{W}$ есть 3-аффинор

$$\mathfrak{U} = iW_1 + jW_2 + kW_3,$$

где

$$W_1 = W_{11}i + W_{12}j + W_{13}k = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \psi_r}{\partial x_1} \left[i \frac{\partial L}{\partial \psi_{r1}} + j \frac{\partial L}{\partial \psi_{r2}} + k \frac{\partial L}{\partial \psi_{r3}} \right] - Li \quad (3.4.6)$$

и т. д. Три других уравнения типа (3.4.3), содержащих дивергенции, задаются векторным уравнением

$$\mathfrak{U} \cdot \nabla = i \text{div } W_1 + j \text{div } W_2 + k \text{div } W_3 = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t};$$

последнее указывает на то, что если $\mathbf{P}$ — импульс, то производная от $\mathfrak{U}$ есть тензор силы, так что $\mathfrak{U}$ связано с потенциальной энергией, порожденной полем.

Тензор напряжения-энергии имеет матрицу

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & P_1 \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & P_2 \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & P_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & H \end{pmatrix},$$

где W_{ij} заданы равенствами (3.4.2) и $W_{n4} = P_n$, $W_{4n} = S_n$.

Вектор плотности момента количества движения можно (если это необходимо) получить, взяв векторное произведение радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки (x, y, z) относительно некоторого начала на вектор $\mathbf{P}$ в точке (x, y, z)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial L}{\partial \psi_{r4}} [\mathbf{r} \times \text{grad } \phi_r].$$

В квантовой механике эта характеристика поля волновой функции оказывается связанной с вероятным моментом количества движения частиц, ассоциированных с рассматриваемой волновой функцией. В случае,

например, невязкой сжимаемой жидкости плотность момента количества движения, согласно (3.3.10) и (3.3.15), равна

$$\mathbf{M} = (p/c^2)(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \rho s(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

Это — момент количества движения избытка плотности, вызванного движением жидкости.

Таким образом, изменение во времени плотности энергии H требует наличия вектора плотности потока энергии $\mathbf{S}$, а изменение во времени плотности импульса $\mathbf{P}$ — аффинора «внутренних напряжений» $\mathfrak{I}$. По этой причине тензор $\mathfrak{W}$ и называется «тензором напряжения-энергии», хотя было бы более точно называть его тензором напряжения-энергии-импульса.

Изотропные упругие среды. Теперь мы можем приложить эти общие формулы к нескольким интересным случаям для того, чтобы посмотреть, какой физический смысл приобретает этот аппарат. В качестве первого примера рассмотрим движение упругого тела (ранее мы занимались этим в §§ 1.6 и 2.2). Согласно § 2.2 [см. формулы (2.2.17) и (2.2.18)], плотностью функции Лагранжа для изотропной упругой среды является

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} \rho (\partial s / \partial t)^2 - \frac{1}{2} |\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{S}| = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \rho \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial t} \right)^2 \right] - \lambda \left[\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2\mu \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial z} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \mu \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.4.7) \end{aligned}$$

где вектор $\mathbf{s}$ представляет собой смещение точки (x, y, z) при деформации, ρ — плотность среды, λ и μ — постоянные упругости, $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla)$ — аффинор деформации, а $\mathfrak{I}$ — аффинор напряжений

$$\mathfrak{I} = \lambda \mathfrak{I} |\mathfrak{S}| + 2\mu \mathfrak{S} = \lambda (\operatorname{div} \mathbf{s}) \mathfrak{I} + \mu (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla).$$

Переменными ψ_n поля могут служить компоненты s_x, s_y, s_z вектора смещения; они должны быть такими, чтобы интеграл $\mathcal{L} = \int \int \int \int L dx dy dz dt$ (полная функция Лагранжа) принимал минимальное значение. Уравнение Лагранжа — Эйлера (3.4.1) для s_x имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{s}) + \mu \nabla^2 s_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{s}),$$

то есть представляет собой первую компоненту векторного уравнения

$$\rho (\partial^2 \mathbf{s} / \partial t^2) = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{s}) + \mu \nabla^2 \mathbf{s},$$

а это и есть уравнение движения (2.2.1).

Временная часть тензора $\mathfrak{W}$, определенного равенствами (3.4.2), есть плотность энергии

$$W_{44} = \frac{1}{2} \rho (\partial s / \partial t)^2 + \frac{1}{2} |\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{S}| = H,$$

а вектор интенсивности поля, определенный равенством (3.4.4), равен

$$\mathbf{S} = -(\partial \mathbf{s} / \partial t) \cdot \mathfrak{I},$$

т. е. вектору плотности потока энергии [см. (2.2.20)]. Он удовлетворяет уравнению неразрывности энергии $\operatorname{div} \mathbf{S} + (\partial H / \partial t) = 0$ [см. уравнение (3.4.3), как было показано на стр. 295], так как в рассматриваемом случае L зависит от координат *только* через посредство переменных поля s .

Тензор $\mathfrak{W}$ не симметричен. Его пространственная часть, которая соответствует аффинору сил, определенному равенствами (3.4.6), есть

$$\mathfrak{U} = -(\nabla s) \cdot \mathfrak{T} - L \mathfrak{S}.$$

Плотность импульса поля, определенная равенством (3.4.5), равна

$$\mathbf{P} = \rho (\nabla s) \cdot (\partial s / \partial t).$$

Эти две величины удовлетворяют уравнению дивергенции $\mathfrak{U} \cdot \nabla + (\partial \mathbf{P} / \partial t) = 0$. Если $\mathbf{P}$ — плотность импульса, то аффинор $\mathfrak{U}$ связан с плотностью напряжений, что вытекает из выражения $\mathfrak{U}$ через тензор напряжений $\mathfrak{T}$.

Для того чтобы показать, насколько удобны и компактны векторные и аффинорные обозначения, выпишем полностью первые две компоненты тензора напряжения-энергии $\mathfrak{W}$:

$$\begin{aligned} W_{11} = & \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left[-\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial z}\right)^2 \right] - \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial s_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial t}\right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial s_y}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial s_z}{\partial z}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial s_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial s_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y}\right)^2 \right], \\ W_{12} = & -\frac{\partial s_x}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right) \right] - \frac{\partial s_y}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial s_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial s_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial s_z}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Здесь уместно сделать еще несколько замечаний. Несомненно, вариационный принцип позволил нам собрать и представить в сжатом виде большую часть уравнений и формул, выведенных нами с таким трудом в гл. 2. Независимо от того, можем мы или не можем выжать из этого синтеза дальнейшее физическое содержание или использовать побочные продукты, такие, как импульс поля или аффинор сил, мы во всяком случае владеем прямым и плодотворным методом вывода уравнений движения с помощью плотности функции Лагранжа и получения таких важных величин, как интенсивность и плотность энергии.

Решения типа плоской волны. Для того чтобы сделать более конкретными выведенные здесь формулы, применим их к плоской волне, то есть к гармоническому решению уравнения движения (2.2.1). Согласно (2.2.2), одним из решений является функция

$$s = \operatorname{grad} \psi,$$

где

$$\psi = C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad k = \omega / c_c, \quad c_c^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho.$$

Смещения можно определить, вычислив градиент функции ψ ,

$$\begin{aligned} s_c &= i\mathbf{k} C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} = \mathbf{a}_k A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad A = i k C = |A| e^{i\varphi}, \\ \mathbf{k} &= k \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{a}_k = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}^1), \end{aligned}$$

¹⁾ Конечно, в последней формуле $\mathbf{k}$ — единичный вектор координатной оси. — *Прим. ред.*

где α, β, γ — направляющие косинусы волнового вектора $\mathbf{k}$, определяющего направление распространения волны. Таким образом, смещения в такой волне сжатия, как уже было сказано, направлены вдоль $\mathbf{k}$ и амплитуда их равна $|A|$. Тензор деформаций и тензор напряжений выражаются в виде

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla) = -\mathbf{k} \mathbf{k} C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} = i \mathbf{k} a_k A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t},$$

$$\mathfrak{T} = -\left(\lambda \frac{\omega^2}{c_s^2} \mathfrak{S} + 2\mu \mathbf{k} \mathbf{k}\right) C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t},$$

где $\mathbf{k} \mathbf{k}$ — симметричный аффинор и его коэффициент расширения $|\mathbf{k} \mathbf{k}| = (\omega/c_s)^2$.

Для того чтобы вычислить тензор напряжения-энергии, нужно взять действительные части этих выражений. Так, например, плотность энергии выразится в виде

$$W_{44} = \rho \omega^2 |A|^2 \sin^2 \Omega,$$

где $\Omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi = (\omega/c_s)(\alpha x + \beta y + \gamma z - c_s t) + \varphi$. Вектор потока энергии равен

$$\mathbf{S} = a_k \rho c_s \omega^2 |A|^2 \sin^2 \Omega,$$

а вектор импульса волны $\mathbf{P} = \mathbf{S}/c_s^2$. Пространственная часть аффинора оказывается равной

$$\mathfrak{U} = a_k a_k \rho \omega^2 |A|^2 \sin^2 \Omega.$$

Все это, конечно, напоминает соответствующие выводы в случае волн сжатия в жидкости (см. стр. 298).

В случае поперечных волн или волн сдвига

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_p B e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad k = \omega/c_s, \quad c_s^2 = \mu/\rho, \quad B = |B| e^{i\varphi},$$

где $\mathbf{a}_p$ — единичный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{k}$. Аффиноры деформации и напряжений задаются равенствами

$$\mathfrak{T} = 2\mu \mathfrak{S} = i \rho c_s \omega B (\mathbf{a}_k \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_p \mathbf{a}_k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}.$$

Аффинор $(\mathbf{a}_k \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_p \mathbf{a}_k)$ симметричен, но $|\mathbf{a}_k \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_p \mathbf{a}_k| = 0$, так что $|\mathfrak{T}|$ и $|\mathfrak{S}|$ равны нулю.

Различные части тензора напряжения-энергии равны

$$W_{44} = \rho \omega^2 |B|^2 \sin^2 \Omega,$$

$$\mathbf{S} = a_k \rho c_s \omega^2 |B|^2 \sin^2 \Omega, \quad \mathbf{P} = \mathbf{S}/c_s^2,$$

$$\mathfrak{U} = a_k a_k \rho \omega^2 |B|^2 \sin^2 \Omega,$$

$$\text{где } \Omega = (\omega/c_s)(\alpha x + \beta y + \gamma z - c_s t) + \varphi,$$

то есть они имеют тот же вид, как и в случае плоских волн сжатия. Другими словами, векторы потока энергии и импульса волны направлены вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, хотя смещения среды ортогональны $\mathbf{k}$.

Импеданс. В случае неизотропной среды плотность функции Лагранжа [см. (1.6.29)] выражается в виде

$$L = \frac{1}{2} \rho |\partial \mathbf{s} / \partial t|^2 - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s}) : \mathfrak{L} : (\nabla \mathbf{s}),$$

где $\mathfrak{L}$ («гимель») есть тетрадик¹⁾ с компонентами g_{mnrs} , определяемыми

¹⁾ См. стр. 76.

природой рассматриваемой среды. В силу симметрии аффиноров $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{Z}$ всегда выполняются равенства $g_{mnrs} = g_{rsmn} = g_{n.snr}$. В случае изотропной среды элементы $\mathfrak{I}$ равны

$$g_{mnrs} = [\lambda \delta_{mn} \delta_{rs} + \mu \delta_{mr} \delta_{ns} + \mu \delta_{ms} \delta_{nr}]$$

или

$$\mathfrak{I} = \lambda \mathfrak{Y} + \mu \mathfrak{J} + \mu \mathfrak{J}^*, \quad \mathfrak{Y} : \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{J} : \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{J}^* : \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*.$$

В неизотропном случае уравнение движения записывается в виде

$$\rho (\partial^2 s / \partial t^2) = \nabla \cdot \mathfrak{I} : (\nabla s).$$

Это — сложное дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными относительно компонент s . В этом случае не всегда удастся отделить волны чистого сжатия от чисто поперечных волн; кроме того, волны в различных направлениях распространяются с различными скоростями.

Элементами тензора напряжения-энергии являются

$$W_{44} = \frac{1}{2} \rho (\partial s / \partial t)^2 + \frac{1}{2} (\nabla s) : \mathfrak{I} : (\nabla s), \\ S = -(\partial s / \partial t) \cdot \mathfrak{I} : (\nabla s), \quad P = \rho (\nabla s) \cdot (\partial s / \partial t), \\ \mathfrak{U} = -(\nabla s) \cdot [\mathfrak{I} : (\nabla s)] - L \mathfrak{Z}.$$

Эти же обозначения могут быть использованы для изучения импеданса волн в упругой среде. Как было сказано на стр. 296, внешние силы обычно бывают приложены к поверхности, ограничивающей среду, и выражаются в виде объемного интеграла от инерционной реакции $\rho (\partial s / \partial t)$. Но эта реакция равна выражению $\nabla \cdot \mathfrak{I} : (\nabla s)$, подобному дивергенции, поэтому объемный интеграл равен интегралу по поверхности от

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{I} : (\nabla s)$$

— аффинора поверхностной плотности сил. Это выражение представляет собой аффинор (как и любое напряжение в упругой среде), так как сила, действующая на поверхность, есть вектор, зависящий от направления нормали к поверхности. Плотность силы на элементе поверхности, внутренняя нормаль которой направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{a}_n$, равна $\mathbf{a}_n \cdot \mathfrak{I} : (\nabla s)$, т. е. представляет собой вектор.

Когда движущая сила — гармоническая, вектор установившегося смещения также содержит множитель $e^{i\omega t}$ (или же $e^{-i\omega t}$, тогда импеданс, а также адмитанс получают комплексно-сопряженные значения). Плотность силы на участке граничной поверхности, колеблющемся со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{V} e^{i\omega t} = i\omega s$, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_n \cdot \mathfrak{I} : (\nabla s) = \mathfrak{Z} \cdot \mathbf{v} = i\omega \mathfrak{Z} \cdot s,$$

где $\mathbf{a}_n$ — единичный вектор, нормальный к поверхности, в точке, где измеряется $\mathbf{F}$. Аффинор $\mathfrak{Z}$, который можно выразить через компоненты g и свойства решения s , есть аффинор импеданса, измеряющий реакцию среды на действие приложенной силы.

Например, в изотропном случае, когда $\mathfrak{I} = \lambda \mathfrak{Y} + \mu \mathfrak{J} + \mu \mathfrak{J}^*$, мы имеем

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathfrak{I} : (\nabla s) = (\lambda \operatorname{div} s) \mathbf{a}_n + \mu \mathbf{a}_n \cdot (\nabla s + s \nabla).$$

Если рассматривать плоскую волну сжатия, когда волновые поверхности ортогональны вектору $\mathbf{k}$, по направлению которого распространяется

волна (т. е. когда $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_k$), то $\nabla \mathbf{s} = i \mathbf{a}_k \mathbf{k} A e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \omega t} = \mathbf{s} \nabla$,

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{j} : (\nabla \mathbf{s}) = \mathbf{a}_k i \omega \rho c A e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \omega t}, \quad \rho c_s^2 = \lambda + 2\mu.$$

В этом случае движущая сила действует в направлении скорости $\mathbf{a}_k i \omega A e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \omega t}$ движения среды, поэтому аффино́р импеданса будет равен характеристическому импедансу сжатия ρc_s среды, умноженному на идемфактор.

В случае плоской волны сдвига скорость движения поверхности $i \omega \mathbf{a}_p A e^{-i \omega t}$ перпендикулярна вектору $\mathbf{k}$, и с помощью формул стр. 308 мы получим

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{j} : (\nabla \mathbf{s}) = \mathbf{a}_p i \omega \rho c_s B e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \omega t}, \quad \rho c_s^2 = \mu.$$

И в этом случае действующая сила параллельна скорости и аффино́р импеданса равен характеристическому импедансу сдвига ρc_s , умноженному на идемфактор, хотя сила и скорости ортогональны направлению распространения волны.

Электромагнитное поле. Рассмотрим теперь поле, выражающееся через 4-векторы, именно то, для которого предназначались преобразования Лоренца, — поле электромагнитное. Согласно § 2.5, основными величинами поля ψ_i должны быть компоненты 4-вектор-потенциала (см. стр. 203)

$$V_1 = A_x, \quad V_2 = A_y, \quad V_3 = A_z, \quad V_4 = i\varphi,$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, а φ — скалярный потенциал. В этом случае мы откажемся от координат ξ в пользу лоренцовых координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, так же, как в § 2.5. Такой выбор координат обеспечит лоренц-инвариантность, но потребует в некоторых местах добавления множителя ic для сохранения размерности. Производные потенциалов запишутся в виде

$$V_{12} = \frac{\partial A_x}{\partial y} \text{ и т. д.}, \quad V_{41} = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и т. д.}, \\ V_{14} = \frac{1}{ic} \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad V_{44} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

В этих обозначениях векторы поля будут иметь вид

$$E_x = i(V_{41} - V_{14}) = if_{14}, \quad E_y = i(V_{42} - V_{24}) = if_{24}, \\ H_x = (V_{32} - V_{23}) = f_{23}, \quad H_y = (V_{13} - V_{31}) = f_{31}, \quad (3.4.8)$$

если мы предположим, что μ и ε равны единице.

По сравнению с упругой средой мы имеем здесь некоторое осложнение, состоящее в том, что компоненты потенциала связаны между собой *дополнительным условием, накладываемым на дивергенцию*

$$\sum_{n=1}^4 V_{nn} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (3.4.9)$$

что эквивалентно уравнению (2.5.14), связывающему между собой $\mathbf{A}$ и φ . Эту равную нулю дивергенцию можно, таким образом, прибавлять к различным выражениям или вычитать из них с целью их упрощения.

Теперь мы должны найти плотность функции Лагранжа, с помощью которой можно было бы вывести уравнения движения [см. (2.5.20)]

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} f_{mn} = \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} (V_{nm} - V_{mn}) = \frac{\partial}{\partial x_m} \sum_n V_{nn} - \sum_n \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_n^2} = \frac{4\pi}{c} I_m, \quad (3.4.10)$$

эквивалентные уравнениям Максвелла или волновым уравнениям (2.5.15), и получить в качестве 4,4-компоненты тензора напряжения-энергии плотность энергии [см. (2.5.28)]

$$W_{44} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{1}{8\pi} [f_{12}^2 + f_{23}^2 + f_{31}^2 - f_{14}^2 - f_{24}^2 - f_{34}^2],$$

если 4-вектор $\mathbf{I}$ равен нулю. Вектор $\mathbf{I}$ был определен на стр. 202 как четырехмерный вектор плотности заряда-тока

$$\mathbf{I}_1 = J_x, \quad I_2 = J_y, \quad I_3 = J_z, \quad I_4 = ic\rho.$$

Здесь было бы довольно трудно воспользоваться определением L как разности между плотностью кинетической энергии и плотностью потенциальной энергии, так как не ясно, что отнести к кинетической, а что к потенциальной энергии. Рассмотрение возможных инвариантов подскажет нам, что в L должно входить $(1/8\pi)(E^2 - H^2)$; L должно предполагать еще содержать скалярное произведение векторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{V}$. Составив для такого L уравнения Лагранжа—Эйлера и сравнив их с уравнениями (3.4.10), мы придем к заключению, что точное выражение плотности функции Лагранжа должно быть таково:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{8\pi} \{(V_{41} - V_{14})^2 + (V_{42} - V_{24})^2 + (V_{43} - V_{34})^2 + \\ & + (V_{12} - V_{21})^2 + (V_{23} - V_{32})^2 + (V_{31} - V_{13})^2\} + \\ & + \frac{1}{c} \{I_1 V_1 + I_2 V_2 + I_3 V_3 + I_4 V_4\} = \\ = & -\frac{1}{16\pi} \sum_{n,m} f_{nm}^2 + \frac{1}{c} \sum_n I_n V_n = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2) + \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \rho\varphi. \quad (3.4.11) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения Максвелла в случае свободного пространства ($\mathbf{J} = 0$ и $\rho = 0$) соответствуют требованию, чтобы E^2 было настолько близко к H^2 , насколько это совместимо с краевыми условиями.

Уравнения Лагранжа—Эйлера (3.4.1) как раз совпадают с уравнениями Максвелла (3.4.10). Вектор плотности канонического импульса $\mathbf{p}$ с компонентами $p_n = (1/ic)(\partial L / \partial V_{n4})$ ($n = 1, 2, 3$), которые оказываются равными $(1/4\pi ic)(V_{4n} - V_{n4})$, совпадает с вектором $-(1/4\pi c)\mathbf{E}$. «Вектор силы», соответствующий скорости изменения этого импульса во времени, будет равен $(\mathbf{J}/c) - (1/4\pi)\text{rot } \mathbf{H}$. Временная компонента плотности канонического импульса $\partial L / \partial V_{44}$ равна нулю, а уравнение $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$, «временная компонента» уравнений Лагранжа—Эйлера (3.4.10), представляет собой своего рода уравнение неразрывности для вектора плотности канонического импульса $\mathbf{p} = -(1/4\pi c)\mathbf{E}$.

Тензор напряжения-энергии. Временная компонента тензора энергии-импульса $\mathfrak{S}$ должна быть плотностью функции Гамильтона

$$\begin{aligned} W_{44} = & \sum_{i=1}^4 V_{i4} \frac{\partial L}{\partial \psi_{i4}} - L = -\frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^3 (V_{4m} - V_{m4})^2 + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^3 V_{4m} (V_{4m} - V_{m4}) + \frac{1}{8\pi} [(V_{12} - V_{21})^2 + \\ & + (V_{23} - V_{32})^2 + (V_{31} - V_{13})^2] - \frac{1}{c} \sum_{n=1}^4 I_n V_n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi} \sum_r f_{4r}^2 + \frac{1}{16\pi} \sum_{s,r} f_{sr}^2 - \frac{1}{c} \sum_n I_n V_n + \frac{1}{4\pi} \sum_m V_{4m} f_{4m} = \\
&= \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) - \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \rho\varphi + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \text{grad } \varphi. \quad (3.4.12)
\end{aligned}$$

Это выражение отличается от того, которое вытекает из (2.5.28), присутствием слагаемых $\rho\varphi + (1/4\pi) \mathbf{E} \cdot \text{grad } \varphi$. Но $\mathbf{E} \cdot \text{grad } \varphi = \text{div}(\varphi \mathbf{E}) - \varphi \text{div } \mathbf{E}$, и, так как $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$, мы видим, что эти дополнительные слагаемые в сумме дают $(1/4\pi) \text{div}(\varphi \mathbf{E})$. Интеграл от дивергенции по всему пространству равен потоку поля на бесконечности, а этот последний равен нулю, поэтому среднее значение W_{44} равно среднему значению плотности функции Гамильтона

$$U = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) - \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = T_{44} - \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad (3.4.13)$$

где тензор $\mathfrak{T}$ определен формулой (2.5.30). Это — проявление свойств калибровочной инвариантности поля, упомянутых на стр. 204, а также отмеченного на стр. 126 обстоятельства, что плотность энергии и плотность потока энергии определяются неоднозначно, хотя и имеют однозначно определенные интегралы по всему пространству.

С другой стороны, для того чтобы правильно составить гамильтоновы канонические уравнения (см. стр. 304), нужно воспользоваться полным выражением W_{44} , введя в него канонический импульс p вместо $-(1/4\pi c) \mathbf{E}$. Тогда функция Гамильтона примет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= 2\pi c^2 p^2 + \frac{1}{8\pi} H^2 - c\rho \cdot \text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \rho\varphi = \\
&= \sum_{n=1}^3 (2\pi c^2 p_n^2 + icV_{4n}p_n) - \frac{1}{c} \sum_{m=1}^4 V_m I_m + \\
&\quad + \frac{1}{8\pi} [(V_{12} - V_{21})^2 + (V_{13} - V_{31})^2 + (V_{23} - V_{32})^2].
\end{aligned}$$

Уравнение $\partial\varphi_n/\partial t = icV_{n4} = \partial H/\partial p_n$ запишется в виде

$$ic(V_{n4} - V_{4n}) = 4\pi c^2 p_n,$$

откуда мы получим

$$p_n = \frac{1}{4\pi ic} (V_{4n} - V_{n4})$$

в согласии с первоначальным определением p_n . Уравнения

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = \sum_{r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial H}{\partial V_{nr}} \right) - \frac{\partial H}{\partial V_r}$$

превращаются в уравнения Максвелла

$$-\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H} + \frac{1}{c} \mathbf{J}, \quad p_4 = 0, \quad -\frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{E} + \rho = 0.$$

Таким образом, для получения функции Гамильтона можно пользоваться компонентой W_{44} , но, вычисляя принятое нами выражение для плотности энергии, нужно пользоваться величиной U .

Подобную же коррективу приходится вводить для получения известных выражений вектора интенсивности и импульса поля из недиагональных

элементов тензора напряжения-энергии. Мы имеем

$$\begin{aligned} W_{mn} &= \sum_{r=1}^4 V_{rm} \left(\frac{\partial L}{\partial V_{rn}} \right) = -\frac{1}{4\pi} \sum_r V_{rm} (V_{rn} - V_{nr}) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_r (V_{rm} - V_{mr}) (V_{rn} - V_{nr}) - \frac{1}{4\pi} \sum_r (V_{mr} V_{rn} - V_{mr} V_{nr}). \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Вторую сумму в последнем выражении можно преобразовать, воспользовавшись вспомогательным условием (3.4.9) и волновым уравнением для потенциалов [см. (2.5.15)] $\sum_r (\partial V_{nr} / \partial x_r) = - (4\pi I_n / c)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \sum_r (V_{mr} V_{rn} - V_{mr} V_{nr}) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} [V_m (V_{rn} - V_{nr})] + \\ &+ \frac{V_m}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \sum_r V_{rr} - \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} V_{nr} \right]. \end{aligned}$$

Первая сумма представляет собой 4-дивергенцию, и ее среднее значение равно нулю. Вторая сумма равна нулю в силу (3.4.9), третья же равна $V_m I_n / c$.

Следовательно, среднее значение W_{mn} (при $m \neq n$) равно среднему от

$$T_{mn} + \left(\frac{V_m I_n}{c} \right) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^4 f_{mr} f_{nr} + \left(\frac{V_m I_n}{c} \right). \quad (3.4.15)$$

В самом деле, среднее значение любой компоненты W_{mn} тензора $\mathfrak{W}$ равно среднему значению тензора, имеющего компоненты

$$T_{mn} + \frac{1}{c} V_m I_n - \frac{1}{c} \delta_{mn} \sum_r V_r I_r,$$

где

$$T_{mn} = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_r f_{mr} f_{nr} + \frac{1}{4} \delta_{mn} \sum_{r,s} f_{rs}^2 \right). \quad (3.4.16)$$

Тензор $\mathfrak{T}$ мы рассматривали ранее, на стр. 240.

В тех участках поля, где 4-вектор заряда-тока равен нулю, тензор $\mathfrak{T}$ совпадает с тензором напряжения-энергии. Компоненты его выражаются через компоненты поля следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{8\pi} [E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2] \text{ и т. д.,} \\ T_{44} &= \frac{1}{8\pi} [E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2] = U, \\ T_{12} &= \frac{1}{4\pi} [E_x E_y + H_x H_y] = T_{21} \text{ и т. д.,} \\ T_{14} &= \frac{1}{4\pi i} [E_y H_z - E_z H_y] = \frac{1}{4\pi i} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x = T_{41} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Импульс поля. То, что мы пренебрегли тензором $\mathfrak{W}$ в пользу $\mathfrak{T}$, не должно нас тревожить, так как $\mathfrak{W}$ не удовлетворяет условиям дивергенции (3.4.3), кроме случая, когда $\mathbf{J}$ и ρ равны нулю, и слишком много пользы от $\mathfrak{W}$

ожидать нельзя. Соотношение дивергенции для $\mathfrak{T}$ не просто из-за выделения 4-дивергенционных членов. Мы имеем

$$\sum_r \frac{\partial T_{mr}}{\partial x_r} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} f_{mr} \frac{\partial f_{rs}}{\partial x_s} = \frac{1}{c} \sum_r f_{mr} I_r = k_m, \quad (3.4.18)$$

где k_m — m -я компонента вектора плотности силы, определенного равенством (2.5.27). Пространственная часть выражения

$$\rho \mathbf{E} + (1/c) \mathbf{J} \times \mathbf{H}$$

определяет величину и направление силы, действующей на распределение зарядов и токов. Она должна равняться скорости изменения импульса зарядов, которая в сумме со скоростью изменения импульса поля равна силе, действующей на поле плюс заряды. Взяв интеграл, например, от k_1 по некоторой области в пространстве и обозначив через Π_1 компоненту по оси x импульса тока в этой области, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_1}{dt} &= \iiint k_1 dv = \iiint \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4} dv + \iiint \operatorname{div} \mathbf{F}_1 dv = \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iiint (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x dv + \iint \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{A}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}_1 = T_{11}\mathbf{i} + T_{12}\mathbf{j} + T_{13}\mathbf{k}$ — сила, действующая на x -компоненты импульсов поля и зарядов; последний интеграл берется по поверхности, ограничивающей выбранную область. Если теперь

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{i}{c} [T_{14}\mathbf{i} + T_{24}\mathbf{j} + T_{34}\mathbf{k}] \quad (3.4.19)$$

назвать импульсом поля (см. стр. 305), то предыдущее равенство означает, что напряжение $\mathbf{T}$, действующее на поверхность части пространства, равно скорости изменения импульса $\mathbf{P}$ тока внутри поверхности *плюс* скорость изменения импульса поля $\mathbf{P}$ внутри этой же поверхности.

Временная компонента k_4 [см. (3.4.18)] есть скорость изменения во времени кинетической энергии T тока. Соответствующее равенство (3.4.18) также имеет физический смысл, который станет более отчетлив, если ввести вектор

$$\mathbf{S} = ic [T_{41}\mathbf{i} + T_{42}\mathbf{j} + T_{43}\mathbf{k}] = (c/4\pi) (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (3.4.20)$$

характеризующий плотность потока энергии, так называемый *вектор Пойнтинга*. Компонента T_{44} представляет собой, конечно, плотность энергии U поля. При $m=4$ уравнение (3.4.18) принимает, таким образом, вид

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial t},$$

так что уравнение неразрывности для потока энергии означает, что поток вектора $\mathbf{S}$ сквозь замкнутую поверхность равен сумме с обратным знаком скоростей изменения энергии тока T и поля U внутри поверхности. Итак, все компоненты тензора $\mathfrak{T}$ имеют физический смысл.

Плотность момента количества движения поля при отсутствии зарядов и токов равна

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi c} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{E} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{H}].$$

Полный момент количества движения поля относительно начала координат получится интегрированием $\mathbf{M}$ по всему объему, занятому полем.

Если электромагнитное поле, отделенное от токов, заключено в конечном объеме (волновой пакет) и движется с течением времени, можно показать, что интеграл от

$$(P_x, P_y, P_z, U) = (iT_{14}/c, iT_{24}/c, iT_{34}/c, T_{44}),$$

взятый по этому объему (точнее говоря, по соответствующей области трехмерного подпространства, ортогонального оси времени, в любой заданный момент), ведет себя по отношению к преобразованиям Лоренца как истинный 4-вектор. В самом деле, в этом случае $\sum_r (\partial T_{mr}/\partial x_r) = 0$, так что если C_m — компоненты какого-либо постоянного 4-вектора, то 4-вектор $\mathbf{B}$ с компонентами $B_r = \sum_m C_m T_{mr}$ имеет 4-дивергенцию $\sum_r (\partial B_r/\partial x_r)$, равную нулю; следовательно, интеграл по любой замкнутой поверхности в четырехмерном пространстве от нормальной составляющей вектора $\mathbf{B}$ равен нулю. Возьмем в качестве такой поверхности поверхность «четырехмерной призмы» с образующими, расположенными вдоль оси времени параллельно движению волнового пакета, и с основаниями, перпендикулярными этим образующим и настолько большими, чтобы призма содержала рассматриваемый волновой пакет. Интеграл по пространственной части (по боковым граням призмы) будет равен нулю, так как поле равно нулю вне пакета, поэтому интеграл временной компоненты $\sum_m C_m T_{m4}$ вектора $\mathbf{B}$ по одному основанию четырехмерной призмы равен интегралу по другому основанию, соответствующему более раннему моменту времени. Таким образом, в данном случае интеграл от $\sum_m C_m T_{m4}$ по объему, занятому пакетом, есть лоренц-инвариант, а соответствующие интегралы от T_{m4} по пакету (по объемам, перпендикулярным оси времени) представляют собой компоненты некоторого истинного 4-вектора, а это мы и хотели доказать.

Из этого вывода следует, что если мы имеем волновой пакет электромагнитного поля, то вектор, компонентами которого служат интегралы импульса поля $\mathbf{P}$ и энергии поля U , представляет собой истинный вектор энергии-импульса, который ведет себя так, как если бы пакет был материальной частицей. Момент количества движения пакета мы получим, взяв интеграл от $\mathbf{M}$, как указано выше.

Вариационными методами можно получить много других интересных свойств электромагнитного поля.

Изменение калибровки потенциалов. Многие трудности, которые нами встретились при переходе от плотности функции Лагранжа к плотности энергии, можно было обойти, изменив должным образом калибровку потенциалов поля. Если вместо того, чтобы исходить из уравнения $\text{div } \mathbf{A} + (1/c)(\partial \phi/\partial t) = 0$, задать новую калибровку потенциалов условием $\phi = 0$, то уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = -(1/c)(\partial \mathbf{A}/\partial t) = \mathbf{D}/\varepsilon, \\ \text{div } (\partial \mathbf{A}/\partial t) &= -(4\pi \rho c/\varepsilon), \\ \text{rot } (\text{rot } \mathbf{A}) + (\varepsilon \mu/c^2)(\partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2) &= (4\pi \mu/c) \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Другими словами, мы пользуемся как продольной, так и поперечной частью вектора $\mathbf{A}$, причем продольная часть определяется плотностью зарядов, а поперечная часть — в значительной степени плотностью тока. Такая калибровка особенно удобна тогда, когда отсутствуют свободные заряды ρ , но она бывает полезна и в других случаях.

Плотность функции Лагранжа при этой калибровке имеет вид

$$L = \frac{\varepsilon}{8\pi c^2} \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 - \frac{1}{8\pi\mu} |\operatorname{rot} \mathbf{A}|^2 + \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.4.22)$$

Следовательно, плотность канонического импульса равна $\mathbf{p} = \varepsilon \dot{\mathbf{A}}/4\pi c^2 = -(\mathbf{D}/4\pi c)$. Уравнения Лагранжа—Эйлера приводят к последнему из уравнений (3.4.21). Первые два связывают поля с потенциалом, третье — определяет калибровку.

При этом плотность функции Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned} W_{44} &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{A}} - L = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \\ &= \frac{2\pi c^2}{\varepsilon} p^2 + \frac{1}{8\pi\mu} |\operatorname{rot} \mathbf{A}|^2 - \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Второе из видоизмененных канонических уравнений снова соответствует последнему уравнению (3.4.21).

Для отыскания остальных компонент тензора напряжения-энергии $\mathfrak{W}$ при выбранной калибровке заметим, что аффинор второго ранга, (x, y) -компонента которого равна $\partial L / \partial (\partial A_x / \partial y)$, есть $(\mathbf{H} \times \mathfrak{J} / 4\pi) = -(\mathfrak{J} \times \mathbf{H} / 4\pi)$. Воспользовавшись этим выражением, мы найдем, что вектор потока энергии (при $\mu = \varepsilon = 1$) равен

$$\mathbf{S} = -\dot{\mathbf{A}} \cdot (\mathfrak{J} \times \mathbf{H} / 4\pi) = (c/4\pi) (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

то есть его выражение совпадает с (3.4.20). Таким образом, наша специальная калибровка приводит к стандартному виду плотности энергии и вектор Пойнтинга и избавляет от возни с дивергенциями, которые неизбежны при обычной калибровке, как мы это видели на предыдущих страницах. С другой стороны, вектор импульса поля имеет иной вид

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{4\pi} (\nabla \mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{A}} = \frac{c}{4\pi} [(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{A})].$$

Соответственно видоизменяются и пространственные составляющие тензора напряжения-энергии

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \mathbf{A}) \times \mathbf{H} - \mathfrak{J} L.$$

Эти величины нам не столь привычны, как плотность энергии и вектор Пойнтинга, поэтому мы, вероятно, можем примириться с их видоизмененными выражениями (можно, впрочем, придать им более знакомую форму, опираясь на калибровочную инвариантность).

Аффинор импеданса. Для определения импеданса электромагнитного поля наиболее удобно принять ту калибровку, которая была введена в предыдущем пункте и привела к «правильному» виду плотности энергии и плотности потока энергии. Вернемся к уравнениям Лагранжа—Эйлера (или к каноническим уравнениям)

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\mathfrak{J} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{c} \mathbf{J}.$$

Выражение справа представляет собой «силу», вызывающую определенную скорость изменения импульса $\mathbf{p} = \varepsilon \dot{\mathbf{A}}/4\pi c^2 = -\mathbf{D}/4\pi c$. Той ее частью, которая прилагается к поверхности, ограничивающей поле, является, согласно сказанному на стр. 296, аффинор $(-1/4\pi) (\mathfrak{J} \times \mathbf{H})$, дивергенция которого входит в приведенное здесь выражение плотности силы. Если

электромагнитная волна возникла на каком-либо участке граничной поверхности, то «реакция» волны на элемент поверхности dA^1) равна

$$\frac{1}{4\pi} dA \cdot (\mathfrak{Z} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi} (dA \times \mathbf{H}),$$

то есть представляет собой вектор, ортогональный к $\mathbf{H}$ и к dA (то есть этот вектор лежит в касательной плоскости к поверхности). Сопоставив этот вывод с правилом циркуляции $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi I$ (см. стр. 214), мы увидим, что если волна «вызвана» поверхностным током на граничной поверхности поля, то вектор $-(c/4\pi)(dA \times \mathbf{H})$ как раз равен, по величине и направлению, току, несомому элементом dA . Интеграл от этого вектора по всему участку поверхности, несущему ток, дает полный токовой лист²⁾.

$\dot{\mathbf{A}} = -c\mathbf{E}$ есть вектор «скорости», поэтому величина, соответствующая импедансу для потенциала $\mathbf{A}$, в направлении, определяемом единичным вектором $\mathbf{a}$, есть аффинор, преобразующий вектор $-c\mathbf{E}$ в вектор $(\mathbf{a}/4\pi) \times \mathbf{H}$. Впрочем, роли «силы» и «скорости» определены нами так, что обычное определение импеданса как отношения Z напряжения к силе тока (H пропорционально силе тока, а E — напряжению) заменено на противоположное.

Итак, мы определим аффинор импеданса $\mathfrak{Z}$ электромагнитного поля как «отношение» электрического поля к магнитному, умноженному на $c/4\pi$, а аффинор адмитанса $\mathfrak{Y}$ — как обратный аффинор, то есть

$$4\pi\mathbf{E} = -c\mathfrak{Z} \cdot \mathbf{H}, \quad c\mathbf{H} = -4\pi\mathfrak{Y} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}^{-1}. \quad (3.4.24)$$

Умножив единичный вектор $\mathbf{a}$ векторно на обе части второго из этих равенств, мы найдем, что адмитанс поля в направлении вектора $\mathbf{a}$ равен $\mathbf{a} \times \mathfrak{Y}$.

Между прочим, мы замечаем, что если $\mathbf{E}$ и $(c/4\pi)\mathbf{a} \times \mathbf{H}$ соответственно аналогичны напряжению и силе тока и, следовательно, импеданс есть «отношение» одного к другому, то «произведение» $(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ есть коэффициент расхода энергии, то есть плотность потока энергии [как и должно быть в соответствии с (3.4.20)]. Таким образом, аналогия оказывается полной.

Плоская волна. Если отсутствуют токи и $\epsilon = \mu = 1$, то простым решением уравнений (3.4.21) будет

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_p A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad \mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{a}_k, \quad A = |A| e^{i\varphi},$$

где $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{a}_p$ — взаимно-ортогональные единичные векторы; соответствующие поля —

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{a}_p A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t},$$

$$\mathbf{H} = \frac{i\omega}{c} (\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_p) A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} = \mathbf{a}_k \times \mathbf{E};$$

$\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ образуют правую тройку взаимно-ортогональных векторов. Как обычно для плоских волн, соответствующее значение функции Лагранжа равно нулю. Плотность энергии и вектор Пойнтинга выра-

¹⁾ Здесь случайное совпадение обозначений: $\mathbf{A}$ и dA . — Прим. ред.

²⁾ «The total current sheet». — Прим. ред.

жаются в виде

$$U = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c^2} \sin^2 \Omega, \quad S = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c} \mathbf{a}_k \sin^2 \Omega$$

$$(\Omega = k(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct + \varphi)),$$

где α, β, γ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{k}$ по отношению к осям x, y, z . При этом аффинор $\nabla \mathbf{A} = i(\omega/c) \mathbf{a}_k \mathbf{a}_p A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$, так что плотность импульса поля имеет выражение

$$\mathbf{P} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c} \mathbf{a}_k \sin^2 \Omega = S$$

и пространственная часть тензора напряжения-энергии представляет собой симметричный аффинор

$$\mathfrak{U} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c^2} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k \sin^2 \Omega.$$

Сам тензор напряжения-энергии может быть записан в такой симметричной матричной форме:

$$\mathfrak{U} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c^2} \sin^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi) \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & c\alpha \\ \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma & c\beta \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma^2 & c\gamma \\ c\alpha & c\beta & c\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, для случая плоской волны импеданс — отношение вектора $\mathbf{E}$ к вектору $-(c/4\pi)\mathbf{H}$ — есть аффинор

$$\mathfrak{Z} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{F} \times \mathbf{a}_k,$$

а адмитанс

$$\mathfrak{Y} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{F} \times \mathbf{a}_k.$$

Импеданс волны в направлении распространения равен, таким образом,

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{a}_k \times \mathfrak{F} \times \mathbf{a}_k = -\frac{4\pi}{c} (\mathfrak{F} - \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k).$$

Мы видим, что в гауссовых единицах, которыми мы здесь пользуемся, «величина» импеданса плоской электромагнитной волны в вакууме равна $4\pi/c$.

Остаются еще лишь несколько полей, заслуживающих быть упомянутыми в этой главе.

Уравнение Дирака. Нам следует, например, составить плотность функции Лагранжа, относящуюся к уравнению Дирака для электрона [см. уравнение (2.6.57)]. Здесь мы имеем восемь независимых переменных поля, компоненты $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ [см. (2.6.56)] волновой функции ψ вдоль четырех направлений спинового пространства и соответствующие компоненты ψ^* . С помощью небольших преобразований мы придем к такому выражению плотности функции Лагранжа:

$$L = \frac{\hbar c}{2i} [(\text{grad } \psi^*) \cdot \boldsymbol{\alpha} \psi - \psi^* \boldsymbol{\alpha} \cdot (\text{grad } \psi)] + \frac{\hbar}{2i} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] -$$

$$- e \psi^* \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \psi + e c \psi^* \varphi \psi - m c^2 \psi^* \alpha_0 \psi, \quad (3.4.25)$$

где $\mathbf{A}$ и φ — электромагнитные потенциалы в точке, где находится электрон, m и e — масса и заряд электрона, ψ и ψ^* представляют все четыре

компоненты каждого из векторов, а операторы $\alpha = \alpha_x \mathbf{i} + \alpha_y \mathbf{j} + \alpha_z \mathbf{k}$ и α_0 определены в (2.6.55).

Уравнения Лагранжа—Эйлера можно получить обычным способом, выразив предварительно ψ и ψ^* через $\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ в уравнении (3.4.25) и выполнив необходимые действия, требуемые операторами α . Так, например, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{1x}^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{1y}^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{1z}^*} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{1t}^*} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_1^*} = 0$$

перейдет в

$$c \left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_4}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \psi_4 \right) + i \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_4}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \psi_4 \right) + \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \psi_3 \right) + \left(\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - e \varphi \psi_1 \right) + mc \psi_1 \right] = 0, \quad (3.4.26)$$

то есть в одно из уравнений Дирака (2.6.57). Однако тот же результат можно получить проще, рассматривая только две переменных ψ и ψ^* и вычисляя формально частные производные так, как если бы это были обыкновенные функции, а не векторы в спинорном пространстве. Например, при этом уравнение Лагранжа—Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_t^*} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} = 0$$

будет соответствовать всему уравнению (2.6.57)

$$c \left[\alpha_0 mc \psi + \alpha \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \text{grad } \psi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \psi \right) + \left(\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial \psi}{\partial t} - e \varphi \psi \right) \right] = 0, \quad (3.4.27)$$

одной из компонент которого является уравнение (3.4.26). Соответствующим уравнением для спинорного вектора ψ^* явится

$$c \left[\psi^* mc \alpha_0 + \left(-\frac{\hbar}{i} \text{grad } \psi^* + \frac{e}{c} \mathbf{A} \psi^* \right) \cdot \alpha + \left(-\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - e \varphi \psi^* \right) \right] = 0.$$

И в рассматриваемом случае энергия равна 4,4-компоненте тензора $\mathfrak{W}$

$$\begin{aligned} W_{44} &= \psi^* \frac{\partial L}{\partial \psi_t^*} + \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_t} - L = H \\ &= mc^2 (\psi^* \alpha_0 \psi) + e \mathbf{A} \cdot (\psi^* \alpha \psi) - e c (\psi^* \varphi \psi) + \\ &\quad + \frac{\hbar c}{2i} [\psi^* \alpha \cdot \text{grad } \psi - \text{grad } \psi^* \cdot \alpha \psi]. \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Вектор «интенсивности поля» $\mathbf{S}$ и вектор «импульса поля» $\mathbf{P}$ получают соответственно выражения

$$\mathbf{S} = iW_{41} + jW_{42} + kW_{43} = \frac{\hbar c}{2i} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \alpha \psi - \psi^* \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} \right], \quad (3.4.29)$$

$$\mathbf{P} = iW_{14} + jW_{24} + kW_{34} = \frac{\hbar}{2i} [(\text{grad } \psi^*) \psi - \psi^* (\text{grad } \psi)]. \quad (3.4.30)$$

Ни один из этих векторов не пропорционален вектору плотности тока

$$\mathbf{J} = ce \psi^* \alpha \psi$$

[см. (2.6.59)]. Так как L только линейно зависит от производных переменных поля по времени, то канонические импульсы пропорциональны самим переменным поля и весь аппарат гамильтоновых канонических уравнений должен быть преобразован так, как описано на стр. 309. Впрочем, более важно выражение интеграла, подлежащего минимизации, а также выражения плотностей энергии и импульса.

Задачи к главе 3

3.1. а. Показать, что может быть определена производящая функция $S'(q, P, t)$ канонического преобразования следующим образом:

$$S' = S(q, Q, t) + PQ$$

и

$$p = \partial S' / \partial q, \quad Q = \partial S / \partial P, \quad K = H + (\partial S' / \partial t).$$

б. Показать, что $S' = qP$ определяет тождественное преобразование.

в. Показать, что если мы имеем бесконечно малое преобразование

$$S' = qP + \varepsilon T(q, P) = qP + \varepsilon T(q, p), \quad \varepsilon \ll 1,$$

то

$$P - p = -\varepsilon (\partial T / \partial q), \quad Q - q = \varepsilon (\partial T / \partial P).$$

г. Показать, что $\Delta f = f(P, Q) - f(p, q)$ выражается в виде

$$\Delta f = \varepsilon (f, T)$$

[где (f, T) — скобки Пуассона] и отсюда вывести, что T является константой движения, если соответствующее преобразование оставляет инвариантной функцию Гамильтона.

д. Показать, что для бесконечно малого поворота вокруг оси z $T = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = M_z$.

3.2. Показать, что уравнения Лагранжа не изменятся, если к функции Лагранжа прибавить какую-либо полную производную по времени. Показать отсюда, что для нерелятивистской частицы, движущейся в электромагнитном поле, функцию Лагранжа можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} mv^2 - e\varphi - (e/c) [(\partial \mathbf{A} / \partial t) + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{A})] \cdot \mathbf{r},$$

где $\nabla \mathbf{A}$ — аффинор (градиент воздействует только на $\mathbf{A}$). Показать, что соответствующей функцией Гамильтона является

$$\mathcal{H} = \left(\frac{1}{2m} \right) |\mathbf{p} + (e/c)(\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}|^2 + (e/c) \mathbf{r} \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) + e\varphi \quad (\text{Ричардс}).$$

3.3. Показать, что в обобщенных ортогональных координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 уравнение Лагранжа — Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \right) \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[h_1 h_2 h_3 \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial \xi_i)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \right] = 0.$$

Взяв в качестве плотности функции Лагранжа $(\nabla \psi)^2$, получить формулу

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \right].$$

3.4. Показать, что тензор третьего ранга

$$M_{\mu\nu\lambda} = T_{\mu\nu} x_\lambda - T_{\mu\lambda} x_\nu$$

($T_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}$, см. стр. 303) удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\sum_\mu \frac{\partial M_{\mu\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0,$$

только если тензор $T_{\mu\nu}$ симметричен. Показать, что M_{4jk} есть плотность момента количества движения и что, интегрируя уравнение неразрывности, мы получим закон сохранения момента количества движения.

3.5. а. Показать, что для бесконечно малого лоренцова преобразования

$$x'_\mu = x_\mu + \sum_\sigma \omega_{\mu\sigma} x_\sigma$$

выполняются равенства $\omega_{\mu\sigma} = -\omega_{\sigma\mu}$.

б. Опираясь на инвариантность плотности функции Лагранжа относительно лоренцовых преобразований, показать, что в случае электромагнитного поля, когда

$$L = -\frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left[\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) - \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) \right]^2,$$

мы имеем

$$\sum_{\nu\sigma} \omega_{\nu\sigma} \Gamma_{\nu\sigma} = 0,$$

где

$$\Gamma_{\nu\sigma} = -T_{\nu\sigma} + \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial A_\nu / \partial x_\mu)} A_\sigma \right].$$

Показать также, что

$$\Gamma_{\nu\sigma} = \Gamma_{\sigma\nu}.$$

3.6. Если $T_{\mu\nu}$ не симметричен, то всегда можно найти тензор $S_{\mu\nu}$, симметричный и обладающий всеми физическими свойствами $T_{\mu\nu}$.

а. Показать, что $S_{\mu\nu}$ должен удовлетворять условиям

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}; \quad \sum_\mu (\partial / \partial x_\mu) S_{\mu\nu} = 0; \quad \int S_{4\nu} dV = \int T_{4\nu} dV.$$

б. Показать, что $S_{\mu\nu}$ должен иметь вид

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \sum_\lambda \left(\frac{\partial G_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \right),$$

где

$$G_{\lambda\mu\nu} = -G_{\mu\lambda\nu} \quad \text{и} \quad T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} [G_{\lambda\mu\nu} - G_{\lambda\nu\mu}].$$

в. Воспользовавшись результатом задачи 3.5, б, показать, что

$$G_{\lambda\mu\nu} - G_{\lambda\nu\mu} = H_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial A_\mu / \partial x_\lambda)} A_\nu - \frac{\partial L}{\partial (\partial A_\nu / \partial x_\lambda)} A_\mu.$$

Вывести отсюда соотношения

$$G_{\nu\mu\lambda} = \frac{1}{2} (H_{\nu\mu\lambda} + H_{\mu\lambda\nu} + H_{\lambda\mu\nu}).$$

г. Вычислить $S_{\mu\nu}$ для электромагнитного поля.

3.7. Показать, что однородное интегральное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(x|x_0) \psi(x_0) dx_0$$

вытекает из вариационного уравнения

$$\delta \int_a^b \psi(x) \left[\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x|x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] dx = 0,$$

если $K(x|x_0) = K(x_0|x)$. Показать, что при $K(x|x_0) \neq K(x_0|x)$

$$\delta \int_a^b \tilde{\Psi}(x) \left[\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x|x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] dx = 0,$$

где $\tilde{\Psi}(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\tilde{\Psi}(x) = \lambda \int_a^b K(x_0|x) \tilde{\Psi}(x_0) dx_0.$$

3.8. Уравнением движения мембраны, натянутой на отверстие в герметическом сосуде, служит

$$(1/c^2)(\partial^2 \psi / \partial t^2) = \nabla^2 \psi - (\rho c^2 / VT) \int \psi dS$$

(см. задачу 2.1). Найти соответствующие плотности функций Лагранжа и Гамильтона.

3.9. Уравнение затухающих колебаний струны имеет вид

$$(\partial^2 \psi / \partial t^2) + 2k(\partial \psi / \partial t) = c^2(\partial^2 \psi / \partial x^2).$$

Показать, что соответствующей плотностью функции Лагранжа будет

$$L = \{(\partial \tilde{\Psi} / \partial t)(\partial \psi / \partial t) + k[\psi(\partial \tilde{\Psi} / \partial t) - \tilde{\Psi}(\partial \psi / \partial t)] - c^2(\partial \tilde{\Psi} / \partial x)(\partial \psi / \partial x)\}$$

и найти уравнение, которому должна удовлетворять $\tilde{\Psi}$. Найти канонические импульсы, соответствующие ψ и $\tilde{\Psi}$, и плотность функции Гамильтона. Выяснить физический смысл полученных результатов.

3.10. Стационарному уравнению переноса при анизотропном рассеянии на очень тяжелых рассеивающих частицах (см. § 2.4 и 12.2) можно придать вид

$$\cos \theta (\partial f / \partial \xi) = -f(\xi, \theta) + (\kappa/4\pi) \int w(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) f(\xi, \theta_0) d\Omega_0,$$

где κ — постоянная, единичные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_0$ имеют направления, определяемые соответственно сферическими углами θ, φ и θ_0, φ_0 , а $d\Omega_0$ — элемент телесного угла, охватывающий $\mathbf{a}_0$. Показать, что это уравнение может быть получено из вариационного уравнения

$$\delta \int_0^{\xi_0} d\xi \int d\Omega \tilde{f}(\xi, \theta) \left[\cos \theta (\partial f / \partial \xi) + f - (\kappa/4\pi) \int w(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) f(\xi, \theta_0) d\Omega_0 \right] = 0.$$

Показать, что $\tilde{f}$ удовлетворяет уравнению

$$-\cos \theta (\partial \tilde{f} / \partial \xi) = -\tilde{f}(\xi, \theta) + (\kappa/4\pi) \int w(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}) \tilde{f}(\xi, \theta_0) d\Omega_0.$$

Истолковать эти результаты.

3.11. Диффузия заряженных частиц под действием внешнего поля $\mathbf{E}$ описывается уравнением

$$\partial c / \partial t = a^2 \nabla^2 c + b(\nabla c \cdot \mathbf{E})$$

(предположения, при которых это уравнение выводится, высказаны в задаче 2.5). Показать, что соответствующая вариационная задача

ставится так:

$$\delta \iint dV dt \tilde{c} [(\partial c / \partial t) - a^2 \nabla^2 c - b (\nabla c \cdot E)] = 0.$$

Найти уравнение для $\tilde{c}$ и истолковать его.

3.12. В теории дейтрона встречается пара интегральных уравнений, которые можно записать в виде

$$u(r) = \lambda \int_0^\infty G_0(r|r_0) [f(r_0)u + g(r_0)w] dr_0,$$

$$w(r) = \lambda \int_0^\infty G_2(r|r_0) [g(r_0)u + h(r_0)w] dr_0,$$

где функции G_0 и G_2 симметричны. Показать, что соответствующий вариационный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [u^2 f + 2uwg + w^2 h] dr - \\ & - \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \{ [f(r)u(r) + g(r)w(r)] G_0(r|r_0) [f(r_0)u(r_0) + g(r_0)w(r_0)] + \\ & + [g(r)u + h(r)w] G_2(r|r_0) [g(r_0)u(r_0) + h(r_0)w(r_0)] \} dr dr_0. \end{aligned}$$

3.13. Взаимосвязь между механическим движением и распространением тепла в звуковой волне описывается уравнениями

$$\partial T / \partial t = \alpha (\partial \rho / \partial t) + \beta \nabla^2 T, \quad \partial^2 \rho / \partial t^2 = \gamma \nabla^2 \rho + \varepsilon \nabla^2 T,$$

где постоянные α , β , γ и ε заданы в задаче 2.3. Показать, что эти уравнения могут быть получены при помощи вариационного интеграла

$$\iint dV dt \left\{ \varepsilon \nabla^2 \tilde{T} \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} - \beta \nabla^2 T \right] - \alpha \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \gamma \nabla^2 \rho - \varepsilon \nabla^2 T \right] \right\}.$$

Показать, что при должном подборе начальных условий $\tilde{T}$ и $\tilde{\rho}$ удовлетворяют аналогичным уравнениям с обращенным временем.

3.14. В задаче 2.2 описаны свойства бесконечной пьезоэлектрической среды, связывающие электрическое поле E , поляризацию P , напряжение и деформацию. Если оси x , y , z направлены по главным осям кристалла, то соотношения между E и P , а также между аффинором напряжений $\mathfrak{S}$ и аффинором деформаций $\mathfrak{X}$ выражаются тремя системами из трех уравнений:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \lambda_x^x S_{xx} + \lambda_x^y S_{yy} + \lambda_x^z S_{zz} && \text{и т. д.,} \\ T_{xy} &= T_{yx} = \lambda_{xy} S_{xy} + \sigma_{xy} P_z && \text{и т. д.,} \\ E_z &= \kappa_z P_z + \sigma_{xy} S_{xy} && \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

где λ — элементы тетрадика модуля упругости, приведенного к главным осям, κ — обратные величины диэлектрических восприимчивостей вдоль координатных осей, σ — элементы некоторого недиагонального «триадика» (преобразующего вектор в аффинор и наоборот), который связывает деформации и поляризацию. Комбинируя эти уравнения с уравнениями Макс-

велла и с уравнениями упругих колебаний для частного случая поперечной волны, движущейся вдоль оси z при смещениях, направленных вдоль оси y , показать, что в результате получится пара связанных друг с другом волновых уравнений. Они будут соответствовать двум возможным электрическим волнам сдвига, одна из которых распространяется со скоростью, несколько меньшей, чем скорость чистых волн сдвига (при равных нулю σ), а другая со скоростью, несколько большей скорости света в рассматриваемой среде. Вычислить плотность импульса и аффинов напряжения-энергии для плоских волн сдвига, движущихся вдоль оси z (при E , направленном вдоль оси y). В каком отношении находятся энергии, несомые медленными волнами, соответственно электрического и упругого полей? Тот же вопрос, относящийся к быстрой волне.

Сводка результатов главы 3

Плотность функции Лагранжа L есть функция переменных поля ψ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и их производных $\psi_{is} = \partial\psi_i/\partial\xi_s$ (ξ_1, ξ_2, ξ_3 — пространственные координаты, $\xi_4 = t$). Иногда L зависит также от ξ явно (например, через посредство потенциалов или плотностей заряда и тока). Полный лагранжесв интеграл

$$\mathcal{L} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_4}^{b_4} L d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \quad (3.1.1)$$

является инвариантом. Требование, состоящее в том, чтобы $\mathcal{L}$ принимал максимальное или минимальное значение, то есть чтобы первая вариация интеграла $\mathcal{L}$ обращалась в нуль, приводит к уравнениям Лагранжа — Эйлера

$$\sum_{s=1}^4 \frac{\partial}{\partial\xi_s} \left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}} \right) - \frac{\partial L}{\partial\psi_i} = 0, \quad (3.4.1)$$

служащих для отыскания ψ_i . Если L — квадратичная функция от ψ_{i4} , то плотность канонического импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\psi_{i4}}$$

представляет собой линейную функцию от ψ_{i4} . Если L — линейная функция от ψ_{i4} , то p_i и функция Гамильтона от ψ_{i4} не зависят. Большинство других важных физических свойств поля описывается тензором напряжения-энергии $\mathfrak{W}$, компоненты которого равны

$$W_{ms} = \sum_{i=1}^n \psi_{im} \frac{\partial L}{\partial\psi_{is}} - \delta_{ms} L.$$

Например, его 4,4-компонента

$$W_{44} = H = \sum_{i=1}^n p_i \psi_{i4} - L$$

представляет собой плотность энергии. Если p_i зависит от ψ_{i4} , то из W_{44} можно исключить ψ_{i4} и получить плотность функции Гамильтона H — функцию от p_i , ψ_i и их пространственных производных. В этом

случае уравнения движения могут быть также записаны в канонической форме

$$\dot{\psi}_i = \psi_{i4} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_{is}} \right) - \frac{\partial H}{\partial \psi_i}. \quad (3.4.2)$$

Такие уравнения применимы только тогда, когда L содержит квадратичную функцию производных ψ_{i4} . Если же L зависит от ψ_{i4} линейно, то H не зависит от p (см. стр. 300). Вектор S интенсивности поля и вектор P импульса поля определяются формулами

$$S = \sum_{s=1}^3 W_{4s} a_s = \sum_{i=1}^n \psi_{i4} \left[\sum_{s=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \psi_{is}} a_s \right], \quad (3.4.4)$$

$$P = \sum_{s=1}^3 a_s W_{s4} = \sum_{i=1}^n (\text{grad } \psi_i) \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{i4}} \right). \quad (3.4.5)$$

Остальные компоненты $\mathfrak{W}$ определяют так называемый *аффинор напряжений*

$\mathfrak{U} = \sum_{r,s=1}^3 a_r W_{rs} a_s$. Компоненты тензора $\mathfrak{W}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{s=1}^4 \frac{\partial W_{ms}}{\partial \xi_s} = - \frac{\partial L}{\partial \xi_m}, \quad (3.4.3)$$

где $\partial L / \partial \xi_m$ — производная по параметру ξ_m , входящему в L явно (через посредство потенциалов, токов и т. п.). Если L не зависит от ξ явно, то $\partial L / \partial \xi = 0$. В этом случае последние соотношения можно представить в виде

$$\nabla \cdot S + (\partial H / \partial t) = 0, \quad (\mathfrak{U} \cdot \nabla) + (\partial P / \partial t) = 0.$$

Плотность момента количества движения поля относительно начала координат равна

$$M = r \times P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \psi_{i4}} (r \times \text{grad } \psi_i).$$

Гибкая струна или мембрана

Переменная поля ψ есть поперечное смещение.

Параметрами ξ_s служат x и t для струны, x , y и t — для мембраны.

Плотность функции Лагранжа $L = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \text{grad}^2 \psi \right]$, $c^2 = \frac{T_0}{\rho}$.

Уравнение Лагранжа — Эйлера $c^2 \nabla^2 \psi - (\partial^2 \psi / \partial t^2) = 0$ (скалярное волновое уравнение).

Плотность канонического импульса $p = \rho (\partial \psi / \partial t)$.

Плотность функции Гамильтона $H = (1/2\rho) p^2 + \frac{1}{2} T_0 \text{grad}^2 \psi$.

Интенсивность поля $S = -T_0 (\partial \psi / \partial t) \text{grad } \psi$.

Импульс поля $P = \rho (\partial \psi / \partial t) \text{grad } \psi = -(1/c^2) S$.

Сжимаемая невязкая жидкость

Переменная поля ψ есть потенциал скоростей; скорость поля = $\text{grad } \psi$; избыточное давление = $-\rho (\partial \psi / \partial t)$.

Параметрами ξ_s служат x , y , z и t .

Плотность функции Лагранжа

$$L = -\frac{1}{2}\rho \left[(\text{grad } \psi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right], \quad c^2 = \frac{P_0 \gamma}{\rho}.$$

Уравнение Лагранжа — Эйлера $\nabla^2 \psi - (1/c^2) (\partial^2 \psi / \partial t^2) = 0$ (скалярное волновое уравнение).

Плотность канонического импульса $p = (\rho/c^2) \dot{\psi} = -(\text{избыточное давление})/c^2$.

Плотность функции Гамильтона $H = 1/2 (1/\rho c^2) p^2 + 1/2 \rho (\text{grad } \psi)^2$.

Интенсивность поля $S = -\rho (\partial \psi / \partial t) \text{grad } \psi = (\text{избыточное давление}) \times (\text{скорость жидкости})$.

Импульс поля $P = (\rho/c^2) (\partial \psi / \partial t) \text{grad } \psi = -(1/c^2) S$.

Уравнение диффузии

Переменными поля являются температура¹⁾ или концентрация ψ и «сопряженная» ей величина ψ^* .

Параметрами ξ_s служат x, y, z и t . Плотность функции Лагранжа

$$L = -(\text{grad } \psi) \cdot (\text{grad } \psi^*) - \frac{1}{2} a^2 \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right).$$

Уравнение Лагранжа — Эйлера (для ψ) $\nabla^2 \psi = a^2 (\partial \psi / \partial t)$ (уравнение диффузии).

Плотности канонических импульсов $p = -\frac{1}{2} a^2 \psi^*$; $p^* = \frac{1}{2} a^2 \psi$.

Плотность энергии $U = W_{44} = (\text{grad } \psi) \cdot (\text{grad } \psi^*)$.

Интенсивность поля $S = -\psi^* (\text{grad } \psi) - (\text{grad } \psi^*) \psi$.

Импульс поля $P = \frac{1}{2} a^2 [(\text{grad } \psi^*) \psi - \psi^* (\text{grad } \psi)]$.

Уравнение Шредингера.

Переменными поля являются волновая функция ψ и ее сопряженная ψ^* . Произведение $\psi \psi^*$ есть плотность вероятности наличия частицы.

Параметрами ξ_s служат x, y, z и t .

Плотность функции Лагранжа

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m} (\text{grad } \psi^*) \cdot (\text{grad } \psi) - \frac{\hbar}{2i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) - \psi^* V \psi.$$

$V(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы.

Уравнение Лагранжа — Эйлера (для ψ)

$$-(\hbar^2/2m) \nabla^2 \psi + V \psi = i\hbar (\partial \psi / \partial t) \quad (\text{уравнение Шредингера}).$$

Плотности канонических импульсов $p = -(\hbar/2i) \psi^*$; $p^* = (\hbar/2i) \psi$.

Плотность энергии $U = W_{44} = (\hbar^2/2m) (\text{grad } \psi^*) \cdot (\text{grad } \psi) + \psi^* V \psi$.

Интенсивность поля $S = -(\hbar^2/2m) [(\partial \psi^* / \partial t) \text{grad } \psi + \text{grad } \psi^* (\partial \psi / \partial t)]$.

Импульс поля $P = -(\hbar/2i) [\psi^* (\text{grad } \psi) - (\text{grad } \psi^*) \psi]$.

Плотность тока $J = (e\hbar/2im) [\psi^* (\text{grad } \psi) - (\text{grad } \psi^*) \psi]$, где e — заряд частицы, m — масса частицы.

Уравнение Клейна — Гордона

Переменными поля являются волновая функция ψ и ее сопряженная ψ^* .

Плотность заряда частицы равна $(\hbar e/2imc^2) [(\partial \psi^* / \partial t) \psi - \psi^* (\partial \psi / \partial t)]$, где m — масса частицы.

Параметрами ξ_s служат x, y, z и t .

¹⁾ В случае уравнения теплопроводности. — Прим. перев.

Плотность функции Лагранжа (в случае отсутствия поля)

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[(\text{grad } \psi^*) \cdot (\text{grad } \psi) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right) \psi^* \psi \right].$$

Уравнение Лагранжа — Эйлера для ψ : $\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi$ (уравнение Клейна — Гордона).

Плотности канонических импульсов

$$p = \frac{\hbar^2}{2mc^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \quad p^* = \frac{\hbar^2}{2mc^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right).$$

Плотность функции Гамильтона

$$H = (2mc^2/\hbar^2) p^* p + (\hbar^2/2m) (\text{grad } \psi^*) \cdot (\text{grad } \psi) + (mc^2/2) \psi^* \psi.$$

Интенсивность поля $S = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} (\text{grad } \psi) + (\text{grad } \psi^*) \frac{\partial \psi}{\partial t} \right].$

Импульс поля $\mathbf{P} = -(1/c^2) S.$

Плотность тока $\mathbf{J} = (e\hbar/2im) [\psi^* (\text{grad } \psi) - (\text{grad } \psi^*) \psi]$, где e — заряд частицы.

Уравнение упругих колебаний

Переменными поля ψ_n служат компоненты вектора смещения $\mathbf{s}$.

Параметрами ξ_s являются координаты x, y, z и t .

Плотность функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{s}}^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{S} : \mathfrak{X},$$

где

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla),$$

γ — аффино́р деформации, $\mathfrak{X} = \lambda |\mathfrak{S}| \mathfrak{S} + 2\mu \mathfrak{S}$ — аффино́р напряжений для изотропного твердого тела. Уравнение Лагранжа — Эйлера

$$\rho (\partial^2 \mathbf{s} / \partial t^2) = (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div } \mathbf{s}) + \mu \nabla^2 \mathbf{s}.$$

Плотность канонического импульса $\mathbf{p} = \rho (\partial \mathbf{s} / \partial t).$

Плотность функции Гамильтона $H = W_{44} = (1/2\rho) p^2 + \frac{1}{2} |\mathfrak{X} : \mathfrak{S}|.$

Интенсивность поля $S = -(\partial \mathbf{s} / \partial t) : \mathfrak{X}.$

Импульс поля $\mathbf{P} = \rho (\nabla \mathbf{s}) \cdot (\partial \mathbf{s} / \partial t).$

Для неизотропного твердого тела аффино́р напряжений выражается в виде $\mathfrak{X} = \mathfrak{J} : \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{J}$ — тетрадик с элементами g_{mnrs} ; последние подчинены общим условиям симметрии $g_{mnrs} = g_{nmrs} = g_{mnsr} = g_{rsnm}$, а в остальных произвольны.

Уравнение Лагранжа — Эйлера для этого случая

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \right) = \nabla \cdot (\mathfrak{J} : \nabla \mathbf{s}),$$

то есть

$$\rho \ddot{s}_n = \sum_{mrs} g_{nmrs} \frac{\partial^2 s_s}{\partial x_m \partial x_r}.$$

Плотность функции Гамильтона

$$H = W_{44} = (1/2\rho) p^2 + (\nabla \mathbf{s}) : \mathfrak{J} : (\nabla \mathbf{s}), \quad \mathbf{p} = \rho (\partial \mathbf{s} / \partial t).$$

Выражения $S, \mathbf{P}$ и т. д. в этом случае получаются подстановкой нового $\mathfrak{X}$ в формулы, определяющие $S, \mathbf{P}$ и т. д., приведенные выше (для изотропного случая).

Уравнения электромагнитного поля.

Переменными поля служат компоненты векторного потенциала $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал φ . Для простоты выберем такую калибровку потенциалов, при которой $\varphi = 0$, так что $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\partial \mathbf{A} / \partial t = -c \mathbf{E} = -c \mathbf{D} / \varepsilon$ и $\text{div}(\partial \mathbf{A} / \partial t) = -4\pi \rho c / \varepsilon$, где ρ — плотность свободных зарядов. Параметрами являются x, y, z и t .

$$\text{Плотность функции Лагранжа } L = \frac{\varepsilon}{8\pi c^2} \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 - \frac{1}{8\pi \mu} |\text{rot } \mathbf{A}|^2 + \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A},$$

где $\mathbf{J}$ — плотность тока.

$$\text{Уравнение Лагранжа — Эйлера } \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) + (\mu \varepsilon / c^2) (\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2) = (4\pi \mu / c) \mathbf{J}.$$

$$\text{Плотность канонического импульса } \mathbf{p} = -(\mathbf{D} / 4\pi c).$$

Плотность функции Гамильтона

$$H = W_{44} = (2\pi c^2 / \varepsilon) p^2 + (1/8\pi \mu) |\text{rot } \mathbf{A}|^2 - (1/c) \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}.$$

$$\text{Интенсивность поля } \mathbf{S} = (c/4\pi) (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

$$\text{Импульс поля } \mathbf{P} = -(\varepsilon/4\pi) (\nabla \mathbf{A}) \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t).$$

Уравнение Дирака

Переменные поля — ψ_n^* и ψ_n ($n = 1, 2, 3, 4$). Плотность вероятности наличия электрона равна $\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4 = \Psi^* \Psi$. Параметрами являются x, y, z, t . Волновые функции — $\Psi = \sum \mathbf{e}_n \psi_n$ и $\Psi^* = \sum \psi_n^* \mathbf{e}_n^*$, где $\mathbf{e}_n$ — единичные векторы в спинном пространстве. Операторы $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_0$ воздействуют на векторы $\mathbf{e}_n$ согласно уравнениям (2.6.53). Плотность функции Лагранжа

$$L = \frac{\hbar c}{2i} [(\text{grad } \Psi^*) \cdot \alpha \Psi - \Psi^* \alpha \cdot \text{grad } \Psi] + \frac{\hbar}{2i} \left[\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \Psi - \Psi^* \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right] - e \Psi^* (\alpha \cdot \mathbf{A}) \Psi + e c \Psi^* \varphi \Psi - m c^2 \Psi^* \alpha_0 \Psi,$$

где $\mathbf{A}$ и φ — электромагнитные потенциалы, m — масса частицы.

Уравнения Лагранжа — Эйлера

$$\alpha_0 m c \Psi + \alpha \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \text{grad } \Psi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) + \left(\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - e \varphi \Psi \right) = 0,$$

$$m c \Psi^* \alpha_0 + \left(-\frac{\hbar}{i} \text{grad } \Psi^* + \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi^* \right) \cdot \alpha - \left(\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + e \varphi \Psi^* \right) = 0.$$

$$\text{Плотность канонического импульса } \mathbf{p} = -(\hbar/2i) \Psi^*, \quad \mathbf{p}^* = (\hbar/2i) \Psi.$$

$$\text{Плотность функции Гамильтона } H = \frac{\hbar c}{2i} [\Psi^* \alpha \cdot (\text{grad } \Psi) - (\text{grad } \Psi^*) \cdot \alpha \Psi] + e \Psi^* \alpha \cdot \mathbf{A} \Psi - e c \Psi^* \varphi \Psi + m c^2 \Psi^* \alpha_0 \Psi.$$

$$\text{Интенсивность поля } \mathbf{S} = (\hbar c/2i) [(\partial \Psi^* / \partial t) \alpha \Psi - \Psi^* \alpha (\partial \Psi / \partial t)].$$

$$\text{Импульс поля } \mathbf{P} = (\hbar/2i) [(\text{grad } \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\text{grad } \Psi)].$$

$$\text{Плотность тока } \mathbf{J} = e c \Psi^* \alpha \Psi, \text{ где } e \text{ — заряд частицы.}$$

ЛИТЕРАТУРА

Лишь немногие книги сколько-нибудь подробно излагают основное содержание этой главы, но по отдельным вопросам можно указать различные источники. Общие вопросы вариационного исчисления изложены в следующих книгах:

Блисс Д., Лекции по вариационному исчислению, Изд. иностр. лит., М., 1950.
Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, ГИИТ, М., 1951.
Рэлей, Теория звука, Гостехиздат, М., 1955.

Литература по теории преобразований, применяющихся в динамике, включая принцип Гамильтона:

- Голдстейн Г., Классическая механика, ГТТИ, М., 1957.
Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, ОНТИ, М., 1937.
Born M., Mechanics of the Atom, London, 1927.
Corben H. C., Stehle P., Classical Mechanics, Chaps. 10—15, New York, 1950.
Lanczos C., The Variational Principles of Dynamics, Toronto, 1949.
Webster A. G., Dynamics, Chaps. 4 and 9, New York, 1922.

Литература, посвященная приложениям принципа Гамильтона к физическим полям:

- Венцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, ГТТИ, М., 1947.
Гайтлер В., Квантовая теория излучения, ГТТИ, М.—Л., 1940.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, ГТТИ, М., 1948.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Квантовая механика, ч. 1, ГТТИ, М.—Л., 1948.
Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, Изд. иностр. лит., М., 1947.
Шифф Л., Квантовая механика, Изд. иностр. лит., М., 1957.
Fermi E., Quantum Theory of Radiation, Rev. Modern. Phys., 4, 87 (1932).
Weyl H., Theory of Groups and Quantum Mechanics, London, 1931, Chap. 2.

Функции комплексного переменного

В двух предыдущих главах обсуждалась связь между некоторыми физическими явлениями и дифференциальными уравнениями с частными производными, изображающими эти явления. Несколько последующих глав будет посвящено выяснению общих математических свойств дифференциальных уравнений и их решений. Мы начали знакомиться с различными физическими интерпретациями величин, связанных с полями: тензоров, дивергенции, криволинейных интегралов и т. п. Теперь нам предстоит научиться распознавать различные типы уравнений и их решений. Мы познакомимся с приемами, которые позволяют выяснить, как именно заданная функция зависит от своего аргумента: где она стремится к нулю или к бесконечности, где ее можно интегрировать и дифференцировать и т. д. Мы должны научиться определять, какого рода функции служат решениями данных дифференциальных уравнений, каким образом «особенности» уравнения связаны с особенностями решений и т. п. В этой главе мы рассмотрим общие свойства функций; связь между уравнениями и их решениями является предметом следующей главы.

Точнее говоря, в этой главе мы рассмотрим функции комплексного переменного $z = x + iy$, где i означает квадратный корень из -1 . Мы уже показали (см. стр. 77 и 78), что такая переменная может быть изображена двумерным вектором, имеющим компоненты x и y по осям соответственно абсцисс и ординат; было указано, что можно также рассматривать z как оператор, который поворачивает любой другой вектор, изображающий комплексное число, на угол $\arctg(y/x)$ и изменяет длину этого вектора в $\sqrt{x^2 + y^2}$ раз. В этой главе мы постоянно будем пользоваться векторным представлением комплексных чисел и лишь время от времени будем прибегать к представлению их в виде операторов.

Можно задать вопрос, почему необходимо изучать комплексные числа, тогда как многие разделы физики пугаются лишь в действительных решениях уравнений. Казалось бы, изучения действительных функций действительного переменного, изменяющегося от $-\infty$ до $+\infty$, достаточно для того, чтобы во многих случаях исследовать интересные с точки зрения физики решения. На этот вопрос можно ответить, что переход к комплексным значениям переменных имеет своей целью законченность выводов и удобство формулировок.

Множества действительных чисел недостаточно даже для представления корней алгебраических уравнений. С другой стороны, все корни всех алгебраических уравнений выражаются комплексными числами. Далее, зная поведение функции $f(z)$ при всех комплексных значениях z , мы имеем картину основных свойств f (даже тех, которые относятся к действительным z), более полную, нежели та, которую мы получаем, когда нам известно ее поведение лишь при действительных z . Так, расположение на комплексной z -плоскости нулей и полюсов функции f (т. е. кор-

ней уравнений $f=0$ и $1/f=0$) определяет многое в поведении f при всех значениях z . Часто вычисление интеграла функции $f(z)$ по множеству действительных значений z (вдоль действительной оси) можно значительно упростить, заменив искомый интеграл другим, взятым вдоль какого-нибудь простого пути в комплексной плоскости. Обычно оказывается полезным рассматривать решение некоторого уравнения в комплексной форме, обращаясь с этим решением как с комплексным числом и выделяя действительную или мнимую часть решения, соответствующую реальной физической задаче, лишь тогда, когда нужно сравнить окончательный ответ с данными измерений.

Однако наиболее важная причина, вызывающая необходимость изучения комплексных функций, состоит в том, что такое изучение раскрывает нам общие свойства функций. Так, например, различные типы особенностей функции поддаются классификации. Как правило, эти особенности связаны с некоторыми физическими особенностями, такими, как источники, точечные электрические заряды и т. д. Оказывается возможным, зная лишь особенности функции, полностью охарактеризовать всю функцию. В электростатике этому соответствует тот факт, что электрическое поле полностью определяется величиной и распределением зарядов. Вследствие тесной связи, существующей между электростатикой и комплексными переменными, неудивительно, что нам удастся, кроме того, получить метод решения уравнения Лапласа (иначе говоря, можно будет указать расположение эквипотенциальных линий). В гл. 1 мы видели, что эквипотенциальные линии и линии, им ортогональные, порождают некоторую ортогональную систему криволинейных координат. Таким образом, можно сказать, что мы получим метод построения новых координатных систем, наилучшим образом соответствующих геометрии рассматриваемой задачи.

4.1. Комплексные числа и комплексные переменные

Впервые, может быть, изучающий физику использует комплексные числа тогда, когда он обозначает символом $Ae^{i\omega t}$ вектор длины A , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω . Это представление полезно также при изучении простых гармонических колебаний, так как $A \cos \omega t$ является его действительной частью, а $A \sin \omega t$ — мнимой. Мы уже неоднократно пользовались этим фактом в предыдущих главах.

Связь между векторами и комплексными числами устанавливают, определяя должным образом символ i . Мы рассматриваем i как оператор, который, действуя на произвольный вектор, поворачивает его на угол 90° против часовой стрелки. Тогда оператор i^2 , действие которого состоит в последовательном двукратном применении оператора i , будет поворачивать вектор на угол 180° . Такой поворот дает вектор, антипараллельный исходному, а поэтому

$$i^2 = -1, \quad (4.1.1)$$

что согласуется с обычным определением символа i . Трехкратное применение оператора i сводится к повороту вектора на угол 270° или на -90° , так что $i^3 = -i$. Аналогично $i^4 = 1$.

Опишем теперь различие между действительными и чисто мнимыми числами. Изобразим все действительные числа в виде векторов, параллельных оси x . Умножая действительное число на i , мы получаем вектор, параллельный оси y . Векторы, параллельные оси y , называются *чисто мнимыми* числами. Произвольный вектор¹⁾ f можно, конечно, выразить

¹⁾ Обычное обозначение полужирными буквами не будет применяться к векторам, изображающим комплексные числа.

через его компоненты u и v вдоль осей x и y и записать в виде

$$f = u + iv; \quad (4.1.2)$$

это равенство и выражает связь между комплексными числами и векторами. Длина или амплитуда вектора f , обозначаемая $|f|$, равна $\sqrt{u^2 + v^2}$, т. е. абсолютной величине (модулю) комплексного числа $u + iv$, а угол φ , образуемый вектором f с осью x и определяющий направление вектора, равен фазе числа $u + iv$, т. е. $\operatorname{arctg}(v/u)$. Этот угол называется также фазовым углом или аргументом числа $u + iv$. Число

$$\bar{f} = u - iv,$$

сопряженное с $u + iv$, изображается вектором, получающимся из f посредством отражения относительно оси x .

Оператор вращения. Чтобы получить выражение оператора, осуществляющего поворот на угол θ , рассмотрим сначала оператор поворота на бесконечно малый угол $d\theta$. Такой поворот прибавляет к исходному вектору f вектор длины $|f d\theta|$, перпендикулярный f . Таким образом, f получает приращение

$$df = if d\theta,$$

а новый вектор имеет вид $f + if d\theta = (1 + id\theta)f$. Интегрируя это уравнение, получаем вектор f , повернутый на θ радиан. Пусть f_0 — начальное значение f (при $\theta = 0$). Тогда при произвольном θ вектор f будет равен

$$f_\theta = e^{i\theta} f_0. \quad (4.1.3)$$

Следовательно, оператор, поворачивающий векторы на угол θ радиан, имеет вид $e^{i\theta}$ (см. стр. 78).

Если этот оператор применить к единичному вектору, направленному по оси x , то получится вектор, образующий с осью x угол θ . Выразив этот новый вектор через составляющие и записав его в виде комплексного числа, приходим к формуле Муавра $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, упомянутой на стр. 78. Последняя согласуется с исходным определением i как оператора поворота на угол 90° , в чем нетрудно убедиться, положив $\theta = \pi/2$. Единичный вектор, вращающийся против часовой стрелки с угловой скоростью ω , запишется в виде $e^{i\omega t}$, где, как обычно, опущена единица, на которую воздействует этот оператор. Любой вектор f может быть выражен через его модуль $|f|$ и оператор, нужный для поворота этого модуля от оси x до направления f ,

$$f = |f| e^{i\varphi}, \quad \bar{f} = |f| e^{-i\varphi},$$

где φ — фазовый угол (аргумент) числа f .

Векторы и комплексные числа. Установив взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и векторами, исследуем теперь соотношения между различными возможными комбинациями комплексных чисел и соответствующими комбинациями векторов. Два вектора складываются по правилу параллелограмма, т. е. так же, как два комплексных числа. Однако результат перемножения двух комплексных чисел, если его выразить в векторных обозначениях, будет зависеть как от скалярного произведения, так и от векторного. Если $f = u + iv$ и $g = s + it$, то

$$\bar{f}g = (us + vt) + i(ut - vs),$$

или в векторной записи

$$\bar{f}g = \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + i(\mathbf{f} \times \mathbf{g})_3 \quad (4.1.4)$$

Таким образом, если векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ ортогональны, то вещественная часть произведения $\bar{f}g$ равна нулю, если же они параллельны, то мнимая часть этого произведения равна нулю. Следует заметить, что соотношение (4.1.4) подобно соотношению (1.6.30), относящемуся к кватернионам. Это неудивительно, так как Гамильтон первоначально строил алгебру кватернионов, пытаясь распространить метод комплексных переменных на трехмерное пространство и трехмерные векторы.

Дифференциальные свойства векторного поля выражаются через оператор ∇ . Ограничиваясь здесь двумерным случаем, т. е. плоскостью переменных x и y , можно записать ∇ в виде

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.1.5)$$

Применив оператор $\bar{\nabla}$ к вектору $\mathbf{g}$, в силу (4.1.4) получаем

$$\bar{\nabla}g = \operatorname{div} \mathbf{g} + i(\operatorname{rot} \mathbf{g})_3, \quad (4.1.6)$$

так что $\bar{\nabla}$ сразу дает и дивергенцию и ротор вектора. Заметим, что воздействие оператора $\bar{\nabla}$ на действительную функцию (т. е. на переменный вектор $\mathbf{g}$, направленный вдоль оси x), в силу (4.1.6) дает

$$\bar{\nabla}g = \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y},$$

т. е. именно нужное выражение. Мы видим, таким образом, что применение комплексных чисел для обозначения векторов имеет то достоинство, что оно позволяет «конденсировать» несколько векторных операций в одну.

Дальнейшей «конденсации» можно добиться, введя вместо x и y новые переменные

$$z' = x + iy, \quad z = x - iy, \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{1}{2}i(z - \bar{z}), \quad (4.1.7)$$

где z — радиус-вектор точки (x, y) .

В этом месте у читателя обычно возникают сомнения относительно возможности рассматривать z и $\bar{z}$ как независимые переменные (такие сомнения не возникают при рассмотрении переменных $x - y$, $x + y$), так как часто говорится, что если известно z , то известно и $\bar{z}$. Это, однако, неверно. Если вектор z задан как отрезок, проведенный из начала в некоторую точку, то $\bar{z}$ еще не определено, так как должно быть еще задано направление оси x . Обратно, если даны векторы z и $\bar{z}$, то ось x может быть получена как биссектриса угла, образуемого этими векторами, после чего могут быть найдены x и y ²). С помощью (4.1.5) нетрудно получить выражения

$$2 \frac{\partial}{\partial z} = 2 \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \nabla, \quad \bar{\nabla} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (4.1.8)$$

¹) Индекс 3 обозначает проекцию на третью ось координат (ось z), перпендикулярную осям x и y и составляющую с ними правую тройку. — *Прим. ред.*

²) Переменные z и $\bar{z}$ становятся независимыми только тогда, когда для x и y допускаются комплексные значения. — *Прим. ред.*

Двумерное электростатическое поле. Предположим, что мы имеем электростатическое поле, порожденное линейными зарядами, перпендикулярными плоскости xu . Вектор напряженности поля E будет, конечно, лежать в плоскости xu , и мы будем иметь двумерное поле. Поэтому вектор E может быть представлен комплексным числом, скажем $u - iv$ (зачем берется знак минус, выяснится вскоре), где u и v представляют собой функции от x и y , определяемые распределением линейных зарядов. Рассмотрим сначала участки плоскости xu , свободные от зарядов. На этих участках, согласно уравнениям Максвелла (2.5.11),

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0. \quad (4.1.9)$$

В силу (4.1.6) и (4.1.8) оба эти условия могут быть записаны (только в двумерном случае) в чрезвычайно простой форме

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0.$$

Это условие означает, что вектор E зависит только от $\bar{z} = x - iy$ и не зависит от $z = x + iy$. Напротив, сопряженный вектор $\bar{E} = u + iv$ зависит только от z и не зависит от $\bar{z}$. Обычно мы будем иметь дело с функциями от z , поэтому и здесь удобнее рассматривать вектор $\bar{E}$, зная который, мы легко найдем вектор поля E . Итак, мы показали, что $\bar{E}$ является функцией переменного z , но не зависит от $\bar{z}$.

Выписав для $\bar{E}$ уравнения, аналогичные (4.1.9), или выразив $2(\partial \bar{E} / \partial \bar{z}) = \nabla(u + iv) = 0$ через производные по x и по y и отделив действительную и мнимую части, получаем пару интересных соотношений между u и v :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.1.10)$$

Это — так называемые *условия Коши — Римана*. Они получены для вектора напряженности (двумерного) электростатического поля в области, свободной от зарядов и токов, но сам вывод этих условий показывает, что им удовлетворяет любая комплексная функция $f = u + iv$, зависящая только от z (и не зависящая от $\bar{z}$). Всякая такая функция, действительная и мнимая части которой удовлетворяют уравнениям (4.1.10), называется *аналитической функцией* комплексного переменного $z = x + iy$.

Всякая аналитическая функция переменного z может изображать двумерное электростатическое поле. Такую функцию можно получить, взяв любую достаточно хорошую функцию действительного переменного и введя в нее комплексный аргумент $z = x + iy$ [например, $\sin(x + iy)$, $1/[(x + iy)^2 + a^2]$, $\ln(x + iy)$ представляют собой аналитические функции для всех значений z , при которых они не обращаются в бесконечность].

В области, свободной от зарядов и токов, существует потенциал V поля E , т. е. такая функция V от x и y , для которой $E = \nabla V = \partial V / \partial x + i \partial V / \partial y$. Обобщая, допустим, что V может принимать комплексные значения, причем потенциалом в обычном смысле является только ее действительная или мнимая часть. Тогда $E = 2\partial V / \partial \bar{z}$, и так как $\partial E / \partial z = 0$, то

$$4 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad (4.1.11)$$

т. е. V удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа. Разумеется, действительная и мнимая части функции V в отдельности также являются решениями уравнения Лапласа; с помощью уравнений (4.1.10) легко показать, что действительная и мнимая части *любой* аналитической функции

являются решениями двумерного уравнения Лапласа. Таким образом, или аналитическая функция может непосредственно определять электростатическое поле, или ее действительная и мнимая части могут служить потенциалами полей.

Контурные интегралы. Интегрирование комплексных функций представляет собой естественное обобщение интегрирования действительных функций. Пусть требуется интегрировать аналитическую функцию $f(z)$; переменным интегрирования служит, разумеется, z . Так как z может перемещаться по комплексной плоскости, а не только вдоль действительной оси, то нужно еще задать определенную линию, вдоль которой должно производиться интегрирование. Последняя называется *контуром*, и если контур замкнут, то сам интеграл называется *контурным интегралом* и обозначается $\oint f(z) dz$ или $\oint f e^{i\varphi} ds$, где ds — модуль вектора dz , а φ — его аргумент.

При таком обобщении понятия интеграла мы не можем ограничиться указанием нижнего и верхнего пределов интегрирования, а должны описать весь контур или начертить его, как это сделано на рис. 4.1. Выражение самого интеграла сходно с интегралами, выражающими циркуляцию векторного поля вдоль контура или поток сквозь контур в двумерном случае (см. § 1.2). В действительности комплексный контурный интеграл есть некоторая комбинация того и другого, в чем можно убедиться, взяв интеграл от вектора электростатического поля и воспользовавшись формулой (4.1.4):

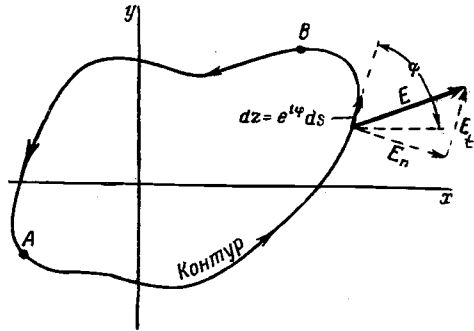


Рис. 4.1. Контурное интегрирование в комплексной плоскости.

$$\oint \bar{E} dz = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + i \oint (\mathbf{E} \times d\mathbf{s})_z = \oint E_t ds + i \oint E_n ds. \quad (4.1.12)$$

Здесь E_t — компонента вектора $\mathbf{E}$ вдоль $d\mathbf{s}$, E_n — компонента, нормальная к $d\mathbf{s}$. Таким образом, действительная часть контурного интеграла от $\bar{E}$ есть циркуляция вектора $\mathbf{E}$ вдоль контура интегрирования, а мнимая часть — поток вектора $\mathbf{E}$ сквозь цилиндр с высотой 1, образующие которого пересекают контур и перпендикулярны плоскости xy . (В рассматриваемом случае, так как поле параллельно плоскости xy , поток вектора $\mathbf{E}$ сквозь цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости xy , равен интегралу $\oint E_n ds$, умноженному на высоту цилиндра.)

В случае области, свободной от зарядов, и поток и циркуляция равны нулю, поэтому для любого контура, расположенного в такой области,

$$\oint \bar{E} dz = 0. \quad (4.1.13)$$

Это равенство выражает *теорему Коши*, согласно которой, если $f(z)$ — аналитическая функция переменного z на некотором замкнутом контуре и внутри его, интеграл $\oint f(z) dz$ вдоль этого контура равен нулю. Наоборот, если интеграл вдоль любого замкнутого контура равен нулю, то $f(z)$ — аналитическая функция, а следовательно, вектор плоского электро-

статического поля может быть представлен посредством аналитической функции во всех точках, где отсутствуют заряды и токи.

Применив формулу (1.2.9) к цилиндрической поверхности, построенной на контуре, приходим к выводу, что если поле E порождается совокупностью линейных зарядов, распределенных равномерно вдоль прямых, перпендикулярных плоскости xy , причем линейная плотность зарядов на r -й прямой равна q_r , то в силу (4.1.12)

$$\oint \bar{E} dz = 4\pi i \sum_r' q_r, \quad (4.1.14)$$

где суммирование распространяется на те линии, которые пересекают плоскость xy внутри рассматриваемого контура.

Рассмотрим случай, когда лишь одна прямая, несущая заряды с линейной плотностью q_1 , пересекает плоскость xy в некоторой точке $z_1 = x_1 + iy_1$, лежащей внутри выбранного контура. Тогда поле $\bar{E}$ может быть представлено в виде суммы поля $\bar{E}_s$, порождаемого источником q_1 внутри контура, и поля $\bar{E}_0$, порождаемого внешними источниками. Элементарное интегрирование уравнений электростатики дает выражение $E_s = (2q_1/r) a_r$, где $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = |z - z_1|^2$ — квадрат расстояния в плоскости xy от источника в точке z_1 и a_r — единичный вектор, направленный от источника к точке (x, y) . В комплексных обозначениях

$$E_s = \frac{2q_1}{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{2q_1}{r} e^{i\varphi},$$

где φ — угол, образуемый вектором a_r с осью x . Так как $re^{i\varphi} = z - z_1$, то

$$\bar{E}_s = \frac{2q_1}{r} e^{-i\varphi} = \frac{2q_1}{re^{i\varphi}} = \frac{2q_1}{z - z_1}, \quad (4.1.15)$$

Прибавив $\bar{E}_0$ к $\bar{E}_s$, получим

$$\bar{E} = \frac{f(z)}{z - z_1}, \quad (4.1.16)$$

где $f(z) = \bar{E}_0(z - z_1) + 2q_1$ — аналитическая функция внутри контура и на нем. Итак, для любой аналитической функции $f(z)$ мы имеем формулу

$$\oint \frac{f(z) dz}{z - z_1} = 2\pi i f(z_1), \quad (4.1.17)$$

которая представляет собой более общую форму теоремы Коши.

Таким образом теорема Коши является перефразировкой, в терминах аналитических функций, теоремы Гаусса из электростатики.

Подобным же образом магнитное поле, порожденное линейными токами, перпендикулярными плоскости xy , можно изобразить посредством функции $\bar{H}$ переменного z . Ток I вдоль прямой, пересекающей плоскость xy в точке z_0 , внутри контура, порождает поле $H = 2(I \times a_r)/r$, которое изображается функцией $\bar{H} = 2I/i(z - z_0)$. В случае нескольких токов I_r имеем в силу формулы (1.2.11)

$$\oint \bar{H} dz = 4\pi \sum_r' I_r, \quad (4.1.18)$$

где суммирование распространяется на те токи, которые проходят внутри контура интегрирования. Здесь контурный интеграл действительный, но если мы подставим выражение функции $\bar{H}$ через $z - z_0$, то снова получим теорему Коши.

Обратимся снова к рис. 4.1; мы видим, что интеграл вдоль (незамкнутого) пути, соединяющего точки A и B , может быть записан в виде

$$\int_A^B \bar{E} dz = \int_A^B E_t ds + i \int_A^B E_n ds = W = V + iU. \quad (4.1.19)$$

Действительная часть V этого интеграла представляет собой разность электростатических потенциалов в точках A и B . Мнимая часть U измеряет число силовых линий, пересекающих путь интегрирования от точки A до точки B .

Заметим, что семейство кривых $U = \text{const}$ ортогонально семейству $V = \text{const}$, так что V и U могут служить ортогональными криволинейными координатами в плоскости. Если в поле помещен проводник, имеющий форму цилиндра с образующими, перпендикулярными плоскости xu , то его поверхность должна пересекать эту плоскость по некоторой эквипотенциальной кривой $V = \text{const}$. Силовые линии будут при этом образовывать ортогональное семейство линий $V = \text{const}$, и поверхностный заряд цилиндра на единицу его высоты на участке поверхности, ограниченном точками A и B , будет равен $U(B) - U(A)$. В гл. 2 (см. стр. 153) функция U была названа *функцией тока*.

В этом параграфе мы сопоставили комплексные переменные и электростатические величины и в качестве примера дали электростатическую интерпретацию некоторым известным теоремам теории функций. В дальнейшем в этой главе мы разовьем более строгую теорию, но будем обращаться к электростатической интерпретации, чтобы сделать ощутимым смысл излагаемых теорем, как это было сделано здесь в применении к теореме Коши и интегралу Коши.

4.2. Аналитические функции

Электростатическая аналогия позволила нам вывести эвристическим путем некоторые основные теоремы теории функций. В частности, мы заметили, что аналитические функции образуют узкий класс, к которому не принадлежат многие функции. В этом параграфе мы постараемся выяснить сущность требований, определяющих аналитическую функцию, с точки зрения геометра и аналитика. При этом получатся более строгие выводы упомянутых теорем. (Строгость в этих вопросах действительно полезна!)

Аналитическая функция была нами определена грубо как функция, зависящая только от z , а не от z и $\bar{z}$ вместе. Поэтому изучение аналитической функции комплексного переменного $f(z) = u + iv$, где u и v — действительные функции переменных x и y , обладает меньшей степенью общности, нежели изучение произвольных функций двух переменных, так как в случае аналитической функции u и v оказываются связанными условиями Коши — Римана (4.1.10). Более точное определение аналитической функции можно получить, рассматривая поведение производной функции $f(z)$ по z в точке a . Само понятие производной достаточно ясно. Функция $f(z)$ изображается вектором. Спрашивается, как изменяется этот вектор по величине и по направлению, когда z смещается из a в направлении, определяемом вектором dz . Если $f(z)$ зависит только от z (как, например, z^2), то мы вправе ожидать, что производная ($2z$ в нашем примере) определяется только точкой, в которой она вычисляется. *Однозначная функция является аналитической в точке a , если ее производная в точке a определяется единственным образом*, т. е. не зависит от направления dz , по которому она вычисляется. Независимо от того, куда мы

смещаемся из точки z , скорость изменения f с изменением z должна быть одна и та же. Для произвольной комплексной функции $u + iv$, в которой u и v зависят от x и y как угодно, это условие не выполняется. Оно выполняется лишь тогда, когда u и v удовлетворяют уравнениям (4.1.10).

Преимущество такого определения аналитической функции перед более простым определением, данным выше, состоит в его большей точности. Пользуясь им, легко проверить, является ли функция аналитической в какой-либо заданной точке. Мы снова видим, как узок класс аналитических функций. Большинство функций не обладает «изотропной» производной.

Нетрудно показать, что условия Коши — Римана *необходимы* для существования единственной производной. Для этого рассмотрим отношение приращения Δf функции $f(z)$ при изменении z от a до $a + \Delta z$ к приращению Δz :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(a + \Delta z) - f(a)}{\Delta z} = \frac{[(\partial u/\partial x) + i(\partial v/\partial x)]\Delta x + [(\partial u/\partial y) + i(\partial v/\partial y)]\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{(\partial u/\partial x) + i(\partial v/\partial x)}{1 + i(\Delta y/\Delta x)} \left\{ 1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\frac{(\partial v/\partial y) - i(\partial u/\partial y)}{(\partial u/\partial x) + i(\partial v/\partial x)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Это равенство показывает, что, помимо некоторых исключительных случаев, производная $df/dz = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f/\Delta z$ зависит от $\Delta y/\Delta x$, т. е. от направления вектора Δz . Для аналитической же функции такой зависимости быть не должно. Достигается это *только* тогда, когда

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Последние равенства выражают условия Коши — Римана, необходимые для того, чтобы функция была аналитической. Эти условия *достаточны*, если дополнительно потребовать, чтобы входящие в (4.2.1) производные были *непрерывны* в точке a . Без этого требования производные $\partial u/\partial x$ и другие зависели бы от способа их вычисления, а это снова привело бы к неоднозначной первой производной от f . Пусть, например,

$$u = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (\partial u/\partial x) = 1$ и в то же время $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (\partial u/\partial x) = 0^1$.

Условия Коши — Римана показывают, что если действительная (или мнимая) часть функции известна, то мнимая (соответственно действительная) часть определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого. Сейчас мы покажем на простом примере, как это осуществляется (позже будут указаны специальные методы). Предположим, что известна действительная часть u ; попытаемся найти мнимую часть:

$$v = \int dv = \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right),$$

¹⁾ Это довольно тонкое различие между необходимостью и достаточностью условий Коши — Римана для аналитичности функции установлено здесь недостаточно корректно. По этому поводу заметим только, что во всех случаях, возникающих при исследовании физических явлений, условия Коши — Римана необходимы и достаточны для аналитичности функции. — *Прим. ред.*

или

$$v = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right). \quad (4.2.2)$$

Значит, если u известна, то v определяется посредством интегрирования по формуле (4.2.2). Например, пусть $u = \ln r = (1/2) \ln(x^2 + y^2)$. Тогда

$$v = \int \frac{-y dx}{r^2} + \frac{x dy}{r^2} = \arctg \frac{y}{x} + \text{const},$$

так что $\ln r + i \arctg(y/x)$ представляет собой аналитическую функцию; последнюю можно записать проще в виде $\ln z$.

Специальная природа аналитических функций сказывается также в том, что если u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана, то тем же свойством обладает пара производных $\partial u/\partial x$ и $\partial v/\partial x$, так же как $\partial u/\partial y$ и $\partial v/\partial y$. Это обстоятельство указывает на то, что если функция $f(z)$ аналитична, то аналитичны и все ее производные. Эту полезную теорему мы сможем доказать в следующем параграфе, так как пока еще не установлено существование самих высших производных; ее, однако, следует запомнить, так как она позволяет обнаружить нарушение аналитичности в тех точках, где не существует какой-либо из старших производных.

Точки, в которых рассматриваемые функции неаналитичны, называются *особыми* (особенностями). Мы уже встречали функцию с особенностью $1/(z-a)$; она изображает электростатическое поле, которое порождено зарядом, находящимся в точке a . Точка a — особая, так как при $z=a$ эта функция не имеет производной. Существуют функции, неаналитические во всех точках, как, например, $|z|^2$. Эта функция равна $z\bar{z}$ и, очевидно, зависит не только от z . Функция $z^{p/q}$, где p/q — несократимая дробь, неаналитична в точке $z=0$. В применении, например, к функции $z^{8/5}$ в этом можно убедиться, заметив, что при $z=0$ ее вторая производная бесконечна.

Конформное отображение. Любая аналитическая функция $f(z) = u + iv$ ($z = x + iy$) может быть представлена геометрически как преобразование переменных x, y в переменные u, v . Можно вообразить две комплексные плоскости: на одной пусть изображаются значения z , на другой — соответствующие значения f . Любой линии на плоскости z будет при этом соответствовать некоторая линия на плоскости f . Разумеется, такого рода отображения осуществляются произвольными парами функций u, v переменных x, y . Но в тех случаях, когда u и v служат действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции, соответствующие отображения обладают некоторыми полезными и характерными свойствами. Самое важное и очевидное из этих характерных свойств состоит в том, что такие отображения «сохраняют углы», или являются *конформными*.

Если в плоскости z взять две пересекающиеся кривые, то соответствующие им кривые в плоскости f также будут пересекаться. При конформном отображении угол, под которым пересекаются эти кривые в плоскости f , равен углу, образованному выбранными кривыми в плоскости z в их точке пересечения.

На рис. 4.2 кривые в плоскости z пересекаются в точке $z=a$, точкой же пересечения соответствующих кривых в плоскости f является $f(a)$. Элементарное перемещение вдоль кривой 1 можно записать в виде $dz_1 = |dz_1| e^{i\varphi_1}$, элементарное перемещение вдоль кривой 2 есть $dz_2 = |dz_2| e^{i\varphi_2}$. Соответствующие элементарные перемещения в плоскости f

равны $dz_1(df/dz)$ и $dz_2(df/dz)$. Если функция f аналитична в точке $z=a$, то производная df/dz не зависит от направления dz ; поэтому df/dz в точке a равно $|df/dz|e^{i\alpha}$, каков бы ни был угол φ направления dz_1 или dz_2 . Следовательно, элементарные перемещения вдоль кривых 1 и 2 в плоскости f равны соответственно $|dz_1(df/dz)|e^{i(\alpha+\varphi_1)}$ и $|dz_2(df/dz)|e^{i(\alpha+\varphi_2)}$. Эти кривые повернуты на угол α относительно соответствующих кривых в плоскости z , но угол между ними равен $(\alpha+\varphi_1) - (\alpha+\varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2$, т. е. равен углу между кривыми 1 и 2 в плоскости z . Таким образом, отображение, осуществляемое аналитической функцией $f(z)=u+iv$, конформно, т. е. сохраняет углы. Повторяя в обратном порядке все этапы этого рассуждения, мы убедимся в том, что если преобразование x, y в u, v конформно, то оно осуществляется аналитической функцией $f=u+iv$ переменного $z=x+iy$ и функции u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана (4.2.1).

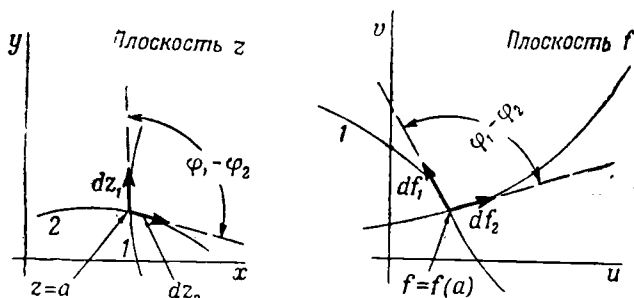


Рис. 4.2. Сохранение углов при конформном отображении.

Мы можем также нанести кривые на плоскость f и посмотреть, как расположатся соответствующие кривые в плоскости z . Например, прямые $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ служат координатными линиями прямоугольной системы координат в плоскости f . Соответствующие кривые $u(x,y)=\text{const}$, $v(x,y)=\text{const}$ образуют ортогональную координатную сеть в плоскости z (ортогональность обусловлена тем, что при отображении прямые углы переходят в прямые). Воспользовавшись только что проведенным рассуждением или определениями § 1.3 [см. (1.3.4)], мы получим в силу уравнений (4.2.1) (т. е. в силу аналитичности функции f) для обеих координат u, v равные коэффициенты Ламе

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = h_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = \left|\frac{df}{dz}\right|.$$

Поэтому бесконечно малая фигура на плоскости f отображается в подобную фигуру на плоскости z , отличающуюся, может быть, от исходной положением и величиной, но заведомо сохраняющую углы и отношения линейных размеров. Это свойство также может служить определением конформного отображения.

Простейшее конформное отображение задается равенством $f=ze^{i\theta}+c$, где действительный угол θ и комплексное слагаемое c постоянны. В этом случае коэффициенты Ламе $h_u=h_v=|df/dz|=1$, т. е. линейные размеры сохраняются. Само преобразование состоит в смещении, определяемом вектором c , и в повороте на угол θ . В других случаях происходит изменение линейных размеров, т. е. растяжение или сжатие, причем в различных участках это изменение неодинаково, так что в целом плоскость претерпевает искажения, несмотря на то, что преобразования ее малых участков сводятся к преобразованиям подобия. Всякую аналити-

ческую функцию комплексного переменного, как мы видели, можно рассматривать как изображение некоторого электростатического поля, а поэтому можно считать, что действие этого последнего состоит в искривлении пространства и в замене первоначального поля простым электростатическим полем $E = u + iv$. Движение заряженной частицы можно при этом объяснить либо непосредственным воздействием поля, либо искривленностью пространства под влиянием этого поля. Эта точка зрения напоминает подход Эйнштейна к гравитационным явлениям в общей теории относительности.

На рис. 4.3 показано конформное отображение, осуществляемое функцией

$$f = \frac{1-z}{1+z}, \quad u = \frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}, \quad v = \frac{-2y}{(1+x)^2+y^2}, \quad z = \frac{1-f}{1+f}.$$

Эта функция аналитична всюду, кроме точки $z = -1$, соответствующее отображение конформно также всюду, кроме этой точки. Кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ в плоскости z образуют два взаимно ортогональных семейства

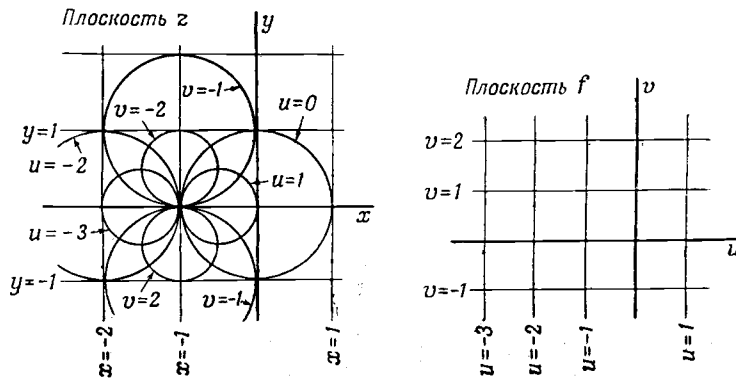


Рис. 4.3. Конформное отображение, осуществляемое функцией $f(z) = (1-z)/(1+z)$.

касающихся друг друга окружностей. Другие случаи будут рассмотрены и изображены ниже (см. § 4.7).

Заметим, что в точках, в которых коэффициент растяжения $|df/dz|$ обращается в нуль, отображение не конформно. Окрестность такой точки в плоскости z претерпевает сильное сжатие при отображении на плоскость f . При обратном отображении соответствующая область на плоскости f подвергается сильному растяжению. Это наводит на мысль, что для обратной функции $z(f)$ точка, соответствующая той, в которой $f'(z) = 0$, является особой. Мы увидим на примере, что это действительно так. Простейшим примером может служить функция $f(z) = z^2$, для которой $f'(0) = 0$. Как и следовало ожидать, $f = 0$ является особой точкой обратной функции $z = f^{1/2}$. Поэтому в этой точке отображение не может быть конформным. Это можно доказать непосредственно, так как если отрезки двух кривых пересекаются в точке $z = 0$ под углом $\varphi_2 - \varphi_1$, то угол между соответствующими кривыми в плоскости f равен $2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Ясно, что если $f'(a) = 0$, то отображение в точке $z = a$ не конформно, независимо от того, ведет ли себя $f(z)$ вблизи $z = a$ как $(z-a)^2$, что имеет место в нашем частном примере, или как $(z-a)^n$ с любым целым $n > 2$.

Однако там, где f аналитична и коэффициент растяжения $|df/dz|$ не равен нулю, обратное отображение конформно. Математически это форму-

лируется так: если функция $f(z)$ аналитична в точке $z = a$ и $f'(a) \neq 0$, то функция, обратная $f(z)$, аналитична в достаточно малой области, окружающей $f(a)$, и ее производная в точке $f(a)$ равна $1/f'(a)$.

Во-первых, что касается существования обратной функции, то мы замечаем, что для отображения $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ существует обратное, если $(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 \neq 0$. При $f'(a) \neq 0$ последнее условие выполняется. Заметим также, что если $f'(a)$ равно нулю, то обратная функция в точке $f(a)$ не существует, а это означает, что $f(a)$ — особая точка обратной функции. Теперь нужно показать, что обратная функция аналитична, т. е. что $\partial x/\partial u = \partial y/\partial v$ и $\partial x/\partial v = -\partial y/\partial u$. Выразим $\partial x/\partial u$, ... через производные $\partial u/\partial x$, ... Для этого из тождества

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

находим

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

откуда в силу (4.2.1)

$$1 = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Точно так же

$$1 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Решим полученную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$, $\partial y/\partial v$. Для производных от x получим выражения

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial u/\partial x}{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\partial u/\partial y}{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2}.$$

Найдя производные от y , мы увидим, что удовлетворяются условия Коши — Римана $\partial x/\partial u = \partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v = -\partial y/\partial u$. Вычислив производную обратной функции

$$\frac{dz}{df} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{(\partial u/\partial x) - i(\partial u/\partial y)} = \frac{1}{df/dz},$$

мы докажем последнее утверждение теоремы. Значительная часть этой главы будет посвящена дальнейшему изучению конформных отображений ввиду важности этих вопросов для приложений.

Интегрирование в комплексной плоскости. Теория интегрирования в комплексной плоскости в сущности есть теория криволинейных интегралов. Если C — какой-нибудь допустимый контур (см. ниже), то, согласно сказанному на стр. 335 [см. абзацы, предшествующие формуле (4.1.12)],

$$\int_C \bar{E} dz = \int_C E_t ds + i \int_C E_n ds, \quad ds = |dz|,$$

где E_t — компонента вектора E вдоль пути интегрирования, а E_n — нормальная компонента. Интегралы такого вида часто встречаются в физике.

Например, если E — силовое поле, то $\int_C E_t ds$ представляет собой работу,

которая совершается против сил поля при перемещении вдоль контура C . Второй интеграл измеряет поток вектора E через контур. Если E — вектор

скорости движущейся жидкости, то второй интеграл представляет собой поток жидкости через рассматриваемый контур.

Для того чтобы оба эти интеграла имели физический (а также математический) смысл, необходимо взять достаточно гладкий контур. Такой *гладкий контур* (гладкая кривая) можно составить из непрерывно примыкающих друг к другу дуг, каждая из которых имеет непрерывно изменяющуюся касательную. Последнее требование исключает возможность появления таких патологических явлений, как дуги, имеющие бесконечную длину. Для удобства предположим еще, что ни одна из дуг, составляющих контур, не имеет точек самопересечения, исключив тем самым появление петель. Впрочем, контуры, имеющие петли, можно было бы не исключать из рассмотрения, так как каждый контур с петлей может быть разбит на замкнутый контур (петлю) и некоторый гладкий контур, и теорему, о которой идет речь, можно было бы применить отдельно

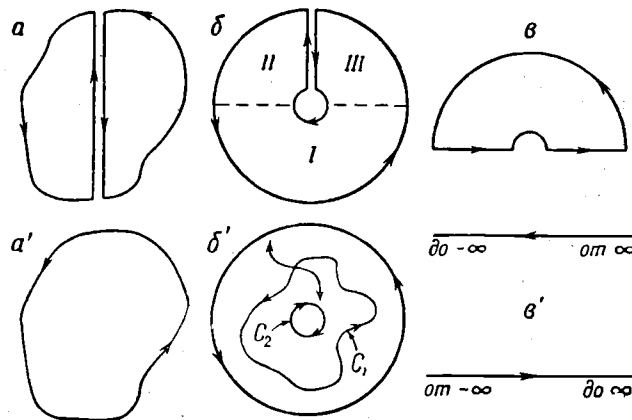


Рис. 4.4. Примеры контуров в комплексной плоскости.

к обеим частям. *Замкнутым контуром* назовем замкнутую гладкую кривую. Замкнутый контур описывается в *положительном* направлении по отношению к области, ограниченной контуром, если по отношению к наблюдателю, находящемуся в какой-либо внутренней точке этой области, обход контура совершается против часовой стрелки. Отрицательным будем считать обход по часовой стрелке. Интегрирование вдоль замкнутого контура будет обозначаться знаком $\oint$.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующим достаточно очевидным фактом: если $f(z)$ — аналитическая функция внутри контура и на самом контуре и если производная df/dz в этой области однозначна, то

$$\oint \frac{df}{dz} dz = 0.$$

В тех случаях, когда df/dz *неоднозначна*, это равенство может нарушаться.

Комбинируя контуры, составленные из гладких кривых, можно получать новые контуры. На рис. 4.4 приведены примеры. В примере $б'$ окружности не смыкаются и, следовательно, не образуют в совокупности единого замкнутого контура. Области, ограниченные контурами такого рода, называются *много связными*; в остальных примерах на рис. 4.4 области *односвязные*. Область односвязна, если любой замкнутый контур, лежащий в ней, можно стянуть в точку, непрерывно деформируя его и не задевая

при этом границу области. В примере b' кривая C_1 , лежащая в кольце между двумя окружностями, не поддается такой деформации. Пример b иллюстрирует тот факт, что любая многосвязная область может быть превращена в односвязную, если дополнить ее границу разрезами так, чтобы нельзя было провести нестягиваемых замкнутых контуров. Так, контур C_1 в примере b' , если его перенести в b , не лежал бы целиком внутри заданной области. Необходимость принимать во внимание характер связности области и его физический смысл будет вскоре выяснена.

После этих геометрических замечаний мы можем сформулировать центральную теорему теории функций комплексного переменного.

Теорема Коши. Если $f(z)$ — аналитическая функция, непрерывная внутри замкнутого гладкого контура C и на самом контуре, то

$$\oint f(z) dz = 0. \quad (4.2.3)$$

Доказательство этой теоремы, принадлежащее Гурса, читатель может найти в различных учебниках. Простое доказательство, приведенное выше, предполагает не только существование производной $f'(z)$ всюду внутри C , но и ее непрерывность в этой области. Однако теорему Коши полезно доказать при минимальных предположениях относительно $f(z)$, так как это расширит область ее применения. В настоящем параграфе мы удовольствуемся предположениями, что контур C ограничивает звездообразную область и что $f'(z)$ ограничена внутри и на C .

Геометрическое понятие «звездообразной» области нуждается в разъяснении. Область называется звездообразной, если в ней существует такая точка O , что любой луч, выходящий из O , имеет в точности одну точку пересечения с границей области. Простым примером звездообразной области служит круг. Кольцо, напротив, не является звездообразной областью. То, что наше доказательство будет относиться лишь к звездообразным областям, не нарушает общности теоремы, так как произвольная односвязная область с достаточно хорошей границей может быть разбита на несколько звездообразных частей, к каждой из которых теорема Коши применима. Например, на рис. 4.4, a область, представляющая собой полукольцо, может быть разбита на звездообразные части, подобные областям II и III примера b . Применив теорему Коши отдельно к границам этих частей, мы получим

$$\oint_{II} f dz + \oint_{III} f dz = 0.$$

Но интегралы по общим участкам границ областей II и III взаимно уничтожаются, и сумма интегралов в левой части равенства оказывается равной интегралу от f по границе полукольца.

Переходим к доказательству теоремы Коши. Пусть точка O звездообразной области является началом координат. Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \lambda \oint f(\lambda z) dz, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (4.2.4)$$

Теорема Коши утверждает, что $F(1) = 0$. Для доказательства дифференцируем $F(\lambda)$:

$$F'(\lambda) = \oint f(\lambda z) dz + \lambda \oint z f'(\lambda z) dz.$$

Интегрируя во втором слагаемом по частям [что допустимо при условии ограниченности $f'(z)$], получаем

$$F'(\lambda) = \oint f(\lambda z) dz + \lambda \left\{ \left[\frac{zf(\lambda z)}{\lambda} \right] - \frac{1}{\lambda} \oint f(\lambda z) dz \right\},$$

где квадратные скобки указывают на то, что берется разность значений заключенной в них функции в начальной и конечной точках контура. Так как функция $zf(\lambda z)$ однозначна, то $[zf(\lambda z)/\lambda]$ в случае замкнутого контура обращается в нуль и $F'(\lambda) = 0$, т. е.

$$F(\lambda) = \text{const.}$$

Для отыскания этой постоянной положим $\lambda = 0$ в (4.2.4) и получим $F(0) = 0$. Следовательно, $F(1) = 0$, и теорема доказана. Это доказательство, кажущееся столь простым, на самом деле переносит трудность на другие

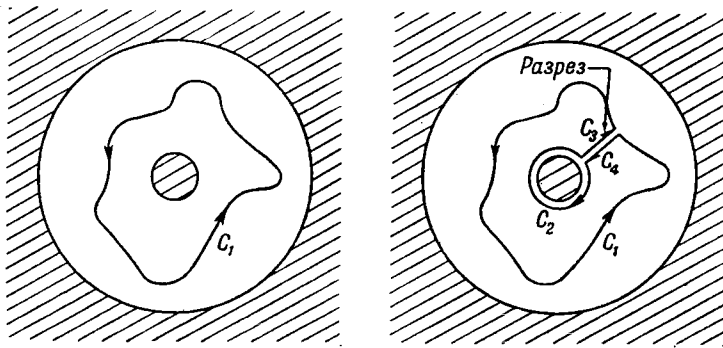


Рис. 4.5. Контур в многосвязных областях.

вопросы, такие, например, как вопрос о возможности интегрирования по частям. Последняя вытекает из предположения об аналитичности функции.

Теорема Коши в форме (4.2.3) неприменима к многосвязной области, так как ее граница не является замкнутым гладким контуром. Физические причины этого факта нетрудно обнаружить. На стр. 335 мы установили, что в применении к электростатическому полю теорема Коши эквивалентна утверждению, что внутри области, ограниченной контуром C , нет электрических зарядов. Взяв многосвязную область, приведенную на рис. 4.4,б', мы увидим, что существует контур (например, контур C_1), целиком лежащий внутри рассматриваемой области, к которому теорема Коши явно неприменима из-за того, что внутри маленького круга, т. е. вне рассматриваемой области, могут находиться заряды. Теорему Коши можно получить здесь при помощи вычитания

$$\oint_{C_1} f dz - \oint_{C_2} f dz = 0, \quad (4.2.5)$$

где C_2 — малая окружность. Это равенство можно также установить непосредственно, соединив разрезом линии C_1 и C_2 и тем самым превратив многосвязную область в односвязную. Если взять теперь (см. рис. 4.5) контур, состоящий из контуров C_1 (описываемого в положительном направлении), C_2 (описываемого в отрицательном направлении) и границ разреза C_3 и C_4 , то к такому контуру теорема Коши применима. Интегралы вдоль C_3 и C_4 взаимно уничтожаются, и мы получаем равенство (4.2.5).

Некоторые полезные следствия из теоремы Коши. Из теоремы Коши следует, что если $f(z)$ — аналитическая функция внутри области, ограниченной некоторым замкнутым контуром C , то интеграл $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$, взятый вдоль любого контура, лежащего внутри C , зависит только от z_1 и z_2 . Таким образом, не только производная функции $f(z)$, но и ее интеграл определяются однозначно. Это обстоятельство часто приводится в качестве довода в пользу важности теоремы Коши. Для доказательства сравним интегралы $\int_{C_1} f(z) dz$ и $\int_{C_2} f(z) dz$, взятые вдоль двух различных

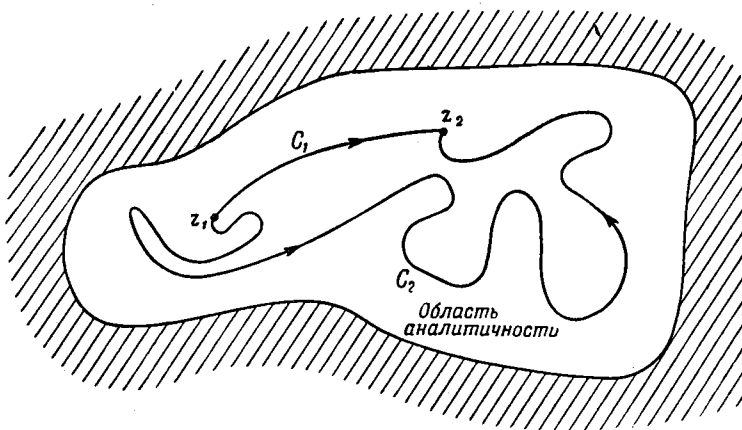


Рис. 4.6. Независимость интеграла от пути внутри области аналитичности.

контуров C_1 и C_2 , идущих от точки z_1 к точке z_2 (см. рис. 4.6). Согласно теореме Коши, $\int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = \oint f(z) dz = 0$, что и требовалось доказать. Из этого следствия вытекает весьма важный факт, состоящий в том, что, не изменяя значения интеграла, мы можем деформировать контур интегрирования, если только при такой деформации контур не пересечет ни одной особой точки подинтегральной функции. Этой теоремой мы постоянно будем пользоваться при вычислении контурных интегралов, так как она позволяет выбирать наиболее удобный контур.

В силу однозначности интеграла $\int_{z_1}^{z_2} f dz$ можно ввести неопределенный интеграл функции $f(z)$, положив

$$F(z) = \int_{z_1}^z f(z) dz,$$

причем контур берется, разумеется, внутри области аналитичности функции $f(z)$. Справедлива интересная теорема, состоящая в том, что если $f(z)$ аналитична в некоторой области, то $F(z)$ в этой области также является аналитической функцией. Для доказательства достаточно установить од-

нозначность производной функции $F(z)$. С этой целью рассмотрим тождество

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) = \frac{\int_{\zeta}^z [f(z) - f(\zeta)] dz}{z - \zeta}.$$

В силу непрерывности и однозначности $f(z)$, правая часть при приближении z к ζ может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} = f(\zeta).$$

Написанный предел является как раз производной $F'(\zeta)$, и теорема доказана.

Из уравнения (4.1.19) и последующих рассуждений мы сделали вывод, что если $f(z)$ — функция, сопряженная электростатическому полю, то действительная часть функции $F(z)$ является электростатическим потенциалом, а мнимая часть постоянна вдоль силовых линий поля, т. е. является функцией тока (см. стр. 337). Следовательно, двумерный электростатический потенциал и функция тока служат действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции комплексного переменного.

Возвращаясь к предыдущему абзацу, заметим, что, воспользовавшись только непрерывностью и однозначностью $f(z)$, а также однозначностью интеграла, мы установили *аналитичность* функции $F(z)$. Ниже мы покажем, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области, то аналитична и ее производная [см. формулу (4.3.1)]. Забегая вперед и применяя эту теорему, приходим к заключению, что если $F(z)$ аналитична, то аналитична и $f(z)$. Таким образом, мы получаем обращение теоремы Коши, именуемое *теоремой Морера*.

Если функция $f(z)$ непрерывна и однозначна внутри некоторого замкнутого контура C и $\oint_C f(z) dz = 0$ для любого замкнутого контура, лежащего внутри C , то $f(z)$ аналитична внутри C .

Эта теорема позволяет проверять аналитичность функций и является, таким образом, интегральным аналогом дифференциального признака, выражаемого условиями Коши — Римана. Последние, впрочем, требуют еще непрерывности производной от f , и поэтому иногда бывает проще пользоваться интегральным признаком.

Физический смысл теоремы Морера в применении к электростатическому полю $f(z)$ может шокировать физика своей очевидностью; она утверждает, что если полный заряд, заключенный внутри произвольного замкнутого контура, лежащего в данной области [вычисленный с помощью $f(z)$], равен нулю, то и плотность зарядов в этой области всюду равна нулю.

Интегральная формула Коши. Интегральная формула Коши, являющаяся прямым следствием теоремы Коши, играет основную роль в применениях теории аналитических функций в других областях математики и в физике. Ее электростатическим аналогом является теорема Гаусса, которая утверждает, что интеграл от нормальной компоненты вектора электростатического поля вдоль замкнутого контура C равен сумме зарядов, заключенных внутри C . В электростатике теорема Гаусса доказывается таким образом, что поле, возбуждаемое внешними (по отношению к C) источниками, отделяется от поля, порожденного внутренними источниками. Первое дает интеграл, равный нулю, а второе вычисляется путем сумми-

рования действий отдельных источников. Интегральная формула Коши относится к случаю, когда внутри C имеется единственный точечный источник.

Рассмотрим интеграл (называемый интегралом Коши)

$$J(a) = \oint \frac{f(z) dz}{z-a}, \quad (4.2.6)$$

взятый вдоль некоторого замкнутого контура C , причем предполагается, что на контуре и внутри него $f(z)$ аналитична. Согласно следствию из теоремы Коши о деформировании контуров, C можно заменить малой окружностью радиуса ρ с центром в точке a . Положив $z - a = \rho e^{i\varphi}$, получим

$$J = i \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi = if(a) \int_0^{2\pi} d\varphi + i \int_0^{2\pi} [f(a + \rho e^{i\varphi}) - f(a)] d\varphi. \quad (4.2.7)$$

В пределе при $\rho \rightarrow 0$ второй интеграл в правой части обращается в нуль в силу непрерывности $f(z)$. Итак, интегральная формула Коши гласит, что если функция $f(z)$ аналитична внутри контура C и на нем самом и a — какая-либо точка, лежащая внутри C , то

$$\oint \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a). \quad (4.2.8)$$

Если точка a выбрана вне C , то $\oint [f(z)/(z-a)] dz = 0$. Если точка a выбрана на самом контуре C , то главное значение Коши¹⁾ этого интеграла равно $\pi i f(a)$ (т. е. среднему арифметическому значений, получающихся в предыдущих случаях). Последний случай соответствует такому положению точечного источника, когда одна его половина находится с внутренней стороны контура C , а другая половина — с внешней. Итак,

$$\oint \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a) \times \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ лежит внутри } C, \\ \frac{1}{2} & \text{(главное значение интеграла),} \\ & \text{если } a \text{ лежит на } C, \\ 0, & \text{если } a \text{ лежит вне } C. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Формула Коши дает интегральное представление функции $f(z)$ и позволяет вычислить $f(z)$ в любой точке, лежащей внутри контура C , коль скоро известны значения $f(z)$ на C . В физике часто встречаются такого рода представления (в частности, в приложениях функций Грина или функций источника) с разрывами такого же вида, как в (4.2.9). Формула (4.2.8) в том случае, когда f определяет электростатическое поле, дает возможность вычислить поле внутри контура C по его значениям вдоль C . Аналогичные теоремы имеют место в теории распространения волн, где они объединяются под названием принципа Гюйгенса.

¹⁾ Главное значение Коши несобственного интеграла определяется следующим образом: пусть $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, тогда главное значение интеграла $\int_b^c q(x) dx$, обозначаемое $\mathcal{P} \int_b^c q(x) dx$ ($b < a < c$), равно

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \int_b^{a-\delta} q(x) dx + \int_{a+\delta}^c q(x) dx \right\}.$$

Формула Коши представляет собой мощное орудие исследования свойств аналитических функций. Она указывает на теснейшую связь, существующую между значениями аналитической функции во всей комплексной плоскости. Так, из формулы (4.2.7) мы видим, что $f(a)$ равно *среднему арифметическому* значений f на любой окружности с центром в точке a . Поэтому $|f(a)| \leq M$, где M — наибольшее значение $|f|$ на окружности. Равенство $|f(a)| = M$ может иметь место лишь тогда, когда f постоянна на окружности; в этом случае f постоянна и внутри круга. Эта теорема легко может быть обобщена на области, ограниченные произвольными контурами.

В случае электростатического поля последняя теорема означает, что вектор поля в области, ограниченной некоторым замкнутым контуром C и свободной от зарядов, принимает свое наибольшее (по модулю) значение на границе области. Если $f(z)$ не имеет нулей внутри контура C , то функция $1/f(z)$ аналитична в этой области и $|1/f(z)|$ достигает своего наибольшего значения лишь на C . Следовательно, в этом случае $|f(z)|$ *принимает свое наименьшее значение лишь на контуре C* . Доказательство не проходит и сама эта теорема несправедлива тогда, когда внутри C существуют нули функции $f(z)$. Таким образом, модуль аналитической функции не может достигать внутри области аналитичности ни максимума, ни (положительного) минимума. Если $|f(z)|$ достигает наибольшего или наименьшего (положительного) значения внутри C , то $f(z)$ — постоянная. Поэтому точки, в которых производная функции $f(z)$ обращается в нуль и $f(z) \neq 0$, являются для $|f(z)|$ седловыми точками, а не точками максимума или минимума.

В частности, вектор электростатического поля принимает свои наибольшее и наименьшее (по модулю) значения (когда последнее отлично от нуля) на границе области.

Эти теоремы применимы не только к $|f(z)|$, но также к действительной и мнимой частям аналитической функции $f(z)$, а следовательно, и к электростатическому потенциалу V . Чтобы это показать, запишем равенство (4.2.7) в виде

$$2\pi i f(a) = 2\pi i (u + iv) = i \int_0^{2\pi} f(x - iy) d\varphi = i \int_0^{2\pi} (u + iv) d\varphi.$$

Приравняв мнимые части второго и четвертого выражений, получим

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\varphi, \quad (4.2.10)$$

и мы видим, что значение u в центре окружности есть среднее арифметическое ее значений на самой окружности. Рассуждая точно так же, как при рассмотрении $|f(z)|$, мы приходим к заключению, что u принимает свои наибольшее и наименьшее значения лишь на границе той области, где f аналитична.

Мы доказали, таким образом, теорему, которая гласит, что электростатический потенциал не может достигать ни максимума, ни минимума внутри областей, свободных от зарядов. Этот факт был уже установлен в гл. 1 (см. стр. 18) при обсуждении уравнения Лапласа, которому удовлетворяет электростатический потенциал. Непосредственным следствием этой теоремы является то, что электростатический потенциал V , если он постоянен на каком-либо контуре, внутри которого нет зарядов, оказывается постоянным также внутри контура. Это свойство V находит свое истол-

кование в хорошо известном факте, что электростатическое поле внутри проводника, образующего замкнутую поверхность, равно нулю.

Приведенные примеры показывают, насколько полезен интеграл Коши. Кроме того, мы еще раз убедились в том, что аналитические функции обладают весьма специальными свойствами. Более глубоким изучением этих свойств мы займемся в этой главе позднее.

Действительная и мнимая части аналитической функции. Только что приведенные рассуждения указывают на то, что мы можем классифицировать компоненты аналитических функций, т. е. их действительные и мнимые части, и выяснять соотношения между ними так же, как в предыдущих пунктах это делалось с самими аналитическими функциями. Опять-таки, в силу особой природы аналитических функций, поведение этих компонент на одном участке комплексной плоскости оказывается жестко связанным с поведением их на других участках. Кроме того, действительная и мнимая части тесно связаны между собой. В частности, мы увидим, что, зная достаточно хорошо действительную или мнимую часть аналитической функции, можно *вычислить* вторую компоненту.

Эта связь между действительной и мнимой частями аналитической функции представляет значительный физический интерес. Например, в электростатике ей соответствует связь между электростатическим потенциалом и полным зарядом, в теории колебаний — связь между действительной и мнимой частями импеданса, т. е. между активной и реактивной составляющими. В последнем случае комплексное переменное представляет комплексную частоту.

Некоторые простейшие сведения об аналитических функциях мы смогли получить, воспользовавшись представлением аналитической функции посредством интеграла Коши. Такое представление возможно в любой области, лежащей внутри замкнутого контура, и, как мы видели, оно связывает значения аналитической функции f внутри области с ее значениями на границе. Простое выражение действительной части функции f (обозначаемой $\operatorname{Re} f$) внутри области через значения $\operatorname{Re} f$ на контуре легко установить для случая круга. Ниже мы увидим, что с помощью конформного преобразования внутренность любой области можно отобразить на внутренность круга; поэтому и в случае произвольной области можно, по крайней мере в принципе, установить связь между значениями $\operatorname{Re} f$ внутри контура и ее значениями на самом контуре, хотя очень часто это бывает нелегко осуществить практически. Однако в силу возможности такого отображения установленные ниже теоремы с качественной стороны справедливы для любой области. Всюду в последующем рассуждении будет предполагаться, что *функция $f(z)$ аналитична внутри рассматриваемой области*.

Многого удастся достигнуть, рассматривая окружность бесконечного радиуса; для удобства мы предположим, что эта окружность совпадает с осью x , а внутренняя к ней область — с верхней полуплоскостью. Наша задача будет состоять в том, чтобы отыскать действительную и мнимую части функции $f = u + iv$ в верхней полуплоскости, считая u заданной на оси x . Решение может быть подсказано соответствующей электростатической задачей, когда требуется по заданным значениям потенциала на оси $y = 0$ восстановить потенциал в верхней полуплоскости. Такого рода задачи в электростатике решаются методом изображений (см. гл. 7).

Интеграл Коши эквивалентен представлению решения с помощью функции источника, причем множитель $1/(z - \zeta)$ изображает «источник» в точке $z = \zeta = \xi + i\eta$. Точку ζ мы поместим в верхней полуплоскости, так

что интеграл от $f(z)/(z-\zeta)$ вдоль охватывающего точку ζ замкнутого контура, состоящего из оси x и полуокружности бесконечного радиуса, будет равен $2\pi i f(\zeta)$. В то же время интеграл от $f(z)/(z-\bar{\zeta})$ будет равен нулю, так как точка $\bar{\zeta}$ лежит вне выбранного контура. Следовательно,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z-\bar{\zeta}} \right) dz. \quad (4.2.11)$$

Коль скоро f аналитична во всей верхней полуплоскости, интеграл по бесконечной верхней полуокружности обращается в нуль¹⁾, интеграл (4.2.11) сводится к интегралу, взятому вдоль действительной оси, и мы получаем

$$f(\zeta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx, \quad (4.2.12)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Знаменатель подинтегрального выражения, а также множитель перед интегралом действительны, поэтому формула (4.2.12) справедлива отдельно для u и v . Например,

$$u(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx. \quad (4.2.13)$$

Таким образом, если потенциал задан при $y=0$, т. е. на оси x , то при условии, что f аналитична в верхней полуплоскости, формула (4.2.13) дает значения потенциала u во всех точках верхней полуплоскости.

Для того чтобы получить соотношения между u и v , следует повторить предыдущий вывод, сложив обе функции источника, вместо того чтобы брать их разность. Мы получим

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \left(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}} \right) dz,$$

или

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx. \quad (4.2.14)$$

Отделив в последнем равенстве действительную и мнимую части, мы получим искомые соотношения:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi) v(x, 0)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx \quad (4.2.15)$$

$$v(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi) u(x, 0)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx. \quad (4.2.16)$$

Зная поведение действительной (или мнимой) части функции f на оси x , мы сможем посредством (4.2.13) и формулы для v , аналогичной (4.2.13), а также формул (4.2.15) и (4.2.16) вычислить как u , так и v в верхней полуплоскости. Эти формулы дают решение соответствующей задачи электростатики, когда требуется найти поле в полуплоскости по заданному на границе распределению зарядов или потенциалу.

¹⁾ Это будет верно только при дополнительном условии, что $|f(z)/z|$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. — Прим. перев.

Выражения (4.2.13) и (4.2.16) позволяют определить поведение u и v на самой границе, если положить $\eta = 0$. Но при этом приходится проявлять осторожность из-за получающихся несобственных (сингулярных) интегралов. Проще всего, пожалуй, снова вернуться к интегралу Коши, который в том случае, когда точка ζ лежит на контуре, дает нам [см. формулу (4.2.9)]

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \oint \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Когда контуром служит ось x ,

$$f(\xi, 0) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, 0)}{x - \xi} dx, \quad (4.2.17)$$

откуда

$$u(\xi, 0) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, 0)}{x - \xi} dx, \quad v(\xi, 0) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{x - \xi} dx. \quad (4.2.18)$$

Эти соотношения встречаются в теории преобразования Гильберта; функции u и v являются преобразованиями Гильберта одна для другой. Дальше в настоящей главе мы подробнее рассмотрим эти трансформации. (Следует еще раз подчеркнуть, что полученные формулы связывают между собой действительную и мнимую части функции, аналитической в верхней полуплоскости.) Иногда удобно переписать формулы (4.2.18) в таком виде, чтобы особенность подинтегральной функции была «сглажена». Заметив,

что $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx/(x - \xi) = 0$, получим

$$\begin{aligned} u(\xi, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, 0) - v(\xi, 0)}{x - \xi} dx, \\ v(\xi, 0) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0) - u(\xi, 0)}{x - \xi} dx^1). \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Импеданс. Среди аналитических функций, встречающихся в приложениях, одной из наиболее важных является полное сопротивление, или *импеданс* Z (см. стр. 271 и 309). Электрический импеданс определяется как отношение напряжения к силе тока в данной точке цепи в предположении, что и напряжение и сила тока выражены в виде комплексных показательных функций времени ($V = V_0 e^{i\omega t}$ и т. д.); механический импеданс есть комплексное отношение силы к скорости; волновой импеданс колебаний струны был определен на стр. 128 и т. д.

Импеданс представляет собой функцию частоты ν (или, иначе, угловой скорости $\omega = 2\pi\nu$) и параметров системы. Когда ω действительна и положительна (т. е. когда возмущающая сила или напряжение имеет вид $F_0 e^{i\omega t}$), действительная часть функции Z называется активным сопротивлением (резистансом) и обозначается R , а мнимая часть называется

¹⁾ Может оказаться, что на бесконечности эти интегралы надо понимать в смысле главного значения, т. е. как $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N$. Так будет, например, для приводимого ниже интеграла (4.2.22), если $\xi \neq k\pi$. — Прим. ред.

реактивным сопротивлением (реактансом) и обозначается X . Однако мы можем представить себе случаи, когда ω имеет комплексные значения и возмущающая сила содержит вещественный множитель, являющийся показательной функцией времени, так что $Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$ можно рассматривать как аналитическую функцию комплексного переменного ω .

В большинстве физически реализуемых случаев Z оказывается аналитической в верхней полуплоскости ω (т. е. при положительной мнимой части переменного ω). Природа импеданса такова, что при изменении знака ω (т. е. если возмущающая сила имеет вид $F_0 e^{-i\omega t}$) активная составляющая не изменяется, а реактивная изменяет знак

$$Z(-\omega) = \overline{Z}(\omega), \quad R(-\omega) = R(\omega), \quad X(-\omega) = -X(\omega). \quad (4.2.20)$$

Применяя к этим функциям формулы (4.2.19), получаем равенства

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{xX(x) - \omega X(\omega)}{x^2 - \omega^2} dx, \quad X(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(x) - R(\omega)}{x^2 - \omega^2} dx, \quad (4.2.21)$$

выражающие активную составляющую при действительных ω через реактивную при действительных ω , и наоборот. Это показывает, что если Z ведет себя достаточно хорошо (аналитична в верхней полуплоскости), то активная и реактивная составляющие импеданса связаны между собой определенными соотношениями и их нельзя выбирать произвольно и независимо друг от друга.

Помимо упомянутых здесь непосредственных приложений, формулы (4.2.19) могут служить для вычисления интегралов с бесконечными пределами. Это достигается применением формул (4.2.19) к функциям, действительные и мнимые части которых известны. Пусть, например, $f(z) = e^{iz}$. Тогда $u(x, 0) = \cos x$, $v(x, 0) = \sin x$ и

$$\cos \xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi} dx; \quad (4.2.22)$$

при $\xi = 0$ получаем

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (4.2.23)$$

Такого рода применения формул (4.2.19) весьма многочисленны. В этой главе, а также в задачах встречаются и другие примеры.

Формула Пуассона. Аналогичные соотношения могут быть получены в том случае, когда рассматриваемой областью является круг. При этом точке ζ мы ставим в соответствие ее изображение $a^2/\bar{\zeta}$, где a — радиус круга (при $|\zeta| < a$ точка $a^2/\bar{\zeta}$ оказывается вне круга). Действуя так же, как при выводе формул (4.2.11) и следующих, напомним

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{f(z)}{z - \zeta} - \frac{f(z)}{z - a^2/\bar{\zeta}} \right] dz,$$

где интеграл берется вдоль выбранной окружности. Переходя к полярным координатам, имеем $z = ae^{i\varphi}$, $\zeta = re^{i\theta}$ ($r < a$) и после некоторых простых преобразований получаем формулу Пуассона

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta) + r^2} f(ae^{i\varphi}) d\varphi. \quad (4.2.24)$$

Этот аналог формулы (4.2.13) позволяет найти действительную (или мнимую) часть функции f *внутри* круга по заданным значениям ее на границе.

Формулы, подобные (4.2.14), можно получить, преобразуя интеграл

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{f(z)}{z-\zeta} + \frac{\overline{f(z)}}{z-a^2/\bar{\zeta}} \right] dz.$$

Из формулы (4.2.24) получаем

$$f(re^{i\theta}) = f(0) - \frac{iar}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \theta)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} f(ae^{i\varphi}) d\varphi. \quad (4.2.25)$$

Приравнивая действительные и мнимые части, имеем

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u(0) + \frac{ar}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \theta)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} v(a, \varphi) d\varphi, \\ v(r, \theta) &= v(0) - \frac{ar}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \theta)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} u(a, \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

где $f = u + iv$ и значение u при $r = 0$ кратко обозначено $u(0)$.

И в этом случае обнаруживается соотношение между функциями u и v на окружности. Мы имеем равенство

$$f(ae^{i\theta}) = f(0) - \frac{i}{2\pi} \oint \int_0^{2\pi} f(ae^{i\varphi}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi. \quad (4.2.27)$$

Воспользовавшись тем, что $\oint \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi = 0$, и приравняв действительные и мнимые части обеих частей равенства (4.2.27), получаем соотношения

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [v(a, \varphi) - v(a, \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi, \\ v(a, \theta) &= v(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(a, \varphi) - u(a, \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi, \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

являющиеся аналогами преобразований Гильберта для случая круга.

Различные выведенные здесь формулы еще раз демонстрируют тесную связь между u и v , которую в дифференциальной форме мы уже видели в условиях Коши — Римана (4.2.1).

4.3. Производные аналитических функций. Ряды Тейлора и Лорана

Одно из самых замечательных свойств аналитической функции состоит в том, что все ее производные также аналитичны, причем в той же области, где и исходная функция. Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся интегральным представлением аналитической функции, вычислив производные путем соответствующего предельного перехода. Возможность этого обеспечивается тем, что свойства интегрального представления определяются в основном свойствами функции $1/(z - a)$, аналитичной при $z \neq a$.

Мы имеем

$$\begin{aligned} 2\pi i f'(a) &= 2\pi i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \oint f(z) \left(\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a} \right) dz \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \oint \frac{f(z)}{(z-a)(z-a-h)} dz = \oint \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz. \end{aligned}$$

Предельный переход под знаком интеграла оправдывается соотношениями

$$\begin{aligned} \left| \oint f(z) \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z-a-h)(z-a)} \right) dz \right| &= \\ &= \left| h \oint \frac{f(z) dz}{(z-a)^2(z-a-h)} \right| \leq \frac{|h| ML}{b^2(b-|h|)}, \end{aligned}$$

где M — наибольшее значение $|f(z)|$ на контуре, L — длина контура, b — наименьшее значение $|z-a|$ на контуре. При $h \rightarrow 0$ правая часть неравенства стремится к нулю, а следовательно, стремится к нулю и левая часть.

Вычисляя таким же способом высшие производные, приходим к важной общей формуле, выражающей n -ю производную функции f в точке $z = a$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \quad (4.3.1)$$

В силу того, что все производные существуют, все они оказываются аналитическими функциями внутри контура C . Заметим, что из этого доказательства не следует существование высших производных на самом контуре C , так как интегральное представление (4.2.9) функции f , которым мы здесь пользуемся, разрывно на C .

Ряд Тейлора. С помощью формулы (4.3.1) можно вывести ряд Тейлора и найти его радиус сходимости. Ряд Тейлора представляет собой разложение $f(a+h)$ в ряд по степеням h . Такой ряд 1) *сходится внутри своего круга сходимости и расходится вне его*, 2) *имеет аналитическую сумму внутри круга сходимости* и 3) *имеет круг сходимости, простирающийся до ближайшей к a особой точки функции $f(z)$* . Доказательство утверждений 1) и 2) читатель найдет в любом учебнике, в котором сколько-нибудь подробно рассматриваются свойства степенных рядов. Предполагая, что точка a лежит внутри контура C , а $f(z)$ аналитична внутри и на C , из формулы Коши получаем

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a-h} dz.$$

В качестве C возьмем окружность с центром в a , поскольку область сходимости, получающаяся в результате, представляет собой круг.

В силу тождества

$$\left(1 + \frac{h}{z-a} + \frac{h^2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{h^{n-1}}{(z-a)^{n-1}} \right) \frac{z-a-h}{z-a} = 1 - \frac{h^n}{(z-a)^n}$$

мы имеем точное выражение

$$\frac{1}{z-a-h} = \sum_{n=1}^N \frac{h^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{h^N}{(z-a-h)(z-a)^N}.$$

Подставляя его в интегральное представление $f(a+h)$, получаем

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^N \frac{h^n}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz + \frac{h^{N+1}}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{N+1}(z-a-h)} dz$$

или, в силу (4.3.1),

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^N \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_N. \quad (4.3.2)$$

Здесь R_N — остаточный член, т. е. разность между $f(a+h)$ и суммой первых $N+1$ членов ряда Тейлора. Чтобы найти радиус сходимости, заметим прежде всего, что ряд наверное сходится в любом круге радиуса r с центром в a , где r меньше расстояния от a до ближайшей к a особой точки функции f . Это следует из неравенства

$$|R_N| \leq \frac{|h|^{N+1} M}{r^N (r - |h|)},$$

где M — наибольшее значение $|f|$ на окружности радиуса r с центром в точке a . Внутри такого круга $|h| < r$, а поэтому $R_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Итак, внутри круга радиуса r

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a); \quad (4.3.3)$$

полученный сходящийся ряд называется *рядом Тейлора*. Таким образом, радиус сходимости не меньше расстояния от a до ближайшей особой точки. Но он и не превосходит этого расстояния, так как мы не можем ожидать от степенного ряда, чтобы он удовлетворительно представлял функцию в окрестности ее особой точки.

То обстоятельство, что радиус сходимости ряда Тейлора равен расстоянию до ближайшей особой точки, объясняет некоторые кажущиеся парадоксы в поведении функций и рядов, возникающие когда последние рассматриваются только при действительных значениях аргумента. Характерным примером служит ряд Тейлора $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \dots$. Ясно, что этот ряд «разлетается» при $z=1$. Однако он расходится и при $z=-1$, а также при любом $z=e^{i\varphi}$, т. е. в любой точке единичной окружности с центром в начале. Доказанная выше теорема дает объяснение этому явлению. В качестве другого примера рассмотрим функцию $f(x) = e^{-1/x^2}$. Все ее производные в точке $x=0$ равны нулю, но если эти данные механически подставить в формулу Тейлора (4.3.3), то получится очевидная бессмыслица. Дело здесь в том, что $z=0$ — особая точка функции e^{-1/z^2} комплексного переменного z .

Часто очень важно различать ряд, представляющий функцию, и «самое функцию» (какой бы смысл не вкладывался в это выражение). Степенной ряд, каковым является ряд Тейлора, как правило, представляет заданную функцию f лишь в некоторой ограниченной области. За пределами этой области функция f «существует», но это специальное представление в виде ряда там непригодно. В примере, приведенном в предыдущем абзаце, функция $f = (1-z)^{-1}$ «существует» и аналитична всюду, за исключением точки $z=1$, но степенной ряд $1 + z + z^2 + \dots$ «существует» (т. е. сходится) и представляет f только внутри единичного круга с центром в точке $z=0$.

Другой ряд $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + \dots$ «существует» и представляет

ту же функцию f только внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z = 3$ и т. д.

Степенные ряды (ряды Тейлора, Лорана и другие) подобны как бы кускам клише, с помощью которого можно снять копию функции. Каждый кусок клише воспроизводит f на всем своем протяжении, но не дает непосредственной информации относительно поведения f за его пределами; только если все куски клише сложены вместе и пригнаны один к другому, можно получить полное изображение функции. Такая пригонка отдельных кусков клише с целью описать поведение f целиком называется *аналитическим продолжением*; его мы рассмотрим ниже в этой главе. Если f задана в конечном виде, например как $(1 - z)^{-1}$, то этот процесс может быть интересен, но необходимости в нем нет, так как мы уже знаем «самую функцию». Мы, так сказать, имеем рецепт, по которому можем вычислить любое значение f конечным числом шагов (в нашем примере следует вычесть z из 1 и взять обратную величину полученной разности); бесконечный ряд, каким обычно является ряд Тейлора, дает рецепт вычисления посредством бесконечного числа шагов, и поэтому оно выполнимо только тогда, когда ряд сходится (если каждый последующий шаг вносит, так сказать, все меньшую поправку, то на самом деле для получения удовлетворительной копии бесконечного числа шагов не требуется).

К сожалению, для большинства функций мы не имеем «конечных» алгебраических рецептов, позволяющих вычислять их значения. Даже показательная и тригонометрические функции, например, при подсчете требуют применения бесконечных рядов. При этом обычно дело обстоит так, что мы не располагаем единым слепком «самой функции», а лишь отдельными кусками клише, которые еще должны быть пригнаны друг к другу. Так именно обстоит дело с большинством функций, изучаемых в этой книге.

Для представления функций могут служить также интегралы (см., в частности, § 4.8 и 5.3); такие «клише» часто способны изобразить функцию в гораздо более обширных областях, нежели ряды. Например, некоторые интегральные представления справедливы внутри полосы постоянной ширины, пересекающей всю комплексную плоскость и простирающейся до бесконечности, тогда как степенной ряд сходится внутри некоторого круга, т. е. в ограниченной области в случае конечного радиуса. Однако и интегральные представления справедливы лишь в определенных участках комплексной плоскости, и это следует иметь в виду во избежание ошибок. Выяснение области сходимости интегральных представлений часто является задачей гораздо более тонкой, чем в случае рядов. Ниже мы встретимся с интегральным представлением постоянной; соответствующий интеграл действительно равен этой постоянной в полуплоскости $\text{Im } z < 1$, а при $\text{Im } z \geq 1$ он «разлетается». Если бы нам было известно, что «сама функция» всюду равна постоянной, то это интегральное представление показало бы особенно нелепым представлением постоянной, но трудность этого примера состоит в том, что задан только интеграл, и нам приходится доказывать, что «сама функция» есть постоянная.

Ряд Лорана. Если мы хотим разложить функцию f в ряд в окрестности ее особой точки a , то для этой цели ряд Тейлора, очевидно, непригоден. Однако некоторое разложение, справедливое сколь угодно близко к особой точке a , можно получить. Для этого нужно воспользоваться контуром C , изображенным на рис. 4.7; этот контур, не охватывающий точку a , может быть заменен, как показано, двумя окружностями C_1 и C_2 , охватывающими точку $z = a$ и имеющими соответственно положительное и отри-

пательное направления обхода. Применив интеграл Коши и изменив направление обхода C_2 на положительное, мы получим

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a-h} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a-h} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_0^{\infty} h^n \oint_{C_1} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{h^n} \oint_{C_2} (z-a)^{n-1} f(z) dz \right\}, \end{aligned}$$

то есть

$$f(a+h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad (4.3.4)$$

где в формуле для a_n при $n \geq 0$ взят контур C_1 , а при $n < 0$ — контур C_2 , тот и другой с положительным направлением обхода [хотя, так как подынтегральная функция аналитична в области между C_1 и C_2 , интеграл в (4.3.4) можно во всех случаях брать вдоль C_1].

Мы получили *ряд Лорана*. Рассуждая так же, как в случае ряда Тейлора, можно показать, что полученный ряд сходится внутри некоторого кольца с центром в точке a , внешняя граница которого проходит через ближайшую к a особую точку функции $f(z)$. Так как мы считаем, что внутри C_2 , кроме $z=a$, нет особых точек, то радиус внутренней окружности C_2 можно брать сколь угодно малым. Ряд положительных степеней h сходится всюду внутри внешней границы кольца, тогда как ряд, образованный отрицательными степенями h , сходится всюду вне внутренней границы кольца. Таким образом, пользуясь рядом Лорана, мы расщепляем $f(z)$ на две функции, одна из которых аналитична внутри внешней окружности, а другая — вне внутренней окружности. При помощи интегралов вдоль окружностей, ограничивающих кольцо (или вдоль любых других контуров, в которые в данной конкретной задаче эти контуры могут быть преобразованы, например вдоль прямых, параллельных действительной оси), мы разлагаем ряд для f на две части, суммы которых аналитичны в разных областях комплексной плоскости.

Теперь обратимся к простой физической интерпретации такого разложения. Выше мы заметили, что функция $1/h$ пропорциональна электростатическому полю линейного заряда, помещенного в точке $h=0$. Каков физический смысл функций $1/h^2$, $1/h^3$ и т. д.? Так как $1/h^2$ можно получить из $1/h$ с помощью дифференцирования, то естественно ожидать, что $1/h^2$ изображает поле, порожденное *линейным диполем* (последний реализуется наложением пары противоположно заряженных прямых). Важна ориентация диполя; в настоящем примере он ориентирован *вдоль оси x* . Для доказательства заметим, что поле, порожденное диполем, можно получить при помощи наложения полей линейных зарядов, а именно, поместив в точке $h=0$ линейный положительный заряд q , а в точке $h=\varepsilon$ (ε — действительное положительное число) — линейный заряд $-q$ и перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ так, чтобы произведение $q\varepsilon$ оставалось постоянным и равным моменту диполя p . Соответствующая выкладка

$$-\lim \left(\frac{q}{h} - \frac{q}{h-\varepsilon} \right) = \lim \frac{q\varepsilon}{h(h-\varepsilon)} = \frac{p}{h^2} \quad (p = \varepsilon q)$$

подтверждает нашу догадку. Аналогично $1/h^3$ изображает предельное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) поле, созданное положительным зарядом q в точке $h=0$ и зарядами $-\frac{1}{2}q$ в точках $\pm\varepsilon$, так что суммарный заряд равен нулю. Это — так

называемый *квадруполь*; его можно получить наложением двух ориентированных вдоль оси x диполей рассмотренного выше типа. Вообще функция h^{-n} соответствует *мультиполю* порядка 2^{n-1} с суммарным зарядом, равным нулю.

Рассматривая ту часть ряда Лорана, которая содержит отрицательные степени h и сходится вне меньшей окружности, приходим к выводу, что *заряды, содержащиеся внутри меньшей окружности, порождают поле, которое может быть представлено как линейное наложение полей, порожденных последовательностью мультиполей в точке a* . Подобную же интерпретацию допускает ряд, содержащий положительные степени h : поле, порожденное зарядами, лежащими вне большей окружности, может быть представлено как линейное наложение полей, порожденных мультиполями, находящимися в бесконечно удаленной точке. В § 10.3 это заключение будет распространено на трехмерное пространство.

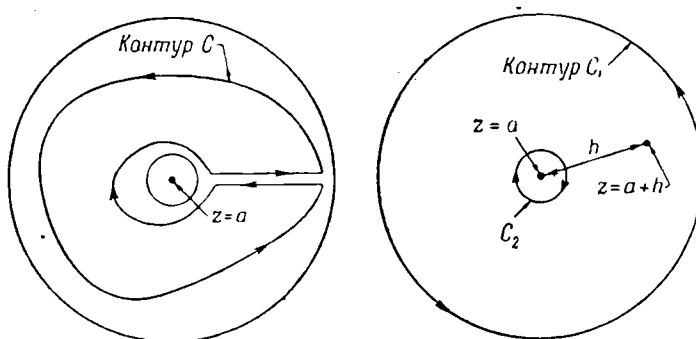


Рис. 4.7. Контуры, употребляемые при выводе ряда Лорана вблизи особенности $z=a$.

Неудивительно, что разложение в ряд Лорана невозможно тогда, когда заряды имеются и внутри рассматриваемой области, так как их действие нельзя свести к действию мультиполей, помещенных в точке $h=0$ и на бесконечности.

Изолированные особые точки. Выводы второй половины последнего пункта приводят к классификации типов изолированных особых точек, которые могут встретиться у аналитической функции. Если функция имеет изолированную особую точку, то эта последняя является центром некоторого круга, в котором других особых точек нет; таким образом, существует круг с выброшенным центром, внутри которого функция, будучи аналитической, допускает разложение в ряд Лорана. Из (4.3.4) следует, что если a — особая точка, то некоторые из коэффициентов a_n с отрицательными номерами n должны быть отличны от нуля. Если неравный нулю коэффициент с наибольшим (по абсолютной величине) отрицательным номером есть a_{-N} , то говорят, что в точке a функция имеет полюс порядка N . Таким образом, полюсы тесно связаны с мультиполями: полюс N -го порядка соответствует мультиполю порядка 2^{N-1} .

Если ряд отрицательных степеней в лорановском разложении функции f бесконечен, то $z=a$ называется существенно особой точкой этой функции. Известным примером служит функция $e^{1/z}$, имеющая существенно особую точку $z=0$; соответствующий ряд Лорана имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n!z^n)$. Если $z=a$ — существенно особая точка для $f(z)$, то она одновременно

является существенно особой точкой функции $1/f(z)$. Действительно, если бы точка $z = a$ не была существенно особой для $1/f$, то она, самое большее, была бы ее полюсом, скажем, порядка N , и тогда мы имели бы $1/f = \sum_{n=-N}^{\infty} b_n h^n$.

Но при этом $f = h^N / \sum_{m=0}^{\infty} b_{m-N} h^m$, и так как функция $1/\sum b_{m-N} h^m$ аналитична внутри C_1 , то разложение f в ряд по степеням h начиналось бы с h^N , что противоречит предположению. Иначе ведет себя $1/f(z)$ вблизи полюса функции $f(z)$: легко видеть, что полюс N -го порядка функции $f(z)$ будет нулем того же порядка функции $1/f(z)$.

На примере функции $e^{1/z}$ можно подметить еще одну важную черту в поведении функции вблизи существенно особой точки. Рассмотрим значения этой функции, когда z по различным путям приближается к началу. Например, если z стремится к нулю, принимая положительные действительные значения, то $e^{1/z}$ стремится к бесконечности, но если z принимает только отрицательные действительные значения, то $e^{1/z}$ при $z \rightarrow 0$ стремится к нулю. Если же z приближается к нулю, оставаясь на мнимой оси, то модуль рассматриваемой функции остается равным единице. Можно доказать (теорема Пикара), что в любой окрестности существенно особой точки функция принимает любое конечное значение, за исключением, быть может, одного. Так, например, функция $e^{1/z}$ нигде не обращается в нуль.

Мы видим, таким образом, что поведение функции вблизи существенно особой точки в высшей степени сложно. Существенно особыми точками обладают многие функции, встречающиеся в математических вопросах теории поля. Поэтому в каждом конкретном случае поведение этих функций вблизи таких точек должно быть тщательно исследовано.

Разложение в ряд Лорана применимо только вблизи изолированных особых точек однозначных аналитических функций. Но существуют особые точки, не являющиеся ни полюсами, ни существенно особыми. Например, функции $\sqrt{z}$ и $\ln z$ не разлагаются в ряды Лорана вблизи точки $z = 0$. Обе они неоднозначны в окрестности точки $z = 0$; если же мы попытаемся выделить однозначную аналитическую ветвь функции $\sqrt{z}$ или $\ln z$, то она непременно окажется разрывной вдоль некоторой линии (хотя бы вдоль отрицательной действительной полуоси), а поэтому $z = 0$ не является для этих ветвей изолированной особой точкой. Такие особые точки (называемые *точками ветвления*) будут рассмотрены ниже в § 4.4. посвященном многозначным функциям.

Классификация функций; теорема Лиувилля. Функции с изолированными особыми точками мы можем теперь классифицировать по расположению и характеру их особых точек. Основную роль при этом будет играть *теорема Лиувилля*, которая гласит, что *функция, аналитическая при всех конечных значениях z и ограниченная во всей плоскости, есть постоянная*. Доказательство следует сразу из оценки для производной, получаемой в свою очередь из формулы

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz.$$

В качестве контура возьмем окружность радиуса R с центром в точке $z = a$, и пусть, согласно предположению, $|f(z)| \leq M$. Тогда

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{2\pi R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

Положив теперь $R \rightarrow \infty$, мы получим, что $f'(a) = 0$, т. е. что функция $f(a)$ постоянна. Из этой теоремы следует, что малейшее отклонение аналитической функции $f(z)$ от постоянной на каком-либо участке комплексной плоскости неизбежно вызывает появление особой точки где-то в другом месте¹⁾. Таким образом, если функция гладко ведет себя на действительной оси и не постоянна, то она имеет особую точку вне действительной оси. Мы вновь замечаем тесную взаимосвязь между значениями аналитической функции на всей комплексной плоскости.

Подобным же приемом можно получить обобщение теоремы Лиувилля: *если функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z и $|f|$ возрастает не быстрее $|z|^k$, когда $z \rightarrow \infty$ (здесь k — целое число), то $f(z)$ представляет собой многочлен степени $\leq k$. В самом деле,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

а значит, если $|f(z)| \simeq A|z|^k$ ($z \rightarrow \infty$), то

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{R^n} \simeq An! R^{k-n},$$

где A — постоянная. Когда $R \rightarrow \infty$, правые части этих неравенств при $n > k$ стремятся к нулю. Следовательно,

$$f^{(n)}(a) = 0 \quad \text{при } n > k,$$

и теорема доказана. (Если $A \neq 0$, то степень многочлена точно равна k .)

Многочлен степени $k > 0$ имеет особую точку на бесконечности²⁾. Функции, аналитические в любой конечной области плоскости z , называются *целыми*. Например, многочлены являются целыми функциями. К тому же классу принадлежат и другие функции, важные для приложений, как-то e^z , $\cos z$, бесселева функция $J_n(z)$ порядка n и др. Ниже мы увидим, что аналитичность этих функций в конечных областях комплексной плоскости и наличие у них существенно особой точки на бесконечности находят свое отражение в геометрических свойствах систем координат, связанных с этими функциями (так, например, цилиндрическая система координат связана с бесселевыми функциями).

Мероморфные функции. Мы рассмотрели функции, всюду аналитические (они постоянны), и функции, аналитические всюду, кроме бесконечно удаленной точки (многочлены относительно z , e^z и др.). Следующий по сложности класс образуют функции, все особые точки которых (включая бесконечно удаленную, если она особая) являются полюсами. Можно показать, что любая такая функция является *рациональной*, т. е. представляет собой отношение двух многочленов.

Для доказательства заметим прежде всего, что каждая такая функция может иметь лишь *конечное* число полюсов. Действительно, если бы полюсов было бесконечно много, то существовала бы неизолированная особая точка (точка накопления полюсов), конечная или бесконечно удаленная, которая, следовательно, не была бы полюсом, что противоречит предположению. Итак, допустим, что $f(z)$ имеет N полюсов, причем n -й полюс находится в точке a_n и порядок его равен i_n . Тогда функция

$$G(z) = f(z) \prod_{n=1}^N (z - a_n)^{i_n}$$

¹⁾ Быть может, на бесконечности. — Прим. ред.

²⁾ Поведение функции на бесконечности исследуется путем подстановки $z = 1/\zeta$ с последующим рассмотрением результата при $\zeta \rightarrow 0$. При этом, например, z^k преобразуется в функцию $(1/\zeta)^k$, для которой $\zeta = 0$ служит полюсом порядка k .

аналитична всюду, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки. Независимо от того, является ли точка $z = \infty$ полюсом функции $f(z)$ или нет, $|G(z)|$ при $z \rightarrow \infty$ растет не быстрее, чем $|z|^k$, где k — некоторое целое положительное число, и, согласно нашей предыдущей теореме, $G(z)$ есть многочлен. Следовательно, $f(z)$ представляет собой отношение двух многочленов G и $\prod_n (z - a_n)^{i_n}$, и теорема доказана.

К тому же выводу приводит рассмотрение электростатической аналогии: поле, порожденное каждым отдельным полюсом, может быть выражено в виде суммы конечного числа функций вида $A(z - a_n)^{-k}$. (Полюс в бесконечно удаленной точке создает поле, изображаемое многочленом от z .) Сложив все такие выражения, мы получим рациональную функцию.

Теперь мы можем обобщить понятие рациональной функции. Допустим, что все особые точки некоторой функции в заданной области комплексной плоскости являются полюсами. Такую функцию мы назовем *мероморфной* в этой области. Функцию, мероморфную во всей плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки, можно разложить на элементарные дроби точно так же, как рациональную функцию. Различие состоит в том, что, поскольку особых точек теперь может быть бесконечно много, мы получаем, вообще говоря, бесконечный ряд элементарных дробей. Выведем это разложение для того случая, когда все полюсы — первого порядка.

Пусть $f(z)$ — заданная функция, a_n — ее полюсы, занумерованные в порядке возрастания их расстояний от начала, и предположим, что $f(z)$ аналитична при $z = 0$. Пусть $f(z) \simeq b_n/(z - a_n)$ при $z \rightarrow a_n$. Рассмотрим какую-либо окружность C_p радиуса R_p , внутри которой находятся p полюсов (предполагаем, что на самой окружности полюсов нет). Тогда функция

$$g_p(z) = f(z) - \sum_{n=1}^p \frac{b_n}{z - a_n} \quad (4.3.5)$$

аналитична внутри C_p . Взяв C_p в качестве контура интегрирования, получим

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g_p(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \sum_1^p b_n \oint \frac{d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a_n)}.$$

Сумма в последнем выражении, как легко видеть, равна нулю и, следовательно,

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Возьмем теперь последовательность окружностей C_p с радиусами $R_p \rightarrow \infty$. Ей будет соответствовать последовательность функций g_p , каждая из которых аналитична во все большей и большей области комплексной плоскости. Остается показать, что предел последовательности функций g_p представляет собой ограниченную функцию, и применить к ней теорему Лиувилля¹⁾. Легко видеть что

$$|g_p(z)| \leq \frac{M_p R_p}{R_p - R},$$

где M_p — наибольшее значение $|f|$ на C_p и $R = |z|$.

¹⁾ Ни существование предела последовательности g_p , ни то, что этот предел представляет собой аналитическую функцию, в приведенном здесь доказательстве не установлено. — *Прим. перев.*

Может случиться, что M_p остается ограниченным при возрастании p . При этом $\lim_{p \rightarrow \infty} |g_p(z)|$ ограничен, и, согласно теореме Лиувилля, функция $g = \lim_{p \rightarrow \infty} g_p$ есть постоянная. Итак, в этом случае

$$f(z) = \text{постоянная} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z - a_n}.$$

Для того чтобы отыскать эту постоянную, положим $z=0$; мы вправе это сделать, поскольку в точке $z=0$ функция $f(z)$ аналитична. Тогда

$$f(z) = f(0) + \sum_1^{\infty} \left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n} \right). \quad (4.3.6)$$

В том случае, когда $f(z)$ не ограничена на окружностях C_p при $p \rightarrow \infty$, иногда можно все же получить аналогичное выражение. Так, например, часто удается подобрать такую степень z , скажем z^n , что отношение $f(z)/z^n$ ограничено на рассматриваемых окружностях при $p \rightarrow \infty$; при этом $f(z)$ выражается в виде произведения ряда (4.3.6) на z^n .

Как уже указывалось, разложение (4.3.6) имеет простой электростатический смысл. Оно является также распространенной формой представления адмитанса динамической системы (см. стр. 287). В качестве таковой оно показывает, как система, имеющая много нормальных видов движения (например, струна), реагирует на воздействие возмущающей силы. Знаменатели $z - a_n$ в (4.3.6) соответствуют встречающимся резонансным знаменателям, постоянные b_n — влиянию пространственного распределения возмущающей силы на n -е нормальное колебание. В гл. 11 мы увидим приложение этих фактов к исследованию движения полей.

Рассмотрим пример применения формулы (4.3.6) к разложению функции в ряд частичных дробей. Возьмем функцию $f(z) = \operatorname{tg} z$. Полюсами ее служат точки $a_n = \pi(2n+1)/2$. Из соотношений

$$\operatorname{tg} \left[(z - a_n) + \frac{1}{2} (2n+1) \pi \right] = \operatorname{tg} \left(z - a_n + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} (z - a_n) \simeq -\frac{1}{z - a_n} \quad (z \rightarrow a_n)$$

мы обнаруживаем, что $b_n = -1$. Выберем последовательность окружностей с радиусами $p\pi$ (p — целое). На таких окружностях $\operatorname{tg} z$ ограничен для всех значений p и, согласно доказанной теореме,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= - \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - (2n+1) \pi/2} + \frac{1}{(2n+1) \pi/2} \right) = \\ &= - \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{z - (2n+1) \pi/2} + \frac{1}{(2n+1) \pi/2} \right) - \\ &\quad - \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{z + (2n+1) \pi/2} - \frac{1}{(2n+1) \pi/2} \right), \\ \operatorname{tg} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{[(2n+1) \pi/2]^2 - z^2}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Так как логарифмическая производная $f'(z)/f(z)$ целой функции $f(z)$ есть функция мероморфная, то с помощью формулы (4.3.6) можно представить целую функцию $f(z)$ в виде бесконечного произведения. В самом деле, в конечной части плоскости особыми точками, а именно полюсами функции $f'(z)/f(z)$ являются только нули a_n функции $f(z)$. Снова предположим для простоты, что все эти полюсы простые, т. е. что $f(z) \underset{z \rightarrow a_n}{\simeq} \text{const} \cdot (z - a_n)$; при этом

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{d}{dz} \ln f(z),$$

откуда

$$\ln f(z) = \ln f(0) + \frac{f'(0)}{f(0)} z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} \right]$$

и

$$f(z) = f(0) e^{zf'(0)/f(0)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n}. \quad (4.3.8)$$

Для того чтобы эта формула была применима, требуется, чтобы $f(z)$ была целой функцией, чтобы ее логарифмическая производная имела простые полюсы, отличные от 0, чтобы эта производная была ограничена на некоторой последовательности окружностей C_p и т. д.

Разложим в бесконечное произведение функцию $\sin z$; этим разложением мы часто будем пользоваться в дальнейшем. Так как $\sin z$ не удовлетворяет одному из требуемых условий, а именно обращается в нуль в точке $z = 0$, то мы рассмотрим функцию $\sin z/z$. Последняя имеет логарифмическую производную $(z \operatorname{ctg} z - 1)/z$, удовлетворяющую всем необходимым требованиям. Итак, $a_n = n\pi$, где $n \neq 0$, и

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi} \right) e^{z/n\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{n\pi} \right)^2 \right]. \quad (4.3.9)$$

Подобные разложения можно получить и для других тригонометрических функций, а также для бесселевых функций $J_n(z)$.

Поведение степенного ряда на границе круга сходимости. В многих задачах нерационально (или невозможно) получать в замкнутом виде решение, являющееся аналитической функцией, и приходится довольствоваться представлением этого решения в виде степенного ряда. Последний имеет обычно конечный радиус сходимости, который можно найти, если известно выражение коэффициента общего члена или по каким-либо иным данным. Конечно, степенной ряд не полностью эквивалентен решению; внутри своего круга сходимости этот ряд совпадает с искомым решением, но вне этого круга понадобится новый ряд, сходящийся в некоторой другой области, и т. д. Как уже говорилось выше, дело обстоит так, как будто искомое решение приходится изображать с помощью клише, состоящего из разрозненных кусков, причем кусками являются как раз ряды, изображающие решение на отдельных участках плоскости и ничего не изображающие за пределами этих участков. А для того, чтобы отдельные куски клише могли быть хорошо пригнаны один к другому, мы

должны выяснить соотношение между решением и изображающим его степенным рядом на границе круга сходимости последнего.

Заранее очевидно, что исследование поведения степенного ряда на границе круга сходимости представляет собой чрезвычайно деликатную задачу, требующую для своего решения привлечения весьма тонких свойств аналитических функций. К счастью, формулировки соответствующих теорем достаточно понятны, и в этой книге нам нужны окончательные результаты, а не математические детали доказательств. Поэтому мы опустим большинство выводов и сосредоточим свое внимание на выяснении содержания указанных теорем. Доказательства читатель найдет в учебниках, перечисленных в конце главы.

Итак, предположим, что решение некоторой задачи представлено степенным рядом вида

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \quad (4.3.10)$$

Прежде всего нужно отыскать *радиус сходимости* R этого ряда. Если коэффициент a_n общего члена известен, то, как вытекает из *признака сходимости Даламбера*,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (4.3.11)$$

(если только этот предел, конечный или бесконечный, существует). Предположим, что радиус сходимости конечен. Тогда, произведя изменение масштаба $\zeta = zR$, мы получим новый ряд

$$f(z) = \sum b_n z^n \quad (b_n = a_n R^n), \quad (4.3.12)$$

имеющий радиус сходимости, равный единице. Такая нормировка рассматриваемого ряда оказывается полезной.

Делать заключения о поведении $f(z)$ в заданной точке z единичной окружности, основываясь на поведении коэффициентов b_n при больших n , можно лишь с большой осторожностью. Так, если ряд (4.3.12) сходится или расходится в некоторой точке $z = e^{i\varphi}$, то отсюда не следует, что в этой точке $f(z)$ аналитична или неаналитична. Например, ряд $\sum (-z)^n$, представляющий при $|z| < 1$ функцию $1/(1+z)$, расходится в точке $z = 1$, хотя в этой точке $1/(1+z)$ аналитична. С другой стороны, точка $z = 1$ — особая для функции

$$-\int_0^z \ln(1-w) dw = 1 + (1-z) [\ln(1-z) - 1]$$

(хотя эта функция конечна при $z = 1$), но соответствующий ряд $\sum z^{n+1}/n(n+1)$ в точке $z = 1$ сходится. Существуют ряды, у которых $b_n \rightarrow 0$, расходящиеся во всех точках единичной окружности, и такие, которые сходятся в точке $z = 1$, а в остальных точках единичной окружности расходятся. Предостереги таким образом читателя от поспешных заключений, посмотрим, что можно сказать об аналитических функциях и соответствующих рядах на границе кругов сходимости этих последних.

Сначала мы рассмотрим признаки, по которым можно судить, является ли заданная на границе круга сходимости точка особой или нет. Произведем преобразование поворота так, чтобы рассматриваемая точка заняла положение $z = 1$. Для решения поставленного вопроса полезны следующие две теоремы. Первая утверждает, что если ряды $f(z) = \sum b_n z^n$ и $g(z) =$

$= \sum \operatorname{Re} b_n \cdot z^n$ имеют радиусы сходимости, равные 1, и если $\operatorname{Re} b_n \geq 0$, то $z=1$ является особой точкой функции $f(z)$. Другими словами, если аргумент точки z на границе круга сходимости таков, что в этой точке все члены ряда имеют неотрицательные действительные части, то такая точка особая для $f(z)$.

Так, применяя эту теорему к упомянутой выше функции $f = \sum z^{n+1}/n(n+1)$, обнаруживаем, что $z=1$ является особой точкой функции f , несмотря на то, что ряд, изображающий эту функцию, сходится при $z=1$. В точке $z=1$ естественно ожидать осложнений, так как все коэффициенты положительны и ряд, изображающий производную функции f , расходится.

Заметим, что если, согласно указанному признаку, $z=1$ является особой точкой, то точки $z=e^{i\varphi}$, где φ мало, но отлично от нуля, могут не быть особыми; действительно, положив $z=Ze^{i\varphi}$, найдем, что $f(z) = \sum B_n Z^n$, где $B_n = b_n e^{in\varphi}$, и действительная часть коэффициента B_n получит множитель $\cos n\varphi$.

Более сильный признак дается следующей теоремой: Если $C_n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} b_m$, то для того, чтобы точка $z=1$ была особой для функции $\sum b_n z^n$, необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$ величина $|C_n|^{-1/n}$ не становилась меньше $1/2^1$. Например, для ряда $\sum (-z)^n$, где $b_n = (-1)^n$, точка $z=1$ не является особой. Для ряда $\sum z^n$, с другой стороны, $C_n = 2^n$ и $\lim |2^n|^{-1/n} = 1/2$, так что $z=1$ — особая точка. Более драматичен пример $f = \sum (n+1)(n+2)(-z)^n$ [этот ряд изображает функцию $2/(1+z)^3$], в котором $b_n = (-1)^n(n+1)(n+2)$ и, следовательно, ряд заведомо расходится при $z=1$, но $C_n = 0$ для номеров $n > 2$, так что f аналитична в точке $z=1$.

Найдя радиус сходимости и выяснив расположение особых точек на границе круга сходимости, полезно было бы получить общее представление о поведении $f(z)$ на всей границе, в частности на ее части, заполненной особыми точками. Здесь полезна следующая теорема: Если $f(z) = \sum b_n z^n$ и $g(z) = \sum C_n z^n$, где $\operatorname{Re} b_n \geq 0$, $\operatorname{Re} C_n \geq 0$, $\operatorname{Im} b_n \geq 0$, $\operatorname{Im} C_n \geq 0$, и если $b_n \simeq DC_n$ при $n \rightarrow \infty$ (D — постоянная), то $f(z) \simeq Dg(z)$ при $|z| \rightarrow 1$.

Следует заметить, что условие $\operatorname{Re} b_n \geq 0$, $\operatorname{Re} C_n \geq 0$ можно немного ослабить, потребовав, чтобы $\operatorname{Re} b_n$ и $\operatorname{Re} C_n$ при достаточно больших n не меняли знака; то же относится и к $\operatorname{Im} b_n$, $\operatorname{Im} C_n$.

Попросту говоря, эта теорема утверждает, что если n -е члены степенных рядов, изображающих функции f и g , одинаково ведут себя при больших n , то обе функции имеют одни и те же особые точки. С помощью этой теоремы удастся получить некоторые сведения об асимптотическом поведении коэффициента b_n . Например, мы можем утверждать, что если $b_n \simeq Dn^{p-1}/(p-1)!$ ($n \rightarrow \infty$), то $f(z) \simeq D/(1-z)^p$ при $|z| \rightarrow 1$. Для доказательства²⁾ достаточно установить, что коэффициент C_n разложения $\sum C_n z^n = (1-z)^{-p}$ асимптотически совпадает с $n^{p-1}/(p-1)!$. Но последнее

¹⁾ Точная формулировка этого условия такова: $z=1$ является особой точкой тогда и только тогда, когда нижний предел последовательности $\{|G_n|^{-1/n}\}$ равен $1/2$. — Прим. перев.

²⁾ Наше доказательство относится лишь к случаю целого $p > 0$. Его можно обобщить и на нецелые p , заменив факториалы соответствующими значениями гамма-функции (последняя рассматривается ниже в этой главе).

утверждение вытекает из равенства

$$(1-z)^{-p} = \sum \frac{(n+1) \dots (n+p-1)}{(p-1)!} z^n.$$

В качестве второго примера рассмотрим гипергеометрическую функцию. Эта функция, которую мы подробно изучим в гл. 5, определяется формулой

$$F(a, b | c | z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Известно, что точка $z=1$ является для нее особой. Общий член ряда имеет коэффициент

$$b_n = \frac{a(a+1) \dots (a+n-1) b(b+1) \dots (b+n-1)}{n! c(c+1) \dots (c+n-1)}.$$

Взяв целые a, b, c и предполагая, что $a+b > c \geq b > 0$, получим

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(c-1)!}{(b-1)!(a-1)!} \frac{(a+n-1)!(b+n-1)!}{n!(c+n-1)!} = \\ &= \frac{(c-1)!}{(b-1)!(a-1)!} \frac{(n+1) \dots (a+n-1)}{(b+n) \dots (c+n-1)} \simeq \frac{(c-1)!}{(b-1)!(a-1)!} n^{a+b-c-1}, \end{aligned}$$

откуда можно заключить, что при $c < a+b$

$$F(a, b | c | z) \simeq \frac{(c-1)!(a+b-c-1)!}{(b-1)!(c-1)!} \frac{1}{(1-z)^{a+b-c}} \quad (z \rightarrow 1).$$

Выше мы привели пример ряда $f = \sum z^{n+1}/n(n+1)$, сходящегося в точке $z=1$, которая является особой для f , хотя f при $z=1$ конечна. Спрашивается, равна ли сумма ряда $s = \sum 1/n(n+1)$ значению f в точке $z=1$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, принадлежащая Литтльвуду: *Если $f(z) \rightarrow s$, когда $z \rightarrow 1$ вдоль некоторой гладкой кривой, и числа $n|a_n|$ ограничены, то $\sum a_n$ сходится к s .* В нашем примере

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \{1 + (1-z)[\ln(1-z) - 1]\} = 1;$$

в этом можно убедиться, непосредственно рассмотрев сам ряд.

Из приведенных здесь теорем ясно, что, зная разложение функции в степенной ряд, можно получить довольно полное представление о поведении функции на границе круга сходимости представляющего ее ряда. Можно ли использовать этот ряд для выяснения поведения функции вне круга сходимости? Этому вопросу посвящен следующий пункт; ответ при некоторых достаточно слабых ограничениях оказывается утвердительным.

Аналитическое продолжение. Часто случается, что некоторая функция появляется в таком представлении, которое имеет смысл лишь в ограниченных участках комплексной плоскости. Так, например, мы уже не раз подчеркивали, что степенной ряд с конечным радиусом сходимости непосредственно не дает сведений о поведении изображаемой им функции вне круга сходимости. Часто встречается другой случай, когда функция представляется интегралом, сходящимся не при всех значениях ее аргу-

мента. Например, интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$$

представляет функцию $1/z$ лишь при $\operatorname{Re} z > 0$. Однако иногда удается, сравнив ряд или интеграл с каким-либо другим представлением функции, определить функцию за пределами той области, в которой действует первоначально заданное представление. Так, например, исходя из ряда $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$, сходящегося при $|z| < 1$, можно найти значения $f(z)$ в круге $|z| < 1$ и отождествить f с $1/(1-z)$, причем последнее выражение определено и при $|z| > 1$.

Такого рода действия (а также их результат) называются *аналитическим продолжением* функции. Получающаяся в результате последовательного продолжения функция оказывается (в большинстве случаев) определенной на всей комплексной плоскости независимо от того, где она была первоначально определена. Но бывает и так, что функцию невозможно продолжить за пределы некоторой конечной области. При этом граница такой области называется *естественной границей* функции, а сама область — *естественной областью существования* функции.

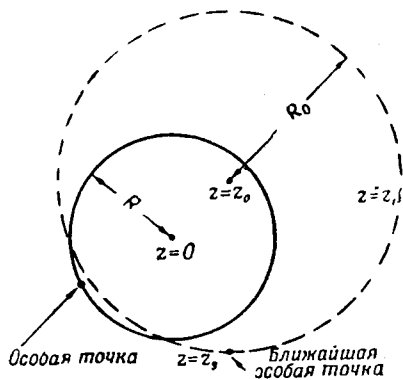


Рис. 4.8. Аналитическое продолжение посредством степенных рядов (сначала $\sum a_n z^n$, затем $\sum b_n (z-z_0)^n$ и т. д.).

Производные в некоторой точке $z = z_0$, составим ряд Тейлора

$$f = \sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (4.3.13)$$

Его радиус сходимости R_0 равен расстоянию от z_0 до ближайшей особой точки $z = z_s$ (которая не обязательно лежит на окружности $|z| = R$). Соответствующий круг сходимости радиуса R_0 изображен прерывистой линией на рис. 4.8. Этот процесс можно продолжить, взяв в качестве исходной новую точку, например $z = z_1$, не обязательно лежащую в первоначальном круге, и построив новый ряд, подобный (4.3.13). Продолжая действовать таким образом, мы с помощью последовательности рядов с перекрывающимися областями сходимости получим значения f во всей комплексной плоскости, за исключением, разумеется, особых точек.

Это построение заведомо осуществимо, если на границе круга сходимости имеется только одна особая точка z_s . Если же особые точки располагаются всюду плотно на окружности или на какой-либо другой замкнутой кривой, то продолжить функцию за эту кривую невозможно. Так обстоит дело с функциями, имеющими естественную границу.

У читателя естественно возникает вопрос о единственности продолжения. В самом деле, если функция продолжена, как только что описано, из одного участка плоскости в другой вдоль двух различных путей, то будут ли ее значения и значения ее производных, полученные в конечном участке, одинаковы в обоих случаях? Читатель спросит далее, получится ли один и тот же результат, если применять различные приемы аналитического продолжения? Сейчас мы попытаемся ответить на эти вопросы.

Основные теоремы. Наиболее полезная теорема, служащая для решения этих вопросов, состоит в том, что если функция аналитична в некоторой области и равна нулю вдоль какой-либо дуги непрерывной кривой, лежащей в этой области, то эта функция тождественно равна нулю в рассматриваемой области. В самом деле, если условия этой теоремы выполнены, то в любой точке рассматриваемой кривой можно вычислить все производные функции f , и все они оказываются равными нулю. Все члены соответствующего ряда Тейлора будут равны нулю, и в его круге сходимости f будет тождественно равна нулю. Возьмем теперь какую-либо дугу внутри круга сходимости, образуем новый ряд Тейлора и продолжим это построение, оставаясь все время внутри области аналитичности. Таким образом, наше заключение о том, что $f \equiv 0$, оказывается верным в любой точке этой области.

Эта замечательная теорема еще раз показывает глубокую взаимосвязь между поведением аналитической функции в различных частях комплексной плоскости. Например, из нее вытекает, что если две аналитические функции совпадают на какой-нибудь дуге кривой (сколь угодно малой, но не сводящейся к единственной точке), то они совпадают в их общей области аналитичности.

Теперь мы можем доказать основную теорему единственности аналитического продолжения. Если функции f_1 и f_2 соответственно в областях D_1 и D_2 получены аналитическим продолжением функции f , заданной первоначально в области D , и если область D_3 , общая часть областей D_1 и D_2 , перекрывается с D , то $f_1 = f_2$ в области D_3 (см. рис. 4.9). Эта теорема дает утвердительный ответ на первый из поставленных выше вопросов, по крайней мере (как это видно из формулировки теоремы) при некоторых дополнительных ограничениях. Она немедленно вытекает из предыдущей теоремы, так как функция $f_1 - f_2$, будучи аналитической в области D_3 и равной нулю в той ее части, которая заключена в D , тождественно равна нулю в D_3 . Таким образом, в точках области D_3 мы получим одни и те же значения f_1 и f_2 , каким бы путем мы ни продолжали функцию f .

Однако это доказательство существенно основывается на том, что область D_3 перекрывается с областью D . В противном случае теорема единственности может нарушаться. Иначе говоря, если функция f продолжена из точки z_0 в точку z_1 вдоль двух различных путей и в результате в точке z_1 получены два различных значения функции, то между обоими путями содержится особая точка функции $f(z)$.

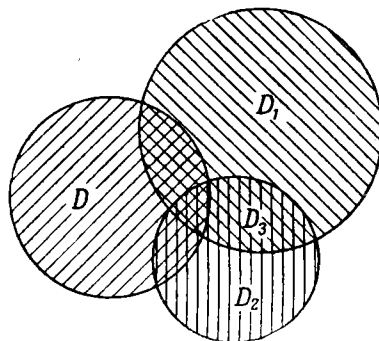


Рис. 4.9. Независимость аналитического продолжения от пути. Если пересечение D_3 областей D_1 и D_2 пересекается с D , то между этими тремя областями нет особых точек и $f_1 = f_2 = f_3$.

Последняя теорема очевидным образом следует из того факта, что круг сходимости степенного ряда простирается до ближайшей особой точки функции, изображаемой этим рядом. Если бы между двумя выбранными путями не было особых точек функции $f(z)$, то, осуществляя продолжение посредством степенных рядов, мы заполнили бы всю эту область их кругами сходимости и получили бы перекрытия, требуемые теоремой единственности. Значения $f(z_1)$ при том и другом продолжении были бы равны, что противоречит нашему предположению. Следовательно, в условиях теоремы где-то между двумя путями, вдоль которых продолжается функция, есть особая точка.

Точки ветвления. Заметим, что последняя теорема не утверждает, что при наличии особой точки между двумя путями продолжения непрерывно получаются различные значения функции. Такое расхождение обуславливается лишь особыми точками определенного типа! Рассмотрению таких случаев мы посвятим несколько пунктов. Ясно, что, желая учесть те случаи, когда различные пути продолжения приводят к различным значениям $f(z)$ в точке z_1 , мы должны как-то обобщить понятие аналитической функции, чтобы охватить все такие значения. Мы условимся теперь понимать под аналитической функцией не только функцию в том виде, как она задана первоначально в некоторой области, но и все ее аналитические продолжения, независимо от однозначности или неоднозначности результатов. Если всевозможные аналитические продолжения приводят в любой точке z к одному и тому же значению $f(z)$, то полученная функция f называется *однозначной*, в противном случае — *многозначной*. В силу предыдущей теоремы многозначные функции имеют особые точки, обладающие тем свойством, что аналитическое продолжение по различным путям, охватывающим эти особые точки, приводит к неоднозначным результатам.

Такие особые точки называются *точками ветвления*, а различные совокупности значений, полученных посредством аналитического продолжения, — *ветвями* аналитической функции. Более детальное определение *точек ветвления* и *примеры*, поясняющие это понятие, будут даны в следующем параграфе, целиком посвященном многозначным функциям. Здесь достаточно будет сказать, что *многозначные функции* естественно возникают при рассмотрении аналитического продолжения и что всевозможные значения функции в заданной точке могут быть получены посредством аналитического продолжения вдоль путей, обвивающих точки ветвления должное число раз.

Приемы аналитического продолжения. Обратимся теперь ко второму вопросу, относящемуся к единственности: будут ли результаты аналитического продолжения функции зависеть от того, каким приемом это продолжение осуществлено? *Отрицательный* ответ на этот вопрос вытекает непосредственно из основной теоремы, приведенной на стр. 369. Любые два метода дадут, разумеется, тождественные значения в исходной области задания функции. Одинаковые значения, в силу приведенной выше теоремы, получатся поэтому в любой области, перекрывающейся с исходной. Повторяя это рассуждение на каждом этапе продолжения, мы докажем наше утверждение.

Эти три теоремы единственности являются основными в теории аналитического продолжения. Однако с точки зрения приложений наиболее важной была бы теорема, позволяющая решить, является ли функция f_2 аналитическим продолжением функции f_1 . Использовать мы будем обычно не метод степенных рядов, но любой метод, естественный для той или иной

конкретной задачи. Любой прием опирается на следующую теорему: Если f_1 и f_2 — аналитические функции соответственно в областях D_1 и D_2 и если они совпадают на общей части этих областей, то функции f_1 и f_2 представляют собой аналитические продолжения одна другой.

Справедливость этой теоремы обусловлена тем, что в силу аналитичности f_1 и f_2 аналитическое продолжение с общей части областей D_1 и D_2 на их неперекрывающиеся участки можно осуществить, начиная с одного и того же степенного ряда. Фактически области D_1 и D_2 , о которых идет речь в теореме, могут пересекаться лишь по некоторой линии, служащей их общей границей. Покажем, что если f_1 аналитична в D_1 ,

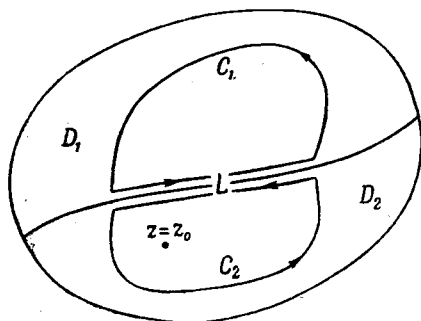


Рис. 4.10. Продолжение контурного интеграла, охватывающего точку $z = z_0$.

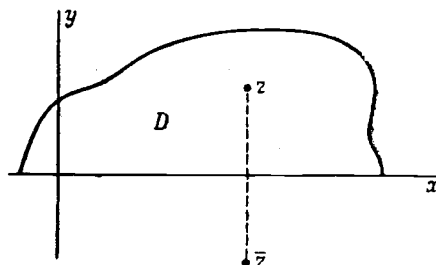


Рис. 4.11. Аналитическое продолжение посредством отражения относительно действительной оси.

а f_2 аналитична в D_2 и если f_1 и f_2 совпадают и непрерывны на общей границе C областей D_1 и D_2 , то f_2 является аналитическим продолжением функции f_1 в область D_2 , а f_1 — аналитическим продолжением f_2 в область D_1 .

Для доказательства мы установим, что функция f , равная f_1 в D_1 и f_2 в D_2 , аналитична во всей области $D_1 + D_2$ (см. рис. 4.10), а из этого уже будет следовать, что f_2 служит продолжением функции f_1 . Возьмем какую-либо точку z_0 в D_2 . В силу свойств интеграла Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2 + L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1 + L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Сложив эти равенства, получим

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1 + C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

так как интегралы вдоль L в силу совпадения f_1 и f_2 на L взаимно уничтожаются. $C_1 + C_2$ представляет собой замкнутый контур. Воспользовавшись приемом, которым были получены формулы (4.3.1), можно вычислить производные функции f в точке z_0 . Так как эти производные существуют, функция f аналитична в точке z_0 . В силу непрерывности функции f , последняя формула остается справедливой также тогда, когда z_0 находится на L , и теорема доказана.

Продолжим описание методов аналитического продолжения. Мы ознакомимся с методами двух типов: методы первого типа основаны на функ-

циональных соотношениях, которым подчиняется продолжаемая функция; методы второго типа — на непосредственных преобразованиях степенных рядов. Рассмотрим два метода первого типа. Первый из них вытекает из принципа отражения Шварца и основывается на функциональном соотношении $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Если функция $f(z)$ аналитична в области D , которую пересекает действительная ось, и $f(z)$ на действительной оси принимает действительные значения, то сопряженным значениям z соответствуют сопряженные значения $f(z)$. Иначе говоря, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ (см. рис. 4.11). Для доказательства разложим $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности какой-либо точки a действительной оси. В силу того, что значения $f(z)$ действительны на действительной оси, все коэффициенты этого ряда Тейлора также действительны. Итак, $f(z) = \sum a_n (z - a)^n$ с действительными a_n . Отсюда $\overline{f(z)} = \sum a_n \overline{(z - a)^n} = \sum a_n (\bar{z} - a)^n = f(\bar{z})$, и теорема доказана. Правда, она доказана лишь для точек, лежащих внутри круга сходимости выбранного ряда, но при помощи аналитического продолжения ее можно распространить на любые неособые точки, сопряженные каким-либо точкам области D . Таким образом, образование функции, сопряженной к f , непосредственно продолжает аналитическую функцию из области, примыкающей к действительной оси сверху, в область, лежащую по другую сторону действительной оси. Этот метод можно обобщить на тот случай, когда вместо действительной оси берется любая прямая линия. Но формулировать это обобщение не стоит, так как всегда можно повернуть упомянутую прямую так, чтобы она совпала с действительной осью, и после этого применить уже доказанную теорему.

Второй метод основывается на явных функциональных соотношениях, таких, как теоремы сложения или рекуррентные соотношения. Простым примером может служить формула сложения $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$, которой, очевидно, подчиняется показательная функция. Если бы f была задана лишь в некоторой ограниченной области, то, складывая координаты всевозможных точек этой области и применяя указанную формулу сложения, мы смогли бы определить f вне исходной области. Менее тривиальный пример встречается в теории гамма-функции. Гамма-функция часто определяется как интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (4.3.14)$$

который сходится только при $\operatorname{Re} z > 0$, так что $\Gamma(z)$ оказывается определенной лишь в правой полуплоскости. Из (4.3.14), интегрируя по частям, получаем соотношение, связывающее значения $\Gamma(z)$ и $\Gamma(z+1)$,

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1). \quad (4.3.15)$$

С помощью соотношения (4.3.15) функцию $\Gamma(z)$ можно продолжить на полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$. Действительно, $\Gamma(z)$ задана в области $x > 0$ (см. рис. 4.12); зададим $\Gamma(z)$ посредством равенства (4.3.15) в полосе $-1/2 < x < 1/2$. Вновь полученная и заданная первоначально аналитические функции оказываются определенными в перекрывающихся областях, а следовательно, первая служит аналитическим продолжением второй в области, где $x < 0$.

Теперь рассмотрим методы непосредственного преобразования степенных рядов. Метод продолжения с помощью степенных рядов, при всей его важности в теоретическом отношении, практически весьма громоздок, поэтому прибегать к нему в конкретных задачах следует лишь в крайнем случае. Если не удастся воспользоваться какими-либо функциональными

соотношениями, можно обратиться к методу Эйлера. Этот метод состоит в том, что ряд по степеням z (расходящийся при $z = -1$) преобразуется в ряд по степеням переменной

$$\zeta = \frac{z}{1+z} \quad (4.3.16)$$

При этом, если первоначальный ряд при $z = 1$ расходиллся или сходиллся медленно, то новый ряд в соответствующей точке $\zeta = 1/2$ может оказаться достаточно быстро сходящимся. Поскольку оба ряда имеют одинаковую сумму в области их общей сходимости, ряд по степеням ζ является аналитическим продолжением ряда по степеням z .

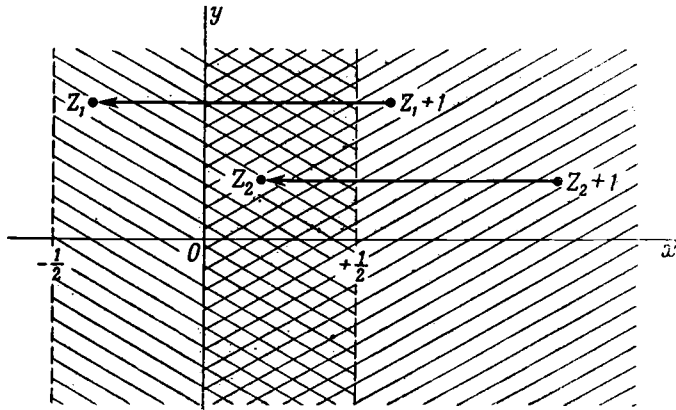


Рис. 4.12. Аналитическое продолжение гамма-функции с помощью рекуррентного соотношения (4.3.15).

Рассмотрим это преобразование, приводящее к степенному ряду относительно ζ . Преобразование Эйлера удобнее всего применять к знакопеременным рядам вида

$$f(z) = \sum (-1)^n a_n z^n. \quad (4.3.17)$$

Ограничиваясь значениями z , лежащими внутри круга сходимости этого ряда, умножим обе части равенства на $1+z$; перегруппировав члены справа, получим

$$(1+z)f(z) = a_0 + z \sum (a_n - a_{n+1}) (-1)^n z^n.$$

Здесь полезно воспользоваться обозначениями, которые мы будем снова применять при изучении исчисления конечных разностей. Положим

$$\delta a_n = a_n - a_{n+1}. \quad (4.3.18)$$

Повторяя эту операцию, получим

$$\delta(\delta a_n) = \delta^2 a_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}$$

и, вообще,

$$\delta^{(q)} a_n = \sum_{p=0}^q (-1)^p \binom{q}{p} a_{n+p}, \quad (4.3.19)$$

где $\binom{q}{p} = \frac{q!}{p!(q-p)!}$ — биномиальные коэффициенты, так что $(1+x)^q =$

$= \sum_p \binom{q}{p} x^p$. Воспользовавшись этими обозначениями, можно написать

$$f(z) = \frac{a_0}{1+z} + \zeta \sum_{n=0}^{\infty} (\delta a_n) (-1)^n z^n. \quad (4.3.20)$$

Применяя к коэффициенту при ζ в (4.3.20) тот же прием, каким было получено само это выражение, получаем

$$f(z) = \frac{a_0}{1+z} + \frac{\zeta \delta a_0}{1+z} + \zeta^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\delta^2 a_n) (-1)^n z^n.$$

Продолжая это преобразование, приходим к формуле

$$f(z) = \frac{1}{1+z} (a_0 + \zeta \delta a_0 + \zeta^2 \delta^2 a_0 + \dots). \quad (4.3.21)$$

Продemonстрируем силу этого преобразования на каких-нибудь простых примерах. Первым рассмотрим ряд

$$\ln(1+z) = z \left(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \dots \right). \quad (4.3.22)$$

Этот ряд имеет радиус сходимости, равный 1, и при z , близких к 1, сходится чрезвычайно медленно. Вычислим коэффициенты $\delta^{(m)} a_0$:

n	a_n	δa_n	$\delta^2 a_n$	$\delta^3 a_n$	...
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	...
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	.	...
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	.	.	...
.	.	.	.	.	...

Преобразованный ряд имеет вид

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1+z} \left[1 + \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{3}\zeta^2 + \dots \right]; \quad (4.3.23)$$

это равенство нетрудно проверить непосредственно. Ряд в (4.3.23) сходится при $|\zeta| < 1$, т. е. при $(x^2 + y^2)/[(1+x)^2 + y^2] < 1$, последнее же неравенство, коль скоро $x > -1/2$, выполняется при любом y . Таким образом, мы получили аналитическое продолжение функции в полуплоскость $x > -1/2$.

Далее рассмотрим пример, обсуждавшийся выше на стр. 366, в котором $a_n = n(n+1)$. Из таблицы

n	a_n	δa_n	$\delta^2 a_n$	$\delta^3 a_n$	...
0	0	-2	2	0	...
1	2	-4	2	0	...
2	6	-6	2	0	...
3	12	-8	2	0	...
...	...	...	...	...	...

мы заключаем, что все разности порядков > 2 равны нулю, а поэтому преобразованный ряд обрывается и

$$f(z) = \frac{1}{1+z} [-2\zeta + 2\zeta^2] = -\frac{2z}{(1+z)^3}.$$

Заметим, что исходный ряд расходился при $z=1$. В этом примере преобразование Эйлера дает выражение $f(z)$ в замкнутой форме, и, следовательно, $f(z)$ оказывается продолженной на всю комплексную плоскость.

Преобразование Эйлера допускает различные обобщения. Быть может, наиболее важное из них устанавливает соотношение между функциями

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{и} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n b_n z^n. \quad (4.3.24)$$

Функция g считается заданной, и мы попытаемся связать между собой f и g , основываясь на выражении коэффициентов b_n через производные функции $g(z)$. Записав f в виде

$$f = C_0 g(z) + \sum_1^{\infty} b_n (C_n - C_0) z^n,$$

мы исключим b_0 . Коэффициент b_1 можно исключить, заметив, что $g' = \sum_1^{\infty} n b_n z^{n-1}$. Тогда

$$f = C_0 g + (C_1 - C_0) z g' + \sum_2^{\infty} b_n [(C_n - C_0) - n(C_1 - C_0)] z^n.$$

Продолжая эти преобразования, окончательно получаем

$$f = C_0 g - (\delta C_0) z g' + \frac{(\delta^2 C_0) z^2}{2!} g'' - \dots \quad (4.3.25)$$

Полученное преобразование сводится к преобразованию Эйлера (4.3.21) в том случае, когда $g = 1/(1+z)$. Важное обобщение формулы (4.3.21) получается при $g = 1/(1+z)^p$. Формула (4.3.25) принимает в этом случае вид

$$f = \frac{1}{(1+z)^p} \left(C_0 + p(\delta C_0) \zeta + \frac{p(p+1)}{2!} (\delta^2 C_0) \zeta^2 + \dots \right), \quad (4.3.26)$$

где

$$f = C_0 - C_1 p z + \frac{C_2 p(p+1) z^2}{2!} + \dots, \quad \zeta = \frac{z}{1+z}.$$

Формулы (4.3.25) и (4.3.26) применимы во многих важных случаях.

Заметим, что формула (4.3.25) представляет $f(z)$ в замкнутой форме всякий раз, когда ряд в правой части обрывается, а это имеет место, если C_n являются многочленами относительно n . Значительного упрощения можно достигнуть также тогда, когда g удовлетворяет какому-либо дифференциальному уравнению, с помощью которого все ее производные могут быть выражены через конечное число младших производных. В качестве иллюстрации возьмем $g = \cos z = \sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ [т. е. положим $b_{2n} = (-1)^n/(2n)!$, $b_{2n+1} = 0$] и $C_n = n^2$. Тогда $f = \sum_n (-1)^n \frac{(2n)^2}{(2n)!} z^{2n}$ и, согласно формуле (4.3.25),

$$f = -z \sin z - z^2 \cos z,$$

в чем нетрудно убедиться непосредственно.

Рассмотрим более сложный пример, применив формулу (4.3.26) к гипергеометрической функции от $-z$

$$f = 1 - \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} - \dots \quad (4.3.27)$$

Пусть p в формуле (4.3.26) равно a . Тогда, положив $C_0 = 1$, $C_1 = b/c$, $C_2 = b(b+1)/c(c+1)$ и т. д., мы получим из (4.3.26)

$$f = \frac{1}{(1+z)^a} \left[1 + \frac{a(c-b)}{c} \zeta + \frac{a(a+1)(c-b)(c-b+1)}{c(c+1)} \frac{\zeta^2}{2!} + \dots \right]. \quad (4.3.28)$$

Выражение в квадратных скобках есть некоторая другая гипергеометрическая функция от $z/(1+z)$. Кругом сходимости полученного ряда является $|\zeta| < 1$, и ему в плоскости z соответствует область $x > -1/2$. Таким образом, формула (4.3.28) в отличие от (4.3.27) позволяет вычислять значения заданной гипергеометрической функции вне круга $|z| \leq 1$.

Существенное обобщение метода Эйлера принадлежит Барнесу; здесь сумма заменяется интегралом в комплексной плоскости от функции, полюсы которой подбираются так, чтобы интегральная формула Коши приводила к требуемому ряду. В этом методе используются свойства гамма-функции, и потому мы отложим его изложение до § 4.6.

4.4. Многозначные функции

Вопросы теории функций комплексного переменного, рассмотренные до сих пор, почти полностью относились к однозначным функциям, которые, по определению, заданы при каждом данном z однозначно. Теперь, переходя к изучению многозначных функций, мы должны заново рассмотреть многие теоремы (прежде всего теорему Коши и интеграл Коши). Важно отметить, что большинство функций из тех, которые встретятся нам в этой книге, либо сами многозначны, либо имеют многозначные обратные функции.

Полезно сначала наметить основные понятия, рассмотрев типичный пример

$$f(z) = z^{1/2}. \quad (4.4.1)$$

Положим $z = re^{i\varphi}$ и $f(z) = Re^{i\theta}$, тогда

$$R = r^{1/2}, \quad \theta = \frac{1}{2} \varphi. \quad (4.4.2)$$

Эта функция многозначна. В самом деле, положение точки z на плоскости можно задать координатами r, φ и, в то же время, координатами $r, \varphi + 2\pi$, и соответственно этому мы получаем два значения функции $f(z)$:

$$f_1 = r^{1/2} e^{i\varphi/2}, \quad f_2 = r^{1/2} e^{i(\varphi+2\pi)/2} = -r^{1/2} e^{i\varphi/2}. \quad (4.4.3)$$

Причина полученной здесь многозначности лежит в том хорошо известном факте, что квадратный корень из положительного числа может быть взят со знаком $+$ или $-$. Если вместо $1/2$ взять показатель $1/4$, то для любого $z \neq 0$ мы получим четыре различных значения функции:

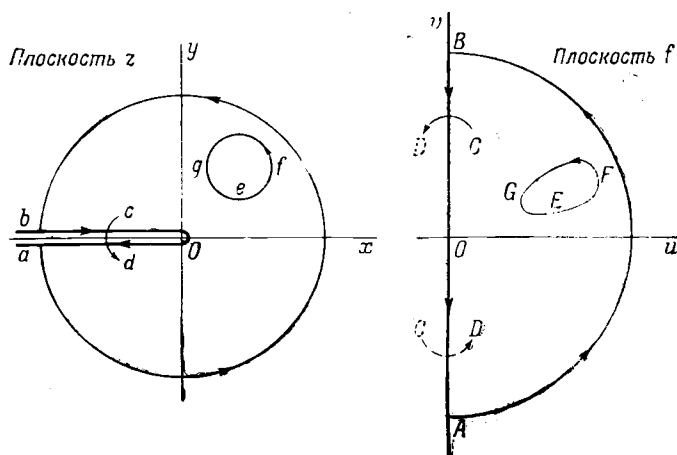
$$\begin{aligned} (z^{1/4})_1 &= r^{1/4} e^{i\varphi/4}, & (z^{1/4})_2 &= e^{i\pi/2} (r^{1/4} e^{i\varphi/4}) = e^{i\pi/2} (z^{1/4})_1, \\ (z^{1/4})_3 &= e^{i\pi} (z^{1/4})_1, & (z^{1/4})_4 &= e^{3i\pi/2} (z^{1/4})_1. \end{aligned}$$

Если же z возводится в степень π (или в какую-либо другую иррациональную степень), то получается бесконечное множество значений, отли-

чающихся своими аргументами, причем эти аргументы можно выбрать как угодно близко к любому наперед заданному числу. Поэтому, имея дело со степенной функцией $f = z^a$, мы обладаем значительной свободой в выборе $\arg f$ в заданной точке, если он не задан.

Многозначность влечет за собой появление разрывов. Так, например, в точке $z = -r$ функция $z^{1/2}$ принимает значения $ir^{1/2}$ или $-ir^{1/2}$ в зависимости от того, представлено ли $-r$ в виде $re^{\pi i}$ или в виде $re^{-\pi i}$. Эти разрывы могут соответствовать реальной физической картине, когда на полуоси $\varphi = \pm \pi$ помещена преграда; математический аппарат в задачах такого рода всегда использует многозначные функции.

Точки ветвления и линии ветвления. Разрывы, о которых сейчас шла речь, могут быть легко обнаружены геометрически, если обратиться к конформному отображению, реализуемому функцией $f = z^{1/2}$. На рис. 4.13

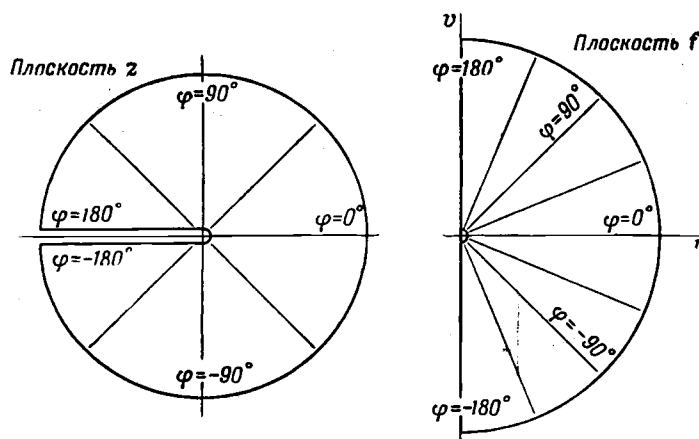


Фиг. 4.13. Конформное отображение $f = \sqrt{z}$ (указана линия ветвления этой многозначной функции aOb в плоскости z).

окружность, соединяющая точки a и b , отображается в полуокружность с концами A и B в плоскости переменного $f = u + iv$. Наличие разрыва очевидно, так как точки A и B , являющиеся соответственно образами точек a и b , не совпадают. Так как радиус окружности в плоскости z может быть выбран произвольно, то мы видим, что *всей* плоскости z ставится в соответствие *полуплоскость* $u > 0$ плоскости f . Остальные точки плоскости f появятся лишь при *вторичном* обходе окружности в плоскости z от точки a до точки b ; иначе говоря, точки f , у которых $u < 0$, будут соответствовать тем точкам z , аргументы которых заключены между π и 3π . Снова мы видим, что каждому $z \neq 0$ соответствуют два различных значения f . Но теперь мы замечаем, что эти значения функции f могут быть разбиты на два *самостоятельных* множества, одно из которых появляется при первом обходе окружности от a до b , когда φ , аргумент переменного z , изменяется от $-\pi$ до π , а второе — при втором обходе, когда φ изменяется от π до 3π . Третий обход, соответствующий значениям $3\pi < \varphi < 5\pi$, приводит к тем же значениям f , какие получились при $-\pi < \varphi < \pi$. Описанные здесь два независимых множества значений $z^{1/2}$ называются *ветвями* этой функции. Линия $\varphi = \pi$, вдоль которой эти ветви терпят разрыв, называется *линией ветвления*. На рисунках линии ветвления мы будем изображать двойной жирной линией.

Необходимость такого выделения линий ветвления объясняется тем, что, пересекая в плоскости z линию ветвления, хотя бы вдоль дуги cd (см. рис. 4.13), мы переходим с одной ветви функции $z^{1/2}$ на другую. Образами cd на плоскости f служат дуги CD , причем сплошной линией изображена та дуга, для которой точка C принадлежит ветви $z^{1/2}$ с положительной действительной частью. Если взять C на другой ветви, то получится дуга CD , изображенная пунктиром. В обоих случаях, когда z пересекает линию ветвления, соответствующая точка f переходит с одной ветви функции на другую.

К тому же выводу можно прийти, опираясь на теоремы об аналитическом продолжении. Рассмотрим, например, окружность efg на рис. 4.13. Если продолжить $z^{1/2}$ вдоль efg , то мы придем к прежнему значению этой функции, поскольку при этом особая точка функции лежит вне efg . Наглядно это проявляется в том, что образом окружности efg будет замкнутый контур EFG . С другой стороны, если $z^{1/2}$ продолжить вдоль



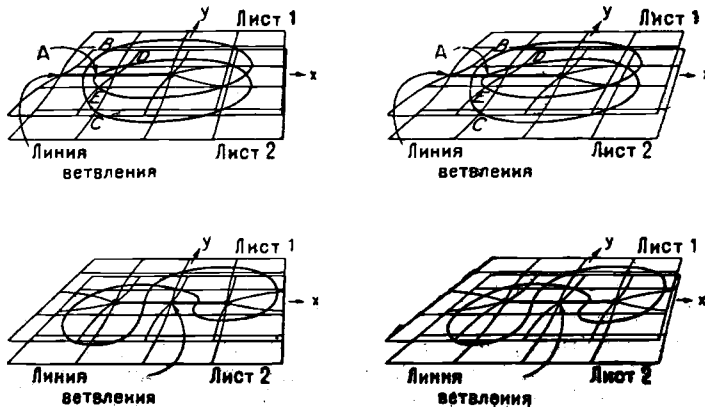
Ф и г. 4.14. Преобразование $f = \sqrt{z}$ (в точке $z = 0$ нарушается конформность).

окружности ab , то, как мы видели, мы придем к значению $z^{1/2}$ в точке b , отличному от значения в ее исходной точке a . Из изложенной выше теории аналитического продолжения следует, что внутри этой окружности должна находиться особая точка. Таковой является точка $z = 0$, так как радиус окружности можно было взять произвольным; в этом можно убедиться и непосредственным изучением функции $z^{1/2}$ вблизи $z = 0$. Такого рода особая точка называется *точкой ветвления* (см. стр. 370).

Отметим еще некоторые свойства точек ветвления. Обычно значение $f(z)$ в точке ветвления принадлежит одновременно всем ветвям функции $f(z)$. Чаще всего, хотя и не всегда, только точки ветвления являются общими для всех ветвей функции. Далее, в точке ветвления отображение, определяемое функцией $f(z)$, не конформно. Это можно обнаружить на рис. 4.14, где при отображении функцией $z^{1/2}$ углы между образами радиусов, выходящих из точки $z = 0$, вдвое меньше углов между самими радиусами. Для функции $z^{1/\alpha}$ соответствующие углы уменьшаются в α раз. Важно, наконец, заметить, что точки ветвления встречаются *парами* и что *линии ветвления соединяют точки ветвления*. Так, функция $z^{1/2}$ имеет еще точку ветвления $z = \infty$. В этом можно убедиться, сделав подстановку $z = 1/\zeta$; при этом $z^{1/2} = \zeta^{-1/2}$, а функция $\zeta^{-1/2}$ имеет точку ветвления $\zeta = 0$, которой соответствует точка $z = \infty$.

Линия ветвления, которую мы рассматривали, соединяет точку ветвления $z=0$ с точкой ветвления $z=\infty$ вдоль отрицательной действительной полуоси. Но линией ветвления могла бы служить с таким же успехом *любая линия*, соединяющая точки ветвления 0 и ∞ . Например, в качестве промежутков изменения аргумента, определяющих первую и вторую ветви функции $z^{1/2}$, можно было бы взять соответственно $0 < \varphi < 2\pi$ и $2\pi < \varphi < 4\pi$. В плоскости f им соответствовали бы области $v > 0$ и $v < 0$, и линией ветвления оказалась бы положительная действительная полуось. Ветви, выделенные таким образом, совершенно равноценны ранее определенным ветвям. Вообще, мы можем выбирать в данной конкретной задаче линии ветвления так, как нам удобно.

Римановы поверхности. Представление о том, что в случае функции $z^{1/2}$ областям $-\pi < \varphi < \pi$ и $\pi < \varphi < 3\pi$ плоскости z соответствуют различные области плоскости f , сопряжено с некоторыми геометрическими неудобствами, так как каждая из областей $-\pi < \varphi < \pi$, $\pi < \varphi < 3\pi$ полностью покрывает плоскость z (за исключением линии ветвления). Для того чтобы восстановить однозначность и непрерывность и тем самым



Фиг. 4.15. Склеивание листов римановых поверхностей функций $f = \sqrt{z}$ и $f = \sqrt{z^2 - 1}$ вдоль линий ветвления.

сделать применимыми теоремы, изложенные в предыдущих параграфах, необходимо приписать самостоятельное геометрическое существование обеим указанным областям плоскости z . Это может быть осуществлено с помощью понятия *римановой поверхности*. Представим себе вместо плоскости z , существующей в одном экземпляре, целый набор плоскостей (называемых *листами*), расположенных одна над другой. Каждая из них ставится в соответствие определенной ветви функции. Таким образом, для функции $z^{1/2}$, имеющей две ветви, понадобятся два листа, причем точки каждого из них будут взаимно однозначно соответствовать точкам определенной полуплоскости плоскости f . Пусть на листе 1 нанесена область $-\pi < \varphi < \pi$, а на листе 2 — область $\pi < \varphi < 3\pi$. Оба листа должны быть как-то соединены друг с другом, потому что, как мы помним, пересекая линию ветвления, мы переходим с одной ветви функции на другую.

Обратимся к рис. 4.15. Оба листа, 1 и 2, разрезаются вдоль линии ветвления (поэтому сами линии ветвления часто называются *разрезами*), и оба края разреза на листе 1 склеиваются с соответственно противоположными краями разреза на листе 2. Рассмотрим изображенный на рис. 4.15 замкнутый контур $AEB CDA$. Дуга AEB этого контура принадлежит листу 1, но, пересекая разрез на листе 1, мы попадаем на лист 2 в точку C .

Дуга CD целиком принадлежит листу 2; двигаясь по этой дуге дальше, мы пересекаем разрез на листе 2 и снова попадаем через точку A на лист 1, в точку E . Ясно, что следует разуметь под замкнутым контуром, когда рассматривается такая поверхность, склеенная из нескольких листов: в нашем примере $AEB CDA$ — замкнутый контур, а контур AEB — незамкнутый. Теперь возможно применять теорему Коши и интеграл Коши. Этим мы займемся в следующем параграфе, а сейчас продолжим изучение поведения многозначных функций.

В качестве более сложного примера рассмотрим функцию

$$f = \sqrt{z^2 - 1}.$$

Точками ветвления для нее являются $z = \pm 1$; $z = \infty$ не будет точкой ветвления, так как, положив $z = 1/\zeta$, получаем $f = \sqrt{(1/\zeta^2) - 1} = \sqrt{1 - \zeta^2}/\zeta \approx 1/\zeta$ ($\zeta \rightarrow 0$), и, значит, бесконечно удаленная точка является простым полюсом функции f . Точки $z = -1$ и $z = 1$ соединим линией ветвления. Ее можно направить по отрезку оси x , соединяющему эти точки, как указано на рис. 4.15, но

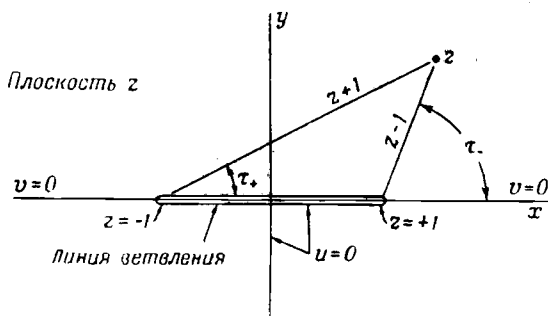


Рис. 4.16. Линия ветвления функции $f = \sqrt{z^2 - 1}$.

можно было бы в качестве линии ветвления взять отрезок оси x , содержащий бесконечно удаленную точку (состоящий из точек этой оси от $x = -1$ до $x = -\infty$ и от $x = \infty$ до $x = 1$);

есть, конечно, и множество других возможностей.

В точках действительной оси, где $|x| > 1$, значения $\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ действительны, поэтому участок $|x| > 1$ действительной оси соответствует точкам $\text{Im } f = v = 0$. При действительных x , для которых $|x| < 1$, $\arg f$ может быть равен $\pi/2$ или $-\pi/2$. От этой неопределенности можно избавиться, фиксируя линии ветвления множителей $\sqrt{z+1}$ и $\sqrt{z-1}$. Тот или иной выбор их определит положение линии ветвления произведения. Для того чтобы получить линию ветвления, изображенную на рис. 4.15, мы возьмем для $\sqrt{z+1}$ и $\sqrt{z-1}$ линии ветвления, идущие вдоль оси x соответственно от -1 до $-\infty$ и от 1 до $-\infty$. Аргумент произведения $f = u + iv = \sqrt{z^2 - 1}$ будет равен $(\tau_+ + \tau_-)/2$, где $\tau_+ = \arg(z+1)$, а $\tau_- = \arg(z-1)$ (см. рис. 4.16). Возьмем какую-либо точку, лежащую между -1 и $+1$ непосредственно над действительной осью. В такой точке $\tau_+ = 0$ и $\tau_- = \pi$, а следовательно, f будет иметь аргумент $\pi/2$. В соответствующей точке непосредственно под осью x имеем $\tau_+ = 0$, $\tau_- = -\pi$ и $\arg f = -\pi/2$. Таким образом, над линией $y = 0$ (в плоскости z) $v > 0$, а под ней $v < 0$, что еще раз демонстрирует разрыв, имеющийся на линии ветвления. Теперь обратимся к оси y . На ней, в тех точках, где $y > 0$, имеем $\tau_+ + \tau_- = \pi$, $\arg f = \pi/2$ и, следовательно, $u = 0$. На отрицательной полуоси y имеем равенство $\arg f = -\pi/2$.

Располагая этими сведениями, мы попытаемся наметить линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в плоскости z (см. рис. 4.17). Эти линии должны быть взаимно-ортогональны всюду, за исключением точек ветвления, в которых отображение плоскости z на плоскость f не конформно. (Так, в точках $z = \pm 1$ линии $u = 0$ и $v = 0$ служат продолжениями одна другой. В точке $z = 0$ конформность также нарушается, так как в этой точке

$df/dz=0$.) Для больших z (т. е. при $|z| \gg 1$) $f \simeq z$, поэтому линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ должны асимптотически совпадать соответственно с линиями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. На рис. 4.17 показана линия $u=0$, состоящая из оси y и отрезка оси x от $x=-1$ до $x=+1$.

Между точками $z=-1$ и $z=0$ функция v изменяется от 0 до 1 над осью x и от 0 до -1 под осью x . Таким образом, линии $v=C \neq 0$ при $|C| < 1$ подходят к оси x между точками $x=-1$ и $x=1$, образуя с ней прямые углы. При $|C| > 1$ линии $v=C$ пересекают ось y под прямым углом. Сказанное позволяет наметить линии $v = \text{const}$. Линии $u = \text{const}$ можно построить, воспользовавшись свойством ортогональности. Выясним теперь, где u положительно и где отрицательно. Для этого найдем $\arg f$

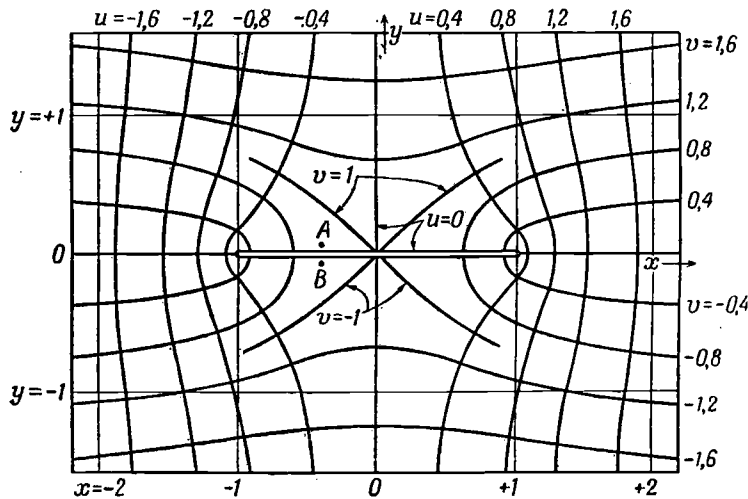


Рис. 4.17. Конформное отображение $f = \sqrt{z^2 - 1}$ (в плоскости z нанесены линии $\text{Re } f = u = \text{const}$ и $\text{Im } f = v = \text{const}$).

на оси x при $x < -1$. В точках z , лежащих непосредственно над осью x , левее точки $x = -1$, $\tau_+ = \tau_- = \pi$, и поэтому здесь $\arg f = \pi$. Подобным же образом мы обнаружим, что $\arg f = -\pi$ непосредственно под осью x , т. е. f имеет по существу тот же аргумент. Отсюда видно, что $u < 0$ в полуплоскости $x < 0$; легко видеть, что в правой полуплоскости u положительно.

На рис. 4.17 нанесены линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, соответствующие первому листу римановой поверхности функции $\sqrt{z^2 - 1}$ (ср. рис. 4.15). Линии $v = C$ при $C > 0$ продолжают в нижней полуплоскости второго листа, а при $C < 0$ — в верхней полуплоскости. При переходе с одного листа на другой области $v < 0$ и $v > 0$ меняются местами, а в остальном рис. 4.17 годился бы и для второго листа. Действительно, на листе 2 τ_+ или τ_- на 2π отличаются от соответствующего угла на листе 1, и, рассуждая так же, как на стр. 380, мы обнаружим, что f в точках A и B на втором листе имеет аргумент, равный соответственно $-\pi/2$ и $\pi/2$. При этом надо взять первый лист функции $\sqrt{z+1}$ и второй лист функции $\sqrt{z-1}$ или наоборот; если взять в обоих случаях вторые листы, то мы получим то же, что и в разобранный выше случае, когда для обоих множителей были взяты первые листы. Отсюда мы видим, что для двух ветвей функции $\sqrt{z^2 - 1}$ требуются только два листа. Листы 1 и 2 склеиваются

таким образом, что нижний край разреза от -1 до 1 на одном листе склеивается с верхним краем разреза на другом листе.

Наконец, поучительно указать физические поля, описываемые функцией $\sqrt{z^2 - 1}$, для того чтобы показать, какой барьер в физической задаче соответствует разрезу в плоскости z . Так, например, $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ могут изображать соответственно эквипотенциальные и силовые линии однородного электростатического поля, направленного вдоль оси x , в которое помещен проводник, имеющий форму бесконечной пластины, сечение которого изображено на рис. 4.18, а. В гидродинамике $u = \text{const}$ могут изображать линии тока, возникающие при обтекании контура

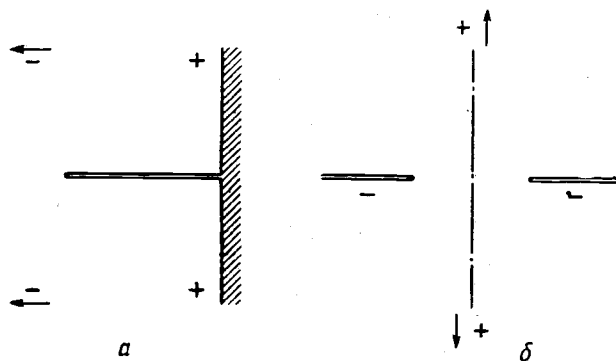


Рис. 4.18. Расположение граничных поверхностей в задачах, в которых применимо отображение $f = \sqrt{z^2 - 1}$.

такой же формы потоком жидкости. В то же время $u = \text{const}$ являются силовыми линиями, а $v = \text{const}$ — эквипотенциальными линиями поля, созданного пластинами, изображенными на рис. 4.18, б, если предположить, что они заряжены отрицательно относительно отдаленных участков оси y ($|y| \gg 1$).

Пример. В качестве последнего примера рассмотрим многозначную функцию f переменного z , определяемую уравнением

$$z = \frac{1}{f} \operatorname{th} f \quad (4.4.4)$$

(см. рис. 4.19). Функция (4.4.4) встречается при решении волнового уравнения (см. гл. 11). Она имеет простые полюсы в точках $f = [(2n + 1)/2] \pi i$ (n — целое число). Точками ветвления функции f служат нули производной от z . В каждой такой точке — обозначим ее a — отображение, определенное уравнением (4.4.4), не конформно. Объясняется это тем, что (см. стр. 341) разность $z - a$ имеет нуль порядка > 1 в точке $f(a)$, так что $f - f(a)$ в окрестности точки $z = a$ выражается дробной степенью разности $z - a$. Значения f в точках ветвления отыскиваются из уравнения $\operatorname{sech}^2 f / f - \operatorname{th} f / f^2 = 0$, т. е. из уравнения

$$2f = \operatorname{sh} 2f. \quad (4.4.5)$$

Решение уравнения (4.4.5) и соответствующие значения $z = a_n$ (помимо $a_0 = 1$) приведены в нижеследующей таблице.

Точки ветвления	$f = u + iv$		$z = re^{i\varphi}$	
	u	v	r	φ
a_1	1,3843	3,7488	0,23955	63,00°
a_2	1,6761	6,9500	0,13760	72,54°
a_3	1,8584	10,1193	0,09635	76,85°
a_4	1,9916	13,2773	0,07407	79,36°

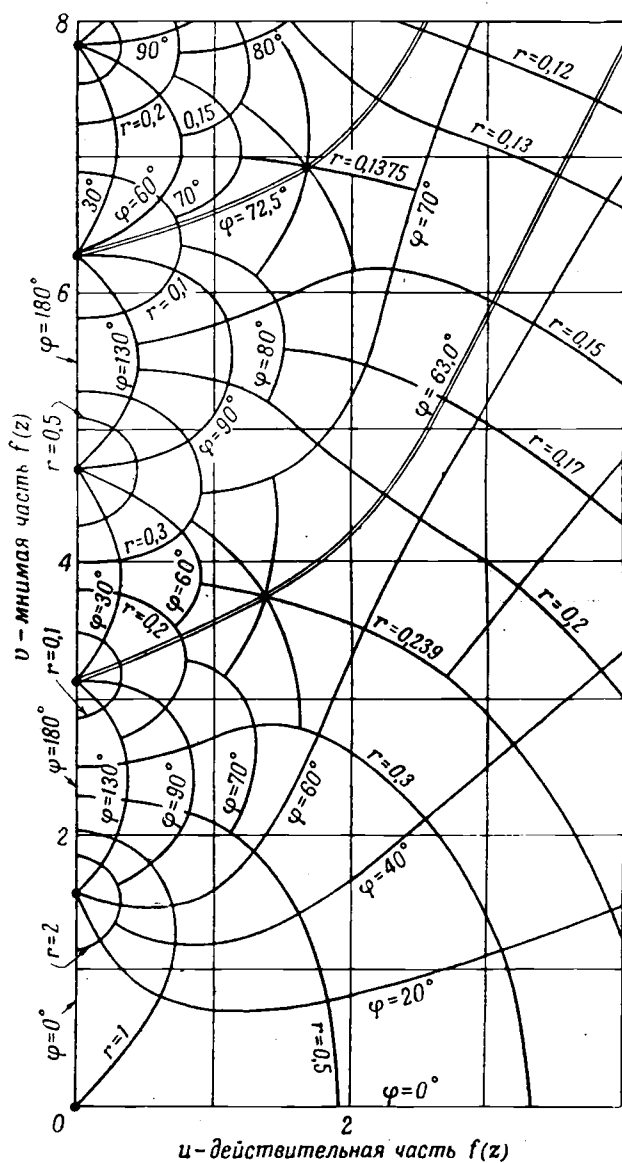


Рис. 4.19. Конформное отображение $(1/f)$ th $f = z = re^{i\varphi}$.
В плоскости f нанесены линии $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ и отмечены
первые три точки ветвления.

При больших v точки ветвления $a_n = u + iv$ ($n \gg 1$) асимптотически выражаются в виде $u \simeq [\ln(4n+1)\pi]/2$, $v \simeq (n+1/4)\pi$, в чем можно убедиться посредством подстановки в уравнение (4.4.5). Мы имеем, таким

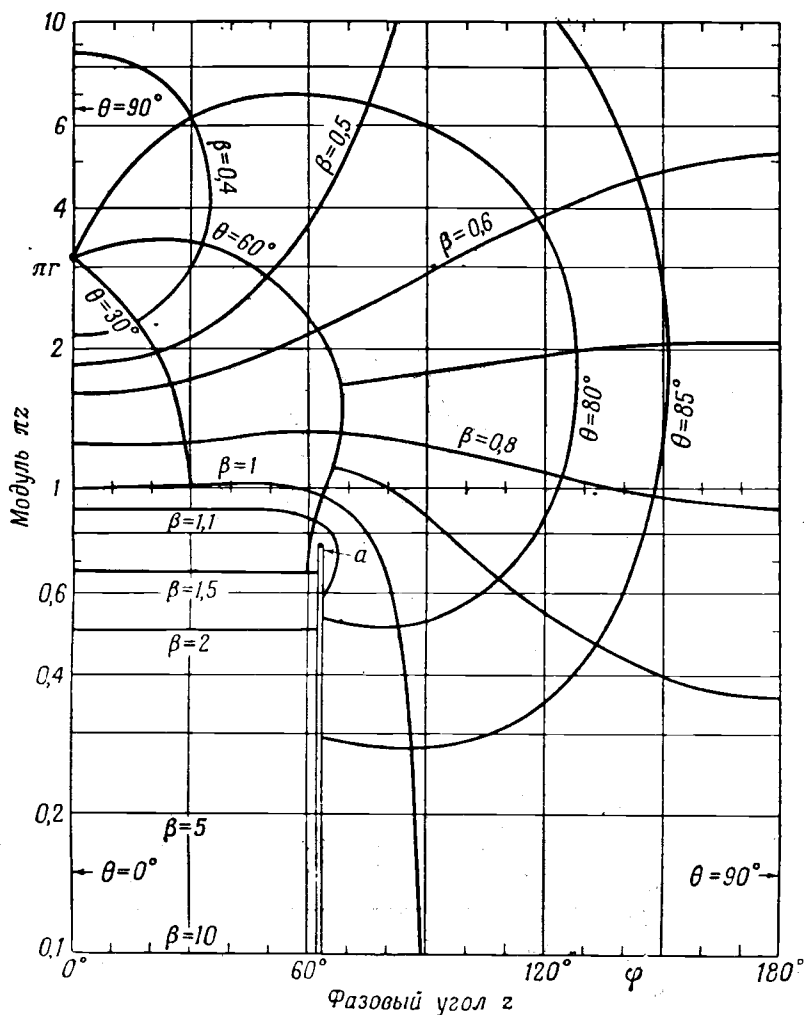


Рис. 4.20. Конформное отображение первого листа римановой поверхности функции $f(w)$, где $(1/f) \operatorname{th} f = z = e^w$ ($f = \pi z e^{i\theta}$). В плоскости w нанесены линии $\beta = \text{const}$, $\theta = \text{const}$; a — одна из точек ветвления.

образом, бесконечное множество точек ветвления и соответственно бесконечное множество листов римановой поверхности. Следует отметить, впрочем, одно упрощающее обстоятельство: в любой точке ветвления a функция f ведет себя как $(z - a)^{1/2}$, так как $z''(f(a)) \neq 0$. Поэтому все точки ветвления имеют такой же характер, как точка $z = 0$ для функции $z^{1/2}$, уже нами исследованной. Поэтому мы сразу можем сказать, что в точке $z = a$ смыкаются лишь два листа римановой поверхности. Имея в виду эти подробности, мы можем с помощью рис. 4.20 и 4.21 наглядно представить отображение (4.4.4). Для удобства изображения плоскости z мы ввели еще преобразование

$$z = re^{i\varphi} = e^w, \quad \operatorname{Im} w = \varphi, \quad \operatorname{Re} w = \ln r \quad (4.4.6)$$

и аналогично для f :

$$f = u + iv = \pi\beta e^{i\theta} = e^F, \quad \operatorname{Im} F = \theta, \quad \operatorname{Re} F = \ln \pi\beta.$$

В качестве линии ветвления, выходящей из точки a , мы взяли линию $\varphi = 63^\circ$. Еще раз отметим очевидный разрыв F на этой линии. Разумеется, линии $\theta = \text{const}$, пересекая линию ветвления $\varphi = 63^\circ$, переходят на второй

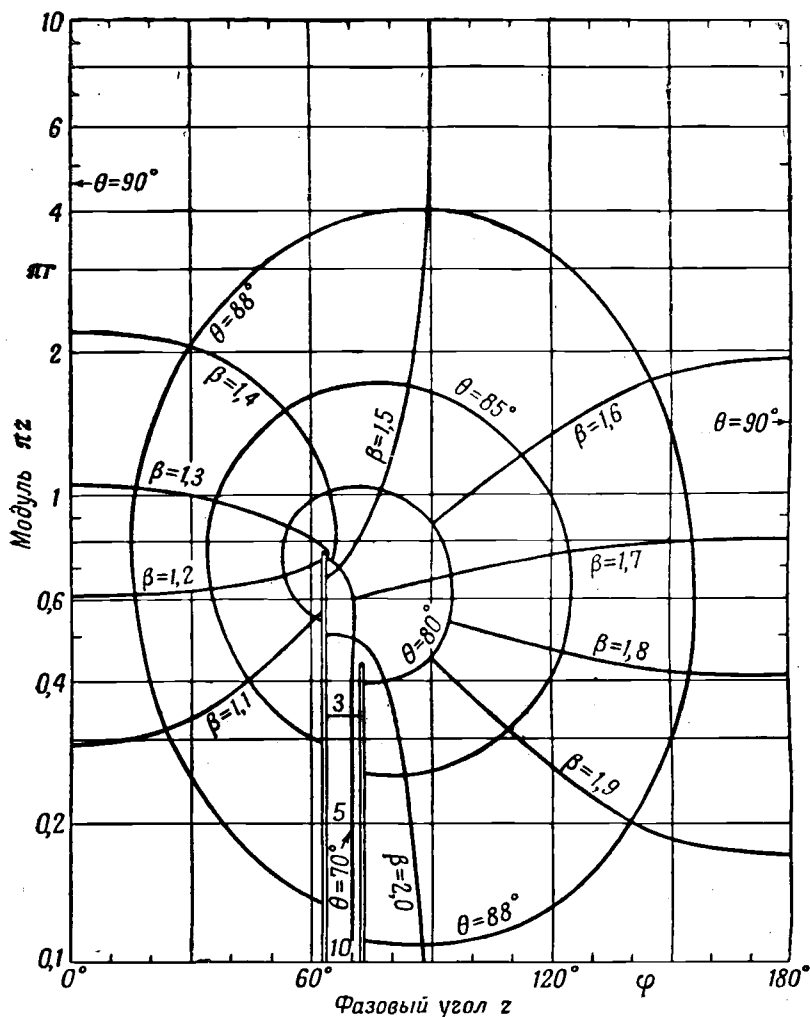


Рис. 4.21. Конформное отображение второго листа римановой поверхности функции $f(w)$, где $(1/f) \operatorname{th} f = z = e^w$ ($f = \pi\beta e^{i\theta}$).

лист римановой поверхности, изображенный на рис. 4.21. На этом последнем рисунке, помимо $\varphi = 63^\circ$, изображена также линия ветвления $\varphi = 72,54^\circ$, вдоль которой склеиваются второй и третий листы римановой поверхности. Таким образом, любой лист склеивается со следующим, и в одной точке могут склеиваться лишь два листа римановой поверхности. На рис. 4.19 изображен ряд линий $\varphi = \text{const}$ и $r = \text{const}$ на плоскости f , причем отдельные участки этой плоскости соответствуют различным ветвям функции. В задачах к этой главе мы еще вернемся к дальнейшим подробностям, связанным с этими рисунками.

4.5. Теория вычетов. Гамма-функция и эллиптические функции

В предыдущих параграфах мы использовали интеграл Коши как средство обнаружения различных свойств аналитических функций. В этом параграфе мы займемся более земными вещами. Так, например, формулу Коши можно применить к вычислению интегралов. С примерами такого рода мы встретились на стр. 353 и 354, но в действительности область применения интеграла Коши гораздо шире. Им можно пользоваться для получения интегральных представлений функций, имеющих разрывы, или таких, производные которых разрывны, а также для суммирования рядов.

Рассмотрим сначала задачу о вычислении интегралов. При этом мы воспользуемся методами так называемой *теории вычетов*. *Вычет* определяется следующим образом. Если a — изолированная особая точка функции $f(z)$, то в окрестности этой точки $f(z)$ разлагается в ряд Лорана $\sum a_n(z-a)^n$ [см. (4.3.4)]; коэффициент a_{-1} есть *вычет* функции $f(z)$ в точке $z=a$. Сформулируем теперь основную теорему теории вычетов.

Если функция $f(z)$ аналитична всюду в области, ограниченной контуром C , за исключением конечного числа особых точек, лежащих внутри C , то значение интеграла $\oint_C f(z) dz$, вычисленного вдоль C , равно умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов подинтегральной функции во всех ее особых точках, лежащих внутри C .

Для доказательства следует применить теорему Коши и проинтегрировать почленно соответствующие ряды Лорана; мы предоставляем это читателю. С помощью этой теоремы можно вычислять интегралы следующих трех типов:

$$1. \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \text{ где } f — \text{рациональная функция } \cos \theta \text{ и } \sin \theta.$$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, где $f(z)$ — функция, аналитическая всюду в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек, ни одна из которых не лежит на действительной оси. Когда z стремится к ∞ , $|f(z)|$ должен стремиться к нулю как $|Az|^{-m}$, где $m > 1$.

3. $\int_0^{\infty} x^{\mu-1} f(x) dx$, где $f(z)$ — рациональная функция, аналитическая в точке $z=0$, имеющая только простые полюсы на положительной действительной полуоси и такая, что $z^{\mu} f(z)$ стремится к нулю, когда z стремится к нулю или к бесконечности.

В задачах приводятся некоторые обобщения.

Для вычисления интегралов типа 1 следует $\sin \theta$ и $\cos \theta$ выразить через $z = e^{i\theta}$. Интеграл преобразуется при этом в интеграл вдоль единичной окружности в плоскости z . После этого остается вычислить вычеты подинтегральной функции относительно полюсов, лежащих внутри единичного круга. В качестве простого примера рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2}. \quad (4.5.1)$$

Пусть $z = e^{i\theta}$; тогда

$$I = \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{(1-pz)(z-p)}, \quad (4.5.2)$$

где контуром интегрирования служит единичная окружность. Дальнейшие вычисления зависят от величины p . Предположим, что $|p| < 1$. Тогда точка $z = p$ является полюсом подинтегральной функции в (4.5.2). Соответствующий вычет равен $1/(1-p^2)^1$, так что

$$I = \frac{2\pi}{1-p^2}, \quad |p| < 1. \quad (4.5.3)$$

Если $|p| > 1$, то полюсом является точка $z = 1/p$. Вблизи этой точки подинтегральную функцию можно записать в виде $-1/[ip(z-1/p)(z-p)]$, поэтому соответствующий вычет равен $-1/[i(1-p^2)]$. Итак,

$$I = \frac{2\pi}{p^2-1}, \quad |p| > 1.$$

В том случае, когда p — действительное число, оба результата можно объединить, записав $I = 2\pi/|p^2-1|$.

Обращаясь к интегралам типа 2, проинтегрируем $f(z)$ вдоль замкнутого контура, состоящего из отрезка действительной оси от $-R$ до $+R$

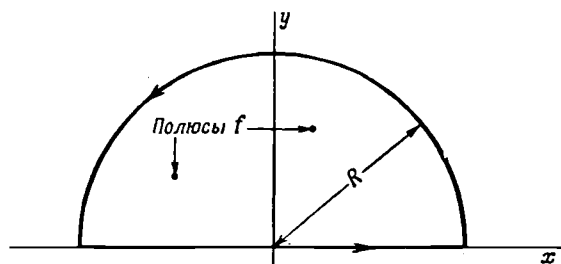


Рис. 4.22. Контур, служащий для вычисления интегралов в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ с помощью теории вычетов.

и полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости (см. рис. 4.22). В силу предположений, высказанных относительно $f(z)$, интеграл вдоль полуокружности при $R \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю, и мы получаем формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \left(\text{вычетов } f(z) \text{ относительно особых точек, лежащих в верхней полуплоскости} \right). \quad (4.5.4)$$

В качестве простого примера вычислим этим методом интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

который, как известно, равен π . Согласно формуле (4.5.4), $I = 2\pi i \times$ (вычет в точке i), так как i — единственный полюс функции $1/(1+z^2) = 1/(z+i)(z-i)$ в верхней полуплоскости. Искомый вычет равен $1/2i$, а следовательно, $I = \pi$. Более сложные примеры приведены в задачах.

¹⁾ Если a — полюс первого порядка и $f(z) = a_{-1}/(z-a) + a_0 + a_1(z-a) + \dots$ — соответствующее разложение Лорана, то $f(z) = g(z)/(z-a)$, где $g(z) = a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \dots$. Отсюда следует, что a_{-1} , вычет $f(z)$ относительно $z=a$, равен

$$\lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)].$$

Это — частный случай формулы (4.5.6), выражающей вычет функции относительно полюса n -го порядка. — *Прим. перев.*

Интегралы от функций, имеющих точки ветвления. Рассмотрим, наконец, интеграл типа 3 от функции, не имеющей полюсов на положительной действительной полуоси. Начнем с интеграла

$$\oint (-z)^{\mu-1} f(z) dz,$$

замкнутый контур интегрирования которого не охватывает $z=0$, точку ветвления подинтегральной функции, и поэтому лежит целиком на одном листе соответствующей римановой поверхности. Выберем контур, изображенный на рис. 4.23 и состоящий из маленькой окружности, которая охватывает $z=0$ и радиус которой мы заставим стремиться к нулю, большой окружности, радиус которой будет в дальнейшем стремиться к бесконечности, и двух прямолинейных отрезков, направленных в противоположные стороны и лежащих на противоположных краях разреза

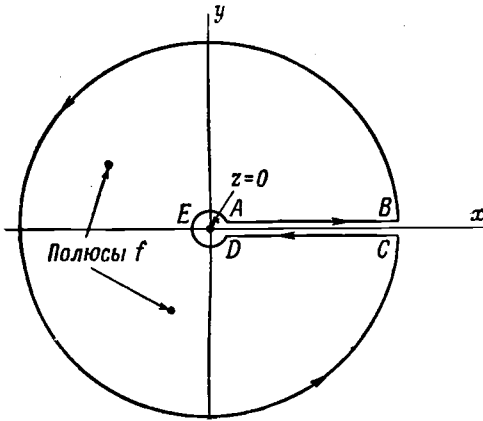


Рис. 4.23. Контур, служащий для вычисления интегралов функции с точкой ветвления $z=0$.

вдоль оси x . Интегралы вдоль этих прямолинейных отрезков не будут взаимно уничтожаться, так как вдоль разреза подинтегральная функция разрывна. Аргумент множителя $(-z)^{\mu-1}$ выбираем так, чтобы $(-z)^{\mu-1}$ был действителен в точке E . Тогда в точке D , в которую переходит E при повороте на угол π против часовой стрелки, аргумент этого множителя равен $\pi(\mu-1)$, и вдоль DC подинтегральная функция имеет вид $e^{\pi i(\mu-1)} x^{\mu-1} f(x)$. В точку A точка E переходит посредством поворота на угол π по часовой стрелке, поэтому вдоль отрезка AB подинтегральная функция имеет вид $e^{-\pi i(\mu-1)} x^{\mu-1} f(x)$. В силу предполо-

жений относительно интегралов 3-го типа интегралы по обеим окружностям, малой и большой, стремятся к нулю; следовательно, интеграл по выделенному контуру в пределе, когда радиус внешней окружности бесконечно велик, а радиус внутренней равен нулю, имеет вид

$$\oint (-z)^{\mu-1} f(z) dz = - \int_0^{\infty} e^{\pi i(\mu-1)} x^{\mu-1} f(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-\pi i(\mu-1)} x^{\mu-1} f(x) dx.$$

Первое слагаемое справа есть интеграл вдоль CD , второе — интеграл вдоль AB .

Объединив оба слагаемых, получим

$$\oint (-z)^{\mu-1} f(z) dz = 2i \sin \pi\mu \int_0^{\infty} x^{\mu-1} f(x) dx.$$

Применяя основную теорему теории вычетов к контурному интегралу в левой части, получаем равенство

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} f(x) dx = \pi \operatorname{cosec} \pi\mu \sum \left[\begin{array}{l} \text{вычетов функции } (-z)^{\mu-1} f(z) \\ \text{относительно всех полюсов } f \end{array} \right]. \quad (4.5.5)$$

В качестве простого примера возьмем $\int_0^{\infty} [x^{\mu-1}/(1+x)] dx$. Согласно формуле (4.5.5), значение этого интеграла при $0 < \mu < 1$ равно $\pi \operatorname{cosec} \pi \mu$.

Заметим, наконец, что подинтегральная функция может иметь полюсы второго и более высокого порядка. Предположим, что точка $z = a$ является полюсом n -го порядка подинтегральной функции $f(z)$, и представим последнюю в виде $f(z) = g(z)/(z-a)^n$, где $g(z)$ — аналитическая функция в окрестности $z = a$. Посредством несложного подсчета¹⁾ мы получим для соответствующего вычета выражение

$$\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g(z) \right)_{z=a}. \quad (4.5.6)$$

Тот же результат получается, если полюс n -го порядка рассматривается как предельный случай n простых полюсов, слившихся в одну точку $z = a$.

Обращение рядов. Часто приходится иметь дело с задачей обращения функции, заданной степенным рядом

$$w = f(z) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_1 \neq 0. \quad (4.5.7)$$

Требуется найти такую функцию $z = z(w)$, что $f(z) - w \equiv 0$. Из уравнения (4.5.7) видно, что в силу теоремы, приведенной на стр. 342, эта обратная функция может быть представлена степенным рядом

$$z(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (w - w_0)^n. \quad (4.5.8)$$

Коэффициенты b_n можно выразить через a_n , подставив непосредственно (4.5.8) в (4.5.7). Однако их можно вычислить и более изящным способом при помощи интеграла Коши. Сначала мы возьмем контурный интеграл, вычет которого равен как раз функции $z(w)$. Таким интегралом является $(1/2\pi i) \oint [z df/(f-w)]$, где переменным интегрирования служит $f(z)$, а контур охватывает точку $f = w$ и не охватывает других нулей функции $f - w$. Через z этот контурный интеграл выразится в виде

$$z(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{zf'(z) dz}{f(z) - w}. \quad (4.5.9)$$

Дифференцируя его по w , а затем интегрируя по частям, получаем

$$\frac{d}{dw} z(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{f(z) - w}. \quad (4.5.10)$$

Последний интеграл можно вычислить. Записав

$$\frac{1}{f(z) - w} = \frac{1}{f(z) - w_0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w - w_0)^n}{[f(z) - w_0]^n} \right)$$

и сравнив правую часть с рядом, полученным дифференцированием (4.5.8) по w , замечаем, что

$$nb_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{[f(z) - w_0]^n},$$

¹⁾ См. примечание на стр. 387. — Прим. перев.

а этот интеграл равен

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{(z-z_0)^n}{[f(z)-w_0]^n} \right)_{z=z_0}.$$

Таким образом,

$$b_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a_1 + a_2(z-z_0) + a_3(z-z_0)^2 + \dots]^{-n} \right\}_{z=z_0},$$

или

$$b_n = \frac{1}{a_1^n n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(1 + \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 + \dots \right)^{-n} \right]_{x=0}. \quad (4.5.11)$$

Производную, фигурирующую в (4.5.11), можно вычислить явно с помощью формулы

$$(a+b+c+\dots)^p = \sum_{r,s,t,\dots} \frac{p!}{r!s!t!\dots} a^r b^s \dots,$$

где

$$r+s+t+\dots=p.$$

Пользуясь этой формулой и взяв соответствующие производные, получаем выражение b_n в виде

$$b_n = \frac{1}{na_1^n} \sum_{s,t,u,\dots} (-1)^{s+t+u+\dots} \frac{n(n+1)\dots(n-1+s+t+u+\dots)}{s!t!u!\dots} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^s \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^t \dots, \quad (4.5.12)$$

где

$$s+2t+3u+\dots=n-1.$$

Вычислим отсюда несколько первых b_n :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\ b_2 &= -\frac{1}{a_1^2} \frac{a_2}{a_1} = -\frac{a_2}{a_1^3}, \\ b_3 &= \frac{1}{3a_1^3} \left[\frac{3 \cdot 4}{2!} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - \frac{3}{1!} \frac{a_3}{a_1} \right] = \frac{1}{a_1^3} \left[2 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - \frac{a_3}{a_1} \right], \\ b_4 &= \frac{1}{4a_1^4} \left[-\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 + \frac{4 \cdot 5}{1!1!} \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_1} - \frac{4}{1!} \frac{a_4}{a_1} \right] = \\ &= \frac{1}{a_1^4} \left[-5 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 + 5 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_4}{a_1} \right], \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

Подставляя найденные коэффициенты в (4.5.8), получаем искомое обращение ряда.

Суммирование рядов. Следующее применение интеграла Коши, заслуживающее быть рассмотренным, состоит в суммировании рядов вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$. Прежде всего такой ряд заменяется контурным интегралом. Для этого подбирается функция, которая имеет простые полюсы в точках $z=n$ и ограничена на бесконечности вне действительной оси. Такой функцией может служить $\pi \operatorname{ctg} \pi z$; действительно, она имеет полюсы в точках $z=n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ с вычетами 1 и ограничена на бесконечности

в требуемом смысле. Другой функцией такого типа является $\pi \operatorname{cosec} \pi z$, имеющая полюсы в точках $z = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ с вычетами $(-1)^n$.

Интеграл $\oint \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz$ вдоль контура C_1 , изображенного на рис. 4.24, равен умноженному на $2\pi i$ вычету функции $\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$ относительно точки $z = 0$, который в свою очередь равен $f(0)$. Соответствующий интеграл вдоль C_2 равен

$$2\pi i \{f(0) + f(1) + f(-1) + [\operatorname{Res} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z]_{a_1}\}$$

и т. д. [Сокращение Res (от французского *residue*) стоит вместо слова *вычет*.] Беря последовательность расширяющихся контуров указанного вида, получим в пределе

$$2\pi i \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) + \sum \operatorname{Res} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z \right\},$$

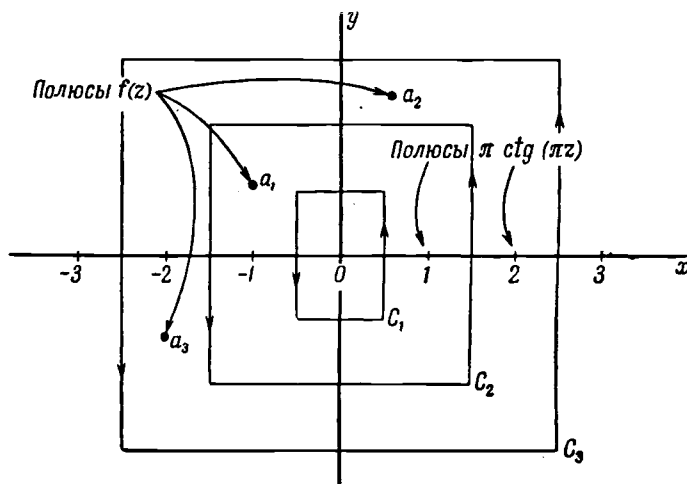


Рис. 4.24. Полюсы подинтегральной функции в интеграле, выражающем ряд $\sum f(n)$.

где вторая сумма берется по всем полюсам¹⁾ $f(z)$. Предполагается, что у $f(z)$ нет точек ветвления.

Если, кроме того, $|zf(z)| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то интеграл по бесконечному контуру обращается в нуль и мы получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum [\operatorname{Res} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z \text{ в полюсах } f(z)]. \quad (4.5.14)$$

Если вместо $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ взять $\pi \operatorname{cosec} \pi z$, то тем же путем приходим к формуле

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum [\operatorname{Res} \pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z \text{ в полюсах } f(z)]. \quad (4.5.15)$$

Рассмотрим простой пример: в случае ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n / (a+n)^2$ имеем функцию $f(z) = 1/(a+z)^2$ с полюсом второго порядка в точке $z = -a$. Вычет функции $\pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z$ относительно этой точки равен $-\pi^2 \operatorname{cosec} \pi a \operatorname{ctg} \pi a$

¹⁾ Здесь могут быть и изолированные существенно особые точки. — Прим. ред.

[см. формулу (4.5.6)], и, следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = \pi^2 \operatorname{cosec} \pi a \operatorname{ctg} \pi a.$$

Этот метод суммирования рядов может служить иллюстрацией метода интегрального представления рядов. Последний употребляется в тех случаях, когда решение дифференциального уравнения, полученное в виде степенного ряда, нужно представить в виде интеграла (см. § 5.3).

Интегральное представление функций. Иногда бывает полезно представить функцию в виде некоторого интеграла. Объясняется это тем, что зачастую очень сложные функции могут быть представлены интегралами

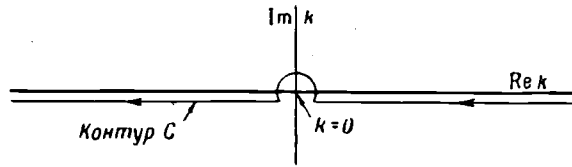


Рис. 4.25. Контур, по которому берется интеграл, выражающий единичную ступенчатую функцию $u(x)$.

от сравнительно простых функций. Кроме того, изменяя путь интегрирования в соответствии с теоремой Коши, можно получить приближенные выражения для таких интегралов. В главе, посвященной дифференциальным уравнениям, мы неоднократно будем прибегать к этому приему.

В качестве первого примера рассмотрим интеграл

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-ikx}}{k} dk. \quad (4.5.16)$$

Контур интегрирования изображен на рис. 4.25. Эта функция $u(x)$ встречается в операционном исчислении Хевисайда (см. § 11.1). Ее можно вычислить с помощью интеграла Коши. При $x > 0$ мы замыкаем контур полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в нижней полуплоскости. Интеграл вдоль такой полуокружности обращается в нуль. Следовательно, $u(x) = \operatorname{Res} [e^{-ikx}/k]$ в точке $k=0$, т. е. $u(x) = 1$ при $x > 0$. При $x < 0$ замыкающую полуокружность берем в верхней полуплоскости, и по такой полуокружности интеграл в пределе обращается в нуль. Так как внутри такого контура полюсов функции e^{-ikx}/k нет, то $u(x) = 0$ при $x < 0$. Итак, мы нашли, что

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4.5.17)$$

Таким образом, интеграл (4.5.16) представляет разрывную функцию. Часто это представление оказывается более удобным, чем явное задание функции $u(x)$ в виде (4.5.17).

В качестве второго примера рассмотрим интегральное представление функции Грина для выведенного ранее уравнения колебаний бесконечной струны [см. также вывод уравнений (7.2.32) и (11.2.8)]. Возьмем интеграл

$$G_K(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 - K^2} dk. \quad (4.5.18)$$

До тех пор, пока точно не определено положение контура C относительно особых точек $k = \pm K$ подинтегральной функции, этот интеграл остается неопределенным. Выберем два контура, изображенные сплошной линией и пунктиром на рис. 4.26, и сначала возьмем контур C_1 . При $x - x' > 0$ мы замыкаем этот контур полуокружностью большого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости. Когда радиус стремится к бесконечности, интеграл по этой полуокружности имеет предел, равный нулю. Значение рассматриваемого интеграла равно $2\pi i \times$ (вычет подинтегральной функции в $k = K$). Следовательно, если выбран контур C_1 , то

$$G_K(x - x') = \frac{i}{2K} e^{iK(x-x')}, \quad x - x' > 0. \quad (4.5.19)$$

При $x - x' < 0$ замыкаем контур снизу. В этом случае интеграл равен $-2\pi i \times$ (вычет в $k = -K$), и, следовательно, если выбран контур C_1 , то

$$G_K(x - x') = \frac{i}{2K} e^{-iK(x-x')}, \quad x - x' < 0. \quad (4.5.20)$$

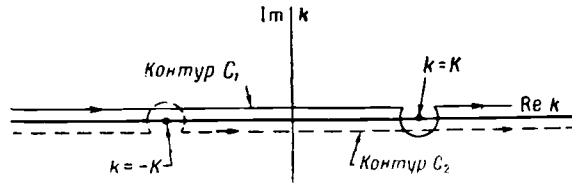


Рис. 4.26. Контур для интегрального представления функции Грина задачи о колебаниях струны.

Комбинируя (4.5.19) и (4.5.20) для того случая, когда выбран контур C_1 , получаем

$$G_K(x - x') = \frac{i}{2K} e^{iK|x-x'|}. \quad (4.5.21)$$

С другой стороны, если взят контур C_2 , то мы получаем

$$G_K(x - x') = -\frac{i}{2K} e^{-iK|x-x'|}. \quad (4.5.22)$$

В полученном результате нет ничего неожиданного, если учесть, что контур C_2 получается из C_1 отражением относительно действительной оси. Выбор контура C_1 приводит к функции Грина при граничном условии, соответствующем расходящимся волнам; иначе говоря, в этом случае точка x' действует как источник. Выбор контура C_2 приводит к выражению, соответствующему наличию стока в точке x' . В этом примере сами представляемые функции непрерывны, но имеют разрывные производные.

И в том и в другом случае $G_K(x - x')$ можно в результате соответствующих преобразований выразить через ступенчатую функцию $u(x' - x)$. Например, когда выбран контур C_1 ,

$$G_K = \frac{1}{4\pi K} \left\{ e^{iK(x-x')} \int_C \frac{e^{-i(h-K)(x'-x)}}{k-K} dk - e^{-iK(x-x')} \int_C \frac{e^{-i(h+K)(x'-x)}}{k+K} dk \right\}.$$

Из этих интегралов первый имеет единственную особую точку $k = K$, поэтому нет надобности в том, чтобы контур, вдоль которого он берется, обходил вокруг точки $k = -K$. Аналогично, вычисляя второй интеграл, обходить нужно лишь вокруг точки $k = -K$. Сопоставив полученное выра-

жение с (4.5.16) и принимая во внимание рис. 4.25, получим равенство

$$G_K(x-x') = \frac{i}{2K} \{ e^{iK(x-x')} [1 - u(x'-x)] + e^{-iK(x-x')} u(x'-x) \},$$

согласующееся с (4.5.21).

Интегралы, связанные с функцией ошибок. До сих пор мы имели дело с интегралами, которые могли быть выражены через элементарные трансцендентные функции. Теперь мы рассмотрим случай, когда это сделать невозможно. Дифференциальное уравнение $(d^2\psi_\lambda/dz^2) - 2z(d\psi_\lambda/dz) + 2\lambda\psi_\lambda = 0$ имеет частное решение, выражающееся в виде интеграла

$$\psi_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-t^2+2tz}}{t^{\lambda+1}} dt; \quad (4.5.23)$$

контур интегрирования изображен на рис. 4.27, а. Выберем линию ветвления подинтегральной функции вдоль положительной действительной полу-

оси. Вычислим теперь этот интеграл при некоторых частных значениях λ для малых и для больших z . Если λ равно целому числу $n \geq 0$, то 0 не является точкой ветвления, и контур можно путем деформации превратить в окружность с центром в нуле. Тогда в силу формулы (4.3.1)

$$\psi_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2+2tz} \right)_{t=0},$$

или

$$\psi_n = \frac{(-1)^n}{n!} e^{z^2} \left(\frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \right), \quad \lambda = n. \quad (4.5.24)$$

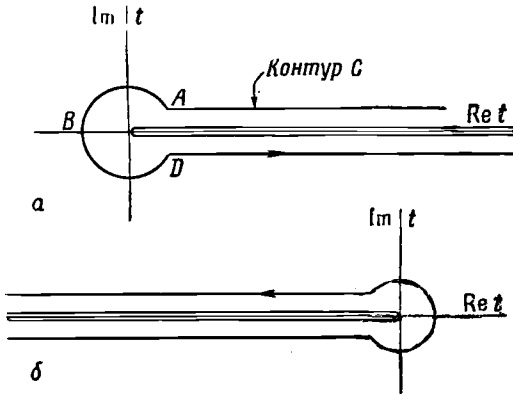


Рис. 4.27. Контур для интеграла ошибок и гамма-функции.

Полученные многочлены пропорциональны многочленам Эрмита (см. таблицу в конце гл. 6).

При $\lambda < 0$ рассматриваемый контурный интеграл можно свести к действительному интегралу следующим образом. Разбиваем контур на отрезок действительной оси от $+\infty$ до 0, малую окружность с центром в нуле и отрезок от 0 до $+\infty$. При $\lambda < 0$ интеграл вдоль указанной окружности стремится к нулю вместе с радиусом окружности, поэтому остается рассмотреть лишь интегралы вдоль полуоси. Поскольку $t=0$ — точка ветвления подинтегральной функции, нужно указать, какая именно ветвь этой функции рассматривается. Лучше всего выбрать аргумент множителя $t^{-(\lambda+1)}$ так, чтобы в точке A он равнялся нулю. Тогда интеграл по полу-прямой от ∞ до A будет равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 \frac{e^{-t^2+2tz}}{t^{\lambda+1}} dt \quad (t \text{ действительное}).$$

В точку D точка A переходит при повороте на угол 2π в положительном направлении. При таком повороте $\arg[t^{-(\lambda+1)}]$ принимает значение $-2\pi(\lambda+1)$, и интеграл от D до ∞ будет равен

$$\frac{e^{-2\pi i(\lambda+1)}}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2+2tz}}{t^{\lambda+1}} dt \quad (t \text{ действительное}).$$

Таким образом, для интеграла (4.5.23) при $\lambda < 0$ мы получаем выражение

$$\psi_\lambda = \frac{1}{\pi} e^{-\pi i(\lambda+1)} \sin \pi(\lambda+1) \int_0^\infty \frac{e^{-t^2+2tz}}{t^{\lambda+1}} dt. \quad (4.5.25)$$

Так как интеграл в (4.5.25) действителен, не обращается в нуль и не имеет полюсов при целых отрицательных λ , то при этих значениях λ должна обращаться в нуль ψ_λ . В этом нет ничего неожиданного, так как при таких λ значения интеграла по верхнему и нижнему участкам контура отличаются лишь знаком. Мы видим также, что, быть может, удобнее было бы, чтобы $t^{-(\lambda+1)}$ была действительна в точке B контура, потому что тогда в выражение (4.5.25) не вошел бы показательный множитель.

Для того чтобы выяснить поведение ψ_λ при $z \rightarrow 0$, разложим e^{2tz} в степенной ряд и запишем

$$\psi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-t^2} t^{n-\lambda-1} dt \right\}. \quad (4.5.26)$$

Такие интегралы могут быть выражены через гамма-функцию. (Требуемая для этого формула будет выведена в следующем пункте.) Поэтому мы выносим вычисление (4.5.26) в задачи, а здесь ограничимся лишь одним интересным замечанием. Если λ равно целому числу $p > 0$, то интеграл в (4.5.26) обращается в нуль при всех $n > p$. Следовательно, ψ_p представляет собой многочлен степени p . Это, конечно, подтверждается формулой (4.5.24).

Наконец, рассмотрим значения ψ_λ при больших z . (Здесь особенно отчетливо выступают преимущества интегрального представления ψ_λ . В нем содержатся в наиболее доступной форме все сведения о функции; в частности, оно позволяет нам сопоставить поведение функции при $z \rightarrow 0$ с ее поведением при $z \rightarrow \infty$.) При $z \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Re} z < 0$ проще всего воспользоваться подстановкой $u = -2tz$ ($|\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Re} z|$):

$$\psi_\lambda = -\frac{(2z)^\lambda}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-(u/2z)^2} e^{-u}}{(-u)^{\lambda+1}} du.$$

Разложив показательную функцию в степенной ряд, получим

$$\psi_\lambda = (2z)^\lambda \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n! (2z)^{2n}} \frac{1}{2\pi i} \int_C (-u)^{2n-\lambda-1} e^{-u} du \quad (\operatorname{Re} z > 0). \quad (4.5.27)$$

Эти интегралы выражаются через гамма-функцию [см. формулу (4.5.36)]. При очень больших $|z|$ в этом ряде доминирует первый член, и $\psi_\lambda \simeq Az^\lambda$.

При $\operatorname{Re} z < 0$, положив $u = 2tz$, получим

$$\psi_\lambda = \frac{(2z)^\lambda}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-(u/2z)^2} e^u}{(u)^{\lambda+1}} du.$$

Контур интегрирования при этой замене переходит в контур, изображенный на рис. 4.27, б. Разложив в ряд $e^{-(u/2z)^2}$, получим

$$\psi_\lambda = (2z)^\lambda \sum \frac{(-1)^n}{n! (2z)^{2n}} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^u (u)^{2n-\lambda-1} du. \quad (4.5.28)$$

Последний интеграл также может быть выражен через гамма-функцию.

Гамма-функция. Выше [см. (4.3.14)] гамма-функция была определена следующим образом:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Gamma(n) = (n-1)!. \quad (4.5.29)$$

Для того чтобы этот интеграл сходиллся, z должно иметь положительную действительную часть. При z нецелом $t=0$ служит точкой ветвления под-интегральной функции. В качестве линии ветвления берется положительная действительная полуось. Элементарные преобразования приводят к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2z-1} dt, & \operatorname{Re} z > 0; \\ \Gamma(z) &= 3 \int_0^1 \left[\ln \frac{1}{t} \right]^{z-1} dt, & \operatorname{Re} z > 0. \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

Как уже говорилось в § 4.3, $\Gamma(z)$ может быть аналитически продолжена на полуплоскость $\operatorname{Re} z \leq 0$ посредством рекуррентного соотношения

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1). \quad (4.5.31)$$

Из этого же соотношения можно получить сведения об особых точках функции $\Gamma(z)$.

Так как интеграл (4.5.29) сходится при $\operatorname{Re} z > 0$, то в верхней полуплоскости $\Gamma(z)$ всюду конечна. Далее, так как производную $\Gamma'(z)$ при $\operatorname{Re} z > 0$ можно вычислить, дифференцируя в выражении (4.5.29) под знаком интеграла, то $\Gamma(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Чтобы выяснить поведение $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z < 0$, выберем для заданного z настолько большое n , чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{Re}(z+n+1) > 0$. Пусть n — наименьшее целое число, удовлетворяющее этому требованию. Тогда, очевидно,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)(z+n-2)\dots z}, \quad (4.5.32)$$

и мы видим что $\Gamma(z)$ конечна и имеет определенную производную, если только z не равно нулю или целому отрицательному числу.

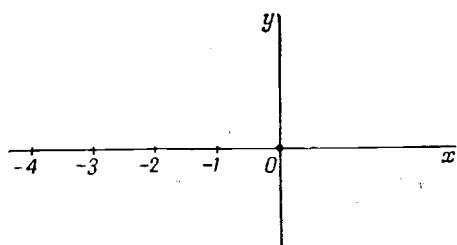


Рис. 4.28. Расположение полюсов гамма-функции.

Вблизи числа $-n$ (n — целое положительное число или нуль) мы можем положить $z = -n + \varepsilon$, где $|\varepsilon| \ll 1$, и тогда в силу (4.5.32)

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n \Gamma(1 + \varepsilon)}{(n - \varepsilon)(n - \varepsilon - 1) \dots (1 - \varepsilon) \varepsilon},$$

а эта функция имеет при $\varepsilon = 0$ простой полюс. Итак, функция $\Gamma(z)$ аналитична во всех конечных точках плоскости z , за исключением точек $z = 0, -1, -2, -3, \dots$, которые являются ее простыми полюсами (см. рис. 4.28). Так как $\Gamma(1) = 1$, то вычет функции $\Gamma(z)$ относительно полюса $z = -n$ равен $(-1)^n/n!$.

Правильным расположением своих полюсов, на одинаковом расстоянии один от другого, функция $\Gamma(z)$ напоминает такие функции, как $\cos \pi z$ или $\operatorname{ctg} \pi z$. Последние, впрочем, имеют полюсы и на положитель-

ной действительной полуоси. На этой же полуоси расположены, очевидно, полюсы функции $\Gamma(-z)$. Поэтому функция $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ будет иметь полюсы при всех целых значениях $z=n$ (положительных и отрицательных), и других полюсов у нее не будет. Следовательно, произведение $\sin \pi z \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ будет аналитической функцией в любой конечной точке плоскости. [Здесь нельзя было взять $\operatorname{tg} \pi z$ вместо $\sin \pi z$, так как $\operatorname{tg} \pi z$ имеет полюсы при всех $z=(2p+1)\pi/2$, где p — целое.] Мы сейчас покажем, что на самом деле

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z. \quad (4.5.33)$$

Это тождество будет сначала установлено для действительных значений z , заключенных между 0 и 1; на всю плоскость оно будет распространено посредством аналитического продолжения (см. теорему на стр. 369).

Для доказательства формулы (4.5.33), воспользовавшись первой из формул (4.5.30), напомним двойной интеграл

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2a-1} y^{-(2a-1)} dx dy.$$

Переходя к полярным координатам $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$, получаем

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = 4 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \theta)^{2a-1} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \theta)^{2a-1} d\theta.$$

Для того чтобы вычислить этот последний интеграл, прибегнем к подстановке $\operatorname{ctg} \theta = s$; при этом

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = 2 \int_0^\infty \frac{s^{2a-1} ds}{1+s^2},$$

и мы получили интеграл, к которому при $0 < a < 1$ применима формула (4.5.5). Таким образом,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = 2 \operatorname{cosec}(2\pi a) \times \left\{ \sum \operatorname{Res} [(-s)^{2a-1}/(1+s^2)] \text{ в } s = \pm i \right\},$$

если $0 < a < 1$. Несложный подсчет дает $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \pi \operatorname{cosec} \pi a$. Далее, как уже говорилось, применяется аналитическое продолжение.

Воспользуемся этой формулой для получения следующих двух результатов. Во-первых, положив $z=1/2$, получаем $[\Gamma(1/2)]^2 = \pi$, т. е. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Во-вторых, мы покажем, что $[\Gamma(z)]^{-1}$ является *целой функцией*. Так как у $\Gamma(z)$ нет других конечных особых точек, кроме полюсов, то достаточно убедиться в том, что $\Gamma(z)$ не имеет нулей в конечных точках. А это следует из (4.5.33), так как если бы $\Gamma(z)$ обращалась в нуль в какой-либо точке, то в этой точке $\Gamma(1-z)$ было бы бесконечно. Но полюсы функции $\Gamma(1-z)$ известны, и в них $\Gamma(z)$ в нуль не обращается.

Контурные интегралы для гамма-функции. Получив известное общее представление о поведении функции $\Gamma(z)$, мы займемся теперь выводом таких выражений для $\Gamma(z)$, которые были бы справедливы в более широких областях, нежели выражение (4.5.29). Одно из таких выражений получается непосредственно при решении разностного уравнения (4.5.31). При этом нужно выбрать такое решение уравнения (4.5.31), которое при $\operatorname{Re} z > 0$ сводится к (4.5.29). [Заметим, что любое решение уравнения (4.5.31), умноженное на периодическую функцию с перио-

дом 1, снова дает решение того же уравнения.] Вид выражения (4.5.29) подсказывает нам, что решение следует искать в виде интеграла

$$\Gamma(z) = \int_C v(t) t^{z-1} dt,$$

где контур C и функция $v(t)$ подлежат еще определению. Подставив этот интеграл в (4.5.31), получим

$$\int_C v(t) t^z dt = \int_C v(t) z t^{z-1} dt = \int_C v(t) \frac{d}{dt} (t^z) dt.$$

Интегрируя по частям во втором из этих трех интегралов, приходим к равенству

$$\int_C \left[v(t) + \frac{dv}{dt} \right] t^z dt = [v(t) t^z],$$

где в правой части стоит разность в конечных точках контура. Выберем контур так, чтобы разность $[v(t) t^z]$ обратилась в нуль; тогда в качестве v можно взять решение уравнения

$$v(t) + \frac{dv}{dt} = 0,$$

то есть

$$v = \text{const} \cdot e^{-t}$$

и

$$\Gamma(z) = A \int_C (e^{-t}) (-t)^{z-1} dt, \quad (4.5.34)$$

где A — некоторая постоянная. Выберем в качестве C контур, изображенный на рис. 4.27, а. Теперь мы вычислим этот интеграл при $\text{Re } z > 0$ и выберем A так, чтобы (4.5.34) совпало с (4.5.29). Пусть $\arg [(-t)^{z-1}] = 0$ в точке B ; тогда при $\text{Re } z > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= A \left\{ \int_0^0 e^{-t} e^{-\pi i(z-1)} t^{z-1} dt + \int_0^\infty e^{-t} e^{\pi i(z-1)} t^{z-1} dt \right\} = \\ &= 2iA \sin[\pi(z-1)] \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \end{aligned}$$

Отсюда $A = -1/(2i \sin \pi z)$, и мы получаем

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi z} \int_C e^{-t} (-t)^{z-1} dt \quad (4.5.35)$$

— представление, справедливо для всех z . Комбинируя его с соотношением (4.5.33), приходим к другому интегральному представлению

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-t} (-t)^{-z} dt. \quad (4.5.36)$$

Поведение $\Gamma(z)$ при целых z можно найти из формулы (4.5.35) или (4.5.36) непосредственно.

Представление гамма-функции в виде бесконечного произведения. Другое полезное представление функции $\Gamma(z)$ можно получить, воспользовавшись формулой (4.3.8), выражающей целую функцию в виде бесконечного произведения. Так как $[\Gamma(z+1)]^{-1}$ — целая функция, нулями которой являются точки $z = -1, -2, \dots$, то, согласно (4.3.8),

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}. \quad (4.5.37)$$

Постоянная $\gamma = -\Gamma'(1)/\Gamma(1)$, известная под названием *постоянной Эйлера-Маскерони*, приближенно равна 0,5772157. Ее значение нетрудно получить, положив $z=1$ и прологарифмировав обе части равенства (4.5.37):

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]. \quad (4.5.38)$$

Из формул (4.5.38) можно получить и другие выражения для γ :

$$\gamma = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M} - \ln M \right), \quad (4.5.39)$$

$$\gamma = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^M \int_0^{\infty} e^{-nq} dq - \int_0^{\infty} \frac{e^{-q} - e^{-Mq}}{q} dq \right),$$

$$\gamma = \int_0^{\infty} e^{-q} \left(\frac{1}{1-e^{-q}} - \frac{1}{q} \right) dq. \quad (4.5.40)$$

Производные гамма-функции. Для последующих приложений существенный интерес представляет логарифмическая производная гамма-функции

$$\psi_1(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (4.5.41)$$

Из (4.5.37) следует, что

$$\psi_1(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right). \quad (4.5.42)$$

Когда z принимает целое значение N ,

$$\psi_1(N) = -\gamma + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}, \quad \psi_1(1) = -\gamma. \quad (4.5.43)$$

Производная функции $\psi_1(z)$ имеет вид

$$\psi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}. \quad (4.5.44)$$

Вообще

$$\psi_p(z) = \frac{d}{dz} \psi_{p-1}(z) = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^p}. \quad (4.5.45)$$

Таблицы этих функций для действительных z позволяют непосредственно вычислить суммы рядов, общие члены которых представляют собой

рациональные функции номера. Так, например, сумму

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 (n+a)^2}$$

можно записать в виде

$$S = \frac{1}{(a-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+a)^2} \right) - \frac{2}{a-1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+a} \right) \right\},$$

и поэтому

$$S = \frac{1}{(a-1)^2} \left\{ [\psi_2(1) + \psi_2(a)] - \frac{2}{a-1} [-\psi_1(1) + \psi_1(a)] \right\}.$$

Функции ψ_p («полигамма-функции») подчиняются простой рекуррентной (по аргументу) формуле. В самом деле,

$$\psi_p(z+1) = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+z)^p} = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^p},$$

откуда следует, что

$$\psi_p(z+1) = \psi_p(z) - [(-1)^p (p-1)!] \frac{1}{z^p}. \quad (4.5.46)$$

Тем же приемом, каким была получена формула (4.5.40) для γ , можно получить интегральные представления полигамма-функций ψ_p . Из формулы (4.5.42) вытекает

$$\psi_1(z) = -\gamma + \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-q}}{1-e^{-q}} - \frac{e^{-zq}}{1-e^{-q}} \right) dq.$$

Выражая γ с помощью формулы (4.5.40), получаем

$$\psi_1(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-q}}{q} - \frac{e^{-zq}}{1-e^{-q}} \right) dq. \quad (4.5.47)$$

Последовательно дифференцируя по z , приходим к общей формуле для полигамма-функций

$$\psi_p(z) = (-1)^p \int_0^{\infty} \frac{q^{p-1} e^{-zq}}{1-e^{-q}} dq. \quad (4.5.48)$$

Эта формула дает возможность выяснить поведение $\psi_p(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Последовательно интегрируя по z , получаем $\psi_1(z) = [d \ln \Gamma(z)]/dz$ и затем $\Gamma(z)$; таким образом можно выяснить поведение $\Gamma(z)$ при больших z . Впрочем, из-за необходимости находить постоянные интегрирования мы отложим рассмотрение этого вопроса до следующего параграфа. Здесь же мы ограничимся тем, что приведем для справок асимптотическую формулу Стирлинга для значений z , заключенных в первом квадранте,

$$\ln \Gamma(z) = -z + \left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \rightarrow \infty), \quad (4.5.49)$$

или

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + \dots \right) \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4.5.50)$$

Формула удвоения. Применим теперь бесконечное произведение (4.5.37) к выводу формулы удвоения

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z). \quad (4.5.51)$$

Для доказательства рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} &= 2e^{\gamma z} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2z}{n}\right) e^{-2z/n}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)} = \\ &= 2e^{\gamma z} (1+2z) e^{-2z} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2z}{2p+1}\right) e^{-2z/(2p+1)} = \\ &= 2e^{\gamma z} (1+2z) e^{-2z} \frac{\prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \left(z + \frac{1}{2}\right)/p\right] e^{-(z+1/2)/p}}{\prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2p}\right] e^{-1/2p}} \prod_{p=1}^{\infty} \exp \left[z \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/2} \right) \right]. \end{aligned}$$

В силу формулы (4.5.37), выражающей гамма-функцию в виде бесконечного произведения,

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{2\Gamma(1/2) e^{-2z}}{\Gamma(z+1/2)} \exp \left[z \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/2} \right) \right]. \quad (4.5.52)$$

Для вычисления показательного множителя положим $z=1$ в (4.5.52) и получим

$$\exp \left[\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/2} \right) \right] = \frac{e^2}{4}. \quad (4.5.53)$$

Подставляя (4.5.53) в (4.5.52), приходим к формуле удвоения (4.5.51).

Бета-функция. Рассмотрение гамма-функции мы заключим знакомством с бета-функцией; последняя определяется равенством

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (4.5.54)$$

или, иначе,

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt, \quad B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta. \quad (4.5.55)$$

Мы ограничимся тем, что установим формулу

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (4.5.56)$$

Согласно первой формуле (4.5.30),

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2q-1} dy; \quad (4.5.57)$$

переходя к полярным координатам ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), получаем равенство

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta.$$

Пользуясь снова формулой (4.3.30), а также формулой (4.5.55), приходим к (4.5.56).

Периодические функции. Много раз нам встретятся и будут нужны функции, обладающие свойством *периодичности*, т. е. функции, значения которых повторяются снова и снова. В математике функция $f(z)$ называется периодической, если существует такое комплексное число a , что

$$f(z+a) = f(z)$$

для всех значений z из области, где f аналитична. Эта постоянная a называется *периодом* функции f . Когда z перемещается от $z_0 + a$ до $z_0 + 2a$, функция f снова изменяется так же, как при переходе от z_0 к $z_0 + a$.

Разумеется, если a — период функции f , то $2a$, а также любое целое (положительное или отрицательное) кратное a является периодом f . Иногда $a/2$, $a/3$ и т. д. также оказываются периодами. Однако такое дробление периода не может продолжаться безгранично. Посредством несложного рассуждения читатель может убедиться в том, что функция, отличная от постоянной, не может иметь бесконечно малого периода. (Необходимо воспользоваться непрерывностью функции f и свойством единственности аналитических функций.) Расположив по порядку периоды некоторой заданной периодической функции, мы обнаружим, что все они являются целыми кратными некоторого *основного периода* τ , характеристического для функции f . Функция f удовлетворяет тождеству

$$f(z+\tau) = f(z), \quad (4.5.58)$$

но если снабдить τ множителем, меньшим 1 по модулю, то аналогичное тождество не будет иметь места¹⁾.

Функции $\sin z$ и $\operatorname{tg}(z/2)$ — периодические с основным периодом 2π , e^z — периодическая функция с основным периодом $2\pi i$ и т. д. Функции такого рода допускают представления в виде рядов или бесконечных произведений, в которых проявляется наличие полюсов (или нулей), лежащих на прямой (или на прямых) в плоскости z на расстоянии τ один от другого. Таковы, например, рассмотренные выше представления

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - (n\pi)^2}, \quad \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{n\pi} \right)^2 \right]. \quad (4.5.59)$$

Периодичность синуса можно было бы получить алгебраическими средствами непосредственно из этих выражений.

Периодические функции можно характеризовать также их дифференциальными уравнениями. Например, $\sin z$ является решением уравнения

$$\left(\frac{dy}{dz} \right)^2 = 1 - y^2 \quad (4.5.60)$$

¹⁾ Возможны также двоякопериодические функции, о которых будет сказано ниже. — Прим. ред.

или уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -y, \quad (4.5.61)$$

получающегося из предыдущего дифференцированием.

Для того чтобы обнаружить периодичность функции $\sin z$ при действительных z , воспользуемся уравнением (4.5.60). Возьмем такое его решение y , которое обращается в нуль при $z=0$; тогда уравнение показывает, что производная этого решения в той же точке принимает значение 1 (она может равняться ± 1 , но мы возьмем $+1$). Когда z возрастает, возрастает и y , до тех пор пока y не обратится в 1; в этот момент $dy/dz=0$, а $d^2 y/dz^2 = -1$ [см. уравнение (4.5.61)]. Таким образом, 1 есть наибольшее значение функции y на действительной оси. Когда z продолжает возрастать, y убывает, а производная dy/dz , оставаясь отрицательной, возрастает по абсолютной величине, и когда y снова обращается в нуль, dy/dz принимает значение -1 . При дальнейшем возрастании z функция y становится отрицательной, достигает -1 , снова начинает возрастать и при некотором z принимает значение 0, а ее производная — значение 1, как в начальный момент. При этом значении z функция y заканчивает свой первый «цикл» и готова начать второй. Мы замечаем, что в силу симметрии самого уравнения этот полный период функции y разбивается на четыре равных участка, на первом из которых y растет от 0 до 1, на втором убывает от 1 до 0 и т. д.

Возвращаясь к уравнению (4.5.60), замечаем, что его решение, обращающееся в нуль при $z=0$, определяется равенством

$$z = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

то есть $z = \arcsin y$. Собственно говоря, здесь мы имеем выражение для обратной функции (z как функция y), но оно позволяет легко отыскать период функции y . Из рассуждений предыдущего абзаца вытекает, что если τ — период, то

$$\frac{1}{4} \tau = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Этот интеграл равен $\pi/2$, а поэтому рассматриваемая функция y имеет период $\tau = 2\pi$.

В учебниках анализа свойства тригонометрических функций, связанные с периодичностью, изучаются подробнее и гораздо более строго, чем здесь, где мы не можем уделить этим вопросам много места; для нас эти рассмотрения служат лишь подходом к изучению более общих периодических функций.

Существуют ли функции комплексного переменного z , имеющие два периода, скажем, a_1 и a_2 ? Тождества $y(z+a_1) \equiv y(z)$ и $y(z+a_2) \equiv y(z)$ не дают ничего нового в том случае, когда векторы a_1 и a_2 имеют одинаковое направление в комплексной плоскости (т. е. когда отношение a_1/a_2 действительно); в самом деле, одновременно с a_1 периодами являются $2a_1$, $3a_1$ и т. д. Можно, конечно, еще спросить, не могут ли периоды τ_1 и τ_2 иметь одинаковое направление, но несоизмеримые длины. Однако этот случай исключается по тем же соображениям, в силу которых период функции (отличной от постоянной) не может быть бесконечно мал. [В самом деле, если $\tau_2 = \lambda \tau_1$, где λ — действительное, но иррациональное число, то среди чисел $(m + \lambda n)\tau_1$ нашлись бы периоды, сколь угодно мало

отличающиеся друг от друга, а это невозможно.] Но если a_1 и a_2 имеют различные направления в комплексной плоскости (т. е. a_1/a_2 не является действительным числом), то возникает совершенно иное положение, более сложное, чем в случае однопериодической функции.

Прежде всего, вместо последовательности периодов, лежащих на одной прямой, мы получаем на плоскости целую решетку параллелограммов, в каждом из которых рассматриваемая функция ведет себя в точности одинаково.

Наименьший параллелограмм, поведение функции в котором целиком воспроизводится в других параллелограммах решетки, называется *основным параллелограммом* для данной функции f ; сторонами основного параллелограмма служат основные периоды τ_1 и τ_2 этой функции. В окрестности точки $z + m\tau_1 + n\tau_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функция f ведет себя так же, как в окрестности точки z исходного параллелограмма. Точки z и $z + m\tau_1 + n\tau_2$ называются *конгруэнтными* (по отношению к f).

Можно задать вопрос, существуют ли функции комплексного переменного, имеющие более двух независимых периодов? Доказательство того, что таких функций нет, аналогично доказательству невозможности для функции иметь два независимых периода с действительным отношением и основывается по существу на том, что комплексная плоскость двумерна. Итак, могут существовать однопериодические и двоякопериодические функции комплексного переменного, но периодичность тройная или более высокой кратности невозможна.

Основные свойства двоякопериодических функций. Прежде чем вывести какие бы то ни было формулы, касающиеся двоякопериодических функций, мы установим некоторые свойства этих последних посредством контурного интегрирования. Заметим, что интеграл вдоль границы основного параллелограмма, в силу периодичности подинтегральной функции, равен нулю. Двоякопериодическая функция $f(z)$, имеющая основные периоды τ_1 и τ_2 , может иметь нули и полюсы. Если это так, то в каждом параллелограмме тех и других должно быть одинаковое количество (при этом мы условимся выбирать основной параллелограмм так, чтобы на его границе не было ни нулей, ни полюсов). Если функция имеет точки ветвления, то эти последние в каждом параллелограмме появляются парами, а поэтому линии ветвления можно провести так, чтобы они не пересекали границ параллелограммов.

Займемся такими двоякопериодическими функциями, которые не имеют точек ветвления, но могут иметь полюсы и нули целого порядка. [Это означает, что вблизи таких точек z_i рассматриваемые функции имеют вид $(z - z_i)^{n_i} g_i(z)$, где n_i — целое число, положительное или отрицательное, а функция $g_i(z)$ аналитична в z_i и $g_i(z_i) \neq 0$; показатель n_i , когда он положителен, представляет собой *порядок* нуля z_i , а при $n_i < 0$ порядок полюса z_i равен $|n_i|$.] Такие функции называются *эллиптическими*. Согласно сказанному на стр. 386, интеграл $(1/2\pi i) \oint f(z) dz$ по замкнутому контуру от такой функции f равен сумме ее вычетов в особых точках, лежащих внутри контура. Но при интегрировании по границе основного параллелограмма интеграл равен нулю, и мы приходим к следующему выводу:

Сумма вычетов эллиптической функции во всех ее полюсах,
лежащих в основном параллелограмме, равна нулю. } (4.5.62)

Если все полюсы некоторой эллиптической функции простые, то их должно быть по меньшей мере два в каждом параллелограмме, чтобы соответствующие вычеты могли взаимно уничтожиться. Эллиптическая функция может, конечно, иметь один полюс порядка ≥ 2 в каждом параллелограмме,

если вычет в нем равен нулю. (Эллиптическая функция может, конечно, и вовсе не иметь полюсов, но тогда она тождественно равна постоянной. Почему?)

Если f — эллиптическая функция, то, очевидно, $f + c$, $1/f$, f' , f^n и f'/f также являются эллиптическими функциями. Рассматривая интеграл $\oint (1/f) dz$ по границе основного параллелограмма, убеждаемся в том, что сумма вычетов $1/f(z)$ в ее полюсах, — а последние являются нулями функции $f(z)$, — по основному параллелограмму равна нулю. Поэтому, если все нули эллиптической функции f простые, то они встречаются парами и в каждом параллелограмме их должно быть не меньше двух. Согласно определению, эллиптическая функция не может иметь существенно особых точек. У нее не может быть и бесконечного множества полюсов в основном параллелограмме, так как иначе в некоторой конечной точке появилась бы неизолированная особенность. Следовательно, в любом основном параллелограмме эллиптическая функция может иметь лишь конечное число полюсов и, соответственно, лишь конечное число нулей.

Возьмем теперь произвольную аналитическую функцию $f(z)$, имеющую внутри некоторого контура конечное число нулей и конечное число особых точек, каждая из которых представляет собой полюс, и рассмотрим интеграл $\oint [f'(z)/f(z)] dz$ ($f' = df/dz$), взятый вдоль этого контура. Функция f вблизи полюса z_i порядка n_i имеет вид $f = (z - z_i)^{-n_i} g_i(z)$, где $g_i(z)$ — аналитическая функция и $g_i(z_i) \neq 0$. При этом f'/f имеет в точке z_i простой полюс, а вычет ее относительно этого полюса равен $-n_i$. Вблизи нуля $\tilde{z}_j$ f имеет вид $f = (z - \tilde{z}_j)^{m_j} h_j(z)$, где m_j — порядок нуля, $h_j(z)$ аналитическая функция, причем $h_j(\tilde{z}_j) \neq 0$. Точка $\tilde{z}_j$ является также простым полюсом функции f'/f , и соответствующий вычет равен m_j . Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j m_j - \sum_i n_i, \quad (4.5.63)$$

т. е. такой интеграл равен сумме порядков нулей минус сумма порядков полюсов функции f , лежащих внутри контура интегрирования. В том случае, когда все эти нули и полюсы первого порядка, интеграл (4.5.63) равен разности между числом нулей и числом полюсов.

Применяя этот вывод к интегралу от эллиптической функции, взятому вдоль границы основного параллелограмма, получаем теорему:

Для эллиптической функции сумма порядков всех полюсов, лежащих внутри основного параллелограмма, равна сумме порядков всех нулей, лежащих в этом параллелограмме. Если все эти полюсы и нули простые, то число полюсов равно числу нулей. } (4.5.64)

Рассматривая интеграл $\oint [f'/(f - C)] dz$, взятый вдоль границы основного параллелограмма, приходим к такому заключению:

Если f — эллиптическая функция, то число корней¹⁾ уравнения $f(z) = C$, принадлежащих основному параллелограмму, при любом значении постоянной C равно сумме порядков полюсов f в основном параллелограмме. } (4.5.65)

¹⁾ Корни z_j уравнения $f(z) = C$ являются нулями функции $f(z) - C$ порядка n_j (≥ 1). Числом корней уравнения $f(z) = C$ называют сумму $\sum_j n_j$. — Прим. перев.

Сумма порядков полюсов функции f в основном параллелограмме (равная числу полюсов в основном параллелограмме в том случае, когда все эти полюсы простые) называется *порядком эллиптической функции*. В силу теоремы (4.5.62) не существует эллиптических функций первого порядка. Эллиптическая функция нулевого порядка есть постоянная, так что простейшими нетривиальными эллиптическими функциями являются функции второго порядка.

Эллиптические функции второго порядка. Существует эллиптическая функция, имеющая в основном параллелограмме один полюс второго порядка и два простых нуля; это — *эллиптическая функция Вейерштрасса*. Впрочем, более полезны *эллиптические функции Якоби*, имеющие по два простых полюса и по два простых нуля в каждом основном параллелограмме. В силу теоремы (4.5.65) каждая из этих функций в любом основном параллелограмме принимает любое значение в точности два раза.

Такие функции, подобно тригонометрическим, могут быть построены с помощью рядов или бесконечных произведений, либо путем обращения некоторых интегралов. Для первой из функций Якоби мы выбираем на действительной оси последовательность нулей, отстоящих на $\tau_1/2$ один от другого, где (действительное) число τ_1 — первый основной период функции. Считая, что второй основной период τ_2 чисто мнимый, поместим над каждым нулем на расстоянии $|\tau_2|/2$ простой полюс. Над цепочкой полюсов на том же расстоянии появится новая цепочка нулей и т. д.

По аналогии с рядом (4.5.59) можно было бы составить ряд, «ведающий» нулями нашей функции. Потребуем, чтобы последняя вблизи своих нулей вела себя как синус, т. е. имела производную, равную 1, а при $\tau_2 \rightarrow \infty$, становясь однопериодической, превращалась бы прямо в $\sin z$. Об этих свойствах напоминает обозначение $\operatorname{sn} z$ конструируемой функции.

Полюсы функции $1/\operatorname{sn} z$ (т. е. нули $\operatorname{sn} z$), лежащие на действительной оси, можно получить, введя в ряд член $(2\pi/\tau_1) \operatorname{cosec}(2\pi z/\tau_1)$. Последний ведет себя требуемым образом вблизи каждого из действительных нулей $\operatorname{sn} z$ и сводится к $1/\sin z$, если $\tau_1 \rightarrow 2\pi$ при $\tau_2 \rightarrow \infty$. Следующая цепочка полюсов функции $1/\operatorname{sn} z$ образована точками $z = \tau_2 \pm m\tau_1/2$, где τ_2 — чисто мнимое число.

Выражение

$$\frac{\cos(2\pi\tau_2/\tau_1)}{\sin^2(2\pi z/\tau_1) - \sin^2(2\pi\tau_2/\tau_1)}$$

имеет полюсы в точках $z = \pm \tau_2 + n\tau_1/2$, так же как $1/\sin(2\pi z/\tau_1)$ в точках $z = n\tau_1/2$. Комбинируя эти выражения, получаем

$$\frac{2 \cos(2\pi\tau_2/\tau_1) \sin(2\pi z/\tau_1)}{\sin^2(2\pi z/\tau_1) - \sin^2(2\pi\tau_2/\tau_1)} = \frac{4 \sin(2\pi z/\tau_1) \cos(2\pi\tau_2/\tau_1)}{\cos(4\pi\tau_2/\tau_1) - \cos(4\pi z/\tau_2)}.$$

Учитывая всевозможные цепочки нулей $\operatorname{sn} z$, пересекающие мнимую ось в точках $i\tau_2 = \pm n\tau_2$, составляем ряд

$$\frac{1}{\operatorname{sn} z} = \frac{2\pi}{\tau_1} \left\{ \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi z}{\tau_1}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi z/\tau_1) \cos(2\pi n\tau_1/\tau_2)}{\cos(4\pi n\tau_2/\tau_1) - \cos(4\pi z/\tau_2)} \right\}, \quad (4.5.66)$$

обеспечивающий требуемое распределение нулей функции $\operatorname{sn} z$ во всей комплексной плоскости. Нетрудно показать, что нули этого ряда (т. е. полюсы функции $\operatorname{sn} z$) лежат посередине между любыми двумя соседними полюсами [т. е. в точках $z = m\tau_1/2 + (n+1/2)\tau_2$]. Значительно труднее было бы найти вычеты $\operatorname{sn} z$ в этих точках.

К эллиптическим функциям можно подойти еще иначе. Ряд

$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \gamma + 2i n u} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2n u) \quad (4.5.67)$$

(где $\text{Im } \gamma > 0$ и $q = e^{\pi i \gamma}$) представляет собой периодическую функцию переменного u с периодом π . Он сходится, когда мнимая часть γ положительна, т. е. когда $|q| < 1$. Интересно, что такой ряд *псевдопериодичен* по u с периодом $\pi \gamma$, так как

$$\begin{aligned} F(u + \pi \gamma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \gamma (n^2 + 2n) + 2i n u} = e^{-\pi i \gamma - 2i u} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \gamma (n+1)^2 + 2i (n+1) u} = \\ &= q^{-1} e^{-2i u} F(u). \end{aligned}$$

Следующие четыре подобных ряда называются *тэта-функциями*:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(u, q) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin[(2n+1)u], \quad \vartheta_1(u + \pi, q) = -\vartheta_1(u, q), \\ &\quad \vartheta_1(u + \pi \gamma, q) = -N \vartheta_1(u, q), \\ \vartheta_2(u, q) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos[(2n+1)u], \quad \vartheta_2(u + \pi, q) = -\vartheta_2(u, q), \\ &\quad \vartheta_2(u + \pi \gamma, q) = N \vartheta_2(u, q), \\ \vartheta_3(u, q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2n u), \quad \vartheta_3(u + \pi, q) = \vartheta_3(u, q), \\ &\quad \vartheta_3(u + \pi \gamma, q) = N \vartheta_3(u, q), \\ \vartheta_4(u, q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2n u), \quad \vartheta_4(u + \pi, q) = \vartheta_4(u, q), \\ &\quad \vartheta_4(u + \pi \gamma, q) = -N \vartheta_4(u, q), \\ \vartheta_2(u, q) &= \vartheta_1\left(u + \frac{1}{2}\pi, q\right), \quad \vartheta_3(u, q) = \vartheta_4\left(u + \frac{1}{2}\pi, q\right) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (4.5.68)$$

Здесь $q = e^{\pi i \gamma}$ и $N = q^{-1} e^{-2i u}$. Эти функции не являются, конечно, собственно эллиптическими функциями из-за наличия множителя N .

Оперируя с тэта-рядами, можно показать, что выражения

$$\frac{\vartheta_1^2(u) + a \vartheta_4^2(u)}{\vartheta_2^2(u)}, \quad \frac{\vartheta_1^2(u) + b \vartheta_4^2(u)}{\vartheta_3^2(u)}$$

представляют собой уже настоящие эллиптические функции. Подобранным образом постоянные a и b , можно добиться того, чтобы эти отношения имели не более одного простого нуля в основном параллелограмме со сторонами π и $\gamma \pi$. Тогда, в силу теоремы (4.5.62) при таких a и b рассматриваемые отношения будут постоянны, и мы сможем выразить ϑ_2^2 и ϑ_3^2 через ϑ_1^2 и ϑ_4^2 . Для отыскания a и b полагаем $u = 0$ и $\pi/2$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \vartheta_2^2(u) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_4^2(u) \vartheta_2^2(0) - \vartheta_1^2(u) \vartheta_3^2(0), \\ \vartheta_3^2(u) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_4^2(u) \vartheta_3^2(0) - \vartheta_1^2(u) \vartheta_2^2(0), \\ \vartheta_1^2(u) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_3^2(u) \vartheta_2^2(0) - \vartheta_2^2(u) \vartheta_3^2(0), \\ \vartheta_4^2(u) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_3^2(u) \vartheta_3^2(0) - \vartheta_2^2(u) \vartheta_2^2(0). \end{aligned} \quad (4.5.69)$$

Второй аргумент q опущен для упрощения записи.

Исходя из тэта-функций, можно, как мы видели, построить настоящие эллиптические функции. Для этого нужно взять их отношения,

чтобы освободиться от нежелательного множителя N . Так, например, функция

$$\operatorname{sn} z = \frac{\vartheta_3(0, q) \vartheta_1(u, q)}{\vartheta_2(0, q) \vartheta_4(u, q)}, \quad u = \frac{z}{[\vartheta_3(0, q)]^2}, \quad (4.5.70)$$

имеет те же нули и так же ведет себя вблизи каждого из нулей, как и функция, определенная равенством (4.5.66), если только числа $\pi[\vartheta_3(0, q)]^2$ и $\pi\gamma[\vartheta_3(0, q)]^2$ равны соответственно периодам τ_1 и τ_2 . Далее в монографиях по эллиптическим функциям из формул (4.5.68) выводятся, не без труда, дифференциальные уравнения для тэта-функций и для $\operatorname{sn} z$. Так, например,

$$\frac{d}{du} \left[\frac{\vartheta_1(u, q)}{\vartheta_4(u, q)} \right] = [\vartheta_4(0, q)]^2 \frac{\vartheta_2(u, q) \vartheta_3(u, q)}{\vartheta_4(u, q) \vartheta_4(u, q)},$$

и если $\eta = \vartheta_1(u, q)/\vartheta_4(u, q)$, то после некоторых преобразований получаем

$$\left(\frac{d\eta}{du} \right)^2 = [\vartheta_2^2(0, q) - \eta^2 \vartheta_2^2(0, q)] [\vartheta_3^2(0, q) - \eta^2 \vartheta_3^2(0, q)].$$

Наконец, полагая $y = [\vartheta_3(0, q)/\vartheta_2(0, q)] \eta$ и $z = u [\vartheta_3(0, q)]^2$, получаем для y уравнение

$$\left(\frac{dy}{dz} \right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad (4.5.71)$$

в котором $\sqrt{k} = \vartheta_2(0, q)/\vartheta_3(0, q)$. Все свойства эллиптической функции $y = \operatorname{sn} z$ могут быть получены из рассмотрения быстро сходящихся рядов (4.5.68). Однако для исследования некоторых свойств удобнее в основу определения $\operatorname{sn} z$ положить уравнение (4.5.71).

Интегральные представления эллиптических функций. Уравнение (4.5.71) приводит нас к третьему способу определения эллиптических функций второго порядка, самому полезному во всех случаях (исключая, может быть, задачу табулирования функций). Формальным решением дифференциального уравнения (4.5.71) является

$$z = F(k, y) = F(y) = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \quad (4.5.72)$$

— функция, обратная эллиптической функции $\operatorname{sn} z$. Рассуждая так же, как на стр. 403 в случае $\arcsin z$, приходим к заключению, что $y = \operatorname{sn} z$ — периодическая функция с периодом $\tau_1 = 4K$, где

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-vk^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} | k^2\right) \end{aligned} \quad (4.5.73)$$

[см. формулу (5.3.16)]. Важно отметить, что $\operatorname{sn}(z + 2K) = -\operatorname{sn} z$. Из (4.5.71) и (4.5.72) следует, что $\operatorname{sn} z$ при действительных z не превосходит 1 по абсолютной величине.

Разложив интеграл (4.5.72) в ряд по степеням y , мы обнаружим, что $\operatorname{sn} z = z - (1/6)(1+k^2)z^3 + \dots$; таким образом, $\operatorname{sn} z$ — нечетная функция, а вычет функции $1/\operatorname{sn} z$ в ее простом полюсе $z=0$ равен 1. Теперь посмотрим, как ведет себя $\operatorname{sn} z$ вблизи точки $z=K$, в которой она принимает значение 1. Смещаясь из точки $z=K$ вдоль действительной оси, получаем меньшие по модулю значения $\operatorname{sn} z$, а значит смещения параллельно мнимой оси должны вызвать увеличение модуля $\operatorname{sn} z$ (почему?). Смещаясь из точки

$z = K$ вверх, получаем

$$z = F(y) = K + iv, \quad v = \int_1^y \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}, \quad y = \operatorname{sn}(K + iv).$$

Дифференциальное уравнение, связывающее v и y , показывает, что y — периодическая функция от v с периодом $2K'$, причем

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \middle| 1/k'^2\right), \quad (4.5.74)$$

где $k'^2 = 1 - k^2$. Следовательно, $\operatorname{sn} z$ — периодическая функция по z с периодом $\tau_2 = 2iK'$, причем $\operatorname{sn} K = 1$, $\operatorname{sn}(K + iK') = 1/k$ и т. д.

Наконец, чисто мнимым y соответствуют чисто мнимые значения z , и y может стремиться к бесконечности при конечном z . Это означает, что функция $y = \operatorname{sn} z$ имеет полюс на мнимой оси, а именно, в точке ia , причем

$$a = \int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{(1+w^2)(1+k^2w^2)}} = \int_1^{k/1} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}} = K', \quad u = \left[\frac{1+w^2}{1+k^2w^2} \right]^{1/2}.$$

В результате этого исследования мы находим, что $\operatorname{sn} z$ представляет собой эллиптическую функцию с действительным периодом $\tau_1 = 4K$ и чисто мнимым периодом $\tau_2 = 2iK'$. Эта функция имеет простые нули в точках $z = 0$ и $z = 2K$ и в соответствующих точках других параллелограммов. Простые полюсы находятся в точках $z = iK'$ и $z = 2K + iK'$ (и в конгруэнтных с ними точках), причем вычет $\operatorname{sn} z$ в $z = iK'$ равен $1/k$, откуда следует [см. (4.5.62)], что вычет в $z = 2K + iK'$ равен $-1/k$. Параметр k называется *модулем* функции $\operatorname{sn} z$; последнюю обозначают $\operatorname{sn}(z, k)$ в тех случаях, когда нужно указать значение модуля. Выражение k через q указано в связи с уравнением (4.5.71); впрочем, обычно k рассматривают как исходный параметр, а K и K' определяют по формулам (4.5.73) и (4.5.74) (K' выражается через $k' = \sqrt{1-k^2}$ так же, как K — через k), после чего находят $q = e^{-\pi(K'/K)}$. Проводя рассуждения в обратном порядке, убеждаемся в том, что уравнение (4.5.72) определяет ту же функцию $\operatorname{sn} z$, что (4.5.70) и (4.5.66).

Аналогично определяются и остальные функции Якоби:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(z, k) &= \frac{\vartheta_3(0, q)}{\vartheta_2(0, q)} \frac{\vartheta_1(u, q)}{\vartheta_4(u, q)}, \\ \text{обратная функция } z &= F(k, y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ \operatorname{cn}(z, k) &= \frac{\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_2(0, q)} \frac{\vartheta_2(u, q)}{\vartheta_4(u, q)}, \\ \text{обратная функция}^1) z &= \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2+k^2t^2)}}, \\ \operatorname{dn}(z, k) &= \frac{\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} \frac{\vartheta_3(u, q)}{\vartheta_4(u, q)}, \\ \text{обратная функция}^1) z &= \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2+k^2-1)}}; \end{aligned} \quad (4.5.75)$$

¹⁾ Введенные здесь «обратные» функции могут быть, конечно, выражены обычным способом через эллиптические интегралы первого и второго рода, $F(k, x)$ и $E(k, x)$. См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, изд. 6, Гостехиздат, М., 1956, стр. 584–591. — Прим. ред.

здесь

$$u = z [\vartheta_3(0, q)]^{-2} = \frac{\pi z}{2K}, \quad q = e^{-\pi(K'/K)},$$

а K и K' задаются формулами (4.5.73) и (4.5.74).

Используя формулы (4.5.69) и наши предварительные сведения о функции $\operatorname{sn} z$, можно показать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(z, k) + \operatorname{cn}^2(z, k) &= 1, \quad \operatorname{cn}(0, k) = \operatorname{dn}(0, k) = 1, \\ k^2 \operatorname{sn}^2(z, k) + \operatorname{dn}^2(z, k) &= 1, \quad (d/dz) \operatorname{sn}(z, k) = \operatorname{cn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k). \end{aligned} \quad (4.5.76)$$

Теперь можно было бы установить множество других свойств этих функций. Некоторые из них приведены на стр. 462—466, с другими читатель встретится в задачах. В этой книге мы еще не раз воспользуемся этими функциями.

4.6. Асимптотические ряды. Метод перевала

Для изучения поведения функции $f(z)$ при больших значениях $|z|$ часто бывает целесообразно разложить ее в ряд по степеням $1/z$ и представить в виде

$$f(z) = \varphi(z) \left[A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right], \quad (4.6.1)$$

где $\varphi(z)$ — некоторая функция, поведение которой при больших значениях $|z|$ известно. Таково одно из выражений $\Gamma(z)$, указанное в предыдущем параграфе [см. формулу (4.5.50)]. В том случае, когда отношение $f(z)/\varphi(z)$ имеет в бесконечности существенно особую точку, ряд (4.6.1) расходится. Тем не менее этот ряд может быть полезен не только для качественного исследования поведения функции, но и для вычисления ее значений при больших $|z|$.

Для этого нужно, чтобы разность между $f(z)/\varphi(z)$ и первыми $n+1$ членами ряда была порядка $1/z^{n+1}$ и, следовательно, чтобы она могла быть сделана весьма малой при больших $|z|$. Выражаясь точнее, говорят, что такой ряд *асимптотически представляет* функцию $f(z)/\varphi(z)$, и записывают

$$f(z) \simeq \varphi(z) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{z^p}, \quad (4.6.2)$$

если при любом n

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\{ z^n \left[\frac{f(z)}{\varphi(z)} - \sum_{p=0}^n \frac{A_p}{z^p} \right] \right\} = 0. \quad (4.6.3)$$

Последнее равенство утверждает, что при заданном n сумма первых $n+1$ членов ряда при достаточно больших $|z|$ становится сколь угодно близка к $f(z)/\varphi(z)$. При заданном n отклонение будет порядка $1/z^{n+1}$. Так как ряд $\sum A_p/z^p$ расходится, то заданному z соответствует такое n , при котором частичная сумма $\sum_0^n A_p/z^p$ точнее других представляет $f(z)/\varphi(z)$. Такое оптимальное n одновременно определяет неустранимую ошибку. С возрастанием z оптимальное n также возрастает, а неустранимая ошибка убывает.

Пример. В качестве простого примера, разъясняющего эти общие соображения, рассмотрим интегральную показательную функцию

$$\text{Ei}(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Асимптотический ряд для нее можно получить последовательным интегрированием по частям. Сначала получаем

$$-\text{Ei}(-x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt,$$

а затем, продолжая,

$$\begin{aligned} -\text{Ei}(-x) = \frac{e^{-x}}{x} \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{x^n} \right] + \\ + (-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt. \end{aligned}$$

Ряд, получающийся при $n \rightarrow \infty$, расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{x} \right] = \infty.$$

В частности, мы замечаем, что при $x = n$ n -й член ряда совпадает с $(n+1)$ -м по абсолютной величине; это указывает на то, что при заданном x оптимальным, грубо говоря, является значение n , ближайшее к x . Для того чтобы доказать, что полученный ряд является асимптотическим, достаточно обнаружить, что при $x \rightarrow \infty$

$$x^{n+1} e^x (n+1)! (-1)^{n+1} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt \rightarrow 0.$$

Это непосредственно вытекает из неравенства

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt < \frac{1}{x^{n+2}} \int_x^{\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^{n+2}}.$$

Ошибка приближения функции $-\text{Ei}(-x)$ частичной суммой

$$\frac{e^{-x}}{x} \sum_0^n \frac{(-1)^p p!}{x^p}$$

по абсолютной величине меньше $(n+1)! e^{-x}/x^{n+2}$. Последнее выражение, в точности равное по абсолютной величине следующему члену ряда, с возрастанием n сначала убывает, а затем неограниченно возрастает. В табл. 4.6.1 указаны приближения для значения $-4e^4 \text{Ei}(-4) = 0,82533$.

Значениям 0,87500 и 0,78125 соответствует относительная погрешность, меньшая 5%.

Таблица 4.6.1

n	n -й член ряда	n -я частичная сумма	Верхняя граница погрешности
0	1,00000	1,00000	0,25000
1	—0,25000	0,75000	0,12500
2	0,12500	0,87500	0,09375
3	—0,09375	0,78125	0,09375
4	0,09375	0,87500	0,11719
5	—0,11719	0,75781	0,17579
6	0,17579	0,93360	0,31013
7	—0,31013	0,62347	0,62026
8	0,62026	1,24373	1,39559
9	—1,39559	—0,15186	—

Усреднение последовательных членов ряда. Полученные в предыдущем примере приближенные значения лежат по разные стороны от истинного значения; это наводит на мысль, что для лучшего приближения нужно воспользоваться средними арифметическими двух последовательных сумм. В нашем примере это среднее равно 0,82812 и дает относительную погрешность, меньшую ($1/2$)%. Вообще, если

$$S_n = \sum_{m=0}^n u_m,$$

то, положив

$$T_{n+1} = \frac{S_n + S_{n+1}}{2} = S_n + \frac{1}{2} u_{n+1}$$

мы получаем

$$T_{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} U_{m-1},$$

где

$$U_n = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}, \quad U_{-1} = \frac{1}{2} u_0. \quad (4.6.4)$$

Ряд из U_n не является асимптотическим в узком смысле, т. е. в смысле равенства (4.6.3). Однако определение асимптотического ряда можно обобщить (чтобы оно включало построенный ряд из U_n), полагая

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \simeq \sum_{p=0}^{\infty} U_p(z),$$

если при любом n

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\{ z^n \left[\frac{f(z)}{\varphi(z)} - \sum_{p=0}^n U_p(z) \right] \right\} = 0. \quad (4.6.5)$$

Ясно, что замечания, сопровождавшие условие (4.6.3) и относившиеся к ряду вида (4.6.1), применимы и к этому более общему случаю. Для U_p , определенных равенствами (4.6.4),

$$\sum_{p=-1}^n U_p(z) = \sum_{p=0}^{n+1} u_p(z) - \frac{1}{2} u_{n+1}(z),$$

и если $\sum u_p(z)$ — асимптотический ряд, т. е.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\{ z^n \left[\frac{f(z)}{\varphi(z)} - \sum_{p=0}^n u_p(z) \right] \right\} = 0,$$

то $\sum U_p(z)$ также является асимптотическим рядом. Ряд из средних арифметических, построенный согласно (4.6.4), особенно удобен тогда, когда исходный ряд — знакочередующийся. В табл. 4.6.2 приведены результаты такого преобразования (U_n и T_n), относящиеся к примеру, изображенному в табл. 4.6.1.

Таблица 4.6.2

СУММИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА ПРИ ПОМОЩИ ОСРЕДНЕНИЯ ЧЛЕНОВ [см. формулы (4.6.4) и табл. 4.6.1]

n	U_n	T_n	n	U_n	T_n
-1	0,50000	0,50000	4	-0,01720	0,81093
0	0,37500	0,87500	5	0,02930	0,84023
1	-0,06250	0,81250	6	-0,06717	0,77306
2	0,01562	0,82813	7	0,15508	0,92813
3	0,00000	0,82813	8	-0,38767	0,54046

Прежде чем приобрести уверенность в обращении с асимптотическими рядами, необходимо выяснить еще несколько вопросов. Заметим, прежде всего, что асимптотический ряд *не* определяет однозначно представляемую им функцию. Например, две функции

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \quad \text{и} \quad \psi(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} + e^{-z}$$

имеют при $\operatorname{Re} z > 0$ одинаковые асимптотические разложения. Далее, очевидно, что при переходе от полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ к полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ асимптотическое разложение функции $\psi(z)$ заметно изменяется. Таким образом, если $z = |z|e^{i\theta}$, то асимптотическое выражение $\psi(z)$ резко изменяется при переходе через $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. Такого рода «разрывы» — лишь кажущиеся и по существу обусловлены тем, что один и тот же асимптотический ряд может представлять различные функции. Однако, когда в дальнейшем мы будем обращаться к асимптотическим рядам, нам придется внимательно следить за тем, чтобы не выйти за пределы тех значений аргумента z , для которых справедливо рассматриваемое разложение. Кажущиеся разрывы асимптотических рядов часто дают о себе знать, и в главе о дифференциальных уравнениях (см. § 5.3) мы с ними встретимся в связи с явлением *Стокса*.

Надо отметить еще следующие общие свойства асимптотических рядов. *Асимптотические ряды можно почленно складывать; их можно и перемножать.* Последнее означает, что если

$$\chi(z) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{z^p}, \quad \psi(z) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p}{z^p},$$

то

$$\chi(z)\psi(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{z^n},$$

где $C_n = \sum_{p=0}^n A_p B_{n-p}$. Асимптотический ряд можно почленно интегрировать:

$$\int \chi(z) dz \simeq C + A_0 z + A_1 \ln z - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_{p+1}}{pz^p}.$$

С другой стороны, почленное дифференцирование асимптотического ряда приводит к асимптотическому разложению производной только в том случае, когда заранее известно, что эта производная допускает асимптотическое разложение.

Интегральные представления и асимптотические ряды. Нам часто придется выяснять асимптотическое поведение интегрального представления той или иной функции. Для этого применяется метод, называемый *методом скорейшего спуска* или *методом перевала* (седловых точек). Здесь мы рассмотрим этот метод и применим его к гамма-функции.

Прежде всего подчеркнем, что этот метод применим к функциям, допускающим интегральное представление довольно частного вида

$$J(z) = \int_C e^{zf(t)} dt, \quad (4.6.6)$$

причем контур C таков, что при приближении t к его концам подинтегральная функция стремится к нулю. Такое представление тесно связано с преобразованием Лапласа (см. § 5.3). Можно ожидать, что многие интегралы, интересующие нас в этой книге, должны иметь вид (4.6.6); в самом деле, решение ϕ скалярного уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 + k^2)\phi = 0$ можно представить в виде наложения плоских волн $e^{ik \cdot r}$, т. е. $\phi = \int e^{ik \cdot r} f(k) d\Omega_k$, где $d\Omega_k$ — дифференциал телесного угла в направлении вектора k . Кроме того, часто удается искусственным путем придать такой вид интегралу, первоначально выглядевшему иначе. Например, гамма-функция $\Gamma(z+1)$ при $\operatorname{Re} z > -1$ представляется интегралом $\int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^z d\tau$, последний же подстановкой $\tau = tz$ приводится к виду

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1} \int_0^{\infty} e^{-tz} t^z dt = z^{z+1} \int_0^{\infty} e^{z(\ln t - t)} dt, \quad (4.6.7)$$

и мы получаем, что функция $\Gamma(z+1)/z^{z+1}$ выражается интегралом вида (4.6.6).

Рассмотрим поведение интеграла $J(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ и при заданном значении $\varphi = \arg z$. При больших $|z|$ подинтегральная функция претерпевает обычно быстрые колебания. Если z комплексно или если $f(t)$ принимает вдоль некоторых участков контура C комплексные значения, то мнимая часть $zf(t)$, вообще говоря, возрастает вместе с $|z|$. Следовательно, множитель $\exp\{i \operatorname{Im}[zf(t)]\}$ будет быстро колебаться, причем частота колебаний будет при $|z| \rightarrow \infty$ возрастать. Наличие таких колебаний затрудняет прямое, без дальнейших преобразований, вычисление интеграла $J(z)$. Действительно, во многих случаях влияние больших положительных значений подинтегральной функции на одних участках контура при интегрировании почти полностью погашается большими по абсолютной величине отрицательными значениями на других участках. В этих условиях для получе-

ния удовлетворительного результата вычисление пришлось бы вести с устрашающей точностью. Поэтому естественно попытаться так деформировать контур, чтобы свести к минимуму вредное влияние колебаний подинтегральной функции. В дальнейшем будет предполагаться, что такие деформации возможны и что можно каким-либо способом учесть влияние особых точек, если они встречаются.

Выбор контура. Контур интегрирования, вообще говоря, пересекает как области, в которых $\operatorname{Re}[zf(t)] > 0$, так и области, где $\operatorname{Re}[zf(t)] < 0$. Первые области важнее, так как в них модуль подинтегральной функции больше, чем во вторых, а чем он больше, тем важнее уменьшить колебания. Поэтому контур следует выбирать так, чтобы $\max_t \operatorname{Re}[zf(t)]$ был, по возможности, меньше и чтобы на участке, где $\operatorname{Re}[zf(t)]$ принимает наибольшие значения, вдоль контура мнимая часть $zf(t)$ была постоянна. Таким образом, на участке контура, вносящем основную долю в интеграл $J(z)$, мы будем иметь

$$J(z) = \int_C e^{zf(t)} dt = e^{i \operatorname{Im}[zf(t)]} \int_C e^{\operatorname{Re}[zf(t)]} dt. \quad (4.6.8)$$

На тех участках, где значения $\operatorname{Re}[zf(t)]$ малы, контур можно выбрать так, чтобы вдоль него $\operatorname{Im}[zf(t)]$ была переменной, если оказывается необходимым соединить отдельные участки контура. Такой выбор контура в наибольшей степени обезвредит колебания подинтегральной функции.

В точке $t = t_0$, в которой $\operatorname{Re}[zf(t)]$ достигает наибольшего значения,

$$f'(t_0) = 0. \quad (4.6.9)$$

Вблизи этой точки особенно важно избежать колебаний, а поэтому мы выберем здесь контур так, чтобы вдоль него

$$\operatorname{Im}[zf(t)] = \operatorname{Im}[zf(t_0)]. \quad (4.6.10)$$

Смысл этого условия легко пояснить геометрически. Представим себе поверхность $u = \operatorname{Re} f(t)$ в трехмерном пространстве $(\operatorname{Re} t, \operatorname{Im} t, u)$ (считая для простоты $z > 0$ вещественным). В плоскости t нанесем линии уровня функции $\operatorname{Re} f(t)$ (см. рис. 4.29). В точке $t = t_0$ эта функция, будучи действительной частью аналитической функции, в силу сказанного на стр. 349 не может иметь ни минимума, ни максимума (т. е. соответствующая поверхность не может иметь над точкой t_0 ни вершины, ни впадины); следовательно, это — точка минимакса, или седловая точка, или, употребляя топографический термин, перевал. На рис. 4.29 изображена окрестность этой точки.

В чем особенность выбранного пути $\operatorname{Im}[zf(t)] = \operatorname{const}$? Как мы помним, если $u + iv$ — аналитическая функция, то семейства кривых $u = \operatorname{const}$ и $v = \operatorname{const}$ взаимно ортогональны. Поэтому вдоль кривой $\operatorname{Im}[zf(t)] = c$ функция $\operatorname{Re}[zf(t)]$ изменяется быстрее всего. Но при $c = \operatorname{Im}[zf(t_0)]$ эта кривая в окрестности точки $t = t_0$ распадается на кривую CD , идущую с одной «возвышенности» на другую, и на кривую AB , идущую из одной «впадины» в другую (см. рис. 4.30). Вдоль CD функция $\operatorname{Re}[zf(t)]$ быстрее всего *растет*, вдоль AB — быстрее всего *убывает*. В качестве пути должен быть выбран участок AB , а не CD , в соответствии с исходным контуром интегрирования. Таким образом, вдоль выбранного пути функция $e^{zf(t)}$ при-

ходит к своим конечным значениям, изменяясь наиболее «быстро», причем этот путь проходит через точку перевала t_0 . Основной вклад в значение интеграла дает участок контура, близкий к t_0 , так как в этой точке

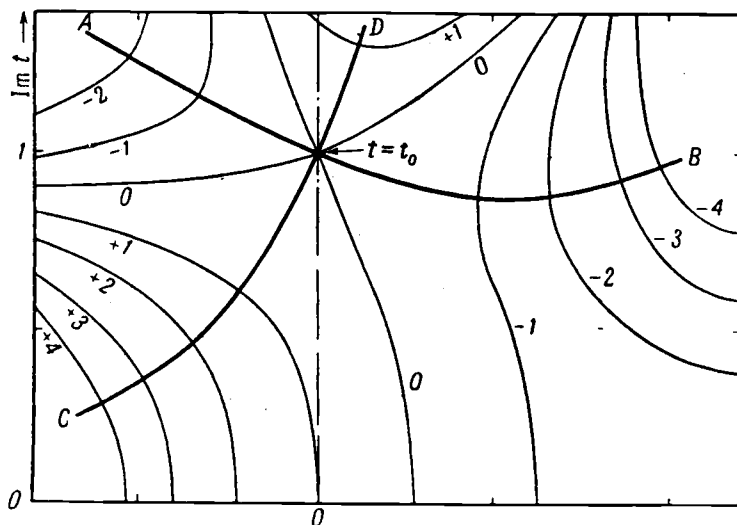


Рис. 4.29. Линии уровня $\operatorname{Re} f = \text{const}$ вблизи седловой точки $t = t_0$.

модуль подынтегральной функции принимает максимальное значение на контуре интегрирования. Последнее обстоятельство тем более заметно, чем больше $|z|$, так как при больших $|z|$ максимум оказывается особенно острым, а $|e^{zf(t)}|$ убывает к конечным значениям особенно быстро.

Первый член разложения. Воспользуемся тем, что было сказано в предыдущем пункте, для вывода общей формулы, дающей первый член асимптотического разложения $J(z)$. В окрестности точки $t = t_0$

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + \dots \quad (4.6.11)$$

[Может случиться, что $f''(t_0) = 0$; тогда приходится действовать иначе.] Метод перевала указывает такой путь интегрирования, при котором подынтегральная функция убывает как показательная функция. Поэтому положим

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad \tau = \sqrt{e^{i(\pi+\varphi)} f''(t_0)} (t - t_0). \quad (4.6.12)$$

Получаем

$$J(z) \simeq \frac{e^{zf(t_0)}}{\sqrt{e^{i(\pi+\varphi)} f''(t_0)}} \int_C e^{-|z| \tau^{3/2}} d\tau.$$

Мы видим, что при больших $|z|$ подынтегральная функция имеет весьма «острый» максимум, и потому становится важной только весьма малая часть контура. Когда $|z|$ достаточно велик, подынтегральная функция практически оказывается равной нулю вне области, где справедливо приближение (4.6.11). Вследствие этого можно заменить контурный интеграл действительным интегралом, взятым в пределах от $-\infty$ до ∞ . Направление интегрирования будет определяться направлением обхода исходного контура и преобразованием (4.6.12). Допустим, что обход первоначального контура

был таков, что новый интеграл берется по t от $-\infty$ до ∞ . Тогда при $|z| \rightarrow \infty$

$$J(z) \simeq e^{zf(t_0)} \sqrt{2\pi/ze^{\pi i} f''(t_0)}. \quad (4.6.13)$$

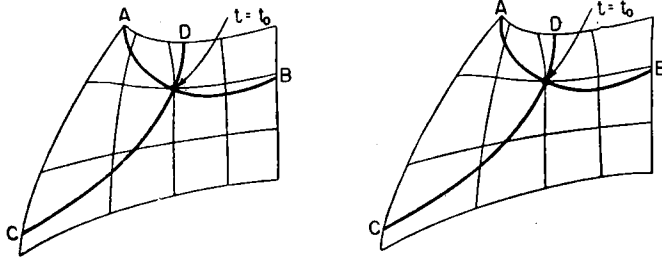


Рис. 4.30. Выбор пути, проходящего через седловую точку.

В случае гамма-функции [см. (4.6.7)] $f(t) = \ln t - t$. При этом $f'(t) = 1/t - 1$, так что $t_0 = 1$. Мы находим далее $f(t_0) = -1$ и $f''(t_0) = -1$. Переменное t изменяется от 0 до $+\infty$. Преобразование (4.6.12) принимает вид $\tau = (t-1)e^{i\pi/2}$. Формула (4.6.13) применима и дает

$$\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \quad (z \rightarrow \infty),$$

что согласуется с формулой (4.5.50), если в последней удержат лишь первый член. См. также рассуждения, относящиеся к формулам (5.3.77), где рассмотрен другой пример.

Остаток ряда. К формуле (4.6.13) мы пришли, рассматривая первый член асимптотического ряда. Обобщим наш вывод с целью получить дальнейшие члены этого ряда. Для упрощения присоединим аргумент z к $f(t)$ и будем рассматривать z как действительный параметр.

Необходимо возвратиться к формуле (4.6.11) и заменить ее на точную подстановку

$$f(t) = f(t_0) - w^2. \quad (4.6.14)$$

Заметим, что w — действительное переменное в силу выбора контура, вдоль которого $\operatorname{Im} f(t) = \operatorname{Im} f(t_0)$. Вводя (4.6.14) в интеграл $J(z)$, получаем

$$J(z) = e^{zf(t_0)} \int_C e^{-zw^2} dt = e^{zf(t_0)} \int_C e^{-\tau w^2} \frac{dt}{dw} dw.$$

Предположим и теперь, что исходный интеграл таков, что интегрирование по w следует производить от $-\infty$ до ∞ ; таким образом,

$$J(z) = e^{zf(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zw^2} \frac{dt}{dw} dw. \quad (4.6.15)$$

Остается вычислить dt/dw . Для этого нужно выразить dt/dw через w из уравнения (4.6.14) с помощью степенного ряда

$$\frac{dt}{dw} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n. \quad (4.6.16)$$

Подставляя (4.6.16) в (4.6.15) и замечая, что после интегрирования оста-

нутя лишь четные степени w , получаем асимптотический ряд

$$J(z) \simeq e^{zf(t_0)} \sqrt{\frac{\pi a_0^2}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{a_0} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4.6.17)$$

Коэффициенты a_n можно найти, применив способ, описанный на стр. 389. Там указывалось, что если

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (t - t_0)^n = g(t),$$

то

$$a_n = \left[\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{t - t_0}{g(t)} \right)^{n+1} \right]_{t=t_0}. \quad (4.6.18)$$

В рассматриваемом случае $g(t) = \sqrt{f(t_0) - f(t)}$. Разложив в ряд функцию

$$\frac{f(t_0) - f(t)}{(t - t_0)^2} = \sum_p A_p (t - t_0)^p,$$

приведем равенство (4.6.18) к виду

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} \left(\sum_p A_p x^p \right)^{-n/2-1/2} \right]_{x=0};$$

другими словами, a_n есть коэффициент при n -й степени x в разложении $(\sum A_p x^p)^{-n/2-1/2}$ в степенной ряд.

Вот первые три коэффициента, выраженные через A_p :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{A_0}}, \\ \frac{a_2}{a_0} &= \frac{15}{8} A_1^2 A_0^{-3} - \frac{3}{2} A_2 A_0^{-2}, \\ \frac{a_4}{a_0} &= \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^7 \cdot 3} A_1^4 A_0^{-6} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2^4} A_0^{-5} A_1^2 A_2 + \\ &\quad + \frac{5 \cdot 7}{2^3} A_0^{-4} (A_2^2 + 2 A_1 A_3) - \frac{5}{2} A_0^{-3} A_4. \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

Снова, пользуясь гамма-функцией в качестве иллюстрации, получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= \ln t - t, \quad t_0 = 1, \\ \frac{f(t_0) - f(t)}{(t - t_0)^2} &= \frac{(t-1) - \ln t}{(t-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{t-1}{3} + \frac{(t-1)^2}{4} - \dots, \end{aligned}$$

а значит, $A_n = (-1)^n / (n+2)$. Согласно (4.6.19),

$$a_0 = \sqrt{2}, \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{6}, \quad \frac{a_4}{a_0} = \frac{1}{216}.$$

В силу (4.6.17) для $\Gamma(z+1)$ получается асимптотическое разложение

$$\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \dots \right).$$

Метод перевала будет не раз еще использован в дальнейшем, в частности в § 5.3 с его помощью будет подробно исследовано асимптотическое поведение бесселевых и некоторых других связанных с ними функций.

4.7. Конформное отображение

В большинстве интересных и важных геометрических приложений теории аналитических функций комплексного переменного к физике конформное отображение играет важную роль. В качестве примера рассмотрим электростатическое поле. Часто встречающейся задачей является отыскание поля, созданного точечным зарядом q (линейным зарядом в трехмерном пространстве) внутри замкнутой поверхности C , представляющей собой металлический проводник, поддерживаемый при нулевом потенциале (см. рис. 4.31). Силовые линии (вдоль которых направлен вектор поля E) будут исходить из источника и опускаться ортогонально на поверхность C . На рис. 4.31 нанесено несколько эквипотенциальных и силовых линий. Конечно, семейства тех и других образуют ортогональную сеть. Можно поэтому ожидать, что существует такая аналитическая функция комплексного переменного $w(z) = u + iv$, что кривые $u(x, y) = \text{const}$ совпадают с силовыми линиями, а кривые $v(x, y) = \text{const}$ — с эквипотенциальными. Эта функция, если она вообще существует, должна иметь особенность в точке $z = z_q$, в которой помещен заряд. На самом деле эта функция в точке z_q имеет логарифмическую особенность; в гл. 10 мы увидим, что она должна

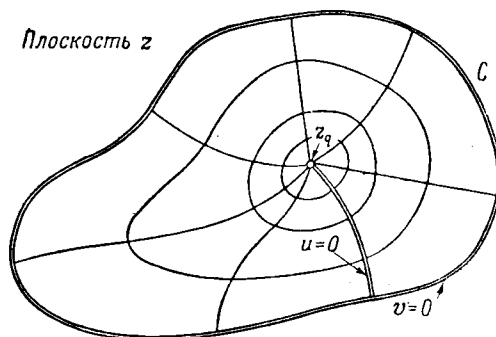


Рис. 4.31. Силовые и эквипотенциальные линии в случае точечного источника, окруженного заземленным проводником.

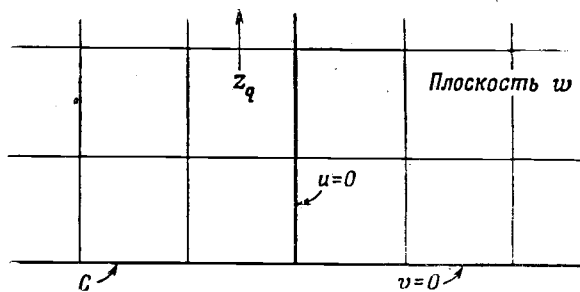


Рис. 4.32. Конформное отображение области, изображенной на рис. 4.31, на верхнюю полуплоскость $w = u + iv$.

иметь вид: $w = -2iq \ln(z - z_q)$ плюс некоторая функция, аналитическая в z_q . Конформное отображение, осуществляемое функцией $w = w(z)$, переводит линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в прямые на плоскости w , параллельные соответственно мнимой и действительной оси. Так как $v = 0$ на C , то C отображается на действительную ось в плоскости w . Образ области плоскости z , ограниченной контуром C , изображен на рис. 4.32. Заряд q в плоскости w оказывается в бесконечно удаленной точке ($w = i\infty$). Параллельные прямые $u = \text{const}$ являются как раз силовыми линиями, которые порождены зарядом, находящимся в бесконечности.

Общие свойства отображения. Искажение пространства, производимое преобразованием, о котором идет речь, может быть описано более

наглядно; к описаниям такого рода часто прибегают, когда хотят лучше «почувствовать» преобразование. В нашем случае преобразование состоит в том, что контур C разрезается в какой-либо точке и растягивается так, чтобы он заполнил всю действительную ось, а точка разреза ушла в бесконечность. Далее, заряд передвигается бесконечно далеко вверх. При этом эквипотенциальные линии и силовые линии превращаются в прямые, параллельные соответственно действительной и мнимой осям¹⁾.

Отметим следующее чрезвычайно важное обстоятельство: *функция $w(z)$ отображает область, ограниченную контуром C , на верхнюю полуплоскость*. Для того чтобы осуществить это преобразование, нужно только найти функцию точечного источника, мнимая часть которой v ведет себя, как $-(q/2\pi) \ln|z - z_q|$ вблизи заряда в точке z_q , и удовлетворяет условию $v=0$ на кривой C . По самому физическому смыслу задачи такая функция существует, а следовательно, *существует конформное отображение области, заключенной внутри C , на верхнюю полуплоскость*. Очевидно также, что существует множество таких отображений, так как заряд можно поместить где угодно внутри C .

Допустив существование функции $f(z)$, осуществляющей требуемое отображение, покажем, какую большую пользу можно извлечь из этой функции для решения различных задач электростатики в области внутри C . Существо дела состоит в том, что при помощи отображения возможно задачу со сложной геометрией (рис. 4.31) свести к аналогичной задаче с простой геометрией (рис. 4.32), решить которую значительно легче. Пусть, например, вдоль C задан переменный потенциал, а зарядов внутри C нет. В преобразованной задаче потенциал V будет задан вдоль действительной оси ($v=0$), а найти нужно V в верхней полуплоскости. Так как известно, что V представляет собой мнимую часть функции, аналитической в верхней полуплоскости, то можно применить формулу (4.2.13), и мы получаем

$$V(u, v) = \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(u', 0)}{(u' - u)^2 + v^2} du'.$$

Этот пример убеждает нас в том, что коль скоро известна отображающая функция, мы можем решить любую задачу электростатики, относящуюся к первоначально заданной области.

Преобразование Шварца — Кристоффеля. Обратимся теперь к практическому отысканию требуемого преобразования. Наиболее общим контуром C , для которого эта задача может быть рассмотрена весьма детально, является многоугольник. Другим важным частным случаем, для которого решение известно, является эллипс и, в частности, окружность. Рассмотрим сейчас случай многоугольника; соответствующее преобразование называется *преобразованием Шварца — Кристоффеля*. Многоугольник изображен на рис. 4.33; вершины его обозначены $a_0, a_1, \dots$, соответствующие внешние углы — $\varphi_0, \varphi_1, \dots$, образы этих вершин в плоскости w — $b_0, b_1, \dots$. Заметим, что

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \dots = 2\pi. \quad (4.7.1)$$

¹⁾ В этом описании не учтена многозначность логарифма; скорее здесь ось u плоскости w наматывается на контур C плоскости z , как нитка на катушку. Строго говоря, отображение $w=w(z)$ не конформно, так как оно не однозначно. — Прим. ред.

Читателю следует обратить особое внимание на то, каким образом отсчитываются углы φ_i , и на то, что при обходе многоугольника в направлении отсчета углов внутренность многоугольника все время остается слева. При тех вершинах, в которых контур при выбранном обходе поворачивает влево, углы φ_i оказываются положительными; те φ_i , которые соответствуют вершинам входящих углов, будут отрицательными. Возможны и «случаи вырождения», когда φ_i равно π или $-\pi$; какое из этих двух значений следует выбрать, обычно определяется соотношением (4.7.1).

Так как углы φ_i при отображении не сохраняются, то a_i должны быть особыми точками функции $w(z)$. Поэтому, обходя контур C , мы будем

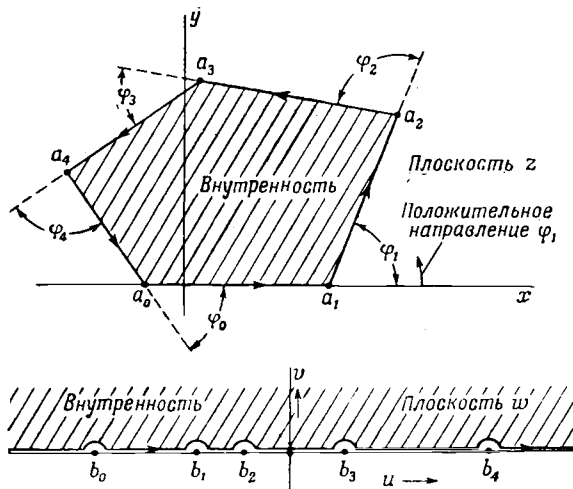


Рис. 4.33. Отображение Шварца—Кристоффеля внутреннейности многоугольника на верхнюю полуплоскость w .

«скруглять» вершины. Видоизменение соответствующего контура в плоскости w отмечено на рис. 4.33 маленькими полуокружностями, огибающими точки b_i . Эти полуокружности исключают особые точки b_i из верхней полуплоскости, где $w(z)$ должна быть аналитической.

Рассмотрим поведение дифференциалов dz и dw при обходе многоугольника в положительном направлении, указанном на рис. 4.33 стрелками. Левее b_0 аргумент dw равен нулю (dw действительно), тогда как аргумент dz определяется направлением отрезка a_4a_0 . В точке a_0 аргумент dz претерпевает скачок на величину φ_0 , а аргумент dw остается равным нулю. Как же должна вести себя производная dz/dw вблизи b_0 ? Согласно рис. 4.33, dz/dw на оси u должна быть действительной при $b_0 < w < b_1$, а переход w через b_0 , т. е. изменение $\arg(w - b_0)$ на $-\pi$, вызывает приращение $\arg(dz/dw)$ на величину φ_0 . Отсюда однозначно вытекает представление dz/dw вблизи b_0 в виде

$$\frac{dz}{dw} \simeq A(w - b_0)^\alpha \quad (w \rightarrow b_0).$$

Требуемое изменение аргумента в точке b_0 будет обеспечено при $\alpha = -\varphi_0/\pi$, так что

$$\frac{dz}{dw} \simeq A(w - b_0)^{-\varphi_0/\pi} \quad (w \rightarrow b_0). \quad (4.7.2)$$

Применяя это рассуждение последовательно ко всем b_i , получаем

$$\frac{dz}{dw} = A(w - b_0)^{-\varphi_0/\pi} (w - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (w - b_2)^{-\varphi_2/\pi} \dots \quad (4.7.3)$$

Так как z не должно иметь ни нулей, ни особых точек, отличных от b_i , то A в (4.7.3) есть постоянная. Согласно принципу отражения Шварца (см. стр. 372), функцию z можно продолжить на нижнюю полуплоскость, и притом z не будет иметь там новых особых точек. Проинтегрировав (4.7.3), мы получим формулу, определяющую преобразование Шварца — Кристоффеля

$$z = z_0 + A \int (\omega - b_0)^{-\varphi_0/\pi} (\omega - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (\omega - b_2)^{-\varphi_2/\pi} \dots d\omega. \quad (4.7.4)$$

Итак, формула (4.7.4) дает отображение внутренности некоторого многоугольника с внешними углами $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ на верхнюю полуплоскость плоскости ω . Выбирая постоянные $z_0, |A|$ и $\arg A$, мы можем добиться того, чтобы многоугольник в плоскости z имел нужное положение и размеры. Постоянные $b_0, b_1, \dots$ должны соответствовать точкам $a_0, a_1, \dots$. Так как мы располагаем еще тремя произвольными постоянными, то из чисел $b_0, b_1, \dots$ три можно задать как угодно. Остальные b_i мы найдем, проинтегрировав (4.7.3), выбрав z_0 и A и подставив значения $z = a_i$. Вообще говоря, b_i являются точками ветвления функции $z = z(\omega)$.

Одну из точек b_i обычно выбирают на бесконечности. Если это b_0 , то формула (4.7.4) принимает вид

$$z = z_0 + A \int (\omega - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (\omega - b_2)^{-\varphi_2/\pi} \dots d\omega. \quad (4.7.5)$$

Функции (4.7.4) и (4.7.5) отображают на верхнюю полуплоскость область, лежащую внутри многоугольника. Однако часто приходится иметь дело с областью, *внешней* по отношению к многоугольнику. При этом на многоугольнике должно быть выбрано противоположное направление обхода (т. е. по часовой стрелке), чтобы его внутренность при обходе оставалась справа. Углы φ_i в (4.7.4) должны быть взяты с обратными знаками. Вызывает еще затруднение точка p в плоскости ω , соответствующая бесконечно удаленной точке плоскости z . Точка $\omega = p$ должна быть полюсом функции $z(\omega)$ (заметим, что p не может лежать на действительной оси в плоскости ω), и, следовательно, подинтегральные функции в (4.7.4) или (4.7.5) должны еще содержать множитель вида $1/(\omega - p)$. Но одного этого множителя недостаточно, потому что его аргумент нарушит соответствие между границей многоугольника в плоскости z и действительной осью плоскости ω . Чтобы избежать этого, введем такой множитель, который при действительных ω принимает действительные значения, т. е. не меняет аргумента произведения. Таким множителем может служить $1/[(\omega - p)(\omega - \bar{p})]$, и вместо (4.7.4) мы возьмем

$$z = z_0 + A \int \frac{d\omega}{(\omega - p)(\omega - \bar{p})} \{ (\omega - b_0)^{-\varphi_0/\pi} (\omega - b_1)^{-\varphi_1/\pi} \dots \}. \quad (4.7.6)$$

Эта функция отображает область, внешнюю по отношению к многоугольнику, на полуплоскость ω . Напоминаем, что углы взяты, как указано на рис. 4.33, но с противоположными знаками.

Рассмотрим теперь несколько примеров, чтобы показать, как действует на практике изложенная теория. При этом мы ограничимся случаями, когда интегралы выражаются в элементарных трансцендентных функциях. Так бывает тогда, когда рассматриваются вырожденные треугольники и прямоугольники. В случае треугольника функция (4.7.5) принимает вид

$$z = z_0 + A \int (\omega - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (\omega - b_2)^{-\varphi_2/\pi} d\omega.$$

Рассмотрим в качестве примера 1 область, изображенную на рис. 4.34. Углы φ_1 и φ_2 показаны на фигуре, угол φ_0 при бесконечно удаленной вер-

шине a_0 можно вычислить, если считать заштрихованный многоугольник пределом треугольника, вершина a_0 которого удаляется в бесконечность в направлении, отмеченном стрелкой.

В этом случае отображение задается функцией

$$z = z_0 + A \int (-b_1)^{-1/2} (\omega - b_2)^{-1/2} d\omega.$$

Симметрия в расположении точек a_1 и a_2 позволяет принять $b_1 = -1$, $b_2 = 1$; тогда

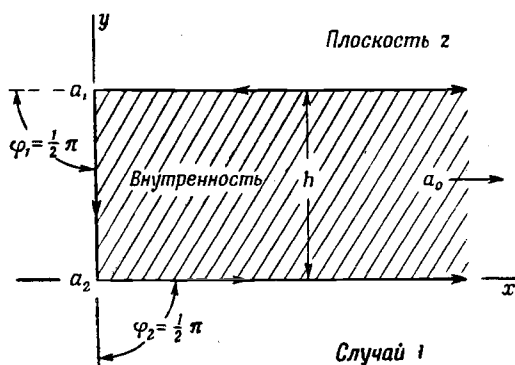
$$z = z_0 + A \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}} = z_0 + A \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \omega.$$

Для того чтобы вычислить z_0 и A , положим $z = 0$; этой точке соответствует $\omega = 1$, т. е.

$$0 = z_0 + A \operatorname{Ar} \operatorname{ch} 1 = z_0,$$

откуда

$$z_0 = 0.$$



Р и с. 4.34. Отображение внутренности вырожденного треугольника на верхнюю полуплоскость ω (заданные углы $\varphi_0 = \pi$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$).

Далее, точке $z = hi$ соответствует $\omega = -1$, т. е.

$$hi = A \operatorname{Ar} \operatorname{ch} (-1) = A\pi i$$

и, следовательно,

$$A = h/\pi.$$

Итак, мы получили преобразование

$$z = \frac{h}{\pi} \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \omega, \quad \omega = \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{h} z \right). \quad (4.7.7)$$

Проверить то, что эта функция отображает область, изображенную на рис. 4.34, на верхнюю полуплоскость, можно, придав z какое-нибудь конкретное значение. Пусть, например, $z = p + ih/2$. Тогда $\operatorname{ch} (\pi z/h) = \operatorname{ch} (\pi i/2 + \pi p/h) = i \operatorname{sh} (\pi p/h)$, и мы видим, что полупрямая, параллельная прямым $y=0$ и $y=h$ и проходящая посередине между ними, отображается на мнимую полуось плоскости ω . Отображение (4.7.7) как бы расправляет границу полуполосы и накладывает ее на действительную ось таким образом, что точки b_1 и b_2 располагаются симметрично относительно точки $\omega=0$. Естественно, что при этом «средняя линия» полуполосы попадает на мнимую полуось.

Если мы хотим отобразить на верхнюю полуплоскость область, внешнюю по отношению к заштрихованной на рис. 4.34 полуполосе, то нужно положить $\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = -\pi/2$. В этом случае p в формуле (4.7.6) можно положить равным $i\infty$ и мы получаем

$$z = z_0 + A \int \sqrt{w^2 - 1} dw,$$

то есть

$$z = z_0 + \frac{1}{2} A (w \sqrt{w^2 - 1} - \operatorname{Ar ch} w).$$

Значению $z = 0$ соответствует $w = 1$, и поэтому $z_0 = 0$; значению $z = hi$ соответствует $w = -1$, и поэтому $hi = -\frac{1}{2} A\pi i$, откуда $A = -2h/\pi$. Итак,

$$z = \frac{h}{\pi} (\operatorname{Ar ch} w - w \sqrt{w^2 - 1}). \quad (4.7.8)$$

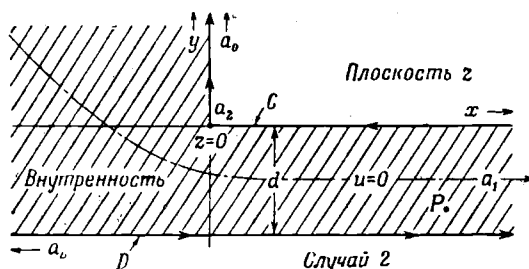


Рис. 4.35. В этом треугольнике углы таковы:
 $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = -\pi/2$.

В этой формуле нужно еще точно указать ветви функций $\operatorname{Ar ch} w$ и $\sqrt{w^2 - 1}$, определив их из условий задачи. Так, например, мы можем потребовать, чтобы значению $w = is$ соответствовали значения

$$\operatorname{Ar ch} w = \frac{\pi i}{2} + \operatorname{Ar sh} s, \quad \sqrt{w^2 - 1} = -i \sqrt{1 + s^2};$$

при этом

$$z = \frac{h}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} i + \operatorname{Ar sh} s - s \sqrt{1 + s^2} \right).$$

Значения $\operatorname{Ar sh} s$ всегда меньше, чем $s \sqrt{1 + s^2}$, а поэтому z будет иметь отрицательную действительную часть. Таким образом, в плоскости w точки верхней полуплоскости, лежащие на мнимой оси, перейдут в полупрямую, параллельную действительной оси в плоскости z и идущую от точки $ih/2$ к точке $-\infty + ih/2$. Мы можем быть уверены при этом, что незаштрихованная область рис. 4.34 отображается на верхнюю полуплоскость плоскости w .

Примеры. Для иллюстрации рассмотрим еще несколько примеров отображений настолько подробно, чтобы читатель мог следить за выводом формул. Область примера 2 изображена на рис. 4.35; это простой пример поля, «огигающего угол». Если проводящий контур $a_1 a_2 a_0$ несет один потенциал, скажем 0, а контур $a_0 a_1$ — другой, скажем V_0 , то в точке P при $x \gg d$ поле однородно, тогда как вблизи a_0 силовые линии имеют форму окружностей; особый характер этого поля обусловлен нали-

нием угла в точке a_2 . Естественно ожидать, что напряженность поля в a_2 бесконечна; интересен вопрос о том, каков порядок этой бесконечности.

В этом случае, если $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, то

$$z = z_0 + A \int \frac{\sqrt{w-1}}{w} dw,$$

$$z = z_0 + 2A \left(\sqrt{w-1} - \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i\sqrt{w-1}}{1-i\sqrt{w-1}} \right).$$

Чтобы полностью определить преобразование, нужно еще указать линии ветвления как в плоскости z , так и в плоскости w . Естественно, что для этого преобразования точки $w=0$ и $w=1$, т. е. точки b_i , а также ∞ , будут особыми. В качестве линии ветвления удобнее всего взять участок $\operatorname{Re} w < 1$ оси $\operatorname{Im} w = 0$. Из того, что при $w=1$ должно быть $z=0$, следует, что $z_0=0$. Будем приближаться к точке $w=0$ ($z=a_1$) по двум различным путям. Один путь, вдоль положительной действительной полуоси в плоскости w , соответствует пути $a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$ вдоль границы. Между a_2 и a_1 логарифм в последней формуле действителен и положителен, а поэтому $z=2A(-i\infty)$. Постоянная A должна быть чисто мнимой. Вторым путем, соответствующий участку границы $a_0 \rightarrow a_1$, будет идти вдоль отрицательной действительной полуоси. При этом логарифм имеет аргумент π и $z=2A[-i\infty - (1/2i)\pi i] = -A\pi + \infty = -di + \infty$, откуда $A=di/\pi$. Таким образом,

$$z = \frac{2di}{\pi} \left(\sqrt{w-1} - \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i\sqrt{w-1}}{1-i\sqrt{w-1}} \right).$$

Для проверки положим $w=iv$. Тогда $z \rightarrow (i-1)\infty$ при $v \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow -(1/2)di + \infty$ при $v \rightarrow 0$. Таким образом, мнимой оси в плоскости w будет в плоскости z соответствовать линия, нанесенная на рис. 4.35 пунктиром.

В плоскости w исходной физической задаче соответствует следующая: положительная действительная полуось имеет потенциал 0, отрицательная — потенциал V_0 . Решением является потенциал

$$V = \operatorname{Im} \left(\frac{V_0}{\pi} \ln w \right) = \frac{V_0}{\pi} \theta,$$

где θ — полярный угол в плоскости w .

Положим $W=U+iV$; тогда $w=e^{\pi W/V_0}$. Наиболее непосредственный физический интерес представляет электростатическое поле E . Последнее очень просто связано с функцией $dW/dz = \partial U/\partial x + i\partial V/\partial x$. В силу условий Коши — Римана [см. (4.2.1)]

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial x} = -(iE_x + E_y),$$

откуда

$$E_x - iE_y = i \frac{dW}{dz}.$$

Пологая $dW/dz = (dW/dw) \cdot (dw/dz)$, можно выразить $E_x - iE_y$ через w

$$E_x - iE_y = \frac{V_0}{d\sqrt{w-1}}.$$

Вблизи $w=0$ выражение $E_x - iE_y$ оказывается чисто мнимым, E_y — постоянным, а $E_x=0$, как и подсказывают физические соображения. При $\operatorname{Re} w \gg 1$ это выражение принимает действительные значения, а $E_y=0$,

как и должно быть вдоль пути $a_2 \rightarrow a_0$. При $|\omega| \gg 1$ имеем

$$z = \frac{2di}{\pi} \sqrt{\omega} \quad \text{и} \quad E_x - iE_y \simeq \frac{V_0}{d\sqrt{\omega}} \simeq \frac{2iV_0}{d\sqrt{\omega}}.$$

Вблизи a_0 силовые линии имеют вид дуг окружностей, идущих от C к D . Рассмотрим, наконец, поле вблизи a_2 , т. е. при ω , близких к 1. Как мы и предполагали, поле в этой точке бесконечно. Мы найдем поле в виде функции от z в окрестности этой точки, выразив $\sqrt{\omega-1}$ через z при $\omega \rightarrow 1$; имеем $z \simeq (2di/3\pi)(\omega-1)^{3/2}$, откуда $\sqrt{\omega-1} \simeq z^{1/3}$ и $E_x - iE_y \simeq z^{-1/3}$.

Рассмотрим пример 3 (рис. 4.36), в котором электрическое поле создается двумя бесконечными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии c , причем одна имеет потенциал 0, а другая V_0 . Мы ограничимся лишь построением самого отображения; что же касается самой физи-

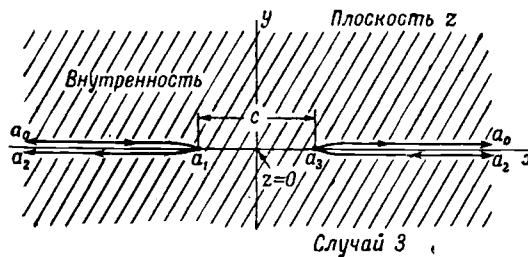


Рис. 4.36. Отображение вырожденного четырехугольника на верхнюю полуплоскость ω . «Внутренностью» четырехугольника служит вся плоскость z , за исключением точек, охватываемых линиями $a_0a_1a_2$ и $a_2a_3a_0$. В этом случае углы таковы: $\varphi_0=2\pi$, $\varphi_1=-\pi$, $\varphi_2=2\pi$, $\varphi_3=-\pi$.

ческой задачи, то она решается точно так же, как в примере 2. Сечения пластин можно рассматривать как вырожденный четырехугольник с вершинами a_0 , a_1 , a_2 , a_3 (см. рис. 4.36).

Точки b_1 и b_3 должны быть симметричны относительно b_2 , поэтому мы положим $b_1 = -1$, $b_3 = 1$. Тогда

$$z = z_0 + A \int \frac{(\omega-1)(\omega+1)}{\omega^2} d\omega,$$

то есть

$$z = z_0 + A \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right).$$

Значению $\omega = 1$ соответствует $z = c/2 = z_0 + 2A$, а значению $\omega = -1$ соответствует $z = -c/2 = z_0 - 2A$. Отсюда следует, что $z_0 = 0$ и $A = c/4$, так что

$$z = \frac{c}{4} \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right).$$

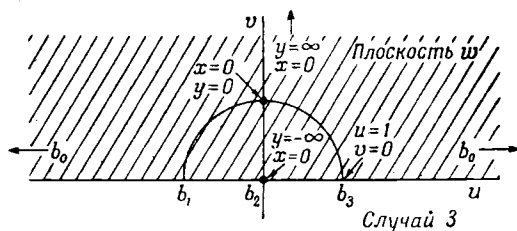
На рис. 4.37 изображено, как отображаются на плоскость ω оси x и y плоскости z . Отрезок оси x от точки $-c/2$ до точки $c/2$ превращается в полуокружность единичного радиуса плоскости ω . Ось y , «сжавшись», отображается в мнимую полуось от $\omega = 0$ до $\omega = i\infty$. Рассматриваемое отображение как бы поворачивает линии $a_3 \rightarrow a_2$ и $a_2 \rightarrow a_1$ от их исходного положения в плоскости z на 180° через нижнюю полуплоскость и соединяет их; на оси x появляется полукруглое вздутие, которое вбирает в себя всю нижнюю полуплоскость плоскости z .

Метод инверсии. Формула Шварца — Кристоффеля может быть применена и к областям, ограниченным дугами окружностей, с помощью метода инверсии. Преобразование инверсии естественно возникает при рассмотрении изображения источника относительно круговой границы. С этим вопросом мы уже встречались (см. формулу Пуассона на стр. 353); как уже упоминалось, точка

$$w = \frac{a^2}{z} \quad (4.7.9)$$

называется изображением точки z относительно окружности радиуса a с центром в начале. Преобразование, определяемое формулой (4.7.9), называется *инверсией* (относительно указанной окружности). Оно отображает область, лежащую внутри окружности, во внешнюю область, и наоборот.

Инверсия (4.7.9) сохраняет величины углов, но изменяет направление отсчета. Действительно, она представляет собой результат двух последовательных преобразований: отображения, осуществляемого функцией a^2/z , и последующего зеркального отображения относительно действительной



Р и с. 4.37. Верхняя полуплоскость w в примере 3. Показаны образ оси x и точки, соответствующие $z = \infty$.

оси. Первое отображение — конформное; второе сохраняет абсолютные величины углов, но изменяет их знаки.

В этом пункте нам понадобится применить преобразование (4.7.9) к окружности, проходящей через центр круга инверсии. Мы покажем, что в результате получится прямая линия, проходящая, разумеется, через точки пересечения обеих окружностей. В плоскости z окружность с центром в точке z_0 (без ущерба для общности z_0 предполагается действительным и положительным), проходящая через начало координат, имеет уравнение

$$|z - z_0| = z_0^2,$$

или

$$\bar{z}z - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) = 0. \quad (4.7.10)$$

Для того чтобы получить равенство соответствующего геометрического места в плоскости w , нужно выразить z и $\bar{z}$ через $\bar{w}$ и w , пользуясь равенством (4.7.9), и подставить в (4.7.10). При этом мы получаем

$$\frac{a^4}{w\bar{w}} - z_0 \left(\frac{a^2}{w} + \frac{a^2}{\bar{w}} \right) = 0.$$

Отсюда, обозначив $u = \operatorname{Re} w$, приходим к уравнению

$$u = \frac{a^2}{2z_0},$$

что и доказывает наше утверждение.

Роль инверсии в обобщении формулы Шварца — Кристоффеля теперь ясна. Пересекающиеся дуги окружностей, такие, как P и Q на рис. 4.38,

подвергаются инверсии относительно окружности R радиуса a с центром в точке пересечения P и Q . Сама точка пересечения переходит при этом в бесконечно удаленную точку, а дуги P и Q — в части прямых P' и Q' , изображенные сплошными линиями. Теперь к этим прямым можно применить отображение Шварца — Кристоффеля.

Отображение Шварца — Кристоффеля применимо и к более сложным контурам, состоящим из дуг окружностей. Однако рассмотрение их

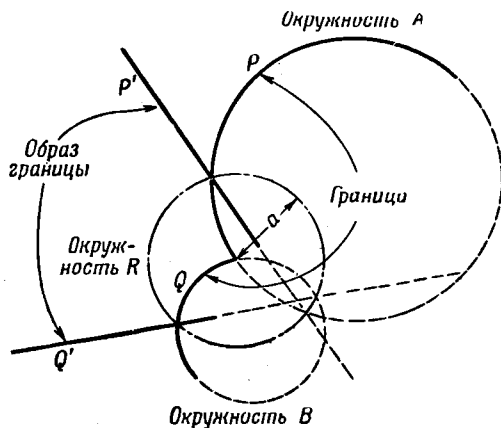


Рис. 4.38. Инверсия (относительно окружности R) дуг окружностей P и Q , превращающая их в части прямых P' и Q' .

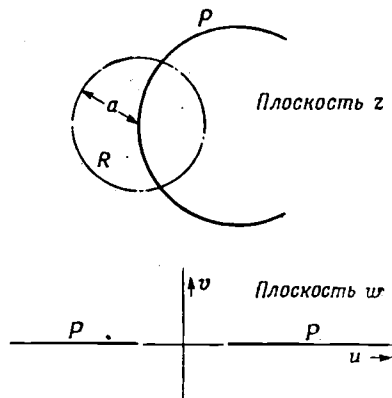


Рис. 4.39. Инверсия дуги окружности P относительно окружности R , переводящая дугу P плоскости z в участок прямой P плоскости w .

завело бы нас слишком далеко. Поэтому мы ограничимся случаем, когда имеется не более двух пересекающихся дуг окружностей, и отошлем любознательного читателя к другим руководствам, где рассмотрены более общие контуры. На рис. 4.39 изображена одна дуга и преобразованный контур, который был рассмотрен выше в примере 3.

4.8. Преобразование Фурье

В будущем нам часто придется применять преобразование Фурье, а также связанные с ним преобразования Лапласа и Меллина. В настоящем параграфе мы изучим те свойства этих преобразований, которые окажутся полезными нам в дальнейшем.

Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция $F(k)$, определенная формулой

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikh} f(x) dx. \quad (4.8.1)$$

Здесь и в дальнейшем преобразование какой-либо функции будет обозначаться той же буквой, что и исходная функция, но прописной. Того же правила мы будем придерживаться, применяя другие преобразования, так как подчеркивать различие требуется не всегда. В тех случаях, когда это нужно, мы будем приписывать индексы f , l и m , обозначающие соответственно преобразования Фурье, Лапласа и Меллина. Так, F_f будет обозначать преобразование Фурье функции f . Впрочем в отдельных случаях будут употребляться буквы $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, так что преобразование Фурье функции f будет также обозначаться $\mathcal{F}(f)$.

Основную роль в этой теории играет *интегральная теорема Фурье* (или интеграл Фурье), согласно которой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\zeta-x)} f(\zeta) d\zeta. \quad (4.8.2)$$

Вводя в (4.8.2) выражение для $F(k)$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} F(k) dk.$$

В такой форме (4.8.2) часто называется *формулой обращения Фурье*.

Связь с рядами Фурье. Прежде чем сколько-нибудь подробно рассмотреть условия, при которых справедлива интегральная теорема Фурье, полезно рассмотреть связь этой теоремы с рядами Фурье. Рассмотрим ряд по синусам функции $h(x)$ в промежутке $0 \leq x \leq l$

$$h(x) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Такого рода ряды мы рассматривали в гл. 2, где они играли важную роль в задаче о колебаниях струны; мы вернемся к ним еще в гл. 6. Из соотношений

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l_{nm}$$

получаем выражения коэффициентов

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Подставляя эти выражения в ряд для $h(x)$, приходим к формуле

$$h(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^l h(\zeta) \sin \frac{n\pi \zeta}{l} d\zeta \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Посмотрим теперь, как будет вести себя этот ряд при $l \rightarrow \infty$. Для этого введем функцию целочисленного аргумента $k = k_n = n\pi/l$. Обозначив $\Delta k = k_{n+1} - k_n = \pi/l$, запишем

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta k \left(\int_0^l h(\zeta) \sin k_n \zeta d\zeta \right) \sin k_n x.$$

Довольно ясно, что при $l \rightarrow \infty$, когда $\Delta k \rightarrow 0$, этот ряд имеет своим пределом интеграл

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} h(\zeta) \sin k\zeta \sin kx d\zeta. \quad (4.8.3)$$

Эта формула справедлива лишь для нечетных функций. В случае четной функции $g(x)$ следует воспользоваться разложением в ряд по

косинусам, которое приводит нас к формуле

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} g(\zeta) \cos k\zeta \cos kx d\zeta. \quad (4.8.4)$$

Ясно, что в формулах (4.8.3) и (4.8.4) можно, введя множитель $1/4$, распространить интегрирование на всю числовую ось, так что, например, первая из этих формул может быть записана в виде:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta) \sin k\zeta \sin kx d\zeta.$$

Для того чтобы получить формулу, пригодную для произвольной функции, представим эту последнюю в виде суммы четной и нечетной функции, а именно

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)].$$

В силу равенств

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos kx dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin kx dx = 0$$

мы получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} [f(\zeta) - f(-\zeta)] \sin k\zeta \sin kx d\zeta + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} [f(\zeta) + f(-\zeta)] \cos k\zeta \cos kx d\zeta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} [f(\zeta) \cos k(\zeta - x) + f(-\zeta) \cos k(\zeta + x)] d\zeta, \end{aligned}$$

откуда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \cos k(\zeta - x) d\zeta. \quad (4.8.5)$$

Для того чтобы получить формулу (4.8.2), заметим, что

$$i \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \sin k(\zeta - x) d\zeta = 0, \quad (4.8.6)$$

если только этот интеграл сходится, так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \sin k(\zeta - x) d\zeta$$

представляет собой нечетную функцию переменного k . Предполагая, что интеграл (4.8.6) существует, сложим почленно формулы (4.8.5), (4.8.6) и получим интеграл Фурье (4.8.2).

Эти выкладки показывают, что интеграл Фурье представляет собой аналог ряда Фурье для случая непериодической функции, заданной в промежутке $-\infty < x < \infty$. В задаче о колебаниях струны интеграл Фурье

служит для описания движения бесконечной струны, простирающейся от $-\infty$ до $+\infty$. В случае полубесконечной струны, простирающейся от 0 до $+\infty$ и закрепленной в точке $x=0$, более удобна формула (4.8.3). Формулы (4.8.3) и (4.8.4) часто называются интегралами Фурье соответственно по синусам и по косинусам. Функции

$$F_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx \, dx \quad (4.8.7)$$

и

$$F_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx \quad (4.8.8)$$

называются соответственно синус- и косинус-преобразованиями Фурье функции $f(x)$. Сами формулы (4.8.3) и (4.8.4) можно трактовать как формулы обращения

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(k) \sin kx \, dk, \quad (4.8.9)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(k) \cos kx \, dk. \quad (4.8.10)$$

Некоторые интегральные теоремы. Только что приведенный вывод интеграла Фурье носит чисто эвристический характер и не дает никаких указаний относительно границ применимости этой формулы. Теперь мы должны подойти к этому вопросу с большей строгостью. Чтобы добиться наибольшей общности результатов, необходимо прибегнуть к понятию интеграла Лебега. Недостаток места не позволяет нам сколько-нибудь подробно коснуться тонких вопросов, относящихся к теории меры и интеграла Лебега. С чисто практической точки зрения интеграл Лебега отличается от обычного интеграла Римана тем, что первый определен для любой ограниченной функции, которая может реально встретиться в математическом анализе и в прикладных вопросах, каково бы ни было множество ее точек разрыва, тогда как интеграл Римана от функции, имеющей несчетное множество разрывов, вообще говоря, не существует¹⁾. С другой стороны, для тех функций, для которых существует интеграл Римана, интеграл Лебега также существует и совпадает с римановым интегралом. В то же время, говоря образно, интеграл Лебега можно определить даже для таких функций, которые в некоторой области колеблются «бесконечно часто». В качестве примера, иллюстрирующего различие этих интегралов, можно привести функцию $f(x)$, определенную в промежутке $(0, 1)$ и принимающую значения 1 и 0 соответственно при рациональных и иррациональных значениях x . Интеграл Римана такой функции не определен, лебеговский же интеграл существует и равен нулю. Заметим, наконец, что интеграл Лебега обладает всеми основными свойствами интеграла Римана.

¹⁾ По поводу интегрирования функций общего вида (т. е., вообще говоря, неограниченных), играющих какую-либо роль в приложениях математики, заметим следующее. Если функция такого рода не меняет знака, то ее интеграл Лебега либо конечен (в этом случае функция называется интегрируемой по Лебегу), либо равен бесконечности; интеграл же Римана от такой функции может вовсе не существовать. Функция, меняющая знак, считается интегрируемой по Лебегу, если интегрируема ее абсолютная величина. — *Прим. ред.*

О функции $f(x)$ говорят, что она принадлежит *лебеговскому классу* L^p ($p > 0$) на интервале (a, b) , если $|f(x)|^p$ интегрируема (в смысле Лебега) на этом интервале.

Прежде чем доказывать интегральную теорему Фурье, мы выведем *формулу Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (4.8.11)$$

Эта формула применима, если $f(x)$ принадлежит классу L^2 на интервале $(-\infty, \infty)$. Ниже мы увидим, что интеграл Фурье является почти непосредственным следствием формулы Парсеваля. Для доказательства этой последней рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta^2 k^2 / 2} |F(k)|^2 dk.$$

Подставляя в I интеграл, выражающий $F(k)$, получаем

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta^2 k^2 / 2} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta^2 k^2 / 2 + ik(x-\zeta)} dk. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование по k , преобразуем I к виду

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\zeta) e^{-(x-\zeta)^2 / 2\delta^2} d\zeta. \quad (4.8.12)$$

Теперь мы можем показать, что $F(x)$ принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$. Записывая I в виде

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(x-\zeta)^2 / 4\delta^2} \bar{f}(\zeta) e^{-(x-\zeta)^2 / 4\delta^2} dx d\zeta$$

и применяя к этому интегралу неравенство Шварца¹⁾, получаем

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-(x-\zeta)^2 / 2\delta^2} dx d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\zeta)|^2 e^{-(x-\zeta)^2 / 2\delta^2} dx d\zeta \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-(x-\zeta)^2 / 2\delta^2} dx d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.8.13)$$

В пределе при $\delta \rightarrow 0$ отсюда имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

¹⁾ Одна из форм неравенства Шварца была выведена в гл. 1. В том виде, в каком оно используется здесь, это неравенство читается так: если функции $u(x, \zeta)$ и $v(x, \zeta)$ принадлежат L^2 , то

$$\left| \int \int u(x, \zeta) v(x, \zeta) dx d\zeta \right|^2 \leq \left[\int \int |u(x, \zeta)|^2 dx d\zeta \right] \left[\int \int |v(x, \zeta)|^2 dx d\zeta \right].$$

Мы видим, что $F(k)$ принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$, коль скоро этим свойством обладает $f(x)$.

В действительности, как мы сейчас докажем, последнее соотношение сводится к равенству. Произведя в (4.8.12) замену переменной интегрирования $\zeta = x + y$, мы получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\delta^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x+y) f(x) dx. \quad (4.8.14)$$

Известно, что график функции $e^{-y^2/2\delta^2}/(\sqrt{2\pi}\delta)$ становится все более и более заостренным при $\delta \rightarrow 0$, но интеграл ее по y при всех значениях δ равен 1. Поэтому если интеграл

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x+y) f(x) dx$$

представляет собой достаточно гладкую функцию вблизи $y=0$, то естественно ожидать, что I стремится к $h(0)$ при $\delta=0$. Справедливость этого вытекает из интегрируемости квадрата модуля функции $h(x)$, т. е. из того факта, что $h(y)$, как функция от y , принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$. Таким образом, для того чтобы получить предел функции I при $\delta \rightarrow 0$, достаточно положить $y=0$ во внутреннем интеграле (4.8.14); при этом получаем формулу Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (4.8.15)$$

Следует подчеркнуть, что это доказательство относится как к действительным, так и к комплексным функциям f .

Интегральная теорема Фурье. Перейдем теперь к доказательству интегральной теоремы Фурье в том виде, как она была сформулирована Планшерелем.

Предположим, что функция $f(x)$ принадлежит классу L^2 на интервале $(-\infty, \infty)$, и пусть

$$F(k, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(x) e^{ikx} dx.$$

Тогда при $a \rightarrow \infty$ функции $F(k, a)$ сходятся в среднем к функции $F(k)$ на интервале $(-\infty, \infty)$, и если

$$f(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a F(k) e^{-ikx} dk,$$

то $f(x, a)$ сходятся в среднем к $f(x)$.

Сходимость в среднем $F(k, a)$ к $F(k)$ на интервале $(-\infty, \infty)$ означает, по определению, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k, a) - F(k)|^2 dk = 0. \quad (4.8.16)$$

Иначе говоря, функция $F(k, a)$ приближенно представляет функцию $F(k)$ со средней квадратичной погрешностью, стремящейся к нулю при $a \rightarrow \infty$.

Для доказательства этой теоремы подставляем в (4.8.15) $F + G$ вместо F и $f + g$ вместо f . Мы получаем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |F + G|^2 dk &= \int_{-\infty}^{\infty} [|F|^2 + |G|^2 + 2 \operatorname{Re}(F\bar{G})] dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [|f|^2 + |g|^2 + 2 \operatorname{Re}(f\bar{g})] dx.\end{aligned}$$

В силу формулы Парсеваля отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(F\bar{G}) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(f\bar{g}) dx.$$

Подобным же образом, подставив в (4.8.15) $F + iG$ вместо F и $f + ig$ вместо f , приходим к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}(F\bar{G}) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}(f\bar{g}) dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\bar{G} dk = \int_{-\infty}^{\infty} f\bar{g} dx, \quad (4.8.17)$$

и из этой невинной маленькой формулы будут вытекать почти все нужные нам теоремы, касающиеся преобразования Фурье.

Пусть функция $g(x)$ равна 1 на интервале $(0, \zeta)$, а вне этого интервала равна нулю. Преобразованием Фурье этой функции служит

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\zeta} e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik\zeta} - 1}{ik}.$$

Отсюда, согласно предыдущему абзацу, вытекает равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \frac{1 - e^{-ik\zeta}}{ik} dk = \int_0^{\zeta} f dx.$$

Взяв производные по ζ от обеих частей, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik\zeta} dk = f(\zeta),$$

т. е. обычную формулу обращения¹⁾.

Нам нужно еще показать, что функция $F(k)$ существует, т. е. что $F(k, a)$ сходятся в среднем к $F(k)$ при $a \rightarrow \infty$. Так как

$$F(k, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(x) e^{ikx} dx,$$

¹⁾ Это рассуждение, а также некоторые последующие рассуждения в этом параграфе проведены не вполне аккуратно. См., например, книгу Е. К. Титчмарша, Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.—Прим. ред.

то $F(k, a)$ является преобразованием функции, равной $f(x)$ при $|x| < a$ и тождественно равной нулю при $|x| > a$. Разность же $H(k, a) = F(k, a) - F(k)$ является преобразованием функции, равной нулю при $|x| < a$ и совпадающей с $f(x)$ при $|x| > a$. Применяя формулу Парсеваля, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(k, a)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k, a) - F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|^2 dx + \int_a^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Мы видим, что $\int |F(k, a) - F(k)|^2 dk \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, т. е. соотношение (4.8.16) справедливо.

Свойства преобразования Фурье. Доказав интегральную теорему Фурье, обратимся теперь к выяснению свойств преобразования Фурье в комплексной плоскости. Особенно ценной будет для нас следующая теорема:

Пусть функция $f(z)$ ($z = x + iy$) аналитична в полосе

$$y_- < y < y_+,$$

причем $y_+ > 0$ и $y_- < 0$. Если в любой полосе, лежащей внутри исходной полосы,

$$|f(z)| \leq \begin{cases} Ae^{\tau_- x} & \text{при } x \rightarrow +\infty, \\ Be^{\tau_+ x} & \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

где $\tau_- < 0$ и $\tau_+ > 0$, то функция $F(k)$ ($k = \sigma + i\tau$) аналитична в полосе

$$\tau_- < \tau < \tau_+,$$

причем в любой полосе, лежащей внутри этой,

$$|F(k)| < \begin{cases} Ce^{-\nu_+ \sigma} & \text{при } \sigma \rightarrow +\infty, \\ De^{-\nu_- \sigma} & \text{при } \sigma \rightarrow -\infty; \end{cases}$$

здесь A, B, C и D — действительные постоянные.

Для доказательства достаточно заметить, что аналитичность функции

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\tau x} e^{i\sigma x} dx$$

обусловлена характером сходимости определяющего интеграла. Если $\tau_- < \tau < \tau_+$, то модуль подинтегральной функции убывает как $e^{(\tau_- - \tau)x}$ или как $e^{(\tau_+ - \tau)x}$ соответственно при $x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$. Тем самым обеспечивается равномерная (относительно $k = \sigma + i\tau$) сходимость рассматриваемого интеграла и, следовательно, аналитичность функции $F(k)$. Рассмотрим теперь поведение $F(k)$ в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$. Так как $f(z)$ — аналитическая функция, то интеграл, определяющий $F(k)$, можно взять вдоль прямой, параллельной оси x и лежащей в полосе $y_- < y < y_+$. Тогда

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ikz} dz = \frac{e^{-\sigma y}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i(\sigma x - \tau y)} e^{-\tau x} dz.$$

Отсюда мы заключаем, что при $|\sigma| \rightarrow \infty$

$$|F(k)| \leq E e^{-\sigma y}.$$

Для значений y , близких к y_+ , сходимость рассматривается лишь при $\sigma > 0$, а для y , близких к y_- , — при $\sigma < 0$. Тем самым теорема доказана.

В том случае, когда функция $f(x)$ не принадлежит классу L^2 на интервале $(-\infty, \infty)$, например из-за ее поведения при $x \rightarrow +\infty$, может случиться, что некоторая функция вида

$$g(x) = f(x) e^{-\tau_0 x}$$

все-таки принадлежит классу L^2 . Применяя к $g(x)$ формулу обращения, получаем

$$g(x) = f(x) e^{-\tau_0 x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{-ikx} dk,$$

откуда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{-i(k+i\tau_0)x} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} G(\zeta - i\tau_0) e^{-i\zeta x} d\zeta.$$

Функция $G(\zeta - i\tau_0)$ весьма просто связана с $F(k)$. В самом деле,

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\tau_0 x} e^{ikx} dx$$

и

$$G(\zeta - i\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\zeta x} dx = F(\zeta),$$

откуда получается следующая формула обращения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F(k) e^{-ikx} dk. \quad (4.8.18)$$

Однако часто случается, что одного множителя вида $e^{-\tau_0 x}$ недостаточно для всего интервала $-\infty < x < \infty$. Тогда мы вводим функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) e^{-\tau_0 x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\tau_0 > 0),$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ f(x) e^{-\tau_1 x}, & x < 0 \end{cases} \quad (\tau_1 < 0).$$

При этом постоянная τ_0 выбирается по возможности меньшей, а τ_1 — большей, но так, чтобы $f_+(x)$ и $f_-(x)$ принадлежали L^2 при $x \rightarrow \pm \infty$. Соответствующими преобразованиями являются

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-\tau x} e^{i\tau x} dx \quad (\tau > \tau_0),$$

$$F_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-\tau x} e^{i\tau x} dx \quad (\tau < \tau_1),$$

где $k = \sigma + i\tau$.

Согласно интегральной формуле Фурье,

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\sigma + i\tau_0) e^{-i\tau x} d\sigma,$$

откуда следует, что

$$\left. \begin{aligned} f(x) \quad (x > 0) \\ 0 \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\sigma + i\tau_0) e^{-i(\sigma + i\tau_0)x} d\sigma = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} F_+(k) e^{-ikx} dk.$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} 0 \quad (x > 0) \\ f(x) \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau_1}^{\infty + i\tau_1} F_-(k) e^{ikx} dk.$$

Складывая почленно, получаем формулу обращения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} F_+(k) e^{-ikx} dk + \int_{-\infty + i\tau_1}^{\infty + i\tau_1} F_-(k) e^{-ikx} dk. \quad (4.8.19)$$

Аналитичность функций F_+ и F_- вытекает из предыдущей теоремы. В силу определения функции F_+ интеграл, ее представляющий, сходится при $\tau > \tau_0$, а поэтому F_+ аналитична в полуплоскости $k = \sigma + i\tau$, расположенной над прямой $\tau = \tau_0$. Аналогично функция F_- аналитична в полуплоскости $\tau < \tau_1$.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = e^{|x|}$. В этом случае можно положить $\tau_0 = 1 + \varepsilon$ и $\tau_1 = -1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Функции F_+ и F_- будут, следовательно, аналитическими соответственно при $\tau > 1$ и при $\tau < -1$. Чтобы убедиться в этом, вычислим эти функции:

$$F_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^x e^{ikx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + ik} \quad (\tau > 1), \\ F_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-x} e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-1 + ik} \quad (\tau < -1).$$

Для функций F_- и F_+ точки $k = i$ и $k = -i$ соответственно являются особыми; эти точки определяют области аналитичности F_+ и F_- . Функция F_+ , например, аналитична выше прямой $\text{Im } k = 1$.

Асимптотические значения преобразования. Здесь уместно рассмотреть асимптотическое поведение функций F_+ и f_+ , а также функций F_- и f_- . Предположим что $F_+(k)$ можно разложить в ряд по степеням $1/k$

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(-ik)^n}, \quad \tau > \tau_0.$$

Вводя это разложение в формулу обращения (4.8.19)

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} F_+(k) e^{-ikx} dk,$$

получаем

$$f_+(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_n a_n \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^n} dk.$$

Воспользуемся теперь равенством

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{e^{-ikx}}{ik} dk = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

которое получается из формулы обращения, поскольку непосредственным интегрированием легко убедиться в том, что $(-1/\sqrt{2\pi})(1/ik)$ представляет собой преобразование функции, равной 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$. Последовательно интегрируя по x обе части этого равенства, приходим к формуле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^n} dk = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$e^{-\alpha x} f_+(x) = \sum_n \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!},$$

то есть

$$a_n = f^{(n-1)}(0).$$

Таким образом,

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \frac{f^{(n-1)}(0)}{(-ik)^n}.$$

Мы замечаем, что поведение $F_+(k)$ при больших значениях $|k|$ в верхней полуплоскости связано с поведением f вблизи нуля.

Общая формулировка. Рассмотрим теперь вопрос об обращении формулы (4.8.19). Предположим, что нам дано выражение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} G(k) e^{-ikx} dk + \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} H(k) e^{-ikx} dk \right).$$

При каких условиях G и H можно отождествить соответственно с F_+ и F_- ? Согласно предыдущему, одна из этих функций должна быть аналитической выше некоторой прямой, параллельной действительной оси, а другая — ниже некоторой другой прямой, также параллельной действительной оси. Далее если области аналитичности этих функций перекрываются, то должно быть $F_+ = -F_-$ и, следовательно, $G = -H$. Это следует из определения функций F_+ и F_- , так как, разлагая f в ряд по степеням x и интегрируя почленно (если это возможно), мы получим для F_+ и $-F_-$ одно и то же разложение по степеням $1/iK$. Таким образом, F_+ и $-F_-$ совпадают в общей части их области аналитичности и, следовательно, F_+ служит аналитическим продолжением функции $-F_-$ в верхней полуплоскости, а F_- — аналитическим продолжением $-F_+$ в нижней полуплоскости. Отсюда мы можем заключить, что если G не равна $-H$, то G и H могут быть отождествлены с F_+ и F_- лишь в том случае, когда не существует области, в которой обе эти функции были бы аналитичны.

Функции G и H не могут быть отождествлены с F_+ и F_- и тогда, когда G и H являются аналитическими не в полуплоскостях, а в неперекрывающихся полосах. Однако в этом случае важный вывод можно сделать тогда, когда $f = 0$, т. е. при условии

$$\int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} G(k) e^{-ikx} dk + \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} H(k) e^{-ikx} dk = 0. \quad (4.8.20)$$

Точнее говоря, предположим, что выполняется (4.8.20) и, кроме того:

- 1) G аналитична в полосе $\tau'_0 \leq \tau \leq \tau''_0$, содержащей прямую $\tau = \tau_0$;
- 2) H аналитична в полосе $\tau'_1 \leq \tau \leq \tau''_1$, содержащей прямую $\tau = \tau_1$;
- 3) $\tau''_1 < \tau'_0$;
- 4) G и H принадлежат классу L^1 в интервале $(-\infty, \infty)$;
- 5) G и H стремятся к нулю, когда $|\sigma| \rightarrow \infty$ в соответствующей полосе ($k = \sigma + i\tau$).

При выполнении всех этих условий можно показать следующее:

- 1) функции G и H обе аналитичны в полосе $\tau'_1 < \tau < \tau''_0$,
- 2) в этой полосе $G + H = 0$.

Области, о которых идет речь в условиях и в утверждении теоремы, изображены на рис. 4.40 соответственно слева и справа.

Для доказательства умножим (4.8.20) на $e^{i\tau z}$ и проинтегрируем по z . В силу абсолютной сходимости интегралов в (4.8.20) порядок интегрирования можно обратить. При этом мы получаем

$$\int_{-\infty+i\tau'_0}^{\infty+i\tau''_0} \frac{G(k)}{k-\zeta} dk + \int_{-\infty+i\tau''_1}^{\infty+i\tau'_1} \frac{H(k)}{k-\zeta} dk = 0. \quad (4.8.21)$$

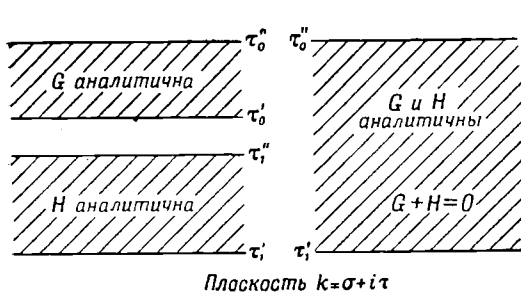


Рис. 4.40. Области аналитичности функций G и H .

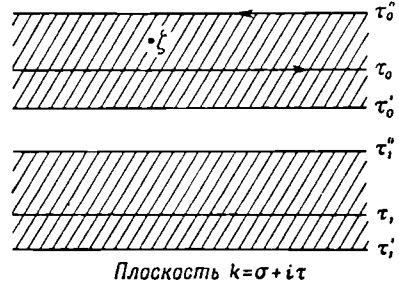


Рис. 4.41. Контуры при аналитическом продолжении функций G и H .

Выберем ζ так, чтобы $\text{Im } \zeta$ была заключена между τ_0 и τ''_0 . Применяя интеграл Коши к контуру, изображенному на рис. 4.41, получаем

$$\int_{-\infty+i\tau'_0}^{\infty+i\tau''_0} \frac{G(k)}{k-\zeta} dk - \int_{-\infty+i\tau''_0}^{\infty+i\tau'_1} \frac{G(k)}{k-\zeta} dk = 2\pi i G(\zeta).$$

Отсюда

$$\int_{-\infty+i\tau''_0}^{\infty+i\tau'_0} \frac{G(k)}{k-\zeta} dk + \int_{-\infty+i\tau'_1}^{\infty+i\tau''_1} \frac{H(k)}{k-\zeta} dk = -2\pi i G(\zeta), \quad (4.8.22)$$

где $\tau''_1 > \tau_1 > \tau'_1$. Значение $\text{Im } \zeta$ в левой части может быть любым между τ''_0 и τ_1 , а следовательно, формула (4.8.22) дает аналитическое продолжение функции $G(\zeta)$ за пределы ее исходной области аналитичности.

Точно так же

$$\int_{-\infty+i\tau'_0}^{\infty+i\tau''_0} \frac{G(k)}{k-\zeta} dk + \int_{-\infty+i\tau'_1}^{\infty+i\tau''_1} \frac{H(k)}{k-\zeta} dk = 2\pi i H(\zeta), \quad (4.8.23)$$

где $\tau'_1 < \text{Im } \zeta < \tau_0$.

Мы видим, что при $\tau_1 < \operatorname{Im} \zeta < \tau_0$ справедливы обе формулы (4.8.23) и (4.8.22). Фиксировав ζ в этой области, вычитаем (4.8.22) из (4.8.23):

$$\begin{aligned} 2\pi i [H(\zeta) + G(\zeta)] &= \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{G(k)}{k-\zeta} dk - \int_{-\infty+i\tau_0''}^{\infty+i\tau_0''} \frac{G(k)}{k-\zeta} dk + \\ &+ \int_{-\infty+i\tau_1'}^{\infty+i\tau_1'} \frac{H(k)}{k-\zeta} dk - \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \frac{H(k)}{k-\zeta} dk = \oint \frac{G(k)}{k-\zeta} dk + \oint \frac{H(k)}{k-\zeta} dk. \end{aligned}$$

Так как ζ лежит вне контуров интегрирования, то оба последних интеграла равны нулю. Тем самым теорема доказана.

Полученных сведений из общей теории для нас достаточно. Мы познакомились с интегралом Фурье, выяснили аналитические свойства преобразования Фурье и получили выражения преобразований и формулы обращения для тех случаев, когда из-за поведения функции при $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$ не удовлетворяются условия теоремы Фурье. Теперь мы перейдем к приложениям.

Свертка. Интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h(x-y) dy \quad (4.8.24)$$

называется *сверткой* функций f и h . Название связано с тем, что аргумент $x-y$ функции h свернут по y . Мы покажем, что если f и h принадлежат классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$, то преобразованием Фурье этого интеграла служит $F(k)H(k)$, т. е. произведение преобразований функций f и h . Эта теорема оказывается чрезвычайно полезной при решении некоторых интегральных уравнений (см. § 8.4). Вытекает она непосредственно из формулы Парсеваля (4.8.17). В самом деле, если $\bar{g}(y) = h(x-y)$, то

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \bar{h}(x-y) dy, \\ \bar{G} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} h(x-y) dy. \end{aligned}$$

Положим $x-y = \xi$, так что

$$\bar{G} = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikh} h(\xi) d\xi.$$

Отсюда в силу (4.8.17)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h(x-y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) H(k) e^{-ikx} dk, \quad (4.8.25)$$

что и требовалось доказать. Таким образом, интеграл (4.8.24) является как раз обратным преобразованием Фурье функции FH . В силу взаимности, существующей между функциями и их преобразованиями Фурье, формуле (4.8.25) можно придать иной вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(l) H(k-l) dl,$$

так что преобразованием произведения fh служит свертка преобразований функций f и h (т. е. свертка функций F и H).

Эту теорему можно обобщить. Рассматривая правую часть формулы (4.8.25) как функцию от x , умножим обе части этой формулы на $p(z-x)$ и возьмем интеграл по x . Получим функцию от z , равную

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(z-x) h(x-y) f(y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(k) H(k) F(k) e^{-ikz} dk.$$

В качестве примера применения формулы (4.8.25) рассмотрим простое интегральное уравнение

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h(x-y) dy,$$

в котором функции g и h даны, а искомой является функция f . Подвергая обе его части преобразованию Фурье, приходим к уравнению

$$G(k) = \sqrt{2\pi} F(k) H(k),$$

откуда

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G(k)}{H(k)}$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{H(k)} e^{-ikx} dk.$$

Это, конечно, только частное решение рассматриваемого интегрального уравнения; кроме того, оно годится лишь в том случае, когда функция G/H принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$. Уравнения такого вида будут рассмотрены более полно в § 8.4.

Формула суммирования Пуассона. Интеграл Фурье иногда помогает также при вычислении сумм рядов. Так, например, сумма ряда весьма общего вида $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an)$ может быть вычислена следующим образом. Допустим, что f принадлежит классу L^2 в интервале $(-\infty, \infty)$. Если взять функции

$$f_+(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ f, & x > 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} f, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

то

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k) e^{-ikx} dk, \quad (4.8.26)$$

где в силу предположения относительно f постоянную τ_0 можно считать отрицательной. Преобразование $F_+(k)$ представляет собой аналитическую функцию при $\tau > \tau'_0$, где $\tau'_0 > \tau_0$ (см. рис. 4.41). Мы имеем также

$$f_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} F_-(k) e^{-ikx} dk, \quad (4.8.27)$$

где τ_1 можно выбрать положительным, и $F_-(k)$ аналитична в области $\tau < \tau_1''$, где $\tau_1 < \tau_1''$.

Имея это в виду, расщепим S на две суммы

$$S_+ = \sum_{n=0}^{\infty} f_+(an), \quad S_- = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_-(an).$$

Сначала рассмотрим S_+ . Вводя (4.8.26) в выражение S_+ , получаем

$$S_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k) e^{-ikan} dk.$$

В силу абсолютной сходимости интеграла, представляющего f_+ , суммирование можно внести под знак интеграла

$$S_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ikan} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \frac{F_+(k)}{1 - e^{-ika}} dk.$$

Функция F_+ аналитична в верхней полуплоскости, и, если она достаточно быстро убывает при $|k| \rightarrow \infty$, мы можем в правой части прибавить интеграл по полуокружности бесконечно большого радиуса, лежащей в полуплоскости над прямой $\tau = \tau_0$ и соединяющей точки $-\infty + i\tau_0$ и $\infty + i\tau_0$. Постоянная τ_0 отрицательна, поэтому мы можем применить теорему Коши и найти вычеты подинтегральной функции в нулях знаменателя, т. е. в точках $k = 2m\pi/a$, где m принимает целые значения, положительные и отрицательные. Таким образом, мы получаем, что

$$S_+ = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_+\left(\frac{2m\pi}{a}\right).$$

Аналогично

$$S_- = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_-\left(\frac{2m\pi}{a}\right).$$

Следовательно,

$$S_+ + S_- = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (F_+ + F_-) = S,$$

то есть

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2m\pi}{a}\right), \quad (4.8.28)$$

где F — преобразование Фурье функции f . Это и есть *формула суммирования Пуассона*.

Возьмем в качестве простого примера функцию $f(n) = 1/(1+n^2)$. Преобразование Фурье

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

этой функции легко найти с помощью теории вычетов. Применяя фор-

мулу (4.8.28), получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+a^2 n^2} = \frac{\pi}{a} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2m\pi/a} + \sum_{m=-\infty}^{-1} e^{2m\pi/a} \right\} = \\ = \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{1-e^{-2\pi/a}} + \frac{e^{-2\pi/a}}{1-e^{-2\pi/a}} \right),$$

или

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+a^2 n^2} = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi}{a}. \quad (4.8.29)$$

В последующих главах мы часто будем пользоваться формулой Пуассона [см., в частности, формулу (7.2.30)].

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функции $f(x)$ определяется формулой

$$F_l(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx. \quad (4.8.30)$$

Изучение свойств преобразования Лапласа может быть сведено к изучению свойств преобразования Фурье, потому что, как мы увидим, первое приводится ко второму. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Взяв ее преобразование Фурье

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

и сопоставив это выражение с (4.8.30), мы замечаем, что

$$F_l(p) = \sqrt{2\pi} F_+(ip). \quad (4.8.31)$$

Вооруженные этим соотношением, мы сможем, исходя из известных теорем для преобразования Фурье F_+ , получить соответствующие теоремы для преобразования Лапласа F_l . Например, из формулы обращения (4.8.19)

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k) e^{-ikx} dk$$

посредством подстановки $k = ip$ получаем формулу обращения преобразования Лапласа

$$f_+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0-i\infty}^{\tau_0+i\infty} F_l(p) e^{px} dp \quad (\operatorname{Re} x > 0). \quad (4.8.32)$$

Рассмотрим в качестве примера функцию $f(x) = e^{iqx}$. Для нее

$$F_l(p) = \frac{1}{p-iq}.$$

Подставляя это преобразование в формулу (4.8.32), получаем интеграл

$$f_+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0-i\infty}^{\tau_0+i\infty} \frac{e^{px}}{p-iq} dp,$$

который легко вычисляется с помощью теории вычетов. При $x > 0$ мы замыкаем контур интегрирования полуокружностью, лежащей в левой полуплоскости, и получаем выражение $f_+ = e^{igx}$. При $x < 0$ вспомогательную полуокружность следует взять в правой полуплоскости, а так как в этой области подинтегральная функция аналитична, то $f_+ = 0$, когда $x < 0$, как и следовало ожидать.

Теорема о свертке играет важнейшую роль в приложениях преобразования Лапласа. Так как $f_+(y) = 0$ при $y < 0$ и $h_+(x-y) = 0$ при $x < y$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_+(y) h_+(x-y) dy = \int_0^x f(y) h(x-y) dy.$$

Подставляя это выражение в формулу (4.8.25), получаем теорему о свертке для преобразования Лапласа

$$\int_0^x f(y) h(x-y) dy = \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} F_+(k) H_+(k) e^{-ikx} dk,$$

или

$$\int_0^x f(x) h(x-y) dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0-i\infty}^{\tau_0+i\infty} F_l(p) H_l(p) e^{px} dp. \quad (4.8.33)$$

Иначе говоря, преобразование Лапласа функции $\int_0^x f(y) h(x-y) dy$ равно произведению преобразований Лапласа функций f и h .

В качестве примера применения этой теоремы возьмем интегральное уравнение типа Вольтерра, встречающееся в теории начальных задач:

$$f(t) = \int_0^t k(t-\tau) g(\tau) d\tau;$$

здесь f — заданная функция, а g — искомая. Это уравнение будет рассмотрено в гл. 8. Здесь же мы, без доказательства, ограничимся лишь указанием на то, как можно его решить. Следует подвергнуть обе части уравнения преобразованию Лапласа, в результате чего получим

$$F(p) = K(p) G(p).$$

Отсюда

$$G(p) = \frac{F(p)}{K(p)}$$

и

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0-i\infty}^{\tau_0+i\infty} \frac{F(p)}{K(p)} e^{pt} dp.$$

Дальнейшее рассмотрение преобразования Лапласа и его применений читатель найдет в гл. 5, 8, 11 и 12.

Преобразование Меллина. Другое важное преобразование, тоже тесно связанное с преобразованием Фурье, определяется формулой

$$F_m(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx. \quad (4.8.34)$$

Так, например, преобразованием Меллина функции e^{-x} служит $\Gamma(s)$. Для того чтобы установить связь преобразования (4.8.34) с преобразованием Фурье, положим $x = e^z$. Тогда

$$F_m(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^z) e^{sz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{sz} dz,$$

где $g(z) = f(e^z)$. Сравнивая это выражение с преобразованием Фурье

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{ikz} dz$$

функции $g(z)$, замечаем, что

$$F_m(s) = \sqrt{2\pi} G(-is). \quad (4.8.35)$$

Теперь можно перефразировать теоремы, относящиеся к преобразованию Фурье, применительно к преобразованию Меллина. Начнем с рассмотрения условий существования преобразования. Существование интеграла (в смысле Лебега)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(z)|^2 dz$$

эквивалентно существованию интеграла

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \frac{dx}{x}. \quad (4.8.36)$$

Теперь выведем формулу обращения. Так как

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} G(k) dk = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-sz} F_m(s) ds,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F_m(s)}{x^s} ds. \quad (4.8.37)$$

Если условие (4.8.36) не выполнено, то интеграл (4.8.34) может существовать лишь в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, а вне этой полуплоскости функция $F_m(s)$ может быть определена путем аналитического продолжения. Пример такого рода мы имели в § 4.5 при рассмотрении гамма-функции. При этих условиях формула обращения (4.8.37) перестает быть справедливой. Однако в этом случае наши выводы могут быть применены к функции $x^{\sigma'_0} f(x)$, где $\sigma'_0 > \sigma_0$. Преобразованием ее является функция $F_m(s + \sigma'_0)$. Формула (4.8.37) при этом дает

$$x^{\sigma'_0} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F_m(s + \sigma'_0)}{x^s} ds,$$

откуда, положив $s + \sigma'_0 = \xi$, мы получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'_0 - i\infty}^{\sigma'_0 + i\infty} \frac{F_m(\xi)}{x^\xi} d\xi. \quad (4.8.38)$$

В тех случаях, когда нет такого значения $\operatorname{Re} s$, при котором интеграл (4.8.34) сходится при всех x , приходится разрезать область определения $f(x)$ и брать две различные функции, обладающие каждая своим множителем, которым обеспечивается сходимость, так же, как это делалось с преобразованием Фурье [см. формулу (4.8.18) и следующие за ней абзацы]. Это построение, вполне аналогичное приведенному выше, вынесено в задачи.

Обратимся, наконец, к теореме о свертке, относящейся к преобразованию Меллина. Взяв формулу (4.8.25) и осуществив подстановки

$$\begin{aligned} e^y &= \eta, & f(y) &= v(\eta), \\ e^x &= \xi, & h(x-y) &= w(e^{x-y}) = w(\xi/\eta), \end{aligned}$$

приходим к формуле

$$\int_0^\infty v(\eta) w\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'_0 - i\infty}^{\sigma'_0 + i\infty} V_m(s) W_m(s) \frac{ds}{\xi^s}, \quad (4.8.39)$$

которой можно придать еще такой вид

$$\int_0^\infty v(\xi) w(\xi) \xi^{s-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau'_0 - i\infty}^{\tau'_0 + i\infty} V_m(\rho) W_m(s-\rho) d\rho. \quad (4.8.40)$$

В качестве примера применения формулы (4.8.40) вычислим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'_0 - i\infty}^{\sigma'_0 + i\infty} \Gamma(a+\rho) \Gamma(s-\rho) d\rho \quad (-a < \sigma'_0 < s).$$

Заметив, что $f(x) = e^{-x} x^a$, если $F_m(s) = \Gamma(a+s)$, воспользуемся формулой (4.8.40):

$$I = \int_0^\infty e^{-x} x^a e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^\infty e^{-2x} x^{a+s-1} dx = \frac{\Gamma(a+s)}{2^{a+s}}.$$

Положим $s=a$ в I и вычислим интеграл вдоль мнимой оси. Мы получим следующее интересное соотношение между значениями $\Gamma(z)$ при действительных $z=a$ и комплексных $z=a+i\tau$:

$$\int_0^\infty |\Gamma(a+i\tau)|^2 d\tau = \frac{\pi \Gamma(2a)}{2^{2a}}.$$

Изучив поведение функций комплексного переменного, мы перейдем в следующей главе к исследованию их связи с дифференциальными уравнениями.

Задачи к главе 4

4.1. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{a+b \cos \theta} = \frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2 - b^2}) \quad (a > b > 0).$$

4.2. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{q \cos \theta}}{1 - 2p \sin \theta + p^2} \left\{ \frac{\cos(q \sin \theta)}{\sin} - p \frac{\sin(q \sin \theta + \theta)}{\cos} \right\} d\theta = 2\pi \frac{\cos}{\sin}(pq).$$

4.3. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right) \quad (\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b > 0).$$

Каково значение этого интеграла при $a = b$, $\operatorname{Re} a > 0$?

4.4. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} e^{c \cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta = \frac{2\pi}{n!}.$$

4.5. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2a-1}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \operatorname{cosec} \pi a \quad (0 < a < 1).$$

4.6. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)(1-2x \cos \theta + x^2)}.$$

4.7. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi(1-a)}{4 \cos(\pi a/2)} \quad (-1 < a < 3).$$

4.8. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 z}{1+z^2} dz = \frac{\pi^3}{8}.$$

4.9. Рассмотреть действительный интеграл

$$\int_a^b (b-x)^{\mu} (x-a)^{n-\mu-1} F(x) dx,$$

где a и b — действительные числа, $b > a$, $\mu > -1$, n — целое число, большее μ , и $z^n F(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Функция $F(z)$ предполагается аналитической во всей плоскости z , за исключением конечного числа полюсов c_k , ни один из которых не лежит на действительной оси левее точки $z = b$. Показать, что заданный интеграл равен

$$\frac{1}{2i \sin \mu \pi} \int_C (z-a)^{n-\mu-1} (z-b)^{\mu} F(z) dz,$$

где контур C идет от точки $b + \varepsilon$ к $-\infty$ непосредственно под действительной осью, затем вдоль окружности бесконечно большого радиуса против часовой стрелки и от $-\infty$ возвращается к точке $b + \varepsilon$, идя непосредственно над действительной осью. Вывести отсюда, что этот интеграл равен

$$\pi \operatorname{cosec} \mu \pi \sum (\operatorname{Res}(z-b)^{\mu} (z-a)^{n-\mu-1} F(z) \text{ в } c_k).$$

Показать, что при $0 < \mu < 1$, $k > 1$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\mu} \frac{dx}{(x-k)^2} = 2\pi^{\mu} \operatorname{cosec} \mu\pi (k-1)^{\mu-1} (k+1)^{-\mu-1}.$$

4.10. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a} dx}{1+2x \cos \theta + x^2} = \frac{\pi}{\sin \pi a} \frac{\sin a\theta}{\sin \theta} \quad (-1 < a < 1, -\pi < \theta < \pi).$$

4.11. Воспользовавшись формулами (4.2.19), показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx \sin k'x}{x^2 - \xi^2} dx = \frac{\pi}{\xi} \cdot \begin{cases} \sin k\xi \cos k'\xi & (k \leq k'), \\ \cos k\xi \sin k'\xi & (k \geq k'). \end{cases}$$

4.12. Пользуясь формулами (4.2.19), показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px - \cos qx}{x^2} dx = \pi(p - q).$$

4.13. Пользуясь формулами (4.2.19), показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x^2 - ab) \sin x + (a + b)x \cos x}{x(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{ab}.$$

4.14. Показать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\beta}^{\infty - i\beta} \ln \left[\frac{z^2 + 1}{z^2} \left(1 - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z \right) \right] \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2} \ln 3.$$

4.15. Рассмотреть интеграл

$$I(z) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

при действительном z , где путь интегрирования идет вдоль действительной оси, но обходит точку z по малой полуокружности против часовой стрелки. Показать, что

$$I(z) = \pi i f(z) + \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

где $\mathcal{P}$ — главное значение этого несобственного интеграла.

4.16. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Im} z| < \alpha$. Показать, что

$$f(z) = f_-(z) - f_+(z),$$

где

$$f_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\beta}^{\infty + i\beta} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad f_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\beta}^{\infty - i\beta} \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

причем $\beta < \alpha$. Показать, что функции f_- и f_+ аналитичны соответственно при $\operatorname{Im} z < \beta$ и $\operatorname{Im} z > -\beta$.

4.17. Функция $\psi(x)$ определена равенством

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{(1+z^2)e^{-izx}}{(z^2-z_0^2)(z+ia)} dz - \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{(1+z^2)e^{-izx}}{(z^2-z_0^2)(z-ia)} dz \right\},$$

где $\tau < 1$ и $\sigma > -1$. Показать, что

$$\psi(x) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + z_0^2} e^{\alpha|x|} + \frac{z_0^2 + 1}{z_0 \sqrt{\alpha^2 + z_0^2}} \cos \left(z_0 |x| - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{z_0} \right).$$

4.18. Показать, что $z = 1$ является особой точкой функции, представляемой (внутри круга сходимости) рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(-z)^n}{\Gamma(1+n)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}.$$

4.19. Обобщенная гипергеометрическая функция $F(a_0, a_1, \dots, a_s | c_1, c_2, \dots, c_s | z)$ определяется посредством степенного ряда

$$1 + \frac{a_0 a_1 \dots a_s}{c_1 \dots c_s} z + \frac{a_0(a_0+1)a_1(a_1+1)\dots a_s(a_s+1)}{c_1(c_1+1)\dots c_s(c_s+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Показать, что $z = 1$ является особой точкой функции F , и если $a_i < c_i$, то

$$F \simeq \frac{\Gamma(p) \prod_{n=1}^s \Gamma(c_n)}{(1-z)^p \prod_{m=0}^s \Gamma(a_m)} \quad \text{при } z \rightarrow 1,$$

где $p = a_0 + \sum_{n=1}^s (a_n - c_n)$.

4.20. Доказать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + a^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2} a^3} \frac{\operatorname{sh}(\pi a \sqrt{2}) + \sin(\pi a \sqrt{2})}{\operatorname{ch}(\pi a \sqrt{2}) - \cos(\pi a \sqrt{2})}.$$

4.21. Доказать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)(n^2 + b^2)} = \frac{\pi}{b^2 - a^2} \left(\frac{\operatorname{cth} \pi a}{a} - \frac{\operatorname{cth} \pi b}{b} \right).$$

4.22. Показать, что четная целая функция может быть представлена в виде

$$f(z) = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_n^2} \right),$$

где $f(a_n) = 0$ и в произведение из каждой пары нулей $a_n, -a_n$ входит только один. Пусть $f(z)$ подчиняется условиям, сформулированным при выводе формулы (4.3.8). Показать тогда, что если $f(0) = 1$, то

$$f''(0) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}, \quad f^{IV}(0) = 3 [f''(0)]^2 - 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^4}.$$

Воспользовавшись представлением (4.3.9) функции $\sin z/z$, показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4.23. Доказать, что

$$e^{az} - e^{bz} = (a - b) z e^{(a+b)z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2 \pi^2} \right).$$

4.24. Доказать, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)} = \frac{\pi^2}{ab} \operatorname{cth} a\pi \cdot \operatorname{cth} b\pi.$$

4.25. Пользуясь обобщенным преобразованием Эйлера, показать, что

$$\begin{aligned} & F(a_0, a_1, \dots | b_1, b_2, \dots | z) = \\ &= F(a_1, \dots | b_2, \dots | z) + z \frac{b_1 - a_0}{b_1} \cdot \frac{a_1 a_2 \dots}{b_2 b_3 \dots} F(a_1 + 1, a_2 + 1, \dots | b_2 + 1, \dots | z) + \\ &+ \frac{z^2 (b_1 - a_0)(b_1 - a_0 + 1) a_1 (a_1 + 1) \dots}{b_1 (b_1 + 1) b_2 (b_2 + 1) \dots} F(a_1 + 2, a_2 + 2, \dots | b_2 + 2, \dots | z) + \dots \end{aligned}$$

4.26. Вычисляя интеграл функции $e^{-hz} z^{n-1}$ вдоль границы сектора, заключенного между действительной осью, прямой $\varphi = \alpha$ ($z = re^{i\varphi}$), дугой окружности малого радиуса $r = \varepsilon$ и дугой окружности большого радиуса $r = R$, доказать, что

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-px \cos \theta} \frac{\cos}{\sin} (px \sin \theta) dx = p^{-a} \Gamma(a) \frac{\cos}{\sin} a\theta,$$

где $\theta < \pi/2$, a и p — действительны и положительны.

4.27. Вычисляя интеграл функции $z^{a-1} e^z$ вдоль пути, идущего от точки, примыкающей к началу справа ($z = \varepsilon$), к точке $-\infty$ непосредственно под действительной осью, далее соединяющего последовательно точки $-\infty - i\infty$, $b - i\infty$, $b + i\infty$, $-\infty + i\infty$, $-\infty$ и затем идущего к точке $z = \varepsilon$ непосредственно над действительной осью, показать, что при $0 < a < 1$ и $b > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy} (b + iy)^{a-1} dy = 2e^{-b} \sin a\pi \Gamma(a)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \cos [\operatorname{tg} \theta - (1-a)\theta] \sec^{a+1} \theta d\theta = \frac{1}{e} \sin a\pi \Gamma(a).$$

4.28. Показать, что интеграл

$$\int \int \int x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz,$$

взятый по октанту объема, ограниченного поверхностью $(x/a)^p + (y/b)^q + (z/c)^r = 1$, равен

$$\frac{a^l b^m c^n}{pqr} \frac{\Gamma(l/p) \Gamma(m/q) \Gamma(n/r)}{\Gamma[(l/p) + (m/q) + (n/r) + 1]}.$$

4.29. Доказать, что

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2-nz} \Gamma(nz).$$

4.30. Выразить интеграл

$$\int_C e^{-t^2} t^{n-\lambda-1} dt,$$

входящий в формулу (4.5.26), через гамма-функцию.

4.31. Показать, что

$$1 - \frac{\cos \alpha\pi}{\operatorname{ch} z\pi} = \frac{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{2} - iz\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha + iz}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - iz}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha + iz}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha - iz}{2}\right)}.$$

4.32. Показать, что

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \operatorname{sh} \pi y}.$$

4.33. Показать, что

$$|\Gamma(z+1)|^2 \simeq 2\pi r^{2x+1} e^{-2(y\varphi+x)} \left(1 + \frac{x}{6r^2} + \frac{1}{72r^2} + \dots\right),$$

где $z = x + iy$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$.

Показать, что $\arg \Gamma(z)$ асимптотически выражается в виде

$$\frac{1}{2} y \ln(x^2 + y^2) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y \left(1 + \frac{1}{12(x^2 + y^2)} - \frac{3x^2 - y^2}{360(x^2 + y^2)^3} + \dots\right).$$

4.34. Рассмотреть интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt - \lambda \sqrt{z}}}{z(x + \sqrt{z})} dz,$$

причем линией ветвления служит отрицательная действительная полуось, а контур C идет из $-\infty$ под линией ветвления, обходит точку ветвления (начало координат) в положительном направлении и идет к $-\infty$ над линией ветвления. Разбив этот интеграл на три интеграла, из которых два берутся от $-\infty$ до $-\varepsilon_0$, где ε_0 мало, а третий вдоль окружности радиуса ε_0 с центром в нуле, показать, что при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ последний интеграл имеет предел $1/\lambda$, а сумма остальных может быть выражена в виде

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \frac{d^n}{d\lambda^n} \int_0^{\infty} e^{-ut} \sin(\lambda \sqrt{u}) \frac{du}{u}.$$

Показать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-ut} \sin(\lambda \sqrt{u}) \frac{du}{u} = \sqrt{\pi} \int_0^{\lambda/\sqrt{t}} e^{-\xi^2} d\xi$$

и, следовательно, что

$$f(t) = \frac{1}{x} - \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \frac{d^n}{d\lambda^n} \int_0^{\lambda/\sqrt{t}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

4.35. Рассмотреть интеграл

$$g(z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} G(t) \Gamma(-t) (-z)^t dt,$$

где функция $G(t)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$, а $G(t) z^t / \Gamma(t+1)$ стремится к нулю с возрастанием $\operatorname{Re} t$. Интегрирование производится вдоль мнимой оси, но с обходом нуля вдоль малой полуокружности по часовой стрелке. Замкнув этот контур большой полуокружностью в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$, показать, что

$$g(z) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} G(n) \frac{z^n}{n!}.$$

Вывести отсюда выражение

$$\begin{aligned} F(a, b|c|z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)}{\Gamma(c+t)} \Gamma(-t) (-z)^t dt \end{aligned}$$

для $\operatorname{Re}(a+b-c) < 0$ ($a, b \neq 0, -1, -2, \dots$). Показать, что исходный контур может также быть замкнут полуокружностью в левой полуплоскости. Вывести отсюда, что

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b|c|z) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a-c)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-c+a|1-b+a|\frac{1}{z}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b-c)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-c+b|1-a+b|\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

[см. формулу (5.2.49)].

4.36. Доказать, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta)^{a-2} e^{it\theta} d\theta = \frac{\pi \Gamma(a-1)}{2^{a-2} \Gamma\left(\frac{a+t}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a-t}{2}\right)},$$

где $a > 1$. Для этого вычислить интеграл

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{a-2} z^{t-1} dz,$$

где C идет от $+i$ к $-i$ вдоль мнимой оси и возвращается к $+i$ вдоль правой половины единичной окружности.

4.37. С помощью метода перевала показать, что для функции $H_v^{(1)}$ определенной равенством

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{e^{-i\nu\pi/2}}{\pi} \int_{-\pi/2-i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{i(z \cos \varphi + \nu\varphi)} d\varphi,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$H_v^{(1)}(v \sec \alpha) \simeq \frac{e^{i[v(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) + \pi/4]}}{\sqrt{\frac{1}{2} v \pi \operatorname{tg} \alpha}} \left(1 - i \frac{1 + \frac{5}{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{8 \operatorname{tg} \alpha} + \dots \right).$$

4.38. Показать, что в интеграле

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3 - qt)} dt,$$

вычисленном вдоль действительной оси, можно взять новый путь интегрирования, составив его из полупрямой $\varphi = 5\pi/6$ ($t = re^{i\varphi}$), идущей от $-\infty$ к 0, и полупрямой $\varphi = \pi/6$, идущей от 0 до ∞ . Отсюда будет следовать, что

$$I = \frac{2}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2}{3} m\pi + \frac{\pi}{6}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right) \frac{(1-q)^m}{m!}.$$

Почему q должно быть при этом действительным?

4.39. Метод перевала может быть несколько модифицирован при малом $|f''(t_0)|$. В интеграле (4.6.6)

$$J = \int_C e^{zf(t)} dt$$

разложим $f(t)$ по степеням $t - t_0$, причем $f'(t_0) = 0$. Показать, что при малом $|f''|$ целесообразно преобразование

$$t - t_0 = \alpha + \beta s,$$

где

$$\alpha = -\frac{f''(t_0)}{f'''(t_0)}, \quad \beta = \left(\frac{6i}{zf'''(t_0)}\right)^{1/3}.$$

Показать, что

$$J \simeq \exp\left\{zf + \frac{1}{3} \frac{z[f''(t_0)]^3}{[f'''(t_0)]^2}\right\} \int_C e^{i(s^3 - qs)} ds,$$

где

$$q = \frac{z}{2} \frac{(f'')^2}{f'''} \left(\frac{6i}{zf'''}\right)^{1/3}.$$

4.40. Показать, что при $p \rightarrow \infty$

$$H_p^{(1)}(p) = \frac{e^{-ip\pi/2}}{\pi} \int_{-\pi/2 + i\infty}^{\pi/2 - i\infty} e^{ip(\cos \theta - \theta)} d\theta \simeq \frac{1}{\pi} e^{-\pi i/3} \sqrt{3} \left(\frac{6}{p}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right).$$

4.41. Показать, что при конформном отображении

$$z = x + iy = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (w = u + iv)$$

действительная ось плоскости w переходит в участок $|x| \geq 1$ действительной оси плоскости z и в единичную окружность $z = e^{i\varphi}$. Нанести на плоскости z линии, соответствующие прямым $u = 0, \pm 1$ и $v = 0, \pm 1$.

4.42. Показать, что при отображении

$$z = w + iae^{i\varphi} \operatorname{tg} \psi + \frac{a^2 e^{2i\varphi}}{w + iae^{i\varphi} \operatorname{tg} \psi}$$

(a, φ, ψ — постоянные) окружность радиуса $a \operatorname{sech} \psi$ с центром в начале на плоскости w переходит в дугу окружности, которая стягивается хордой длины $4a$, образующей угол φ с осью x . На плоскости z нанести кривые, соответствующие линиям $u=0, |v| \geq a \operatorname{sech} \psi$ и $v=0, |u| \geq a \operatorname{sech} \psi$ при $a=1, \varphi=30^\circ, \psi=15^\circ$. Какова угловая мера дуги в плоскости z , соответствующей окружности $w = a \operatorname{sech} \psi e^{i\varphi}$?

4.43. Показать, что формула Шварца — Кристоффеля дает для функции, отображающей внутренность четырехугольника со сторонами $x=0, y \geq 0; y=0, x \geq 0; y=-a, x \geq -b; x=-b, y \geq -a$ на верхнюю полу-плоскость плоскости w выражение

$$z = \frac{2a}{\pi} \operatorname{Ar} \operatorname{th} \sqrt{\frac{a^2 - b^2 w}{a^2 (1+w)}} - \frac{2b}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a^2 - b^2 w}{b^2 (1+w)}}.$$

Найти на плоскости w образы точек $z=0, z=-b-ai, z=-b, z=-ai$.

4.44. Показать, что функция

$$w = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos z^2 \right)$$

отображает «крест» $y=0, -1 \leq x \leq 1; x=0, -1 \leq y \leq 1$ на действительную ось плоскости w . Найти на плоскости w образы точек $z=1, z=i, z=-1, z=-i$. Какие физические задачи могут быть решены с помощью этого конформного отображения?

4.45. Тонкий металлический киль, поддерживаемый при температуре T_0 , расположен перпендикулярно к металлической пластинке, поддерживаемой при нулевой температуре, так что кромка кия параллельна этой пластинке и находится на расстоянии a от нее. Посредством преобразования Шварца — Кристоффеля показать, что стационарное распределение температуры в окружающей (теплопроводящей) среде может быть определено функцией (преобразованием)

$$z = a \operatorname{sh} \left(\frac{\pi (U + iT)}{2T_0} \right),$$

причем линии $T = \operatorname{const}$ представляют собой изотермы. Показать, что полоса кия длины L и высоты b (последняя отсчитывается от кромки) испускает

$$\frac{4LT_0\kappa}{\pi} \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \left(\frac{a+b}{a} \right) \text{ калорий в секунду,}$$

где κ — коэффициент теплопроводности среды.

4.46. Посредством преобразования Шварца — Кристоффеля показать, что участок плоскости z , лежащий над прямой $y=-a$ вне двух частей $x \geq 0$ и $x \leq -b$ вещественной оси (это соответствует двум параллельным плоскостям, расположенным на расстоянии a друг от друга, в верхней из которых имеется щель ширины b), отображается на верхнюю полу-плоскость плоскости w функцией

$$z = -\frac{a}{\pi} \left[\frac{(e^\beta - 1)(w - 1)}{w - e^\beta} + \ln w \right],$$

где $b = (2a/\pi)(\beta + \operatorname{sh} \beta)$. Для случая $b = a$ (при этом $\beta = 0,7493$) вычислить (с двумя значащими цифрами) образы в плоскости w точек $z = -a$, $-a/2$, $-a/2 - ia$, $-a/2 + ia$.

4.47. Показать, что если

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\pi x/l} \quad (-l \leq x \leq l),$$

то

$$A_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx.$$

Внося эти выражения A_n в ряд, представляющий функцию $f(x)$, и переходя должным образом к пределу при $l \rightarrow \infty$, вывести интеграл Фурье.

4.48. Обобщенные преобразования Меллина определяются равенствами

$$F_-(s) = \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx, \quad F_+(s) = \int_1^\infty f(x) x^{s-1} dx.$$

Показать, что F_- аналитична в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, а F_+ — в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s < \sigma_1$. Показать, что если существует преобразование Меллина в обычном смысле, то $\sigma_0 < \sigma_1$. Показать, что для $\sigma > \sigma_0$ и $\tau < \sigma_1$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_-(s) \frac{ds}{x^s} + \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} F_+(s) \frac{ds}{x^s} \right).$$

4.49. Найти преобразования Фурье F_+ и F_- функции $\cos ax$ при комплексном a и определить их области аналитичности.

4.50. Найти преобразования Фурье F_+ и F_- функции $x^n e^{-x}$ и определить их области аналитичности.

4.51. Посредством формулы суммирования Пуассона показать, что

$$\vartheta_3(u, e^{-a^2/2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(2/a^2)(u+m\pi)^2}$$

(функция ϑ_3 определена на стр. 407).

Основные свойства функций комплексного переменного

Функция $f = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ называется аналитической в области R плоскости z , если она удовлетворяет одному из следующих трех эквивалентных условий:

а. Производная df/dz в любой точке $z = a$ области R существует и не зависит от направления dz ; эта производная непрерывна в области R .

б. $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, причем все эти производные непрерывны в R .

в. $\oint_C f(z) dz = 0$ для любого замкнутого контура C , который можно стянуть в точку внутри области R .

Если хоть одно из этих условий выполнено (следовательно, выполнены и остальные), то *производные всех порядков* функции f по z существуют и *аналитичны* в области R .

Далее, для любого замкнутого контура, заключенного внутри односвязной области R , в которой f аналитична,

$$\oint \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a), \quad \oint \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a),$$

когда a лежит внутри контура; если точка a находится вне контура, то эти интегралы обращаются в нуль (см. § 4.3).

Точки, в которых $f(z)$ не аналитична, называются *особыми точками* этой функции (см. стр. 339, 359). Особая точка $z=a$ есть *простой полюс*, когда

$$f(z) \simeq \frac{g(z)}{z-a} \quad (z \rightarrow a),$$

где $g(z)$ — аналитическая функция при $z=a$ и $g(a) \neq 0$. Вообще, если

$$f(z) \simeq \frac{g(z)}{(z-a)^n} \quad (z \rightarrow a),$$

где n — целое положительное число, $g(z)$ — аналитическая функция при $z=a$ и $g(a) \neq 0$, то $z=a$ является *полюсом порядка n* . Если при $z \rightarrow a$ функция $f(z)$ не имеет определенного предела, ни конечного, ни бесконечного, то $z=a$ — *существенно особая точка* функции $f(z)$.

С другой стороны, если особая точка $z=a$ функции $f(z)$ такова, что $f(a + \varepsilon e^{i\varphi})$ при возрастании φ на 2π , изменяясь непрерывно, приобретает значение, отличное от исходного, то $z=a$ называется *точкой ветвления* функции $f(z)$ (з выбирается так, что $a + \varepsilon e^{i\varphi}$ для всех φ находится в области аналитичности функций f). Так, например, точка a является точкой ветвления функций $f = (z-a)^\nu g(z)$ и $f = \ln(z-a) g(z)$, где ν — нецелое число (положительное или отрицательное), а $g(z)$ — аналитическая функция в точке a . Полюсы и существенно особые точки представляют собой *изолированные* особые точки; точки же ветвления (никогда не существующие в одиночку) являются *неизолированными* особыми точками, так как любая ветвь f оказывается неаналитической вдоль некоторой линии, оканчивающейся в точке ветвления.

Если точка $w=0$ является особой для $f(1/w)$, то говорят, что $f(z)$ имеет особенность в бесконечно удаленной точке.

По характеру и расположению своих особых точек функции могут быть классифицированы следующим образом:

1. Если $f(z)$ вовсе не имеет особых точек, то $f(z)$ — *постоянная*.
2. Если $f(z)$ имеет единственную особую точку — полюс n -го порядка в бесконечности, то $f(z)$ — *многочлен n -й степени относительно z* .
3. Если $f(z)$ имеет единственную особую точку в бесконечности, то $f(z)$ называется *целой функцией* (целыми функциями являются, в частности, многочлены).
4. Если $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме полюсов (тогда их может быть лишь конечное число), то $f(z)$ представляет собой *отношение двух многочленов* от z . Функция, не имеющая в заданной области особых точек, отличных от полюсов, называется *мероморфной* в этой области. Таким образом, *рациональная функция мероморфна во всей плоскости z* .
5. Если в конечных точках плоскости $f(z)$ не имеет других особенностей, кроме полюсов (тогда как бесконечно удаленная точка может быть

существенно особой), то $f(z)$ называется *мероморфной функцией* переменного z (в частности, рациональные функции являются мероморфными).

6. Функции, имеющие точки ветвления, являются многозначными (все ранее перечисленные функции однозначны).

Мероморфная функция может быть разложена в ряд элементарных дробей, каждый член которого соответствует некоторому полюсу функции в конечной точке плоскости. В частности, если все ее полюсы $z = a_n$ в конечной части плоскости простые, причем точка $z = 0$ не является полюсом, то [см. (4.3.6); дополнительные условия см. на стр. 363]

$$f(z) = f(0) + \sum_n \left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n} \right),$$

где b_n — *вычет* функции относительно полюса a_n .

Целая функция может быть представлена в виде произведения множителей, соответствующих всевозможным нулям функции (в конечных точках). Так, если все нули $z = a_1, a_2, \dots$ функции f простые (т. е. $1/f$ имеет лишь простые полюсы) и ни одно a_n не равно нулю, то

$$f(z) = f(0) e^{[f'(0)/f(0)]z} \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n}$$

[см. (4.3.8); дополнительные условия см. на стр. 364].

Алгоритм Эйлера для вычисления сумм рядов. Пусть задан ряд

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

и пусть другой ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n b_n z^n$$

получается из первого введением множителей C_n в коэффициенты. Тогда

$$f(z) = C_0 g(z) - (\delta C_0) z g'(z) + (\delta^2 C_0) \frac{z^2}{2!} g''(z) - \dots,$$

где

$$\delta C_0 = C_0 - C_1, \quad \delta^2 C_0 = C_0 - 2C_1 + C_2,$$

$$\delta^3 C_0 = C_0 - 3C_1 + 3C_2 - C_3, \quad \dots$$

В частности, если $g(z) = 1/(1+z) = \sum (-1)^n z^n$, то

$$f(z) = \sum (-1)^n a_n z^n = \frac{1}{1+z} [a_0 + (\delta a_0) \zeta + (\delta^2 a_0) \zeta^2 + \dots],$$

где $\zeta = z/(1+z)$. В том случае, когда C_n или a_n представляют собой многочлены относительно n степени N , все разности δ^k порядка $k > N$ обращаются в нуль и $f(z)$ выражается через известную функцию сравнения $g(z)$ в конечном виде.

Представление интегралов посредством асимптотических рядов. Часто удается представить функцию $\psi(z)$ в виде интеграла

$$\psi(z) = \kappa \int_c e^{z f(t)} dt,$$

где C — некоторый контур (замкнутый или уходящий в бесконечность) в плоскости t . Для вычисления $\phi(z)$ при $\operatorname{Re} z \gg 1$ мы деформируем C (в допустимых пределах) так, чтобы $\operatorname{Re} f$ всюду принимала возможно меньшие значения. Тогда наибольшее значение $\operatorname{Re} f$ на контуре будет достигаться в седловой точке $t = t_0$ для $\operatorname{Re} f$, где $df/dt = 0$. В окрестности $t = t_0$ будем иметь

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + \frac{1}{6}(t - t_0)^3 f'''(t_0) + \dots,$$

и в этой окрестности контур следует направить по линии, вдоль которой $\operatorname{Im} f$ постоянна и равна $\operatorname{Im} f(t_0)$. Из двух возможных линий выбираем ту, вдоль которой $\operatorname{Re} f(t)$ имеет максимум (а не минимум) при $t = t_0$. При интегрировании по такому пути часть интеграла, соответствующая участку контура, близкому к точке $t = t_0$, будет доминировать, и для больших значений $\operatorname{Re} z$ получаем асимптотический ряд

$$\phi(z) \simeq x \frac{e^{zf(t_0) - \frac{1}{2}\pi i}}{\sqrt{\frac{1}{2}zf''(t_0)}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{z^n},$$

где

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{12[f''(t_0)]^3} \{5[f'''(t_0)]^2 - 3f''(t_0)f^{IV}(t_0)\}, \dots$$

[по поводу дальнейших деталей см. формулы (4.6.14) — (4.6.19)].

Преобразование Фурье. Если функция $f(z)$ такова, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz$ имеет конечное значение, то функция

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ikz} dz$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f(z)$; при этом

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikz} dk, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz.$$

Далее, если в окрестности точки $z = 0$ функция $f_+(z)$ задается равенствами

$$f_+(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!}, & z > 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

то поведение F при больших k описывается функцией

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{k}\right)^n f^{(n-1)}(0).$$

Если $F(k)$ и $G(k)$ — преобразования Фурье функций $f(z)$ и $g(z)$, то преобразованием Фурье функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(z - y) dy$$

является произведение $F(k)G(k)$ (теорема о свертке). В то же время преобразованием Фурье произведения $f(z)g(z)$ служит функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(l)G(k-l)dl.$$

Имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\bar{G}(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\bar{g}(z)dz.$$

Если $F(k)$ — преобразование Фурье функции $f(z)$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2m\pi}{a}\right)$$

(формула суммирования Пуассона).

В случае когда интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz$ бесконечен, но при некотором τ_0

конечен интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 e^{-2\tau_0 z} dz$ и преобразованием Фурье функции $f(z)e^{-\tau_0 z}$ является $G(k)$, преобразованием Фурье функции $f(z)$ служит функция $F(k) = G(k - i\tau_0)$, причем

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} F(k)e^{-ikz} dk$$

[другие условия сходимости см. в связи с формулой (4.8.19)].

Функция $f(z)$	Ее преобразование Фурье $F(k)$
$\lambda f(z)$	$\lambda F(k)$
$f(az)$	$(1/a) F(k/a)$
$izf(z)$	$\frac{d}{dk} F(k)$
$\frac{d}{dz} f(z)$	$-ikF(k)$
$e^{izk_0} f(z)$	$F(k + k_0)$
$f(z + z_0)$	$e^{-ikz_0} F(k)$
1	$\delta(k)$
$(z - iz_0)^{-1} \quad (\operatorname{Re} z_0 > 0)$	$i\sqrt{2\pi}e^{-ikz_0} \quad (\operatorname{Re} k > 0)$
$[(z - iz_0)(z + iz_1)]^{-1} \quad (\operatorname{Re} z_0 > 0, \operatorname{Re} z_1 > 0)$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{z_0 + z_1} \begin{cases} e^{-z_0 k} & (\operatorname{Re} k > 0), \\ e^{z_1 k} & (\operatorname{Re} k < 0) \end{cases}$
$\operatorname{sech}(k_0 z)$	$(1/k_0) \sqrt{\pi/2} \operatorname{sech}(\pi k/2k_0)$
$\operatorname{th}(k_0 z)$	$(i/k_0) \sqrt{\pi/2} \operatorname{cosech}(\pi k/2k_0)$
$z^{-\alpha-1} e^{i/z}$	$i\sqrt{2\pi} e^{\pi i \alpha/2} k^{\alpha/2} J_{\alpha}(2\sqrt{k})$
$e^{-z^2/2}$	$e^{-k^2/2}$
$\sqrt{z} J_{-1/4}\left(\frac{1}{2} z^2\right)$	$\sqrt{k} J_{-1/4}\left(\frac{1}{2} k^2\right)$

Преобразование Лапласа. Если функция $f(x)$ равна нулю при $x < 0$ и интеграл $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2\tau x} dx$ конечен при $\tau > \tau_0$, то функция

$$F_l(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$$

называется *преобразованием Лапласа* функции $f(x)$; при этом

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} F_l(p) e^{px} dp \quad (\tau > \tau_0, x > 0).$$

Теорема о свертке гласит, что

$$\int_0^x f(y) h(x-y) dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} F_l(p) H_l(p) e^{px} dp.$$

Дальнейшие сведения о преобразовании Лапласа см. в конце гл. 11.

Преобразование Меллина. Если функция $f(x)$ задана в интервале $0 \leq x < \infty$ и интеграл $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{2\sigma-1} dx$ конечен при $\sigma > \sigma_0$, то

$$F_m(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$$

называется *преобразованием Меллина* функции $f(x)$; при этом

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_m(s) \frac{ds}{x^s} \quad (\sigma > \sigma_0, x > 0).$$

Теорема о свертке может быть выражена так:

$$\int_0^{\infty} v(y) w\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} V_m(s) W_m(s) \frac{ds}{x^s}$$

или

$$\int_0^{\infty} v(x) w(x) x^{s-1} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} V_m(\rho) W_m(s-\rho) d\rho.$$

Функция $f(x)$	Ее преобразование Меллина $F_m(s)$
$\lambda f(x)$	$\lambda F_m(s)$
$f(ax)$	$a^{-s} F_m(s)$
$x^a f(x)$	$F_m(s+a)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$-(s-1) F_m(s-1)$
$f(x) \ln x$	$\frac{d}{ds} F_m(s)$

Функция $f(x)$	Ее преобразование Меллина $F_m(s)$
e^{-x}	$\Gamma(s)$
$F(a, b c -x)$	$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}$
$(1+x)^{-a}$	$\Gamma(s)\Gamma(a-s)/\Gamma(a)$
$(1/x) \ln(1+x)$	$\pi/(1-s) \sin \pi s$
$\operatorname{Arth} x$	$(\pi/2s) \operatorname{tg}(\pi s/2)$
$(1+x)^{-m} P_{m-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	$[\Gamma(s)/\Gamma(1-s)] [\Gamma(m-s)/\Gamma(m)]^2$
$F(a c -x)$	$\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(c)/\Gamma(a)\Gamma(c-s)$
$J_\nu(x)$	$2^{s-1} \Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu-s}{2} + 1\right)$
$x j_\nu(x)$	$2^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\nu+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu-s}{2} + 1\right)$
$\sin x$	$\Gamma(s) \sin(\pi s/2)$
$\cos x$	$\Gamma(s) \cos(\pi s/2)$
$N_\nu(x)$	$-\frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \cos\left[\frac{1}{2} \pi(s-\nu)\right]$

Функции J_ν , j_ν , F , P_m и N_ν , встречающиеся в этой таблице, определены в конце гл. 5, 10 и 11.

Часто встречающиеся специальные функции

См. также в конце гл. 5, 6, 10, 11 и 12.

Гамма-функция (см. стр. 396).

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0), \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (\gamma = 0,577215 \dots).$$

$$\phi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{d}{dz} \Gamma(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n} \right),$$

$$\phi(z+1) = \frac{1}{z} + \phi(z).$$

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2.$$

$$\Gamma(z) \simeq \sqrt{2\pi z} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} \quad (z \gg 1).$$

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \varphi \cos^{2y-1} \varphi d\varphi \quad (\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0). \end{aligned}$$

Эллиптические функции (см. стр. 404).

$$x = \operatorname{sn}(v, k), \text{ если } v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

$$x = \operatorname{cn}(v, k), \text{ если } v = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2+k^2x^2)}}.$$

$$x = \operatorname{dn}(v, k), \text{ если } v = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2+k^2-1)}}.$$

$$x = \operatorname{tn}(v, k), \text{ если } v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}}.$$

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

$$(k = \sin \alpha, \quad k' = \cos \alpha).$$

$$\sqrt{x} = \operatorname{sn}(v, k), \text{ если } v = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

$$\sqrt{x} = \operatorname{cn}(v, k), \text{ если } v = \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(k'^2+k^2x)}}.$$

$$\sqrt{x} = \operatorname{dn}(v, k), \text{ если } v = \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-k'^2)}}.$$

$$\sqrt{x} = \operatorname{tn}(v, k), \text{ если } v = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1+k'^2x)}}.$$

$$\operatorname{cn}^2(u, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(u, k), \quad \operatorname{dn}^2(u, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k),$$

$$\operatorname{tn}(u, k) = \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)}.$$

$$\operatorname{sn}(0, k) = 0, \quad \operatorname{cn}(0, k) = 1, \quad \operatorname{dn}(0, k) = 1,$$

$$\operatorname{sn}(-u, k) = -\operatorname{sn}(u, k), \quad \operatorname{cn}(-u, k) = \operatorname{cn}(u, k), \quad \operatorname{dn}(-u, k) = \operatorname{dn}(u, k).$$

СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

v	$\operatorname{sn}(v, k)$	$\operatorname{cn}(v, k)$	$\operatorname{dn}(v, k)$	$\operatorname{tn}(v, k)$
iu	$i \operatorname{tn}(u, k')$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}$	$\frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}$	$i \operatorname{sn}(u, k)$
$u + K$	$\frac{\operatorname{cn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)}$	$-k' \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)}$	$\frac{k'}{\operatorname{dn}(u, k)}$	$-\frac{1}{k \operatorname{tn}(u, k)}$
$u + 2K$	$-\operatorname{sn}(u, k)$	$-\operatorname{cn}(u, k)$	$\operatorname{dn}(u, k)$	$\operatorname{tn}(u, k)$
$u + iK'$	$\frac{1}{k \operatorname{sn}(u, k)}$	$-\frac{i \operatorname{dn}(u, k)}{k \operatorname{sn}(u, k)}$	$-\frac{i}{\operatorname{tn}(u, k)}$	$\frac{i}{\operatorname{dn}(u, k)}$
$u + K + iK'$	$\frac{\operatorname{dn}(u, k)}{k \operatorname{cn}(u, k)}$	$-\frac{ik'}{k \operatorname{cn}(u, k)}$	$ik' \operatorname{tn}(u, k)$	$\frac{i}{k'} \operatorname{dn}(u, k)$
$u + 2iK'$	$\operatorname{sn}(u, k)$	$-\operatorname{cn}(u, k)$	$-\operatorname{dn}(u, k)$	$-\operatorname{tn}(u, k)$
$u + 2K + 2iK'$	$-\operatorname{sn}(u, k)$	$\operatorname{cn}(u, k)$	$-\operatorname{dn}(u, k)$	$-\operatorname{tn}(u, k)$

[Например, $\operatorname{cn}(u + 2K, k) = -\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u + K + iK') = ik' \operatorname{tn}(u, k)$ и т. д.]

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

[При достаточно малых k ($< 0,1$) хорошим приближением служит $k \approx 4e^{-\pi K'/2K} = 4\sqrt{q}$; при $K/K' > 1,0$ вместо K , k и α берутся соответственно K' , k' и $90^\circ - \alpha$.]

	K/K'										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
K	1,571	1,571	1,571	1,571	1,573	1,583	1,604	1,643	1,699	1,768	1,854
K'	∞	15,71	7,855	5,237	3,933	3,166	2,673	2,347	2,124	1,966	1,854
k	0	—	0,00156	0,0213	0,0784	0,171	0,265	0,407	0,520	0,622	0,707
k'	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,985	0,965	0,913	0,853	0,784	0,707
α	0	—	$5^\circ 4'$	$1^\circ 11,7'$	$4^\circ 30'$	$9^\circ 50'$	$15^\circ 22'$	$24^\circ 0'$	$31^\circ 23'$	$38^\circ 30'$	45°
$q = e^{-\pi K'/K}$	0	—	—	—	0,0004	0,0019	0,0053	0,0114	0,0197	0,0307	0,0432

Далее мы кое-где опускаем второй аргумент эллиптических функций, т. е. k . Он предполагается во всех членах одинаковым:

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{tn}(u+v) = \frac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{tn} u \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}.$$

Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ имеют простые полюсы в точках $2mK + (2n+1)K'i$, где m и n — целые числа, положительные или отрицательные. Значения вычетов этих функций ($\operatorname{Res}_u f$) относительно полюсов приведены в следующей таблице:

$f \backslash u$	iK'	$-iK'$	$2K+iK'$	$2K-iK'$
$\operatorname{sn} u$	$1/k$	$1/k$	$-1/k$	$-1/k$
$\operatorname{cn} u$	$-i/k$	i/k	i/k	$-i/k$
$\operatorname{dn} u$	$-i$	i	$-i$	i

Нулями функции $\operatorname{sn}(u, k)$ служат точки $u = 2mK + 2nK'i$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); далее, $\operatorname{cn}[(2m+1)K + 2nK'i, k] = 0$, $\operatorname{dn}[(2m+1)K + (2n+1)K'i, k] = 0$, $\operatorname{sn}(u, k) = u + O(u^3)$ ($u \rightarrow 0$). Поведение $\operatorname{cn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$ вблизи их нулей можно выяснить, воспользовавшись свойствами периодичности.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sn}(u, k)} &= \frac{\pi}{2K} \operatorname{cosec} \frac{\pi u}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi u/2K) \operatorname{ch}(\pi n K'/K)}{\operatorname{ch}(2\pi n K'/K) - \cos(\pi u/K)}, \\ \frac{\operatorname{cn}(u, k)}{\operatorname{sn}(u, k)} &= \frac{\pi}{2K} \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2K} + \frac{\pi}{2K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi u/K)}{\operatorname{ch}(4\pi n K'/K) - \cos(\pi u/K)} - \\ &\quad - \frac{\pi}{2K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi u/K)}{\operatorname{ch}[(4n+2)\pi K'/K] - \cos(\pi u/K)}, \\ \frac{\operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{sn}(u, k)} &= \frac{\pi}{2K} \operatorname{cosec} \frac{\pi u}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\pi u/2K) \operatorname{ch}(\pi n K'/K)}{\operatorname{ch}(2\pi n K'/K) - \cos(\pi u/K)}. \end{aligned}$$

Если $q = e^{-\pi K'/K}$, то

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{2K}{\pi} \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n-1}}{1-q^{2n}}\right)^2 \frac{1-2q^{2n} \cos(\pi u/K) + q^{4n}}{1-2q^{2n-1} \cos(\pi u/K) + q^{4n-2}},$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^2 \frac{1+2q^{2n} \cos(\pi u/K) + q^{4n}}{1-2q^{2n-1} \cos(\pi u/K) + q^{4n-2}},$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^2 \frac{1+2q^{2n-1} \cos(\pi u/K) + q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1} \cos(\pi u/K) + q^{4n-2}},$$

$$\operatorname{tn}(u, k) = \frac{2K}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2 \frac{1-2q^{2n} \cos(\pi u/K) + q^{4n}}{1+2q^{2n} \cos(\pi u/K) + q^{4n}},$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k),$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn}(u, k) = -\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k),$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{dn}(u, k) = -k^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k),$$

$$\operatorname{sn}(x, k) = \sin(\operatorname{am} x), \quad \operatorname{cn}(x, k) = \cos(\operatorname{am} x),$$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{dn}(x, k) dx &= \arcsin [\operatorname{sn}(x, k)] = \operatorname{am} x, \\
\int \operatorname{sn}(x, k) dx &= \frac{1}{k} \operatorname{Arch} \frac{\operatorname{dn}(x, k)}{k'}, \\
\int \operatorname{cn}(x, k) dx &= \frac{1}{k} \arccos [\operatorname{dn}(x, k)], \\
\int \frac{dx}{\operatorname{sn}(x, k)} &= \ln \frac{\operatorname{sn}(x, k)}{\operatorname{cn}(x, k) + \operatorname{dn}(x, k)}, \\
\int \frac{dx}{\operatorname{cn}(x, k)} &= \frac{1}{k'} \ln \frac{k' \operatorname{sn}(x, k) + \operatorname{dn}(x, k)}{\operatorname{cn}(x, k)}, \\
\int \frac{dx}{\operatorname{dn}(x, k)} &= \frac{1}{k'} \operatorname{arctg} \frac{k' \operatorname{sn}(x, k) - \operatorname{cn}(x, k)}{k' \operatorname{sn}(x, k) + \operatorname{cn}(x, k)}.
\end{aligned}$$

Тета-функции. Определяются эти функции так:

$$\vartheta_1(u, iv) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi v \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi u = -\vartheta_2\left(u + \frac{1}{2}, iv\right),$$

$$\vartheta_2(u, iv) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi v \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)\pi u = \vartheta_1\left(u + \frac{1}{2}, iv\right),$$

$$\vartheta_3(u, iv) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi v n^2} \cos 2n\pi u = \vartheta_0\left(u + \frac{1}{2}, iv\right),$$

$$\vartheta_0(u, iv) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi v n^2} \cos 2n\pi u = \vartheta_3\left(u + \frac{1}{2}, iv\right),$$

$$\vartheta_1\left(u + \frac{1}{4}, iv, iv\right) = i e^{\frac{1}{4} \pi v - i \pi u} \vartheta_0(u, iv),$$

$$\vartheta_2\left(u + \frac{1}{2}, iv, iv\right) = e^{\frac{1}{4} \pi v - i \pi u} \vartheta_3(u, iv),$$

$$\vartheta_3\left(u + \frac{1}{2}, iv, iv\right) = e^{\frac{1}{4} \pi v - i \pi u} \vartheta_2(u, iv),$$

$$\vartheta_0\left(u + \frac{1}{2}, iv, iv\right) = i e^{\frac{1}{4} \pi v - i \pi u} \vartheta_1(u, iv).$$

$$\vartheta_1(u, iv+1) = e^{i\pi/4} \vartheta_1(u, iv), \quad \vartheta_1(u, iv) = \frac{i}{\sqrt{v}} e^{-\pi u^2/v} \vartheta_1\left(\frac{u}{iv}, \frac{i}{v}\right),$$

$$\vartheta_2(u, iv+1) = e^{i\pi/4} \vartheta_2(u, iv), \quad \vartheta_2(u, iv) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\pi u^2/v} \vartheta_0\left(\frac{u}{iv}, \frac{i}{v}\right),$$

$$\vartheta_3(u, iv+1) = \vartheta_0(u, iv), \quad \vartheta_3(u, iv) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\pi u^2/v} \vartheta_3\left(\frac{u}{iv}, \frac{i}{v}\right),$$

$$\vartheta_0(u, iv+1) = \vartheta_3(u, iv), \quad \vartheta_0(u, iv) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\pi u^2/v} \vartheta_2\left(\frac{u}{iv}, \frac{i}{v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} = 4\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial v}.$$

Нули зета-функций

ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_0
$n + miv$	$n + \frac{1}{2} + miv$	$n + \frac{1}{2} + \left(m + \frac{1}{2}\right)iv$	$n + \left(m + \frac{1}{2}\right)iv$

(m, n — целые числа).

ЛИТЕРАТУРА

Имеется, конечно, очень много учебников, в которых рассматриваются различные вопросы теории функций комплексного переменного. Рекомендуется изучение некоторых из следующих книг:

- Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1933.
 Курант Р., Геометрическая теория функций комплексной переменной, Гостехиздат, М.—Л., 1934.
 Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2, Физматгиз, М., 1958.
 Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций Гостехиздат, М., 1957.
 Поля Г. и Сега Г., Задачи и теоремы из анализа, изд. 2, Гостехиздат, М., 1956.
 Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 7, Гостехиздат, М.—Л., 1945.
 Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, изд. 6, Гостехиздат, М., 1956.
 Титчмарш Е., Теория функций, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
 Уигтхекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. 1 и 2, Гостехиздат, М.—Л., 1934.
 Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1937, гл. 3.
 Фукс Б. А. и Левин В. И., Функции комплексного переменного. Специальная часть, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
 Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
 Copson E. T., Theory of Functions of a Complex Variable, Oxford, New York, 1935.
 McLachlan N. W., Complex Variables and Operational Calculus, Cambridge, New York, 1939.

Книги, в которых рассматриваются ряды и асимптотические разложения:

- Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, т. 1, Изд. иностр. лит., М., 1949.
 Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, Гостехиздат, М., 1957.
 Hadamard J., Mandelbrojt S., La serie de Taylor et son prolongement analytique, Paris, 1926.
 Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, 1929.

Книги, представляющие интерес в связи с многозначными и специальными функциями:

- Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
 Лебедев Н. Н., Специальные функции и их применения, Гостехиздат, М., 1953.
 Forsythe A. R., Theory of Functions of a Complex Variable, Cambridge, 1893.
 Neville E. H., Jacobian Elliptic Functions, Oxford, New York, 1944.
 Nielsen N., Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.

Книги, в которых рассматривается конформное отображение и его приложения:

- Каратеодори К., Конформное отображение, Гостехиздат, М.—Л., 1934.
 Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, изд. 5, Гостехиздат, М., 1955.
 Лаврентьев М. А., Конформные отображения, Гостехиздат, М.—Л., 1946.

- Milne-Thomson L. M., Theoretical Hydrodynamics, London, 1938.
Ramsey A. S., Treatise on Hydromechanics, Part 2, Ch. 6, London, 1920.
Rothe R., Ollendorff F., Pohlhausen K., Theory of Functions, Cambridge, 1933.

Книги по теории преобразований Лапласа и Фурье, а также по другим преобразованиям:

- Гарднер М. С. и Бернс Дж. Л., Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
Диткин В. А. и Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
Конторович М. И., Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, изд. 2, Гостехиздат, 1953.
Лурье А. Н., Операционное исчисление, Гостехиздат, М., 1950.
Снеддон И., Преобразования Фурье, Изд. иностр. лит., М., 1955.
Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
Трантер К. Дж., Интегральные преобразования в математической физике, Изд. иностр. лит., М., 1956.
Campbell G. A., Foster R. M., Fourier Integrals for Practical Applications, Bell System Techn. Publ. B-584, 1942 (таблица преобразований Фурье).
Carslaw H. S., Theory of Fourier Series and Integrals, New York, 1930.
Churchill R. V., Fourier Series and Boundary Value Problems, New York, 1941.
Doetsch G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.
Paley R. E. A. C., Wiener N., Fourier Transforms in the Complex Domain, New York, 1934.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

После обзора видов полей, встречающихся в физике, и описывающих их уравнений с частными производными, после исследования аналитического характера различного рода решений этих уравнений мы должны теперь перейти к центральной части нашей работы, именно, к нахождению решения конкретных уравнений поля. Для этого обычно требуется два основных шага: первый, исследуемый в настоящей главе, состоит в нахождении всех (или почти всех) возможных решений уравнения, а второй, изучаемый в дальнейших главах, — в выборе из них того частного решения, которое удовлетворяет краевым условиям рассматриваемой задачи.

Уравнения, которые мы предполагаем изучать в данной книге, приведены в таблице на стр. 260, 261. Мы уже указали, что они являются далеко не единственными встречающимися в физике уравнениями поля, но мы отметили и то, что они составляют неожиданно большую часть важных в современной физике уравнений поля. Зная, как найти решение приведенных уравнений, мы будем в состоянии изучать многочисленные теоретические проблемы во всех важных в настоящее время областях физики.

Все приведенные в таблице уравнения имеют несколько существенных общих свойств, которые дадут нам возможность сузить круг вопросов, изучаемых здесь и далее. Эти уравнения можно единообразно записать в виде

$$\mathcal{H}\phi = F.$$

где поле ϕ представляет собой скалярную либо векторную функцию координат и времени (рассматриваемые векторы могут принадлежать как обычному пространству, так и абстрактному векторному пространству или обоим). Оператор $\mathcal{H}$ представляет собой комбинацию функций координат и времени, частных производных по пространственным координатам и времени, а также иногда векторных операторных функций в обычном или абстрактном векторном пространстве. Величина F представляет собой скалярную или векторную функцию пространства и времени. $\mathcal{H}$ и F известны; поле ϕ неизвестно.

Первым общим свойством, на которое надо указать, является то, что такие уравнения *линейны* относительно неизвестной ϕ ; ни один из членов не содержит ϕ^2 , или произведений двух компонент ϕ , или высших степеней. Обычно линейные уравнения решаются значительно проще, чем нелинейные, и мы в наших рассуждениях будем много раз пользоваться этим свойством линейности.

Если F равно нулю, уравнение называется *однородным*, так как каждый из его членов содержит ϕ . Однородные линейные уравнения обладают следующим чрезвычайно полезным свойством: если $\phi_1, \phi_2, \dots$ являются решениями уравнения, то *любая линейная комбинация* $\sum a_n \phi_n$ *этих решений также представляет собой решение*. Читатель легко проведет доказательство этого утверждения.

Если F не равно нулю, уравнение называется *неоднородным*, так как некоторые из его членов не содержат ϕ . Неоднородные линейные уравнения также обладают полезными свойствами: если ϕ_i является решением неоднородного уравнения $\mathcal{H}\phi_i = F$, а ϕ_h — каким-либо решением соответствующего однородного уравнения $\mathcal{H}\phi_h = 0$, то *сумма $\phi_i + \phi_h$ представляет собой решение неоднородного уравнения*; если ϕ_1 является решением уравнения $\mathcal{H}\phi_1 = F_1$, ϕ_2 — решением уравнения $\mathcal{H}\phi_2 = F_2$ и т. д., то *сумма $\phi = \sum a_n \phi_n$ представляет собой решение неоднородного уравнения $\mathcal{H}\phi = \sum a_n F_n$* . Оба эти результата, которые нетрудно доказать, окажутся в дальнейших исследованиях весьма полезными.

Другим свойством уравнений, приведенных в таблице на стр. 260, 261, является то, что *ни одно из них не имеет порядка выше второго*, то есть ни одно из них не содержит производных выше второго порядка. Число уравнений поля порядка выше второго, используемых в физике, невелико (например, уравнение поперечных колебаний упругой пластинки); наиболее важные уравнения, которые рассматриваются в нашей книге, имеют порядок либо первый, либо второй. Это также позволит нам сберечь время и место за счет проведения общих рассуждений только для этих случаев.

Уравнения с частными производными, содержащие более одного независимого переменного, решить значительно сложнее, чем обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие только одно независимое переменное. За исключением небольшого числа случаев, когда решение удастся угадать, а затем проверить, известно только два общих эффективных метода решения, именно *интегральное представление решения и решение при помощи разделения переменных*¹⁾. Пример интегрального представления решения приведен на стр. 47 для уравнения Пуассона $\nabla^2\phi = -q(x, y, z)$. Решение можно записать, как было показано выше, в виде

$$\phi(x, y, z) = \iiint [q(x', y', z')/4\pi R] dx' dy' dz',$$

где R — расстояние между точками (x, y, z) и (x', y', z') . Это — типичная запись решения в виде интеграла. Неоднородная часть уравнения q находится под знаком интеграла, а остальная часть подинтегральной функции $1/4\pi R$, называемая функцией Грина, одна и та же для любой функции q . Решения аналогичного типа можно получить также для однородных уравнений, причем тогда функция q определяется по краевым условиям, а функция Грина — по виду решаемого уравнения.

Преимуществом метода интегрального представления решения является общность этого метода, так как обычно интеграл остается инвариантным при преобразовании координат, и, построив функцию Грина один раз, как показано в гл. 7, в принципе можно найти любое требуемое решение однородного или неоднородного уравнения. Однако выражение «в принципе» указывает, что интегральное представление решения не всегда является достаточно удовлетворительным, так как во многих случаях интеграл не берется и тогда численные значения решения получить чрезвычайно трудно.

Другим методом решения линейных уравнений с частными производными является метод разложения на множители или разделения переменных, в котором исходное уравнение, содержащее несколько независимых переменных, разбивается (*разделяется*) на ряд обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит только одно незави-

¹⁾ Имеется в виду получение точного решения. Существует также ряд эффективных приближенных методов, часть которых освещена и в этой книге. — *Прим. перев.*

симое переменное. Этот прием не обладает такой универсальностью, как предыдущий (основанный на интегральном представлении решения), так как разделение переменных проходит различным образом для различных систем координат и возможно лишь для немногих таких систем. Однако если этот метод применим, то он обычно является значительно более удовлетворительным, так как решения обыкновенных дифференциальных уравнений найти гораздо легче, чем решения уравнений с частными производными.

В этой главе мы будем изучать метод разделения переменных. Мы укажем, в каких системах координат уравнение допускает разделение переменных, после чего перейдем к изучению получающихся обыкновенных дифференциальных уравнений и покажем, как их можно решить и как можно связать аналитические свойства решений с характеристиками уравнений и, в конечном счете, с геометрией выбранной системы координат.

5.1. Координаты, в которых переменные разделяются

Чтобы не ограничиваться замечаниями столь общими, что их затруднительно понять и применить, мы проведем исследование для одного из уравнений общего вида $\mathcal{H}\phi = F$; оно послужит нам примером, с которым можно сравнивать остальные уравнения. Дифференциальный оператор $\mathcal{H} = (\nabla^2 + k^2)$, соответствующий линейному однородному уравнению второго порядка вида

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (5.1.1)$$

для скалярного поля ϕ , где ∇^2 — оператор Лапласа (см. стр. 18), является достаточно типичным; поэтому его рассмотрение представляет общий интерес. Если $k = 0$, уравнение превращается в уравнение Лапласа для статических потенциальных полей; если k — положительная постоянная, имеем волновое уравнение для синусоидальной зависимости от времени (уравнение Гельмгольца) или уравнение диффузии для показательной зависимости от времени; а если k^2 представляет собой функцию координат, то получается уравнение Шредингера для частицы с постоянной энергией E (тогда k^2 пропорционально разности между E и потенциальной энергией частицы).

Уравнение вида (5.1.1) обладает бесконечным множеством различных решений, что затрудняет выбор одного из них. Бесконечности и нули решений могут быть расположены где угодно; можно найти решение, имеющее любое заданное, достаточно (а иногда и недостаточно) непрерывное распределение его значений на произвольным образом выбранной поверхности. Поэтому вопрос состоит не в нахождении всех решений, а в нахождении частного решения или решений, соответствующих той частной задаче, которую мы хотим решить.

Эти различные частные задачи обычно отличаются одна от другой по характеру налагаемых *краевых условий*; меняется либо вид границы, либо заданное поведение поля на границе. (Начальные условия являются, конечно, краевыми условиями, заданными на поверхности $t = 0$.) Это наводит на мысль классифицировать решения различных уравнений с частными производными в соответствии с видом граничных поверхностей, «порождающих» решение, а также в соответствии с характером краевых условий на этих поверхностях. Такая классификация утомительна и сложна; мы обсудим ее здесь только в объеме, необходимом для наших текущих целей. В дальнейшем изложении этому вопросу будет посвящено еще несколько параграфов.

Граничные поверхности и системы координат. Прежде всего надо различать два общих класса граничных поверхностей: *открытые* и *замкнутые поверхности*. *Замкнутая* граничная поверхность — это такая поверхность, которая окружает поле со всех сторон, заключая его в конечный пространственный объем. В этом случае граничная поверхность расположена вне поля и вся уходящая из поля энергия поглощается на границе. *Открытая же поверхность* не вполне ограничивает поле, а оставляет его простирающимся в бесконечность по крайней мере в одном направлении, так что поле занимает бесконечный объем и энергия может уходить «в бесконечность» равно как и поглощаться границей. Это определение открытой поверхности несколько отличается от обычного смысла этого термина; например, сфера является замкнутой поверхностью по отношению к содержащемуся внутри нее полю, но открытой для поля, находящегося вне ее.

Рассмотрим сначала открытые границы. Краевые условия, обычно накладываемые на поле, состоят в задании значения поля в каждой точке граничной поверхности, или в задании нормальной составляющей градиента на этой поверхности, или же и того и другого. В *краевой задаче Дирихле* задаются значения ψ на поверхности; в *краевой задаче Неймана* на ней задаются значения $\partial\psi/\partial n$; в *задаче Коши* на ней задаются как значения поля, так и значения нормальной составляющей его градиента. Каждое из этих условий свойственно различным типам уравнений и различным граничным поверхностям. Например, условия Дирихле на замкнутой поверхности однозначно определяют решение уравнения Лапласа внутри этой поверхности, в то время как условия Коши для этого поля были бы «переопределяющими». Эти вопросы будут детально обсуждаться в гл. 6.

Можно было бы ожидать, что для открытой поверхности требуется задание на ней значений решения и его градиента (то есть условий Коши), чтобы однозначно определить решение дифференциального уравнения второго порядка вне этой поверхности. Это верно, однако имеются другие способы однозначного определения решения. Чтобы упростить исследование, целесообразно, если только это возможно, на границе «соорудить» координатную систему, приспособленную к этой границе. Под этим мы понимаем такой выбор системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , чтобы граничная поверхность стала одной из координатных поверхностей, скажем, $\xi_1 = X$, где X — постоянная. (Имеются варианты, в которых методика несколько усложняется, хотя принципиально и не изменяется: например, можно одну часть поверхности записать в виде $\xi_1 = X$, другую — в виде $\xi_2 = Y$ и т. д.) Если граничная поверхность не слишком «патологического» вида, можно найти по крайней мере одну подходящую ортогональную систему координат (см. стр. 17). Во многих случаях можно найти более одной такой системы; это не должно нас беспокоить, надо выбрать одну из них и придерживаться ее.

Уравнение с частными производными [например, уравнение (5.1.1), которое мы выбрали как пример] можно записать в новых координатах, причем решения будут функциями этих переменных ξ . Конечно, в виде функций от ξ можно выразить всевозможные решения уравнения, однако мы теперь в состоянии классифицировать решения в соответствии с крайними условиями, которые должны удовлетворяться на поверхности $\xi_1 = X$. Например, имеются решения, обращающиеся в нуль на поверхности $\xi_1 = X$; они должны содержать $(\xi_1 - X)$ в качестве множителя. Имеются также решения с нулевой нормальной составляющей градиента на поверхности; в-третьих, имеются решения с постоянными значениями самого решения и нормальной составляющей его градиента на всей поверхности.

Как мы указали выше и докажем позже, для решений третьего вида осуществляется взаимно однозначное соответствие между решениями и краевыми условиями: каждой паре значений ψ , $\partial\psi/\partial n$ на поверхности соответствует одно и только одно решение. Некоторые из них являются кратными другими и не должны рассматриваться как новые решения. Например, решение, соответствующее условиям $\psi = aa$, $\partial\psi/\partial n = ab$ на поверхности $\xi_1 = X$, получается умножением на a решения при условиях $\psi = a$, $\partial\psi/\partial n = b$. Эти решения нельзя рассматривать как независимые, так же как вектор $\mathbf{A}$ нельзя рассматривать как независимый с единичным вектором $\mathbf{a}$, направленным вдоль $\mathbf{A}$. Однако мы получим различные решения, если будем менять отношение ψ к $\partial\psi/\partial n$.

Допустим, что мы упорядочим эти решения в соответствии со значением отношения $[\psi_X/(\partial\psi/\partial n)_X] = P$. Решение для $P = 0$ (имеется бесконечное число решений для $P = 0$, но все они различаются только постоянным множителем, так что могут рассматриваться как одно решение) соответствует граничному условию $\psi = 0$ при $\xi_1 = X$. Если взять теперь решения, когда P убывает, принимая отрицательные значения, то мы обнаружим, что поверхность $\psi = 0$ удаляется от поверхности $\xi_1 = X$. Вообще говоря, семейство порожденных таким образом поверхностей не совпадает с семейством поверхностей $\xi_1 = \text{const}$, но в некоторых случаях такое совпадение имеет место. В этих специальных случаях решение ψ должно обладать множителем $F_1(\xi_1)$, функциональный вид которого зависит от P . Если $F_1(\xi_1)$ равно нулю, соответствующая поверхность $\psi = 0$ совпадает с одной из координатных поверхностей $\xi_1 = \text{const}$.

Поверхность $\psi = 0$ называется *узловой поверхностью* (или *узлом*) для ψ . Семейство поверхностей, порожденное при изменении P , может не включать все узловые поверхности. Вообще говоря, эти дополнительные поверхности не будут ортогональными к поверхности $\xi_1 = \text{const}$, так что они не совпадают и с другими координатными поверхностями.

До сих пор мы говорили о решениях специального вида, имеющих на поверхности $\xi_1 = X$ постоянные значения или постоянную нормальную составляющую градиента. Для большинства решений значения и градиент вдоль граничной поверхности меняются, то есть являются функциями координат ξ_2 и ξ_3 . Их узловые поверхности, вообще говоря, не связаны простыми соотношениями с координатными поверхностями ξ_1 . Однако в некоторых случаях и для некоторых простых граничных поверхностей из всей совокупности различных решений можно выделить множество таких, для которых все узлы либо совпадают с координатными поверхностями ξ_1 , либо же ортогональны к ним. Такими будут решения, представляющие собой произведение двух сомножителей

$$\psi = F_1(\xi_1) \Phi(\xi_2, \xi_3),$$

один из которых F_1 является функцией одного ξ_1 , нули которой порождают узлы, совпадающие с поверхностями ξ_1 , а другой Φ является функцией ξ_2 и ξ_3 , но не ξ_1 , и порождает узлы, ортогональные к поверхностям ξ_1 .

Для еще более ограниченного множества систем координат можно найти совокупность решений ψ , у которых все узловые поверхности совпадают с координатными поверхностями всех трех семейств и которые можно выразить в виде произведения трех сомножителей

$$\psi = F_1(\xi_1) F_2(\xi_2) F_3(\xi_3).$$

Такие решения являются *разделенными* на множители, каждый из которых зависит только от одной координаты. Для большого числа систем координат можно найти лишь небольшое число решений, у которых не-

которые узловые поверхности совпадают с координатными, и только в немногих координатах можно найти достаточно полное семейство решений, все узлы которых имеют такой вид.

Конечно, даже в этих специальных координатах семейство разделенных (на множители, зависящие от одной координаты) решений образует небольшую часть множества всех решений уравнения (5.1.1). Однако интересным и важным свойством этого подмножества является то, что *все решения уравнения с частными производными могут быть получены из линейных комбинаций членов семейства разделенных решений*. Вычислив разделенные решения, мы можем найти и остальные.

Системы координат, обладающие семействами разделенных решений данного уравнения, при помощи которых можно построить все решения уравнения, называются *разделяющими системами координат для рассматриваемого уравнения*. Только в таких системах возможно получить решения в более удобной для применения форме, чем в виде громоздких рядов или интегралов со многими переменными.

Для представления картины в целом рассуждения, приведенные на последних страницах, проводились догматически. Для анализа и доказательства всего нами сказанного потребуются несколько глав. В дальнейшей части этого параграфа мы покажем, как находить разделяющие системы координат и как можно получить разделенные решения.

Двумерные разделяющие координаты. Начнем со случая двух измерений, когда выбранное для рассмотрения уравнение (5.1.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0. \quad (5.1.2)$$

Если k постоянно, это уравнение допускает разделение переменных в прямоугольных координатах x, y , так как, подставляя $\psi = X(x)Y(y)$ в уравнение (5.1.2), после простых преобразований получаем

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 = 0.$$

Первый член этого уравнения является функцией только x , второй — только y , а третий постоянен. Чтобы это уравнение удовлетворялось *при всех x и y* , необходимо, чтобы каждый член был постоянным, а сумма всех трех постоянных равнялась нулю. Отсюда

$$(1/X)(d^2 X/dx^2) = -\alpha^2, \quad (1/Y)(d^2 Y/dy^2) = -\beta^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = k^2$$

или

$$(d^2 X/dx^2) + \alpha^2 X = 0, \quad (d^2 Y/dy^2) + (k^2 - \alpha^2) Y = 0. \quad (5.1.3)$$

Таким образом, мы расщепили уравнение с частными производными по двум переменным на два обыкновенных дифференциальных уравнения, каждое из которых содержит лишь одно независимое переменное. Постоянная α^2 называется *константой разделения*. Семейство разделенных решений уравнения (5.1.2) состоит из произведений решений уравнений (5.1.3) для всех значений параметра α . Общее решение уравнения (5.1.2) можно представить в виде линейной комбинации разделенных решений для различных значений параметра α . Другими словами, так как произведение решений уравнений (5.1.3) имеет вид $e^{i\alpha x + y\sqrt{\alpha^2 - k^2}}$, то общее решение можно представить в виде интеграла

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{i\alpha x + y\sqrt{\alpha^2 - k^2}} d\alpha, \quad (5.1.4)$$

имеющего вид интеграла Фурье (см. стр. 428). Этот интеграл иногда берется как контурный по комплексным значениям α .

Если k^2 является функцией координат [когда уравнение (5.1.2) представляет собой уравнение Шредингера], то для возможности разделения переменных надо, чтобы она имела общий вид $k^2 = \varepsilon^2 + f(x) + g(y)$, где f и g — произвольные функции одного переменного. Тогда разделенные уравнения приобретают вид

$$(d^2X/dx^2) + [\alpha^2 + f(x)]X = 0, \quad (d^2Y/dy^2) + [\varepsilon^2 - \alpha^2 + g(y)]Y = 0,$$

где α^2 опять константа разделения.

Чтобы исследовать другие координаты, можно для упрощения применить аппарат теории аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$, так как уравнение (5.1.2) можно выразить через производные по z и по его комплексно сопряженному $\bar{z} = x - iy$ (являющимися независимыми переменными). В соответствии с уравнением (4.1.11) можно преобразовать уравнение (5.1.2) в

$$4(\partial^2\psi/\partial z \partial \bar{z}) + k^2\psi = 0.$$

Произведем теперь конформное преобразование координат, перейдя от x, y к ξ_1, ξ_2 . Поскольку преобразование конформное, функция $w = \xi_1 + i\xi_2$ должна быть аналитической функцией $z = x + iy$ (а сопряженная функция $\bar{w} = \xi_1 - i\xi_2$ — аналитической функцией $\bar{z} = x - iy$). Новые координатные линии задаются уравнениями $\xi_1(x, y) = \text{const}$, $\xi_2(x, y) = \text{const}$. Так как $\partial/\partial z = (d\omega/dz)(\partial/\partial\omega)$ и $\partial/\partial\bar{z} = (\partial\bar{\omega}/d\bar{z})(\partial/\partial\bar{\omega})$ ($\partial\omega/\partial z$ и $\partial\bar{\omega}/\partial\bar{z}$ равны нулю), то преобразованное уравнение примет вид

$$4 \frac{\partial^2\psi}{\partial\omega \partial\bar{\omega}} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_2^2} = -\frac{k^2\psi}{|d\omega/dz|^2} = -\frac{dz}{d\omega} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\omega}} k^2\psi, \quad (5.1.5)$$

где мы выражаем теперь z как функцию ω (а $\bar{z}$ как функцию $\bar{\omega}$).

Разделяющие координаты для двумерного уравнения Лапласа. Заметим прежде всего, что для уравнения Лапласа, когда $k=0$, все координаты, полученные конформным преобразованием из прямоугольных координат x, y , являются разделяющими координатами для уравнения Лапласа в случае двух измерений. Разделенные решения имеют общий вид

$$\psi = Ae^{\pm i\alpha\xi_1 \pm \alpha\xi_2} \text{ или } ae^{\beta w} + be^{\gamma\bar{w}},$$

где константа разделения α может иметь любое вещественное или комплексное значение. При помощи интегралов или сумм этих элементарных решений для различных значений α, β или γ можно представить любое решение двумерного уравнения Лапласа. Этот вопрос будет детально исследован в § 10.2.

Надо заметить, что имеется тесная связь между геометрическими свойствами координат и поведением решений. Геометрические свойства координат ξ_1, ξ_2 наиболее ясно выражаются при помощи коэффициентов Ламе $h_1 = \sqrt{(\partial x/\partial\xi_1)^2 + (\partial y/\partial\xi_1)^2}$ и h_2 (см. стр. 34). Так как преобразование конформное, то коэффициенты Ламе h_1 и h_2 должны быть одинаковы, а используя условия Коши — Римана, легко показать, что эти коэффициенты равны $|dz/d\omega|$. В точках, где $w(z)$ имеет полюс, коэффициент Ламе $|dz/d\omega|$ обращается в нуль и система координат ξ имеет точку концентрации. Обратно, там, где система координат имеет точку концентрации, функция $w(z)$ имеет полюс, а решение $\psi = e^{\pm\alpha w}$ — существенную особенность.

Разделение переменных в волновом уравнении. Для двумерного уравнения Гельмгольца (волнового уравнения с синусоидальным временным множителем) k постоянно и равно ω/c . В этом случае уравнение (5.1.5) не допускает разделения переменных, если только произведение $(dz/dw)(d\bar{z}/d\bar{w})$, представляющее собой функцию ξ_1 и ξ_2 , не является суммой функций, одна из которых зависит только от ξ_1 , а другая — только от ξ_2 . Другими словами,

$$k^2 |dz/dw|^2 = f(\xi_1) + g(\xi_2)$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left(\left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \right) = 0, \quad (5.1.6)$$

и чтобы найти, чему может равняться $|dz/dw|^2$ для разделяющих координат, надо решить это уравнение.

Так как величина

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2} \right)^2}$$

[здесь мы применили условия (4.2.1) Коши — Римана] представляет собой коэффициент Ламе $h_1 = h_2$ для обеих координат ξ_1, ξ_2 (для конформного преобразования коэффициенты Ламе обязательно равны, см. стр. 440), то нами тем самым получено уравнение для коэффициента Ламе разделяющей системы координат, для уравнения (5.1.5). Неудивительно, что мы пришли к такой задаче; мы уже говорили на стр. 34, что если мы знаем коэффициенты Ламе, то мы знаем также все важнейшие свойства соответствующей системы координат.

Уравнение для h_1, h_2 нуждается в дальнейшем преобразовании. Так как величина dz/dw является функцией w , а $d\bar{z}/d\bar{w}$ — функцией $\bar{w}$, то дифференциальный оператор надо преобразовать к переменным $w, \bar{w}$. Имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = i \frac{\partial^2}{\partial w^2} - i \frac{\partial^2}{\partial \bar{w}^2},$$

и так как dz/dw не зависит от $\bar{w}$, а $d\bar{z}/d\bar{w}$ от w , то уравнение (5.1.6) приобретает вид

$$\left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right) \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \left(\frac{dz}{dw} \right) \frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right)$$

или

$$\frac{1}{dz/dw} \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \frac{1}{d\bar{z}/d\bar{w}} \frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right).$$

Левая часть последнего уравнения зависит только от w . Чтобы она равнялась правой части (зависящей только от $\bar{w}$) для всех значений w и $\bar{w}$, надо, чтобы обе части равнялись одной и той же постоянной, которую мы обозначим λ . Таким образом, мы получаем

$$\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \lambda \left(\frac{dz}{dw} \right), \quad \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right) = \lambda \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right). \quad (5.1.7)$$

Только если dz/dw удовлетворяет первому уравнению (а $d\bar{z}/d\bar{w}$ — сопряженному уравнению), то $|dz/dw|$ является коэффициентом Ламе для разделяющей системы координат. Чтобы определить, какие координаты

являются разделяющими для уравнения (5.1.1), надо решить полученные уравнения (5.1.7).

Прямоугольные и параболические координаты. Простейшим, конечно, является случай $\lambda = 0$. Тогда решением уравнения для dz/dw служит $\beta + \gamma w$, а если γ принять равным нулю, получим ($\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$)

$$z = \alpha + \beta w, \quad x = a + c\xi_1 - d\xi_2, \quad y = b + c\xi_2 + d\xi_1. \quad (5.1.8)$$

Это соответствует простому вращению, изменению масштаба и переносу, причем координаты остаются прямоугольными. Новый коэффициент Ламе равен $|dz/dw| = |\beta| = \sqrt{c^2 + d^2}$, а новое уравнение имеет тот же вид, что и (5.1.2), но k^2 заменяется на $k^2|\beta|^2$.

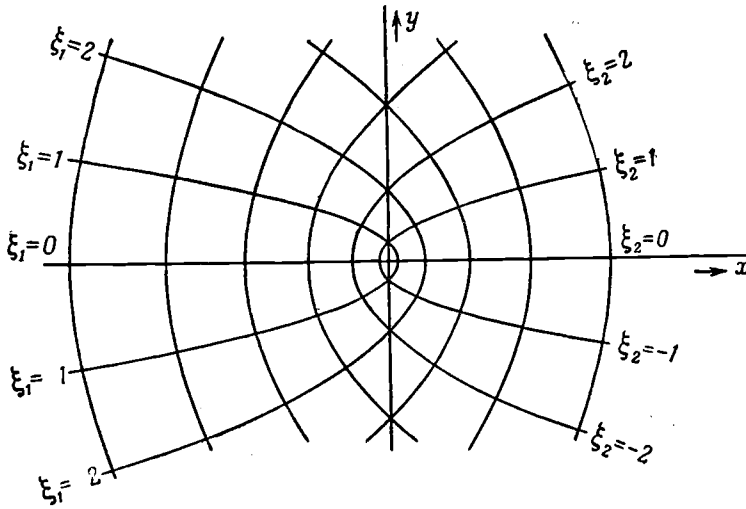


Рис. 5.1. Параболические координаты.

Если γ не равно нулю, достаточно рассмотреть лишь член с γ , так как члены с α и β добавляют просто вращение и перенос. Так как изменение масштаба также несущественно, то для простоты положим $\gamma = 1$ (и опустим постоянные интегрирования). Таким образом, имеем

$$z = \frac{1}{2} \omega^2, \quad x = \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_2^2), \quad y = \xi_1 \xi_2, \quad (5.1.9)$$

$$|dz/dw| = h_1 = h_2 = |\omega| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Получились параболические координаты, координатные линии для которых образуют два ортогональных семейства софокусных парабол, осью которых служит ось x . Эти линии определяются уравнениями $\xi_1 = [\sqrt{x^2 + y^2} + x]^{1/2} = \text{const}$ и $\xi_2 = \pm [\sqrt{x^2 + y^2} - x]^{1/2} = \text{const}$, как показано на рис. 5.1. Такие координаты удобны, например, для границы, состоящей из отрицательной полуоси (которой соответствует уравнение $\xi_1 = 0$).

Уравнение (5.1.5) теперь приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} + (\xi_1^2 + \xi_2^2) k^2 \psi = 0, \quad (5.1.10)$$

который допускает разделение переменных, как это и должно быть. Применяя обычный прием, видим, что разложенное на множители решение имеет вид $\phi = F(\xi_1) G(\xi_2)$, где сомножители удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(d^2 F/d\xi_1^2) + (\kappa^2 + k^2 \xi_1^2) F = 0, \quad (d^2 G/d\xi_2^2) + (-\kappa^2 + k^2 \xi_2^2) G = 0 \quad (5.1.11)$$

Решения этих уравнений мы исследуем в настоящей главе позже.

Надо сделать несколько замечаний. Прежде всего, хотя функция $z = \frac{1}{2} w^2$ аналитична всюду, за исключением бесконечности, точка $w = 0$ является точкой ветвления конформного преобразования, так как в ней коэффициент Ламе h обращается в нуль. Мы избежали двужначности, приняв, что ξ_1 принимает только положительные значения, в то время как ξ_2 может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, линия $\xi_1 = 0$, представляющая собой отрицательную полуось x , производит разрез, выше которого ξ_2 принимает положительные значения, а ниже — отрицательные. Мы будем, если только это возможно, исключать этот разрез из рассматриваемой области, полагая, что граница поля совпадает с одной из линий $\xi_1 = \text{const}$, а само поле расположено во внешней части этой параболы, что можно сделать в значительном числе случаев, когда граница открытая; однако для замкнутых границ, состоящих из линий $\xi_1 = \text{const}$, $\xi_2 = \text{const}$, когда поле расположено внутри границы, часть разреза попадает в интересующую нас область. В этом случае мы избежим разрыва решения вдоль разреза, положив, что G является четной или нечетной функцией ξ_2 , и выбирая затем соответствующую функцию $F(\xi_1)$ так, чтобы если G четная, то $dF/d\xi_1 = 0$ при $\xi_1 = 0$, и если G нечетная, то $F(0) = 0$ (этот вопрос детально исследуется в § 11.2).

В соответствии с единственной особенностью функции w^2 , расположенной на бесконечности, мы покажем позже, что решения F и G также имеют особенности только при бесконечных значениях ξ_1 и ξ_2 .

Для уравнения Шредингера в параболических координатах функция k^2 должна иметь вид $\varepsilon^2 + [f(\xi_1) + g(\xi_2)]/(\xi_1^2 + \xi_2^2)$. В этом случае разделенными уравнениями будут

$$(d^2 F/d\xi_1^2) + [\alpha^2 + \varepsilon^2 \xi_1^2 + f(\xi_1)] F = 0, \quad (d^2 G/d\xi_2^2) + [-\alpha^2 + \varepsilon^2 \xi_2^2 + g(\xi_2)] G = 0,$$

где f и g — любые функции одного переменного. Функции F и G будут иметь особенности при $\xi = \infty$ и в каждой особой точке соответственно f и g .

Полярные и эллиптические координаты. Возвращаясь к уравнению (5.1.7), исследуем теперь случай, когда λ не равно нулю. Примем сначала, что λ положительно, и положим $\lambda = 1$, так как изменение численного значения λ меняет только масштаб и не дает новых систем координат (а поскольку λ больше нуля, оно может быть и единицей). Имеем

$$dz/dw = e^{\pm w} \text{ или } z = ae^w + be^{-w}.$$

Возьмем сначала крайнее значение $b = 0$ (и положим $a = 1$, так как изменение a меняет только масштаб). Тогда преобразование в координатах задается соотношениями

$$\begin{aligned} z &= e^w = e^{\xi_1 + i\xi_2}, & x &= e^{\xi_1} \cos \xi_2, & y &= e^{\xi_1} \sin \xi_2; \\ r &= e^{\xi_1} = \sqrt{x^2 + y^2}, & \varphi &= \xi_2 = \arctg(y/x); \\ |dz/dw| &= h_1 = h_2 = e^{\xi_1} = r. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Получились полярные координаты, причем семейство $\xi_1 = \text{const}$ (или $r = \text{const}$) состоит из концентрических окружностей, а множество $\xi_2 = \varphi = \text{const}$ —

из радиальных лучей, как показано на рис 5.2 (заметим, что коэффициент Ламе h_1 равен r для координаты ξ_1 , а не для координаты r , для которой скалярный множитель $h_r = 1$). Эти координаты применимы для круговых границ и для границ, состоящих из двух лучей, образующих угол.

Уравнение (5.1.5) принимает вид

$$(\partial^2 \phi / \partial \xi_1^2) + (\partial^2 \phi / \partial \xi_2^2) + e^{2\xi_1} k^2 \phi = 0 \quad (5.1.13)$$

и разделяется на уравнения

$$\phi = F(\xi_1) G(\xi_2), \quad (d^2 F / d\xi_1^2) + (k^2 e^{2\xi_1} - \alpha^2) F = 0, \quad (d^2 G / d\xi_2^2) + \alpha^2 G = 0, \quad (5.1.14)$$

где постоянная α^2 опять является константой разделения.

Для общего случая, когда $z = ae^w + be^{-w}$, можно получить результаты в более удобной форме, положив

$$a = \frac{1}{2} d e^{-\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha - \beta}, \quad b = \frac{1}{2} d e^{\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha + \beta}, \quad d = e^{\alpha} = \sqrt{4ab}, \quad e^{\beta} = \sqrt{b/a},$$

так что если d , α и β вещественны, то

$$\begin{aligned} z &= d \operatorname{ch}(w - \beta) = e^{\alpha} \operatorname{ch}(\xi_1 + i\xi_2 - \beta), \\ x &= d \operatorname{ch}(\xi_1 - \beta) \cos \xi_2, \quad y = d \operatorname{sh}(\xi_1 - \beta) \sin \xi_2, \\ |dz/dw| &= h_1 = h_2 = d \sqrt{\operatorname{ch}^2(\xi_1 - \beta) - \cos^2 \xi_2}. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

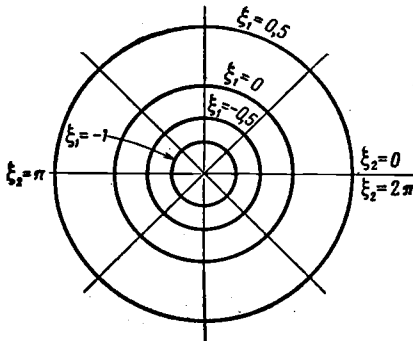


Рис. 5.2. Полярные координаты.

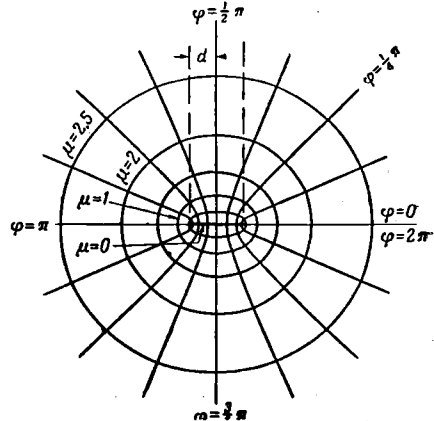


Рис. 5.3. Эллиптические координаты.

Это — эллиптические координаты, состоящие из софоксных эллипсов и гипербол с фокусами в точках $x = \pm d$, $y = 0$, как показано на рис. 5.3. Постоянная β обычно для удобства полагается равной нулю. (Однако надо заметить, что если положить $\alpha = \beta + \ln 2$ и затем устремить β к отрицательной бесконечности, то фокусы эллипса сольются с началом координат и вся система координат перейдет в пределе в полярную.) Уравнение с частными производными в рассматриваемых координатах и обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные в результате разделения переменных, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_2^2} + d^2 k^2 [\operatorname{ch}^2(\xi_1 - \beta) - \cos^2 \xi_2] \phi &= 0, \\ \phi = F(\xi_1) G(\xi_2), \quad (d^2 F / d\xi_1^2) + [d^2 k^2 \operatorname{ch}^2(\xi_1 - \beta) - \alpha^2] F &= 0, \\ (d^2 G / d\xi_2^2) - [d^2 k^2 \cos^2 \xi_2 - \alpha^2] G &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

где α^2 вновь является константой разделения.

Коэффициенты Ламе и геометрия систем координат. Мы увидим в этой главе позже, что вид уравнений, полученных при помощи разде-

ления переменных в полярных или эллиптических координатах и имеющих в качестве коэффициентов при F и G показательные (или гиперболические) функции, не является наиболее удобным для исследования. Трудность происходит прежде всего из геометрии систем координат и из того, что они получены при помощи конформного преобразования. Обе эти системы имеют точки концентрации, где коэффициент Ламе $|dz/dw|$ обращается в нуль. Вблизи таких точек в соответствии с малостью коэффициента Ламе координатные линии расположены очень густо, а так как преобразование конформное, то в этих точках обращаются в нуль коэффициенты Ламе для обеих координат.

Однако, поскольку мы определили геометрию разделяющих систем координат, мы можем видоизменить коэффициенты Ламе для каждой координаты в отдельности так, чтобы сохранить геометрию координат и в то же время привести разделенные уравнения к более удобному для исследования виду. Например, так как в разделенных уравнениях в качестве коэффициентов при F и G более желательны алгебраические функции, чем показательные, мы можем принять в полярных координатах $e^{\pm i}$ за новую координату r , а в эллиптических координатах $\text{ch}(\xi_1 - \beta) - \text{за } \mu$. Преобразование тогда не будет конформным, но вид координатных линий остается неизменным и координаты все равно будут разделяющимися.

Возвращаясь вновь к уравнению (5.1.6), мы видим, что как для волнового уравнения, так и для уравнения Шредингера в случае разделения переменных должно быть $k^2 |dz/dw|^2 = k^2 h^2 = f(\xi_1) + g(\xi_2)$. В этом случае разделенные уравнения имеют вид

$$(d^2 F/d\xi_1^2) + [-\alpha^2 + f(\xi_1)] F = 0, \quad (d^2 G/d\xi_2^2) + [\alpha^2 + g(\xi_2)] G = 0, \quad \psi = F(\xi_1) G(\xi_2). \quad (5.1.17)$$

В соответствии со сказанным выше выберем некоторую функцию $\mu(\xi_1)$ от переменной ξ_1 , для которой функция $f(\xi_1)$, выраженная как $f(\mu)$, является простой алгебраической функцией μ . Так как $f+g$ пропорционально коэффициенту Ламе $|dz/dw|^2$, то в точках концентрации системы координат f и g могут одновременно обратиться в нуль. Можно выбрать новую координату μ так, чтобы точка концентрации получилась при некотором стандартном значении μ , например 0 или 1 (или, может быть, бесконечности). Коэффициент Ламе для μ связан с коэффициентом h для ξ_1 и ξ_2 следующим соотношением:

$$h_\mu = \sqrt{(\partial x/\partial \mu)^2 + (\partial y/\partial \mu)^2} = h \Phi_\mu, \quad \Phi_\mu = d\xi_1/d\mu, \quad (5.1.18)$$

так как $\partial x/\partial \mu = (\partial x/\partial \xi_1)(d\xi_1/d\mu)$. Если h_μ не обращается в нуль в точке концентрации системы координат (где h равно нулю), то в этой точке $\Phi_\mu = h_\mu/h$ обращается в бесконечность.

Чтобы перейти в первом уравнении (5.1.17) к независимой переменной μ , применим формулы

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{d\xi_1}{d\mu} \frac{d}{d\xi_1}, \quad \frac{d}{d\xi_1} = \frac{1}{\Phi_\mu} \frac{d}{d\mu}, \quad \frac{d^2}{d\xi_1^2} = \frac{1}{\Phi_\mu^2} \frac{d^2}{d\mu^2} - \frac{\Phi'_\mu}{\Phi_\mu^3} \frac{d}{d\mu}, \quad \Phi'_\mu = \frac{d^2 \xi_1}{d\mu^2}.$$

Мы можем, если нужно, сделать то же для ξ_2 , перейдя к новой функции $\eta(\xi_2)$ и получив новый коэффициент Ламе $h_\eta = h \Phi_\eta$, и т. д. Тогда новое преобразование и получающиеся разделенные уравнения приобретают вид

$$\omega(z) + \xi_1(\mu) + i\xi_2(\eta), \quad h_\mu = \sqrt{(\partial x/\partial \mu)^2 + (\partial y/\partial \mu)^2} = \Phi_\mu h, \quad h_\eta = \Phi_\eta h, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} = -h^2 k^2 \psi = -[p(\xi_1) + q(\xi_2)] \psi, \quad \psi = F(\mu) G(\eta), \quad (5.1.19)$$

$$\frac{d^2 F}{d\mu^2} - \frac{\Phi'_\mu}{\Phi_\mu} \frac{dF}{d\mu} + \Phi_\mu^2 [-\alpha^2 + f(\mu)] F = 0, \quad \frac{d^2 G}{d\eta^2} - \frac{\Phi'_\eta}{\Phi_\eta} \frac{dG}{d\eta} + \Phi_\eta^2 [\alpha^2 + g(\eta)] G = 0.$$

Последние два обыкновенных дифференциальных уравнения выглядят более сложными, чем уравнения (5.1.17), однако если Φ'_μ/Φ_μ и $\Phi_\mu^2[-\alpha^2 + f(\mu)]$ станут алгебраическими функциями μ , вместо трансцендентных, то уравнения (5.1.19) легче исследовать и решить.

Как мы указали выше, при значениях μ , соответствующих точкам концентрации системы координат, функция Φ_μ^2 , или функция Φ'_μ/Φ_μ , или обе вместе могут обратиться в бесконечность, так что особенности коэффициентов при $dF/d\mu$ и F в уравнении для F тесно связаны с геометрией, соответствующей системе координат. На эту связь мы будем ссылаться в данной главе позже.

Для конкретизации рассуждений применим их к полярным координатам (5.1.12). Мы хотим так изменить шкалу радиальной координаты, чтобы функция $e^{2\xi_1}$ стала алгебраической. Очевидно, можно выбрать $\mu = r = e^{\xi_1}$ или $\xi_1 = \ln \mu$, где μ (или r) — обычное расстояние. Начало координат — единственная точка концентрации для этой системы координат — получится тогда при $r = 0$. Коэффициентом Ламе и результирующим уравнением для F тогда будут

$$\xi_1 = \ln r, \quad \Phi_r = \frac{1}{r}, \quad \Phi'_r = -\frac{1}{r^2}, \quad h_r = 1, \quad \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2} f(r) F = 0, \quad (5.1.20)$$

где для случая волнового уравнения $f(r) = r^2 k^2 - \alpha^2$. Следовательно, мы видим, что оба коэффициента при dF/dr и при F имеют особенности в полярном центре, при $r = 0$.

Шкала координаты ξ_2 не нуждается в изменении, так как последнее из уравнений (5.1.14) не имеет трансцендентных коэффициентов. Тем не менее ξ_2 представляет собой угол, так что решение G является периодической функцией, а ω — многозначной функцией z . Для устранения этой многозначности иногда бывает полезно совершить преобразование $\eta = \cos \xi_2$, причем η меняется от -1 до $+1$. Соответствующими уравнениями будут

$$\xi_2 = \arccos \eta, \quad \Phi_\eta = -(1 - \eta^2)^{-1/2}, \quad \Phi'_\eta = -\eta(1 - \eta^2)^{-3/2}, \\ h_\eta = -r/\sqrt{1 - \eta^2}, \quad \frac{d^2 G}{d\eta^2} - \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{dG}{d\eta} + \frac{g(\eta)}{1 - \eta^2} G = 0, \quad (5.1.21)$$

где для волнового уравнения $g(\eta)$ равно α^2 , константе разделения. Коэффициенты здесь имеют особенности при $\eta = \pm 1$, т. е. на концах интервала изменения η .

Теперь очевидно, что для случая эллиптических координат простейшее преобразование имеет вид $\text{ch}(\xi_1 - \beta) = \mu$, $\cos \xi_2 = \eta$, причем μ меняется от 1 до ∞ , а η — от -1 до $+1$. Преобразование и видоизмененные уравнения таковы (для $\beta = 0$):

$$x = d\mu\eta, \quad y = d\sqrt{(\mu^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad \xi_1 = \text{Ar ch } \mu, \quad \xi_2 = \arccos \eta, \\ \Phi_\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1}}, \quad h_\mu = d\sqrt{\frac{\mu^2 - \eta^2}{\mu^2 - 1}}, \quad h_\eta = d\sqrt{\frac{\mu^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \\ \frac{d^2 F}{d\mu^2} + \frac{\mu}{\mu^2 - 1} \frac{dF}{d\mu} + \frac{f(\mu)}{\mu^2 - 1} F = 0, \quad \frac{d^2 G}{d\eta^2} - \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{dG}{d\eta} + \frac{g(\eta)}{1 - \eta^2} G = 0, \quad (5.1.22)$$

где для волнового уравнения $f(\mu) = d^2 k^2 \mu^2 - \alpha^2$, $g(\eta) = -d^2 k^2 \eta^2 + \alpha^2$. Здесь опять коэффициенты этих уравнений имеют особенности только в точках концентрации координат ($\mu = 1$, $\eta = \pm 1$).

Следует также заметить, что $\mu + \eta = (1/d) \sqrt{(x+d)^2 + y^2} = r_1/d$, $\mu - \eta = (1/d) \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = r_2/d$, то есть

$$\mu = (r_1 + r_2)/2d, \quad \eta = (r_1 - r_2)/2d, \quad (5.1.23)$$

где r_1, r_2 — расстояния от точки (x, y) до обоих координатных фокусов $(x = \mp d, y = 0)$. Отсюда линия $\mu = \text{const}$ представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний которых до обоих фокусов постоянна, то есть является эллипсом. Подобным образом уравнение линии $\eta = \text{const}$ содержит разность расстояний и представляет гиперболу.

Константы разделения и граничные условия. Если в координатах, приспособленных к граничной поверхности данной задачи, переменные разделяются, то в принципе возможно удовлетворить разумно поставленным граничным условиям посредством правильной комбинации решений разделенных уравнений (какие граничные условия являются «разумными» и как находить «правильные комбинации», будет сказано в гл. 6 и 7). Например, границей может служить линия $\xi_1 = \text{const}$ в одной из рассмотренных разделяющих двумерных систем координат. Эта граница может иметь конечную длину (такой будет замкнутая граница); в этом случае множитель $G(\xi_2)$ должен быть непрерывным, когда мы, меняя ξ_2 , обходим линию $\xi_1 = \text{const}$, начиная движение в некоторой точке и заканчивая его в ней же.

Например, для полярных координат r, φ линия $r = \text{const}$ представляет собой окружность конечного радиуса, которая полностью пробегается при изменении угла φ от 0 до 2π . Разделенное уравнение для множителя, зависящего от φ , имеет вид

$$(d^2\Phi/d\varphi^2) + \alpha^2\Phi = 0,$$

где α — константа разделения, и имеет решениями $\cos(\alpha\varphi)$, $\sin(\alpha\varphi)$ и их линейные комбинации. Чтобы Φ была непрерывной вдоль границы $r = \text{const}$, это решение должно при $\varphi = 2\pi$ иметь то же значение, что при $\varphi = 0$; другими словами, решение Φ должно быть периодическим по φ с периодом 2π . Это требование периодичности накладывает ограничение на допустимые значения константы разделения α . В нашем примере, чтобы функция $\cos(\alpha\varphi)$ или $\sin(\alpha\varphi)$ была периодичной по φ с периодом 2π , константа разделения α должна равняться целому $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. И в других случаях, когда ξ_2 является периодической координатой, накладываются аналогичные ограничения на значения константы разделения для решений, остающихся непрерывными при обходе границы $\xi_1 = \text{const}$.

Мы всегда можем упорядочить эти допустимые значения, обозначив наименьшее через α_1 и т. д., так что $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, а соответствующие множители в решениях — через $X_2^1(\xi_2)$, $X_2^2(\xi_2)$, $\dots$. Множитель с ξ_1 также зависит от α , так что полное решение, соответствующее допустимому значению α_n константы разделения, имеет вид $X_1^n(\xi_1)X_2^n(\xi_2)$.

В гл. 6 будет показано, что каждую функцию периодической координаты ξ_2 , удовлетворяющую разумным ограничениям, можно разложить в ряд по указанным допустимым функциям

$$f(\xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_2^n(\xi_2).$$

Правило для подсчета коэффициентов A_n будет также дано позже. Отсюда, если интересующее нас решение $\psi(\xi_1, \xi_2)$ должно удовлетворять граничному условию $\psi(c, \xi_2) = f(\xi_2)$ вдоль границы $\xi_1 = c$, то это решение можно выразить через разделенные решения, взятые для допустимых значений константы разделения

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \sum A_n \left[\frac{X_1^n(\xi_1)}{X_1^n(c)} \right] X_2^n(\xi_2). \quad (5.1.24)$$

Другим, более сложными граничным условиям можно удовлетворить подобным же образом.

Заметим, что окончательное решение $\phi(\xi_1, \xi_2)$ не является разделенным, но может быть выражено в виде ряда из разделенных решений. В каждом случае условия периодичности выделяют последовательность допустимых значений константы разделения, и общее решение получается в виде ряда по этим допустимым значениям. Даже для открытых границ обобщенные условия периодичности также дают возможность выразить решение, удовлетворяющее определенным граничным условиям, в виде ряда (или интеграла) из разделенных решений, взятых для допустимых значений константы разделения.

Однако эти рассуждения увели нас в сторону от того, что здесь необходимо; сейчас мы должны исследовать вопрос о разделении переменных для уравнений с частными производными в трехмерном случае.

Разделение для трех измерений. Разделение переменных для двух измерений особенно просто по следующим причинам. Прежде всего имеется только одна константа разделения, так что разложенные на множители решения образуют однопараметрическое семейство, в результате чего применение граничных условий приводит к относительно простым рядам. Во-вторых, условия разделения просты; так, для уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} + k^2 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \phi = 0$$

член $k^2 |dz/dw|^2$ должен просто представлять собой сумму функций, зависящих только от u и только от v , в противном случае переменные не разделяются. И, в-третьих, семейства узловых поверхностей, совпадающих с координатными, получаются только в случае, когда решения представлены в виде $X_1(\xi_1)X_2(\xi_2)$.

Во всех этих трех отношениях трехмерная проблема разделения переменных оказывается сложнее. Так как имеется три разделенных уравнения, то констант разделения вместо одной будет две. Каждое из трех уравнений может содержать обе константы, и в этом случае каждый из трех множителей в разделенном решении сложным образом зависит от обеих констант разделения, в результате чего удовлетворить граничным условиям даже в виде ряда из разделенных решений — утомительное и трудное дело. Однако для некоторых систем координат получается, что одно (или два) из разделенных уравнений содержит только одну константу разделения; в этих случаях ряд, представляющий общее решение, принимает более простой и удобный для применения вид.

Что касается третьего пункта, то оказывается, что для трехмерного уравнения Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$ имеются такие координатные системы, в которых решение принимает более сложный вид $R(\xi_1, \xi_2, \xi_3)X_1(\xi_1)X_2(\xi_2)X_3(\xi_3)$, где дополнительный множитель R (который можно назвать *модуляционным множителем*) не зависит от констант разделения. Для этих систем разделение происходит с точностью до общего множителя, и граничным условиям все равно можно удовлетворить, так как после вынесения этого общего множителя R за знак суммы, взятой по всем допустимым значениям констант разделения, эта сумма принимает тот же общий вид, как и в случае, когда модуляционный множитель отсутствует.

Возвращаясь ко второму из перечисленных пунктов, отметим, что для трехмерного уравнения с частными производными член, соответствующий слагаемому $k^2 |dz/dw|^2$ для двумерного случая, не обязан быть простой суммой функций, каждая из которых зависит только от одной координаты; разделения можно достичь и в более сложных случаях, чем этот.

Определитель Штеккеля. Общий метод разделения для нашего стандартного трехмерного уравнения с частными производными

$$\nabla^2 \psi + k_1^2 \psi = 0$$

связан со свойствами определителей третьего порядка. Такой определитель S строится по своим элементам Φ_{mn} при помощи следующего соотношения:

$$S = |\Phi_{mn}| = \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{vmatrix} = \Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{33} + \Phi_{12}\Phi_{23}\Phi_{31} + \Phi_{13}\Phi_{21}\Phi_{32} - \\ - \Phi_{13}\Phi_{22}\Phi_{31} - \Phi_{11}\Phi_{23}\Phi_{32} - \Phi_{12}\Phi_{21}\Phi_{33}. \quad (5.1.25)$$

Алгебраическим дополнением элемента Φ_{mn} называется множитель при элементе Φ_{mn} , если Φ_{mn} вынести за скобки из членов, где он встречается. Например, алгебраическими дополнениями элементов первого столбца Φ_{11} , Φ_{21} , Φ_{31} будут

$$\begin{aligned} M_1 &= \partial S / \partial \Phi_{11} = \Phi_{22}\Phi_{33} - \Phi_{23}\Phi_{32}, \\ M_2 &= \partial S / \partial \Phi_{21} = \Phi_{13}\Phi_{32} - \Phi_{12}\Phi_{33}, \\ M_3 &= \partial S / \partial \Phi_{31} = \Phi_{12}\Phi_{23} - \Phi_{13}\Phi_{22}. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Так как нам потребуются здесь только алгебраические дополнения элементов первого столбца, то мы не будем писать у M двойных индексов.

Важным свойством определителей, которое мы будем применять при разделении переменных для уравнений с тремя аргументами, является свойство ортогональности, связывающее элементы и алгебраические дополнения. Так, для (5.1.26) имеем

$$\sum_{n=1}^3 M_n \Phi_{n1} = S, \quad \sum_{n=1}^3 M_n \Phi_{nm} = 0, \quad m = 2, 3, \quad (5.1.27)$$

как если бы Φ_{n2} или Φ_{n3} были компонентами векторов, перпендикулярных вектору с компонентами M_n .

Значит, если бы разделенными уравнениями для трехмерного случая были

$$\frac{1}{f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial X_n}{\partial \xi_n} \right] + [k_1^2 \Phi_{n1} + k_2^2 \Phi_{n2} + k_3^2 \Phi_{n3}] X_n = 0, \quad (5.1.28)$$

то мы могли бы скомбинировать эти три уравнения таким образом, чтобы исключить константы разделения k_2^2 и k_3^2 . Действительно, умножая уравнение для X_1 на $(M_1/S) X_2 X_3$ и т. д. и складывая, получаем

$$\sum_n \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right] + k_1^2 \psi = 0, \quad \psi = X_1 X_2 X_3. \quad (5.1.29)$$

Это уравнение соответствует нашему стандартному уравнению $\nabla^2 \psi + k_1^2 \psi = 0$, если выражение для оператора Лапласа в координатах ξ

$$\nabla^2 \psi = \sum_n \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right] \quad (5.1.30)$$

совпадает с первым слагаемым в уравнении (5.1.29).

Чтобы это было так, надо наложить некоторые ограничения на коэффициенты Ламе h и на элементы Φ_{nm} определителя S . Во-первых, так как уравнения (5.1.28) предполагались разделенными, все функции f_n , Φ_{n1} , Φ_{n2} и Φ_{n3} должны зависеть только от ξ_n . Определитель, элементы Φ_{1m} верхней строки которого являются функциями только ξ_1 , элементы Φ_{2m}

второй строки — функциями только ξ_2 и элементы Φ_{3m} нижней строки — только ξ_3 , называется *определителем Штеккеля*. Он является основным понятием при изучении разделения переменных в трехмерном случае. Заместим также, что если Φ_{1m} является функцией ξ_1 и т. д., то первый минор M_1 зависит от ξ_2 и ξ_3 , но не зависит от ξ_1 и т. д.

Далее, величина $h_1 h_2 h_3 / h_n^2$ должна равняться произведению функции f_n только от ξ_n на некоторую функцию g_n от остальных ξ . Тогда, например, член с ξ_1 в операторе Лапласа приобретает вид

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_1^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] = \frac{g_1(\xi_2, \xi_3)}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[f_1(\xi_1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] = \frac{1}{h_1^2 f_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[f_1 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right]$$

и имеет ту же общую форму, что и член $(M_1/S f_1) [\partial (f_1 \partial \psi / \partial \xi_1) / \partial \xi_1]$ в уравнении (5.1.29). Чтобы эти члены совпадали, должно быть

$$1/h_n^2 = M_n/S, \quad (5.1.31)$$

а это вместе с исходным ограничением на $h_1 h_2 h_3 / h_n^2$ приводит¹⁾ к *условию Робертсона*

$$h_1 h_2 h_3 / S = f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3), \quad (5.1.32)$$

которое дает выражение для определителя Штеккеля и одновременно ограничивает виды систем координат, допускающих разделение переменных. Если оно имеет место, то величина $h_1 h_2 h_3 / h_1^2$ равна произведению f_1 , функции ξ_1 , на функцию $M_1 f_2 f_3$ от ξ_2 и ξ_3 , но не ξ_1 и, таким образом, удовлетворяет сформулированному выше требованию.

Эти требования, наложенные на коэффициенты Ламе, резко ограничивают число независимых систем координат, отвечающих условиям задачи. Детальный анализ того, какие системы удовлетворяют этим требованиям, является значительно более громоздким, чем соответствующее исследование, проведенное на стр. 475 для двумерного случая. Там мы показали, что разделяющие координатные системы (для волнового уравнения) состоят из *софокусных конических сечений* (эллипсов и гипербол) или их вырожденных форм (окружностей и радиусов, софокусных парабол или параллельных прямых). Детальный анализ трехмерного случая приводит к аналогичному утверждению: в евклидовом пространстве координатные поверхности системы разделяющих координат для волнового уравнения состоят из софокусных поверхностей второго порядка или их вырожденных форм.

Софокусные поверхности второго порядка. Уравнение

$$\frac{x^2}{\xi^2 - a^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - b^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - c^2} = 1, \quad a \gg b \gg c \gg 0, \quad (5.1.33)$$

при различных значениях параметра ξ представляет три семейства софокусных поверхностей второго порядка. Для $\xi > a$ получается полное семейство софокусных эллипсоидов, пересечение которых с плоскостью yz дает эллипсы с фокусами в точках $y=0, z = \pm \sqrt{b^2 - c^2}$, с плоскостью xz — эллипсы с фокусами в точках $x=0, z = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$ и с плоскостью xy — эллипсы с фокусами в точках $x=0, y = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$. Предельная поверхность этого семейства получается при $\xi \rightarrow a$ и представляет собой

¹⁾ Из этих условий вытекает, что $g_1/(M_1 f_2 f_3) = g_2/(M_2 f_1 f_3) = g_3/(M_3 f_1 f_2)$, откуда следует, что эти отношения постоянны и получается соотношение (5.1.32) с точностью до несущественного постоянного множителя. — *Прим. перев.*

часть плоскости yz , расположенную внутри эллипса с большой осью $2\sqrt{a^2 - c^2}$ вдоль оси z и малой осью $2\sqrt{a^2 - b^2}$ вдоль оси y .

Для $a > \xi > b$ получается полное семейство софокусных однополостных гиперboloидов, пересечение которых с плоскостью yz дает эллипсы с фокусами в точках $y = 0, z = \pm \sqrt{b^2 - c^2}$, с плоскостью xz — гиперболы с фокусами в точках $x = 0, z = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$ и с плоскостью xy — гиперболы с фокусами в точках $x = 0, y = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$. Одна из предельных поверхностей получается при $\xi \rightarrow a$ и представляет собой часть плоскости yz , расположенную вне эллипса с большой осью $2\sqrt{a^2 - c^2}$ вдоль оси z и малой осью $2\sqrt{a^2 - b^2}$ вдоль оси y ; другая предельная поверхность получается при $\xi \rightarrow b$ и представляет собой часть плоскости xz , расположенную вне гиперболы с вещественной осью $2\sqrt{b^2 - c^2}$ вдоль оси z и мнимой осью $2\sqrt{a^2 - b^2}$ вдоль оси x .

Наконец для $b > \xi > c$ имеем полное семейство софокусных двуполостных гиперboloидов, пересечение которых с плоскостью yz дает гиперболы с фокусами в точках $y = 0, z = \pm \sqrt{b^2 - c^2}$, с плоскостью xz — гиперболы с фокусами в точках $x = 0, z = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$, а с плоскостью xy эти гиперboloиды не пересекаются. Одна из предельных поверхностей получается при $\xi \rightarrow b$ и представляет собой часть плоскости xz , расположенную внутри гиперболы с вещественной осью $2\sqrt{b^2 - c^2}$ вдоль оси z и мнимой осью $2\sqrt{a^2 - b^2}$ вдоль оси x ; другая поверхность получается при $\xi \rightarrow c$ и совпадает с плоскостью xy . Между прочим, без ограничения общности мы можем положить $c = 0$.

Так как построенные три семейства поверхностей попарно ортогональны, можно положить, что указанным трем интервалам изменения параметра ξ соответствуют три семейства координатных поверхностей: параметру ξ_1 ($\xi_1 > a$) соответствуют эллипсоиды, ξ_2 ($a > \xi_2 > b$) — однополостные гиперboloиды и ξ_3 ($b > \xi_3 > c$) — двуполостные гиперboloиды. Легко убедиться, что соотношения между координатами x, y, z и эллипсоидальными координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 (для $c = 0$) с их коэффициентами Ламе таковы:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)}}, \quad \xi_1 > a > \xi_2 > b > \xi_3 > 0, \\ y &= \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)}}, \quad z = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{ab}, \\ h_1 &= \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)}{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{(\xi_2^2 - \xi_1^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)}}, \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

Следуя проведенным выше рассуждениям, найдем, что $h_1 h_2 h_3 / h_1^2$ равно произведению

$$\sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}$$

на функцию $\sqrt{-(\xi_3^2 - \xi_2^2)^2 / (\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)}$, не содержащую ξ_1 . Следовательно, функция

$$f_n(\xi_n) = \sqrt{|(\xi_n^2 - a^2)(\xi_n^2 - b^2)|} \quad (5.1.35)$$

является одной из функций, участвующих в уравнении (5.1.32). Это в свою очередь дает значение определителя Штеккеля

$$S = \frac{h_1 h_2 h_3}{f_1 f_2 f_3} = \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)(\xi_3^2 - \xi_1^2)}{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)},$$

откуда, учитывая соотношения (5.1.31),

$$M_1 = \frac{S}{h_1^2} = - \frac{\xi_2^2 - \xi_3^2}{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)} \text{ и т. д.,}$$

что дает возможность найти элементы определителя Штеккеля. Они равны

$$\Phi_{n1}(\xi_n) = 1, \quad \Phi_{n2}(\xi_n) = \frac{1}{\xi_n^2 - a^2}, \quad \Phi_{n3}(\xi_n) = \frac{1}{(\xi_n^2 - b^2)(a^2 - b^2)}. \quad (5.1.36)$$

Поэтому уравнение Гельмгольца и получающиеся разделенные обыкновенные дифференциальные уравнения в этих координатах имеют вид

$$\sum_n \frac{G_n f_n}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - \xi_1^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right] + k_1^2 \psi = 0,$$

$$G_1 = (\xi_2^2 - \xi_3^2), \quad G_2 = (\xi_1^2 - \xi_3^2), \quad G_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)$$

и

$$\frac{1}{V |(\xi_n^2 - a^2)(\xi_n^2 - b^2)|} \frac{d}{d\xi_n} \left[V |(\xi_n^2 - a^2)(\xi_n^2 - b^2)| \frac{dX_n}{d\xi_n} \right] +$$

$$+ \left[k_1^2 + \frac{k_2^2}{(\xi_n^2 - a^2)} + \frac{k_3^2}{(\xi_n^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \right] X_n = 0. \quad (5.1.37)$$

Этот вид обыкновенных дифференциальных уравнений встретится нам в дальнейшем.

Заметим, что в случае трехмерного уравнения Шредингера для частицы член k^2 (который мы обозначили через k_1^2) не является постоянным, а представляет собой разность между постоянной k_1^2 (полной энергией частицы) и зависящей от ξ потенциальной энергией частицы. Для возможности разделения переменных потенциальная энергия частицы должна быть такой, чтобы в уравнении (5.1.37) из коэффициента при X_n вычиталась некоторая функция $\mu_n(\xi_n)$, зависящая только от ξ_n . Это означает, что допустимым видом потенциальной энергии будет

$$V = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n(\xi_n)}{k_n^2}. \quad (5.1.38)$$

Заметим также, что для эллипсоидальных координат каждое из трех разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений содержит k_1 и обе константы разделения k_2 и k_3 . Напоминая наши квантово-механические рассуждения гл. 2, мы можем рассматривать процесс разделения как процесс вращения, переводящий множество векторов в абстрактном векторном пространстве, определенных координатами x, y, z (или ξ_1, ξ_2, ξ_3), в множество векторов, определенных параметрами k_1, k_2, k_3 . Разлагающиеся на множители решения представляют собой функции преобразования (направляющие косинусы) от собственных значений для координат к собственным значениям для k . То, что мы нашли, означает, что это преобразование в случае эллипсоидальных координат приводит к функциям преобразования, разделяющимся (на множители) относительно координат, но не разделяющимся относительно параметров k . Для некоторых вырожденных форм эллипсоидальных координат разложенные на множители решения разделяются также относительно параметров, что значительно упрощает манипуляции с решениями.

Эти вырожденные формы эллипсоидальных координат, полученные, когда a, b, c полагаются равными друг другу, нулю или бесконечности, более полезны и интересны, чем общая форма. Имеется 10 таких форм, признающихся «различными» системами координат и обладающих специальными наименованиями. Эти 11 систем (общая эллипсоидальная система

и 10 вырожденных форм) являются единственными системами, допускающими разделение переменных для волнового уравнения или уравнения Шредингера в трехмерном случае [причем уравнение Шредингера разделяется, только если потенциальная энергия имеет определенный функциональный вид, см. (5.1.38)]. Эти формы вместе с отвечающим им видом коэффициентов Ламе h , определителя S и т. д. приведены в таблице в конце этой главы.

Вырожденные формы эллипсоидальных координат. Отправляясь от преобразования

$$x' = \sqrt{\frac{(x_1^2 - \alpha^2)(x_2^2 - \alpha^2)(x_3^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)}}, \\ y' = \sqrt{\frac{(x_1^2 - \beta^2)(x_2^2 - \beta^2)(x_3^2 - \beta^2)}{\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)}}, \quad z' = \frac{x_1 x_2 x_3}{\alpha \beta}$$

для общих эллипсоидальных координат, мы можем получить все десять вырожденных форм, приведенных в конце главы, при помощи растяжения, сжатия и переноса. Например, бесконечное растяжение всех фокальных расстояний дает у центра эллипсоидов:

I. Прямоугольные координаты. Положим x_1^2 в приведенных выше соотношениях равным $\alpha^2 + \xi_1^2$, $x_2^2 = \beta^2 + \xi_2^2$, а $x_3 = \xi_3$; положим $\beta = \alpha \sin \varphi$, где φ может быть произвольным, и после этого устремим α к бесконечности. Это даст координаты, приведенные под номером 1 в конце главы. С другой стороны, стремление β к нулю симметризует эллипсоиды, выравнивая их в поверхности вращения.

IX. Сплюснутые сфероидальные координаты. Полагая $\alpha = a$, $x_1^2 = a^2 + \xi_1^2$, $x_2^2 = a^2 - a^2 \xi_2^2$, $x_3 = \beta \xi_3$ и устремляя β к нулю, мы перейдем от эллипсоидов к сплюснутым (выровненным) сфероидам, от однополостных гиперболоидов к гиперболоидам вращения (также однополостным) и от двуполостных гиперболоидов к парам плоскостей, проходящих через ось вращения. Чтобы получить форму, данную в таблице в конце главы, надо положить еще $x' = z$, $y' = y$, $z' = x$, что сделает ось z осью вращения. Если превратить эллипсоид в поверхность вращения около большой оси, мы получим

VIII. Вытянутые сфероидальные координаты. Они получаются при $\beta \rightarrow \alpha$, согласно формулам $\alpha = a$, $\beta^2 = a^2 - \varepsilon$, $x_1 = \xi_1$, $x_2^2 = a^2 - \varepsilon \xi_2^2$, $x_3^2 = a^2 \xi_2^2$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Бесконечное вытягивание при этом большой оси даст

II. Круговые цилиндрические координаты. Если обозначить $\alpha = a$, $\beta^2 = a^2 - \varepsilon$, $x_1^2 = a^2 + \xi_1^2$, $x_2^2 = a^2 - \varepsilon \xi_2^2$, $x_3 = \xi_3$ и положить $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем $a \rightarrow \infty$, то получатся простейшие координаты вращения. Бесконечное вытягивание большой оси до симметризации дает

III. Эллиптические цилиндрические координаты. К такой системе мы приходим, обозначая $\beta^2 = \alpha^2 + a^2$, $x_1^2 = \alpha^2 + \xi_1^2$, $x_2^2 = \alpha^2 + a^2 \xi_2^2$, $x_3 = \xi_3$ и полагая $a \rightarrow \infty$, но оставляя при этом a конечным. С другой стороны, если мы вместо удлинения укоротим большую ось вытянутых сфероидальных координат, то мы получим полностью симметричные

V. Сферические координаты. Обозначив $\alpha = a$, $\beta^2 = a^2 - \varepsilon$, $x_1 = \xi_1$, $x_2^2 = a^2 - \varepsilon \xi_2^2$, $x_3 = a \xi_3$, мы положим сначала $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем $a \rightarrow 0$, что даст

полную симметрию. Полагая, наконец, β пропорциональным α и устремляя их одновременно к нулю, получим

VI. Конические координаты. Они имеют своими координатными поверхностями сферы и эллиптические конусы, а получаются, если обозначить $\alpha = ka$, $\beta = k'a$, $k^2 + k'^2 = 1$, $x_1^2 = \xi_1^2 / (k^2 - k'^2)$, $x_2^2 = a^2 [2k^2 k'^2 + (k^2 - k'^2) \xi_3^2]$, $x_3^2 = a^2 [2k^2 k'^2 - (k^2 - k'^2) \xi_3^2]$ и затем положить $a \rightarrow 0$.

Параболические системы получаются, если переместить положение начала координат на «край» эллипсоида до удлинения последнего. Самым общим случаем являются

XI. Параболоидальные координаты. Здесь мы полагаем $\alpha^2 = d^2 + a^2 d$, $\beta^2 = d^2 + b^2 d$ и помещаем новое начало координат в точку $z' = d$, так что $x = x'$, $y = y'$ и $z = z' - d$. Обозначим $x_1^2 = d^2 + \eta_1^2 d$, $x_2^2 = d^2 + \eta_2^2 d$, $x_3^2 = d^2 + \eta_3^2 d$ и примем, наконец, что $d \rightarrow \infty$. Новыми координатами будут

$$x = \sqrt{\frac{(\eta_1^2 - a^2)(\eta_2^2 - a^2)(\eta_3^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\eta_1^2 - b^2)(\eta_2^2 - b^2)(\eta_3^2 - b^2)}{b^2 - a^2}},$$

$$z = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - a^2 - b^2);$$

они соответствуют поверхностям

$$\frac{x^2}{\eta^2 - a^2} + \frac{y^2}{\eta^2 - b^2} = \eta^2 - 2z.$$

Для $\eta = \eta_1 > a$ получается семейство эллиптических параболоидов, пересекающихся с плоскостями xz и yz по параболом, а с плоскостью xy — по эллипсам. Для $\eta = \eta_2$ (где $a > \eta_2 > b$) поверхности представляют собой гиперболические параболоиды, пересекающиеся с плоскостями xz и yz по параболом, а с плоскостью xy — по гиперболам. Наконец, для $\eta = \eta_3 < b$ (мы должны допускать для η_3^2 и отрицательные значения, чтобы исчерпать все это семейство) вновь получаются эллиптические параболоиды, направленные относительно оси z в противоположную сторону.

Предельная поверхность при $\eta_1 \rightarrow a$ представляет собой часть плоскости yz , расположенную внутри параболы с вершиной при $z = \frac{1}{2}a^2$ и с фокусом при $z = \frac{1}{2}b^2$; при $\eta_2 \rightarrow a$ — остальную часть плоскости yz ; при $\eta_2 \rightarrow b$ — часть плоскости xz , расположенную вне параболы с вершиной при $z = \frac{1}{2}b^2$ и с фокусом при $z = \frac{1}{2}a^2$; наконец, при $\eta_3 \rightarrow b$ предельная поверхность представляет собой остальную часть плоскости xz . Коэффициенты Ламе и связанные с ними функции этих координат приведены на стр. 620.

Как и выше, другие координатные системы можно получить при помощи изменения междуфокусных расстояний. Например, полагая $a = b$, получаем координаты вращения, именно

VII. Параболические координаты. Обозначив $b^2 = a^2 - \varepsilon$, $\eta_1^2 = \xi_1^2 + a^2$, $\eta_2^2 = a^2 - \varepsilon \xi_2^2$, $\eta_3^2 = b^2 - \xi_2^2$ и положив затем $\varepsilon \rightarrow 0$, получим эту более простую систему. С другой стороны, если мы будем растягивать большую ось эллипсов, то в конце концов получим

IV. Параболические цилиндрические координаты. Здесь мы обозначаем $\eta_1^2 = a^2 + \xi_3^2$, $\eta_2^2 = b^2 + \xi_1^2$, $\eta_3^2 = b^2 - \xi_2^2$, $x = z' - \frac{1}{2}b^2$, $y = y'$, $z = x'/a$ и затем полагаем $a \rightarrow \infty$.

Этим исчерпываются все различные вырожденные системы, которые можно получить из эллипсоидальных координат. Было бы интересно исследовать определители Штеккеля и окончательно разделенные уравнения для этих случаев, чтобы узнать, имеются ли у них характерные общие черты.

Слияние особенностей. Мы выбрали шкалу всех рассмотренных здесь координат так, чтобы функции f_n и Φ_{nm} представляли собой алгебраические функции ξ_n , а если разделенные уравнения записать в виде

$$\frac{d^2 X_n}{d\xi_n^2} + p_n(\xi_n) \frac{dX_n}{d\xi_n} + q_n(\xi_n) X_n = 0, \quad p_n = \frac{d}{d\xi_n} [\ln f_n(\xi_n)],$$

$$q_n = \sum_{m=1}^3 k_m^2 \Phi_{nm}(\xi_n), \quad (5.1.39)$$

то функции p и q имеют особенности в точках концентрации соответствующих систем координат. Например, для эллипсоидальных координат p и q имеют полюсы при $\xi = \pm a$, $\pm b$ и на бесконечности (то есть если сделать замену переменной $u = 1/\xi$, то соответствующие функции p и q будут иметь полюсы при $u = 0$ или, что то же, $\xi = \infty$). Вырожденные формы систем координат получаются при сближении до совпадения двух или более из этих особенностей. Точки, в которых p или q имеет особенность, называются *особыми точками* соответствующего уравнения, а указанный процесс сближения особых точек называется *слиянием* особых точек.

В случае вытянутых сфероидальных координат, например, имеет место слияние особых точек a и b , а также $-a$ и $-b$; это вместе с заменой шкалы приводит к тому, что уравнение для ξ_1 имеет особые точки $\pm a$ и на бесконечности, а уравнение для ξ_2 и ξ_3 — особые точки ± 1 и ∞ . В сферических координатах a становится равным нулю, так что уравнение для ξ_1 имеет особые точки в 0 и в ∞ и т. д.

Где бы ни была особая точка дифференциального уравнения, там общее решение этого уравнения имеет особенность (полюс, точку ветвления или существенную особенность). Следовательно, можно сказать, что разложенное на множители решение $\psi = X_1 X_2 X_3$ обычно имеет особенность во всех точках концентрации соответствующей системы координат. Можно также сказать, что все обыкновенные дифференциальные уравнения, на которые разделяется уравнение $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ (включающее большую часть уравнений, которые мы будем изучать), получаются из общего уравнения с пятью особыми точками при помощи слияния их до четырех, трех или двух. Так же как указание нулей и особенностей определяет функцию комплексного переменного, указание положения и строения особых точек дифференциального уравнения, как мы увидим позже в этой главе, определяет само уравнение и его решения. Это является, конечно, совсем другим путем выражения того обстоятельства, что геометрия системы координат определяет структуру решений разделенных уравнений, что не удивительно.

Константы разделения. Рассмотрение определителей Штеккеля для 11 систем координат, приведенных в конце главы, показывает, что среди элементов этих определителей имеется целый ряд равных нулю. Например, для всех координат вращения $\Phi_{31} = \Phi_{32} = 0$. Это значит, что множители $X_3(\xi_3)$ для координат вращения включают только константу разделения k_3 . Так как для координат вращения ξ_3 соответствует углу вокруг оси вращения, то не удивительно, что этот множитель особенно прост. Мы видим также, что

для всех цилиндрических координат два из трех элементов $\Phi_{n1}(\xi_n)$ равны нулю; это означает, что только один из множителей X_n зависит от k_1 .

Таким образом, для некоторых вырожденных форм эллипсоидальных координат решения, разложенные на множители, осуществляют определенное разделение параметров k .

Другим путем это можно установить посредством самого процесса (в его обычном виде) разделения переменных в уравнении. Возьмем уравнение

$$\nabla^2 \psi + k_1^2 \psi = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right] + k_1^2 \psi = 0,$$

и пусть $\psi = X_1 X_2 X_3$. Если координаты разделяются, так что выполняются соотношения (5.1.29) и (5.1.31), то имеем

$$\sum_{n=1}^3 \frac{1}{h_n^2 f_n X_n} \frac{d}{d \xi_n} \left(f_n \frac{d X_n}{d \xi_n} \right) + k_1^2 = 0. \quad (5.1.40)$$

В некоторых случаях представляется возможным умножить это уравнение на некоторую функцию от ξ так, что по крайней мере один из четырех членов полученного уравнения зависит только от одной координаты, в то время как остальные члены от нее не зависят. Мы можем тогда этот член положить равным постоянной α (так, как функция от одного ξ_n может совпадать с функцией от остальных ξ , только если эта функция представляет собой не зависящую от ξ постоянную), и тогда соответствующий множитель X будет зависеть только от одной постоянной α (которая является тогда константой разделения, либо k_2^2 , либо k_3^2).

Возможность разделения уравнения таким способом зависит от строения коэффициентов Ламе h_n , на что ясно указывает уравнение (5.1.40) (все остальные множители в n -м члене зависят только от ξ_n , так что если h_n постоянно или является функцией одного ξ_n , то этот член уже готов для разделения без каких-либо преобразований). Здесь можно различить три случая:

А. Решение, вполне разделяющее константы разделения. В этом случае можно найти такой множитель $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, что каждый из *двух* членов зависит от одной координаты (допустим, что так будет для ξ_2 и ξ_3). Тогда член с ξ_2 , то есть $(\mu/h_2^2 f_2 X_2) [d(f_2 dX_2/d\xi_2)/d\xi_2]$ можно положить равным постоянной k_2^2 , а соответствующий член с X_3 — равным постоянной k_3^2 . Следовательно, для X_1 получается уравнение

$$\frac{\mu}{h_1^2 f_1 X_1} \frac{d}{d \xi_1} \left(f_1 \frac{d X_1}{d \xi_1} \right) + k_2^2 + k_3^2 + \mu k_1^2 = 0,$$

а решение, разложенное на множители, принимает вид

$$(A) \quad \psi = X_1(\xi_1; k_1, k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_2) X_3(\xi_3; k_3), \quad (5.1.41)$$

где два из множителей зависят только от одного параметра k , так же точно, как и от одной координаты ξ . Сравнение с методом разделения при помощи определителя Штеккеля показывает, что решение может иметь вид (5.1.41), только если каждая из двух строк определителя Штеккеля имеет два нуля, и просмотр таблицы в конце главы показывает, что этим простым поведением обладают только решения для прямоугольных и круговых цилиндрических координат. [Сферические координаты имеют решение вида $X_1(\xi_1; k_1, k_2) X_2(\xi_2; k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_3)$, который для уравнения

Лапласа, когда $k_1 = 0$, так же прост, как и (5.1.41)]. Этот тип разделения требует высокую степень симметрии системы координат.

Б. Решение, частично разделяющее константы разделения. В этом случае только один член (например, с ξ_3) можно отделить непосредственно; оставшееся уравнение

$$\frac{\mu}{h_1^2 f_1 X_1} \frac{d}{d\xi_1} \left(f_1 r \frac{dX_1}{d\xi_1} \right) + \frac{\mu}{h_2^2 f_2 X_2} \frac{d}{d\xi_2} \left(f_2 \frac{dX_2}{d\xi_2} \right) + \mu k_1^2 + k_3^2 = 0^1)$$

должно быть умножено на другой множитель $v(\xi_1, \xi_2)$, чтобы можно было отделить другой член. Поэтому решения, разложенные на множители, имеют один из следующих видов:

$$\begin{aligned} (B_1) \quad & \psi = X_1(\xi_1; k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_1, k_3), \\ (B_2) \quad & \psi = X_1(\xi_1; k_1, k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_1, k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_3). \end{aligned} \quad (5.1.42)$$

Просмотр таблицы показывает, что виду (B_1) соответствуют параболические цилиндрические координаты, а виду (B_2) — эллиптические цилиндрические, параболические, сплюснутые сфероидальные и вытянутые сфероидальные (то есть все оставшиеся цилиндрические координаты и координаты вращения). Здесь только последняя строка определителя Штеккеля имеет два нуля.

В. Решение, не разделяющее констант разделения. В этом случае ни один из элементов второго и третьего столбцов не равен нулю и для осуществления разделения надо применить всю технику, связанную с определителем Штеккеля. Возможные виды таковы:

$$\begin{aligned} (B_1) \quad & \psi = X_1(\xi_1; k_1, k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_2, k_3), \\ (B_2) \quad & \psi = X_1(\xi_1; k_1, k_2, k_3) X_2(\xi_2; k_1, k_2, k_3) X_3(\xi_3; k_1, k_2, k_3). \end{aligned} \quad (5.1.43)$$

Форму (B_1) имеют только конические координаты. Эллипсоидальные и параболоидальные координаты имеют вид (B_2) , где ни один из элементов определителя Штеккеля не равен нулю.

Должно быть очевидным, что вид (А) сравнительно прост для применения к рассматриваемой задаче, виды (Б) более сложны, а виды (В) несравненно сложнее для применения.

Уравнение Лапласа для трех измерений, модуляционный множитель. Очевидно, что уравнение Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$, к которому приводится наше стандартное уравнение при $k_1 = 0$, допускает разделение переменных в каждой из 11 систем координат, перечисленных в таблице. Но так как двумерное уравнение Лапласа допускает разделение переменных для большего числа систем, чем двумерное волновое уравнение, то нам следует проверить, не будет ли это верно и для трех измерений. Исследования показывают, что систем координат, в которых решения уравнения Лапласа принимают вид $X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3)$ типа (А), (Б) и (В), больше нет. Однако обнаруживается, что можно найти другие системы, в которых можно построить множество решений уравнения Лапласа, имеющих более общий вид.

$$\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3) / R(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (5.1.44)$$

где R не зависит от констант разделения k_2 и k_3 (см. стр. 482). То же исследование показывает, что волновое уравнение не допускает этого

¹⁾ Член μk_1^2 может отсутствовать; это приводит к случаю (B_1) . — *Прим. перев.*

обобщения, так что дополнительные системы координат являются разделяющими только для уравнения Лапласа.

Множитель R можно назвать *модуляционным множителем*; он изменяет все семейство разложенных решений одним и тем же образом. Его присутствие несколько видоизменяет технику применения определителя Штеккеля. Например, теперь мы полагаем [вместо (5.1.32)]

$$h_1 h_2 h_3 / S = f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3) R^2 u, \quad (5.1.45)$$

где u — функция ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Мы также требуем, чтобы [вместо (5.1.31)]

$$1/h_n^2 = M_n / Su, \quad (5.1.46)$$

причем в этих двух уравнениях определитель Штеккеля S и его алгебраические дополнения M_n удовлетворяют тем же условиям, что и выше (элементы Φ_{nm} этого определителя являются функциями только ξ_n , и потому M_n не зависят от ξ_n). Подставляя все это в уравнение Лапласа, мы сначала получим уравнение

$$\sum_n \frac{1}{h_n^2 f_n X_n} \frac{d}{d\xi_n} \left[f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right] = \sum_n \frac{1}{h_n^2 f_n R} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial R}{\partial \xi_n} \right].$$

Получившееся разделение членов с X и членов с R и является причиной включения R в оба соотношения (5.1.44) и (5.1.45). Если теперь мы сможем найти функцию R , удовлетворяющую уравнению

$$\sum_n \frac{1}{h_n^2 f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[f_n \frac{\partial R}{\partial \xi_n} \right] + \frac{k_1^2 R}{u} = 0, \quad (5.1.47)$$

то, применяя (5.1.46), мы получим в результате уравнение

$$\sum_n \frac{M_n}{S f_n X_n} \frac{d}{d\xi_n} \left[f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right] + k_1^2 = 0, \quad (5.1.48)$$

которое, подобно волновому уравнению, разделяется на обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{f_n} \frac{d}{d\xi_n} \left(f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right) + [k_1^2 \Phi_{n1} + k_2^2 \Phi_{n2} + k_3^2 \Phi_{n3}] X_n = 0, \quad (5.1.49)$$

из коих можно определить множители X_n .

Софокусные циклиды. Циклиды — это класс поверхностей четвертого порядка, очень близких по своим свойствам к поверхностям второго порядка (эллипсоидам, гиперболоидам, параболоидам). Одним из интересных свойств поверхностей этого класса является то, что их инверсия в сфере снова представляет собой циклиду. Уравнение этих поверхностей просто выражается в *однородных координатах* λ, μ, ν, ρ

$$x = \lambda/\rho, \quad y = \mu/\rho, \quad z = \nu/\rho \quad (5.1.50)$$

или в «пентасферических координатах»

$$\begin{aligned} x_1 &= i(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2) = i\rho^2(x^2 + y^2 + z^2 + 1), \\ x_2 &= (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \rho^2) = \rho^2(x^2 + y^2 + z^2 - 1), \\ x_3 &= 2\rho\lambda = 2\rho^2x, \quad x_4 = 2\rho\mu = 2\rho^2y; \quad x_5 = 2\rho\nu = 2\rho^2z. \end{aligned} \quad (5.1.51)$$

Поверхность, определенная уравнением

$$\sum_{n=1}^5 \frac{x_n^2}{\xi - a_n} = 0, \quad a_{n+1} \geq a_n, \quad (5.1.52)$$

где ξ и a постоянны, и называется *циклидой*. Поверхности, полученные при выборе различных значений ξ для фиксированных a , образуют семейство поверхностей, которое можно назвать *семейством софокусных циклид*.

Одно полное семейство получается, если брать все значения ξ между a_2 и a_3 , другое — если брать все значения между a_3 и a_4 и третье — между a_4 и a_5 . Оказывается, что эти семейства попарно ортогональны, так что они могут быть приняты за семейства координатных поверхностей. Мы обозначим $\xi = \xi_1$ между a_2 и a_3 , ξ_2 между a_3 и a_4 и ξ_3 между a_4 и a_5 .

Так как $x = x_3/2\rho^2$, $y = x_4/2\rho^2$, $z = x_5/2\rho^2$, $\rho = -(x_2 + ix_1)/2\rho$, то уравнение Лапласа $\nabla^2\psi = 0$ равносильно уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_5^2} = 0.$$

Одновременно, так как x_1 и x_2 входят в комбинации $x_2 + ix_1$, мы видим, что

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0.$$

Этот результат можно обобщить следующим образом: если $x_1, \dots, x_5$ — пентасферические координаты, связанные с четырьмя однородными координатами λ, μ, ν, ρ при помощи уравнений второго порядка так, что

$$\sum_{n=1}^5 x_n^2 = 0, \quad (5.1.53)$$

то решение уравнения Лапласа удовлетворяет также уравнению

$$\sum_{n=1}^5 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2} = 0. \quad (5.1.54)$$

Для окончания рассуждения надо перейти от пентасферических координат к софокусным циклидным координатам ξ . Для этого рассмотрим сначала координаты x_n , как обычные ортогональные координаты в пятимерном пространстве, не требуя, чтобы удовлетворялось уравнение (5.1.53). Совершим тогда переход к другим пяти координатам, определенным пятью уравнениями:

$$x_1^2 = \xi_5 \frac{(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_1)(\xi_3 - a_1)(\xi_4 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)} \text{ и т. д.} \quad (5.1.55)$$

или равносильными уравнениями

$$\sum_{n=1}^5 \frac{x_n^2}{\xi_m - a_n} = 0 \quad (m = 1, \dots, 4), \quad \sum_{n=1}^5 \frac{x_n^2}{\xi_5 - a_n} = \xi_5 \frac{(\xi_1 - \xi_5)(\xi_2 - \xi_5)(\xi_3 - \xi_5)(\xi_4 - \xi_5)}{(\xi_5 - a_1)(\xi_5 - a_2)(\xi_5 - a_3)(\xi_5 - a_4)}.$$

Заметим, что при этом $\xi_5 = \sum_{n=1}^5 x_n^2$ в конечном счете обратится в нуль.

Уравнение, соответствующее уравнению (5.1.54), получается после ряда алгебраических преобразований и имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{f(\xi_1)}}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_1)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\sqrt{f(\xi_1)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] + \dots + \\ & + \frac{\sqrt{f(\xi_4)}}{(\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_4)(\xi_3 - \xi_4)} \frac{\partial}{\partial \xi_4} \left[\sqrt{f(\xi_4)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\xi_5}} \frac{\partial}{\partial \xi_5} \left[(\xi_5)^{5/2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.1.56)$$

где

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5).$$

Оно равносильно пятимерному уравнению Лапласа в новых координатах.

Но мы не занимаемся пятимерным уравнением, а хотим в конце концов получить трехмерное уравнение в координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Однако эти координаты тесно связаны, так как, решив уравнения

$$\sum_{n=1}^5 \frac{x_n^2}{\xi_m - a_n} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \quad \sum_{n=1}^5 x_n^2 = 0,$$

мы получим соотношения

$$x_1^2 = - \left[\sum_{n=1}^5 a_n x_n^2 \right] \frac{(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_1)(\xi_3 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)} \text{ и т. д.}, \quad (5.1.57)$$

которые определяют x_n через трехмерные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 и в конечном счете определяют x, y, z через циклидные координаты.

Заметим, что преобразование (5.1.57) связано с (5.1.55). В последнем случае лишь три координаты присутствуют явно, то есть можно сказать, что преобразование (5.1.57) представляет трехмерное подпространство преобразования, данного в уравнении (5.1.55). Оно и ясно, так как мы знали, что $\xi_5 = \sum x_n^2$ должно быть равно нулю, а ξ_4 также должно быть положено равным некоторой постоянной, чтобы мы могли получить в результате трехмерное уравнение. Сравнение уравнений (5.1.57) и (5.1.55) показывает, что если мы одновременно устремим ξ_5 к нулю, а ξ_4 к бесконечности так, что $\xi_4 \xi_5 \rightarrow - \sum a_n x_n^2$, то мы придем к циклидным координатам.

Возможно, что ϕ будет функцией ξ_4 и ξ_5 . Если она является функцией произведения $\xi_4 \xi_5$, то усложнения в виде дополнительных нулей или бесконечностей не будет. В частности, если ϕ содержит множитель $(\xi_4 \xi_5)^\alpha$, то в пределе этот множитель обратится в $[\sum a_n x_n^2]^\alpha$. Если мы хотим, чтобы на больших расстояниях потенциал обращался в нуль, как $1/r$, то показатель α может равняться $-1/4$ и мы можем положить

$$\psi = (\xi_4 \xi_5)^{-1/4} \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\sum_{n=1}^5 a_n x_n^2 \right)^{-1/4} \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (5.1.58)$$

Подставляя эту форму для решения в (5.1.56) и устремляя ξ_4 к бесконечности, получаем в результате уравнение с частными производными для φ . Умножим его на $\xi_4^{5/4}$ и произведем разложение по степеням $1/\xi_4$. Члены с первой степенью ξ_4 исчезнут автоматически. Члены же с нулевой степенью ξ_4 дадут уравнение для φ

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{f(\xi_1)}}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\sqrt{f(\xi_1)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right] + \\ & + \frac{\sqrt{f(\xi_2)}}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\sqrt{f(\xi_2)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right] + \\ & + \frac{\sqrt{f(\xi_3)}}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[\sqrt{f(\xi_3)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \right] + \\ & + \left[\frac{5}{16} (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) - \frac{3}{16} \sum_{n=1}^5 a_n \right] \varphi = 0, \quad (5.1.59), \end{aligned}$$

где $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)$. В этом уравнении можно разделить переменные при помощи определителя Штеккеля, так же как и для уравнения в эллипсоидальных координатах. Однако в этом случае полное решение ψ будет произведением неразделенной части $[\sum a_n x_n^2]^{-1/4} = 1/R$ на разделенную часть φ , как мы уже установили.

Можно получить различные вырожденные формы циклид, полагая одну или более из постоянных a_n равными друг другу или бесконечности. При этом эллипсоидальные координаты и все их вырожденные формы включаются в качестве частного случая. Включаются также тороидальные координаты, определенные следующими уравнениями:

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2}{\xi_1^2} - \frac{4a^2(x^2 + y^2)}{\xi_1^2 - 1} = 0, \quad \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2}{\xi_2^2} + \frac{4a^2 z^2}{\xi_2^2 - 1} = 0. \quad (5.1.60)$$

Это — вырожденные формы уравнения (5.1.52) причем мы применили обозначения ξ_n^2 и a^2 вместо ξ_n и a_n ; им соответствуют (для $\xi_1 = \text{const}$) тороиды, полученные вращением вокруг оси z окружности радиуса $a/\sqrt{\xi_1^2 - 1}$ с центром $z = 0$, $x = a\xi_1/\sqrt{\xi_1^2 - 1}$, и (для $\xi_2 = \text{const}$) сферы радиуса $a/\sqrt{1 - \xi_2^2}$ с центром $x = y = 0$, $z = a\xi_2/\sqrt{1 - \xi_2^2}$ (все эти сферы проходят через окружность $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, соответствующую предельному тороиду $\xi_1 = \infty$).

Выражения x , y , z через ξ , а также вид скалярных множителей h , модуляционного множителя R и определителя Штеккеля для этого полезного частного случая приведены на стр. 621 и 622 этой главы. На этих страницах приведен также другой полезный частный случай бисферических координат.

Представляется, что общие циклидные координаты (и их вырожденные формы) содержат все системы координат, в которых уравнение Лапласа разделяется с модуляционным множителем или без него, так же как эллипсоидальные координаты содержат все системы, в которых разделяется волновое уравнение. Теперь мы должны перейти к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в результате разделения переменных.

5.2. Общие свойства, решение при помощи рядов

Мы должны теперь перейти к изучению обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных при разделении переменных в уравнении с частными производными $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ в различных разделяющих координатах. Как мы показали на стр. 483, все разделенные уравнения имеют общий вид

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{d^2 \psi}{dz^2} + p(z) \frac{d\psi}{dz} + q(z) \psi = 0 = \frac{1}{f_n} \frac{d}{dz} \left(f_n \frac{d\psi}{dz} \right) + q\psi, \quad (5.2.1)$$

где

$$p = \frac{d}{dz} \ln f_n = \left(\frac{1}{f_n} \right) \left(\frac{df_n}{dz} \right), \quad q = \sum_m k_m^2 \Phi_{nm},$$

а f_n и Φ_{nm} — функции ξ (обозначенной здесь через z). Мы выбрали шкалу координат так, чтобы функции p и q представляли собой простые алгебраические функции z с конечным числом полюсов, соответствующих точкам концентрации системы координат.

Уравнение (5.2.1) является линейным однородным уравнением второго порядка. Как указано на стр. 469, такие уравнения могут иметь раз-

личные решения. При этом, если $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ — решения уравнения $\mathcal{L}(\phi) = 0$, то и $\sum_m A_m \phi_m$ (где A_m — произвольные постоянные коэффициенты) также есть решение. Иногда встречается соответствующее неоднородное уравнение $\mathcal{L}(\phi) = r(z)$. Мы уже указали раньше, что если Ψ_n — решение уравнения $\mathcal{L}(\phi) = r_n$, то $\Psi_n + \sum_m A_m \phi_m$ — также решение уравнения $\mathcal{L}(\phi) = r_n$, а $\sum_n \Psi_n + \sum_m B_m \phi_m$ — решение уравнения $\mathcal{L}(\phi) = \sum_n r_n$.

Таким образом, имеется бесконечное число различных решений уравнения (5.2.1), соответствующих различным выборам постоянных A_n . Однако в действительности многие из этих решений различаются только постоянным множителем. Картина станет, пожалуй, более ясной, если рассмотреть ее с точки зрения абстрактных векторных пространств. Каждой функции $y(z)$ можно поставить в соответствие вектор $\mathbf{Y}$ бесконечномерного пространства, причем для каждого z величина $y(z)$ принимается за компоненту $\mathbf{Y}$ вдоль направления, соответствующего этому значению z (см., например, стр. 134). Дифференциальной операции $\mathcal{L}$ соответствует векторная операция, которая, вообще говоря, преобразует каждый вектор $\mathbf{A}(z)$ в некоторый другой вектор. Однако если y представляет собой решение уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, то соответствующий вектор $\mathbf{Y}$ при помощи этой векторной операции переводится в нуль. Каждому решению $u(z)$, отличающемуся от $y(z)$ постоянным множителем, соответствует вектор $\mathbf{U}$, имеющий *то же направление*, что и $\mathbf{Y}$, хотя и *другую длину*. Возникает вопрос: сколько *различных направлений* могут иметь векторы, соответствующие решениям уравнения (5.2.1)?

Определитель Вронского. Если двум решениям y_1 и y_2 соответствуют векторы одного направления, то $y_2 = \alpha y_1$ и $y_2' = \alpha y_1'$ (в этой главе мы будем применять краткие обозначения $y' = dy/dz$ и $y'' = d^2y/dz^2$) и выражение

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (5.2.2)$$

обращается в нуль для всех значений z . С другой стороны, если $\mathbf{Y}_2$ имеет отличное от $\mathbf{Y}_1$ направление, то $\Delta(y_1, y_2)$ нигде не равно нулю. Выражение $\Delta(y_1, y_2)$, определенное формулой (5.2.2) (где y_1 и y_2 оба являются решениями уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$), называется *определителем Вронского* для решений y_1 и y_2 данного однородного уравнения. Если определитель Вронского равен нулю, то одно решение отличается от другого постоянным множителем. Если определитель Вронского отличен от нуля для любого интервала изменения z , то $\mathbf{Y}_2$ имеет отличное от $\mathbf{Y}_1$ направление и два решения y_1 и y_2 называются *независимыми*.

При помощи свойств определителя Вронского можно непосредственно показать, что имеется по крайней мере одно решение, независимое с $y_1 \neq 0$. Предположим, что решение y_1 известно, и попробуем построить другое решение y_2 , связанное с y_1 в некоторой начальной точке $z = z_0$ соотношениями $y_2 = \alpha y_1$, $y_2' = \beta y_1'$ ($\alpha \neq \beta$). Тогда определитель Вронского $\Delta(y_1, y_2) = (\beta - \alpha) y_1 y_1'$ в точке $z = z_0$ отличен от нуля (мы допускаем, что ни y_1 , ни y_1' не равно нулю при $z = z_0$). Посмотрим, какие значения принимает Δ для других значений z , если y_2 является решением уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$. Взяв производную от Δ по z и применив уравнение (5.2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dz} &= y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -y_1 (p y_2' + q y_2) + y_2 (p y_1' + q y_1) = \\ &= -p \Delta = -\Delta \frac{d}{dz} (\ln f). \end{aligned}$$

Это уравнение для Δ можно проинтегрировать, что дает

$$\Delta(z) = \Delta(z_0) e^{-\int_{z_0}^z p dz} = \Delta(z_0) \frac{f(z_0)}{f(z)}. \quad (5.2.3)$$

Отсюда, за исключением того несчастного случая, когда f при выбранном z_0 равно нулю, если Δ отлично от нуля при $z = z_0$, то оно отлично от нуля и при других значениях z , пока $f(z) \neq 0$; таким образом возможно найти второе решение, независимое от y_1 .

Так как $\Delta(z) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = y_1^2(z) d[y_2(z)/y_1(z)]/dz$, то немедленно получаем, что

$$\begin{aligned} y_2(z) &= y_1(z) \int_{z_0}^z \frac{\Delta(u)}{y_1^2(u)} du = \Delta(z_0) y_1(z) \int_{z_0}^z \frac{e^{-\int_{z_0}^u p(w) dw}}{y_1^2(u)} du = \\ &= \Delta(z_0) f(z_0) y_1(z) \int_{z_0}^z \frac{du}{f(u) y_1^2(u)}. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение (5.2.4) представляет собой решение уравнения (5.2.1), так как если подставить $y = uv$, то уравнение (5.2.1) принимает вид

$$v\mathcal{L}(u) + uv'' + puv' + 2u'v' = 0, \quad y = uv, \quad \mathcal{L}(y) = 0. \quad (5.2.5)$$

Полагая $u = y_1$, $\mathcal{L}(u) = 0$, а $v = \int (\Delta/y_1^2) dz$, мы легко убедимся в том, что уравнение (5.2.5) удовлетворяется. Таким образом, y_2 , определенное формулой (5.2.4), представляет собой решение уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, независимое с y_1 ; соответствующий вектор Y_2 в абстрактном векторном пространстве имеет направление, отличное от Y_1 . Если имеем два независимых решения, то, так как уравнение (5.2.1) линейное, любая комбинация $Ay_1 + By_2$ также является решением. Отсюда каждому вектору в плоскости, определенной векторами Y_1 и Y_2 , отвечает решение соответствующего уравнения.

Независимые решения. Мы только что показали, что если одно решение $y_1(z)$ уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ известно, то второе решение можно получить посредством интегрирования

$$y_2(z) = By_1(z) \int e^{-\int p dz} \frac{dz}{y_1^2(z)} \quad (5.2.6)$$

Это решение независимо с $y_1(z)$, так как определитель Вронского $\Delta(y_1, y_2)$ равен $Be^{-\int p dz}$. Далее возникает следующий вопрос: нельзя ли все возможные решения уравнения (5.2.1) выразить в виде линейной комбинации $Ay_1 + By_2$ или же можно найти решение, у которого соответствующий вектор не лежит в плоскости, определенной векторами Y_1 и Y_2 . Возьмем какое-нибудь решение y_3 и посмотрим, можно ли его выразить через y_1 и y_2 . Выбрав точку $z = z_0$, мы всегда можем найти значения A и B , для которых

$$y_3(z_0) = Ay_1(z_0) + By_2(z_0), \quad y_3'(z_0) = Ay_1'(z_0) + By_2'(z_0). \quad (5.2.7)$$

Это можно сделать, поскольку определитель Вронского $\Delta(y_1, y_2)$ отличен от нуля или, другими словами, поскольку y_1 и y_2 — независимые решения.

Итак, всегда можно найти такую комбинацию y_1 и y_2 , что определитель Вронского y_3 и этой комбинации равен нулю при $z = z_0$. Но чтобы убедиться, что функция y_3 действительно равна $Ay_1 + By_2$, надо проверить, что их высшие производные при $\bar{z} = z_0$ также равны. Однако, применяя уравнения (5.2.1) и (5.2.7), мы видим, что

$$y_3'(z_0) = -py_3' - qy_3 = -p[Ay_1' + By_2'] - q[Ay_1 + By_2] = Ay_1'(z_0) + By_2'(z_0).$$

Продолжая дифференцирование и применяя уравнение (5.2.1), находим, что если имеют место соотношения (5.2.7), то и n -я производная от y_3 в точке z_0 равна такой же комбинации n -х производных от y_1 и y_2 . Следовательно, ряд Тейлора около точки $z = z_0$ даст

$$\begin{aligned} y_3(z) &= y_3(z_0) + (z - z_0)y_3'(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 y_3''(z_0) + \dots = \\ &= A[y_1(z_0) + (z - z_0)y_1'(z_0) + \dots] + B[y_2(z_0) + (z - z_0)y_2'(z_0) + \dots] = \\ &= Ay_1(z) + By_2(z), \end{aligned}$$

так что решение y_3 представимо в виде комбинации $Ay_1 + By_2$ во всей области изменения z , где сходится ряд Тейлора.

Таким образом, в этом смысле *каждое решение y_3 уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ представимо в виде линейной комбинации двух независимых решений y_1 и y_2* . С точки зрения абстрактного векторного пространства получается, что векторы, представляющие решения уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, *все лежат в одной плоскости*. Нетрудно показать, что при рассмотрении уравнения третьего порядка потребуется уже три независимых решения для построения базисной системы, через которую можно выразить все остальные решения; другими словами, в этом случае векторы, соответствующие решениям, все лежат в трехмерном подпространстве абстрактного векторного пространства; для дифференциальных уравнений высшего порядка размерность этого подпространства равна порядку линейного дифференциального уравнения, порождающего решения.

Интегрирующие множители и сопряженные уравнения. Выражение решения незнакомого дифференциального уравнения через известные алгебраические или трансцендентные функции является обычно более сложной задачей, чем интегрирование незнакомой функции; действительно, определению первообразной функции $u = \int v dz$ соответствует решение очень простого дифференциального уравнения первого порядка $du/dz - v(z) = 0$. Для интегрирования в замкнутом виде обычно, по существу, просто испытывают несколько возможных решений u , чтобы проверить, не будет ли производная u' какого-нибудь из них равна v . Результаты этого исследования собраны в таблицах интегралов. Если требуемый интеграл не содержится в таблицах, обычно необходимо прибегнуть к разложению в ряд (при этом область применимости ряда ограничивается областью его сходимости) или к численному подсчету (с аналогичными или более жесткими ограничениями).

Основной задачей этой главы будет классификация уравнений (то есть составление таблицы, аналогичной таблице интегралов), по которой можно было бы узнавать виды уравнений, имеющие известные и табулированные решения, а также исследование различных общих методов решения таких уравнений, что позволит нам найти общий характер поведения решений других незнакомых уравнений. Во многих случаях мы будем считать решение найденным, если его можно выразить через один или более интегралов, даже если интегрирование возможно осуществить только при помощи разложения в ряды (или численного подсчета). Это называется

«приведением к квадратурам» — выражение, посредством которого математик как бы уклоняется от остальной части задачи нахождения решения. Например, простейшее линейное дифференциальное уравнение

$$(dy/dz) + p(z)y = 0 \quad (5.2.8)$$

можно привести к квадратурам посредством перегруппировки членов

$$\int (dy/y) = - \int p(z) dz, \quad \ln y = - \int p dz + C, \quad y = Ae^{-\int p dz} \quad (5.2.9)$$

или при помощи *интегрирующего множителя*. Для этого заметим, что если умножить уравнение (5.2.8) на множитель $e^{\int p dz}$, то результат будет представлять собой полный дифференциал, который можно немедленно проинтегрировать

$$e^{\int p dz} y' + e^{\int p dz} py = (d/dz) [ye^{\int p dz}] = 0, \quad ye^{\int p dz} = A, \quad y = Ae^{-\int p dz}$$

Имеется обширная литература, в которой излагаются полезные приемы нахождения интегрирующего множителя для более сложных уравнений первого порядка.

Уравнения второго порядка вида (5.2.1) также иногда можно привести к квадратурам при помощи интегрирующего множителя. Из тождеств

$$y''v - v''y = (d/dz)(y'v - v'y), \quad (d/dz)(pyv) = vpy' + y(pv)'$$

получаем следующее тождество для любых разумных функций y и v переменной z :

$$v[y'' + py' + qy] - y[v'' - (pv)' + qv] = (d/dz)[vy' - v'y + vpy],$$

которое можно символически записать в виде

$$v\mathcal{L}(y) - y\tilde{\mathcal{L}}(v) = (d/dz)P(v, y), \quad (5.2.10)$$

где оператор $\mathcal{L}$ тот же, что и в исходном дифференциальном уравнении $\mathcal{L}(y) = y'' + py' + qy = 0$. Дифференциальный оператор $\tilde{\mathcal{L}}$, преобразующий v по формуле

$$\tilde{\mathcal{L}}(v) = \frac{d^2v}{dz^2} - \frac{d}{dz}(pv) + qv = v'' - pv' + (q - p')v \quad (5.2.11)$$

называется *сопряженным* оператору $\mathcal{L}(y)$, преобразующему функцию y , а дифференцируемое по z выражение

$$P = vy' - v'y + vpy = vy \left[\frac{y'}{y} - \frac{v'}{v} + p \right] \quad (5.2.12)$$

называется *присоединенной билинейной формой*, зависящей от функций v и y и независимой переменной z .

Если мы можем решить сопряженное уравнение $\tilde{\mathcal{L}}(v) = 0$, то решение исходного уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ сводится к решению уравнения первого порядка

$$P = vy[(y'/y) - (v'/v) + p] = \text{const.}$$

Так как годится любое решение последнего уравнения, то мы выберем простейшее, положив постоянную равной нулю, так что если v — решение уравнения $\tilde{\mathcal{L}}(v) = 0$, то

$$\frac{dy}{y} = \frac{dv}{v} - p dz, \quad y_1 = ve^{-\int p dz} \quad (5.2.13)$$

(мы не обращаем внимания на произвольные постоянные, так как можем ввести их позже). Второе, независимое от y_1 решение можно найти по формуле (5.2.6)

$$y_2 = v e^{-\int p dz} \int e^{\int p dz} \frac{dz}{v^2}, \quad (5.2.14)$$

причем надо выполнить еще одно интегрирование. Тогда общим решением будет $\psi = A y_1 + B y_2$.

К общему типу дифференциальных уравнений второго порядка, которые можно решить таким путем, принадлежит случай, когда $q = dp/dz$, так как тогда сопряженное уравнение [см. (5.2.11)] принимает простой вид

$$v'' - p v' = 0, \quad v' = e^{\int p dz}, \quad v = \int e^{\int p dz} dz$$

и двумя независимыми решениями для y будут

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-\int p dz} \int e^{\int p dz} dz = \frac{v}{v'}, \\ y_2 &= -e^{-\int p dz} \left(\int e^{\int p dz} dz \right) \int \frac{e^{\int p dz} dz}{\left(\int e^{\int p dz} dz \right)^2} = \frac{1}{v'} \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

при подходящем выборе постоянных интегрирования.

В некоторых из наших разделенных уравнений множитель f_n имеет вид $(\xi - a)^\alpha$, так что соответствующее выражение p в уравнении равно $d \ln f / d\xi = \alpha / (\xi - a)$. Если при этом элементы определителя Штеккеля таковы, что $q = -\alpha / (\xi - a)^2$, то уравнение $\mathcal{L}(y) = 0$ приобретает вид

$$y'' + (\alpha/z) y' - (\alpha/z^2) y = 0, \quad z = \xi - a;$$

тогда условие $q = p'$ удовлетворяется и можно применить формулы (5.2.15). В этом случае $\int p dz = \alpha \ln z$, $v' = z^\alpha$, $v = z^{\alpha+1}/(\alpha+1)$, так что общим решением уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ будет

$$\phi = A' y_1 + B' y_2 = Az + (B/z^\alpha), \quad (5.2.16)$$

которое имеет точки ветвления (если α не целое) порядка α при $z = 0$ (то есть при $\xi = a$, в точке концентрации координат) и при $z = \infty$, полюс порядка α при $z = 0$ и простой полюс при $z = \infty$ (то есть после подстановки $z = 1/\omega$ функция ϕ имеет простой полюс при $\omega = 0$), если α целое положительное, и полюс порядка $|\alpha|$ при $z = \infty$, если $\alpha \leq -2$ целое.

Решение (5.2.16) имеет место, кроме случая $\alpha = -1$, когда член $Bz^{-\alpha}$ не является независимым с первым решением Az . В этом случае $p = -1/z$ и второе решение можно получить прямо из (5.2.6)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dz}}{y_1^2} dz = z \int \frac{z dz}{z^2} = z \ln z,$$

так что общее решение будет тогда равно

$$\phi = z(A + B \ln z) \quad (5.2.17)$$

и опять будет иметь точки ветвления при $z = 0$ и $z = \infty$.

Решение неоднородного уравнения. Зная два независимых решения y_1 и y_2 однородного уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, мы можем найти общее решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}(\phi) = r(z)$ при помощи дополнительного инте-

грирования. Аналогично уравнению (5.2.5) подставляем $\phi = uv$ в уравнение $\mathcal{L}(\phi) = r$ и получаем

$$v\mathcal{L}(u) + uv'' + (up + 2u')v' = r.$$

Если теперь положить u равным одному из решений y_1 однородного уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, получится

$$v'' + [p + 2(y_1'/y_1)]v' = r/y_1. \quad (5.2.18)$$

Однако так как второе решение и определитель Вронского связаны соотношением $(y_2/y_1)' = \Delta/y_1^2$, то из указанного на стр. 497 свойства определителя Вронского вытекает, что

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'' = \left(\frac{\Delta}{y_1^2}\right)' = \frac{\Delta'}{y_1^2} - 2\frac{y_1'\Delta}{y_1^3} = -p\frac{\Delta}{y_1^2} - 2\frac{y_1'}{y_1}\frac{\Delta}{y_1^2},$$

откуда $(y_2/y_1)'' + [p + 2(y_1'/y_1)](y_2/y_1)' = 0$. Умножая это уравнение на v' , а уравнение (5.2.18) на $(y_2/y_1)'$ и вычитая, получаем

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' v'' - v' \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'' = \left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\right]^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{v'}{(y_2/y_1)'} \right] = \frac{r}{y_1} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{r}{y_1} \frac{\Delta}{y_1^2}.$$

При помощи этого преобразования мы привели исходное неоднородное уравнение второго порядка $\mathcal{L}(\phi) = r$ к простому неоднородному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{v'}{(y_2/y_1)'} \right] = \frac{ry_1}{\Delta},$$

где y_1 , y_2 и $\Delta = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ получены из однородного уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ и предполагаются известными функциями z . Интегрируя это уравнение первого порядка без больших усилий, получаем

$$v' = \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \right] \int \frac{ry_1}{\Delta} dz \text{ или } v' + \frac{ry_2}{\Delta} = \frac{d}{dz} \left(\frac{y_2}{y_1} \int \frac{ry_1}{\Delta} dz \right).$$

Так как $v = \phi/y_1$, то мы отсюда получаем формальное решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}(\phi) = r$

$$\phi = vy_1 = y_1 \left[c_1 - \int \frac{ry_2 dz}{\Delta(y_1, y_2)} \right] + y_2 \left[c_2 + \int \frac{ry_1 dz}{\Delta(y_1, y_2)} \right], \quad (5.2.19)$$

где интегралы неопределенные, а постоянные c выбираются в соответствии с краевыми условиями. В соответствии с обсуждением на стр. 496 это решение состоит из суммы частного решения

$$\int_a^z r(w) \left[\frac{y_1(w)y_2(z) - y_2(w)y_1(z)}{y_1(w)y_2'(w) - y_2(w)y_1'(w)} \right] dw$$

и произвольного решения однородного уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$.

Решение при помощи рядов около обыкновенных точек. Как мы указали несколько выше и докажем вскоре, общее решение уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ имеет особенности в точках полюсов функций p и q . Все другие значения z , в которых p и q являются аналитическими функциями, называются *обыкновенными точками уравнения*. Точки, в которых p или q (или обе) имеют особенности, называются *особыми точками уравнения*.

Чтобы показать, что общее решение в обыкновенной точке аналитично, и также проиллюстрировать один из приемов решения дифференциальных уравнений, подсчитаем разложение в ряд решения уравнения (5.2.1) в обыкновенной точке $z = a$. Так как $z = a$ — обыкновенная точка, то как p , так и q аналитичны и могут быть около $z = a$ разложены

в ряды Тейлора

$$p(z) = p(a) + (z-a)p'(a) + \frac{1}{2}(z-a)^2 p''(a) + \dots,$$

$$q(z) = q(a) + (z-a)q'(a) + \frac{1}{2}(z-a)^2 q''(a) + \dots$$

Решение y (если оно аналитично) также можно выразить в виде ряда

$$y = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

Подставляя его в уравнение (5.2.1), получаем

$$0 = [2a_2 + a_1 p'(a) + a_0 q'(a)] + \\ + [6a_3 + 2a_2 p'(a) + a_1 p''(a) + a_0 q''(a) + a_1 q'(a)](z-a) + \dots$$

Приравнявая коэффициенты при каждой степени $z-a$ нулю, получаем последовательность уравнений для определения коэффициентов a_n ряда, представляющего решение. Первое уравнение выражает a_2 через a_0 и a_1 [и известные величины $p(a)$ и $q(a)$]. Из второго можно выразить a_3 через a_2 , a_1 и a_0 и потому через a_0 и a_1 и т. д. Эти уравнения можно решить, что и даст ряд для y .

Таким образом, разложение y в ряд можно записать в виде

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2, \\ y_1 = 1 - \frac{1}{2} q(a)(z-a)^2 + \frac{1}{6} [q(a)p'(a) - q'(a)](z-a)^3 + \dots, \\ y_2 = (z-a) - \frac{1}{2} p(a)(z-a)^2 + \frac{1}{6} [p^2(a) - p'(a) - q(a)](z-a)^3 + \dots, \quad (5.2.20)$$

где y_1 и y_2 — независимые решения. Они образуют особенно удобную для применений пару решений, так как одно имеет единичное значение и нулевую производную при $z=a$, а другое — нулевое значение и единичную производную; эта пара называется *основной системой* решений для обыкновенной точки $z=a$. Любому начальному условию $y(a) = A$, $y'(a) = B$ легко удовлетворить, положив $y = Ay_1 + By_2$. Решение, представленное в виде ряда, пригодно внутри круга сходимости радиуса, равного расстоянию от a до ближайшей особой точки дифференциального уравнения. Например, основной системой решений дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ в обыкновенной точке $z=0$ служит $y_1 = \cos z$, $y_2 = \sin z$. Так как ближайшая особая точка находится на бесконечности, то ряды, в которые разлагаются косинус и синус, пригодны на всей конечной части плоскости z .

Интересно отметить, что если p имеет при $z=a$ полюс, в то время как q аналитична в a , то *одно* решение уравнения аналитично, а второе имеет особенность. Подставляя $p = F(z)/(z-a)^n$, где F — аналитическая функция, отличная от нуля при $z=a$, а затем проводя такое же разложение в ряд, как и выше, мы найдем в общем случае, что $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, в то время как a_{n+1} , a_{n+2} и т. д. можно выразить через a_0 . Например, если в выражении для p будет $n=2$, то ряд, соответствующий уравнению $\mathcal{L}(y) = 0$, имеет вид

$$0 = \frac{1}{(z-a)^2} a_1 F(a) + \frac{1}{(z-a)} [2a_2 F(a) + a_1 F'(a)] + \\ + [2a_2 + q(a)a_0 + 3a_3 F(a) + 2a_2 F'(a) + \frac{1}{2} a_1 F''(a)] + \dots,$$

так что одно из решений уравнения будет (полагая $a_0 = 1$)

$$y_1 = 1 - \frac{q(a)}{3F(a)}(z-a)^3 + \left[\frac{q(a)}{2F^2(a)} + \frac{q(a)F'(a)}{4F^2(a)} - \frac{q'(a)}{4F(a)} \right] (z-a)^4 + \dots$$

Второе решение можно подсчитать, применяя формулу (5.2.6). Так как $\int p dz = -\frac{F(a)}{z-a} + F'(a) \ln(z-a) + \frac{1}{2} F''(a)(z-a) + \dots$, то интеграл $\int dz e^{-\int p dz} / y_1^2$ имеет существенную особенность общего вида $(z-a)^{2-F'(a)} \times \times e^{F(a)/(z-a)}$. Поэтому общее решение $Ay_1 + By_2$ имеет при $z=a$ существенную особенность.

Особые точки, определяющие уравнение. Мы только что увидели, что вблизи такой особой точки, где q аналитична, а p имеет полюс, одно решение аналитично, в то время как второе имеет точку ветвления (или полюс), если p имеет простой полюс, или существенную особенность, если p имеет полюс высшего порядка (эта особенность может одновременно являться точкой ветвления). Это исследование имеет значение с общей точки зрения: можно определить *регулярную особую точку* как такую, в которой общее решение имеет полюс или точку ветвления (или их комбинацию), а *иррегулярную особую точку* как такую, в которой общее решение имеет существенную особенность.

Чтобы найти, какой тип особых точек получается при различном поведении p и q , выделим особенность у y , положив $y=uv$, где u предполагается аналитической и $u(a) \neq 0$. Применяя формулу (5.2.5), получаем

$$u'' + Hu' + Ju = 0, \quad H = p + 2(v'/v), \quad J = q + (v''/v) + p(v'/v). \quad (5.2.21)$$

Теперь предположим, что уравнение $\mathcal{L}(y) = 0$ имеет при $z=a$ особую точку, то есть $p = F(z)/(z-a)^m$, $q = G(z)/(z-a)^n$, где F и G аналитичны при $z=a$. Чтобы функция u была аналитической, потребуем, чтобы коэффициент J был аналитическим: u может тогда быть аналитическим решением уравнения $u'' + Hu' + Ju = 0$, у которого коэффициент J аналитический, а H имеет полюс.

Прежде всего рассмотрим, какие ограничения надо наложить на p и q (то есть на m и n), чтобы $z=a$ была регулярной особой точкой. В этом случае, по определению, $v = (z-a)^s$, $v'/v = s/(z-a)$, $v''/v = s(s-1)/(z-a)^2$. Чтобы функция J была аналитической, полюс q должен быть не выше второго порядка ($n=2$), а полюс p — не выше первого ($m=1$). Таким образом, если p имеет вид $F(z)/(z-a)$, а q — вид $G(z)/(z-a)^2$, где функции F и G аналитичны при $z=a$, то точка $z=a$ является регулярной особой точкой для уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ и общее решение имеет в ней точку ветвления (или полюс). Уравнение для s получается из (5.2.21)

$$s^2 + [F(a) - 1]s + G(a) = 0, \quad (5.2.22)$$

и оно называется *определяющим уравнением* для решения. Два корня s_1 и s_2 ($s_1 > s_2$) соответствуют двум решениям $y_1 = (z-a)^{s_1} u_1$, $y_2 = (z-a)^{s_2} u_2$, где u_1 и u_2 — функции, аналитические в точке a .

Если $s_1 = s_2$ и, во многих случаях, если $s_1 - s_2$ — целое, u_2 оказывается равным $(z-a)^{s_1-s_2} u_1$, так что определяющее уравнение и ряд для u дают одно решение, но не дают второго. В этом случае для получения y_2 применяется формула (5.2.6). Так как $e^{-\int p dz}$ равно произведению $(z-a)^{-F(a)}$ на аналитическую функцию и так как $1 - F(a) = s_1 + s_2$, то подынтегральная функция в формуле (5.2.6) имеет вид

$$\frac{(z-a)^{s_1+s_2-1} \text{ (аналитическая функция)}}{(z-a)^{2s_1} u_1^2} = \frac{\text{ (аналитическая функция)}}{(z-a)^{s_1-s_2+1}}$$

Если $s_1 - s_2$ целое, то подынтегральная функция имеет при $z=a$ полюс, а не точку ветвления и, разложив аналитическую функцию в ряд

$b_0 + b_1(z-a) \dots$, получим ряд для второго решения в виде

$$(z-a)^{s_2} u_1 \left[-\frac{b_0}{s_1-s_2} - \frac{b_1(z-a)}{s_1-s_2+1} - \dots + b_{s_1-s_2}(z-a)^{s_1-s_2} \ln(z-a) + \dots \right];$$

он имеет характерный член $u_1(z-a)^{s_1} \ln(z-a)$.

Этот логарифмический член обязательно появляется во втором решении, если $s_1 = s_2$ (см. стр. 500), и почти обязательно, если $s_1 - s_2$ целое. Поэтому можно сказать, что общее решение уравнения (5.2.1) имеет в регулярной особой точке уравнения точку ветвления, так как если s_1 и s_2 оба целые и можно было бы ожидать отсутствие точки ветвления, то как раз в этом случае во втором решении появляется логарифмический член, приносящий вместе с собой свою точку ветвления. Это правило имеет исключения, одно из них дается формулой (5.2.16).

Если q имеет полюс выше второго порядка, или если p имеет полюс выше первого порядка, или если имеет место и одно и другое, то одно решение или оба должны иметь существенную особенность и особая точка является иррегулярной. Если при этом порядок полюса q не превосходит более чем на единицу порядок полюса p , то только одно из решений имеет существенную особенность.

Это можно просто показать, подставив ряд

$$y = (z-a)^s \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-a)^i, \quad \text{то есть } v = (z-a)^s, \quad u = \sum c_i (z-a)^i$$

в уравнение (5.2.1). Тогда, если p и q можно представить рядами Лорана,

$$\begin{aligned} p &= a_{-m}(z-a)^{-m} + a_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots, \\ q &= b_{-n}(z-a)^{-n} + b_{-n+1}(z-a)^{-n+1} + \dots, \quad m, n - \text{целые,} \end{aligned}$$

то следующий ряд

$$\begin{aligned} c_0 s(s-1)(z-a)^{s-2} + c_1(s+1)s(z-a)^{s-1} + \dots + \\ + c_0 a_{-m} s(z-a)^{s-m-1} + [c_0 a_{-m+1} s + c_1 a_{-m}(s+1)](z-a)^{s-m} + \dots + \\ + c_0 b_{-n}(z-a)^{s-n} + [c_0 b_{-n+1} + c_1 b_{-n}](z-a)^{s-n+1} + \dots \end{aligned}$$

должен равняться нулю для тех z , для которых ряд для u сходится. Следовательно, коэффициент при каждой степени $z-a$ должен обращаться в нуль. Если полученная бесконечная последовательность уравнений неразрешима, то наше исходное предположение о форме y нереализуемо и y должен иметь существенную особенность при $z=a$.

Оказывается, что если коэффициент при младшей степени $z-a$ можно сделать равным нулю, то всем дальнейшим уравнениям можно удовлетворить при помощи подходящего выбора коэффициентов c_i . Это основное уравнение для низшей степени $z-a$ как раз совпадает с определяющим уравнением (5.2.22), если m и n таковы, что удовлетворяют условиям, при которых это определяющее уравнение было введено. Мы видели, что если $m \leq 1$ и $n \leq 2$, то это уравнение относительно s имеет вторую степень; например, для $m=1$ и $n=2$ имеем

$$c_0[s^2 + (a_{-1} - 1)s + b_{-2}] = 0,$$

что позволяет найти для s два значения, следовательно, оба независимые решения y_1 и y_2 имеют указанный вид (точку ветвления при $z=a$), то есть точка $z=a$, по определению, является *регулярной особой точкой*. (Если корни равны, то мы уже видели, что второе решение имеет логарифмический член.)

Если $1 < m \geq n - 1$, то уравнение для низшей степени $z - a$ линейно по s , так что *только одно* решение y может иметь указанный вид, а если $2 < n > m + 1$, то определяющее уравнение отсутствует и *ни одно* решение не имеет указанного вида. Такая точка является *иррегулярной особой точкой*, так как одно или оба решения должны иметь при $z = a$ существенную особенность. Имеется определенная иерархия иррегулярных особых точек, основанная на виде существенной особенности, которой обладает решение. Например, если решение в некоторой иррегулярной особой точке имеет вид

$$y = [c_0(z-a)^s + c_1(z-a)^{s+1} + \dots] \exp[A_0(z-a)^{-k} + A_1(z-a)^{-k+1} + \dots],$$

то характер существенной особенности y при $z = a$ определяется значением k . Можно распределить особые точки по различным *видам* в соответствии с требуемым значением k . Если p или q имеет точку ветвления или существенную особенность, то y имеет еще более «патологическую» особенность. К счастью, нам не потребуется забираться в эти дебри осложнений, чтобы решать уравнения, с которыми мы работаем.

Классификация уравнений, стандартные формы. Теперь очевидно, что первое, с чего надо начинать, приступая к решению линейного дифференциального уравнения неизвестного вида, состоит в выяснении положения всех особенностей функций p и q . Если все эти особенности являются полюсами, то можно перейти к следующему шагу; если некоторые из них являются точками ветвления или существенными особенностями, то надо попытаться так заменить независимое переменное z , чтобы все они стали полюсами (если этого нельзя сделать, что иногда бывает, то приходится применять численное интегрирование). Затем мы разделяем регулярные особые точки и иррегулярные и, решая определяющие уравнения для всех регулярных точек, находим значения *индексов* s , определяющих структуру точек ветвления решений вблизи этих значений z . Если это иррегулярные особые точки, мы также определяем характер существенной особенности при помощи упомянутых выше методов.

Характер бесконечно удаленной точки определяется при помощи подстановки $z = 1/w$, в результате чего получается уравнение

$$\frac{d^2 y}{dw^2} + P(w) \frac{dy}{dw} + Q(w)y = 0, \quad P(w) = \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2} p\left(\frac{1}{w}\right), \quad Q(w) = \frac{1}{w^4} q\left(\frac{1}{w}\right). \quad (5.2.23)$$

По структуре полюсов P и Q при $w = 0$ мы узнаем характер особой точки на бесконечности. Например, если решением определяющего уравнения для $w = 0$ будет s_1 , то решение y имеет вид $w^{s_1} F(w) = (1/z)^{s_1} F(1/z)$, где функция $F(w)$ аналитична при $w = 0$.

Особые точки всех уравнений, получающихся при разделении переменных в уравнении $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$, приведены в таблице в конце этой главы.

Обычно лучше всего оказывается преобразовать уравнение к стандартному виду, со стандартным положением особых точек и по возможности с более простыми индексами s решений. Например, если имеется только две особые точки, то обычно лучше расположить их в нуле и в бесконечности; если их три, то их обычно размещают в нуле, единице и бесконечности. Это делается при помощи замены независимой переменной. Если особыми точками первоначально были a , b и c , то преобразование

$$z = (w - a)\gamma/(w - c), \quad w = (\gamma a - cz)/(\gamma - z), \quad \gamma = (b - c)/(b - a) \quad (5.2.24)$$

меняет положение особых точек, не изменяя их структуры, то есть определяющего уравнения в каждой точке. Уравнения для нового и старого независимого переменного связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dw^2} + P(w) \frac{d\psi}{dw} + Q(w) \psi &= 0, \quad \frac{d^2 \psi}{dz^2} + p(z) \frac{d\psi}{dz} + q(z) \psi = 0, \\ p(z) &= \frac{\gamma(a-c)}{(\gamma-z)^2} P\left(\frac{\gamma a - cz}{\gamma - z}\right) - \frac{2}{\gamma - z}, \\ q(z) &= \frac{\gamma^2(a-c)^2}{(\gamma-z)^4} Q\left(\frac{\gamma a - cz}{\gamma - z}\right). \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Здесь и до конца этой главы мы будем обозначать через ψ общее решение, а через y — частные решения специального вида.

Найти преобразование, перемещающее четыре произвольные точки в четыре стандартные позиции и не меняющее индексов, невозможно, так что не существует простой стандартной формы уравнений, имеющих более трех особых точек. Мы обычно располагаем иррегулярную особую точку (если она единственная) на бесконечности, так как тогда рассмотренный выше множитель v имеет сравнительно простой вид

$$\exp(a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_{k-s} z^{k-s}).$$

Если особая точка в нуле регулярна, то обычно целесообразно заменить искомую функцию, положив $\psi = vu$, чтобы, используя равенства (5.2.21), получить сравнительно просто решаемое уравнение для u . Обычно при этом полагают, что v имеет точку ветвления, соответствующую меньшему корню определяющего уравнения для нулевой особой точки, так что одно из решений уравнения для u аналитично при $z = 0$. Однако детальные соображения, которыми надо руководствоваться при выборе преобразования независимой и зависимой переменных, лучше всего могут быть показаны на примерах.

По этой и другим причинам полезно более или менее систематически исследовать некоторые из менее сложных уравнений, чтобы познакомиться с их видом и кое-что узнать о поведении их решений. Мы приступим к рассмотрению различных случаев в порядке возрастания числа и сложности особых точек. Для этих случаев мы сначала исследуем общий вид, а затем преобразование к стандартному виду, для которого мы определим стандартные решения. Простейшим является, конечно, случай *одной регулярной особой точки*. Если этой точкой будет $w = a$, уравнение имеет вид

$$\psi'' + [2/(\omega - a)] \psi' = 0, \quad (5.2.26)$$

где коэффициент при члене $\psi'/(\omega - a)$ должен равняться 2, чтобы не было особой точки на бесконечности [см. (5.2.23)]. Общим решением служит $\psi = A + B/(\omega - a)$. Стандартная форма для этого уравнения могла бы быть с особой точкой на бесконечности; уравнением и решениями будут тогда

$$\psi'' = 0, \quad \psi = A + Bz. \quad (5.2.27)$$

Две регулярные особые точки. Здесь общей формой уравнения будет

$$\frac{d^2 \psi}{dw^2} + \frac{2w + c(\lambda + \mu - 1) - a(\lambda + \mu + 1)}{(w-a)(w-c)} \frac{d\psi}{dw} + \frac{\lambda\mu(a-c)^2}{(w-a)^2(w-c)^2} \psi = 0, \quad (5.2.28)$$

причем коэффициент $P(w)$ выбран в таком специальном виде (в частности, член $2w$ в числителе), чтобы на бесконечности была обыкновенная точка.

Определяющее уравнение (5.2.22) для $w = a$ имеет вид $s^2 - (\lambda + \mu)s + \lambda\mu = 0$ и корни λ и μ , так что решениями служат $y_1 = (w - a)^\lambda u_1^a$, $y_2 = (w - a)^\mu u_2^a$. Определяющее уравнение для $w = c$ имеет вид $s^2 + (\lambda + \mu)s + \lambda\mu = 0$ и корни $-\lambda$ и $-\mu$, так что решениями будут $y_1 = (w - c)^{-\lambda} u_1^c$, $y_2 = (w - c)^{-\mu} u_2^c$. Прямая подстановка (или решение с помощью ряда) показывает, что $u_1^a = (w - c)^{-\lambda}$, $u_1^c = (w - a)^\lambda$, $u_2^a = (w - c)^{-\mu}$, $u_2^c = (w - a)^\mu$, так что общее решение имеет вид

$$\phi = A \left(\frac{w-a}{w-c} \right)^\lambda + B \left(\frac{w-a}{w-c} \right)^\mu. \quad (5.2.29)$$

Однако задача о нахождении решения была бы проще, если бы мы совершили преобразование $z = (w - a)/(w - c)$, переводящее одну особую точку в нуль, а другую на бесконечность. Преобразованное уравнение тогда имело бы вид

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{\lambda + \mu - 1}{z} \frac{d\psi}{dz} + \frac{\lambda\mu}{z^2} \psi = 0. \quad (5.2.30)$$

Из этой стандартной формы нетрудно вывести, что решением будет $\psi = Az^\lambda + Bz^\mu$. Таким образом, если имеются только две особые точки и они регулярны, то решение должно иметь особенно простой вид, а индексы в одной из особых точек лишь знаком отличаются от индексов в другой.

Исключительный случай здесь будет, если $\lambda = \mu$. В этом случае решение, полученное по формуле (5.2.6), имеет вид

$$\phi = z^\lambda (A + B \ln z) = \left(\frac{w-a}{w-c} \right)^\lambda \left[A + B \ln \frac{w-a}{w-c} \right]. \quad (5.2.31)$$

Одна иррегулярная особая точка. Вот уравнение с единственной иррегулярной особой точкой $w = a$:

$$\frac{d^2\psi}{dw^2} + \frac{2}{w-a} \frac{d\psi}{dw} - \frac{k^2}{(w-a)^4} \psi = 0. \quad (5.2.32)$$

Множитель $(w - a)^{-4}$ указывает на иррегулярность особой точки, а из-за коэффициента $2/(w - a)$ не возникает особой точки при $w = \infty$. Решение этого уравнения таково:

$$\psi = Ae^{h/(w-a)} + Be^{-h/(w-a)}, \quad (5.2.33)$$

что можно найти прямой подстановкой или при помощи преобразования к $z = 1/(w - a)$, так как стандартная форма уравнений этого типа получается при перемещении иррегулярной особой точки на бесконечность

$$(d^2\psi/dz^2) - k^2\psi = 0. \quad (5.2.34)$$

Следует заметить, что уравнение (5.2.34) не является единственным уравнением, имеющим одну иррегулярную особую точку на ∞ , так как могут быть различные виды иррегулярных особых точек. Например, уравнение, получающееся из волнового уравнения в параболических цилиндрических координатах

$$y'' + (a^2 + b^2 z^2) y = 0,$$

имеет одну иррегулярную особую точку на ∞ , но его решения не являются простыми показательными функциями.

Интересная взаимосвязь между регулярными и иррегулярными особыми точками обнаруживается, если посмотреть, что будет в случае двух регулярных особых точек, если эти особые точки сближать до совпадения, сохраняя при этом коэффициенты дифференциального уравне-

ния конечными. В уравнении (5.2.28) положим $a = c - \varepsilon$, $\lambda = -\mu = k/\varepsilon$ и затем устремим ε к нулю; получится уравнение (5.2.32). Решение

$$\phi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[A \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega - c} \right)^{k/\varepsilon} + B \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega - c} \right)^{-k/\varepsilon} \right]$$

соответствует одному из известных определений показательной функции

$$e^x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon x)^{1/\varepsilon}.$$

Такое сближение двух особых точек с соответствующим изменением индексов называется *слиянием* (конфлюенцией) особых точек.

Три регулярные особые точки. Уравнения, более сложные, чем приведенные выше, имеют решения, которые нельзя выразить через элементарные функции. Однако таблица в конце этой главы показывает, что большинство приведенных там уравнений, получающихся при разделении переменных, имеет либо три регулярные особые точки, либо же одну регулярную и одну иррегулярную особые точки, так что нам следует детально рассмотреть эти случаи.

Для дальнейшего ознакомления с методами исследования особых точек уравнений построим уравнение (с независимой переменной w), имеющее три регулярные особые точки при $w = a, b, c$. Это означает, что функция $p(w)$ должна иметь простые полюсы при $w = a, b, c$ и больше нигде. Отсюда $p(w)$ должна иметь одну из двух равносильных форм

$$p(w) = \frac{Aw^3 + Bw^2 + Cw + D}{(w-a)(w-b)(w-c)} = \frac{\alpha}{w-a} + \frac{\beta}{w-b} + \frac{\gamma}{w-c} + \delta.$$

Мы будем применять вторую форму, так как с ней легче работать. Обращаясь к уравнению (5.2.23) мы видим, что для того, чтобы бесконечность была обыкновенной точкой, функция ($w = 1/u$)

$$\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2} p\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{2}{u} - \frac{\alpha/u}{1-au} - \frac{\beta/u}{1-bu} - \frac{\gamma/u}{1-cu} - \frac{\delta}{u^2}$$

должна быть аналитической при $u = 0$. Отсюда вытекает, что $\delta = 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = 2$.

Аналогично так как q может иметь в точках a, b, c полюсы не выше второго порядка и так как функция $q(1/u)/u^4$ должна быть аналитической при $u = 0$, то q должна иметь вид

$$q(w) = \frac{1}{(w-a)(w-b)(w-c)} \left[\frac{d}{w-a} + \frac{e}{w-b} + \frac{f}{w-c} \right].$$

Чтобы найти связь между индексами решения при $w = a$ и постоянными $\alpha, \beta, \gamma, d, e, f$, обратимся к уравнению (5.2.22). Вблизи точки $w = a$

$$p = \frac{F(w)}{w-a}, \quad F(a) = \alpha, \quad q = \frac{G(w)}{(w-a)^2}, \quad G(a) = \frac{d}{(a-b)(a-c)}.$$

Если два индекса при $w = a$ должны быть равными $s = \lambda$ и $s = \lambda'$ (то есть если два решения вблизи $w = a$ имеют вид $y_1 = (w-a)^\lambda u_1(w)$ и $y_2 = (w-a)^{\lambda'} u_2(w)$, где u_1 и u_2 аналитичны и отличны в точке a от нуля), то в уравнении $s^2 + [F(a) - 1]s + G(a) = 0$ член $1 - F(a)$ должен равняться сумме корней $\lambda + \lambda'$, а член $G(a)$ — произведению корней $\lambda\lambda'$. Отсюда $\alpha = 1 - \lambda - \lambda'$, а $d = \lambda\lambda'(a-b)(a-c)$. Если индексы в точке b равны μ и μ' , а в точке $c - \nu$ и ν' , то остальные постоянные также выражаются через эти индексы. Однако, как мы показали, чтобы бесконечно

удаленная точка была обыкновенной, должно быть $\alpha + \beta + \gamma = 2$, то есть

$$\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \nu + \nu' = 1. \quad (5.2.35)$$

Предполагая выполненным это условие, мы можем теперь написать самое общее уравнение с тремя регулярными особенностями

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dw^2} - \left[\frac{\lambda + \lambda' - 1}{w-a} + \frac{\mu + \mu' - 1}{w-b} + \frac{\nu + \nu' - 1}{w-c} \right] \frac{d\psi}{dw} + \\ + \left[\frac{\lambda\lambda' (a-b)(a-c)}{(w-a)^2 (w-b)(w-c)} + \frac{\mu\mu' (b-a)(b-c)}{(w-a)(w-b)^2 (w-c)} + \right. \\ \left. + \frac{\nu\nu' (c-a)(c-b)}{(w-a)(w-b)(w-c)^2} \right] \psi = 0. \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

Оно называется уравнением Папперица. Как мы видели, это уравнение (и потому его решения) вполне определяется указанием положений трех его особых точек и значением обоих индексов в каждой из трех точек (или, скорее, пяти из шести индексов, поскольку шестой получается из соотношения (5.2.35)). Другими словами, символическая табличная запись

$$\phi = P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu & z \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{array} \right\} \quad (5.2.37)$$

полностью равносильна (если сумма элементов второй и третьей строки равна единице) утверждению, что ψ является решением уравнения (5.2.36). Этот символ, введенный Риманом, будет иногда применяться для сокращения записи.

Решение уравнения (5.2.36) при помощи ряда было бы очень громоздким, и поэтому мы поместим особые точки в их стандартные положения. Полагая $a = 0$, $b = 1$, $c \rightarrow \infty$ и вводя z вместо w , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dz^2} - \left[\frac{\lambda + \lambda' - 1}{z} + \frac{\mu + \mu' - 1}{z-1} \right] \frac{d\psi}{dz} - \\ - \left[\frac{\lambda\lambda'}{z} - \frac{\mu\mu'}{z-1} + \nu(\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \nu - 1) \right] \frac{\psi}{z(z-1)} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

или

$$\phi = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \lambda & \mu & \nu & z \\ \lambda' & \mu' & 1 - \lambda - \lambda' - \mu - \mu' - \nu & \end{array} \right\}.$$

Рекурсивные формулы. Теперь мы знаем, что решение ψ можно выразить при помощи следующих разложений вблизи особых точек:

$$\begin{aligned} \psi &= z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 z^n + z^{\lambda'} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^0 z^n = \\ &= (z-1)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 (z-1)^n + (z-1)^{\mu'} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 (z-1)^n = \\ &= \left(\frac{1}{z}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\infty \left(\frac{1}{z}\right)^n + \left(\frac{1}{z}\right)^{1-\lambda-\lambda'-\mu-\mu'-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^\infty \left(\frac{1}{z}\right)^n \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

или через фундаментальную систему решений вблизи любой обыкновенной точки (см. стр. 502). Сейчас мы должны определить соотношение между

коэффициентами рядов a_n и b_n при различных n , так чтобы можно было выразить a_n через a_0 и b_n через b_0 и тем самым получить ряд для решения. Подстановка любого из шести возможных рядов в уравнение и приравнивание коэффициентов при степенях z , $z-1$ или $1/z$ нулю дают последовательность уравнений общего вида

$$D_n(a_n) = \Gamma_{n1}a_{n-k+1} + \Gamma_{n2}a_{n-k+2} + \dots + \Gamma_{nk}a_n = 0, \quad (5.2.40)$$

которые надо решить, чтобы выразить a_n через a_0 (или b_n через b_0). Такие уравнения называются k -членными рекурсивными формулами. Коэффициенты Γ_{nj} являются функциями постоянных, входящих в уравнение, различны для различных особых точек и выбранных индексов и зависят также от своих значков n и j ($j=1, 2, \dots, k$). Так как ряды (5.2.39) являются решениями, то $\Gamma_{nj}=0$ ($n \geq 1, n-k+j < 0$); это означает, что нет надобности в a с отрицательными значками.

Например, для уравнения (5.2.38), точки $z=0$ и индекса λ рекурсивная формула имеет вид

$$D_n(a_n) = [n(n+\lambda-\lambda'-\mu-\mu'+1) - (\nu+\lambda)(\lambda'+\mu+\mu'+\nu-1)]a_n - [(n+1)(2n+2\lambda-2\lambda'-\mu-\mu'+3) - \mu\mu' - (\nu+\lambda)(\lambda'+\mu+\mu'+\nu-1)]a_{n+1} + (n+2)(n+\lambda-\lambda'+2)a_{n+2} = 0. \quad (5.2.41)$$

Однако с помощью такой трехчленной рекурсивной формулы получить явное выражение для a_n/a_0 чрезвычайно сложно.

Во всяком случае, мы привели задачу о нахождении решения дифференциального уравнения к задаче о решении бесконечной последовательности алгебраических уравнений, определяющих последовательные коэффициенты ряда для решения. Другими словами, мы совершили еще одно преобразование от непрерывной переменной z к последовательности целых значений индексов n коэффициентов a_n и b_n степенных рядов; соответственно совершается переход от дифференциального уравнения $\mathcal{L}_z(\psi)=0$ к разностному уравнению $D_n(a_n)=0$. Коэффициенты разностного уравнения соответствуют коэффициентам p и q дифференциального уравнения и определяются ими. Взаимосвязь между дифференциальным уравнением и рекурсивной формулой становится более ясной, если выразить D_n через разностные операторы

$$\delta(a_n) = a_n - a_{n+1}, \quad \delta(na_n) = na_n - (n+1)a_{n+1} \text{ и т. д.,} \\ \delta^2(a_n) = \delta(\delta(a_n)) = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \text{ и т. д.}$$

Например, рекурсивная формула (5.2.41) для ряда, определяющего решение уравнения (5.2.38), может быть переписана так:

$$D_n(a_n) = (n+\lambda-\lambda'+2)\delta^2(na_n) - (\mu+\mu'+3)\delta(na_n) + (\lambda+\nu)(\lambda+\nu')\delta(a_n) - \mu\mu'\delta(a_n) + (\mu\mu'+2n)a_n = 0 \\ (\nu' = 1 - \lambda - \lambda' - \mu - \mu' - \nu).$$

Если ограничиваться построением решений в виде степенных рядов, то желательно преобразовать независимое и зависимое переменные в дифференциальном уравнении к виду, порождающему по возможности более простую рекурсивную формулу. Например, трехчленная рекурсивная формула (5.2.41) соответствует разностному уравнению второго порядка; возможно, что преобразование зависимой переменной заменит ее на двучлен-

ную рекурсивную формулу, которой соответствовало бы разностное уравнение первого порядка; последнее же решить гораздо проще.

Гипергеометрическое уравнение. Преобразовав независимое переменное так, чтобы особые точки попали в их стандартные положения, мы теперь преобразуем зависимую переменную, чтобы сделать по возможности более простыми индексы в особых точках, расположенных в конечной части плоскости. Такая замена переменной ψ может изменить только сумму индексов в особой точке, но не может изменить их разности. Однако мы можем произвести деление на $z^\lambda(z-1)^\mu$, так что в обеих особых точках одно решение станет аналитичным, в то время как второе будет иметь индексы $\lambda' - \lambda$ или $\mu' - \mu$. Другими словами, наше решение приобретает вид $\psi = z^\lambda(z-1)^\mu y$, где символом Римана для y будет

$$y = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \nu + \lambda + \mu \\ \lambda' - \lambda & \mu' - \mu & 1 - \lambda' - \mu' - \nu \end{array} \middle| z \right\}.$$

Соответствующее уравнение для y (полученное подстановкой $\psi = z^\lambda(z-1)^\mu y$ в уравнение (5.2.38) или изменением этого уравнения в соответствии с новым символом P) имеет вид

$$y'' + \left[\frac{\lambda - \lambda' + 1}{z} + \frac{\mu - \mu' + 1}{z-1} \right] y' + \frac{(\nu + \lambda + \mu)(1 - \lambda' - \mu' - \nu)}{z(z-1)} y = 0.$$

Однако здесь слишком много постоянных фиксируемых величин. Для фиксирования индексов нужны только три постоянные: имеется четыре индекса, не положенных равными нулю (по одному при 0 и при 1 и два при ∞), однако их сумма должна равняться единице, так что достаточно трех постоянных. Более удобно положить два индекса на ∞ равными a и b , один при 0 равным $1-c$, так что один при 1 равен $c-a-b$. Символ Римана P тогда приобретает вид

$$F = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \middle| z \right\},$$

а соответствующее дифференциальное уравнение

$$z(z-1)F'' + [(a+b+1)z-c]F' + abF = 0, \quad (5.2.42)$$

называемое *гипергеометрическим уравнением*, является стандартным уравнением для случая трех регулярных особых точек.

Аналитическое вблизи $z \doteq 0$ решение этого уравнения называется *гипергеометрической функцией*. Чтобы получить разложение ее в ряд, полагаем $F = \sum a_n z^n$ и подставляем в (5.2.42). Коэффициент при z^n порождает рекурсивную формулу для ряда

$$\begin{aligned} D_n(a_n) &= (n+a)(n+b)a_n - (n+1)(n+c)a_{n+1} = \\ &= (n+c)(n+1)a_n + [n(a+b-1) - (n+1)c + ab]a_n = 0. \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

Это — *двучленная рекурсивная формула*, то есть разностное уравнение первого порядка, с простым решением

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{a(a+1) \dots (a+n-1) b(b+1) \dots (b+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot c(c+1) \dots (c+n-1)}.$$

Соответствующий ряд

$$F(a, b|c|z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \dots \quad (5.2.44)$$

называется *гипергеометрическим рядом* (см. стр. 367). Он является аналитическим вблизи $z=0$ решением уравнения (5.2.42). Он сходится при $|z| < 1$, так как ближайшей особой точкой служит $z=1$. Через этот ряд можно выразить все решения уравнения (5.2.42) вблизи любой их особенности.

Например, если в уравнение (5.2.42) подставить функцию $z^{1-c}F_2$ (где F_2 должна быть аналитической, так как второй индекс при $z=0$ равен $1-c$), получим уравнение

$$z(z-1)F_2'' + [(a+b-2c+3)z-2+c]F_2' + (a-c+1)(b-c+1)F_2 = 0,$$

которое является другим гипергеометрическим уравнением с аналитическим решением в виде гипергеометрического ряда $F_2 = F(b-c+1, a-c+1|2-c|z)$. Поэтому общее решение уравнения (5.2.42) имеет вид

$$AF(a, b|c|z) + Bz^{1-c}F(b-c+1, a-c+1|2-c|z). \quad (5.2.45)$$

Возвращаясь к предыдущим уравнениям, получаем общее решение уравнения (5.2.38) вблизи $z=0$

$$Az^\lambda(z-1)^\mu F(\lambda+\mu+\nu, 1-\nu-\lambda'-\mu'|\lambda-\lambda'+1|z) + Bz^{\lambda'}(z-1)^\mu F(\lambda'+\mu+\nu, 1-\nu-\lambda-\mu'|\lambda'-\lambda+1|z),$$

а общее решение уравнения Папперица (5.2.36) вблизи $w=a$ равно

$$A\left(\frac{w-a}{w-c}\right)^\lambda \left(\frac{w-b}{w-c}\right)^\mu F\left(\lambda+\mu+\nu, 1-\nu-\lambda'-\mu'|\lambda-\lambda'+1|\frac{w-a}{w-c}\frac{b-c}{b-a}\right) + B\left(\frac{w-a}{w-c}\right)^{\lambda'} \left(\frac{w-b}{w-c}\right)^\mu F\left(\lambda'+\mu+\nu, 1-\nu-\lambda-\mu'|\lambda'-\lambda+1|\frac{w-a}{w-c}\frac{b-c}{b-a}\right). \quad (5.2.46)$$

Решения уравнения Папперица вблизи $w=b$ или $w=c$ можно получить заменой λ, λ' на μ, μ' и т. д., так как уравнение симметрично относительно перестановки особых точек и соответствующих индексов (если иметь в виду, что $\nu' = 1 - \lambda - \lambda' - \mu - \mu' - \nu$).

Формула (5.2.45) дает общее решение, за исключением случая, когда c целое, так как в этом случае ряд для одного из решений будет иметь во всех членах, начиная с некоторого, нулевой множитель в знаменателе (а при $c=1$ эти ряды совпадают). Например, для $c=3$ ряд для второго решения будет иметь два первых члена конечными, а все высшие члены бесконечными из-за сомножителя $2-c+1$ в знаменателе. Это — пример того специального случая, указанного на стр. 500, когда индексы в данной особой точке различаются на целое число. Как указано на стр. 503, в этом случае надо находить второе решение при помощи формулы (5.2.6).

Здесь $y_1 = F(a, b|c|z)$ и $p = (c/z) + [(a+b+1-c)/(z-1)]$, так что $e^{-\int p dz} = z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1}$. Вторым решением будет

$$y_2 = F(a, b|c|z) \int [F(a, b|c|z)]^{-2} z^{-c} (1-z)^{c-a-b-1} dz.$$

Если $|z| < 1$, можно разложить $(1-z)^{c-a-b-1} [F(a, b|c|z)]^{-2}$ в ряд по степеням z , который можно записать в виде $g_0 + g_1 z + \dots$. Ряд для под-

интегральной функции тогда имеет вид

$$\frac{g_0}{z^c} + \frac{g_1}{z^{c-1}} + \dots + \frac{g_{c-1}}{z} + g_c + g_{c+1}z + \dots,$$

причем мы предположили c целым положительным, так что g_c множится на нулевую степень z , g_{c-1} делится на первую степень z и т. д., а дробные степени не участвуют. В этом случае g_{c-1}/z даст при интегрировании логарифмический член и вторым решением будет

$$y_2 = F(a, b | c | z) [g_{c-1} \ln z + (1/z^{c-1}) (h_0 + h_1 z + \dots + h_{c-2} z^{c-2} + h_c z^c + \dots)],$$

где коэффициенты h_n являются функциями a , b , c и n .

Функции, представимые гипергеометрическими рядами. При помощи рядов (5.2.44) можно выразить большое число функций. Например, простейшими случаями являются

$$(1+z)^n = F(-n, b | b | -z); \quad \ln(1+z) = zF(1, 1 | 2 | -z).$$

Разделенное уравнение для ξ_2 в круговых цилиндрических координатах и для ξ_3 в сферических, параболических, вытянутых и сплюснутых сфероидальных координатах имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d}{d\xi} \left[\sqrt{1-\xi^2} \frac{dX}{d\xi} \right] + \frac{k_3^2}{1-\xi^2} X = 0$$

или

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + \left[\frac{1/2}{\xi+1} + \frac{1/2}{\xi-1} \right] \frac{dX}{d\xi} - \frac{k_3^2}{\xi^2-1} X = 0.$$

Оно имеет общий вид уравнения (5.2.36), причем $a = +1$, $b = -1$, $c = \infty$, $\lambda + \lambda' - 1 = -1/2 = \mu + \mu' - 1$, $\lambda\lambda' = \mu\mu' = 0$, $\nu\nu' = -k_3^2$ (и, конечно, обычное условие (5.2.35): $\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \nu + \nu' = 1$). Поэтому символ Римана для его решения будет

$$X = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & \infty \\ 1/2 & 1/2 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{array} \right\},$$

а общее решение вблизи $\xi = +1$ (из формулы (5.2.46))

$$X = A \sqrt{1-\xi^2} F \left(1+k_3, 1-k_3 \middle| \frac{3}{2} \middle| \frac{1-\xi}{2} \right) + \\ + B \sqrt{1+\xi} F \left(\frac{1}{2}+k_3, \frac{1}{2}-k_3 \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1-\xi}{2} \right).$$

Эти решения называются *функциями Чебышева*. Оказывается [см. формулы (5.2.54)], что они пропорциональны соответственно $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$, где $\xi = \cos \varphi$, что можно показать и преобразованием приведенного выше дифференциального уравнения. Эти функции будут исследованы в § 5.3.

Разделенное уравнение для ξ_3 в сферических координатах, а также в сфероидальных координатах в случае $k_1 = 0$ имеет вид

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + \left[\frac{1}{\xi-1} + \frac{1}{\xi+1} \right] \frac{dX}{d\xi} + \left[\frac{-k_3^2}{\xi^2-1} + \frac{k_3^2/2}{(\xi^2-1)(\xi+1)} - \frac{k_3^2/2}{(\xi^2-1)(\xi-1)} \right] X = 0$$

и называется *уравнением Лежандра*. Ему отвечает уравнение (5.2.36) с $a = +1$, $b = -1$, $c = \infty$, $\lambda = -\lambda' = m/2 = \mu = -\mu'$, $\nu = -n$, $\nu' = n+1$, где мы положили $k_3 = m$ и $k_2^2 = n(n+1)$, чтобы результаты было легче

выписать. Поэтому решение соответствует символу Римана

$$X = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & \infty \\ m/2 & m/2 & -n \\ -m/2 & -m/2 & n+1 \end{array} \middle| \xi \right\}$$

и общее решение вблизи $\xi = 1$ равно [см. также формулу (5.2.52)]

$$X = A(1 - \xi^2)^{m/2} F\left(m - n, m + n + 1 \middle| 1 + m \middle| \frac{1 - \xi}{2}\right) + \\ + B\left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right)^{m/2} F\left(-n, n + 1 \middle| 1 - m \middle| \frac{1 - \xi}{2}\right). \quad (5.2.47)$$

Первое решение называется *функцией Лежандра первого рода*, а второе — *функцией Лежандра второго рода*. Если m целое положительное, то так записанное второе решение теряет смысл и тогда второе решение надо строить при помощи формулы (5.2.6) (см. стр. 503). Эти функции Лежандра и связанные с ними функции Гегенбауера будут вновь рассмотрены через несколько страниц и очень детально в § 5.3 и 10.3, так как они имеют очень большое значение для наших дальнейших исследований.

Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда. В качестве упражнения в действиях с этими решениями мы выведем выражение, описывающее поведение гипергеометрического ряда, когда z стремится к единице. Обращаясь к символу Римана, указанному перед уравнением (5.2.42), мы видим, что индексы в особой точке $z = 1$ равны 0 и $c - a - b$. Применяя уравнение (5.2.46) с $a = 1$, $b = 0$, $c = \infty$, $\lambda = 0$, $\lambda' = c - a - b$, $\mu = 0$, $\mu' = 1 - c$, $\nu = a$, $\nu' = b$ (другими словами, меняя ролями особые точки 0 и 1), видим, что общим решением гипергеометрического уравнения (5.2.42) вблизи $z = 1$ является

$$AF(a, b | a + b - c + 1 | 1 - z) + B(1 - z)^{c - a - b} F(c - b, c - a | c - a - b + 1 | 1 - z).$$

Однако гипергеометрический ряд $F(a, b | c | z)$ является решением уравнения (5.2.42), и потому после аналитического продолжения он должен равняться некоторой комбинации двух решений вблизи $z = 1$. Другими словами, должно быть

$$F(a, b | c | z) = \alpha F(a, b | a + b - c + 1 | 1 - z) + \\ + \beta (1 - z)^{c - a - b} F(c - b, c - a | c - a - b + 1 | 1 - z). \quad (5.2.48)$$

Если бы мы смогли как-то определить значения коэффициентов α и β , то мы имели бы средство подсчета точного поведения $F(a, b | c | z)$ при $z = 1$ и даже за этим значением, почти вплоть до $z = 2$.

На стр. 367 мы показали, что при $b < c < a + b$

$$F(a, b | c | z) / (1 - z)^{c - a - b} \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)},$$

где мы подставили гамма-функцию вместо факториалов, чтобы a , b и c могли иметь нецелые значения. Это соотношение показывает только, что если $c < a + b$, то главный член вблизи $z = 1$ имеет вид $(1 - z)^{c - a - b}$, что позволяет определить коэффициент при нем. Конечно, имеются другие члены вида $(1 - z)^{c - a - b + 1}$, $(1 - z)^{c - a - b + 2}$ и т. д., часть которых может также стремиться к бесконечности при $z \rightarrow 1$, но в достаточной близости от $z = 1$ они «поглощаются» членом $(1 - z)^{c - a - b}$. Остальные члены можно получить при помощи формулы (5.2.48).

Так как $F(c-b, c-a | c-a-b+1 | 1-z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} 1$, то при $z \rightarrow 1$ главный член правой части равенства (5.2.48) равен $\beta(1-z)^{c-a-b}$, если только $c < a+b$. Сравнивая это с предыдущим результатом, мы видим, что

$$\beta = \Gamma(c) \Gamma(a+b-c) / [\Gamma(a) \Gamma(b)],$$

откуда определяются коэффициенты во всех членах с отрицательными степенями $1-z$.

Однако в случае $c > 1$ можно пойти дальше. Можно применить приведенную выше предельную формулу в обратном порядке, чтобы посмотреть, что будет с равенством (5.2.48) при $z \rightarrow 0$. Левая часть, конечно, при этом стремится к единице. Применяя же предельную формулу, приведенную на стр. 367 к правой части, получаем

$$1/z^{1-c} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \alpha \frac{\Gamma(a+b-c+1) \Gamma(c-1)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} + \beta \frac{\Gamma(c-a-b+1) \Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}.$$

Отсюда если $c > 1$, то оба члена в правой части должны взаимно уничтожиться. Это дает соотношение между α и β , на основании которого можно решить задачу. Подставляя уже полученное значение β и применяя свойство гамма-функции $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$, получаем

$$1/z^{1-c} \xrightarrow{z \rightarrow 0} (a+b-c) \frac{\Gamma(a+b-c) \Gamma(c-1)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \left[\alpha - \frac{\Gamma(c-a-b) \Gamma(c)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \right].$$

Чтобы это имело место при $c > 1$, выражение, стоящее в квадратных скобках, должно обратиться в нуль, откуда и получаем α . Следовательно, по крайней мере при $1 < c < a+b$ получаем полезную формулу

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b | a+b-c+1 | 1-z) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b | c-a-b+1 | 1-z), \quad (5.2.49)$$

которая позволяет продолжить решение через особую точку $z=1$. В следующем параграфе мы покажем, что это соотношение справедливо для значительно более обширной области значений c , чем мы сейчас полагали (например, для c , больших чем $a+b$). В действительности эта формула имеет место всегда, за исключением тех случаев, когда гамма-функция в числителях обращается в бесконечность.

Другие полезные формулы для гипергеометрических рядов можно получить при помощи «уравнения связи» и некоторого преобразования гипергеометрического уравнения (5.2.42). В этом уравнении мы полагаем $a=2\lambda$, $b=2\beta$, $c=\alpha+\beta+\frac{1}{2}$ и переходим от z к новой независимой переменной $u=4z(1-z)$; это дает уравнение

$$u(u-1) \frac{d^2 F}{du^2} + \left[(\alpha+\beta+1)u - \left(\alpha+\beta+\frac{1}{2} \right) \right] \frac{dF}{du} + \alpha\beta F = 0,$$

которое вновь является гипергеометрическим уравнением с новыми параметрами α , β и $\alpha+\beta+\frac{1}{2}$, вместо a , b и c . Значит, функция

$$F\left(\alpha, \beta \left| \alpha+\beta+\frac{1}{2} \right| 4z-4z^2\right)$$

является решением уравнения (5.2.42) при $a=2\lambda$, $b=2\beta$, $c=\alpha+\beta+\frac{1}{2}$ и должна выражаться через два решения вблизи $z=0$. [см. (5.2.45)]

$$AF\left(2\alpha, 2\beta \left| \alpha + \beta + \frac{1}{2} \right| z\right) + Bz^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} F\left(\beta - \alpha + \frac{1}{2}, \alpha - \beta + \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2} - \alpha - \beta \right| z\right).$$

Однако $F\left(\alpha, \beta \left| \alpha + \beta + \frac{1}{2} \right| 4z - 4z^2\right)$ является аналитической функцией z вблизи $z=0$; отсюда второе решение, имеющее точку ветвления, не может присутствовать и B равно нулю. Кроме того, так как $F=1$ при $z=0$, то A должно равняться единице. Отсюда имеем

$$F\left(2\alpha, 2\beta \left| \alpha + \beta + \frac{1}{2} \right| z\right) = F\left(\alpha, \beta \left| \alpha + \beta + \frac{1}{2} \right| 4z - 4z^2\right). \quad (5.2.50)$$

Эту формулу, связывающую значение F для 2α , 2β и z с значением F для α , β и z^2 , можно назвать *формулой удвоения* для гипергеометрической функции.

Функции Гегенбауера. Мы указали раньше, что иногда желательно иметь такую каноническую форму для трех регулярных особых точек, в которой две из них равнялись бы $+1$ и -1 , а не 0 и 1 . Так будет, в частности, если индексы при $+1$ те же, что и при -1 . Это порождает символ Римана

$$\psi = P \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -\alpha \\ -\beta & -\beta & \alpha + 2\beta + 1 \end{array} \right\} z.$$

Соответствующее уравнение

$$(z^2 - 1)\psi'' + 2(\beta + 1)z\psi' - \alpha(\alpha + 2\beta + 1)\psi = 0 \quad (5.2.51)$$

называется *уравнением Гегенбауера* (ср. с уравнением Лежандра на стр. 513). Оно является хорошей формой уравнения для ξ_2 в круговых цилиндрических и сферических координатах. Решения, конечно, можно выразить через гипергеометрические функции

$$AF\left(-\alpha, \alpha + 2\beta + 1 \left| 1 + \beta \right| \frac{1+z}{2}\right) + \\ + B(1+z)^{-\beta} F\left(-\alpha - \beta, \alpha + \beta + 1 \left| 1 - \beta \right| \frac{1+z}{2}\right)$$

или

$$aF\left(-\alpha, \alpha + 2\beta + 1 \left| 1 + \beta \right| \frac{1-z}{2}\right) + \\ + b(1-z)^{-\beta} F\left(-\alpha - \beta, \alpha + \beta + 1 \left| 1 - \beta \right| \frac{1-z}{2}\right).$$

Решение, которое будет для нас очень полезным, можно дать в различных формах:

$$T_a^\beta(z) = \frac{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{2^\beta \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} F\left(\alpha + 2\beta + 1, -\alpha \left| 1 + \beta \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right), \quad (5.2.52)$$

$$T_a^\beta(z) = \frac{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{2^\beta \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\sin(\pi\beta)} F\left(\alpha + 2\beta + 1, -\alpha \left| 1 + \beta \right| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right) - \\ - \frac{(1+z)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\sin(\pi\beta)} F\left(-\alpha - \beta, \alpha + \beta + 1 \left| 1 - \beta \right| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right),$$

причем мы применили равенства (5.2.49) и $\sin(\pi u) \Gamma(u) \Gamma(1-u) = \pi$, чтобы получить вторую форму. Функция $T_a^\beta(z)$ называется функцией Геген-

бауера. Если α не целое, T имеет точку ветвления в $z = -1$ (если только β не целое). Если α равно нулю или целое положительное, T является конечным полиномом относительно z и, конечно, аналитично при $z = \pm 1$.

Иногда применяется второе решение вблизи $z = 1$, причем это решение, умноженное на $(1 - z^2)^{\beta/2}$

$$\begin{aligned} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{1}{2}\beta} F \left(-\alpha-\beta, \alpha+\beta+1 \mid 1-\beta \mid \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \right) = \\ &= \frac{(\alpha+2\beta+1)(1-z^2)^{\frac{1}{2}\beta}}{2^{\beta}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\sin(\pi\alpha)} F \left(\alpha+2\beta+1, -\alpha \mid 1+\beta \mid \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi\alpha)} F \left(\alpha+2\beta+1, -\alpha \mid 1+\beta \mid \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \right) \right\}, \end{aligned}$$

часто называют *обобщенной функцией Лежандра* от z .

Если α равно целому $n=0, 1, 2, \dots$, то при помощи разложения многочлена и почленного сравнения можно показать, что

$$\begin{aligned} F \left(n+2\beta+1, -n \mid 1+\beta \mid \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \right) &= \\ &= (-1)^n F \left(n+2\beta+1, -n \mid 1+\beta \mid \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \right) = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{2^n \Gamma(n+\beta+1) (1-z^2)^{\beta}} \frac{d^n}{dz^n} (1-z^2)^{n+\beta} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$T_n^{\beta}(z) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+2\beta+1)}{2^{n+\beta} n! \Gamma(n+\beta+1)} (1-z^2)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} (1-z^2)^{n+\beta} \quad (5.2.53)$$

Этот многочлен можно назвать *многочленом Гегенбауера* (он отличается численным множителем от многочлена $C_n^{\beta+\frac{1}{2}}$, часто также называемого многочленом Гегенбауера).

Если β равно целому $m=0, 1, 2, \dots$, а α не таково, то, как будет показано в следующем параграфе, T_{α}^m имеет логарифмические точки ветвления при $z = \pm 1$, в то время как $(1-z^2)^{-m/2} P_n^m(z)$ аналитична во всей области $-1 \leq z \leq 1$. Наконец, если оба α и β целые положительные (или равны нулю), то $T_n^m(z) = (1-z^2)^{-m/2} P_n^m(z)$ и обе функции аналитичны в этой области изменения z . Так как

$$\frac{1}{(1-z^2)^m} \frac{d^n}{dz^n} (1-z^2)^{n+m} = (-1)^n \frac{n!}{(n+2m)!} \frac{d^{n+2m}}{dz^{n+2m}} (z^2-1)^{n+m},$$

то

$$T_n^m(z) = \frac{1}{2^{n+m} (n+m)!} \frac{d^{n+2m}}{dz^{n+2m}} (z^2-1)^{n+m};$$

эти полиномы иногда называются *тессеральными (клеточными) полиномами*. Особенно важен случай $m=0$; он настолько важен, что многочленам присваивается специальное обозначение и наименование. Функция

$$P_n(z) = T_n^0(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$$

называется *многочленом Лежандра* [см. формулу (5.2.47)]. В нашей книге эти многочлены будут в дальнейшем часто встречаться. Мы видим, что

$$T_n^m(z) = \frac{d^m}{dz^m} P_{n+m}(z).$$

В следующем параграфе нам придется много говорить об этих функциях.

В специальном случае $\beta = \pm \frac{1}{2}$, $\alpha = n = 1, 2, 3, \dots$ можно показать (при помощи прямого разложения), что многочлены T имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T_n^{-1/2}(z) &= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{ch}(n \operatorname{Ar} \operatorname{ch} z), \\ T_n^{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2/\pi}{z^2-1}} \operatorname{sh}[(n+1) \operatorname{Ar} \operatorname{ch} z]; \end{aligned} \quad (5.2.54)$$

такие многочлены называются *многочленами Чебышева*.

Отметим, между прочим, что общее решение уравнения для ξ_2 при разделении в круговых цилиндрических координатах и для ξ_3 в параболических и вытянутых и сплюснутых сфероидальных координатах

$$(z^2 - 1)\psi'' + z\psi' - \alpha^2\psi = 0$$

имеет вид

$$\psi = AT_{\alpha}^{-1/2}(z) + B\sqrt{1-z^2}T_{\alpha-1}^{1/2}(z),$$

как это показывает сравнение с уравнением для T .

Одна регулярная и одна иррегулярная особые точки. Для таких уравнений обычно располагают регулярную особую точку при $z=0$, а иррегулярную при $z=\infty$. Уравнения этого вида появляются при разделении переменных в следующих системах координат:

1. Для волнового уравнения в круговых цилиндрических ($z = k_1\xi_1$, $\kappa = X_1$), сферических ($z = k_1\xi_1$, $\psi = \sqrt{z}X_1$) и конических ($z = k_1\xi_1$, $\psi = \sqrt[3]{z}X_1$) координатах получается уравнение Бесселя

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)\psi = 0.$$

2. Для волнового уравнения в параболических цилиндрических координатах ($z = \xi_1^2/2$, $\xi_2^2/2$; $\psi = X_1, X_2$)

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left(k^2 + \frac{2\alpha}{z}\right)\psi = 0.$$

3. Для волнового уравнения в параболических координатах ($z = \xi_1^2$, ξ_2^2 , $\psi = X_1, X_2$)

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left(k^2 + \frac{2\alpha}{z} - \frac{m^2}{z^2}\right)\psi = 0;$$

это уравнение включает параболические цилиндрические функции как частный случай.

4. Для уравнения Шредингера в случае одной частицы в кулоновском поле $1/r$ в сферических координатах для радиального множителя ($z = \xi_1$, $\psi = X_1$)

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left[-E + \frac{2\alpha}{z} - \frac{n(n+1)}{z^2}\right]\psi = 0.$$

Это приводит к исследованию общего уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + p(z)\frac{d\psi}{dz} + q(z)\psi = 0, \quad p = \frac{1-\lambda-\lambda'}{z}, \quad (5.2.55)$$

$$q = -k^2 + \frac{2\alpha}{z} + \frac{\lambda\lambda'}{z^2}.$$

Это не самое общее уравнение с регулярной особой точкой при $z=0$ и иррегулярной на бесконечности. К выражениям, указанным в (5.2.55), можно было бы прибавить постоянную (к функции p), члены az и bz (к обеим p и q) и т. д. Однако эти дополнительные члены сделали бы существенную особенность решения при $z=\infty$ еще более «особой», и так как ни одно из уравнений, полученных при разделении волнового уравнения, не имеет этих дополнительных членов, то мы и не включаем их здесь. Все же некоторые более сложные случаи будут включены в упражнения!

Возвращаясь к уравнению (5.2.55), мы видим, что в силу определяющего уравнения разложения около регулярной особой точки $z=0$ имеют вид $z^\lambda u_1(z)$ и $z^{\lambda'} u_2(z)$, где u_1 и u_2 аналитичны при $z=0$. Как и раньше, мы переходим к случаю, когда одно решение аналитично, положив $\psi = z^\lambda f(z)$, так что $f(z) = Au_1(z) + Bz^{\lambda'-\lambda} u_2(z)$. Уравнение для f имеет тогда вид

$$f'' + [(1+\lambda-\lambda')/z]f' + [(2\alpha/z) - k^2]f = 0. \quad .56$$

Для исследования особой точки на бесконечности мы полагаем $z = 1/w$. Уравнение относительно аргумента w приобретает вид

$$\frac{d^2f}{dw^2} + \left[\frac{1+\lambda'-\lambda}{w} \right] \frac{df}{dw} + \left[\frac{2\alpha}{w^3} - \frac{k^2}{w^4} \right] f = 0,$$

который в соответствии с членами $2\alpha/w^3$ и k^2/w^4 указывает на иррегулярность особой точки $w=0$. Однако, полагая $f = e^{-k/w} F$, мы можем перейти к уравнению

$$F'' + \left[\frac{2k}{w^2} + \frac{1-\lambda+\lambda'}{w} \right] F' - \left[\frac{k(1+\lambda-\lambda')-2\alpha}{w^3} \right] F = 0,$$

которое имеет определяющее уравнение с одним корнем

$$2ks - [k(1+\lambda-\lambda') - 2\alpha] = 0.$$

Следовательно, имеется решение $F = w^\beta v_1(w)$, где v_1 — аналитическая при $w=0$ функция, а $\beta = [(1+\lambda-\lambda')/2] - (\alpha/k)$. Другим решением для f будет $e^{k/w} w^{\beta'} v_2(w)$, где $\beta' = [(1+\lambda-\lambda')/2] + (\alpha/k)$, а v_2 аналитична при $w=0$. Таким образом, существенная особенность при $w=0$ ($z \rightarrow \infty$) имеет вид $e^{\pm k/w} = e^{\pm kz}$.

Мы можем теперь возвратиться к уравнению (5.2.56) с аргументом z и, положив $f = e^{-kz} F(z)$ (или $\psi = z^\lambda e^{-kz} F$), можем быть уверенными, что одно из решений для F аналитично при $z=0$ и имеет точку ветвления только при $z \rightarrow \infty$. Уравнение для F с аргументом z имеет вид

$$F'' + \left[\frac{1+\lambda-\lambda'}{z} - 2k \right] F' - \left[\frac{k(1+\lambda-\lambda')-2\alpha}{z} \right] F = 0$$

и приводится к простейшей форме, если положить $z = x/2k$, $c = 1 + \lambda - \lambda'$, $a = [(1+\lambda-\lambda')/2] - (\alpha/k)$,

$$x \frac{d^2F}{dx^2} + (c-x) \frac{dF}{dx} - aF = 0; \quad (5.2.57)$$

последнее уравнение называется вырожденным или конфлюентным (полученным в результате слияния) гипергеометрическим уравнением. Это на-

менование связано с тем, что уравнение (5.2.57) получается из гипергеометрического уравнения (5.2.42) при помощи соответствующего слияния особых точек $z=1$ и $z=\infty$.

Легче увидеть слияние, если отправляться от уравнения Папперица (5.2.36) в случае $a=0$, $c=\infty$

$$\psi'' + \left[\frac{1-\lambda-\lambda'}{z} + \frac{1-\mu-\mu'}{z-b} \right] \psi' + \left[\frac{-\lambda\lambda'b}{z^2(z-b)} + \frac{\mu\mu'b}{z(z-b)^2} + \frac{\nu(1-\lambda-\lambda'-\mu-\mu'-\nu)}{z(z-b)} \right] \psi = 0.$$

Положим теперь $\lambda=0$, $1-\lambda'=c$ (здесь c — новая постоянная, а не аффикс третьей особой точки, расположенной на бесконечности), $\mu'=-b$ и $\mu=a-\nu$ (здесь a тоже новая постоянная, а не аффикс первой особой точки). Мы приходим теперь к вырожденному гипергеометрическому уравнению (5.2.57), если заставим вторую особую точку стремиться к совпадению с третьей на бесконечности, то есть если положим $b \rightarrow \infty$. При этом в процессе совпадения особых точек один из индексов в каждой из них (то есть μ' и ν') также стремится к бесконечности.

Одно из решений уравнения (5.2.57), аналитичное при $x=0$, можно найти подстановкой ряда общего вида $F = \sum a_n x^n$ в уравнение. Коэффициент при x^n порождает рекурсивную формулу

$$(n+1)(n+c)a_{n+1} - (n+a)a_n = 0, \quad (5.2.58)$$

которая вновь является двучленной и имеет простое решение. Следовательно, аналитическое при $z=0$ решение дается рядом

$$F(a|c|x) = 1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots, \quad (5.2.59)$$

который называется *вырожденным гипергеометрическим рядом*. Этот ряд сходится при $-\infty < x < \infty$. Применяя методы, приведенные на стр. 367, можно получить сведения об асимптотическом поведении этого ряда. Для больших значений z превалируют члены с высшими степенями z . Но в качестве первого приближения относительно z/n , если a и c целые, член ряда с z^n (n большое) приобретает вид

$$\frac{(c-1)!(a+n)!}{n!(a-1)!(c+n)!} z^n \simeq \frac{(c-1)!}{(a-1)!} \frac{n^{a-c}}{n!} z^n \simeq \frac{(c-1)!}{(a-1)!} \frac{z^n}{(n-a+c)!}.$$

Следовательно, для достаточно больших z ряд аппроксимируется рядом

$$\frac{(c-1)!}{(a-1)!} \sum_n \frac{z^n}{(n-a+c)!} \simeq \frac{(c-1)!}{(a-1)!} z^{a-c} \sum_m \frac{z^m}{m!} = \frac{(c-1)!}{(a-1)!} z^{a-c} e^z.$$

Подставляя гамма-функцию вместо факториалов, получаем в результате, что

$$F(a|c|z)/z^{a-c}e^z \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}. \quad (5.2.60)$$

В следующем параграфе мы покажем, что эта асимптотическая формула справедлива для более широкой области значений a , c и z , чем это допускалось при нашем выводе.

Вспоминая связь между функциями F и ψ , мы видим, что общее решение уравнения (5.2.55) вблизи $z=0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \phi = & A e^{-kz\lambda} F\left(\frac{1+\lambda-\lambda'}{2} - \frac{a}{k} \middle| 1+\lambda-\lambda' \middle| 2kz\right) + \\ & + B e^{-kz\lambda'} F\left(\frac{1-\lambda+\lambda'}{2} - \frac{a}{k} \middle| 1-\lambda+\lambda' \middle| 2kz\right), \end{aligned} \quad (5.2.61)$$

если только $\lambda - \lambda'$ не целое; в последнем случае второе решение содержит логарифмический член и должно быть получено при помощи формулы (5.2.6).

Из этого общего решения можно также видеть, что вторым решением вырожденного гипергеометрического уравнения является

$$x^{1-c} F(a - c + 1 | 2 - c | x).$$

Однако можно видеть также и то, что если в уравнении (5.2.57) положить $x = -\xi$, $F = e^{-\xi} F_2$, то уравнение для F_2 снова определяет вырожденную гипергеометрическую функцию. Другими словами, еще одним решением уравнения (5.2.57) будет $e^x F(c - a | c | -x)$. Однако это не третье независимое решение, так как разложение в ряды и умножение рядов показывают, что

$$e^x F(c - a | c | -x) = F(a | c | x). \quad (5.2.62)$$

Между прочим, сравнение с формулой (5.2.60) показывает, что асимптотическая формула, которая может быть удовлетворительной для z больших положительных, может в то же время быть совершенно неудовлетворительной для z больших отрицательных. Действительно, поскольку соотношение (5.2.62) справедливо, а (5.2.60) имеет место при $\text{Re } z \rightarrow \infty$, то

$$F(a | c | z) / (-z)^{-a} \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}. \quad (5.2.63)$$

Однако мы отложим дальнейшее обсуждение этого вопроса до следующего параграфа, когда мы будем подготовлены к этому значительно лучше.

Сравнение уравнений на стр. 518 с равенством (5.2.61) показывает, что общим решением уравнения Бесселя является

$$\psi = e^{-iz} \left[Az^n F\left(\frac{1}{2} + n | 1 + 2n | 2iz\right) + Bz^{-n} F\left(\frac{1}{2} - n | 1 - 2n | 2iz\right) \right]$$

или, применяя соотношение (5.2.62),

$$\psi = Ae^{-iz} z^n F\left(\frac{1}{2} + n | 1 + 2n | 2iz\right) + Be^{iz} z^{-n} F\left(\frac{1}{2} - n | 1 - 2n | -2iz\right).$$

Общее решение уравнения, получающегося при разделении переменных в волновом уравнении в параболических координатах, включающее решение уравнения, получающегося при разделении в параболических цилиндрических координатах, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = Ae^{-ikz} z^m F\left(\frac{1}{2} + m + \frac{ia}{k} | 1 + 2m | 2ikz\right) + \\ + Be^{ikz} z^{-m} F\left(\frac{1}{2} - m - \frac{ia}{k} | 1 - 2m | -2ikz\right), \end{aligned}$$

а общее решение уравнения Шредингера для частицы в кулоновом потенциальном поле при $E = -k^2$ таково:

$$\begin{aligned} \psi = Ae^{-ikz} z^n F\left(n + 1 + \frac{ia}{k} | 2n + 2 | 2ikz\right) + \\ + Be^{ikz} z^{-n-1} F\left(-n - \frac{ia}{k} | -2n | -2ikz\right). \end{aligned}$$

Много других функций (таких, как функция ошибок и неполная гамма-функция) можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию.

Асимптотические ряды. Хотя мы отложили полное рассмотрение поведения вырожденной гипергеометрической функции вблизи $z = \infty$, мы ис-

следуем разложение решений в надлежащим образом выбранные ряды вблизи особой точки $z = \infty$. Совершая в уравнении (5.2.57) преобразование $w = 1/z$, мы видим, что вблизи бесконечности вырожденное гипергеометрическое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 F}{dw^2} + \left[\frac{2-c}{w} + \frac{1}{w^2} \right] \frac{dF}{dw} - \frac{a}{w^3} F = 0. \quad (5.2.64)$$

Хотя бесконечность — иррегулярная особая точка, все же имеется одно решение $s = a$ определяющего уравнения. Подставляя $F = \sum a_n w^{a+n}$ в уравнение (5.2.64), мы вновь найдем двучленную рекурсивную формулу для a_n

$$(n+1)a_{n+1} + (n+a)(n+a-c+1)a_n = 0.$$

Отсюда разложение F в ряд вблизи $w = 0$ ($z = \infty$) имеет вид

$$F_1 = Az^{-a} \left[1 - \frac{a(a-c+1)}{1!} \frac{1}{z} + \frac{a(a+1)(a-c+1)(a-c+2)}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} - \dots \right], \quad (5.2.65)$$

где мы опять вместо w подставили $1/z$. [Этот ряд следует сравнить с формулой (5.2.63).] Сравнение с формулой (5.2.60) приводит к мысли, что второе решение должно иметь вид $w^{c-a} e^{1/w} \sum b_n w^n$. При подстановке для b_n получается двучленная рекурсивная формула, подобная приведенной выше. Отсюда вторым решением, построенным в виде ряда, вблизи $z = \infty$ является

$$F_2 = Bz^{a-c} e^z \left[1 + \frac{(1-a)(c-a)}{1!} \frac{1}{z} + \frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots \right].$$

Главное несчастье с этими двумя рядами для решений состоит в том, что *они нигде не сходятся*, кроме точки $z = \infty$. Однако эта расходимость особого типа, так как если z большое, но конечное, то ряд *сначала сходится*, а затем, если брать все больше и больше членов, *в конце концов расходится*. Точнее говоря, оказывается, что разность $\Delta_n(z)$ между F_1 и суммой первых n членов ряда (5.2.65) при возрастании n сначала уменьшается, а затем беспредельно возрастает. Для малых значений z наименьшее значение Δ_n получается при относительно малом значении n , и это наименьшее значение относительно велико. Если z возрастает, то минимум Δ_n достигается при все больших и больших значениях n и значение этого минимума становится все меньше и меньше. Поэтому для любого конечного значения z возможно получить довольно точное значение F , взяв конечное число членов, в то время как повышение числа членов даст менее точный результат. Пока z конечное, имеется некоторая непреодолимая ошибка в результате подсчета, даже если взято оптимальное число членов, однако эта ошибка быстро уменьшается с возрастанием z . Во многих интересных случаях эта непреодолимая ошибка во всяком случае меньше 0,1, когда z больше 10. Во многих таких случаях один первый член разложения дает удовлетворительное приближение при $z > 20$.

Такие ряды, которые расходятся, но могут быть применены для подсчета значений, не точно равных «истинным» значениям, но быстро приближающихся к «истинным» значениям при возрастании z , называются *асимптотическими рядами*. Они были детально исследованы в § 4.6. В некоторых отношениях они оказываются полезней сходящихся рядов, если с ними обращаться с тактом и пониманием. Кое-что необходимое для понимания будет приведено в следующем параграфе; такт же должен проявить тот, кто их применяет.

Две регулярные, одна иррегулярная особые точки. Уравнение для ξ_1 и ξ_2 в эллиптических цилиндрических координатах имеет вид ($\psi = X_1, X_2; z = \xi_1/d, \xi_2$)

$$(z^2 - 1)\psi'' + z\psi' + (h^2z^2 - b)\psi = 0,$$

а уравнения для ξ_1 и ξ_2 в вытянутых и сплюснутых сфероидальных координатах — вид ($X = (z^2 - 1)^{a/2}\psi$)

$$(z^2 - 1)\psi'' + 2(a + 1)z\psi' + (h^2z^2 - b)\psi = 0. \quad (5.2.66)$$

Первое уравнение является частным случаем второго ($a = -\frac{1}{2}$). Чтобы выяснить, каковы особые точки, перепишем второе уравнение так:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\frac{a+1}{z-1} + \frac{a+1}{z+1} \right) \frac{d\psi}{dz} + \left(h^2 + \frac{h^2-b}{z^2-1} \right) \psi = 0.$$

Оно имеет регулярные особые точки $z = \pm 1$ с индексами 0 и $-a$ в обеих и иррегулярную особую точку при $z = \infty$. Это уравнение не является самым общим из тех, которые имеют две регулярные и одну иррегулярную особые точки, но оно встретилось в нашей работе. Особые точки находятся в стандартных положениях (мы могли бы поместить регулярные точки в 0 и 1, но ± 1 удобнее), и одно решение в каждой регулярной точке аналитично, как мы раньше требовали для канонического вида; таким образом, мы будем рассматривать уравнение (5.2.66) в качестве канонического вида уравнений этого типа.

Если подставить в уравнение (5.2.66) ряд по степеням z , получится трехчленная рекурсивная формула

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + [b - n(n+2a+1)]a_n - h^2a_{n-2} = 0,$$

из которой можно получить два фундаментальных решения около регулярной точки $z = 0$. Разложения в ряды около особых точек по степеням $1-z$ или $1+z$ порождают четырехчленные рекурсивные формулы, которые еще труднее для подсчета и анализа.

В таких случаях мы пытаемся произвести разложение в ряд по соответствующим выбранным функциям, а не в ряд по степеням $1 \pm z$. Например, преобразовав независимое переменное в случае эллиптических цилиндрических координат ($a = -1/2$), мы можем получить

$$z = \cos \varphi, \quad \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + (b - h^2 \cos^2 \varphi) \psi = 0, \quad (5.2.67)$$

$$z = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right), \quad x = e^{i\varphi},$$

$$x^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + x \frac{d\psi}{dx} + \left(\frac{h^2}{4} x^2 + \frac{h^2}{2} - b + \frac{h^2}{4} \frac{1}{x^2} \right) \psi = 0.$$

Первое из этих уравнений называется *уравнением Матье*. Второе очень интересно тем, что оно по форме алгебраическое, и переход от z к x так изменил особые точки, что теперь имеется две *иррегулярные особые точки*, одна при 0, другая при ∞ .

С помощью первой формы уравнения можно получить интересное свойство решений. Так как функция $\cos^2 \varphi$ периодична по φ с периодом π , то если $\psi(\varphi)$ является решением уравнения, то и $\psi(\varphi + \pi)$ также. Например, если ψ_1 и ψ_2 — два независимых решения, то будем иметь

$$\psi_1(\varphi + \pi) = \alpha_{11}\psi_1(\varphi) + \alpha_{12}\psi_2(\varphi)$$

и

$$\psi_2(\varphi + \pi) = \alpha_{21}\psi_1(\varphi) + \alpha_{22}\psi_2(\varphi).$$

где α — постоянные, определяемые параметрами b и h и частным выбором решений ψ_1 и ψ_2 .

Отсюда можно показать, что возможно найти решение уравнения (5.2.67), равное произведению $e^{is\varphi}$ на функцию, периодическую по φ . Это решение (назовем его Ψ), конечно, должно быть некоторой комбинацией ψ_1 и ψ_2 , $\Psi = A\psi_1(\varphi) + B\psi_2(\varphi) = e^{is\varphi} F(\varphi)$, где функция F периодична по φ с периодом π , то есть $F(\varphi + \pi) = F(\varphi)$. Применяя свойства функций ψ , имеем, что

$$\begin{aligned} e^{is(\varphi+\pi)} F(\varphi + \pi) &= A\psi_1(\varphi + \pi) + B\psi_2(\varphi + \pi) = \\ &= (A\alpha_{11} + B\alpha_{21})\psi_1(\varphi) + (A\alpha_{12} + B\alpha_{22})\psi_2(\varphi) = \\ &= e^{\pi is} e^{is\varphi} F(\varphi) = e^{\pi is} [A\psi_1(\varphi) + B\psi_2(\varphi)]. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $\psi_1(\varphi)$ и $\psi_2(\varphi)$, мы получаем систему двух уравнений для A , B и $e^{\pi is}$

$$A(\alpha_{11} - e^{\pi is}) + B\alpha_{21} = 0, \quad A\alpha_{12} + B(\alpha_{22} - e^{\pi is}) = 0.$$

Чтобы она имела ненулевое решение, определитель из коэффициентов должен равняться нулю

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - e^{\pi is} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - e^{\pi is} \end{vmatrix} = 0.$$

Получилось квадратное уравнение относительно $e^{\pi is}$ с двумя корнями, соответствующими двум независимым решениям уравнения (5.2.66). Теорема о существовании таких решений уравнения (5.2.67) называется *теоремой Флоке*.

Для второй формы уравнения (5.2.67) теорема Флоке устанавливает, что можно выбрать два независимых решения, равных произведению x^s ($x = e^{i\varphi}$) на ряд Лорана по x^2 , так как ряд Лорана по x^2 содержит все положительные и отрицательные степени x^2 и потому одновременно является рядом Фурье по 2φ . Такой ряд периодичен по φ с периодом π , как и должно быть, согласно предыдущему, и может представлять функцию вблизи обеих иррегулярных особых точек $x=0$ и $x=\infty$. Поэтому мы берем в качестве решения

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{s+2n} = e^{is\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2in\varphi}. \quad (5.2.68)$$

Подставляя этот ряд во второе уравнение (5.2.67), мы приходим к основной рекурсивной формуле

$$\begin{aligned} h^2 a_{n+1} + \left[2h^2 - 4b + 16 \left(n + \frac{1}{2}s \right)^2 \right] a_n + h^2 a_{n-1} &= 0, \\ \delta^2(a_n) + \frac{4}{h^2} \left[h^2 - b + 4 \left(n + \frac{1}{2}s \right)^2 \right] a_n &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.69)$$

Это — трехчленная рекурсивная формула с неизвестными a_n и s . Было бы желательней совершить другое преобразование зависимой и независимой переменных, чтобы получить двучленную рекурсивную формулу. К несчастью, как будет показано позже в этом параграфе, такой приятный результат невозможен для столь сложных уравнений, и потому мы принуждены взяться за анализ трехчленных рекурсивных формул.

Если мы начнем с произвольно выбранных значений a_0 , a_1 , и s , то мы можем подсчитать все другие a для положительных и отрицательных n . Но в этом случае коэффициенты a не будут обязательно уменьшаться

с возрастанием n , так что ряд, вообще говоря, не будет сходиться. Только для некоторых значений s и a_1/a_0 ряд будет сходиться, и нам надо найти путь подсчета этих значений.

Непрерывные дроби. Прежде всего, конечно, мы должны убедиться в том, что ряд *может* сходиться для некоторых значений a_1/a_0 и s . Для этого мы подсчитаем значение a_n/a_{n-1} для больших положительных n и a_n/a_{n+1} для больших отрицательных n . Если эти значения с достаточной скоростью стремятся к нулю при $n \rightarrow \pm \infty$, то можно быть уверенным в сходимости ряда при $0 < x < \infty$. Однако

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{-h^2}{16[n + (s/2)]^2 + 2h^2 - 4b + h^2 a_{n+1}/a_n}, \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{-h^2}{16[n + (s/2)]^2 + 2h^2 - 4b + h^2 a_{n-1}/a_n}. \end{aligned} \quad (5.2.70)$$

Первое из этих равенств показывает, что для больших положительных n отношение a_n/a_{n-1} стремится к нулю, как $1/n^2$, если только отношение a_{n+1}/a_n ограничено, так как тогда для достаточно больших n член $16[n + (s/2)]^2$ превалирует над всеми остальными членами знаменателя и $n^2 a_n/a_{n-1} \rightarrow -h^2/16$. Применение метода, приведенного на стр. 367, показывает, что для больших значений x (т. е. для φ , больших по модулю и расположенных на отрицательной мнимой полуоси) функция ϕ приблизительно пропорциональна $x^s \cos(hx/4)$.

Подобным образом второе равенство (5.2.70) показывает, что если a_{n-1}/a_n ограничено для больших отрицательных n , то $n^2 a_n/a_{n+1} \rightarrow -h^2/16$. Отсюда для очень малых x (для φ больших по модулю и расположенных на положительной мнимой полуоси) ϕ приблизительно пропорциональна $x^s \cos(h/4x)$. Однако нам надо еще узнать, как подсчитывать отношение a_n/a_{n-1} для малых значений n , а также, как определять нужные значения s .

Тем не менее равенства (5.2.70) дают способ стать на правильный путь. Если мы не можем начать с a_0 , a_1 и идти вперед, то, может быть, можно начать с очень больших значений n и идти назад. Предположим, что мы начинаем с настолько большого значения n , что a_{n+1}/a_n очень близко от $-h^2/16[n + (s/2)]^2$. Подстановка в первое равенство дает почти точное выражение для a_n/a_{n-1} ; подстановка его в аналогичную формулу для a_{n-1}/a_{n-2} дает еще более точное выражение для a_{n-1}/a_{n-2} и т. д., так что мы приходим к значению

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= \frac{-h^2}{16\left(1 + \frac{1}{2}s\right)^2 + 2h^2 - 4b} - \frac{h^4}{16\left(2 + \frac{1}{2}s\right)^2 + 2h^2 - 4b} - \\ &\quad - \frac{h^4}{16\left(3 + \frac{1}{2}s\right)^2 + 2h^2 - 4b} - \dots \end{aligned}$$

Подобным образом применение второго равенства для отрицательных n дает нам

$$\begin{aligned} \frac{a_{-1}}{a_0} &= \frac{-h^2}{16\left(1 - \frac{1}{2}s\right)^2 + 2h^2 - 4b} - \frac{h^4}{16\left(2 - \frac{1}{2}s\right)^2 + 2h^2 - 4b} - \\ &\quad - \frac{h^4}{16\left(3 - \frac{1}{2}s\right)^2 + 2h^2 - 4b} - \dots \end{aligned}$$

Эти выражения называются *непрерывными дробями*. На вопросы об их сходимости можно ответить, применяя соответствующие правила для рядов.

Применение уравнения (5.2.69) для $n=0$ дает формулу, связывающую a_1/a_0 и a_{-1}/a_0 ,

$$s^2 = b - \frac{h^2}{4} \left[2 + \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_{-1}}{a_0} \right]. \quad (5.2.71)$$

Эта формула вместе с двумя предыдущими приводит к уравнению, из которого можно определить s через b и h . Подсчитаем непрерывные дроби для предполагаемого значения s и затем проверим результат при помощи равенства (5.2.71). Если оно не удовлетворится точно, возьмем квадратный корень из правой части равенства за новое значение s и подставим его в непрерывные дроби и т. д. Если только первоначальный выбор не слишком плох, то этот процесс последовательных подстановок быстро сходится и значение, верное с точностью до пяти или шести значащих цифр, можно обычно получить меньше чем за дюжину шагов.

Конечно, для малого h этот итеративный процесс можно осуществить аналитически. С точностью до первого порядка относительно h^2 имеем $s = \sqrt{b} - (h^2/4\sqrt{b})$. Подставляя это в обе непрерывные дроби (и опуская в них члены с h^4), получаем

$$s^2 \simeq b - \frac{1}{2} h^2 + \frac{h^4/64}{1 + \sqrt{b}} + \frac{h^4/64}{1 - \sqrt{b}}$$

или

$$s \simeq \sqrt{b} \left(1 - \frac{h^2}{4b} - \frac{h^4}{64b^2} \frac{2-3b}{1-b} \right),$$

если только b не близко к 1; в противном случае нужно включить высшие степени h^2 .

Заметим, что из симметрии соотношения (5.2.71) и непрерывных дробей [или из формулы (5.2.68)] следует, что если s является решением, то и $-s$ также; также и $\pm s \pm 2m$, где m любое целое число, является решением.

Если s подсчитано, то a_1 и a_{-1} можно выразить через a_0 (которое можно положить равным 1), а остальное a можно подсчитать при помощи вспомогательных непрерывных дробей

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-h^2}{16\left(\frac{1}{2}s+n\right)^2 + 2h^2 - 4b - \frac{h^4}{16\left(\frac{1}{2}s+n+1\right)^2 + 2h^2 - 4b - \dots}},$$

$$\frac{a_{-n}}{a_{-n+1}} = \frac{-h^2}{16\left(\frac{1}{2}s-n\right)^2 + 2h^2 - 4b - \frac{h^4}{16\left(\frac{1}{2}s-n-1\right)^2 + 2h^2 - 4b - \dots}}$$

и тем самым вычислить весь ряд. Соответствующая функция

$$\mathcal{S}(b, h, e^{i\varphi}) = e^{is\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2in\varphi}, \quad (5.2.72)$$

включающая эти значения s и a , является одним из решений уравнения (5.2.66). Другое решение получается при противоположном знаке s и перемене мест a_n и a_{-n}

$$\mathcal{S}(b, h, e^{-i\varphi}) = e^{-is\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-2in\varphi};$$

оно комплексно сопряжено с первым. Соответствующие вещественные функции получаются при сложении или вычитании

$$\begin{aligned} Se(b, h; z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos[(s+2n)\varphi], \quad z = \cos \varphi, \\ So(b, h; z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sin[(s+2n)\varphi]. \end{aligned} \quad (5.2.73)$$

Эти функции четны или нечетны относительно $\varphi=0$, но не периодичны по φ с периодом π или 2π , если только s не целое.

Для некоторых областей значений b (например, для отрицательных b или для b , близких к 1, 4, 9 и т. д.) s оказывается комплексным числом. В этом случае вещественные решения Se и So имеют несколько более сложный вид. При увеличении h увеличивается также область значений b , где s комплексно. Эти области называются *областями неустойчивости* решений, так как вещественный показательный множитель, присутствующий тогда в решениях, становится как угодно большим для больших z , положительных или отрицательных.

Определитель Хилла. Прежде чем продолжить наше исследование решения уравнения Матье, мы рассмотрим совершенно иной метод подсчета s и коэффициентов a_n , успех которого проистекает из особенной симметрии рекурсивных формул (5.2.69). Эти формулы образуют, конечно, систему однородных уравнений первой степени относительно a_n (в бесконечном числе, поскольку число коэффициентов a_n бесконечно). Чтобы ее можно было решить и выразить, например, a_n через a_0 , определитель из коэффициентов при неизвестных a_n должен равняться нулю. Он является бесконечным определителем, так что надо проследить за его сходимостью. Однако для улучшения сходимости можно до образования определителя разделить n -ю рекурсивную формулу на $2h^2 - 4b + 16n^2$. Получающийся определитель

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{(s+2)-\alpha^2}{2^2-\alpha^2} & \frac{\beta^2}{2^2-\alpha^2} & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \frac{\beta^2}{1^2-\alpha^2} & \frac{(s+1)^2-\alpha^2}{1^2-\alpha^2} & \frac{\beta^2}{1^2-\alpha^2} & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \frac{\beta^2}{-\alpha^2} & \frac{\sigma^2-\alpha^2}{-\alpha^2} & \frac{\beta^2}{-\alpha^2} & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \frac{\beta^2}{1^2-\alpha^2} & \frac{(s-1)^2-\alpha^2}{1^2-\alpha^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \quad (5.2.74)$$

где $\sigma = \frac{1}{2}s$, $\alpha^2 = \frac{1}{4}b - \frac{1}{8}h^2$ и $\beta = h/4$, называется *определителем Хилла*.

Нам остается лишь разрешить уравнение $\Delta(s) = 0$ относительно s !

Замечательным является то, что из-за периодического характера зависимости от α , устанавливающего связь Δ с тригонометрическими функциями, такое решение возможно. Прежде всего, упростив наш опре-

делитель при помощи умножения n -й строки (считая от строки $n=0$) на $(n^2 - \alpha^2)/[(\sigma + n)^2 - \alpha^2]$, получим новый определитель $D(\sigma)$, где

$$\Delta(s) = D(\sigma) \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma + n)^2 - \alpha^2}{n^2 - \alpha^2} = D(\sigma) \frac{\sigma^2 - \alpha^2}{-\alpha^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - \{(\sigma + \alpha)/n\}^2] [1 - \{(\sigma - \alpha)/n\}^2]}{[1 - (\alpha/n)^2]^2}.$$

Определитель $D(\sigma)$ имеет вдоль главной диагонали последовательность единиц, на обеих соседних диагоналях — последовательность вида $\beta^2/[(\sigma + n)^2 - \alpha^2]$, а все остальные элементы равны нулю. На основании формулы (4.3.9) мы видим, что

$$\Delta(s) = -D(\sigma) \frac{\sin \pi(\sigma + \alpha) \sin \pi(\sigma - \alpha)}{\sin^2(\pi\alpha)} = D(\sigma) \frac{\sin^2(\pi\alpha) - \sin^2(\pi\sigma)}{\sin^2(\pi\alpha)}; \quad (5.2.75)$$

это соотношение уже говорит кое-что о периодической зависимости от α и σ .

Однако определитель $D(\sigma)$ также имеет определенную периодичность по σ и простые полюсы при $\sigma = \pm n \pm \alpha$, порожденные элементами $\beta^2/[(\sigma + n)^2 - \alpha^2]$. При этом полюсы $D(\sigma)$ расположены только в этих точках, и к этой функции, очевидно, применимы рассуждения стр. 360—364. Мы сперва вычтем функцию, имеющую такие же полюсы,

$$K(\sigma) = D(\sigma) - C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma + n)^2 - \alpha^2} = D(\sigma) + \frac{C}{2\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{\sigma + \alpha + n} - \frac{1}{\sigma - \alpha + n} \right],$$

где C равно вычету в каждом полюсе D . Однако подобно тому как мы пришли к соотношению (4.3.7) (см. задачу 4.24, стр. 449), мы получим

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2x}{x^2 - 4} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + n},$$

так что функцию $K(\sigma)$ можно переписать. Эта функция

$$K(\sigma) = D(\sigma) + \frac{\pi C}{2\alpha} [\operatorname{ctg} \pi(\sigma + \alpha) - \operatorname{ctg} \pi(\sigma - \alpha)]$$

не имеет полюсов ни для одного значения s и ограничена при $s \rightarrow \infty$. По теореме Лиувилля (стр. 360) она должна быть постоянной, и, полагая $\sigma \rightarrow \infty$, мы видим, что постоянная K равна единице. Отсюда получаем довольно удивительный результат

$$D(\sigma) = 1 - \frac{\pi C}{2\alpha} [\operatorname{ctg} \pi(\sigma + \alpha) - \operatorname{ctg} \pi(\sigma - \alpha)].$$

Возвращаясь к равенству (5.2.75), мы видим, что

$$\Delta(s) = 1 - \frac{\sin^2(\pi\sigma)}{\sin^2(\pi\alpha)} - \frac{\pi C}{\alpha} \operatorname{ctg}(\pi\alpha),$$

где единственной еще не определенной постоянной является постоянная C , вычет в полюсах $D(\sigma)$. Его можно подсчитать, положив $\sigma = 0$; получится $(\pi C/\alpha) \operatorname{ctg}(\pi\alpha) = 1 - \Delta(0)$. Следовательно, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем, что функциональная зависимость исходного опреде-

лителя от s относительно проста

$$\Delta(s) = \Delta(0) - \frac{\sin^2(\pi s/2)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{b - \frac{1}{2}h}\right)}, \quad (5.2.76)$$

где

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \frac{h^2}{144 + 2h^2 - 4b} & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \frac{h^2}{64 + 2h^2 - 4b} & 1 & \frac{h^2}{64 + 2h^2 - 4b} & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \frac{h^2}{16 + 2h^2 - 4b} & 1 & \frac{h^2}{16 + 2h^2 - 4b} & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \frac{h^2}{2h^2 - 4b} & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{16 + 2h^2 - 4b} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

представляет собой сходящийся определитель, не зависящий от s . Так как $\Delta(s)$ должно равняться нулю, то соотношение (5.2.71), из которого определяется s , равносильно уравнению

$$\sin^2(\pi s/2) = \Delta(0) \sin^2[\pi\sqrt{b - (h^2/2)}/2].$$

Функции Матье. Теперь мы готовы вновь обратиться к нашему предыдущему исследованию допустимых значений s и решений S . Величина

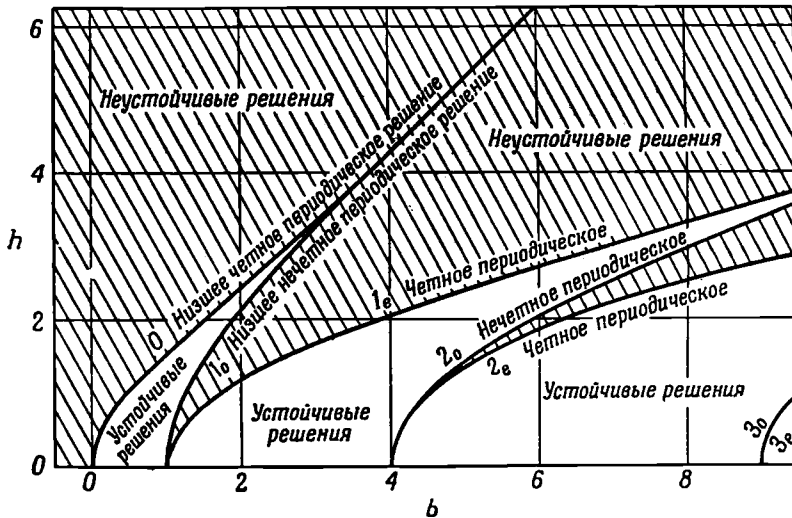


Рис. 5.4. Значения констант разделения для периодических решений уравнения Матье.

$\Delta(0) \sin^2[\pi\sqrt{b - (h^2/2)}/2]$ является периодической функцией $\alpha = \sqrt{b - (h^2/2)}/2$ с периодом 1. Для $h=0$ будет $\Delta(0) = 1$ и $s = \pm 2\alpha = \pm \sqrt{b}$; это — предельный случай, когда уравнение (5.2.66) приводится к виду $(d^2\psi/d\varphi^2) + b\psi = 0$. Если $b - (h^2/2)$ достаточно большое отрицательное, то $\Delta(0) \sin^2(\pi\alpha)$ отрицательно и s чисто мнимое. Вся область значений h и b на рис. 5.4,

лежащая слева от линии 0 и заштрихованная, соответствует неустойчивым решениям с вещественным показателем множителем.

Для некоторого значения b , зависящего от h и изображаемого на рис. 5.4 кривой 0, произведение $\Delta(0) \sin^2(\pi z)$ равно нулю, так что и s равно нулю. В этом случае решение $\mathcal{S}(b, h; e^{i\varphi})$ вещественно, симметрично по φ и периодически по φ с периодом π [так как $a_n = a_{-n}$ и $\mathcal{S}$ является рядом Фурье по $\cos(2n\varphi)$]. Эта функция называется *функцией Матье нулевого порядка* и обозначается специальным символом

$$Se_0(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi), \quad z = \cos \varphi,$$

где B пропорциональны a , но подобраны так, что $Se_0(h, 1) = 1$. Если $s = 0$, то два решения $\mathcal{S}(b, h; e^{i\varphi})$ и $\mathcal{S}(b, h; e^{-i\varphi})$ равны и второе решение, независимое от Se_0 , надо находить при помощи формулы (5.2.6). Оно содержит логарифмический член и потому не периодически по φ .

В области изменения b, h , которой на рис. 5.4 соответствует незаштрихованная область между линиями 0 и 1_0 , выражение $\Delta(0) \sin^2(\pi z)$ меньше единицы, и потому уравнение для s имеет решение, которое вещественно и меньше единицы. Функции Se и So , данные формулами (5.2.73), являются независимыми решениями, а наилучший способ подсчета s и коэффициентов a_n основан на применении непрерывных дробей в соотношении (5.2.71).

Для множества значений b, h , изображаемого кривой 1_0 , произведение $\Delta(0) \sin^2(\pi z)$, а потому и s равно единице. Оказывается, что $a_n = -a_{-n-1}$, так что оба решения $\mathcal{S}(b, h, e^{i\varphi})$ и $\mathcal{S}(b, h, e^{-i\varphi})$ пропорциональны функции

$$So_1(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi,$$

которая называется *нечетной функцией Матье первого порядка*. За ним, в следующей заштрихованной области, $\Delta(0) \sin^2(\pi z)$ больше единицы, s комплексно и имеет значение $1 + \varepsilon i$ и, следовательно, решение неустойчиво. На правом краю этой области неустойчивости s опять равно единице, но в то же время $a_n = a_{-n-1}$, так что оба решения $\mathcal{S}$ пропорциональны

$$Se_1(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \cos(2n+1)\varphi$$

четной функции Матье первого порядка. Второе решение вновь имеет логарифмический член.

Такое поведение продолжается и для возрастающих значений b : чередующиеся области устойчивости и неустойчивости, разделяемые граничными линиями, соответствующими тому специальному случаю, когда s целое и когда одно решение периодически и является либо четной функцией (разлагающейся в ряд Фурье по косинусам), либо нечетной функцией (разлагающейся по синусам), а другое решение непериодично и содержит логарифм. Для остальной части области изменения b, h , вне граничных линий, решение непериодично, колеблется и имеет вид (5.2.73) или же непериодично, неустойчиво и является произведением комплексного показателя множителем на ряд Фурье.

Во многих случаях, имеющих физический интерес, координата, соответствующая φ , является периодической и повторяется при возрастании φ на 2π . В этом случае единственно пригодными являются периодические решения, названные нами *функциями Матье*, для целых

значений s (одна нечетная функция So_m и одна четная функция Se_m для каждого целого значения $s = m$). Если h обращается в нуль, то Se_m становится равной $\cos m\varphi$, а So_m — равной $\sin m\varphi$.

Чтобы подсчитать допустимые значения константы разделения b , соответствующей этим периодическим функциям, можно вместо определителя Хилла применять формулу (5.2.71), включающую непрерывные дроби, причем, в отличие от предыдущего, находя b при данном s . Полагая s равным целому m , находим при помощи последовательных приближений решение уравнения

$$b = m^2 + \frac{1}{4} h^2 \left[2 + \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_{-1}}{a_0} \right],$$

где отношения a_1/a_0 , a_{-1}/a_0 приведены на стр. 526 в виде непрерывных дробей. Для каждого значения m , за исключением $m=0$, имеется два различных решения, из которых одно порождает ряд по синусам, а другое — по косинусам (т. е. $a_n = \pm a_{2m-n}$).

Если $s=0$, то $a_1/a_0 = a_{-1}/a_0$, и мы решаем уравнение

$$2b = h^2 - \frac{h^4}{16 + 2h^2 - 4b} - \frac{h^4}{16 \cdot 4 + 2h^2 - 4b} - \dots;$$

отсюда

$$Se_0(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos 2n\varphi, \quad B_{2n} = a_n / \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

где коэффициенты B нормированы так, что $Se_0 = 1$ при $\varphi = 0$. Соответствующее значение b в этом случае можно обозначить $be_0(h)$.

Однако если мы интересуемся только функциями Матье, т. е. периодическими решениями, то мы можем значительно упростить выкладки, используя тот факт, что решения являются суммами рядов Фурье. Преобразуем первое из уравнений (5.2.67) в

$$(d^2\psi/d\varphi^2) + \left(b - \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h^2 \cos 2\varphi \right) \psi = 0.$$

Как мы показали, имеется четыре различных типа периодических решений этого уравнения:

I. Четные решения периода π , $s =$ целому четному $= 2m$, соответствующее значение $b = be_{2m}$

$$Se_{2m}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi).$$

II. Четные решения периода 2π , $s =$ целому нечетному $= 2m + 1$, для $b = be_{2m+1}$

$$Se_{2m+1}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \cos(2n+1)\varphi.$$

III. Нечетные решения периода π , $s =$ целому четному $= 2m$, для $b = be_{2m}$

$$So_{2m}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sin(2n\varphi).$$

IV. Нечетные решения периода 2π , $s =$ нечетному целому $= 2m + 1$, для $b = b_{0_{2m+1}}$

$$So_{2m+1}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi,$$

где коэффициенты B зависят от h , m (то есть от значения s или от связанного с ним значения b) и, конечно, от n .

Подставляя ряд Фурье типа I в дифференциальное уравнение и применяя тождество $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$, имеем

$$B_2 = k_0 B_0, \quad B_4 = k_2 B_2 - 2B_0, \quad k_{2n} B_{2n} = B_{2n+2} + B_{2n-2},$$

где

$$k_m = h^{-2} (4b - 2h^2 - 4m^2).$$

Из этих уравнений, преобразованных в непрерывные дроби, мы можем подсчитать отношение коэффициентов, а также соответствующее значение b , то есть $b_{e_{2m}}$. Полагая отношение представленным в виде

$$G_m = B_m / B_{m-2}, \quad (1/G_0) = 0,$$

имеем две возможные совокупности уравнений для G :

$$G_2 = \frac{2}{k_2 - \frac{1}{k_4 - \frac{1}{k_6 - \dots}}}, \quad G_{2n} = \frac{1}{k_{2n} - \frac{1}{k_{2n+2} - \frac{1}{k_{2n+4} - \dots}}}, \quad n > 1 \quad (5.2.77)$$

или $G_2 = k_0$, $G_4 = k_2 - (2/k_0)$,

$$G_{2n} = k_{2n-2} - \frac{1}{k_{2n-4} - \frac{1}{k_{2n-6} - \dots - \frac{1}{k_2 - (2/k_0)}}}, \quad n > 2, \quad (5.2.78)$$

причем можно пользоваться той или иной в зависимости от относительной простоты выкладок и от скорости сходимости.

Приравнивание двух выражений для G_2 дает уравнение с непрерывной дробью для определения соответствующего значения b . Полагая $\alpha = b - \frac{1}{2}h^2$, $\theta = \frac{1}{4}h^2$, имеем уравнение

$$\alpha = \frac{2\theta^2}{\alpha - 4 - \frac{\theta^2}{\alpha - 16 - \frac{\theta^2}{\alpha - 36 - \dots}}}$$

которое равносильно уравнению стр. 531. Можно найти бесконечную последовательность решений α в виде функций θ , откуда можно определить значения $b_{e_{2m}}$. Некоторые из этих значений имеются в таблицах. Эти значения показаны также графически на рис. 5.4.

Для решений типа II при помощи тех же методов можно прийти к следующим уравнениям для отношений коэффициентов G и для константы разделения $b_{e_{2m+1}} = \alpha + \frac{1}{2}h^2$:

$$G_3 = \frac{B_3}{B_1} = k_1 - 1, \quad G_{2n+1} = k_{2n-1} - \frac{1}{k_{2n-3} - \frac{1}{k_{2n-5} - \dots - \frac{1}{k_1 - 1}}}, \quad n > 1,$$

$$G_{2n-1} = \frac{1}{k_{2n-1}} - \frac{1}{k_{2n+1}} - \frac{1}{k_{2n+3}} - \dots, \quad n > 0,$$

$$\alpha = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{\alpha - 9} - \frac{\theta^2}{\alpha - 25} - \frac{\theta^2}{\alpha - 49} - \dots$$

В обоих этих случаях удобно нормировать функцию так, что $Se_m = 1$ при $\varphi = 0$. Это означает, что $\sum B_n = 1$.

Для решений типа III имеем $B_0 = 0$, и уравнениями для G и bo будут

$$\frac{1}{G_2} = 0, \quad G_4 = k_2, \quad G_{2n} = k_{2n-2} - \frac{1}{k_{2n-4}} - \dots - \frac{1}{k_2}, \quad n > 2,$$

$$G_{2n} = \frac{1}{k_{2n}} - \frac{1}{k_{2n+2}} - \dots, \quad k_m = \frac{\alpha - m^2}{\theta},$$

$$\alpha = 4 + \frac{\theta^2}{\alpha - 16} - \frac{\theta^2}{\alpha - 36} - \dots$$

Наконец, для решений типа IV имеем:

$$G_3 = k_1 + 1, \quad G_{2n+1} = k_{2n-1} - \frac{1}{k_{2n-3}} - \dots - \frac{1}{k_1 + 1}, \quad n > 1,$$

$$G_{2n-1} = \frac{1}{k_{2n-1}} - \frac{1}{k_{2n+1}} - \dots, \quad n > 0,$$

$$\alpha = 1 - \theta - \frac{\theta^2}{\alpha - 9} - \frac{\theta^2}{\alpha - 25} - \dots$$

Для обоих рядов по синусам удобно провести нормировку так, чтобы скорость изменения функции $dSo_m/d\varphi$ равнялась единице при $\varphi = 0$. Это означает, что $\sum B_n = 1$.

При вычислении значений α (и тем самым b) мы можем преобразовать непрерывные дроби, чтобы облегчить работу. Например, для решений типа I при значении α , близком к 16, можно в уравнении (5.2.77) дважды перейти к обратным величинам, что даст

$$\alpha = 16 + \frac{\theta^2}{\alpha - 4 - (2\theta^2/\alpha)} + \frac{\theta^2}{\alpha - 36} - \frac{\theta^2}{\alpha - 64} - \dots$$

Оказывается, что (если только h не слишком велико) значения B_n наибольшие при $n \simeq m$. Поэтому $G_n = B_n/B_{n-2}$ мало для $n > m$ и велико для $n < m$. Опыт показывает, что конечные непрерывные дроби, подобные (5.2.78), лучше применять при подсчете G_n для $n < m$, а бесконечные дроби, подобные (5.2.77), лучше для значений n , больших m .

Функции Матье второго рода. Как мы указали на стр. 526, если s целое, то обе функции $\mathcal{S}(b, h, e^{i\varphi})$ и $\mathcal{S}(b, h, e^{-i\varphi})$ пропорциональны Se_m или So_m , то есть функции Матье первого рода, отвечающей значению $b = be_m$ или bo_m , соответственно. Для этих частных значений b второе решение имеет логарифмическую особенность относительно $z = e^{i\varphi}$ (другими словами, оно не периодически по φ), и мы должны ввести специальные

решения в этих специальных случаях. Мы укажем здесь метод для получения вторых решений, соответствующих четным функциям $Se_{2m}(h, \cos \varphi)$.

Так как $\varphi = 0$ представляет собой обыкновенную точку для уравнения Матье

$$\psi'' + \left(b - \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h^2 \cos 2\varphi \right) \psi = 0,$$

то можно построить фундаментальную систему решений, из которых одно имеет единичное значение и нулевую производную, а другое нулевое значение и единичную производную при $\varphi = 0$. Для $b = be_{2m}$ первым решением будет функция $Se_{2m}(h, \cos \varphi)$, имеющая единичное значение и нулевую производную. Второе решение должно быть общего вида

$$Fe_{2m}(h, \cos \varphi) = \gamma_{2m} \left[\varphi Se_{2m}(h, \cos \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \sin(2n\varphi) \right], \quad (5.2.79)$$

имеющего логарифмическую особенность относительно z при $\varphi = \arccos z = 0$. Оно также не периодически по φ . Подставляя это выражение в уравнение Матье и вспоминая, что $Se_{2m} = \sum B_{2n} \cos 2n\varphi$ представляет собой решение того же уравнения для того же значения b , в конце концов получаем

$$\gamma_{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-4nB_{2n} - (2n)^2 D_{2n} + \frac{1}{4} h^2 D_{2n-2} + \left(be_{2n} - \frac{1}{2} h^2 \right) D_{2n} + \frac{1}{4} h^2 D_{2n+2} \right] \sin(2n\varphi) = 0,$$

причем член D_{2n-2} для $n=1$ отсутствует. Отсюда вытекает система совокупных уравнений

$$\begin{aligned} \left[be_2 - \frac{1}{2} h^2 - 4 \right] D_2 + \frac{1}{4} h^2 D_4 &= 4B_2, \\ \frac{1}{4} h^2 D_2 + \left[be_{2n} - \frac{1}{2} h^2 - 16 \right] D_4 + \frac{1}{4} h^2 D_6 &= 8B_4 \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

из которых можно выразить D через B (это не просто, но тем не менее можно найти решение, для которого ряд сходится). Мы выберем значение постоянной γ_{2m} , положив, что производная Fe при $\varphi = 0$, равная $\gamma_{2m} [1 + \sum 2nD_{2n}]$, должна обратиться в единицу, то есть

$$\gamma_{2m} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2nD_{2n} \right]^{-1}.$$

Отсюда имеем фундаментальную систему решений относительно φ

$$\left. \begin{aligned} Se_{2m} &= 1, & dSe_{2m}/d\varphi &= 0 \\ Fe_{2m} &= 0, & dFe_{2m}/d\varphi &= 1 \end{aligned} \right\} \varphi = 0.$$

Определитель Вронского $\Delta(Se, Fe)$ относительно φ постоянен и потому

$$Se_{2m}(h, \cos \varphi) \frac{d}{d\varphi} Fe_{2m}(h, \cos \varphi) - Fe_{2m}(h, \cos \varphi) \frac{d}{d\varphi} Se_{2m}(h, \cos \varphi) = 1$$

для всех значений φ . [См. также соотношение (5.3.91 и далее.)]

Вторые решения для других функций Матье получаются подобным образом. Например, для $b = bo_{2m+1}$ второе решение имеет вид

$$Fo_{2m+1}(h, \cos \varphi) = \delta_{2m+1} \left[\varphi So_{2m+1}(h, \cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} \cos(2n+1)\varphi \right],$$

где уравнения для D подобны написанным выше. В этом случае нормировка такова, что $Fo_{2m+1}=1$ при $\varphi=0$ (и имеет там нулевую производную), что приводит к уравнению для

$$\delta_{2m+1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} \right]^{-1},$$

а определитель Вронского для этой пары решений равен -1 .

Итак, мы во всяком случае указали вид вторых решений для тех значений b , для которых функции $\mathcal{S}(b, h, e^{-i\varphi})$ и $\mathcal{S}(b, h, e^{i\varphi})$ не независимы. Для всех остальных значений b обе функции $\mathcal{S}$ независимы и образуют требуемую пару.

Еще о рекурсивных формулах. Теперь мы в состоянии несколько больше разбраться в решениях дифференциальных уравнений при помощи рядов и в связанных с ними рекурсивных формулах. Пусть нам дано дифференциальное уравнение $\mathcal{L}(\psi) \equiv \psi'' + p\psi' + q\psi = 0$, для которого мы хотим получить решение, разложенное в ряд около одной из его особых точек. Для простоты подсчета мы поместим рассматриваемую особую точку в начало координат, что можно сделать без изменения прочих особых точек. Тогда p , или q , или обе эти функции имеют полюс при $z=0$. Если p имеет только простой полюс, а q — полюс не выше второго порядка при $z=0$, то данная особая точка регулярная и мы можем при желании представить решение прямо в виде суммы двух рядов по степеням z . Каждый из рядов имеет вид $z^s \sum a_n z^n$, где s является одним из двух корней определяющего уравнения

$$s^2 + (P-1)s + Q = 0,$$

причем $P = \lim z p(z)$, а $Q = \lim z^2 q(z)$. Приравнивание нулю коэффициента при z^{n+s} в ряде, полученном после применения $\mathcal{L}(\psi)$ к ряду $\sum a_n z^{n+s}$, дает *рекурсивную формулу* $D_n(a_n) = 0$ для степенного ряда вблизи особенности $z=0$. Эта формула вместе с формулами для других значений n образует бесконечную последовательность линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n . Если p , или q , или обе эти функции z требуют для своего представления бесконечный ряд, то каждая рекурсивная формула $D_n = 0$ включает все a от a_0 до a_n (возможно, даже дальше).

В принципе, эти совокупные уравнения всегда можно решить, получив тем самым отношения a_n к a_0 . Однако если каждая из рекурсивных формул содержит более двух членов (то есть включает более чем пару смежных a), то задача о подсчете ряда и об испытании его на сходимость, асимптотическое поведение и т. д. становится гораздо более сложной. Посмотрим, что мы можем сказать о возможности получения двучленных формул.

Короткие рекурсивные формулы можно получить только если p и q представляют собой рациональные функции z , то есть отношения многочленов относительно z (см. стр. 361). Если они не являются рациональными функциями, то можно пытаться так преобразовать независимое переменное, чтобы новые p и q стали рациональными функциями; если это можно сделать, то можно продолжать далее, в противном случае мы принуждены иметь дело с бесконечными рекурсивными формулами.

Знаменатели p и q , если эти функции рациональны, определяются положением особых точек уравнения. По крайней мере один из этих знаменателей имеет z множителем, так как хотя бы одна из двух функций

имеет при $z=0$ полюс. Если имеются другие особые точки для конечных значений z (скажем, для $z=z_i$; $i=1, 2, \dots, N$), то знаменатели p , или q , или обеих этих функций должны содержать множители вида $z-z_i$. Во всяком случае если мы избавимся в уравнении $\mathcal{L}(\phi)=0$ от дробей, то оно приобретает вид

$$\prod_{i=0}^N (z-z_i)^{n_i} \phi'' + F(z) \phi' + G(z) \phi = 0, \quad M = \sum_{i=0}^N n_i, \quad z_0 = 0,$$

где F и G — многочлены относительно z . Отметим, между прочим, что если на бесконечности нет особой точки, то многочлен $G(z)$ должен иметь степень $M-4$ или меньше, а F должен быть многочленом степени $M-1$ и иметь старший член $2z^{M-1}$ (почему?).

Нетрудно видеть, что, вообще говоря, такое уравнение будет иметь M -членную рекурсивную формулу. Если бесконечность является регулярной точкой, то количество членов в этой формуле можно понизить на один или два посредством преобразования $w = z/(z-z_j)$ независимого переменного, переводящего j -ю особую точку на бесконечность. Когда это сделано (если только это возможно) и особые точки имеются и в нуле, и в бесконечности, то уравнение все еще будет иметь указанный выше вид, но степени многочленов, на которые множатся ϕ'' , ϕ' и ϕ , будут наименьшими возможными степенями для рассматриваемого частного уравнения.

Теперь можно усмотреть, что обычно получить *двучленную рекурсивную формулу возможно только тогда, когда имеется лишь одна особая точка*, помимо расположенных в нуле и в бесконечности, так как коэффициент при ϕ'' должен иметь вид $z^{n_0}(z-z_1)$, многочлен F должен иметь вид $az^{n_0} + bz^{n_0-1}$, а G — вид $az^{n_0-1} + \beta z^{n_0-2}$, для того чтобы степени z в разложении $\mathcal{L}(\phi)$ в ряд располагались так, чтобы был возможен вывод двучленных рекурсивных формул. Другой, несколько худший случай — это если имеются *две* другие особые точки, расположенные симметрично (то есть $z_2 = -z_1$), так что коэффициент при ϕ'' имеет вид $z^{n_0}(z^2 - z_1^2)$. Если тогда $F = az^{n_0+1} + bz^{n_0-1}$, а $G = az^{n_0} + \beta z^{n_0-2}$, то получается двучленная формула, связывающая a_n и a_{n+2} (а не a_n и a_{n+1}).

Даже если другая особая точка только одна, то функции F и G могут не иметь требуемого простого вида. В этом случае иногда может помочь преобразование зависимой переменной по формуле $\phi = u(z)f(z)$, где u представляет собой произведение некоторых степеней z и $z-z_1$. Обычно в качестве показателей степеней подходят какие-либо из индексов s в каждой из особых точек, так что уравнение для новой зависимой переменной f имеет как при $z=0$, так и при $z=z_1$ одно из решений аналитическим. Это часто понижает степень многочлена G и дает двучленную рекурсивную формулу. Этот прием был нами успешно применен при преобразовании уравнения Папперица в гипергеометрическое уравнение.

Если имеется более одной иррегулярной особой точки, то F или G не имеют вида, приводящего к двучленной рекурсивной формуле. Как мы видели, лучшее, что можно сделать в случае двух иррегулярных точек, равно как и в случае двух регулярных и одной иррегулярной точки, — это получить трехчленную формулу. Большее число особых точек или высший вид иррегулярности порождают еще более сложные формулы. К счастью, оказывается, что такие случаи не приобрели до сих пор большого практического значения, так что мы их опустим без дальнейших церемоний, заметив только, что если эти случаи приобретут значение, то потребуются дальнейшие исследования для создания техники работы с этими более сложными рекурсивными формулами.

Функциональные ряды. Нам, однако, не обязательно ограничиваться рядами по степеням z ; можно также применять ряды по некоторой системе функций f_n

$$\psi = \sum A_n f_n(z).$$

Чтобы увидеть, как можно осуществить это обобщение, возвратимся к методу степенных рядов и спросим, почему множество функций

$$f_n = z^n$$

было таким полезным. Очевидный ответ гласит, что в этом случае функции f_n удовлетворяют чрезвычайно простым *рекуррентным соотношениям*

$$zf_n = f_{n+1}, \quad f'_n = n f_{n-1}.$$

Применяя эти соотношения, возможно привести дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ к виду, содержащему только различные степени z^n . Чтобы применить другое множество функций f_n для представления решений, это новое множество также должно удовлетворять рекуррентным соотношениям.

Другое важное и полезное свойство степенных рядов — это свойство *полноты*. Под полнотой мы понимаем то, что при выполнении определенных условий линейную комбинацию степеней z можно применить для представления любой функции. Это утверждение является следствием теоремы Лорана [см. (4.3.4)] и имеет место при выполнении условий этой теоремы. Прежде чем применять другие множества функций, мы должны выяснить, какие функции могут быть представлены с их помощью, а какие нет. Позже, в главе о собственных функциях, мы уделим значительное внимание исследованию этого вопроса. Однако стоит рассмотреть, что можно сделать в этом отношении при помощи уже развитой нами техники. Мы приведем несколько примеров, после чего возвратимся к исходному вопросу о решении уравнений при помощи функциональных рядов.

Обычно применяемый метод состоит в установлении связи между используемым функциональным рядом и степенным рядом. Тогда на основании известных свойств степенного ряда возможно получить сведения и о множестве f_n . В качестве первого примера установим полноту рядов Фурье по $e^{in\theta}$ прямо из рядов Лорана. Из формулы (4.3.4) имеем

$$\psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Рассмотрим теперь значения $\psi(z)$ на единичной окружности, $z = e^{i\theta}$. Тогда

$$\psi(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Из свойства полноты степенных рядов мы можем теперь заключить, что с помощью множества функций $e^{in\theta}$ можно представить любую достаточно хорошую периодическую функцию θ периода 2π . Необходимость периодичности проистекает из того, что ряд Фурье представляет значения ψ на окружности, при обходе которой эти значения повторяются. При рассмотрении четных или нечетных функций θ мы немедленно приходим к рядам Фурье по косинусам или синусам.

В качестве второго примера исследуем первое решение уравнения Лежандра (5.2.47) для $m = 0$ и целых значений n

$$X = F\left(-n, n+1 \mid 1 \mid \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right).$$

Для целых значений n X является многочленом относительно z ; полиномы Лежандра P_n будут более детально исследованы позже, на стр. 558. Подсчитаем несколько первых из этих функций:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_3 &= (5z^3 - 3z)/2, \\ P_1 &= z, & P_4 &= (35z^4 - 30z^2 + 3)/8, \\ P_2 &= (3z^2 - 1)/2, & P_5 &= (63z^5 - 70z^3 + 15z)/8 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

На основании этой последовательности можно доказать, что любую степень z^n можно выразить в виде линейной комбинации многочленов P_n . Для 1 и z это очевидно. Выпишем результат для нескольких следующих степеней:

$$\begin{aligned} 1 &= P_0, \\ z &= P_1, \\ z^2 &= \frac{1}{3}(2P_2 + P_0), \\ z^3 &= \frac{1}{5}(2P_3 + 3P_1), \\ z^4 &= \frac{1}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0), \\ z^5 &= \frac{1}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Из того что степенные ряды по положительным степеням z полны для функций, не имеющих особенностей, можно заключить, что эти функции можно равным образом выразить через полиномы Лежандра. Чтобы охватить функции с особенностями, было бы необходимо вовлечь в наше исследование второе решение уравнения Лежандра (соответствующее отрицательным степеням z).

В данный момент нет необходимости определять явно коэффициенты указанных выше разложений. Достаточно показать возможность такого представления. Например, при решении уравнения Бесселя для целого n (см. стр. 521) мы получаем одну совокупность решений

$$J_n(z) = e^{-iz} z^n F\left(\frac{1}{2} + n \mid 1 + 2n \mid 2iz\right) = z^n (1 + \dots), \quad z \rightarrow 0$$

[см. формулу (5.2.63) и далее]. Можно полагать, что посредством подходящей комбинации этих функций было бы возможно представить z^n . Аналогично для z^{-n} были бы пригодны вторые решения, функции Неймана (см. стр. 585). Это утверждение проверить несколько труднее, чем подобное утверждение для функций Лежандра, так как функции Бесселя представляют собой не многочлены, а суммы бесконечных рядов. Однако относительно просто доказать, что *принципиально* представление через функции Бесселя возможно.

Теперь мы в состоянии обратиться к некоторым примерам применения функциональных рядов, откуда мы сможем вывести способ рассуждений, который должен обычно применяться. Как первый пример, рассмотрим исследованное ранее (стр. 523) уравнение Матье

$$\psi'' + \left[b - \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2} \cos 2\varphi \right] \psi = 0.$$

Это уравнение до некоторой степени походит на уравнение, которому удовлетворяют показательные функции:

$$f_n'' = e^{i2(n+s)\varphi}, \quad f_n'' + [4(n+s)^2] f_n = 0$$

(член $\cos 2\varphi$ отсутствует). Подставим $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n f_n$ в уравнение Матье

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n \left\{ \left[-4(n+s)^2 + \left(b - \frac{h^2}{2} \right) \right] e^{2i(n+s)\varphi} - \frac{h^2}{4} e^{2i(n+s+1)\varphi} - \frac{h^2}{4} e^{2i(n+s-1)\varphi} \right\} = 0.$$

Группируя члены с общим множителем $e^{2i(n+s)\varphi}$, получаем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{h^2}{4} A_{n-1} - \frac{h^2}{4} A_{n+1} + A_n \left[b - \frac{h^2}{2} - 4(n+s)^2 \right] \right\} e^{2i(n+s)\varphi} = 0.$$

На основании полноты системы функций $e^{i(n+s)\varphi}$ коэффициент при каждом члене должен равняться нулю. (Здесь мы используем тот результат, что если сумма степенного ряда тождественно равна нулю, то коэффициент при каждой степени должен равняться нулю.) Таким образом, мы получаем трехчленную рекурсивную формулу

$$\frac{h^2}{4} A_{n+1} + A_n \left[4(n+s)^2 - b + \frac{h^2}{2} \right] + \frac{h^2}{4} A_{n-1} = 0.$$

Она тождественна с (5.2.69) (естественно).

В качестве второго примера рассмотрим специальный вид уравнения, полученного в результате деления в сфероидальных координатах

$$(z^2 - 1)\psi'' + 2z\psi' + (h^2 z^2 - b)\psi = 0.$$

Сравним его с уравнением, которому удовлетворяют полиномы Лежандра P_n

$$(z^2 - 1)P_n'' + 2zP_n' - n(n+1)P_n = 0.$$

Если потребовать, чтобы ψ не имела особенностей в ± 1 , то есть в особых точках дифференциального уравнения, то естественно ожидать, что выбор $f_n = P_n$ окажется полезным; итак, положим

$$\psi = \sum_0^{\infty} A_n P_n.$$

Здесь применимо следующее рекуррентное соотношение, которое будет выведено позже:

$$z^2 P_n'' = \frac{n(n-1)}{4n^2-1} P_{n-2} + \left[\frac{n^2}{4n^2-1} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \right] P_n + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}.$$

Подстановка в дифференциальное уравнение дает

$$\sum_0^{\infty} P_n \left\{ A_{n+2} h^2 \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+5)} + A_n \left[n(n+1) - b + h^2 \left(\frac{n^2}{4n^2-1} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \right) \right] + A_{n-2} \frac{h^2(n-1)n}{(2n-1)(2n-3)} \right\} = 0.$$

Полученная трехчленная рекурсивная формула теперь должна быть решена относительно A_n при условии, что $A_{-1} = A_{-2} = 0$.

То, что здесь сделано, сводится к указанию полного множества функций $f_n(z)$, по которым мы хотим разложить наше решение. На практике

мы выбираем функции f так, что их дифференциальное уравнение $\mathcal{M}_n(f_n) = 0$ не очень отличается от уравнения $\mathcal{L}(\psi) = 0$, которое мы хотим решить. После этого мы применяем соотношения между последовательными f_n , чтобы выразить разность между $\mathcal{L}(f_n)$ и $\mathcal{M}_n(f_n)$ в виде ряда по f_n

$$[\mathcal{L} - \mathcal{M}_m] f_m = \sum_n \gamma_{mn} f_n. \quad (5.2.80)$$

Например, для рядов по полиномам Лежандра, о которых мы говорили выше, $[\mathcal{L} - \mathcal{M}_n](P_n) = [h^2 z^2 - b + n(n+1)] P_n$, что можно подставить в ряд вида (5.2.80), включающий только три члена (с P_{n-2} , P_n и P_{n+2}).

В случае удачного выбора ряды по f_n будут конечными с небольшим числом членов. Мы назовем эти формулы, выражающие результат применения простых операторов к f_n в виде простых рядов по f_m , *рекуррентными* формулами, чтобы отличать их от *рекурсивных* формул (5.2.40). Подставляя наш ряд в оператор $\mathcal{L}$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sum a_m f_m) &= \sum_m (\mathcal{L} - \mathcal{M}_m) a_m f_m + \sum_m a_m \mathcal{M}_m(f_m) = \\ &= \sum_m a_m \sum_n \gamma_{mn} f_n = \sum_n \left(\sum_m a_m \gamma_{mn} \right) f_n = 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_m(f_m) = 0$ по определению. Если множество f_n полное, то можно каждый коэффициент при f_n последнего ряда приравнять в отдельности нулю

$$\sum_m a_m \gamma_{mn} = 0,$$

что дает *рекурсивные* формулы для коэффициентов a_m . Если эти формулы можно разрешить, мы получаем решение уравнения $\mathcal{L}(\psi) = 0$.

Общая применимость разложения рассматриваемого вида зависит, конечно, от скорости сходимости, которая в свою очередь зависит от поведения a_n при $n \rightarrow \infty$. Чтобы его получить, рассмотрим указанное выше уравнение в пределе при $n \rightarrow \infty$

$$A_{n+2} \frac{h^2}{4} + A_n \left[n^2 - b + \frac{h^2}{2} \right] + h^2 \frac{A_{n-2}}{4} = 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

Это — как раз рекурсивное соотношение (5.2.69), выведенное для функций Матье, если совершить подстановку

$$s = 0, \quad A_{n+2} = \frac{1}{2} C_{n+2}, \quad n = 2\beta.$$

Напомним, что рекурсивные соотношения для уравнения Матье влекут за собой сходимость для a_n при $n \rightarrow \infty$, если b при данном s принимает только некоторые частные значения. Эти значения следует определять из рекурсивных формул для a_n при помощи методов, описанных в разделе о непрерывных дробях.

Далее в этой книге будет указано много иных случаев разложения функций в ряд по другим функциям. Особенно полезными будут ряды по функциям Лежандра (гипергеометрическим функциям, см. стр. 557) и по функциям Бесселя (вырожденным гипергеометрическим функциям, см. стр. 579).

Вообще то, что мы можем пытаться сделать при помощи таких рядов, — это применить решения уравнения с данным множеством особых точек для выражения решений уравнений, имеющих на одну особую точку больше (или имеющих более сложные особые точки). Например, согласно уравнению (5.2.30), степень z является решением дифференциального уравнения с двумя регулярными особыми точками в 0 и ∞ . Отсюда ре-

нения уравнения с тремя регулярными точками (гипергеометрические функции) или с одной регулярной и одной иррегулярной точкой (вырожденные гипергеометрические функции) можно выразить сравнительно просто в виде рядов по степеням z . С другой стороны, решения уравнения с двумя регулярными точками и одной иррегулярной точкой (сфероидальные функции) можно наиболее просто выразить в виде ряда по гипергеометрическим функциям (функциям Гегенбауера) или по вырожденным гипергеометрическим функциям (функциям Бесселя). Мы рассмотрим ряды по функциям Бесселя и ряды по любым другим более сложным функциям в этой книге позже [см. формулы (5.3.82) и (11.3.87)].

В заключение заметим, что можно обобщить ряд $\sum a_n f_n(z)$, перейдя к интегралу, так же как, обобщая ряд Фурье, мы приходим к интегралу Фурье. Например, вместо $\psi(z) = \sum_n a_n f_n(z)$ мы могли написать

$$\psi(z) = \int K(z, t) v(t) dt.$$

Ясно, что здесь целочисленная переменная n заменилась на непрерывную переменную t , функции $f_n(z)$ перешли в $K(z, t)$, а коэффициенты a_n превратились в $v(t)$. Сравнивая это с аналогичным процессом для рядов, мы можем наметить способ получения *интегрального представления* ψ (как называется приведенный выше интеграл).

Прежде всего применяем оператор $\mathcal{L}$, причем теперь для указания того, что $\mathcal{L}$ действует только по переменной z , мы будем писать $\mathcal{L}_z$ вместо $\mathcal{L}$. Имеем

$$\mathcal{L}_z \psi = \int \mathcal{L}_z [K(z, t)] v(t) dt = 0.$$

В нашем исследовании $\mathcal{L}_z [f_n(z)]$ мы применяли рекуррентные соотношения для f_n , чтобы заменить дифференциальный оператор на систему разностных операторов при помощи рекуррентных соотношений

$$\mathcal{L}_z [f_n] = \sum_p \gamma_{np} f_p$$

с численными коэффициентами γ_{np} . Это привело к замене операции по переменной z на *операцию по индексу n* . В случае интегрального представления это означает, что мы можем выразить $\mathcal{L}_z [K(z, t)] = \mathcal{M}_t [K(z, t)]$, где $\mathcal{M}_t$ представляет собой дифференциальный оператор по t , так что

$$0 = \int \mathcal{M}_t [K(z, t)] v(t) dt.$$

Следующим шагом в представлении в виде ряда f_n была перегруппировка членов ряда, в результате чего f_n становился общим множителем; приравнивание нулю коэффициента при f_n , включающего несколько a_n , приводило к *рекурсивным соотношениям* для a_n . Таким образом, операция над f_n была преобразована в операцию над a_n . Подобным образом здесь операция $\mathcal{M}_t$ должна быть преобразована теперь в операцию над v . Это можно осуществить при помощи интегрирования по частям или, что равносильно, при помощи определенного ранее (стр. 000) оператора сопряженного с $\mathcal{M}_t$. Напомним, что

$$v \mathcal{M}_t [u] - u \mathcal{M}_t^* [v] = \frac{d}{dt} P(u, v).$$

Отсюда

$$0 = \int K(z, t) \mathcal{M}_t^* (v) dt + [P(u, v)].$$

где второй член зависит от пределов интегрирования. Выберем теперь пределы или контур интегрирования так, чтобы член с $P(u, v)$ обратился в нуль; тогда исходное дифференциальное уравнение удовлетворится, если «амплитуда» $v(t)$ в интегральном представлении удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{M}_i^*(v) = 0.$$

Это уравнение аналогично рекурсивным формулам для a_n . Если мы сможем решить дифференциальное уравнение для $v(t)$, то мы получим решение исходного дифференциального уравнения для $\psi(z)$, имеющее некоторые преимущества перед решением, представленным в виде ряда. Однако это достаточно обширная тема, и мы лучше посвятим ей отдельный параграф.

5.3. Интегральные представления

Теперь у нас достаточно данных, чтобы увидеть, к чему приводит способ нахождения решений в форме рядов. Разложение около обыкновенной точки осуществляется непосредственно. Необычные случаи осуществляются вблизи особых точек дифференциального уравнения, где общее решение имеет особенность. Мы указали, как можно получить вблизи каждой особой точки два независимых решения в виде рядов, сходящихся вплоть до ближайшей особой точки (или в виде асимптотических рядов, из которых можно подсчитать достаточно точные значения решений в более ограниченной области). Другими словами, мы выработали средство для анализа поведения любого решения линейного дифференциального уравнения второго порядка в непосредственной близости любой точки комплексной плоскости. В частности, мы можем применить разложения в ряд для нахождения частного решения, удовлетворяющего любому допустимому краевому условию (в гл. 6 будет исследовано, что означает «допустимость» для краевых условий).

Очень часто эти краевые условия ставятся в особых точках дифференциального уравнения. Мы видели, что такие особые точки соответствуют геометрическим «точкам концентрации» соответствующей системы координат. Часто вид физической границы можно идеализировать так, чтобы ей, в силу ее простоты, соответствовала особая точка в одном из измерений (например, значению $r=0$ в сферических координатах соответствует начало координат, значению $\mu=0$ в сплюснутых сфероидальных координатах — диск, значению $\varphi=0, \pi$ в эллиптических цилиндрических координатах — плоская щель и т. д.). Часто только одно решение лишь с одним из индексов (если особая точка регулярная) может быть приспособлено к краевым условиям, так что будет пригодным одно из решений, исследованных в предыдущем параграфе.

Если нам требуются значения рассматриваемого решения вблизи особой точки, то разложение в ряды пригодно и, более того, является единственным путем подсчета этих промежуточных значений. Но очень часто нам бывает нужно вычислить значения решения и его производной вблизи следующей особой точки, где ряд, пригодный для первой особой точки, либо сходится чрезвычайно медленно, либо даже расходится. Например, мы часто должны удовлетворять краевым условиям в обеих концах области изменения переменной, соответствующих двум последовательным особым точкам. При этом требуются коэффициенты перехода, связывающие ряд около одной из особых точек с двумя решениями около другой точки, так как тогда нет нужды добиваться сходимости ряда. Пусть u_1, v_1 — два независимых разложения в ряды около особой точки $z=a_1$.

а u_2 , v_2 — ряды около $z = a_2$. Если мы можем найти соотношения вида $u_1 = \gamma_{11} u_2 + \gamma_{12} v_2$ и т. д., то мы можем тогда при подстановке краевых условий в a_1 пользоваться решениями u_1, v_1 , а при подстановке условий в a_2 — решениями u_2, v_2 . Не будет никаких проблем сходимости, если мы сможем выразить каждое решение у одного конца через решения у другого.

Для простейших видов дифференциальных уравнений эта связь между поведением у одной особой точки и поведением у другой проста. Поскольку решения представляют собой либо рациональные функции (5.2.29), либо элементарные трансцендентные функции (5.2.33), то мы знаем поведение решений в обоих концах; «связь» уже нам дана. Для дальнейших более сложных уравнений эта связь не так проста. Примером такой связи служит формула (5.2.49), однако наш вывод этой формулы на основе разложения решений в ряды не был вполне строгим и не годился для всей области изменения параметров. Решение при помощи рядов, как выразился Стокс, «имеет преимущество в широкой приложимости, но совершенно лишено элегантности». Мы предпочли бы выразить решения через рациональные или элементарные трансцендентные функции каким-либо конечным способом, сходящимся как в одной особой точке, так и в другой. Для некоторых уравнений это можно сделать, если перейти от рядов к интегралам.

Выражение

$$\psi(z) = \int K(z, t) v(t) dt \quad (5.3.1)$$

является достаточно общим для хорошего представления любого решения. Если функции K и v оказываются рациональными или элементарными трансцендентными, то мы имеем «замкнутый» вид, который можно применить для подсчета решения где угодно в комплексной плоскости. Нам остается только установить, как надо находить правильный вид K и v для данного уравнения.

Некоторые простые примеры. Наше знакомство с техникой контурного интегрирования дает возможность составить несколько простых примеров для иллюстрации взаимосвязи между интегральным представлением и решением при помощи рядов. Например, так как

$$\pi \operatorname{ctg} \pi t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-n} \quad \text{или} \quad \pi \operatorname{cth} \pi t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-in}$$

(см. стр. 528), то можно применить вычеты этой функции для получения ряда Фурье. Так, интеграл

$$I(z) = \oint_C \operatorname{cth} \pi t \cdot F(t) e^{zt} dt$$

можно разложить в ряд, если F представляет собой рациональную функцию t (см. стр. 390), имеющую все полюсы справа от мнимой оси и при этом такую, что $tF(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Контур C включает прямую, проходящую справа от мнимой оси, в ее непосредственной близости от $\varepsilon - i\infty$ до $\varepsilon + i\infty$, а затем возвращается к $-i\infty$, проходя вдоль полуокружности бесконечного радиуса, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re} t < 0$. Так как $t^2 \cdot F(t)$ не обращается в бесконечность при $|t| \rightarrow \infty$, то интеграл по бесконечной полуокружности равен нулю (поскольку $\operatorname{cth} \pi t \rightarrow -1$ при $|t| \rightarrow \infty$ для $\operatorname{Re} t < 0$), если $z > 0$.

Поэтому полюсы внутри контура совпадают с полюсами $\operatorname{cth} \pi t$, то есть, имеют вид $\pm in$. Внутри контура мы предположили F всюду аналитиче-

ской. Вдоль мнимой оси (в случае вещественных коэффициентов) F имеет симметричную и антисимметричную части

$$F(t) = s(t) + u(t), \quad s(t) = \frac{1}{2} F(t) + \frac{1}{2} \bar{F}(t) = \operatorname{Re} F,$$

$$u(t) = \frac{1}{2} F(t) - \frac{1}{2} \bar{F}(t) = i \operatorname{Im}(F).$$

Контурный интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов по всем полюсам $\operatorname{cth} \pi z$

$$\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \operatorname{cth}(\pi t) F(t) e^z = 2i \operatorname{Re} F_0 + 4i \sum_{n=0}^{\infty} [\operatorname{Re} F_n \cos(nz) - \operatorname{Im} F_n \sin(nz)], \quad (5.3.2)$$

где $F_n = F(in)$.

Более непосредственное применение интегрального представления можно получить из свойств гамма-функции $\Gamma(-t)$. Функция

$$\Gamma(-t) = \frac{-\pi}{\Gamma(t+1) \sin(\pi t)} \underset{t \rightarrow n}{\simeq} -(-1)^n \frac{1}{(t-n) \Gamma(t+1)}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

имеет простые полюсы при $t=0, 1, 2, \dots$. Если после включения в подинтегральную функцию множителя z^t интеграл будет сходиться, то сумма вычетов превратится в ряд по целым степеням z . Как было указано (на стр. 462, асимптотическое выражение для $\Gamma(t+1)$ имеет вид

$$\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{2\pi} e^{-t-1} t^{t+\frac{1}{2}}.$$

Значит, если функция $G(t)$ такова, что $G(t) z^t / \Gamma(t+1) \sin \pi t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для $\operatorname{Re} t > 0$, и если все особенности G расположены слева от мнимой оси, то

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} G(t) \Gamma(-t) (-z)^t dt = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^n / n!, \quad (5.3.3)$$

где контур проходит слева от полюса при $t=0$ и дополняется полуокружностью бесконечного радиуса, проходящей в полуплоскости $\operatorname{Re}(t) > 0$ от $+i\infty$ обратно к $-i\infty$. Тем самым мы получаем способ непосредственного перехода от ряда к интегралу. Если $G(n)$ является «замкнутой функцией» n (то есть если последовательные коэффициенты связаны простой формулой, вроде двучленной рекурсивной формулы), то подинтегральная функция имеет замкнутый вид.

Применения такой формулы и предосторожности, необходимые для обеспечения сходимости, хорошо иллюстрируются на приложении ее к гипергеометрическому ряду (5.2.44)

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n) n!} z^n.$$

Ясно, что функция G должна равняться $\frac{\Gamma(c)/2\pi i}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+t) \Gamma(b+t)}{\Gamma(c+t)}$, если последняя имеет полюсы слева от мнимой оси и если частное $Gz^t / \Gamma(t+1) \sin \pi t$ ведет себя требуемым образом при $t \rightarrow \infty$. Применяя асимптотическую формулу для гамма-функции, находим, что если $t = Re^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$,

то для достаточно больших R

$$\frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)}{\Gamma(c+t)\Gamma(t+1)} \simeq e^{1+c-a-b} R^{a+b-c-1} e^{i(a+b-c-1)\vartheta}.$$

Кроме того, если $z = re^{i\varphi}$ и $-z = re^{i\varphi-i\pi} = e^{\ln r + i(\varphi-\pi)}$, то

$$(-z)^t = \exp\{R[(\ln r) \cos \theta + (\pi - \varphi) \sin \theta] + iR[(\varphi - \pi) \cos \theta + (\ln r) \sin \theta]\},$$

$$\frac{1}{\sin(\pi t)} = \begin{cases} -2i \exp[i\pi R \cos \theta - \pi R \sin \theta], & 0 < \theta < \pi, \\ 2i \exp[-i\pi R \cos \theta + \pi R \sin \theta], & 0 > \theta > -\pi. \end{cases}$$

Отсюда, отбрасывая мнимую часть в показателе, оцениваем модуль подинтегральной функции

$$\left| \frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)}{\Gamma(c+t)\Gamma(t+1)} \frac{(-z)^t}{\sin(\pi t)} \right| \simeq 2 \left(\frac{R}{e} \right)^{a+b-c-1} e^{R \ln r \cos \theta} \begin{cases} e^{-R\varphi \sin \theta}, & 0 < \theta < (\pi/2), \\ e^{R(2\pi-\varphi) \sin \theta}, & 0 > \theta > -(\pi/2). \end{cases}$$

Отсюда если модуль z меньше единицы (то есть $\ln r < 0$), а аргумент z больше нуля и меньше 2π ($0 < \varphi < 2\pi$), то подинтегральная функция обра-

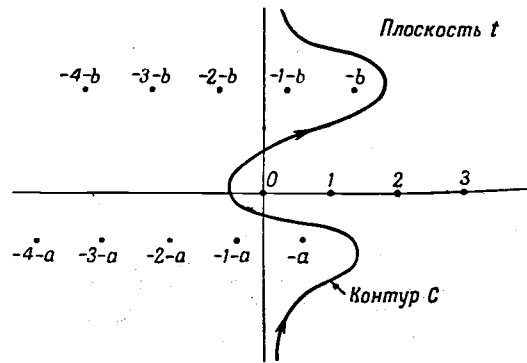


Рис. 5.5. Контур для интегрального представления гипергеометрической функции при помощи преобразования Меллина.

щается в нуль на полуокружности, входящей в контур ($R \rightarrow \infty$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$). Поскольку эти условия выполнены, интегральное представление гипергеометрического ряда имеет вид

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)}{2\pi i \Gamma(c+t)} \Gamma(-t) (-z)^t dt, \quad (5.3.4)$$

если только мы сможем провести контур от $-i\infty$ до $+i\infty$ так, чтобы все полюсы $\Gamma(-t)$ остались справа, а полюсы $\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)$ — слева. Рис. 5.5 показывает, что это можно сделать, даже если $\operatorname{Re} a$ и $\operatorname{Re} b$ отрицательны, если только ни a , ни b не являются целыми отрицательными. Если a либо b целое отрицательное, то формула (5.2.44) показывает, что F будет конечным многочленом, а не бесконечным рядом (она показывает также, что c не должно быть целым ≤ 0).

Это интегральное представление не кажется полезным или элегантным; на первый взгляд оно представляется менее элегантным, чем представление в виде ряда. Однако нетрудно показать, что возможность деформации

контура без изменения значения интеграла делает полученный результат настолько гибким, что при его помощи удастся связать разложение у одной особенности с разложениями у другой особенности.

Например, дальнейшее рассмотрение асимптотического поведения подинтегральной функции в (5.3.4) показывает, что она стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ для $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ ($t = Re^{i\theta}$), то есть на бесконечной полуокружности, проходящей в *левой части* плоскости t . Отсюда контур, содержащий внутри себя все полюсы $\Gamma(-t)$ (и приводящий, как указано выше, к гипергеометрическому ряду), можно заменить на контур, содержащий все полюсы $\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)$. Применяя соотношения $\Gamma(a+t) = \pi/\Gamma(1-a-t) \times \sin \pi(a+t)$ и т. д. и вычисляя вычеты в парах полюсов, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b|c|z) = & \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+a-b+n)} \frac{\sin \pi(c-a-n)}{\cos(n\pi) \sin \pi(b-a-n)} (-z)^{-a-n} + & \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(1-c+b+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-a+b+n)} \frac{\sin \pi(c-b-n)}{\cos(n\pi) \sin \pi(a-b-n)} (-z)^{-b-n} = & \\ = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-c+a|1-b+a|\frac{1}{z}\right) + & \\ + \frac{\Gamma(b)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-c+b|1-a+b|\frac{1}{z}\right). & \quad (5.3.5) \end{aligned}$$

Если $|a-b|$ целое или нуль, то один из этих рядов теряет силу, так как второе решение должно содержать логарифмический член.

Ряд в левой части сходится при $|z| < 1$, в то время как ряды в правой части сходятся при $|z| > 1$. Строго говоря, эти два ряда нельзя приравнивать; лучше было бы сказать, что интегральное выражение, приведенное в формуле (5.3.4), обладает разложением в ряд, определяющий $F(a, b|c|z)$, справедливым при $|z| < 1$; оно также обладает другим разложением в ряд, указанный в правой части формулы (5.3.5), справедливым при $|z| > 1$. Интегральное представление справедливо для всех (или почти всех) значений z и может рассматриваться как «истинное решение» уравнения (5.2.42). Разложения в ряды можно считать частными представлениями этого «истинного решения», пригодными в ограниченной области изменения z . При помощи интегрального представления мы можем осуществить аналитическое продолжение решения из одной области сходимости, содержащей одну особенность, в другую область сходимости, содержащую другую особенность.

Таким образом, можно назвать интеграл, стоящий в правой части формулы (5.3.4), *гипергеометрической функцией* $F(a, b|c|z)$, одним из решений уравнения (5.2.42). Если $|z| < 1$, то эту функцию можно подсчитать при помощи представления ее рядом (5.2.44), *гипергеометрическим рядом* по z . Для других областей изменения z гипергеометрическую функцию можно подсчитать, применяя гипергеометрические ряды по $1/z$, данные в формуле (5.3.5), или по $1-z$, которые будут даны позже, и т. д. Сама функция, показывающая свои различные стороны при различных подходах, дается интегральным представлением.

Общие уравнения для подинтегральной функции. Свойства, раскрывающиеся при представлении гипергеометрической функции, являются типичными для интегральных представлений вообще. Они превращают аналитическое продолжение решения почти в тавтологию. Если такое представле-

ние можно найти, то обычно бывает не трудно применить краевые условия в обоих концах области изменения z . Если представления нельзя найти, то такое применение проходит сложно и «неизящно».

Методы, примененные в предыдущем пункте для получения интегральных представлений, были далеко не прямыми; нам нужна техника перехода от дифференциального уравнения прямо к виду подинтегральной функции. Мы будем пользоваться сначала видом (5.3.1) с ядром $K(z, t)$ и модуляционным множителем $v(t)$. Для этого мы выбираем вид K , который нам представляется подходящим, а затем выясняем, какому дифференциальному уравнению удовлетворяет v . Если это уравнение достаточно простое (существенно проще, чем уравнение для ϕ), то можно получить замкнутый вид v и тем самым построить интегральное представление.

Дифференциальное уравнение, которое надо решить, имеет второй порядок и независимое переменное, преобразованное таким образом, что коэффициенты являются алгебраическими. До использования выражения (5.3.1) лучше освободиться от дробей, перейдя к уравнению

$$\mathcal{L}_z(\phi) = f(z) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + g(z) \frac{d\phi}{dz} + h(z) \phi = 0, \quad (5.3.6)$$

где f , g и h — многочлены относительно z . Дифференциальный оператор $\mathcal{L}$, примененный к интегралу вида (5.3.1), можно внести под знак интеграла, действуя на ядро K по z

$$\mathcal{L} \left(\int K v dt \right) = \int \mathcal{L}_z(K(z, t)) v(t) dt,$$

если интеграл достаточно хорошо сходится. Операция $\mathcal{L}_z$, произведенная над $K(z, t)$, порождает новую функцию z и t . Если вид ядра K нами выбран удовлетворительно, то эта новая функция z и t равна результату применения к $K(z, t)$ некоторого оператора по t

$$\mathcal{L}_z(K) = \mathcal{M}_t(K)$$

(в некоторых случаях достаточно, чтобы $\mathcal{L}_z(K)$ равнялось результату применения оператора $\mathcal{M}_t$ к какому-либо другому ядру $K'(z, t)$).

Эта эквивалентность между операторами по z и по t , примененными к ядру K , дает возможность определить $v(t)$ и одновременно резко ограничивает выбор видов $K(z, t)$. Немногие функции z и t обладают простыми взаимосвязями, подобными тем, которые обнаруживают показательное ядро [примененное в формуле (5.3.2)]

$$(d/dz) e^{zt} = t e^{zt}, \quad z e^{zt} = (d/dt) e^{zt},$$

для которого дифференциальный оператор, содержащий производные по z и степени z , преобразуется в оператор, содержащий соответствующие степени t и производные по t . Тем не менее найдено много других ядер, применимых в различных случаях: z^t (примененное в формуле (5.3.3)), $(z-t)^t$, различные функции произведения zt и т. д. Во многих случаях можно воспользоваться несколькими различными ядрами, что приводит к нескольким различным интегральным представлениям одного и того же решения. Выбор ядра, порождающего наиболее приспособленное к применениям представление, зависит от связи между особенностями ядра и особыми точками дифференциального уравнения. Например, для гипергеометрического уравнения с тремя регулярными особыми точками можно ожидать, что ядро вида $(z-t)^t$ окажется лучше, чем ядро e^{zt} , имеющее существенную особенность на бесконечности. С другой стороны, вырожденное гипергеометрическое уравнение, имеющее иррегулярную особую точку на бесконечности, представляется подходящим для ядра e^{zt} .

Однако возвратимся к нашей непосредственной теме, состоящей в построении уравнения для $v(t)$. Мы достигли того, что подинтегральная функция представляет собой произведение функции v переменной t на дифференциальный оператор $\mathcal{M}_t$, действующий по t над ядром $K(z, t)$. На основе формулы (5.2.10) мы видим, что подинтегральную функцию можно теперь преобразовать к виду суммы произведения K на результат применения сопряженного (см. стр. 499) дифференциального оператора $\tilde{\mathcal{M}}$ к v и производной присоединенной билинейной формы P . Символически это осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_z(y) &= f(z) \frac{d^2 y}{dz^2} + g(z) \frac{dy}{dz} + h(z)y = 0, \quad y = \int K(z, t)v(t) dt, \\ \mathcal{L}_z(y) &= \int \mathcal{L}_z(K)v dt = \int \mathcal{M}_t(K)v dt = \\ &= \int \left[K\tilde{\mathcal{M}}_t(v) + \frac{d}{dt}P(v, K) \right] dt = \int K(z, t)\tilde{\mathcal{M}}_t(v) dt + [P(v, K)],\end{aligned}\quad (5.3.7)$$

где при $\mathcal{M}(K) = \alpha(t)(d^2 K/dt^2) + \beta(t)(dK/dt) + \gamma(t)K$ сопряженный оператор имеет вид

$$\tilde{\mathcal{M}}(v) = \frac{d^2}{dt^2}(\alpha v) - \frac{d}{dt}(\beta v) + \gamma v,$$

а соответствующая присоединенная билинейная форма

$$P(v, K) = \alpha v \frac{d}{dt}K - K \frac{d}{dt}(\alpha v) + \beta v K.$$

Если теперь пределы интегрирования и контур, вдоль которого взят интеграл, таковы, что P возвращается к своему начальному значению в конце контура, то интеграл от dP/dt равен нулю и

$$\mathcal{L}_z(y) = \int K\tilde{\mathcal{M}}_t(v) dt.$$

Отсюда если $v(t)$ является решением дифференциального уравнения $\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = 0$, то интеграл $y = \int K v dt$ представляет собой решение дифференциального уравнения $\mathcal{L}_z(y) = 0$, которое мы и хотели решить. Если мы удачно выбрали ядро K , то уравнение $\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = 0$ будет проще, чем $\mathcal{L}_z(y) = 0$, и v будет простой функцией t . Обычно имеется несколько различных возможных путей и пределов интегрирования, для каждого из которых $\int (dP/dt) dt = 0$. Эти различные интегралы соответствуют различным независимым решениям уравнения $\mathcal{L}_z(y) = 0$.

Подходя с другой точки зрения, можно сказать, что нами сейчас были исследованы интегральные преобразования типа преобразования Фурье

$$f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{i\mu v} d\mu, \quad F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\mu v} dv,$$

рассмотренного в § 4.8. Мы преобразуем функцию $\psi(z)$ в функцию $v(t)$ посредством ядра $K(z, t)$

$$\psi(z) = \int v(t) K(z, t) dt$$

и пытаемся найти тип преобразования, при котором функция v , служащая образом ψ , будет проще, чем ψ .

Например, если ядро равно e^{tz} , то этот переход называется *преобразованием Лапласа*. Его легко получить из приведенного только что преобразования Фурье; полагая $\mu = -it$, $v = z$, $F(-it) = -iv(t)$, $f(v) = \phi(z)$, получим

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{zt} dt, \quad v(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) e^{-zt} dz. \quad (5.3.8)$$

А если ядро равно z^t , переход называется *преобразованием Меллина*. Его также можно получить из преобразования Фурье, положив $\mu = -it$, $v = \ln z$, $f(\ln z) = \phi(z)$, $F(-it) = -iv(t)$, что дает

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) z^t dt, \quad v(t) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \phi(z) z^{-t-1} dz. \quad (5.3.9)$$

Однако можно найти и другие преобразования, причем не все они будут так тесно связаны с преобразованием Фурье, как эти два. Таким будет, например, преобразование $\int v(t) (z-t)^{\mu} dt$, называемое *преобразованием Эйлера* (см. также § 4.8).

Дальнейшая часть этого параграфа будет посвящена изучению ряда примеров интегральных представлений, чтобы проиллюстрировать технику получения решений и методы применения результатов, а также чтобы ближе познакомиться с некоторыми функциями, которые будут широко применяться позже в этой книге. Особенно детально будут изучаться два типа ядер:

$$(z-t)^{\mu} \text{ — преобразование Эйлера,} \\ e^{zt} \text{ — преобразование Лапласа.}$$

Другие типы преобразований, менее широко применимые, будут рассмотрены менее детально.

Преобразование Эйлера. Как указано ранее, надо ожидать, что ядро $(z-t)^{\mu}$ должно дать удовлетворительное представление решений уравнений, имеющих только регулярные особые точки, как, например, уравнение Папперица (5.2.36) или его канонический вид, гипергеометрическое уравнение (5.2.42). Ограничение, которое приходится накладывать на форму уравнения, чтобы к нему было применимо преобразование Эйлера, обнаруживается несколько необычным образом при применении дифференциального оператора $\mathcal{L}$ к ядру $(z-t)^{\mu}$.

Вид $\mathcal{L}$ дается формулой (5.3.6), причем гипергеометрическое уравнение (5.2.42) как раз имеет такой вид. Если применить оператор $\mathcal{L}$ к ядру $(z-t)^{\mu}$, то получится сложная алгебраическая функция z и t

$$\mathcal{L}_z((z-t)^{\mu}) = \mu(\mu-1)f(z)(z-t)^{\mu-2} + \mu g(z)(z-t)^{\mu-1} + h(z)(z-t)^{\mu}.$$

Ее нужно теперь представить в виде результата применения некоторого дифференциального оператора $\mathcal{M}$ к некоторой степени $z-t$. Можно найти вид $\mathcal{M}$ громоздким путем, если произвести деление на $(z-t)^{\mu-2}$, представить частное в виде билинейной формы z и t , а затем попытаться составить вид $\mathcal{M}$, который давал бы такой результат. Более красиво получится требуемый результат, если разложить функции f , g , h в ряды Тейлора около $z=t$ (это всегда можно сделать, так как f , g и h — многочлены по z).

Например, $f(z) = f(t) + (z-t)f'(t) + \frac{1}{2}(z-t)^2 f''(t) + \dots$ и т. д. Получится

$$\mathcal{L}_z((z-t)^\mu) = \mu(\mu-1)f(t)(z-t)^{\mu-2} + [\mu(\mu-1)f'(t) + \mu g(t)](z-t)^{\mu-1} + \\ + \left[\frac{1}{2}\mu(\mu-1)f''(t) + \mu g'(t) + h(t) \right](z-t)^\mu + \dots,$$

причем коэффициент четвертого члена ряда представляет собой линейную комбинацию третьей производной от f , второй производной от g и первой производной от h и т. д.

Чтобы полученное выражение представляло собой результат применения оператора второго порядка над $(z-t)^\mu$, четвертый и все высшие члены ряда должны равняться нулю. Имеется много способов выбора функций f, g, h , чтобы это было так, но простейший путь (и достаточный для наших целей здесь) — это потребовать, чтобы все производные f выше второго порядка, g выше первого и h выше нулевого порядка равнялись нулю. Другими словами, если $f(z)$ представляет собой многочлен второй степени по z , $g(z)$ — многочлен первой степени и $h(z)$ — постоянную, то приведенное выше выражение будет иметь только три выписанных члена, все высшие члены пропадут.

Мы видим, что это автоматически ограничивает нас уравнениями с тремя регулярными особыми точками, так как f , будучи квадратичной функцией, имеет два нуля, и если уравнение записать в виде (5.2.1)

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{g(z)}{f(z)} \frac{d\psi}{dz} + \frac{h(z)}{f(z)} \psi = 0,$$

то мы легко убедимся в том, что, вообще говоря, оно имеет три регулярные особые точки — две в корнях уравнения $f(z) = 0$ и одну на бесконечности. Гипергеометрическое уравнение имеет как раз такой вид (как, конечно, и должно быть). Обращаясь к уравнению (5.2.42), мы видим, что $f = z(z-1)$, $g = (a+b+1)z - c$, $h = ab$.

Однако достигнув столь многого, мы можем пойти еще дальше вперед в упрощении уравнения, так как мы свободны в выборе значения μ . Коэффициент при $(z-t)^\mu$ теперь не зависит от z и t , так как f'', g' и h постоянны. Следовательно, положив

$$\frac{1}{2}\mu(\mu-1)f'' + \mu g' + h = 0, \quad (5.3.10)$$

мы получим в качестве решений два значения μ , каждое из которых можно применить в интегральном представлении.

Значит, дифференциальный оператор $\mathcal{M}_t$ имеет вид

$$\mathcal{M}_t = \alpha(t) \frac{d^2}{dt^2} - \beta(t) \frac{d}{dt} + \gamma,$$

где

$$\alpha = f(t), \quad \beta = (\mu-1)f'(t) + g(t), \quad \gamma = \frac{1}{2}\mu(\mu-1)f'' + \mu g' + h, \quad (5.3.11)$$

а сопряженное уравнение и присоединенная билинейная форма таковы:

$$\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = \frac{d^2}{dt^2}[f(t)v] + \frac{d}{dt}[\beta(t)v] + \gamma v = 0, \quad (5.3.12)$$

$$P(v, K) = f v \frac{d}{dt}(z-t)^\mu - (z-t)^\mu \frac{d}{dt}(fv) - \beta v (z-t)^\mu = \\ = -\mu f v (z-t)^{\mu-1} - (\mu f' v + f v' + g v)(z-t)^\mu.$$

Если μ выбрано так, что (5.3.10) имеет место, то $\gamma = 0$ и уравнение для v можно быстро решить

$$y = fv, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{f} y \right), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\beta}{f} y, \quad \ln y = -\int \frac{\beta}{f} dt + \ln A$$

или

$$v(t) = \frac{A}{f} \exp \left\{ -\int \left[(\mu - 1) \frac{f'}{f} + \frac{g}{f} \right] dt \right\} = Af^{-\mu} e^{-\int (g/f) dt}$$

и

$$P(v, K) = -\mu f(t) v(t) (z-t)^{\mu-1}, \quad \phi = \int (z-t)^{\mu} v(t) dt, \quad (5.3.13)$$

где интеграл для ϕ таков, что P имеет одно и то же значение в начале и в конце пути интегрирования.

Заметим, что можно построить дифференциальное уравнение, которое можно пытаться решить при помощи преобразования Эйлера, имеющее *четыре* регулярные особые точки (из них одна на бесконечности), если принять за f многочлен третьей степени, за g — многочлен второй степени и за h — первой степени, а затем положить, что коэффициент при $(z-t)^{\mu+1}$ в ряде для $\mathcal{L}_z((z-t)^{\mu})$ равен нулю

$$\frac{1}{6} \mu (\mu - 1) f''' + \frac{1}{2} \mu g'' + h' = 0.$$

Так как f'' , g'' и h' постоянны, то это уравнение может служить для определения μ , взамен (5.3.10), после чего нам надо решать уравнение (5.3.12) для v , в котором γ не равно нулю. Однако ложкой дегтя в бочке меду в этом случае является то, что уравнение $\tilde{\mathcal{M}}(v) = 0$ *столь же сложно, как уравнение* $\mathcal{L}(\phi) = 0$, так как имеет столько же особых точек. Следовательно, преобразование Эйлера совсем не облегчает нам работы, как в случае уравнения с тремя особыми точками, когда γ можно положить равным нулю. Решение v не имеет простого вида, подобного (5.3.13), оно по-прежнему должно быть разложено в бесконечный ряд.

Отсюда видно, что преобразование Эйлера специально приспособлено к уравнениям типа Папперица (5.2.36) и, в частности, к гипергеометрической функции и к ее специальным случаям, функциям Лежандра (5.2.47) и функциям Гегенбауера (5.2.52).

Преобразование Эйлера для гипергеометрической функции. Гипергеометрическое уравнение.

$$\mathcal{L}_z(\psi) = (z^2 - z) \psi'' + [(a + b + 1)z - c] \psi' + ab\psi = 0$$

допускает решение при помощи преобразования Эйлера. Выражения для коэффициентов в операторе $\mathcal{M}_t$ таковы:

$$\alpha = f(t) = t(t-1), \quad \beta = (a + b + 2\mu - 1)t - (c + \mu - 1),$$

$$\gamma = \mu(\mu - 1) + \mu(a + b + 1) + ab,$$

а корнями уравнения $\gamma = 0$ являются $\mu = -a$, $\mu = -b$. Мы выберем $\mu = -a$; подстановка в (5.3.13) [при $g = (a + b + 1)z - c$] дает

$$v = At^{a-c} (t-1)^{c-b-1}, \quad P = aAt^{a-c+1} (t-1)^{c-b} (z-t)^{-a-1}.$$

Отсюда решением гипергеометрического уравнения будет интеграл

$$\psi = A \int (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt,$$

взятый в таких пределах и вдоль такого контура, что соответствующий интеграл от dP/dt обратится в нуль. В этом случае подинтегральная функция имеет точки ветвления (если только a , b и c не все целые) при $t=0, 1, z$ и ∞ . Если P обращается в нуль в двух из них, то мы можем принять их за пределы интегрирования; в противном случае мы можем взять интеграл по замкнутому контуру, чтобы P возвратился к своему исходному значению в конце обхода. Например, если $c > b > 0$, то P обращается в нуль при $t=1$ и $t=\infty$.

Чтобы получить разложение интеграла в степенной ряд для сравнения с гипергеометрическим рядом, разложим $(t-z)^{-a}$ под знаком интеграла

$$(t-z)^{-a} = t^{-a} \left[1 + a \left(\frac{z}{t} \right) + \frac{a(a+1)}{2!} \left(\frac{z}{t} \right)^2 + \dots \right]$$

и применим формулу [см. (4.5.54)]

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_1^\infty t^{-m-n} (t-1)^{n-1} dt.$$

Сравнение с определением гипергеометрического ряда, данным формулой (5.2.44), показывает, что

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^\infty (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt, \quad (5.3.14)$$

причем это справедливо при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, если z не является вещественным числом, большим единицы. Для случая $\operatorname{Re} b \leq 0$ в этой формуле можно переставить a и b и получить другое равносильное представление, так как $F(a, b | c | z) = F(b, a | c | z)$.

Таким образом, интеграл (5.3.14) можно рассматривать как «истинную» гипергеометрическую функцию, для которой можно получить разложение в ряд около любой точки. Интересно заметить, что это интегральное представление имеет совершенно иной внешний вид, чем равносильное представление (5.3.4). Однако на самом деле это различие является поверхностным, так как гамма-функция тесно связана с преобразованием Эйлера, что выяснится при решении некоторых задач.

В качестве интересного применения этой формулы получим выражение для одного из решений уравнения Папперица (5.2.36), данных формулой (5.2.46). Полагая $t = (u-a)(b-c)/(u-c)(b-a)$ (где a , b и c теперь представляют собой положения особых точек, а не индексы, как выше), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{z-a}{z-c} \frac{b-c}{b-a} \right)^\lambda \left(\frac{z-b}{z-c} \frac{a-c}{a-b} \right)^\mu F \left(\lambda + \mu + \nu, \lambda + \mu + \nu' | \lambda - \lambda' + 1 | \frac{z-a}{z-c} \frac{b-c}{b-a} \right) = \\ & = \frac{(-1)^{\mu+\lambda} \Gamma(\lambda - \lambda' + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + \nu') \Gamma(\lambda + \mu' + \nu)} (z-a)^\lambda (z-b)^\mu (z-c)^\nu (a-c)^{\mu'} (c-b)^{\lambda'} (b-a)^{\nu'} \times \\ & \times \int_b^c (u-z)^{-\lambda-\mu-\nu} (u-a)^{-\lambda-\mu'-\nu'} (u-b)^{-\lambda'-\mu-\nu'} (u-c)^{-\lambda'-\mu'-\nu} du, \quad (5.3.15) \end{aligned}$$

где $\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \nu + \nu' = 1$. Эта формула примечательно симметрична относительно особых точек и их индексов. Из нее, полагая a, b, c равными $0, 1, \infty$ в различном порядке, можно получить целый ряд полезных

интегральных представлений для различных решений гипергеометрического уравнения около каждой из особых точек.

Интеграл (5.3.14) допускает различные видоизменения, из которых получается большое число полезных и интересных соотношений. Например, формулу (5.2.49), связывающую решение вблизи $z = 0$ с решениями вблизи $z = 1$, можно вывести значительно более удовлетворительным способом, чем это

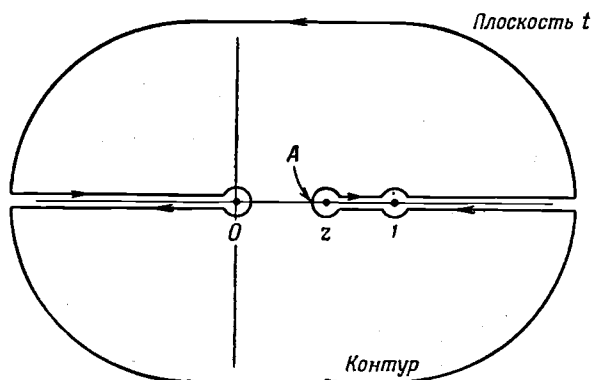


Рис. 5.6. Контур интегрирования для получения соотношений, связывающих гипергеометрическую функцию.

Подинтегральная функция вещественна в точке A, если только z вещественно.

было сделано на стр. 515, где пришлось сделать различные ограничения, суживающие пределы справедливости результата. Мы отправляемся от интеграла

$$\oint (z-t)^{-a} t^{a-c} (1-t)^{c-b-1} dt = 0,$$

взятого по контуру, показанному на рис. 5.6, тщательно обходящему все особенности подинтегральной функции. Будем считать подинтегральную функцию вещественной в точке A, показанной на рисунке, то есть для t , лежащего на вещественной оси и несколько меньшего z , но большего нуля (мы предполагаем здесь, что z вещественно; это не необходимо, но делает преобразования несколько менее сложными; действительно необходимым является, чтобы z не лежало на вещественной оси между $+1$ и $+\infty$).

Если теперь $\operatorname{Re} b \leq \operatorname{Re} c \leq 1 + \operatorname{Re} a \leq 2$, то можно применить методы, описанные на стр. 388, чтобы показать, что приведенное выше равенство равносильно

$$\begin{aligned} \sin(\pi a) \int_z^1 (t-z)^{-a} t^{a-c} (1-t)^{c-b-1} dt - \\ - \sin \pi(a+b-c) \int_1^\infty (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt - \\ - \sin \pi(a-c) \int_0^{-\infty} (z-t)^{-a} (-t)^{a-c} (1-t)^{c-b-1} dt = 0. \end{aligned}$$

Теперь мы при помощи формулы $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ заменим

$$\frac{\sin \pi(c-a)}{\sin \pi(c-a-b)} \text{ на } \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a-c+1)} \text{ и } \frac{\sin(\pi a)}{\sin \pi(a+b-c)}$$

на $\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}$. В первом интеграле положим $t = (\omega + z - 1)/\omega$, а в третьем $t = 1 - u$; это после преобразований даст

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a-c+1)} \int_1^\infty (u-1+z)^{-a} u^{c-b-1} (u-1)^{a-c} du + \\ &+ \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} (1-z)^{c-a-b} \int_1^\infty (\omega-1+z)^{a-c} \omega^{b-1} (\omega-1)^{-a} d\omega, \end{aligned}$$

откуда, после применения соотношения (5.3.14) в обратном порядке, сразу следует формула (5.2.49). В данном случае нами было поставлено ограничение $\operatorname{Re} b \leq \operatorname{Re} c \leq 1 + \operatorname{Re} a \leq 2$. Так как результат получен при помощи изменения контуров интегрирования и подстановки гамма-функции и других конечных действий, то он, возможно, производит более надежное впечатление, чем когда он был ранее выведен при помощи жонглирования с бесконечными рядами.

В результате обоих выводов и при помощи аналитического продолжения можно продолжить эту формулу перехода на более обширную область изменения a, b и c . Так, в предыдущем выводе предполагалось, что $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} c - \operatorname{Re} a$, а в данном — что $\operatorname{Re} b \leq \operatorname{Re} c$; таким образом, в результате обоих выводов получаем, что формула имеет место для всех тех b , для которых функции аналитичны. Поскольку z не равно единице, функция $F(a, b | c | z)$ аналитична по a, b и c , за исключением значений a и $b = \infty$ и c , равных нулю или отрицательным целым. Правая часть равенства (5.2.49) аналитична по a, b и c , за исключением значений для c отрицательных целых или нулевого и для $a+b-c$ любых целых. Для любого из этих параметров можно найти область, в которой выполняется одно или другое ограничение, сделанное нами при выводе формулы (5.2.49), и которая в то же время покрывается более широкой областью, где F аналитична. Значит, при помощи аналитического продолжения справедливость равенства распространяется на всю область значений a, b и c , где его левая и правая части аналитичны. Другую формулу связи (5.3.5) можно продолжить подобным же образом. Вместе обе они дают возможность выразить любое решение гипергеометрического уравнения вблизи одной из трех особых точек через решения, построенные вблизи любой из двух других особых точек. Таким образом, для случая уравнений с тремя регулярными особыми точками мы полностью решили проблему коэффициентов перехода, упомянутую на стр. 542.

Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда. Другую совокупность формул, полезных для дальнейших выкладок, можно получить посредством дальнейших видоизменений интегрального выражения (5.3.14). Положив $t = 1/u$ и $u = 1 - \omega$, получим

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-uz)^{-a} du =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(c) (1-z)^{-a}}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 w^{c-b-1} (1-w)^{b-1} \left(1 - \frac{wz}{z-1}\right)^{-a} dw = \\
&= (1-z)^{-a} F\left(a, c-b | c | \frac{z}{z-1}\right). \quad (5.3.16)
\end{aligned}$$

Наконец, применяя это соотношение к правой части равенства (5.2.50), мы можем получить еще одно соотношение

$$F\left(a, b \left| \frac{a+b+1}{2} \right| \frac{1-z}{2}\right) = z^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2} \left| \frac{a+b+1}{2} \right| 1 - \frac{1}{z^2}\right). \quad (5.3.17)$$

Можно применить также интегральное представление F для вывода различных рекуррентных соотношений между смежными функциями. Например, так как

$$\begin{aligned}
(z-t)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} &= z(z-t)^{-a-1} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} - \\
&- (z-t)^{-a-1} t^{a-c+1} (t-1)^{c-b-1},
\end{aligned}$$

то

$$-F(a, b | c | z) = (bz/c) F(a+1, b+1 | c+1 | z) - F(a+1, b | c | z).$$

А из $(d/dz)(z-t)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} = a(z-t)^{-a-1} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1}$ получаем $\frac{d}{dz} F(a, b | c | z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1 | c+1 | z)$; обе эти формулы, конечно, можно легко вывести при помощи преобразования гипергеометрического ряда.

Прежде чем окончить наше рассмотрение гипергеометрической функции, следует еще убедиться в справедливости утверждения, сделанного на стр. 548, что различные независимые решения дифференциального уравнения можно получить при помощи изменения пределов интегрирования в интегральном представлении, не меняя вида подинтегральной функции. Если в случае гипергеометрического уравнения взять за первое решение $F(a, b | c | z)$, вторым решением около $z=0$, согласно формуле (5.2.45), будет

$$y_2 = z^{1-c} F(b-c+1, a-c+1 | 2-c | z).$$

Применение формулы (5.3.14) для интегрального представления новой F дает выражение

$$Ay_2 = \frac{A\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-a)} z^{1-c} \int_1^\infty (u-z)^{c-b-1} u^{b-1} (u-1)^{-a} du,$$

где подинтегральная функция имеет отличный вид от того, который был у первого решения (5.3.14). Однако, полагая $u=z/t$ и

$$A = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-c+1) \Gamma(1-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b) \Gamma(2-c)},$$

мы получаем в результате интегральное представление второго решения

$$\begin{aligned}
Ay_2 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^z (z-t)^{-a} t^{a-c} (1-t)^{c-b-1} dt = \\
&= \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-c+1) \Gamma(1-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b) \Gamma(2-c)} z^{1-c} F(b-c+1, a-c+1 | 2-c | z), \quad (5.3.18)
\end{aligned}$$

справедливое при $\operatorname{Re} c < \operatorname{Re} a + 1 < 2$. Эта формула для второго решения отличается от формулы (5.3.14) для первого решения лишь пределами интегрирования, что и доказывает наше предыдущее утверждение, во всяком случае, для гипергеометрического уравнения.

Заменяя $2 - c$ на c , $b - c + 1$ на a и $a - c + 1$ на b , мы найдем, что

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c) z^{1-c}}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \times$$

$$\times \int_0^z (z-t)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a} dt, \quad (5.3.19)$$

Рис. 5.7. Контур C для интегрального представления гипергеометрической функции при помощи преобразования Эйлера.

Подинтегральная функция вещественна в точке A , если z вещественно.

и, таким образом, получим еще одно представление первого решения при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, как и выше. Этот интеграл можно заменить на интеграл по замкнутому контуру вокруг 0 и z , если мы сможем выбрать контур так, чтобы подинтегральная функция после обхода возвратилась к своему исходному значению. Для этого требуется двойной обход, показанный на рис. 5.7, при котором каждая точка обходится по одному разу в обоих направлениях. Обозначая интеграл в (5.3.19) через J , имеем

$$\oint_C (t-z)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a} dt = e^{i\pi b} [e^{i\pi(c-2b)} - e^{i\pi c} + e^{-i\pi(c-2b)} - e^{-i\pi c}] J =$$

$$= 4e^{i\pi b} \sin(\pi b) \sin \pi(c-b) J = \frac{4\pi^2 e^{i\pi b} J}{\Gamma(b) \Gamma(1-b) \Gamma(c-b) \Gamma(1+b-c)}.$$

Отсюда контурный интеграл для F имеет вид

$$F(a, b | c | z) = \frac{e^{-i\pi b} z^{1-c}}{4\pi^2} \Gamma(c) \Gamma(1+b-c) \Gamma(1-b) \times$$

$$\times \oint_C (t-z)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a} dt. \quad (5.3.20)$$

Эту формулу можно теперь распространить при помощи аналитического продолжения на всю область значений a, b и c , кроме тех, при которых гамма-функция обращается в бесконечность.

Наконец, при помощи подстановки $t = (u-z)/(1-u)$ в (5.3.19) можно получить формулу

$$F(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c) z^{1-c} (1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^z (z-u)^{b-1} u^{c-b-1} (1-u)^{a-c} du, \quad (5.3.21)$$

которую опять можно было бы преобразовать в контурный интеграл подобно (5.3.20).

Итак, мы нашли интегральные представления обоих решений гипергеометрического уравнения, справедливые в широких областях значений параметров a, b, c . При помощи соотношений между значениями F можно было бы получить другие представления, справедливые в других областях. Однако в этом обычно нет необходимости, так как интегральные представления применяются главным образом для получения других формул, таких, как рекурсивные соотношения, разложения в ряды и т. п. Получив такие формулы при помощи интегральных представлений, можно посред-

ством аналитического продолжения распространить их на другие области параметров за пределами области применимости представления, если в этом есть необходимость и если сами формулы допускают это.

До перехода к дальнейшему детальному исследованию свойств общей гипергеометрической функции будет полезно рассмотреть некоторые частные случаи, представляющие особый интерес для последующего изложения.

Функции Лежандра. Функции Гегенбауера, определенные на стр. 516, представляют собой частный случай гипергеометрических функций, поскольку они зависят от двух параметров α и β , вместо трех a , b и c . Однако эти функции охватывают значительное большинство функций гипергеометрического типа, встречающихся в настоящее время в математической физике, так что их специальные свойства важно рассмотреть в некоторых деталях. Уравнение имеет вид

$$(z^2 - 1)\psi'' + 2(\beta + 1)z\psi' - \alpha(\alpha + 2\beta + 1)\psi = 0 \quad (5.3.22)$$

и обладает тремя регулярными особыми точками -1 , $+1$ и ∞ с индексами $(0, -\beta)$, $(0, +\beta)$ и $(-\alpha, \alpha + 2\beta + 1)$ соответственно.

Интересно и полезно заметить, что непосредственное дифференцирование уравнения дает

$$(z^2 - 1)\psi''' + 2(\beta + 2)z\psi'' - (\alpha - 1)(\alpha + 2\beta + 2)\psi' = 0,$$

откуда видно, что если $T_\alpha^\beta(z)$ есть решение уравнения (5.3.22), то $T_{\alpha-1}^{\beta+1}(z)$ — решение последнего уравнения. Это показывает, что решения для целых значений $\beta > 0$ можно получить из функций $T_\alpha^0(z)$ посредством дифференцирования. Легко видеть также, что если $T_\alpha^\beta(z)$ есть решение уравнения (5.3.22), то $T_{-\alpha-2\beta-1}^\beta(z)$ — также решение того же уравнения.

Уравнение для $T_\alpha^0(z)$

$$(z^2 - 1)\psi'' + 2z\psi' - \alpha(\alpha + 1)\psi = 0 \quad (5.3.23)$$

называется *уравнением Лежандра*. Если α целое положительное, то его можно получить при помощи $(\alpha + 1)$ -кратного дифференцирования из уравнения

$$(z^2 - 1)dV/dz - 2\alpha zV = 0,$$

где $V = (z^2 - 1)^\alpha$, если в полученном уравнении принять $d^\alpha V/dz^\alpha$ за ψ . Следовательно, если α целое положительное, то одно решение уравнения Лежандра пропорционально $d^\alpha(z^2 - 1)^\alpha/dz^\alpha$.

Отметив эти простые свойства, применим технику настоящего параграфа для определения решений уравнения (5.3.22) при всех значениях α и β и для разложений этих функций вокруг трех особых точек.

Возвращаясь к стр. 550, где был указан общий метод построения интегральных представлений для уравнений с тремя регулярными особыми точками, положим в этом уравнении $f(t) = t^2 - 1$, $g(t) = 2(\beta + 1)t$, $h = -\alpha(\alpha + 2\beta + 1)$. Уравнение (5.3.10) для определения μ приобретает вид

$$\mu^2 + (2\beta + 1)\mu - \alpha(\alpha + 2\beta + 1) = 0,$$

так что $\mu = \alpha$ или $-\alpha - 2\beta - 1$. Поэтому из формул (5.3.13) мы получаем два различных интегральных представления решения и две присоединенные билинейные формы

$$\phi = A \int \frac{(z-t)^\alpha}{(t^2-1)^{\alpha+\beta+1}} dt, \quad P = -\alpha \frac{(z-t)^{\alpha-1}}{(t^2-1)^{\alpha+\beta}}, \quad \mu = \alpha,$$

$$\phi = B \int \frac{(t^2-1)^{\alpha+\beta}}{(z-t)^{\alpha+2\beta+1}} dt, \quad P = (\alpha + 2\beta + 1) \frac{(t^2-1)^{\alpha+\beta+1}}{(z-t)^{\alpha+2\beta+2}},$$

$$\mu = -\alpha - 2\beta - 1;$$

как обычно в таких представлениях один интеграл можно преобразовать в другой при помощи подходящей замены переменной интегрирования и пределов интегрирования. Для начала мы можем считать вещественные части α и β положительными, так как противоположный случай можно потом получить посредством аналитического продолжения. Если $\operatorname{Re} \alpha$ и $\operatorname{Re} \beta > 0$, то подходящими пределами интеграла в первом представлении будут $t=z$ и $t=\infty$; кроме того, интеграл можно взять по замкнутому контуру вокруг точек -1 , $+1$ и z в таком порядке, чтобы после обхода P возвратилась к своему исходному значению.

Отправляясь от случая $\beta=0$, найдем сначала решение, пропорциональное производной порядка α от $(z^2-1)^\alpha$, если $\alpha \geq 0$ целое. Из формулы (4.3.1) мы видим, что проще всего взять второй упомянутый интеграл по замкнутому контуру, окружающему точку $t=z$, и, например, точку $t=1$. Соответственно положим

$$T_\alpha^0(z) = P_\alpha(z) = A \oint_D \frac{(t^2-1)^\alpha}{(t-z)^{\alpha+1}} dt = \frac{2\pi i A}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n,$$

где $\alpha=n=0, 1, 2, \dots$, а контур обходит против часовой стрелки обе точки $t=1$ и $t=z$, как это показано на рис. 5.8. Подинтегральная

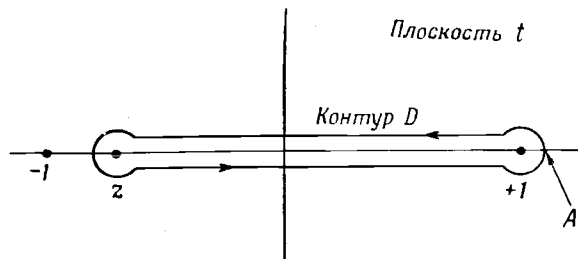


Рис. 5.8. Контур D для интегрального представления функции Лежандра первого рода.

функция предполагается вещественной в точке A , если z расположено на вещественной оси между $+1$ и -1 . Заметим, что если z находится на вещественной оси слева от -1 , то (если α не целое) интеграл принимает различные значения в зависимости от того, проходит ли контур сверху или снизу точки $t=-1$. Поэтому мы сделаем разрез вдоль отрицательной вещественной полуоси от -1 до $-\infty$, чтобы сохранить функцию $T_\alpha^0(z)$ однозначной.

Для $-1 < \operatorname{Re} \alpha < 0$ интеграл по замкнутому контуру можно заменить на простой интеграл от $t=z$ до $t=1$. Отсюда, полагая $t=1-2u$ и применяя формулу (5.3.19), получим разложение P_α в ряд

$$\begin{aligned} T_\alpha^0(z) &= -2iA \sin(\pi\alpha) \int_z^1 (t-z)^{-\alpha-1} (1-t)^\alpha (1+t)^\alpha dt = \\ &= \frac{2\pi i A 2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(-\alpha)} \int_0^{(1-z)/2} \left(\frac{1-z}{2} - u\right)^{-\alpha-1} u^\alpha (1-u)^\alpha du = \\ &= 2\pi i A 2^\alpha F[-\alpha, \alpha+1 | 1 | (1-z)/2], \end{aligned}$$

причем окончательный результат можно распространить при помощи аналитического продолжения на всю область значений α , для которых

гипергеометрический ряд аналитичен. Так как удобно считать $T_\alpha^0(1) = 1$, то положим $A = 1/2^{\alpha+1} \pi i$, так что

$$P_\alpha(z) = T_\alpha^0(z) = \frac{1}{2^{\alpha+1} \pi i} \oint_D \frac{(t^2-1)^\alpha}{(t-z)^{\alpha+1}} dt = F\left(-\alpha, \alpha+1 \mid 1 \mid \frac{1-z}{2}\right); \quad (5.3.24)$$

эту формулу можно принять за *основное определение функции Лежандра* $P_\alpha(z)$. Заметим, что $P_{-\alpha-1}(z) = P_\alpha(z)$ в силу симметрии F .

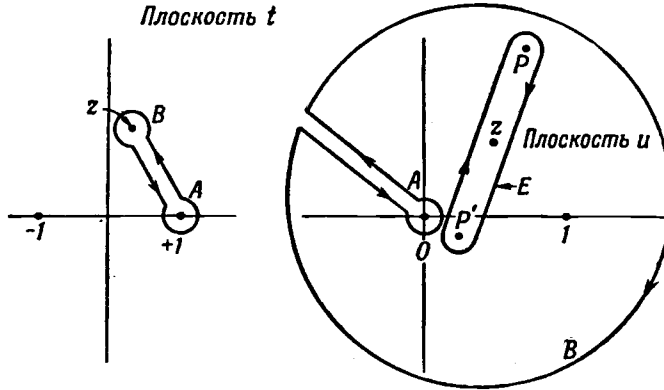


Рис. 5.9. Контур E для интегрального представления функции Лежандра первого рода.

Эта формула позволяет также подсчитать поведение $P_\alpha(z)$ для очень больших значений z . На основе соотношения (5.3.17)

$$P_\alpha(z) = F\left(-\alpha, \alpha+1 \mid 1 \mid \frac{1-z}{2}\right) = z^\alpha F\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2} \mid 1 \mid 1 - \frac{1}{z^2}\right).$$

Применяя формулу (5.2.49) и равенства $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$ и $\sqrt{\pi} \Gamma(2x) = 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$, в конце концов получаем, что

$$P^\alpha(z) = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1)} (2z)^\alpha F\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2} \mid \frac{1-2\alpha}{2} \mid \frac{1}{z^2}\right) + \\ + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)} \frac{\operatorname{tg}(\pi\alpha)}{(2z)^{\alpha+1}} F\left(\frac{2+\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2} \mid \frac{2\alpha+3}{2} \mid \frac{1}{z^2}\right), \quad (5.3.25)$$

так что при положительном α для очень больших z P_α имеет порядок z^α .

Другое полезное интегральное представление можно получить из формулы (5.3.24), если положить $u = \frac{1}{2}(t^2-1)/(t-z)$ или $t = u + \sqrt{u^2 - 2uz + 1}$, где t вещественно для вещественных z и u , $|z| < 1$ и $u > 1$. Преобразованный интеграл имеет вид

$$P_\alpha(z) = T_\alpha^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_E \frac{u^\alpha du}{\sqrt{1-2uz+u^2}},$$

где контур E показан на рис. 5.9; часть A , соответствующая обходу около $t=1$, переходит в обход вокруг $u=0$, а часть B , бывшая обходом вокруг $t=z$, переходит в обход на очень большом расстоянии вокруг точки $u=0$ вне $u=1$ и $u=z$. Функция $\sqrt{1-2uz+u^2}$ имеет нули при

$u = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ (на рис. 5.9 точки P и P'), так что наш контур приводится к контуру, обозначенному через E , обходящему эти две точки.

Так как $P_\alpha(z) = P_{-\alpha-1}(z)$, то имеем также

$$P_\alpha(z) = T_\alpha^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_E \frac{u^{-\alpha-1} du}{\sqrt{u^2 - 2uz + 1}}. \quad (5.3.26)$$

Если α целое положительное, то интеграл по большой окружности B обращается в нуль и E приводится к окружности A с центром в $u = 0$, так что по формуле (4.3.1)

$$P_n(z) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{du^n} \frac{1}{\sqrt{u^2 - 2uz + 1}} \right]_{u=0}$$

и при помощи ряда Тейлора (4.3.3) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z), \quad (5.3.27)$$

где $|h|$ должно быть меньше расстояния от начала координат до точек P или P' рис. 5.9, а $|z| \leq 1$. Аналогично при помощи ряда Лорана и интеграла с u^α получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h^{n+1}} P_n(z),$$

где $|h|$ должно быть больше чем $|z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$ либо $z < -1$. Отсюда получаем полезную общую формулу

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta + r_2^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_2^n}{r_1^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad r_2 < r_1. \quad (5.3.28)$$

Функции Лежандра второго рода. Второе решение уравнения Лежандра должно получиться при помощи контура, отличного от того, который был в интегральном выражении (5.3.24). Мы не можем просто применить вид второго решения гипергеометрического уравнения, данный в формуле (5.3.18), так как для $s = 1$ $y_2 = y_1$. В данном случае, так как присоединенная билинейная форма для (5.3.24) обращается в нуль при $t = \pm 1$, для образования второго решения можно применить интеграл

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^\alpha (z - t)^{-\alpha-1} dt.$$

Поэтому мы определяем функцию

$$Q_\alpha(z) = \frac{1}{2^{\alpha+1}} \int_{-1}^1 \frac{(1 - t^2)^\alpha}{(z - t)^{\alpha+1}} dt \quad (5.3.29)$$

как *функцию Лежандра второго рода*. Для этой формы $\operatorname{Re} \alpha > -1$, а z не должно быть вещественным числом между -1 и $+1$.

Для отрицательных значений $\operatorname{Re} \alpha$ ($\operatorname{Re} \alpha < -1$) нам надо взять контурный интеграл вокруг $+1$ и -1 . Чтобы присоединенная билинейная форма вернулась к своему исходному значению, сделаем контур имеющим вид восьмерки, обходящей вокруг $t = -1$ в положительном направлении,

а вокруг $t = +1$ в отрицательном направлении. Отсюда, после преобразований,

$$Q_\alpha(z) = \frac{-1}{2^{\alpha+2} i \sin(\pi\alpha)} \oint_C \frac{(t^2-1)^\alpha}{(z-t)^{\alpha+1}} dt,$$

если только α не целое. Об оставшемся случае, когда α целое отрицательное, можно позаботиться, положив $Q_{-n}(z) = Q_{n-1}(z)$, что допустимо в силу нашего замечания на стр. 559. Обе интегральные формулы показывают, что для однозначности Q надо произвести разрез от $z = +1$ до $z = -1$.

Если α целое положительное или нуль, интеграл (5.3.29) берется, что даст

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln [(z+1)/(z-1)], \quad Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln [(z+1)/(z-1)] - 1 \text{ и т. д.}$$

Даже если α не целое, $Q_\alpha(z)$ имеет логарифмические особенности при $z = \pm 1$. Для больших значений z можно произвести разложение в ряд по степеням $1/z$ следующим образом:

$$Q_\alpha^\pm(z) = \frac{1}{(2z)^{\alpha+1}} \int_{-1}^1 dt \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+m+1)}{\Gamma(\alpha+1)m!} \left(\frac{t}{z}\right)^m (1-t^2)^\alpha \right\}, \quad m=2n.$$

Интегралы для нечетных m равны нулю, так что можно положить $u = t^2$ и получить

$$Q_\alpha(z) = \frac{1}{(2z)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2n+1)} \times \left(\frac{1}{z^{2n}}\right) \int_0^1 u^{n-\frac{1}{2}} (1-u)^\alpha du, \quad m=2n$$

Применяя формулу (4.5.54) для подсчета интегралов и равенство $\sqrt{\pi} \Gamma(2x) = 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$ несколько раз, мы в конце концов придем к выражению для Q_α , полезному для больших значений z

$$Q_\alpha(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{(2z)^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)} F\left(\frac{2+\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2} \middle| \alpha + \frac{3}{2} \middle| \frac{1}{z^2}\right), \quad (5.3.30)$$

если только α не является целым отрицательным (в последнем особом случае $Q_{-n} = Q_{n-1}$). Отсюда мы видим, что $Q_\alpha(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, если только $\operatorname{Re} \alpha > -1$; сравните это с соответствующим выражением (5.3.25) для $P_\alpha(z)$.

Имеется несколько интересных взаимосвязей между функциями Лежандра первого и второго рода. Одну из них можно получить посредством показанного на рис. 5.10 преобразования контура для $P_\alpha(-z)$. Положим сначала $t = -u$ в контурном интеграле для $P_\alpha(-z)$, а затем заменим

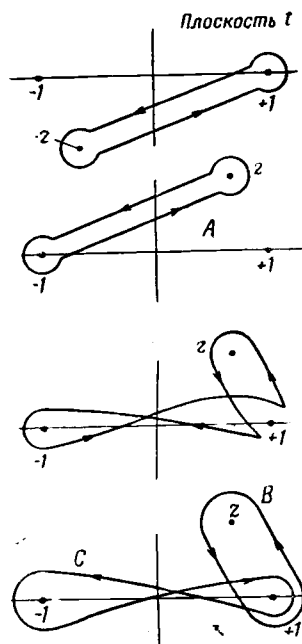


Рис. 5.10. Преобразование контура для установления связи $P_\alpha(-z)$ с $P_\alpha(z)$ и $Q_\alpha(z)$.

контуры, как показано

$$\begin{aligned} P_\alpha(-z) &= \frac{-1}{2^{\alpha+1}\pi i} \oint_A \frac{(u^2-1)^\alpha}{(z-u)^{\alpha+1}} du = \\ &= \frac{-1}{2^{\alpha+1}\pi i} \oint_C \frac{(u^2-1)^\alpha}{(z-u)^{\alpha+1}} du - \frac{1}{2^{\alpha+1}\pi i} \oint_B \frac{(u^2-1)^\alpha}{(z-u)^{\alpha+1}} du. \end{aligned}$$

Но контур C как раз такой, как при представлении функции Q_α , а контур B — функции P_α . Кроме того, $z-u$ во втором интеграле надо заменить на $u-z$, чтобы получилось так же, как в (5.3.24). Если $\operatorname{Im} z > 0$, как показано на чертеже, то $z-u = e^{i\pi}(u-z)$; если $\operatorname{Im} z < 0$, то $z-u = e^{-i\pi}(u-z)$. Отсюда получаем

$$P_\alpha(-z) = -[(2/\pi \sin(\pi\alpha)] Q_\alpha(z) + e^{\mp i\pi\alpha} P_\alpha(z), \quad (5.3.31)$$

где знак $-$ в показателе надо взять, если $\operatorname{Im} z > 0$, а знак $+$, если $\operatorname{Im} z < 0$. Это равенство показывает природу особенности $P_\alpha(z)$. Если только α не целое, то $P_\alpha(z)$ (равное единице при $z=1$) имеет логарифмическую особенность при $z=-1$; если же n целое, то $P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n$.

Эта формула дает также возможность получить выражение $Q_{-\alpha-1}$ через Q_α и P_α для любых значений α . Так как для всех α имеем $P_\alpha(z) = P_{-\alpha-1}(z)$, то выведенное равенство можно преобразовать в

$$Q_{-\alpha-1}(z) = Q_\alpha(z) - \pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha) P_\alpha(z), \quad (5.3.32)$$

что законно для всех не целых α . Для $\alpha = n = 0, 1, 2, \dots$ имеем простую формулу $Q_{-n-1}(z) = Q_n(z)$.

Так как P и Q — независимые решения, то их определитель Вронского $P_\alpha Q'_\alpha - P'_\alpha Q_\alpha$ не должен равняться нулю. В силу формулы (5.2.3), поскольку $p = 2z/(z^2-1) = d \ln(z^2-1)/dz$, получаем

$$\Delta(P_\alpha, Q_\alpha) = C/(z^2-1),$$

где постоянную C можно найти, подсчитав ее значение для некоторого частного значения z . Выберем точку на бесконечности, где мы сможем применить формулы (5.3.25) и (5.3.30). Так как для очень больших z

$$P_\alpha(z) \simeq 2^\alpha \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) z^\alpha / \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1),$$

$$Q_\alpha(z) \simeq \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1) / 2^{\alpha+1} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) z^{\alpha+1},$$

то подсчет дает

$$P_\alpha(z) Q'_\alpha(z) - P'_\alpha(z) Q_\alpha(z) \simeq (-\alpha - 1 - \alpha) / [(2\alpha+1)z^2], \quad z \rightarrow \infty,$$

так что $C = -1$ и потому для всех значений z имеем

$$\Delta(P_\alpha, Q_\alpha) = P_\alpha(z) Q'_\alpha(z) - Q_\alpha(z) P'_\alpha(z) = 1/(1-z^2). \quad (5.3.33)$$

Следовательно, из (5.2.4) получаем

$$Q_\alpha(z) = P_\alpha(z) \int_z^\infty \frac{du}{[P_\alpha(u)]^2} (u^2-1).$$

Наконец, мы можем применить интегральные представления (5.3.24) или (5.3.29) для P или Q , чтобы получить рекуррентные формулы для функций Лежандра. Пусть $p_\alpha(z)$ равно $P_\alpha(z)$ или $Q_\alpha(z)$ или любой ли-

нейной комбинации этих двух функций (с коэффициентами, не зависящими от α). Тогда

$$p_{\alpha}(z) = \frac{K}{2^{\alpha}} \int \frac{(t^2-1)^{\alpha}}{(t-z)^{\alpha+1}} dt,$$

где интеграл взят по любому из числа допустимых контуров, в зависимости от выбранной линейной комбинации. В любом случае контур таков, что интеграл $\int d[(t^2-1)^{\alpha+1}/(t-z)^{\alpha+1}]$ равен нулю. Отсюда

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{K}{2^{\alpha+1}} \int \frac{d}{dt} \left[\frac{(t^2-1)^{\alpha+1}}{(t-z)^{\alpha+1}} \right] dt = \\ &= \frac{K(\alpha+1)}{2^{\alpha+1}} \int \left\{ \frac{2t(t^2-1)^{\alpha}}{(t-z)^{\alpha+1}} - \frac{(t^2-1)^{\alpha+1}}{(t-z)^{\alpha+2}} \right\} dt = \\ &= \frac{K(\alpha+1)}{2^{\alpha}} \int \frac{(t^2-1)^{\alpha}}{(t-z)^{\alpha}} dt + z \frac{K(\alpha+1)}{2^{\alpha}} \int \frac{(t^2-1)^{\alpha}}{(t-z)^{\alpha+1}} dt - \frac{K(\alpha+1)}{2^{\alpha+1}} \int \frac{(t^2-1)^{\alpha+1}}{(t-z)^{\alpha+2}} dt. \end{aligned}$$

Дифференцируя по z и разделив на $\alpha+1$, имеем

$$p'_{\alpha+1}(z) - zp'_{\alpha}(z) = (\alpha+1)p_{\alpha}(z),$$

где штрих, как обычно, означает производную по z .

Для другого соотношения произведем разложение интеграла $\int d[t(t^2-1)^{\alpha}/(t-z)^{\alpha}] = 0$, что даст

$$(\alpha+1)p_{\alpha+1}(z) - (2\alpha+1)zp_{\alpha}(z) + \alpha p_{\alpha-1}(z) = 0.$$

Комбинируя и дифференцируя эти равенства, получим

$$\begin{aligned} zp_{\alpha}(z) &= [1/(2\alpha+1)] [(\alpha+1)p_{\alpha+1}(z) + \alpha p_{\alpha-1}(z)], \\ p'_{\alpha+1}(z) - p'_{\alpha-1}(z) &= (2\alpha+1)p_{\alpha}(z), \\ p'_{\alpha}(z) &= [\alpha/(z^2-1)] [zp_{\alpha}(z) - p_{\alpha-1}(z)], \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

где p_{α} равно P_{α} , или Q_{α} , или линейной комбинации этих функций. Наконец, применяя равенство (5.3.33), получаем еще одно соотношение между P и Q

$$\alpha [P_{\alpha}(z)Q_{\alpha-1}(z) - P_{\alpha-1}(z)Q_{\alpha}(z)] = 1.$$

Полиномы Гегенбауера. Теперь довольно легко распространить наши выкладки на более общие функции, определенные формулами (5.2.52) и следующими. В качестве основного решения мы можем взять либо функцию T_{α}^{β} , конечную при целом α , либо же функцию $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}m}P_{\alpha+\beta}^{\beta}$, упрощающуюся при целом β (если α и β целые, то обе функции равны). Мы предпочтем первый выбор, так как случай, когда α целое, а β не целое более интересен, чем противоположный. Соответственно определим [см. (5.3.21)]

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\beta}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{2^{\beta}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} F\left(\alpha+2\beta+1, -\alpha | 1+\beta | \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right) = \\ &= \frac{e^{i\pi(\alpha+\beta)}\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+2}\pi\Gamma(\alpha+\beta+1)\sin[\pi(\alpha+\beta)]} \oint_C \frac{(t^2-1)^{\alpha+\beta}}{(t-z)^{\alpha+1}} dt, \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

где контур C тот же, что на рис. 5.7, обходящий вокруг точек $t=1$ и $t=z$ как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Если α целое, интеграл можно преобразовать к виду производной, данному в (5.2.53).

С другой стороны, если бы мы предпочли другое решение, мы могли определить

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) = \frac{(z-1)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} F\left(-\alpha-\beta, \alpha+\beta+1 \mid 1-\beta \mid \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right) = \\ = \frac{e^{-i\pi(\alpha+\beta)} \Gamma(\alpha+2\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+2} \pi \Gamma(\alpha+\beta+1) \sin[\pi(\alpha+\beta)]} \oint_C \frac{(t^2-1)^{\alpha+\beta}}{(t-z)^{\alpha+2\beta+1}} dt, \quad (5.3.36)$$

которое при целом положительном $\beta = m$ равно $T_{\alpha}^m(z)$, совпадающей в данном случае с m -й производной функцией Лежандра $P_{m+\alpha}(z)$. Если как α , так и β целые, то

$$T_n^m(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}m} P_{m+n}^m(z) = \frac{d^m}{dz^m} T_{m+n}^0(z) = \\ = \frac{(n+2m)!}{2^{m+n} n! (n+m)!} \frac{1}{(z^2-1)^m} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^{m+n} = \\ = \frac{1}{2^{m+n} (n+m)!} \frac{d^{n+2m}}{dz^{n+2m}} (z^2-1)^{m+n}, \quad (5.3.37)$$

как указано в (5.2.53). Эти полиномы называются *присоединенными полиномами Лежандра*.

Из симметрии гипергеометрических функций имеем

$$T_{-\alpha-2\beta-1}^{\beta}(z) = \frac{\sin \pi(\alpha+2\beta)}{\sin(\pi\alpha)} T_{\alpha}^{\beta}(z), \quad P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) = P_{-\alpha-\beta-1}^{\beta}(z),$$

и для $\beta = m$ (целому), применяя формулу $F(a, b | c | w) = (1-w)^{c-a-b} \times \times F(c-b, c-a | c | w)$, видим, что

$$T_{\alpha}^{-m}(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}m} P_{\alpha-m}^{-m}(z) = \\ = \frac{(z-1)^m}{\Gamma(1+m)} F\left(m-\alpha, \alpha-m+1 \mid 1+m \mid \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right) = \\ = \frac{(z^2-1)^m}{2^m m!} F\left(2m-\alpha, 1+\alpha \mid 1+m \mid \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right) = \\ = \frac{\Gamma(\alpha-2m+1)}{\Gamma(\alpha+1)} (z^2-1)^m T_{\alpha-2m}^m(z), \\ (-1)^m P_{\gamma}^{-m}(z) = \frac{\Gamma(\gamma-m+1)}{\Gamma(\gamma+m+1)} P_{\gamma}^m(z). \quad (5.3.38)$$

Можно найти совокупность формул, аналогичных (5.3.26) и (5.3.27), и показать, что производящая функция для полиномов Гегенбауера имеет вид

$$\frac{2^{\beta} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) / \sqrt{\pi}}{(1+h^2-2hz)^{\beta+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n T_n^{\beta}(z), \quad |h| < 1. \quad (5.3.39)$$

Применяя формулу (5.3.5) и равенство

$$F\left(a, b \mid 2b \mid \frac{2}{1-z}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^a F\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \mid b + \frac{1}{2} \mid \frac{1}{z^2}\right),$$

тесно связанное с (5.3.17), получаем выражение этих решений для больших значений z :

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\beta}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1) \sin(\pi\alpha) z^{-\alpha-2\beta-1}}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha+\beta+1} \cos[\pi(\alpha+\beta)] \Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{3}{2}\right)} \times \\ &\quad \times F\left(\frac{\alpha+2\beta+1}{2}, \frac{\alpha+2\beta+2}{2} \middle| \alpha+\beta+\frac{3}{2} \middle| \frac{1}{z^2}\right) + \\ &\quad + \frac{2^{\alpha+\beta} \Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1)} z^{\alpha} F\left(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha \middle| \frac{1}{2}-\alpha-\beta \middle| \frac{1}{z^2}\right), \quad (5.3.40) \\ (1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1) \sin[\pi(\alpha+2\beta)] z^{-\alpha-2\beta-1}}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha+\beta+1} \cos[\pi(\alpha+\beta)] \Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{3}{2}\right)} \times \\ &\quad \times F\left(\frac{\alpha+2\beta+1}{2}, \frac{\alpha+2\beta+2}{2} \middle| \alpha+\beta+\frac{3}{2} \middle| \frac{1}{z^2}\right) + \\ &\quad + \frac{2^{\alpha+\beta} \Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1)} z^{\alpha} F\left(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha \middle| \frac{1}{2}-\alpha-\beta \middle| \frac{1}{z^2}\right), \end{aligned}$$

которое показывает, что обе эти функции стремятся к бесконечности при $z \rightarrow \infty$, кроме случая $0 > \alpha > -2\beta-1$.

Если выбрать первым решением уравнения (5.2.51) функцию $T_{\alpha}^{\beta}(z)$, то богатый набор вторых решений может нас даже затруднить. Функция $T_{-\alpha-2\beta-1}^{\beta}(z)$, конечно, пропорциональна $T_{\alpha}^{\beta}(z)$ и потому не независима, но функции, которые можно обозначить одним из следующих способов

$$\begin{aligned} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(z) &= (z^2-1)^{-\beta} \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1) \sin[\pi(\alpha+2\beta)]}{\Gamma(\alpha+1) \sin(\pi\alpha)} T_{-\alpha-1}^{-\beta}(z) = \\ &= (1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{-\alpha-\beta-1}^{\beta}(z) = (z^2-1)^{-\beta} \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} T_{\alpha+2\beta}^{-\beta}(z), \end{aligned}$$

независимы от $T_{\alpha}^{\beta}(z)$ (если только β не целое), так же как $T_{\alpha}^{\beta}(-z)$ и $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(-z)$. Кроме того, имеются функции с противоположным знаком аргумента. С помощью формулы (5.2.49) можно показать, что

$$\sin(\pi\beta) T_{\alpha}^{\beta}(z) = \sin \pi(\alpha+\beta) T_{\alpha}^{\beta}(-z) - \sin \pi\alpha (1-z^2)^{-\frac{1}{2}\beta} P_{\alpha+\beta}^{\beta}(-z);$$

отсюда также получаются соотношения специального вида, если β или α целое.

Однако все эти функции стремятся к бесконечности при $z \rightarrow \infty$ (за исключением случая, когда $0 > \alpha > -2\beta-1$). Часто будет предпочтительней иметь второе решение, стремящееся к нулю при $z \rightarrow \infty$ для $\alpha > 0$, как это было для функций Q , определенных формулой (5.3.29). Кроме того, желательно иметь решение, остающееся независимым от $T_{\alpha}^{\beta}(z)$, даже если β целое.

Такую функцию можно получить, если в формуле (5.3.36) взять другой контур интегрирования. Положим

$$V_{\alpha}^{\beta}(z) = \frac{e^{-i\pi(\alpha+\beta)} \Gamma(\alpha+2\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+2} i \Gamma(\alpha+\beta+1) \sin[\pi(\alpha+\beta)]} \oint_Q \frac{(t^2-1)^{\alpha+\beta}}{(t-z)^{\alpha+2\beta+1}} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{i\pi\beta} 2^\beta \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{3}{2}\right) (2z)^{\alpha+2\beta+1}} F\left(\frac{\alpha+2\beta+1}{2}, \frac{\alpha+2\beta+2}{2} \middle| \alpha + \beta + \frac{3}{2} \middle| \frac{1}{z^2}\right) = \\
&= \frac{-\pi e^{i\pi\beta}}{2 \sin(\pi\beta)} \left[T_\alpha^\beta(z) - \frac{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) (z^2 - 1)^\beta} T_{-\alpha+2\beta}^\beta(z) \right] = \\
&= \frac{\pi}{2 \sin[\pi(\alpha + 2\beta)]} [e^{\mp i\pi(\beta + \alpha)} T_\alpha^\beta(z) - e^{\pm i\pi\beta} T_\alpha^\beta(-z)] = \\
&= e^{2\pi i\beta} \frac{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) (z^2 - 1)^\beta} V_{\alpha+2\beta}^{-\beta}(z) = e^{i\pi\beta} (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}\beta} Q_{\alpha+\beta}^\beta(z). \quad (5.3.41)
\end{aligned}$$

Контур у интеграла имеет вид восьмерки, обходящей $+1$ и -1 , как это было для $Q_\alpha(z)$. Вторая строчка показывает, что V стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, если $\operatorname{Re}(\alpha + 2\beta + 1) > 0$, что мы и желали. Третья строчка указывает взаимосвязь между V и двумя независимыми решениями T . Четвертая строчка, подобно (5.3.31), связывает решения для $+z$ и для $-z$; верхний знак надо брать при $\operatorname{Im} z > 0$, а нижний — при $\operatorname{Im} z < 0$. Последняя строчка показывает, что это второе решение выбрано так, что перемена знака у верхнего индекса не порождает независимой функции, в противоположность T_α^β , для которого соотношение (5.3.38) имеет место только для целого β . С другой стороны, $V_{-\alpha-2\beta-1}^\beta$ не пропорционально V_α^β , но

$$V_\alpha^\beta(z) = V_{-\alpha-2\beta-1}^\beta(z) + [\pi e^{i\pi\beta} \cos \pi(\alpha + \beta) / \sin(\pi\alpha)] T_\alpha^\beta(z).$$

Если $\beta = m$ целому, то третье выражение в (5.3.41) стремится к конечному пределу; однако в этом случае имеют место следующие, более простые формулы:

$$V_\alpha^m(z) = \frac{d^m}{dz^m} Q_{\alpha+m}(z), \quad V_{-\alpha-2m-1}^m = \frac{\Gamma(\alpha + 2m + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) (z^2 - 1)^m} V_{-\alpha-1}^{-m}. \quad (5.3.42)$$

Случай $\beta = \pm \frac{1}{2}$ особо интересен как из-за получающихся полиномов, так и в силу раскрывающихся специальных свойств гипергеометрических функций

$$\begin{aligned}
T_\alpha^{-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{ch}[\alpha \operatorname{Ar} \operatorname{ch} z]}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{\alpha (1 - z^2)^{\frac{1}{4}}} P_{\alpha - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z), \\
T_\alpha^{-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sh}[(\alpha + 1) \operatorname{Ar} \operatorname{ch} z]}{\sqrt{z^2 - 1}} = \alpha \frac{(1 - z^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{z^2 - 1}} P_{\alpha - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(z), \\
V_\alpha^{-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{i}{\alpha}\right) \exp[-\alpha \operatorname{Ar} \operatorname{ch} z] = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{z^2 - 1} V_{\alpha-1}^{\frac{1}{2}}(z); \quad (5.3.43)
\end{aligned}$$

для целого α они пропорциональны полиномам Чебышева.

Вырожденная (конфлюентная) гипергеометрическая функция. Гипергеометрическое уравнение для $F(a, b + c | c | z/b)$ имеет вид

$$z\left(1 - \frac{z}{b}\right)F'' + \left[c - (a + b + c + 1)\frac{z}{b}\right]F' - a\left(1 + \frac{c}{b}\right)F = 0.$$

Это уравнение имеет регулярные особые точки в 0 , b и ∞ с индексами $(0, 1 - c)$, $(0, -a - b)$ и $(a, b + c)$ соответственно. Если b стремится к беско-

нечности, то при этом две особые точки (b и ∞) совпадают друг с другом, а один из индексов в каждой из совпадающих точек стремится к бесконечности (индекс $-a-b$ в точке b и индекс $b+c$ в точке ∞). Этот двойной процесс предельного перехода называется *слиянием* особых точек; он был указан ранее на стр. 508. Получающееся уравнение:

$$zF'' + (c-z)F' - aF = 0 \quad (5.3.44)$$

называется *вырожденным (конфлюентным) гипергеометрическим уравнением* [см. (5.2.57)]. Решение, аналитическое при $z=0$, получается в пределе из $F(a, b+c|c|z/b)$, когда b стремится к бесконечности

$$F(a|c|z) = 1 + \frac{a}{c}z + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{3!c(c+1)(c+2)}z^3 + \dots; \quad (5.3.45)$$

оно называется *вырожденным гипергеометрическим рядом*.

Чтобы увидеть, как действует это слияние на интегральное представление, мы отправимся от представления, полученного из (5.3.14) заменой t на $1/t$

$$\begin{aligned} F\left(a, b+c|c|\frac{z}{b}\right) &= F\left(b+c, a|c|\frac{z}{b}\right) = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \left(1 - \frac{zt}{b}\right)^{-b-c} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \end{aligned}$$

Предельный переход $b \rightarrow \infty$ меняет природу ядра $(1-zt/b)^{-b-c}$, делая его показательной функцией, вместо алгебраической, так как

$$\left[1 - \frac{x}{b}\right]^{-b} \simeq e^x \quad \text{при } b \rightarrow \infty.$$

Особенность взамен точки ветвления при $x=b$ становится существенной особенностью при $x=\infty$, и в результате интегральное представление для вырожденной гипергеометрической функции имеет вид

$$F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad (5.3.46)$$

если только $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$. Для других областей значений a и c можно построить представление при помощи соответствующих контурных интегралов, которое будет пригодно, если только c не будет целым отрицательным или нулем, когда даже разложение в ряд «разлетается». В этих случаях, которые будут рассмотрены позже, решение имеет логарифмическую точку ветвления при $z=0$.

Второе решение уравнения (5.3.44) можно найти, производя слияние во втором решении $z^{1-c}F(a-c+1, b+1|2-c|z/b)$ гипергеометрического уравнения или в результате подстановки в уравнение (5.3.44) вместо решения функции $z^{1-c}f(z)$, в результате чего для f вновь получится уравнение вида (5.3.44). В любом случае найденное второе решение имеет вид

$$z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$$

и пригодно, если c не равно 2, 3, 4, ... Если $c=1$, этот ряд сходится, но совпадает с первым решением $F(a|1|z)$, так что данное выражение не представляет собой второго решения ни для какого целого положительного c . Второе решение в этих частных случаях будет получено позже. Нет необходимости исследовать отдельно случай $c < 1$, так как при $c=2-c' < 1$ можно умножить наши решения на $z^{c-1}=z^{1-c'}$ и на-

звать исходное второе решение первым, и наоборот, в результате чего c' , то есть новое c станет больше 1.

Из интегрального представления можно вывести интересное соотношение, впервые указанное в (5.2.62); именно, из

$$\int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = e^z \int_0^1 e^{-zu} u^{c-a-1} (1-u)^{a-1} du$$

следует, что $F(a|c|z) = e^z F(c-a|c|z)$. Подобным образом другой формой второго решения является $z^{1-c} e^z F(1-a|2-c|z)$.

Преобразование Лапласа. Однако до перехода к дальнейшему исследованию решения нам надо более тщательно рассмотреть новый вид интегрального представления, так как мы теперь перешли от преобразования Эйлера к преобразованию Лапласа, указанному на стр. 549. Согласно стр. 547, где мы исследовали интегральные представления вообще, мы видим, что показательное ядро имеет некоторые преимущества. Например, так как $de^{zt}/dz = te^{zt}$ и $ze^{zt} = de^{zt}/dt$, то если наше исходное уравнение имеет вид

$$0 = \mathcal{L}_z(\psi) = f \frac{d^2 \psi}{dz^2} + g \frac{d\psi}{dz} + h\psi = \sum_{m,n} A_{mn} z^m \frac{d^n \psi}{dz^n},$$

$$f = \sum_m A_{m2} z^m, \quad g = \sum_m A_{m1} z^m, \quad h = \sum_m A_{m0} z^m,$$

то соответствующее преобразованное выражение таково:

$$\mathcal{M}_t'(e^{zt}) = \sum_{m,n} A_{mn} t^n \frac{d^m}{dt^m} e^{zt}$$

и сопряженное к нему даст уравнение

$$\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = \sum_{m,n} (-1)^m A_{mn} \frac{d^m}{dt^m} (t^n v) = 0.$$

Если это уравнение проще решить, чем $\mathcal{L}_z(\psi) = 0$, то преобразование Лапласа будет пригодно для интегрального представления.

Например, если в исходном уравнении $\mathcal{L}(\psi) \equiv f\psi'' + g\psi' + h\psi = 0$, многочлены f , g и h не выше первой степени относительно z , то в дифференциальном операторе $\mathcal{M}_t$ не будет производных по t выше первого порядка и $v(t)$ можно легко найти. Наиболее общим видом уравнения такого рода является

$$(z - \delta) y'' + (2\epsilon z - \xi) y' + (\eta z - \zeta) y = 0,$$

причем δ можно исключить при помощи подходящего изменения начала отсчета z . Это уравнение для y можно получить из следующего уравнения для ψ , где $\psi = z^\alpha y$

$$\psi'' + \left(2\epsilon - \frac{2\alpha + \xi}{z}\right) \psi' + \left[\eta - \frac{2\alpha\epsilon + \zeta}{z} + \frac{\alpha(\alpha + \xi + 1)}{z^2}\right] \psi = 0;$$

оно, в свою очередь, имеет общий вид (5.2.55). Это уравнение имеет регулярную особую точку при $z=0$ с индексами α и $\alpha + \xi + 1$ и иррегулярную точку $z = \infty$. Подстановка $y = F \exp[(-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - \eta})z]$ приводит к вырожденному гипергеометрическому уравнению для F . Итак, именно вырожденное гипергеометрическое уравнение особенно хорошо поддается решению при помощи преобразования Лапласа.

Другие уравнения, имеющие в качестве f , g или h многочлены выше первой степени, также можно решать при помощи преобразования Лапласа, однако получающееся уравнение для v будет иметь второй порядок (или выше) и должно быть особенно простым, чтобы его решение имело замкнутый вид.

Во всяком случае, мы начнем наше изучение интегрального представления Лапласа с применения его к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Согласно этому уравнению, если положить $F = \int e^{zt} v(t) dt$, то выражение $M_t(e^{zt})$, соответствующее (5.3.44), имеет вид

$$(t^2 - t)(d/dt)e^{zt} + (ct - a)e^{zt},$$

и сопряженным уравнением будет

$$\tilde{\mathcal{M}}(v) \equiv (d/dt)(t^2 - t)v + (ct - a)v = 0$$

с решением и присоединенной билинейной формой

$$v = At^{a-1}(1-t)^{c-a-1}, \quad P = -At^a(1-t)^{c-a}e^{zt}.$$

Отсюда возможными путями интегрирования являются или путь от 0 до 1 при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, как это было дано в формуле (5.3.46), или путь от $-\infty$ до 0 при $\operatorname{Re} a > 0$ и $\operatorname{Re} z > 0$, или же двойной контур вокруг 0 и 1, возвращающий P к его исходному значению. Различные интегралы будут, конечно, представлять различные решения. Интеграл, представляющий вырожденный гипергеометрический ряд, дается формулой (5.3.46) или имеет вид контурного интеграла

$$F(a|c|z) = \frac{e^{-i\pi a}}{4\pi^2} \Gamma(c) \Gamma(1-a) \Gamma(a-c+1) \oint_C e^{zt} t^{a-1} (t-1)^{c-a-1} dt, \quad (5.3.47)$$

где подинтегральная функция вещественна для вещественного z , если t находится на вещественной оси справа от $t=1$, а контур проходит против часовой стрелки вокруг $t=1$ и $t=0$, а затем по часовой стрелке вокруг этих точек, как на рис. 5.7. Это представление имеет место, за исключением точек, где гамма-функция не аналитична (то есть если $1-a$, c или $a-c+1$ являются целыми отрицательными).

Асимптотическое разложение. Исследуем теперь поведение $F(a|c|z)$ для очень больших значений z , применяя представление (5.3.46). На стр. 520 мы уже обсуждали осложнения, свойственные асимптотическим разложениям около иррегулярных особых точек, и указали, что если вещественная часть z велика и положительна, то

$$F(a|c|z) \underset{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z.$$

Мы указали также, что это выражение несправедливо для $\operatorname{Re} z$ больших по абсолютной величине отрицательных; в этом случае будет, вероятно,

$$F(a|c|z) \underset{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty}{\simeq} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}.$$

Мы должны теперь обосновать эти предварительные результаты и попытаться понять, какие свойства асимптотического разложения порождают это любопытное, неопределенное поведение функции, придающее ей один вид для z больших положительных и другой — для z больших отрицательных.

Из формулы (5.3.46) мы видим, что если z вещественно, положительно и велико, то важнейшая часть подинтегральной функции сосредоточена вблизи $t=1$ и интеграл не может существенно измениться, если продолжить интегрирование по t от 0 до $-\infty$. Более точно, мы можем написать

$$F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \left[\int_{-\infty}^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt - \int_{-\infty}^0 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt \right],$$

что имеет место для положительного $\operatorname{Re} z$. Полагая $t=1-u/z$ в первом интеграле и $t=-w/z$ во втором, имеем

$$F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \left\{ z^{a-c} e^z \int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du + \right. \\ \left. + (-z)^{-a} \int_0^\infty e^{-w} w^{a-1} \left(1 + \frac{w}{z}\right)^{c-a-1} dw \right\}. \quad (5.3.48)$$

Оба интеграла теперь имеют один и тот же вид и оказываются приближенно равными $\Gamma(c-a)$ и $\Gamma(a)$ соответственно. Отсюда первый член, содержащий множитель e^z , для большого положительного $\operatorname{Re} z$ несравненно больше второго, и потому второй член может быть опущен (хотя нам надо помнить о том, что мы его опустили, так как в этом и заключается основная причина указанного выше неопределенного поведения F).

Видоизменение рассуждения, примененного на стр. 356 для разложения в ряд Тейлора, показывает, что

$$\left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a-m)} \left(-\frac{u}{z}\right)^m + D_n,$$

где $|D_n| \leq \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(n+1)\Gamma(a-n)} \left| -\frac{u}{z} \right|^{n+1}$, если $n > \operatorname{Re} a - 1$. Подставляя это в интеграл, имеем

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du = \\ = \Gamma(a) \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a-m)} \left(-\frac{1}{z}\right)^m + R_n = \\ = \Gamma(c-a) \left\{ 1 + \frac{(c-a)(1-a)}{1!} \frac{1}{z} + \right. \\ \left. + \frac{(c-a)(c-a+1)(1-a)(2-a)}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(c-a) \dots (c+n-a-1)(1-a) \dots (n-a)}{n!} \frac{1}{z^n} \right\} + R_n, \quad (5.3.49)$$

где

$$|R_n| \leq \left| \frac{(1-a) \dots (n-a) \Gamma(c+n-a+1)}{n! z^{n+1}} \right|.$$

Мы видим, что для конечных значений z ряд расходится, но сумма первых n членов ряда приближается к «истинному» значению, если n остается постоянным, а z беспрестанно возрастает. Например, для $z=10$, $|c-a| < 2$, $|1-a| < 1$ первые четыре члена ряда дают значение интеграла с точностью примерно до одной десятой процента, тогда как первые сто членов для тех же значений z и параметров дают значение, далекое от истинного.

Это свойство типично для *асимптотических рядов*, как об этом говорилось на стр. 410.

Из первых нескольких членов мы получаем почти точное значение, но свести ошибку к нулю можно только, делая z бесконечным.

Обычно нас интересуют значения асимптотического ряда для z , значительно больших единицы (например, для $z > 1000$). В этом случае для нас достаточен первый член ряда. Следовательно, в нашем случае мы можем написать, что $F(a|c|z) \simeq [\Gamma(c)/\Gamma(a)] z^{a-c} e^z$ для вещественных положительных больших z . Это соответствует формуле (5.2.60). Мы не включили член $[\Gamma(c)/\Gamma(c-a)] z^{-a}$, появляющийся из второго интеграла, так как этот член, вообще говоря, меньше, чем ошибка, присущая первому асимптотическому ряду, так что включать его было бы бессмысленно.

Положение совершенно отличное, если z вещественное, *отрицательное* и большое по абсолютной величине. В этом случае подинтегральная функция в (5.3.46) наиболее велика при t , близком к нулю, и второй интеграл в (5.3.48) значительно больше первого. В этом случае, отправляясь от формулы (5.3.46) и сохраняя только главный член, имеем (причем полагаем $z = -|z|$, $t = u/|z|$)

$$F(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)|z|^{-a}}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{|z|}\right)^{c-a-1} du \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} |z|^{-a}$$

для вещественного отрицательного большого z . Это соответствует формуле (5.2.63). Здесь мы опустили член с $e^z = e^{-|z|}$, появляющийся из первого интеграла в (5.3.48), так как этот член, вообще говоря, меньше чем ошибка, присущая асимптотическому разложению второго интеграла.

Явление Стокса. Уже из простого рассмотрения формулы (5.2.60) можно было бы видеть, что асимптотический вид F не может иметь такое выражение для всех положений z на бесконечной окружности. Если подставить $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z|$ очень велико, в выражение $[\Gamma(c)/\Gamma(a)] z^{a-c} e^z$, то мы видим, что это выражение не возвращается к своему исходному значению, когда φ возрастает от 0 до 2π . Однако, так как функция $F(a|c|z)$ аналитична во всей конечной части плоскости z , то из формулы, справедливой для больших z , должно следовать, что F возвращается к своему исходному значению, когда φ меняется от 0 до 2π , описывая окружность большого радиуса около начала координат. Выражение, включающее z^{a-c} , как в (5.2.60), не может правильно изображать F при больших $|z|$ для всех фазовых углов φ точки z . И мы только что показали, что это так: для z вещественных и отрицательных правильным является выражение $[\Gamma(c)/\Gamma(c-a)] (-z)^{-a}$ (это второе выражение в свою очередь не может быть пригодным для всех φ , так как оно содержит член z^{-a} , который породил бы многозначность).

Чтобы увидеть более детально, как это получается, возьмем случай $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z|$ очень велико. Сначала возьмем φ между нулем и π (т. е. z в верхней полуплоскости). При этом путь интегрирования в (5.3.46) деформирован в путь, показанный на рис. 5.11 сплошной

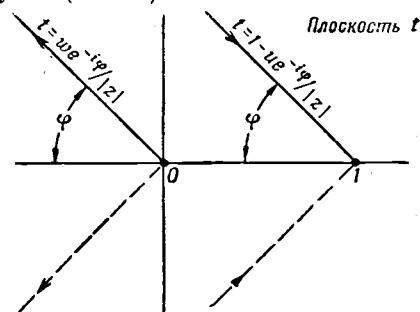


Рис. 5.11. Видоизменение контура для подсчета асимптотического поведения вырожденной гипергеометрической функции.

Независимой переменной является $z = |z|e^{i\varphi}$, причем $|z| \gg 1$.

линией, идущий из $t=0$ в $t=-\infty e^{i\varphi}$ и возвращающийся оттуда в $t=1$. Таким образом, интеграл вновь распадается на два. В первом положим $t = -we^{-i\varphi}/|z| = we^{i(\pi-\varphi)}/|z|$, а во втором $t = 1 - ue^{-i\varphi}/|z|$, где как u , так и w вещественны. Интегральное представление тогда приобретает вид

$$F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \left\{ \frac{e^{|z|e^{i\varphi} - i(c-a)\varphi}}{|z|^{c-a}} \int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du + \right. \\ \left. + \frac{e^{ia(\pi-\varphi)}}{|z|^a} \int_0^\infty e^{-w} w^{a-1} \left(1 + \frac{w}{z}\right)^{c-a-1} dw \right\} \quad (5.3.50)$$

при $0 < \varphi < \pi$. Записывая только главные члены в разложениях $[1 \pm (w \text{ или } u/z)]$ (то есть предполагая, что эти величины практически равны 1 в области значений w или u , для которых подынтегральная функция не является пренебрежимо малой), мы получаем асимптотическую формулу для $z = |z|e^{i\varphi}$, $|z|$ большое, $0 < \varphi < \pi$

$$F(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} |z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} |z| e^{i\varphi} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} |z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}.$$

Каждый из этих членов имеет неустранимую ошибку, присущую асимптотическим рядам, малую при большом z , но равную нулю только для бесконечного z . Если φ равно нулю (z вещественно и положительно), то второй член, в этом выражении меньше неустранимой ошибки в первом (и потому не должен включаться), а если φ равно π (z вещественно и отрицательно), то первый член меньше неустранимой ошибки во втором (и потому не должен включаться). Если $\varphi = \pi/2$ (z мнимое положительное), то оба члена имеют сравнимую величину и для нахождения правильного значения надо пользоваться обоими.

Чтобы найти выражение для $0 > \varphi > -\pi$, мы используем путь интегрирования, показанный на рис. 5.11 пунктиром, причем на соответствующих прямых $t = -we^{-i\varphi}/|z| = we^{-i(\varphi+\pi)}/|z|$ и $t = 1 - ue^{-i\varphi}/|z|$. Здесь в выражении для w мы полагаем $1/z = e^{-i(\varphi+\pi)}/|z|$ вместо примененного выше выражения $e^{i(\pi-\varphi)}/|z|$, так как мы хотим, чтобы w было вещественно и положительно, когда t находится на пунктирной линии, и так как мы провели для подынтегральной функции разрез от $t=0$ до $t=-\infty$. При этом найдем, что

$$F(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} |z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} |z| e^{i\varphi} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} |z|^{-a} e^{-ia(\pi+\varphi)},$$

если $z = |z|e^{i\varphi}$ и $0 > \varphi > -\pi$. Заметим, что если φ меняется от 0 до $-\pi/2$, то второй член выходит из своего «затмения» при $\varphi=0$, отличаясь от соответствующего члена при $\varphi=\pi/2$ на множитель $e^{-2\pi ia}$. Это внезапное изменение второго члена при $\varphi=0$ не влечет за собой разрыва F , когда φ проходит через нуль, ибо как раз при $\varphi=0$ второй член меньше ошибки, присущей первому члену, и любое изменение второго члена не играет роли.

С другой стороны, это изменение как раз то, которое требуется, чтобы сделать второй член вещественным как при $\varphi=\pi$, так и при $\varphi=-\pi$. Если бы дополнительный множитель $e^{-2\pi ia}$ не был включен в выражение для второго члена при $0 > \varphi > -\pi$, то асимптотическая формула при $\varphi=-\pi$ давала бы результат, отличающийся от результата при $\varphi=+\pi$ множителем $e^{2\pi ia}$, чего не должно быть, так как функция F аналитична около $z=0$. Чтобы соблюсти эту аналитичность, два члена в асимптотическом разложении «играют в прятки» друг с другом; когда

один из них испытывает «затмение», становясь меньше чем ошибка в другом, то он скачком меняет фазу, выходя из тьмы как раз с таким дополнительным фазовым множителем, чтобы обеспечить непрерывность в той области φ , где этот член велик.

Это подобное игре в прятки поведение членов асимптотического разложения называется *явлением Стокса*, который первым обратил на него внимание. Оно должно проявляться в первом члене при $\varphi = \pi$, где первый член меньше чем ошибка во втором. Например, чтобы F при $\varphi = 2\pi$ равнялась F при $\varphi = 0$, в области $\pi < \varphi < 2\pi$ должно быть

$$F(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} |z|^{a-c} e^{i(\varphi-2\pi)(a-c)} e^z + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} |z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}$$

с дополнительным множителем $e^{2\pi i(c-a)}$ в первом члене. Этот результат, конечно, получается из асимптотического вычисления интегралов; так, при $\pi < \varphi < 2\pi$ мы должны в первом интеграле положить $t = 1 - ue^{i(2\pi-\varphi)}/|z|$, чтобы нейтрализовать разрез от $t=0$ до $t=-\infty$.

Собирая все наши формулы, мы можем написать для $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z|$ большое,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a|c|z) \simeq \\ & \simeq \begin{cases} \Gamma(a)|z|^{-a}, & \varphi = -\pi, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a)|z|^{-a} e^{-ia(\pi+\varphi)}, & -\pi < \varphi < 0, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^z, & \varphi = 0, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a)|z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}, & 0 < \varphi < \pi, \\ \Gamma(a)|z|^{-a}, & \varphi = \pi, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^{i(a-c)(\varphi-2\pi)} e^z + \Gamma(a)|z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}, & \pi < \varphi < 2\pi, \\ \Gamma(c-a)|z|^{a-c} e^z, & \varphi = 2\pi \text{ и т. д.;} \end{cases} \quad (5.3.51) \end{aligned}$$

отсюда ясно видно явление Стокса, так как когда φ становится целым кратным π , каждый член по очереди исчезает, появляясь с другой стороны как раз с такой переменной фазы, чтобы сохранить однозначность функции при совершении обхода.

Решения третьего рода. Для удовлетворения граничных условий при больших значениях z более удобно применять решения, стремящиеся к z^{-a} или к $z^{a-c}e^z$, но не к обеим функциям сразу. Формула (5.3.50) показывает, как это можно сделать. Для $z = |z|e^{i\varphi}$ определяем

$$U_1(a|c|z) = \frac{e^z z^{a-c}}{\Gamma(c-a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du \simeq z^{a-c} e^z, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (5.3.52)$$

$$U_2(a|c|z) = \frac{e^{ia\pi} z^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{c-a-1} du \simeq e^{ia\pi} z^{-a},$$

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

Если $\operatorname{Re}(a-c) > 1$, интеграл для U_1 не пригоден и надо применить контур вокруг точки ветвления при $u=0$. Пригодный для этого контур

показан на рис. 5.12, причем подинтегральная функция вещественна в точке A , если z находится на отрицательной вещественной полуоси. Соответствующие контурные интегралы для U имеют вид

$$U_1(a|c|z) = \frac{\Gamma(a-c+1)}{2\pi i} z^{a-c} e^z \oint_F e^u u^{c-a-1} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{a-1} du, \quad (5.3.53)$$

$$U_2(a|c|z) = \frac{\Gamma(1-a)}{2\pi i} e^{ia\pi} z^{-a} \oint_F e^u u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{c-a-1} du$$

и пригодны, если только $c-a$ (или соответственно a) не является целым положительным. Так как точка $u = \mp z$ должна находиться вне контура, то мы видим, что надо провести разрез для U_1 вдоль положительной

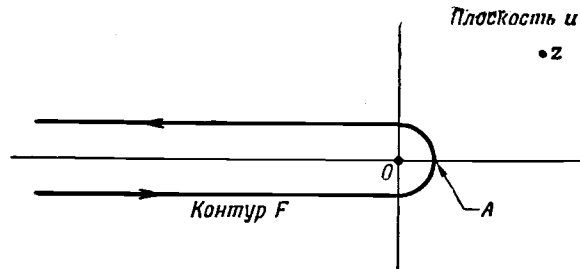


Рис. 5.12. Контур для интегрального представления вырожденной гипергеометрической функции третьего рода.

Подинтегральная функция вещественна в точке A , если z вещественно и положительно.

вещественной полуоси, а для U_2 вдоль отрицательной вещественной полуоси. Это делает явление Стокса для U несколько отличным от того, которое было для F ; оно будет рассмотрено на стр. 576.

Эти решения можно называть *вырожденными гипергеометрическими функциями третьего рода*. Они являются такими же хорошими решениями уравнения (5.3.44), как $F(a|c|z)$ и $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$, и через них можно выразить любое решение. Значение определителя Вронского для двух независимых решений уравнения (5.3.44) таково [см. (5.2.3)]:

$$\Delta = A e^{-\int (c-z) dz/z} = A z^{-c} e^z.$$

Значение A получается из применения асимптотического вида решений U_1 и U_2

$$U_1 U_2' - U_2 U_1' \simeq \left[-a \frac{1}{z} - (a-c) \frac{1}{z} - 1 \right] z^{-c} e^z + i\pi,$$

и так как это асимптотическая формула, то можно пренебречь членами с $1/z$ по сравнению с -1 . Следовательно,

$$\Delta(U_1, U_2) = -z^{-c} e^z + i\pi \quad (5.3.54)$$

для всех значений z . Обычную вырожденную гипергеометрическую функцию, конечно, можно выразить через эти новые функции

$$F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} U_1(a|c|z) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} U_2(a|c|z) \quad (5.3.55)$$

для $0 < \varphi < \pi$.

Между прочим, следует отметить, что для выражения независимых решений обычного гипергеометрического уравнения вблизи других

особых точек нам не требуется придумывать новые формы решений. Все три особые точки были регулярными, и потому каждую пару решений можно было выразить через ряды $F(a, b|c|z)$ с различными значениями a, b, c и z . В случае вырожденного гипергеометрического уравнения одна особая точка регулярная, а другая иррегулярная, и не удивительно, что пара решений U_1, U_2 , соответствующая иррегулярной точке, имеет вид, отличный от пары решений $F(a|c|z)$ и $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$, соответствующей регулярной точке.

Для окончания нашего рассмотрения нам надо выразить $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$ через решения U_1 и U_2 . Применяя формулу (5.3.46) и проводя такое разбиение, как для формулы (5.3.50), получаем

$$\begin{aligned} z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z) &= \\ &= \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-a)} \left\{ \frac{e^{i\pi(a-c+1)}}{z^a} \int_0^\infty e^{-w} w^{a-c} \left(1 + \frac{w}{z}\right)^{-a} dw + \right. \\ &\quad \left. + z^{a-c} e^z \int_0^\infty e^{-u} u^{-a} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-c} du \right\}. \end{aligned}$$

Но это выражение должно быть комбинацией U_1 и U_2 . Сравнивая асимптотическое поведение, мы видим, что первый член пропорционален U_2 , а второй — U_1 . Таким путем мы получаем новую совокупность интегральных представлений функций U

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{z^{a-c} e^z}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{-a} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-c} du = \frac{z^{a-c} e^z}{2\pi i \Gamma(a)} \oint_F e^u u^{-a} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{a-c} du, \\ U_2 &= \frac{e^{i\pi a} z^{-a}}{\Gamma(a-c+1)} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-c} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{-a} du = \\ &= \frac{e^{i\pi a} z^{-a}}{2\pi i \Gamma(c-a)} \oint_F e^u u^{a-c} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{-a} du, \end{aligned} \quad (5.3.56)$$

а также получаем выражение $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$ через U_1 и U_2 при $0 < \varphi < \pi$

$$\begin{aligned} z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z) &= \\ &= \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} U_1(a|c|z) - \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} e^{-\pi c} U_2(a|c|z), \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

справедливое для области изменения $0 < \varphi < \pi$ фазового угла z . Явление Стокса для этой функции можно выявить, применяя интегральные представления (5.3.56) для асимптотических интегралов. Получится

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \simeq \\ &\simeq \begin{cases} \Gamma(a-c+1) e^{-i\pi(1-c)} |z|^{-a}, & \varphi = -\pi, \\ \Gamma(1-a) |z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a-c+1) |z|^{-a} e^{i\pi(c-1)-ia(\pi+\varphi)} - \pi < \varphi < 0, \\ \Gamma(1-a) |z|^{a-c} e^z, & \varphi = 0, \\ \Gamma(1-a) |z|^{a-c} e^{i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a-c+1) |z|^{-a} e^{i\pi(1-c)+ia(\pi-\varphi)}, & 0 < \varphi < \pi, \\ \Gamma(a-c+1) e^{i\pi(1-c)} |z|^{-a}, & \varphi = \pi, \\ \Gamma(1-a) |z|^{a-c} e^{-2\pi i a + i(a-c)\varphi} e^z + \Gamma(a-c+1) |z|^{-a} e^{i\pi(1-c)+ia(\pi-\varphi)}, & \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases} \end{aligned}$$

и т. д. В силу того, что второе решение равно произведению z^{1-c} на аналитическую функцию, получаем, что асимптотическое значение, вещественное при $\varphi = 0$, должно равняться произведению $e^{-i\pi(1-c)}$ на вещественное число при $\varphi = -\pi$, произведению $e^{2\pi i(1-c)}$ на вещественное число при $\varphi = 2\pi$ и т. д.; это делают фазовые углы, порождаемые явлением Стокса.

Для полноты нам надо выразить решения третьего рода через решения первого рода. Эти соотношения можно получить, решая совместно уравнения (5.3.55) и (5.3.57). Преобразования являются несколько громоздкими и включают применение формулы $\sin(\pi x) \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \pi$. Например, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a|c|z) + \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(2-c)} e^{i\pi c} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) = \\ = \left[\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma(1-a)e^{i\pi c}}{\Gamma(a-c+1)} \right] U_1 = \Gamma(c-a) \Gamma(1-a) \frac{\sin(\pi c)}{\pi} e^{i\pi(c-a)} U_1. \end{aligned}$$

В конце концов, получаем

$$\begin{aligned} U_1(a|c|z) &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} e^{i\pi(a-c)} F(a|c|z) - \\ &\quad - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi a} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ U_2(a|c|z) &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} e^{i\pi a} F(a|c|z) + \\ &\quad + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} e^{i\pi a} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z), \quad -\pi < \varphi < \pi. \end{aligned} \quad (5.3.58)$$

Явление Стокса для функций U (и для функций, связанных с U и F) можно получить из этих соотношений, применяя таблицу изменений фазы F и $z^{1-c}F$. Если U_1 , U_2 представляют собой решения, асимптотически пропорциональные соответственно $z^{a-c}e^z$ и z^{-a} для всех значений фазового угла φ , и если формулы (5.3.58) считаются определяющими U_1 и U_2 при $0 < \varphi < \pi$, то можно вывести правило, регулирующее фазовые углы в соотношениях (5.3.55), (5.3.57) и (5.3.58), а также для U . Например, при $-2\pi < 4 < 0$

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} e^{i\pi(a-c)} F(a|c|z) - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi(a-2c)} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \simeq \\ &\simeq e^{2\pi i(a-c)} z^{a-c} e^z. \end{aligned}$$

(Так как для U_1 имеется разрез вдоль положительной вещественной полуоси, то для перехода от положительных к отрицательным значениям φ надо перейти от $0+\varepsilon$ к $2\pi-\varepsilon$.) Подобный же скачок появляется для U_2 при $\varphi = \pi$ или $-\pi$.

Решение второго рода. До сих пор мы оставляли в стороне вопрос о том, что делать с решением, независимым от $F(a|c|z)$, если c целое отрицательное. Если $c = n + \varepsilon$, где n целое, большее 1, а ε обращается в нуль, то оказывается, что первые $n-1$ членов ряда для $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$ остаются конечными, а остальные члены имеют множитель $1/(-\varepsilon)$, и потому обращаются в бесконечность. Очевидный прием, заключающийся в умножении на ε до перехода к пределу, не помогает, потому что, как мы увидим, предел $(n-c)z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$ при $c \rightarrow n$ оказывается пропорциональным первому решению $F'(a|c|z)$,

и потому не является независимым решением. Эта трудность проявляется также в формуле (5.3.57), содержащей множитель $\Gamma(2-c)$ стремящийся к бесконечности при $c \rightarrow 2, 3, 4, \dots$. Решения U_1 и U_2 при этом не становятся бесконечными, поэтому надо построить второе решение при помощи функций U . Это можно довольно просто сделать, если изменить знак у одного из членов формулы (5.3.55), выражающей $F(a|c|z)$ через функции U .

Поэтому мы определяем вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода формулой

$$G(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} U_1(a|c|z) - \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} U_2(a|c|z) \quad (5.3.59)$$

при $0 < \varphi < \pi$. Как показывает асимптотическое выражение, эта функция независима от F . Она удобна тем, что порождает простые формулы, выражающие U через F и G ; например, $U_1 = [\Gamma(a)/\Gamma(c)](F+G)$, а $U_2 = [\Gamma(c-a)/\Gamma(c)](F-G)$. Она также остается конечной при целом c , как будет вскоре показано, хотя оказывается, что она в этих случаях имеет логарифмическую особенность при $z=0$. Но это как раз то, чего надо ожидать, так как для целого c индексы вырожденного гипергеометрического уравнения при $z=0$ различаются на целое число, а в этом случае, как мы видели на стр. 504 и 513, следует ожидать у второго решения логарифмическую особенность.

Чтобы получить разложение G около $z=0$, выразим U в формуле (5.3.59) через F и $z^{1-c}F$ при помощи (5.3.58). В результате преобразования гамма-функций получаем

$$G(a|c|z) = e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \left\{ \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} \left[e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin \pi a} \right] F(a|c|z) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(c-a)} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \right\}. \quad (5.3.60)$$

Эта формула не выглядит слишком многообещающей, так как теперь оба члена в фигурных скобках стремятся к бесконечности, когда $c \rightarrow n$, целому. Однако, как было указано выше, при $c=n$ оба решения равны друг другу, а коэффициенты в этом выражении так подобраны, что бесконечные части как раз взаимно уничтожаются, и остается конечное выражение, пропорциональное производной от $F(a|c|z)$ по c . Эта производная от F по параметру является решением, которое мы искали.

Теперь нам следует доказать высказанные утверждения и на самом деле подсчитать разложение этого решения второго рода около $z=0$. Прежде всего надо доказать, что $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z)$ пропорционально $F(a|c|z)$, когда $c \rightarrow n$, целому. Это просто при $c \rightarrow 1$, так как тогда $z^{1-c}F(a-c+1|2-c|z) \rightarrow F(a|1|z)$. Отсюда (так как $\Gamma(c-1) \simeq 1/(c-1)$ и $\Gamma(1-c) \simeq 1/(1-c)$),

$$G(a|1|z) = e^{i\pi a} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(a)} \lim_{c \rightarrow 1} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(1-a)(c-1)} \times \right. \\ \times \left[\left(e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin \pi a} \right) F(a|c|z) + 2F(a|1|z) \right] - \\ \left. - \frac{2}{c-1} \left[\frac{1}{\Gamma(c-a)} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) - \frac{1}{\Gamma(1-a)} F(a|1|z) \right] \right\}.$$

Каждый член в квадратных скобках имеет вид $f(c) - f(1)$, так что предел этой величины, разделенной на $c-1$, равен производной от $f(c)$ по c

при $c = 1$. Значит,

$$G(a|1|z) = \frac{e^{i\pi a}}{\Gamma(a)} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dc} \left[e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin \pi a} \right] F(a|c|z) - \right. \\ \left. - 2 \frac{d}{dc} \left[\frac{z^{1-c}}{\Gamma(c-a)} F(a-c+1|2-c|z) \right] \right\}_{c=1}.$$

Но $dz^c/dc = z^c \ln z$ и $d\Gamma(a+c)/dc = \psi(a+c) \Gamma(a+c)$, где $\psi(x)$ — логарифмическая производная от $\Gamma(x)$

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d}{dx} \Gamma(x) = -\gamma + \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+x} \right), \\ \gamma = -\psi(1) = 0,5772 \dots,$$

$$\psi(x+n) = \psi(x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n-1},$$

$$\psi(1-c) = \psi(c) + \pi \operatorname{ctg} \pi c.$$

Отсюда

$$G(a|1|z) = \\ = \frac{e^{i\pi a}}{\Gamma(a) \Gamma(1-a)} \left\{ -\frac{d}{dc} \left[e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin(\pi a)} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m) \Gamma(c) z^m}{m! \Gamma(a) \Gamma(c+m)} - \right. \\ \left. - 2\Gamma(1-a) \frac{d}{dc} \left[\frac{1}{\Gamma(c-a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-c+1+m) \Gamma(2-c) z^{m+1-c}}{m! \Gamma(a-c+1) \Gamma(2-c+m)} \right] \right\}_{c=1} = \\ = \frac{e^{2\pi i a} - 1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \{ [-i\pi - \pi \operatorname{ctg}(\pi a) + 2\psi(1) - 2\psi(m+1)] - \\ - 2[-\psi(1-a) - \ln z + \psi(a) + \psi(m+1) - \psi(a+m) - \psi(1)] \} \times \\ \times \frac{\Gamma(a+m) \Gamma(1)}{m! \Gamma(a) \Gamma(m+1)} z^m = \\ = \frac{e^{2\pi i a} - 1}{2\pi i} \left\{ [2 \ln z + \pi \operatorname{ctg}(\pi a) - i\pi + 2\psi(a)] F(a|1|z) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)(m!)^2} [\psi(a+m) - \psi(a) + 2\psi(1) - 2\psi(m+1)] z^m \right\}. \quad (5.3.61)$$

Это решение независимо от $F(a|1|z)$ (это показывает логарифмический член, даже если по остальной части это не так очевидно). Его вид интересен тем, что представляет собой сумму логарифма величины, пропорциональной z , умноженного на первое решение, и бесконечного ряда, сходящегося для всех конечных значений z и также независимого от $F(a|1|z)$.

Для $c = 2, 3, \dots$ процесс вполне подобен приведенному выше, хотя выкладки несколько сложнее. Разложение в ряд показывает, что для исчезающе малого $c - n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) функция

$$F_n(a|c|z) = (c-n) z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) = \\ = (c-n) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{\Gamma(c-a) \Gamma(c-m-1)}{m! \Gamma(c-a-m) \Gamma(c-1)} z^{m-c+1} + \\ + (c-n) \frac{\Gamma(a) \Gamma(2-c)}{\Gamma(n) \Gamma(a-c+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n-c+r) \Gamma(n) z^{r+n-c}}{\Gamma(r+1+n-c) \Gamma(a) \Gamma(n+r)}$$

превращается в функцию $\frac{\Gamma(a)\Gamma(n-a)\sin(\pi a)}{\pi\Gamma(n)\Gamma(n-1)}F(a|n|z)$, так как $(c-n) \times \Gamma(2-c) \underset{c \rightarrow n}{\simeq} \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(c-1)}$ и потому первый член в (5.3.60) приближается ко второму, но оба становятся бесконечно большими. Добавляя и вычитая член $2[\Gamma(n-1)/(\Gamma(n-a))F_n(a|n|z)/(c-n)]$ внутри фигурных скобок, имеем

$$\begin{aligned} G(a|n|z) &= e^{i\pi a} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \lim_{c \rightarrow n} \left\{ \frac{\Gamma(a)\sin(\pi a)}{\Gamma(c)\pi(c-n)} \left[e^{i\pi(n-c)} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin \pi(a-n)} \right] F(a|c|z) - \right. \\ &\quad - 2 \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(n)} \frac{\sin(\pi a)}{\pi(c-n)} F(a|n|z) - 2 \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} \frac{1}{(c-n)} F_n(a|c|z) + \\ &\quad \left. + 2 \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-a)} \frac{1}{(c-n)} F_n(a|n|z) \right\} = \\ &= e^{i\pi a} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \left\{ \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \frac{d}{dc} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \left[e^{i\pi(n-c)} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin \pi(a-n)} \right] F(a|c|z) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{d}{dc} \left[\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} F_n(a|c|z) \right] \right\}_{c=n}, \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} G(a|n|z) &= \frac{e^{2\pi i a} - 1}{2\pi i} \left\{ [2 \ln z + \pi \operatorname{ctg}(\pi a) - i\pi] F(a|n|z) - \right. \\ &\quad - 2 \sum_{m=1}^{\infty} [\psi(m+1) + \psi(n+m) - \\ &\quad \left. - \psi(a+m)] \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(n)z^m}{m! \Gamma(a)\Gamma(n+m)} \right\} - \\ &\quad - 2e^{i\pi a} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\Gamma(r)z^{-r}}{\Gamma(n-r)\Gamma(r-a+1)}. \quad (5.3.62) \end{aligned}$$

Это выражение отличается от общего вида $G(a|1|z)$ присутствием конечной суммы отрицательных степеней z . Она, а также логарифмический член показывают, что G в отличие от F не аналитична при $z=0$. Нет надобности исследовать G , когда c равно целому отрицательному или нулю, так как если уравнение удовлетворяется функцией $z^{1+n}F(a+n+1|2+n|z)$, то мы принимаем ее за *первое решение* и следуем далее, как описано выше. Так как индексы вырожденного гипергеометрического уравнения при $z=0$ равны 0 и $1-c$, то если при первой попытке мы найдем, что c меньше 1, то уравнение для $z^{1-c}y$ имеет новое c больше 1, и мы будем работать с ним.

Этой формулой завершается наше общее рассмотрение вырожденной гипергеометрической функции, так как мы теперь записали выражения обоих решений для больших и для малых значений z и для всех значений параметров [разложение функций U в ряды можно получить при помощи рядов для F и G и соотношений (5.3.55) и (5.3.59)], включая те значения, для которых второе решение имеет логарифмическую особенность. Остается пока только рассмотреть некоторые из более важных частных случаев этих функций.

Функции Бесселя. Самой важной специальной функцией, представимой через вырожденную гипергеометрическую функцию, является функция Бесселя. Она представляет собой решение уравнения, упоминавшегося на стр. 518,

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)\psi = 0,$$

называемого уравнением Бесселя. Это уравнение имеет регулярную особую точку $z=0$ с индексами ν и $-\nu$. Подстановка $\phi = z^\nu e^{-iz} F$ приводит уравнение к вырожденному гипергеометрическому виду

$$zF'' + [(2\nu+1) - 2iz] F' - i(2\nu+1) F = 0$$

с решением $F\left(\nu + \frac{1}{2} \mid 2\nu+1 \mid 2iz\right)$. Решение уравнения Бесселя, остающееся конечным при $z=0$, называется *функцией Бесселя первого рода*

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{z^\nu e^{-iz}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} F\left(\nu + \frac{1}{2} \mid 2\nu+1 \mid 2iz\right) = \\ &= \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left[1 - \frac{1}{1!(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!(\nu+1)(\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \dots \right] = \quad (5.3.63) \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{i \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-i}^i e^{zu} (1+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu. \end{aligned}$$

Интегральные представления можно получить из представления F (при помощи формулы $\Gamma(2\nu+1) = (2^{2\nu}/\sqrt{\pi}) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu+1)$, если положить $t = \frac{1}{2}(1-iu)$ или $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$) или непосредственно из преобразования Лапласа. Ряды можно получить из интегралов или посредством перемножения рядов для показательной функции и для F (интересно заметить, что произведение вырожденного гипергеометрического ряда с мнимым аргументом и показательной функции с мнимым показателем может оказаться вещественной функцией). Если $\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2} < 0$, то линейный (обычный) интеграл можно заменить на интеграл по замкнутому контуру, обходящему точку $u=i$ в положительном направлении и $-i$ в отрицательном направлении.

Посредством манипуляций с интегральным представлением или с рядами можно получить следующие рекуррентные формулы для функций Бесселя:

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) &= (2\nu/z) J_\nu(z), \\ J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) &= 2(d/dz) J_\nu(z). \end{aligned} \quad (5.3.64)$$

Так как эти формулы можно получить из интегрального представления, то они будут иметь место и для других решений уравнения Бесселя, полученных при помощи изменения пределов интегрирования; именно они будут иметь место для решений второго и третьего рода.

Из последней формулы (5.3.63) в результате ряда преобразований можно получить другой вид интегрального представления, который будет нам полезен позже во многих приложениях; его можно выразить в различ-

ных формах (для целого n)

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint u^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(u^2-1)/u} du = \\ &= \frac{e^{-i\pi n/2}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (5.3.65)$$

где контур в первом равенстве представляет собой окружность с центром в начале координат, проходимую в положительном направлении. То, что это представление на самом деле дает функцию Бесселя, можно показать при помощи разложения в ряд и сравнения результата с рядом (5.3.63) или проверив, что интеграл удовлетворяет уравнению Бесселя и имеет необходимое значение при $z = 0$.

Это представление с помощью формулы (4.3.4), определяющей ряд Лорана около существенной особенности в a , можно применить для получения очень полезного разложения в ряд. Функция $e^{z(t^2-1)/2t}$ имеет существенную особенность при $t = 0$. Поэтому около $t = 0$ она разлагается в ряд Лорана с коэффициентами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint t^{-n-1} e^{z(t^2-1)/2t} dt = J_n(z).$$

Поэтому ряд имеет вид

$$e^{z(t^2-1)/2t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z);$$

его можно применить для определения свойств функций Бесселя целого порядка. Например, рекуррентные формулы (5.3.64) можно получить при помощи дифференцирования по z или t и т. д. Мы исследуем это далее в гл. 11.

Это разложение можно применить для получения других. Например, имеет место простое разложение

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(z).$$

Более сложное, но более полезное соотношение можно получить при помощи следующего разложения (здесь $Z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2xy \cos \varphi$, $Z \sin \alpha = x - y \cos \varphi$, $Z \cos \alpha = y \sin \varphi$):

$$\begin{aligned} J_0(Z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iZ \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iZ \cos(\theta-\alpha)} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[iy \sin \varphi \cos \theta + i(x - y \cos \varphi) \sin \theta] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{2\pi} e^{iy \sin(\varphi-\theta) + in\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_0^{2\pi} e^{iy \cos \theta + in(\theta + \varphi - \frac{1}{2}\pi)} d\theta = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) J_n(y) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) J_n(y) \cos(n\varphi). \end{aligned} \quad (5.3.66)$$

Применяя другие контуры интегрирования по θ , получаем общую формулу

$$Y_0(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m(x) J_m(y) \cos(m\varphi),$$

где символ Y может означать любой из видов функций Бесселя — J , N , $H^{(1)}$ или $H^{(2)}$, которые будут вскоре определены. Много других подобных разложений будет выведено и применено в этой книге позже. Данное разложение выведено здесь, так как оно будет использовано в этой главе ниже.

Другую формулу, которая будет полезна впоследствии, связывающую функции Бесселя и полиномы Гегенбауера, можно получить при помощи формулы (5.2.53) и интегрирования по частям модифицированного интегрального представления (5.3.63)

$$\begin{aligned} J_{\beta+n+\frac{1}{2}}(z) &= \frac{(z/2)^{\beta+n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\beta+n+1)} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{\beta+n} dt = \\ &= \frac{i^n z^{\beta+\frac{1}{2}}}{2^{n+\beta} \sqrt{2\pi} \Gamma(\beta+n+1)} \int_{-1}^1 e^{izt} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\beta+n} dt = \\ &= \frac{n! z^{\beta+\frac{1}{2}}}{i^n \sqrt{2\pi} \Gamma(n+2\beta+1)} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{\beta} T_n^{\beta}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.3.67)$$

Если ν полуцелое, то есть равно $n + \frac{1}{2}$, то получающиеся функции Бесселя имеют особенно простой вид. При помощи сравнения разложений в ряды можно видеть, что

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{2/\pi z} \sin z \quad \text{и} \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{2/\pi z} \cos z.$$

Мы увидим позже, что для волнового уравнения в сферических координатах удобно пользоваться *сферическими функциями Бесселя*, определенными формулами

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{z} \cos \left[z - \frac{1}{2} \pi(n+1) \right], \\ n_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-n-\frac{1}{2}}(z) \simeq \frac{1}{z} \sin \left[z - \frac{1}{2} \pi(n+1) \right], \\ h_n(z) &= j_n(z) + i n_n(z) \simeq (1/z) \exp \left[iz - \frac{1}{2} i \pi(n+1) \right]. \end{aligned}$$

Некоторые рекуррентные формулы для этих функций имеют вид

$$\begin{aligned} [(2m+1)/z] f_m(z) &= f_{m-1}(z) + f_{m+1}(z), \\ (2m+1)(d/dz) f_m(z) &= m f_{m-1}(z) - (m+1) f_{m+1}(z), \\ (d/dz) [z^{m+1} f_m(z)] &= z^{m+1} f_{m-1}(z), \\ (d/dz) [z^{-m} f_m(z)] &= -z^{-m} f_{m+1}(z), \end{aligned}$$

где $f_m(z)$ есть $j_m(z)$, $n_m(z)$ или $h_m(z)$. При помощи формулы (5.3.67)

можно показать, что интегральным представлением для $j_n(z)$ будет

$$j_n(z) = \frac{1}{i 2^n} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют эти функции, таково:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{df}{dz} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{z^2} \right] f = 0.$$

Уравнение Бесселя имеет иррегулярную особую точку при $z = \infty$. Как и надо ожидать для таких уравнений, разложение около этой точки является разложением асимптотического типа, расходящимся для конечных значений z , если взять слишком много членов, но приближающимся к истинному значению при неограниченно возрастающем z , если воспользоваться только конечным числом членов. Предельную форму (первый член асимптотического ряда) можно получить из формул (5.3.51), дающих асимптотический вид $F(a|c|z)$, или же прямо из интегрального представления при помощи деформации пути интегрирования (например, в первом представлении (5.3.63) в путь, идущий из $-i$ в $-\infty$ и из $-\infty$ в $-i$). Таблица асимптотических выражений, показывающая явление Стокса для функции Бесселя первого рода, имеет вид (при $z = |z|e^{i\varphi}$)

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &\simeq e^{-i\pi(\nu+\frac{1}{2})} \sqrt{2/\pi z} \cos \left[z + \frac{1}{2} \pi \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right], & -\frac{3}{2} \pi < \varphi < -\frac{1}{2} \pi, \\ &\simeq \sqrt{2/\pi z} \cos \left[z - \frac{1}{2} \pi \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right], & -\frac{1}{2} \pi < \varphi < \frac{1}{2} \pi, \\ &\simeq e^{i\pi(\nu+\frac{1}{2})} \sqrt{2/\pi z} \cos \left[z + \frac{1}{2} \pi \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right], & \frac{1}{2} \pi < \varphi < \frac{3}{2} \pi \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (5.3.68)$$

Независимое решение вблизи $z = 0$ можно взять таким

$$J_{-\nu}(z) = \frac{2^{3\nu} z^\nu e^{-iz+i\pi\nu}}{\Gamma(1-\nu)} (2iz)^{-2\nu} F\left(\frac{1}{2}-\nu | 1-2\nu | 2iz\right),$$

если только ν не равно нулю или целому положительному. Оно стремится к бесконечности, как $z^{-\nu}$, если z стремится к нулю.

Функции Ганкеля. Функции, соответствующие U_1 и U_2 (5.3.52), приспособленные для удовлетворения граничным условиям при больших значениях z , получают подобным же образом при помощи продолжения пути интегрирования в (5.3.63) до $-\infty$ и разбиения его на две части. Верхняя половина дает функцию с положительным показателем степени (мы множим интеграл дополнительно на 2 по причинам, которые станут ясными позже).

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{2\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{i\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^i e^{zt} (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{2^{\nu+1} z^\nu}{\sqrt{\pi}} e^{-iz} U_1\left(\nu+\frac{1}{2} | 2\nu+1 | 2iz\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_B e^{iz \cos \varphi + i\nu\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right)} d\varphi \simeq \\ &\simeq \sqrt{2/\pi z} e^{iz - \frac{1}{2}i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}, & -\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi; \end{aligned} \quad (5.3.69)$$

она называется *функцией Ганкеля первого рода* (или первой функцией Бесселя третьего рода). Путь интегрирования во втором интеграле [выведенном из (5.3.65)], показанный на рис. 5.13, проходит из $+\infty$ вплотную слева от мнимой оси в $-\infty$ вплотную справа от мнимой оси (причина такого выбора состоит в том, что в заштрихованных участках плоскости φ

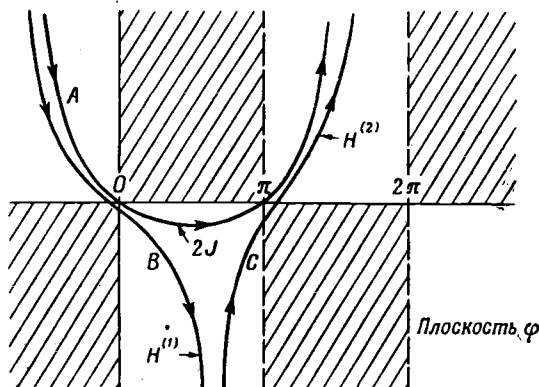


Рис. 5.13. Контуры для интегрального представления функций Бесселя.

подинтегральная функция беспрестанно возрастает при удалении от вещественной оси, а в незаштрихованных участках подинтегральная функция стремится к нулю, так что нам надо закончить наш интеграл в незаштрихованных областях). Этот же интеграл представляет также другие функции, так как

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_A e^{z \cos \varphi + i\nu \left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right)} d\varphi,$$

а контур C представляет другое решение для больших значений z

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{2(z/2)^\nu}{i\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-i}^{-\infty} e^{zt} (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{2^{\nu+1} z^\nu e^{-iz}}{\sqrt{\pi}} U_2\left(\nu + \frac{1}{2} \mid 2\nu + 1 \mid 2iz\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C e^{-iz \cos \varphi + i\nu \left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right)} d\varphi \simeq \\ &\simeq \sqrt{2/\pi z} e^{-iz + \frac{1}{2}i\pi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

Эта функция называется *функцией Ганкеля второго рода*. Во многих случаях, если мы будем иметь дело только с первой из этих функций, мы будем опускать верхний индекс; H_ν будет всегда означать $H_\nu^{(1)}$ и называться функцией Ганкеля (*просто*), если это не может вызвать недоразумения.

Эти два решения независимы, как показывает их асимптотический вид. Определитель Вронского для независимых решений уравнения Бесселя равен A/z [см. формулу (5.3.2)]. Постоянную для этих двух решений можно определить при помощи их асимптотического вида, и в итоге мы

получаем

$$\Delta(H_v^{(1)}, H_v^{(2)}) = H_v^{(1)} \frac{d}{dz} H_v^{(2)} - H_v^{(2)} \frac{d}{dz} H_v^{(1)} = \frac{4}{\pi i z}. \quad (5.3.71)$$

Так как обе функции $H_v^{(1)}$ и $H_v^{(2)}$ удовлетворяют рекуррентным формулам (5.3.64) (и другим формулам, получающимся при помощи комбинирования этих), то соотношение (5.3.71) можно выразить различными способами, как например

$$H_v^{(2)}(z) H_{v+1}^{(1)}(z) - H_v^{(1)}(z) H_{v+1}^{(2)}(z) = 4/\pi i z \quad \text{и т. д.}$$

Имеется тесная связь между функциями Ганкеля и показательными функциями с мнимым показателем, с одной стороны, и функцией Бесселя J и косинусом, с другой. Совсем так же, как

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \\ \text{здесь имеем} \quad J_v(z) &= \frac{1}{2} [H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)], \end{aligned} \quad (5.3.72)$$

что можно установить из приведенных определений или из простого рассмотрения рис. 5.10.

Аналогично из формул (5.3.58) и определений J и H через F и U получаем

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(z) &= \frac{i}{\sin(\pi v)} [e^{-i v \pi} J_v(z) - J_{-v}(z)], \\ H_v^{(2)}(z) &= \frac{-i}{\sin(\pi v)} [e^{i v \pi} J_v(z) - J_{-v}(z)], \end{aligned} \quad (5.3.73)$$

откуда мы можем вывести разложение функций Ганкеля вблизи $z=0$. Но прежде чем провести выкладки до конца, мы лучше исследуем поведение второго решения в случае целого v .

Функция Неймана. Рассмотрение разложения $J_v(z)$ в ряд (5.3.63) показывает, что если v отрицательно, то $J_v(z)$ становится бесконечным при $z=0$, если только v не целое отрицательное. Чтобы исследовать этот особый случай, положим $v = -n - \varepsilon$

$$\begin{aligned} J_{-n-\varepsilon}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(z/2)^{-n-\varepsilon-2+2m}}{\Gamma(m) \Gamma(m-n-\varepsilon)} = \\ &= \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \frac{(z/2)^{-n-\varepsilon-2+2m}}{\Gamma(m) \Gamma(m-n-\varepsilon)} + (-1)^n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{(z/2)^{n-\varepsilon-2+2r}}{\Gamma(r-\varepsilon) \Gamma(r+n)}, \end{aligned}$$

что переходит в пределе ($\varepsilon=0$) в простое равенство

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (5.3.74)$$

Отсюда, если n целое или нуль, решение $J_{-n}(z)$ не является более независимым от $J_n(z)$, и нам надо позаботиться о втором решении.

Эта ситуация должна быть нам теперь знакома: если n целое, индексы уравнения Бесселя при $z=0$ различаются на целое число и второе решение должно иметь логарифмическую особенность. Ни J_n , ни J_{-n} не имеют такой особенности, так что надо подыскать что-нибудь другое. Конечно, две функции Ганкеля не становятся пропорциональными одна другой при $v=n$, а потому одна из них или обе должны иметь там логарифмическую особенность (на самом деле обе они имеют). Но мы хотим иметь

решение, более тесно связанное с J_ν . Аналогия между J_ν и косинусом наводит нас на мысль определить функцию Бесселя второго рода, то есть функцию Неймана, аналогичную синусу

$$\begin{aligned} N_\nu(z) &= (1/2i) [H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)] = \\ &= \operatorname{ctg}(\pi\nu) J_\nu(z) - \operatorname{cosec}(\pi\nu) J_{-\nu}(z) = \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{i\Gamma(\nu+1)} e^{-iz} G\left(\nu + \frac{1}{2} \mid 2\nu + 1 \mid 2iz\right) \simeq \\ &\simeq \sqrt{2/\pi z} \sin\left[z - \frac{1}{2}\pi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right], \quad -\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi. \end{aligned} \quad (5.3.75)$$

Эта функция пригодна для всех значений ν (нам надо, конечно, рассматривать только значения, для которых $\operatorname{Re} \nu > 0$, так как в противном случае мы можем взять за первое решение $J_{-\nu}$). Если ν не целое, члены по отдельности конечны, и так как функция содержит кое-что от $J_{-\nu}$ (при $\nu = n + \frac{1}{2}$ она целиком равна $J_{-\nu}$), то она должна быть независима от J_ν . Если ν целое, члены по отдельности бесконечны, но взаимно уничтожаются, порождая решение с логарифмической особенностью при $z=0$. Для получения этого решения можно применить формулу (5.3.61) или же вновь вычислить ряд. Так как настоящий случай проще, то мы произведем вычисление заново, чтобы вновь продемонстрировать метод. Полагая $\nu = n + \varepsilon$ и устремляя ε к нулю, получаем

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi\varepsilon} J_{n+\varepsilon}(z) - \frac{(-1)^n}{\pi\varepsilon} J_{-n-\varepsilon}(z) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{J_{n+\varepsilon} - J_n}{\varepsilon} - (-1)^n \frac{J_{-n-\varepsilon} - J_n}{\varepsilon} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{d}{d\nu} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{d}{d\nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=n}, \end{aligned}$$

где мы добавили и вычли $J_n (= (-1)^n J_{-n})$. Производная от J_ν при $\nu = n$ равна

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (z/2)^{\nu+2m-2}}{\Gamma(m) \Gamma(m+\nu)} \right]_{\nu=n} &= \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left[\ln \frac{z}{2} - \psi(m+n) \right] \frac{(z/2)^{n+2m-\varepsilon}}{\Gamma(m) \Gamma(m+n)} = \\ &= \left[\ln \frac{z}{2} - \psi(n+1) \right] J_n(z) - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{n+2r}}{r! (n+r)!} \sum_{s=1+n}^{r+n} \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(\nu+n) &= -\gamma + \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{\nu+n+r} \right) = \\ &= \psi(\nu) + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \dots + \frac{1}{\nu+n-1} \quad \text{и } \gamma = 0,5772 \dots \end{aligned}$$

аналогично производная от $(-1)^n J_{-\nu}$ равна

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (z/2)^{-n-\varepsilon-m}}{\Gamma(m+1) \Gamma(m-n+1-\varepsilon)} + \frac{d}{d\varepsilon} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{(z/2)^{n-\varepsilon-2r}}{\Gamma(r-\varepsilon) \Gamma(r+n)} \right]_{\varepsilon=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m! (z/2)^{n-2m}} - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \left[\ln \frac{z}{2} - \phi(r) \right] \frac{(z/2)^{n+2r-2}}{\Gamma(r) \Gamma(n+r)} = \\
&= - \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma \right) J_n(z) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m! (z/2)^{n-2m}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \sum_{s=1}^m \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Складывая полученные два выражения, получаем в итоге разложение функции Неймана около $z=0$

$$\begin{aligned}
N_n(z) &= \frac{1}{\pi} \left[2 \ln \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma - \phi(n+1) \right] J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m! (z/2)^{n-2m}} - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \sum_{s=1}^m \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+n} \right] \simeq \\
&\underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right], & n=0, \\ -\frac{1}{\pi (n-1)!} \left(\frac{z}{2} \right)^n, & n>0. \end{cases} \quad (5.3.76)
\end{aligned}$$

Если $n=0$, конечная сумма (от 0 до $n-1$) отсутствует. Это разложение имеет тот же общий вид, что разложение (5.3.61) для вырожденной гипергеометрической функции второго рода; оно содержит член, включающий произведение J_n на $\ln z$, конечную сумму отрицательных степеней z (за исключением случая $n=0$, когда она отсутствует) и добавочный бесконечный ряд, начинающийся с члена z^{n+2} .

Приближенные формулы для высокого порядка ν . Асимптотические формулы (5.3.68), (5.3.69), (5.3.70) и (5.3.75) предполагают, что аргумент z значительно больше порядка ν функций Бесселя. Полезные формулы для $J_\nu(z)$; когда z и ν велики, можно получить, применяя метод кратчайшего спуска (см. § 4.6). Если как z , так и ν велики, интеграл

$$\int_{-\infty}^i e^{zt} (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt,$$

из которого мы получили предыдущие асимптотические разложения, уже не имеет наибольшего значения подинтегральной функции вблизи $t=i$, как это было ранее. Следовательно, первый член асимптотического разложения не дает хорошего приближения, и мы должны позаботиться о другой формуле. Оказывается, что интегральное представление

$$\left(e^{-\frac{1}{2}\pi i \nu} / \pi \right) \int e^{i(z \cos w + \nu w)} dw,$$

приведенное на стр. 584, контуры которого показаны на рис. 5.13, наиболее подходит для нашей цели. Так, если взять контур A , то интеграл равен $2J_\nu(z)$; если взять B , то интеграл равен $H_\nu^{(1)}(z)$; если же контур состоит и из B , и из C (причем B проходится в обратном порядке, сверху вниз), то интеграл равен $2N_\nu(z)$.

Каждый из этих контуров проходит из области, где подинтегральная функция исчезающе мала (на рис. 5.13 незаштрихованные участки вдалеке от вещественной оси), через область, где эта функция велика, в другую область, где подинтегральная функция исчезающе мала. Если мы проведем

контур произвольного вида между этими пределами, то подинтегральная функция будет меняться сложным образом, часто меняя знак и часто приобретая большую мнимую часть, но при интегрировании все эти дополнительные осложнения взаимно уничтожаются и результат будет один и тот же, как бы мы ни провели промежуточную часть контура (так как подинтегральная функция имеет особенность только при $w = \infty$). Если нам надо подсчитать приближенное значение интеграла, то мы должны сначала выбрать путь, вдоль которого подинтегральная функция ведет себя по возможности наиболее просто. Например, так как подинтегральная функция является показательной, то вещественная часть показателя определяет модуль этой функции, а мнимая часть — фазу. Чтобы исключить излишние колебания подинтегральной функции, надо условиться производить интегрирование вдоль контура, на котором фаза постоянна. Мы должны сейчас попытаться найти маршрут, для которого подинтегральная функция велика только на его коротком участке, так что подсчет на этом ограниченном участке будет достаточным, чтобы дать ответ с хорошим приближением.

Любой из контуров, показанных на рис. 5.13, представляет собой путь через горную цепь. Мы хотим оставаться в долине по возможности долго, чтобы пройти через самый низкий перевал и по возможности быстро достичь долины с другой стороны. Оказывается, что путь для этого является также путем, вдоль которого фаза подинтегральной функции остается постоянной, как это было показано в § 4.6.

Так как в показателе нашей подинтегральной функции стоит функция комплексного переменного $w = u + iv$, то вещественная часть этой последней определяет модуль, а мнимая — фазу подинтегральной функции

$$F(w) = i(z \cos w + w) = f(u, v) + ig(u, v), \\ f = z \sin u \operatorname{sh} v - wv, \quad g = z \cos u \operatorname{ch} v + vw.$$

В белых участках рис. 5.13 f становится большой отрицательной, а в заштрихованных — большой положительной. Мы хотим пройти по самому низкому проходу в поверхности $f(u, v)$.

Так как f представляет собой вещественную часть функции комплексного переменного, то она является решением уравнения Лапласа по u и v (см. стр. 334) и не может иметь максимумов или минимумов в конечной части плоскости. Это означает, что вершина самого низкого прохода должна быть седловой точкой, где поверхность искривляется книзу в одном направлении и кверху в направлении, перпендикулярном первому. Другими словами, вершина перехода является точкой, где $dF/dw = 0$, и вблизи этой точки

$$F = F_s + b(w - w_s)^2 + \dots = \\ = f_s + a[(x^2 - y^2) \cos 2\theta - 2xy \sin 2\theta + \dots] + \\ + ig_s + ia[(x^2 - y^2) \sin 2\theta + 2xy \cos 2\theta + \dots];$$

здесь $b = ae^{2i\theta} = (d^2F/dw^2)_s$ и $x = u - u_s$, $y = v - v_s$. Вдоль линий $y = -x \operatorname{tg} \theta$ и $y = x \operatorname{ctg} \theta$ (под углом $-\theta$ и $\frac{1}{2}\pi - \theta$ к вещественной оси) мнимая часть F постоянна ($g = g_s$), а вещественная имеет наибольшую кривизну. Вдоль линии $y = -x \operatorname{tg} \theta$ вещественная часть F равна

$$\operatorname{Re} F = f = f_s + \frac{1}{2} ax^2 \sec^2 \theta + \dots = f_s + \frac{1}{2} ad^2 + \dots,$$

где $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ представляет собой расстояние вдоль линии $y = -x \operatorname{tg} \theta$. Отсюда вдоль линии, составляющей угол $-\theta$ с вещественной осью,

(и потому подинтегральная функция) *возрастает*, когда мы отходим от седловой точки $w = w_s$. Отсюда эта линия идет вдоль оси горного хребта, и мы не должны по ней следовать, так как она приведет нас к еще большим высотам.

Однако вдоль линии $y = x \operatorname{ctg} \theta$ вещественная часть F равна

$$f = f_s - \frac{1}{2} a x^2 \operatorname{cosec}^2 \theta + \dots = f_s - \frac{1}{2} s^2 + \dots,$$

где $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ представляет собой расстояние вдоль этой линии от седловой точки. Поэтому вдоль этого пути в любом направлении от вершины прохода мы держим курс вниз к долине. Если наш контур не

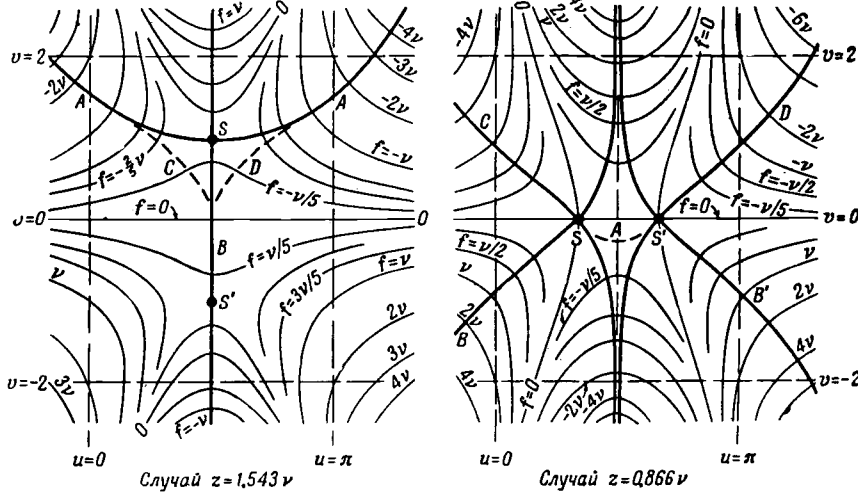


Рис. 5.14. Пути интегрирования для получения асимптотических представлений функций Бесселя, если z и v велики.

должен пересекать других горных цепей, то приближенным выражением для интеграла тогда будет

$$\int e^{F(w)} dw \simeq e^{f_s + i g_s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} a s^2 + \frac{1}{2} \pi i - i \theta} ds = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{f_s + i g_s - i \theta + \frac{1}{2} \pi i}$$

Если контур (в направлении интегрирования) вблизи $w = w_s$ образует угол $\frac{1}{2} \pi - \theta$ с вещественной осью, то элемент dw равен $e^{\frac{1}{2} \pi i - i \theta} ds$, где ds вещественно. (Если интеграл взять в противоположном направлении, то надо в окончательном результате добавить множитель -1 или заменить в показателе $\frac{1}{2} \pi i$ на $-\frac{1}{2} \pi i$.) Это выражение тем лучше приближает истинное значение интеграла, чем выше и уже проход, через который мы должны идти (то есть чем больше f_s и a).

Для преобразования интеграла, представляющего функцию Бесселя, положим $F(w) = iz \cos w + ivw$. В седловых точках, где dF/dw равно нулю, будет $\sin w_s = v/z$. Если z вещественно, возможны два случая: если $z > v$, то w_s находится на вещественной оси в точках $\operatorname{Arc} \sin(v/z)$; если же $z < v$, то w_s комплексно и находится в точках $(2n + \frac{1}{2})\pi + i \operatorname{Ar} \operatorname{ch}(v/z)$.

Оба случая показаны на рис. 5.14, где оба рисунка начерчены на плоскости $w = u - iv$, причем для правого $z = 0,866v$, а для левого $z = 1,543v$.

Тонкие линии — линии равного значения $f = \operatorname{Re} F$. Жирные линии — контуры, проходящие через одну или обе седловые точки S, S' и вдоль которых $g = \operatorname{Im} F$ постоянно. Контур A , проходящий из $i\infty - \frac{1}{2}\pi$ через S (или через S и S' на правом рисунке) в $i\infty + \frac{3}{2}\pi$, дает $2J_\nu(z)$. Контур C , проходящий из $i\infty - \frac{1}{2}\pi$ через S' (слева) или S (справа) в $-i\infty + \frac{1}{2}\pi$, дает $H_\nu^{(1)}(z)$, а контур D дает $H_\nu^{(2)}(z)$. Если применить C и D вместе, начиная из $i\infty - \frac{1}{2}\pi$ и $i\infty + \frac{3}{2}\pi$ и кончая оба контура в $-i\infty + \frac{1}{2}\pi$, получаем $2N_\nu(z)$. На контурах B и B' значение g постоянно, но в этих случаях f убывает, когда мы отходим от седловой точки. Если как ν , так и z велики, то значение f в седловой точке много больше, чем, например, ее значения в любом другом месте вдоль A , так что вне непосредственной близости S можно полностью пренебречь подинтегральной функцией.

Взяв сначала случай $z < \nu$ (и полагая для удобства $z = \nu \operatorname{sech} \alpha$), мы найдем, что $dF/dw = 0$ при $w = w_s = \frac{1}{2}\pi \pm i\alpha$. Верхняя точка S пересекается контуром A , построенным для $2J_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha)$. Значение f в w_s равно $f_s = \nu(\operatorname{th} \alpha - \alpha)$, а значение g там равно $g_s = \frac{1}{2}\pi\nu$. Вторая производная d^2F/dw^2 при $w = w_s$ равна $-\nu \operatorname{th} \alpha$, так что вблизи точки S значение F приближенно равно

$$F \simeq \nu(\operatorname{th} \alpha - \alpha) + \frac{1}{2}i\nu\pi - \frac{1}{2}\nu \operatorname{th} \alpha \cdot (w - w_s)^2 = F_s + \frac{1}{2}ae^{2i\theta}(w - w_s)^2,$$

$$a = \nu \operatorname{th} \alpha, \quad \theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Согласно нашим предыдущим рассуждениям, контур, спускающийся с прохода, составляет угол $\frac{1}{2}\pi - \theta = 0$ с вещественной осью, и приближенное значение интеграла равно

$$2J_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) \simeq \frac{e^{\frac{1}{2}\pi i\nu}}{\pi} \int_A e^{F(w)} dw = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu \operatorname{th} \alpha}} e^{\nu(\operatorname{th} \alpha - \alpha)}.$$

Контур для функций Ганкеля проходят через S' , где

$$f_s = \nu(\alpha - \operatorname{th} \alpha), \quad g_s = \frac{1}{2}\pi\nu, \quad (d^2F/dw^2)_s = \nu \operatorname{th} \alpha, \quad \theta = 0,$$

$$a = \nu \operatorname{th} \alpha.$$

Для первой функции Ганкеля контур проходит через S' в отрицательном, а для второй — в положительном направлениях, так что

$$H_\nu^{(2)}(\nu \operatorname{sech} \alpha) \simeq -H_\nu^{(1)}(\nu \operatorname{sech} \alpha) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\nu \operatorname{th} \alpha}} e^{\nu(\alpha - \operatorname{th} \alpha) + \frac{1}{2}\pi i}$$

и потому соответствующим выражением для функции Неймана будет

$$-N_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\nu \operatorname{th} \alpha}} e^{\nu(\alpha - \operatorname{th} \alpha)}.$$

Если $z > \nu$, полагаем $z = \nu \sec \beta$; тогда седловыми точками будут $w_s = \frac{1}{2}\pi \pm \beta$. Вторая производная $(d^2F/dw^2)_s = \pm i\nu \operatorname{tg} \beta$, так что $\alpha = \nu \operatorname{tg} \beta$ и $\theta = \pm \pi/4$; далее, $f_s = 0$ и $g_s = \frac{1}{2}\pi\nu \mp \nu(\operatorname{tg} \beta - \beta)$. Контур C для первой

функции Ганкеля пересекает $S\left(\omega_s = \frac{1}{2}\pi - \beta\right)$ в отрицательном направлении, так что

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(\nu \sec \beta) &\simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i \nu}}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu \operatorname{tg} \beta}} e^{\frac{1}{2}\pi i \nu + i \nu (\operatorname{tg} \beta - \beta) - i\theta - \frac{1}{2}\pi i} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg} \beta}} e^{i \nu (\operatorname{tg} \beta - \beta) - \frac{1}{4}\pi i} \end{aligned}$$

с другой стороны, вторая функция приобретает вид

$$H_{\nu}^{(2)}(\nu \sec \beta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg} \beta}} e^{-i \nu (\operatorname{tg} \beta - \beta) + \frac{1}{4}\pi i}.$$

С помощью этих двух функций мы можем подсчитать J_{ν} и N_{ν} .

Если z очень близко к ν , обе седловые точки приближаются друг к другу и в конце концов становятся неразличимыми. При $z = \nu$ в точке $\omega = \frac{1}{2}\pi$ как dF/dz , так и d^2F/dz^2 равны нулю, так что нуль будет высшего порядка, и надо ожидать тройной симметрии осей. Контуры, на которых $g = \text{const}$, приближаются к точке $\omega = \frac{1}{2}\pi$ вдоль мнимой оси или вдоль направлений $\pm \pi/6$, или $\pi \mp \pi/6$. По направлениям $\pi/6$, $\pi - \pi/6$, $3\pi/2$ функция f убывает при возрастании расстояния от «седловой точки» (седло, для трехногого всадника). Для $J_{\nu}(\nu)$ мы применяем первые два направления, причем первое в обратную сторону. Интеграл оказывается равным

$$J_{\nu}(\nu) \simeq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{6}} \pi \nu^{\frac{1}{3}}}.$$

Если $z - \nu$ очень мало сравнительно с ν , то все равно можно пользоваться этим путем интегрирования, причем можно подсчитать малый поправочный член.

Таким образом, мы можем написать следующие приближенные формулы для больших значений ν и z для различных областей z по отношению к ν (при вещественном ν):

$$\begin{aligned} J_{\nu}(z) &\simeq \begin{cases} \frac{e^{\nu (\operatorname{th} \alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi \nu \operatorname{th} \alpha}}, & z < \nu, \operatorname{th} \alpha = \sqrt{1 - (z/\nu)^2}, \\ \frac{\sin(\pi/3) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\pi (z/6)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\sin(2\pi/3) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\pi (z/6)^{\frac{2}{3}}} (z - \nu), & z \simeq \nu, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg} \beta}} \cos \left[\nu \operatorname{tg} \beta - \nu \beta - \frac{1}{4}\pi \right], & z > \nu, \operatorname{tg} \beta = \sqrt{(z/\nu)^2 - 1}. \end{cases} \quad (5.3.77), \\ N_{\nu}(z) &\simeq \begin{cases} \frac{-2e^{\nu (\alpha - \operatorname{th} \alpha)}}{\sqrt{2\pi \nu \operatorname{th} \alpha}}, & z < \nu, \\ -\frac{2 \sin(\pi/3) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\pi (z/6)^{\frac{1}{3}}} + \frac{2 \sin(2\pi/3) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\pi (z/6)^{\frac{2}{3}}} (z - \nu), & z \simeq \nu, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg} \beta}} \sin \left[\nu \operatorname{tg} \beta - \nu \beta - \frac{1}{4}\pi \right], & z > \nu. \end{cases} \end{aligned}$$

Кулоновская волновая функция. Радиальная часть уравнения Шредингера для электрона с массой m , зарядом $-e$ и полной энергией E в центрально-симметричном потенциальном поле $V(r)$ имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] R = 0,$$

где множитель $l(l+1)$ представляет собой константу разделения, появляющуюся из углового множителя; если потенциал зависит только от r , то l целое. Если потенциал V представляет собой кулоновское поле, порождаемое частицей заряда Ze (достаточно тяжелой, так что частица находится в центре тяжести), то V равно $-e^2 Z/r$. Полагая $E = -(me^4 Z^2 / 2\hbar^2) \kappa^2$,

$x = 2\kappa z = (2\kappa me^2 Z / \hbar^2) r$ и $R = e^{-\frac{1}{2}x} x^l F(x)$, получим уравнение для F

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + [2(l+1) - x] \frac{dF}{dx} - \left[l+1 - \frac{1}{\kappa} \right] F = 0,$$

которое является вырожденным гипергеометрическим уравнением с $a = l+1$, $b = l+1$ и $c = 2l+2$. Поэтому решение данного уравнения, конечное при $z=0$, имеет вид

$$\begin{aligned} C_l(\kappa, z) &= \frac{V\pi (2\kappa z)^l e^{-\kappa z}}{2^{2l+1} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)} F\left(l+1 - \frac{1}{\kappa} \mid 2l+2 \mid 2\kappa z\right) \simeq \\ &\simeq_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma[l+1 - (1/\kappa)]} (2\kappa z)^{-1 - (1/\kappa)} e^{\kappa z} + \\ &+ \frac{\Gamma(l+1) e^{i\pi[l+1 - (1/\kappa)]}}{\Gamma[l+1 + (1/\kappa)]} (2\kappa z)^{-1 + (1/\kappa)} e^{-\kappa z}. \quad (5.3.78) \end{aligned}$$

Если κ вещественное (то есть энергия E отрицательная), это решение, хотя и конечное при $z \rightarrow 0$, становится бесконечным при $z \rightarrow \infty$, если только $\Gamma(l+1 - 1/\kappa)$ не бесконечное. Если $1/\kappa$ равно положительному целому n , большему l , то $\Gamma(l+1 - 1/\kappa)$ представляет собой значение гамма-функции от нуля или от отрицательного целого, равное бесконечности. Только в этих случаях имеется решение, конечное от $r=0$ до $r=\infty$. Таким образом, допустимые отрицательные значения энергии таковы:

$$E_n = -(me^4 Z^2 / 2\hbar^2 n^2), \quad n = l+1, l+2, l+3, \dots;$$

эти значения были впервые подсчитаны Бором.

Если κ мнимое ($\kappa = ik$ в случае положительной энергии), то C_l конечно во всей области изменения z для любого вещественного значения k (любого положительного значения энергии). В этом случае первое (конечное) решение принимает различные формы:

$$\begin{aligned} C_l(ik, z) &= \frac{V\pi (2ikz)^l}{2^{2l+1} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)} \left[1 - \frac{z}{l+1} + \frac{1 - \frac{1}{2}(l+1)}{2!(l+1)\left(l + \frac{3}{2}\right)} k^2 z^2 - \dots \right] = \\ &= (2ikz)^l \Gamma(l+1) \left[\frac{1}{\Gamma[l+1 + (i/k)]} U_1\left(l+1 + \frac{i}{k} \mid 2l+2 \mid 2ikz\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma[l+1 - (i/k)]} U_2\left(l+1 + \frac{i}{k} \mid 2l+2 \mid 2ikz\right) \right] e^{-ikz} \simeq \\ &\simeq_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(l+1) e^{(i\pi l/2) - (\pi/2k)} }{kz \Gamma[l+1 + (i/k)]} \sin \left[kz + \frac{1}{k} \ln(2kz) - \frac{1}{2} \pi l - \Phi_l(k) \right], \quad (5.3.79) \end{aligned}$$

где

$$\Gamma\left(l+1+\frac{i}{k}\right)/\Gamma\left(l+1-\frac{i}{k}\right)=e^{2i\Phi_l(k)}$$

и

$$\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{k}\right)\right|^2=\left[l^2+\frac{1}{k^2}\right]\left[(l-1)^2+\frac{1}{k^2}\right]\dots\left[1+\frac{1}{k^2}\right]\frac{\pi/k}{\operatorname{sh}(\pi/k)}.$$

Второе решение, имеющее особенность при $z=0$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_l(ik, z) &= \frac{\sqrt{\pi}(2ikz)^l e^{-ikz}}{2^{2l+1}\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} G\left(l+1+\frac{i}{k} \mid 2l+2 \mid 2ikz\right) \simeq \\ &\simeq_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(l+1) e^{i(\pi l/2) - (\pi/2k)} \cos\left[kz + \frac{1}{k} \ln(2kz) - \frac{1}{2} \pi l - \Phi_l(k)\right]}{ikz \left|\Gamma\left[l+1+(i/k)\right]\right|}. \end{aligned}$$

Разложение в ряд около $z=0$, показывающее структуру особенности в этой точке, можно получить из формулы (5.3.62).

Другие решения, пригодные для других интересующих нас уравнений, будут исследованы после постановки задач. Так, например, волновые функции для параболических и параболических цилиндрических координат можно выразить через функции F и G . Они будут рассмотрены в гл. 11.

Функции Матье. Мы указали на стр. 550, что интегральное представление наиболее полезно в случае уравнений с тремя регулярными особыми точками или с одной регулярной и одной иррегулярной точками. Поэтому мы не разочаруемся, найдя, что оно не так хорошо применимо к более сложным уравнениям. Чтобы проиллюстрировать возникающие трудности и показать, что представление все же приносит некоторую пользу, применим преобразование Лапласа к уравнению Матье (в одной из его алгебраических форм)

$$(z^2-1)\psi'' + z\psi' + (h^2z^2-b)\psi = 0. \quad (5.3.80)$$

Легко проверить, что применение преобразования Лапласа даст уравнение для $v(t)$ того же общего вида:

$$(t^2+h^2)v'' + 3tv' - (t^2+b-1)v = 0.$$

Таким образом, чтобы решить уравнение для v , требуется столько же работы, как и для ψ ; v тоже пропорциональна функции Матье, и наше интегральное преобразование приводит к *интегральному уравнению*.

Однако интегральное уравнение может иметь некоторую ценность, так что стоит его рассмотреть подробнее. Целесообразно изменить шкалу t , чтобы уравнение для v стало по возможности близким к уравнению для ψ . Положив $\psi(z) = \int e^{ihzt} v(t) dt$, получим уравнение для v и присоединенную билинейную форму следующего вида:

$$\begin{aligned} (t^2-1)v'' + 3tv' + (h^2t^2-b+1)v &= 0, \\ P(v, e^{ihzt}) &= -ihe^{ihzt} \{(t^2-1)v' + [t-ihz(t^2-1)]v\}. \end{aligned}$$

Если v положить равным $f(t)/\sqrt{1-t^2}$, то уравнение для f оказывается тем же самым, что уравнение (5.3.80) для ψ . Следовательно, можно сказать, что если f представляет собой решение уравнения Матье (5.3.80), то другим решением того же уравнения будет

$$\psi(z) = A \int e^{ihzt} f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (5.3.81)$$

Если постоянная A и пределы интегрирования выбраны соответственным образом, то ψ может равняться f и мы получаем *интегральное уравнение* для ψ .

Однако даже в таком виде этот интеграл может нам помочь при аналитическом продолжении решения, из-за чего нам и нужно интегральное представление.

Например, решением уравнения (5.3.80) (см. стр. 531) для частного значения $b (= be_{2m})$ будет

$$Se_{2m}(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi), \quad z = \cos \varphi.$$

Из формулы (5.3.81) мы видим, что другим решением уравнения (5.3.80) будет

$$\psi(z) = A \int_0^{2\pi} e^{ihz \cos \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi) d\varphi = 2\pi A \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} J_{2n}(hz),$$

причем мы применили формулу (5.3.65) для получения функций Бесселя. Это особенно интересное и важное соотношение; то, что решение уравнения Матье можно выразить в виде ряда по функциям Бесселя, интересно и само по себе, но то, что числовые коэффициенты ряда равны (с чередующимися знаками) коэффициентам разложения решения в ряд Фурье, представляет собой один из тех факторов, которые укрепляют нашу веру в значительное единство и простоту математики.

Мы могли, конечно, предоставить себе этот приятный сюрприз в предыдущем параграфе, когда мы говорили о разложении функций Матье в ряды. Мы могли бы попытаться применить ряды по функциям Бесселя для решения уравнения (5.3.80) (см. стр. 540) и нашли бы, что рекурсивная формула для коэффициентов *в точности та же*, что и формула (5.2.69) для коэффициентов ряда Фурье (с чередующимися знаками перед a). Затем мы сказали бы, что рекуррентные формулы (5.3.64) для функций Бесселя, приводящие к рекурсивной формуле для коэффициентов, тесно связаны с рекуррентными формулами для тригонометрических функций, так что для столь симметричного уравнения, каким является уравнение Матье, рекурсивные формулы оказываются эквивалентными. Так как мы прождали с демонстрацией этого свойства до настоящего момента (чтобы лучше познакомиться с функциями Бесселя), то теперь мы предпочли бы сказать, что тесная *интегральная* взаимосвязь между тригонометрическими и бесселевыми функциями, осуществляемая преобразованием Лапласа, является свойством, порождающим это совпадение. Конечно, эти два утверждения являются только двумя выражениями одного и того же общего свойства.

До сих пор мы показали только, что ряд по функциям Бесселя является решением уравнения (5.3.80); мы не показали, как он связан с функцией $Se_m(h, z)$, которая также есть ряд (аналитический при $z = \pm 1$). Для этого мы перейдем в Se от $z = \cos \varphi$ к $z = \operatorname{ch} \theta$ ($\theta = i\varphi$) и затем применим формулы (5.2.54), связывающие гиперболические функции с функциями Гегенбауера

$$Se_{2m}(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \operatorname{ch}(2n\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} T_{2n}^{-1/2}(z).$$

При помощи разложения этого выражения по степеням z и разложения функции Бесселя также по степеням z можно показать, что оба ряда

пропорциональны и потому образуют одно и то же решение. Таким образом, мы получили аналитическое продолжение решения Se , определенного при $-1 < z < 1$, на интервал $1 < z < \infty$.

Для области $1 < z < \infty$ мы предпочтем применять функцию, имеющую простые асимптотические свойства. Пользуясь асимптотическим поведением функций Бесселя (5.3.68), определяем

$$Je_{2m}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_{2n}(hz) \simeq \frac{1}{\sqrt{hz}} \cos \left[hz - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.3.82)$$

поскольку $\sum B_{2n} = 1$. Это асимптотическое выражение имеет место для аргумента z между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Так как это решение пропорционально Se_{2m} , то можно найти коэффициент пропорциональности посредством сравнения значений при любом подходящем значении z . Наиболее подходит значение $z=0$, так как

$$Je_{2m}(h, 0) = (-1)^m B_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad Se_{2m}(h, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n}.$$

Отсюда

$$\left[\sum_n (-1)^n B_{2n} \right] Je_{2m}(h, z) = (-1)^m B_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} Se_{2m}(h, z). \quad (5.3.83)$$

Теперь мы в состоянии получить второе решение уравнения (5.3.80) при помощи замены функций Бесселя на функции Неймана

$$Ne_{2m}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_{2n}(hz) \simeq \frac{1}{\sqrt{hz}} \sin \left[hz - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (5.3.84)$$

Это решение имеет особенности при $z = \pm 1$ и является, конечно, независимым от Se_{2m} и Je_{2m} . Ряд (5.3.84) нельзя применять при $|z| \leq 1$ (на самом деле он не сходится хорошо и для малых значений z , несколько больших 1), и надо пользоваться различными разложениями. Так как второе решение в области $|z| \leq 1$ редко требуется в физических задачах (в силу его неперериодичности по φ), то мы не будем заниматься этим вопросом дальше.

Преобразование Лапласа и разделенное волновое уравнение. До продолжения нашего исследования функций Матье и сфероидальных функций будет полезно для ясности изложения ввести особо важный метод решения волнового уравнения, который будет широко применяться в последующих главах. Здесь мы применим его только для выражения новой точки зрения на преобразование Лапласа, которая даст нам возможность строить новые интегральные преобразования фактически по нашему желанию. Для этого мы возвратимся к исследованию разделения переменных для двумерного волнового уравнения, рассмотренного на стр. 473—478.

Если координаты ξ_1 и ξ_2 являются разделяющими и осуществляют конформное преобразование плоскости x, y , то уравнению Гельмгольца можно придать вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} + k^2 [g_1(\xi_1) + g_2(\xi_2)] \psi = 0. \quad (5.3.85)$$

Любое решение уравнения Гельмгольца, разделяющееся по ξ_1, ξ_2 на множители или нет, должно быть решением последнего уравнения. Например, e^{ikh} или $J_0(kr)$, если x или r выразить через ξ_1, ξ_2 , удовлетворяет уравнению (5.3.85). Если решение окажется разделяющимся в этих координатах $\psi = X_1(\xi_1)X_2(\xi_2)$, то X_1 и X_2 будут решениями разделенных уравнений

$$(d^2X_1/d\xi_1^2) + k^2[g_1(\xi_1) - \alpha^2]X_1 = 0, \quad (d^2X_2/d\xi_2^2) + k^2[g_2(\xi_2) + \alpha^2]X_2 = 0,$$

где α^2 — константа разделения.

Новым здесь является то, что, как мы можем сейчас показать, каждое решение уравнения Гельмгольца является подходящим ядром для интегрального представления одного из разделенных решений X_1 через другое X_2 . Допустим, что $K(z, t)$ представляет собой решение уравнения Гельмгольца $\nabla^2 K + k^2 K = 0$, выраженное в координатах ($z = \xi_1, t = \xi_2$ для избежания индексов), в которых решения X_1, X_2 разделяются. Например, K может равняться e^{ikh} , а разделяющими координатами могут быть полярные координаты ($z = \ln r, t = \varphi$); тогда $K = e^{ikr \cos t}$. В этом случае K удовлетворяет уравнению (5.3.85)

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + k^2 g_1(z) K = -\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - k^2 g_2(t) K.$$

Если теперь получающаяся при разделении функция $X_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_z(X_1) = (d^2X_1/dz^2) + k^2(g_1 - \alpha^2)X_1 = 0,$$

то можно применить интегральное представление $X_1(z) = \int K(z, t)v(t)dt$. Действительно,

$$\mathcal{L}_z(K) = \mathcal{M}_t(K) = -\partial^2 K/\partial t^2 - k^2[g_2(t) + \alpha^2]K$$

и в силу отсутствия члена с первой производной и того, что вторая производная не имеет множителя, зависящего от t , сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_t$. Поэтому уравнение для v

$$d^2v/dt^2 + k^2[g_2(t) + \alpha^2]v = 0$$

есть как раз уравнение, которому удовлетворяет другой, получающийся при разделении множитель X_2 , образующий вместе с X_1 решение уравнения Гельмгольца.

Таким образом, мы сейчас показали, что если $K(z, t)$ есть любое решение уравнения $(\nabla^2 + k^2)K = 0$, выраженное в разделяющих координатах z и t , а $X_2(t)$ — решение уравнения, дающего после разделения зависимость от координаты t , то решение уравнения, дающего зависимость от координаты z представим в виде

$$X_1(z) = \int K(z, t)X_2(t)dt, \quad (5.3.86)$$

а $X_1(z)X_2(t)$ является разделенным решением уравнения $(\nabla^2 + k^2)X_1X_2 = 0$ в координатах z, t . Если функция X_2 проще чем X_1 , то мы получаем интегральное представление более сложной функции через более простую (если K достаточно простое).

Как первый пример этого возьмем полярные координаты $\xi_1 = \ln r, \xi_2 = \varphi$, где уравнение (5.3.85) приобретает вид [см. (5.1.13)]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} + k^2 e^{2\xi_1} \psi = 0.$$

Решением уравнения $(\nabla^2 + k^2)K = 0$ является $K = e^{ikh} = \exp(ike^{\xi_1} \cos \varphi) = e^{ikr \cos \varphi}$, а решением уравнения для φ -множителя будет $\cos \alpha \varphi$ (где

α — константа разделения). Отсюда решением уравнения для r -множителя будет

$$X_1(r) = \int e^{ikr \cos \varphi \cos \alpha \varphi} d\varphi,$$

и из формулы (5.3.65) мы видим, что если интегрирование производится от 0 до 2π , то получается интегральное представление функции Бесселя $J_\alpha(kr)$. Вполне разделенное решение для константы разделения α имеет вид $J_\alpha(kr) \cos \alpha \varphi$.

Мы могли, конечно, применить любое из других решений в качестве X_2 , как $\sin \alpha \varphi$ или $e^{i\alpha \varphi}$ и т. д., чтобы получить другие представления функций Бесселя или Неймана. Или же мы могли применить другие волновые решения в качестве ядра. Или, наконец, мы могли переставить порядок множителей и выразить тригонометрические функции как интеграл от функций Бесселя вида

$$\int e^{ik \cos \varphi \cdot e^z} J_\alpha(ke^z) dz = \int e^{ikr \cos \varphi} J_\alpha(kr) \frac{dr}{r},$$

который, если интегрирование производится от нуля до бесконечности, оказывается пропорциональным $e^{i\alpha \varphi}$. Однако выражение простой показательной функции в виде интеграла Бесселя было бы излишним усердствием.

Переходя к функциям Матье, мы можем воспользоваться координатами $i\theta = \xi_1 - \beta$, $\varphi = \xi_2$, данными в формулах (5.1.15), где $x = d \cos \theta \cos \varphi$, $y = id \sin \theta \sin \varphi$. Мы вновь пользуемся ядром $e^{ihx} = e^{ih \cos \theta \cos \varphi}$ ($h = kd$) и получаем интегральное представление

$$X_1(\theta) = \int e^{ih \cos \theta \cos \varphi} X_2(\varphi) d\varphi,$$

где как X_1 , так и X_2 удовлетворяют уравнению [см. (5.2.67)]

$$(d^2 X/d\varphi^2) + [b - h^2 \cos^2 \varphi] X = 0,$$

в котором φ есть либо φ либо θ , а X — либо X_1 , либо X_2 . Здесь мы имеем полную симметрию, так что если пределы интегрирования и постоянные множители выбраны соответственно, то $X_1 = X_2$ и вместо интегрального представления получается интегральное уравнение для X . Из соотношений (5.3.81) — (5.3.83) мы видим, что решение $Se_{2m}(h, \cos \theta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$Se_{2m}(h, \cos \theta) = \lambda_{2m} \int_0^{2\pi} e^{ih \cos \theta \cos \varphi} Se_{2m}(h, \cos \varphi) d\varphi, \quad (5.3.87)$$

$$\lambda_{2m} = \frac{1}{2\pi B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} = \left(\frac{1}{2\pi B_0} \right) Se_{2m}(h, 0).$$

Мы могли бы так же успешно взять $e^{ikv} = e^{ih \sin \theta \sin \varphi}$ в качестве ядра. Посредством этого возможно показать (см. аналогичный вывод на стр. 595), что

$$Je_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 0)} (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{sh} \mu), \quad (5.3.88)$$

где $\mu = \xi_1 - \beta = i\theta$.

Значительно более важное и полезное разложение для Je получается при помощи интегрального представления, ядром которого является функция Бесселя. Решением уравнения Гельмгольца в полярных координатах

служит функция

$$\begin{aligned} J_0(kr) &= J_0(k\sqrt{x^2+y^2}) = J_0(h\sqrt{\cos^2\theta + \cos^2\varphi - 1}) = \\ &= J_0\left(h\sqrt{\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\varphi}\right). \end{aligned}$$

Отсюда другим решением уравнения Матье (5.2.67) будет интеграл

$$\int_0^{2\pi} J_0\left(h\sqrt{\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\varphi}\right) Se_{2m}(h, \cos\varphi) d\varphi.$$

Он конечен для всех вещественных значений θ , периодичен по θ и четен по θ (то есть его значение не меняется при перемене знака θ). Поэтому он должен быть пропорционален $Se_{2m}(h, \cos\theta)$. Таким образом, мы получили другое интегральное уравнение

$$Se_{2m}(h, \cos\theta) = \nu_{2m} \int_0^{2\pi} J_0\left(h\sqrt{\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\varphi}\right) Se_{2m}(h, \cos\varphi) d\varphi. \quad (5.3.89)$$

Для определения ν_{2m} и, что более важно, для построения нового разложения Je_{2m} мы применим формулу (5.3.66) для разложения ядра. Положив в (5.3.66) $\varphi = 2\varphi$, $x = \frac{1}{2}he^{i\theta}$, $y = -\frac{1}{2}he^{-i\theta}$, получим

$$J_0\left(h\sqrt{\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\varphi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n\left(\frac{1}{2}he^{i\theta}\right) J_n\left(\frac{1}{2}he^{-i\theta}\right) \cos(2n\varphi);$$

комбинируя это с рядом Фурье для Se_{2m} (см. стр. 594), мы в конце концов найдем

$$Se_{2m}(h, \cos\theta) = 2\pi\nu_{2m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} J_n\left(\frac{1}{2}he^{i\theta}\right) J_n\left(\frac{1}{2}he^{-i\theta}\right).$$

Подстановка $\theta = 0$ дает нам выражение для постоянной

$$\nu_{2m} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} J_n^2\left(\frac{h}{2}\right) \right]^{-1},$$

так как $Se_{2m}(h, 1) = 1$.

Можно показать, что $\int_0^{2\pi} J_{2n}(h \cos\theta) d\theta = 2\pi J_n^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Из формул (5.3.82)

и (5.3.83), где $z = \cos\theta$, при помощи интегрирования по θ получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} Se_{2m}(h, \cos\theta) d\theta &= 2\pi B_0 = \\ &= \frac{1}{B_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \int_0^{2\pi} J_{2n}(h \cos\theta) d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{B_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} J_n^2\left(\frac{h}{2}\right), \end{aligned}$$

откуда мы можем в итоге получить выражение v_{2n} только через B_{2n}

$$v_{2n} = \frac{1}{2\pi B_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} = \frac{1}{2\pi B_0^2} Se_{2m}(h, 0) Se_{2m}(h, 1).$$

Еще о функциях Матье. Собирая все наши результаты о четных периодических функциях четного порядка, мы получаем, что угловая функция имеет вид

$$Se_{2m}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi),$$

где коэффициенты B подсчитываются методами, рассмотренными на стр. 531 — 533, и нормируются так, что $\sum B_{2n} = 1$. «Радиальными» функциями первого рода являются

$$\begin{aligned} J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/2} B_0}{Se_{2m}(h, 1) Se_{2m}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \operatorname{ch}(2n\mu) = \\ &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{sh} \mu) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_n\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) J_n\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right). \quad (5.3.90) \end{aligned}$$

Подобным образом для второго радиального решения имеем

$$\begin{aligned} Ne_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_{2n}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/2}}{Se_{2m}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} N_{2n}(h \operatorname{sh} \mu) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_n\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) J_n\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right). \quad (5.3.91) \end{aligned}$$

Второй ряд сходится, только если $\operatorname{sh} \mu > 1$; третий ряд сходится вполне удовлетворительно при $\mu \geq 0$. Для нормировки функции Se_{2m} , примененной здесь нами, $Se_{2m}(h, 1) = \sum B_{2n} = 1$, а $Se_{2m}(h, 0) = \sum (-1)^n B_{2n}$, но формулы записаны так, что они справедливы при любой нормировке.

Чтобы удовлетворить граничным условиям, часто бывает важно знать значения обеих функций Je и Ne , а также их производных при $\mu = 0$ (что соответствует предельному эллиптическому цилиндру, то есть полосе ширины $d = h/k$). Для первого решения можно легко найти, что при $\mu = 0$

$$J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu) = (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B_0}{\sum (-1)^n B_{2n}}, \quad \frac{d}{d\mu} J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu) = 0.$$

Для получения производной от Ne , мы применяем значение определителя

Вронского

$$\Delta(Je, Ne) = Je_{2m} \frac{d}{d\mu} Ne_{2m} - Ne_{2m} \frac{d}{d\mu} Je_{2m} = 1,$$

в чем легко убедиться при помощи асимптотического вида Je и Ne . Так как при $\mu = 0$ второй член равен нулю, то значение производной от Ne при $\mu = 0$ должно равняться обратному значению Je .

Найти значение Ne при $\mu = 0$ труднее, так как надо пользоваться разложением функции Неймана около начала координат. Наиболее прямой метод состоит в применении значений J и N в довольно хорошо сходящемся разложении

$$Ne_{2m}(h, 1) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{B_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_n\left(\frac{h}{2}\right) J_n\left(\frac{h}{2}\right).$$

Другой метод основан на том, что, согласно стр. 534, Ne_{2m} представляет собой линейную комбинацию Se_{2m} и второго решения Fe_{2m} , определенного формулой (5.2.79). Сравнивая значения функций и их производных при $\mu = 0$, получаем соотношение

$$Ne_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \left[(-1)^m \frac{\sqrt{2/\pi}}{B_0} \sum_n (-1)^n B_{2n} \right] Fe_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) + [Ne_{2m}(h, 1)] Se_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu), \quad (5.3.92)$$

которое показывает поведение решения вблизи $\mu = 0$.

До сих пор мы рассматривали только четные функции Матье, Se и функции, связанные с ними. Имеются также нечетные решения для различных значений константы разделения ($b = b_{0m}$). Анализ этих решений проходит аналогичным путем с небольшими изменениями из-за перемены характера симметрии. Например, мы не можем пользоваться тем же интегральным уравнением (5.3.89), так как интеграл по синусоидальному ряду был бы равен нулю. Возвращаясь к формуле (5.3.81), заметим, что если $F(t)$ есть решение уравнения Матье, то

$$\Psi(z) = A \sqrt{z^2 - 1} \int e^{ihzt} F(t) dt$$

также является решением. Заменяя $z = \operatorname{ch} \mu$, $t = \cos \varphi$ и интегрируя один раз по частям, имеем (например, для нечетных значений m):

$$\begin{aligned} Jo_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) &= A \operatorname{sh} \mu \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \int_0^{2\pi} \sin \varphi e^{ih \operatorname{sh} \mu \cos \varphi} \sin(2n+1) \varphi d\varphi = \\ &= \left(\frac{2\pi}{ih} \right) A \operatorname{th} \mu \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} i^{2n+1} (2n+1) J_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu). \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования проводятся до конца с аналогичными заменами и дают

$$\begin{aligned} Jo_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{\operatorname{th} \mu}{So'_{2m+1}(h, 1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} (2n+1) B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/8} B_1 h}{So'_{2m+1}(h, 1) So_{2m+1}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \operatorname{sh} [(2n+1) \mu] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi/2}}{So_{2m+1}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{sh} \mu) = \\
&= \frac{\sqrt{\pi/2}}{B_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) = \right. \\
&= -J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) J_n \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) \left. \right] \simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \cos \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{3}{2} \right) \right], \quad (5.3.93)
\end{aligned}$$

где So' представляет собой производную от $So(h \cos \varphi)$ по φ .

Второе решение No строится аналогичным образом. Так как первое решение Jo имеет нулевое значение для $\mu=0$, то при этом величина No связана с производной от Jo при помощи определителя Вронского. Производную от No при $\mu=0$ можно вычислить посредством ряда из произведений бесселевых функций

$$\begin{aligned}
No_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{B_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) N_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) - \right. \\
\left. - J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) N_n \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) \right],
\end{aligned}$$

как было указано для значения функций Ne .

Возможно ввести также функции Матье третьего рода, подобно функциям Ганкеля, комбинируя функции первого и второго рода. Например,

$$He_{2n}(h, z) = Je_{2n}(h, z) + iNe_{2n}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} H_{2n}(hz)$$

и т. д. Однако дальнейшее исследование специальных свойств функций Матье лучше отложить до последующей главы, когда наша техника будет более развита, а в этих функциях будет более непосредственная надобность.

Сфероидальные волновые функции. Более общее уравнение

$$(z^2 - 1) \psi'' + 2(a + 1) z \psi' + (h^2 z^2 - b) \psi = 0$$

получается в случае сфероидальных координат. Если, например, взять вытянутые сфероидальные координаты μ, ϑ, φ , то после разделения получаются уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \\
&\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dS}{d\vartheta} \right) - \left(b + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} + h^2 \cos^2 \vartheta \right) S = 0, \\
&\frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{d}{d\mu} \left(\operatorname{sh} \mu \frac{dR}{d\mu} \right) + \left(b - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 \mu} + h^2 \operatorname{ch}^2 \mu \right) R = 0. \quad (5.3.94)
\end{aligned}$$

Решая первое уравнение, мы получаем, что если решение должно быть периодическое по координате φ , то m должно быть целым. Если во втором уравнении подставить $\cos \vartheta = z$, $S = \sin^m \vartheta \cdot \psi(z)$ или в третьем $\operatorname{ch} \mu = z$, $R = \operatorname{sh}^m \mu \cdot \psi(z)$, то уравнение для ψ будет иметь вид (5.2.66), повторенный выше, причем a равно целому m .

На стр. 538 и 541 мы рассмотрели вопрос о возможности решения этого уравнения при помощи ряда по функциям Гегенбауера. Мы указали, что решение можно записать в виде

$$S_{ml}(h, z) = (1 - z^2)^{m/2} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} T_{2n}^m(z), \quad (5.3.95)$$

если l четное целое. Если l нечетное, то суммируются $d_{2n+1} T_{2n+1}^m(z)$. Соответствующие значения константы разделения, при которых S конечна на отрезке $-1 \leq z \leq 1$, обозначаются через b_{ml} . Нормировка коэффициентов d такова, что S_{ml} имеет то же значение или ту же производную при $z=1$, что $T_{l-m}^m(z)$. Например, если $m=0$, то мы требуем, чтобы $S_{0l}(h, 1) = T_l^0(1) = P_l(1) = 1$, так что для $m=0$ $\sum_n d_{2n} = 1$ или $\sum_n d_{2n+1} = 1$.

«Радиальные» решения, аналогичные функциям J_e, J_o для эллиптического цилиндрического случая, получаются при помощи применения интеграла (5.3.67) вместе с интегральным уравнением для этих функций (которое можно получить посредством преобразования Лапласа или при помощи метода стр. 595—599)

$$\psi(h, z) = A(z^2 - 1)^{m/2} \int e^{ihzt} (1 - t^2)^{m/2} f(t) dt.$$

Если $f(t)$ есть решение уравнения (5.2.66) для $a=m$, то ψ также является решением того же уравнения. Далее, для $a=m$ формулу (5.3.67) можно переписать

$$\int_{-1}^1 e^{ihzt} (1 - t^2)^m T_{2n}^m(t) dt = \frac{2(2n+2m)! (-1)^n}{(2n)! (hz)^n} j_{2n+m}(hz),$$

где $j_\nu(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{\nu+1/2}(x)$ — сферическая функция Бесселя, упомянутая на стр. 582. Комбинируя эти две формулы и подставляя вместо $f(t)$ ряд для $S_{ml}(h, t)$, можно показать, что решением «радиального» уравнения при $b=b_{ml}$ будет

$$j e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{th}^{m\mu}}{\sum_n d_{2n} (2n+2m)! / (2n)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-l} \frac{(2n+2m)!}{(2n)!} d_{2n} j_{m+2n}(h \operatorname{ch} \mu) \simeq \\ & \simeq \frac{1}{h \operatorname{ch} \mu} \sin \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi (l+m) \right]. \end{aligned} \quad (5.3.96)$$

Второе решение $n e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu)$ можно получить посредством подстановки $n_{m+2n}(h \operatorname{ch} \mu)$, вместо $j_{m+2n}(h \operatorname{ch} \mu)$, где n — сферическая функция Бесселя, определенная на стр. 582.

Для этих функций можно получить также интегральные уравнения с функциями Бесселя, но будет легче исследовать эти функции позже в книге (гл. 14). Мы закончим этот параграф рассмотрением других типов интегральных представлений, которые иногда оказываются полезными.

Ядра, являющиеся функциями от zt . Мы уже рассмотрели свойства ядра e^{zt} , связанного с преобразованием Лапласа. Однако любое ядро вида $K(zt)$ обладает тем свойством, что $z dK/dz = t dK/dt$. Это само по себе не особенно полезно, но если $K(w)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathcal{N} \left(w \frac{d}{dw} \right) K(w) = w^n \mathcal{R} \left(w \frac{d}{dw} \right) K(w),$$

где $\mathcal{R}[w(d/dw)]$ — сравнительно простой дифференциальный оператор, то мы можем использовать K как ядро для некоторых интегральных пред-

ставлений. Покажем эту технику на нескольких примерах.

Функция Бесселя $J_\nu(w)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[w^2 \frac{d^2}{dw^2} + w \frac{d}{dw} - \nu^2 \right] J_\nu(w) = -w^2 J_\nu(w).$$

Следовательно, любое уравнение вида

$$\mathcal{L}_z(\phi) = \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \left[\alpha z + \frac{1}{z} \right] \frac{d\phi}{dz} + \left[\alpha \mu - \frac{\nu^2}{z^2} \right] \phi = 0 \quad (5.3.97)$$

можно решить при помощи подстановки $\phi = \int J_\nu(zt) v(t) dt$, так как оператор $\mathcal{L}_z$, действуя на $J_\nu(zt)$, дает

$$t^2 \left[J_\nu''(w) + \frac{1}{w} J_\nu'(w) - \frac{\nu^2}{w^2} J_\nu(w) \right] + \alpha t \frac{d}{dt} J_\nu(w) + \alpha \mu J_\nu(w) = 0.$$

Выражение в квадратных скобках как раз равно $-J_\nu(w)$, так что

$$\mathcal{L}_z \left(\int J_\nu v dt \right) = \int \mathcal{M}_t(J_\nu) v dt, \text{ где } \mathcal{M}_t(J_\nu) = \alpha t (d/dt) J_\nu + (\alpha \mu - t^2) J_\nu.$$

Сопряженный оператор порождает уравнение

$$\tilde{\mathcal{M}}_t(v) = -(d/dt)(\alpha t v) + [\alpha \mu - t^2] v = 0,$$

имеющее решение $v(t) = A t^{\mu-1} e^{-t^2/2\alpha}$, и присоединенную билинейную форму

$$P = A \alpha t^\mu e^{-t^2/2\alpha} J_\nu(tz).$$

Поэтому решением уравнения (5.3.97) будет

$$\phi(z) = A \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-t^2/2\alpha} J_\nu(tz) dt, \quad (5.3.98)$$

если только $\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu > 0$. Это решение представляет некоторый интерес, так как волновое уравнение в параболических координатах, которое можно записать в виде

$$F'' + \frac{1}{z} F' + \left(\gamma^2 - \frac{\nu^2}{z^2} - \beta^2 z^2 \right) F = 0,$$

обладает решением

$$F = A e^{-\beta z^2/2} \int_0^\infty t^{\gamma^2/2\beta} e^{-t^2/4\beta} J_\nu(tz) dt. \quad (5.3.99)$$

Наконец, уравнение

$$(z^2 - 1)\phi'' + \left(z - \frac{1}{z} \right) \phi' + \left(-\mu^2 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) \phi = 0,$$

имеющее три регулярные особые точки при $z=0$ и ± 1 и одну иррегулярную точку на бесконечности, также обладает решением вида

$$\phi(z) = \int J_\nu(zt) v(t) dt.$$

В этом случае оператор $\mathcal{M}(J)$ имеет вид

$$\mathcal{M}(J) = t^2 \frac{d^2 J}{dt^2} + t \frac{dJ}{dt} + (t^2 - \mu^2) J$$

а сопряженное уравнение

$$\tilde{\mathcal{M}}(v) = t^2 \left[\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{t} \frac{dv}{dt} + \left(1 - \frac{\mu^2 - 1}{t^2} \right) v \right] = 0$$

вновь связано с уравнением Бесселя, обладая решением $(1/t)J_\mu(t)$. При-
соединенная билинейная форма равна

$$P(J_\nu, v) = J_\nu(zt)J_\mu(t) + \frac{d}{dt}[tJ_\nu(zt)J_\mu(t)] - 2J_\nu(zt)\frac{d}{dt}[tJ_\mu(t)],$$

и если только $\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu > -1$, можем получить

$$\psi(z) = \int_0^\infty J_\nu(zt)J_\mu(t)\frac{dt}{t}.$$

Как известно, эта величина имеет разрыв при $z=1$.

Имеется много других интегральных представлений, играющих некоторую роль в совсем специальных случаях, но мало пригодных к любому другому уравнению. Такие решения обычно находятся в результате проб и ошибок или «нюхом». Во всяком случае, было бы мало смысла тратить время на их каталогизацию или на указание рецептов, когда их надо применять. Мы рассмотрели здесь наиболее полезные преобразования, а прочие можно отыскивать в специальной литературе.

Задачи к главе 5

5.1. Построить уравнение Гельмгольца в конических координатах и разделить переменные. Какой вид имеют координатные поверхности? В каких физических задачах это уравнение было бы полезным?

5.2. Построить уравнение Лапласа в бисферических координатах и разделить переменные. Показать, что постоянная k_1^2 для уравнения (5.1.47) равна $\frac{1}{4}$ и что $R = (x^2 + y^2)^{1/4}$.

5.3. Построить уравнение Шредингера для электрона в двухатомной молекуле в вытянутых сфероидальных координатах

$$\xi = (r_1 + r_2)/a, \quad \eta = (r_1 - r_2)/a, \quad \varphi = \arctg(y/x),$$

где r_1 представляет собой расстояние от одного ядра, а r_2 — от другого, причем ядра предполагаются расположенными в точках $z = \pm \frac{1}{2}a$, $x = y = 0$. Выразить x, y, z через ξ, η, φ , получить коэффициенты Ламе; построить уравнение Шредингера и определитель Штеккеля. Показать, что для потенциальной функции $-c_1/r_1 - c_2/r_2$ уравнение Шредингера разделяется. Получить разделенные уравнения.

5.4. Показательные координаты задачи 1.9 имеют вид

$$\xi = \ln(x^2 + y^2) - z, \quad \eta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z, \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

Набросать поверхности, найти коэффициенты Ламе, построить волновое уравнение и показать что оно не разделяется.

5.5. Гиперboloидальные координаты определяются уравнениями

$$\lambda^4 = z^2(x^2 + y^2), \quad \mu^2 = \frac{1}{2}(z^2 - x^2 - y^2), \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

Набросать некоторые из координатных поверхностей, подсчитать коэффициенты Ламе, построить волновое уравнение и показать, что оно не разделяется.

5.6. Координаты вращения характеризуются наличием оси симметрии вращения (например, оси x); они имеют вид $\lambda(r, x)$, $\mu(r, x)$ и $\varphi = \operatorname{arctg}(z/y)$ ($r^2 = y^2 + z^2$). φ -Множитель, если Φ отделяется, равен $\sin m\varphi$ или $\cos m\varphi$, и если положить решение Φ трехмерного уравнения Лапласа равным $e^{\pm im\varphi}\Phi(r, x)/r$, то уравнение для Φ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{r^2} \Phi = 0.$$

Исследовать разделимость этого уравнения в координатах λ и μ следующим образом. Положить $z = x + ir$ и $w = \lambda + i\mu$, так что z будет функцией w , и наоборот. Воспользоваться техникой, примененной в уравнении (5.1.6) и далее, чтобы показать, что требование равенства $|z'|^2/r^2 = -4z'\bar{z}'/(z - \bar{z})^2$ выражению $f(\lambda) + g(\mu)$ приводит к уравнению

$$F + 2z\bar{G} + z^2 H = \bar{F} + 2z\bar{G} + z^2 H,$$

где

$$F = (1/z') (z''z^2 + 6z'^3 - 6z''z'z), \\ G = 3z'' - (z''z/z'), \quad H = z''/z',$$

а $z' = dz/dw$ и т. д. Показать, что наиболее общее решение этого уравнения получается при

$$d^2 F/dz^2 = c_1, \quad d^2 G/dz^2 = c_2, \quad d^2 H/dz^2 = c_3,$$

что в конце концов приводит к решению

$$(dz/dw)^2 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4.$$

Решить это уравнение для различных видов систем координат $[z(w)]$, допускающих разделение λ , μ -части уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \frac{\frac{1}{4} - m^2}{r^2} \varphi = 0.$$

Показать, что в случае $z = w$ получается обычная цилиндрическая система координат: $z'^2 = z$, $z = \frac{1}{4} w^2$ — параболическая система; $z' = z$, $z = e^w$ — сферическая система; $z'^2 = z^2 \pm 1$ — две сфероидальные системы; $z' = 1 \pm z^2$ — бисферическая и тороидальная системы координат. Набросать системы координат, соответствующие $z'^2 = z^3$ и $z' = z^2$.

5.7. Для координат вращения, рассмотренных в задаче 5.6, исследовать случай $z'^2 = z(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$, что дает $z = a \operatorname{sn}(w, k)$ [см. формулу (4.5.74)]. Набросать на плоскости $z = x + ir$ для $k = 0,6$ достаточное число координатных линий $\lambda = \operatorname{const}$, $\mu = \operatorname{const}$, чтобы указать строение системы. Построить λ , μ -часть уравнения Лапласа и разделить в ней переменные. Для каких физических задач была бы эта система координат полезной?

5.8. Провести анализ системы координат вращения (см. задачу 5.6), соответствующей соотношению $z = a \operatorname{cn}(w, k)$ ($z = x + ir$, $w = \lambda + i\mu$). Набросать вид координатных линий λ , $\mu = \operatorname{const}$ на плоскости z . Разделить уравнение Лапласа в этих координатах. В какой физической ситуации была бы эта система полезной? [См. формулу (4.5.77) для определения cn].

5.9. Провести анализ системы координат вращения (см. задачу 5.6), соответствующей соотношению $z = a \operatorname{dn}(w, k)$ ($z = x + ir$, $w = \lambda + i\mu$) [см. формулу (4.5.77)]. Набросать систему координат, разделить уравнение Лап-

ласа и указать физическую ситуацию, в которой эта система была бы подходящей.

5.10. Построить уравнение Лапласа в полярных координатах r, φ и разделить их. Найти основную фундаментальную систему решений полученных двух уравнений около точек $r=a, \varphi=0$.

5.11. Уравнение Шредингера для электрона в одномерном потенциальном поле $V=(\hbar^2/2M)x^2$ имеет вид $\psi''+(k-x^2)\psi=0$, где $k=2MW/\hbar^2$. Одно решение этого уравнения при $k=1$ равно $\psi_1=\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$. Найти фундаментальную систему решений около $x=0$.

5.12. Найти общее решение уравнения

$$(d^2\psi/dx^2) - (6/x^2)\psi = x \ln x.$$

5.13. Одним из решений уравнения Лежандра

$$(1-x^2)\psi'' - 2x\psi' + 2\psi = 0$$

служит $\psi=x$. Найти фундаментальную систему около $x=0$. Каков определитель Вронского для этой системы? Какое решение имеет значение 2 при $x=1$? Какие решения имеют значение 2 при $x=0$? Почему ответ однозначен в одном случае, но не в другом?

5.14. Уравнение Ламе имеет вид

$$\psi'' + \left[\frac{z}{z^2-a^2} + \frac{z}{z^2-b^2} \right] \psi' + \frac{k-m(m+1)z^2}{(z^2-a^2)(z^2-b^2)} \psi = 0;$$

определить местонахождение особых точек этого уравнения и указать индексы решений в каждой точке. Какова фундаментальная система решений вблизи $z=0$? Чему равен определитель Вронского для этой системы?

5.15. Показать, что единственная особая точка уравнения

$$\psi'' - 2az\psi' + [E + 2bcz - (a^2 - \epsilon^2)z^2]\psi = 0$$

— это иррегулярная точка при $z \rightarrow \infty$. Показать, что если положить $\psi = \exp(\alpha z + \beta z^2)F(z)$ и согласовать значения α и β , то для F получится уравнение, на основании которого можно разложить F в ряд около $z \rightarrow \infty$. Выписать три члена этого ряда. Записать уравнение, имеющее только иррегулярную особую точку на бесконечности, для которого решением будет $\psi = \exp(\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)G(z)$, где $G(z)$ — ряд вида $a_0 z^s + a_1 z^{s+1} + \dots$. Сравнить это уравнение с предыдущим и с уравнением $\psi'' + k^2\psi = 0$, также имеющим особую точку при $z \rightarrow \infty$. Что можно высказать относительно классификации иррегулярных особых точек?

5.16. В уравнении (5.2.26) с одной лишь регулярной особой точкой сумма показателей двух решений около этой точки равна -1 . Для уравнения с двумя регулярными особыми точками (5.2.28) сумма показателей решений около одной точки плюс их сумма для решений около другой точки $\lambda + \mu - \lambda - \mu$ равна нулю. Каково соответствующее утверждение относительно уравнения (5.2.36) с тремя регулярными особыми точками? Какой вид имеет уравнение с четырьмя регулярными особыми точками без иррегулярных точек и каково соответствующее утверждение? По индукции, чему равна сумма показателей около всех особых точек для уравнения с N регулярными точками, но без иррегулярных точек?

5.17. Показать, что решением уравнения

$$\phi'' + \left\{ -\frac{1}{4}(c-1)^2 + \left[ab - \frac{1}{2}c(a+b-c+1) \right] \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(a+b-c+1)(a+b-c-1) \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \right)^2 \right\} \phi = 0$$

является функция

$$\phi = (1-e^{-x})^{\frac{1}{2}(a+b-c+1)} e^{-\frac{1}{2}(c+1)x} F(a, b|c|e^{-x}).$$

Для каких значений a , b и c гипергеометрический ряд является конечным многочленом и ϕ конечно в области $0 \leq x \leq \infty$?

5.18. Построить одномерное уравнение Шредингера для частицы массы M в потенциальном поле $-(\hbar^2 A^2/2M) \operatorname{sech}^2(x/d)$. Заменив независимое переменное на $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th}(x/d)$, показать, что получающееся уравнение относительно z имеет три регулярные особые точки. Выразить решения этого уравнения через гипергеометрические функции z . Какое решение остается конечным при $x \rightarrow -\infty$? Найти значения энергии, для которых это решение представляет собой конечный многочлен относительно z . Будет ли это решение конечным при $z \rightarrow \infty$?

5.19. Показать, что уравнение для $\phi(x) = (z^{\frac{1}{2}c} e^{-\frac{1}{2}z/\sqrt{z'}} F(a|c|z)$, где z — функция x , имеет вид

$$\phi'' + \left\{ -\frac{1}{4}(z')^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 - c(c-1) \left(\frac{z'}{z} \right)^2 + (c-a) \frac{(z')^2}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{z'''}{z'} \right) \right\} \phi = 0,$$

причем $z' = dz/dx$ и т. д. Показать, что уравнение для

$$\phi(x) = z^{\frac{1}{2}c} (1-z)^{\frac{1}{2}(a+b-c+1)} (z')^{-\frac{1}{2}} F(a, b|c|z)$$

таково:

$$\phi'' + \left\{ \frac{1}{4}c(2-c) \left(\frac{z'}{z} \right)^2 - \frac{1}{4}(a+b-c+1)(a+b+c-1) \left(\frac{z'}{z-1} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{3}{4} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{z'''}{z'} \right) + \left[ab - \frac{1}{2}c(a+b-c+1) \right] \frac{(z')^2}{z(z-1)} \right\} \phi = 0.$$

Каков вид этих уравнений при $z = x^n$? При $z = e^{-x}$?

5.20. Разделить переменные в уравнении Гельмгольца для сферических координат и показать, что радиальное уравнение, где $x = kr$

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi}{dx} \right) + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] \phi = 0,$$

имеет решения $j_n(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $n_n(x) = \sqrt{\pi/2x} N_{n+\frac{1}{2}}(x)$. Показать,

что решением этого уравнения является функция

$$h_n(x) = \frac{(2n)!}{i2^n n!} \frac{e^{ix}}{x^{n+1}} F(-n|-2n|-2ix).$$

Показать, что она имеет асимптотический вид $e^{ix}/i^{n+1}x$ и потому $h_n = j_n + in_n$.

5.21. Построить уравнение Шредингера в сферических координатах r , ϑ , φ для электрона в потенциальном поле $V = -e^2 Z/r$. Разделить переменные и показать, что решение радиального уравнения можно выразить

через вырожденную гипергеометрическую функцию. Найти два асимптотических ряда для решения, независимого от ϑ и φ . Найти, при каких значениях энергии асимптотические ряды обрываются и превращаются в конечные многочлены (в этом случае ряд не является асимптотическим, а дает точное решение). Для каких энергий это решение конечно для всех значений r ($0 \leq r < \infty$)?

5.22. Каков асимптотический ряд около $z = \infty$ для сфероидального уравнения

$$(z^2 - 1)\psi'' + 2(a + 1)\psi' + (h^2 z^2 - b)\psi = 0?$$

Каков асимптотический ряд около $z = 0$ для уравнения

$$\psi'' + (2/z)\psi' + [(a/z^4) - (b/z^6)]\psi = 0?$$

5.23. Очень близким выражением для потенциала электронов проводимости в металлической решетке является

$$V = \frac{\hbar^2}{2M} U_0 \left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{l_x}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi y}{l_y}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi z}{l_z}\right) \right].$$

Показать, что все разделенные уравнения имеют вид уравнения Матье (5.2.67), в котором $h^2 = l^2 U_0 / \pi^2$, а b пропорционально энергии электрона. Применяя формулу (5.2.71), подсчитать значения фазового множителя s для $h = 1$ и $b = 0, 3, 0,469, 1,0, 1,242$ и $1,5$. Какие из этих значений b приводят к допустимому решению (конечному при $-\infty \leq x \leq \infty$)?

5.24. Применяя формулу (5.2.77) и дальнейшие формулы, подсчитать be_0 и коэффициенты Фурье функции $Se_0(h, \cos \varphi)$ для $h = 2$.

5.25. Построить уравнение Гельмгольца в вытянутых сфероидальных координатах (VIII) и показать, что если решение независимо от ξ_3 , то уравнения для ξ_1 - и ξ_2 -множителей имеют вид

$$(x^2 - 1)\psi'' + 2x\psi' + (h^2 x^2 - b)\psi = 0.$$

Исследовать особые точки этого уравнения и построить трехчленную рекурсивную формулу для коэффициентов разложения в ряд около $x = 0$. Указать равенство, связывающее с помощью непрерывных дробей b и a , которое должно выполняться, чтобы ряд сходиллся при $x = \pm 1$ (отрицательные степени x отсутствуют, а ряд должен сходиться) для решения, имеющего нулевую производную при $x = 0$ для $h = 1$.

5.26. Разложить решение уравнения задачи 5.25 по сферическим гармоникам $P_n(x)$ (см. стр. 539) и получить трехчленную рекурсивную формулу для коэффициентов. Получить из нее соотношение, связывающее с помощью непрерывных дробей h^2 и a . Решить его относительно b для $h = 1$ и провести сравнение с результатами задачи 5.25.

5.27. Применив преобразование Лапласа, показать, что решение уравнения

$$[xf(D) + F(D)]\psi = 0,$$

где $D\psi = d\psi/dx$, $D^2\psi = d^2\psi/dx^2$, и т. д., а f и F представляют собой конечные многочлены по степеням D , имеет вид

$$\psi = \int_0^b \exp \left\{ xt + \int [F(t)/f(t)] dt \right\} [dt/f(t)].$$

где a и b выбраны так, что

$$\left[\exp \left(xt + \int F dt/f \right) \right]_a^b = 0$$

для всех значений x . Применить эту формулу для подсчета интегрального представления вырожденной гипергеометрической функции.

5.28. Показать, что решение уравнения

$$z(z-1)(z-a)\psi'' - (\alpha-1)z(2z-a)\psi' + \alpha(\alpha-1)(z+1)\psi = 0$$

имеет вид

$$\psi = A \int (z-t)^\alpha (t-1)^{\beta-\alpha\beta-1} (t-a)^{\beta-\alpha\beta+\alpha-2} (dt/t),$$

где $\beta = (\alpha-1)/(a-1)$. Каковы должны быть пределы интегрирования, чтобы ψ было решением? Какой выбор пределов и A дает решение, равное единице при $z=0$? Каково поведение этого решения вблизи трех остальных особых точек?

5.29. Показать, что решением уравнения

$$(d^{n-1}\psi/dz^{n-1}) - z\psi = a$$

будет

$$\psi = \sum_{s=0}^{n-1} A_s e^{2\pi i s/n} \int_0^\infty \exp [zte^{2\pi i s/n} - (t^n/n)] dt,$$

где

$$\sum_{s=0}^{n-1} A_s = a.$$

5.30. Показать, что решением уравнения

$$z(d^3\psi/dz^3) - \psi = 0$$

будет

$$\psi = \int_0^\infty \sin(z/u) e^{-\frac{1}{2}u^2} u du.$$

5.31. Взяв определение гамма-функции и заменяя переменные интегрирования, показать, что

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \Gamma(p+q) \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du = \\ &= \frac{-e^{-\pi i(p+q)}\Gamma(p+q)}{\sin \pi p \sin \pi q} \oint_C u^{p-q}(1-u)^{q-1} du, \end{aligned}$$

где контур C подобен показанному на рис. 5.7, но обходит точки 0 и 1 (где подинтегральная функция вещественна?). Разложить $F(a, b|c|z)$ около $z=0$, воспользоваться последней формулой для замены $\Gamma(b+n)/\Gamma(c+n)$ в ряде (полагая $p=b+n$, $q=c-b$) и получить, таким образом, ряд по $(uz)^n$ внутри контурного интеграла. Показать, что этот ряд можно просуммировать и в конце концов получить

$$F(a, b|c|z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-b)}{4\pi \sin \pi(c-b)} e^{-\pi i c} \oint_C u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a} du.$$

Показать, что эта формула равносильна первой части соотношений (5.3.16).

5.32. Применяя преобразование Эйлера, показать, что решением уравнения

$$(1 - z^2) \psi'' - 2z\psi' + [n(n+1) - m^2/(1 - z^2)] \psi = 0$$

является присоединенная функция Лежандра (n, m не обязательно целые)

$$P_n^m(z) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{2^n \pi i \Gamma(n+1)} (1 - z^2)^{\frac{1}{2}m} \oint \frac{(t^2 - 1)^n dt}{(t - z)^{n+m+1}},$$

где контур проходит как вокруг $+1$, так и вокруг z в положительном направлении. При помощи изменения переменной интегрирования показать, что

$$P_n^m = (z) \frac{i^m \Gamma(n+m+1)}{\pi \Gamma(n+1)} \int_0^\pi [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi]^n \cos(m\varphi) d\varphi.$$

Показать, что эта функция равна функции, определенной формулой (5.3.36). Показать, что эти функции входят во все потенциальные и волновые задачи в сферических координатах.

5.33. При помощи формулы (5.3.33) и дальнейших формул показать, что для n целого

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln [(1+z)/(1-z)] - W_{n-1}(z),$$

где $W_{n-1}(z)$ — многочлен относительно z степени $n-1$. Отсюда вывести что если x вещественное между -1 и $+1$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [Q_n(x + i\varepsilon) - Q_n(x - i\varepsilon)] = \pi i P_n(x).$$

5.34. При помощи теоремы Коши показать, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{C_2} \frac{Q_n(w) dw}{w-z} - \oint_{C_1} \frac{Q_n(w) dw}{w-z} \right],$$

где контур C_1 содержит точки $w = \pm 1$ внутри, а точку $w = z$ вне себя, а контур C_2 представляет собой окружность радиуса $R \gg |z|$ и 1 . Показать, что интеграл по C_2 равен нулю, если $n = 0$ или целому положительному. Привести контур C_1 к обходу вплотную к отрезку между ± 1 и при помощи второго результата задачи 5.33 показать, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(w) \frac{dw}{z-w}.$$

5.35. Показать, что полиномы $W_{n-1}(z)$ задачи 5.33 равны

$$W_{n-1}(z) = \frac{2n-1}{n} P_{n-1}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(z) + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5}(z) + \dots$$

5.36. Можно определить второе решение гипергеометрического уравнения около $z = 0$, как

$$y_2^0(a, b | c | z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} F(a, b | a+b-c+1 | 1-z) - \\ - \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b | c-a-b+1 | 1-z).$$

Показать, что оно равно

$$\frac{\sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) + \sin \pi a \sin \pi b}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) - \sin \pi a \sin \pi b} F(a, b | c | z) + \\ + \frac{2\pi z^{1-c} \sin \pi c \Gamma(c) \Gamma(c-1)}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) - \sin \pi a \sin \pi b} \frac{F(a-c+1, b-c+1 | 2-c | z)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}.$$

Показать, что предельным видом этой функции при $c \rightarrow 1$ является ряд, приведенный на стр. 624.

5.37. Доказать, что

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos u} \cos mu \, du.$$

5.38. Найти асимптотический ряд для функции Уиттекера $U_2(a | c | z)$. Из него при помощи формулы (5.3.3) получить соотношение

$$U_2(a | c | z) = \frac{e^{i\pi a} z^{-a}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(t+a-c+1) \Gamma(t+a)}{\Gamma(a-c+1) \Gamma(a)} \Gamma(-t) z^{-t} dt.$$

Каков точный вид контура? Повторяя процесс, примененный к выводу формулы (5.3.5), получить формулу (5.3.58) (исследовать пределы сходимости при каждом шаге).

5.39. Показать, что радиальный множитель для решений уравнения Гельмгольца в полярных, сферических и конических координатах удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dJ}{dz} \right) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2} \right) J = 0.$$

Определить местонахождение особых точек и описать их; составить три первых члена разложения в ряд решения J_λ , регулярного при $z=0$ около каждой особой точки. При помощи преобразования Лапласа вывести интегральное представление (5.3.53). Показать, что вторым решением этого уравнения является

$$N_\lambda(z) = \operatorname{ctg} \pi \lambda \cdot J_\lambda(z) - \operatorname{cosec} \pi \lambda \cdot J_{-\lambda}(z).$$

Подсчитать первые три члена разложения N_λ в ряд (для λ не целого) около $z=0$ и первые три члена асимптотического разложения этой функции. Показать, что для $\lambda=0$

$$N_0(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{d}{d\lambda} J_\lambda(z) - (-1)^\lambda \frac{d}{d\lambda} J_{-\lambda}(z) \right] = \\ = \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{1}{2} z \right) + \gamma \right] J_0(z) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{1}{2} z \right)^{2m} \left[\sum_{s=1}^m \frac{1}{s} \right].$$

5.40. Показать, что решение уравнения Шредингера в параболических координатах $x = \sqrt{\lambda\mu} \cos \varphi$, $y = \sqrt{\lambda\mu} \sin \varphi$, $z = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)$, $r = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$ для частицы массы M при потенциале $V = \eta^2/r$ равно

$$\phi = N e^{im\varphi} (\lambda\mu)^{\frac{1}{2}m} e^{-\frac{1}{2}ik(\lambda+\mu)} \times \\ \times F\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2} - \sigma | m+1 | ik\lambda\right) F\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2} - \tau | m+1 | ik\mu\right),$$

где $\sigma + \tau = -iM\eta^2/\hbar^2 k$ и $k^2 = 2ME/\hbar^2 = (Mv/\hbar)^2$. Показать, что при $m = 0$, $\sigma = -\frac{1}{2}$ и $N = \Gamma(1 - i\eta^2/\hbar v) e^{\pi\eta^2/2\hbar v}$ решение имеет асимптотический вид

$$\psi \simeq \exp[ikz - i(\eta^2/\hbar v) \ln k(r-z)] + \frac{\eta^2 \exp[i(\eta^2/\hbar v) \ln(1-z/r) - 2i\delta]}{Mv^2(r-z)} \exp\left[ikr + \left(\frac{i\eta^2}{\hbar v}\right) \ln(kr)\right],$$

где $\Gamma(1 - i\eta^2/\hbar v) = |\Gamma| e^{i\delta}$. Исследовать физическое значение этого результата и получить закон рассеяния Резерфорда.

5.41. При помощи способа, аналогичного указанному в тексте для $Je_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu)$, вывести разложения в ряды для «радиальной» функции Матье

$$\begin{aligned} Je_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} \pi}{B_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) - \right. \\ &\quad \left. - J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) J_n\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) \right], \end{aligned}$$

где B_{2n+1} — коэффициенты ряда Фурье для «угловой» функции $Se_{2m+1}(h, \cos \theta)$, определенной на стр. 531.

5.42. При помощи преобразования Лапласа показать, что если

$$u(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} K(t) dt \quad \text{и} \quad v(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t) dt, \quad \text{то} \quad f(x) = \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt,$$

где $u(s)v(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$. Отсюда доказать, что

$$n \int_0^x J_m(x-t) J_n(t) \frac{dt}{t} = J_{m+n}(x).$$

Таблица разделяющих координат для трех измерений

Система координат определяется соотношениями между прямоугольными координатами x, y, z и криволинейными координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 или при помощи коэффициентов Ламе $h_n = \sqrt{(\partial x / \partial \xi_n)^2 + (\partial y / \partial \xi_n)^2 + (\partial z / \partial \xi_n)^2}$ и т. д., обладающих свойством (см. стр. 34)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_n h_n^2 d\xi_n^2.$$

Выражения для оператора Лапласа, градиента, вихря и т. д. через эти h приведены в табл. на стр. 116. Стандартное уравнение с частными производными $\nabla^2 \psi + k_1^2 \psi = 0$ приобретает вид

$$\sum_m \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_m^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \right] + k_1^2 \psi = 0,$$

где $k_1^2 = 0$ для уравнения Лапласа, $k_1^2 = \text{const}$ для волнового уравнения и $k_1^2 = \varepsilon_1 - V(\xi)$ для уравнения Шредингера для одной частицы в потенциальном поле V .

Для разделения величина $h_1 h_2 h_3 / h_n^2$ должна разлагаться на множители следующим образом:

$$h_1 h_2 h_3 / h_n^2 = g_1(\xi_2, \xi_3) f_1(\xi_1) \text{ и т. д.}$$

Определитель Штекеля равен

$$S = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(\xi_1) & \Phi_{12}(\xi_1) & \Phi_{13}(\xi_1) \\ \Phi_{21}(\xi_2) & \Phi_{22}(\xi_2) & \Phi_{23}(\xi_2) \\ \Phi_{31}(\xi_3) & \Phi_{32}(\xi_3) & \Phi_{33}(\xi_3) \end{vmatrix} = \frac{h_1 h_2 h_3}{f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3)}.$$

Алгебраическое дополнение S элемента $\Phi_{m1}(\xi_m)$ связано с коэффициентами Ламе соотношением

$$M_m = \partial S / \partial \Phi_{m1} = S / h_m^2,$$

где

$$M_1(\xi_2, \xi_3) = \Phi_{22}\Phi_{33} - \Phi_{23}\Phi_{32}, \quad M_2(\xi_1, \xi_3) = \Phi_{13}\Phi_{32} - \Phi_{12}\Phi_{33},$$

$$M_3(\xi_1, \xi_2) = \Phi_{12}\Phi_{23} - \Phi_{22}\Phi_{13}.$$

Отсюда

$$\sum_m \frac{\Phi_{mn}(\xi_m)}{h_m^2} = \frac{1}{S} \sum_m \Phi_{mn} M_m = \delta_{n1},$$

а также

$$g_1(\xi_2, \xi_3) = \frac{h_1 h_2 h_3}{f_1 h_1^2} = \frac{M_1 S f_1 f_2 f_3}{f_1} = M_1(\xi_2, \xi_3) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3) \text{ и т. д.}$$

Поэтому стандартное уравнение с частными производными приобретает вид

$$\sum_m \frac{M_m}{S} \left[\frac{1}{f_m} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(f_m \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \right) \right] + k_1^2 \psi = 0,$$

а тремя разделенными уравнениями для волнового уравнения ($k_1^2 = \text{const}$) служат $[\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3)]$,

$$\frac{1}{f_m(\xi_m)} \frac{d}{d\xi_m} \left[f_m(\xi_m) \frac{dX_m}{d\xi_m} \right] + \sum_n \Phi_{mn}(\xi_m) k_n^2 X_m = 0,$$

где k_2^2 и k_3^2 — константы разделения. Уравнение с частными производными получается при помощи умножения уравнения при $m=1$ на $(M_1/S) X_2 X_3$, и т. д. для $m=2$ и $m=3$ с последующим суммированием по m .

Для разделимости уравнения Шредингера потенциал V должен иметь вид

$$V = \sum_m \frac{v_m(\xi_m)}{h_m^2} = \sum_m \frac{M_m}{S} v_m(\xi_m),$$

где v_m зависит только от ξ_m . Разделенными уравнениями в этом случае являются

$$\frac{1}{f_m} \frac{d}{d\xi_m} \left(f_m \frac{dX_m}{d\xi_m} \right) + \left(\sum_n \Phi_{mn} \varepsilon_n - v_m \right) X_m = 0,$$

где ε_2 и ε_3 — константы разделения.

В следующей таблице приведен список коэффициентов Ламе h_m , связанных с ними функций f_m и определителей Штеккеля для 11 различных разделяющих трехмерных координат для волнового уравнения. Особые точки трех разделенных уравнений в их каноническом виде также даются. В отдельных случаях, когда применяются различные шкалы координат, приводятся различные выражения. Указан также общий вид потенциальной функции V , для которой уравнение Шредингера разделяется.

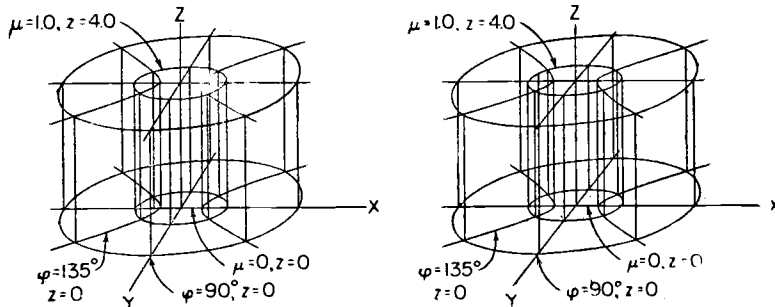
I. Прямоугольные координаты

$$x = \xi_1, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad h_1 = h_2 = h_3 = 1, \quad f_1 = f_2 = f_3 = 1,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Иррегулярная особая точка на бесконечности во всех трех уравнениях. Общий вид $V = u(x) + v(y) + w(z)$.

II. Круговые цилиндрические координаты (вращения)



Р и с. 5.15.

$$x = \xi_1 \xi_2, \quad y = \xi_1 \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad z = \xi_3, \quad h_1 = h_3 = 1, \quad h_2 = \xi_1 / \sqrt{1 - \xi_2^2},$$

$$f_1 = \xi_1, \quad f_2 = \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad f_3 = 1, \quad \xi_1 = r, \quad \xi_2 = \cos \varphi, \quad \xi_3 = z,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -(1/\xi_1^2) & -1 \\ 0 & 1/(1 - \xi_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1 - \xi_2^2}.$$

Уравнение для ξ_1 : регулярная особая точка в 0, иррегулярная особая точка на ∞ .

Уравнение для ξ_2 : регулярные особые точки в $-1, +1, \infty$.

Уравнение для ξ_3 : иррегулярная особая точка на ∞ .

Общий вид $V = u(r) + (1/r^2)v(\varphi) + w(z)$.

III. Эллиптические цилиндрические координаты

$$x = \xi_1 \xi_2, \quad y = \sqrt{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = \xi_3,$$

$$h_1 = \sqrt{(\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2)(\xi_1^2 - d^2)}, \quad h_2 = \sqrt{(\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2)/(1 - \xi_2^2)}, \quad h_3 = 1,$$

$$f_1 = \sqrt{\xi_1^2 - d^2}, \quad f_2 = \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad f_3 = 1,$$

$$\xi_1 = d \operatorname{ch} \mu = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad \xi_3 = z, \quad \xi_2 = \cos \varphi = (1/2d)(r_1 - r_2) \text{ (см. стр. 523)}$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1/(\xi_1^2 - d^2) & -1 \\ d^2 & 1/(1 - \xi_2^2) & -d^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2}{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_2^2)}.$$

Уравнение для ξ_1 имеет регулярные особые точки в $-d$, $+d$, иррегулярную особую точку в ∞ .

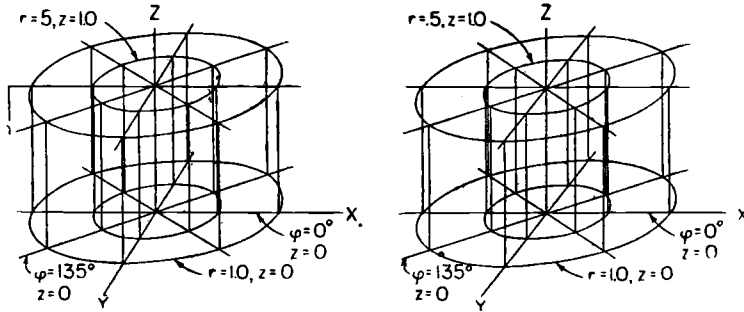


Рис. 5.16.

Уравнение для ξ_2 имеет регулярные особые точки в -1 , $+1$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет иррегулярную особую точку в ∞ .
Общий вид $V = [u(r_1 + r_2) + v(r_1 - r_2)]/r_1 r_2 + w(z)$.

IV. Параболические цилиндрические координаты

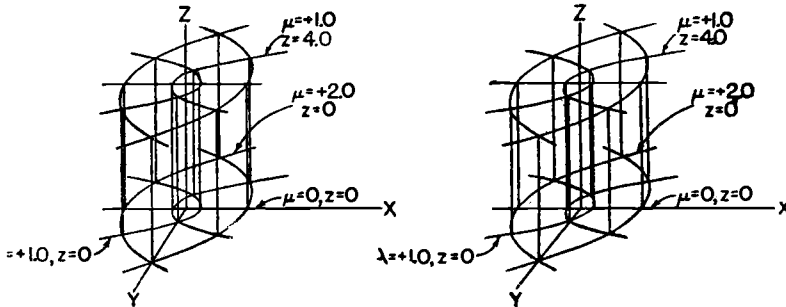


Рис. 5.17.

$$x = \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_2^2), \quad y = \xi_1 \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad h_1 = h_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad h_3 = 1,$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = 1,$$

$$S = \begin{vmatrix} 0 & \xi_1^2 & -1 \\ 0 & \xi_2^2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Уравнения для ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 имеют иррегулярную особую точку в ∞ .

Общий вид $V = [u(\xi_1) + v(\xi_2)]/\sqrt{x^2 + y^2} + w(z)$.

V. Сферические координаты (вращения)

$$x = \xi_1 \xi_3 \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad y = \xi_1 \sqrt{(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}, \quad z = \xi_1 \xi_2,$$

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 1, \quad h_2 = \xi_1 / \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad h_3 = \xi_1 \sqrt{(1 - \xi_2^2) / (1 - \xi_3^2)}, \\
 f_1 &= \xi_1^2, \quad f_2 = 1 - \xi_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2}, \\
 \xi_1 &= r, \quad \xi_2 = \cos \theta, \quad \xi_3 = \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

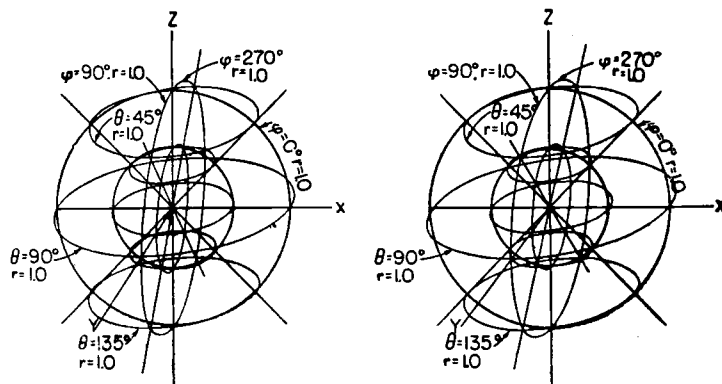


Рис. 5.18.

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1/\xi_1^2 & 0 \\ 0 & 1/(\xi_2^2 - 1) & 1/(\xi_2^2 - 1)^2 \\ 0 & 0 & 1/(\xi_3^2 - 1) \end{vmatrix} = \frac{1}{(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}.$$

Уравнение для ξ_1 имеет регулярную особую точку в 0, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнения для ξ_2, ξ_3 имеют регулярные особые точки в $-1, +1, \infty$.

Общий вид $V = u(r) + (1/r^2)v(\theta) + (1/r^2 \sin^2 \theta)w(\varphi)$.

VI. Конические координаты

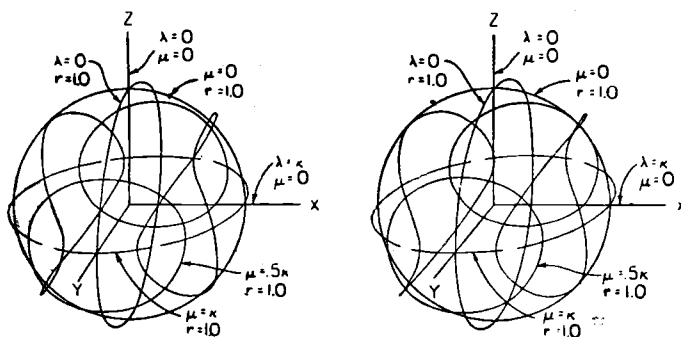


Рис. 5.19.

$$\begin{aligned}
 x &= (\xi_1/\alpha) \sqrt{(\alpha^2 - \xi_2^2)(\alpha^2 + \xi_3^2)}, \quad y = (\xi_1/\beta) \sqrt{(\beta^2 + \xi_2^2)(\beta^2 - \xi_3^2)}, \\
 z &= \xi_1 \xi_2 \xi_3 / \alpha \beta, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1,
 \end{aligned}$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \xi_1 \sqrt{\frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{(\alpha^2 - \xi_2^2)(\beta^2 + \xi_2^2)}}, \quad h_3 = \xi_1 \sqrt{\frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{(\alpha^2 + \xi_3^2)(\beta^2 - \xi_3^2)}},$$

$$f_1 = \xi_1^2, \quad f_2 = \sqrt{(\alpha^2 - \xi_2^2)(\beta^2 + \xi_2^2)}, \quad f_3 = \sqrt{(\alpha^2 + \xi_3^2)(\beta^2 - \xi_3^2)},$$

$$\xi_1 = r, \quad \xi_2 = \alpha \operatorname{cn}(\lambda, \alpha), \quad \xi_3 = \beta \operatorname{cn}(\mu, \beta),$$

cn — одна из эллиптических функций, так что

$$x = r \operatorname{dn}(\lambda, \alpha) \operatorname{sn}(\mu, \beta), \quad y = r \operatorname{sn}(\lambda, \alpha) \operatorname{dn}(\mu, \beta), \quad z = r \operatorname{cn}(\lambda, \alpha) \operatorname{cn}(\mu, \beta),$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\xi_1^2} & \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2) \xi_1^2} \\ 0 & \frac{1}{\xi_2^2 - \alpha^2} & \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)(\xi_2^2 + \beta^2)} \\ 0 & \frac{1}{\xi_3^2 + \alpha^2} & \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)(\xi_3^2 - \beta^2)} \end{vmatrix} = \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{(\alpha^2 - \xi_2^2)(\beta^2 + \xi_2^2)(\alpha^2 + \xi_3^2)(\beta^2 - \xi_3^2)}.$$

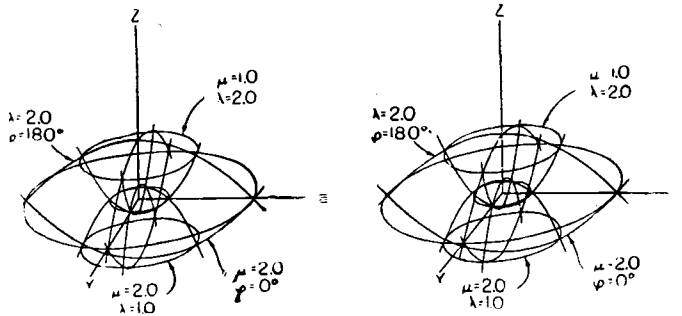
Уравнение для ξ_1 имеет регулярную особую точку в 0, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_2 имеет регулярные особые точки в $\pm \alpha, \pm i\beta, \infty$.

Уравнение для ξ_3 имеет регулярные особые точки в $\pm i\alpha, \pm \beta, \infty$.

Общий вид $V = u(r) + [v(\xi_2) + w(\xi_3)]/(\xi_2^2 + \xi_3^2)$.

VII. Параболические координаты (вращения)



Р и с. 5.20.

$$x = \xi_1 \xi_2 \xi_3, \quad y = \xi_1 \xi_2 \sqrt{1 - \xi_3^2}, \quad z = \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_2^2),$$

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad h_3 = \xi_1 \xi_2 / \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$f_1 = \xi_1, \quad f_2 = \xi_2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$\xi_1 = \lambda, \quad \xi_2 = \mu, \quad \xi_3 = \cos \varphi.$$

Если $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то $\xi_1^2 = r + z$ и $\xi_2^2 = r - z$.

$$S = \begin{vmatrix} \xi_1^2 & 1 & 1/\xi_1^2 \\ \xi_2^2 & -1 & 1/\xi_2^2 \\ 0 & 0 & 1/(\xi_3^2 - 1) \end{vmatrix} = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 - \xi_3^2}.$$

Уравнения для ξ_1, ξ_2 имеют регулярную особую точку в 0, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет регулярные особые точки в $-1, +1, \infty$.

Общий вид $V = \frac{u(\xi_1) + v(\xi_2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{w(\xi_3)}{x^2 + y^2}.$

VIII. Вытянутые сфероидальные координаты (вращения)

$$x = \xi_3 \sqrt{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_2^2)}, \quad y = \sqrt{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}, \quad z = \xi_1 \xi_2,$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2}{\xi_1^2 - d^2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2}{1 - \xi_2^2}}, \quad h_3 = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_3^2)}{(1 - \xi_2^2)}},$$

$$f_1 = \xi_1^2 - d^2, \quad f_2 = 1 - \xi_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$\xi_1 = d \operatorname{ch} \mu = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad \xi_2 = \cos \theta = (1/2d)(r_1 - r_2), \quad \xi_3 = \cos \varphi,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\xi_1^2 - d^2} & \frac{d^2}{(\xi_1^2 - d^2)^2} \\ d^2 & \frac{1}{\xi_2^2 - 1} & \frac{1}{(\xi_2^2 - 1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\xi_3^2 - 1)} \end{vmatrix} = \frac{(\xi_1^2 - d^2 \xi_2^2)}{(\xi_1^2 - d^2)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)},$$

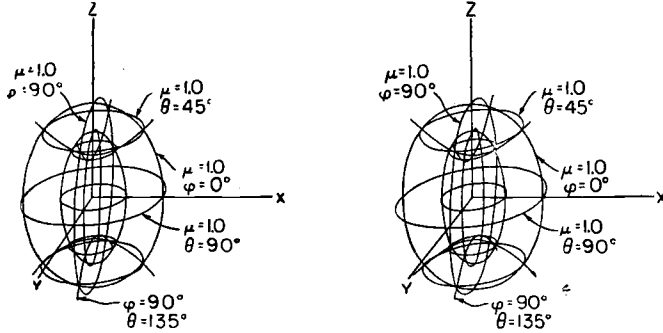


Рис. 5.21.

Уравнение для ξ_1 имеет регулярные особые точки в $-d$, $+d$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_2 имеет регулярные особые точки в -1 и $+1$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет регулярные особые точки в -1 , $+1$, ∞ .

$$\text{Общий вид } V = \frac{u(r_1 + r_2) + v(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} + \frac{\omega(\varphi)}{\operatorname{sh} \mu \sin \vartheta}.$$

IX. Сплюснутые сфероидальные координаты (вращения)

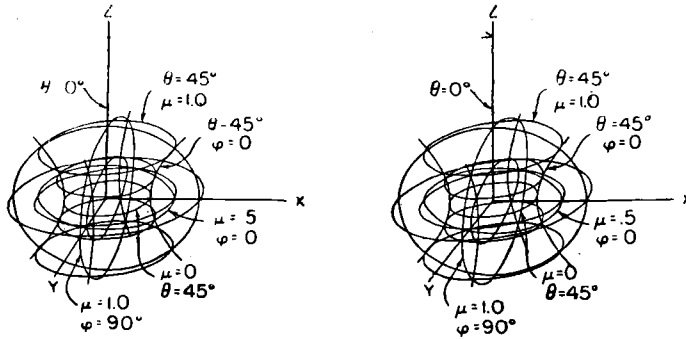


Рис. 5.22.

$$x = \xi_3 \sqrt{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)}, \quad y = \sqrt{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}, \quad z = \xi_1 \xi_2,$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{\xi_1^2 + d^2 \xi_2^2}{\xi_1^2 + d^2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{\xi_1^2 + d^2 \xi_2^2}{1 - \xi_3^2}}, \quad h_3 = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)}{(1 - \xi_3^2)}},$$

$$f_1 = \xi_1^2 + d^2, \quad f_2 = 1 - \xi_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$\xi_1 = d \operatorname{sh} \mu, \quad \xi_2 = \cos \theta, \quad \xi_3 = \cos \varphi,$$

Уравнение для ξ_1 имеет регулярные особые точки в $-id$, $+id$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_2 имеет регулярные особые точки в -1 , $+1$, иррегулярную особую точку в ∞ .

Уравнение для ξ_3 имеет регулярные особые точки в $-1, +1, \infty$.

Общий вид $V = \frac{u(\xi_1) + v(\xi_2)}{\xi_1^2 + d^2 \xi_2^2} + \frac{w(\xi_3)}{(\xi_1^2 + d^2)(1 - \xi_2^2)}$.

Р и с. 5.23. $\xi_n = bx_n$, $a = 2b$.

$$x = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)}}, \quad z = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{ab},$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)}{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{(\xi_2^2 - \xi_1^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)}},$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{(\xi_3^2 - \xi_1^2)(\xi_3^2 - \xi_2^2)}{(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)}},$$

$$f_1 = \sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}, \quad f_2 = \sqrt{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)},$$

$$f_3 = \sqrt{(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)}, \quad \xi_1^2 > a^2 > \xi_2^2 > b^2 > \xi_3^2 > 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{(\xi_1^2 - a^2)} & \frac{1}{(\xi_1^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \\ 1 & \frac{1}{(\xi_2^2 - a^2)} & \frac{1}{(\xi_2^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \\ 1 & \frac{1}{(\xi_3^2 - a^2)} & \frac{1}{(\xi_3^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \end{vmatrix}.$$

Уравнения для ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют регулярные особые точки в $-a, -b, +b, +a, \infty$. Общий вид
$$V = \frac{(\xi_2^2 - \xi_3^2)u(\xi_1) + (\xi_1^2 - \xi_3^2)v(\xi_2) + (\xi_1^2 - \xi_2^2)w(\xi_3)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}.$$

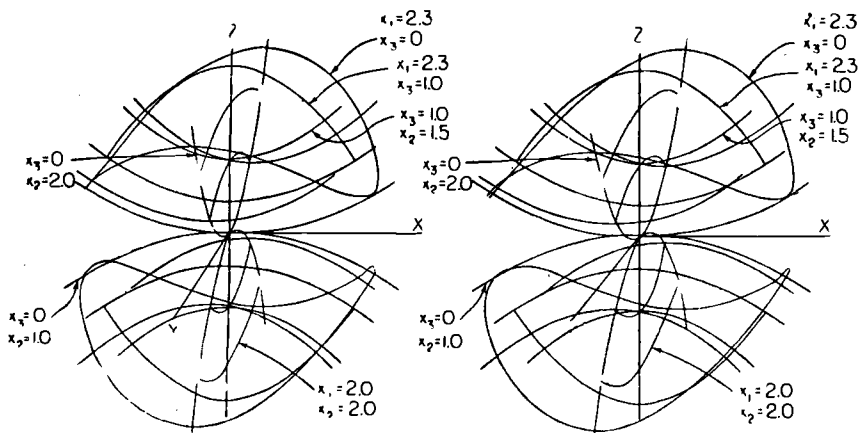
$$\xi_1 = a \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}, \quad \xi_2 = a \operatorname{dn}(\mu, k'), \quad \xi_3 = b \operatorname{sn}(\nu, k),$$

$$b = ka, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = k'a = d,$$

$$x = d \frac{\operatorname{sn}(\lambda, k) \operatorname{sn}(\mu, k') \operatorname{dn}(\nu, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}, \quad y = d \frac{\operatorname{cn}(\mu, k') \operatorname{cn}(\nu, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)},$$

$$z = a \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k) \operatorname{dn}(\mu, k') \operatorname{sn}(\nu, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}.$$

XI. Параболоидальные координаты



Р и с. 5.24.

$$x = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)}{b^2 - a^2}},$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - a^2 - b^2),$$

$$h_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)}{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}}, \quad h_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{(\xi_2^2 - \xi_1^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)}},$$

$$h_3 = \xi_3 \sqrt{\frac{(\xi_3^2 - \xi_1^2)(\xi_3^2 - \xi_2^2)}{(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)}},$$

$$f_1 = (1/\xi_1) \sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)}, \quad f_2 = (1/\xi_2) \sqrt{(\xi_2^2 - a^2)(\xi_2^2 - b^2)},$$

$$f_3 = (1/\xi_3) \sqrt{(\xi_3^2 - a^2)(\xi_3^2 - b^2)},$$

$$S = \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^2 & \xi_1^2 \\ \xi_1^2 (\xi_1^2 - a^2) & \xi_1^2 (\xi_1^2 - b^2) & \xi_1^2 (a^2 - b^2) \\ \xi_2^2 & \xi_2^2 & \xi_2^2 \\ \xi_2^2 (\xi_2^2 - a^2) & \xi_2^2 (\xi_2^2 - b^2) & \xi_2^2 (a^2 - b^2) \\ \xi_3^2 & \xi_3^2 & \xi_3^2 \\ \xi_3^2 (\xi_3^2 - a^2) & \xi_3^2 (\xi_3^2 - b^2) & \xi_3^2 (a^2 - b^2) \end{vmatrix}.$$

Уравнения для ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют регулярные особые точки при $-a, -b, 0, +a, +b$. Общий вид $V = \frac{(\xi_2^2 - \xi_3^2)u(\xi_1) + (\xi_1^2 - \xi_3^2)v(\xi_2) + (\xi_1^2 - \xi_2^2)w(\xi_3)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_3^2)(\xi_2^2 - \xi_3^2)}$.

$$\xi_1 = a \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}, \quad \xi_2 = a \operatorname{dn}(\nu, k'), \quad \xi_3 = a \sqrt{1 - \frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2(\mu, k)}},$$

$$b = ka, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = k'a = \sqrt{d}, \quad x = d \frac{\operatorname{sn}(\lambda, k) \operatorname{sn}(\nu, k')}{\operatorname{cn}(\lambda, k) \operatorname{cn}(\mu, k)},$$

$$y = d \frac{\operatorname{sn}(\mu, k) \operatorname{cn}(\nu, k')}{\operatorname{cn}(\lambda, k) \operatorname{cn}(\mu, k)}, \quad z = \frac{d}{2} \left[\frac{\operatorname{sn}^2(\lambda, k)}{\operatorname{cn}^2(\lambda, k)} - \frac{\operatorname{sn}^2(\mu, k)}{\operatorname{cn}^2(\mu, k)} + \frac{\operatorname{dn}^2(\nu, k')}{k'^2} \right].$$

Двумерное уравнение Лапласа разделяется в любой системе координат, получающейся конформным преобразованием из прямоугольной системы x, y .

Трехмерное уравнение Лапласа разделяется во всех приведенных выше 11 системах координат, в которых волновое уравнение разделяется. Кроме того, решение уравнения Лапласа можно разделить по следующей формуле:

$$\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3) / R(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

тогда разделенные уравнения для X можно получить, несколько видоизменяя предыдущие уравнения. Полагаем

$$h_1 h_2 h_3 / h_1^2 = g_1(\xi_2, \xi_3) f_1(\xi_1) R^2.$$

Тогда уравнение Лапласа приобретает вид

$$\sum_n \frac{1}{h_n^2 X_n} \frac{1}{f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right) = \sum_n \frac{1}{h_n^2 R} \frac{1}{f_n} \frac{d}{d\xi_n} \left(f_n \frac{\partial R}{\partial \xi_n} \right).$$

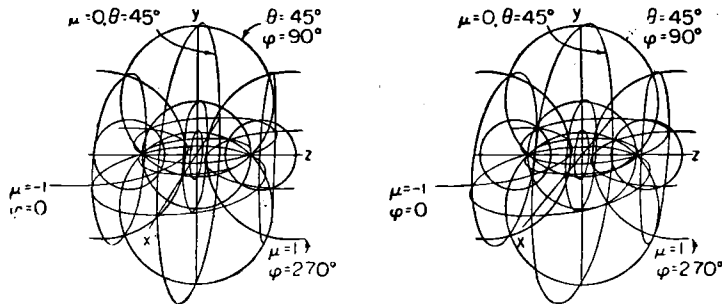
Если правая часть этого уравнения равна $-k_1^2/u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где k_1 постоянно, и если

$$h_1 h_2 h_3 = S f_1 f_2 f_3 R^2 u,$$

где S — определитель Штеккеля, то уравнение приводится к такому, для которого применима описанная выше техника.

Двумя системами координат, в которых уравнение Лапласа разделяется в этом смысле, являются бисферическая и тороидальная системы.

Бисферические координаты



Р и с. 5.25.

$$x = a \xi_3 \frac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{\xi_1-\xi_2}, \quad y = a \frac{\sqrt{(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}}{\xi_1-\xi_2}, \quad z = a \frac{\sqrt{\xi_1^2-1}}{\xi_1-\xi_2},$$

$$h_1 = \frac{a}{(\xi_1-\xi_2) \sqrt{\xi_2^2-1}}, \quad h_2 = \frac{a}{(\xi_1-\xi_2) \sqrt{1-\xi_2^2}}, \quad h_3 = \frac{a}{\xi_1-\xi_2} \sqrt{\frac{1-\xi_2^2}{1-\xi_3^2}},$$

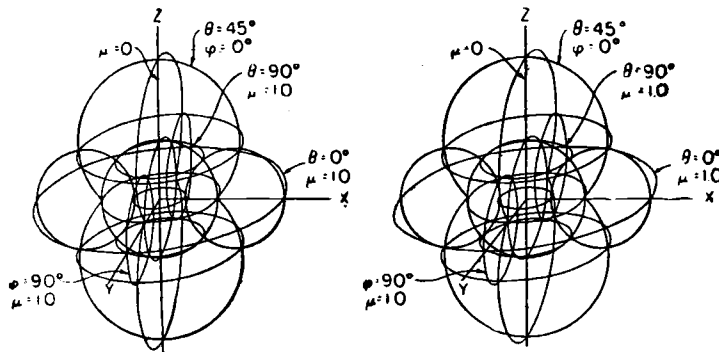
$$f_1 = \sqrt{\xi_1^2-1}, \quad f_2 = 1-\xi_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1-\xi_3^2},$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a \sqrt{(\xi_1+\xi_2)/(\xi_1-\xi_2)}, \quad h_1^2 = \frac{1}{4},$$

$$R^2 = \frac{a}{\xi_1-\xi_2}, \quad u = \frac{a^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}, \quad \xi_1 = \operatorname{ch} \mu, \quad \xi_2 = \cos \eta, \quad \xi_3 = \cos \varphi,$$

$$S = \begin{vmatrix} \frac{1}{\xi_1^2 - 1} & \frac{1}{\xi_2^2 - 1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{1 - \xi_2^2} & \frac{1}{(1 - \xi_2^2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1 - \xi_3^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}.$$

Тороидальные координаты



Р и с. 5.26.

$$x = a \xi_3 \frac{\sqrt{\xi_1^2 - 1}}{\xi_1 - \xi_2}, \quad y = a \frac{\sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_3^2)}}{\xi_1 - \xi_2}, \quad z = a \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{\xi_1 - \xi_2},$$

$$h_1 = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2) \sqrt{\xi_1^2 - 1}}, \quad h_2 = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2) \sqrt{1 - \xi_2^2}}, \quad h_3 = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2) \sqrt{\frac{\xi_1^2 - 1}{1 - \xi_3^2}}},$$

$$f_1 = \xi_1^2 - 1, \quad f_2 = \sqrt{1 - \xi_2^2}, \quad f_3 = \sqrt{1 - \xi_3^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \sqrt{(\xi_1 + \xi_2)/(\xi_1 - \xi_2)},$$

$$R^2 = \frac{a}{\xi_1 - \xi_2}, \quad u = \frac{a}{(\xi_1 - \xi_2)^2}, \quad k_1^2 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_1 = \operatorname{ch} \mu, \quad \xi_2 = \cos \theta, \quad \xi_3 = \cos \varphi,$$

$$S = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)} & \frac{-1}{(\xi_1^2 - 1)} & \frac{-1}{(\xi_1^2 - 1)^2} \\ 0 & \frac{1}{(1 - \xi_2^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \xi_3^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}.$$

Дифференциальные уравнения второго порядка и их решения

Одна регулярная особая точка (см. стр. 506).

Канонический вид, точка в ∞ :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = 0; \quad \text{решения } y_1(z) = 1; \quad y_2(z) = z.$$

Общий вид, точка в a :

$$\frac{d^2 y}{dw^2} + \frac{2}{w - a} \frac{dy}{dw} = 0; \quad \text{решения } y_1 = 1; \quad y_2 = \frac{1}{w - a}.$$

Одна иррегулярная особая точка (см. стр. 507).

Канонический вид, точка в ∞ :

$$\frac{d^2y}{dz^2} - k^2y = 0; \text{ решения } y_1 = e^{kz}; \quad y_2 = e^{-kz}.$$

Общий вид, точка в a :

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{2}{w-a} \frac{dy}{dw} - \frac{k^2y}{(w-a)^4} = 0; \text{ решения } y_1 = e^{k/(w-a)};$$

$$y_2 = e^{-k/(w-a)}.$$

Мы не рассматриваем уравнения с иррегулярной особой точкой высшего вида.

Две регулярные особые точки (см. стр. 506).

Канонический вид, точки в $0, \infty$, индексы 0 и $-a$ ($a \geq 0$):

$$z \frac{d^2y}{dz^2} + (1+a) \frac{dy}{dz} = 0; \text{ решения } y_1 = 1; \quad y_2 = z^{-a},$$

если $a = 0$, $y_2 = \ln z$.

Общий вид, точки в a и c , индексы λ и μ ($\lambda \neq \mu$):

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{2w+c(\lambda+\mu-1)-a(\lambda+\mu+1)}{(w-a)(w-c)} \frac{dy}{dw} + \frac{\lambda\mu(a-c)^2}{(w-a)^2(w-c)^2} y = 0;$$

решения $y_1 = \left(\frac{w-a}{w-c}\right)^\lambda$; $y_2 = \left(\frac{w-a}{w-c}\right)^\mu$, если $\mu = \lambda$, $y_2 = \ln(w-a/w-c)$.

Три регулярные особые точки (см. стр. 508 и 509).

Канонический вид: точки $0, 1, \infty$; индексы $0, 1-c$ (в 0); $0, c-a-b$ (в 1); a, b (в ∞) (мы всегда можем считать, что $\operatorname{Re} c \geq 1$, как для вырожденной гипергеометрической функции)

$$z(z-1) \frac{d^2y}{dz^2} + [(a+b+1)z-c] \frac{dy}{dz} + aby = 0 \text{ (гипергеометрическое уравнение).}$$

Решения $y_1(a, b|c|z)$ и $y_2(a, b|c|z)$ вблизи особых точек.

Разложение y_1 в ряд при $|z| < 1$, справедливое при $\operatorname{Re} c > 0$

$$y_1^0 = F(a, b|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)z^n}{\Gamma(c+n)n!} \text{ (гипергеометрический ряд);}$$

$$F(a, b|c|z) = F(b, a|c|z) = (1-z)^{c-1-b} F(c-a, c-b|c|z) =$$

$$= (1-z)^{-a} F\left(a, c-b|c|\frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b|c|\frac{z}{z-1}\right) \left(\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right),$$

$$F(a, b|c|1) = \Gamma(c)\Gamma(c-a-b)/[\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)],$$

$$F(a, b|2b|z) = \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^{-a} F\left[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\left|b + \frac{1}{2}\right|z^2/(2-z)^2\right],$$

$$F\left(2\alpha, 2\beta\left|\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right|z\right) = F\left(\alpha, \beta\left|\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right|4z - 4z^2\right),$$

$$zF(a, b|c|z) = [(c-1)/(a-b)] F[(a-1, b|c-1|z) - F(a, b-1|c-1|z)],$$

$$F(a, b|c|z) = [1/(a-b)] [aF(a+1, b|c|z) - bF(a, b+1|c|z)],$$

$$(d/dz) F(a, b|c|z) = (ab/c) F(a+1, b+1|c+1|z).$$

Вторым решением около $z=0$ является $z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1|2-c|z)$; однако оно не независимо от y_1^0 , если $c=1, 2, 3, \dots$. Независимым решением для всех значений $\operatorname{Re} c \geq 1$ будет

$$y_2^0 = G(a, b|c|z) = \frac{\sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) + \sin \pi a \sin \pi b}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) - \sin \pi a \sin \pi b} F(a, b|c|z) + \\ + \frac{2\pi z^{1-c} \sin \pi c \Gamma(c) \Gamma(c-1)}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) - \sin \pi a \sin \pi b} \frac{F(a-c+1, b-c+1|2-c|z)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}.$$

Из определения F можно построить ряд для G , за исключением $c=1, 2, 3, \dots$.

Если c целое, при помощи предельного процесса можно показать, что

$$G(a, b|1|z) = \frac{2 \sin \pi a \sin \pi b}{-\pi \sin \pi(a+b)} \left\{ \left[\ln z + 2\gamma + \psi(a) + \psi(b) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \pi a + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \pi b \right] F(a, b|1|z) + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(a) \Gamma(b) (n!)^2} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+r} + \frac{1}{b+r} - \frac{2}{r+1} \right) z^n \right\}.$$

Для $m=2, 3, 4, \dots$

$$G(a, b|m|z) = \frac{2 \sin \pi a \sin \pi b}{-\pi \sin \pi(a+b)} \times \\ \times \left\{ \left[\ln z + \gamma + \psi(a) + \psi(b) - \psi(m) + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \pi a + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \pi b \right] F(a, b|m|z) + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n) \Gamma(m)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(n+m) n!} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+r} + \frac{1}{b+r} - \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+m} \right) z^n - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\Gamma(a-n) \Gamma(b-n) \Gamma(n) \Gamma(m)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(m-n)} (-z)^{-n} \right\}.$$

Интегральное представление для первого решения около $z=0$

$$y_1^0(a, b|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+t) \Gamma(b+t)}{2\pi i \Gamma(c+t)} \Gamma(-t) (-z)^t dt,$$

где контур проходит слева от точек $t=0, 1, 2, \dots$ и справа от точек $-a, -a-1, -a-2, \dots$ и $-b, -b-1, -b-2, \dots$ (a, b не могут быть целыми отрицательными).

$$y_1^0(a, b|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_1^{\infty} (t-z)^{-a} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} dt$$

или

$$y_1^0(a, b|c|z) = \frac{\Gamma(c) (1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(c-b) \Gamma(b)} \int_1^{\infty} (t-z)^{a-c} t^{-a} (t-1)^{b-1} dt,$$

если $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ и если (для второго представления) $b+1$ не является вещественным числом, большим единицы. Перестановка букв a и b в этих

интегралах даст представление y_1 для $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$.

$$\begin{aligned} y_1^0(a, b | c | z) &= \frac{\Gamma(c) z^{1-c}}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^z (z-t)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a} dt = \\ &= \frac{e^{-i\pi b}}{4\pi^2} \Gamma(c) \Gamma(1-b) \Gamma(1+b-c) z^{1-c} \oint_C (t-z)^{c-b-1} t^{b-1} (1-t)^{-a} dt = \\ &= \frac{e^{i\pi(c-b-1)}}{4\pi^2} \Gamma(c) \Gamma(1-b) \Gamma(1+b-c) z^{1-c} (1-z)^{c-a-b} \oint_C (t-z)^{b-1} t^{c-b-1} (1-t)^{a-c} dt, \end{aligned}$$

где контур C заворачивает как восьмерка, проходя вокруг $t=z$ в положительном направлении (против часовой стрелки), вокруг $t=0$ в положительном направлении, а затем вокруг $t=z$ и $t=0$ в отрицательном направлении. Представление при помощи контурного интеграла имеет место для любых значений параметров, если только $-c+1$, $+b$ и $c-b$ не целые положительные.

Решения вблизи $z=1$ и $z=\infty$:

$y_1^1(a, b | c | z) = F(a, b | a+b-c+1 | 1-z)$; ряд пригоден для $|1-z| < 1$;

$y_2^1(a, b | c | z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b | c-a-b+1 | 1-z)$,

однако при $a+b-c+1=1, 2, 3, \dots$ надо применять $G(a, b | a+b-c+1 | 1-z)$;

$y_1^\infty(a, b | c | z) = z^{-a} F(a, 1-c+a | 1-b+a | 1/z)$; ряд пригоден для $|z| > 1$;

$y_2^\infty(a, b | c | z) = z^{-b} F(b, 1-c+b | 1-a+b | 1/z)$,

однако для $a-b=1, 2, \dots$ применяется $z^{-a} G(a, 1-c+a | 1-b+a | 1/z)$, а при $a-b=0, -1, -2, \dots$ применяется $z^{-b} G(b, 1-c+b | 1-a+b | 1/z)$.

Основные формулы, связывающие решения в виде рядов вокруг одной и другой особенности, таковы:

$$\begin{aligned} F(a, b | c | z) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b | a+b-c+1 | 1-z) + \\ &+ \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b | c-a-b+1 | 1-z), \\ &z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1 | 2-c | z) = \\ &= \frac{\Gamma(2-c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a) \Gamma(1-b)} F(a, b | a+b-c+1 | 1-z) + \\ &+ \frac{\Gamma(2-c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(b-c+1) \Gamma(a-c+1)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b | c-a-b+1 | 1-z), \\ F(a, b | c | z) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-c+a | 1-b+a | \frac{1}{z}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(a) \Gamma(c-b)}{\Gamma(c) \Gamma(a-b)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-c+b | 1-a+b | \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнения перехода, связывающие решения для $z=0$ с решениями для $z=1$ и ∞ , имеют вид

$$\begin{aligned} y_1^0(a, b | c | z) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} y_2^1(a, b | c | z) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} y_1^1(a, b | c | z), \\ y_2^0(a, b | c | z) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} y_2^1(a, b | c | z) - \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} y_1^1(a, b | c | z), \\ y_1^\infty(a, b | c | z) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(b) \Gamma(a-c)} e^{-i\pi a} y_1^\infty(a, b | c | z) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(a) \Gamma(b-c)} e^{-i\pi b} y_2^\infty(a, b | c | z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) - \sin \pi a \sin \pi b] y_2^0(a, b|c|z) = \\
& = \left\{ \sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) \left[1 + e^{i\pi c} \frac{\Gamma(a-c+1) \Gamma(a-c)}{\Gamma(a) \Gamma(a-1)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sin \pi a \sin \pi b \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(b) \Gamma(a-c)} \right\} e^{-i\pi a} y_1^\infty(a, b|c|z) + \\
& + \left\{ \sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b) \left[1 + e^{i\pi c} \frac{\Gamma(b-c+1) \Gamma(b-c)}{\Gamma(b) \Gamma(b-1)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sin \pi a \sin \pi b \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(a) \Gamma(b-c)} \right\} e^{-i\pi b} y_2^\infty(a, b|c|z).
\end{aligned}$$

Одна регулярная и одна иррегулярная особые точки (см. стр. 518 и 567).

Канонический вид: особые точки в 0 (регулярная), в ∞ (иррегулярная), индексы в 0 равны 0 и $1-c$ ($c \geq 1$)

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + (c-z) \frac{dy}{dz} - ay = 0, \text{ вырожденное гипергеометрическое уравнение.}$$

Если условие $\operatorname{Re} c \geq 1$ не выполнено, полагаем $y = z^{1-c} F$; тогда уравнение для F будет иметь тот же вид, причем вещественная часть нового c будет больше единицы.

Решения $y_1^0(a|c|z)$ и $y_2^0(a|c|z)$ около $z=0$ таковы:

Разложение y_1 в ряд около 0, справедливое для конечных $|z|$:

$$y_1^0 = F(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) z^n}{\Gamma(c+n) n!} = e^z F(c-a|c|-z) = \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b+c|c|z/b);$$

вырожденный гипергеометрический ряд

$$\begin{aligned}
F(a|c|z) &= \frac{1}{(c-a-1)} [(c-1) F(a|c-1|z) - a F(a+1|c|z)], \\
zF(a|c|z) &= (c-1) [F(a|c-1|z) - F(a-1|c-1|z)], \\
(d/dz) F(a|c|z) &= (a/c) F(a+1|c+1|z).
\end{aligned}$$

Разложение y_2 в ряд около 0 (G -функция Гордона):

$$\begin{aligned}
y_2^0 = G(a|c|z) &= e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \left\{ \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} \left[e^{-i\pi c} + \frac{\sin \pi(a-c)}{\sin(\pi a)} \right] F(a|c|z) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z) \right\}.
\end{aligned}$$

Ряд можно построить из приведенного выше определения F , за исключением значений $c=1, 2, 3, \dots$

При помощи предельного процесса (см. стр. 577) можно показать, что формула для G при целом c приобретает вид

$$\begin{aligned}
G(a|1|z) &= \frac{e^{i\pi a}}{\pi} \left\{ [2 \ln z + \pi \operatorname{ctg} \pi a - i\pi + 2\phi(a)] F(a|1|z) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a) (m!)^2} [\phi(a+m) - \phi(a) + 2\phi(1) - 2\phi(m+1)] z^m \right\}.
\end{aligned}$$

Если $c=n=2, 3, 4, \dots$

$$G(a|n|z) = \frac{e^{i\pi a}}{\pi} \sin(\pi a) \left\{ [2 \ln z + \pi \operatorname{ctg} \pi a - i\pi] F(a|n|z) - \right.$$

$$-2 \sum_{m=1}^{\infty} [\psi(m+1) + \psi(n+m) - \psi(a+m)] \frac{\Gamma(a+m)(n-1)!z^m}{m! \Gamma(a)(n+m-1)!} \Big\} - \\ - 2e^{i\pi a} \frac{(n-1)!}{\Gamma(a)} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r-1)!(z)^{-r}}{(n-r-1)! \Gamma(r-a+1)}.$$

Интегральное представление для y_1^0

$$y_1^0(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+t)}{\Gamma(c+t)} \Gamma(-t) (-z)^t dt,$$

где контур проходит слева от $t=0, 1, 2, \dots$, справа от $-a, -a-1, \dots$. Справедливо для $a \neq 0, -1, -2, \dots$.

$$y_1^0(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = \\ = \frac{e^{-i\pi a}}{4\pi^2} \Gamma(c) \Gamma(1-a) \Gamma(a-c+1) \oint_C e^{zt} t^{a-1} (t-1)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0,$$

где контур заворачивает как восьмерка, проходя в положительном направлении вокруг 1 и 0, а затем в отрицательном направлении вокруг этих точек. Подинтегральная функция вещественна для z вещественного и t вещественного > 1 . Формула справедлива для всех значений a и c , для которых участвующая гамма-функция аналитична. Асимптотические выражения для $z = |z|e^{i\varphi} \gg 1$, a или c при $0 < \varphi < \pi$

$$y_1^0(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}, \quad (-z) = |z|e^{i(\varphi-\pi)},$$

$$y_2^0(a|c|z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z - \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}.$$

Для других областей изменения φ см. стр. 573 и 575.

Интегральные представления для решения вблизи $z = \infty$ (функции Уиттекера):

$$y_1^\infty = U_1(a|c|z) = \frac{z^{a-c}e^z}{\Gamma(c-a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{c-a-1} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-1} du = \\ = \frac{z^{a-c}e^z}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{-a} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{a-c} du \simeq z^{a-c}e^z, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ y_2^\infty = U_2(a|c|z) = \frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{c-a-1} du = \\ = \frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(a-c+1)} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-c} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{-a} du \simeq (-z)^{-a}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Первый интеграл имеет место при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a$, второй — при $\operatorname{Re} a < 1$ и т. д. Для других значений см. контурные интегралы формул (5.3.53) и (5.3.56).

Уравнения перехода, связывающие решения около 0 и около ∞ :

$$U_1(a|c|z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} e^{i\pi(a-c)} F(a|c|z) - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi a} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z),$$

$$U_2(a|c|z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} e^{i\pi a} F(a|c|z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} e^{i\pi a} z^{1-c} F(a-c+1|2-c|z),$$

$$y_1^0(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} y_1^\infty(a|c|z) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} y_2^\infty(a|c|z),$$

$$y_2^0(a|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} y_1^\infty(a|c|z) - \frac{\Gamma(c)'}{\Gamma(c-a)} y_2^\infty(a|c|z).$$

Две иррегулярные особые точки (см. стр. 523 и 597).

Канонический вид, точки в 0 и ∞ :

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + \left(\frac{1}{4} h^2 z^2 - a + \frac{1}{4} h^2 \frac{1}{z^2} \right) y = 0.$$

Полагая $z = e^{i\varphi}$, получаем уравнение Матье

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + \left(a - \frac{1}{2} h^2 \cos 2\varphi \right) y = 0, \quad a = b - \frac{1}{2} h^2.$$

(См. также уравнение для двух регулярных и одной иррегулярной точек.)

Для общих значений a (или b) двумя решениями являются

$$\mathcal{S}(b, h, e^{i\varphi}) = e^{is\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2in\varphi}, \quad \mathcal{S}(b, h, e^{-i\varphi}) = e^{-is\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-2ni\varphi},$$

причем коэффициенты a_n подсчитываются при помощи формул, содержащих непрерывные дроби (см. стр. 526).

Если b принимает частные значения, делающие s целым, эти два решения периодичны и не независимы. В этих периодических случаях мы пользуемся функциями (называемыми функциями Матье), определенными следующим образом:

Четные угловые функции около $\varphi = 0$; $b = be_{2m}$ или be_{2m+1} :

$$Se_{2m}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos 2n\varphi, \quad \sum_n B_{2n} = 1,$$

$$Se_{2m+1}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \cos (2n+1)\varphi, \quad \sum_n B_{2n+1} = 1.$$

Нечетные угловые функции около $\varphi = 0$; $b = bo_{2m}$ или bo_{2m+1} :

$$So_{2m}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sin 2n\varphi, \quad \sum_n 2n B_{2n} = 1,$$

$$So_{2m+1}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin (2n+1)\varphi, \quad \sum_n (2n+1) B_{2n+1} = 1,$$

где коэффициенты B являются функциями h и различны для различных Se или So .

Вторыми решениями для тех же значений константы разделения являются [см. формулу (5.2.79)]:

$$Fe_{2m}(h, \cos \varphi) = \gamma_{2m}^e \left[\varphi Se_{2m}(h, \cos \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \sin 2n\varphi \right],$$

$$\gamma_{2m}^e = \left(1 + \sum_n 2n D_{2n} \right)^{-1},$$

$$\begin{aligned}
 Fe_{2m+1}(h, \cos \varphi) &= \gamma_{2m+1}^e \left[\varphi Se_{2m+1}(h, \cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi \right], \\
 \gamma_{2m+1}^e &= \left[1 + \sum_n (2n+1) D_{2n+1} \right]^{-1}, \\
 Fo_{2m}(h, \cos \varphi) &= \gamma_{2m}^o \left[\varphi So_{2m}(h, \cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \cos 2n\varphi \right], \\
 \gamma_{2m}^o &= \left(\sum_n D_{2n} \right)^{-1}, \\
 Fo_{2m+1}(h, \cos \varphi) &= \gamma_{2m+1}^o \left[\varphi So_{2m+1}(h, \cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} \cos(2n+1)\varphi \right], \\
 \gamma_{2m+1}^o &= \left(\sum_n D_{2n+1} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

По поводу дальнейших деталей подсчета коэффициентов B и D см. стр. 532 и далее. По поводу поведения решений для комплексных значений φ см. стр. 594 и далее, а также таблицы в конце гл. 11.

ЛИТЕРАТУРА

Статьи и книги, связанные с проблемой разделения переменных:

- Bocher M., Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig, 1894 (диссертация).
 Eisenhart L. P., Separable Systems of Staeckel, Ann. Math., 35, 284 (1934).
 Eisenhart L. P., Separable Systems in Euclidean 3-space, Phys. Rev., 45, 427 (1934).
 Eisenhart L. P., Potentials for Which Schroödinger Equations Are Separable, Phys. Rev., 74, 87 (1948).
 Michel, Exhaustion of Neumann's Mode of Solution for the Motion of Solids of Revolution etc., Messenger of Mathematics, 19, 83 (1890).
 Redheffer R. M., Separation of Laplace's Equation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1948 (диссертация).
 Robertson H. P., Bemerkung über separierbare Systeme in der Wellenmechanik, Math. Ann., 98, 749 (1927).

Дополнительный материал по решению обыкновенных дифференциальных уравнений:

- Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГПТИУ, Харьков, 1939.
 Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1950.
 Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ГТТИ, Л.—М., 1933—1934.
 Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ГТТИ, М.—Л., 1937.
 Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.
 Forsyth A. R., Theory of Differential Equations, vol. 4, Cambridge, New York, 1890.

Работы, содержащие дальнейшие подробности о специальных функциях, исследованных в § 5.2 и 5.3:

- Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, Изд. иностр. лит., М., 1949.
 Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, Изд. иностр. лит., М., 1952.
 Грей Э., Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, Изд. иностр. лит., М., 1949.
 Мак-Нахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, Изд. иностр. лит., М., 1953.

- Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, ГНТИУ, Харьков—Киев, 1935.
Klein F., Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Berlin, 1933.
MacRobert T. M., Spherical Harmonics, London, 1927.
McLachlan N. W., Bessel Functions for Engineers, Oxford, New York, 1934.
Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Hutner R. A., Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions, New York, 1941.

Книги, содержащие таблицы формул, связывающих интересные нас функции, в дополнение к таблицам в конце глав настоящей работы:

- Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, ГТТИ, М.—Л., 1948.
Madelung E., Mathematische Hilfsmittel des Physikers, Berlin, 1936.
Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2 Aufl., Berlin, 1948.

Краевые условия и собственные функции

Мы уже исследовали методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будут встречаться при изучении многих задач о поведении сплошных сред. Как мы видели, заданием только дифференциального уравнения, которому должно удовлетворять решение, задача определяется не однозначно, так как каждое уравнение рассмотренного нами типа имеет бесконечное число решений. Чтобы сделать задачу определенной, имеющей однозначный ответ, надо из всего множества возможных решений выбрать такое, которое обладает некоторыми определенными свойствами на определенных граничных поверхностях. Любая физическая задача должна давать не только дифференциальное уравнение, которое надо решить, но также и *краевые условия*, которым должно удовлетворять решение. Удовлетворить краевым условиям часто так же трудно, как и решить дифференциальное уравнение.

Первый факт, который надо заметить, состоит в том, что мы не можем пытаться подчинить решения данного уравнения краевым условиям *произвольного* вида, мы не должны, так сказать, пытаться «запихнуть правую ногу в левый башмак». Для каждого типа уравнений, исследованных в гл. 2, имеется определенная совокупность краевых условий, определяющих ответ однозначно, в то время как при условиях другого вида ответ неоднозначен или невозможен. При этом, конечно, в реальной физической задаче краевые условия всегда должны быть правильного вида и определять ответ однозначно (по крайней мере, так мы все надеемся!), и при постановке задачи в соответствии с реальной действительностью мы будем иметь всегда правильные краевые условия для уравнений. Однако не всегда легко сказать, какие именно краевые условия соответствуют «реальной действительности»; поэтому желательно знать, какие условия подходят для того или иного уравнения; это может дать указание, каким образом формулировать наши математические задачи, чтобы они возможно точнее соответствовали физическим.

6.1. Типы уравнений и краевых условий

Рассмотрим сначала двумерный случай, чтобы осветить понятия, не путаясь в дополнительных усложнениях. Все двумерные уравнения с частными производными для скалярных полей, исследованные в гл. 2 и 3, а также многие уравнения для компонент векторных полей имеют общий вид

$$A(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F\left(x, y, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right), \quad (6.1.1)$$

причем если уравнение линейно по ψ , то F имеет вид

$$D(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + G(x, y) \psi + H(x, y).$$

Это, конечно, наиболее общее линейное уравнение с частными производными по двум переменным x и y . Эти две координаты могут быть либо обе пространственными, либо одна пространственной, а другая временной.

Имеется несчетное множество решений этого уравнения; дополнительные условия, налагаемые в задаче и используемые для выбора одного подходящего частного решения, называются *краевыми условиями*. Обычно они заключаются в указании поведения решения на некоторой *граничной линии* (или поверхности в трехмерном случае) или вблизи нее. (С этой точки зрения начальные условия представляют собой краевые условия во времени.) Конечно, интересно знать, какой вид могут иметь эти граничные линии и какое условие должно быть наложено на поле вдоль линии, чтобы получился однозначный ответ.

Для двумерной задачи решение $\phi(x, y)$ можно изобразить при помощи поверхности $z = \phi(x, y)$. *Границей* является определенная кривая в плоскости (x, y) , а не край поверхности $z = \phi(x, y)$, который расположен над

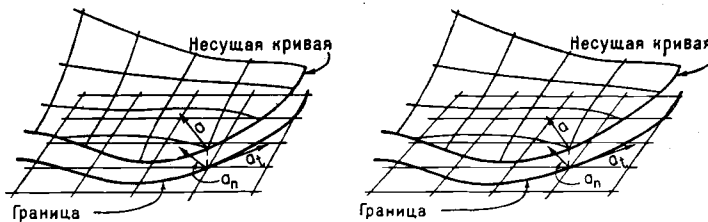


Рис. 6.1. Краевые условия для двух измерений.

Поверхность $z = \phi(x, y)$, граничная кривая $x = \xi(s)$, $y = \eta(s)$; $\mathbf{a}_t$ и $\mathbf{a}_n$ — единичные векторы в плоскости x, y ; $\mathbf{a}$ — вектор, касательный к поверхности у границы.

граничной кривой. *Граничные условия* при этом изображаются высотой ϕ -поверхности над граничной кривой и (или) наклоном ϕ -поверхности в направлении нормали к граничной кривой (см. рис. 6.1). Край ϕ -поверхности, расположенный над граничной кривой (который, вообще говоря, не является плоской кривой), иногда называется *несущей кривой* для границы.

Если расстояние вдоль границы от некоторой начальной точки равно s , а параметрические уравнения граничной кривой имеют вид $x = \xi(s)$, $y = \eta(s)$, то уравнение несущей кривой записывается в виде $z = \phi(\xi, \eta) = \phi(s)$. Единичный вектор $\mathbf{a}_t$, касательный к границе в ее точке s , равен $\mathbf{i} d\xi/ds + \mathbf{j} d\eta/ds$, а единичный вектор $\mathbf{a}_n$, нормальный к кривой, равен $\mathbf{a}_t \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} d\xi/ds + \mathbf{i} d\eta/ds$. Выражения для этих векторов особенно просты потому, что по нашему условию s представляет собой *расстояние* вдоль граничной кривой, откуда $\sqrt{(d\xi/ds)^2 + (d\eta/ds)^2} = 1$ (почему?). Аксиальный вектор $\mathbf{a}_n$ мы направим (в этом параграфе, но не в гл. 7) *внутрь* области; где ищется решение. Составляющая градиента ϕ , нормальная к границе в точке s , выражается через этот вектор и производные от ϕ так:

$$\mathbf{a}_n \cdot \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d\eta}{ds} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{d\xi}{ds} = N(s),$$

где $\partial \phi / \partial y$ и $\partial \phi / \partial x$ берутся в точке $x = \xi(s)$, $y = \eta(s)$. При помощи этих определений мы можем теперь обозреть различные типы краевых условий.

Типы краевых условий. В каждом случае, конечно, мы должны указать вид границы. Для двумерного уравнения Лапласа она может представлять собой замкнутую кривую, для струны (волновое уравнение, включающее время и одно пространственное измерение) с закрепленными кон-

цами и с данным начальным состоянием в данный момент времени она будет открытой U-образной, состоящей из отрезка, параллельного пространственной оси, и двух полупрямых, параллельных оси времени, и т. д. Как указано на стр. 643, граница называется *замкнутой*, если она полностью окружает область, в которой имеется решение (даже если часть границы расположена на бесконечности), и *открытой*, если она уходит в бесконечность и если на части, расположенной на бесконечности, не ставится граничных условий.

В одномерном случае решение уравнения второго порядка определяется однозначно, если задать начальные значения решения и его производной. По аналогии можно было бы ожидать, что если граница параллельна одной из координатных осей, например оси x , то указание значения на границе (то есть указание $\phi(s)$) и нормальной составляющей градиента (то есть указание $N(s)$, в данном случае $\partial\phi/\partial y$) однозначно определяет решение. Это, вообще говоря, верно, как будет показано позже, но этот случай слишком частный, чтобы нас удовлетворить. Часто требуется, чтобы граница не только не была координатной линией, но могла иметь достаточно произвольный вид. Не так легко ответить на вопрос, какой должна быть граница для того, чтобы указание на ней значений решения и его нормальной производной определяло это решение однозначно (тем не менее обычно это верно, хотя и не очевидно!).

Краевые условия типа, указанного в предыдущем абзаце, состоящие в задании решения и его нормальной производной, называются *краевыми условиями Коши*, и задача об определении решения, которое им удовлетворяет, называется *задачей Коши*. Нас будет интересовать, для какого вида границы и для каких уравнений задача Коши приводит к однозначному и приемлемому решению. Указание начального вида и начальной скорости бесконечной гибкой струны соответствует условиям Коши вдоль линии $t = \text{const}$. Как мы знаем, это указание определяет решение однозначно.

С другой стороны, если решение строится внутри замкнутой границы, то можно ожидать, что условия Коши предъявляют слишком много требований и могут исключить все решения. Быть может, требуется указать только значение $\phi(s)$ или только нормальную производную $N(s)$ вдоль границы, чтобы получить однозначный ответ.

Краевые условия, состоящие в задании только значений решения вдоль границы, называются *условиями Дирихле*, а условия, при которых указываются значения только нормальной производной, называются *условиями Неймана*. Задача из теории потенциала, скажем, об определении электрического потенциала внутри системы проводников, потенциалы которых заданы, соответствует условиям Дирихле. С другой стороны, определение потенциала скорости жидкости вокруг твердых тел, когда она должна течь тангенциально к поверхности тел и нормальная составляющая градиента потенциала равна нулю, приводит к условиям Неймана. Кроме этого, иногда требуется задание значения некоторой линейной комбинации решения и его нормальной производной; это одно граничное условие, и оно является промежуточным между условиями Дирихле и Неймана.

Для нашей несущей линии, изображенной на рис. 6.4, условиям Коши соответствует указание не только линии $\phi(s) = z$, но также наклона в нормальном направлении у края поверхности $\phi(x, y) = z$. Получается, как будто вместо несущей линии для ϕ -поверхности имеется тонкая лента, изгибы которой задают как высоту ϕ -поверхности по оси z , так и наклон ϕ -поверхности (но не высшие производные). Для условий Дирихле несущая линия действительно является линией, а не лентой. В случае условий Неймана лента свободно движется вверх и вниз, задан только «наклон» этой ленты. Эти условия могут быть *однородными*, если $\alpha\phi(s) + \beta N(s) = 0$,

где α и β заданы и не зависят от s , или *неоднородными*, если $\alpha\phi(s) + \beta N(s) = F(s)$. Это различие будет проводиться в § 6.3.

Однако сейчас нам надо вернуться к нашему общему уравнению (6.1.1) и рассмотреть, в каком случае условия Коши вдоль кривой $x = \xi(s)$, $y = \eta(s)$ приводят к однозначному решению.

Задача Коши и характеристические линии. Чтобы подсчитать ϕ на некотором расстоянии от границы, мы можем прибегнуть к помощи двумерного ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = \phi(\xi, \eta) + \left[(x - \xi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + (y - \eta) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[(x - \xi)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2(x - \xi)(y - \eta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (y - \eta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

где ϕ и все ее производные в правой части равенства вычислены в граничной точке (ξ, η) . Если все эти частные производные от ϕ вычислены на границе, то ϕ однозначно определяется внутри круга сходимости ряда, то есть в полосе, примыкающей к граничной линии, причем ширина этой полосы зависит от природы уравнения и может оказаться бесконечной. Если мы можем составить правило для подсчета частных производных, то задача Коши окажется разрешимой. Это делается не так непосредственно, как может показаться сначала, потому что нам даны только уравнение для ϕ , параметрические уравнения границы и значения $\phi(s)$ и $N(s)$ на границе, и на основании этих данных надо подсчитать всю бесконечность в квадрате значений частных производных для каждой точки (ξ, η) на границе.

Выразить первые производные через известные величины не очень трудно. Этих производных всего две, и для них имеется два уравнения, одно из которых дает заданная нормальная производная $N(s)$, а другое — скорость изменения известной величины $\phi(s)$ вдоль границы:

$$N(s) = \frac{d\eta}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{d\xi}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \mathbf{a}_n \cdot \text{grad } \phi \text{ при } x = \xi, y = \eta,$$

$$\frac{d}{ds} \phi(s) = \frac{d\xi}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{d\eta}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \mathbf{a}_t \cdot \text{grad } \phi \text{ при } x = \xi, y = \eta.$$

Так как определитель из коэффициентов $(d\xi/ds)^2 + (d\eta/ds)^2 = 1$, то эти уравнения *всегда* имеют решение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{\xi, \eta} = N(s) \frac{d\eta}{ds} + \frac{d\xi}{ds} \frac{d\phi}{ds} = p(s), \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{\xi, \eta} = \frac{d\eta}{ds} \frac{d\phi}{ds} - \frac{d\xi}{ds} N(s) = q(s). \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Однако следующий шаг с целью получения вторых производных не так прост. Он является также решающим шагом, так как если можно найти три вторые производные, то, как мы увидим, нахождение высших производных осуществляется повторением того же вычисления. Теперь, когда мы решили уравнения для первых производных, мы знаем p и q , данные формулами (6.1.3), как функции параметра s . Два из требуемых трех уравнений для вторых производных получаются, если выписать выражение для известной скорости изменения p и q относительно s через эти вторые производные; третьим уравнением является само дифферен-

циальное уравнение (6.1 1), которому ψ должна удовлетворять:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{ds} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{d\eta}{ds} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{dp}{ds}, \\ \frac{d\xi}{ds} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{d\eta}{ds} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{dq}{ds}, \\ A(s) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2B(s) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C(s) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= F(s),\end{aligned}$$

где $A(s)$ и т. д. представляют собой известные значения коэффициентов в точке $\xi(s)$, $\eta(s)$ на границе.

Эти три уравнения можно решить и тем самым найти три частные производные, за исключением того случая, когда определитель из коэффициентов

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds} \\ A & 2B & C \end{vmatrix} = C \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 - 2B \frac{d\xi}{ds} \frac{d\eta}{ds} + A \left(\frac{d\eta}{ds} \right)^2 \quad (6.1.4)$$

равен нулю. Если определитель Δ отличен от нуля, то все высшие частные производные можно найти при помощи последовательных дифференцирований известных величин по расстоянию s вдоль границы и получающийся ряд Тейлора будет однозначно определять решение внутри некоторой области сходимости. Таким образом, мы показали, что условия Коши на границе определяют частное решение, если только граница не такова, что вдоль нее определитель Δ равен нулю.

Уравнение $\Delta = 0$ представляет собой уравнение кривой

$$C(x, y) dx^2 - 2B(x, y) dx dy + A(x, y) dy^2 = 0 \quad (6.1.5)$$

(где мы заменили дифференциалы $d\xi$, $d\eta$ на более обычные dx , dy) или, лучше сказать, двух семейств кривых, так как левую часть этого уравнения можно разложить на множители, что даст

$$A dy = (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx, \quad A dy = (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx. \quad (6.1.6)$$

Эти кривые характеризуют уравнение с частными производными (6.1.1) и называются *характеристиками* этого уравнения. Как будет ниже показано, если граничная линия окажется совпадающей с одной из них, то задание условий Коши не будет однозначно определять решение; если граница пересекает каждую кривую каждого семейства один раз, то условия Коши вдоль нее будут однозначно определять решение.

Гиперболические уравнения. Чтобы это утверждение было содержательным, характеристики обоих семейств должны быть вещественными кривыми. Это значит, что наше утверждение (в приведенной формулировке) применимо только к тем уравнениям с частными производными, для которых $B^2(x, y) > A(x, y)C(x, y)$ всюду. Такие уравнения называются *гиперболическими уравнениями*. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

является гиперболическим уравнением, если t рассматривать как вторую координату y . Уравнение (2.3.29) для сверхзвукового потока также является гиперболическим уравнением.

Для гиперболических уравнений естественная система координат образуется из двух семейств характеристик, которые вещественны. Интегрирование первого из уравнений (6.1.6) дает решение $\lambda(x, y) = \text{const}$, интегрирование второго дает $\mu(x, y) = \text{const}$, и естественными координатами являются λ и μ . Так как при движении вдоль одной из характеристик $\lambda = \text{const}$ мы имеем $(\partial\lambda/\partial x)dx + (\partial\lambda/\partial y)dy = 0$ (градиент функции λ ортогонален вектору $i dx + j dy$ при движении вдоль характеристики $\lambda = \text{const}$), то подстановка этого соотношения обратно в уравнение (6.1.5) показывает, что

$$A \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 = 0; \quad (6.1.7)$$

рассматривая другое семейство, получаем аналогичное уравнение для производных от μ .

Вернемся теперь к исходному уравнению (6.1.1) и запишем его в новых координатах. Например,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2$$

плюс члены с $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial y$. В итоге мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \left[A \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} \left[A \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + \\ + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} \left[A \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right] = G \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \psi, x, y \right). \end{aligned}$$

Однако первое и третье выражения в квадратных скобках равны нулю, так как λ и μ являются характеристическими функциями уравнения. Если уравнение однородное, то функцию G можно записать в виде $a \partial\psi/\partial\lambda + b \partial\psi/\partial\mu + c\psi$, и выражение во вторых квадратных скобках (отличное от нуля), а также a, b и c можно считать функциями от λ и μ .

Таким образом мы приходим к *нормальной форме гиперболического уравнения*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} = P \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + Q \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + R\psi, \quad (6.1.8)$$

где P, Q и R являются функциями от λ и μ . Если эти величины P, Q и R равны нулю, как это часто бывает (например, для волнового уравнения в одном пространственном измерении и для уравнения сверхзвукового потока), то решение уравнения (6.1.8) имеет вид

$$\psi = f(\lambda) + g(\mu), \quad (6.1.9)$$

где f может быть *любой* функцией от λ , а g — *любой* функцией от μ . Например, для волнового уравнения $\lambda = x - ct$ и $\mu = x + ct$, так что $\psi = f(x - ct) + g(x + ct)$, что соответствует волнам произвольного вида, распространяющимся в положительном и отрицательном направлении оси x со скоростью c . Случай, когда P и Q не равны нулю, мы рассмотрим на стр. 641.

Итак, мы показали, что решения по крайней мере некоторых гиперболических уравнений подобны проходящим волнам, а семейства характеристик соответствуют фронтам волн. Если нормальный вид уравнения имеет особенно простую форму

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} = 0, \quad (6.1.10)$$

то могут быть волны произвольного вида с фронтом вдоль $\lambda = \text{const}$ и вдоль $\mu = \text{const}$.

Если граница пересекает оба семейства характеристик (как на первой части рис. 6.2), то условия Коши однозначно определяют как $f(\lambda)$, так и $g(\mu)$. Каждой точке границы, характеризуемой расстоянием s от начала отсчета, соответствуют определенные значения λ и μ . Указание $\phi(s)$ и $N(s)$ в этой точке дает два уравнения, которые служат для определения как f , так и g для этой пары значений λ и μ . Если граница пересекает каждую из обоих семейств характеристик, то f и g будут указаны для всех

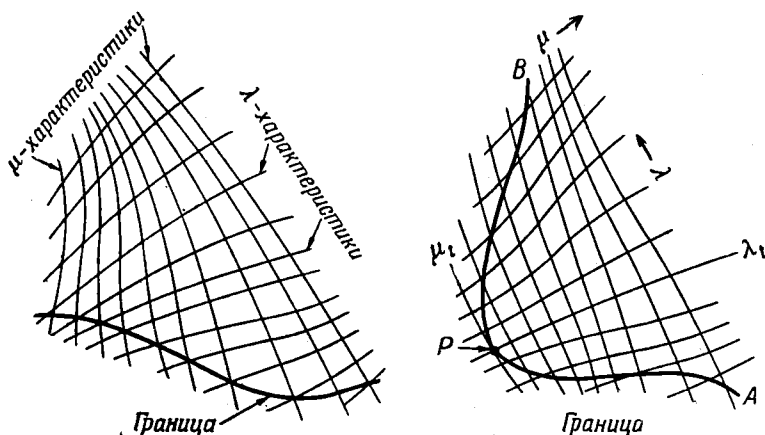


Рис. 6.2. Пересечение граничной линией семейств характеристик для гиперболического уравнения.

значений λ и μ и поле будет однозначно определено всюду. Если характеристики всюду вещественны, а $\phi(s)$ и $N(s)$ ограничены и непрерывны, то будут также ограничены и непрерывны f и g , а потому и $\phi(x, y)$.

Условия Коши и гиперболические уравнения. Мы теперь можем видеть, почему условия Коши не задают решения, когда граница совпадает с характеристикой. Если, скажем, граница идет вдоль кривой $\mu = \mu_0$, то условия Коши содержат данные о $g(\mu)$ и о производной от $g(\mu)$ только при $\mu = \mu_0$ и совсем ничего не говорят о поведении g для любого другого μ . В этом случае $f(\lambda)$ определена, поскольку линия $\mu = \mu_0$ пересекает все семейство λ -характеристик, так что значение $\phi(s)$ (которое в этом случае можно записать как $\phi(\lambda)$) равно $f(\lambda)$. Нормальная производная $N(s)$ определяет $dg/d\mu$ при $\mu = \mu_0$, но никаких высших производных определить нельзя, и потому $g(\mu)$ для любых других μ полностью неопределенна. В общем же случае значения f и g определены только для тех значений λ и μ , которые пересекаются граничной линией.

Другим способом это можно выразить так: граница, совпадающая с характеристикой, проходит вдоль фронта волны. Так как он никогда не соприкасается с любой другой частью волны, проходящей в его направлении, то он может воздействовать только на волну, проходящую в противоположном направлении (то есть он может определить только f , но не g). Теперь должна быть очевидной тесная связь между этими утверждениями и рассмотрением на стр. 165 ударных волн, появляющихся при течении жидкости мимо границы со скоростью, большей скорости звука.

Теперь мы можем также видеть, что случится, если граница заворачивает так, что она пересекает семейство характеристик *дважды*, как на второй части рис. 6.2. В точке $P(\lambda_1, \mu_1)$ граница касается характеристики

$\mu = \mu_i$; для всех значений $\mu > \mu_i$ граница пересекает μ -характеристику дважды, а характеристики $\mu < \mu_i$ совсем не пересекаются. Предположим, что условия Коши заданы на части PA границы. Это определяет $f(\lambda)$ для $\lambda < \lambda_i$ и $g(\mu)$ для $\mu > \mu_i$. То, что $g(\mu)$ не определена для $\mu < \mu_i$, несущественно, так как эти значения μ лежат вне границы; однако нам надо знать значения $f(\lambda)$ для $\lambda > \lambda_i$. Они должны быть определены из граничных условий вдоль части PB границы.

Если условия Коши (как $\phi(s)$, так и $N(s)$) заданы вдоль дуги PB , то решение будет «переопределенным», так как вдоль этой дуги функция $g(\mu)$, определенная из условий Коши на PA , уже фиксирована и при помощи условий на PB требуется определить только $f(\lambda)$ для $\lambda > \lambda_i$. Это можно сделать, если указать *либо* $\phi(s)$, *либо* $N(s)$ вдоль PB (или линейную комбинацию ϕ и N), но *не обе*. Следовательно, для PB достаточны условия Дирихле или Неймана (или промежуточная комбинация). Конечно, мы могли бы получить также однозначный ответ, задав условия Коши на PB и условия Дирихле или Неймана на PA .

Вообще, можно сказать, что если граница искривлена так, что она пересекает семейство характеристик дважды, то условия Коши нужны на части границы с одной стороны от точки, где граница касается характеристики, а с другой стороны достаточны условия Дирихле или Неймана. Нетрудно перенести это заключение на случай, когда имеется более одной точки касания. Например, для U -образной границы условия Коши нужны вдоль основания U , а вдоль боков достаточны условия Дирихле или Неймана; для Z -образной границы подходят условия Коши вдоль верхней и нижней частей Z , а вдоль диагональной части — условия Дирихле или Неймана.

Нетрудно также видеть, что если граница замкнутая, так что каждая внутренняя характеристика пересекает ее дважды, то условия Коши на произвольно выбранной конечной части границы, вообще говоря, могут переопределять решение. Однако не очень легко усмотреть, будут ли достаточны условия Дирихле (или Неймана) вдоль всей границы, и потому нам придется отложить исследование этого вопроса; мы вернемся к нему позднее в этой главе.

Быть может, полезно рассмотреть простой случай задачи описанного типа, чтобы увидеть, как она решается практически. Простейшее гиперболическое уравнение мы имеем в случае гибкой струны, где зависимость смещения ϕ струны от x и t определяется уравнением (см. стр. 124)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

Характеристическими функциями являются $\lambda = x - ct$ и $\mu = x + ct$, в нормальной форме уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda \partial \mu} = 0,$$

и решением служит $\phi = f(\lambda) + g(\mu)$.

Задание начального смещения и начальной скорости бесконечной струны соответствует условиям Коши на простой открытой границе, пересекающей характеристики только один раз. Если начальная форма струны при $t = 0$ есть $\phi_0(x) (= \phi(s))$, а начальная скорость равна $V_0(x) (= N(s))$, то функции f и g надо подобрать так, чтобы

$$f(x) + g(x) = \phi_0(x) \quad \text{и} \quad -f'(x) + g'(x) = \frac{1}{c} V_0(x),$$

где штрих указывает на дифференцирование по аргументу. Нетрудно видеть, что

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \psi_0(\lambda) - \frac{1}{2c} \int_0^\lambda V_0(w) dw, \quad g(\mu) = \frac{1}{2} \psi_0(\mu) + \frac{1}{2c} \int_0^\mu V_0(w) dw. \quad (6.1.11)$$

Отсюда следует, что решение равно $\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ и состоит из суммы двух волн, проходящих в противоположных направлениях со скоростями c и $-c$. Это показано на первой части рис. 6.3.

Если теперь струна закреплена при $x=0$, то граница L-образна и пересекает μ -характеристики в двух точках. Значения $f(\lambda)$ и $g(\mu)$ для λ и μ , больших нуля, получаются при помощи условий Коши, в которых начальные смещение и скорость заданы на части границы, где $t=0, x>0$; значение $f(\lambda)$ для $\lambda < 0$ определяется из условия Дирихле $\psi=0$ для части границы $x=0, t>0$. Значения g для $\mu < 0$ не определяются из граничных условий, но эти значения и не требуются.

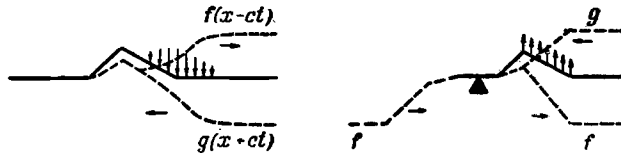


Рис. 6.3. Начальная форма (сплошная линия) и начальная скорость (стрелки) струны.

Последующее движение дается суммой пунктирных линий f и g , движущихся в противоположных направлениях.

Процедура удовлетворения этим граничным условиям состоит в выборе значения $f(-\lambda)$ в виде «отражения» $g(\mu)$, чтобы для любого значения t обе волны как раз уничтожались при $x=0$. Легко проверить, что начальному смещению $\psi_0(x)$ и начальной скорости $V_0(x)$ отвечает решение $\psi = f(x - ct) + g(x + ct)$, где

$$g(\mu) = \frac{1}{2} \psi_0(\mu) + \frac{1}{2c} \int_0^\mu V_0(w) dw \quad \text{при } \mu > 0;$$

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} \psi_0(\lambda) - \frac{1}{2c} \int_0^\lambda V_0(w) dw & \text{при } \lambda > 0; \\ -\frac{1}{2} \psi_0(-\lambda) - \frac{1}{2c} \int_0^{-\lambda} V_0(w) dw & \text{при } \lambda < 0. \end{cases} \quad (6.1.12)$$

Это показано на второй части рис. 6.3. Мы видим, что значения $f(\lambda)$ для отрицательных λ порождают отраженную волну, получающуюся из μ -волны отражением от закрепленного конца.

Закреплению обоих концов струны соответствует U-образная граница, приводящая к периодичности отражений, так как начальные условия (Коши) на конечном участке струны отражаются сначала от одного конца, а затем от другого. Для замкнутости границы в этом случае надо было бы

задавать «конечные условия» в момент t_1 , как и начальные условия при $t=0$. Если мы задаем условия Коши (и смещение, и скорость) при $t=0$, то смещение и скорость при $t=t_1$ определяются, и в нашем конечном условии нельзя задавать произвольные значения ψ_1 и V_1 , чтобы не получить противоречия. Можно было бы ожидать, что задание ψ_0 только при $t=0$ и ψ_1 только при $t=t_1$ (условия Дирихле) определяет решение однозначно, однако периодическое движение конечной струны опровергает это. Как известно, такая струна допускает свободные колебания периода $2l/nc$, где l — расстояние между закрепленными концами, а n — любое целое положительное число. Если t_1 равно любому кратному какому-нибудь из этих периодов (то есть произведению *любого рационального числа* на $2l/c$), то струна может испытывать периодическое колебание (*любой* амплитуды) такой частоты, чтобы проходить через нуль при $t=0$ и также при $t=t_1$; такое колебание не проявилось бы в значениях ψ ни в начале, ни в конце.

Отсюда мы видим, что условия Дирихле (или Неймана) на замкнутой границе не определяют однозначно решения этого простого гиперболического уравнения. В сущности, трудно усмотреть, какой вид граничных условий на замкнутой границе не переопределяет и не недоопределяет решение. Однако мы видим также, что замкнутая граница не очень «естественна» для гиперболического уравнения, так что это затруднение не должно отвлекать нас.

Волны для нескольких пространственных измерений. Распространение рассмотренных выше общих понятий на случай нескольких пространственных измерений не очень трудно. В уравнении гиперболического типа имеется одна координата, которой соответствует член со второй производной со знаком, противоположным остальным. Это приводит к уравнениям для вещественных характеристических поверхностей, которым часто отвечают волновые поверхности.

В двумерном случае (одно пространственное измерение) возмущение, возникшее в момент t в точке x , распространяется в обоих направлениях с конечной скоростью и *без изменения своей формы* при прохождении волны. Волна, представленная функцией $f(x-ct)$, движется направо, не меняя своего вида при перемещении, и аналогично для волны $g(x+ct)$, идущей налево. Поставим вопрос, будут ли волны, возникающие из возмущения в точке, распространяться без изменения своего вида при любом числе измерений.

Как будет показано в гл. 7, возмущение в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного пространства в момент t распространяется одинаково во всех направлениях из этой точки. Поэтому нас будут интересовать здесь решения волнового уравнения, зависящие только от времени и от расстояния r от одной точки до другой в n -мерном пространстве. Гиперсферические координаты для n измерений определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1, \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}. \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Отбрасывая производные по каждому из углов, мы находим, что волновое уравнение для «сферически симметричной» волны в n -мерном пространстве имеет вид

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{n-1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (6.1.14)$$

Последнее уравнение, очевидно, является гиперболическим уравнением вида (6.1.1), и будет интересно рассмотреть его как таковое. Характеристиками, как и выше, будут $\lambda = r - ct$ и $\mu = r + ct$. Нормальная форма уравнения такова:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} = -\frac{1}{2} \frac{n-1}{\lambda + \mu} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right]. \quad (6.1.15)$$

Только при $n=1$ решением будет $\psi = f(\lambda) + g(\mu)$; это уже рассмотренный случай. Поскольку во всех случаях, кроме одномерного, невозможны решения в виде волн, распространяющихся наружу и внутрь без изменения формы, попытаемся посмотреть, нельзя ли найти решение, изменение которого сводится лишь к уменьшению его амплитуды при удалении волны от точки возмущения. Другими словами, мы попытаемся найти решение в форме $\psi = F(\lambda, \mu)(\lambda + \mu)^a = F(\lambda, \mu)(2r)^a$, надеясь, что функция F окажется имеющей вид $f(\lambda) + g(\mu)$.

Подстановка в уравнение (6.1.15) показывает, что, за исключением случая $a = (1-n)/2$, уравнение для F еще хуже, чем уравнение для ψ . Если $a = (1-n)/2$, то есть если $\psi = F/(2r)^{(n-1)/2}$, то уравнение для F имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{1}{4} (n-1)(n-3) \frac{F}{(\lambda + \mu)^2}.$$

Только при $n=1$ или $n=3$ функция F будет просто суммой функции от λ и функции от μ . Случай $n=1$ уже исследован, и теперь видно, что для трех пространственных измерений можно получить решение

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} [f(r - ct) + g(r + ct)], \quad \text{где } r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (6.1.16)$$

представляющее уходящие и приходящие волны, при распространении которых изменение их формы состоит только в уменьшении амплитуды с возрастанием r . Очевидно, что для двух пространственных измерений форма волн, излучаемых из точки, меняется более существенно.

Дальнейшие шаги в этом направлении означали бы чрезмерное вторжение в гл. 7. Достаточно здесь сказать, что взрывные (одноимпульсные) волны для нечетного числа пространственных измерений ($n = 1, 3, 5, \dots$) распространяются радиально как резкие толчки, уменьшающиеся по амплитуде, но все время имеющие резко очерченные передний и задний фронты; эти волны не дают предупреждения о своем приходе и не оставляют за собой следов после прохождения. Напротив, в пространстве четного числа измерений ($n = 2, 4, 6, \dots$) волны, порождаемые резким толчком, распространяются радиально и все время обладают резко очерченным *передним* фронтом; они не дают предупреждения о себе до момента $t = r/c$, но оставляют за собой след, так как возмущение продолжается долго после прохождения гребня. Мы коснемся причин этого интересного различия также в гл. 11.

Эллиптические уравнения и комплексные переменные. Теперь надо вернуться к уравнению (6.1.6) характеристик, чтобы посмотреть, что следует делать, если характеристики не являются вещественными кривыми. Если $A(x, y)C(x, y) > B^2(x, y)$ для всех значений x и y , то уравнение (6.1.1) называется *эллиптическим*. Уравнения для характеристик комплексно сопряжены одно другому, и если характеристической функцией служит $\lambda(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, то другой характеристической функцией является ее комплексно сопряженная $\mu(x, y) = u(x, y) - iv(x, y)$

(где u и v — вещественные функции от x, y). Замена уравнения (6.1.1) на (6.1.8)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} = P \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + Q \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + R \psi$$

здесь уже не так полезна, потому что λ и μ — комплексные переменные. Более полезно и естественно применить в качестве координат u и v вещественную и мнимую части λ и μ .

Следовательно, *нормальной формой эллиптического уравнения* является

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = S \frac{\partial \psi}{\partial u} + T \frac{\partial \psi}{\partial v} + U \psi. \quad (6.1.17)$$

Уравнение Лапласа является эллиптическим уравнением, так же как уравнение для дозвукового (с числом Маха < 1) потока сжимаемой жидкости (см. стр. 165) и уравнение Гельмгольца. Уравнение Пуассона представляет собой неоднородное эллиптическое уравнение с дополнительным членом $\rho(x, y)$ в правой части.

Если P, Q и R (или S, T и U) равны нулю, то решения можно вновь выразить в виде

$$\psi = f(\lambda) + g(\mu) = f(u + iv) + g(u - iv). \quad (6.1.18)$$

Другими словами, ψ равна сумме любой функции комплексного переменного $u + iv$ и любой функции его сопряженного. Приложения теории функций к решениям двумерного уравнения Лапласа были затронуты в гл. 4 и будут рассмотрены более детально в гл. 10.

Связь между аналитическими функциями и решениями двумерного эллиптического уравнения проливает некоторый свет на соотношения между этими решениями и краевыми условиями. Для иллюстрации возьмем двумерное уравнение Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$ и попытаемся применить условия Коши вдоль оси x для определения ψ в верхней полуплоскости. Характеристическими функциями для уравнения Лапласа являются $\lambda = x + iy, \mu = x - iy$, а общее решение записывается в виде $\psi = f(x + iy) + g(x - iy)$. Краевые условия, которым надо удовлетворить, таковы: $\psi = \psi_0(x)$ и $\partial \psi / \partial y = -N_0(x)$, если $y = 0$. Решение имеет вид

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2} \psi_0(\lambda) + \frac{1}{2} i \int_0^\lambda N_0(z) dz; \\ g(\mu) &= \frac{1}{2} \psi_0(\mu) - \frac{1}{2} i \int_0^\mu N_0'(z) dz; \\ \psi &= \operatorname{Re} \phi_0(x + iy) - \operatorname{Im} \chi_0(x + iy); \\ \chi_0(z) &= \int_0^z N_0(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

Следовательно, ψ равна вещественной части функции $\phi_0(z) + i\chi_0(z)$ переменного $z = x + iy$. Для физически разумных краевых условий ψ_0 и χ_0 являются любыми приемлемыми функциями на вещественной оси (то есть вдоль границы). Однако имеется много функций от z , конечных на вещественной оси и все же имеющих полюсы и (или) существенные особенности где-либо вне этой оси. (В самом деле, мы в гл. 4 доказали, что единственной функцией от z , остающейся *всюду* конечной, является постоянная.) Значит, за исключением случая, когда наши краевые условия имеют вид $\psi_0 = \text{const}$, $N_0 = 0$, функция $\psi(x, y)$ наверняка обращается в бес-

конечность где-либо на комплексной плоскости. Конечно, все особенности могут оказаться лежащими в нижней полуплоскости вне границы, а потому безвредными, но малейшее неудачное колебание ϕ_0 или N_0 в какой-либо части границы может породить бесконечность где-либо в верхней полуплоскости. Другими словами, функция от $x+iy$ просто *слишком чувствительна* к малым колебаниям ее значений или значений ее производной вдоль вещественной оси, чтобы подчиняться контролю краевых условий этого вида.

Становится также очевидным контраст со случаем гиперболического уравнения. Формула (6.1.14) выражает значения $\phi(x, y)$ для гиперболического уравнения через ϕ_0 и N_0 для вещественных значений аргумента, и если ϕ_0 и интеграл от N_0 ограничены и непрерывны вдоль границы, то ϕ также будет ограниченной и непрерывной во всем пространстве. Формула же (6.1.19) показывает, что $\phi(x, y)$ для эллиптического уравнения выражается через ϕ_0 и N_0 для комплексных значений аргумента, и как раз поэтому, если ϕ_0 и интеграл от N_0 ограничены и непрерывны вдоль вещественной оси, нет гарантии, что они будут ограничены и всюду в верхней полуплоскости z .

Другое фундаментальное отличие между гиперболическими и эллиптическими уравнениями состоит в общем поведении их решений. Например, решения уравнения Лапласа (которое является эллиптическим уравнением) не могут иметь максимумов и минимумов (см. стр. 18); отсюда следует, что если граничные условия порождают решение, возрастающее в определенном направлении, то решению ничего не остается, кроме как продолжать возрастать, пока оно не обратится в бесконечность в некоторой точке (там будет не максимум, а особенность!), если только не встретится со временем другой край границы. С другой стороны, решения волнового уравнения (которое является гиперболическим уравнением) могут иметь максимумы и минимумы; значит, если в силу краевых условий решение возрастает в определенном направлении, то может получиться так, что после перехода гребня волны в этом направлении градиент решения обернется. Позже мы возвратимся к этой чрезмерной чувствительности решений эллиптических уравнений к условиям Коши на открытой границе.

Но если условия Коши на открытой границе для решений эллиптических уравнений слишком разборчивы, чтобы встречаться в физических задачах, то условия Дирихле или Неймана на открытой границе недостаточны для того, чтобы определять ответ однозначно. Поэтому дело представляется таким образом, что для эллиптических уравнений предпочтительней замкнутые границы с условиями Дирихле или Неймана (так как условия Коши для замкнутых границ переопределяют их решение). Трудность, к которой мы пришли, решая гиперболическое уравнение при замкнутой границе (проистекающая из возможности наличия волн, не ощущаемых на границах), не может появиться для эллиптического уравнения, так как в этом случае волновое движение невозможно. Позже мы покажем более детально, что условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе для эллиптических уравнений обычно дают единственное решение.

Надо, конечно, отметить, что «замкнутая граница» в этих случаях может частично располагаться на бесконечности. Дело в том, что ϕ_0 (или N_0) надо задавать даже для расположенной на бесконечности части границы, чтобы получить единственное решение. С другой стороны, для рассмотренного выше случая гиперболического уравнения краевые условия на бесконечности не являются необходимыми; более того, они излишни, если заданы условия Коши на конечной части границы.

Подобным образом решения вида (6.1.16) не особенно полезны для эллиптических уравнений, отчасти из-за упомянутых выше трудностей

с комплексными характеристиками, но также из-за того, что ни одна из координат не отличается от другой по знаку перед второй производной, как это было для временной координаты y волнового уравнения. Соответственно для эллиптического уравнения (скажем, для уравнения Лапласа) целесообразно рассматривать все координаты как равноправные. Для точечного источника в n -мерном пространстве уравнение для «сферически симметричного» решения имеет вид

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\psi}{dr} \right) = 0, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Решение ψ равно $a + b/r^{n-2}$, где a и b — постоянные (исключая случай $n = 2$; когда решение равно $a + b \ln r$). Для эллиптического уравнения это вполне удовлетворительное решение, так как оно конечно всюду, кроме источника $r = 0$. Подобное решение можно построить для волнового уравнения с $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - c^2 t^2$, но из-за последнего члена решение обращается в бесконечность всегда при $c^2 t^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2$; оно не столь полезно, как только что приведенное решение эллиптического уравнения.

Параболические уравнения. Следует рассмотреть предельный случай уравнения (6.1.1), когда $B^2(x, y) = A(x, y)C(x, y)$ всюду. В этом случае имеется только одно семейство характеристик, определяемых интегралом уравнения $A dy = B dx$ [см. (6.1.6)], который мы обозначим через $\lambda(x, y)$. Выражая уравнение (6.1.1) в новых координатах λ и x , получаем в конце концов в качестве *нормальной формы параболического уравнения*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = K(x, \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + L(x, \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial x} + M(x, \lambda) \psi, \quad (6.1.20)$$

поскольку оба члена

$$A \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \quad \text{и} \quad A \frac{\partial \lambda}{\partial x} + B \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

равны нулю. В этом случае имеется лишь один член со второй производной; по характеристической функции участвует только первая производная.

Такой вид имеет уравнение диффузии, в котором t занимает место λ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Это уравнение «кривобокое» относительно времени: если изменить знак t , то получаем решение другого вида, тогда как волновое уравнение симметрично относительно времени. Это различие в основном обусловлено тем, что уравнение диффузии выражает «не консервативный» процесс. Энтропия непрерывно возрастает с течением времени (и обычно свободная энергия убывает), в то время как для волнового уравнения энергия остается постоянной (если не включается трение). Как можно было бы ожидать (см. стр. 136), с возрастанием времени все неправильности решения уравнения диффузии «сглаживаются», так как вблизи максимума ψ кривизна $\partial^2 \psi / \partial x^2$ отрицательна и ψ там со временем убывает. Только если кривизна (и потому неправильность) ψ всюду равна нулю, ψ может быть независимой от времени.

Следует ожидать, что для этого уравнения подходят условия Дирихле, а границу надо брать открытую в направлении *возрастания* t . При движении во времени в обратном направлении неправильности в решении стремятся возрасти; чем короче область иррегулярности, тем быстрее возрастание; значит, хотя мы можем предсказать, каким станет данное ψ

через время t , но мы не можем с уверенностью сказать, каким было то же ϕ на время t раньше (другими словами, решение при отрицательных t не определено граничными значениями при $t=0$). Это различие между предсказанием и предисторией типично для параболического уравнения и не имеет места, например, для волнового уравнения: в случае последнего так же легко заглянуть в прошлое, как и в будущее.

У n -мерного параболического уравнения по одной из координат (назовем ее x_{n+1}) присутствует только член с первой производной, в то время как по остальным координатам присутствуют вторые производные. Уравнение для «сферически симметричного» решения в пространстве n измерений [ср. с уравнением (6.1.14)] имеет вид

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] - a^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (6.1.21)$$

и само является параболическим уравнением. Решение в виде отрицательной степени r возможно, но практически бесполезно, если есть зависимость от t . В § 7.4 мы покажем, что самым полезным «примитивным» решением является решение, полностью сконцентрированное при $t=0$ и диффундирующее во все стороны с возрастанием t . Выбирая форму $\psi = F(t) e^{-r^2/4t}$, обладающую этими свойствами, мы легко находим, что F обратно пропорциональна $t^{n/2}$. Итак, мы находим в результате, что решением уравнения (6.1.21) будет

$$\psi = [a/2 \sqrt{\pi t}]^n e^{-a^2 r^2/4t}, \quad t > 0, \quad (6.1.22)$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Оно нормировано так, что интеграл от него по всему n -мерному пространству равен единице. Эта функция очень сконцентрирована для малых значений t , совсем «размазана» для больших значений t и недействительна для отрицательного t . Ее свойства будут более основательно исследованы в § 7.4.

6.2. Разностные уравнения и краевые условия

Мы несколько раз (стр. 131 и 227) говорили о предельном переходе от величин, определенных только для целых значений некоторого параметра, к непрерывным переменным, от рядов к интегралам, от частиц к сплошной среде. Имеется соответствующая связь и между дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями, которой мы касались при рассмотрении рекурсивных формул (см. стр. 510) и которая очевидна из определения производной как предела. Величине y_n , определенной для каждого целого значения n и представляющей счетный набор значений y , отвечает непрерывная функция $y(x)$ от непрерывного переменного x . Первой, второй и т. д. разностям

$$\Delta(y_n) = y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^2(y_n) = \Delta[\Delta(y_n)] = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \text{ и т. д.} \quad (6.2.1)$$

соответствуют различные производные от $y(x)$. (Взаимосвязь была бы несколько теснее, если бы мы рассматривали $\Delta(y_n)/h$ и т. д., где h — приращение x , отвечающее единичному изменению индекса n и стремящееся к нулю при измельчении разбиения; однако в предварительном анализе можно обойтись без h .)

Дифференциальным уравнениям, рассмотренным в предыдущей главе, соответствуют разностные уравнения, которые в принципе легче анализировать, но на практике часто труднее решать. Однако в некоторых отношениях полезно противопоставить и сопоставить поведение решений разностного уравнения и решений соответствующего дифференциального

уравнения. Это особенно относится к взаимосвязи между решениями и краевыми условиями, так что здесь целесообразно заняться исследованием общих свойств разностных уравнений.

Линейные разностные уравнения первого порядка. В предыдущей главе мы нашли несколько рекурсивных формул (см., например, стр. 511), которые содержат только два последовательных коэффициента разложения в ряд,

$$A_n a_n + D_n a_{n+1} = 0,$$

и из которых можно определить коэффициенты a_n , например, через a_0 . Это равносильно разностному уравнению первого порядка

$$\Delta(y_n) = C_n y_n; \quad C_n = -1 - \frac{A_n}{D_n}. \quad (6.2.2)$$

Очевидно, что для y_n можно получить определенное решение, если зафиксировать значение одного из y_n . Обычно это граничное условие (равносильное условиям Дирихле) выражается посредством задания значения y_0 . Тогда y для больших значений n равно произведению

$$y_n = y_0 \prod_{r=0}^{n-1} (C_r + 1) = y_0 \exp \sum_{r=0}^{n-1} \ln(1 + C_r). \quad (6.2.3)$$

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид $dy/dx = f(x)y$, и решение его есть

$$y(x) = y_0 \exp \int_0^x f(x) dx.$$

Связь между этими решениями очевидна. Для неоднородного уравнения

$$\Delta(y_n) - C_n y_n = B_n \quad (6.2.4)$$

можно пытаться искать решение в виде $y_n = A_n \prod_{r=0}^{n-1} (C_r + 1)$. Подставляя это выражение в (6.2.4), получаем

$$A_{n+1} \prod_{r=0}^n (C_r + 1) - A_n \prod_{r=0}^{n-1} (C_r + 1) - C_n A_n \prod_{r=0}^{n-1} (C_r + 1) = B_n,$$

$$\Delta(A_n) \prod_{r=0}^n (C_r + 1) = B_n, \text{ или } \Delta(A_n) = B_n / \prod_{r=0}^n (C_n + 1).$$

Отсюда следует, что полное решение уравнения (6.2.4) имеет вид

$$y_n = \left[\prod_{r=0}^{n-1} (1 + C_r) \right] \left\{ y_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{B_s}{\prod_{r=0}^s (1 + C_r)} \right\}; \quad (6.2.5)$$

оно тесно связано с решением

$$y(x) = e^{\int^x F dx} \left[y_0 + \int e^{-\int^x F dx} r dx \right]$$

дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} - F(x)y = r(x).$$

Например, если $C_n = c$ и $B_n = b$ не зависят от n , то решение равно

$$\begin{aligned} y_n &= (1+c)^n \left\{ y_0 + \sum_{s=1}^n \frac{b}{(1+c)^s} \right\} = \\ &= (1+c)^n \left\{ y_0 + \frac{b}{1+c} \left[\frac{1-(1+c)^{-n}}{1-(1+c)^{-1}} \right] \right\} = \\ &= y_0 (1+c)^n + \frac{b}{c} [(1+c)^n - 1]. \end{aligned}$$

Мы могли бы перейти к разностным уравнениям второго порядка, следуя рассмотрению гл. 5 почти во всех деталях. Однако мы сейчас посмотрим, как применить разностные уравнения, чтобы лучше разобраться в поведении уравнений с частными производными.

Разностные уравнения для нескольких измерений. Очень полезный метод приближенного вычисления решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными состоит в замене непрерывных независимых переменных разрывными переменными, значениями которых могут быть только целые кратные некоторого шага h . Например, для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

мы строим прямоугольную решетку (сетку) шага h в обоих направлениях и подсчитываем ψ только в точках сетки, где ее линии пересекаются. Величину ψ для $x = mh$, $y = nh$ обозначим через $\psi(m, n)$. Если h достаточно мало, то хорошим приближением дифференциального уравнения будет *разностное уравнение*

$$\frac{1}{h^2} [\Delta_m^2 \psi + \Delta_n^2 \psi] = 0,$$

или

$$\frac{1}{4} [\psi(m-1, n) + \psi(m+1, n) + \psi(m, n-1) + \psi(m, n+1)] = \psi(m, n). \quad (6.2.6)$$

Возможно развить методы численного решения таких уравнений, чтобы применять их, когда соответствующие дифференциальные уравнения нельзя решить точно; однако здесь мы ограничимся рассмотрением параллелизма между дифференциальными и разностными уравнениями в отношении их реакции на краевые условия.

В этом параграфе мы рассмотрим среду, или поле, которое сначала не будет непрерывным, а будет иметь вид решетки с шагом h , где h конечно, хотя и мало. Поле ψ будет иметь смысл только в узловых точках, а конечные разности между значениями ψ в соседних точках регулируются разностными уравнениями. Мы получим результаты о решениях краевых задач для разностных уравнений, соответствующих рассмотренным в предыдущем параграфе трем типам уравнений с частными производными. Отправляясь от этих результатов, полученных для решетки конечного шага, мы можем затем сделать шаг бесконечно мелким и быть уверенными, что выводы обычно справедливы и для соответствующих дифференциальных уравнений. Процесс перехода к пределу не всегда

так прост, как это может показаться; однако можно проверить, что для рассматриваемых нами теорем не возникает непредвиденных осложнений.

При доказательстве этих теорем нам следует ограничиться только двумя измерениями; большее число измерений вносит не принципиальные усложнения. Мы будем также пользоваться лишь простейшими видами для трех типов уравнения. Например, простейшим *эллиптическим уравнением* является уравнение Лапласа; ему соответствует разностное уравнение (6.2.6). В качестве неоднородного эллиптического уравнения можно взять уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -F(x, y).$$

Соответствующее ему разностное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{4} [\psi(m+1, n) + \psi(m-1, n) + \psi(m, n+1) + \psi(m, n-1)] - \psi(m, n) = -\frac{h^2}{4} F(m, n). \quad (6.2.7)$$

Простейшим *гиперболическим уравнением* для двух измерений является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad y = ct,$$

соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$\psi(m+1, n) + \psi(m-1, n) = \psi(m, n+1) + \psi(m, n-1). \quad (6.2.8)$$

Подобным образом простейшим *параболическим уравнением* является уравнение диффузии

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

для которого соответствующее разностное уравнение можно записать в виде

$$\psi(m, n+1) = C [\psi(m+1, n) + \psi(m-1, n) - 2\psi(m, n)] + \psi(m, n),$$

или

$$\psi(m, n-1) = -C [\psi(m+1, n) + \psi(m-1, n) - 2\psi(m, n)] + \psi(m, n) \quad (6.2.9)$$

в зависимости от того, хотим мы двигаться вперед или назад по n (временной переменной). При этом мы положили $C = 1/ha^2$.

Эллиптическое уравнение и условия Дирихле. Как пример такого анализа, рассмотрим сеточный аналог эллиптического уравнения с условиями Дирихле вдоль замкнутой границы. Мы указали на стр. 643, что эти граничные условия для такого уравнения определяют единственное решение; посмотрим, может ли метод сеток помочь нам доказать это утверждение. Основная решетка показана на рис. 6.4. Пусть граничные точки (светлые кружки) заполняют ряды $m=0$, $n=0$, $m=M$ и $n=N$; мы задаем значения ψ во всех этих точках. При заданных таким образом граничных значениях мы хотим определить (единственные) значения ψ во всех внутренних точках (черные точки) при помощи разностного уравнения (6.2.6). Если будет развит сходящийся процесс для подсчета каждого ψ через граничные значения ψ , дающий однозначный ответ для всех внутренних точек, то мы можем считать задачу решенной, а тот факт, что условия Дирихле дают однозначный ответ, доказанным.

Физическим примером этой сеточной задачи служит сетка из резиновых связей, натянутая между равноотстоящими стержнями, каждый из которых поднимается над плоскостью на свою высоту. Высота каждой из узловых точек над плоскостью соответствует значению $\phi(m, n)$. Разностное уравнение (и также модель из резиновых связей) утверждает, что значение ϕ в узловой точке (m, n) равно среднему из значений ϕ в четырех соседних узлах. Мы уже говорили (стр. 18), что в этом состоит физический смысл уравнения Лапласа.

Это можно применить для подсчета значений ϕ во внутренних узлах. Например, значение ϕ во внутренней точке $(2,1)$ можно подсчитать через значения в ее соседних точках:

$$\phi(2,1) = \frac{1}{4} [\phi(3,1) + \phi(1,1) + \phi(2,2)] + \frac{1}{4} \phi(2,0),$$

где $\phi(2,0)$ равно значению ϕ в граничной точке $(2,0)$ и тем самым задано. Остальные три значения ϕ в правой части взяты во внутренних точках и еще не известны. Однако их можно выразить как средние из значений для их соседей, что даст

$$\frac{13}{16} \phi(2,1) = \frac{1}{16} [\phi(4,1) + \phi(2,3) + 2\phi(3,2) + 2\phi(1,2)] + \frac{1}{4} \phi(2,0) + \frac{16}{1} [\phi(0,1) + \phi(1,0) + \phi(3,0)],$$

то есть $\phi(2,1)$ выражается через граничные условия и значения ϕ в точках, еще дальше отстоящих от границы.

Вновь выражая ϕ для внутренних точек как среднее значение из соседних значений, получаем третье последовательное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{12}{16} \phi(2,1) = & \frac{1}{64} [\phi(5,1) + \phi(2,4) + 2\phi(3,1) + 3\phi(4,2) + 3\phi(3,3) + \\ & + 3\phi(1,3) + 4\phi(2,2)] + \frac{15}{64} \phi(2,0) + \\ & + \frac{1}{16} [\phi(0,1) + \phi(1,0) + \phi(3,0)] + \frac{1}{32} \phi(0,2) + \frac{1}{64} \phi(4,0), \end{aligned}$$

и таким же образом далее получаем одно уравнение за другим. После каждой подстановки значение $\phi(2,1)$ будет выражено через значения ϕ в других узлах с некоторыми коэффициентами и через граничные значения (которые заданы) с другими коэффициентами. При продолжении подстановок мы заметим два важных факта: коэффициенты при внутренних потенциалах быстро стремятся к нулю (так быстро, что даже сумма всех коэффициентов при *всех* внутренних потенциалах в уравнении стремится к нулю), тогда как коэффициенты при граничных потенциалах стремятся к конечным значениям. Например, значение коэффициента при $\phi(3,1)$ равно $\frac{1}{4}$ для первого уравнения, 0 для второго, $\frac{1}{24}$ для третьего и т. д., тогда как коэффициент при граничном значении $\phi(2,0)$ равен $\frac{1}{4}, \frac{4}{13}, \frac{5}{16}$ и т. д.

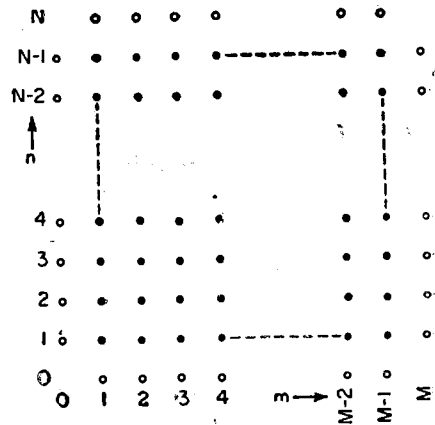


Рис. 6.4. Основная решетка для решения разностного уравнения, аналогичного дифференциальному уравнению Пуассона.

Это означает, что если продолжать подстановки достаточно долго, то в уравнении для $\psi(2,1)$ члены, содержащие значения ψ в других внутренних точках, можно сделать произвольно малыми по сравнению с соответствующими членами для граничных значений. Значит, в пределе $\psi(2,1)$ можно выразить через *только* одни граничные потенциалы, и если *все* они заданы, то значение $\psi(2,1)$ будет однозначно определено. С помощью тех же аргументов можно показать, что потенциал в каждом узле однозначно определяется, если только граничный потенциал задан вдоль всей замкнутой границы, окружающей сеть. Если часть границы находится на бесконечности, то вывод сохраняет силу; на самом деле все, что обычно требуется знать о граничных значениях ψ на бесконечности для получения однозначного значения $\psi(m, n)$, это то, что все они не бесконечны.

Разработан способ, называемый *методом релаксации*, посредством которого эта последовательность вычислений проводится четко и с быстрой сходимостью. Однако нам здесь надо только знать, что это *можно* сделать; это как раз и было сейчас доказано. Отсюда, полагая h стремящимся к нулю, можно доказать, что условия Дирихле на замкнутой границе однозначно определяют решения уравнения Лапласа. Простое обобщение того же вывода оказывается достаточным, чтобы распространить это утверждение на общее эллиптическое уравнение (6.1.17) и число измерений, большее двух.

Не намного труднее провести тот же вывод для условий Неймана. Здесь для сети задаются все разности между граничным значением и значением ψ в ближайшей внутренней точке сети. Можно показать, что если эти разности удовлетворяют простому общему ограничению, то описанный выше метод и здесь сходится и позволяет получить единственные значения для внутренних ψ с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Природу этого общего ограничения в случае условий Неймана можно выяснить на следующем примере. Допустим, что все граничные разности заданы так, что они делают решение *возрастающим* внутрь; как же найти решение, *не имеющее максимума* внутри (ведь уравнение (6.2.6) не допускает такого максимума)? Очевидно, все граничные градиенты не могут иметь *одинаковый* знак. Ограничение можно указать более точно, если вспомнить, что потенциал скорости несжимаемой жидкости подчиняется уравнению Лапласа и что в этом случае условиям Неймана на поверхности соответствует задание потока жидкости через поверхность. Если бы такой поток через замкнутую поверхность был направлен всюду внутрь, то это означало бы, что количество жидкости внутри поверхности возрастает с положительной скоростью, что для несжимаемой жидкости невозможно. Следовательно, в нашем случае надо требовать, чтобы интеграл от заданной нормальной составляющей градиента по всей граничной поверхности равнялся нулю; в рамках этого простого ограничения на границе могут быть заданы любые значения нормальной производной.

Значит, можно ожидать, что для уравнения Лапласа корректными граничными условиями могут служить условия Неймана на замкнутой границе, если только заданные граничные условия удовлетворяют некоторому интегральному соотношению на граничной поверхности. Кроме того, поскольку в граничных условиях задаются градиенты, а не значения, для получения однозначного ответа надо задать значение ψ в одной какой-либо точке.

Собственные функции. Рассмотрим особенно простой случай, чтобы показать, что еще можно сделать при помощи сеточных вычислений. Возьмем изображенную на рис. 6.5 (стр. 652) решетку с четырьмя внутренними

и восемь граничными точками. Мы приступим к построению нашего решения для любых граничных условий при помощи решений для простых граничных условий. Это можно сделать, так как наше разностное уравнение *линейно*; если $\psi(m, n)$ есть решение, когда граничные значения равны $\psi_0(0, n)$, $\psi_0(m, 0)$ и т. д., то $A\psi(m, n)$ представляет собой решение для граничных значений $A\psi_0$, а если $\psi'(m, n)$ есть решение для граничных значений ψ'_0 , то решение при граничных значениях $\psi_0 + \psi'_0$ равно $\psi(m, n) + \psi'(m, n)$.

Например, можно решить разностное уравнение для простого случая, когда $\psi_1(1, 0) = \psi_1(2, 0) = 1$, а все остальные граничные значения ψ равны нулю. Тогда, по симметрии, $\psi(1, 1) = \psi(2, 1)$ и $\psi(1, 2) = \psi(2, 2)$. Записывая разностные уравнения для двух внутренних точек, имеем

$$\begin{aligned}\psi(1, 1) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\psi(2, 1) + \frac{1}{4}\psi(1, 2), \text{ или } \frac{3}{4}\psi(1, 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\psi(1, 2); \\ \psi(1, 2) &= \frac{1}{4}\psi(1, 1) + \frac{1}{4}\psi(2, 2), \text{ или } \frac{3}{4}\psi(1, 2) = \frac{1}{4}\psi(1, 1).\end{aligned}$$

Эти уравнения можно решить и получить

$$\psi(1, 1) = \psi(2, 1) = \frac{3}{8}, \quad \psi(1, 2) = \psi(2, 2) = \frac{1}{8}. \quad (6.2.10)$$

Полученную матрицу значений обозначим через $\Psi_1(m, n)$.

Можно также найти решение для случая, когда $\psi_2(1, 0) = -\psi_2(2, 0) = 1$, а остальные граничные значения ψ равны нулю. Это даст

$$\psi(1, 1) = -\psi(2, 1) = \frac{5}{24}, \quad \psi(1, 2) = -\psi(2, 2) = \frac{1}{24}; \quad (6.2.11)$$

полученную матрицу значений обозначим через $\Psi_2(m, n)$.

Теперь нетрудно видеть, что если $\psi(1, 0) = a$, $\psi(2, 0) = b$, а все остальные граничные значения ψ равны нулю, то получится решение

$$\Psi(m, n) = \frac{a+b}{2}\Psi_1(m, n) + \frac{a-b}{2}\Psi_2(m, n).$$

Решения для других трех частей границы можно получить, повернув это решение на 90, 180 или 270°. При помощи соответствующего сложения можно получить решение для любого задания значений граничных потенциалов.

Этот метод можно распространить на области с прямоугольной границей любого размера. Мы сначала допускаем, что граничные значения вдоль одной стороны имеют особенно простой вид, а все остальные граничные значения равны нулю. Например, мы полагаем $\psi(m, 0) = \varphi(m)$ (где φ надо определить), $\psi(0, n) = \psi(m, N) = \psi(M, n) = 0$. Затем мы *разделяем* переменные в разностном уравнении, полагая $\psi(m, n) = f(n)\varphi(m)$; разностными уравнениями для f и φ будут

$$\varphi(m) = \frac{1}{2}[\varphi(m+1) + \varphi(m-1)] + C\varphi(m) \quad (6.2.12)$$

и

$$f(n) = \frac{1}{2}[f(n+1) + f(n-1)] - Cf(n),$$

где C — *константа разделения*. Разностное уравнение (6.2.6) получается при помощи умножения первого из этих уравнений на $f(n)$, второго на $\varphi(m)$, сложения результатов и деления на 2. Аналогия между этим и процессом разделения переменных в уравнении с частными производными очевидна.

Мы видим, что для простоты данного метода функции $\varphi_\nu(m)$, определяющие простые граничные условия вдоль одной стороны и нулевые условия на остальных сторонах, должны удовлетворять разностному уравнению

$$\varphi_\nu(m) = \frac{1}{2} \varphi_\nu(m-1) + \frac{1}{2} \varphi_\nu(m+1) + C_\nu \varphi_\nu(m),$$

а $\varphi_\nu(0)$ и $\varphi_\nu(M)$ должны равняться нулю. Согласно сказанному на стр. 132, возможными решениями являются

$$\varphi_\nu(m) = \sin(\pi \nu m / M), \quad C_\nu = 2 \sin^2(\pi \nu / 2M), \quad \nu = 1, 2, \dots, M. \quad (6.2.13)$$

Эти M различных функций от m обладают тем свойством, что их соответственно подобранная линейная комбинация может равняться вдоль части границы, где $n=0$, произвольно заданной системе значений граничных потенциалов, оставаясь равной нулю на остальной части границы.

Далее надо найти соответствующие функции $f_\nu(n)$ как решения уравнений

$$f_\nu(n) = \frac{1}{2} f_\nu(n-1) + \frac{1}{2} f_\nu(n+1) - 2 \sin^2(\pi \nu / 2M) f_\nu(n), \quad (6.2.14)$$

равные нулю при $n=N$ и единице при $n=0$. Общее решение для произвольных граничных значений вдоль части границы, где $n=0$, равно линейной комбинации произведений $\varphi_\nu(m) f_\nu(n)$, где $\nu = 1, 2, \dots, M$.

Функции вида (6.2.13) называются *собственными функциями*; они будут исследованы позже в этой главе в связи с дифференциальными уравнениями. С их помощью можно получить решения, удовлетворяющие любым граничным условиям на граничных поверхностях особенно простого вида.

Функции Грина. Однако мы можем также перегруппировать исследованные выше функции, чтобы подойти к решениям с другой стороны.

Решения (6.2.10) и (6.2.11) для простой решетки, изображенной на рис. 6.5, можно скомбинировать, чтобы получить специальное решение

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} 6 \\ \circ \\ (1,3) \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ \circ \\ (2,3) \end{array} & & \\ \begin{array}{c} 7 \\ \circ \\ (0,2) \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ (1,2) \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ (2,2) \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ \circ \\ (3,2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 8 \\ \circ \\ (0,1) \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ (1,1) \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ (2,1) \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ \circ \\ (3,1) \end{array} \\ & \begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ (1,0) \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ \circ \\ (2,0) \end{array} & \end{array}$$

Рис. 6.5. Решетка для простых примеров задания граничных значений.

разностного уравнения (6.2.6), удовлетворяющее простым граничным условиям: ψ в граничной точке 1 (1,0) равна единице, а во всех остальных — нулю. Решение, равное единице в граничной точке 2 (2,0) и нулю во всех остальных точках, имеет вид $G_2(m, n) = \frac{1}{2} \Psi_1(m, n) -$

$-\frac{1}{2} \Psi_2(m, n)$ и равно функции G_1 , отраженной от вертикальной оси симметрии решетки (то есть $G_2(1,1) = \frac{1}{12} = G_2(2,2)$; $G_2(2,1) = \frac{7}{24}$; $G(1,2) = \frac{1}{24}$),

а функции для других граничных точек можно получить, последовательно отражая первое решение от различных осей симметрии решетки.

Эти величины, которые можно рассматривать как функции граничной точки и внутренней точки, называются *функциями Грина* для границы. Так как $G_s(m, n)$ соответствует граничному условию $\psi_s = 1$, $\psi = 0$ в остальных граничных точках, то можно быстро построить решение для граничных условий $\psi = \psi_s$ в s -й граничной точке с помощью суммы

$$\psi(m, n) = \sum_s \psi_s G_s(m, n). \quad (6.2.16)$$

Мы умножаем функцию Грина для s -й граничной точки на граничное значение в этой точке и производим суммирование по всем граничным точкам. В гл. 7 мы рассмотрим обобщение этого приема на решения дифференциального уравнения.

Решение разностного уравнения Пуассона (6.2.7) можно найти при помощи весьма сходного приема. Мы решаем это уравнение, когда все граничные потенциалы равны нулю, $F(1,1) = 4/h^2$, а все остальные F равны 0:

$$G(1,1|1,1) = \frac{7}{6}, \quad G(1,1|1,2) = G(1,1|2,1) = \frac{1}{3}, \quad G(1,1|2,2) = \frac{1}{6}.$$

Отсюда решение, когда все граничные значения равны нулю, а функция $F(m, n)$ принимает любую фиксированную совокупность значений, равно

$$\psi(m, n) = \frac{h^2}{4} \sum_{r,s} F(r, s) G(r, s|m, n), \quad (6.2.17)$$

сумме значений F в различных внутренних узлах, каждое из которых умножено на решение ψ для этого узла. Если некоторые из граничных потенциалов отличны от нуля, то для удовлетворения этим граничным условиям достаточно сложить функции (6.2.17) и (6.2.16).

Решение $G(r, s|m, n)$ называется функцией Грина для внутренних точек (r, s) и (m, n) . Оказывается, что она симметрична относительно перестановки точек, то есть потенциал в точке (m, n) , порожденный единичным «зарядом» F в точке (r, s) , равен потенциалу в (r, s) , порожденному единичным зарядом в (m, n) . Это — выражение *принципа взаимности*, который будет рассмотрен несколько позже.

Между прочим, решение G для решетки с границей любого вида непосредственно связано со следующей чисто воображаемой задачей. Допустим, что решетка изображает улицы симметрично разбитого города. На углу r -й стрит и s -й авеню находится салун. Как-то рано утром из салуна был изгнан посетитель, который отправился наобум или по r -й стрит или по s -й авеню. На улицах довольно скользко, и каждый раз, когда человек пересекает стрит или авеню (то есть в каждой встречающейся ему узловой точке), он скользит и падает. При этом он настолько пьян, что когда вновь становится на ноги, то полностью забывает направление, по которому шел, так что его прогулка вдоль следующего квартала одинаково вероятна во всех четырех направлениях от последнего места падения. Так он продолжает ставить себе новые и новые синяки, пересекая различные стриты и авеню (некоторые из них по несколько раз), пока в конце концов не достигает граничной точки. На всех граничных перекрестках стоят полисмены, один из которых живо доставляет пьяного бродягу в ближайший участок.

Конечно, имеется много возможных путей, по которым этот человек может пройти от салуна до ареста, и мы, естественно, не можем точно предсказать, какой путь он изберет. Однако можно предсказать *математическое ожидание* того, что он упадет на углу m -й стрит и n -й авеню. Для этого нужно сложить математическое ожидание (шанс) того, что он

упадет там только один раз, математическое ожидание того, что он упадет там два раза, и т. д., или же, если эти прогулки достаточно часты, то это математическое ожидание равно осредненному по всем прогулкам числу падений в точке (m, n) . Эта возможность *как раз равна функции Грина* $G(r, s | m, n)$, которую мы подсчитали. Рассмотренный здесь пример является частным случаем задачи о случайных блужданиях, изучавшейся несколькими выдающимися математиками и интересной для исследования брауновского движения, а также движения звезд в галактике.

Эллиптическое уравнение и условия Коши. Для пополнения нашего исследования эллиптических уравнений следует выяснить, что будет, если вдоль границы $n=0$ задать условия Коши. Это означает, что для всех значений m задаются $\psi(m, 0)$ и $\psi(m, 1)$. Тогда из уравнения (6.2.6) можно найти все $\psi(m, 2)$:

$$\psi(m, 2) = 4\psi(m, 1) - \psi(m, 0) - \psi(m+1, 1) - \psi(m-1, 1)$$

и так далее последовательно для всех n . Если имеются боковые границы (скажем, при $m=0$ и $m=M$), то вдоль них нельзя задавать условий Коши, так как тогда некоторые ψ (для $m=1$ и $m=M-1$) были бы переопределенными; допускаются только условия Дирихле или Неймана.

Так как значения ψ уже заданы условиями Коши при $n=0$, то мы не можем на верхней границе, скажем при $n=N$, задавать произвольно граничное условие любого вида. Для эллиптического уравнения внутри замкнутой границы условия Коши на любой части границы дают слишком много условий.

С другой стороны, если нет верхней границы, то $\psi(m, n)$ будет, вообще говоря, беспредельно возрастать при возрастании n . Раз ψ не может иметь максимумов или минимумов, то если ψ начинает возрастать или убывать с ростом n , оно должно продолжать возрастать или убывать неограниченно при возрастании n . Любое бесконечно малое изменение условий Коши при $n=0$ послужит причиной неограниченно большого изменения ψ для очень больших значений n . Такая чувствительность к граничным условиям не имеет физического смысла.

Все приведенные выше выводы справедливы независимо от величины шага, так что они будут также верны и при стремлении h к нулю. Поэтому можно ожидать, что *никакое решение уравнения Лапласа не может иметь внутри своей области существования максимумов или минимумов; условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе дают корректную задачу; условия Коши даже на части замкнутой границы дают слишком много, а на открытой границе вызывают слишком высокую чувствительность к малым изменениям условий, чтобы быть физически удовлетворительными.* Эти заключения о граничных условиях применимы также к уравнению Пуассона (на самом деле даже к любому эллиптическому уравнению), хотя решения уравнения Пуассона могут иметь максимумы и минимумы.

Гиперболическое разностное уравнение. Для гиперболического уравнения можно начертить сетку в направлениях x, y , как для уравнения (6.2.8), или же провести решетку вдоль характеристик и сделать разностное уравнение аналогичным уравнению в нормальной форме (6.1.8), которая для волнового уравнения принимает вид $\partial^2 \psi / \partial \lambda \partial \mu = 0$:

$$\psi(x+1, y+1) + \psi(x, y) = \psi(x+1, y) + \psi(x, y+1), \quad (6.2.18)$$

где характеристиками являются линии решетки $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ (см. рис. 6.6). Здесь связаны потенциалы в углах ромбообразной фигуры;

уравнение (6.2.18) утверждает, что среднее значение потенциалов на концах горизонтальной диагонали равно среднему из значений на концах вертикальной диагонали. Условиям Коши соответствует задание значений в светлых точках на рис. 6.6, в двух нижних рядах. При этих заданных значениях можно применить уравнение (6.2.18) для подсчета потенциалов в первом ряде черных точек, затем в следующем и т. д. Если функция начинает возрастать в некоторой точке, например если ψ в a больше, чем среднее в b и d , то ψ в c станет вновь меньше (так как среднее в a и c должно равняться среднему в b и d). Следовательно, функция удерживается в определенных границах и не может беспрестанно возрастать

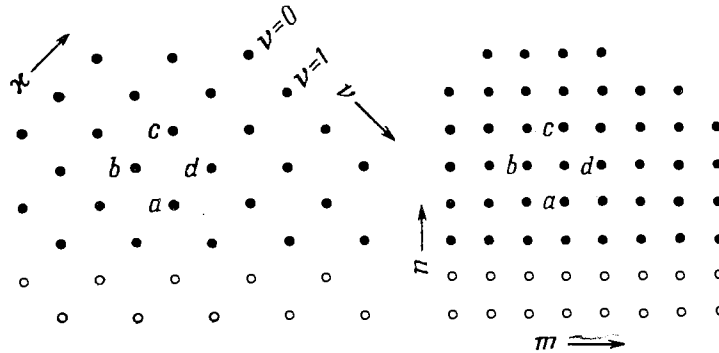


Рис. 6.6. Различные решетки для гиперболического уравнения.

Ряды $x = \frac{1}{2}(m+n) = \text{const}$ и $v = \frac{1}{2}(m-n) = \text{const}$ являются характеристиками.

на любом ограниченном участке изменения временной переменной, как это делает решение уравнения Лапласа. Значит, незначительные изменения граничных условий порождают лишь незначительные изменения функции, которые делаются незаметными при удалении от границы; другими словами, решение *устойчиво* относительно условий Коши на открытой границе.

На этом примере можно также пояснить трудности, встречающиеся, когда граница совпадает с характеристикой. Допустим, что значения заданы вдоль линий $v=0$ и $v=1$. Применяя уравнение (6.2.18), мы видим, что уравнения при $v=0$ требуют внутренней совместимости граничных значений. Система уравнений вида

$$\psi(x+1,2) - \psi(x,2) = \psi(x+1,1) - \psi(x,1)$$

не может дать однозначного решения, так как каждое уравнение содержит два неизвестных, и если граница простирается в бесконечность в обе стороны, то решение системы бесконечного числа уравнений не сходится (определитель из коэффициентов не сходится). Если граница в некоторой точке заворачивает, так что значение одного из $\psi(x,2)$ дано, то можно получить остальные $\psi(x,2)$. Но это может случиться, если граница не всюду идет по характеристике; если же она совпадает с характеристикой, единственного решения найти нельзя.

Возвратимся к (x,y) -виду (6.2.8) разностного уравнения, соответствующему второй решетке рис. 6.6. Здесь опять узлы, связанные уравнением, образуют ромбообразную фигуру, причем среднее от значений в концах горизонтальной диагонали равно среднему значений в концах вертикальной диагонали. Это постоянство формы связи не должно нас удивлять, так как волновое уравнение должно представлять некоторую взаимосвязь,

не зависящую от координат, в которых оно выражено. Для горизонтальной сети это значит, что в уравнениях не участвует значение функции в центре ромба (так было и для (x, y) -представления, но там не было так заметно, потому что при проведении сети центральные точки пропускались). Пропуск центральной точки является одним из выражений коренного различия между уравнением Лапласа и волновым уравнением. Это — основная причина того, что условия Дирихле на замкнутой границе не приводят к однозначному ответу для волнового уравнения, но дают такой ответ для уравнения Лапласа.

Чтобы сделать это еще яснее, можно упростить сеточную задачу Дирихле для замкнутой границы до наиболее простого случая, показанного на рис. 6.7, с четырьмя граничными точками и одной внутренней точкой решетки. Если

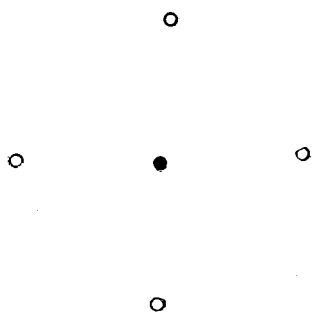


Рис. 6.7. Решетка для самой простой сеточной краевой задачи.

рассматривается уравнение Лапласа, то значения ψ в центральной точке равно среднему из значений в четырех граничных точках, и если все эти четыре значения заданы, получается единственное решение. Однако если рассматривается волновое уравнение, то это уравнение связывает значения в граничных точках и *ничего не говорит* о значении в центральной точке. Значит, если значения в четырех граничных точках даны, то они могут быть совместными с самым волновым уравнением или не совместными, но в обоих случаях о значении во внутренней точке решетки ничего не известно.

Возвращаясь к решетке для m, n в правой части рис. 6.6, мы можем удовлетворить краевым условиям, разделяя (6.2.8) на разностные уравнения по m и по n :

$$\begin{aligned}\psi(m, n) &= \varphi(m) f(n), \\ \varphi(m+1) + \varphi(m-1) + (k^2 - 2)\varphi(m) &= \Delta^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, \\ f(n+1) + f(n-1) + (k^2 - 2)f(n) &= \Delta^2 f + k^2 f = 0.\end{aligned}\quad (6.2.19)$$

Мы решаем уравнение для $\varphi(m)$ в функциях особенно простого типа [через которые можно легко выразить краевые условия, например, применяя функции (6.2.13)], а затем решаем уравнение для соответствующего множителя f ; окончательное решение будет суммой таких произведений, удовлетворяющей краевым условиям при $n=0$ и 1 . Или же можно решить задачу, когда краевые условия имеют вид единичной функции или производной для $m=M$, при остальных краевых значениях, равных нулю, что нам даст функции Грина для границы. Окончательное решение будет опять равняться сумме этих функций Грина, умноженных на граничные значения в граничных точках.

Параболическое разностное уравнение. Взяв, наконец, уравнение (6.2.9), как простейшее параболическое уравнение, мы видим, что если вдоль горизонтальной части границы $n=0$ поставлены условия Дирихле, то первое уравнение допускает единственное решение для точек решетки, где $n=1$, затем где $n=2$ и т. д. Будет ли решение устойчивым или нет, зависит от значения C . Если $\psi(m, n)$ при $m=m_0$ больше, чем $\psi(m_0+1, n)$ и $\psi(m_0-1, n)$, то $\psi(m, n+1)$ имеет меньшее значение, чем $\psi(m, n)$, так как

$$\psi(m, n+1) = \psi(m, n) + 2C \left\{ \frac{1}{2} [\psi(m-1, n) + \psi(m+1, n)] - \psi(m, n) \right\}.$$

Если C не настолько велико, чтобы $\psi(m, n+1)$ сделалось отрицательным и начались неустойчивые колебания, то неправильности решения стремятся выровняться, и при больших значениях n все ψ стремятся принять одинаковое значение (см. задачу 6.3).

Если, с другой стороны, пользоваться вторым видом уравнения для движения назад в направлении n (времени), то мы найдем, что неправильности в значениях ψ стремятся увеличиться и легкая неправильность в краевых значениях порождает в конце концов очень большую неправильность у функции для достаточно больших отрицательных n . Поэтому решение неустойчиво для любых краевых условий (оно неустойчиво для условий Дирихле и Неймана; условия Коши переопределяют решение). После перехода к пределу можно утверждать, что решения параболических уравнений дают устойчивый и единственный результат для условий Дирихле на открытой границе при движении в положительном направлении от характеристики, но неустойчивы в отрицательном направлении.

С физической точки зрения это происходит из-за того, что параболические уравнения (примером является уравнение диффузии) представляют ситуации, в которых энтропия возрастает с возрастанием времени. Поэтому неправильности поля ψ стремятся сгладиться при возрастании времени; чем резче неправильность, тем быстрее она исчезнет. Если мы хотим вести исследование в обратном направлении по времени, чтобы узнать, каким было поле, диффундирующее в конце концов в заданное распределение, минуту (или час) назад, то мы не сможем сказать, сколько тогда было резких неправильностей, которые потом практически исчезли и не проявляются заметно в заданном распределении.

Результаты исследования этого параграфа можно резюмировать в следующей таблице:

Условия	Граница	Гиперболическое уравнение	Эллиптическое уравнение	Параболическое уравнение
Дирихле или Неймана (задается функция или нормальная производная)	Открытая	Недостаточно	Недостаточно	Единственное устойчивое решение в положительном направлении, неустойчивое в отрицательном направлении
	Замкнутая	Решение не единственно	Единственное устойчивое решение (относительно условий Неймана см. стр. 650)	Решение переопределено
Коши (задаются функция и нормальная производная)	Открытая	Единственное устойчивое решение	Решение неустойчиво	Решение переопределено
	Замкнутая	Решение переопределено	Решение переопределено	Решение переопределено

Приемлемые комбинации уравнений и краевых условий указаны жирным шрифтом. Заметим еще раз, что условия Дирихле — Неймана могут быть *однородными* [$\alpha \phi(s) + \beta N(s) = 0$] или *неоднородными* [$\alpha \phi(s) + \beta N(s) = F(s)$]. Однородные условия Дирихле означают, что функция ϕ должна равняться нулю на границе; неоднородные условия Дирихле означают, что ϕ должна иметь заданные ненулевые значения на границе и т. д.

6.3. Собственные функции и их применения

Теперь мы достигли пункта, когда от обобщений надо начать переходить к частным случаям. Мы потратили первые два параграфа этой главы, чтобы показать вообще, для каких уравнений с частными производными пригодны те или иные виды краевых условий и при каких условиях можно ожидать, что, нашему заданию будет отвечать единственное решение. Сейчас мы детально изучим технику получения этого единственного решения в отдельных случаях.

Процесс подчинения достаточно общего решения краевым условиям до некоторой степени аналогичен процессу решения обыкновенного дифференциального уравнения. Ни в том, ни в другом случае метод не является прямым; мы должны выбрать общую форму решения, которая представляется подходящей для удовлетворения нашим требованиям, а затем провести подгонку деталей (конечно, если это окажется возможным!). Даже, например, для сравнительно простого процесса интегрирования функции $f(x)$ по x надо, в сущности, *угадать* вид интеграла и затем проверить правильность этой догадки посредством дифференцирования. Многие из форм, в которых мы угадываем решение дифференциальных уравнений, имеют очень общий вид, как, например, степенные ряды или интегральные представления; частное решение находится при помощи подстановки выбранной формы в дифференциальное уравнение и попытки его удовлетворить.

Общие формы, применяемые для удовлетворения краевым условиям, также выражаются либо через *ряды* функций, либо через интеграл от некоторой функции по границе. Как и для решений обыкновенных дифференциальных уравнений, мы сначала рассмотрим применение рядов; следующая глава будет посвящена использованию интегралов для удовлетворения краевым условиям. На практике приложение рядов обычно требует разделения уравнения с частными производными в приспособленных к границе координатах; прежде чем погрузиться в технические детали, мы проработаем простой пример, чтобы увидеть, как это получается.

Ряды Фурье. Пусть мы хотим решить краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

в прямоугольнике, заключенном между прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Очевидно, что для этой границы подходят прямоугольные координаты x , y , так что мы можем разделить переменные и прийти к двум обыкновенным уравнениям:

$$\psi = X(x)Y(y), \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} - k^2 Y = 0,$$

где k^2 — константа разделения. Это — эллиптическое уравнение, так что подходят условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе; см. исследование для случая решетки на стр. 650.

Допустим для начала, что наши граничные условия являются особенно простыми условиями Дирихле, а именно ϕ должна равняться нулю (однородные условия) при $x=0$, $x=a$ и $y=b$ и принимать произвольные значения $\phi_s(x)$ (неоднородные условия) при $y=0$. Решением x -уравнения, равным нулю при $x=0$ и при $x=a$, является $\sin(\pi nx/a)$, где n целое (мы положили $k=\pi n/a$), а решением y -уравнения, равным нулю при $y=b$, является $\text{sh } k(b-y)$. Другими словами, единственными значениями k , при которых решение может удовлетворять нулевым граничным условиям на трех сторонах, являются значения $k=\pi n/a$ ($n=1, 2, 3, \dots$), а при этих значениях единственными решениями, пригодными для данных условий, являются функции, указанные в предыдущем предложении.

Следовательно, наиболее общее решение уравнения $\nabla^2 \phi = 0$ в двумерном случае, удовлетворяющее однородным условиям $\phi=0$ при $x=0$, $x=a$, $y=b$, можно представить при помощи ряда

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sh} \left[\frac{\pi n}{a} (b-y) \right] \sin \frac{\pi n x}{a}. \quad (6.3.1)$$

Чтобы сделать такое категорическое утверждение, как это, надо быть уверенным в том, что в виде этого ряда можно представить *все возможные* решения, удовлетворяющие нулевым условиям вдоль трех сторон, независимо от того, какие (неоднородные) граничные условия выполняются вдоль четвертой стороны $y=0$. Для этого нам надо будет доказать, что ряд (6.3.1) может удовлетворить *любым возможным* граничным условиям при $y=0$. Так как условия Дирихле на замкнутой границе определяют единственное решение, то тогда мы сможем ручаться, что такой ряд представляет решение, соответствующее заданным граничным условиям при $y=0$. Если мы найдем также другую форму функции (замкнутую форму или интегральную форму), удовлетворяющую этим условиям, то можно будет утверждать, что эта новая форма совпадает с рядом и, обратно, что ряд может представлять эту новую форму.

Следовательно, решающий шаг в обосновании приведенного выше утверждения состоит в доказательстве того, что ряд (6.3.1) может удовлетворить всем возможным условиям Дирихле вдоль $y=0$. Конечно, выражение «всем возможным» является довольно оптимистическим по своей общности, и нам следует несколько ограничить его при помощи более точных определений.

Однако в простом случае, который мы теперь рассматриваем, ряд (6.3.1) для $y=0$ является рядом Фурье. Мы увидим позже в этой главе, что такой ряд можно подобрать для любой функции, непрерывной вместе с производной при $0 < x < a$ всюду, за исключением конечного числа точек разрыва самой функции или ее производной (и, конечно, стремящейся к нулю при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow a$). Такие функции называются *кусочно-гладкими*. Ряд Фурье пригоден для любой непрерывной части такой произвольной функции (и, конечно, непригоден, вообще говоря, в точках разрыва, если функция обладает пиками нулевой ширины, которые, к счастью, имеют малое физическое значение).

Уточняя, можно придать утверждению о том, что ряд

$$\varphi(x) = \sum B_n \sin(\pi nx/a)$$

может отвечать кусочно-гладкой функции $f(x)$ в области $0 < x < a$, следующий смысл: возможно выбрать значения B_n , при которых

$$\int_0^a [\varphi(x) - f(x)]^2 dx = 0.$$

Это требование, конечно, не затрагивает различия в бесконечных пиках нулевой ширины, так как площадь под такими пиками равна нулю. С физической точки зрения это удовлетворительно. Можно сказать, что наше требование о выборе ряда является требованием *сходимости в среднем* или требованием *наименьших квадратов*. Обоснованием нашего утверждения о подборе в смысле сходимости в среднем как ряда Фурье, так и рядов из других функций мы займемся в этом параграфе позже.

Если нам известно, что ряд *может* удовлетворить требуемым граничным условиям, то нетрудно подсчитать необходимые значения коэффициентов A_n . Напишем равенство, соответствующее граничному условию вдоль $y=0$,

$$\psi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a} \cdot \sin \frac{\pi n x}{a},$$

умножим обе части на $\sin(\pi m x/a)$ и проинтегрируем по x от 0 до a . Все интегралы в правой части, кроме одного, как легко проверить, равны нулю.

Один оставшийся, при $n=m$, равен $\frac{1}{2} a A_m \operatorname{sh}(\pi m b/a)$. Значит, коэффициенты A_m в формуле (6.3.1) можно легко подсчитать, и решением уравнения $\nabla^2 \psi = 0$, удовлетворяющим граничному условию $\psi = 0$ при $x=0$, $x=a$, $y=b$ и условию $\psi = \psi_s(x)$ при $y=0$, оказывается ряд

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} \int_0^a \psi_s(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{a} d\xi \right] \sin \left(\frac{\pi n x}{a} \right) \frac{\operatorname{sh}[(\pi n/a)(b-y)]}{\operatorname{sh}(\pi n b/a)}. \quad (6.3.2)$$

Этот ряд удовлетворяет граничным условиям и является решением уравнения Лапласа по x и y . Следовательно, он должен быть тем самым единственным решением, которое мы искали.

В предельном случае, когда $b \rightarrow \infty$, область внутри границы становится бесконечной, но согласно сказанному на стр. 643, условия Дирихле надо все-таки налагать на всей границе, чтобы получить единственный результат. Отношение гиперболических синусов приводится к простой экспоненте $\exp(-\pi n y/a)$, а в остальном ряд остается тем же. Если теперь продолжить границы в направлении x , то в конце концов мы перейдем от ряда Фурье к интегралу Фурье. Следуя § 4.8, мы найдем, что решение двумерного уравнения Лапласа в верхней полуплоскости, удовлетворяющее граничным условиям $\psi = \psi_s(x)$ при $y=0$ и $\psi=0$ на бесконечности, равно

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{ikx+ky} dk \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\xi) e^{-ik\xi} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{ikx-ky} dk \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} dk \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\xi) \cos[k(x-\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

где интегрирование по k разбивается на две части так, что зависимость от y обязательно исчезает при $y \rightarrow \infty$ (то есть мы применяем e^{+ky} для отрицательного k и e^{-ky} для положительного k). Если $y=0$, мы получаем обычный интеграл Фурье (4.8.2).

Функция Грина. Заметим, что как для конечных границ (когда применяется ряд (6.3.2)), так и для бесконечных границ (когда применяется интеграл (6.3.3)), мы можем преобразовать решение в интеграл по границе $y=0$:

$$\psi(x, y) = \int_S \psi_s(\xi) G(x, y | \xi) d\xi, \quad (6.3.4)$$

где для конечной границы интегрирование производится между концами границы 0 и a , а функция G представляет собой ряд

$$G(x, y | \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[(\pi n/a)(b-y)]}{\operatorname{sh}(\pi n b/a)} \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n \xi}{a},$$

тогда как для бесконечной границы интегрирование по границе S производится от $-\infty$ до ∞ , а функция G равна

$$G(x, y | \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos[k(x-\xi)] dk = \frac{y/\pi}{(x-\xi)^2 + y^2}.$$

Функция G называется *функцией Грина* для граничной поверхности S (в нашем случае для $y=0$).

Таким образом, мы видим, что наше решение задачи Дирихле можно выразить через интеграл по границе от функции Грина (соответствующей уравнению и виду границы), умноженной на заданную граничную функцию. Однако развитие этой идеи будет осуществлено в следующей главе; здесь нам надо сконцентрировать внимание на процессе определения функций, образующих ряд, и на том, как этот ряд составляется.

До сих пор мы рассматривали случай, когда только на части $y=0$ границы граничные значения ψ_s были отличны от нуля. Чтобы удовлетворить условиям, когда ψ отлично от нуля вдоль других частей прямоугольной границы, мы пользуемся очевидным видоизменением функций, примененных в ряде (6.3.2) или интеграле (6.3.3). Например, для удовлетворения условиям вдоль $x=0$ мы пользуемся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh} \left[\frac{\pi n}{b} (a-x) \right] \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}$$

и аналогично для $x=a$ и $y=b$; для получения окончательного решения мы складываем отдельные ряды. После этого мы можем построить и функцию Грина для ее применения в подынтегральной функции при любых граничных значениях в любой точке вдоль прямоугольной границы. См. стр. 651—653 по поводу аналогичного случая для решетки.

Собственные функции. Функции $\sin(\pi n x/a)$ для целых значений n — это простейший пример последовательности *собственных функций*, которые составляют основу метода рядов для удовлетворения граничным условиям. Мы видим, что этот метод включает в себя разделение переменных в уравнении с частными производными в таких координатах ξ_n , что границе соответствует одна или более из координатных поверхностей $\xi_s = \text{const}$. Множитель в решении, зависящий от точки граничной поверхности (в нашем примере — множитель $\sin(\pi n x/a)$ для границы $y=0$), включает константу разделения и должен удовлетворять некоторым простым граничным условиям (в примере в двух концах: $x=0$ и $x=a$), и мы находим, что лишь для некоторых значений константы разделения (в примере для

целого n) эти условия будут удовлетворяться. Другой множитель ($\text{sh}[(\pi n/a)(b-y)]$ в примере) выбирается затем так, чтобы удовлетворить условиям на другом конце области ($y=b$ в примере), и тогда полное решение представляет собой сумму этих произведений по всем допустимым значениям константы разделения.

Центральной частью метода, как нетрудно видеть, является определение вида множителя, выражающего зависимость решения от точки границы (множителя $\sin(\pi nx/a)$ в примере), и соответствующих допустимых значений константы разделения, которые удовлетворяют условиям на концах $0, a$ границы. Решения обыкновенного дифференциального уравнения, содержащие константу разделения, которые удовлетворяют простым граничным условиям в двух концах области изменения независимого переменного, называются *собственными функциями*, а значения константы разделения, допустимые при заданных условиях, называются *собственными значениями* (иногда применяются термины *характеристические функции* и *характеристические значения*). В приведенном выше примере функции $\sin(\pi nx/a)$ являются собственными функциями, а значения $(\pi n/a)^2$ (n целое) — собственными значениями. Следует ожидать, что ряд из этих собственных функций, для всех собственных значений константы разделения, может представлять любые граничные значения. Нам надо показать вообще, что такой ряд *может* представлять любую выбранную функцию в необходимой области изменения независимого переменного, а также показать, как подсчитывать коэффициенты ряда. (Нужно отметить, что можно рассматривать собственные функции для более чем одного измерения и собственные функции, являющиеся решениями интегральных, а не дифференциальных уравнений.)

Например, в общем двумерном случае мы выбираем такие координаты ξ_1, ξ_2 , чтобы граница соответствовала значениям $\xi_1 = a_1, \xi_1 = a_2, \xi_2 = b_1, \xi_2 = b_2$. Затем мы строим решение, для которого функция ψ равна 0 вдоль трех частей границы (например, при $\xi_1 = a_1, \xi_1 = a_2, \xi_2 = b_2$), а вдоль четвертой части $\xi_2 = b_1$ — некоторой произвольно выбранной функции $f(\xi_1)$. Это можно сделать, если мы сможем разделить уравнение в координатах ξ . Решения ξ_1 -уравнения, обращающиеся в нуль при $\xi_1 = a_1$ и $\xi_1 = a_2$, являются тогда *собственными функциями* задачи.

Типы краевых условий. До сих пор мы рассматривали случай условий Дирихле на замкнутой границе, но ту же технику можно применить для других типов краевых условий. Например, для условий Неймана на границе, имеющей вид прямоугольника со сторонами размеров a и b , замыкающего в первом квадранте к координатным осям, мы сначала удовлетворяем условиям вдоль стороны $y=0$, считая условия вдоль остальных трех сторон однородными, так что там *нормальная производная* равна нулю. Тогда подходящими собственными функциями являются $\cos(\pi nx/a)$, где n — целое, а ряд, имеющий нормальную производную $N_s(x)$ вдоль оси x от 0 до a и нулевую нормальную производную вдоль $y=b, x=0$ и $x=a$, записывается в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \int_0^a N_s(\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{a} d\xi \cdot \cos \frac{\pi n x}{a} \cdot \frac{\text{ch}[(\pi n/a)(b-y)]}{\text{ch}(\pi n b/a)}.$$

В этом случае, как мы указали на стр. 650, надо требовать, чтобы

$$\int_0^a N_s(\xi) d\xi = 0.$$

Если граница не замкнутая, а уравнение гиперболическое, то, возможно, надо задать условия Коши на части границы. Например, для гибкой струны длины a , закрепленной при $x=0$ и $x=a$, граничные условия являются однородными условиями Дирихле ($\psi=0$) при $x=0$ и $x=a$ для всех значений t , но начальные условия (краевые условия вдоль $t=0$) должны задавать как начальное смещение $\psi=\psi_0(x)$, так и начальную скорость $\partial\psi/\partial t=U_0(x)$ (см. стр. 639). Соответствующий ряд, дающий решение волнового уравнения $c^2\partial^2\psi/\partial x^2=\partial^2\psi/\partial t^2$, имеет вид

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot \left(A_n \cos \frac{\pi n c t}{a} + B_n \sin \frac{\pi n c t}{a} \right).$$

Собственными функциями будут $\sin(\pi n x/a)$, а собственными значениями — числа $\pi n/a$. Значения коэффициентов A_n , B_n определяются по ψ_0 , U_0 способом, подобным тому, который был применен на стр. 660.

Иногда граничные условия, определяющие собственные функции, состоят не в задании нулевого значения или нулевой производной на двух концах интервала. Может быть поставлено общее однородное условие, состоящее в том, что отношение значения к производной равно постоянной, не зависящей от значения константы разделения; например,

$$\alpha \partial\psi/\partial x = \beta\psi \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=a.$$

Если $\alpha=0$, оно приводится к однородному условию Дирихле, а если $\beta=0$ — к однородному условию Неймана. Заметим, что граничные условия для собственных функций всегда *однородны* (см. стр. 633), если граничная точка является обыкновенной.

Пример граничного условия другого типа мы имеем в случае решения уравнения Лапласа внутри круга радиуса a при условиях Дирихле на окружности. Соответствующими координатами являются, конечно, полярные координаты r , φ , а уравнение Лапласа и уравнения, получающиеся после разделения переменных, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} &= 0, \quad \psi = R(r) \Phi(\varphi), \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi &= 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} R = 0. \end{aligned}$$

Решением φ -уравнения будет $a \cos m\varphi + b \sin m\varphi$ с произвольными значениями a , b и m . Если мы ищем имеющее физический смысл решение внутри окружности $r=a$, то оно должно быть в этой области непрерывным и конечным. Угол φ пробегает непрерывно значения от 0 до 2π , возвращаясь к 0, когда радиус-вектор делает полный оборот. Значит, $\Phi(2\pi)$ должно равняться $\Phi(0)$, и вообще $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$. Чтобы это было возможно, константа разделения m *должна быть целой*, и потому собственными функциями по φ являются $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$ с целым m . В этом случае нет задания значений функции на концах $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ области изменения φ . Условие было просто условием непрерывности, и ему соответствует требование, чтобы Φ была *периодична* по φ с периодом 2π . В последующих главах нам будет часто встречаться требование периодичности как граничное условие.

Интересующая нас область изменения r формально ограничена двумя точками, $r=0$ и $r=a$, хотя физическая граница имеется только при $r=a$. Мы могли бы начать беспокоиться о том, какое граничное условие применить при $r=0$, где нет физической границы, а имеется лишь точка концентрации системы координат, но следует вспомнить, что точке концентрации соответствует особая точка для дифференциального уравне-

ния, и простого требования, чтобы ψ была там конечной, или непрерывной, или аналитической, достаточно для ограничения нашего выбора функции. Общее решение уравнения для R равно

$$R = \begin{cases} a_0 + b_0 \ln r & \text{при } m = 0, \\ a_m r^m + b_m / r^m & \text{при } m > 0; \end{cases}$$

чтобы R было конечным и непрерывным внутри границы, второй член надо опустить. (Заметим мимоходом, что если бы окружность $r = a$ была внутренней границей, а от функции требовалось бы, чтобы она была ограниченной на бесконечности, то надо было бы опустить первый член при $m > 0$ и член с $\ln r$ при $m = 0$.)

Решение уравнения Лапласа внутри окружности $r = a$, равное $\psi = \psi(\varphi)$ вдоль границы, выражается, таким образом, рядом

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(\alpha) d\alpha, \quad B_0 = 0,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(\alpha) \sin n\alpha d\alpha.$$

В других случаях граница может простираться от одной точки концентрации до другой; тогда двумя граничными точками будут две смежные особые точки дифференциального уравнения для собственных функций, а граничные условия могут просто заключаться в том, что решение должно оставаться конечным в обеих особых точках. Трехмерное уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0$$

подстановкой $\psi = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ разделяется на уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0;$$

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] \Theta = 0; \quad z = \cos \theta;$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0.$$

Если краевая задача решается в шаре $r \leq a$, то последние два уравнения служат для нахождения собственных функций, причем граничные условия непрерывности и конечности служат для определения допустимых значений n и m . Так как азимутальный угол φ непрерывно меняется от 0 до 2π , то, как и выше в случае круговой границы, мы заключаем, что m должно быть целым, а собственными функциями будут $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$. Решениями уравнения для Θ являются функции Лежандра (см. стр. 514). В гл. 5 мы видели, что решения, остающиеся конечными в обеих особых точках $z = 1$ и $z = -1$, могут иметься лишь при целом n . Требование конечности множителя R в особой точке $r = 0$ также определяет его вид. Поэтому реше-

ние должно выражаться в виде ряда

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) \sin^m \theta \cdot T_{n-m}^m(\cos \theta) \left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

где T представляют собой полиномы Гегенбауэра, определенные формулами (5.2.53) и (5.3.36). Функции $\sin^m \theta \cdot T_{n-m}^m(\cos \theta)$ иногда называются *присоединенными функциями Лежандра*.

Граничные условия могут быть условиями Дирихле на сфере $r=a$. Тогда они выражаются равенством $\psi = \psi_S(\theta, \varphi)$ при $r=a$, где ψ_S представляет собой кусочно-гладкую функцию от θ и φ . Позже мы покажем, что интеграл

$$\int_0^{\pi} \sin^{2m+1} \theta \cdot T_{n-m}^m(\cos \theta) T_{k-m}^m(\cos \theta) d\theta$$

при k , отличном от n , равен нулю, и подсчитаем значение интеграла при $k=n$. Сейчас нам достаточно знать, что если умножить обе части ряда для ψ на

$$\cos l\varphi \cdot \sin^{l+1} \theta \cdot T_{k-l}^l(\cos \theta) d\varphi d\theta$$

и проинтегрировать по поверхности сферы $r=a$, то все члены ряда исчезнут, кроме одного, для которого $m=l$ и $n=k$, а этот член можно записать в виде $A_{lk} \Lambda_{lk}$, где Λ_{lk} — известная постоянная. Этим путем можно показать, что коэффициенты ряда равны

$$A_{mn} = \frac{1}{\Lambda_{mn}} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi \int_0^{\pi} \psi_S(\theta, \varphi) \sin^{m+1} \theta \cdot T_{n-m}^m(\cos \theta) d\theta,$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\Lambda_{mn}} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi d\varphi \int_0^{\pi} \psi_S(\theta, \varphi) \sin^{m+1} \theta \cdot T_{n-m}^m(\cos \theta) d\theta,$$

чем коэффициенты ряда окончательно определяются через граничные значения $\psi_S(\theta, \varphi)$.

В этих примерах мы указали общие свойства некоторых собственных функций и их отдельные применения. Эти функции могут быть решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, появляющихся в результате разделения одного из полученных выше уравнений с частными производными, соответствующими частным значениям константы разделения (собственным значениям). Эти собственные значения определяются тогда из условия, чтобы собственные функции удовлетворяли некоторому виду граничных условий в двух концах данной области значений независимого переменного. Если эти концевые точки являются особыми для дифференциального уравнения, то граничные условия могут состоять просто в требовании, чтобы решение оставалось там конечным. Если концевые точки являются обыкновенными, то условия могут быть однородными и заключаться в требовании, чтобы отношение между функцией и ее производной равнялось некоторой постоянной, не зависящей от константы разделения, или чтобы решение было периодическим с некоторым постоянным периодом и т. д.

Нужно выяснить, как определять собственные значения и собственные функции из граничных условий, но надо также, и это еще более важно, показать, что из последовательности так определенных собственных функций можно образовать ряд, который может изображать любую

кусочно-гладкую функцию между граничными точками. Оставшаяся часть этого параграфа будет посвящена исследованию этого общего вопроса с частыми паузами для иллюстрации понятий на примерах. Свойства собственных функций как решений интегральных уравнений будут изучены в гл. 8.

Абстрактное векторное пространство. Собственные функции, с которыми мы пока познакомились на отдельных примерах, скажем члены $\sin(\pi nx/a)$ ряда Фурье, имеют некоторые свойства, аналогичные свойствам компонент векторов, рассмотренных в § 1.6 и 2.6. Компоненты вектора F_k в n -мерном пространстве можно записать в виде F_{km} (то есть если a_m представляет собой единичный вектор в направлении оси x_m , причем $a_1, \dots, a_n$ попарно ортогональны, то $F_{km} = F_k \cdot a_m$). При этом скалярное произведение вектора F_k на другой вектор F_l имеет вид

$$F_k \cdot F_l = \sum_{m=1}^n F_{km} F_{lm}$$

и равно нулю, если F_k и F_l взаимно ортогональны (перпендикулярны один другому). В частности, длина вектора F_k равна квадратному корню из скалярного произведения этого вектора на себя:

$$F_k = \left(\sum_{m=1}^n F_{km}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{F_k \cdot F_k}.$$

Функция $\sin(\pi mx/a)$ зависит от целого m и непрерывного переменного x . Ее можно рассматривать как координатное представление некоторого вектора S_m в абстрактном векторном пространстве бесконечного числа измерений. Скалярное произведение двух таких векторов S_m и S_n можно определить при помощи интеграла

$$S_m \cdot S_n = \int_0^a \sin \frac{\pi mx}{a} \cdot \sin \frac{\pi nx}{a} dx, \quad (6.3.5)$$

который является типичным предельным видом обычной суммы произведений компонент. Получается так, как будто каждому значению x из интервала $(0 < x < a)$ соответствуют свое направление и свой единичный вектор $e(x)$ в функциональном пространстве, причем вектор e для любого x ортогонален вектору e для любого другого x , а величина $\sin(\pi nx/a)$ для данного x является как бы компонентой вектора S_n в направлении, определяемом $e(x)$.

Отсюда длина S_n равна квадратному корню из скалярного произведения S_n на себя:

$$S_n = \left[\int_0^a \sin^2 \frac{\pi nx}{a} dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{a}{2}}. \quad (6.3.6)$$

Собственная функция $\sin(\pi nx/a)$ определяет, таким образом, собственный вектор S_n . В силу ортогональности собственных функций каждый собственный вектор ортогонален любому другому, так как скалярное произведение $(S_m \cdot S_n)$, определенное формулой (6.3.5), равно нулю при $m \neq n$. Если разделить каждый вектор S_n на $\sqrt{a/2}$, мы получаем совокупность попарно ортогональных единичных векторов

$$e_n = \sqrt{2/a} S_n,$$

которые определяют систему *нормальных координат* в функциональном пространстве, столь же полезных, как и исходные координаты и единичные векторы $e(x)$.

В частности, единичный вектор $e(x)$ можно представить посредством новых единичных векторов в виде

$$e(x) = \sum_n e_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a} = \frac{2}{a} \sum_n S_n \sin \frac{\pi n x}{a}, \quad (6.3.7)$$

а *нормированные* собственные функции $\sqrt{2/a} \sin(\pi n x/a)$ аналогичны направляющим косинусам, определяющим одну систему осей через другую [см. (1.3.1)].

Довольно трудно поверить в то, что пространство, характеризуемое несчетным множеством единичных векторов $e(x)$, можно полностью представить при помощи счетного множества собственных векторов e_n . И в действительности это, конечно, не так, потому что произвольно выбранный вектор в пространстве $e(x)$ изображается «функцией» от x , имеющей бесконечное число разрывов. Мы же выбрали из несчетномерного пространства подпространство, состоящее из всех функций, непрерывных вместе с производной всюду, кроме конечного числа точек (то есть *кусочно-гладких функций*). Эти функции, имеющие существенно специальный вид по сравнению со всеми возможными бесконечно-разрывными функциями, можно представить посредством счетного множества собственных векторов e_n . Это ограничение надо иметь в виду в наших дальнейших исследованиях.

При указанном ограничении мы уже можем выразить произвольный вектор F в абстрактном векторном пространстве через его компоненты вдоль нормальных осей:

$$F = \sum_n F_n e_n.$$

Тот же вектор можно выразить и через исходные единичные векторы $e(x)$ с компонентами $F(x)$, связанными с F_n соотношениями

$$F_n = F \cdot e_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a F(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx, \quad (6.3.8)$$

$$F(x) = F \cdot e(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{\pi n x}{a}.$$

Получились как раз формулы, определяющие разложение функции $F(x)$ в ряд Фурье.

Направления, даваемые собственными векторами S_n (или e_n), как-то определяются дифференциальным уравнением

$$d^2\psi/dx^2 = -k^2\psi$$

для синуса и однородными граничными условиями $\psi = 0$ при $x = 0$ и $x = a$. Мы можем сопоставить этому дифференциальному уравнению и этим граничным условиям *операторное уравнение* (см. § 2.6),

$$\mathcal{A} \cdot S = -k^2 S$$

с соответствующими граничными условиями, служащее для выделения *нормальных осей* для оператора $\mathcal{A}$ и собственных значений для постоянной k .

Другое дифференциальное уравнение и (или) другие граничные условия определяют другие нормальные оси, соответствующие новым собственным векторам E_n , определенным новыми собственными функциями $\psi_n(x)$ (которые могут быть комплексными). Эти векторы также ортогональны, так что (ср. стр. 65)

$$E_n^* \cdot E_m = \int \bar{\psi}_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ E_n^2 & \text{при } n = m, \end{cases} \quad (6.3.9)$$

где E_n представляет собой длину вектора E_n . Любой вектор F вновь можно выразить через эти собственные векторы, и соотношение между компонентами F по новым нормальным осям и его компонентами $F(x)$ по направлениям $e(x)$ имеет вид

$$F(x) = F^* \cdot e(x) = \sum_n \frac{\bar{F}_n}{E_n} \psi_n(x), \quad \bar{F}_n = \frac{E_n^*}{E_n} \cdot F = \frac{1}{E_n} \int F(x) \bar{\psi}_n(x) dx, \quad (6.3.10)$$

что дает формулы, посредством которых любую функцию $F(x)$ можно разложить по собственным функциям $\psi_n(x)$.

Наконец, можно подсчитать скалярное произведение собственного вектора, соответствующего $\psi_n(x)$, и собственного вектора, соответствующего $\sin(\pi nx/a)$ [это можно сделать, если функциональные пространства для обоих векторов тождественны, то есть если оба множества собственных функций определены на одном и том же отрезке $(0, a)$]. Это скалярное произведение равно

$$E_m^* \cdot e_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \bar{\psi}_m(x) \sin \frac{\pi nx}{a} dx.$$

Еще одно свойство этих собственных векторов будет полезно позже. Так как $e(x)$ ортогонален $e(x')$ для $x' \neq x$, то при помощи формулы, аналогичной (6.3.7), получаем

$$e^*(x) \cdot e(x') = \sum_n \frac{1}{E_n^2} \bar{\psi}_n(x) \psi_n(x') = \delta(x - x'). \quad (6.3.11)$$

Эта величина равна нулю при $x' \neq x$, а при $x = x'$ имеет такое значение, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx = 1.$$

Другими словами, это дельта-функция Дирака, определенная на стр. 122. Естественно, что остаются вопросы, которыми мы займемся потом, связанные со сходимостью этих разложений в ряды.

Однако мы все еще не приступили к овладению деталями. Векторная аналогия является плодотворной идеей, полезной в общих понятиях, но она очень абстрактна. Чтобы вполне понять все ее значение, надо возвратиться к нашим дифференциальным уравнениям и граничным условиям.

Задача Штурма—Лиувилля. Обыкновенное дифференциальное уравнение, получающееся при разделении из уравнения с частными производными $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$, можно [см. уравнение (5.1.28)] записать в виде

$$\frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{d\psi}{dz} \right] + [q(z) + \lambda r(z)] \psi = 0. \quad (6.3.12)$$

Это уравнение называется *уравнением Лиувилля*. Параметр λ представляет собой константу разделения (в некоторых случаях появляется более одной константы разделения; мы на время отложим рассмотрение этих случаев). Каждая из функций p, q, r характеризует координаты, примененные при разделении, и для исследованных в § 5.1 разделяющих координат p и r являются простыми алгебраическими функциями от z , имеющими конечное число нулей и полюсов. Функция q , особенно для уравнения Шредингера, более сложна, но и тогда q не имеет особенностей *внутри* области изменения z (хотя может иметь особенность на одном или обоих концах). Точки, в которых $p(z)$ равна нулю, являются особыми точками уравнения, и обычно область изменения z простирается от одной из таких точек до другой; во всяком случае, особые точки могут находиться в начале или в конце этой области, но никак не в середине. Другими словами, функция $p(z)$ нигде в области изменения z не меняет знака, и потому ее можно всегда считать положительной. Оказывается также, что и r не меняет знака (в интересных случаях), так что и r можно считать всегда положительной.

Задача Штурма — Лиувилля состоит, в основном, в выяснении зависимости общего поведения ϕ от параметра λ и зависимости собственных значений λ от однородных граничных условий, наложенных на ϕ .

В некоторых наших рассмотрениях мы будем сравнивать решения при различных значениях константы разделения λ ; для этого решение при $\lambda = \lambda_n$ обозначим через ϕ_n . Для такого сравнения очень полезно умножить уравнение для ϕ_1 на ϕ_2 , уравнение для ϕ_2 на ϕ_1 и вычесть одно из другого:

$$\phi_2 \frac{d}{dz} \left[p \frac{d\phi_1}{dz} \right] + \phi_2 [q + r\lambda_1] \phi_1 - \phi_1 \frac{d}{dz} \left[p \frac{d\phi_2}{dz} \right] - \phi_1 [q + r\lambda_2] \phi_2 = 0,$$

или

$$\frac{d}{dz} \left[\phi_2 p \frac{d\phi_1}{dz} - \phi_1 p \frac{d\phi_2}{dz} \right] = (\lambda_2 - \lambda_1) r \phi_1 \phi_2. \quad (6.3.13)$$

Столь простое соотношение для сравнения можно получить потому, что уравнение Лиувилля *самосопряженное*. В случае уравнения для ϕ_1 более общего типа

$$\mathcal{L}_z(\phi) = f(z) \frac{d^2\phi}{dz^2} + g(z) \frac{d\phi}{dz} + [h(z) + \lambda j(z)] \phi = 0$$

надо было бы для ϕ_2 пользоваться сопряженным уравнением

$$\tilde{\mathcal{L}}_z(\phi) = \frac{d^2}{dz^2} [f\phi] - \frac{d}{dz} [g\phi] + [h + \lambda j] \phi = 0,$$

чтобы выразить разность в виде суммы полной производной и произведения $\lambda_1 - \lambda_2$ на функцию (см. стр. 499). Уравнением, сопряженным к уравнению Лиувилля, является оно само (проверьте!).

Теперь проинтегрируем соотношение (6.3.13) по z от левой граничной точки (которую мы обозначим через a) до некоторой произвольной точки z , лежащей левее правой граничной точки. Получим

$$p \left(\phi_2 \frac{d\phi_1}{dz} - \phi_1 \frac{d\phi_2}{dz} \right) - \left[p \left(\phi_2 \frac{d\phi_1}{dz} - \phi_1 \frac{d\phi_2}{dz} \right) \right]_{z=a} = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^z r \phi_1 \phi_2 dz,$$

где величина в круглых скобках была бы определителем Вронского для ϕ_1 и ϕ_2 , если бы λ_1 было равно λ_2 (но нам нужно именно $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Если a является особой точкой дифференциального уравнения, то r равно нулю и величина в квадратных скобках обращается в нуль при условии, что ϕ_1 и ϕ_2 конечны в особой точке. Если точка регулярная,

а граничное условие однородно и имеет вид $\alpha d\psi/dz - \beta\psi = 0$ при $z = a$ (где α и β не зависят от λ , см. стр. 663), то

$$\psi_1 \frac{d\psi_2}{dz} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{\beta}{\alpha} (\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1) = 0$$

при $z = a$ и опять-таки величина в квадратных скобках равна нулю. Отсюда почти для любых обычных граничных условий при $z = a$ имеем

$$p \left(\psi_2 \frac{d\psi_1}{dz} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dz} \right) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^z r \psi_1 \psi_2 dz. \quad (6.3.14)$$

Для некоторой области значений λ решение ψ , удовлетворяющее граничному условию при $z = a$, *колеблется*, то есть возрастает до максимума при z , большем a , затем уменьшается по величине, проходя через нуль и достигая отрицательного максимума и т. д. Допустим, что мы выбрали λ_1 в области значений λ , для которых ψ колеблется, а ζ — наименьшее значение z (значение, ближайшее к $z = a$), для которого $\psi_1 = 0$. Тогда формула (6.3.14) приобретает вид

$$\left(p \psi_2 \frac{d\psi_1}{dz} \right)_{z=\zeta} = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^{\zeta} r \psi_1 \psi_2 dz; \quad \psi_1(\zeta) = 0. \quad (6.3.15)$$

Так как ζ представляет собой наименьший нуль функции ψ_1 , то ψ_1 не меняет знака между $z = a$ и $z = \zeta$, а потому ψ_1 можно считать положительной при $a < z < \zeta$. Мы уже сказали на стр. 669, что для уравнений, которыми мы занимаемся, как p , так и r положительны во всем интервале $a < z < b$, где b — правая граничная точка. Можно также утверждать, что производная $d\psi_1/dz$ при $z = \zeta$ отрицательна, так как в этой точке ψ_1 переходит через нуль от положительных значений к отрицательным.

Выберем λ_2 большим λ_1 , чтобы величина $\lambda_2 - \lambda_1$ стала положительной. Что теперь говорит формула (6.3.15) о поведении ψ_2 (в предположении, что ψ_2 удовлетворяет тем же краевым условиям при $z = a$ и соответствует λ_2)? Обращается ψ_2 в нуль при $a < z < \zeta$ или нет?

Допустим, что ψ_2 не обращается в нуль при $a < z < \zeta$. В этом случае ψ_2 можно считать также положительной во всем этом интервале и даже при $z = \zeta$. Тогда величина в левой части равенства (6.3.15) будет отрицательной (p положительна, $d\psi_1/dz$ отрицательна, ψ_2 положительна при $z = \zeta$), тогда как величина в правой части — положительной ($\lambda_2 - \lambda_1$ положительна, ψ_1 , ψ_2 и r положительны). Это противоречие показывает, что ψ_2 *должна* пройти через нуль где-нибудь в интервале $a < z < \zeta$. Повторение тех же рассуждений на участке z от первого нуля ψ_1 до второго и т. д. показывает, что расстояние между последовательными нулями функции ψ_2 меньше расстояния между последовательными нулями функции ψ_1 , если $\lambda_2 > \lambda_1$.

Другими словами, *чем больше значение λ , тем ближе друг к другу лежат нули* функций ψ (в предположении, что p и r всюду положительны на интервале $a < z < b$). Или, наоборот, если значение λ уменьшается, то расстояние между последовательными нулями функций ψ *возрастает*.

Для достаточно низкого значения λ (т. е. малого в алгебраическом смысле; оно может быть отрицательным) внутри интервала $a < z < b$ не будет нулевых значений ψ . Для некоторого значения $\lambda = \lambda_0$ функция ψ будет иметь нуль в другой граничной точке $z = b$ и ни одного нуля между a и b ; для $\lambda < \lambda_0$ при $a < z < b$ нулей не будет. Если граничное условие при $z = b$ имеет вид $\psi = 0$, то λ_0 представляет собой собственное значение λ , причем *нет собственных значений, меньших λ_0* . Подобным образом при помощи

формулы (6.3.14) можно показать, что независимо от того, каково граничное условие, имеется некоторое наименьшее собственное значение λ , которое можно обозначить через λ_0 . Все другие собственные значения λ больше λ_0 . Нетрудно видеть, что собственная функция ϕ_0 соответствующая λ_0 , имеет наименьшее возможное число нулей между граничными точками a и b ; на самом же деле в большинстве случаев ϕ_0 вообще не имеет нулей между a и b (хотя она может равняться нулю в a и (или) в b , если этого требуют граничные условия).

Часто бывает полезно преобразовать функции q и r в уравнении Лиувилля (6.3.12) так, чтобы λ_0 равнялось нулю. Это можно сделать, так как в выражении $q(z) + \lambda r(z)$ всегда можно $\lambda_0 r(z)$ добавить к $q(z)$ и вычесть из $\lambda r(z)$, что даст новое q , не зависящее от λ , и новое λ , равное старому λ минус λ_0 . Естественно, что наименьшее собственное значение для нового уравнения должно равняться нулю, и потому все другие собственные значения положительны.

Если теперь увеличивать значение λ от λ_0 , то соответствующая функция ϕ , удовлетворяющая граничным условиям при $z=a$, не будет удовлетворять им при $z=b$. Однако при дальнейшем возрастании λ мы в конце концов найдем следующее собственное значение λ_1 , соответствующее собственной функции ϕ_1 , которая имеет на один нуль больше, чем ϕ_0 (в большинстве случаев это означает один нуль, так как функция ϕ_0 обычно не имеет нулей). Когда λ возрастает дальше, расстояние между узлами (другое наименование нулей ϕ) становится меньше, пока при следующем собственном значении λ_2 внутри интервала (a, b) не станет на один узел больше. Это показано графически на рис. 6.8. Таким образом, можно построить последовательность собственных функций $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$, каждая из которых удовлетворяет заданным однородным граничным условиям в a и b , причем так упорядоченную, что соответствующие собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ образуют монотонно возрастающую последовательность, так что $\lambda_{n+1} > \lambda_n$. Если это сделано, то наше предыдущее исследование показывает, что числа узлов функций ϕ_n между a и b также образуют непрерывно возрастающую последовательность, так что ϕ_{n+1} имеет в интервале a, b на один узел больше, чем ϕ_n . При этом мы молчаливо предположили, что все допустимые значения λ вещественны, так что их можно непосредственно упорядочить. То, что все собственные значения для уравнения (6.3.12) вещественны, будет доказано на стр. 676.

Быть может, графическое представление сделает эти выводы более понятными. На рис. 6.8 показан типичный случай: двумя граничными точками служат $x=a$ и $x=b$, а собственная функция ϕ должна равняться нулю в обеих этих точках. Кривые для p, r и q показаны на верхнем графике; как p , так и r положительны в интервале $a < x < b$, но q этому условию не удовлетворяет. На среднем графике показаны кривые $\lambda r + q$ для последовательности значений λ , причем наименьшему значению

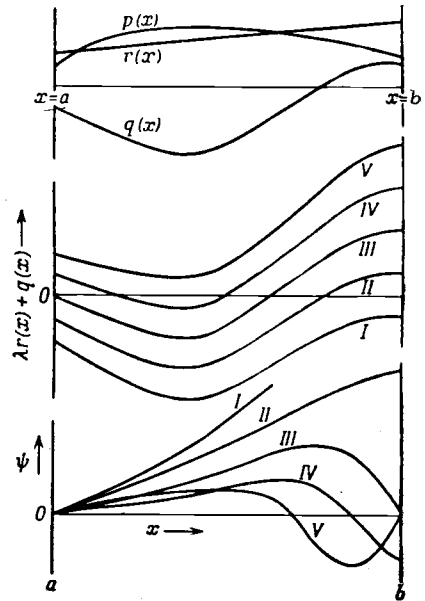


Рис. 6.8. Решения ϕ уравнения Лиувилля для различных значений константы разделения λ .

Решения III и V удовлетворяют граничным условиям $\phi=0$ при $x=a$ и b .

соответствует нижняя кривая и т. д. На нижнем графике изображены решения уравнения Лиувилля, равные нулю при $x=a$, для тех же значений λ , что и средняя система кривых.

Отметим несколько интересных моментов, относящихся к связи между ψ и соответствующими линиями $\lambda r + q$. Если $\lambda r + q$ отрицательно, то ψ поворачивает от прямой $\psi=0$. Это свойство возрастания производной с возрастанием x , если ψ положительно, и убывания, если ψ отрицательно, характеризует любую комбинацию экспонент e^{ax} , e^{-ax} и будет называться *экспоненциальным поведением*. Во-вторых, если $\lambda r + q$ положительно, то ψ искривляется к оси, то есть если ψ положительно, то производная убывает с ростом x , и наоборот. Это свойство характеризует тригонометрические функции и будет называться *синусоидальным поведением*.

Этот характер поведения функции ψ можно обнаружить, интегрируя уравнение Лиувилля один раз:

$$\left[p \frac{d\psi}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} (\lambda r + q) \psi dx, \quad x_2 > x_1, \quad p > 0.$$

Если $\lambda r + q$ отрицательно при $x_1 < x < x_2$, а ψ положительно в этом интервале, то значение $p d\psi/dx$ в точке x_2 больше, чем в точке x_1 , и т. д.

В случае, приведенном на рис. 6.8 под номером I, значение λ таково, что $\lambda r + q$ всюду отрицательно; соответствующая функция ψ , обладая экспоненциальным поведением, не имеет возможности вновь «повернуть обратно» и прийти к нулю при $x=b$. В случае II $\lambda r + q$ положительно на коротком участке изменения x , достаточном, чтобы несколько отогнуть ψ назад, но еще недостаточном, чтобы довести ее до нуля. В случае III мы достигли как раз такого значения λ (собственного значения λ_0), для которого участок положительности $\lambda r + q$ достаточен, чтобы завернуть ψ обратно к нулю как раз при $x=b$. В случае IV значение λ еще больше и колебание ψ более заметно. Появился один узел, но он еще не настолько приблизился к $x=a$, чтобы до b влезла другая полуцикл колебания. Наконец, в случае V λ достигает значения, для которого ψ проходит через нуль и вновь направляется обратно так, чтобы обратиться в нуль как раз при $x=b$.

Продолжение этого рассуждения очевидно; ясно также, что те же рассуждения можно провести при других граничных условиях. Далее, нетрудно показать, что разность $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ не может быть бесконечно малой, если расстояние $b-a$ конечно, даже в пределе для больших n . Для этого, применяя формулу (6.3.14) вновь, мы полагаем пределы интегрирования равными a и b . Положим, далее, λ_1 равным λ_n — собственному значению, а ψ_1 — равным соответствующей собственной функции ψ_n (при граничных условиях, например, $\psi=0$). Допустим, что λ_2 взято между λ_n и λ_{n+1} , так что $\psi_2=0$ при $x=a$, но $d\psi_2/dx \neq 0$ при $x=b$. Рассмотрение ψ -кривых, приведенных на рис. 6.8, показывает, что если между a и b имеется четное число узлов ψ_n , то $d\psi_n/dx$ при $x=b$ отрицательна и функция ψ_2 (определенная в предыдущем предложении) также отрицательна при $x=b$; если же число узлов ψ_n нечетно, то как $d\psi_n/dx$, так и ψ_2 положительны при $x=b$. Отсюда следует, что в равенстве

$$(\lambda_2 - \lambda_n) \int_a^b \psi_n(x) \psi_2(x) r(x) dx = \psi_2(b) \psi'_n(b) p(b)$$

величина в правой части обязательно положительна и не бесконечно мала, как бы велико ни было n .

Так как λ_2 , по определению, больше λ_n (но меньше λ_{n+1}), то интеграл обязательно положителен. Если $b - a$ не бесконечно, то интеграл не может быть бесконечным, так как обе функции ϕ (и r) всюду конечны. Следовательно, разность $\lambda_2 - \lambda_n$ может быть бесконечно малой, только если $b - a$ бесконечно. Так как $\lambda_{n+1} > \lambda_2$, то мы получаем полезный результат, заключающийся в том, что разность $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ не может быть бесконечно малой, как бы велико ни было n , если только $b - a$ не бесконечно. Значит, последовательность значений $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots$ не может иметь ни предельной точки, ни верхней границы, а должна продолжаться до $+\infty$. Этот результат будет полезен в нашем последующем анализе. Таким образом, непрерывное распределение собственных значений может получиться, только если $b - a$ бесконечно.

Выводы о том, что имеется наименьшее собственное значение λ_0 и что упорядочение собственных функций по возрастанию собственных значений одновременно упорядочивает их по возрастанию числа узлов в интервале (a, b) , являются полезными результатами в изучении задачи Штурма — Лиувилля. Они основаны на нашем предположении положительности r всюду в интервале $a < z < b$, а также положительности p всюду в этом интервале (последнее равносильно утверждению, что *внутри* интервала (a, b) нет особых точек дифференциального уравнения). Эти предположения выполняются для всех уравнений, к которым мы пришли при разделении переменных в § 5.1. Результаты получены при помощи теоремы, утверждающей, что чем больше значение константы разделения λ , тем меньше расстояния между узлами соответствующего решения $\phi(z)$ (эта теорема называется *первой теоремой Штурма о сравнении*).

Хотя имеется наименьшее собственное значение λ_0 , но, как мы уже видели, *наибольшего собственного значения нет*, и для каждого собственного значения λ_n с собственной функцией ϕ_n всегда имеется ближайшее большее собственное значение $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ с собственной функцией ϕ_{n+1} , имеющей в интервале (a, b) на один узел больше, чем ϕ_n . Таким образом, последовательность собственных значений бесконечна и простирается от наименьшего собственного значения λ_0 до бесконечности.

Как пример этого поведения можно рассмотреть случай уравнения $d^2\phi/dz^2 + \lambda\phi = 0$ с граничным условием Неймана $d\phi/dz = 0$ при $z = 0$ и более сложным однородным условием $d\phi/dz = \phi/a$ при $z = a$. Здесь ни одна из концовых точек не является особой точкой уравнения.

Если λ отрицательно, то решение, имеющее при $z = 0$ нулевую производную, равно $\phi = \text{ch } kz$, где $\lambda = -k^2$. Значение k , для которого ϕ удовлетворяет условию при $z = a$, получается из решения трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{w} \text{cth } w = 1, \quad w = ka.$$

Аналогичная функция была исследована в § 4.4 (см. рис. 4.19). Можно легко показать, что для w имеется лишь один вещественный корень; все другие корни мнимые, если a вещественно и положительно. Единственное вещественное решение k_0 приближенно равно $k_0 \simeq 1,200/a$. Отсюда единственное отрицательное значение λ (которое должно быть наименьшим собственным значением) приближенно равно

$$\lambda = \lambda_0 = -k_0^2 \simeq -1,440/a^2$$

(с четырьмя значащими цифрами), а соответствующая собственная функция равна

$$\phi_0(z) \simeq \text{ch}(1,200 z/a)$$

и в интервале $0, a$ не имеет узлов.

Все другие собственные значения должны быть положительны, поэтому можно взять $\psi = \cos kz$; $\lambda = k^2$. Эти косинусы удовлетворяют условию Неймана при $z=0$; чтобы удовлетворить условиям при $z=a$, надо выбрать k так, что

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_a = -k \sin ka = \frac{\psi}{a} = \frac{\cos ka}{a}, \quad \text{или } \operatorname{ctg} \omega = -\omega, \quad \omega = ka.$$

Это уравнение имеет бесконечную последовательность решений

$$\begin{aligned} k_1 &\simeq 2,798/a = (\pi - 0,344)/a, \\ k_2 &\simeq 6,121/a = (2\pi - 0,162)/a, \\ &\dots \end{aligned}$$

или, несколько менее точно,

$$k_n \simeq n\pi/a - 1/n\pi a, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

откуда

$$\lambda_n = k_n^2 \simeq \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \frac{2}{a^2} \quad \text{и} \quad \psi_n = \cos k_n z \simeq \cos \left[\left(n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) \frac{z}{a}\right].$$

Нетрудно доказать, что ψ_n имеет как раз n узлов в интервале $0 < z < a$. За исключением отрицательного наименьшего собственного значения λ_0 , все собственные значения положительны и не имеют верхней грани. Конечно, можно преобразовать наше уравнение, записав его в виде

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + (-k_0^2 + \lambda^0)\psi = 0, \quad p=1, \quad q=-k_0^2, \quad r=1,$$

причем новые собственные значения равны $\lambda_n^0 = \lambda_n + k_0^2$. Посредством этого преобразования мы сделали наименьшее собственное значение λ_0^0 равным нулю и обеспечили отсутствие отрицательных собственных значений.

Вырождение. Некоторые граничные условия могут быть недостаточными для определения единственного решения при каждом допустимом значении λ . Например, для уравнения $d^2\psi/dz^2 + \lambda\psi = 0$ в некоторых случаях (см. стр. 481 и 663) единственным граничным условием является требование периодичности функции ψ по φ с периодом 2π . В этом случае допустимые значения λ оказываются равными m^2 ($m=0, 1, 2, \dots$), но для каждого значения m условию периодичности удовлетворяет любая линейная комбинация $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$, так что имеются два независимых решения. Такие случаи, когда одному собственному значению принадлежит более одной собственной функции, называются *вырожденными случаями*.

В случаях двойного вырождения можно применить любую пару независимых решений χ_n и ϱ_n , соответствующих данному собственному значению λ_n , чтобы выразить наиболее общую собственную функцию для этого собственного значения. Однако обычно лучше выбрать два решения ортогональными друг другу (см. стр. 668), то есть так, чтобы

$$\int_a^b \chi_n(z) \varrho_n(z) dz = 0.$$

Это обычно можно сделать, добавляя к граничным условиям некоторые требования симметрии, выделяющие ту или иную совокупность независимых решений.

Например, для уравнения $d^2\phi/d\varphi^2 + m^2\phi = 0$ и для периодических условий функции $\sin m\varphi$ являются нечетными функциями φ , а функции $\cos m\varphi$ — четными функциями φ , и они взаимно ортогональны, так как

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cdot \cos n\varphi d\varphi = 0.$$

Польза этого требования ортогональности вскоре станет очевидной. Во всяком случае мы могли бы обозначить функции $\cos n\varphi$ через $\phi_{en}(z)$ (индекс e — для четных функций), а функции $\sin n\varphi$ — через ϕ_{on} (индекс o — для нечетных) и получить последовательность ϕ_{e0} для $\lambda_0 = 0$, ϕ_{e1} и ϕ_{o1} для $\lambda_1 = 1$, ϕ_{e2} и ϕ_{o2} для $\lambda_2 = 4$ и т. д., по две собственные функции для каждого собственного значения, кроме наименьшего.

Ряды по собственным функциям. Как мы видели раньше в этом параграфе, собственные функции дают возможность удовлетворить краевым условиям при помощи рядов. Получив нашу последовательность собственных функций $\phi_n(z)$, мы в состоянии выразить любую кусочно-гладкую функцию $F(z)$ в виде ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \phi_n(z)$$

между граничными точками a, b [см. формулы (6.3.8)]. Чтобы доказать возможность этого, надо показать, что последовательность собственных функций *полна*. Это до некоторой степени аналогично требованию, чтобы система собственных векторов в функциональном пространстве, соответствующих системе собственных функций, покрывала все «измерения» в функциональном пространстве, определяемые произвольным вектором, соответствующим $F(z)$ [см. рассуждение, следующее после формулы (6.3.7)]. Если $F(z)$ аналитична в некоторой области вокруг $z=0$, то необходимо показать только, что степенным рядам соответствуют ряды по собственным функциям.

Например, если каждую степень z можно выразить в виде равномерно сходящегося ряда по собственным функциям, то можно перейти прямо от степенного ряда к ряду по собственным функциям и быть уверенными, что второй ряд будет сходиться в области, где $F(z)$ аналитична.

Но часто можно пойти дальше этого. Например, мы покажем позже, что если функция и ее производная имеют в интервале (a, b) конечное число разрывов, то эту функцию можно представить при помощи ряда по собственным функциям, дающего совпадение с ней в смысле сходимости в среднем (стр. 660). Такие ряды нельзя дифференцировать, и обычно они не являются равномерно сходящимися. Но их обычно можно интегрировать, и получающийся после интегрирования ряд будет сходиться равномерно. Следовательно, ряды по собственным функциям могут идти дальше, чем степенные, и представлять некоторый класс неаналитических функций, хотя с получающимися рядами надо обращаться с осторожностью.

Чтобы представление функции в виде ряда по собственным функциям в смысле сходимости в среднем было *легко* получить, члены последовательности должны быть *взаимно ортогональными*, то есть соответствующие собственные векторы в функциональном пространстве должны быть взаимно ортогональными [см. формулу (6.3.5)]. Это значит, что

$$\int_a^b \phi_n(z) \phi_m(z) r(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ E_n^2, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (6.3.16)$$

Равенство (6.3.14) дает возможность доказать это важное свойство, если положить верхний предел интегрирования равным верхней граничной точке b ; тогда, если ψ_n удовлетворяет подходящим граничным условиям в точке b (конечность, если b — особая точка; определенное не зависящее от λ однородное линейное соотношение между функцией и производной, если b — обыкновенная точка), то левая часть равенства равна нулю и

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \psi_n \psi_m r dz = 0,$$

а это показывает, что если собственные функции ψ_n и ψ_m принадлежат различным собственным значениям ($\lambda_n \neq \lambda_m$), то они ортогональны. Заметим здесь, что, как будет показано в § 11.1, если граничные условия меняются с изменением λ , то система собственных функций *не является* ортогональной.

Даже для общего периодического граничного условия получающиеся собственные функции, если они принадлежат различным собственным значениям, ортогональны. Действительно, если проинтегрировать равенство (6.3.13) от a до b , мы получим

$$\left[\psi_n \frac{d\psi_m}{dz} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dz} \right]_a^b = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \psi_m \psi_n r dz = 0,$$

и выражение в квадратных скобках в силу периодичности принимает одинаковые значения в a и b , так что они взаимно уничтожаются. Этим не доказывается, что в вырожденных случаях несколько собственных функций, принадлежащих *одному и тому же* собственному значению, ортогональны друг другу, но на стр. 674 мы указали, что эти функции всегда можно выбрать так, чтобы они были взаимно ортогональными. Значит, будет ли случай вырожденным или нет, собственные функции ψ_n , образующие нашу последовательность, можно сделать взаимно ортогональными, и любую произвольную кусочно-гладкую функцию $F(z)$ можно представить при помощи ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{E_n} \psi_n(z), \quad F_n = \frac{1}{E_n} \int_a^b F(x) \psi_n(x) r(x) dx, \quad (6.3.17)$$

в интервале $a < z < b$ (если система ψ_n полна).

Между прочим, эта ортогональность обеспечивает то, что собственные значения уравнения Лиувилля (6.3.12) вещественны, если только функции p , q , r вещественны в рассматриваемом интервале z . Если бы существовало комплексное допустимое значение λ , то по симметрии его комплексно сопряженное тоже было бы собственным значением. Две соответствующие собственные функции также были бы комплексно сопряжены одна другой; скажем, ψ_n равна $u + iv$, а ψ_m равняется $u - iv$. Однако если все-таки верно, что две собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, то

$$\int_a^b (u^2 + v^2) r dz = 0,$$

что невозможно при наших предположениях о r , u и v . Значит, уравнение Лиувилля не может иметь комплексных собственных значений, и наши опасения, выраженные на стр. 671, были напрасными.

В соответствии с нашими рассуждениями на стр. 666 можно принять, что плотность единичных векторов $e(z)$ между z и $z+dz$ пропорциональна $r(z)dz$, а не dz (по этой причине $r(z)$ иногда называется *функцией плотности*). Таким образом, скалярное произведение двух векторов F и G будет равняться

$$(F^* \cdot G) = \int_a^b \bar{F}(z) G(z) r(z) dz,$$

где $\bar{F}(z)$ и $G(z)$ представляют собой компоненты F^* и G вдоль различных направлений, определяемых векторами $e(z)$. Собственные функции ψ_n являются компонентами взаимно ортогональных собственных векторов E_n ; длина такого вектора

$$E_n = \left(\int_a^b |\psi_n|^2 r dz \right)^{1/2}$$

называется *нормирующим множителем* для ψ_n .

Значит, компоненты единичных собственных векторов e_n имеют вид $\psi_n(x)/E_n$; они равны направляющим косинусам $e(x)$ относительно нормальных осей, определенных собственными векторами e_n . Следовательно, обобщая формулу (6.3.11), получаем

$$\frac{1}{E_n E_m} \int_a^b \bar{\psi}_n \psi_m r dz = \delta_{nm}, \quad \sum_n \frac{r}{E_n^2} \bar{\psi}_n(x) \psi_n(z) = \delta(x-z),$$

где $\delta(x-z)$ представляет собой дельта-функцию Дирака (см. стр. 122). Ряд во втором равенстве не является абсолютно сходящимся, так что его можно применять только в случаях, когда последующее интегрирование обеспечит сходимость. Например, из равенства

$$\int_a^b F(x) \delta(x-z) dx = F(z),$$

определяющего $\delta(x-z)$, при помощи симметричного ряда по собственным функциям мы немедленно получаем формулу (6.3.17).

Собственные функции, разделенные на амплитуду E_n , так что они являются направляющими косинусами, компонентами единичных векторов, называются *нормированными*. Система собственных векторов, попарно ортогональных и одновременно нормированных, называется *ортонормированной* системой. Свойство ортогональности очень важно и полезно, в то время как свойство нормированности имеет лишь формальную выгоду. Мы будем почти всегда применять ортогональные системы собственных функций, но редко будем заниматься нормировкой их, предпочитая включать *нормирующие множители* $1/E_n$ в наши уравнения явно.

Разложение уравнения Штурма—Лиувилля (факторизация). Впервые мы встретились с задачей о собственных значениях в гл. 1 в связи с определением главных осей линейного векторного оператора. Исследования, проведенные там, в особенности в части, относящейся к операторам в абстрактном векторном пространстве, тесно связаны с рассмотрениями настоящей главы, как мы только что видели. Эту связь можно выявить еще яснее при помощи дальнейшего изучения операторной техники, описанной на стр. 91—92 и 236. Там было показано, что чисто операторные

вычисления, применяющие «разложенные» операторы, повышающие или понижающие собственное значение, также дают решения соответствующего уравнения Шредингера, являющегося уравнением Штурма—Лиувилля. Теперь мы покажем, что при выполнении некоторых условий оператор Штурма—Лиувилля можно «разложить» на линейные дифференциальные операторы, которые можно применить для получения собственных значений и собственных функций по методам, аналогичным методам гл. 1.

Процесс получения этих линейных дифференциальных операторов из дифференциального уравнения называется *разложением на множители (факторизацией)*. Возвращаясь к выводу задачи о гармоническом осцилляторе на стр. 236 и далее, мы видим, что уравнение

$$d^2\phi_n/dx^2 + (2n+1-x^2)\phi_n = 0$$

равносильно паре дифференциально-рекуррентных уравнений первого порядка

$$\left(\frac{d}{dx} - x\right)\phi_n = \sqrt{2(n+1)}\phi_{n+1}, \quad \left(\frac{d}{dx} + x\right)\phi_n = -\sqrt{2n}\phi_{n-1},$$

связывающих собственную функцию ϕ_n с ее «ближайшими соседями» ϕ_{n-1} и ϕ_{n+1} . Обратно, из этих двух уравнений первого порядка можно получить собственное значение $2n+1$ для исходного уравнения второго порядка и явные дифференциальные выражения для соответственно нормированных собственных функций.

Для обобщения этого результата мы заменим уравнение Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\psi}{dz} \right) + (q + \lambda r) \psi = 0$$

уравнением, которое будем называть видоизмененным уравнением Штурма—Лиувилля:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + [\lambda - V(x)]\Phi = 0,$$

где

$$\Phi = (pr)^{1/4} \psi, \quad x = \int \sqrt{p/r} dz, \\ -V(x) = \frac{q}{r} + \frac{3}{16} \left[\left(\frac{p'}{p} \right)^2 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right] - \frac{1}{8} \frac{p'r'}{pr} - \frac{1}{4} \left(\frac{p''}{p} + \frac{r''}{r} \right).$$

Оно имеет общий вид одномерного уравнения Шредингера с потенциалом V . Мы рассмотрим здесь случай, когда две границы интервала x (a и b) являются смежными особыми точками уравнения. В этом случае ни p , ни r не обращаются в нуль в интервале $a < x < b$, и единственное требование, наложенное на функцию Φ , заключается в том, что она должна

быть конечной в a и b , или же в том, что интеграл $\int_a^b \Phi^2 dx$ должен быть конечным (другими словами, чтобы Φ была *интегрируемой в квадрате*).

Теперь мы исследуем, можно ли оператор, стоящий в левой части уравнения для Φ (без λ), разложить на пару дифференциальных операторов

$$\mathfrak{G}^- = u(x) - \frac{d}{dx}, \quad \mathfrak{G}^+ = u(x) + \frac{d}{dx}$$

так, чтобы

$$\mathfrak{U}^+\mathfrak{U}^-\Phi_n = (\lambda_n + a)\Phi_n, \quad \mathfrak{U}^-\mathfrak{U}^+\Phi_n = (\lambda_n - a)\Phi_n.$$

Складывая и вычитая два предполагаемых уравнения, мы видим, что

$$\left[u^2(x) - \frac{d^2}{dx^2} \right] \Phi_n = \lambda_n \Phi_n, \quad a = \frac{du}{dx}.$$

Следовательно, если a не должно зависеть от x , то u должно линейно зависеть от x , и потому u^2 , равное V , должно быть пропорциональным x^2 , что приводит нас к уравнению для гармонического осциллятора. Дифференциальные операторы $\mathfrak{U}^-$ и $\mathfrak{U}^+$ соответствуют абстрактным векторным операторам, определенным в формуле (2.6.30), и с ними надо действовать так, как описано в гл. 2, для получения собственных значений и собственных функций.

Этот процесс можно обобщить, чтобы он соответствовал другим формам V , если V является (или может быть формально сделано) зависящим от некоторого параметра m , который для удобства нашего анализа можно предположить принимающим значения, различающиеся на единицу. Мы будем считать u и a также функциями этого параметра и построим два уравнения:

$$\mathfrak{U}_{m+1}^- \Phi_n(m|x) \equiv [u_{m+1}(x) - d/dx] \Phi_n(m|x) = \sqrt{\lambda_n - a_{m+1}} \Phi_n(m+1|x),$$

$$\mathfrak{U}_m^+ \Phi_n(m|x) \equiv [u_m(x) + d/dx] \Phi_n(m|x) = \sqrt{\lambda_n - a_m} \Phi_n(m-1|x),$$

или эквивалентную пару

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{m+1}^+ \mathfrak{U}_{m+1}^- \Phi_n(m|x) &= (\lambda_n - a_{m+1}) \Phi_n(m|x), \\ \mathfrak{U}_m^- \mathfrak{U}_m^+ \Phi_n(m|x) &= (\lambda_n - a_m) \Phi_n(m|x), \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

подобрав эти уравнения так, чтобы они были эквивалентны видоизмененному уравнению Штурма — Лиувилля

$$[V_m(x) - d^2/dx^2] \Phi_n(m|x) = \lambda_n \Phi_n(m|x).$$

Чтобы найти соотношение между $u_m(x)$, a_m и потенциалом $V_m(x)$, мы вычтем друг из друга и сложим уравнения второй пары (заменяя в первом m на $m-1$), а затем сравним результаты с соответствующими разностью и суммой для уравнения с V_m ,

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{1}{2} [V_{m-1}(x) - V_m(x)], \quad u_m^2 + a_m = \frac{1}{2} [V_{m-1}(x) + V_m(x)],$$

если λ считать не зависящим от m . Так как a_m предполагается не зависящим от x , то можно продифференцировать второе уравнение, в результате подставить первое и в конце концов получить

$$\begin{aligned} u_m(x) &= \frac{1}{2} (V'_{m-1} + V'_m) / (V_{m-1} - V_m), \\ a_m &= \frac{1}{2} (V_{m-1} + V_m) - u_m^2, \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

где $V' = dV/dx$. Таким образом, видоизмененное уравнение Штурма — Лиувилля равносильно уравнениям (6.3.18), в которых величины u_m и a_m связаны с потенциалом V_m формулами (6.3.19).

Очевидно, что не все виды V будут давать удовлетворительное разложение. Прежде всего, мы предположили, что допустимые значения λ не зависят от m , а это требует, как мы увидим, чтобы a_m не зависело от x . Следовательно, $V_m(x)$ должно быть такой функцией x и m , чтобы выражение для a_m , приведенное в (6.3.19), не зависело от x . Это приводит

к ограниченному числу возможностей, причем некоторые из них дают полезные последовательности собственных функций. Ряд этих возможностей приведен в таблице в конце этой главы; здесь же мы рассмотрим только один пример, приводящий к полиномам Гегенбауэра (или сферическим гармоникам), определенным формулами (5.2.52) или (5.3.35), а также в конце этой главы.

Уравнение для этих полиномов имеет вид

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 T}{dz^2} + 2(m+1)z \frac{dT}{dz} - \lambda^0 T = 0,$$

где для $T = T_l^m(z)$ собственное значение λ^0 оказывается равным $l(l+2m+1)$, причем $l = n - m$. Заметим здесь, что параметр m не обязательно ограничен целыми значениями. Наша факторизация связывает собственные функции для данного значения m с собственными функциями для другого m , отличающегося на единицу, но часто можно начать от любого значения m и передвигаться вперед или назад на единичные шаги. Значения m могут ограничиваться другими условиями, но в данном случае этого не будет.

Если перейти к видоизмененной форме, положив

$$z = \cos x, \quad \Phi = \sin^{m+\frac{1}{2}} x \cdot T,$$

то уравнение примет вид

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \lambda \Phi - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 x} \Phi = 0, \quad \lambda = \lambda^0 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2.$$

В этом случае потенциальная функция равна

$$V_m(x) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{1}{2}\right) \operatorname{cosec}^2 x$$

и, следовательно, $u_m(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right) \operatorname{ctg} x$; $a_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2$, так что в этом случае a_m не зависит от x , как и требуется.

Раз мы разложили рассматриваемое уравнение Штурма—Лиувилля частного вида и a_m не зависит от x , можно приступить к решению посредством методов, аналогичных примененным в § 2.6. Например, можно показать, что дифференциальный оператор $\mathfrak{G}^+$ сопряжен к оператору $\mathfrak{G}^-$, так что

$$\int_a^b f \mathfrak{G}_m^-(\psi) dx = \int_a^b \psi \mathfrak{G}_m^+(f) dx,$$

если только f и ψ интегрируемы в квадрате на интервале x между точками a и b (которые, по предположению, являются особыми точками уравнения).

Уравнения (6.3.18) показывают, далее, что если $y_n(m|x)$ представляет собой собственную функцию видоизмененного уравнения Штурма—Лиувилля (тем самым функцию, интегрируемую в квадрате при $a \leq x \leq b$) для собственного значения λ_n , то $\mathfrak{G}_m^+ y_n(m|x)$ является собственной функцией (следовательно, также интегрируемой в квадрате) для того же собственного значения λ_n , но для значения m , уменьшенного на единицу; эту функцию можно обозначить через $y_n(m-1|x)$. (Функции y не обязательно нормированы; мы сохраним символ Φ для собственных функций, нормированных в интервале $a \leq x \leq b$.) Другими словами, $\mathfrak{G}_m^+ y_n(m|x) = y_n(m-1|x)$; так же $\mathfrak{G}_{m+1}^- y_n(m|x) = y_n(m+1|x)$, до тех пор, пока

левая часть того или другого выражения не обратится тождественно в нуль.

Далее мы применяем технику § 2.6 для получения допустимых значений λ_n . Если a_m является *возрастающей* функцией от m , то есть если $a_{m+1} > a_m$, то мы полагаем

$$\begin{aligned} \int_a^b [y_n(m+1|x)]^2 dx &= \int_a^b \mathfrak{G}_{m+1}^- y_n(m|x) \mathfrak{G}_{m+1}^- y_n(m|x) dx = \\ &= \int_a^b y_n(m|x) \mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+1}^- y_n(m|x) dx = (\lambda_n - a_{m+1}) \int_a^b [y_n(m|x)]^2 dx, \end{aligned}$$

так что если $y_n(m|x)$ интегрируема в квадрате, то и $y_n(m+1|x)$ такова же, если только $\lambda_n - a_{m+1}$ не отрицательно; но отрицательным оно не может быть из-за вещественности y . Следовательно, для m , большего чем некоторое максимальное значение n , собственных функций быть не может; чтобы убедиться в этом, достаточно положить $\lambda_n = a_{n+1}$, чем собственное значение λ_n определяется, поскольку a_{n+1} известно.

Для определения собственных функций заметим, что

$$\mathfrak{G}_{n+1}^- y_n(n|x) \equiv \left[u_{n+1}(x) - \frac{d}{dx} \right] y_n(n|x) = 0,$$

так как $\lambda_n = a_{n+1}$, и потому $y_n(n+1|x)$ тождественно равно нулю. Следовательно,

$$y_n(n|x) = \exp \left[\int u_{n+1}(x) dx \right]$$

и

$$y_n(m|x) = \mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+2}^+ \dots \mathfrak{G}_n^+ \exp \left[\int u_{n+1}(x) dx \right].$$

Далее, из y можно получить нормированные собственные функции Φ . Имеем

$$\Phi_n(n|x) = C_n \exp \left[\int u_{n+1} dx \right], \quad C_n = \left[\int_a^b \exp \left(2 \int u_{n+1} dx \right) dx \right]^{-1/2},$$

и если $\int_a^b [\Phi_n(m|x)]^2 dx = 1$, то можно видеть, что

$$\int_a^b [\mathfrak{G}_m^+ \Phi_n(m|x)]^2 dx = \lambda_n - a_m.$$

Таким образом, мы показали, что уравнения (6.3.18) равносильны паре уравнений, непосредственно предшествующих формулам (6.3.18), если функции Φ нормированы, и что второе из уравнений этой пары дает средство для определения нормированной собственной функции $\Phi_n(m|x)$ по известной функции $\Phi_n(n|x)$:

$$\begin{aligned} \Phi_n(m|x) &= \frac{C_n}{\sqrt{(a_{n+1} - a_n) \dots (a_{n+1} - a_{m+1})}} \mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+2}^+ \dots \mathfrak{G}_n^+ \left(e^{\int u_{n+1} dx} \right), \\ m &= n, n-1, n-2, \dots \end{aligned}$$

С другой стороны, если a_m является *убывающей* функцией от m ($a_{m+1} < a_m$), то мы обращаем вывод и показываем, что должен существо-

вать некоторый нижний предел n параметра m , для которого $\mathfrak{G}_n^+ y_n(n|x)$ равно тождественно нулю. Тогда $\lambda_n = a_n$ и

$$\Phi_n(m|x) = \frac{C_n}{V(a_n - a_{n+1}) \dots (a_n - a_m)} \mathfrak{G}_m^- \mathfrak{G}_{m-1}^- \dots \mathfrak{G}_{n+1}^- (e^{-\int u_n dx}),$$

$$m = n, n+1, n+2, \dots,$$

причем здесь

$$C_n = \left[\int_a^b \exp \left(-2 \int u_n dx \right) dx \right]^{-1/2}.$$

Таким образом, оба уравнения, предшествующих (6.3.18), порождают нормированные собственные функции, независимо от того, что собой представляет функция a_m от m , но мы пользуемся первым уравнением для получения $\Phi_n(m|x)$, если $a_{m+1} < a_m$, и вторым, если $a_{m+1} > a_m$.

Возвращаясь к нашему примеру присоединенных функций Лежандра (или полиномов Гегенбауера), мы видим, что пределы для x равны 0 и π и что $a_{m+1} = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 > a_m$. Отсюда собственные значения равны

$$\lambda_n = a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \lambda_{nm}^0 = \lambda_n - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = l(l + 2m + 1),$$

где $l = n - m$. Так как $m = n, n-1, \dots$, то l никогда не может быть отрицательным. Начальная функция равна

$$\Phi_n(n|x) = C_n \exp \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \int \operatorname{ctg}(x) dx \right] = C_n \sin^{n+1/2} x,$$

$$C_n = \left[\int_0^\pi \sin^{2n+1} x dx \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{V \frac{1}{2} (2n+1)!}{2^n n!},$$

и другими собственными функциями являются

$$\begin{aligned} \Phi_n(m|x) &= \frac{V \left(n + \frac{1}{2}\right) (n+m)! (n-m)!}{2^n n!} \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \operatorname{ctg} x + \frac{d}{dx} \right] \times \dots \\ &\quad \dots \times \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \operatorname{ctg} x + \frac{d}{dx} \right] \sin^{n+1/2} x = \\ &= (-1)^{n-m} \frac{V \left(n + \frac{1}{2}\right) (n+m)! (n-m)!}{2^n n! (1-z^2)^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{4}}} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} (1-z^2)^n, \end{aligned}$$

где $z = \cos x$. Сравнение этого результата с таблицей, приведенной в конце настоящей главы, показывает, что если m и n — целые и $l = n - m$, то полиномы Гегенбауера и присоединенные функции Лежандра связаны с Φ соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi_n(m|x) &= (-1)^{n-m} V \frac{(n-m)! \left(n + \frac{1}{2}\right)}{(n+m)!} V \sin x P_n^m(\cos x), \\ T_l^m(z) &= (-1)^l V \frac{(l+2m)!}{l! \left(l + m + \frac{1}{2}\right)} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} \Phi_{l+m}(m|\arccos z). \end{aligned}$$

В таблице в конце этой главы мы перечислим другие виды $V_m(x)$ и соответствующие $u_m(x)$, для которых a_m не зависит от x и которые, следовательно, допускают факторизацию по описанному выше способу. Ясно, конечно, что этот метод вычисления собственных функций тесно связан с абстрактным векторным представлением. Операторы $\mathfrak{U}$ можно также применить для доказательства ортогональности собственных функций. Описанная выше техника непосредственно дает различные рекуррентные формулы, связывающие различные собственные функции; эти формулы полезны для дальнейших вычислений.

Многие уравнения можно разложить несколько иным путем. Например, уравнение

$$\frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \left(\sin x \frac{dP}{dx} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 x} \right] P = 0$$

для $P_n^m(\cos x) = \sin^m x \cdot T_{n-m}^m(\cos x)$ является уже разложенным по параметру m , если положить $\lambda = n(n+1)$ и $\Phi_n(m|x) = C \sqrt{\sin x} P_n^m(\cos x)$. Однако можно также рассмотреть $-m^2$ как собственное значение λ и провести разложение по n ; полагая $t = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, получаем уравнение

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \left[\frac{n(n+1)}{\operatorname{ch}^2 t} + \lambda \right] \psi = 0, \quad \psi = CP, \quad \operatorname{ch} t = \operatorname{cosec} x,$$

которое можно разложить, приняв $u_n(t) = n \operatorname{th} t$, $a_n = -n^2$. В этом случае a_n является убывающей функцией от n , так что применима вторая форма $\psi_m(n|t)$, значения n не могут быть меньше определенного значения m , где $\lambda_m = -m^2$, и первая нормированная собственная функция равна

$$\psi_m(m|t) = \sqrt{\frac{m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}} \operatorname{ch}^{-m} t, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_m(m|t)]^2 dt = 1.$$

Другие собственные функции, для $n = m, m+1, m+2, \dots$, имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_m(n|t) = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \sqrt{\frac{m}{(n-m)!(n+m)!}} \left[n \operatorname{th} t - \frac{d}{dt} \right] \times \dots \\ \dots \times \left[(m+1) \operatorname{th} t - \frac{d}{dt} \right] \operatorname{ch}^{-m} t. \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения для ψ удобно выразить через переменную $x = 2 \operatorname{arctg} e^t$:

$$\begin{aligned} \left[-n \cos x - \sin x \frac{d}{dx} \right] \psi_m(n-1|t) = \sqrt{(n-m)(n+m)} \psi_m(n|t), \\ \left[-n \cos x + \sin x \frac{d}{dx} \right] \psi_m(n|t) = \sqrt{(n-m)(n+m)} \psi_m(n-1|t). \end{aligned}$$

Так как

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_m(n|t)]^2 dt = C^2 \int_0^\pi [P_n^m(\cos x)]^2 \frac{dx}{\sin x} = C^2 \frac{(n+m)!}{m(n-m)!},$$

то мы видим, что

$$\begin{aligned} \psi_m(n|t) = \sqrt{\frac{m(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\operatorname{th} t) = \\ = (-1)^{n-m} \sqrt{\frac{m}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin x}} \Phi_n(m|\arccos \operatorname{th} t), \end{aligned}$$

где Φ представляет собой собственную функцию, полученную при первой факторизации.

Таким образом, мы получили четыре дифференциально-рекуррентных соотношения для собственных функций Φ или для связанных с ними функций ψ (мы предпочитаем иметь дело с функциями Φ , так как они нормированы по углу x , который является переменной во многих физических задачах). Из этих соотношений можно получить другие полезные рекуррентные равенства. Например, при помощи сложения формул

$$\begin{aligned} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \cos x + \sin x \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m|x) &= \\ &= \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m+1)(2n+1)}{2n+3}} \Phi_{n+1}(m|x), \\ \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \cos x - \sin x \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m|x) &= \sqrt{\frac{(n+m)(n-m)(2n+1)}{2n-1}} \Phi_{n-1}(m|x), \end{aligned}$$

выведенных из уравнений для ψ , мы получаем обычное рекуррентное соотношение для нормированных функций Лежандра

$$\begin{aligned} \cos x \Phi_n(m|x) &= \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} \Phi_{n+1}(m|x) + \\ &+ \sqrt{\frac{(n+m)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}} \Phi_{n-1}(m|x), \end{aligned}$$

а подставляя это выражение в одно из равенств, выведенных ранее для Φ ,

$$\begin{aligned} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \cos x - \sin x \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m|x) &= \\ &= \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \sin x \cdot \Phi_n(m+1|x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \sin x \cdot \Phi_n(m|x) &= (n+m+1) \cos x \cdot \Phi_n(m+1|x) - \\ &- \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \cos x - \sin x \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m+1|x), \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \Phi_n(m|x) &= \sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \Phi_{n+1}(m+1|x) - \\ &- \sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}} \Phi_{n-1}(m+1|x). \end{aligned}$$

Этим же путем можно вывести многие другие полезные соотношения. Некоторые из них будут получены другими методами позже в этом параграфе (см. стр. 696). Однако теперь нам надо вернуться к нашей основной теме — к исследованию полноты системы собственных функций.

Собственные функции и вариационный принцип. Полная система собственных функций — это такая система, которая может осуществить представление в смысле сходимости в среднем (см. стр. 660) любой кусочно-гладкой функции. Чтобы показать, что рассмотренные нами системы собственных функций полны, мы обратимся к вариационной технике, развитой в гл. 3. Согласно сказанному в конце, решение уравнения Штурма—Лиувилля представляет собой функцию, минимизирующую

интеграл

$$\int_a^b \left[p(z) \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 - q(z) \psi^2 \right] dz$$

и подчиненную дополнительному условию

$$\int_a^b \psi^2 r(z) dz = \text{const.}$$

Другими словами, уравнением Эйлера для этой вариационной задачи является как раз уравнение Лиувилля (6.3.12).

Рассмотрим это утверждение несколько более детально. Допустим, что мы выбрали в качестве пробной функции функцию $\psi(z)$, удовлетворяющую граничным условиям в точках a и b и нормированную с функцией плотности r :

$$\int_a^b \psi^2 r dz = 1$$

(это одно из немногих мест, где несомненно выгодно нормировать функции). Подсчитаем интеграл

$$\Omega(\psi) = \int_a^b \left[p \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 - q\psi^2 \right] dz \quad (6.3.20)$$

и будем менять пробную функцию произвольным образом (но так, чтобы она оставалась нормированной и удовлетворяющей граничным условиям), пока не найдем ψ , дающую *наименьшее возможное* значение Ω . В силу того, что уравнение Лиувилля соответствует вариационному уравнению, функция ψ , для которой Ω принимает наименьшее возможное значение, равна нижней собственной функции ψ_0 , а соответствующее значение Ω равно

$$\begin{aligned} \Omega(\psi_0) &= \int_a^b \left[p \left(\frac{d\psi_0}{dz} \right)^2 - q\psi_0^2 \right] dz = \\ &= \left[p\psi_0 \frac{d\psi_0}{dz} \right]_a^b - \int_a^b \psi_0 \left[\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\psi_0}{dz} \right) + q\psi_0 \right] dz = \int_a^b \psi_0 [\lambda_0 r \psi_0] dz = \lambda_0, \end{aligned}$$

то есть *наименьшему собственному значению*. Здесь мы проинтегрировали член $p(d\psi/dz)^2$ по частям, применили уравнение (6.3.12) для получения последнего интеграла и использовали граничные условия в точках a и b для доказательства равенства нулю выражения в квадратных скобках. Для последующих рассуждений мы предположим q и λ преобразованными так, что $\lambda_0 = 0$.

Для нахождения следующей собственной функции и соответствующего собственного значения мы минимизируем Ω , отыскивая нормированную функцию ψ , которая удовлетворяет граничным условиям в точках a и b и, кроме того, ортогональна найденной выше функции ψ_0 . Это минимальное значение Ω равно λ_1 , а соответствующая пробная функция есть ψ_1 . Таким же образом мы действуем и дальше: для нахождения ψ_n и λ_n мы подсчитываем Ω для пробных функций, удовлетворяющих граничным условиям при $z=a$ и b , нормированных и ортогональных подсчитанным перед этим функциям $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$. Функция, придающая Ω минимальное значение, равна ψ_n , а значение $\Omega(\psi_n)$ есть λ_n .

Для вырожденных случаев мы найдем целую совокупность функций, дающих одно и то же минимальное значение Ω . Однако из соображений симметрии или из других дополнительных требований всегда можно выбрать систему взаимно ортогональных решений, которые можно рассматривать как стандартные решения для этого вырожденного значения λ_n .

Полнота системы собственных функций. Результаты предыдущего пункта можно выразить еще следующим образом. Пусть F — любая функция, удовлетворяющая граничным условиям и нормированная в интервале (a, b) ; тогда интеграл $\Omega(F)$, определенный формулой (6.3.20), не меньше λ_0 . Поскольку мы преобразовали q и λ так, что $\lambda_0 = 0$, $\Omega(F)$ не может быть отрицательным. Аналогично, если для функции F_n

$$\int_a^b F_n^2 r \, dz = 1, \quad \int_a^b F_n \psi_m r \, dz = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1, n,$$

то интеграл $\Omega(F_n)$ не меньше λ_{n+1} .

Для полноты системы собственных функций нужно, чтобы ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(z), \quad C_m = \frac{1}{E_m^2} \int_a^b f(z) \psi_m(z) r(z) \, dz, \quad (6.3.21)$$

сходилась (в среднем) к функции $f(z)$ в интервале (a, b) . Чтобы это было так, разность между функцией f и первыми $n+1$ членами ряда

$$f_n(z) = f(z) - \sum_{m=0}^n C_m \psi_m(z)$$

должна стремиться к нулю (в среднем), когда n стремится к бесконечности. Другими словами, чтобы ряд давал хорошее приближение в среднем, в соответствии со сказанным на стр. 660, величина

$$a_n^2 = \int_a^b f_n^2(z) r(z) \, dz = \int_a^b f^2 r \, dz - \sum_{m=0}^n E_m^2 C_m^2$$

должна стремиться к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Теперь можно применить наши вариационные соображения для оценки величины a_n , так как функция

$$F_n = f_n(z)/a_n$$

обладает указанными выше свойствами:

$$\int_a^b F_n^2 r \, dz = 1 \text{ по определению } a_n,$$

$$\int_a^b F_n \psi_m r \, dz = \begin{cases} (E_m^2/a_n)(C_m - C_m) = 0, & \text{если } m \leq n, \\ (E_m^2/a_n)C_m, & \text{вообще говоря, } \neq 0, \text{ если } m > n. \end{cases}$$

в силу ортогональности ϕ и определения C_m . Следовательно, в соответствии со сказанным в первом абзаце этого пункта

$$\begin{aligned} \Omega(F_n) = \frac{1}{a_n^2} \int_a^b \left[p \left(\frac{df}{dz} \right)^2 - qf^2 \right] dz - \frac{2}{a_n^2} \int_a^b \sum_{m=0}^n C_m \left[p \frac{df}{dz} \frac{d\phi_m}{dz} - qf\phi_m \right] dz + \\ + \frac{1}{a_n^2} \sum_{m=0}^n C_m \int_a^b \sum_{s=0}^n C_s \left[p \frac{d\phi_m}{dz} \frac{d\phi_s}{dz} - q\phi_m\phi_s \right] dz \geq \lambda_{n+1}. \end{aligned}$$

Первый из полученных членов равен $\Omega(f)/a_n^2$ и потому, как мы видели выше, неотрицателен. Первый член во втором интеграле можно проинтегрировать по частям, и, используя то, что ϕ_m удовлетворяет уравнению Лиувилля и что как f , так и ϕ удовлетворяют граничным условиям, получаем для второго интеграла

$$\begin{aligned} \frac{2}{a_n^2} \int_a^b f \sum_{m=0}^n C_m \left[\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\phi_m}{dz} \right) + q\phi_m \right] dz - \frac{2}{a_n^2} \left[\sum_{m=0}^n C_m p f \frac{d\phi_m}{dz} \right]_a^b = \\ = -\frac{2}{a_n^2} \sum_{m=0}^n C_m \lambda_m \int_a^b r f \phi_m dz = -\frac{2}{a_n^2} \sum_{m=0}^n C_m^2 \lambda_m E_m^2. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что третий интеграл равен $\frac{1}{a_n^2} \sum C_m^2 \lambda_m E_m^2$, так что

$$\Omega(F_n) = \frac{1}{a_n^2} \left[\Omega(f) - \sum_{m=0}^n E_m^2 C_m^2 \lambda_m \right] \geq \lambda_{n+1}.$$

Так как величина $\sum E_m^2 C_m^2 \lambda_m$ должна быть положительной (ни одно из λ_m не отрицательно), то отсюда

$$\Omega(f) > a_n^2 \lambda_{n+1}, \quad \text{или} \quad a_n^2 < [\Omega(f)/\lambda_{n+1}].$$

Однако $\Omega(f)$ положительно и не зависит от n , а мы доказали, что λ_{n+1} стремится к бесконечности, когда n стремится к бесконечности. Следовательно, a_n стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности, и тем самым мы доказали, что ряд (6.3.21) сходится в среднем к функции f в интервале $a < z < b$. Таким образом, если ϕ_n — последовательность собственных функций — решений уравнения (6.3.12) (которое можно преобразовать так, что $\lambda_0 = 0$), удовлетворяющих граничным условиям, в силу которых $[p\phi(d\phi/dz)]_a^b$ равно нулю, то система ϕ_n полна. Это доказательство существенно пополняет наше исследование основных свойств собственных функций. Теперь мы можем обратиться к частным случаям и к исследованию общей техники, которая будет использована позже.

Асимптотические формулы. Иногда бывает полезно получить приближенные выражения для собственных функций и собственных значений высокого порядка (n велико). Мы вернемся к уравнению Лиувилля

$$\frac{d}{dz} \left(p \frac{d\phi}{dz} \right) + (\lambda r + q) \phi = 0$$

и сделаем подстановку

$$y = (pr)^{1/4} \phi, \quad \xi = \frac{1}{J} \int_a^z \sqrt{\frac{r}{p}} dz, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz$$

для получения уравнения

$$d^2y/d\xi^2 + [k^2 - \omega(\xi)]y = 0, \quad (6.3.22)$$

где

$$k^2 = J^2\lambda \quad \text{и} \quad \omega = \frac{1}{(pr)^{1/4}} \frac{d^2}{d\xi^2} (pr)^{1/4} - J^2 \frac{q}{r},$$

а p , q и r надо выразить через ξ . Новое независимое переменное изменяется в пределах $0 \leq \xi \leq \pi$.

Если λ велико, то k^2 велико сравнительно с ω , и можно ожидать, что зависимость y от ξ приближенно синусоидальная. Для уточнения этого можно переставить члены уравнения

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + k^2y = \omega y$$

и решать его так, как будто ωy — неоднородная часть. На основании формулы (5.2.19) мы видим, что выражением для y будет

$$y(\xi) = A \sin(k\xi) + B \cos(k\xi) + \frac{1}{k} \int_{\xi_0}^{\xi} \sin[k(\xi - t)] \omega(t) y(t) dt, \quad (6.3.23)$$

где ξ_0 — подходящий нижний предел интегрирования. Это, конечно, не решение, а интегральное уравнение для y . В гл. 8 мы будем детально изучать его решение. Однако здесь мы занимаемся только решениями, для которых λ очень велико, настолько, что интегралом по сравнению с первыми двумя членами можно пренебречь (если λ велико, то k велико и подынтегральная функция, умноженная на $1/k$, исчезает). Значения A , B и k должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Если ни a , ни b не являются особыми точками, то задача о приспособлении нашей асимптотической формы к граничным условиям довольно проста. Если требование состоит в равенстве ψ нулю в точках a и b , то первое приближение, полученное путем отбрасывания интеграла в уравнении (6.3.23), есть просто

$$k = n, \quad \psi_n \simeq [1/(rp)^{1/4}] \sin(n\xi), \quad \lambda_n = (n/J)^2, \quad (6.3.24)$$

что имеет место, если n^2 больше ω всюду в интервале $0 < \xi < \pi$. Более точное приближение можно получить, если теперь подставить результат обратно в интеграл в формуле (6.3.23) и подсчитать поправочный член, но пока мы опустим такие подробности.

Если граничные условия состоят в требовании $\alpha\psi + \beta d\psi/dz = 0$ при $z = a$ и в аналогичном соотношении, возможно, с другими постоянными α и β , при $z = b$, то этот процесс несколько усложняется. Мы полагаем в качестве первого приближения

$$\psi \simeq [1/(pr)^{1/4}] \cos(k\xi + \theta),$$

где фазовый угол θ надо определить из граничных условий. Так как k^2 должно быть больше $\omega(\xi)$ всюду в интервале $0 < \xi < \pi$, то

$$\frac{d\psi}{dz} \simeq \frac{1}{(pr)^{1/4}} \frac{d\xi}{dz} \frac{d}{d\xi} \cos(k\xi + \theta) = -\frac{1}{(pr)^{1/4}} \frac{k}{J} \sqrt{\frac{r}{p}} \sin(k\xi + \theta),$$

так как для большого k производная от множителя $(pr)^{-1/4}$ мала сравнительно с производной от $\cos(k\xi + \theta)$. Решение для θ получается из уравнения

$$\operatorname{ctg} \theta \simeq \frac{k}{J} \left[\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{r}{p}} \right]_{z=a}.$$

Если k достаточно велико, то отсюда

$$\theta(k) \simeq \frac{J}{k} \left[\frac{a}{\beta} \sqrt{\frac{p}{r}} \right] \quad \text{при } z = a.]$$

Подобное удовлетворение граничному условию при $z = b$ определяет допустимые значения k и тем самым $\lambda = (k/J)^2$:

$$k_n \simeq n + \frac{J}{\pi n} \left[\frac{a}{\beta} \sqrt{\frac{p}{r}} \right]_a^b, \quad \phi_n = \frac{1}{(pr)^{1/4}} \cos [k_n \xi + \theta(n)], \quad (6.3.25)$$

где n — целое.

Таким образом, если a и b — обыкновенные точки, то высшие собственные значения уравнения Лиувилля приближенно равны *квадрату произведения π на большое целое n , разделенному на квадрат интеграла от $\sqrt{r/p}$ по интервалу от a до b* . Соответствующая собственная функция приближенно равна косинусу произведения πn на отношение интеграла от $\sqrt{r/p}$ по интервалу от a до z к интегралу от $\sqrt{r/p}$ по интервалу от a до b (с дополнительным «амплитудным множителем» $(pr)^{-1/4}$, изменяющим амплитуду).

Если a , или b , или и a и b являются особыми точками, в которых p обращается в нуль, то интегралы, определяющие J и ξ (приведенные непосредственно перед уравнением (6.3.22)), могут расходиться, и тогда наши определения надо несколько видоизменить. Кроме того, в таких точках может обратиться в бесконечность функция q ; во всяком случае, там обратится в бесконечность функция w . Конечно, мы можем решить уравнение Лиувилля вблизи особой точки при помощи степенных рядов и найти там природу особенности обоих решений. Если наше уравнение имеет физический смысл, то одно из решений будет там конечным.

Чтобы увидеть, как это получается, возьмем частный пример уравнения Бесселя, к которому мы приходим при разделении волнового уравнения в полярных координатах (см. стр. 548 и 579),

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{d\psi}{dz} \right) + \left(\lambda z - \frac{m^2}{z} \right) \psi = 0, \quad (6.3.26)$$

где $z = r = \xi_1$, m — целое (получается из граничных условий периодичности для ξ_2 -множителя), а λ — константа разделения. В этом случае имеем $p = z$, $r = z$, $q = -m^2/z$. Допустим, что в качестве предела a берется особая точка $z = 0$.

Совершая подстановку для перехода к уравнению (6.3.22), имеем

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{z}} y, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_0^b dz = \frac{b}{\pi}, \quad \zeta = \frac{\pi z}{b}, \quad k^2 = (b^2/\pi^2) \lambda,$$

$d^2y/d\zeta^2 + [k^2 - (m^2 - 1/4)/\zeta^2] y = 0$; и интегральное уравнение для y будет иметь вид

$$y(\zeta) = \cos(k\zeta + \theta) - \frac{1}{k} \int_{\zeta}^{\infty} \sin k(\zeta - t) y(t) \frac{m^2 - 1/4}{t^2} dt,$$

где пределы интеграла выбраны так, чтобы обеспечить сходимость. Для больших значений k и z первый член дает достаточную точность, и об интеграле не нужно беспокоиться, если только ζ не близко к нулю. Если

бы мы могли найти значение фазового угла θ , соответствующее требованию конечности ψ для $z=0$, то нам вообще не требовалось бы пользоваться асимптотической формой для малого ζ (где она неточна).

Мы найдем значение θ , используя явление Стокса (см. стр. 571), потребовав для этого, чтобы изменение асимптотической формулы для ψ , когда ζ берется на окружности с центром $\zeta=0$, соответствовало изменению ряда, дающего решение около $\zeta=0$. Рассмотрение определяющего уравнения (см. стр. 503) для уравнения (6.3.26) показывает, что решение, конечное при $z=0$, имеет вид произведения z^m на ряд Тейлора по z . Следовательно, если ψ вещественно для больших z вдоль положительной вещественной полуоси (фазовый угол $\varphi=0$), то оно равно произведению $e^{im\pi}$ на вещественную функцию для $\varphi=\pi$ (z отрицательно и велико) и его главный член должен равняться произведению $e^{im\varphi}$ на вещественную функцию, если φ не является целым кратным π (z комплексно и велико по модулю).

Положим $\psi \simeq (1/2 \sqrt{z}) [e^{ik\zeta+i\theta} + e^{-ik\zeta-i\theta}]$; это выражение вещественно при $\varphi=0$, и мы исследуем сначала его поведение для $\varphi=\pi/2$ ($\zeta=i|\zeta|$). Здесь первый член в квадратных скобках незначителен при больших ζ , и асимптотическая формула дает

$$\psi = e^{im\pi/2} \cdot \text{вещественная функция} \simeq (1/2 \sqrt{|z|}) e^{k|\zeta|-i\theta-i\pi/4}, \quad z=|z| e^{i\pi/2},$$

так что $\theta = -\frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2}\right)$. Для проверки этого результата положим также $\varphi = -\pi/2$ ($\zeta = -i|\zeta|$). Здесь второй член незначителен и

$$\psi = e^{-im\pi/2} \cdot \text{вещественная функция} \simeq (1/2 \sqrt{|z|}) e^{k|\zeta|+i\theta+i\pi/4}, \quad z=|z| e^{-i\pi/2},$$

так что опять $\theta = -\frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2}\right)$. Значит, асимптотической формой для собственных функций в этом случае будет

$$\psi \simeq \frac{1}{\sqrt{z}} \cos \left[\frac{\pi k z}{b} - \frac{1}{2}\pi \left(m + \frac{1}{2}\right) \right], \quad -\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi,$$

что совпадает с асимптотическим поведением, которое дается формулой (5.3.68). Если граничное условие при $z=b$ имеет вид $\psi=0$, то асимптотическое выражение для собственных значений таково:

$$k_n \simeq n + \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad \lambda_n = (\pi k_n/b)^2; \quad n \text{ велико.}$$

Ту же технику можно с успехом применить для других случаев, когда один или оба предела являются особыми точками. Более полное исследование асимптотических формул будет проведено в гл. 9. Из приведенного здесь рассуждения можно заключить, что для любого из обычных видов граничных условий (все равно, в особые или обыкновенных точках) можно указать асимптотическую формулу, дающую подходящее приближение, если подобрать фазовый угол θ в выражении

$$\psi \simeq \frac{1}{(pr)^{1/4}} \cos \left(\sqrt{\lambda} \int_a^z \sqrt{\frac{r}{p}} dz + \theta \right). \quad (6.3.27)$$

Подобным образом асимптотическая формула для высших собственных значений оказывается такой:

$$\lambda_n \simeq \left(\int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz \right)^{-2} (n\pi + \alpha)^2,$$

где значение α зависит от частного вида граничных условий как в a , так и в b .

Сравнение с рядом Фурье. Из этого исследования мы видим, что в высших членах любой ряд по собственным функциям ведет себя подобно ряду Фурье. Можно доказать, что разность между первыми n членами ряда по собственным функциям и первыми n членами ряда Фурье, взятых для одного и того же интервала и для одной и той же функции, является равномерно сходящейся к нулю при неограниченном возрастании n .

Чтобы это показать, перейдем к новой независимой переменной ζ и новой зависимой переменной y , как указано в (6.3.22). Обозначим через $f(\zeta)$ представляемую функцию $F(z)$, умноженную на $(pr)^{1/4}$ и выраженную через ζ . При этих операциях в f не появится новых особенностей или разрывов. Разложение f в переменной ζ имеет вид [см. формулы (6.3.17) и (6.3.18)]

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= [p'(z)r(z)]^{1/4} \int_a^b F(t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{E_m^2} \phi_m(z) \phi_m(t) r(t) dt = \\ &= \int_a^b f(\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{E_m^2} y_m(\zeta) y_m(\tau) \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}} dt = \\ &= \int_0^\pi f(\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_m^2} y_m(\zeta) y_m(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_m(z) &= y_m(\zeta)/(pr)^{1/4}, \quad F(t) = f(\tau)/(pr)^{1/4}, \\ \zeta &= \frac{\pi}{J} \int_a^z \sqrt{\frac{r(z)}{p(z)}} dz, \quad \tau = \frac{\pi}{J} \int_a^t \sqrt{\frac{r}{p}} dz, \quad J = \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz, \\ E_m^2 &= \int_a^b \phi_m r dz, \quad N_m^2 = \int_0^\pi y_m^2(\zeta) d\zeta = \frac{\pi E_m^2}{J}. \end{aligned}$$

Однако функцию f можно выразить в интервале $0 < \zeta < \pi$ рядом Фурье. Например, можно применить ряд по косинусам

$$f(\zeta) = \int_0^\pi f(\tau) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{\pi} \cos m\zeta \cdot \cos m\tau d\tau, \quad (6.3.29)$$

где $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = 2$ ($n > 0$) называются *множителями Неймана*.

Если граничные условия, налагаемые на функцию ϕ , таковы, что асимптотический вид ϕ_n дается формулой (6.3.25), то вид членов с y в ряде с возрастанием n будет приближаться к виду косинусоидальных членов. Оба ряда будут приближаться почленно один к другому, и в конце концов отдельные члены станут совсем близкими друг к другу, совпадающими в гораздо больших деталях, чем можно было бы ожидать. Многие ряды

по собственным функциям сходятся лишь условно (то есть сходятся только из-за того, что члены имеют чередующиеся знаки и частично взаимно уничтожаются). Многие из трудностей, сопровождающих исследование представления отдельных функций при помощи собственных функций, происходят из этой слабой сходимости. Эти трудные случаи детально изучены для рядов Фурье, и потому если мы сможем показать, что то, что имеет место для ряда Фурье, справедливо и для других рядов по собственным функциям, то мы избавимся от значительной части работы. Если окажется, что разность между рядами (6.3.28) и (6.3.29) *абсолютно сходится* (то есть ряд из *абсолютных величин* разностей сходится), то тем самым будет установлено требуемое детальное соответствие рядов.

Например, согласно формуле (6.3.11), ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_m^2} y_m(\zeta) y_m(\tau)$$

в определенном смысле представляет дельта-функцию $\delta(\zeta - \tau)$. Такой ряд далек от абсолютной сходимости, но можно показать, что если из граничных условий следует формула (6.3.25), то функция

$$\Phi_n(\zeta, \tau) = \sum_{m=0}^n \left[\frac{1}{N_m^2} y_m(\zeta) y_m(\tau) - \frac{\varepsilon_m}{\pi} \cos m\zeta \cos m\tau \right]$$

при стремлении n к бесконечности ограничена. Мы докажем это интересное соотношение, применяя еще раз асимптотическую форму для y_m , полученную из формулы (6.3.25):

$$y_m(\zeta) \simeq \cos \left[m\zeta + \frac{\zeta}{\pi m} (B - A) + \frac{A}{m} \right],$$

$$A = \frac{J\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{p}{r}} \text{ при } z = a, \quad B - \text{то же выражение при } z = b,$$

$$\begin{aligned} y_m(\zeta) &\simeq \cos \left[\frac{\zeta}{\pi m} (B - A) + \frac{A}{m} \right] \cos m\zeta - \sin \frac{1}{m} \left[\frac{\zeta}{\pi} (B - A) + A \right] \sin m\zeta \rightarrow \\ &\rightarrow \cos m\zeta \left\{ 1 - \frac{1}{2m^2} \left[\frac{\zeta}{\pi} (B - A) + A \right]^2 \right\} - \frac{1}{m} \left[\frac{\zeta}{\pi} (B - A) + A \right] \sin m\zeta, \end{aligned}$$

и нормирующие постоянные имеют вид $N_m^2 \simeq \pi +$ члены порядка $1/m^2$ и выше. Разность между членами в квадратных скобках в выражении Φ_n велика для малых значений m , но для все больших и больших значений m (если n достаточно велико) эта разность приближается к малой величине

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{m} \left\{ \left[\frac{\zeta}{\pi} (B - A) + A \right] \sin m\zeta \cos m\tau - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\tau}{\pi} (B - A) + A \right] \sin m\tau \cos m\zeta \right\} + \text{члены порядка } 1/m^2 \text{ и выше.} \end{aligned}$$

Члены порядка $1/m^2$ сходятся абсолютно, и потому их сумма ограничена; ряд $\sum \frac{\sin m\zeta}{m}$ сходится, и потому сумма членов, умноженных на $1/m$, также ограничена, чем и доказывается ограниченность функции Φ_n при $n \rightarrow \infty$. Мы можем утверждать, что она всегда меньше некоторой конечной величины D , независимо от значений n , ζ или τ (если $0 < \zeta < \pi$, $0 < \tau < \pi$).

При помощи тех же рассуждений можно показать, что разность

$$\int_0^{\pi} \Phi_n(\zeta, \tau) f(\tau) d\tau$$

между первыми n членами разложения непрерывной функции $f(\zeta)$ по собственным функциям y_n и первыми n членами разложения $f(\zeta)$ в ряд по косинусам равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Здесь мы сравниваем наш ряд по собственным функциям с рядом по косинусам. При других граничных условиях надо сравнивать с рядом по синусам и т. д.; оказывается, что для каждого разложения по собственным функциям можно построить ряд Фурье, имеющий с этим разложением такую же тесную связь, как показано выше.

Сформулируем наши выводы на формальном языке: разложение любой непрерывной функции по собственным функциям *сходится или расходится в любой точке так же, как соответствующий ряд Фурье*. В любом интервале оно сходится абсолютно тогда и только тогда, когда соответствующий ряд Фурье сходится абсолютно в этом интервале.

Явление Гиббса. Мы показали, что соответственно выбранный ряд по собственным функциям может дать совпадение в смысле сходимости в среднем, даже если функция имеет конечное число разрывов. Однако надо отметить некоторые трудности, появляющиеся при применении такого ряда для подсчета значений функции вблизи разрыва. На рис. 6.9 показана функция $F(x)$ с разрывом при $x = x_0$. Первые $n+1$ членов соответствующего ряда по собственным функциям

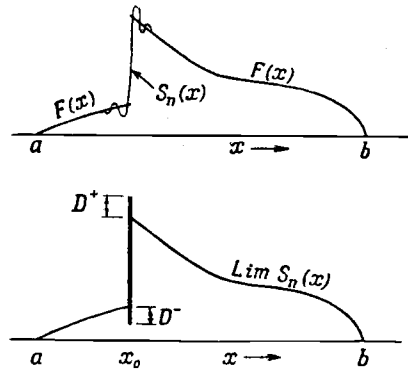


Рис. 6.9. Явление Гиббса. Разрывная функция $F(x)$, приближенная n -й частной суммой $S_n(x)$ ряда.

$$S_n(x) = \int_a^b F(u) \sum_{m=0}^n \frac{1}{E_m^2} \phi_m(x) \phi_m(u) r(u) du$$

не могут дать разрыва, так как конечное число непрерывных функций не может дать бесконечного наклона, требуемого при разрыве. Как показывает тонкая линия на рисунке, частная сумма $S_n(x)$ пытается достичь бесконечного наклона при $x = x_0$, и при этом она *перебегает* за разрыв на некоторое расстояние. Получающаяся кривая для S_n походит на кривую интенсивности света при диффракции у края экрана, причем длина световой волны обратно пропорциональна n . Даже при сколь угодно больших n это «перебегание» сохраняется и полный ряд имеет «закрайны» на концах разрыва, отмеченные буквами D^+ и D^- на второй части рис. 6.9. Эти дополнительные пики нулевой ширины не мешают ряду сходиться к функции в среднем, но указывают на ограничения, связанные с представлением функций при помощи рядов по собственным функциям.

Можно исследовать явление Гиббса более точно, если взять в качестве примера ряд Фурье. Рассмотрим представление функции

$$F(x) = \begin{cases} +1 & \text{для } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{для } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

при помощи ряда, периодического по x с периодом 2π , которое имеет вид

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} dt - \int_{\pi}^{2\pi} dt \right) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\cos mx \cdot \cos mt + \sin mx \cdot \sin mt) \right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2s+1} \sin [(2s+1)x].$$

Здесь перед нами вырожденный случай, однако применение суммы произведений для всех собственных функций под знаком интеграла все еще возможно.

Подсчитаем сумму всех членов от $\sin x$ до $\sin nx$ (это не будет суммой первых n членов, так как в данном случае все члены с четными n отсутствуют), производя суммирование под знаком интеграла до интегрирования. Подинтегральная функция равна

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \cos [m(x-t)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-n}^n e^{im(x-t)} = \frac{1}{2\pi} e^{-in(x-t)} \sum_{s=0}^{2n} [e^{i(x-t)}]^s =$$

$$= \frac{e^{-i(x-t)}}{2\pi} \frac{1 - e^{i(2n+1)(x-t)}}{1 - e^{i(x-t)}} = \frac{\sin [(n+1/2)(x-t)]}{2\pi \sin [(x-t)/2]}, \quad (6.3.30)$$

так что сумма до $\sin nx$ включительно равна

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\sin [(n+1/2)(t-x)]}{\sin [(t-x)/2]} dt - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin [(n+1/2)(t-x)]}{\sin [(t-x)/2]} dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-x}^{\pi-x} d\theta - \int_x^{\pi+x} d\theta \right\} \frac{\sin (n+1/2)\theta}{\sin (\theta/2)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-x}^x \frac{\sin (n+1/2)\theta}{\sin (\theta/2)} d\theta - \int_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\sin (n+1/2)\theta}{\sin (\theta/2)} d\theta \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-(n+1/2)x}^{+(n+1/2)x} du - \int_{(n+1/2)(\pi-x)}^{(n+1/2)(\pi+x)} du \right\} \frac{\sin u}{(2n+1) \sin [u/(2n+1)]}. \quad (6.3.31)$$

Если $0 < x < \pi$, а n велико, то первый из двух интегралов в последних двух формах значительно больше второго. Последняя форма показывает, что если $n \rightarrow \infty$, а x не стремится одновременно к нулю или π (то есть x на некоторую конечную величину больше нуля и меньше π), то второй интеграл стремится к нулю, а первый — к

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1.$$

Значит, в интервале $\varepsilon < x < \pi - \varepsilon$, где ε мало, но, конечно, сумма S_n сходится к 1 при $n \rightarrow \infty$; подобным образом для $\pi + \varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon$ (а также для $-\pi + \varepsilon < x < -\varepsilon$) $S_n \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$.

Однако будем теперь подсчитывать значение S_n для $x = \pi/(2n+1)$, когда n стремится к бесконечности (то есть одновременно с $n \rightarrow \infty$ устремлять $x \rightarrow 0$ по выбранному закону). Вновь отбрасывая второй интеграл, который опять стремится к нулю, имеем

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin u}{u} du = 1,179 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, ряд, пытаясь следовать разрыву при $x=0$, перебегают отметку почти на 18% в области исчезающе малой ширины, прежде чем он возвратится к правильному единичному значению.

Мы уже показали, что ряды по другим собственным функциям по отношению к сходимости ведут себя подобно ряду Фурье. Поэтому надо ожидать подобного перебегания у точек разрыва и для других рядов. Так как область перебегания имеет исчезающе малую ширину, то интеграл от ряда дает правильное значение, даже если интегрирование распространяется на разрыв. Однако требуется соблюдать осторожность при дифференцировании таких рядов. Если данный ряд равномерно сходится, то ряд, получающийся из него почленным интегрированием, сходится наверняка, однако ряд, получающийся при почленном дифференцировании, — не обязательно.

Производящие функции, полиномы Лежандра. Для большинства систем собственных функций имеются простые соотношения между последовательными собственными функциями (рекуррентные формулы), а выражения для нормирующих постоянных часто довольно просты. Многие из этих полезных равенств наиболее легко найти, детально изучая разложение по собственным функциям некоторой более или менее простой функции. Мы ищем функцию двух переменных $\Phi(t, z)$, имеющую разложение вида

$$\Phi(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \psi_n(z), \quad (6.3.32)$$

где ψ_n — изучаемая система собственных функций, а коэффициент a_n не зависит от z и t . Другими словами, функция Φ должна быть так связана с системой ψ_n , чтобы каждый член ее разложения равнялся произведению степени t на соответствующую собственную функцию от z и на коэффициент, не зависящий от z и t . Такая функция Φ называется *производящей функцией* для системы собственных функций ψ_n . Сравнение формулы (6.3.32) с формулами (4.3.3) и (4.3.1) показывает, что производящая функция связана с тем или иным интегральным представлением собственных функций.

Производящие функции часто тесно связаны с построением решений при помощи функции Грина, которое было указано на стр. 653 и 661 и будет изучаться в следующей главе. В качестве примера того, какую помощь могут оказать производящие функции, выведем свойства полиномов Лежандра (см. стр. 560). Эти полиномы появляются при решении уравнения Лапласа в сферических координатах и связаны с функцией Грина $1/R$, где $R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta$, соотношением [см. формулу (5.3.28)]

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad r_1 > r_2.$$

Упростим его для получения производящей функции для $P_n(z)$:

$$\Phi(t, z) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(z), \quad |t| < 1.$$

Отсюда при помощи дифференцирования по t получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{z-t}{(1+t^2-2tz)^{3/2}}, \text{ или } (1+t^2-2tz) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (t-z)\Phi = 0.$$

Подставляя ряд в это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} m t^{m-1} P_m(z) + \sum_{s=0}^{\infty} s t^{s+1} P_s(z) - \sum_{n=0}^{\infty} 2n z t^n P_n(z) + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} t^{s+1} P_s(z) - \sum_{n=0}^{\infty} z t^n P_n(z) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при t^n , находим рекуррентные соотношения $2n+1) z P_n(z) = (n+1) P_{n+1}(z) + n P_{n-1}(z)$ для $n=0, 1, 2, 3, \dots$ (6.3.33)

Дифференцирование Φ по z дает другое соотношение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{t}{(1+t^2-2tz)^{3/2}}, \text{ или } (1+t^2-2tz) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = t\Phi,$$

откуда

$$\sum_{s=0}^{\infty} t^s P'_s + \sum_{m=0}^{\infty} t^{m+2} P'_m = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} [2z P'_n + P_n], \text{ где } P'_n = \frac{d}{dz} P_n(z).$$

Приравнявая коэффициенты при степенях t^{n+1} , получаем

$$P'_0 = 0, \quad P'_1 = P_0, \quad P'_{n+1} + P'_{n-1} = 2z P'_n + P_n, \quad n > 0. \quad (6.3.34)$$

Можно вывести также

$$2t^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + t\Phi = (1-t^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

что приводит к рекуррентным формулам

$$P'_0 = 0, \quad P'_1 = P_0, \quad (2n+1) P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}, \quad n \geq 0. \quad (6.3.35)$$

При помощи комбинирования этих трех равенств или же посредством дальнейшего манипулирования с производящей функцией можно получить дальнейшие формулы:

$$\begin{aligned} P'_{n+1} = (n+1) P_n + z P'_n, \quad P'_{n-1} = -n P_n + z P'_n, \\ (1-z^2) P'_n = n P_{n-1} - n z P_n \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

и, наконец,

$$(1-z^2) P''_n - 2z P'_n + n(n+1) P_n = 0.$$

Последнее, конечно, является дифференциальным уравнением [см. (5.3.23)] для функций Лежандра $P_n(z)$.

При помощи прямого разложения $\Phi(t, z)$ находим, что $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$; остальные P можно получить из формулы (6.3.33). Громоздкие, но не вызывающие затруднений выкладки дают общую формулу

$$P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left\{ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \dots \right\}, \quad (6.3.37)$$

откуда можно найти, что

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (6.3.38)$$

Отсюда или при помощи подстановки $z = \pm 1$ в выражение для Φ и сравнения коэффициентов при t^n получаем

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (6.3.39)$$

Мы видим, что каждая из этих собственных функций представляет собой полином относительно z степени n , имеющий при четном n только четные степени z , а при нечетном n — только нечетные степени. Обратно, каждую степень z можно выразить через конечное число P_n , причем нечетную степень — через P_n с нечетными значениями n , не превосходящими показателя степени z , а четную степень — через P_n со всеми четными n , не превосходящими показателя. Эти разложения можно получить также при помощи непосредственных выкладок:

$$\begin{aligned} 1 &= P_0(z), \quad z = P_1(z), \quad z^2 = \frac{2}{3} P_2(z) + \frac{1}{3} P_0(z), \quad z^3 = \frac{2}{5} P_3(z) + \frac{3}{5} P_1(z), \\ z^n &= \frac{(2n+1)n(n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots(n+1)} P_n(z) + \\ &+ \frac{(2n-3)n(n-2)\dots 4}{(2n-1)(2n-3)\dots(n+1)} P_{n-2}(z) + \dots + \frac{1}{n+1} P_0(z), \\ & \qquad \qquad \qquad n=4, 6, 8, \dots \\ z^n &= \frac{(2n+1)(n-1)(n-3)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots(n+2)} P_n(z) + \\ &+ \frac{(2n-3)(n-1)(n-3)\dots 4}{(2n-1)(2n-3)\dots(n+2)} P_{n-2}(z) + \dots + \frac{3}{n+2} P_1(z), \\ & \qquad \qquad \qquad n=5, 7, 9, \dots \end{aligned} \quad (6.3.40)$$

Значит, любая функция, аналитическая в круге $|z| < 1$ и потому допускающая в нем разложение в сходящийся ряд по степеням z , может быть разложена в сходящийся ряд по функциям $P_n(z)$. Производящая функция Φ для P_n тесно связана с ядром интегрального представления (5.3.26) для P_n , как это, конечно, и должно быть.

Следует, кстати, заметить, что функции Лежандра можно получить следующим образом. Если мы хотим представить любую аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию z , то это можно сделать посредством степенного ряда, но степени z не ортогональны при интегрировании от -1 до $+1$ (хотя они ортогональны при интегрировании по окружности с центром в начале координат); поэтому мы начинаем с 1 и z (которые ортогональны), (выбираем комбинацию z^2 и 1 , ортогональную 1 (и z), и т. д., выбирая каждую функцию $\psi_n(z)$ в виде линейной комбинации $z^n, z^{n-2}, \dots$, ортогональной ψ_m ($m < n$) при интегрировании от -1 до $+1$. Получающиеся ψ_n будут пропорциональны сферическим гармоникам $P_n(z)$ (см. таблицу в конце этой главы).

Формулу, приведенную на стр. 517 и выражающую $P_n(z)$ через n -ю производную от $(z^2 - 1)^n$, можно также получить из производящей функции. Решение квадратного уравнения $y = z + \frac{1}{2} t (y^2 - 1)$, стремящееся к z при $t \rightarrow 0$, равно

$$y = \frac{1}{t} [1 - \sqrt{1 - 2zt + t^2}], \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \Phi(t, z) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_n(z).$$

Однако это решение квадратного уравнения можно получить и при помощи разложения Лагранжа [см. (4.5.8)]:

$$y = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z^2 - 1)^n,$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = \Phi(t, z).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , имеем

$$P_0(z) = 1, \quad P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \quad (6.3.41)$$

Последняя формула дает возможность подсчитать нормирующий интеграл для функций Лежандра. Допустим сначала, что $n > m$. Тогда

$$I_{mn} = \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dz^m} (1 - z^2)^m \frac{d^n}{dz^n} (1 - z^2)^n dz.$$

Интегрируя m раз по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{(-1)^{m+n-1}}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} (1 - z^2)^m \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1 - z^2)^n dz = \dots = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} (1 - z^2)^m \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} (1 - z^2)^n dz = \\ &= \frac{(-1)^{n-m} (2m)!}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} (1 - z^2)^n dz = 0, \quad > m. \end{aligned}$$

С другой стороны, если $n = m$, то последний интеграл равен

$$I_{nn} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - z^2)^n dz = \frac{2}{2n+1} = E_n^2. \quad (6.3.42)$$

Таким образом, мы показали, что эти функции взаимно ортогональны (как это, конечно, и должно быть, поскольку они являются собственными функциями), и подсчитали нормирующие постоянные E_n [см. формулу (6.3.16)]. Для доказательства того, что система полна и что ряд

$$S(x) = \int_{-1}^1 f(\zeta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(\zeta) \right] d\zeta \quad (6.3.43)$$

дает хорошее совпадение в смысле сходимости в среднем для произвольной кусочно-гладкой функции $f(x)$, можно применить наши общие вариационные соображения. Можно ожидать, конечно, что вблизи каждого разрыва будет наблюдаться явление Гиббса, но что ряд можно интегрировать, будучи уверенным, что такие интегралы всегда равны соответствующим интегралам от функции f . (Однако можно встретиться с затруднениями при дифференцировании ряда.) Например, если f — непрерывная функция, то ряд в квадратных скобках в формуле (6.3.43) можно считать эквивалентным дельта-функции $\delta(x - \zeta)$ в области $-1 < (x, \zeta) < 1$.

Кроме дельта-функции, при помощи ряда по полиномам Лежандра можно представить другую чрезвычайно полезную функцию:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(w)}{z-w} dw P_n(\zeta).$$

Если z не находится на вещественной оси между -1 и $+1$, то интеграл в квадратных скобках сходится и может быть подсчитан при помощи интегрирования по частям:

$$(-1)^n \frac{2n+1}{2^{n+1}n!} \int_{-1}^1 \frac{1}{z-w} \frac{d^n}{dw^n} (1-w^2)^n dw = \frac{2n+1}{2^{n+1}} \int_{-1}^1 \frac{(1-w^2)^n}{(z-w)^{n+1}} dw = (2n+1) Q_n(z),$$

где $Q_n(z)$ [см. формулу (5.3.29)] — функция Лежандра второго рода. Мы получаем полезный ряд

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(z) P_n(\zeta). \quad (6.3.44)$$

Он сходится только при $|z| > 1$ и $|\zeta| < 1$, но интегралы от этого ряда, умноженного на аналитические функции, можно рассматривать для еще более широких областей переменных, чем в случае ряда для дельта-функции. Однако важно помнить, что область определения функции $Q_n(z)$ из-за ветвления имеет разрез вдоль вещественной оси z между -1 и $+1$.

Последнее равенство имеет некоторые интересные и полезные следствия. Во-первых, разложение функции $f(z)$, аналитической внутри эллипса C , имеющего фокусы в точках ± 1 , и на нем, записывается в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),$$

где коэффициент a_n определяется любой из следующих формул:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2\pi i} \oint_C f(t) Q_n(t) dt = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \\ &= \frac{n+1/2}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) dx. \end{aligned} \quad (6.3.45)$$

Первая форма интеграла полезна для функций, аналитических при больших значениях $|z|$, так как на контуре C можно применить асимптотическую формулу (5.3.30) для Q_n вдоль большого эллипса. Во-вторых, применяя производящую функцию для P_n , мы находим, что

$$(1+t^2-2tz)^{-1/2} - \operatorname{arch} \frac{t-z}{\sqrt{z^2-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n Q_n \quad (6.3.46)$$

чем определяется производящая функция для Q_n (хотя Q_n не является собственной функцией).

Из подходящих производящих функций можно вывести много других полезных систем одномерных собственных функций. Некоторые из них будут приведены в таблице в конце этой главы, некоторые другие войдут в задачи.

Собственные функции для нескольких измерений. До сих пор мы исследовали собственные функции для одного измерения, именно, решения уравнения Лиувилля с одним независимым переменным, удовлетворяющие граничным условиям довольно общего типа в двух концах интервала. Уравнения с частными производными по трем или более переменным порождают собственные функции, зависящие от более чем одного переменного. Это — решения уравнения с частными производными, полученного при отделении одной из координат, оставившей взамен себя константу разделения. Решение этого уравнения должно удовлетворять некоторому простому граничному условию вдоль некоторой граничной линии или поверхности (обычно однородным условиям Дирихле или Неймана или же их однородной комбинации). Это обычно возможно только для некоторых дискретных значений (собственных значений) константы разделения.

Многие из выводов теории Штурма-Лиувилля можно перенести на многомерный случай. Для большинства видов уравнения имеется наименьшее собственное значение, и собственная функция, соответствующая этому наименьшему (низшему) значению, обычно не имеет узловых линий (или поверхностей) внутри границы. Однако собственные функции нельзя расположить в каком-либо простом, линейном порядке, как это было в случае одного измерения. Трудность состоит в том, что имеется более одного решения с одним узлом (даже если нет вырождения). Однако можно расположить решения в своего рода двумерном порядке, так как обычно оказывается, что узлы в двумерном случае распадаются на два семейства (см. стр. 472) и возрастание числа узлов одного рода всегда влечет возрастание соответствующего собственного значения.

В тех случаях, когда имеется наименьшее собственное значение, когда собственные значения не имеют верхней грани и существует вариационное уравнение, эквивалентное дифференциальному уравнению для собственных функций, можно применить рассуждения, изложенные на предыдущих страницах, для доказательства того, что эти более общие собственные функции образуют полную ортогональную систему (а в вырожденных случаях они могут быть сделаны ортогональными), при помощи которой можно представить в виде ряда любую кусочно-гладкую функцию внутри границы.

Если уравнение с частными производными для собственных функций само разделяется, эти факты легко доказать. Каждая собственная функция равна тогда просто произведению собственных функций от разделенных координат (за исключением вырожденных случаев, когда решения могут быть конечными комбинациями произведений для каждого из вырожденных состояний). Ортогональность и полноту можно вывести из ортогональности и полноты одномерных множителей.

В качестве примера можно рассмотреть случай однородной гибкой мембраны плотности ρ (на единицу площади), натянутой на жесткую опору с равномерной силой натяжения T на единицу длины. Уравнением движения будет волновое уравнение

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{T}{\rho},$$

где Ψ — смещение мембраны от ее положения равновесия. Предполагая простую гармоническую зависимость от времени, можно отделить временной множитель, так как $\Psi = \phi(x, y)e^{-i\omega t}$, где

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad (6.3.47)$$

получается уравнение Гельмгольца в двух переменных x и y (или, после преобразования, в переменных r и ϕ и т. д.) с константой разделения k^2 .

Если опора имеет вид прямоугольника со сторонами, лежащими на прямых $x=0$ и a , $y=0$ и b , то собственные функции и собственные значения равны

$$\begin{aligned}\psi_{mn}(x, y) &= \sin(\pi mx/a) \sin(\pi ny/b), \\ k_{mn}^2 &= \pi^2 [(m/a)^2 + (n/b)^2], \quad m, n = 1, 2, 3, 4, \dots\end{aligned}\quad (6.3.48)$$

Так как отдельные множители взаимно ортогональны, то и произведения обладают этим свойством, и при помощи тех же рассуждений, что и выше, получаем, что ψ_{mn} образуют полную систему. Узловые линии (линии внутри прямоугольника, где $\psi=0$) либо перпендикулярны оси x , либо же перпендикулярны оси y . Число первых и вторых равно соответственно $m-1$ и $n-1$. Значит, хотя расположение k_{mn}^2 в порядке возрастания не порождает простой последовательности чисел m и n , тем не менее возрастание m на 1 увеличивает на 1 число узлов, перпендикулярных оси x , и увеличивает соответствующее k^2 , а возрастание n на 1 увеличивает число узлов, перпендикулярных оси y , и также увеличивает k^2 .

Если $a=b$, имеем вырожденный случай, так как тогда $k_{mn}=k_{nm}$ и для одного и того же собственного значения k имеется по крайней мере две собственные функции. В этом случае в качестве собственной функции можно было бы взять любую линейную комбинацию функций ψ_{mn} и ψ_{nm} . Поскольку уже ψ_{mn} взаимно ортогональны, целесообразно пользоваться ими самими.

Значит, любую кусочно-гладкую функцию $f(x, y)$ можно разложить в ряд

$$f(x, y) = \sum_{m,n} \left[\frac{4}{ab} \int_0^a du \int_0^b dv f(u, v) \psi_{mn}(u, v) \right] \psi_{mn}(x, y). \quad (6.3.49)$$

Если $f(x, y)$ является аналитической функцией при $0 < x < a$ и $0 < y < b$, то ряд будет равномерно сходиться в этих интервалах; если f имеет разрывы, то для ряда может обнаруживаться явление Гиббса у разрывов, однако почленно проинтегрированный ряд будет сходиться.

Если в соответствующих границе координатах уравнение не разделяется, то его анализ несколько более сложен. К сожалению, подробно исследовано только два неразделяющихся случая, в одном из которых граница представляет собой прямоугольный равнобедренный треугольник. Возможно, что это слишком простой случай, чтобы выявить все сложности; тем не менее он заслуживает некоторого внимания (см. § 11.2).

Чтобы сделать наше изложение конкретным, вновь рассмотрим мембрану, но сейчас будем считать, что граница состоит из трех прямолинейных отрезков, соединяющих начало координат и точки $(0, a)$ и $(a, 0)$. Уравнения будут те же, что и выше, и для простой гармонической зависимости от времени получится уравнение Гельмгольца (6.3.47). Решение, равное произведению $\sin(\mu\pi x/a) \cdot \sin(\nu\pi y/a)$, обращается в нуль на частях осей x и y , принадлежащих границе, но не равно нулю вдоль третьей, диагональной части. Однако комбинация

$$\sin(\mu\pi x/a) \sin(\nu\pi y/a) \mp \sin(\mu\pi y/a) \sin(\nu\pi x/a)$$

равна нулю и вдоль этой части (знак $-$ или $+$ ставится в зависимости от того, будет ли число $|\mu - \nu|$ четным или нечетным). Значит, для этого

случая собственными функциями являются

$$\psi_{mn}(x, y) = \sin \left[\frac{\pi}{a} (m+n) x \right] \sin \left[\frac{\pi}{a} n y \right] - (-1)^m \sin \left[\frac{\pi}{a} (m+n) y \right] \sin \left[\frac{\pi}{a} n x \right], \quad (6.3.50)$$

где m и n — целые положительные числа. Чтобы показать, как удовлетворить граничным условиям вдоль диагональной части границы, повернем наши оси на $\pi/4$, положив

$$x = (1/\sqrt{2})(\xi - \eta), \quad y = (1/\sqrt{2})(\xi + \eta), \\ \alpha = \sqrt{2}a,$$

где координатные оси ξ и η показаны на рис. 6.10. Совершая несколько тригонометрических преобразований, получаем

$$\begin{aligned} \psi_{mn} &= \sin \left[\frac{\pi}{a} (m+2n) \xi \right] \sin \left[\frac{\pi}{a} m \eta \right] - \\ &- \sin \left[\frac{\pi}{a} (m+2n) \eta \right] \sin \left[\frac{\pi}{a} m \xi \right] \\ &\quad \text{при } m = 2, 4, \dots, \\ &= \cos \left[\frac{\pi}{a} (m+2n) \eta \right] \cos \left[\frac{\pi}{a} m \xi \right] - \\ &- \cos \left[\frac{\pi}{a} (m+2n) \xi \right] \cos \left[\frac{\pi}{a} m \eta \right] \\ &\quad \text{при } m = 1, 3, \dots, \end{aligned}$$

откуда видно, что ψ обращается в нуль при $\xi = a/2$, чему соответствует диагональная часть границы.

Собственные значения в этом случае равны

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 [(m+n)^2 + n^2] = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 [m^2 + 2mn + 2n^2]; \quad (6.3.51)$$

они имеют наименьшее значение ($m=n=1$) и не имеют верхней грани. Собственные функции взаимно ортогональны и являются решениями вариационного уравнения

$$\iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0, \quad \iint \psi^2 dx dy = E_{nm}^2 = \frac{1}{8} a^2.$$

Следовательно, эти функции образуют полную систему. Однако взаимосвязь между значениями k^2 , с одной стороны, и числом и расположением узловых линий, с другой, не очевидна.

Узловые линии для некоторых из собственных функций показаны на рис. 6.10. Заметим, что эти линии не распадаются на два взаимно ортогональных семейства, как это будет для прямоугольной границы (и в действительности для всех случаев разделения). Можно сказать только, что если m или n возрастает, то число узлов увеличивается и k^2 возрастает (это является существенным результатом теории Штурма — Лиувилля).

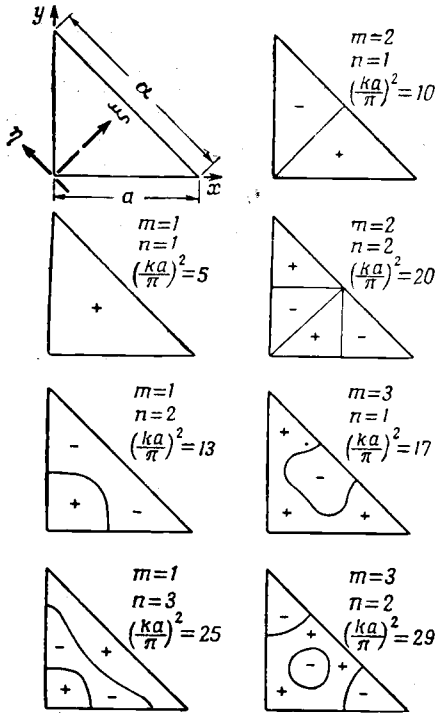


Рис. 6.10. Собственные функции для треугольной мембраны.

Линии внутри границы обозначают положение узловых линий, на которых $\psi=0$, для малых значений квантовых чисел m и n .

Разложение функции $f(x, y)$ по этим собственным функциям имеет тот же вид, что и (6.3.49), однако интегралы в квадратных скобках берутся по внутренности треугольника вместо внутренности прямоугольника, а множитель $4/a^2$ перед интегралами заменяется на $8/a^2$. Относительно сходимости можно сделать такие же замечания, какие были сделаны несколько выше.

Разделимость констант разделения. Осложнения, появляющиеся, если для данной границы нет подходящих разделяющих координат, обычно столь существенны, что систему собственных функций нельзя подсчитать, а краевую задачу нельзя решить. Но даже если разделение можно осуществить, могут возникнуть некоторые до сих пор не отмеченные осложнения, которые делают решение краевой задачи практически весьма затруднительным. Эти трудности появляются в случаях, рассмотренных на стр. 489—491, когда нет полного разделения *констант разделения*.

Если константы разделения разделяются [случай А, формула (5.1.41)], то уравнения для ξ_2 - и ξ_3 -множителей содержат только одну константу разделения каждое и тем самым отвечают простому виду уравнения Лиувилля, которое мы уже подробно исследовали. Граничные условия для множителя X_2 определяют собственные значения k_2 , а условия для X_3 — собственные значения k_3 , и эти значения можно подставить как известные постоянные в уравнение для X_1 , чтобы определить собственные значения k_1 . Ряд по собственным функциям, получающийся при удовлетворении граничного условия на поверхности $\xi_1 = \text{const}$, представляет собой тогда простой двойной ряд по всем собственным значениям k_2 и всем собственным значениям k_3 .

В случае B_2 , указанном в формуле (5.1.42), все еще возможно получить собственные значения для одного множителя, а именно X_3 , не зная значений других констант разделения.

Однако в других случаях константы разделения не разделяются и построение рядов по собственным функциям для удовлетворения граничных условий требует для каждого члена ряда одновременного решения системы уравнений для двух собственных значений. В качестве примера возникающих осложнений и в то же время для указания метода решения рассмотрим случай колебаний эллиптической мембраны. Разделяя уравнение Гельмгольца $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ в эллиптических координатах:

$$x = d \cos \varphi \cdot \text{ch } \mu, \quad y = d \sin \varphi \cdot \text{sh } \mu, \quad \psi = M(\mu) \Phi(\varphi),$$

получаем

$$\frac{d^2 M}{d\mu^2} + (h^2 \text{ch}^2 \mu - b) M = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + (b - h^2 \text{sh}^2 \varphi) \Phi = 0,$$

где $h = kd$, а k связано с частотой колебания $\nu = \omega/2\pi$ (поскольку применение уравнения Гельмгольца соответствует допущению, что движение является простым гармоническим, с временным множителем $e^{-i\omega t}$) соотношением $k = \omega/c = 2\pi\nu/c$. Постоянная b представляет собой константу разделения, однако, конечно, $h = 2\pi\nu d/c$ также является константой разделения, так что оба уравнения содержат обе константы. Согласно сказанному в § 5.2, второе из этих уравнений совпадает с уравнением (5.2.67).

Граничное условие для Φ состоит в периодичности по φ , а граничное условие для M — в том, что M должно быть конечным и непрерывным при $\mu = 0$ и обращаться в нуль на эллипсе $\mu = \mu_0$, соответствующем границе. Надо выбрать b и h одновременно так, чтобы оказались выполненными обе системы условий.

Для этого мы решим уравнение относительно Φ , считая h известным. Как показано на стр. 530, периодические решения уравнения Матье выра-

жаются в виде рядов Фурье. Их два сорта: одна система решений $Se_m(h, \cos \varphi)$, четных по φ , и другая система решений $So_m(h, \cos \varphi)$, нечетных по φ ; первой системе собственных функций соответствуют собственные значения $be_m(h)$, а второй системе — собственные значения $bo_m(h)$. Эти собственные значения перемежаются, так что для данного h

$$be_0 < bo_1 < be_1 < \dots < bo_m < be_m < bo_{m+1} < \dots$$

Значит, если h было бы произвольным образом фиксировано, то последовательность Se , So образовывала бы полную ортогональную систему собственных функций.

Однако h не фиксировано, и поэтому мы получили только взаимосвязь между h и последовательностью значений b , при которой удовлетворяются граничные условия для Φ .

Решения уравнения для M даются формулами (5.3.90) и (5.3.91), и потому нам надо сначала выяснить, будут ли функции Je и Ne удовлетворять условию непрерывности при $\mu = 0$. Рассмотрение данных координат показывает, что ($\mu = 0$, $\varphi = \alpha$) и ($\mu = 0$, $\varphi = -\alpha$) определяют одну и ту же точку ($x = d \cos \alpha$, $y = 0$), и после нескольких минут размышления мы увидим, что для непрерывности Φ и ее производной при переходе через линию $\mu = 0$ множитель M должен иметь на ней нулевую производную, если множитель Φ четен по φ , и M должен обращаться в нуль при $\mu = 0$, если множитель Φ нечетен по φ . В силу сказанного на стр. 595, мы видим, что для $Se_m(h, \cos \varphi)$ подходит решение $Je_m(h, \operatorname{ch} \mu)$ с теми же значениями h и m (то есть с тем же значением b), а для So_m подходит решение Jo_m с соответствующими h и m . Значит, в этой задаче функции Ne , No не применяются.

Наконец, потребуем, чтобы выполнялось условие $M = 0$ при $\mu = \mu_0$. Для любого данного значения b можно выбрать h так, чтобы это имело место, но, конечно, b также зависит от h , так что h и b надо определять одновременно. На практике следует подсчитать ряд кривых, дающих последовательность значений μ , при которых $Je_m(h, \operatorname{ch} \mu)$, например, обращается в нуль для каждого из различных значений h . Эти значения можно обозначить через $\mu_{mn}^e(h)$, причем индекс m соответствует индексу для Je_m , а индекс n указывает, какую точку мы имеем в виду из последовательности нулевых точек (μ_{m1} может быть наименьшим значением, μ_{m2} — следующим и т. д.).

Таким образом, мы имеем двойную последовательность значений μ в соответствии с различными значениями m и различными значениями n . Каждое из этих значений является функцией от h . Теперь мы обращаем задачу, находя значение h , которое делает один из корней $\mu_{mn}^e(h)$ равным координате μ_0 границы. Корень уравнения $\mu_{mn}^e(h) = \mu_0$ обозначим через he_{mn} , а уравнения $\mu_{mn}^o(h) = \mu_0$ — через ho_{mn} . С помощью этих значений можно затем подсчитать допустимые значения частоты γ свободных колебаний эллиптической мембраны. Частному значению частоты $\omega_{mn}^e/2\pi = (c/2\pi d) he_{mn}$ будет соответствовать двумерная собственная функция $Se_m(he_{mn}, \cos \varphi) \cdot Je_m(he_{mn}, \operatorname{ch} \mu)$, а частоте $\omega_{mn}^o/2\pi = (c/2\pi d) ho_{mn}$ — другая собственная функция $So_m(ho_{mn}, \cos \varphi) Jo_m(ho_{mn}, \operatorname{ch} \mu)$. Отсюда полное решение будет записываться в виде

$$\sum_{m,n} [A_{mn} Se_m Je_m \cos(\omega_{mn}^e t + \alpha_{mn}) + B_{mn} So_m Jo_m \cos(\omega_{mn}^o t + \beta_{mn})],$$

где числа A , B , α и β определяются начальными значениями смещения и скорости мембраны.

Очевидно, конечно, что множители Se , So взаимно ортогональны, если все они соответствуют одному и тому же значению h . Однако члены пос-

ледного ряда берутся для различных значений h каждый, так что ни множители Se_m , ни множители So_m не являются все взаимно ортогональными (хотя все Se все еще ортогональны всем So). Однако общие рассуждения, проведенные на стр. 676, показывают, что рассматриваемые двумерные собственные функции взаимно ортогональны, так что функции $Je_m(he_{mn}, \text{ch } \mu)$, а также функции $Jo_m(ho_{mn}, \text{ch } \mu)$ должны быть взаимно ортогональными в интервале $0 < \mu < \mu_0$ для различных значений n , тогда как функции $Se_m(he_{mn}, \cos \varphi)$ должны быть взаимно ортогональными для различных значений m . Значит, все члены ряда ортогональны друг другу, и коэффициенты A , B и фазовые углы α , β можно определить обычным образом.

На этом примере мы показали, что технику удовлетворения граничным условиям при помощи собственных функций можно применить всегда, если в соответствующих границе координатах уравнение разделяется, даже если константы разделения не разделяются в получающихся обыкновенных уравнениях. Такие случаи требуют значительно больших подсчетов для получения решения, чем случаи, когда одно из разделенных уравнений содержит только одну константу разделения; однако эти выкладки являются прямыми, не требующими привлечения новых принципов.

Плотность собственных значений. Довольно случайное распределение собственных значений, обнаруживающееся уже для простых двумерных случаев, вызывает вопрос, который мы до сих пор не ставили: можно ли что-либо сказать о числе собственных значений между λ и $\lambda + \varepsilon$? Это число является разрывной функцией от λ и ε (так как собственные значения образуют дискретное множество), однако можно попытаться подсчитать *среднее* число собственных значений между λ и $\lambda + \varepsilon$. Возможно, что эта величина будет «сглаженным» приближением истинного числа и будет непрерывной функцией от λ и ε .

Такую *асимптотическую функцию плотности* собственных значений можно получить для одномерного случая при помощи асимптотической формулы, следующей за формулой (6.3.27). При этом мы будем подсчитывать плотность чисел k_n , где $k_n^2 = \lambda_n$. Это, вообще говоря, более полезно. Например, если мы имеем дело с волновым уравнением, то k пропорционально допустимой частоте свободных колебаний системы. Условно будем называть k_n также собственным значением. Асимптотическая формула для k_n имеет вид

$$k_n = \sqrt{\lambda_n} \simeq (n\pi + \alpha) / \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz.$$

Эта формула указывает на то, что большие значения k распределены вдоль вещественной оси k равномерно. Асимптотически расстояние между последовательными значениями равно $\pi / \int \sqrt{r/p} dz$, откуда число собственных значений, меньших k ,

$$n(k) \simeq \frac{k}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz,$$

и потому среднее число собственных значений между k и $k + dk$

$$dn \simeq \left[\frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}} dz \right] dk, \quad (6.3.52)$$

где величину в квадратных скобках можно назвать *средней плотностью* собственных значений k для больших значений k .

Заметим, что эта плотность пропорциональна интегралу от функции $\sqrt{r/p}$, взятому по интервалу (a, b) . Если r и p имеют одинаковую размерность (в этом случае $1/k$ имеет размерность длины), то интеграл от $\sqrt{r/p}$ имеет размерность длины. Для одномерного волнового уравнения r и p равны единице и средняя плотность собственных значений равна как раз произведению $1/\pi$ на расстояние от a до b . Подинтегральная функция $\sqrt{r/p}$ связана с коэффициентами Ламе криволинейных координат, так что отклонение $\sqrt{r/p}$ от единицы некоторым образом связано с кривизной рассматриваемой координаты. Интеграл $\int \sqrt{r/p} dz$ можно назвать

эффективной длиной интервала для изучаемой координаты и границы.

Обращаясь теперь к двумерному случаю, мы находим здесь, что плотность собственных значений k уже не является даже приблизительно не зависящей от k . Например, рассматривая значения, данные в формуле (6.3.48), для прямоугольной мембраны, мы найдем, что плотность собственных значений *возрастает* с возрастанием k . Это легко показать вследствие особенно простой взаимосвязи между k и целыми m и n в случае прямоугольной мембраны. Формула (6.3.48) аналогична соотношению, определяющему расстояние от начала координат до точки, заданной декартовыми координатами $\pi m/a$ и $\pi n/b$. Эти точки, для целых значений m и n , на рис. 6.11 являются точками пересечения линий прямоугольной сетки. Допустимые значения k отвечают расстоянию любой из этих точек решетки от начала координат.

Можно поэтому говорить о «плотности допустимых точек в пространстве k ». Так как интервалы решетки в двух направлениях равны π/a и π/b , то средняя плотность точек равна ab/π^2 , где $ab = A$, то есть *площади*, заключенной внутри границы. Следовательно, для этого простого случая среднее число собственных значений k , меньших некоторого k ,

$$n(k) \simeq \frac{A}{\pi^2} \left(\frac{1}{4} \pi k^2 \right) = \frac{A}{4\pi} k^2,$$

где величина в круглых скобках представляет собой площадь, заключенную между линиями $r = k$, $y = 0$ и $x = 0$. Дифференциал

$$dn \simeq \left[\frac{Ak}{2\pi} \right] dk \quad (6.3.53)$$

дает плотность собственных значений k для этого простого случая (величина в квадратных скобках). Мы видим, что она пропорциональна k (это мы и хотели доказать), а также пропорциональна площади A , заключенной внутри прямоугольной границы.

Однако можно пойти дальше, так как мы замечаем, что на рис. 6.11 точки покрывают не весь первый квадрант. Так как точки с $m = 0$ или с $n = 0$ отсутствуют (для граничного условия $\psi = 0$), то надо удалить половину полос решетки, примыкающих к обоим осям, и более точная

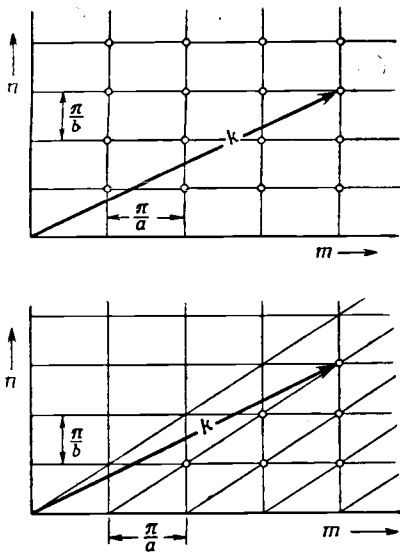


Рис. 6.11. Распределение собственных значений для прямоугольной и треугольной мембран.

Длина вектора k равна значению $\sqrt{\lambda}$.

формула будет иметь вид

$$n(k) \simeq (ab/\pi^2) \left[\pi k^2/4 - (k\pi/2a) - (k\pi/2b) \right] = (A/4\pi) k^2 - (L/4\pi) k,$$

или

$$dn \simeq [(Ak/2\pi) - (L/4\pi)] dk, \quad (6.3.54)$$

где $L = 2a + 2b$ представляет собой периметр границы.

Этот второй член в выражении для плотности собственных значений зависит от граничных условий. Например, если граничные условия на прямоугольнике состоят в равенстве нулю нормальной производной от ψ , а не самой ψ , то выражение для собственных значений k будет то же, но точки с $m=0$ и $n=0$ теперь допускаются. Следовательно, в этом случае функция плотности имела бы вид $(Ak/2\pi) + (L/4\pi)$.

Получается, что первый член в средней плотности не зависит от точного вида поставленных граничных условий, по крайней мере для *некоторых* типов граничных условий, а зависит только от площади, заключенной внутри границы. Второй член зависит от частного вида наложенного граничного условия.

Можно разобрать другие случаи, когда известны точные решения двумерного уравнения Гельмгольца (например, случай круглой мембраны). Оказывается, что если вид границы меняется, но площадь A остается постоянной, то точки, изображающие допустимые значения k , перемещаются на « k -плоскости», однако *средняя плотность точек не меняется*. Кроме того, можно показать, что если граничные условия не меняются при варьировании вида границы, то поправочный член (член с периметром L границы) не меняет своей формы. Можно проверить оба эти утверждения, рассмотрев случай треугольной мембраны. Здесь удаление половины площади исключает половину точек в первом квадранте. Детальный подсчет показывает, что для граничного условия $\psi=0$ формула (6.3.54) имеет место, причем $A = a^2/2$ и $L = 2a + \sqrt{2}a^2$.

По-видимому, формула (6.3.54) справедлива для границы любого вида при условиях $\psi=0$ на границе. Доказано, что форма первого члена (который является главным членом для больших k) сохраняется в общем случае. На второй член доказательство не было распространено, хотя во всех подробно разработанных случаях не было найдено ни одного противоречащего примера. Во всяком случае, если мы имеем дело с большими значениями k , то можно пренебречь вторым членом в плотности и пользоваться только первым членом, о котором известно, что он пригоден для любых границ и любых разумных граничных условий.

Таким образом, для собственных функций с большими номерами плотность собственных значений не зависит от k в одномерных случаях, пропорциональна k в двумерных случаях и, аналогично, пропорциональна k^2 в трехмерных случаях. В каждом случае плотность также пропорциональна «размеру» части пространства, заключенного внутри границы: длине для одного измерения, площади для двух и т. д. Если уравнение есть уравнение Гельмгольца, а интервал не искривлен, то эти «размеры» являются настоящими длинами, площадями и т. д.; но если координаты криволинейные и линии или поверхности, составляющие границу, искривлены, то «размеры» являются эффективными длинами, площадями и т. д., равными интегралам от некоторых комбинаций коэффициентов Ламе, подобным интегралу $\int \sqrt{r/p} dz$ для одномерного случая.

Непрерывное распределение собственных значений. Из предыдущего рассуждения мы видим, что при возрастании размера области промежутки между собственными значениями уменьшаются. Например, в одномерном случае средняя разность между последовательными собственными значениями, согласно формуле (6.3.52), равна отношению π к эффективной длине $\int \sqrt{r/p} dz$ интервала. Если эта длина стремится к бесконечности, то промежутки между собственными значениями стремятся к нулю, и в конце концов *все значения λ (или k), большие наименьшего значения, становятся собственными значениями*. В этом предельном случае получается непрерывное распределение собственных значений, и наши представления рядами превращаются в интегральные представления.

Этот переход можно показать, развивая наш первый пример, приведенный на стр. 659. Допустим, что расстояние a между концами интервала изменения x неограниченно возрастает. Тогда длина волны собственной функции $\sin(\pi n x/a)$ при данном n , а также нормирующая постоянная $E_n = \sqrt{a/2}$ этой функции будут расти. Ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(\zeta) \sin \frac{\pi n \zeta}{a} d\zeta$$

сохранит свой общий вид, но каждый отдельный член будет уменьшаться по величине и (для данного конечного значения x) будет изменяться все менее и менее быстро при переходе от n к следующему n ; при росте n каждый член становится исчезающе малым, а скорость изменения коэффициентов в квадратных скобках — исчезающе медленной. При переходе к пределу целесообразно применять не n в качестве переменной суммирования, а квадратный корень $k = \pi n/a$ из константы разделения λ . Промежутки между допустимыми значениями этой переменной становятся все меньше и меньше, пока в конце концов k не станет непрерывной переменной и суммирование по n не превратится в интеграл по k от нуля до бесконечности.

Когда a растет, среднее число $(a/\pi) dk$ собственных значений k между k и $k + dk$, выражаемое формулой (6.3.52), становится все ближе и ближе к истинному числу, так как на любом конечном сегменте dk находится все больше и больше допустимых значений k . В то же время последовательные члены суммы, взятые для собственных функций при этих собственных значениях внутри dk , отличаются друг от друга все меньше и меньше (во всяком случае, для конечных значений x), так что в конечном счете можно представить сумму всех членов между $n = ak/\pi$ и $n + (a dk/\pi)$ в виде

$$\frac{a dk}{\pi} \sin kx \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(\zeta) \sin k\zeta d\zeta,$$

и, когда a стремится к пределу, сумма в конце концов переходит в интеграл

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kx \int_0^a f(\zeta) \sin k\zeta d\zeta dk, \quad (6.3.55)$$

который можно применять для представления любой кусочно-гладкой функции в интервале $0 < x < \infty$, обращающейся в нуль на концах интервала. Это — один из видов интеграла Фурье (см. стр. 429). К более общему

виду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikh} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \quad (6.3.56)$$

можно прийти, рассматривая более общие граничные условия, чем условие периодичности с периодом a функций от x .

Однако вовсе не обязательно получать свойства собственных функций для непрерывных собственных значений при помощи неуклюжего предельного процесса. С точки зрения функционального пространства вектор $\mathbf{F}$, представляющий любую функцию F , можно выразить через его компоненты $F(x)$ вдоль единичных векторов $\mathbf{e}(x)$ (соответствующих каждому значению x из рассматриваемого интервала) или через его компоненты $f(k)$ вдоль другой системы единичных векторов $\mathbf{e}(k)$ (соответствующих каждому допустимому значению k). Вместо одного непрерывного множества и одного дискретного множества мы имеем теперь два непрерывных множества, что дает более симметричную картину.

Собственные функции по-прежнему являются проекциями векторов $\mathbf{e}(k)$ на векторы $\mathbf{e}(x)$, но так как здесь получаются две системы единичных векторов, то эти собственные функции представляют собой теперь направляющие косинусы, и весь формализм приобретает значительную симметрию. Собственные функции $\psi(k, x)$ являются в одно и то же время как компонентами векторов $\mathbf{e}(k)$ по векторам $\mathbf{e}(x)$, так и компонентами векторов $\mathbf{e}(x)$ по векторам $\mathbf{e}(k)$. Распространяя формулы (6.3.17) на рассматриваемый случай, получаем, что компонента $F(x)$ произвольного вектора $\mathbf{F}$ по направлению $\mathbf{e}(x)$ связана с компонентой $f(k)$ вектора $\mathbf{F}$ по направлению, задаваемому вектором $\mathbf{e}(k)$, при помощи соотношений

$$F(z) = \int f(k) \psi(k, z) r(k) dk, \quad f(k) = \int F(z) \bar{\psi}(k, z) r(z) dz, \quad (6.3.57)$$

где функция $r(k)$ связана с плотностью собственных значений k вдоль оси k так же, как $r(x)$ связана с плотностью собственных значений вдоль x .

Интегрирование здесь производится по областям допустимых значений k и x , иногда от 0 до ∞ , но чаще от $-\infty$ до ∞ . Возможность устремления k к $-\infty$ не означает, что собственные значения λ не имеют нижней границы, так как $\lambda = k^2$, и если только k вещественно, то $\lambda > 0$. Кроме того, когда мы включаем отрицательные значения k , можно считать ψ комплексной величиной (как e^{ikh} в примере), если пользоваться комплексно сопряженной величиной $\bar{\psi}$ во втором интеграле.

Свойства нормированности и ортогональности этих собственных функций выражаются при помощи формул, обобщающих формулы стр. 677:

$$\begin{aligned} r(k) \int \psi(k, z) \bar{\psi}(x, z) r(z) dz &= \delta(k - x), \\ r(z) \int \psi(k, z) \bar{\psi}(k, \zeta) r(k) dk &= \delta(z - \zeta), \end{aligned} \quad (6.3.58)$$

причем оба интеграла соответствуют дельта-функции. Функции ψ представляют собой направляющие косинусы, поскольку и $\mathbf{e}(x)$, и $\mathbf{e}(k)$ являются единичными векторами, так что множители E_m равны единице и не присутствуют в формулах явно. Как всегда, для выражений, соответствующих дельта-функциям, они должны применяться в интегралах, а не в дифференциалах или сами по себе. Наиболее полезный вид нормирующего интеграла, соответствующего обычному определению дельта-функ-

ции, таков:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \delta(z - \zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| > \Delta, \\ 1 & \text{при } |z| < \Delta. \end{cases}$$

Другими словами, в пределе при $\Delta \rightarrow 0$ получаем

$$\int_{k_0 - \Delta}^{k_0 + \Delta} r(x) dx \int \psi(k, z) \bar{\psi}(x, z) r(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } |k - k_0| > \Delta, \\ 1 & \text{при } |k - k_0| < \Delta \end{cases} \quad (6.3.59)$$

и аналогичное соотношение с переставленными z и k , соответствующее $\delta(z - \zeta)$. Обычно пределы второго интеграла сначала полагаются конечными, но большими (0 и R или $-R$ и R , где R велико), а затем расширяются до бесконечности для удобства вычислений.

В качестве примера рассмотрим уравнение Бесселя, получающееся при разделении уравнения Гельмгольца в полярных координатах:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 r - \frac{m^2}{r} \right) R = 0, \quad (6.3.60)$$

где m представляет собой константу разделения, которая порождается φ -множителем и является целой, если φ изменяется от 0 до 2π (другими словами, если Φ периодична по φ).

Если граничные условия для R состоят в том, что R конечна в особой точке $r=0$ и $R=0$ при $r=a$, то собственными функциями являются функции Бесселя [см. формулу (5.3.63)]:

$$\begin{aligned} \psi_n(r) &= J_m(\alpha_n r/a), \quad J_m(\alpha_n) = 0, \\ k_n &= \alpha_n/a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.3.61)$$

Эти функции ортогональны (с функцией плотности r):

$$\int_0^a J_m\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) J_m\left(\frac{\alpha_l r}{a}\right) r dr = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq n, \\ -\frac{a^2}{2} J_{m+1}(\alpha_n) J_{m-1}(\alpha_n) & \text{при } l = n, \end{cases}$$

так что мы имеем полную систему собственных функций ($n=0, 1, 2, \dots$) для каждого значения m .

Если a взять бесконечным, то собственные значения k будут образовывать непрерывное множество от $k=0$ до бесконечности. Поэтому функция $J_m(kr)$ пропорциональна собственной функции для непрерывного k .

Для нормировки положим $\psi(k, z) = A J_m(kz)$ и определим A , применяя формулу (6.3.59). Как указано выше, для упрощения вычислений следует положить верхний предел второго интеграла равным R , а затем устремить R к ∞ . Применяя асимптотическое выражение для J и производя вычисления при $m > 0$, имеем

$$\begin{aligned} A^2 \int_{k_0 - \Delta}^{k_0 + \Delta} x dx \int_0^R J_m(kz) J_m(xz) z dz &= \\ &= A^2 \int_{k_0 - \Delta}^{k_0 + \Delta} x dx \left[\frac{x R J_m(kR) J_{m-1}(xR) - k R J_m(xR) J_{m-1}(kR)}{k^2 - x^2} \right] \simeq \\ &\simeq A^2 \int_{k_0 - \Delta}^{k_0 + \Delta} x dx \left\{ \frac{2/\pi}{k^2 - x^2} \sin[(k - x)R] \right\} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \begin{cases} A^2 & \text{при } |k - k_0| < \Delta, \\ 0 & \text{при } |k - k_0| > \Delta. \end{cases} \end{aligned}$$

Окончательный результат справедлив также при $m=0$. Поэтому нормирующая постоянная A равна единице, нормированная собственная функция равна как раз $J_m(kz)$, а выражение, соответствующее интегральной формуле Фурье (6.3.55), имеет вид

$$f(z) = \int_0^\infty J_m(kz) k dk \int_0^\infty f(\zeta) J_m(k\zeta) \zeta d\zeta \quad (6.3.62)$$

и называется *интегралом Фурье — Бесселя*.

Собственные значения для уравнения Шредингера. При решении уравнения Шредингера встречаются случаи, когда собственные значения дискретны для одного интервала значений и непрерывны для другого. Рассмотрение взаимосвязи между уравнением Шредингера [см. формулу (2.6.28)] и задач Штурма — Лиувилля покажет, как это получается, и, быть может, прольет новый свет на результаты теории Штурма — Лиувилля [см. также исследование уравнений (12.3.25) и (12.3.27)].

Уравнение Шредингера для одного измерения имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi = 0, \quad (6.3.63)$$

где m — масса рассматриваемой частицы, E — ее полная энергия в рассматриваемом состоянии, V — потенциальная энергия и $\hbar = h/2\pi$ — видоизмененная постоянная Планка. Вероятность того, что частица находится между x и $x+dx$, пропорциональна $|\psi|^2 dx$, а средняя «плотность тока» частицы пропорциональна мнимой части $\bar{\psi} \cdot d\psi/dx$ (то есть если ψ является вещественной функцией для вещественного x , то результирующий средний ток равен нулю).

Согласно классической механике, частица может находиться только там, где энергия частицы E больше потенциальной энергии V ; в таких областях чем больше значение $E - V$ (= кинетической энергии), тем больше плотность тока и тем меньше плотность вероятности нахождения частицы. Плотность вероятности нахождения частицы пропорциональна величине $(1/\text{скорость}) \sim 1/\sqrt{E - V}$, а вероятная плотность тока пропорциональна $\sqrt{E - V}$. Энергия E , всюду меньшая V , невозможна; возможны все энергии E , для которых E где-либо больше V . Если частица находится в минимуме потенциала, отделенного от другого минимума пиком высоты, большей E , то эта частица не может перейти из одного минимума в другой.

В противоположность этому уравнение Шредингера больше ограничивает допустимые значения энергии, но меньше ограничивает расположение частицы, как показывает вывод уравнения (стр. 234 и 299). Рассмотрим случай, когда $V(x)$ имеет минимум (который можно для удобства расположить в $x=0$), а асимптотическое значение V больше этого минимума, и исследуем уравнение с точки зрения задачи Штурма — Лиувилля (см. стр. 671).

Если E всюду меньше V , то решение уравнения (6.3.63) — не колеблющееся; оно ведет себя скорее как вещественные экспоненты e^x и e^{-x} , и никакая комбинация двух независимых решений не даст решения, конечного как при $x = -\infty$, так и при $x = +\infty$. Как указано на рис. 6.8, если решение стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$, то оно будет стремиться к бесконечности при $x \rightarrow +\infty$. Значит, энергия, меньшая $V(x)$ всюду вдоль вещественной оси x , не допускается.

Если E меньше, чем $V(-\infty)$ и $V(+\infty)$, но больше, чем $V(0)$, минимальное значение V , то ψ все еще ведет себя подобно вещественным экспо-

нентам в тех областях, где $E < V$, заворачивая от оси x ; но там, где $E > V$, она заворачивает к оси, подобно тригонометрической функции. Функция ψ , начиная от нуля при $x = -\infty$, будет экспоненциально возрастать, пока x не достигнет значения, где $V(x) = E$, после чего ψ будет в течение некоторого времени искривляться обратно к оси. После второй точки, где $V = E$, она будет вновь иметь экспоненциальное поведение. Для некоторого значения E , большего $V(0)$, это обратное искривление будет как раз достаточным для того, чтобы ψ плавно перешла в функцию, подобную $e^{-\alpha x}$ справа от начала, так что ψ искривляется вверх как раз настолько, чтобы обратиться в нуль при $x = +\infty$.

Это значение E является *наименьшим собственным значением* энергии. Соответствующая собственная функция имеет максимальное значение где-то вблизи $x = 0$, в области, где $E > V$. Это — область, внутри которой должна содержаться частица, согласно классической физике. Однако величина $|\psi|^2$ не становится внезапно равной нулю при $V > E$; она убывает по экспоненциальному закону к нулю в обе стороны, если E — собственное значение, так что, согласно волновой механике, имеется малая, но конечная вероятность нахождения частицы в области, где потенциальная энергия больше полной (то есть где кинетическая энергия отрицательна).

Если E возрастает дальше, то соответствующая функция ψ вновь становится бесконечной при $x = +\infty$ или $x = -\infty$, пока при следующем собственном значении функции ψ не сможет опять обратиться в нуль в обоих концах интервала. Эта собственная функция имеет узел где-то в области, в которой $E > V$.

И так этот процесс продолжается и дает только дискретное множество энергий, значения которых определяются требованием конечности ψ , пока мы не достигнем энергии, равной наименьшему асимптотическому значению V (мы принимаем для упрощения формулировок, что $V(-\infty) < V(+\infty)$). Выше этой энергии E больше V от $-\infty$ до некоторого конечного положительного значения x , и ψ колеблется во всей этой области x . Значит, ни одно решение рассматриваемого дифференциального уравнения не стремится к бесконечности при $x \rightarrow -\infty$, и мы можем выбрать для любого значения E подходящую линейную комбинацию, которая будет стремиться к нулю по экспоненциальному закону при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, *любое значение энергии, большее $V(-\infty)$, является допустимым*.

Так как экспоненциально исчезающие решения являются вещественными функциями для вещественного x , то собственные функции для дискретных энергий [меньших либо $V(-\infty)$, либо $V(+\infty)$] всюду вещественны (более точно, фазовый угол этих собственных функций не зависит от x и вполне может быть взят равным нулю). Так как они вещественны и их производные вещественны, то средняя плотность тока (пропорциональная мнимой части $\bar{\psi} \cdot d\psi/dz$) равна нулю. Классическое объяснение этого состоит в том, что в точках, где V возрастает выше E , частица обращает направление своего движения, так что в каждой точке частицу можно с равной вероятностью найти идущей в любом из двух направлений и результирующий ток равен нулю.

Это верно и для непрерывной области собственных значений E между $V(-\infty)$ и $V(+\infty)$, так как частица здесь выходит из $-\infty$, отражается от потенциального «барьера» и возвращается в $-\infty$.

Если E больше и $V(-\infty)$, и $V(+\infty)$, то оба решения уравнения всюду конечны, так что можно выбирать любые их линейные комбинации. Некоторые из этих комбинаций дадут ненулевые значения для средней плотности тока в соответствии с классическим утверждением, что если E больше $V(-\infty)$ и $V(+\infty)$, то частица может пройти от $-\infty$ до $+\infty$

без отражения. Весь этот вопрос будет рассмотрен позднее, в другой главе.

Дискретные и непрерывные собственные значения. В качестве примера этого рода поведения возьмем симметричный случай потенциальной функции $V = -V_0 \operatorname{ch}^{-2}(x/d)$ [см. формулу (12.3.22)]. Этот потенциал имеет минимум $-V_0$ при $x=0$ и возрастает асимптотически до нуля при $x \rightarrow \pm \infty$. После подходящего выбора масштаба и констант уравнение Шредингера (6.3.63) приобретает вид

$$(d^2\psi/dw^2) + (\lambda + Q \operatorname{ch}^{-2} w) \psi = 0, \quad w = x/d. \quad (6.3.64)$$

Дальнейшие преобразования, а именно подстановки $\lambda = -K^2$, $z = (1 + \tanh w)/2 = e^w/(e^w + e^{-w})$ и $\psi = \operatorname{ch}^{-K} w \cdot F(z)$, приводят к уравнению

$$z(z-1) \frac{d^2 F}{dz^2} + (K+1)(2z-1) \frac{dF}{dz} + [K(K+1) - Q] F = 0,$$

которое является как раз уравнением (5.2.42) для гипергеометрической функции

$$F\left(K + \frac{1}{2} + P, K + \frac{1}{2} - P \mid K + 1 \mid z\right),$$

где $P = \sqrt{Q + \frac{1}{4}}$. Имеется и второе решение, но оно становится бесконечным при $z=0$. Значит, решение остающееся конечным при $x = -\infty$, имеет вид

$$\psi = \operatorname{ch}^{-K}(w) F\left(K + \frac{1}{2} + P, K + \frac{1}{2} - P \mid K + 1 \mid \frac{e^w}{e^w + e^{-w}}\right). \quad (6.3.65)$$

Рассмотрение формулы (5.2.49) показывает, что эта функция становится бесконечной при $z=1$ ($w \rightarrow \infty$), кроме случаев, когда величина $K + \frac{1}{2} - P$ является целой отрицательной, то есть когда $K = \sqrt{Q + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - n$, где n может быть нулем или любым целым положительным числом, меньшим $\sqrt{Q + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. Поэтому дискретные собственные значения λ , пропорциональные энергии, таковы:

$$\lambda_n = -\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{Q + \frac{1}{4}}\right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad n < \sqrt{Q + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}. \quad (6.3.66)$$

Для таких значений λ собственная функция ψ представляет собой многочлен относительно z . Заметим, что если Q положительно (то есть если имеется потенциальная «яма»), то будет существовать по крайней мере одно дискретное состояние ($n=0$), хотя других может не быть, если Q мало.

Для положительных значений энергии K мнимое и можно положить $K = ik$, где $\lambda = k^2$. В этом случае двумя независимыми решениями вблизи $z=0$ ($w \rightarrow -\infty$) являются

$$[2 \operatorname{ch} w]^{-ik} F\left(P + \frac{1}{2} + ik, -P + \frac{1}{2} + ik \mid 1 + ik \mid \frac{e^w}{e^w + e^{-w}}\right),$$

которое можно обозначить через $\phi(k)$, и

$$e^{-ikw} F\left(P + \frac{1}{2}, -P + \frac{1}{2} \mid 1 - ik \mid \frac{e^w}{e^w + e^{-w}}\right),$$

которое можно обозначить через $\phi(-k)$. Таким образом, для каждого значения λ имеются две собственные функции. Для очень большого отрицательного w эти два решения приводятся к $e^{ikw} = e^{ikx/d}$ и $e^{-ikw} = e^{-ikx/d}$, причем обе эти функции конечны при $w = -\infty$. Одна представляет волну, идущую в положительном направлении (и соответственно имеющую положительную плотность тока), а другая — в отрицательном направлении (с отрицательной плотностью тока). Подобным образом оба решения конечны и вблизи $w = +\infty$ для всех значений k , так что допускается любое положительное значение параметра энергии λ .

В этом случае имеются как дискретные, так и непрерывные собственные значения. Наше разложение по собственным функциям должно включать ряд по немногим дискретным значениям (сумму по n для n , меньших $\sqrt{Q + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}$) и интеграл по k от $-\infty$ до $+\infty$ (включающий, таким образом, обе собственные функции для каждого положительного собственного значения λ). Чтобы получить явный вид суммы и интеграла с соответствующими значениями нормирующих множителей, требовался бы более подробный анализ задачи, чем это стоит делать здесь. Он будет проведен вновь в § 12.3.

Дифференцирование и интегрирование как операторы. Это исследование уравнения Шредингера (а также трактовка факторизации на стр. 678) может напомнить нам, что иногда полезно рассматривать дифференцирование и умножение на постоянную (и также интегрирование) как операторы. Рассмотрим вектор $\mathbf{f}$ с компонентами $f(x)$, вектор $a\mathbf{f}$ с компонентами $af(x)$, вектор $\mathcal{P}\mathbf{f}$ с компонентами $df(x)/dx$ и вектор $\mathcal{Q}\mathbf{f}$ с компонентами

$$\int_0^x f(w) dw.$$

Эти операторы можно складывать (то есть они удовлетворяют законам дистрибутивности и коммутативности для сложения); например, вектор $(\mathcal{P} + \mathcal{Q})\mathbf{f} = (\mathcal{Q} + \mathcal{P})\mathbf{f}$ имеет компоненты

$$\frac{d}{dx} f(x) + \int_0^x f(w) dw = \int_0^x f(w) dw + \frac{d}{dx} f(x).$$

Как $\mathcal{P}$, так и $\mathcal{Q}$ коммутируют со скалярным оператором a , но $\mathcal{P}$ не коммутирует с $\mathcal{Q}$, так как

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(w) dw = f(x), \quad \text{а} \quad \int_0^x \frac{d}{dw} f(w) dw = f(x) - f(0),$$

и потому

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = 1, \text{ тогда как } \mathcal{Q}\mathcal{P} \neq 1, \quad (6.3.67)$$

где 1 — единичный оператор. Однако если следить за порядком перемножения, то интегральный оператор $\mathcal{Q}$ можно рассматривать как обратный к дифференциальному оператору $\mathcal{P}$ и записывать в виде $\mathcal{P}^{-1}$.

Как $\mathcal{P}$, так и $\mathcal{P}^{-1}$ можно итерировать. Компонентами $\mathcal{P}^n \mathbf{f}$ являются $(d^n/dx^n) f(x)$, а компонентами $\mathcal{P}^{-n} \mathbf{f}$ —

$$\int_0^x du_1 \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_{n-1}} du_n f(u_n).$$

Положительные степени $\mathcal{P}$, действующие на постоянный вектор $\mathbf{A}$, дают нуль, в то время как отрицательные степени дают ненулевой результат. Например, компонентами $\mathcal{P}^{-n} \mathbf{A}$ служат $Ax^n/n!$. При помощи интегрирования по частям можно видеть, что компонентами $\mathcal{P}^{-2} \mathbf{f}$ служат

$$\int_0^x du \int_0^u f(w) dw = \int_0^x (x-w) f(w) dw.$$

Повторное применение этого соображения показывает, что компонентами $\mathcal{P}^{-n} \mathbf{f}$ являются

$$\int_0^x \frac{(x-w)^{n-1}}{(n-1)!} f(w) dw. \quad (6.3.68)$$

С рядами из операторов (при обычных условиях сходимости) можно обращаться в точности так же, как с обыкновенными рядами. Например, компонентами вектора

$$\left\{ \sum_n a_n \mathcal{P}^{-n} \right\} \mathbf{f} \quad \text{служат} \quad \int_0^x \left[\sum_n a_n \frac{(x-w)^{n-1}}{(n-1)!} \right] f(w) dw,$$

если ряд из интегралов сходится. Посредством этого можно определить смысл выражений, содержащих обратные операторы, таких, как $[\mathcal{P}^{-1}/(1 - \alpha \mathcal{P}^{-1})] \mathbf{f}$. Подходя к этому выражению формально, мы подсчитаем его при помощи разложения в ряд по степеням $\mathcal{P}^{-1}$. Компоненты получающегося при этом вектора $(\mathcal{P}^{-1} + \alpha \mathcal{P}^{-2} + \alpha^2 \mathcal{P}^{-3} + \dots) \mathbf{f}$ равны

$$\int_0^x \left[1 + \alpha \frac{x-w}{1!} + \alpha^2 \frac{(x-w)^2}{2!} + \dots \right] f(w) dw = e^{\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha w} f(w) dw; \quad (6.3.69)$$

результат неожиданно компактный.

Чтобы увидеть, как можно применить эту технику, и, кстати, чтобы до некоторой степени сделать законным это несколько беззаботное обращение с символами, подсчитаем решение дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = f(x). \quad (6.3.70)$$

Обычными средствами можно найти, что решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = y(0) e^{\alpha x} + e^{\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha w} f(w) dw.$$

Для решения уравнения (6.3.70) символическим методом заметим, что оно эквивалентно операторному уравнению $(\mathcal{P} - \alpha) \mathbf{y} = \mathbf{f}$, которое после интегрирования по x приобретает вид

$$\mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} \mathbf{y} - \alpha \mathcal{P}^{-1} \mathbf{y} = \mathcal{P}^{-1} \mathbf{f}.$$

Применяя формулу (6.3.67) и деля обе части на $1 - \alpha \mathcal{P}^{-1}$, мы найдем, что $y(x)$ как раз равно компонентам вектора

$$[\mathcal{P}^{-1}f + y(0)]/(1 - \alpha \mathcal{P}^{-1}) = y(0) + \mathcal{P}^{-1}[f + \alpha y(0)]/(1 - \alpha \mathcal{P}^{-1}),$$

то есть в силу (6.3.69) равно

$$y(0) + e^{\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha w} [f(w) + \alpha y(0)] dw,$$

что совпадает с решением, полученным обычным путем.

Надо заметить, что обе части уравнения (6.3.70), записанного в операторном виде, нельзя было непосредственно делить на $\mathcal{P} - \alpha$. В противном случае y равнялось бы компонентам вектора $(\mathcal{P} - \alpha)^{-1}f$, и результат не включал бы необходимую постоянную $y(0)$.

Эта техника, намеченная здесь, будет исследована более подробно позже. Сейчас мы хотим указать только, что дифференциальные уравнения можно рассматривать как изображения *операционных уравнений* с операторами $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^{-1}$, соответствующими дифференцированию и интегрированию, и что такие операционные уравнения поддаются некоторому количеству алгебраических преобразований, если учитывать ограничения в отношении коммутирования.

Задача о собственных значениях в абстрактном векторном пространстве. Вопрос о дискретных собственных значениях и о допустимых решениях имеет значительно более широкую область приложений, чем только дифференциальные уравнения, как показывает внимательный просмотр § 2.6 и подсказывает аналогия в абстрактном векторном пространстве. Во многих случаях в теоретической физике имеет место ситуация, которую можно описать при помощи некоторого рода оператора, действующего на вектор. Так, в случае упругости это оператор растяжения (или сжатия), действующий на обычный трехмерный вектор и дающий результирующее смещение; в случае обыкновенного дифференциального уравнения это комбинация только что определенных операторов $\mathcal{P}$, действующая на «вектор», соответствующий функции $\psi(x)$ (которую можно рассматривать как компоненту вектора вдоль направления единичного вектора $e(x)$); в случае уравнения Дирака оператор представляет собой комбинацию операторов, переставляющих четыре компоненты $\psi_1(x), \dots, \psi_4(x)$, и дифференциальных операторов, действующих на x . В каждом из этих случаев можно говорить о векторе F и об операторе $\mathcal{A}$, который, вообще говоря, переводит F в другой вектор E , как об этом говорилось в § 1.6.

Вектор F можно описать при помощи его компонент вдоль подходящих осей координат (x, y, z -компоненты вдоль декартовых осей для упругого смещения, значения $F(x)$ при каждом x как компоненты вдоль осей, соответствующих векторам $e(x)$, для дифференциальных уравнений, различные спинные состояния для уравнения Дирака и т. д.). Оператор должен быть задан соответственно при помощи матрицы компонент

$$F = \sum_n F_n e_n, \quad \mathcal{A} = \sum_{mn} e_m A_{mn} e_n^*$$

[см. формулу (1.6.35)],

$$\mathcal{A} \cdot F = \sum_m \left(\sum_n A_{mn} F_n \right) e_m = E,$$

где матрица (A_{mn}) изображает $\mathcal{A}$. Если рассматриваемые оси повернуть, то

компоненты $\mathbf{F}$ и $\mathfrak{A}$ изменятся в соответствии с обычными правилами преобразования, данными в гл. 1.

Представлением о системе осей, соответствующих единичным векторам $\mathbf{e}_n$, можно пользоваться и в случае, когда «индексы» являются непрерывными переменными (как для $\mathbf{e}(x)$), и скалярное произведение надо изображать в виде интеграла по x вместо суммы по индексу n . Таким же образом необходимо перейти от сумм к интегралам и в других местах, где это требуется. В связи с этим надо напомнить рассуждения, следовавшие за формулой (6.3.7).

Например, пусть операторному уравнению $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E}$ соответствует дифференциальное уравнение $\mathcal{A}_x F(x) = E(x)$, где $\mathcal{A}_x$ представляет собой обыкновенный дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{A}_x = f(x) \frac{d^2}{dx^2} + g(x) \frac{d}{dx} + h(x),$$

который мы исследовали в этой главе. Тогда скалярному произведению $(\mathbf{G}^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{F})$ будет соответствовать интеграл

$$\int_a^b \overline{G}(x) \mathcal{A}_x F(x) dx$$

($\overline{G}$ является комплексно сопряженным к G) и т. д.

Почти во всех интересных случаях оператор $\mathfrak{A}$ является эрмитовым; это означает, что его эрмитово сопряженный оператор $\mathfrak{A}^*$, получающийся, если заменить в матрице строки на столбцы и затем перейти к комплексно сопряженной матрице, равен самому $\mathfrak{A}$. Мы вывели некоторые следствия этого требования на стр. 86—90. Посмотрим, что это значит для дифференциального оператора, компоненты которого соответствуют континууму значений x .

Эрмитово сопряженным к оператору $\mathfrak{A}$ является такой оператор $\mathfrak{A}^*$, что если $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E}$, то $\mathbf{E}^* = \mathbf{F}^* \cdot \mathfrak{A}^*$, другими словами,

$$\mathbf{G}^* \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F}) = (\mathfrak{A}^* \cdot \mathbf{G})^* \cdot \mathbf{F}. \quad (6.3.71)$$

Если оператор вещественный, то понятие эрмитовой сопряженности соответствует понятию сопряженности для дифференциальных операторов, данному на стр. 499. Например, в интегральном виде левую часть формулы (6.3.71) можно записать как

$$\int_a^b \overline{G}(x) \mathcal{A}_x F(x) dx = \int_a^b \overline{G}(x) \left[f \frac{d^2 F}{dx^2} + g \frac{dF}{dx} + hF \right] dx.$$

Но согласно формуле (5.2.10), последний интеграл равен

$$\int_a^b \overline{[\tilde{\mathcal{A}}_x G]} F dx + [P(\overline{G}, F)]_a^b,$$

где $\tilde{\mathcal{A}}_x$ представляет собой сопряженный дифференциальный оператор, определенный равенством

$$\frac{d^2}{dx^2} (fG) - \frac{d}{dx} (gG) + hG = \tilde{\mathcal{A}}_x G$$

и исследованный на стр. 548. Если как $F(x)$, так и $G(x)$ удовлетворяют соответствующим граничным условиям при $x = a$ и b , то присоединенная

билинейная форма $P(\bar{G}, F)$ равна нулю в a и b , и мы получаем

$$\int_a^b \bar{G} \mathcal{A}_x F dx = \int_a^b \overline{[\tilde{\mathcal{A}}_x G]} F dx,$$

что соответствует соотношению (6.3.71), определяющему оператор, сопряженный к $\mathcal{A}_x$. Это значит, что наше применение слова *сопряженный* в связи с обобщенными операторами $\mathcal{A}$ соответствует нашему применению того же слова для обыкновенного дифференциального оператора $\mathcal{A}_x$, если оператор $\mathcal{A}_x$ вещественный. Если оператор $\mathcal{A}_x$ не вещественный, то его эрмитово сопряженный будет комплексно сопряженным к его сопряженному оператору, $\tilde{\mathcal{A}}^* = \tilde{\mathcal{A}}$. Следовательно, обыкновенный дифференциальный оператор, *самосопряженный* в смысле, указанном на стр. 669, соответствует вещественному эрмитову оператору, самосопряженному в операторном смысле. (Мы уже видели, что уравнение Лиувилля является самосопряженным.) Этот вопрос мы исследуем более полно в § 7.5.

Если $\mathcal{A}$ эрмитов, то, будет ли он дифференциальным оператором или оператором более общего вида, имеет место равенство

$$(\mathbf{G}^* \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{F}) = (\mathbf{F} \cdot \mathcal{A}^* \cdot \mathbf{G}^*). \quad (6.3.72)$$

Это означает, что если $\mathcal{A}$ эрмитов, то величина $(\mathbf{F}^* \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{F})$ вещественная, независимо от того, каков вектор $\mathbf{F}$. В квантовой механике эта величина обычно называется *средним значением* $\mathcal{A}$ в состоянии, характеризуемом вектором $\mathbf{F}$. Если $\mathcal{A}$ соответствует физической величине (положению, импульсу и т. д.), то его среднее значение, конечно, должно быть вещественным.

В большом числе случаев это среднее значение $(\mathbf{F}^* \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{F})$ не только вещественно, но *всегда положительно* для всех (ненулевых) векторов $\mathbf{F}$. В таких случаях оператор называется *положительно определенным* эрмитовым оператором.

Каждому оператору $\mathcal{A}$ отвечает совокупность *собственных векторов* $\mathbf{E}_n$ для которых

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{E}_n = a_n \mathbf{E}_n,$$

где a_n представляет собой собственное значение $\mathcal{A}$, соответствующее $\mathbf{E}_n$. Из сказанного выше легко вывести, что если оператор $\mathcal{A}$ является эрмитовым или положительно определенным, то *все его собственные значения будут* соответственно *вещественными* или *положительными*. Как мы видели выше, собственные значения могут образовывать ряд дискретных значений, или непрерывную область, или же комбинацию и того и другого.

Мы уже исследовали собственные векторы несколько раз; наша цель здесь — увязать наши предыдущие результаты с результатами настоящего параграфа о собственных функциях. Например, в связи с формулой (1.6.9) мы показали, что собственные векторы заданного оператора взаимно ортогональны, чему соответствует тот результат, что собственные функции для данного дифференциального уравнения и данных граничных условий являются взаимно ортогональными. Можно, конечно, нормировать наши собственные векторы, чтобы получить ортогональную систему единичных векторов $\mathbf{e}_n$. Их имеется столько же, сколько «измерений» в абстрактном векторном пространстве, соответствующем оператору $\mathcal{A}$. Следовательно, любой вектор в том же абстрактном пространстве можно выразить через его компоненты вдоль главных осей оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{F} = \sum_n F_n \mathbf{e}_n, \quad F_n = (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{e}_n).$$

Это кажущееся очевидным утверждение соответствует основной теореме о разложении для собственных функций. Чтобы показать общность этой теоремы, доказанной ранее для дифференциальных операторов, наметим здесь рассуждение для общего оператора $\mathfrak{A}$. Для того чтобы собственные векторы данного оператора $\mathfrak{A}$ образовывали *полную систему*, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. $\mathfrak{A}$ *самосопряженный* (или *эрмитов*), то есть для любого вектора F скалярное произведение $(F^* \cdot \mathfrak{A} \cdot F)$ вещественно.
2. $\mathfrak{A}$ *положительно определенный*, то есть для любого вектора F произведение $(F^* \cdot \mathfrak{A} \cdot F)$ больше нуля.
3. Уравнение для собственных векторов

$$\mathfrak{A} \cdot E_n = a_n E_n \quad (6.3.73)$$

соответствует некоторому вариационному принципу. Такой принцип может быть совершенно общим. Например, можно подсчитывать скалярную (вещественную и положительную) величину

$$D(F) = (F^* \cdot \mathfrak{A} \cdot F) / (F^* \cdot F) \quad (6.3.74)$$

для произвольного вектора F . Вариационное требование, чтобы F был вектором, для которого D имеет *минимальное* значение, дает собственный вектор E_0 уравнения (6.3.73), а значение D при $F = E_0$ как раз равно собственному значению a_0 .

Для доказательства этого рассмотрим вариацию D , когда F и F^* меняются на произвольные малые величины δF и δF^* , и потребуем, чтобы $\delta D = 0$. Умножая (6.3.74) на $(F^* \cdot F)$ и варьируя, мы получаем с учетом того, что $\delta D = 0$,

$$D[(\delta F^* \cdot F) + (F^* \cdot \delta F)] = [(\delta F^* \cdot \mathfrak{A} \cdot F) + (F^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \delta F)],$$

или

$$[\delta F^* \cdot (\mathfrak{A} \cdot F - DF)] + [(F^* \cdot \mathfrak{A} - DF^*) \cdot \delta F] = 0.$$

Так как δF^* и δF являются произвольными независимыми вариациями, то вариационное требование, таким образом, эквивалентно равенству (6.3.73) и его сопряженному, причем D равно a .

Как было указано выше, вектор, дающий минимальное значение D , равен E_0 , а соответствующее значение D равно наименьшему (низшему) собственному значению a_0 (которое больше нуля, поскольку $\mathfrak{A}$ — положительно определенный оператор).

Вектор, дающий минимальное значение D при дополнительном требовании ортогональности к E_0 , равен E_1 , а соответствующее значение D равно следующему собственному значению a_1 . Для доказательства этого утверждения надо считать, что с оператором $\mathfrak{A}$ можно обращаться, как если бы он был аналитической функцией, то есть что операторы $\mathfrak{A}^{-1}$, $\sqrt{\mathfrak{A}}$ и т. д. имеют тот же смысл, что и их алгебраические двойники. Мы указывали, что это возможно для дифференциальных и интегральных операторов.

Если это так, то можно показать, что собственные векторы любой функции $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$, которую можно выразить в виде ряда по степеням $\mathfrak{A}$, равны соответствующим собственным векторам $\mathfrak{A}$, а собственные значения равны эквивалентной функции $H(a_n)$ от соответствующих собственных значений a_n . Отсюда следует, что решения вариационной задачи $\delta B = 0$, где

$$B = [F^* \cdot \mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \cdot F] / (F^* \cdot F),$$

равны как раз собственным векторам E_n , решениям уравнения (6.3.73), если соответствующая алгебраическая функция $H(a)$ всегда вещественна и положительна для вещественного положительного a . Получающиеся стационарные значения B равны значениям $H(a_n)$. (Доказательство этого утверждения можно предоставить читателю; конечно, оно верно, только если оператор $\mathfrak{A}$ положительно определенный.)

Произведение $K = [F^* \cdot (\mathfrak{A} - a_0) \cdot F]$, где a_0 — наименьшее собственное значение $\mathfrak{A}$, не может быть отрицательным, независимо от выбора вектора F , как показывает рассмотрение вариационного уравнения. Также не может быть отрицательным произведение $J = [F^* \cdot (\mathfrak{A} - a_0)(\mathfrak{A} - a_1) \cdot F]$, где a_1 — следующее собственное значение, так как минимальные значения выражения

$$\frac{J}{F^* \cdot F} = \frac{F^* \cdot \left[\mathfrak{A} - \frac{1}{2}(a_0 + a_1) \right]^2 \cdot F}{F^* \cdot F} - \frac{1}{4}(a_0 - a_1)^2$$

достигаются для F , равного либо E_0 , либо E_1 . Для этих двух векторов J равно нулю, тогда как K равно нулю только для $F = E_0$. Следовательно, величина J/K нигде не отрицательна и равна нулю лишь при $F = E_1$. Из этого последнего предложения можно вывести, что утверждение, которое мы сделали выше и хотели доказать, уже доказано. Для этого мы построим вектор $G = \sqrt{\mathfrak{A} - a_0} \cdot F$, который автоматически ортогонален низшему собственному вектору E_0 ($G^* \cdot E_0 = 0$), а в остальном совершенно произволен. Составим затем вариационное отношение

$$D(G) = \frac{G^* \cdot \mathfrak{A} \cdot G}{G^* \cdot G} = \frac{J}{K} + a_1.$$

Предложение, выделенное курсивом, показывает, что минимальное значение D достигается для $G = \sqrt{a_1 - a_0} E_1$ и равно a_1 , что и надо было доказать.

Показав, что минимальное значение D для вектора, ортогонального к E_0 , равно a_1 , а соответствующий вектор равен E_1 , можно продолжить рассуждения и прийти к тому, что

$$D(G) \geq a_{s+1}, \text{ если } G^* \cdot E_m = 0, m = 0, 1, \dots, s; \quad (6.3.75)$$

это равносильно утверждению, приведенному перед формулой (6.3.21).

Для общего случая произвольного оператора может не быть бесконечной последовательности собственных значений. Если векторное пространство имеет только n измерений (то есть если все векторы в пространстве можно выразить в виде линейной комбинации лишь n взаимно ортогональных векторов), то имеется ровно n собственных векторов и n собственных значений (в вырожденных случаях некоторые из собственных значений могут равняться друг другу, но все равно будет n взаимно ортогональных собственных векторов), так как пока можно составить вектор, ортогональный первым s собственным векторам, по-прежнему можно найти новый собственный вектор и соответствующее собственное значение. Только при $s = n$ будет невозможно найти вектор, ортогональный предыдущим, и тогда последовательность оборвется. Следовательно, для векторного пространства конечного числа измерений число взаимно ортогональных собственных векторов равно числу измерений, и эта система собственных векторов будет полной, так как, по определению, любой вектор в этом пространстве можно выразить в виде линейной комбинации такого числа попарно ортогональных векторов.

Для векторных пространств бесконечного числа измерений доказательство полноты не так просто [см. рассуждения, следующие за формулой (6.3.7)]. Сначала надо доказать, что последовательность собственных значений стремится к бесконечности, когда n стремится к бесконечности. Однако доказательство этой теоремы для положительно определенного эрмитова оператора наиболее общего вида завело бы нас слишком далеко в сложные вопросы современной алгебры. На стр. 673 мы показали, что это верно для дифференциальных операторов типа Лиувилля. Это верно также для квантовомеханических операторов, имеющих бесконечное число допустимых состояний. Если мы допустим, что это верно в общем случае, то наше доказательство полноты получится по той же схеме, что и доказательство, приведенное на стр. 685—687. Так как рассуждения в терминах абстрактных операторов «чище», чем рассуждения для дифференциальных уравнений, то мы вновь бегло проведем доказательство.

Желая выразить произвольный вектор G через единичные собственные векторы e_m , мы построим конечную сумму

$$S_n = \sum_{m=0}^n C_m e_m, \quad C_m = e_m^* \cdot G, \quad (6.3.76)$$

где

$$\mathfrak{A} \cdot e_m = a_m e_m \text{ и } e_m^* \cdot e_s = \delta_{ms}.$$

Вектор

$$J_n = G - S_n$$

ортогонален первым $n+1$ собственным векторам $\mathfrak{A}$, так как $e_m^* \cdot J_n = 0$ при $m \leq n$. Отсюда по формуле (6.3.75) получаем, что

$$D(J_n) = \frac{1}{J_n^* \cdot J_n} [J_n^* \cdot \mathfrak{A} \cdot J_n] \geq a_{n+1},$$

или

$$\begin{aligned} J_n^* \cdot J_n &\leq \frac{1}{a_{n+1}} \left[\left(G^* - \sum_{m=0}^n \bar{C}_m e_m^* \right) \cdot \mathfrak{A} \cdot \left(G - \sum_{m=0}^n C_m e_m \right) \right] = \\ &= \frac{1}{a_{n+1}} \left[(G^* \cdot \mathfrak{A} \cdot G) - \sum_{m=0}^n a_m |C_m|^2 \right]. \end{aligned}$$

Однако второй член в квадратных скобках положителен, так как он равен сумме произведений квадратов величин на собственные значения (которые все положительны). Значит,

$$J_n^* \cdot J_n < \frac{1}{a_{n+1}} (G^* \cdot \mathfrak{A} \cdot G).$$

Поскольку ни одна из величин в скобках (так же как и a_{n+1}) не может быть отрицательной и $(G^* \cdot \mathfrak{A} \cdot G)$ не зависит от n , а $a_{n+1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, мы имеем $(J_n^* \cdot J_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и потому J_n , равный разности между произвольным вектором G и первыми $n+1$ членами его разложения в ряд по собственным векторам e_m , стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Значит, полный ряд ($n \rightarrow \infty$) равен вектору G , и мы вновь доказали, что e_n образуют полную систему собственных векторов.

Подобным образом любой оператор (в том же абстрактном пространстве) можно выразить через его компоненты вдоль главных осей для $\mathfrak{A}$.

В частности, сам оператор $\mathcal{A}$ имеет особенно простой вид

$$\mathcal{A} = \sum_n \mathbf{e}_n a_n \mathbf{e}_n^*, \text{ т. е. } A_{mn} = a_n \delta_{mn},$$

где a_n есть собственное значение оператора $\mathcal{A}$, соответствующее собственному вектору $\mathbf{e}_n$. Другими словами, матрица оператора, отнесенная к собственным главным осям, является *диагональной матрицей*.

Другие общие свойства, применимые равным образом к абстрактным векторным операторам и к обыкновенным дифференциальным операторам, были уже рассмотрены в §§ 1.6 и 2.6; еще некоторые будут выведены позже. Теперь должно быть очевидно, что абстрактное векторное изображение имеет значительное преимущество в простоте из-за наличия простой геометрической аналогии, делающей неоценимой эту новую точку зрения почти во всех наших задачах.

Задачи к главе 6

6.1. Сеточный потенциал $\varphi(m, n)$ удовлетворяет разностному уравнению (6.2.6) и должен удовлетворять граничным условиям на граничных линиях $n=0$, $n=5$, $m=0$, $m=5$. Показать, что решение, удовлетворяющее требованию, что φ принимает значение φ_ν в ν -й граничной точке, имеет вид

$$\varphi(m, n) = \sum_\nu G(m, n | \nu) \varphi_\nu,$$

где $G(m, n | \nu)$ представляет собой решение уравнения (6.2.6), равное нулю во всех граничных точках, кроме ν -й, где оно имеет единичное значение. Показать, что все G можно получить из этих функций, построенных для точек (0,1) и (0,2). Подсчитать эти две G с точностью до трех десятичных знаков для каждого внутреннего узла.

6.2. Показать, что решение разностного уравнения Пуассона

$$\phi(m+1, n) + \phi(m-1, n) + \phi(m, n+1) + \phi(m, n-1) - 4\phi(m, n) = F(m, n),$$

где $F(m, n)$ — заданная функция и $\phi = 0$ во всех граничных точках, равно

$$\phi(m, n) = \sum_{\mu, \nu} G(m, n | \mu, \nu) F(\mu, \nu),$$

где $G(m, n | \mu, \nu)$ представляет собой решение разностного уравнения Пуассона, если $F(\mu, \nu) = 1$, все прочие $F = 0$ и $G = 0$ во всех граничных точках. Каковы значения G для 4×4 -сетки задачи 6.1? Как можно скомбинировать эти результаты с результатами задачи 6.1, чтобы получить общее решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее общим граничным условиям?

6.3. Дифференциальное уравнение является простым параболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

а граница состоит из линий $x=0$, $x=\pi$ и $t=0$. Показать, что при граничном условии $\psi=0$ для $x=0$ и $x=\pi$ решение при $t \geq 0$ имеет вид

$$\psi(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \sin \nu x \cdot \exp(-\nu^2 t),$$

где A выбираются в соответствии с начальным значением ϕ при $t=0$. Рассмотреть сеточное приближение этого уравнения, полученное делением интервала $0 \leq x \leq \pi$ на N равных частей длины $h = \pi/N$, а оси t на интервалы длины $k = \pi/M$. Показать, что решение соответствующего уравнения

$$\frac{1}{h^2} [\phi(m+1, n) + \phi(m-1, n) - 2\phi(m, n)] = \frac{1}{k} [\phi(m, n+1) - \phi(m, n)],$$

$$\phi(0, n) = \phi(N, n) = 0, \quad n \geq 0,$$

равно

$$\phi(m, n) = \sum_{\nu=1}^{N-1} B_{\nu} \sin \nu m h \cdot \exp \left[n \ln \left(1 - \frac{4k}{h^2} \sin^2 \frac{1}{2} h \nu \right) \right].$$

Что произойдет с этим решением, если k выбрать большим h^2 ? Какое ограничение надо наложить на величину k , чтобы решение было устойчивым? Пусть начальные условия таковы, что коэффициенты A_{ν} в точном решении для $\nu > \nu_{\max}$ можно не учитывать. Что можно сказать о выборе h и k , который приведет к достаточно точному (скажем, до 1%) сеточному решению в области $0 \leq t \leq \pi$ и в то же время не будет настолько «мелкозернистым» (N и M слишком велики), чтобы сделать численные подсчеты чересчур трудоемкими?

6.4. Пусть начальные значения $\phi(x, t)$ задачи 6.3 таковы:

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{4} \pi x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \pi \\ \frac{1}{4} \pi (\pi - x) & \text{при } \frac{1}{2} \pi \leq x \leq \pi \end{cases} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sigma+1)^2} \sin [(2\sigma+1)x].$$

Подсчитать значения $\phi(x, t)$ при $x = \frac{1}{4} \pi, \frac{1}{2} \pi; t = \frac{1}{4} \pi, \frac{1}{2} \pi$ для точного решения. Затем подсчитать значения ϕ при помощи разностного уравнения

$$\phi(m, n+1) = \left[1 - \frac{2k}{h^2} \right] \phi(m, n) + \frac{k}{h^2} [\phi(m+1, n) + \phi(m-1, n)],$$

начиная от $n=0$ и вычисляя вперед (для возрастающего n) при тех же начальных условиях. Принять $h = \frac{1}{4} \pi$ ($N=4$) и произвести подсчеты с $k = \pi/4$ и $k = \pi/16$. Сравнить с четырьмя уже подсчитанными точными значениями.

6.5. Будет ли уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - y \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

эллиптическим или гиперболическим? Каковы уравнения характеристик? Набросать несколько из них. Показать, что если условия Коши ставятся на границе $y = y_0 > 0$, то решение для $y > y_0$ имеет вид

$$\phi = \frac{1}{2} \phi_0 \left(x + \ln \frac{y}{y_0} \right) + \frac{1}{2} \phi_0 \left(x - \ln \frac{y}{y_0} \right) + \frac{1}{2} y_0 \varphi_0 \left(x + \ln \frac{y}{y_0} \right) - \frac{1}{2} y_0 \varphi_0 \left(x - \ln \frac{y}{y_0} \right),$$

где $\phi_0(x)$ есть значение ϕ при $y = y_0$, а $\varphi_0(z) = \int v_0(z) dz$, причем $v_0(x)$ есть начальное значение $\partial \phi / \partial y$ при $y = y_0$. Почему это решение непригодно для $y_0 = 0$?

6.6. Построить последовательность взаимно ортогональных полиномов от x для интервала $-1 \leq x \leq 1$. Начать с $y_0 = 1$, $y_1 = x$, ..., а полином y_n степени n выбирать так, что

$$\int_{-1}^1 y_n(x) y_m(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Получить первые четыре таких полинома. Показать, что эти полиномы для четных n не имеют нечетных степеней x , а для нечетных n не имеют четных степеней. Показать, что полученные полиномы пропорциональны полиномам Лежандра $P_n(x)$. Будет ли этот процесс построения системы ортогональных полиномов однозначным? Если нет, то какие ограничения надо добавить, чтобы сделать процесс однозначным? Будет ли получающаяся система функций полной? Как в этом можно убедиться?

6.7. Повторить процесс, указанный в задаче 6.6, для интервала $0 \leq x \leq 1$ и требования ортогональности

$$\int_0^1 y_n(x) y_m(x) x dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Начать вновь с $y_0 = 1$ и получить первые четыре полинома. Сравнить это с системой функций $\varphi_n(x) = J_0(\pi \alpha_{0n} x)$, где α_{0n} есть n -й корень уравнения $dJ_0(\pi x)/dx = 0$. Показать, что эти функции также взаимно ортогональны для того же интервала x и функции плотности x . Для каких задач полезны эти системы функций?

6.8. Полиномы Чебышева $T_n(x)$ определяются производящей функцией

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n.$$

Получить первые четыре полинома и при помощи действий с производящей функцией показать, что

$$\begin{aligned} T_1(x) - 2xT_0(x) &= 0; \quad 2T_0(x) - 2xT_1(x) + T_2(x) = 0; \\ T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) &= 0, \quad n > 1, \end{aligned}$$

и, следовательно, что $T_n(x) = \varepsilon_n \cos(n \arccos x)$. Показать, что

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon_n \pi \delta_{mn}.$$

6.9. Полиномы Якоби определяются как

$$J_n(a, c | x) = F(a+n, -n | c | x).$$

Выписать первые четыре полинома и показать, что система полная (для какого интервала?). При помощи контурного интеграла, полученного из формулы (5.3.24), и последующего применения формулы (4.3.1) показать, что

$$J_n(a, c | x) = \frac{x^{1-c} (1-x)^{c-a} \Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{c+n-1} (1-x)^{a+n-c}].$$

Показать, что

$$\frac{d}{dx} J_n(a, c | x) = -\frac{n(n+a)}{c} J_{n-1}(a+2, c+1 | x),$$

$$x J_n(a, c | x) = \frac{c-1}{2n+a} [J_n(a-1, c-1 | x) - J_{n+1}(a-1, c-1 | x)]$$

и что

$$\int_0^1 x^{c-1} (1-x)^{a-c} J_n(a, c | x) J_m(a, c | x) dx = \frac{n! [\Gamma(c)]^2 \Gamma(n+a-c+1)}{(a+2n) \Gamma(a+n) \Gamma(c+n)} \delta_{mn}.$$

Выразить $P_n(x)$ и $T_n^{\beta}(x)$ через J .

6.10. Радиальная функция для уравнения Гельмгольца в сферических координатах равна $j_n(kr) = \sqrt{\pi/2kr} J_{n+1/2}(kr)$. Показать, что собственные функции для стоячих акустических волн внутри жесткой сферической оболочки имеют вид $j_n(\pi \beta_{nm} r/a)$, где β_{nm} — m -й корень уравнения $[dj_n(\pi \beta)/d\beta] = 0$. Показать, что они образуют полную ортогональную систему на интервале $0 \leq r \leq a$. Полагая $a \rightarrow \infty$, показать, что

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} j_n(zu) u^2 du \int_0^{\infty} f(v) j_n(uv) v^2 dv.$$

6.11. Показать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} L_n^a(t) dt = [\Gamma(a+n+1)]^2 \frac{(z-1)^n}{n! z^{a+n+1}}.$$

6.12. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) H_n(y) \frac{t^n}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp \frac{2xyt - t^2(x^2 + y^2)}{1-t^2}.$$

Таблица полезных собственных функций и их свойств

Выберем интервал переменной z и функцию плотности $r(z)$ так, чтобы интеграл по этому интервалу от произведения $r(z)$ на любую положительную степень z был конечным. Выберем затем собственную функцию $\psi_0(z) = 1$. Следующая собственная функция $\psi_1(z)$ выбирается в виде комбинации 1 и z , ортогональной ψ_0 в выбранном интервале при выбранной плотности r . Затем $\psi_2(z)$ возьмем как комбинацию z^2 , z и 1, ортогональную ψ_0 и ψ_1 , и т. д. Таким образом, при помощи чисто механического метода, называемого *методом Шмидта*, можно построить систему собственных функций, которая будет служить базисом для разложения любой кусочно-гладкой функции z в выбранном интервале. Обычно оказывается, что полученные таким образом собственные функции получаются также из решения некоторого уравнения Лиувилля с граничными условиями или из некоторой производящей функции. Здесь будут рассмотрены три полезных случая для трех областей изменения z и различных функций плотности $r(z)$. См. также таблицу полиномов Якоби в конце гл. 12.

I. Интервал $-1 \leq z \leq 1$; функция плотности $(1 - z^2)^\beta$; полиномы Гегенбауера $T_n^\beta(z)$.

Производящая функция:

$$\frac{2}{(1+t^2-2tz)^{\beta+1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n^\beta(z).$$

Частные случаи: $T_n^0(z) = P_n(z)$ — полиномы Лежандра [см. (5.3.24)]; $(1 - z^2)^{m/2} T_{n-m}^m(z) = P_n^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра [см. (5.3.38)];

$$n T_{n-1}^{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} z) \text{ — полиномы Чебышева [см. (5.3.43)];}$$

$$\sqrt{z^2 - 1} T_{n-1}^{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sh}(n \operatorname{arch} z) \text{ — полиномы Чебышева [см. (5.3.43)];}$$

$$T_0^\beta(z) = \frac{2^\beta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\beta - 1) \quad \text{для } \beta = 0, 1, 2, \dots;$$

$$T_1^\beta(z) = \frac{2^{\beta+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\beta + \frac{3}{2}\right) z = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\beta + 1) z \quad \text{для } \beta = 0, 1, 2, \dots$$

Рекуррентные формулы, связывающие эти полиномы и полученные из производящей функции:

$$\frac{d}{dz} T_n^\beta(z) = T_{n-1}^{\beta+1}(z);$$

$$\frac{d}{dz} [(z^2 - 1)^\beta T_n^\beta(z)] = (n+1)(n+2\beta)(z^2 - 1)^{\beta-1} T_{n+1}^{\beta-1}(z);$$

$$(2\beta + 2n + 1) z T_n^\beta(z) = (n+1) T_{n+1}^\beta(z) + (2\beta + n) T_{n-1}^\beta(z);$$

$$(2\beta + 2n + 1) T_n^\beta(z) = \frac{d}{dz} [T_{n+1}^\beta(z) - T_{n-1}^\beta(z)] = T_n^{\beta+1}(z) - T_{n-2}^{\beta+1}(z);$$

$$(2\beta + 1) T_n^\beta(z) + 2z \frac{d}{dz} T_n^\beta(z) = T_n^{\beta+1}(z) + T_{n-2}^{\beta+1}(z);$$

$$(n + 2\beta + 1) T_n^\beta(z) = T_n^{\beta+1}(z) - z T_{n-1}^{\beta+1}(z);$$

$$n T_n^\beta(z) = z T_{n-1}^{\beta+1}(z) - T_{n-2}^{\beta+1}(z);$$

$$(2\beta + 2n + 1)(z^2 - 1) T_{n-1}^{\beta+1}(z) = n(n+1) T_{n+1}^\beta(z) - (n+2\beta)(n+2\beta+1) T_{n-1}^\beta(z);$$

$$T_n^\beta(z) = \frac{2^\beta \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{n! \sqrt{\pi}} \frac{(2\beta+1)(2\beta+3) \cdot \dots \cdot (2\beta+2n-3)(2\beta+2n-1)}{(2\beta+n+1)(2\beta+n+2) \cdot \dots \cdot (2\beta+2n-1)(2\beta+2n)} \times \\ \times \frac{1}{(z^2-1)^\beta} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^{n+\beta};$$

$$(z^2 - 1) \frac{d^2}{dz^2} T_n^\beta(z) + 2(\beta+1) z \frac{d}{dz} T_n^\beta(z) - n(n+2\beta+1) T_n^\beta(z) = 0;$$

последнее уравнение связано с гипергеометрическим уравнением, так как имеет три регулярные особенности. Случай, когда β равно целому n , приводит к присоединенным полиномам Лежандра:

$$T_n^m = \frac{P_{n+m}^m}{(1-z^2)^{m/2}} = \frac{d^m}{dz^m} (P_{n+m}),$$

$$T_0^0 = 1, \quad T_1^0 = z, \quad T_2^0 = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad T_3^0 = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \quad T_4^0 = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3), \dots$$

$$T_1^1 = z, \quad T_2^1 = 3z, \quad T_3^1 = 5z, \quad T_4^1 = 7z, \dots$$

$$T_2^2 = \frac{3}{2}(5z^2 - 1), \quad T_3^2 = \frac{15}{2}(7z^2 - 1), \quad T_4^2 = \frac{105}{2}(3z^3 - z), \dots$$

$$T_3^3 = \frac{5}{2}(7z^3 - 3z), \quad T_4^3 = \frac{105}{2}(3z^3 - z), \dots$$

$$T_4^4 = \frac{15}{8}(21z^4 - 14z^2 + 1), \dots$$

$$T_n^m = \frac{(2n+2m)!}{2^{n+m}n!(n+m)!} \left[z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n+2m-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n+2m-1)(2n+2m-3)} z^{n-4} - \dots \right];$$

см. также формулы (6.3.37) и (6.3.40).

Нормирующий интеграл:

$$\int_{-1}^1 (1-z^2)^{\beta} T_m^{\beta}(z) T_n^{\beta}(z) dz = \delta_{mn} \frac{2\Gamma(n+2\beta+1)}{(2n+2\beta+1)\Gamma(n+1)}.$$

Частные значения:

$$T_n^{\beta}(z) = (-1)^n T_n^{\beta}(-z),$$

$$T_n^{\beta}(1) = \frac{\Gamma(n+2\beta+1)}{2^{\beta}n!\Gamma(\beta+1)}, \quad T_n^{\beta}(0) = 0 \quad \text{для } n = 1, 3, 5, \dots;$$

$$T_n^{\beta}(0) = (-1)^{n/2} \frac{2^{\beta}\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}n\right)!}, \quad \text{для } n = 0, 2, 4, \dots$$

Связь с гипергеометрической функцией:

$$T_n^{\beta}(z) = \frac{\Gamma(n+2\beta+1)}{2^{\beta}n!\Gamma(\beta+1)} F\left(-n, n+2\beta+1 \mid 1+\beta \mid \frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(n+2\beta+1)}{2^{\beta}n!\Gamma(\beta+1)} F\left(-n, n+2\beta+1 \mid 1+\beta \mid \frac{1+z}{2}\right).$$

Формула сложения:

$$T_n^{\beta}(\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi) =$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^n \frac{(\beta+m)(n-m)!}{\Gamma(2\beta+n+m+1)} [\sin \theta \sin \theta_0]^m \times$$

$$\times T_{n-m}^{\beta+m}(\cos \theta) T_{n-m}^{\beta+m}(\cos \theta_0) T_m^{\beta-1/2}(\cos \varphi).$$

II. Интервал $0 \leq z < \infty$; функция плотности $z^a e^{-z}$; полиномы Лагерра $L_n^a(z)$.

Производящая функция:

$$\frac{e^{-zt/(1-t)}}{(1-t)^{a+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+a+1)} L_n^a(z).$$

Частные случаи: $L_n^0(z) = e^{-z} \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z})$,

$$L_0^a(z) = \Gamma(a+1), \quad L_1^a(z) = \Gamma(a+2) [(a+1) - z].$$

Рекуррентные формулы:

$$\frac{d}{dz} L_n^a(z) = -L_{n-1}^{a+1}(z), \text{ за исключением случая } n=0;$$

$$\frac{d}{dz} [z^a e^{-z} L_n^a(z)] = (n+1) z^{a-1} e^{-z} L_{n+1}^{a-1}(z),$$

$$L_n^a(z) = \frac{d}{dz} \left[L_n^a(z) - \frac{1}{n+a+1} L_{n+1}^a(z) \right],$$

$$z L_n^a(z) = (a+2n+1) L_n^a(z) - \frac{n+1}{a+n+1} L_{n+1}^a(z) - (a-n)^2 L_{n-1}^a(z),$$

$$z \frac{d}{dz} L_n^a(z) = (z-a) L_n^a(z) - (n+1) L_{n+1}^{a-1}(z),$$

$$L_n^a(z) = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{e^z}{z^a} \frac{d^n}{dz^n} [z^{a+n} e^{-z}],$$

$$z \frac{d^2}{dz^2} L_n^a(z) + (a+1-z) \frac{d}{dz} L_n^a(z) + n L_n^a(z) = 0;$$

последнее уравнение является вырожденным гипергеометрическим уравнением с регулярной особой точкой при $z=0$ и иррегулярной точкой на ∞ .

Если a равно целому m , получаются присоединенные полиномы Лагерра:

$$L_n^m(z) = (-1)^m \frac{d^m}{dz^m} [L_{n+m}^0(z)],$$

$$L_0^0 = 1, \quad L_0^1 = 1, \quad L_0^2 = 2, \quad L_0^3 = 6, \dots, \quad L_0^m = m!;$$

$$L_1^0 = 1 - z, \quad L_1^1 = 4 - 2z, \quad L_1^2 = 18 - 6z, \quad L_1^3 = 96 - 24z, \dots$$

$$L_2^0 = 2 - 4z + z^2, \quad L_2^1 = 18 - 18z + 3z^2, \quad L_2^2 = 144 - 96z + 12z^2, \dots$$

$$L_3^0 = 6 - 18z + 9z^2 - z^3, \quad L_3^1 = 96 - 144z + 48z^2 - 4z^3, \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L_n^m = \frac{[(m+n)!]^2}{n!m!} F(-n | m+1 | z),$$

где F представляет собой вырожденный гипергеометрический ряд с $n+1$ членами.

Нормирующие интегралы:

$$\int_0^{\infty} z^a e^{-z} L_m^a(z) L_n^a(z) dz = \delta_{mn} \frac{[\Gamma(a+n+1)]^2}{\Gamma(n+1)},$$

$$\int_0^{\infty} z^p e^{-z} L_m^{p-\mu}(z) L_n^{p-\nu}(z) dz = (-1)^{m+n} \Gamma(p+m-\mu+1) \Gamma(p+n-\nu+1) \mu! \nu! \times \\ \times \sum_{\sigma} \frac{\Gamma(p+\sigma+1)}{\sigma! (m-\sigma)! (n-\sigma)! (\sigma+\mu-m)! (\sigma+\nu-n)!},$$

где m, n, μ, ν — целые, а σ принимает все целые значения, большие либо $m - \mu$, либо $n - \nu$ и меньшие либо m , либо n (если этим требованиям нельзя удовлетворить, то интеграл равен нулю).

Связь с вырожденным гипергеометрическим рядом для общих значений a :

$$\begin{aligned} L_n^a(z) &= \frac{[\Gamma(a+n+1)]^2}{n! \Gamma(a+1)} F(-n | a+1 | z) = \\ &= \frac{[\Gamma(a+n+1)]^2}{n! \Gamma(a+1)} e^z F(a+n+1 | a+1 | -z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(a+n+1)}{n!} (-z)^n. \end{aligned}$$

Формула сложения и другие соотношения:

$$L_n^a(x+y) = e^y \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(m+n+a+1)} y^m L_n^{a+m}(x),$$

$$(1+t)^a e^{-xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(a+1)} L_n^{a-n}(x),$$

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m! \Gamma(a+m+1)}{(m-n)! [\Gamma(a+n+1)]^2} L_n^a(x),$$

$$e^t (xt)^{-a/2} J_a(2\sqrt{xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[\Gamma(a+n+1)]^2} L_n^a(x),$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-u/2} u^{\nu+1} J_{\nu}\left(\frac{1}{2}uz\right) L_n^{2\nu}(u) du = \\ = 8 \left(n + \nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+2\nu+1) \frac{(2z)^{\nu}}{(z^2+1)^{\nu+3/2}} T_n^{\nu}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right), \end{aligned}$$

где m и n — целые, в то время как a и ν не обязательно целые.

III. Интервал $-\infty < z < \infty$; функция плотности e^{-z^2} ; полиномы Эрмита $H_n(z)$.

Производящая функция: $e^{-t^2+2tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z).$

Рекуррентные формулы:

$$\frac{d}{dz} H_n(z) = 2n H_{n-1}(z),$$

$$z H_n(z) = n H_{n-1}(z) + \frac{1}{2} H_{n+1}(z),$$

$$\frac{d}{dz} [e^{-z^2} H_n(z)] = -2e^{-z^2} H_{n+1}(z),$$

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (z+it)^n e^{-t^2} dt,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} H_n(z) - 2z \frac{d}{dz} H_n(z) + 2n H_n(z) = 0;$$

последняя является уравнением для вырожденных гипергеометрических функций

$$\begin{aligned}
 & F\left(-\frac{1}{2}n \middle| \frac{1}{2} \middle| z^2\right) \text{ и } zF\left(-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| z^2\right); \\
 & H_0 = 1, \quad H_1 = 2z, \quad H_2 = 4z^2 - 2, \\
 & H_3 = 8z^3 - 12z, \quad H_4 = 16z^4 - 48z^2 + 12, \\
 & H_n = (-1)^{n/2} \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}n\right)!} F\left(-\frac{1}{2}n \middle| \frac{1}{2} \middle| z^2\right), \quad n = 0, 2, 4, \dots, \\
 & = 2(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)!} zF\left(-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| z^2\right), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \\
 & \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} 2^n z^n, \\
 & x^m = \sum_{s=0}^{s \leq \frac{1}{2}m} \frac{m!}{2^s s! (m-2s)!} H_{m-2s}(x).
 \end{aligned}$$

Нормирующий интеграл и другие формулы:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} H_m(z) H_n(z) e^{-z^2} dz = \delta_{mn} 2^n n! \sqrt{\pi}, \\
 & H_{2n}(z) = \frac{(-4)^n n!}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} L_n^{-1/2}(z^2), \quad H_{2n+1}(z) = \frac{2(-4)^n n!}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} z L_n^{1/2}(z^2). \\
 & e^{-(x^2+y^2+2xyz)/(1+z^2)} / \sqrt{1+z^2} = e^{-x^2-y^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{2^m m!} H_m(x) H_m(y), \\
 & \exp\left\{-\frac{1}{2}[(u^2+v^2)\cos\varphi + 2uv\sin\varphi]\right\} = \\
 & = \sec\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \operatorname{tg}^m\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}{m!} e^{(v^2-u^2)/2} H_m(u) H_m(iv).
 \end{aligned}$$

Можно ввести видоизмененные полиномы, аналогично тому, как в случаях I и II были введены полиномы с верхними индексами β и a , если выбрать функцию плотности e^{-z^2+2az} , вместо e^{-z^2} . Однако это сведется к перемещению центра полиномов с $z=0$ в $z=a$. Новая производящая функция имеет вид

$$e^{-t^2+2t(z-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n^a(z) = e^{-2ta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_m(z),$$

где

$$\begin{aligned}
 H_n^a(z) &= H_n(z-a) = \sum_{m=0}^n \frac{(-2a)^{n-m} n!}{m! (n-m)!} H_m(z) = \\
 &= 2^{-n/2} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n-m)!} H_m(z\sqrt{2}) H_{n-m}(-a\sqrt{2}),
 \end{aligned}$$

или

$$e^{-\frac{1}{2}(z-a)^2} H_n(z-a) = e^{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}z^2} \left[\sum_{m=0}^n H_m(z) \frac{n!}{m!(n-m)!} (-a)^{n-m} F\left(n+1 | n-m+1 | -\frac{1}{2}a^2\right) + \sum_{m=n+1}^{\infty} H_m(z) \frac{(a/2)^{m-n}}{(m-n)!} F\left(m+1 | m-n+1 | -\frac{1}{2}a^2\right) \right].$$

Все рекуррентные формулы будут те же, но с новым началом. Нормирующий интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2+2az} [H_n^a(z)]^2 dz = e^{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-a)^2} [H_n(z-a)]^2 dz = 2^n n! \sqrt{\pi} e^{a^2}.$$

На этих трех системах собственных функций мы видим различные возможности для особенностей функции плотности в концевых точках: полиномы Гегенбауера соответствуют плотности, имеющей точки ветвления в обоих концах интервала, полиномы Лагерра — функции плотности, имеющей точку ветвления в одном конце и существенно особую точку в другом, и полиномы Эрмита — функции плотности с существенно особыми точками в обоих концах. При этом значения независимой переменной в обоих концевых точках можно сделать равными данным выше стандартным значениям при помощи очевидных преобразований. Например, для интервала от $z = -a$ до $z = \infty$ при функции плотности, имеющей точки ветвления в обоих концах, мы применяем систему собственных функций $T_n^{\beta}[z/(z+2a)]$ с функцией плотности $r = 2^{2\beta+1} a^{\beta+1} (z+a)^{\beta}/(z+2a)^{2\beta+2}$ и т. д.

Собственные функции, полученные при помощи метода факторизации

Основным уравнением является уравнение типа Шредингера

$$d^2\Phi/dx^2 + [\lambda - V_m(x)]\Phi = 0,$$

где λ — собственное значение, а от соответствующей собственной функции Φ требуется интегрируемость в квадрате в интервале $a \leq x \leq b$, причем a и b — соседние особые точки уравнения. Параметр m может меняться непрерывно или принимать только дискретные значения (в последнем случае масштаб выбирается таким, чтобы эти значения были целыми). Это уравнение иногда равносильно следующим операторным уравнениям:

$$\mathfrak{G}_{m+1}^+ \mathfrak{G}_{m+1}^- \Phi_n(m|x) = (\lambda_n - a_{m+1}) \Phi_n(m|x), \\ \mathfrak{G}_m^- \mathfrak{G}_m^+ \Phi_n(m|x) = (\lambda_n - a_m) \Phi_n(m|x),$$

где

$$\mathfrak{G}_m^+ = u_m(x) + \frac{d}{dx}, \quad \mathfrak{G}_m^- = u_m(x) - \frac{d}{dx}$$

— взаимно сопряженные операторы. Если $V_m(x)$ такова, что факторизацию можно осуществить, причем a_m зависит от m , но не зависит от x , то собственные значения не зависят от m , и если $a_{m+1} > a_m$, то $\lambda_n = a_{n+1}$,

$n = m, m+1, m+2, \dots,$

$$\begin{aligned}\Phi_n(n|x) &= \left[\int_a^b \exp \left(2 \int u_{n+1} dx \right) dx \right]^{-1/2} e^{\int u_{n+1}(x) dx}, \\ \Phi_n(m|x) &= \frac{1}{\sqrt{a_{n+1} - a_{m+1}}} \left[u_{m+1}(x) + \frac{d}{dx} \right] \Phi_n(m+1|x), \\ \int_a^b \Phi_n(m|x) \Phi_{n'}(m|x) dx &= \delta_{nn'},\end{aligned}$$

а если $a_{m+1} < a_m$, то $\lambda_n = a_n$, $n = m, m-1, m-2, \dots$,

$$\begin{aligned}\Phi_n(n|x) &= \left[\int_a^b \exp \left(-2 \int u_n dx \right) dx \right]^{-1/2} e^{-\int u_n(x) dx}, \\ \Phi_n(m|x) &= \frac{1}{\sqrt{a_n - a_m}} [u_m(x) - d/dx] \Phi_n(m-1|x),\end{aligned}$$

где Φ_n — снова ортонормированная система.

Различные виды функций V , допускающих факторизацию, можно получить, определяя такие функции u_m , которые удовлетворяют соотношениям

$$u_{m+1}^2 - u_m^2 + \frac{d}{dx} u_{m+1} + \frac{d}{dx} u_m = a_m - a_{m+1},$$

причем a_m не зависит от x . Тогда соответствующая функция V для исходного уравнения равна

$$V_m(x) = u_m^2(x) - \frac{d}{dx} u_m(x) + a_m = u_{m+1}^2(x) + \frac{d}{dx} u_{m+1}(x) + a_{m+1}.$$

Тривиально простым случаем является тот, когда u_m не зависит от x ; тогда $a_m = -u_m^2$, $V_m = 0$, а собственными функциями являются тригонометрические функции. Другие возможности дают

$$u_m = v(x) + m w(x),$$

где для того, чтобы a_m не зависело от x , должно быть $w^2 + w' = \text{const}$, $v' + v w = \text{const}$;

$$u_m = (1/m) y(x) + m w(x),$$

где должно быть $y = \text{const}$ и $w^2 + w' = \text{const}$. Любой другой выбор зависимости от m и x не допускает независимости a_m от x .

Решая эти уравнения для v , w и y при различных значениях постоянных (включая нулевые значения), мы получаем следующие частные виды $u_m(x)$, a_m и $V_m(x)$, содержащие все возможные случаи описанного выше метода факторизации:

$$\begin{aligned}(\text{A}) \quad u_m &= (m+c) b \operatorname{ctg} [b(x+p)] + d \operatorname{cosec} [b(x+p)], \quad a_m = b^2(m+c)^2, \\ V_m &= \left\{ b^2(m+c)(m+c+1) + d^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2bd \left(m+c + \frac{1}{2} \right) \cos [b(x+p)] \right\} \operatorname{cosec}^2 [b(x+p)],\end{aligned}$$

откуда при помощи преобразования переменных и выбора значений постоянных b , c , d и p можно получить сферические гармонические функции

и другие собственные функции, связанные с гипергеометрической функцией.

$$(Б) \quad \begin{aligned} u_m &= de^{bx} - m - c, \quad a_m = b^2(m+c)^2, \\ V_m &= -d^2e^{2bx} + 2bd\left(m+c+\frac{1}{2}\right)e^{bx}, \end{aligned}$$

откуда при помощи преобразования можно получить функции Лагерра и другие собственные функции, связанные с вырожденной гипергеометрической функцией.

$$(В) \quad \begin{aligned} u_m &= (m+c)\frac{1}{x} + \frac{1}{2}bx, \quad a_m = -2bm + \frac{1}{2}b, \\ V_m &= -(m+c)(m+c+1)\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}b^2x^2 + b(m-c), \end{aligned}$$

что также дает вырожденные гипергеометрические функции.

$$(Г) \quad \begin{aligned} u_m &= bx + d, \quad a_m = -2bm, \\ V_m &= -(bx+d)^2 + b(2m+1), \end{aligned}$$

что дает обобщение полиномов Эрмита.

$$(Д) \quad \begin{aligned} u_m &= ma \operatorname{ctg}[b(x+p)] + \frac{q}{m}, \quad a_m = b^2m^2 - \frac{q^2}{m^2}, \\ V_m &= -m(m+1)b^2 \operatorname{cosec}^2[b(x+p)] - 2bq \operatorname{ctg}[b(x+p)]; \end{aligned}$$

это связано с гипергеометрической функцией [см. формулу (12.3.22)].

$$(Е) \quad \begin{aligned} u_m &= \frac{m}{x} + \frac{q}{m}, \quad a_m = -\frac{q^2}{m^2}, \\ V_m &= -\frac{2q}{x} - m(m+1)\frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

что приводит к полиномам Лагерра [см. формулу (12.3.38)].

ЛИТЕРАТУРА

Рассмотрение различных типов уравнений с частными производными, типов краевых условий, а также разностных уравнений:

- Вебстер А., Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 1 и 2, ГТТИ, М.—Л., 1934.
 Зомерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1950.
 Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
 Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., О разностных уравнениях математической физики, Успехи матем. наук, VIII, 125 (1941).
 Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, изд. 14, Гостехиздат, М., 1956; т. IV, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957.
 Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 3, Гостехиздат, М., 1954.
 Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 2, Гостехиздат, М., 1953.
 Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, М., 1957.
 Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.
 Hadamard J., Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, New Haven, 1923.
 Phillips N., Wiener N., Nets and the Dirichlet Problem, J. Math. Phys., 2, 105 (March, 1923).
 Pöckels F., Über die Partiellendifferentialgleichung $\nabla^2 u + k^2 u = 0$, Leipzig, 1891.

Книги, содержащие довольно полное исследование свойств и применений собственных функций:

- Айнс Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, НТИУ, Харьков, 1939, гл. 10 и 11.
- Зоммерфельд А., Строение атома и спектры, т. II, Гостехиздат, М., 1956.
- Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
- Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, М., 1954.
- Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ГТТИ, М.—Л., 1937.
- Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.
- Bibliography of Orthogonal Polynomials, National Research Council, Washington, 1940.
- Infeld L., Hull T., Factorization Method, Rev. Modern Phys., **23**, 21 (1951).
- Kemble E., Fundamental Principles of Quantum Mechanics, ch. 3, 4, New York, 1937.
- Magnus W., Oberhettinger F., Special Functions of Mathematical Physics, Berlin, 1943.
- Szego G., Orthogonal Polynomials, American Math. Soc., New York, 1939.

Функции Грина

В предыдущей главе мы начали изучение центральной задачи теории поля, состоящей в построении решения данного дифференциального уравнения при заданных граничных условиях. В ней мы исследовали технику разложения по собственным функциям — метод, приводящий к цели прямым путем, если только можно найти подходящую для рассматриваемых границ систему координат, допускающую разделение переменных в рассматриваемом уравнении с частными производными. Однако результат обычно получается в виде бесконечного ряда, который часто сходится довольно медленно, что затрудняет общий анализ поведения решения в целом, его особенностей у краев и т. д. Для некоторых видов задач более желательно иметь решение в замкнутой форме, хотя бы в форме интеграла, включающего замкнутые функции. Использование функций Грина представляет собой как раз такой подход.

Этот метод достаточно очевиден физически. Для получения поля, порожденного некоторым распределением источников (зарядов, или источников тепла, или чем бы то ни было, что порождает поле), мы подсчитываем эффект от каждой элементарной части источника и складываем все эти эффекты. Если $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ представляет собой поле в точке наблюдения $\mathbf{r}$, порожденное единичным точечным источником в точке источника $\mathbf{r}_0$, то поле в $\mathbf{r}$, порожденное совокупностью источников, распределенных с плотностью $\rho(\mathbf{r}_0)$, равно интегралу от $G \cdot \rho$ по всей области изменения $\mathbf{r}_0$, занятой источником. Функция G называется *функцией Грина*.

Этим методом можно также строить решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Именно, мы подсчитываем поле в $\mathbf{r}$, когда граничные значения решения (или его нормальной производной, в зависимости от того, рассматриваются ли условия Дирихле или Неймана) равны нулю в каждой точке поверхности, за исключением точки $\mathbf{r}_0^s$ (которая находится на поверхности). В $\mathbf{r}_0^s$ граничное значение имеет характер дельта-функции, так что интеграл от него по малому участку поверхности вблизи $\mathbf{r}_0^s$ равен единице. Это поле в $\mathbf{r}$ (не на границе) можно обозначить через $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)$; тогда общее решение для произвольного выбора граничных значений $\phi_0(\mathbf{r}_0^s)$ (или нормальной производной N_0) равно интегралу от $G\phi_0$ (или GN_0) по граничной поверхности. Эти функции G также называются функциями Грина.

Тот факт, что решение неоднородного уравнения для поля, порожденного распределением источников, можно найти в виде интеграла по пространству от произведения плотности источников на функцию Грина, не особенно удивителен, так же как и то, что решение однородного уравнения, имеющее заданные значения на границе, можно получить в виде интеграла по граничной поверхности от произведения этих значений на другую функцию Грина. Однако полезно и (возможно) неожиданно то, что эти две функции Грина не являются различными; по существу это одна и та же функция. Для каждого из линейных уравнений с частными производными

гл. 1—3 можно получить функцию, которая, будучи проинтегрирована по объему, изображает поле распределенных источников. Если же ее (или ее нормальную производную) проинтегрировать по поверхности, то она будет изображать поле, порожденное граничными условиями, заданными на поверхности.

Физически это означает, что задание граничных условий на поверхности эквивалентно заданию распределения источников на этой поверхности. Для электростатического случая это, возможно, не новое положение. Граничное условие на заземленном проводнике состоит в равенстве потенциала на поверхности нулю. Помещая поверхностное распределение диполей непосредственно около границы проводника (двигаясь из проводника внутрь области, занятой полем, мы пересечем сначала поверхность проводника, затем бесконечно близкую поверхность, на которой распределен заряд плотности $+\sigma$, и затем бесконечно близкую поверхность с зарядом плотности $-\sigma$), мы получим, что значения потенциала непосредственно около дипольного слоя отличаются от нуля на величину, пропорциональную плотности момента дипольного слоя (произведению σ на расстояние между $+\sigma$ и $-\sigma$). Это не так ново и в случае потока несжимаемой жидкости. Граничное условие на твердой поверхности состоит в равенстве нулю нормальной производной от потенциала скорости на поверхности. Помещение бесконечно близко от этой твердой границы простого слоя источников даст на ней значения нормальной производной потенциала скорости, пропорциональные поверхностной плотности слоя источников. Как мы увидим, такая возможность удовлетворять граничным условиям при помощи поверхностных интегралов от функций источника делает применение функций источника (функций Грина) особенно полезным.

Желательно подчеркнуть связь между источниками и граничными условиями посредством выбора терминологии. Уравнение поля в присутствии источников является *неоднородным* уравнением с частными производными (например, уравнением Пуассона $\nabla^2\psi = -4\pi\rho$). Неоднородный член, не содержащий ψ , содержит плотность источников ρ . Обратное, уравнение поля, в котором отсутствуют источники, является *однородным* уравнением (например, уравнением Лапласа $\nabla^2\psi = 0$).

Аналогично можно сказать (и мы уже говорили), что граничные условия, требующие равенства поля нулю на поверхности, являются *однородными граничными условиями* (нулевые значения дают однородные условия Дирихле; нулевая нормальная производная — однородные условия Неймана; требование равенства $a\psi + b\partial\psi/\partial n$ нулю на поверхности дает однородные смешанные условия).

Обратно, требование, чтобы ψ принимало заданные значения ψ_0 (не всюду равные нулю) на поверхности, называется *неоднородным* условием Дирихле; в этом случае граничные значения можно считать «порожденными» поверхностным дипольным слоем источников, соответствующих неоднородному уравнению. Подобным образом требование, чтобы $\partial\psi/\partial n = N_0$ (N_0 — не всюду нуль) на поверхности, называется неоднородным условием Неймана, а требование $a\psi + b\partial\psi/\partial n = F_0$ на поверхности можно назвать неоднородным смешанным условием. Если либо уравнение, либо граничные условия неоднородны, то можно считать, что источники присутствуют; если и уравнение, и граничные условия однородны, то источники отсутствуют.

Конечно, имеется другая, более очевидная причина того, что в обоих случаях применяется одно и то же определяющее прилагательное. Решения однородных уравнений, умноженные на произвольный постоянный множитель, все равно остаются решениями, и то же можно сказать о функциях, удовлетворяющих однородным граничным условиям; решения неоднородных уравнений или функции, удовлетворяющие неоднородным граничным условиям, нельзя так преобразовывать.

Поэтому функция Грина является решением для случая, когда *неоднородность имеет место всюду, кроме одной точки*. Если точка на границе, то функцию Грина можно применять, чтобы удовлетворить неоднородным граничным условиям; если точка находится в пространстве вне границы, то функцию Грина можно применять, чтобы удовлетворить неоднородному уравнению. Таким образом, при помощи нашей терминологии мы в состоянии высказывать утверждения, справедливые одновременно для граничных условий и для распределений источников.

7.1. Точки источников и граничные точки

В предыдущей главе мы применяли понятия абстрактного векторного пространства для «геометризации» наших функциональных идей. Функция $F(x, y, z)$ рассматривалась как удобное обозначение для записи компонента вектора $\mathbf{F}$ вдоль каждого направления из бесконечного множества направлений, соответствующих всем точкам (x, y, z) области внутри границы. Дельта-функция $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ изображала единичный (относительно интегрирования в первой степени) вектор $\mathbf{e}(\mathbf{r}_0)$ в направлении, соответствующем точке (x_0, y_0, z_0) (где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; следует заметить, что $\mathbf{r}$ представляет собой вектор в трехмерном пространстве, тогда как $\mathbf{e}$ и $\mathbf{F}$ являются векторами в абстрактном векторном пространстве).

Формулировка в абстрактном векторном пространстве. В гл. 6 и § 1.6 мы исследовали преобразование координат при переходе от осей, направленных вдоль единичных векторов $\mathbf{e}(\mathbf{r})$, к осям, направленным вдоль единичных векторов $\mathbf{e}_n$, которые соответствовали собственным функциям — решениям ψ_n определенных дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}(\psi_n) = \lambda_n \psi_n.$$

Векторы $\mathbf{e}_n$ являются собственными векторами абстрактного векторного оператора $\mathfrak{L}$, соответствующего дифференциальному оператору $\mathcal{L}$:

$$\mathfrak{L}(\mathbf{e}_n) = \lambda_n \mathbf{e}_n. \quad (7.1.1)$$

Мы показали, что единичные векторы $\mathbf{e}_n$ взаимно ортогональны и что вектор, соответствующий искомому решению, удовлетворяющему заданным граничным условиям, можно построить однозначно в виде суммы отдельных собственных векторов:

$$\mathbf{F} = \sum A_n \mathbf{e}_n, \text{ или } F(x, y, z) = \sum A_n \psi_n(x, y, z).$$

Так как дифференциальные операторы $\mathcal{L}$ и соответствующие векторные операторы $\mathfrak{L}$ *линейны*, то решения можно складывать; на основе этого строится решение в виде ряда. Был развит метод непосредственного вычисления компонента A_n , в результате чего наша абстрактная схема дала сильную, практическую технику решения краевых задач.

Очевидно, что возможны и другие полезные разложения $\mathbf{F}$. Одна из таких возможностей проявляется при изучении неоднородного уравнения

$$\mathcal{L}(F) = -4\pi \rho(x, y, z). \quad (7.1.2)$$

Для решения этого уравнения при помощи собственных функций мы разлагаем как ρ , так и F по собственным функциям. Если вектор, соответствующий ρ , равен $\mathbf{P} = \sum B_n \mathbf{e}_n$ и если принять, что $\mathbf{F} = \sum A_n \mathbf{e}_n$, то неизвестные коэффициенты A_n можно определить при помощи подстановки в уравнение

$$\mathfrak{L}(\mathbf{F}) = -4\pi \mathbf{P}, \quad \sum \lambda_n A_n \mathbf{e}_n = -4\pi \sum B_n \mathbf{e}_n.$$

Однако неоднородный вектор $\mathbf{P}$ можно было бы разложить по единичным векторам $\mathbf{e}(x_0, y_0, z_0)$ вместо $\mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{P} = \sum_{x_0, y_0, z_0} \rho(x_0, y_0, z_0) \mathbf{e}(x_0, y_0, z_0),$$

что соответствует формуле (представляющей собой одно из определений дельта-функции)

$$\rho(x, y, z) = \iiint \rho(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0.$$

Затем мы решаем более простое неоднородное уравнение

$$\mathcal{L}(\mathbf{G}) = -4\pi \mathbf{e}(x_0, y_0, z_0) \quad (7.1.3)$$

(если это возможно). Компоненты решения $\mathbf{G}$ в (x, y, z) -системе являются решениями более простого неоднородного дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}(G) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (7.1.4)$$

Компоненты G , полученные из решения уравнения (7.1.4), являются функциями как координат x, y, z (независимых переменных дифференциального оператора $\mathcal{L}$), так и x_0, y_0, z_0 (положения «источника» дельта-функции), соответствующих единичному вектору $\mathbf{e}(x_0, y_0, z_0)$, выбранному в уравнении (7.1.3). В конце § 7.5 мы покажем, что функции $\mathbf{G}(x, y, z | x_0, y_0, z_0) = \mathbf{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ для различных значений x_0, y_0, z_0 являются компонентами вдоль направления $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ скорее оператора, чем вектора. Этот оператор переводит вектор $\mathbf{P}$, неоднородную часть, в вектор $\mathbf{F}$ — решение. Ввиду линейности мы ожидаем, что решением уравнения

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}) = -4\pi \sum_{x_0, y_0, z_0} \rho(\mathbf{r}_0) \mathbf{e}(\mathbf{r}_0) \text{ будет } \mathbf{F} = \sum_{x_0, y_0, z_0} \rho(\mathbf{r}_0) \mathbf{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0), \quad (7.1.5)$$

т. е. сумма всех отдельных решений для единичных векторов в правой части, каждое из которых умножено на соответствующую амплитуду $\rho(\mathbf{r}_0)$. Следовательно, надо ожидать, что решением неоднородного дифференциального уравнения (7.1.2) будет

$$F(x, y, z) = \iiint G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) \rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0, \quad (7.1.6)$$

где G является решением уравнения (7.1.4) и называется *функцией Грина*. Таким образом, с абстрактной векторной точки зрения получается, что решение посредством функций Грина есть представление через единичные векторы $\mathbf{e}(x, y, z)$, тогда как решение посредством собственных функций есть представление через единичные векторы $\mathbf{e}_n$. Значительно более полное исследование этого представления будет дано в конце этой главы.

В этой главе мы наметим, как находить единичные решения G и определять, когда представления сходятся, а также рассмотрим другие уточняющие детали, аналогичные тем, которые мы изучили в предыдущей главе, прежде чем смогли уверенно применять технику собственных функций.

Граничные условия и поверхностные заряды. Мы еще не показали, чем может помочь возможность решать неоднородное уравнение (с однородными граничными условиями) при решении однородного уравнения с неоднородными граничными условиями. Прежде чем вдаваться в детали, разберем простой пример, который, быть может, пояснит принцип. Позже будет показано, что решение уравнения Пуассона

$$\nabla^2 G = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

с однородными условиями Дирихле ($G=0$ на поверхности S на рис. 7.1) представляет собой функцию, стремящуюся к бесконечности как $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$. Здесь мы хотим лишь указать, что упомянутое решение G

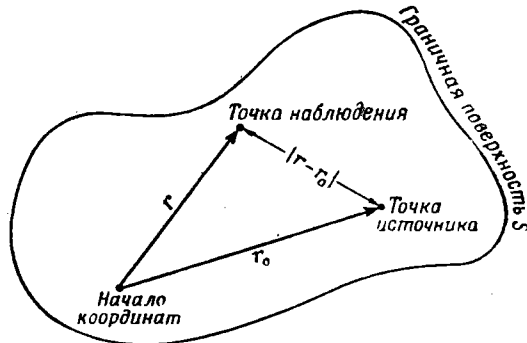


Рис. 7.1. Точка источника, точка наблюдения и граничная поверхность для функции Грина.

можно применить как для построения решения при произвольном распределении заряда внутри поверхности S , так и для построения решения при произвольных граничных условиях Дирихле на S (т. е. для $\phi = \phi_s$ на поверхности).

Действительно, заменим неоднородные граничные условия на однородные, но при этом добавим поверхностное распределение зарядов, расположенных внутри области, где ищется решение, бесконечно близко к граничной поверхности. Увеличим картину вблизи граничной поверхности, как

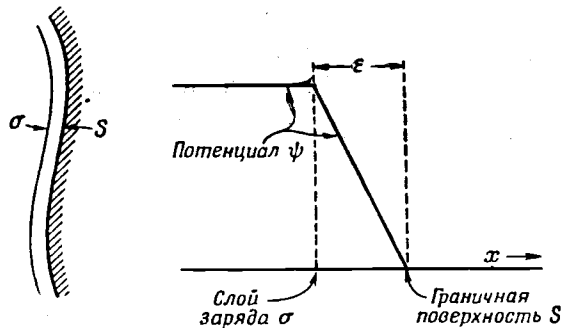


Рис. 7.2. Потенциал слоя источника σ на малом расстоянии ϵ вне заземленной поверхности.

показано на рис. 7.2. Плотность поверхностного заряда, заменяющего неоднородные граничные условия, возьмем равной σ/ϵ , где ϵ — малое расстояние от поверхности S . Возьмем ϵ значительно меньшим радиуса кривизны поверхности, а также меньшим расстояний, на которых σ заметно меняется. Итак, мы заменяем неоднородные условия на однородные плюс этот слой заряда, так что мы теперь требуем, чтобы потенциал на граничной поверхности равнялся нулю. Для расстояний порядка ϵ поверхность можно считать плоскостью (которую можно принять за плоскость y, z), а плотность заряда σ/ϵ можно считать равномерной.

Таким образом, мы приходим к задаче о плоском поверхностном заряде с постоянной поверхностной плотностью σ/ε , расположенном на расстоянии ε параллельно заземленному плоскому проводнику при $x=0$. Из элементарной электростатики вспоминаем, что при переходе через поверхностный заряд с плотностью σ/ε нормальная составляющая градиента потенциала меняется скачком на величину $4\pi\sigma/\varepsilon$. Так как ε очень мало, то градиент между зарядом и границей должен быть несравненно больше, чем градиент по другую сторону поверхностного заряда вблизи от него, и вторым по сравнению с первым можно пренебречь.

Следовательно, градиент между $x=-\varepsilon$ и $x=0$ должен приближенно равняться $-4\pi\sigma/\varepsilon$, а потенциал в этой области должен быть равным

$$\psi = -(4\pi\sigma/\varepsilon)x, \quad -\varepsilon < x < 0,$$

и потому потенциал по другую сторону поверхностного заряда при $x=-\varepsilon$ вблизи него должен быть равен $\psi=4\pi\sigma$. Отсюда, если сделать поверхностную плотность σ/ε слоя поверхностного заряда, бесконечно близкого к заземленной поверхности, равной $\psi_s/(4\pi\varepsilon)$, то потенциал при приближении к поверхностному заряду со стороны $x < -\varepsilon$ будет как раз равняться ψ_s , т. е. граничному значению, которому мы хотели удовлетворить.

Таким образом, мы сделали правдоподобной идею о том, что решение однородного уравнения, удовлетворяющее неоднородным граничным условиям, эквивалентно решению неоднородного уравнения, удовлетворяющему однородным граничным условиям, с неоднородной частью, представляющей поверхностный слой заряда с плотностью, пропорциональной неоднородным граничным значениям, бесконечно близкий к граничной поверхности. Конечно, мы не доказали этой эквивалентности; мы сделали только ее правдоподобной. Мы также не увидели, где эквивалентность теряется (можно ожидать, например, что эквивалентность нарушается между слоем заряда и поверхностью). Однако, указав цель, мы сможем легче найти путь к ее достижению.

Между прочим, было бы нетрудно сделать правдоподобным удовлетворение неоднородных условий Неймана при помощи подобной замены на однородные условия (нулевая $\partial\psi/\partial n$ на S) плюс поверхностный слой у границы с поверхностной плотностью, пропорциональной заданной на границе нормальной производной. Таким образом, мы начинаем видеть, как решения неоднородных уравнений связаны с решениями для неоднородных условий и как поверхностный слой может заменить граничные условия.

Простой пример. Прежде чем разбирать задачу во всей ее общности, мы рассмотрим некоторые подробности на простом примере. Возьмем двумерное уравнение Пуассона

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y) \quad (7.1.7)$$

внутри прямоугольной границы $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Прежде всего мы напомним полученное методом собственных функций решение в случае $\rho=0$ (однородное уравнение) при однородных граничных условиях ($\psi=0$) на трех сторонах $x=0$, $x=a$, $y=0$, но неоднородных условиях ($\psi=\psi_b(x)$) вдоль стороны $y=b$. Согласно формуле (6.3.2), это решение имеет вид

$$\psi(x, y) = \int_0^a \psi_b(\xi) G^b(x, y | \xi) d\xi,$$

где

$$G^b(x, y | \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi n y / a)}{\operatorname{sh}(\pi n b / a)} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi n \xi}{a}. \quad (7.1.8)$$

Величина G^b в квадратных скобках является функцией координат x и y , а также положения ξ на линии $y = b$. Ее можно назвать *функцией Грина* для граничных условий на этой линии $y = b$. Для получения решения мы умножаем эту функцию на заданное граничное значение ϕ и интегрируем по границе.

Чтобы показать, как связана эта функция с решением уравнения Пуассона для точечного источника (точечный источник для двух измерений — это то же, что линейный источник для трех измерений), мы далее исследуем две формы решения неоднородного уравнения (которое, согласно формуле (7.1.4), является уравнением для функции Грина с точечным источником в x_0, y_0)

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (7.1.9)$$

при однородных граничных условиях $\phi = 0$ на всех четырех граничных линиях.

В непосредственной близости от источника [$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \ll a^2, b^2$] решение должно вести себя так, как если бы границы вообще не было. Решение уравнения (7.1.9) для границы на бесконечности есть $\phi = -2 \ln R = -\ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$, так что можно было бы ожидать, что решение уравнения (7.1.9) для конечной границы стремится к бесконечности как $-2 \ln R$, когда расстояние R становится значительно меньшим расстояния между точкой источника (x_0, y_0) и ближайшей границей.

Имеются два пути решения уравнения (7.1.9) (и потому также уравнения (7.1.7)). Один, более простой аналитически и более тяжелый с вычислительной точки зрения, состоит в разложении в двойной ряд Фурье

$$\phi = \sum_{m, n} A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Этот ряд не является решением уравнения Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$, но мы вскоре покажем, что он *может* быть решением уравнения Пуассона (7.1.7); при этом, чтобы быть решением уравнения (7.1.9), он должен удовлетворять уравнению Лапласа всюду, *кроме одной точки* (x_0, y_0) . Для решения уравнения (7.1.7) разложим $\rho(x, y)$ в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sum_{m, n} P_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \\ P_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \sin \frac{\pi m \xi}{a} \sin \frac{\pi n \eta}{b} \rho(\xi, \eta), \end{aligned}$$

и подставим оба ряда в (7.1.7). Тогда можно будет определить коэффициенты A_{mn} , и в результате мы получим решение

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{4}{\pi} \sum_{m, n} \frac{P_{mn}}{(m/a)^2 + (n/b)^2} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} = \\ &= \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta G(x, y | \xi, \eta) \rho(\xi, \eta), \quad (7.1.10) \end{aligned}$$

где

$$G(x, y | \xi, \eta) = \frac{16}{\pi ab} \sum_{m, n} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sin(m\pi \xi/a) \sin(n\pi \eta/b)}{(m/a)^2 + (n/b)^2}$$

есть функция Грина для неоднородного уравнения. Нетрудно видеть, что G является решением уравнения (7.1.9) для однородных граничных условий. Она равна потенциалу в точке (x, y) от единичного точечного заряда в (ξ, η) . Плохая сходимость ряда проистекает из того, что он должен стремиться к бесконечности как логарифм, когда (x, y) стремится к (ξ, η) (как мы указали несколько выше и докажем в следующем параграфе). Для более хорошего распределения ρ ряд (7.1.10) сходится быстрее.

Еще одно свойство G , которым вообще обладают все эти функции Грина: она симметрична относительно перестановки (x, y) и (ξ, η) . Другими словами, потенциал в (x, y) , порожденный зарядом в (ξ, η) , равен потенциалу в (ξ, η) , порожденному тем же зарядом в (x, y) , если граничные условия не меняются. Этот вывод, что перестановка источника и наблюдателя не меняет G , иногда называется *принципом взаимности*.

Связь между объемной и поверхностной функциями Грина. Однако ряд (7.1.10) все еще далек от выражения, стоящего в квадратных скобках в (7.1.8). Прежде всего это выражение является простым рядом, тогда как ряд (7.1.10) — двойной. Попробуем решить уравнение (7.1.7) при помощи простого ряда. Для этого положим

$$\phi(x, y) = \sum_m F_m(y) \sin \frac{\pi m x}{a}, \quad \rho(x, y) = \sum_m \rho_m(y) \sin \frac{\pi m x}{a}, \quad (7.1.11)$$

где F_m требуется подсчитать, а

$$\rho_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \rho(\xi, y) \sin \frac{\pi m \xi}{a} d\xi.$$

Подстановка в уравнение (7.1.7) дает для $F_m(y)$ обыкновенное неоднородное уравнение

$$\frac{d^2}{dy^2} F_m - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 F_m = -4\pi \rho_m(y).$$

Чтобы применить формулу (5.2.19) для решения такого уравнения, заметим, что двумя независимыми решениями однородной части будут

$$y_1 = \operatorname{sh}(\pi m y/a), \quad y_2 = \operatorname{sh}[(\pi m/a)(b-y)].$$

Эти решения независимы, так как их определитель Вронского

$$\begin{aligned} \Delta(y_1, y_2) &= -\frac{\pi m}{a} \left[\operatorname{sh} \frac{\pi m y}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi m}{a} (b-y) + \operatorname{ch} \frac{\pi m y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi m}{a} (b-y) \right] = \\ &= -(\pi m/a) \operatorname{sh}(\pi m b/a) \end{aligned}$$

отличен от нуля (и постоянен, как это и должно быть). Подставляя все это в (5.2.19) и выбирая пределы интегрирования такими, чтобы F_m равнялось нулю при $y=0$ и $y=b$, имеем

$$\begin{aligned} F_m(y) &= \frac{4a}{m \operatorname{sh}(\pi m b/a)} \left\{ \operatorname{sh} \frac{\pi m y}{a} \int_y^b \rho_m(\eta) \operatorname{sh} \frac{\pi m}{a} (b-\eta) d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} \frac{\pi m}{a} (b-y) \int_0^y \rho_m(\eta) \operatorname{sh} \frac{\pi m \eta}{a} d\eta \right\} = \int_0^b g_m(y|\eta) \rho_m(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

где

$$g_m(y|\eta) = \frac{4a}{m \operatorname{sh}(\pi m b/a)} \times \begin{cases} \operatorname{sh}(\pi m y/a) \cdot \operatorname{sh}[(\pi m/a)(b-\eta)] & \text{для } \eta > y, \\ \operatorname{sh}(\pi m \eta/a) \cdot \operatorname{sh}[(\pi m/a)(b-y)] & \text{для } \eta < y. \end{cases}$$

Функция $g_m(y|\eta)$ обращается в нуль, когда y или η равно нулю или b , и ее производная имеет разрыв (см. стр. 123) величины -4π при $y = \eta$.

Наконец, подставляя все эти решения вновь в формулу (7.1.11), мы получаем простую форму для решения:

$$\psi(x, y) = \int_0^a d\xi \int_0^b G(x, y|\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\eta, \quad (7.1.12)$$

где

$$G(x, y|\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8 \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot \sin \frac{\pi m \xi}{a}}{m \operatorname{sh}(\pi m b/a)} \times \begin{cases} \operatorname{sh}(\pi m y/a) \cdot \operatorname{sh}[(\pi m/a)(b-\eta)] & \text{для } \eta > y, \\ \operatorname{sh}(\pi m \eta/a) \cdot \operatorname{sh}[(\pi m/a)(b-y)] & \text{для } \eta < y. \end{cases}$$

Так как этот интеграл для ψ имеет тот же вид, что и интеграл в формуле (7.1.10), то и функция G , данная здесь, должна равняться G , данной там. Простой (но утомительный) процесс разложения g_m в ряд Фурье по y показывает, что обе функции G в самом деле тождественны.

Однако при помощи этого последнего выражения для G можно лучше выяснить связь между решением неоднородного уравнения при однородных граничных условиях и данным в (7.1.8) решением однородного уравнения при неоднородных граничных условиях; действительно, если единственным зарядом внутри границ является поверхностный заряд с плотностью $(1/4\pi\varepsilon)\phi_b(\xi)$, расположенный на исчезающе малом расстоянии ε от поверхности $y = b$, то при $\eta = b - \varepsilon$, т. е. в единственном месте, где ρ отлично от нуля, имеем

$$G(x, y|\xi, b - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_m \frac{8\pi\varepsilon}{a} \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot \sin \frac{\pi m \xi}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh}(\pi m y/a)}{\operatorname{sh}(\pi m b/a)}, \quad y < b - \varepsilon.$$

Так как область $b - \varepsilon < y < b$ должна стать исчезающе малой, то она не будет участвовать в нашем рассмотрении, хотя надо помнить, что в этой бесконечно узкой области производная от G претерпевает разрыв, обращаясь в нуль при $y = b$. Подставляя последнее значение для G в формулу (7.1.12), можно видеть, что потенциал, порождаемый тонким слоем заряда поверхностной плотности $(1/4\pi\varepsilon)\phi_b(x)$ на бесконечно малом расстоянии ε от заземленной пластинки $y = b$, представляется точно тем же интегралом, что и потенциал (7.1.8), получающийся, когда на поверхности $y = b$ задается неоднородное граничное условие $\psi_b(x)$.

Общее решение. Можно прийти к тому же равенству двух решений несколько иным путем, возможным при более общих условиях. Заметим, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x, y|\xi, \eta) \right]_{y < \eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow b} -4\pi G_b(x, y|\xi), \quad (7.1.13)$$

где G_b определено формулой (7.1.8), так что равенство (7.1.8) можно переписать следующим образом:

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \psi_0(S_0) \left[\frac{\partial}{\partial n_0} G(x, y|S_0) \right] dS_0, \quad (7.1.14)$$

где величина в квадратных скобках есть производная функции $G(x, y|x_0, y_0)$ от x_0, y_0 по нормали к граничной поверхности S_0 (в данном случае S_0 есть $y_0 = b$, так что производная берется по y_0 или η), причем координаты

x_0, y_0 берутся на этой поверхности. Интеграл от этой производной, умноженной на заданное граничное значение ϕ_0 , берется по поверхности (в данном случае интегрирование производится по x_0 или ξ).

Эта стенографическая запись раскрывает соотношение между функцией Грина для неоднородного уравнения и функцией Грина для однородных граничных условий, но о некоторых вещах ничего не говорит. Например, в ней не указана структура разрыва функции G , получающегося, когда точка (x_0, y_0) стремится к поверхности S_0 (производная от G имеет разрыв при $y = y_0 = \eta$, который попадает прямо на поверхность, когда точка (x_0, y_0) достигает поверхности). Получающееся решение ϕ не имеет разрыва *внутри* области, окруженной граничной поверхностью, но должен иметься разрыв как раз на самой границе (на самом деле этот разрыв должен быть таким, чтобы ϕ равнялась нулю непосредственно за поверхностью и равнялась $\phi_0(S_0)$ непосредственно внутри поверхности в области, окруженной границей).

При дальнейшем применении формулы (7.1.14) надо заботиться о том, чтобы при получении функции Грина для граничных условий из $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ сначала устремить «точку источника» (x_0, y_0) к поверхности S_0 и только после этого позволить точке (x, y) приблизиться к соответствующей граничной поверхности S пространства «точек наблюдения». Переходя к пределу в этом порядке, мы видим из формул (7.1.13) и (7.1.8), что, когда сначала η стремится к b , а затем y стремится к b , предел равен

$$\frac{\partial}{\partial \eta} G(x, y|\xi, \eta) \rightarrow -\frac{8\pi}{a} \sum_n \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi \xi}{a} = -4\pi \delta(x - \xi).$$

Значит, функция Грина для поверхности (вычисленная на поверхности) является дельта-функцией, соответствующей граничным условиям, равным нулю всюду, кроме точки $x = \xi$. Это, конечно, соответствует нашему интуитивному представлению о природе функции Грина.

Подведем итоги: для решения краевых задач, помимо техники собственных функций, имеется другой метод, в котором решается неоднородное уравнение при однородных граничных условиях для «точечного источника» в некоторой точке $\mathbf{r}_0$ внутри границы. Получающаяся функция $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$, функция Грина для внутреннего объема, симметрична относительно перестановки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$, разрывна или имеет разрывную производную при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ и удовлетворяет по $\mathbf{r}$ однородным граничным условиям на граничной поверхности S , а по $\mathbf{r}_0$ — на аналогичной поверхности S_0 . Решение общего неоднородного уравнения имеет вид (7.1.12), т. е. $\phi(\mathbf{r})$ получается при интегрировании $G\rho$ по $\mathbf{r}_0$ -области внутри S_0 .

Если однородные граничные условия, которым удовлетворяет G , состоят в том, что $G = 0$ на S и S_0 , то решение для неоднородных граничных условий [$\phi = \phi(S)$ на S] имеет вид (7.1.14), где производная от G берется в координатах $\mathbf{r}_0$ по нормали к S_0 для $\mathbf{r}_0$, исчезающе близкого к S_0 . Далее, точка $\mathbf{r}_0$ устремляется «на» S_0 и интегрирование после умножения на $\phi(S_0)$ производится по граничной поверхности.

Если однородными граничными условиями на G служат условия Неймана (нулевая нормальная производная от G на S), то решение для неоднородных условий ($\partial\phi/\partial n = N(S)$ на S) имеет вид

$$\phi(x, y) = 4\pi \int_{S_0} N(S_0) G(x, y|S_0) dS_0. \quad (7.1.15)$$

Это будет доказано позже. Рассмотрения этого параграфа не заканчивают нашего «доказательства» формулы (7.1.14); они только начинают наше исследование.

Функция Грина и производящие функции. Формулы (7.1.8) — (7.1.12) показывают, что функции Грина и собственные функции тесно связаны. Позже в этой главе мы получим общую формулу для разложения функции Грина по собственным функциям. Нетрудно показать, что такие формулы разложения служат обильным источником производящих функций для собственных функций [см. формулу (6.3.32)]. В случае, исследуемом в этом параграфе, мы получаем производящую функцию, интегрируя функцию $G_b(x, y|\xi)$, определенную формулой (7.1.8), по ξ от нуля до a . Только члены с нечетным n дают ненулевые интегралы, так что, разлагая гиперболический синус на составляющие его экспоненты, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^a G_b(x, y|\xi) d\xi &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi y/a)]}{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi b/a)]} \frac{\sin[(2n+1)(\pi x/a)]}{(2n+1)} = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^{2n+1}}{2n+1} \frac{\sin[(2n+1)(\pi x/a)]}{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi b/a)]}, \quad \gamma = e^{\pi y/a}. \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Это соотношение не особенно полезно, так как функция G_b не дана в замкнутом виде. Однако легко видеть, что если возможно получить замкнутый вид для G , то тем самым можно построить производящие функции для соответствующих собственных функций.

7.2. Функции Грина для установившихся колебаний

Прежде чем приступить к более сложным случаям, целесообразно упростить обозначения, возвратившись к векторной символике. Точке x, y, z в трехмерном пространстве соответствует радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Функция Грина $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ зависит от положения двух точек: *точки наблюдения*, в которой поле измеряется, имеющей радиус-вектор $\mathbf{r}$ и *координаты* x, y, z *наблюдателя*, и *точки источника*, в которой помещается единичный источник, имеющий радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ и *координаты источника* x_0, y_0, z_0 . Граничная поверхность в координатах x, y, z обозначается буквой S , а в координатах x_0, y_0, z_0 — буквой S_0 . Функция Грина с точкой наблюдения в $\mathbf{r}$ и с источником на границе обозначается через $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)$. Элемент объема в пространстве переменных x, y, z обозначается через $dv (= dx dy dz)$, аксиальный вектор, изображающий элемент граничной поверхности S , обозначается через $d\mathbf{A}$, и элемент граничной поверхности S_0 — через $d\mathbf{A}_0$. Оба эти вектора направлены *наружу*, из объема, заключенного внутри границы.

Элемент нормальной составляющей градиента G на поверхности в координатах источника можно тогда записать в виде $\operatorname{grad}_0 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \cdot d\mathbf{A}_0$, где индекс нуль у градиента указывает, что производную надо брать по x_0, y_0, z_0 . Дельта-функцию для трех измерений можно записать в виде $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$; она имеет интегральное свойство

$$\iiint F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = F(\mathbf{r}_0). \quad (7.2.1)$$

Наконец, ∇_0^2 с индексом нуль есть оператор Лапласа в координатах источника, тогда как в координатах наблюдателя он обозначается просто ∇^2 .

Теорема Грина. Чтобы получить вполне строгий вывод свойств функции Грина, будет выгодно воспользоваться вариантом теоремы Гаусса. Для любой замкнутой поверхности S теорема Гаусса, записанная формулой (1.4.7), утверждает, что поток любого «достаточно гладкого» векторного поля через поверхность S (наружу) равен интегралу от дивергенции

этого поля по всему объему, заключенному внутри S . Под «достаточной гладкостью» мы понимаем то, что вектор не должен иметь разрывов в величине или в производной на S и что дивергенция интегрируема.

Рассмотрим теперь две «достаточно гладкие» скалярные функции $U(\mathbf{r})$ и $V(\mathbf{r})$ от $\mathbf{r}$. По ним построим вектор $U \text{ grad } V$. Теорема Гаусса утверждает, что поток этого вектора через S равен интегралу от дивергенции $U \text{ grad } V$ по объему, заключенному внутри S . Так как

$$\text{div } (U \text{ grad } V) = (\text{grad } U) \cdot (\text{grad } V) + U \nabla^2 V,$$

то в указанных выше обозначениях имеем (где $d\mathbf{A}$ направлено наружу из области, заключенной внутри границы)

$$\oint U \text{ grad } V \cdot d\mathbf{A} = \iiint (\text{grad } U \cdot \text{grad } V) dv + \iiint U \nabla^2 V dv.$$

Однако можно получить также подобное соотношение для другого вектора $V \text{ grad } U$. Вычитая одно из другого, получаем

$$\oint [U \text{ grad } V - V \text{ grad } U] \cdot d\mathbf{A} = \iiint [U \nabla^2 V - V \nabla^2 U] dv, \quad (7.2.2)$$

где поверхностный интеграл берется от наружной нормальной компоненты вектора, заключенного в квадратные скобки, по замкнутой поверхности S , а объемный интеграл берется от скалярной величины в квадратных скобках по всему объему внутри S . Граничная поверхность может быть конечной (по протяженности) или бесконечной. Например, она может быть конечной сферой, причем объемное интегрирование распространяется по внутренности сферы, а $d\mathbf{A}$ направлено от центра сферы. Или же она может состоять из этой конечной сферы и бесконечной сферы, причем «внутренностью» в этом случае будет бесконечный объем между этими сферами, и $d\mathbf{A}$ на конечной сфере направлено к центру (от «внутренности»), а на бесконечной сфере — наружу. Аналогично можно построить и другие частные примеры.

Это соотношение между поверхностным и объемным интегралами называется *теоремой Грина*. Как мы видели, она является частным случаем теоремы Гаусса. Вскоре мы увидим, как она применяется к выводу свойств функции Грина.

Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Начнем с изучения функции Грина для уравнения Гельмгольца

$$\mathcal{L}\psi \equiv \nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (7.2.3)$$

при некоторых граничных условиях на замкнутой поверхности S . В соответствии с нашим кратким введением в § 1, нам надо сейчас доказать следующие свойства функции Грина.

1. Функция Грина является симметричной функцией координат двух точек, именно, координат точки наблюдения и точки источника:

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = G_k(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) \quad (7.2.4)$$

(соотношение взаимности). Эта функция удовлетворяет некоторым однородным граничным условиям как на S , так и на S_0 и имеет разрыв (вида, который надо определить) при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

2. Используя эту функцию, можно получить решение неоднородного уравнения с данными однородными граничными условиями или же решение однородного уравнения с неоднородными граничными условиями. В силу линейности уравнения мы можем также решить неоднородное уравнение с неоднородными граничными условиями при помощи наложения обоих частных решений.

3. Решения для неоднородных граничных условий имеют разрыв на границе. Например, если ψ задано на поверхности (условия Дирихле), то решение будет иметь заданное значение ψ непосредственно внутри границы и будет равно нулю непосредственно за ней. В случае условий Неймана, когда задается нормальная производная, будет разрыв у этой производной.

Требуемая функция Грина является решением неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + k^2 G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (7.2.5)$$

для единичного точечного источника в $\mathbf{r}_0$, удовлетворяющим однородным граничным условиям (либо нулевое значение, либо нулевая нормальная производная от G) на граничной поверхности S (и также, в координатах источника, на S_0). Дельта-функция определена формулой (7.2.1) и симметрична относительно вращения около $\mathbf{r}_0$. Более сложные источники — диполи и т. д. — можно рассматривать как состоящие из этих простых источников. Отметим, что ∇^2 в (7.2.5) действует в координатах наблюдателя.

Мы хотим теперь показать, что решение неоднородного уравнения

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -4\pi \rho(\mathbf{r}) \quad (7.2.6)$$

при произвольных условиях Дирихле (или Неймана) на замкнутой граничной поверхности S можно выразить через функцию G . Для этого мы умножим (7.2.5) на ψ , а (7.2.6) на G и вычтем один результат из другого, в то же время меняя местами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$:

$$G_k(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}) \nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0) - \psi(\mathbf{r}_0) \nabla_0^2 G_k(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}) = 4\pi [\psi(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - G_k(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}_0)].$$

Интегрируя это равенство по всем координатам источника x_0, y_0, z_0 внутри S_0 , мы получаем в силу свойства дельта-функции и формулы (7.2.4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iiint [G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0) - \psi(\mathbf{r}_0) \nabla_0^2 G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)] \cdot dv_0 + \\ + \iiint \rho(\mathbf{r}_0) G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv_0 = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}) & \text{для } \mathbf{r} \text{ внутри } S, \\ 0 & \text{для } \mathbf{r} \text{ вне } S. \end{cases} \end{aligned}$$

Интересно указать, какое значение имеет правая часть, если точка наблюдения находится на S . До некоторой степени это дело соглашения; но если такое соглашение принято, то надо проводить его последовательно. В дальнейшем мы будем всегда считать, если не оговаривается противное, что эта разрывная функция равна $\psi(\mathbf{r})$ внутри и на S и равна нулю вне S .

Теперь мы применяем теорему Грина (7.2.2) для упрощения левой части. В соответствии с нашим соглашением, мы измеряем градиент по направлению изнутри наружу (или, что то же, элемент поверхности $d\mathbf{A}$ указывает изнутри объема, где надо вычислить поле), так что интеграл по поверхности равен обычному потоку. Применение формулы (7.2.2) дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \oint [G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] \cdot d\mathbf{A}_0 + \\ + \iiint \rho(\mathbf{r}_0) G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv_0 = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}) & \text{для } \mathbf{r} \text{ внутри и на } S, \\ 0 & \text{для } \mathbf{r} \text{ вне } S, \end{cases} \quad (7.2.7) \end{aligned}$$

откуда можно найти наше решение как для неоднородного уравнения, так и для неоднородных граничных условий.

Решение неоднородного уравнения. Например, для неоднородного уравнения ($\rho \neq 0$) с однородными граничными условиями Дирихле ($\psi = 0$ на S) мы выбираем G также равной нулю как на S , так и на S_0 . Тогда

поверхностный интеграл по S_0 равен нулю и

$$\psi(\mathbf{r}) = \iiint \rho(\mathbf{r}_0) G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv_0 \quad (7.2.8)$$

для $\mathbf{r}$ внутри или на S . Эта функция автоматически удовлетворяет однородным граничным условиям ($\psi=0$ на S) и является решением уравнения (7.2.6). Если граничным условием служит однородное условие Неймана (нормальная производная ψ равна нулю на S), то мы выбираем G_k удовлетворяющей тем же условиям в обеих системах координат, как наблюдателя, так и источника. Тогда опять поверхностный интеграл равен нулю и имеет место формула (7.2.8). Значит, формула (7.2.8) дает решение неоднородного уравнения (7.2.6) для однородных граничных условий, если G_k удовлетворяет тем же условиям, что и ψ .

На самом деле эта формула имеет место также, когда граничные условия состоят в том, что функция ψ на S равна произведению функции $f(\mathbf{r}_0^s)$ на нормальную производную от ψ на S , если только G_k удовлетворяет тем же условиям. Наиболее общие однородные граничные условия имеют вид

$$\psi(\mathbf{r}^s) = f(\mathbf{r}^s) \frac{\partial}{\partial n} \psi, \quad G_k(\mathbf{r}^s|\mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}^s) \frac{\partial}{\partial n} G_k, \quad G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) = f(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} G_k.$$

Если $f=0$, получаются однородные условия Дирихле; если $1/f=0$ — однородные условия Неймана. Вне зависимости от значений f поверхностный интеграл в формуле (7.2.7) исчезнет, что приведет к формуле (7.2.8) для решения. Конечно, не все условия допустимы в физических задачах. Например, если суммарный заряд внутри S отличен от нуля, то нельзя ожидать, что нормальная производная ψ равна нулю на всей границе, так что нельзя ожидать, чтобы для решения уравнения Лапласа производная $\partial G/\partial n$ была равна нулю на границе. Что именно возможно, обычно указывают физические соображения.

Для неоднородных граничных условий, если они являются условиями Дирихле [$\psi = \phi_0(\mathbf{r}_0^s)$ на S_0], мы полагаем G_k равной нулю на S и также на S_0 . Тогда получаем уже исследованное на стр. 743 решение

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint \phi_0(\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \cdot d\mathbf{A}_0 \quad (7.2.9)$$

для $\mathbf{r}$ внутри и на S при неоднородных условиях Дирихле для ψ , если G_k равно нулю на S и S_0 . Заметим вновь, что вектор $d\mathbf{A}_0$ направлен *наружу* из области, где ищется поле, так что интегрируемая компонента градиента — это *наружная* нормальная компонента. Здесь мы получаем наше решение в виде интеграла только по граничной поверхности; неоднородные граничные условия удовлетворяются посредством *расположения слоя заряда на поверхности*. Для условий Дирихле получается двойной слой, что явствует из рассмотрения $\text{grad } G$.

Если ψ должно удовлетворять неоднородным граничным условиям Неймана, т. е. производная от ψ по внешней нормали к S равна $N(\mathbf{r}^s)$, то мы полагаем нормальную производную G_k на S равной нулю и получаем решение

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) N(\mathbf{r}_0^s) \cdot d\mathbf{A}_0 \quad (7.2.10)$$

для $\mathbf{r}$ внутри или на S , причем N представляет собой заданную нормальную составляющую градиента функции ψ и нормальная производная G на S и S_0 равна нулю. В этом случае поверхностный заряд, порождающий нормальную производную N , равен как раз $N/4\pi$ и представляет собой простой, а не двойной, слой заряда.

Наконец, если граничные условия имеют общий неоднородный вид

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \psi + f(\mathbf{r}_0^s) \psi = F_0(\mathbf{r}_0^s), \quad (7.2.11)$$

то мы требуем, чтобы G удовлетворяла соответствующему однородному условию

$$\frac{\partial}{\partial n_0} G_k + f(\mathbf{r}_0^s) G_k = 0,$$

где обе нормальные производные внешние; тогда решение однородного уравнения при условии (7.2.11) имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \oint G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) F_0(\mathbf{r}_0^s) dA_0, \\ -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{F_0(\mathbf{r}_0^s)}{f(\mathbf{r}_0^s)} \text{grad}_0 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \cdot d\mathbf{A}_0. \end{cases} \quad (7.2.12)$$

Можно пользоваться любым из двух видов поверхностного интеграла. Первый более полезен, если f мало или равно нулю (условия Неймана); второй — если $1/f$ мало или равно нулю (условия Дирихле), но F/f ограничено.

Решения, данные формулами (7.2.9), (7.2.10) и (7.2.12), построены для однородного уравнения ($\rho = 0$ внутри границы). Если мы хотим решить неоднородное уравнение (7.2.6) с неоднородными граничными условиями, то надо сложить объемный интеграл типа (7.2.8) с соответствующим поверхностным интегралом, взяв G в объемном интеграле удовлетворяющей тем же однородным граничным условиям, что и G в поверхностном интеграле.

Общие свойства функции Грина. Теперь мы совсем точно доказали большую часть утверждений, сделанных в § 7.1 и на стр. 744. Граничные условия удовлетворяются посредством расположения на поверхности распределения диполей (для условий Дирихле) или простого заряда (для условий Неймана) с плотностью, пропорциональной требуемому значению функции ψ или ее нормальной производной, которое надо умножить на значение нормальной производной от соответствующей функции Грина G или значение самой G . Мы также обратили внимание на разрыв решения, так как интеграл равен ψ на и внутри S , но равен нулю вне S .

Но мы еще не доказали, что G является симметричной функцией $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$, как это утверждает формула (7.2.4). Как функция от $\mathbf{r}$, G удовлетворяет уравнению (7.2.5), а для источника в $\mathbf{r}_1$ — уравнению

$$\nabla^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) + k^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1).$$

Умножая (7.2.5) на $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1)$ и это новое уравнение на $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$, вычитая один результат из другого и применяя теорему Грина (7.2.2), имеем

$$\begin{aligned} & - \oint [G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) \text{grad } G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \text{grad } G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1)] \cdot d\mathbf{A} = \\ & = 4\pi \iint [G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)] dv = 4\pi [G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_0)]. \end{aligned}$$

Так как обе функции G удовлетворяют одним и тем же однородным граничным условиям, то поверхностный интеграл исчезает, и мы получаем условие взаимности $G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_0)$, если только как $\mathbf{r}_0$, так и $\mathbf{r}_1$ находятся внутри или на поверхности.

Остается изучить еще более важный вопрос о поведении $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$, когда точка наблюдения находится вблизи точки источника, т. е. когда длина вектора $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ мала в сравнении с расстоянием любой из этих

точек до ближайшей точки на граничной поверхности. Из структуры уравнения (7.2.5) мы видим, что если

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

мало по сравнению с расстоянием от S или S_0 , то функция G зависит только от R . Другими словами, ввиду полной симметрии источника функция G не может зависеть от направления $\mathbf{R}$, она может зависеть только от его длины. Как мы заметили раньше, надо ожидать, что функция G должна иметь особенность при $R = 0$.

Говоря на более математическом языке, надо ожидать, что $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ можно разделить на две части: во-первых, часть, которая всюду регулярна и непрерывна внутри S и зависит от граничных условий, наложенных на G у S , и, во-вторых, часть, которая регулярна и непрерывна всюду внутри S , кроме $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, является функцией только от R и имеет особенность при $R = 0$. Эту последнюю часть можно обозначить через $g_k(R)$. Значит, можно сказать, что если точка наблюдения и (или) точка источника не находятся бесконечно близко к S , то

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \underset{R \rightarrow 0}{\simeq} g_k(R), \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0. \quad (7.2.13)$$

Чтобы выяснить поведение g_k при малых R , мы проинтегрируем (в координатах наблюдателя x, y, z) обе части уравнения (7.2.5) по малому шару радиуса ε с центром в $\mathbf{r}_0$. Это даст

$$\iiint \nabla^2 G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv + k^2 \iiint G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv = -4\pi.$$

Интеграл в правой части равен -4π в силу свойств дельта-функции, так как шар, по которому производится интегрирование, содержит точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

Сделаем теперь ε достаточно малым, чтобы соотношение (7.2.13) имело место, и подставим g_k вместо G_k в остающиеся интегралы. Кроме того, предположим, что оператор Лапласа от особенности является более «особенным», чем сама особенность, так что в пределе первый интеграл преобладает. Тогда получим

$$\iiint \nabla^2 g_k(R) dv \rightarrow -4\pi \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где координатами при интегрировании по шаровому объему будут R, θ, φ , а элемент объема равен $dv = R^2 dR \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$.

Применяя теорему Гаусса (1.4.7), мы получаем, что суммарный поток $\text{grad } g$ наружу через поверхность сферы с центром в $\mathbf{r}_0$ радиуса ε равен -4π :

$$\oint \text{grad } g_k \cdot d\mathbf{A} \rightarrow -4\pi.$$

Так как g_k зависит только от радиальной координаты R маленькой сферы, то $\text{grad } g_k$ имеет всюду радиальное направление, параллельное $d\mathbf{A}$, и его величина всюду на поверхности одинакова. Значит, поверхностный интеграл в пределе равен произведению dg_k/dR при $R = \varepsilon$ на площадь $4\pi\varepsilon^2$ сферы, и мы приходим к формуле

$$(dg_k/dR)_{R=\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow -4\pi \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

или, что то же,

$$\frac{d}{dR} g_k(R) \simeq -\frac{1}{R^2} \quad (R \rightarrow 0).$$

Таким образом, мы в результате получаем $g_k(R) \simeq \frac{1}{R}$, или

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \simeq \frac{1}{R}, \quad \text{когда } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow 0, \quad (7.2.14)$$

если ни $\mathbf{r}$, ни $\mathbf{r}_0$ не находятся слишком близко к S или S_0 . Теперь трудно видеть, что выше мы законно пренебрегли объемным интегралом от G .

Итак, можно сказать, что, как функция координат (x, y, z) точки наблюдения, функция Грина представляет собой регулярное непрерывное решение однородного уравнения $\nabla^2 G + k^2 G = 0$ внутри S , за исключением точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, где она имеет особенность, указанную формулой (7.2.14). Эта особенность проистекает из наличия единичного точечного источника, причем уравнение (7.2.5) неоднородно *только* в этой точке. Заметим, что предельная форма $1/R$ не зависит от k , так что этот результат имеет место также для уравнения Лапласа.

Формула (7.2.14) справедлива для трех измерений. Можно провести подобное рассмотрение для двумерного случая, причем можно показать, что для двух измерений

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \simeq -2 \ln R, \quad R \rightarrow 0. \quad (7.2.15)$$

В одномерном случае уравнение (7.2.5) принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} G + k^2 G = -4\pi \delta(x - x_0).$$

Как указано на стр. 743, здесь будет разрыв производной, так что если проинтегрировать по x от $x_0 - \varepsilon$ до $x_0 + \varepsilon$, то интеграл от $k^2 G$ будет стремиться к нулю, тогда как интеграл от второй производной

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \frac{d^2 G}{dx^2} dx = \left[\frac{dG}{dx} \right]_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \rightarrow -4\pi, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.2.16)$$

Значит, для одного измерения функция Грина G имеет разрыв производной, равный -4π , при $x = x_0$.

Возвращаясь к сказанному на стр. 123—125, мы видим, что функции Грина для уравнения Гельмгольца, указанные выше, удовлетворяют требованиям, приведенным в формулах (7.2.14), (7.2.15) или (7.2.16), в зависимости от числа измерений. Например, после формулы (2.4.10) мы указали, что функция Грина для струны равна $(2\pi i/k) \cdot e^{ik|x-x_0|}$; она удовлетворяет соотношению (7.2.16). Подобным образом, мы знаем, что функция Грина для точечного источника в трех измерениях равна e^{ikR}/R .

Эффект граничных условий. Рассмотрим, как влияют граничные условия на функцию Грина, чтобы можно было видеть, как построить требуемую функцию в каждом интересном случае. По-видимому, простейшим является случай, когда граница расположена на бесконечности, так как тогда ее эффект должен быть наименьшим. Для трех измерений нам требуется решение уравнения $(\nabla^2 + k^2)G = 0$, определенное всюду, за исключением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, которое стремится к нулю [и (или) производная которого стремится к нулю] при $R \rightarrow \infty$ и которое имеет особенность порядка $1/R$ при $R \rightarrow 0$. Имеются два линейно независимых решения с такими свойствами (и пригодна любая линейная комбинация этих решений):

$$e^{ikR}/R, \quad e^{-ikR}/R, \quad \cos(kR)/R \text{ и т. д.}; \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

Очевидно, что даже если граница находится на бесконечности, то выбор все-таки должен производиться на основании граничных условий.

Чтобы сделать выбор, мы обратимся к исходному зависящему от времени решению волнового уравнения $\nabla^2 \Psi = (1/c^2) \partial^2 \Psi / \partial t^2$. Мы получили уравнение Гельмгольца, приняв простую гармоническую зависимость решения волнового уравнения от времени. На стр. 125 и 700 мы положили это решение равным $\Psi e^{-i\omega t} = \psi e^{-ikct}$, откуда ψ есть решение уравнения Гельмгольца. Следовательно, если G надо применять к простому гармоническому

решению волнового уравнения, то полным решением будет Ge^{-ikt} . Отсюда, если мы хотим иметь волны, идущие *от* точки источника, то надо применять

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = g_k(R) = e^{ikR}/R, \text{ граница на бесконечности,} \quad (7.2.17)$$

так как тогда полное решение $(1/R)e^{ik(R-ct)}$ представляет расходящуюся волну. В тех редких случаях, когда нам нужны *сходящиеся* волны, надо выбрать функцию e^{-ikR}/R . Для границы, расположенной всюду на конечном расстоянии от $\mathbf{r}_0$, может не быть полного поглощения энергии поверхностью. Часть может отражаться обратно к источнику, и тогда надо пользоваться комбинацией расходящихся и сходящихся волн. Однако в большинстве случаев мы пользуемся решением в виде расходящейся волны, данным формулой (7.2.17).

Решения уравнения Гельмгольца иногда используются при решении уравнения диффузии $\nabla^2\psi = (1/a^2)\partial\psi/\partial t$. Здесь для описания процесса распространения диффундирующего вещества, концентрация которого измеряется величиной ψ , мы полагаем $\psi = \phi e^{-k^2 a^2 t}$; ϕ вновь будет решением уравнения $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$. Обычно требуют, чтобы ϕ была всюду вещественной; отсюда

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \cos(kR)/R,$$

так что возможная функция Грина для уравнения диффузии равна

$$\frac{1}{R} \cos(kR) e^{-a^2 k^2 t},$$

что соответствует «выходящей» диффузии, когда граница находится на бесконечности, а «источник» диффузии обладает экспоненциально затухающей зависимостью от времени. Как будет показано позже, для функции Грина уравнения диффузии на самом деле обычно применяется совсем другое решение уравнения диффузии, соответствующее «источнику» значительно более «правильного» вида.

В случае двух измерений решения уравнения Гельмгольца, симметричные относительно $R=0$, являются решениями уравнения

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dg}{dR} \right) + k^2 g = 0,$$

которое представляет собой уравнение для функций Бесселя нулевого порядка [см. формулу (5.3.63)]. Нам требуются решения, имеющие при $R=0$ особенность, причем такую, как указано в (7.2.15). Возможными решениями являются функции Ганкеля [см. формулу (5.3.69)], в частности, функция

$$\begin{aligned} G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = g_k(R) &= i\pi H_0^{(1)}(kR) \simeq -2 \ln(kR) \quad \text{при } R \rightarrow 0, \\ &\simeq \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR + \frac{1}{4}\pi)} \quad \text{при } R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

представляет собой точную функцию Грина в двумерном случае для границы на бесконечности и *расходящихся* волн. Если требуются *сходящиеся* волны, то применяется вторая функция Ганкеля, а если нужна вещественная функция (как в частном случае уравнения диффузии), то можно пользоваться произведением π на функцию Неймана $N_0(kR)$ [см. формулу (5.3.75)].

Наконец, в одномерном случае функция Грина для расходящихся волн, простирающихся до бесконечности в обоих направлениях, уже дана формулой (7.2.16). Она равна

$$G_k(x|x_0) = g_k(R) = \frac{2\pi i}{k} e^{ik|x-x_0|}. \quad (7.2.19)$$

Метод изображений. Теперь мы обратимся к задаче получения функций Грина для ограниченных областей. Сначала рассмотрим один метод — *метод изображений*, в котором непосредственно применяется полученная выше функция $g_k(R)$. Каков физический эффект введения границы? Без границы соответствующая функция Грина равнялась $g_k(R)$. Если введена граница, то, скажем, в электростатике возникает потенциал, порождаемый индуцированным зарядом на граничной поверхности, который в свою очередь порождается приложенным электрическим полем $g_k(R)$. В акустике эффект границы состоит в возникновении отражений, которые надо добавить к волне, выходящей из источника, чтобы получить полное давление. Значит, можно ожидать, что

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = g_k(R) + F_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0), \quad (7.2.20)$$

где $F_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ представляет граничный эффект. $F_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ не может иметь особенности внутри области, так что $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \rightarrow g_k(R)$ при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$. Метод изображений, описывающий *отраженные* волны в акустике или индуцированный заряд в электростатике, можно применить для определения $F_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$.

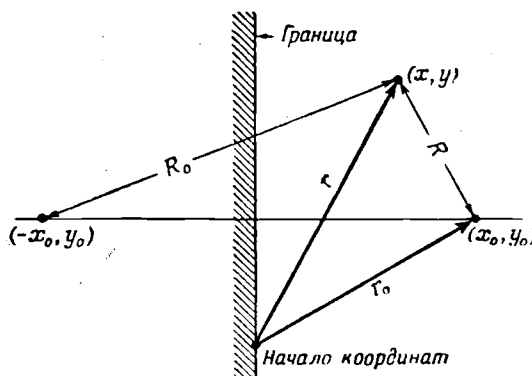


Рис. 7.3. Изображение точки источника (x_0, y_0) в плоскости $x=0$.

Рассмотрим простой случай, показанный на рис. 7.3. Единичный линейный заряд расположен при (x_0, y_0) перед бесконечной проводящей металлической пластинкой. Потенциал на поверхности пластинки при $x=0$ должен равняться нулю, так что функция Грина должна удовлетворять граничным условиям Дирихле. В методе изображений вводится линейный заряд противоположного знака в зеркально-симметричной точке $(-x_0, y_0)$, как показано. Полный потенциал для $x \geq 0$ равен тогда

$$G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -2 \ln(R/R_0), \quad x \geq 0. \quad (7.2.21)$$

На эквипотенциальной плоскости $R=R_0$ и $G_0=0$, так что граничные условия удовлетворяются. Так как $g_0(R) = -2 \ln R$, то мы видим, что $F_0 = 2 \ln R_0$. Единственная особенность, имеющаяся в области, представляющей физический интерес ($x > 0$), находится в месте расположения заряда, $R=0$. Другая особенность получается при $R_0=0$ ($x < 0$), т. е. в области, где выражение (7.2.21) уже не применимо.

Легко обобщить формулу (7.2.21) для нахождения G_k . Введя отражение, как выше, найдем

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \pi i [H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR_0)]. \quad (7.2.22)$$

Отражение падающей волны зеркалом, требующее в этом случае равенства G нулю, дается выражением $H_0^{(1)}(kR_0)$. (Начиная отсюда, мы в этом пара-

графе не будем писать верхний индекс (1), так как мы всегда будем пользоваться функцией Ганкеля первого рода.)

Если, с другой стороны, поверхность жесткая или если, в случае уравнения Лапласа, требуется решать задачи с известными распределениями заряда, а не потенциалами, то соответствующими граничными условиями будут условия Неймана $\partial\psi/\partial n = 0$. Метод изображений можно применить и здесь; заряд или источник в зеркально-симметричной точке надо взять того же знака (или той же фазы), так что

$$G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -2 \ln(RR_0), \quad G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \pi i [H_0(kR) + H_0(kR_0)].$$

Граничные условия удовлетворяются, в чем можно убедиться, подсчитав производную по x при $x=0$.

В качестве иллюстрации подсчитаем эффект от потенциала $f(y)$ (уже не нулевого) на плоскости. Из формулы (7.2.9) имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = -(1/4\pi) \int \psi(\mathbf{r}_0^s) (\partial G_0 / \partial n_0) dS_0 + (1/4\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f(y_0) (\partial G_0 / \partial x_0)_{x_0=0} dy_0.$$

Вводя функцию Грина (7.2.21) и подсчитывая производную, находим

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y')}{x^2 + (y-y')^2} dy'. \quad (7.2.23)$$

Мы встречались с этой формулой раньше. Она была выведена при помощи теории функций комплексного переменного в гл. 4 [формула (4.2.13)] при единственном требовании, чтобы ψ удовлетворяла уравнению Лапласа. Интересно проверить непосредственно, что решение удовлетворяет граничным условиям.

Как указано на стр. 744, это должно дать представление δ -функции. Для этой цели рассмотрим функцию

$$\Delta(x, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + \eta^2}.$$

Заметим, что $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x, \eta) d\eta = 1$. Для исследования ее свойств при $x \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ перепишем $\Delta(x, \eta)$ в виде

$$\Delta(x, \eta) = \frac{1}{\pi x} [1 + (\eta/x)^2]^{-1}.$$

Если положить $\eta = 0$, то при $x \rightarrow 0$ функция $\Delta(x, 0) (= 1/\pi x)$ строго возрастает. С другой стороны, для $\eta \neq 0$ при $x \rightarrow 0$ функция $\Delta(x, \eta) (\simeq x/\pi\eta^2)$ стремится к нулю. Мы видим, что $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta(x, \eta)$ представляет собой функцию, интеграл от которой всегда равен единице и значения которой при $\eta = 0$ возрастают к бесконечности для $x \rightarrow 0$, а при $\eta \neq 0$ стремятся к нулю. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta(x, \eta) = \delta(\eta).$$

Отсюда в (7.2.23)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\mathbf{r}) = \int \delta(y - y') f(y') dy' = f(y),$$

как и требуется. Функция $\Delta(x, y)$ особенно полезна для задач, связанных с уравнением Лапласа, так как, будучи вещественной частью аналитической функции $1/\pi z = 1/\pi(x + iy)$, она является решением уравнения Лапласа.

Метод изображений можно применить и к границам другой формы. Например, его можно применить, если граница представляет собой окруж-

ность. Применение теории функции Грина приводит к интегральной формуле Пуассона (4.2.24). По поводу дальнейших подробностей мы отошлем читателя к задачам и к гл. 10, так как метод изображений для окружности будет действовать только для уравнения Лапласа.

Применение метода изображений допускают и некоторые другие границы симметричного вида. Однако, вообще говоря, при этом получаются бесконечные ряды с обычными ограничениями их пригодности. В качестве примера

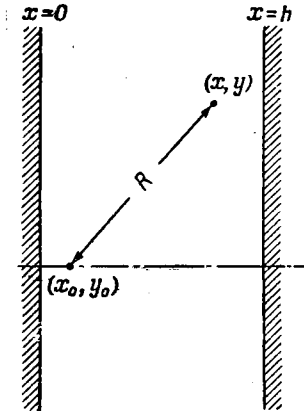


Рис. 7.4. Поле между параллельными плоскостями от источника в точке (x_0, y_0) .

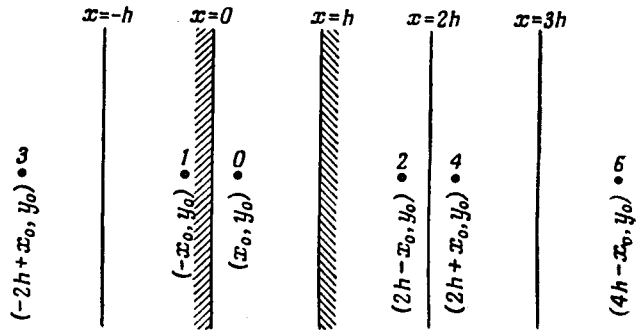


Рис. 7.5. Последовательность образов источника рис. 7.4.

рассмотрим расположение, показанное на рис. 7.4, где источник находится между двумя бесконечными плоскостями $x=0$, $x=h$, на которых на функцию Грина накладываются граничные условия Неймана $\partial\phi/\partial n = 0$.

Ряд изображений. Мы применяем метод изображений посредством последовательных шагов, не учитывая каждую из границ $x=0$ и $x=h$ по очереди. Учитывая только границу $x=0$, мы вводим изображение источника при $x=-x_0$, а учитывая только $x=h$ — изображение при $x=2h-x_0$. Они обозначены цифрами 1 и 2 на рис. 7.5. Однако, хотя 1 и 0 вместе порождают потенциал, удовлетворяющий условиям Неймана при $x=0$, надо добавить эффект источника 2, который, конечно, не удовлетворяет условию $\partial\phi/\partial n = 0$ при $x=0$. Чтобы устранить эффект точки 2, мы вводим теперь изображение 3 в (x_0-2h, y_0) точки 2 относительно $x=0$. Подобным образом для устранения эффекта точки 1 в плоскости $x=h$ вводится источник 4 при $x=2h+x_0$. Однако теперь становится необходимым устранить эффект точки 3 при $x=h$; необходимо ввести изображение 5 в $(3h-x_0, y_0)$. Процесс продолжается неограниченно, приводя к бесконечному числу изображений основного источника. Это не должно удивлять, так как любой луч, выходящий из источника, испытывает бесконечное число отражений. Каждое изображение соответствует одному из этих отражений.

Выищем теперь получающуюся функцию Грина. Источники расположены в (x_0+2nh, y_0) и в $(2mh-x_0, y_0)$, где m и n — целые. Значит,

$$G_k = \pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ H_0 [k \sqrt{(x-x_0-2nh)^2 + (y-y_0)^2}] + \\ + H_0 [k \sqrt{(x+x_0-2nh)^2 + (y-y_0)^2}] \}$$

(где мы имеем в виду функции Ганкеля первого рода, не выписывая верхнего индекса). Записывая более сжато, имеем

$$G_k = \pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} [H_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n|) + H_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}''_n|)], \quad (7.2.24)$$

где

$$\mathbf{r}'_n = \mathbf{a}_x [2nh + x_0] + \mathbf{a}_y y_0, \quad \mathbf{r}''_n = \mathbf{a}_x [2nh - x_0] + \mathbf{a}_y y_0.$$

Ряд (7.2.24) применим, если играют роль только сам источник и, быть может, его несколько первых отражений. Так будет, если точка наблюдения $\mathbf{r}$ очень близка к точке источника, т. е. $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ из-за особенности функции $H_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_0|)$. Остаточные отражения дают поправку к непосредственному эффекту источника. К сожалению, ряд (7.2.24) сходится не очень быстро, так что подсчет поправки является довольно утомительным делом. Для подсчета ее порядка выясним поведение отдельных членов при $|n| \rightarrow \infty$. Тогда

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n| \underset{|n| \rightarrow \infty}{\simeq} 2|n|h \pm (x-x_0), \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}''_n| \underset{|n| \rightarrow \infty}{\simeq} 2|n|h \pm (x+x_0). \quad (7.2.25)$$

Заметим, что эти приближения справедливы, только если

$$2|n|h \gg \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Ясно, что эта асимптотическая форма достигается тем более быстро, т. е. для тем меньших значений n , чем ближе находится точка наблюдения к источнику. Для больших значений $2nhk$ функцию Ганкеля можно заменить ее асимптотическим выражением, так что (полагаем для определенности $n > 0$)

$$H_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n|) + H_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}''_n|) \underset{knh \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{1}{i\pi knh}} [e^{ik(2nh-x+x_0)} + e^{ik(2nh-x-x_0)}] = \sqrt{\frac{4}{i\pi knh}} e^{ik(2nh-x)} \cos(kx_0).$$

Поэтому высшие члены ряда для G_k аппроксимируются рядом

$$\Sigma = \frac{4}{\sqrt{i\pi kh}} e^{-ikx} \cos kx_0 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{e^{2iknh}}{\sqrt{n}}, \quad (7.2.26)$$

где N выбирается достаточно большим, чтобы обеспечить справедливость приведенных выше приближений. Бесконечную сумму оцениваем, заменяя ее на соответствующий интеграл:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{e^{2iknh}}{\sqrt{n}} \simeq \int_N^{\infty} \frac{e^{2ikhv}}{\sqrt{v}} dv \underset{2kh \sqrt{N} \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{e^{2ikh \sqrt{N}}}{2ikh \sqrt{N}}. \quad (7.2.27)$$

Этот интеграл можно также вычислить непосредственно через интегралы Френеля. Если

$$C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad (7.2.28)$$

то

$$\int_N^{\infty} \frac{e^{2ikhv}}{\sqrt{v}} dv = \sqrt{\frac{\pi}{kn}} \left[\frac{1}{2} - C\left(\sqrt{\frac{4khN}{\pi}}\right) + \frac{1}{2}i - iS\left(\sqrt{\frac{4khN}{\pi}}\right) \right].$$

Если применить простое выражение (7.2.27), то Σ приобретает вид

$$\Sigma \simeq \frac{2}{\sqrt{k^3 h^3 \pi N}} e^{-\frac{3}{4}\pi i} e^{2ikh \sqrt{N} - ikx} \cos kx_0. \quad (7.2.29)$$

Таким образом, мы видим, что если kh значительно больше единицы, то весь ряд (7.2.24) можно выразить простой формулой (7.2.29) с $N_1 = 1$. Для волнового уравнения $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, так что для всей суммы можно применить простое выражение, если λ значительно меньше расстояния h между пластинками. Единственным членом, не включенным в Σ , будет тогда член с $n = 0$, выражающий непосредственное влияние источника на наблюдателя. Повторяем: если $h \gg \lambda$ и $|x - x_0| \ll h$, то значение ψ в точке наблюдения (x, y) равно сумме основного слагаемого $\pi i H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ и малой поправки, пропорциональной Σ .

Другие разложения. В случае если одно или оба из этих условий не выполняются, требуется более тщательное исследование. Если $\mathbf{r}$ находится на некотором расстоянии от источника, а kh ни велико, ни мало, то разложение по изображениям источника можно преобразовать, чтобы получить более быстро сходящийся ряд. Это можно осуществить с помощью формулы суммирования Пуассона (4.8.28)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(\nu),$$

где

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau. \quad (7.2.30)$$

Для применения формулы суммирования Пуассона к данной задаче требуется преобразование Фурье функции $H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$. Позже в этой главе (см. стр. 762) мы покажем, что

$$H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) = \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}}{k^2 - K^2} dK_y. \quad (7.2.31)$$

Интеграл не вполне определен, если не указать, каким способом обходится полюс $K = k$. Это будет сделано в процессе вычислений.

Теперь нам надо подсчитать значение

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\tau} \left\{ H_0 \left[k \sqrt{\left(x - x_0 - \frac{\tau}{\pi} h \right)^2 + (y - y_0)^2} \right] + \right. \\ \left. + H_0 \left[k \sqrt{\left(x + x_0 - \frac{\tau}{\pi} h \right)^2 + (y - y_0)^2} \right] \right\} d\tau.$$

Если ввести (7.2.31) в подинтегральную функцию, I примет вид

$$I = \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dK_y \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\tau} \left\{ \frac{e^{i \left[K_x \left(x - x_0 - \frac{\tau}{\pi} h \right) + K_y (y - y_0) \right]}}{k^2 - K^2} + \right. \\ \left. + \frac{e^{i \left[K_x \left(x + x_0 - \frac{\tau}{\pi} h \right) + K_y (y - y_0) \right]}}{k^2 - K^2} \right\} d\tau = \\ = \frac{2i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK_y (y - y_0)} dK_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK_x x}}{k^2 - K^2} \cos(K_x x_0) dK_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\tau} e^{-iK_x \tau h / \pi} d\tau.$$

Интеграл по τ можно непосредственно выразить через дельта-функцию (при этом мы применяем интегральную теорему Фурье):

$$I = \frac{4i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK_y(y-y_0)} dK_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK_x x} \cos K_x x_0 \delta(y + K_x h/\pi)}{k^2 - K_x^2 - K_y^2} dK_x.$$

Интеграл по K_x легко подсчитать, применяя основное свойство δ -функции, состоящее в том, что $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) f(z-a) dz = f(a)$. Имеем

$$I = \frac{4i}{h} e^{-i\pi y x/h} \cos \frac{\pi y x_0}{h} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK_y(y-y_0)} dK_y}{(k^2 - \pi^2 y^2/h^2) - K_y^2}.$$

Окончательно интегрирование можно выполнить только после указания пути интегрирования в плоскости K_y . Специальный путь C , показанный на рис. 7.6,

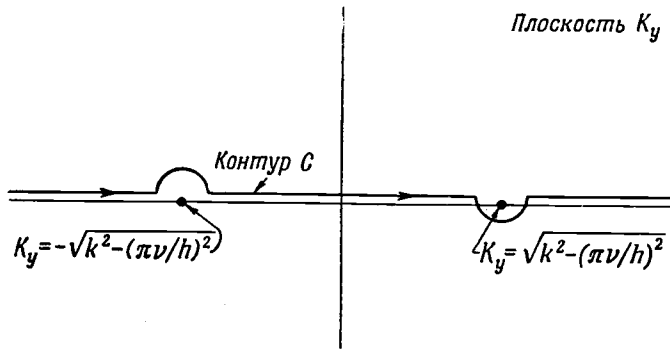


Рис. 7.6. Контур C для интегрирования в формуле (7.2.31).

выбран так, чтобы I удовлетворяло тому граничному условию, что точка $x = x_0$, $y = y_0$ является только источником, а не стоком или и источником, и стоком.

Подсчет этого интеграла при помощи интегральной формулы Коши (4.2.8) был рассмотрен в гл. 4, стр. 392. Мы находим, что

$$I = \frac{4\pi}{h} e^{-i\pi y x/h} \cos \frac{\pi y x_0}{h} \cdot \frac{e^{i|y-y_0| \sqrt{k^2 - (\pi y/h)^2}}}{\sqrt{k^2 - (\pi y/h)^2}}.$$

Окончательное разложение для функции Грина приобретает вид

$$\begin{aligned} G_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) &= \frac{2\pi i}{h} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi v x/h} \cos \frac{\pi v x_0}{h} \cdot \frac{e^{i|y-y_0| \sqrt{k^2 - (\pi v/h)^2}}}{\sqrt{k^2 - (\pi v/h)^2}} = \\ &= \frac{2\pi i}{h} \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon_v \cos \frac{\pi v x}{h} \cos \frac{\pi v x_0}{h} \cdot \frac{e^{i|y-y_0| \sqrt{k^2 - (\pi v/h)^2}}}{\sqrt{k^2 - (\pi v/h)^2}}. \end{aligned} \quad (7.2.32)$$

Этот результат особенно полезен при $|y - y_0| \gg 1$, так как если $\pi y/h > k$, то члены ряда экспоненциально убывают. Таким образом, число членов, требуемое для получения хорошей аппроксимации, имеет порядок $hk/\pi = 2h/\lambda$. (Заметим, что если v становится большим, то соответствующие члены в (7.2.32) становятся независимыми от k .) Мы видим, что последнее разложение дополняет разложение для Σ . Разложение (7.2.24) по изображениям источника осуществимо, если $hk \gg 1$, а разложение (7.2.32) применимо, когда $hk \ll 1$.

Разложение по изображениям источника пригодно для коротких длин волн и вблизи источника, так как тогда эффект границы менее важен; разложение (7.2.32) пригодно для больших длин волн и на значительном расстоянии от источника. Ряд (7.2.32) представляет собой разложение Фурье, вполне аналогичное формуле (7.1.12); его можно получить более непосредственно, чем в примененном здесь околном методе, основанном на отражениях и на формуле суммирования Пуассона. Значение данного нами вывода состоит в раскрытии связи между двумя типами разложений.

Выражение (7.2.32) в отличие от (7.2.29) точно равняется ряду (7.2.24) и всегда сходится. За исключением случая, когда $hk/\pi = 2h/\lambda$ имеет порядок единицы, ряд сходится не очень быстро, так что надо поискать средства улучшения его сходимости. Для этого мы обратимся к замечанию, приведенному в скобках в последнем абзаце, что члены разложения (7.3.32) для большого ν не зависят от k . Это приводит к мысли использовать функцию Грина $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ для уравнения Лапласа, которую часто можно выразить в замкнутом виде. Если написать

$$G_k = G_0 + (G_k - G_0),$$

то разложение для $G_k - G_0$ будет сходиться быстрее, чем для одной G_k .

Если выбрать условия Дирихле при $x=0$ и $x=h$, то соответствующая статическая функция G_0 получится в замкнутом виде; $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ тогда равна статическому потенциалу для единичного заряда в (x_0, y_0) между двумя заземленными пластинками. С целью рассмотреть более трудную задачу мы выберем условия Неймана, при которых G_0 соответствует установившемуся потоку жидкости, порожденному единичным источником в (x_0, y_0) . Однако установившийся поток нуждается в стоке (в данном случае на бесконечности), как и в источнике, а это не включено в условия. Таким образом, требуется небольшое видоизменение, которое мы сейчас сделаем, чтобы принять в расчет и сток.

Мы начнем с ряда

$$\Gamma_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \cos \frac{\pi \nu x}{h} \cdot \cos \frac{\pi \nu x_0}{h} \cdot e^{-(\pi \nu / h) |y - y_0|}, \quad (7.2.33)$$

к которому приводится (7.2.32) при $k=0$ (если опустить член с $\nu=0$). Применяя повторно соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\nu b} = -\ln(1 - e^{-b}),$$

мы получаем

$$\Gamma_0 = R(x + x_0 | y - y_0) + R(x - x_0 | y - y_0), \quad (7.2.34)$$

где

$$R(a | b) = -\ln[1 - 2e^{-\pi |b|/h} \cos(\pi a/h) + e^{-2\pi |b|/h}].$$

Нетрудно показать (например, подсчитывая $\nabla^2 \Gamma_0$), что Γ_0 представляет собой решение уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Gamma_0 = -4\pi [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (1/h) \delta(y - y_0)], \quad (7.2.35)$$

которое соответствует единичному положительному заряду в (x_0, y_0) и единичному отрицательному заряду, равномерно распределенному вдоль линии $y = y_0$, перпендикулярной обоим граничным линиям $x=0$ и $x=h$. Так как полное распределение заряда между двумя граничными линиями в среднем равно нулю, то можно удовлетворить условиям Неймана без того, чтобы

статическое решение принимало бесконечные значения на бесконечности. Можно также непосредственно убедиться, дифференцируя (7.2.35), в том, что $\partial G/\partial x$ равно нулю при $x=0$ и $x=h$.

Поэтому окончательным выражением для G_k будет

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = R(x+x_0|y-y_0) + R(x-x_0|y-y_0) + \frac{2\pi i}{hk} e^{ik|y-y_0|} + \\ + 4 \sum_{v=1}^{\infty} \cos \frac{\pi v x}{h} \cdot \cos \frac{\pi v x_0}{h} \cdot \left[\frac{e^{-V(\pi v/h)^2 - k^2|y-y_0|}}{\sqrt{v^2 - (kh/\pi)^2}} - \frac{1}{v} e^{-(\pi v/h)|y-y_0|} \right]. \quad (7.2.36)$$

Этот ряд сходится достаточно быстро. Другие случаи, когда статическая функция Грина оказывается замкнутым выражением, можно разобрать на основании результатов гл. 10.

Возможность применения метода изображений ограничивается случаями, в которых граница составлена из прямых линий для двух измерений или плоскостей для трех измерений. Из этого правила имеется одно исключение. Именно, в случае уравнения Лапласа (с условиями Дирихле) метод изображений можно применить для окружности в двух измерениях и для сферы в трех измерениях. Указанное ограничение для метода изображений естественно ожидать на основании элементарных соображений геометрической оптики, так как хорошо известно, что единственным зеркалом, для которого образ точечного источника снова представляет собой точку, является плоское зеркало. Конечно, это не значит, что метод изображений нельзя применить к границам другого вида, но тогда он применяется только приближенно. Поэтому мы обратимся к более общему представлению функций Грина посредством собственных функций.

Разложение функции Грина по собственным функциям. Метод собственных функций, исследованный в гл. 6, лимитируется только простотой определения требуемых собственных функций. Так как точные решения достижимы только в разделяющих системах координат, то разложение функций Грина по собственным функциям практически осуществимо только в этих случаях.

Пусть собственные функции равны ψ_n , а соответствующие собственные значения равны k_n , т. е.

$$\nabla^2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0. \quad (7.2.37)$$

Здесь n представляет все требуемые индексы, определяющие все рассматриваемые частные функции ψ_n . Кроме того, как показано в предыдущей главе, функции ψ_n образуют ортонормированную систему:

$$\int \bar{\psi}_n \psi_m dV = \delta_{nm}, \quad (7.2.38)$$

где область интегрирования R ограничена поверхностью, на которой ψ_n удовлетворяет однородным граничным условиям. Функция Грина $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет тем же условиям. Дополнительно предполагается, что функции ψ_n образуют полную систему, так что $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ можно разложить в ряд по ψ_n :

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \sum_n A_n \psi_n(\mathbf{r}).$$

Введя это разложение в уравнение с частными производными, которому удовлетворяет G_k ,

$$\nabla^2 G_k + k^2 G_k = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

мы находим, что

$$\sum A_n (k^2 - k_n^2) \psi_n(\mathbf{r}) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Пользуясь формулой (7.2.38), мы умножаем обе части последнего уравнения на $\bar{\psi}_n(\mathbf{r})$ и интегрируем по объему R . Получаем

$$A_n = \frac{4\pi\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 - k^2},$$

так что

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)\psi_n(\mathbf{r})}{k_n^2 - k^2} \quad (7.2.39)$$

— требуемое разложение. Пример такого разложения мы имеем в формуле (7.1.10).

Неожиданной особенностью формулы (7.2.39) является ее несимметричная зависимость от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ для комплексного ψ_n вопреки приведенному выше доказательству того, что G_k должно зависеть от этих переменных симметрично. Конечно, это только кажущееся противоречие. Дело в том, что так как скалярное уравнение Гельмгольца не включает явно никаких комплексных чисел, то $\bar{\psi}_n$ также является решением уравнения (7.2.37) и потому также включено в ортонормированную систему ψ_n . Таким образом, здесь будет простой случай вырождения, так как одному собственному значению принадлежат две собственные функции — как ψ_n , так и $\bar{\psi}_n$. Поэтому в сумму (7.2.39) будет включен как член

$$\frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)\psi_n(\mathbf{r})}{k_n^2 - k^2},$$

так и член

$$\frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 - k^2},$$

так что в действительности выражение (7.2.39) симметрично и вещественно.

Другим интересным моментом является поведение G_k при $k \rightarrow k_n$. Мы видим, что G_k как функция от k аналитична всюду, за исключением простых полюсов при $k = \pm k_n$ с вычетами $\mp 2\pi\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)\psi_n(\mathbf{r})/k_n$. Значит, если функция Грина известна в замкнутом виде, то собственные функции ψ_n и собственные значения k_n можно найти, исследуя G_k в ее полюсах.

Эти особенности имеют простое физическое истолкование, так как они являются как раз бесконечностями, появляющимися, когда недиссипативная колебательная система возбуждается одной из ее резонансных частот. Чтобы сделать это соответствие более ясным, мы напомним, что уравнение с частными производными, которому удовлетворяет потенциал скорости, созданный точечным источником в $\mathbf{r}_0$ с угловой частотой ω , имеет вид

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)e^{-i\omega t}.$$

Однако $\psi = e^{-i\omega t}G_k$, $k = \omega c$. Отсюда если $k = k_n$, то система возбуждается одной из ее резонансных частот, что при отсутствии трения приводит к бесконечной амплитуде. Имеется одна ситуация, в которой это возбуждение не будет бесконечным. Так будет, если функция, выражающая пространственную зависимость источника, ортогональна $\bar{\psi}_n$. Действительно, если ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = -4\pi\rho,$$

то

$$\psi = \int \rho G_k dV_0 = 4\pi \sum_m \frac{\int \bar{\psi}_m(\mathbf{r}_0)\rho(\mathbf{r}_0)dV_0}{k_m^2 - k^2} \psi_m(\mathbf{r}). \quad (7.2.40)$$

Если $\int \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV = 0$, то n -й член исчезает. Тогда в ряде (7.2.39) n -й член отсутствует и k может равняться k_n , не обращая G_k в бесконечность. Функция Грина для таких задач (мы будем употреблять здесь термин «видоизмененная функция Грина» и обозначение Γ_{kn}) удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + k_n^2) \Gamma_{kn} = -4\pi [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}) - \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}_0)].$$

Значит,

$$\Gamma_{kn} = 4\pi \sum_{m \neq n} \frac{\bar{\psi}_m(\mathbf{r}_0) \psi_m(\mathbf{r})}{k_m^2 - k_n^2}, \quad (7.2.41)$$

где под записью $m \neq n$ мы понимаем, что опускаются все члены, для которых $k_m = \pm k_n$. Мы уже исследовали один такой случай для функции Грина уравнения Лапласа, когда граничными условиями служили однородные условия Неймана. В этом случае одним из собственных значений было $k = 0$, и ему соответствовала постоянная как собственная функция. Значение k для уравнения Лапласа также равно нулю, и мы нашли целесообразным применить видоизмененную функцию Грина Γ_0 .

Теперь мы дадим некоторые примеры применения формулы (7.2.39). Они совсем просты, если рассматриваются полностью ограниченные области, так как если в этом случае собственные функции и соответствующие собственные значения известны, то функции ψ надо только нормировать, чтобы их можно было подставить в формулу. Пример разложения такого вида дает формула (7.1.10).

Разложения для бесконечной области. Поэтому мы обратимся к другим типам областей, из которых простейшей является неограниченная бесконечная область. Мы показали ранее в этом параграфе [формула (7.2.18)], что в этом случае для источника (а не для стока) двумерная функция Грина равна $\pi i H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$. Полную ортонормированную систему, по которой ее можно разложить, дают, в частности, плоские волны

$$\frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}},$$

где $\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = K_x x + K_y y$, а K_x и K_y могут принимать любое численное значение. Чтобы получить полную систему, необходимо в соответствии с интегральной теоремой Фурье иметь совокупность значений K , простирающуюся от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль пути в комплексной плоскости K_x и K_y , соединяющего эти две точки. Так как K_x и K_y являются непрерывными переменными (см. стр. 708 по поводу перехода от дискретного к непрерывному), то в формуле (7.2.39) сумму надо заменить интегралом:

$$g_k(R) = i\pi H_0(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{K^2 - k^2} dK_y. \quad (7.2.42)$$

Это представление было применено в формуле (7.2.31) ($K^2 = K_x^2 + K_y^2$). Опять важно заметить, что интеграл не определен, если не задан путь интегрирования около полюсов подынтегральной функции. Путь интегрирования в плоскости K_y дан на рис. 7.7. Он выбран так, чтобы привести к волне, выходящей из точки источника $R = 0$. Тогда можно осуществить интегрирование по K_y , что даст для $Y > 0$

$$i\pi H_0(kR) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(K_x X + \sqrt{k^2 - K_x^2} Y)}}{\sqrt{k^2 - K_x^2}} dK_x.$$

Пусть $K_x = k \cos(\theta + \varphi)$, где $\varphi = \arctg(Y/X)$; тогда

$$\pi H_0(kR) = \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{ikR \cos \theta} d\theta.$$

При этом контур интегрирования по θ должен, конечно, быть таким, чтобы дать сходящийся интеграл. Принимая во внимание исходные пределы, мы

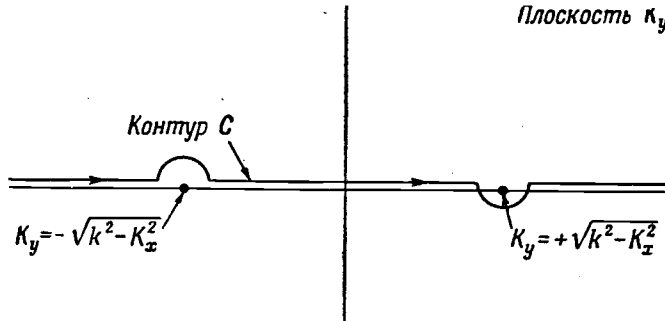


Рис. 7.7. Контур C для интегрирования в формуле (7.2.42).

видим, что этот контур должен идти от $+i\infty$ до $-i\infty$. Сходимость получится, если контур провести несколько слева от мнимой оси в верхней полуплоскости и справа от нее в нижней полуплоскости, как показано

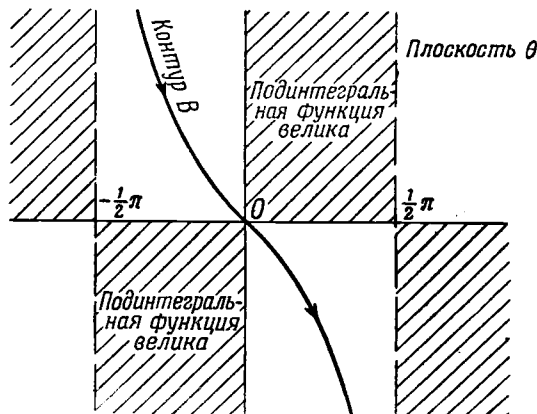


Рис. 7.8. Контур B для интегрального представления функции $H_0(kR)$.

на рис. 7.8. Нашим окончательным результатом будет хорошо известное интегральное представление для функции Ганкеля [см. формулу (5.3.69)]:

$$H_0(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2-i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{ikR \cos \theta} d\theta. \quad (7.2.43)$$

Полярные координаты. Формула (7.2.42) дает представление функции Грина $g_k(\mathbf{r})$ в бесконечной двумерной области, пригодное для задач, в которых наиболее удобны прямоугольные координаты. Рассмотрим теперь общую формулу (7.2.39), применяя собственные функции, отвечающие полярным координатам. Этими функциями будут

$$e^{im\varphi} J_m(kr).$$

Их также нужно нормировать. Нормирующий множитель для функции, выражающей зависимость от φ , равен $1/\sqrt{2\pi}$. Нормирующий множитель N_m для радиальной функции получается из соотношения, отвечающего непрерывным собственным значениям (в данном случае k):

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[N_m^2 \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} dk' \int_0^R J_m(kr) J_m(k'r) r dr \right] = 1.$$

Значение неопределенного интеграла по r равно (см. формулы в конце гл. 11)

$$\int J_m(kr) J_m(k'r) r dr = \frac{k'r J_m(kr) J_{m-1}(k'r) - kr J_m(k'r) J_{m+1}(kr)}{k^2 - k'^2}.$$

Так как R велико, можно воспользоваться асимптотическим поведением

$$J_m(x) \simeq \sqrt{2/\pi x} \cos \left[x - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right],$$

данным в формуле (5.3.68). Мы находим, что N_m не зависит от m и равно $\sqrt{k}$. Поэтому нормированными собственными функциями будут

$$\sqrt{k/2\pi} e^{im\varphi} J_m(kr). \quad (7.2.44)$$

Подстановка (7.2.44) в (7.2.39) дает

$$i\pi H_0(kR) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_m(Kr) J_m(Kr_0)}{K^2 - k^2} K dK,$$

где контур интегрирования еще надо уточнить. Фактический подсчет доказывает, что для расходящихся волн требуется как раз такой контур, какой показан на рис. 7.7, с полюсами при $\pm k$. Последнее разложение можно переписать так, чтобы оно включало только положительные m следующим образом:

$$i\pi H_0(kR) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_m(Kr) J_m(Kr_0)}{K^2 - k^2} K dK. \quad (7.2.45)$$

Возможно подсчитать интеграл по K методами теории функций. Однако это осуществляется довольно сложными выкладками. Предпочтительнее вывести разложение (7.2.45) другим приемом, который можно распространить на другие системы координат и граничные поверхности.

Общая техника. Это как раз метод, который был применен в § 7.1 для установления связи между поверхностной функцией Грина (7.1.8) и объемной функцией Грина (7.1.10). Мы разлагаем объемную функцию Грина по полной системе функций, содержащих все координаты, кроме одной (в настоящем случае имеются только две координаты, r и φ), с коэффициентами, являющимися неопределенными функциями не включенной координаты. Таким образом, мы положим

$$g_k(R) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im(\varphi-\varphi_0)} p_m(r|r_0). \quad (7.2.46)$$

Сравнивая с (7.2.45), мы замечаем, что

$$p_m(r|r_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_m(Kr) J_m(Kr_0)}{K^2 - k^2} K dK.$$

Мы подставим (7.2.46) в уравнение для $g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$:

$$\nabla^2 g_k + k^2 g_k = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

В полярных координатах оно имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g_k}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g_k}{\partial \varphi^2} + k^2 g_k = -\frac{4\pi\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r}. \quad (7.2.47)$$

(Правая часть этого уравнения содержит выражение δ -функции в полярных координатах. Это выражение должно удовлетворить требованиям, чтобы $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ исчезало всюду, кроме $r=r_0$ и $\varphi=\varphi_0$, а интеграл по всему пространству давал единицу: $\iint \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) r dr d\varphi = 1$. Легко проверить, что эти требования удовлетворяются.)

Если подставить разложение (7.2.46) в (7.2.47), то получится

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im(\varphi-\varphi_0)} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_m}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p_m \right] = -\frac{4\pi\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r}.$$

Умножим обе части этого равенства на $e^{-im\varphi}$ и проинтегрируем по φ от 0 до 2π . При интегрировании левой части мы используем ортогональные свойства системы функций $e^{im\varphi}$. Получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_m}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p_m = -\frac{4\pi\delta(r-r_0)}{r}. \quad (7.2.48)$$

Мы видим, что $p_m(r|\mathbf{r}_0)$ является *одномерной функцией Грина* для оператора Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + r \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right)$$

[см. уравнение (6.3.12)]. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $\mathcal{L}(\psi) = v$ дается формулой (5.2.19) в виде

$$\psi = y_2 \int_z^z \frac{v y_1 dz}{\Delta(y_1, y_2)} + y_1 \int_z^z \frac{v y_2 dz}{\Delta(y_1, y_2)},$$

где z — независимая переменная, y_1 и y_2 — два независимых решения однородного уравнения

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{dy}{dz} \right) + z \left(k^2 - \frac{m^2}{z^2} \right) y = 0,$$

а $\Delta(y_1, y_2)$ — определитель Вронского

$$\Delta(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}.$$

Функция v представляет собой неоднородный член, в данном случае $-4\pi\delta(r-r_0)/r$.

Пределы интегрирования в выражении для ψ зависят от специального выбора независимых функций y_1 и y_2 и от граничных условий на p_m . Мы возьмем пределы (это допустимо, так как мы не выбрали y_1 и y_2) меньшим $z(=r)$ в первом интеграле и большим z во втором. Тогда

$$p_m = y_2(r) \int_a^r \frac{-4\pi\delta(u-r_0)}{r_0 \Delta(y_1, y_2)} y_1(u) du + y_1(r) \int_r^b \frac{-4\pi\delta(u-r_0) y_2(u) du}{r_0 \Delta(y_1, y_2)}.$$

Для $r < r_0$ первый интеграл равен нулю, тогда как для $r > r_0$ равен нулю второй интеграл. Отсюда

$$p_m = \frac{-4\pi}{r_0 \Delta(y_1, y_2)} \times \begin{cases} y_1(r) y_2(r_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ y_2(r) y_1(r_0) & \text{для } r \geq r_0, \end{cases} \quad (7.2.49)$$

причем определитель Вронского подсчитывается в r_0 . Граничные условия определяют, какие из решений однородного уравнения надо применять. В рассматриваемом случае решениями являются функции Бесселя $J_m(kr)$, $N_m(kr)$ и любая их линейная комбинация. Граничные условия состоят в следующем: (1) p_m должна быть конечной при $r = 0$, так как g_k имеет единственную особенность при $r = r_0$, и (2) точка $r = r_0$ должна быть источником, потому что $g_k(R)$ взята в виде расходящейся волны. Отсюда $y_1 = J_m(kr)$ и $y_2 = H_m(kr)$.

Наконец, надо подсчитать $\Delta(y_1, y_2)$ при $r = r_0$. Здесь полезно применить формулу (5.2.3), выражающую зависимость определителя Вронского от аргумента:

$$\Delta(z) = \Delta(z_0) [f(z_0)/f(z)],$$

если дифференциальное уравнение для y_1 (или y_2) имеет вид

$$\frac{d}{dz} \left(f \frac{dy}{dz} \right) + qy = 0.$$

В рассматриваемом случае $f = r$, так что $\Delta(y_1, y_2) = \text{const}/r$. Чтобы определить постоянную, можно воспользоваться первыми членами степенного ряда около нуля ($r = 0$) или асимптотического ряда около $r = \infty$, так как соотношение $\Delta(y_1, y_2) = \text{const}/r$ должно удовлетворяться каждым членом степенного или асимптотического ряда для $\Delta(y_1, y_2)$. Например, применяем соотношения

$$\begin{aligned} J_m(kr) &\underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{2/\pi kr} \cos \left[kr - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right], \\ H_m(kr) &\underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{2/\pi kr} e^{i \left[kr - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]}. \end{aligned}$$

Определитель Вронского равен асимптотически

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi kr} \left\{ ik \cos \left[kr - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] e^{i \left[kr - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]} + \right. \\ \left. + k \sin \left[kr - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] e^{i \left[kr - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]} \right\}. \end{aligned}$$

Но это выражение равно $2i/\pi r$, так что $\Delta(y_1, y_2) = 2i/\pi r$. Объединяя все наши результаты, получаем окончательно

$$p_m = 2\pi^2 i \times \begin{cases} J_m(kr) H_m(kr_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ J_m(kr_0) H_m(kr) & \text{для } r \geq r_0. \end{cases} \quad (7.2.50)$$

Заметим, что p_m равно значению интеграла, получающегося в формуле (7.2.46). Вводя (7.2.50) в разложение для $g_k(R) = i\pi H_0(kR)$, получаем разложение для $H_0(kR)$:

$$\begin{aligned} H_0(kR) &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)} \times \begin{cases} J_m(kr) H_m(kr_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ J_m(kr_0) H_m(kr) & \text{для } r \geq r_0; \end{cases} \\ H_0(kR) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \times \begin{cases} J_m(kr) H_m(kr_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ J_m(kr_0) H_m(kr) & \text{для } r \geq r_0. \end{cases} \quad (7.2.51) \end{aligned}$$

Мы привели подробный вывод формулы (7.2.51), так как он будет служить образцом для подсчета разложений других функций Грина. Эти разложения очень полезны, как показывает следующее вычисление. Мы выведем разложение функции e^{ikx} (плоской волны, проходящей слева направо) в полярных координатах, а затем из него получим интегральное представление функции Бесселя J_m [указанное в формуле (5.3.65)]. Заметим, что $H_0(kR)$ изображает волну, выходящую из источника в r_0 . Чтобы получить плоскую волну, проходящую слева направо, необходимо поместить источник в $-\infty$, т. е. считать, что $r_0 \rightarrow \infty$ и $\varphi_0 \rightarrow \pi$. Тогда

$$R = \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} \underset{\substack{r_0 \rightarrow \infty \\ \varphi_0 \rightarrow \pi}}{\simeq} r_0 \left(1 + \frac{r}{r_0} \cos \varphi \right) = r_0 + x.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H_0(kR) &\underset{\substack{r_0 \rightarrow \infty \\ \varphi_0 \rightarrow \pi}}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} e^{i \left[k(r_0 + x) - \frac{\pi}{4} \right]} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m \cos m\varphi \cdot J_m(kr) \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} e^{i \left[k r_0 - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]}, \end{aligned}$$

или

$$e^{ikx} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos m\varphi \cdot J_m(kr) \quad (7.2.52)$$

— требуемое разложение. Этот ряд был приведен в гл. 5 в ином виде [см. формулу (5.3.65)].

Наконец, пользуясь свойствами ортогональности системы $\cos m\varphi$, можно вывести интегральное представление для $J_m(kr)$. Умножаем обе части равенства (7.2.52) на $\cos \nu\varphi$ и интегрируем от 0 до π . Получаем

$$J_\nu(kr) = \frac{i^{-\nu}}{\pi} \int_0^\pi e^{ikr \cos \varphi} \cos \nu\varphi d\varphi. \quad (7.2.53)$$

Это соотношение было выведено другим способом в гл. 5 [см. формулу (5.3.65)].

Общая формула. Обратимся теперь к задаче вывода разложения функции Грина для любой из обобщенных систем координат, в которых скалярное уравнение Гельмгольца разделяется. Напомним некоторые результаты исследования техники разделения переменных (см. стр. 612 и далее). Если ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 — три ортогональные обобщенные координаты с коэффициентами Ламе h_1 , h_2 и h_3 , то оператор Лапласа равен

$$\nabla^2 \psi = \sum_{n=1}^3 \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right) \quad (7.2.54)$$

Величина f_n зависит только от ξ_n (т.е. f_1 является функцией только от ξ_1); S есть определитель Штеккеля (5.1.25), элементы которого Φ_{nm} являются функциями только от ξ_n (т.е. Φ_{1m} зависит только от ξ_1); M_n представляет собой алгебраическое дополнение определителя S , на который в разложении S (5.1.26) умножается Φ_{n1} . M_1 зависит от ξ_2 и ξ_3 , но не зависит от ξ_1 . В скалярном уравнении Гельмгольца, записанном в координатах ξ_1 , ξ_2 ,

ξ_3 , переменные разделяются, так что

$$\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3),$$

где

$$\frac{1}{f_n X_n} \frac{d}{d\xi_n} \left(f_n \frac{dX_n}{d\xi_n} \right) + \sum_{m=1}^3 \Phi_{nm}(\xi_n) k_m^2 = 0, \quad (7.2.55)$$

причем $k_1^2 = k^2$, а k_2^2 и k_3^2 — две константы разделения. Множители f_n и элементы определителя S приведены в таблице в конце гл. 5. Нам требуется также условие Робертсона $h_1 h_2 h_3 = S f_1 f_2 f_3$ (5.1.32).

Чтобы увидеть, как разложить функцию Грина в этих общих координатах, целесообразно вернуться к выводу разложения (7.2.51) функции Грина в полярных координатах. Там φ -множители оказываются собственными функциями, не зависящими от постоянной k , входящей в уравнение Гельмгольца. С другой стороны, r -множители зависят и от k и от собственных значений m для φ -множителей; по этой и по другим причинам r -множители не могут быть приняты за собственные функции.

Таким образом, функция G была разложена в ряд по собственным функциям для φ -множителей. Поэтому r -множители для каждого члена ряда удовлетворяли неоднородному уравнению, решение которого можно было выразить через два независимых решения соответствующего однородного уравнения, придя таким способом к разложению.

Мы испробуем тот же метод для трех общих координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Из трех констант разделения $k_1 = k$, k_2 , k_3 значение первой, k , определяется уравнением Гельмгольца, которое мы решаем. Другие две, k_2 и k_3 , пригодны, чтобы стать собственными значениями для системы двумерных собственных функций, по которым мы разлагаем функцию Грина G . Обычно выбор того, какие два из координатных множителей должны быть собственными функциями, очевиден. Например, в сферических координатах две из трех переменных, φ и θ , являются углами и имеют конечную область значений, причем граничные условия, которые можно наложить для получения собственных функций, достаточно просты (периодичность и конечность). В других случаях (таких, как круговые цилиндрические координаты r, φ, z) только одна из координат (для цилиндрических координат это φ) имеет конечную область значений, а любой из остальных двух (например, z) должна отвечать система собственных функций для бесконечного интервала, в результате чего для одной из констант разделения k_2 или k_3 получается непрерывная совокупность собственных значений.

Пусть мы нашли, что ξ_2 - и ξ_3 -множители можно превратить в собственные функции с соответствующими парами собственных значений для k_2 и k_3 . Упорядочим некоторым способом допустимые значения k_2 и k_3 ; например, наименьшее собственное значение k_2 можно обозначить через k_{20} , следующее — через k_{21} и т. д., m -е через k_{2m} , тогда как допустимые значения k_3 — через k_{30} , $k_{31}, \dots$, $k_{3n}, \dots$; собственная функция, соответствующая значениям k_{2m} , k_{3n} , равна $X_{2m}(\xi_2) X_{3n}(\xi_3)$, хотя X_2 может также зависеть от n , а X_3 — от m . Для упрощения записи мы будем обозначать пары целых чисел (m, n) одной буквой p или q , а произведение собственных функций — одной буквой W . Тогда p -я собственная функция в координатах ξ_2, ξ_3 равна $W_p(\xi_2, \xi_3)$ для собственных значений k_{2p}, k_{3p} . В дальнейшем мы будем считать, что как ξ_2 , так и ξ_3 изменяются на конечных интервалах, так что значения как k_{2p} , так и k_{3p} дискретны и разложение по собственным функциям представляет собой ряд по p (m и n). Переход к случаям, когда одна или обе из совокупностей собственных значений представляют собой континуум, так что разложение превращается в интеграл (подобно тому как интеграл Фурье заменяет ряд Фурье), обычно нетруден.

Следовательно, мы допускаем существование полной системы собственных функций $W_q(\xi_2, \xi_3)$ (мы выбрали ξ_2 и ξ_3 для определенности, так как пригодна любая пара, для которой выполняются необходимые условия), удовлетворяющих условиям ортогональности и нормированности

$$\iint \overline{W_q}(\xi_2, \xi_3) W_p(\xi_2, \xi_3) \rho(\xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3 = \delta_{qp}, \quad (7.2.56)$$

где ρ — весовая функция. (Относительно весовой функции в одномерном случае см. стр. 725.) Мы будем предполагать, что эта система собственных функций существует при произвольном k для значений ξ_2 и ξ_3 в интересующей нас области. Конечно, функция W_q может зависеть от k . Тогда по аналогии с (7.2.46) мы напишем

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \sum_q X_{1q}(\xi_1|\xi'_1) B_q(\xi'_2, \xi'_3) W_q(\xi_2, \xi_3), \quad (7.2.57)$$

где функции X_q и B_q надо определить.

В обобщенных координатах уравнение, определяющее G_k , имеет вид

$$\sum_{n=1}^3 \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial G}{\partial \xi_n} \right) + k_1^2 G = -4\pi \frac{\delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3)}{h_1 h_2 h_3}. \quad (7.2.58)$$

Заметим, что представление функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, стоящее в правой части с коэффициентом -4π , обладает обычными свойствами дельта-функции: оно равно нулю при всех ξ_1, ξ_2, ξ_3 , за исключением $\xi_1 = \xi'_1, \xi_2 = \xi'_2, \xi_3 = \xi'_3$, а интеграл от него по всему пространству равен единице. Приступим теперь к подстановке ряда (7.2.57) в уравнение (7.2.58). Нам потребуется результат применения оператора $\nabla^2 + k_1^2$ к $W_q(\xi_2, \xi_3)$. Только два из членов суммы в (7.2.58) содержат производные от W_q . Так как W_q равно произведению решений $X_2(\xi_2)$ и $X_3(\xi_3)$ уравнений (7.2.55), то отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=2}^3 \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial W_q}{\partial \xi_n} \right) = - \sum_{n=2}^3 \frac{M_n}{S} \left[\sum_{m=1}^3 \Phi_{nm}(\xi_n) k_{mq}^2 \right] W_q,$$

где мы придали константам разделения дополнительный индекс q , указывающий на их соответствие функции W_q .

Сумму по n можно упростить, пользуясь свойством определителя S [см. формулу (5.1.27)]:

$$\sum_n M_n \Phi_{nm} = S \delta_{1m}.$$

Значит,

$$\sum_{n=2,3} \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial W_q}{\partial \xi_n} \right) = -k_1^2 W_q + \frac{M_1}{S} \left(\sum_m k_{mq}^2 \Phi_{1m} \right) W_q.$$

Отсюда, если подставить ряд (7.2.57) в (7.2.58), получится

$$\begin{aligned} \sum_q B_q(\xi'_2, \xi'_3) W_q(\xi_2, \xi_3) \frac{M_1}{S} \left[\frac{1}{f_1} \frac{d}{d\xi_1} \left(f_1 \frac{dX_{1q}}{d\xi_1} \right) + \sum_{m=1}^3 k_{mq}^2 \Phi_{1m}(\xi_1) X_{1q} \right] = \\ = -4\pi \frac{\delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3)}{h_1 h_2 h_3}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись условием ортонормальности (7.2.56) и условием Робертсона (5.1.32), мы находим, что

$$B_q(\xi'_2, \xi'_3) = \frac{\rho(\xi'_2, \xi'_3) \overline{W_q}(\xi'_2, \xi'_3)}{M_1(\xi'_2, \xi'_3) f_2(\xi'_2) f_3(\xi'_3)} \quad (7.2.59)$$

и

$$\frac{1}{f_1} \frac{d}{d\xi_1} \left(f_1 \frac{dX_{1q}}{d\xi_1} \right) + \left(\sum_{m=1}^3 k_{mq}^2 \Phi_{1m} \right) X_{1q} = -\frac{4\pi}{f_1} \delta(\xi_1 - \xi'_1). \quad (7.2.60)$$

Таким образом, как в разобранный выше примере полярных координат, X_{1q} является одномерной функцией Грина. Следуя методу, примененному при решении уравнения (7.2.48), можно выразить X_{1q} через два независимых решения (y_1 и y_2) однородного уравнения

$$\frac{1}{f_1} \frac{d}{d\xi_1} \left(f_1 \frac{dy}{d\xi_1} \right) + \sum k_{mp}^2 \Phi_{1m} y = 0.$$

Мы получаем

$$X_{1q}(\xi_1 | \xi'_1) = - \frac{4\pi}{\Delta(y_{1q}, y_{2q}) f_1(\xi'_1)} \times \begin{cases} y_{1q}(\xi_1) y_{2q}(\xi'_1) & \text{для } \xi_1 \leq \xi'_1, \\ y_{1q}(\xi'_1) y_{2q}(\xi_1) & \text{для } \xi_1 \geq \xi'_1, \end{cases} \quad (7.2.61)$$

где Δ — определитель Вронского, вычисленный в ξ'_1 . Как в исследовании на стр. 765, выбор применяемых решений y_1 и y_2 зависит от граничных условий задачи¹⁾. Определитель Вронского в данном случае имеет вид

$$\Delta(y_1, y_2) = \frac{\text{const}}{f_{1z}}, \quad (7.2.62)$$

так что множитель $\Delta(y_1, y_2) f_1$ постоянен.

Значит, разложение $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ таково:

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = -4\pi \frac{h_1}{h_2 h_3} \rho(\xi'_3, \xi_3) \sum_q \overline{W}_q(\xi'_2, \xi'_3) W_q(\xi_2, \xi_3) \times \\ \times \frac{1}{\Delta(y_{1q}, y_{2q})} \times \begin{cases} y_{1q}(\xi_1) y_{2q}(\xi'_1) & \text{для } \xi_1 \leq \xi'_1, \\ y_{1q}(\xi'_1) y_{2q}(\xi_1) & \text{для } \xi_1 \geq \xi'_1, \end{cases} \quad (7.2.63)$$

где коэффициенты Ламе h и определитель Вронского Δ являются функциями координат со штрихом, а ρ — весовая функция, определенная в формуле (7.2.56). Из этого разложения методом, примененным в рассмотренном выше случае полярных координат, возможно, вообще говоря, получить разложение плоской волны и интегральные представления участвующих в них функций. Наконец, так как теперь можно выразить плоские волны и функцию Грина в различных системах координат, то становится возможным выразить решения уравнения Гельмгольца в одной системе координат через решения, соответствующие другой системе.

Функции Грина и собственные функции. Функцию Грина для задачи Штурма—Лиувилля (см. стр. 668)

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{dG}{dx} \right) + (q + \lambda r) G = -4\pi \delta(x - x_0) \quad (7.2.64)$$

можно выразить в виде бесконечного ряда (7.2.39) по собственным функциям однородного дифференциального уравнения, соответствующего (7.2.64):

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\psi_n}{dx} \right) + (q + \lambda_n r) \psi_n = 0 \quad (7.2.65)$$

с однородными граничными условиями при $x=a$ и $x=b$. Эти собственные функции можно взять так, чтобы они образовывали полный ортонормальный ряд, так что

$$\int_a^b \overline{\psi}_n(x) \psi_m(x) r dx = \delta_{nm}. \quad (7.2.66)$$

¹⁾ Решение $y_{1q}(\xi_1)$ должно удовлетворять однородному граничному условию, наложенному на G_k при $\xi_1=a$, а решение $y_{2q}(\xi_1)$ — соответствующему условию при $\xi_1=b$, где $a < b$ — границы интервала изменения переменной ξ_1 . — Прим. ред.

Бесконечный ряд для $G_\lambda(x|x_0)$ имеет вид

$$G_\lambda(x|x_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\psi}_n(x) \psi_n(x_0)}{\lambda_n - \lambda}. \quad (7.2.67)$$

С другой стороны, функцию G можно выразить через два независимых решения y_1 и y_2 уравнения (7.2.64) при помощи метода, которым была выведена формула (7.2.49). Получается

$$G_\lambda(x|x_0) = -\frac{4\pi}{P(x_0)\Delta(y_1, y_2)} \times \begin{cases} y_1(x)y_2(x_0) & \text{для } x \leq x_0, \\ y_2(x)y_1(x_0) & \text{для } x \geq x_0. \end{cases} \quad (7.2.68)$$

Сравнивая это выражение, имеющее различный вид для различных областей значений x , с формулой (7.2.67), можно получить информацию о функциях ψ_n и соответствующих собственных значениях λ_n . Это дает очень сильный метод исследования свойств собственных функций, который действительно время от времени применялся как основа всей описанной в гл. 6 теории. Здесь мы удовлетворимся исследованием тех результатов, которые представляют практическое значение.

Основная идея состоит в том, что $G_\lambda(x|x_0)$ как функция λ имеет простые полюсы при $\lambda = \lambda_n$ с вычетами $-4\pi\bar{\psi}_n(x)\psi_n(x_0)$. Эти же самые особенности должно иметь и представление (7.2.68), имеющее замкнутый вид [а не вид бесконечного ряда, как (7.2.67)]. Отсюда, рассматривая (7.2.68), возможно (в принципе) получить собственные значения λ_n , а также соответствующие собственные функции ψ_n , уже нормированные.

Поясним предложенный метод на простом примере. Пусть уравнение (7.2.65) имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda\psi = 0,$$

а граничные условия состоят в том, что $\psi = 0$ при $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Тогда соответствующее y_1 равно $\sin\sqrt{\lambda}(x-a)$, а $y_2 = \sin\sqrt{\lambda}(x-b)$. Значение $\Delta(y_1, y_2)$ равно

$$\begin{aligned} & \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(x-a) \cdot \cos \sqrt{\lambda}(x-b) - \\ & - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(x-a) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x-b) = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(b-a). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G_\lambda(x|x_0) = \frac{-4\pi}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(b-a)} \times \begin{cases} \sin \sqrt{\lambda}(x-a) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x_0-b) & \text{для } x \leq x_0, \\ \sin \sqrt{\lambda}(x_0-a) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x-b) & \text{для } x \geq x_0. \end{cases}$$

Собственные значения являются нулями функции $\sin \sqrt{\lambda}(b-a)$, так что получается хорошо знакомый результат $\sqrt{\lambda_n} = n\pi/(b-a)$. Вычеты здесь равны

$$-[8\pi/(b-a)](-1)^n \sin[n\pi(x-a)/(b-a)] \cdot \sin[n\pi(x_0-b)/(b-a)],$$

или

$$-[8\pi/(b-a)] \sin[n\pi(b-x)/(b-a)] \cdot \sin[n\pi(b-x_0)/(b-a)].$$

Отсюда $\psi_n(x)\bar{\psi}_n(x_0)$ равно

$$[2/(b-a)] \sin[n\pi(b-x)/(b-a)] \cdot \sin[n\pi(b-x_0)/(b-a)],$$

так что нормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(b-x)}{b-a}.$$

Эти собственные функции удовлетворяют условиям ортогональности и нормированности (7.2.66) при $r = 1$ и образуют полную систему. Таким образом, мы видим, что если можно найти два независимых решения и составить из них комбинации, из которых одна удовлетворяет граничному условию в одной граничной точке, а другая — в другой, и если можно подсчитать определитель Вронского, то можно найти нормированные ортогональные собственные функции и собственные значения.

Сравнивая этот метод с более обычным методом, рассмотренным в гл. 6, мы видим, что в итоге получается то же самое. Однако описанный сейчас метод дает также нормировку, что в других методах часто требует вычисления сложных интегралов.

Мы будем иметь случай воспользоваться этим методом для более сложных функций в задачах к этой главе, а также при определении и нормировке собственных функций, возникающих в задачах для двух и более измерений. С тем же процессом в несколько ином виде мы встретимся в § 11.1.

7.3. Функция Грина для скалярного волнового уравнения

Функция Грина для скалярного уравнения Гельмгольца, только что исследованная в § 7.2, особенно полезна при решении неоднородных задач, т. е. задач, возникающих при наличии источников внутри объема или на граничной поверхности. Функция Грина для скалярного волнового уравнения должна нести аналогичные обязанности, т. е. также должна давать возможность решать скалярное волновое уравнение при наличии источников. Для получения некоторого представления об уравнении, которому должна удовлетворять эта функция, рассмотрим типичную неоднородную задачу. Пусть ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi q(\mathbf{r}, t). \quad (7.3.1)$$

Функция $q(\mathbf{r}, t)$ описывает плотность источников и дает не только распределение источников в пространстве, но также зависимость источников от времени в каждой точке пространства. Кроме уравнения (7.3.1), необходимо сформулировать граничные и начальные условия, чтобы получить единственное решение этого уравнения. Условие на граничной поверхности может быть условием Дирихле, или Неймана, или линейной комбинацией обоих. Условия по временной координате должны быть условиями Коши (см. стр. 638, гл. 6). Следовательно, необходимо задать значения ψ и $\partial\psi/\partial t$ при $t = t_0$ для каждой точки рассматриваемой области. Пусть эти значения равны $\psi_0(\mathbf{r})$ и $\psi_0'(\mathbf{r})$ соответственно.

Вид уравнения (7.3.1) подсказывает, что уравнение, определяющее функцию Грина $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, имеет форму

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (7.3.2)$$

Мы видим, что источник имеет характер импульса при $t = t_0$ в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Поэтому G описывает эффект от этого импульсного источника с течением времени, распространяющийся от $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. При этом, как и в случае скалярного уравнения Гельмгольца, G должна удовлетворять однородным граничным условиям, наложенным на функцию ψ на границе. Для начальных условий представляется разумным допустить, что G и $\partial G/\partial t$ должны равняться нулю при $t < t_0$; это значит, что импульсный источник, действовавший в момент t_0 , не должен проявлять себя в предшествующее время.

Не следует думать, что примененное здесь соотношение между причиной и следствием очевидно. Направленность течения времени несомненна для макроскопических событий, но возможность экстраполяции этого опыта на микроскопические явления не ясна. Действительно, как уравнения движения в механике, так и уравнения Максвелла, которые могут привести к волновому уравнению, не имеют никакой асимметрии по времени. Поэтому для микроскопических событий могут оказаться возможными «эффекты» распространения во времени назад; в последние годы начали оформляться теории, применяющие такие решения волнового уравнения. Однако исследование вопроса о том, как такие решения могут все-таки привести к связи между причиной и следствием во времени для макроскопических событий, увело бы нас слишком далеко.

Пока мы будем в основном пользоваться нулевыми начальными условиями для $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ и $\partial G / \partial t$ при $t < t_0$, хотя не следует забывать существования иных возможностей.

Соотношение взаимности. Вытекающая из условий Коши, как указано выше, направленность времени означает, что, обобщая соотношение взаимности $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = G_k(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r})$ посредством включения времени, мы не приходим к равенству $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{r}, t)$. Действительно, если $t > t_0$, то второе выражение равно нулю. Чтобы получить соотношение взаимности, необходимо обратить направление течения времени, так что соотношение взаимности приобретает вид

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t). \quad (7.3.3)$$

Для истолкования этого равенства удобно положить $t_0 = 0$. Тогда получим, что $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, 0) = G(\mathbf{r}_0, 0 | \mathbf{r}, -t)$. Мы видим, что эффект в точке $\mathbf{r}$ в момент t от импульсного источника, действовавшего в $\mathbf{r}_0$ в момент 0, равен эффекту в $\mathbf{r}_0$ в момент 0 импульсного источника, действовавшего в $\mathbf{r}$ в момент $-t$, т. е. на время t раньше.

Для доказательства соотношения (7.3.3) напишем уравнения, которым удовлетворяют обе функции Грина:

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t^2} &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0), \\ \nabla^2 G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)}{\partial t^2} &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(t - t_1). \end{aligned}$$

Умножая первое на $G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)$, а второе на $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, вычитая один результат из другого и производя интегрирование по исследуемой области и по времени t от $-\infty$ до t' , где $t' > t_0$ и $t' > t_1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t'} dt \int \left[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \nabla^2 G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \nabla^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \right] dV = \\ = 4\pi [G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}_1, -t_1) - G(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}_0, t_0)]. \quad (7.3.4) \end{aligned}$$

Левую часть последнего равенства можно преобразовать при помощи теоремы Грина и тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \right] = \\ = G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0); \end{aligned}$$

Тогда левая часть примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t'} dt \int dS \cdot [G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \operatorname{grad} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) - \\ - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \operatorname{grad} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)] + \\ + \frac{1}{c^2} \int dV \left[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)}{\partial t} - \right. \\ \left. - G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t} \right]_{t=-\infty}^{t=t'}. \end{aligned}$$

Первый из этих интегралов равен нулю, так как обе функции Грина удовлетворяют одинаковым однородным граничным условиям на S . Второй также равен нулю, как мы сейчас увидим. На нижнем пределе как $G(\mathbf{r}, -\infty | \mathbf{r}_0, t_0)$, так и ее производная по времени равны нулю в силу условия причинности. В момент $t=t'$ функция $G(\mathbf{r}, -t' | \mathbf{r}_1, -t_1)$ и ее производная по времени обращаются в нуль, так как момент $-t'$ предшествует моменту $-t_1$. Значит, левая часть равенства (7.3.4) обращается в нуль, что приводит к теореме взаимности (7.3.3).

Теперь покажем, как с помощью функции Грина можно выразить решение неоднородной задачи (включающей начальные условия) для скалярного волнового уравнения. Нам потребуется уравнение (7.3.1)

$$\nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} = -4\pi q(\mathbf{r}_0, t_0),$$

а также

$$\nabla_0^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0).$$

Это последнее равенство можно получить из (7.3.2) при помощи соотношения взаимности. Как обычно, умножаем первое уравнение на G , второе на ψ и вычитаем один результат из другого. Интегрируем по интересующему нас объему и по t_0 от 0 до t^+ . Под символом t^+ мы будем понимать $t + \varepsilon$, где ε произвольно мало. Этот предел вводится, чтобы избежать окончаний интегрирования точно в пике дельта-функции. Пользуясь окончательными формулами, важно иметь в виду, что предел равен t^+ , а не точно t . Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 \left[G \nabla_0^2 \psi - \psi \nabla_0^2 G + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t_0^2} \psi - G \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} \right) \right] = \\ = 4\pi \left[\psi(\mathbf{r}, t) - \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 \cdot q(\mathbf{r}_0, t_0) G \right]. \end{aligned}$$

Вновь применяя теорему Грина и т. д., находим

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} dt_0 \oint dS_0 \cdot (G \operatorname{grad}_0 \psi - \psi \operatorname{grad}_0 G) + \frac{1}{c^2} \int dV_0 \left[\frac{\partial G}{\partial t_0} \psi - G \frac{\partial \psi}{\partial t_0} \right]_0^{t^+} + \\ + 4\pi \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 \cdot q(\mathbf{r}_0, t_0) G = 4\pi \psi(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Подинтегральная функция в первом интеграле задана граничными условиями. Во втором интеграле при подстановке $t=t^+$ подинтегральная функция обращается в нуль в силу начальных условий для G . Оставшийся

предел включает только начальные условия. Отсюда

$$\begin{aligned}
 4\pi \phi(\mathbf{r}, t) = & 4\pi \int_0^{t^*} dt_0 \int dV_0 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) q(\mathbf{r}_0, t_0) + \\
 & + \int_0^{t^*} dt_0 \oint dS_0 \cdot (G \text{grad}_0 \phi - \phi \text{grad}_0 G) - \\
 & - \frac{1}{c^2} \int dV_0 \left[\left(\frac{dG}{dt_0} \right)_{t_0=0} \psi_0(\mathbf{r}_0) - G_{t_0=0} v_0(\mathbf{r}_0) \right],
 \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

где $\psi_0(\mathbf{r}_0)$ и $v_0(\mathbf{r}_0)$ — начальные значения ϕ и $\partial\phi/\partial t$.

Формула (7.3.5) дает полное решение неоднородной задачи, включая удовлетворение начальным условиям. Поверхностные интегралы, как и в случае уравнения Гельмгольца, надо аккуратно определить. Как и в том случае, мы примем, что значение на поверхности равно пределу значений функции при приближении к поверхности изнутри.

Первые два интеграла в правой части последней формулы (7.3.5) имеют почти такой же вид, как интегралы, получающиеся в аналогичной формуле для случая уравнения Гельмгольца. Первый представляет эффект объемных источников; второй — эффект граничных условий на (пространственной) границе области. Последний член содержит начальные условия. Его можно истолковать, если спросить, какой требуется вид источника q , чтобы функция ϕ началась при $t=0$ требуемым образом. Можно ожидать, что это потребует силу импульсного типа в момент $t=0^+$. На основании (7.3.5) можно показать, что член с источником, требуемый для воспроизведения начальных условий, равен

$$-\frac{1}{c^2} [\psi_0(\mathbf{r}_0) \delta'(t_0) + v_0(\mathbf{r}_0) \delta(t_0)],$$

где под $\delta'(t_0)$ мы понимаем производную от δ -функции. Она обладает следующим свойством:

$$\int_a^b f(x) \delta'(x) dx = \begin{cases} -f'(0), & \text{если } x=0 \text{ находится внутри интервала } (a, b); \\ 0, & \text{если } x=0 \text{ находится вне интервала } (a, b). \end{cases}$$

Можно понять физический смысл написанных членов. Член типа $v_0 \delta(t_0)$ требуется, чтобы представить импульсную силу, придающую каждой точке среды начальную скорость $v_0(\mathbf{r}_0)$. Чтобы получить начальное смещение, импульс, действующий в момент $t_0=0$, должен длиться короткое время, пока не будет достигнуто требуемое смещение. В этот момент прилагается второй импульс, чтобы уменьшить скорость до нуля, но оставить смещение неизменным. Можно заметить, что первый член $\psi(\mathbf{r}_0, t_0) \delta'(t_0)$ имеет такой вид, если записать его в форме

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\psi(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\delta(t_0 + \varepsilon) - \delta(t_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon} \right].$$

Вид функции Грина. Чтобы сделать формулу (7.3.5) применимой, нужно знать функцию G . Как и в случае скалярного уравнения Гельмгольца, мы найдем ее сначала для бесконечной области. Обозначим эту функцию через g . Метод, примененный в случае скалярного уравнения Гельмгольца, включает оценку относительного порядка особенностей функций $\nabla^2 g$ и $\partial^2 g / \partial t^2$ в уравнении

$$\nabla^2 g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0).$$

Можно обосновать, что функция $\nabla^2 g$ имеет более сильную особенность, так как она содержит вторую производную от трехмерной δ -функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$. Такое обоснование не очень удовлетворительно. Однако в данный момент допустим, что это верно. Позже мы возвратимся к последнему уравнению и выведем более строго результат, который сейчас получим.

Интегрируя обе части уравнения по малому шаровому объему с центром в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, т. е. $R = 0$, и пренебрегая членом с производной по времени, получаем, как в предыдущем параграфе,

$$g \underset{R \rightarrow 0}{\simeq} \delta(t - t_0)/R. \quad (7.3.6)$$

Как и ранее, мы приступим теперь к отысканию такого решения однородного уравнения, которое удовлетворяет этому условию, так как ясно, что g удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0, \quad \text{когда } R \text{ и } t - t_0 \text{ не равны нулю.}$$

При $R = 0$ надо воспользоваться условием (7.3.6). Так как мы имеем дело с точечными источниками в бесконечной среде, то g является функцией от R , а не от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ в отдельности. Отсюда

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial g}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (gR)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (gR)}{\partial t^2} = 0. \quad (7.3.7)$$

Решениями этого уравнения служат функции

$$g = \frac{h[R/c - (t - t_0)] + k[R/c + (t - t_0)]}{R},$$

где h и k — любые функции. Сравнивая с условием (7.3.6), мы видим, что представляются две возможности (или любая их линейная комбинация):

$$g = \delta[R/c - (t - t_0)]/R \quad \text{и} \quad g = \delta[R/c + (t - t_0)]/R.$$

Но вторую из них надо исключить, так как она не удовлетворяет наложенному ранее условию, которое требует, чтобы эффект от импульса, действовавшего в момент t_0 , ощущался на удалении R только при $t > t_0$. Следовательно,

$$g = \frac{\delta[R/c - (t - t_0)]}{R} \quad (R, t - t_0 > 0), \quad (7.3.8)$$

что представляет сферическую волну, распространяющуюся от источника с радиальной скоростью c .

Теперь можно сделать апостериорную проверку нашего начального допущения о том, что особенность у $\nabla^2 g$ более высокого порядка, чем у $\partial^2 g / \partial t^2$. На это указывает наличие множителя $1/R$, но для доказательства требуется довольно тонкий учет бесконечностей. Поэтому мы задержимся, чтобы придать формуле (7.3.8) более прочное обоснование, и только после этого вернемся к обсуждению выводов, вытекающих из этой формулы. Применяя сферические координаты для $\delta(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ и обозначив

$$\tau = t - t_0,$$

можно, делая те же шаги, которые привели к (7.3.7), получить более общее уравнение, справедливое также для R и τ , равных нулю:

$$\frac{\partial^2 (Rg)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (Rg)}{\partial \tau^2} = - \frac{2\delta(R)}{R} \delta(\tau).$$

Численный множитель 2 появляется из-за того, что переменная R пробегает только неотрицательные значения. Отсюда $\int_0^\infty \delta(R) dR = \frac{1}{2}$.

Чтобы перейти к дальнейшему, желательно воспользоваться соотношением

$$\frac{\delta(R)}{R} = -\delta'(R). \quad (7.3.9)$$

Для его доказательства умножим $\delta(R)/R$ на дифференцируемую функцию $f(R)$ и проинтегрируем по R . Пусть

$$f(R) = f(0) + f'(0)R + f''(0)\frac{R^2}{2!} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(R)\delta(R)}{R} dR &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(R)}{R} dR + f'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(R) dR + \\ &+ \frac{f''(0)}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} R \delta(R) dR + \dots \end{aligned}$$

Первый из полученных членов представляет собой интеграл от нечетной функции, так что его главное значение по Коши равно нулю; второй член дает $f'(0)$; третий и все высшие члены дают нули. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(R)\delta(R)}{R} dR = f'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(R)\delta(R) dR = - \int_{-\infty}^{\infty} f(R)\delta'(R) dR.$$

Это равенство можно также вывести более непосредственно из определения производной следующим образом:

$$\delta'(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(R+\varepsilon) - \delta(R-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\delta(R+\varepsilon)}{-R} - \frac{\delta(R-\varepsilon)}{R} \right] = -\frac{\delta(R)}{R}.$$

Возвращаясь к уравнению, мы можем теперь написать

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(Rg) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(Rg) = 2\delta'(R)\delta(\tau).$$

Ясно, что следует ввести координаты

$$\xi = R - c\tau, \quad \eta = R + c\tau. \quad (7.3.10)$$

Надо определить также смысл произведения $\delta'(R)\delta(\tau)$ в новых переменных. Для этого заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau dR \cdot f(\tau, R) \delta'(R) \delta(\tau) = - \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)_{R, \tau=0}.$$

Это выражение можно переписать как $-(\partial f / \partial \xi + \partial f / \partial \eta)_{\xi, \eta=0}$. Следовательно, после преобразования (7.3.10)

$$\delta'(R)\delta(\tau) = 2c [\delta'_1(\xi)\delta(\eta) + \delta'(\eta)\delta(\xi)]. \quad (7.3.11)$$

Появившийся множитель $2c$ как раз компенсирует изменение элемента площади при переходе от переменных R, τ к переменным ξ, η .

Таким образом, уравнение, которому удовлетворяет Rg , в новых переменных ξ и η приобретает вид

$$\frac{\partial^2 (Rg)}{\partial \xi \partial \eta} = c [\delta'(\xi)\delta(\eta) + \delta'(\eta)\delta(\xi)],$$

или

$$Rg = c \int_{-\infty}^{\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\eta} \delta'(\xi)\delta(\eta) d\eta + c \int_{\xi}^{\infty} d\xi \int_{\eta}^{\infty} \delta(\xi)\delta'(\eta) d\eta.$$

Пределы интегрирования выбраны так, чтобы привести к решению, удовлетворяющему требуемым начальным условиям. После интегрирования получаем

$$Rg = c \delta(\xi) u(\eta) - c \delta(\eta) [1 - u(\xi)], \quad (7.3.12)$$

где
$$u(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{для } \eta < 0, \\ 1 & \text{для } \eta > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad 1 - u(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{для } \xi < 0, \\ 0 & \text{для } \xi > 0. \end{cases}$$

Второй член в (7.3.12) можно отбросить; можно показать, что всюду один или оба из его сомножителей равны нулю. Функция $\delta(\eta)$ отлична от нуля, только если $\eta = 0$ (т. е. если $ct = -R$), но в этой точке $\xi = 2R$, так что $1 - u(\xi) = 0$. С другой стороны, в первом члене $\delta(\xi)$ отлична от нуля, если $ct = R$, т. е. когда $\eta = 2R$ и $u(\eta) = 1$. Заменяя в (7.3.12) ξ на $R - c(t - t_0)$, а $u(\eta)$ на 1 (для $R, t - t_0 > 0$) и разрешая относительно g , мы приходим к (7.3.8), что и требуется.

Чтобы получить некоторое представление о значении формулы (7.3.8), рассмотрим случай бесконечной области с начальными условиями $\psi = \partial\psi/\partial t = 0$ при $t = 0$. Тогда

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{t^*} dt_0 \int \frac{\delta[(R/c) - (t - t_0)]}{R} q(\mathbf{r}_0, t_0) dV_0, \quad t^* = t + \varepsilon,$$

и окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{q(\mathbf{r}_0, -R/c)}{R} dV_0. \quad (7.3.13)$$

Мы видим, что эффект в $\mathbf{r}$ в момент t определяется значением функции источника q в $\mathbf{r}_0$ в момент $t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. Это утверждение как раз означает, что скорость распространения возмущения равна c . Если скорость распространения становится бесконечной, то решение приводится к известному решению уравнения Пуассона, имеющему вид потенциала, как это и должно быть, поскольку неоднородное скалярное волновое уравнение в этом пределе превращается в уравнение Пуассона. Вследствие этого решение (7.3.13) часто называют *запаздывающим потенциалом*.

Поле подвижного источника. В качестве простого примера рассмотрим точечный источник, движущийся в бесконечной среде со скоростью $\mathbf{v}$. Тогда $q = q_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где q_0 определяется интенсивностью источника. Из (7.3.5) имеем

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= q_0 \int_0^{t^*} dt_0 \int \frac{\delta[(R/c) - (t - t_0)] \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t_0)}{R} dV_0 = \\ &= q_0 \int_0^{t^*} \frac{\delta[(1/c) |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0| - (t - t_0)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|} dt_0. \end{aligned}$$

Положим

$$p = \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0| + t_0.$$

Тогда

$$dp = dt_0 \left(\frac{v^2 t_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|} + 1 \right),$$

так что

$$\psi(\mathbf{r}, t) = q_0 \int_{r/c}^{t^* + |\mathbf{r} - \mathbf{v}t^*|/c} \frac{d\rho \delta(\rho - t)}{(1/c)(v^2 t_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) + |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|}.$$

Особенность δ -функции здесь находится в $\rho = t$. Этим должен определяться такой момент t_0 , что сигнал, вышедший из источника в момент t_0 , достигнет $\mathbf{r}$ в момент t (см. рис. 7.9). Время $t - t_0$ должно быть равно пройденному расстоянию $|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|$, деленному на c ; $t - t_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|/c$, что

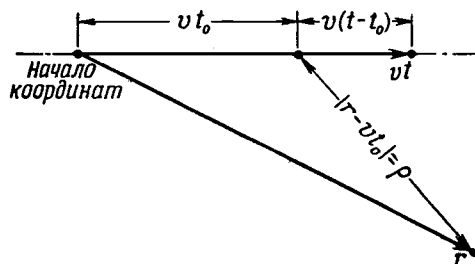


Рис. 7.9. Запаздывающий потенциал подвижного источника.

как раз равносильно $\rho = t$. Таким образом, величина $|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0| = \rho$ равна расстоянию источника от точки наблюдения $\mathbf{r}$ в момент $t - \rho/c$. Время t_0 , называемое *запаздывающим временем*, представляет собой решение уравнения $\rho = t$ и дает момент времени и потому положение источника $\mathbf{v}t_0$ в запаздывающий момент. Интегрируя по ρ , получаем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = q_0 \left[\frac{1}{(1/c)(v^2 t_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) + |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0|} \right]_{\rho=t}.$$

Вводя $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{v}t_0$, имеем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = q_0 \frac{1}{\rho - \mathbf{v} \cdot \rho/c}, \quad (7.3.14)$$

где ρ представляет собой вектор, проведенный в момент $t_0 = t - \rho/c$ из положения источника в точку наблюдения. Это решение другим методом мы получили в гл. 2, где было показано, что множитель $1 - \mathbf{v} \cdot \rho/c$ надо ввести, чтобы принять в расчет движение источника в течение интегрирования, так как этот множитель требуется для нормировки источника (см. стр. 208).

Двумерное решение. Если распределение источника q не зависит от z , получается задача, в которой ψ зависит только от двух пространственных координат — от x и y . «Двумерный точечный источник» для такой задачи представляет собой однородный линейный источник, простирающийся от $z_0 = -\infty$ до $z_0 = +\infty$ вдоль прямой, параллельной оси z и проходящей через (x_0, y_0) . Поэтому функцию Грина для двумерных задач можно найти, интегрируя трехмерный точечный источник от $z_0 = -\infty$ до $z_0 = +\infty$:

$$g(\rho, t | \rho_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\delta((R/c) - (t - t_0))]}{R} dz_0,$$

где $\rho = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ — радиус-вектор в плоскости x, y . Можно ожидать, что g является функцией от $|\rho - \rho_0| = R$ и $t - t_0 = \tau$. В самом деле, последнее

равенство можно переписать в виде

$$g(P, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta[(R/c) - \tau]}{R} d\zeta,$$

где $\zeta = z_0 - z$ и

$$R^2 = \zeta^2 + P^2, \quad d\zeta/dR = R/\zeta.$$

Отсюда

$$g(P, \tau) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\delta[(R/c) - \tau]}{\sqrt{R^2 - P^2}} dR = \frac{2}{\sqrt{c^2\tau^2 - P^2}} \int_0^{\infty} \delta[(R/c) - \tau] dR,$$

или окончательно

$$g(P, \tau) = \begin{cases} \frac{2c}{\sqrt{c^2\tau^2 - P^2}} & \text{для } P < c\tau, \\ 0 & \text{для } P > c\tau. \end{cases} \quad (7.3.15)$$

На соотношении (7.3.15) видно поразительное различие между двумерным и трехмерным случаями. Для трех измерений эффект от импульсного источника по истечении времени τ оказывается сосредоточенным на сфере радиуса $R = c\tau$ с центром в точке источника. Так будет из-за функции $\delta(R/c - \tau)$, участвующей в формуле (7.3.8). Для двух измерений эффект импульсного источника в момент τ распространяется на всю область $P < c\tau$. Конечно, при $P = c\tau$ имеется особенность, но по сравнению с особенностью δ -функции в трехмерном случае она очень слабая. Объяснение этого различия можно легко получить, рассматривая линейный источник для трех измерений. По истечении времени τ эффект каждого точечного источника, которые составляют линейный источник, обнаружится в своей области плоскости xu . Таким образом, мы заключаем, что импульсный линейный источник испускает цилиндрическую волну с возмущением, имеющимся не только на волновой поверхности $P = c\tau$. За этой волновой поверхностью остается «след». Этот след характерен для двумерных задач и не появляется ни в трехмерных, ни, как мы увидим, в одномерных задачах. Это было уже упомянуто на стр. 641.

Одномерные решения. Трехмерное распределение источника, соответствующее функции Грина, зависящей только от $x - x_0$ (не зависящей от $y - y_0$ и $z - z_0$), представляет собой плоский источник, по которому точечные источники (или, что то же, линейные источники) распределены равномерно. Такие функции Грина полезны для задач, в которых нет пространственной зависимости от y и z . Эту функцию можно получить из (7.3.15), интегрируя $g(P, \tau)$ по y_0 при фиксированных x и x_0 . Положим $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$; тогда

$$g(\xi, \tau) = 2c \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{d\eta}{\sqrt{c^2\tau^2 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad \gamma = \sqrt{c^2\tau^2 - \xi^2} \quad \text{для } |\xi| < c\tau, \\ = 0 \quad \text{для } |\xi| > c\tau.$$

Интегрирование по η легко осуществляется и дает $2c\pi$, так что

$$g(\xi, \tau) = 2c\pi \left[1 - u\left(\frac{|\xi|}{c} - \tau\right) \right]^1. \quad (7.3.16)$$

¹⁾ В формуле (7.3.16) $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$ как и на стр. 778.—Прим. ред.

Вновь заметим, что эффект импульсного источника, действующего в момент t_0 в точке x_0 в одномерном случае (или эффект плоского источника, помещенного на плоскости $x = x_0$ в случае трех измерений), не сконцентрирован в точках $|x - x_0| = c(t - t_0)$, а проявляется во всей области протяженностью $2c(t - t_0)$, середина которой находится в $x = x_0$.

Начальные условия. Чтобы лучше понять различные выражения (7.3.8), (7.3.15) и (7.3.16), рассмотрим начальную задачу. Допустим, что начальная скорость v_0 и начальное смещение ϕ_0 известны в каждой точке пространства; каковы скорость и смещение в момент t , если считать, что источники отсутствуют, т. е. $q = 0$? Решение этой задачи можно получить из (7.3.5):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \left\{ g_{t_0=0} v_0(\mathbf{r}_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} \phi_0(\mathbf{r}_0) \right\} dV_0. \quad (7.3.17)$$

Интегрирование распространяется по всему пространству [мы приняли также, что поверхностный интеграл в (7.3.5) исчезает на бесконечности].

Рассмотрим сначала одномерный случай, где можно просто подсчитать (7.3.17) и непосредственно истолковать результат. Для одного измерения выражение (7.3.17) принимает вид

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \left\{ g_{t_0=0} v_0(x_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} \phi_0(x_0) \right\} dx_0,$$

где g дается формулой (7.3.16). Функции $g_{t_0=0}$ и $(\partial g / \partial t_0)_{t_0=0}$ имеют значения $2c\pi[1 - u(|\xi|/c - t)]$ и $-2c\pi\delta(|\xi|/c - t)$ соответственно, где $|\xi| = |x - x_0|$. Нетрудно выполнить интегрирование и получить

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(x_0) dx_0 + \phi_0(x+ct) + \phi_0(x-ct) \right\}. \quad (7.3.18)$$

Это общеизвестное решение Даламбера одномерной начальной задачи [см. формулу (11.1.58)]. Его можно также получить непосредственно из дифференциального уравнения (см. стр. 639).

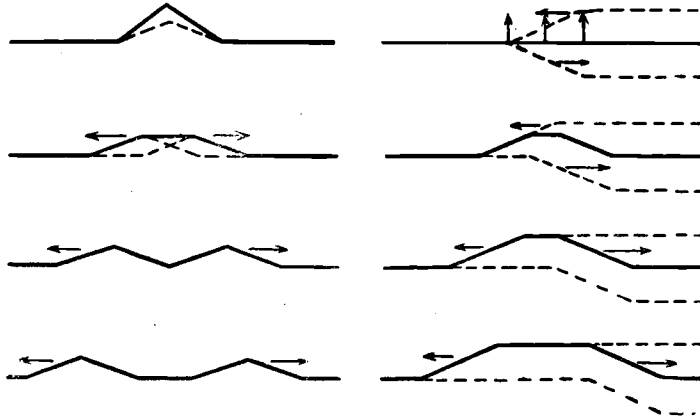


Рис. 7.10. Слева показано движение струны, которую оттянули и отпустили (т. е. в начальный момент дано лишь смещение). Справа показано движение струны после удара (т. е. в начальный момент ей лишь сообщили скорость).

Сплошные линии изображают струну в последовательные моменты, а пунктирные — вид двух «частичных волн» (идущих в противоположных направлениях), сумма которых дает форму струны.

Из формулы (7.3.18) мы видим, что если для среды, скажем для струны, дано начальное смещение без скорости, то начальное отклонение разбивается

на две одинаковые волны, из которых одна идет в положительном направлении оси x , а другая — в отрицательном. Сумма обеих волн при $t=0$ дает начальное смещение ψ_0 . В течение некоторого времени, когда они частично перекрываются, вид составного отклонения будет довольно сложным, пока они в конце концов не разделятся. Это показано на рис. 7.10 слева. Заметим, что позади каждой волны не остается следа. В двумерных задачах, как мы увидим, такой след возникает.

Начальная задача для двух измерений решается формулой (7.3.17). Здесь удобно поместить начало координат в точку наблюдения. Тогда

$$\psi(0, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \left\{ g_{t_0=0} v_0(\rho_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} \psi_0(\rho_0) \right\} dS_0,$$

где g выражается формулой (7.3.15). Отсюда, вводя полярные координаты и замечая, что $\partial g / \partial t_0 = -\partial g / \partial t$, получаем

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi c} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{ct} \rho_0 \frac{v_0(\rho_0)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho_0^2}} d\rho_0 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{ct} \rho_0 \frac{\psi_0(\rho_0)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho_0^2}} d\rho_0 \right] \right\}. \quad (7.3.19)$$

Эта формула показывает, что значение ψ в точке зависит от исходных значений $\partial\psi/\partial t$ и ψ внутри круга радиуса ct с центром в точке наблюдения.

Как и при исследовании одномерного случая, рассмотрим начальное условие $v_0=0$. Кроме того, пусть $\psi_0(\rho_0) = \delta(\rho_0 - \rho)$, т. е. начальное движение имеет вид импульса в точке ρ . Тогда

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{ct} \rho_0 \frac{\delta(\rho_0 - \rho)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho_0^2}} d\rho_0 \right] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right], & \text{если } \rho < ct, \\ 0, & \text{если } \rho > ct. \end{cases}$$

Этот результат можно записать в виде

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u(ct - \rho)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right] = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{ct u(ct - \rho)}{(c^2 t^2 - \rho^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\}.$$

Таким образом, до момента, когда $ct = \rho$, в начале координат нет никакого эффекта. В этот момент в начало координат приходит возмущение в виде импульса (второй член последнего выражения). Однако за этим возмущением остается след, описываемый первым членом, который при $ct \gg \rho$ убывает со временем как $1/c^2 t^2$. Сопоставим это с результатами, полученными для аналогичного импульсного возмущения в x_0 в одномерном случае. Там сигнал достигал точки x в момент $|x - x_0|/c$. Он был точной копией исходного сигнала, за исключением уменьшения амплитуды в два раза; следа не было. Это различие между одномерным и двумерным случаями показано на рис. 7.11.

Наличие следа характерно для распространения в однородной среде в двумерном случае. Для трех измерений, как и для одного, форма возмущения, вызванного импульсом, остается неизменной при распространении от его исходного положения. Это непосредственно видно из формулы (7.3.8) для функции Грина в случае трех измерений. Наличие δ -функции предотвращает создание следа. Этим не обязательно гарантируется неизменность вида возмущения. В одномерных задачах сохраняется вид возмущения, которое создается начальным *смещением* (с нулевой скоростью). Для трех измерений верно обратное. Сохраняется вид возмущения, для которого начальное смещение равно нулю, но задана начальная *скорость*.

Это можно показать при помощи вывода формулы, аналогичной (7.3.19) и (7.3.18). Вводя трехмерную функцию Грина в (7.3.17) и беря начало

координат в качестве точки наблюдения, имеем

$$\psi(0, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int d\Omega_0 \int \left[r_0 \delta\left(\frac{r_0}{c} - t\right) v_0(\mathbf{r}_0) - r_0 \delta'\left(\frac{r_0}{c} - t\right) \psi_0(\mathbf{r}_0) \right] dr_0,$$

где $d\Omega_0$ — элемент телесного угла на сфере в «нулевых» координатах (т. е. $\sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0$). Непосредственно ясно, что эффект, получающийся в точке наблюдения в момент t , определяется условиями, имевшими вначале место

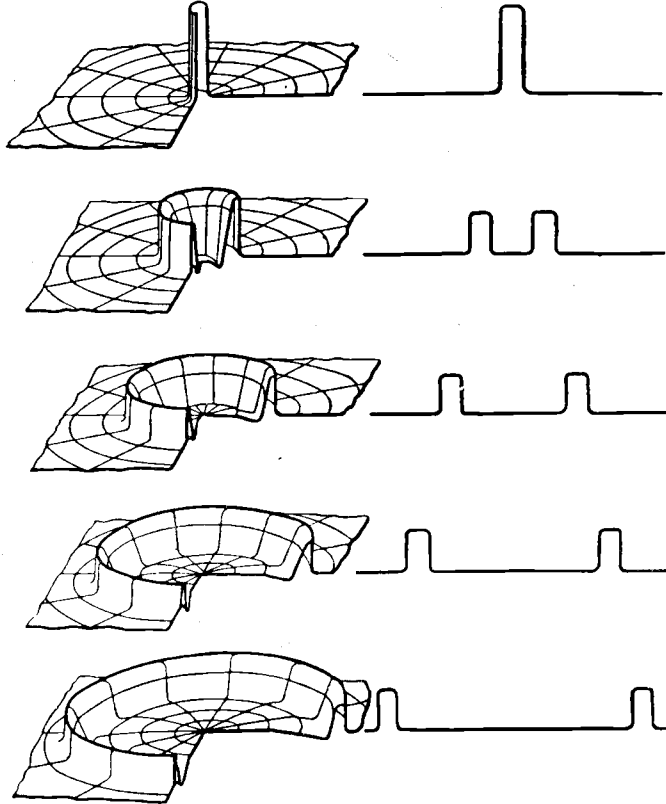


Рис. 7.11' Поведение струны и поведение мембраны. Верхние рисунки показывают начальные очертания, а нижние — картину в последующие моменты. Четвертая часть мембраны вырезана, чтобы показать ее форму, со «следом» позади переднего крутого фронта волны.

на поверхности сферы радиуса ct с центром в точке наблюдения. Теперь можно выполнить интегрирование по r_0 . Нам нужно явно записать зависимость ψ_0 и v_0 от координат θ_0, φ_0 на поверхности сферы, например, $\psi_0(\mathbf{r}_0) = \psi_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Первый интеграл вычисляем, пользуясь свойствами δ -функции. Получаем $c^2 t v_0(ct, \theta_0, \varphi_0)$.

Чтобы подсчитать второй член, можно проинтегрировать по частям или воспользоваться свойством производной δ' (см. стр. 775)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta'(x' - x) dx' = -f'(x).$$

Поэтому второй член равен $-c^2 \{\partial [t \psi_0(ct, \theta_0, \varphi_0)] / \partial t\}$. Объединяя эти ре-

зультаты, получаем окончательно

$$\psi(0, t) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_0 \left\{ t v_0(ct, \theta_0, \varphi_0) + \frac{\partial}{\partial t} [t \psi_0(ct, \theta_0, \varphi_0)] \right\}. \quad (7.3.20)$$

Непосредственная зависимость ψ от v_0 и появление производной, действующей на ψ_0 , находятся в соответствии с нашими предварительными замечаниями. Формула (7.3.20) известна как *решение Пуассона*.

Принцип Гюйгенса. Функцию Грина для бесконечной области можно также применить для получения математического выражения принципа Гюйгенса. С элементарной точки зрения принцип Гюйгенса постулирует, что каждая точка фронта волны ведет себя как точечный источник, испускающий сферическую волну, которая распространяется со скоростью c . Поэтому поле в данной точке через некоторое время равно сумме полей от каждого из этих точечных источников; огибающая этих волн для всех точек представляет собой фронт волны в это время.

Для вывода этого принципа обратимся к общему уравнению (7.3.5) и рассмотрим случай, когда источников нет (т. е. $q=0$ внутри поверхности S) и, кроме того, начальные значения ψ и $\partial\psi/\partial t$ равны нулю. Мы видим, что объемный интеграл в формуле (7.3.5), включающий начальное условие, равен нулю, так что в левой части остается только

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^*} dt_0 \oint dS_0 \cdot \left\{ \left[\frac{\partial(t_0 - t + R/c)}{R} \right] \text{grad}_0 \psi - \psi \text{grad}_0 \left[\frac{\partial(t_0 - t + R/c)}{R} \right] \right\},$$

где мы подставили (7.3.8) в левую часть (7.3.5). Проинтегрировать по t_0 первый член не слишком трудно:

$$\int_0^{t^*} \frac{1}{R} \partial \left(t_0 - t + \frac{R}{c} \right) \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0, t_0) dt_0 = \frac{1}{R} \text{grad}_0 \psi \left(\mathbf{r}_0, t - \frac{R}{c} \right).$$

Второй член проинтегрировать не намного труднее, если следить за нашими ∂ и ∂' . Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} \psi \text{grad}_0 \left[\frac{\partial(t_0 - t + R/c)}{R} \right] dt_0 &= \\ &= \int_0^{t^*} \psi \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\partial(t_0 - t + R/c)}{R} \right] \text{grad}_0 R dt_0 = \\ &= \int_0^{t^*} \psi(\mathbf{r}_0, t_0) (R/R^3) \left[-\partial \left(t_0 - t + \frac{R}{c} \right) + \frac{R}{c} \partial' \left(t_0 - t + \frac{R}{c} \right) \right] dt_0 = \\ &= -\frac{R}{R^3} \left\{ \psi \left(\mathbf{r}_0, t - \frac{R}{c} \right) + \frac{R}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t_0} \psi(\mathbf{r}_0, t_0) \right]_{t_0=t-(R/c)} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция ψ в точке $\mathbf{r}$ в момент t внутри S , где нет источников, имеющая внутри S нулевые начальные значения, целиком определяется интегралом от поверхностных значений на S :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint dS_0 \cdot \left[\frac{1}{R} \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0, t_0) + \frac{R}{R^3} \psi(\mathbf{r}_0, t_0) - \right. \\ \left. - \frac{R}{cR^2} \frac{\partial}{\partial t_0} \psi(\mathbf{r}_0, t_0) \right]_{t_0=t-(R/c)}. \quad (7.3.21) \end{aligned}$$

Если теперь часть поверхности S_0 расположена вдоль фронта волны, а остальная часть — на бесконечности или там, где ψ равно нулю, то мож-

но сказать, что значения поля ψ в $(\mathbf{r}, t)$ определяются полем ψ в точках фронта волны в более ранний момент $t - R/c$. С другой точки зрения, действие фронта волны в точках перед ним в более позднее время эквивалентно действию распределенных по поверхности волнового фронта источников: во-первых, действию простого поверхностного слоя источников, пропорционального составляющей градиента ψ по нормали к фронту волны; во-вторых, действию двойного слоя, пропорционального самой ψ , и, наконец, действию любопытного простого слоя, пропорционального скорости изменения ψ во времени на поверхности. Это последнее действие наиболее сильно проявляется прямо впереди поверхности, но ослабевает пропорционально косинусу угла между нормалью к поверхности и направлением распространения (т. е. направлением $\mathbf{R}$).

В большинстве случаев (за исключением простых и тривиальных) точные значения ψ , $\text{grad } \psi$ и $\partial\psi/\partial t$ вдоль всего фронта волны точно не известны. Но во многих интересных случаях эти величины приближенно известны, так что формулу (7.3.24) можно применять для приближенного подсчета значений ψ в более позднее время. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в § 11.4.

Границы в конечной части пространства. Теперь обратимся к эффекту, получающемуся при введении границы, на которой функция Грина должна удовлетворять заданным граничным условиям. Техника, которая может здесь служить, вполне подобна той, которая была рассмотрена в предшествующем § 7.2 для стационарного случая. Как и в том случае, имеются два метода: метод изображений и метод собственных функций. Исследуем сначала метод изображений, причем воспользуемся знанием функции Грина для бесконечной области. Единственная особенность, естественно, имеется в точке источника в момент его действия, так что вообще

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta[t_0 - t - (R/c)]}{R} + F(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0),$$

где F — решение однородного волнового уравнения, свободное от особенностей в рассматриваемой области.

Здесь полезен простой пример. На рис. 7.12 источник находится в Q ; он действует в момент t_0 . Бесконечная жесткая плоскость расположена при $x=0$. Чтобы удовлетворить граничным условиям на плоскости, мы добавляем отраженное импульсное возмущение, возникающее в изображении I точки Q в тот же момент t_0 . Чтобы получить требуемое обращение в нуль нормальной производной при $x=0$, эффекты этих импульсных возмущений надо сложить, так что

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta(t_0 - t + R/c)}{R} + \frac{\delta(t_0 - t + R'/c)}{R'}.$$

Легко проверить, что $(\partial G/\partial x)_{x=0}$ равно нулю для всех t . Эффект второго члена состоит в том, что он дает отражение от плоскости $x=0$ в соответствующее время. Это — единственное отражение, и потому требуется только один дополнительный член к функции Грина для бесконечной области. Заметим, что в случае волнового уравнения необходимо задавать не только положение изображения источника, но также и момент t' , в который возникает отраженный импульс. К счастью, в большинстве задач это решается просто, а именно, все отраженные импульсы возникают в тот же момент t' ,

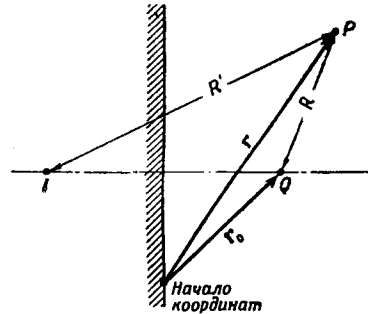


Рис. 7.12. Образ I импульсного источника волны в Q .

что и исходный импульс. Для достаточно регулярных геометрий возможно пользоваться методом изображений почти так же, как и для случая уравнения Гельмгольца.

Разложение по собственным функциям. Мы применяем функцию Грина для уравнения Гельмгольца. Выражение $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)e^{-i\omega t}$ представляет собой решение волнового уравнения с простым гармоническим точечным источником, расположенным в $\mathbf{r}_0$. При $\omega = kc$ имеем

$$\nabla^2 [G_k e^{-i\omega(t-t_0)}] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [G_k e^{-i\omega(t-t_0)}] = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) e^{-i\omega(t-t_0)}.$$

При помощи соответствующего наложения этих простых гармонических решений можно получить функцию Грина для импульсного источника в точке пространства, соответствующего уравнению (7.3.2). Для этой цели мы воспользуемся интегральным представлением δ -функции:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega.$$

На основании линейности надо ожидать, что функция Грина для импульсного источника связана с решением уравнения Гельмгольца соотношением

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega, \quad (7.3.22)$$

где $\omega = kc$ и $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) = G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$. Это соотношение будет более тщательно выведено в § 11.1. Простота формулы (7.3.22) обманчива. Следует вспомнить, что для конечных областей функция G_k имеет особенности всякий раз, когда $k = k_n$, где k_n — собственное значение скалярного уравнения Гельмгольца для решения ψ_n , удовлетворяющего тем же граничным условиям, что и G_k . Более определенно, если функции ψ_n нормированы, то в силу (7.2.39)

$$G_k = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r})}{k_n^2 - k^2}.$$

Поэтому интегрирование в (7.3.22) нельзя производить вдоль вещественной оси ω (или k), а надо эти особенности некоторым способом обойти. *Выбор контура диктует* рассмотренный выше *принцип причинности*. Чтобы это увидеть, внесем разложение для G_k в интеграл (7.3.22):

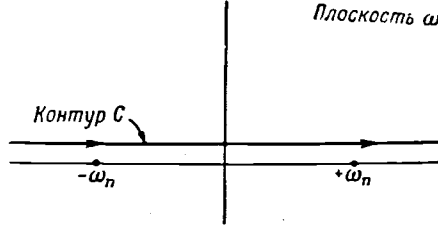
$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 2c^2 \sum_n \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t_0)}}{\omega_n^2 - \omega^2} d\omega, \quad \omega_n = ck_n.$$

Контур надо выбрать так, чтобы $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0$ для $t < t_0$. Соответствующий контур показан на рис. 7.13. Он параллелен вещественной оси и проходит непосредственно *над* ней. Если $t > t_0$, то контур можно замкнуть в нижней полуплоскости полуокружностью большого ($\rightarrow \infty$) радиуса без изменения значения интеграла. Теперь можно воспользоваться интегральной формулой Коши (4.2.9), что даст $(2\pi/\omega_n) \sin \omega_n(t - t_0)$. Если $t < t_0$, контур можно замкнуть полуокружностью в верхней полуплоскости. Так как в верхней полуплоскости нет особых точек, то значение интеграла для $t < t_0$ равно нулю. Отсюда

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 4\pi c^2 \sum_n \frac{\sin[\omega_n(t-t_0)]}{\omega_n} u(t-t_0) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}), \quad (7.3.23)$$

где $u(t - t_0)$ — единичная функция, равная нулю при $t < t_0$ и единице при $t > t_0$.

Воспользовавшись формулой (7.3.23), можно теперь явно подсчитать решение задачи с начальными и граничными значениями, данное в форму-



Р и с. 7.13. Контур для интеграла (7.3.22).

ле (7.3.5). Рассмотрим каждый член формулы (7.3.5) в отдельности. Первый член ψ_1 дает эффект источников, распределенных по всему объему:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \int_0^{t^*} dt_0 \int G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) q(\mathbf{r}_0, t_0) dV_0 = \\ &= 4\pi c^2 \sum_n \frac{1}{\omega_n} \int_0^{t^*} dt_0 \int \sin[\omega_n(t - t_0)] \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}_0, t_0) dV_0.\end{aligned}$$

Пусть

$$\varphi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t}.$$

Тогда

$$\psi_1 = -4\pi c^2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_n \frac{\varphi_n(\mathbf{r}, t)}{\omega_n} \int_0^{t^*} dt_0 \int q(\mathbf{r}_0, t_0) \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0, t_0) dV_0 \right\}. \quad (7.3.24)$$

Мы видим, что амплитуда возбуждения n -й гармоникой пропорциональна кратному интегралу в (7.3.24). Возбуждаемая амплитуда велика, если пространственная зависимость q очень близка к φ_n , а временная зависимость — к $e^{-i\omega_n t}$, как и следовало ожидать. В случае точного резонанса $q \simeq e^{-i\omega_n t}$ замечаем, что ψ_1 линейно возрастает со временем и более не колеблется.

Второй член формулы (7.3.5) дает эффект источников, распределенных на границе. Результаты до некоторой степени подобны тем, которые получены из первого члена. Третий член включает удовлетворение начальным условиям. В дальнейшем нам понадобятся $G_{t_0=0}$ и $(\partial G / \partial t_0)_{t_0=0}$:

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, 0) = 4\pi c^2 \sum_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} u(t) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}_0), \quad (7.3.25)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_0} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \right]_{t_0=0} = -4\pi c^2 \sum_n \cos(\omega_n t) u(t) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}_0), \quad (7.3.26)$$

где мы подставили $[\sin(\omega_n t) / \omega_n] \delta(t) = 0$. Третий член в (7.3.5) приобретает вид

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \sum_n \left\{ \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} u(t) \psi_n(\mathbf{r}) \int \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) v_0(\mathbf{r}_0) dV_0 + \right. \\ &\quad \left. + \cos \omega_n t \psi_n(\mathbf{r}) \int \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}_0) dV_0 \right\}. \quad (7.3.27)\end{aligned}$$

Можно непосредственно проверить, что $\phi_3(t=0)$ как раз равно ϕ_0 , а $(\partial\phi_3/\partial t)_{t=0} = v_0$, как и требуется. Это также показывает, что мы могли бы получить формулу (7.3.27) прямо, не используя функцию Грина. С другой стороны, этим подтверждается законность основной формулы (7.3.5) для случая конечных областей.

Нестационарные малые колебания круглой мембраны. В этом месте будет полезен пример, показывающий характер результатов, полученных для задач, содержащих зависимость от времени. Пусть для круглой мембраны радиуса a с натяжением T и массой σ на единицу площади дано начальное смещение малого участка вокруг ее центра. Края мембраны закреплены, так что граничные условия имеют вид $\psi(r)=0$ при $r=a$. Мы представим начальные условия при помощи δ -функции:

$$\phi_0(r) = A\delta(r), \quad v_0(r) = 0. \quad (7.3.28)$$

Здесь A — постоянная. Вводя (7.3.28) в (7.3.27), получим решение начальной задачи

$$\psi(r, t) = A \sum_n \cos \omega_n t \cdot \psi_n(r) \bar{\psi}_n(0). \quad (7.3.29)$$

Для перехода к дальнейшему необходимо получить собственные функции $\psi_n(r)$. Это будет очень подробно рассмотрено в § 11.2. Сейчас заметим, что уравнение Гельмгольца в полярных координатах (r, φ) разделяется и что общее решение, конечное и однозначное для $r < a$, является суммой членов $e^{\pm im\varphi} J_m(kr)$, где J_m — функция Бесселя первого рода порядка m (m — целое число).

Теперь необходимо ввести граничные условия при $r=a$. Это приводит к уравнению, определяющему k :

$$J_m(ka) = 0. \quad (7.3.30)$$

Обозначим значения k , удовлетворяющие этому уравнению, через k_{mp} , где индекс m указывает порядок функции Бесселя, а буква p — номер корня уравнения (7.3.30). Для целей этого примера достаточно воспользоваться асимптотическим видом $J_m(ka)$ (5.3.68):

$$J_m(ka) \underset{ka \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \cos \left[ka - \frac{2m+1}{4} \pi \right].$$

Таким образом, $J_m(ka)$ равно нулю, когда аргумент косинуса равен нечетному числу, умноженному на $\pi/2$:

$$k_{mp} a \simeq \frac{1}{4} (2m+1) \pi + \frac{1}{2} (2p+1) \pi, \quad p \text{ — целое.}$$

Теперь можно вернуться к выражению (7.3.29), дающему решение при начальном смещении импульсного вида при $r=0$, $t=0$. Таким образом, функции ψ_n равны

$$\psi_n = N_{mp} J_m(k_{mp} r) e^{\pm im\varphi},$$

где каждому n мы поставили в соответствие определенную пару целых чисел (m, p) и определенный знак в показателе. Множитель N_{mp} выбран так, что

$$\int \bar{\psi}_n \psi_n dA = 1,$$

где областью интегрирования служит мембрана. Для (7.3.29) требуется $J_m(0)$. Так как $J_m(z) = O(z^m)$, то мы видим, что $J_m(0) = \delta_{0m}$ [см. формулу (5.3.63)]. Поэтому сумма (7.3.29) приводится к сумме по функциям Бесселя

нулевого порядка. Отсутствие угловой зависимости неудивительно, если принять во внимание круговую симметрию начального смещения (7.3.28). Результирующее отклонение в последующий момент t в положении r дается формулой

$$\psi(r, t) = A \sum_p \cos(k_{0p} ct) N_{0p}^2 J_0(k_{0p} r). \quad (7.3.31)$$

Формула (7.3.31) точная. Заметим, что система функций $N_{0p} \cos(k_{0p} ct) \times J_0(k_{0p} r)$ описывает свободные радиальные колебания мембраны. В общем случае результат воздействия начального смещения можно выразить в виде наложения свободных колебаний, причем каждое из них происходит со своей собственной частотой. Другим будет результат постоянного действия на мембрану силы данной частоты. В последнем случае вынужденное колебание мембраны будет иметь ту же частоту, что и действующая сила, а пространственная зависимость будет представлять суперпозицию функций $\psi_n(r)$, каждая из которых выражает колебание с частотой действующей силы.

Рассмотрим результат воздействия в самой начальной точке $r = 0$. Формула (7.3.31) принимает вид

$$\psi(0, t) = A \sum_p \cos(k_{0p} ct) \cdot N_{0p}^2.$$

Введем приближенное значение нулей:

$$\psi(0, t) \simeq A \sum_p \cos\left(\frac{2p+3}{4} \cdot \frac{\pi ct}{a}\right) N_{0p}^2. \quad (7.3.32)$$

Когда смещение вновь сосредоточится в $r = 0$? На первый взгляд может показаться, что это произойдет при $t = 2a/c$, т. е. после того как передний фронт смещения дойдет до края мембраны и вернется обратно в центр. Однако это не так. Как можно видеть из асимптотического поведения функции

$$J_0(z) \simeq \sqrt{2/\pi z} \cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right),$$

при прохождении от области $r \simeq 0$ до $r \simeq a$ появляется изменение фазы на $\pi/4$. Это характерно для распространения в двух измерениях. Ни для одного, ни для трех измерений не получается такого изменения фазы.

Из-за этого изменения фазы передний фронт возмущения должен сделать два перехода от центра до края, чтобы получилось окончательное изменение фазы на π и смещение вновь сосредоточилось в точке $r = 0$. Поэтому можно ожидать, что толчок воссоздается при $r = 0$, когда $ct = 4a$. В этом легко убедиться при помощи подстановки в (7.3.32), так как

$$\psi(0, 4a/c) \simeq -A \sum_p N_{0p}^2.$$

[Начальный толчок $\psi(0, 0)$ равен $A \sum N_{0p}^2$.] Нам хотелось бы подчеркнуть, что это явление имеет место только в двумерном случае; в случае одного или трех измерений его не будет. Толчок в центре сферы радиуса a воссоздается в центре в момент $t = 2a/c$.

Имеется еще один, последний момент, также показывающий удивительную разницу в распространении волн для двух измерений в сравнении с одним или тремя. В последнем случае начальное смещение в соответствующее время точно воссоздается. Для двух измерений это не так, потому что при продвижении волны остается след. Это можно видеть в настоящем примере следующим образом. Выражение (7.3.32) приближенное, так как применялись приближенные значения корней функции Бесселя J_0 . Если воспользо-

зоваться точными значениями корней, то оказывается, что не существует значений ct , для которых фаза $k_{0p} ct$ точно одна и та же для всех p . Другими словами, не было бы значений ct , для которых повторились бы первоначальные соотношения фаз между всеми свободными колебаниями, возбужденными начальным смещением. Таким образом, свободные колебания никогда не будут интерферировать настолько, чтобы точно воссоздать начальную ситуацию.

В качестве другого примера построения функции Грина для скалярного волнового уравнения выведем выражение (7.3.8) функции Грина для бесконечного пространства при помощи непосредственного применения метода наложения. В этом случае

$$G_R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = e^{ikR}/R, \quad k = \omega/c,$$

так что

$$g(R, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kR - \omega\tau)} d\omega = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[(R/c) - \tau]} d\omega.$$

Следует заметить, что мы сознательно выбрали знак между величинами kR и $\omega\tau$ таким, чтобы $e^{i(kR - \omega\tau)}/R$ изображало волну, *расходящуюся* из источника с течением времени, т. е. с возрастанием τ . Этим способом мы удовлетворяем принципу причинности. Теперь воспользуемся интегральным представлением δ -функции [см. формулу, предшествующую (7.3.32)] и получим

$$g(R, \tau) = \delta[(R/c) - \tau]/R.$$

Уравнение Клейна—Гордона. Функция Грина для зависящего от времени уравнения Клейна—Гордона удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \kappa^2 G = -4\pi \delta(t - t_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (7.3.33)$$

Легко убедиться, что функцией Грина для уравнения Клейна—Гордона можно пользоваться почти так же, как функцией Грина для скалярного волнового уравнения. Например, условие взаимности (7.3.3) и общее решение (7.3.5) имеют место также и здесь. Однако имеются важные физические различия между обеими функциями. Это легче всего показать, рассматривая клейн-гордонову функцию Грина для бесконечной области, т. е. получив аналог функции (7.3.8). Функцию $g(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)$ можно получить путем наложения решений с простой гармонической зависимостью от времени $e^{-i\omega(t-t_0)}$, вместо того чтобы решать уравнение с правой частью, имеющей импульсную зависимость $\delta(t-t_0)$ от времени. Необходимое наложение дается формулой (7.3.22). Частные решения имеют вид $g(R|\sqrt{\omega^2 - c^2\kappa^2})$ и удовлетворяют уравнению

$$[\nabla^2 + (\omega/c)^2 - \kappa^2] g[R|\sqrt{\omega^2 - (c\kappa)^2}] = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Решение этого уравнения есть

$$g = \frac{\exp[i\sqrt{\omega^2/c^2 - \kappa^2} R]}{R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|. \quad (7.3.34)$$

В пределе при $\omega/c \gg \kappa$ формула (7.3.34) принимает вид $g = e^{i(\omega/c)R}/R$, как и должно быть. Для противоположного случая $\omega/c \ll \kappa$

$$g \underset{\omega/c \ll \kappa}{\simeq} e^{-\kappa R}/R,$$

что дает характерную «затухающую» пространственную зависимость. Это, конечно, не связано с какой-либо диссипацией. Из одномерной механичес-

кой аналогии (гл. 2, стр. 137 и далее) со струной, погруженной в упругую среду, мы видим, что это получается как следствие жесткости среды.

Воспользовавшись (7.3.22), можно теперь написать в качестве решения (7.3.33), пригодного для бесконечной среды,

$$g(r, t | r_0, t_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i [V(\omega/c)^2 - \kappa^2 R - \omega\tau] d\omega, \quad (7.3.35)$$

где $\tau = t - t_0$. Функция g является функцией только от R и τ , как и ожидалось. Теперь надо задать путь интегрирования. До этого удобно для изучения вопросов сходимости ввести такую функцию $h(R, \tau)$, что

$$\partial h(R, \tau) / \partial R = R g(r, t | r_0, t_0). \quad (7.3.36)$$

Отсюда

$$h(R, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp i [V(\omega/c)^2 - \kappa^2 R - \omega\tau]}{V(\omega/c)^2 - \kappa^2} d\omega. \quad (7.3.37)$$

Подынтегральная функция имеет точки ветвления $\omega = \pm c\kappa$. Расположение пути интегрирования относительно этих точек ветвления определяется условием причинности. Выберем путь и линию ветвления, как показано

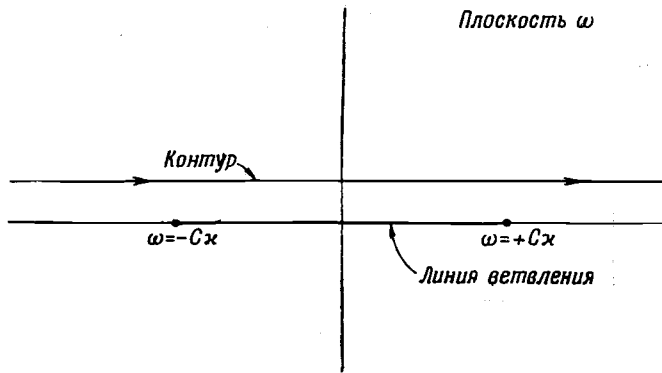


Рис. 7.14. Контур для интеграла (7.3.37) при $R > c\tau$.

на рис. 7.14. Заметим сначала, что $h = 0$, если $R > c\tau$, как требует для этого случая принцип причинности. В пределе для большого ω показатель экспоненты в (7.3.37) приближается к $i\omega[(R/c) - \tau] = i\omega|(R/c) - \tau|$. Поэтому путь интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости ω без изменения значения интеграла. Так как подынтегральная функция не имеет особенностей в верхней полуплоскости, то интеграл равен нулю.

Рассмотрим теперь h для $R < c\tau$. Тогда контур деформируется так, как показано на рис. 7.15. Его можно теперь привести к более известному виду. Введем новую переменную θ так, что

$$\tau = |V\tau^2 - (R/c)^2| \operatorname{ch} \theta,$$

и положим $\omega = c\kappa \operatorname{ch} x$. Тогда

$$h(R, \tau) = \frac{c}{2\pi i} \int_{\infty + \frac{3}{2}\pi i}^{\infty - \frac{1}{2}\pi i} \exp [-i\kappa c |V\tau^2 - (R/c)^2| \operatorname{ch}(x - \theta)] dx.$$

Наконец, положим $x - \theta = i\xi$; тогда

$$h(R, \tau) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi - i\infty}^{+\frac{3}{2}\pi - i\infty} \exp[-i\kappa c |V\tau^2 - (R/c)^2| \cos \xi] d\xi.$$

Это — как раз интегральное представление функции Бесселя нулевого порядка [см. формулу (5.3.65)], так что

$$h(R, \tau) = -cJ_0[\kappa c \sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}], \quad R < c\tau.$$

Комбинируя это с выражением для $c\tau < R$, окончательно получаем:

$$h(R, \tau) = -cJ_0[\kappa c \sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}] u[\tau - (R/c)].$$

Поэтому функция Грина равна

$$g(R, \tau) = \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial R} = \frac{\delta[\tau - (R/c)]}{R} J_0[\kappa c \sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}] - \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}} J_1[\kappa c \sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}] u[\tau - (R/c)],$$

или

$$g(R, \tau) = \frac{\delta[\tau - (R/c)]}{R} - \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}} J_1[\kappa c \sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}] u[\tau - (R/c)]. \quad (7.3.38)$$

Мы замечаем, что $g(R, \tau)$ в пределе при $\kappa \rightarrow 0$ приводится к функции Грина для скалярного волнового уравнения (7.3.8), как это и должно быть.

Если мы будем наблюдать возмущение на расстоянии R от импульсного источника через время τ после его действия, то найдем, что при $R > c\tau$ возмущение отсутствует, т. е. волна, порожденная импульсным источником, не имела достаточно времени, чтобы достичь точки наблюдения R . При $R = c\tau$ приходит импульс от начального возмущения, уменьшенный по амплитуде, как это и должно быть, в $1/R$ раз. За ним остается след, который выражается вторым членом формулы (7.3.38). Этот след для больших значений

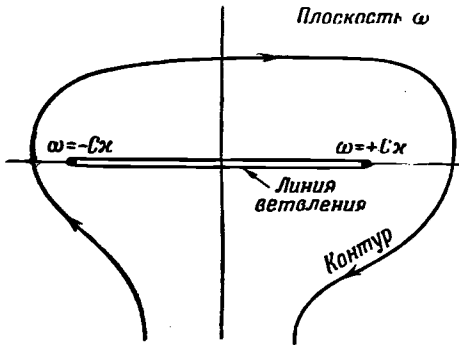


Рис. 7.15. Контур для интеграла (7.3.37) при $R < c\tau$.

времени убывает по амплитуде из-за множителя $[\tau^2 - (R/c)^2]^{-3/4}$. Нетрудно объяснить это явление, если заметить, что фазовая скорость плоской волны, удовлетворяющей уравнению Клейна — Гордона, является функцией от ω :

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega/c)^2 - \kappa^2}}, \quad \text{или} \quad \frac{v}{c} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - (\kappa c)^2}}.$$

Так как возмущение от импульсного источника составлено из гармонических возмущений различных частот, то не удивительно, что соответствующие этим гармоническим возмущениям плоские волны достигают точки наблюдения, имея относительные фазы, отличные от тех, которые они имели в начале. Равносильное описание можно получить, рассматривая пример из механики для уравнения Клейна — Гордона, данный в § 2.1.

7.4. Функция Грина для уравнения диффузии

Уравнение диффузии во многих аспектах качественно отличается от скалярного волнового уравнения, и, конечно, на функциях Грина эти различия будут проявляться. Наиболее важной характерной особенностью является асимметрия уравнения диффузии относительно временной переменной. Если, например, $\psi(\mathbf{r}, t)$ — решение скалярного волнового уравнения, то и $\psi(\mathbf{r}, -t)$ будет решением. Однако если $\psi(\mathbf{r}, t)$ — решение уравнения диффузии

$$\nabla^2 \psi = a^2 \partial \psi / \partial t, \quad (7.4.1)$$

то функция $\psi(\mathbf{r}, -t)$ уже не будет его решением; она будет решением совсем другого уравнения

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, -t) = -a^2 \partial \psi / \partial t.$$

Таким образом, уравнение приносит вместе с собой направленность во времени, т. е. оно различает прошедшее и будущее. Скалярное волновое уравнение и вообще все уравнения, приложимые к микроскопическим (например, атомным) явлениям, симметричны во времени. Направленность во времени уравнения диффузии является следствием того, что поле, в котором происходит диффузия, изображает поведение некоторого среднего свойства совокупности многих частиц. Как можно вывести из теорем термодинамики, неправильности таких средних, которые первоначально могли существовать, с течением времени сглаживаются. Обращаясь в будущее, мы видим, что энтропия возрастает; обращаясь в прошлое, видим, что энтропия была меньше.

Причинность и взаимность. Как и в случае скалярного волнового уравнения, можно решать различные неоднородные задачи и начальную задачу для уравнения диффузии при помощи функции Грина, которая удовлетворяет однородным граничным условиям и условию причинности:

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad \text{если } t < t_0. \quad (7.4.2)$$

Уравнение, которому удовлетворяет G , содержит импульсный точечный источник:

$$\nabla^2 G - a^2 \partial G / \partial t = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (7.4.3)$$

Чтобы истолковать (7.4.3), будем считать G температурой среды. Тогда импульсный точечный источник означает введение единичного количества тепла в $\mathbf{r}_0$ в момент t_0 . При этом функция G дает температуру в дальнейшие моменты для любой другой точки среды и потому описывает распространение тепла от его исходного распределения.

Функция G удовлетворяет условию взаимности, в котором, как и для скалярного волнового уравнения, время надо обратить, так как причинность требует выполнения соотношения (7.4.2). Мы покажем, что

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t). \quad (7.4.4)$$

Функция $G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t)$ дает эффект в $\mathbf{r}_0$ в момент $-t_0$ от источника тепла, помещенного в среду в точке $\mathbf{r}$ в момент $-t$. Так как $t_0 < t$, то последовательность моментов расположена в требуемом порядке. Другое истолкование можно получить, рассматривая сопряженную функцию

$\tilde{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, определенную соотношением

$$G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_0, -t_0) = \tilde{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0). \quad (7.4.5)$$

Функция $\tilde{G}$ удовлетворяет уравнению с обращенным временем

$$\nabla^2 \tilde{G} + a^2 \partial \tilde{G} / \partial t = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0).$$

Условие (7.4.2) заменяется на $\tilde{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0$ при $t > t_0$. Другими словами, $\tilde{G}$ дает развитие обратно во времени источника, помещенного в $\mathbf{r}_0$ в момент t_0 . Условие взаимности теперь записывается так:

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \tilde{G}(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{r}, t). \quad (7.4.6)$$

Функция G описывает развитие при возрастании времени, приводящее от исходного источника к конечному распределению. Функция $\tilde{G}$ описывает тот же процесс в обратном порядке, начиная от конечного распределения и идя обратно во времени к исходному источнику. Вопрос о сопряженных функциях будет рассмотрен позже в этой главе.

Доказательство формул (7.4.4) или (7.4.6) проходит по тому же образцу, что и в предыдущем параграфе. Надо рассмотреть два уравнения:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) - a^2 \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0),$$

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) + a^2 \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(t - t_1).$$

Умножаем первое из них на $G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)$, второе на $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, вычитаем одно из другого и интегрируем по интересующей нас области $\mathbf{r}$ по t от $-\infty$ до t_0^+ . Применяя затем теорему Грина, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t_0^+} dt \int \{G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \text{grad}[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)] - \\ & - G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \text{grad}[G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)]\} \cdot d\mathbf{S} - \\ & - a^2 \int dV \int_0^{t_0^+} \{G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) \frac{\partial}{\partial t} [G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)] + \\ & + G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial t} [G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1)]\} dt = \\ & = 4\pi [G(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}_0, t_0) - G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}_1, -t_1)]. \end{aligned}$$

Первый из интегралов обращается в нуль в силу однородных граничных условий, которым удовлетворяет функция G . Во втором можно произвести интегрирование по времени, что даст

$$[G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_1, -t_1) G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)]_{t=-\infty}^{t=t_0^+}.$$

На нижнем пределе второй из двух множителей обращается в нуль в силу условия (7.4.2). На верхнем пределе первый множитель равен нулю опять в силу (7.4.2), причем мы молчаливо предполагали, что t_1 находится внутри интервала интегрирования.

Теперь условие взаимности получается непосредственно. Можно также получить уравнения, которым удовлетворяют G и $\tilde{G}$ как функции t_0 . Например,

из (7.4.6) имеем

$$\begin{aligned}\nabla_0^2 G + a^2 \frac{\partial G}{\partial t_0} &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0), \\ \nabla_0^2 \tilde{G} - a^2 \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t_0} &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0).\end{aligned}\quad (7.4.7)$$

Неоднородные граничные условия. Теперь мы с помощью функции G получим решение неоднородного уравнения диффузии с неоднородными граничными условиями и заданными начальными условиями. Надо решить уравнение

$$\nabla_0^2 \psi - a^2 \partial \psi / \partial t_0 = -4\pi \rho(\mathbf{r}_0, t_0), \quad (7.4.8)$$

где ρ , функция источника, является известной функцией пространственных и временной координат. Умножим это уравнение на G , а первое из уравнений (7.4.7) — на ψ ; вычтем одно равенство из другого, проинтегрируем по пространству и по времени от 0 до t^* :

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} dt_0 \int [\psi \nabla_0^2 G - G \nabla_0^2 \psi] dV_0 + a^2 \int dV_0 \int_0^{t^*} \left[\psi \frac{\partial G}{\partial t_0} + G \frac{\partial \psi}{\partial t_0} \right] dt_0 = \\ = 4\pi \int_0^{t^*} dt_0 \int \rho G dV_0 - 4\pi \psi(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

К первому из этих интегралов можно применить теорему Грина. Во втором можно произвести интегрирование по времени. Заметим, что $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t^*) = 0$. Окончательно

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{t^*} dt_0 \int \rho(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) dV_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^*} dt_0 \int dS_0 \cdot [G \text{grad}_0 \psi - \psi \text{grad}_0 G] + \frac{a^2}{4\pi} \int dV_0 [\psi G]_{t_0=0}.\end{aligned}\quad (7.4.9)$$

Функция G выбирается так, чтобы удовлетворить однородным граничным условиям, соответствующим тем граничным условиям, которым удовлетворяет функция ψ . Например, если ψ удовлетворяет однородным или неоднородным условиям Дирихле, то G берется удовлетворяющей однородным условиям Дирихле. Первые два члена в (7.4.9) представляют знакомые эффекты объемных источников и граничных условий, тогда как третий член включает эффект начальных значений ψ_0 функции ψ . Если были бы даны начальные значения $\partial \psi / \partial t$, то лучше вместо уравнения для ψ рассмотреть уравнение, которому удовлетворяет $\partial \psi / \partial t$. Пусть $v = \partial \psi / \partial t$. Тогда из (7.4.8) получаем

$$\nabla^2 v - a^2 \frac{\partial v}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

т. е. уравнение того же вида, что и (7.4.8), так что его можно анализировать тем же способом. Следовательно, при помощи (7.4.9) можно рассмотреть любой тип начального условия. Как мы видели в гл. 6, для уравнения диффузии нельзя задавать *как* начальное значение, *так* и начальную производную.

Функция Грина для бесконечной области. Теперь мы приступим к построению частных примеров функций Грина для этого случая. Как

обычно, сначала надо исследовать функцию Грина $g(R, \tau)$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, $\tau = t - t_0$, для бесконечной среды. Можно вывести выражения для одного, двух или трех измерений одновременно. Пусть g — одно-, дву- или трехмерный интеграл Фурье:

$$g(R, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} \gamma(\mathbf{p}, \tau) dV_p,$$

где n равно 1, 2 или 3 в зависимости от числа измерений и такова же размерность переменной интегрирования dV_p . Так как

$$\nabla^2 g - a^2 \frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} \left[-p^2 \gamma - a^2 \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \right] dV_p$$

и

$$\delta(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} dV_p,$$

то мы получаем для γ уравнение

$$a^2 d\gamma/d\tau + p^2 \gamma = 4\pi \delta(\tau),$$

которое имеет решение $\gamma = (4\pi/a^2) e^{-(p^2/a^2)\tau} u(\tau)$; при этом мы выбрали решение, согласованное с требованием причинности. Отсюда

$$g(R, \tau) = \frac{4\pi}{(2\pi)^n a^2} u(\tau) \int e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} e^{-(p^2/a^2)\tau} dV_p,$$

или

$$g(R, \tau) = \frac{4\pi}{(2\pi)^n a^2} u(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_x R_x} e^{-(p_x^2/a^2)\tau} dp_x \right] \dots$$

Преобразуя экспоненты в интеграле, можно точно подсчитать каждый член произведения. В первом члене

$$ip_x R_x - \frac{p_x^2}{a^2} \tau = - \left(\frac{p_x \sqrt{\tau}}{a} - \frac{ia R_x}{2\sqrt{\tau}} \right)^2 - \frac{a^2 R_x^2}{4\tau} = - \frac{\tau}{a^2} \xi^2 - \frac{a^2 R_x^2}{4\tau}.$$

Поэтому интеграл можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau \xi^2/a^2) - (a^2 R_x^2/4\tau)} dp_x, \quad \xi = p_x - \frac{ia^2 R_x}{2\tau},$$

и при помощи подходящей замены переменной можно показать, что он равен

$$e^{-a^2 R_x^2/4\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau \xi^2/a^2)} d\xi = a \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-(a^2 R_x^2/4\tau)}.$$

Подставляя этот результат в выражение для g , получаем

$$g(R, \tau) = \frac{4\pi}{a^2} \left(\frac{a}{2\sqrt{\pi\tau}} \right)^n e^{-(a^2 R^2/4\tau)} u(\tau). \quad (7.4.10)$$

Функция g обладает важным интегральным свойством, имеющим место для всех значений n :

$$\int g(R, \tau) dV = \frac{4\pi}{a^2}, \quad \tau > 0. \quad (7.4.11)$$

Эта формула выражает сохранение тепловой энергии. В момент t_0 в $\mathbf{r}_0$ введен источник тепла. Теплота диффундирует в среду, но таким образом, что полная тепловая энергия не изменяется.

Функция $g(R, \tau)$ в одномерном случае, $n = 1$, изображена на рис. 7.16 для нескольких значений τ . Заметим, что кривая имеет строгий максимум при $R = 0$ и что ширина кривой возрастает с ростом τ . При $\tau = 0$ ширина нулевая, так как тепло только что введено и все сконцентрировано при $R = 0$. Так как соотношение (7.4.11) тем не менее имеет место, то мы видим, что

$$g(R, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{4\pi}{a^2} \delta(R),$$

чем часто пользуются в качестве примера δ -функции. Когда τ становится отличным от нуля, температура немедленно поднимается повсюду, причем наиболее резко выраженное повышение происходит, конечно, вблизи $R = 0$, т. е. при $R < \sqrt{4\tau/a^2}$. Позже мы рассмотрим случаи, в которых из-за соответствующей инерции скорость распространения конечна.

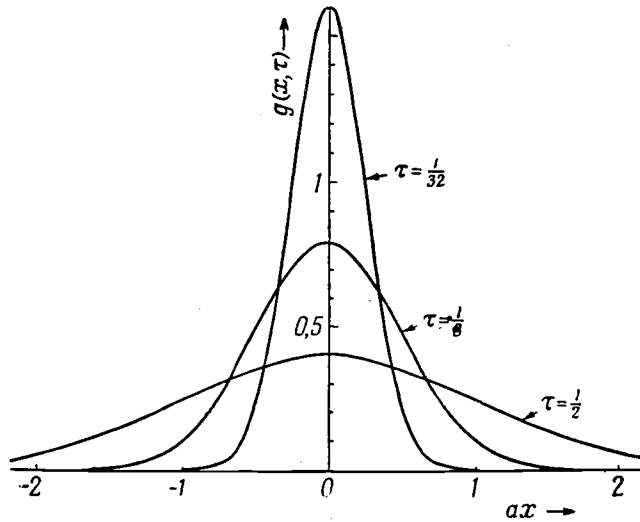


Рис. 7.16. Функция Грина уравнения диффузии в одном измерении для единичного источника, введенного при $x=0$, $t=0$, как функция x для различных моментов t .

Введем теперь (7.4.10) в формулу (7.4.9), что даст выражение $\psi(\mathbf{r}, t)$ через функцию Грина, начальное значение, распределение объемных источников и граничные условия. Рассмотрим начальную задачу. Пусть ρ равно нулю, а интересующий нас объем представляет собой бесконечную область, так что во втором члене G и ее производные равны нулю. Тогда

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{a^2}{4\pi} \int \psi_0(\mathbf{r}_0) g(R, t) dV_0. \quad (7.4.12)$$

В случае одного измерения эта формула приводится к

$$\psi(x, t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(x-x_0)^2/4t} \psi_0(x_0) dx_0. \quad (7.4.12a)$$

Формулу (7.4.12) нетрудно истолковать с помощью плотности мгновенных источников. При $t_0 = 0$ в каждом элементе пространства было задано некоторое количество тепла, равное для одномерного случая $\psi_0(x_0) dx_0$.

Эффект этого источника при $t > t_0$ получается при помощи умножения на функцию $(a/2\sqrt{\pi t}) e^{-a^2(x-x_0)^2/4t}$, описывающую, как это тепло диффундирует от x_0 . Результирующее ψ в x получается линейным наложением эффектов в x каждого из источников при различных x_0 .

Конечные границы. Функцию G для ограниченных областей можно получить методом отражений или методом собственных функций. Метод отражений полностью аналогичен уже описанному для скалярного уравнения Гельмгольца. В качестве простого примера рассмотрим полупространство $x \geq 0$. Допустим, что температура ψ является функцией только от x и t , а температура на границе $x=0$ меняется во времени по простому гармоническому закону

$$\psi(0, t) = T_0 \cos \omega t.$$

Чтобы воспользоваться формулой (7.4.8), нужно иметь функцию Грина, значения которой при $x=0$ равны 0. Она получается при помощи метода изображений:

$$G(x, t | x_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2} \frac{a}{2\sqrt{\pi(t-t_0)}} [e^{-a^2(x-x_0)^2/4(t-t_0)} - e^{-a^2(x+x_0)^2/4(t-t_0)}]. \quad (7.4.13)$$

Подставим функцию Грина (7.4.13) в (7.4.9). Чтобы получить установившееся решение, перенесем «начало времени» на $t = -\infty$, когда начальные значения равны нулю. При отсутствии источников

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{t^+} \psi(0, t_0) \left(\frac{\partial G}{\partial x_0} \right)_{x_0=0} dt_0,$$

или

$$\psi(x, t) = \frac{xaT_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \cos(\omega t_0) e^{-a^2x^2/4(t-t_0)} \frac{dt_0}{(t-t_0)^{3/2}}.$$

Более удобной переменной интегрирования является ξ , где

$$\xi^2 = a^2x^2/4(t-t_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \cos \omega \left(t - \frac{a^2x^2}{4\xi^2} \right) d\xi = \\ &= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty e^{i\omega t - \xi^2 - i\omega a^2x^2/4\xi^2} d\xi \right\} = \\ &= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t - V i\omega ax} \int_0^\infty e^{-[\xi - (V i\omega ax/2\xi)]^2} d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Можно показать, что интеграл справа равен постоянной, не зависящей от x . Положим

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-[\xi - (a^2/2\xi)]^2} d\xi.$$

Интеграл J можно записать в другом виде, если подставить $\eta = \alpha^2/\xi$:

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{\eta^2} e^{-[\eta - (\alpha^2/\eta)]^2} d\eta.$$

Отсюда

$$0 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right) e^{-[\xi - (\alpha^2/\xi)]^2} d\xi.$$

Дифференцируя первое выражение для J , находим

$$J'(\alpha) = 2 \int_0^\infty \left(\xi - \frac{\alpha^2}{\xi}\right) \frac{2\alpha}{\xi} e^{-[\xi - (\alpha^2/\xi)]^2} d\xi = 4\alpha \int_0^\infty \left(1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right) e^{-[\xi - (\alpha^2/\xi)]^2} d\xi = 0.$$

Следовательно, J не зависит от α и равно своему значению при $\alpha = 0$, т. е. $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. Отсюда

$$\psi(x, t) = \operatorname{Re} [T_0 e^{i\omega t - \sqrt{i\omega} ax}] = T_0 e^{-\sqrt{\omega/2} ax} \cos[\omega t - \sqrt{\omega/2} ax]. \quad (7.4.14)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет граничному условию при $x = 0$. Функция $\psi(x, t)$ изображает температурную волну, которая движется со скоростью $\sqrt{2\omega/a}$, но ослабевает с ростом x . Скорость волны, как мы видим, зависит от частоты колебания температуры, причем эта скорость тем больше, чем выше частота, и стремится к бесконечности, когда ω неограниченно возрастает; этот кажущийся парадокс мы вскоре рассмотрим.

Из решения для гармонически колеблющегося граничного значения ψ при помощи интеграла Фурье можно получить решение для граничного значения с любым видом зависимости от времени.

Пусть

$$\psi(0, t) = T(t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} T(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right\}.$$

Тогда

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} T(\omega) e^{i\omega t - \sqrt{i\omega} ax} d\omega \right\}. \quad (7.4.15)$$

Для полубесконечного одномерного случая можно воспользоваться этим выражением вместо (7.4.9). Техника нахождения преобразований Фурье будет рассмотрена в § 11.1, а ее приложения к задачам диффузии — в § 12.1.

Решения при помощи собственных функций. Функцию Грина можно также разложить по собственным функциям. Пусть u_n — решение скалярного уравнения Гельмгольца в области, ограниченной поверхностью S , на которой u_n удовлетворяет однородным граничным условиям. Тогда

$$\nabla^2 u_n + k_n^2 u_n = 0 \quad \text{и} \quad \int \bar{u}_n u_m dV = \delta_{nm}.$$

Так как функции u_n образуют полную систему, то G можно разложить по ним; конечно, коэффициенты разложения будут зависеть от времени. Пусть

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \sum_n C_n(t, t_0) u_n(\mathbf{r}) \bar{u}_n(\mathbf{r}_0).$$

Подставляя это разложение в уравнение (7.4.3), которому должно удовлетворять G , и замечая, что

$$\sum u_n(\mathbf{r}) \bar{u}_n(\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

получаем для C_n простое дифференциальное уравнение первого порядка

$$a^2 \frac{dC_n}{dt} + k_n^2 C_n = 4\pi \delta(t - t_0),$$

откуда

$$C_n = \frac{4\pi}{a^2} e^{-(k_n^2/a^2)(t-t_0)} u(t-t_0).$$

Следовательно,

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2} u(t-t_0) \sum_n e^{-(k_n^2/a^2)(t-t_0)} u_n(\mathbf{r}) \bar{u}_n(\mathbf{r}_0). \quad (7.4.16)$$

Это выражение можно теперь применить в формуле (7.4.9) для решения задач, включающих объемные источники, неоднородные граничные условия и начальные значения. Предположим, например, что объемных источников нет, а граничные условия однородны. Выберем собственные функции u_n , удовлетворяющие тем же однородным граничным условиям. Тогда из (7.4.9) имеем

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{a^2}{4\pi} \int \psi_0 G_{t_0=0} dV_0, \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_n e^{-(k_n^2/a^2)t} u_n(\mathbf{r}) \int \bar{u}_n(\mathbf{r}_0) \psi_0(\mathbf{r}_0) dV_0 \quad \text{для } t \geq 0. \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

При $t=0$ формула (7.4.17) сводится к разложению ψ_0 по u_n . Обратно, легко вывести выражение (7.4.17), если от обычного разложения по собственным функциям потребовать выполнения начальных условий. Пусть

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n e^{-(k_n^2/a^2)t} u_n(\mathbf{r}).$$

Полагая $t=0$, получаем

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sum_n A_n u_n(\mathbf{r}),$$

откуда следует разложение (7.4.17).

Максимальная скорость передачи тепла. Как мы указали в § 2.4, уравнение диффузии, управляющее передачей тепла в газе, является только приближением к довольно сложному закону движения молекул газа. Один из непосредственно очевидных недостатков этого приближения заключается в том, что, согласно этому уравнению, если сообщить тепло некоторой точке тела, то температура этого тела начнет мгновенно повсюду подниматься (хотя и не одинаково). Например, функция точечного источника $G(R, \tau)$ (7.4.10) становится отличной от нуля для всех значений R сразу же, как только τ станет положительным. Так как такое мгновенное распространение тепла невозможно, то нужно принять, что уравнение диффузии справедливо только по истечении достаточно большого промежутка времени. Это время, естественно, зависит от скорости распространения тепла, которая в свою очередь зависит от средней длины свободного пробега λ молекул газа. Скорость распространения возмущения в газе является, конечно, скоростью звука s . Если время, требуемое, чтобы изменение температуры достигло рассматриваемой точки, превышено, то можно предполагать, что

уравнение диффузии приложимо. Уравнение с частными производными, учитывающее этот эффект, имеет вид

$$\nabla^2 \psi = a^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (7.4.18)$$

К этому уравнению можно также прийти с другой точки зрения, рассматривая изменение уравнения звуковой волны из-за диссипации. Мы встретимся с этим уравнением, рассматривая эффект потерь на сопротивление при колебании струны, а также распространение электромагнитных волн в проводящей среде.

Соответствующая функция Грина для (7.4.18) удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G - a^2 \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (7.4.19)$$

Мы вновь примем принцип причинности. Условие взаимности имеет вид

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t).$$

Аналогом формулы (7.4.9) служит формула

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) = & \int_0^{t^*} dt_0 \int dV_0 (\rho G) + \frac{a^2}{4\pi} \int dV_0 [\phi G]_{t_0=0} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^*} dt_0 \oint dS_0 \cdot [G \text{grad}_0 \phi - \phi \text{grad}_0 G] + \\ & + \frac{1}{4\pi c^2} \int dV_0 \left[G \frac{\partial \phi}{\partial t_0} - \phi \frac{\partial G}{\partial t_0} \right]_{t_0=0}. \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

Теперь займемся функцией Грина $g(R, \tau)$, отвечающей (7.4.20), для бесконечной, неограниченной области. Пусть

$$g(R, \tau) = \int e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} \gamma(\mathbf{p}, \tau) dV_p. \quad (7.4.21)$$

Подставляя это выражение в (7.4.19), получаем дифференциальное уравнение, определяющее $\gamma(\mathbf{p}, \tau)$:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \gamma}{d\tau^2} + a^2 \frac{d\gamma}{d\tau} + p^2 \gamma = \frac{4\pi}{(2\pi)^n} \delta(\tau), \quad (7.4.22)$$

где пространственная размерность n равна 1, 2 или 3. Заметим, что γ является функцией только от p^2 и τ , так что интегрирования по углам, определяющим направление $\mathbf{p}$, которые требуются в (7.4.21), можно немедленно выполнить. Пути интегрирования в каждом случае выбираются так, чтобы удовлетворялись требуемые граничные условия:

$$\begin{aligned} g(R, \tau) &= \frac{2\pi}{iR} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipR} \gamma(p, \tau) p dp \quad \text{при } n=3, \\ &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} H_0(pR) \gamma(p, \tau) p dp \quad \text{при } n=2, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipR} \gamma(p, \tau) dp \quad \text{при } n=1. \end{aligned} \quad (7.4.23)$$

Заметим, что трехмерная функция Грина связана с одномерной. Пусть $g_3(R, \tau)$ — трехмерная функция Грина, а g_1 — одномерная. Тогда

$$g_3(R, \tau) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial R} g_1(R, \tau), \quad (7.4.24)$$

где мы привняли во внимание различие функций γ , которое дает правая часть уравнения (7.4.22).

Для определения γ сначала надо рассмотреть решения однородного уравнения, соответствующего (7.4.22). Они равны

$$e^{-i\omega^+ t} \text{ и } e^{-i\omega^- t},$$

где ω^+ и ω^- — решения уравнения $\omega^2 + i\omega a^2 c^2 - p^2 c^2 = 0$:

$$\omega^+ = \frac{1}{2}[-ia^2 c^2 + \sqrt{4p^2 c^2 - a^4 c^4}], \quad \omega^- = \frac{1}{2}[-ia^2 c^2 - \sqrt{4p^2 c^2 - a^4 c^4}].$$

Подходящая линейная комбинация решений, удовлетворяющая условию $\gamma(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, равна

$$\gamma(\tau) = \frac{4\pi c^2 i}{(2\pi)^n} \frac{e^{-i\omega^+ \tau} - e^{-i\omega^- \tau}}{\omega^+ - \omega^-} u(\tau).$$

Интеграл, определяющий g_1 , приобретает вид

$$g_1(R, \tau) = 2c^2 i u(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega^+ \tau} - e^{-i\omega^- \tau}}{\omega^+ - \omega^-} e^{ipR} dp,$$

где в качестве контура берется линия в верхней полуплоскости p , параллельная вещественной оси p . Линия ветвления проводится от $p = a^2 c/2$ до $p = -a^2 c/2$ вдоль вещественной оси. Рассмотрим теперь интеграл, содержащий $e^{-i\omega^+ \tau}$:

$$\frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 \tau} \int_C \frac{\exp\{i[pR - \sqrt{p^2 - a^4 c^2/4} c\tau]\}}{\sqrt{p^2 - \frac{1}{4} a^4 c^2}} dp.$$

Если $R > c\tau$, то контур можно замкнуть полуокружностью в верхней полуплоскости. Тогда интеграл равен нулю, так как внутри контура нет особенностей. Если $R < c\tau$, то контур деформируется так, чтобы он простирался вдоль отрицательной мнимой полуоси. После этого надо подсчитать интеграл, весьма близкий к тому, с которым мы имели дело при вычислении функции Грина для уравнения Клейна — Гордона. Мы получаем (см. таблицу преобразований Лапласа в конце гл. 11)

$$-\frac{\pi i}{c} e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 \tau} J_0 \left[\frac{1}{2} a^2 c \sqrt{R^2 - c^2 \tau^2} \right] u(c\tau - R).$$

Рассмотрим теперь слагаемое, интеграл в котором содержит $e^{-i\omega^- \tau}$:

$$\frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 \tau} \int_C \frac{\exp[i p R + i \sqrt{p^2 - a^4 c^2/4} c\tau]}{\sqrt{p^2 - \frac{1}{4} a^4 c^2}} dp.$$

Этот интеграл равен нулю при $R + c\tau > 0$ (напомним, что в одномерном случае R может быть отрицательным), но отличен от нуля при $R + c\tau < 0$. Отсюда получаем

$$-\frac{\pi i}{c} e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 \tau} J_0 \left[\frac{1}{2} a^2 c \sqrt{R^2 - c^2 \tau^2} \right] [1 - u(R + c\tau)].$$

Комбинирование этих двух выражений приводит к формуле

$$g_1(R, \tau) = 2\pi c e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} J_0 \left[\frac{a^2c}{2} \sqrt{R^2 - c^2\tau^2} \right] u(c\tau - |R|). \quad (7.4.25)$$

Читатель может убедиться в том, что это выражение стремится к точным предельным формам (7.4.10) и (7.3.16), когда $c \rightarrow \infty$ или $a \rightarrow 0$ соответственно.

Теперь можно получить трехмерную функцию g из дифференциального уравнения (7.4.24):

$$g_3(R, \tau) = \frac{c}{R} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} \left\{ \delta(c\tau - R) + \frac{a^2cR}{2\sqrt{R^2 - c^2\tau^2}} J_1 \left[\frac{1}{2} a^2c \sqrt{R^2 - c^2\tau^2} \right] u(c\tau - R) \right\}. \quad (7.4.26)$$

Функцию Грина для двумерных задач проще получить, интегрируя $g_3(R, \tau)$ по компоненте z вектора $\mathbf{R}$, чем при помощи прямого рассмотрения формулы (7.4.23). Пусть $R^2 = \xi^2 + \rho^2$. Тогда

$$g_2(R, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_3(R, \tau) d\xi,$$

или

$$g_2(R, \tau) = \frac{2ce^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau}}{\sqrt{c^2\tau^2 - \rho^2}} u(c\tau - \rho) \left\{ 1 + 2 \operatorname{sh}^2 \left[\frac{a^2c}{4} \sqrt{c^2\tau^2 - \rho^2} \right] \right\}. \quad (7.4.27)$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\int_0^\pi I_1(2z \sin \theta) d\theta = \frac{2 \operatorname{sh}^2 z}{z},$$

где $I_1(x) = -iJ_1(ix)$ (см. таблицы в конце гл. 10 и 11).

Рассмотрение трехмерного случая показывает физические явления, которые учитываются включением скорости распространения в уравнение диффузии или диссипативного члена в волновое уравнение. Оба члена в (7.4.26) при $R > c\tau$ равны нулю, как и надо ожидать во всех случаях, когда эффекты распространяются с конечной скоростью. Первый член воспроизводит начальное возмущение импульсного типа, уменьшенное, однако, двумя множителями. Первый, $1/R$, — это геометрический множитель, появлявшийся в решении простого волнового уравнения. Второй — множитель $e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau}$ — говорит нам, что эта часть волны, порожденной точечным источником, убывает со временем при движении через среду. Второй член в (7.4.26) образует след. Для достаточно больших промежутков времени $c\tau \gg R$ этот член приводит к обычному приближению диффузии.

Эти различия можно выявить другим способом. Решим одномерную начальную задачу. Из (7.4.20) находим

$$\psi = \frac{a^2}{4\pi} \int dx_0 [\psi g_1]_{t_0=0} + \frac{1}{4\pi c^2} \int dx_0 \left[g_1 \frac{\partial \psi}{\partial t_0} - \psi \frac{\partial g_1}{\partial t_0} \right]_{t_0=0}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 t} [\psi_0(x+ct) + \psi_0(x-ct)] + \\ & + e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 t} \int_{x-ct}^{x+ct} \left\{ \frac{a^2 c}{4} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2 c \sqrt{c^2 t^2 - (x_0 - x)^2} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2 c \sqrt{c^2 t^2 - (x_0 - x)^2} \right] \left. \right\} \psi_0(x_0) dx_0 + \\ & + \frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 t} \int_{x-ct}^{x+ct} I_0 \left[\frac{1}{2} a^2 c \sqrt{c^2 t^2 - (x_0 - x)^2} \right] v_0(x_0) dx_0, \end{aligned} \quad (7.4.28)$$

где $\psi_0(x_0)$ и $v_0(x_0)$ — начальные значения ψ и $\partial\psi/\partial t$ соответственно. Заметим, что эта формула при $a \rightarrow 0$ переходит в решение Даламбера (7.3.18). Первый член тот же, что и в формуле Даламбера, за исключением убывающего во времени множителя $e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 t}$. Второй член новый и представляет эффект диффузии. Третий член при $a \rightarrow 0$ приводится к соответствующему члену в формуле Даламбера.

7. 5. Функция Грина в абстрактной операторной форме

До сих пор наше рассмотрение ограничивалось специальными видами уравнений с частными производными. Пространственный оператор имел вид ∇^2 , а временной оператор отсутствовал, был равен $\partial/\partial t$ или равнялся $\partial^2/\partial t^2$ для уравнений Гельмгольца, диффузии и волнового соответственно. В настоящем параграфе мы обобщим эти рассуждения так, что они станут применимыми к любому оператору; это позволит применять теорию к любому уравнению физики, если только оно линейное. Наш план — выделить существенные элементы предыдущего исследования и затем посмотреть, как их лучше всего обобщить.

Естественно, что рассуждения будут несколько абстрактными. Например, вместо выписывания частного вида рассматриваемого однородного уравнения мы запишем его в операторном виде

$$\mathcal{A}\phi = 0, \quad (7.5.1)$$

где $\mathcal{A}$ действует на координаты, от которых зависит ϕ . Например, в уравнении диффузии $\mathcal{A} = \nabla^2 - a^2 \partial/\partial t$ и действует на $\mathbf{r}$ и t . Другие примеры линейных операторов дают интегральные уравнения, с которыми мы встретились в гл. 2 (см. стр. 177) и которые будут исследованы более полно в гл. 8. Для них оператор $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = 1 - \int_a^b K(x, x_0) \dots dx_0$$

и уравнение $\mathcal{A}\phi = 0$ читается так:

$$\phi(x) - \int_a^b K(x, x_0) \phi(x_0) dx_0 = 0.$$

Переменные могут включать не только пространственную и временную зависимость. Так, в задачах переноса (§ 2.4) функция распределения f зависит не только от $\mathbf{r}$ и t , но также от импульса $\mathbf{p}$ и энергии E .

В тех же обозначениях уравнение для функции Грина G имеет вид

$$\mathcal{A}G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \quad (7.5.2)$$

где $\mathbf{x}$ — обобщенный вектор, представляющий все участвующие независимые переменные; $\mathcal{A}$ действует на $\mathbf{x}$. Так, для волнового уравнения $\mathbf{x} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z + \mathbf{a}_t t$, где $\mathbf{a}_x$ и т. д. — единичные взаимно ортогональные векторы. При этом $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ становится произведением δ -функций по отдельным координатам; например, для волнового уравнения

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\delta(t-t_0).$$

Обобщение теоремы Грина, сопряженные операторы. Наиболее важным математическим инструментом, применявшимся в исследованиях предшествующего параграфа, была теорема Грина; первая наша задача — обобщить ее. В дифференциальном виде теорема Грина утверждает, что

$$u\nabla^2 v - v\nabla^2 u = \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u).$$

Непосредственно напрашивается обобщение этого равенства для оператора $\mathcal{A}$:

$$u\mathcal{A}v - v\mathcal{A}u = \nabla \cdot \mathbf{P}(u, v), \quad (7.5.3)$$

где $\mathbf{P}$ — обобщенный вектор, выражающийся через те же единичные векторы, что и $\mathbf{x}$, тогда как ∇ — соответствующий градиентный оператор. Отсюда

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \partial P_x / \partial x + \partial P_y / \partial y + \partial P_z / \partial z + \partial P_t / \partial t + \dots$$

Например, в случае волнового уравнения, когда $\mathcal{A} = \nabla^2 - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$, из (7.5.3) мы находим, что

$$u \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] v - v \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u = \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right].$$

Здесь $\mathbf{P} = u\nabla v - v\nabla u$, где ∇ — общий градиентный оператор.

Соотношение (7.5.3) удовлетворяется не всеми операторами $\mathcal{A}$. Например, в случае одномерного уравнения диффузии, $\mathcal{A} = \partial^2/\partial x^2 - a^2 \partial/\partial t$, мы находим, что

$$u\mathcal{A}v - v\mathcal{A}u = \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right] - a^2 \left[u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right].$$

Первая пара членов в правой части имеет подходящий вид. Однако вторую пару нельзя записать в виде производной по времени от функции от u и v . Поэтому надо обобщить теорему Грина по сравнению с (7.5.3):

$$u\mathcal{A}v - v\tilde{\mathcal{A}}u = \nabla \cdot \mathbf{P}(u, v), \quad (7.5.4)$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ — оператор, называемый *сопряженным* к $\mathcal{A}$. Если $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, т. е. если имеет место равенство вида (7.5.3), оператор $\mathcal{A}$ называется *самосопряженным*. В случае уравнения диффузии $\tilde{\mathcal{A}} = \partial^2/\partial x^2 + a^2 \partial/\partial t$. Определение (7.5.4) является непосредственным обобщением определения сопряженного оператора, которое было дано в гл. 5 (см. стр. 499). Согласно формуле (5.2.10) оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ был определен соотношением

$$v(z)\mathcal{A}[y(z)] - y(z)\tilde{\mathcal{A}}[v(z)] = \frac{d}{dz}P(v, y),$$

где $P(v, y)$ — присоединенная билинейная форма. Это не что иное, как соотношение (7.5.4) для одномерных задач.

Вспоминая о том, каким способом применялась теорема Грина, мы видим, что нам придется заниматься решениями уравнения

$$\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\psi} = 0 \quad (7.5.5)$$

и соответствующей функцией Грина для сопряженного оператора

$$\tilde{\mathcal{A}} \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (7.5.6)$$

Уравнение (7.5.5) называется *сопряженным* к уравнению (7.5.1), содержащему $\mathcal{A}$, а функция $\tilde{\psi}$ называется сопряженной к ψ . В случае одномерного уравнения диффузии уравнение $\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\psi} = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = 0.$$

Мы видим, что $\tilde{\psi}$ удовлетворяет уравнению диффузии с обращенной временной переменной. Отсюда, если $\psi(t)$ есть решение уравнения (7.5.1), то $\tilde{\psi}(t) = \psi(-t)$ — решение уравнения (7.5.5).

Раз мы обладаем обобщением теоремы Грина, становится возможным решить неоднородную задачу

$$\mathcal{A}\psi = -4\pi \rho(\mathbf{x}) \quad (7.5.7)$$

с неоднородными краевыми условиями. Так как в теорему Грина (7.5.4) входит сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$, то ясно, что надо сравнить (7.5.7) и (7.5.6). Умножаем последнее равенство на $\psi(\mathbf{x})$, а первое на $\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$ и вычитаем одно из другого:

$$\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) \mathcal{A}\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \tilde{\mathcal{A}} \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = 4\pi \psi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - 4\pi \rho(\mathbf{x}) \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0).$$

Пользуясь (7.5.4), интегрируем по объему в пространстве $\mathbf{x}$ (который включает всю нужную с точки зрения физической задачи область изменения каждой компоненты $\mathbf{x}$). Например, в случае волнового уравнения мы интегрируем по времени от 0 до t_0^+ и по координатам x, y и z внутри поверхности, на которой должны удовлетворяться граничные условия. Получаем

$$\psi(\mathbf{x}_0) = \int \rho(\mathbf{x}) \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) dv + (1/4\pi) \int \nabla \cdot \mathbf{P}[\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0), \psi(\mathbf{x})] dv,$$

или

$$\psi(\mathbf{x}_0) = \int \rho(\mathbf{x}) \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) dv + (1/4\pi) \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}[\tilde{G}(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}_0), \psi(\mathbf{x}^s)] dS, \quad (7.5.8)$$

где $\mathbf{n}$ — направленный наружу единичный вектор, ортогональный к поверхности S , ограничивающей объем в пространстве $\mathbf{x}$. Для скалярного волнового уравнения последний член имеет вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0^+} dt \int \mathbf{n} \cdot [\tilde{G} \nabla \psi - \psi \nabla \tilde{G}] dS - \frac{1}{4\pi c^2} \int dv \left[\tilde{G} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} \right]_{t=0}^{t=t_0^+}.$$

Эффект краевых условий. Для дальнейшего необходимо рассмотреть краевые условия, которым должно удовлетворять ψ . Рассмотрим случай, когда ψ удовлетворяет однородным краевым условиям на S ; другими словами, на поверхности S нет источников поля ψ . Согласно принципу наложения, решение можно получить в виде интеграла от распределения объемных источников $\rho(\mathbf{x})$, умноженного на решение, выражающее эффект от точечного источника в $\mathbf{x}$. Для этого надо рассмотреть два вопроса. Прежде всего надо связать G с $\tilde{G}$. Как мы увидим, это приведет к обобщенному

условию взаимности. Мы отложим доказательство этой теоремы на короткое время. Во-вторых, чтобы получить решение в подходящем виде, необходимо, чтобы член в (7.5.8), содержащий поверхностный интеграл, исчез. Однородные краевые условия, которым удовлетворяют функция Грина $\tilde{G}$ и функция ψ , должны быть так согласованы, чтобы

$$\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} [\tilde{G}(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}_0), \psi(\mathbf{x}^s)] dS = 0. \quad (7.5.9)$$

В простейшем рассмотренном нами случае скалярного уравнения Гельмгольца член с интегралом по поверхности исчезает, если функция Грина и функция ψ удовлетворяют одним и тем же однородным граничным условиям. Кроме того, в случае скалярного волнового уравнения, где мы пользовались начальными значениями для $\partial\psi/\partial t$ и ψ , т. е. условиями Коши, для функции Грина мы применяли также условие причинности (см. стр. 772).

С другой стороны, можно определить подходящие краевые условия, которым должна удовлетворять ψ (как мы указали это ранее, в § 7.2). Например, для уравнения Гельмгольца поверхностный член содержит значения ψ и $\partial\psi/\partial n$ на поверхности. Положить оба эти значения равными нулю явно не годится, так как в этом случае поверхностный интеграл обращается в нуль автоматически, краевое условие на G остается произвольным и решение неоднородного уравнения становится не единственным. Так как решение на самом деле единственно, то такое допущение о значениях ψ и $\partial\psi/\partial n$ на поверхности неправильно, и мы приходим к ослаблению граничных условий до однородных условий Дирихле, или Неймана, или некоторой их линейной комбинации. Определив граничные условия для ψ , добиваемся, чтобы поверхностный член исчез. В случае уравнения Гельмгольца G должна для этого удовлетворять тому же граничному условию, что и ψ . Подобным же способом испытание формулы (7.5.9) приводит к определению подходящих краевых условий для ψ и соответствующих условий для $\tilde{G}$.

Определив таким образом краевые условия на ψ и $\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$, мы можем теперь вернуться к условию взаимности. Сравним уравнения, которым удовлетворяют G и $\tilde{G}$:

$$\Delta G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \tilde{\Delta} \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_1) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1).$$

Умножаем первое из них на $\tilde{G}$, второе на G , вычитаем одно из другого и интегрируем по соответствующему объему в пространстве $\mathbf{x}$. Пользуясь обобщенной теоремой Грина (7.5.4), получаем

$$4\pi [\tilde{G}_s(\mathbf{x}_0 | \mathbf{x}_1) - G(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_0)] = \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} [\tilde{G}(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}_0), G(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}_1)] dS.$$

Чтобы решение неоднородной задачи об источниках с однородными краевыми условиями можно было выразить через G , не используя $\tilde{G}$, необходимо, чтобы между ними имелось простое алгебраическое соотношение, которое требует в свою очередь, чтобы член с поверхностным интегралом в последнем равенстве исчез. Сравнивая этот член, содержащий поверхностный интеграл, с (7.5.9), мы видим, что $G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$ удовлетворяет тем же условиям на S , что и ψ ; этого можно было бы ожидать на основании наших интуитивных представлений о G и о ее связи с ψ .

Окончательно получаем

$$G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = \tilde{G}(\mathbf{x}_0 | \mathbf{x}). \quad (7.5.10)$$

Выражаясь словесно, левая часть этого равенства описывает эффект в точке $\mathbf{x}$ от точечного источника в $\mathbf{x}_0$, причем распространение возмущения описывается оператором $\mathcal{A}$ и краевыми условиями. Выражение в правой части соответствует случаю, когда источник помещен в $\mathbf{x}$, эффект измеряется в $\mathbf{x}_0$, а распространение возмущения, происходящее от $\mathbf{x}$ до $\mathbf{x}_0$, описывается оператором $\tilde{\mathcal{A}}$ и соответствующим краевым условием для $\tilde{G}$. Если $\tilde{G}$ отлична от G , то в пространстве $\mathbf{x}$ должна существовать направленность при распространении возмущения, так как обращение направления распространения изменяет результат наблюдения. Эта необратимость должна проявляться в операторе $\mathcal{A}$ или в краевых условиях. Например, оператор $\mathcal{A}$ для уравнения диффузии $\nabla^2 - a^2 \partial/\partial t$ не инвариантен относительно изменения направления времени, т. е. относительно подстановки $-t$ вместо $+t$. Оператор для волнового уравнения $\mathcal{A} = \nabla^2 - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$ самосопряженный ($\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$), так что из него нельзя получить направленность, например, временной координаты. Однако эту направленность можно сразу вывести из наложенных краевых условий. Так, применение условия причинности накладывает определенную асимметрию по отношению к прошедшему и будущему. Как следствие этого, принцип взаимности для функции Грина волнового уравнения при этих начальных условиях читается так:

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t),$$

так что

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_0, -t_0). \quad (7.5.11)$$

Мы видим, что $\tilde{G}$ описывает распространение от точки источника $\mathbf{r}_0$ до точки $\mathbf{r}$, которое, однако, обращено во времени, так что событие в момент t происходит на некоторое время *раньше*, чем импульс, порождающий это событие в момент t_0 (заметим, что $t < t_0$). [Например, в случае функции Грина для бесконечной области

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{R} \delta \left[\frac{R}{c} + t - t_0 \right], \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

При данном R эффект ощущается в момент $t = t_0 - R/c$, т. е. на время R/c раньше, чем начало движения в t_0 . По этой причине $\tilde{G}$ часто называется *опережающим потенциалом*, тогда как $G = (1/R) \delta [R/c - (t - t_0)]$ — *запаздывающим потенциалом*. Оба они являются решениями задачи об источнике при различных начальных условиях.

Из-за эффекта краевых условий полезно обобщить идею сопряженности. Мы введем два термина: *сопряженные краевые условия* и *сопряженная задача*. Сопряженная задача удовлетворяется функцией $\tilde{\psi}$, являющейся решением уравнения

$$\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\psi} = 0$$

и удовлетворяющей сопряженным краевым условиям. Мы определим последние требованием

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}[\psi, \tilde{\psi}] = 0 \text{ на граничной поверхности.} \quad (7.5.12)$$

Отсюда если ψ удовлетворяет некоторому краевому условию, то $\tilde{\psi}$ будет удовлетворять соответствующему краевому условию, которое мы назовем сопряженным краевым условием. Задача считается самосопряженной, если $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ и краевые условия для ψ и $\tilde{\psi}$ одинаковы. Для самосопряженных задач $\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$.

Еще о сопряженных дифференциальных операторах. Перейдем теперь к более определенному рассмотрению некоторых операторов и им сопряженных. В качестве первого примера рассмотрим одномерную ситуацию. Здесь мы вообще будем интересоваться операторами второго порядка, так что можно написать

$$\mathcal{A}v = p \frac{d^2 v}{dz^2} + q \frac{dv}{dz} + rv. \quad (7.5.13)$$

Сопряженный оператор равен (см. формулу (5.2.10) и далее)

$$\tilde{\mathcal{A}}u = \frac{d^2}{dz^2}(pu) - \frac{d}{dz}(qu) + ru. \quad (7.5.14)$$

Присоединенная билинейная форма записывается в виде

$$P(u, v) = pu \frac{dv}{dz} - v \frac{d(pu)}{dz} + quv. \quad (7.5.15)$$

При каких условиях $\mathcal{A}$ будет самосопряженным? Приравнявая $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}$, мы находим, что dp/dz должно равняться q . Отсюда

$$\mathcal{A}v = \frac{d}{dz} \left(p \frac{dv}{dz} \right) + rv.$$

Уравнение $\mathcal{A}v = 0$ является как раз уравнением Штурма — Лиувилля, исследованным в § 6.3. Мы видим, что среди дифференциальных операторов второго порядка только оно соответствует линейному самосопряженному оператору.

Если $dp/dz = q$, то присоединенная билинейная форма P равна

$$P = p \left(u \frac{dv}{dz} - v \frac{du}{dz} \right).$$

Требование $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(\psi, \tilde{\psi}) = 0$ состоит в том, что $0 = p \left(\psi \frac{d\tilde{\psi}}{dz} - \tilde{\psi} \frac{d\psi}{dz} \right)_{z=a} = p \left(\psi \frac{d\tilde{\psi}}{dz} - \tilde{\psi} \frac{d\psi}{dz} \right)_{z=b}$, где a и b — точки, в которых удовлетворяются граничные условия. Если p конечно (и отлично от нуля) в концевых точках, то возможными условиями являются условия Дирихле ($\psi = 0$ в точках a и b), Неймана ($d\psi/dz = 0$ в точках a и b) или смешанные ($d\psi/dz = \beta\psi$ в точках a и b). Все эти граничные условия самосопряженные, так как $\tilde{\psi}$ должно удовлетворять тем же граничным условиям, что и ψ . Периодические граничные условия $\psi(a) = \psi(b)$ и $(d\psi/dz)_{z=a} = (d\psi/dz)_{z=b}$ также самосопряженные. Другой тип граничного условия получится, если p имеет нуль в a или b . В этом случае $\mathbf{P}$ равно нулю в точке, если функции ψ и $\tilde{\psi}$ только ограничены. Это граничное условие опять самосопряженное. Конечно, эти же самые условия мы рассматривали в гл. 6. Для всех них функция Грина должна быть симметричной.

Можно обобщить выражения (7.5.13) — (7.5.15) на операторы, содержащие производные высшего порядка и более чем одно измерение. Рассмотрим сначала оператор

$$\mathcal{A}_n v = p \frac{d^n v}{dz^n}. \quad (7.5.16)$$

Любой одномерный оператор является, конечно, линейной комбинацией операторов типа $\mathcal{A}_n$. Сопряженный оператор равен

$$\tilde{\mathcal{A}}_n u = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} (pu). \quad (7.5.17)$$

Присоединенная билинейная форма равна

$$P(u, v) = pu \frac{d^{n-1}v}{dz^{n-1}} - \frac{d(pu)}{dz} \frac{d^{n-2}v}{dz^{n-2}} + \frac{d^2(pu)}{dz^2} \frac{d^{n-3}v}{dz^{n-3}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(pu)}{dz^{n-1}} v. \quad (7.5.18)$$

Для нескольких измерений наиболее общий дифференциальный оператор имеет вид

$$\mathcal{A} = p(x_1, x_2, \dots) \frac{\partial^n}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^k}, \quad a + b + \dots + k = n, \quad (7.5.19)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_s$ — координаты. Сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ равен

$$\tilde{\mathcal{A}} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^k} [p(x_1, x_2, \dots) \dots]. \quad (7.5.20)$$

Присоединенная билинейная форма $P(u, v)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} P(u, v) = \mathbf{a}_1 \left[pu \frac{\partial^{n-1}v}{\partial x_1^{a-1} \partial x_2^b \dots \partial x_s^k} - \frac{\partial(pu)}{\partial x_1} \frac{\partial^{n-2}v}{\partial x_1^{a-2} \partial x_2^b \dots \partial x_s^k} + \right. \\ \left. + \dots + (-1)^{a-1} \frac{\partial^{a-1}(pu)}{\partial x_1^{a-1}} \frac{\partial^{n-a}v}{\partial x_2^b \dots \partial x_s^k} \right] + \\ + (-1)^a \mathbf{a}_2 \left[\frac{\partial^a(pu)}{\partial x_1^a} \frac{\partial^{n-a-1}v}{\partial x_2^{b-1} \dots \partial x_s^k} - \frac{\partial^{a+1}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2} \frac{\partial^{n-a-2}v}{\partial x_2^{b-2} \dots \partial x_s^k} + \right. \\ \left. + \dots + (-1)^{b-1} \frac{\partial^{a+b-1}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2^{b-1}} \frac{\partial^{n-a-b}v}{\dots \partial x_s^k} \right] + \\ + \dots + (-1)^{n-k} \mathbf{a}_s \left[\frac{\partial^{n-s}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^{k-1}} \frac{\partial^{k-1}v}{\partial x_s^{k-1}} - \frac{\partial^{n-s+1}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^k} \frac{\partial^{k-2}v}{\partial x_s^{k-2}} + \right. \\ \left. + \dots + (-1)^{k-1} \frac{\partial^{n-1}(pu)}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_s^{k-1}} v \right], \quad (7.5.21) \end{aligned}$$

где $\mathbf{a}_j$ — единичный вектор, соответствующий координате x_j .

В качестве простого примера рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}v = p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2r \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тогда

$$\tilde{\mathcal{A}}u = \frac{\partial^2(pu)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(qu)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2(ru)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(tu)}{\partial x} - \frac{\partial(mu)}{\partial y}$$

и

$$\begin{aligned} P(u, v) = \mathbf{a}_x \left[pu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(pu)}{\partial x} v + 2ru \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(ru)}{\partial y} v + tuv \right] + \\ + \mathbf{a}_y \left[qu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(qu)}{\partial y} v - 2 \frac{\partial(ru)}{\partial x} v + muv \right]. \end{aligned}$$

Ввиду симметричной зависимости члена с r от x и y , можно получить другое выражение для $P(u, v)$ [его можно получить из общей формулы (7.5.21), если написать другое выражение для P , положив $x_1 = y$ и $x_2 = x$, и осреднить его с последним выражением, в котором $x_1 = x$ и $x_2 = y$]:

$$\begin{aligned} P(u, v) = \mathbf{a}_x \left[pu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(pu)}{\partial x} v + ru \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(ru)}{\partial y} v + tuv \right] + \\ + \mathbf{a}_y \left[qu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(qu)}{\partial y} v + ru \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(ru)}{\partial x} v + muv \right]. \end{aligned}$$

Условия, при которых оператор $\mathcal{A}$ будет самосопряженным, имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} - t = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} - m = 0.$$

Для совместности этих двух равенств надо также потребовать, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(l - \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(m - \frac{\partial q}{\partial y} \right).$$

Тогда $\mathbf{P}(u, v)$ значительно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) = \mathbf{a}_x \left[p \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\ + \mathbf{a}_y \left[q \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Сопряженные интегральные операторы. Определение сопряженного оператора, данное в (7.5.4), не очень подходит для интегрального оператора (7.5.1), и попытка воспользоваться этим определением без изменений не была бы плодотворной. Мы воспользуемся интегральным определением, которое во многих отношениях слабее, чем (7.5.4), но тем не менее оставляет большую часть наших результатов без изменения. Специальный выбор, который мы намерены сделать, устранил все члены с поверхностными интегралами, содержащие $\mathbf{P}$, из результата (7.5.8); условие взаимности (7.5.10) будет тем не менее иметь место. Для интегральных операторов мы определяем сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ равенством

$$\int_a^b u \mathcal{A} v \, dx - \int_a^b v \tilde{\mathcal{A}} u \, dx = 0. \quad (7.5.22)$$

Это определение получается из равенства (7.5.4), взятого для одномерного случая, при помощи однократного интегрирования (7.5.4) от a до b :

$$\int_a^b [u \mathcal{A} v - v \tilde{\mathcal{A}} u] \, dx = [\mathbf{P}(u, v)]_{x=a}^{x=b}.$$

Мы видим, что (7.5.22) получается, если $[\mathbf{P}(u, v)]_{x=a}^{x=b}$ равно нулю. Напомним, что для дифференциальных операторов так будет, если граничные условия, которым удовлетворяют u и v , однородны и сопряжены одно другому в смысле формулы (7.5.12). Рассмотрим теперь следствие определения (7.5.22).

Для примера исследуем оператор

$$\mathcal{A} v = \int_a^b K(x, x_0) v(x_0) \, dx_0.$$

Тогда, если $\tilde{\mathcal{A}}$ определен формулой

$$\tilde{\mathcal{A}} u = \int_a^b \tilde{K}(x, x_0) u(x_0) \, dx_0,$$

то определяющее равенство (7.5.22) приобретает вид

$$\int_a^b dx \int_a^b [v(x) K(x, x_0) u(x_0) - u(x) \tilde{K}(x, x_0) v(x_0)] \, dx_0 = 0.$$

Если переставить переменные интегрирования в первом интеграле, то это равенство переписывается так:

$$\int_a^b dx \int_a^b \{v(x_0) u(x) [K(x_0, x) - \tilde{K}(x, x_0)]\} \, dx_0 = 0.$$

Так как оно должно иметь место для произвольных u и v , то мы определяем $\tilde{K}$ следующим образом:

$$K(x_0, x) = \tilde{K}(x, x_0), \quad (7.5.23)$$

что напоминает формулу (7.5.10), где делается подобное утверждение для функции Грина. Как мы увидим в следующей главе, K очень часто является функцией Грина или тесно связана с ней, так что получающаяся здесь аналогия не слишком удивительна. В силу (7.5.23) теперь можно написать

$$\tilde{\mathcal{A}}v = \int_a^b K(x_0, x) v(x_0) dx_0.$$

Условие, при котором $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, т. е. оператор является самосопряженным, имеет вид

$$K(x_0, x) = K(x, x_0), \quad (7.5.24)$$

т. е. функция K должна быть симметричной относительно переменных x_0 и x .

Другой тип интегрального оператора получается, если взять неопределенный интеграл

$$\mathcal{A}v = \int_a^x K(x, x_0) v(x_0) dx_0.$$

Этот оператор можно привести к виду с постоянными пределами, если ввести единичную функцию, так что

$$\mathcal{A}v = \int_a^b u(x - x_0) K(x, x_0) v(x_0) dx_0.$$

Положим

$$M(x, x_0) = u(x - x_0) K(x, x_0).$$

Тогда сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ включает функцию

$$\tilde{M}(x, x_0) = M(x_0, x) = u(x_0 - x) K(x_0, x).$$

Отсюда

$$\tilde{\mathcal{A}}\omega = \int_a^b u(x_0 - x) K(x_0, x) \omega(x_0) dx_0 = \int_x^b K(x_0, x) \omega(x_0) dx_0.$$

Для самосопряженности оператора $\mathcal{A}$ должно быть $M(x, x_0) = M(x_0, x)$, или

$$u(x - x_0) K(x, x_0) = u(x_0 - x) K(x_0, x).$$

Это соотношение никогда не может удовлетворяться, так как $u(x - x_0)$ равно нулю всюду, где $u(x_0 - x)$ равно единице, и наоборот. Поэтому $\mathcal{A}$ для неопределенных интегралов не является самосопряженным.

Обобщение этих определений на случай более одного измерения не требует привлечения каких-либо новых принципов, и потому мы перенесем исследование этого случая в задачи в конце главы.

Обобщение на абстрактное векторное пространство. Как и при развитии теории собственных функций, полезно и поучительно распространить теперь наше исследование на представление результатов этой главы в абстрактной символике векторного пространства и векторных операторов. Эта символика была впервые рассмотрена в § 1.6 и широко применялась

в §§ 2.6 и 6.3. Там мы показали, что любой вектор F абстрактного пространства можно выразить либо через его компоненты по ортогональной системе собственных векторов e_n ,

$$F = \sum_n F_n e_n, \quad F_n = F^* \cdot e_n,$$

множество которых счетно, либо через его компоненты по системе единичных векторов $e(x)$, соответствующих δ -функциям,

$$F = \int F(x) e(x) dx, \quad F(x) = F^* \cdot e(x),$$

множество которых несчетно (отметим, что x здесь изображает совокупность координат, как, например, x, y, t , а интегрирование производится по области изменения этих переменных внутри границы). Векторы в абстрактном пространстве задаются одномерной системой компонент, F_n или $F(x)$.

Кроме того, мы имели дело с операторами $\mathcal{A}$, обобщениями в абстрактном векторном пространстве дифференциальных операторов, рассмотренных в первой части этого параграфа. Они задаются при помощи двумерной матрицы с компонентами A_{mn} или $A(x|x_0)$:

$$\mathcal{A} = \sum_{mn} e_m A_{mn} e_n^* = \int dx \int e(x) A(x|x_0) e^*(x_0) dx_0, \quad (7.5.25)$$

где можно было бы писать r, r_0 вместо x, x_0 и dV вместо dx , чтобы подчеркнуть, что сюда может быть включено более одного измерения. Если матрица A_{mn} диагональная ($A_{mn} = a_m \delta_{mn}$), то единичные векторы e_n являются для $\mathcal{A}$ собственными векторами, удовлетворяющими уравнению $\mathcal{A} \cdot e_n = a_n e_n$; если A_{mn} — не диагональная матрица, то система e_n является системой собственных векторов для некоторого другого оператора, а не $\mathcal{A}$.

Оператору $\mathcal{A}$, действующему на вектор F , соответствует дифференциальный оператор $\mathcal{A}_r$, действующий на функцию $F(r)$:

$$\mathcal{A} \cdot F = \int [\mathcal{A}_r F(r)] e(r) dV = \int dV \int A(r|r_0) F(r_0) e(r) dV_0,$$

где $\mathcal{A}_r$ — дифференциальный (или интегральный) оператор, рассмотренный в первой части этого параграфа. Вторая форма иллюстрирует тот факт, что любой оператор можно выразить в интегральном виде. Для дифференциальных операторов это легче всего показать при помощи дельта-функции и ее производных. Например, если $\mathcal{A}_x = g(x)(d/dx) + r(x)$, то матрица для $\mathcal{A}$, выраженная через x -ы, имеет вид

$$A(x|x_0) = -g(x)\delta'(x_0 - x) + r(x)\delta(x_0 - x),$$

так как тогда (см. стр. 775)

$$\mathcal{A}_x F(x) = \int A(x|x_0) F(x_0) dx_0 = g(x) \frac{d}{dx} F(x) + r(x) F(x). \quad (7.5.26)$$

Высшие производные можно выразить через высшие «производные» дельта-функции; нетрудно видеть, что все операторы, с которыми мы до сих пор имели дело в этом параграфе, можно выразить через эквивалентную функцию $A(x|x_0)$, включающую дельта-функцию и ее производные, функции от x и x_0 и, быть может, единичную функцию $u(x_0 - x)$ (см. стр. 778).

Для обобщения метода функций Грина нам надо сначала найти операторное обобщение теоремы Грина, затем найти обобщение дельта-функции, соответствующей единичному источнику в правой части неоднородного уравнения, и, наконец, найти искомое решение обобщенного операторного уравнения.

Мы уже обобщили теорему Грина формулой (7.5.22). Она в то же время определяет, что понимается под сопряженным оператором и что требуется от сопряженных краевых условий, а также служит основой для соотношения взаимности. Все эти вопросы надо теперь перевести на векторно-операторный язык.

Сопряженные, комплексно сопряженные и эрмитовы операторы. Формула (7.5.22) равносильна теореме Грина. Запишем эту формулу в несколько ином виде:

$$\int [\bar{u}(x) \mathcal{A}_x v(x) - v(x) \tilde{\mathcal{A}}_x \bar{u}(x)] dx = 0. \quad (7.5.27)$$

Она до некоторой степени подобна формуле, определяющей оператор, эрмитово сопряженный к данному [см. стр. 86, а также формулу (6.3.72)],

$$U^* \cdot \mathcal{A} \cdot V - (\mathcal{A}^* \cdot U)^* \cdot V = 0,$$

которая в компонентах вдоль векторов $e(x)$, соответствующих δ -функциям, имеет вид

$$\int \{ \bar{u}(x) \mathcal{A}_x v(x) - v(x) [\mathcal{A}_x^* \bar{u}(x)] \} dx = 0,$$

или

$$\int \int dx \{ \bar{u}(x) A(x|x_0) v(x_0) - v(x) \overline{A^*(x|x_0)} \bar{u}(x_0) \} dx_0 = 0,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — соответствующие компоненты векторов U , V . Так как компоненты $A^*(x|x_0)$ эрмитово сопряженного к $\mathcal{A}$ оператора комплексно сопряжены компонентам оператора, транспонированного к $\mathcal{A}$ (который получается заменой строк на столбцы), то последний интеграл автоматически равен нулю.

Однако формула (7.5.27) не точно такая же, так что мы отметили различие, употребив тильду ($\tilde{\mathcal{A}}$) вместо звездочки ($\mathcal{A}^*$). Чтобы выяснить характер этого различия, надо вернуться к определению сопряженного дифференциального оператора. Тогда становится очевидным, что если $A(x|x_0)$ — компоненты оператора $\mathcal{A}$ вдоль осей $e(x)$, то компонентами $\tilde{\mathcal{A}}$ служат $A(x_0|x)$, тогда как компонентами $\mathcal{A}^*$ являются $\overline{A(x_0|x)}$. В одном случае мы заменяем строки на столбцы (x на x_0), а в другом мы, кроме того, переходим к комплексно сопряженным величинам.

Чтобы показать, что переход к обычному сопряженному оператору соответствует перестановке x и x_0 в компонентах по $e(x)$, можно рассмотреть формулу (7.5.27) для случая дифференциального оператора $gd/dx + r$. Здесь компоненты оказываются равными

$$A(x|x_0) = -g(x) \delta'(x_0 - x) + r(x) \delta(x_0 - x).$$

Простая перестановка x и x_0 дает

$$\tilde{A}(x|x_0) = A(x_0|x) = -g(x_0) \delta'(x - x_0) + r(x_0) \delta(x - x_0),$$

чему соответствует дифференциальный оператор

$$\tilde{\mathcal{A}}_x F(x) = \int \tilde{A}(x|x_0) F(x_0) dx_0 = -\frac{d}{dx} (gF) + r(x) F(x);$$

то, что мы действительно получили сопряженный оператор, видно из формулы (7.5.14).

Теперь можно резюмировать наши соглашения относительно эрмитовой сопряженности, сопряженности и комплексной сопряженности. Компоненты

вектора $\mathbf{F}^*$, комплексно сопряженного к $\mathbf{F}$, комплексно сопряжены компонентам $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \sum_n F_n \mathbf{e}_n = \int F(x) \mathbf{e}(x) dx, \quad \mathbf{F}^* = \sum_n \mathbf{e}_n^* \bar{F}_n = \int \mathbf{e}^*(x) \bar{F}(x) dx \quad (7.5.28)$$

(можно также просто называть вектор $\mathbf{F}^*$ сопряженным к $\mathbf{F}$). Компоненты оператора $\mathfrak{A}$, сопряженного к $\mathfrak{A}$, получаются в результате перестановки строк и столбцов (транспонирования); компоненты оператора $\bar{\mathfrak{A}}$, комплексно сопряженного к $\mathfrak{A}$, равны комплексно сопряженным к компонентам $\mathfrak{A}$, и, наконец, эрмитово сопряженный оператор $\mathfrak{A}^*$ получается в результате перестановки строк и столбцов и перехода к комплексно сопряженным величинам:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \sum_{nm} e_n A_{nm} e_m^*, & \tilde{\mathfrak{A}} &= \sum_{nm} e_n A_{mn} e_m^*, \\ \bar{\mathfrak{A}} &= \sum_{nm} e_n \bar{A}_{nm} e_m^*, & \mathfrak{A}^* &= \tilde{\bar{\mathfrak{A}}} = \sum_{nm} e_n \bar{A}_{mn} e_m^*, \\ \tilde{\mathfrak{A}} &= \mathfrak{A}^*, & \bar{\mathfrak{A}} &= \tilde{\mathfrak{A}}^*. \end{aligned} \quad (7.5.29)$$

Если $\mathfrak{A}$ эрмитов, то $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$, однако $\tilde{\mathfrak{A}} \neq \mathfrak{A}$, за исключением случая, когда все элементы $\mathfrak{A}$ вещественны. Если $\mathfrak{A}$ вещественный, то $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, однако $\tilde{\mathfrak{A}} \neq \mathfrak{A}$, за исключением случая, когда $\mathfrak{A}$ эрмитов, и т. д.

Заметим, что свойство оператора быть эрмитовым инвариантно относительно поворота осей в векторном пространстве, тогда как свойство быть вещественным (или быть самосопряженным) не инвариантно. Например, матрица из компонент $\mathfrak{A}$ вдоль $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

эрмитова, но не вещественна и не самосопряженна. Эта матрица имеет собственный вектор $\mathbf{e}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} [\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2/(1-i)]$ с собственным значением 0, а также собственный вектор $\mathbf{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} [\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1/(1-i)]$ с собственным значением 2. Относительно этих новых осей матрица $\mathfrak{A}$, конечно, диагональна,

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

т. е. все еще эрмитова, но, кроме того, вещественна и самосопряженна.

Функция Грина и оператор Грина. Таким образом, аналогом неоднородного уравнения $\mathcal{A}_r \psi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r})$ является операторное уравнение $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{P}$, где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}$ — абстрактные векторы, а $\mathfrak{A}$ — один из описанных нами операторов. Что является аналогом уравнения $\mathcal{A}_r G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ для функции Грина? Мы видели раньше, что компоненты вдоль осей $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ оператора тождественного преобразования (идемфактора)

$$\mathfrak{I} = \int \mathbf{e}(\mathbf{r}) \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) dV, \quad \mathfrak{I} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \quad \text{для любого } \mathbf{F} \quad (7.5.30)$$

как раз равны дельта-функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, так что аналогом правой части уравнения для функции Грина могло бы быть $-4\pi \mathfrak{I}$.

Это сделало бы также функцию Грина скорее аналогичной абстрактному векторному оператору, а не абстрактному вектору, так как если правая часть уравнения является оператором, то такой же должна быть

и левая часть. Этот результат не удивителен, так как если аналогом плотности источника — функции ρ — является абстрактный вектор $\mathbf{P}$, то аналогом функции G должен быть оператор, преобразующий $\mathbf{P}$ в решение $\mathbf{F}$. Отсюда аналогом неоднородного уравнения

$$\mathcal{A}_r G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

является

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{G} = -4\pi \mathcal{J}, \quad (7.5.31)$$

или в компонентах вдоль $\mathbf{e}(\mathbf{r})$

$$\int A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') G(\mathbf{r}'|\mathbf{r}_0) dV' = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

что эквивалентно дифференциальному уравнению для G . Таким образом, обобщением функции Грина является оператор Грина $\mathcal{G}$.

Глядя на уравнение (7.5.31), мы сразу видим, что подходящей формой для оператора Грина служит

$$\mathcal{G} = -4\pi \mathcal{A}^{-1}. \quad (7.5.32)$$

Другими словами, функция Грина получается представлением в компонентах $\mathbf{e}(x)$ произведения -4π на оператор, обратный оператору $\mathcal{A}$, соответствующему однородному уравнению. Поэтому решение общего неоднородного уравнения $\mathcal{A} \cdot \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{P}$ равно

$$\mathbf{F} = \mathcal{G} \cdot \mathbf{P} = -4\pi \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathbf{P}, \quad (7.5.33)$$

что является в этих общих понятиях очень простым и очевидным ответом. Умножение на функцию Грина и интегрирование равносильны умножению на обратный оператор; функция $\int G(x|x_0) \rho(x_0) dx_0$ дает компоненты вдоль осей $\mathbf{e}(x)$ вектора $-4\pi \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathbf{P}$.

Соотношение взаимности. Мы видели, что обобщение теоремы Грина приводит к условию

$$\int [\bar{u} \mathcal{A}_x v - v \tilde{\mathcal{A}}_x \bar{u}] dV = 0,$$

где u и v удовлетворяют «самосопряженным» краевым условиям на граничной поверхности. Оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ сопряжен к $\mathcal{A}$ (если $\mathcal{A}$ эрмитов, то $\tilde{\mathcal{A}}$ также комплексно сопряжен к $\mathcal{A}$). Его функцией Грина служит $\mathcal{G}$, где $\mathcal{G} \cdot \mathcal{A} = -4\pi \mathcal{J}$. Однако если транспонировать равенство (7.5.31), то получается $\tilde{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{A} = -4\pi \mathcal{J}$; следовательно, $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}$. Другими словами, оператор Грина для сопряженного оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ сопряжен к оператору Грина $\mathcal{G}$:

$$\tilde{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}), \quad (7.5.34)$$

что является обобщением теоремы взаимности (7.5.10). В понятиях векторного пространства этот результат является до некоторой степени тавтологией. Если мы убеждены в том, что обобщением функции Грина является оператор, то (7.5.34) служит как раз определением сопряженности; с другой стороны, формула (7.5.34) может служить подтверждением того, что оператор $\mathcal{G}$ на самом деле обладает достаточно хорошими свойствами.

Теперь мы видим, почему исследование в начале этого параграфа было неполным и не могло быть полным в тот момент. Мы должны были рассматривать понятие «сопряженности» для дифференциальных (или интегральных) операторов, для функций Грина и для граничных условий до того, как мы смогли увидеть, что (7.5.27) на самом деле может содержать все

существенное из граничных условий и из свойств дифференциальных операторов, чтобы дать возможность определить операторы Грина. И мы должны были исследовать поведение функций Грина до того, как мы могли понять их связь с операторами.

Разложение оператора Грина в эрмитовом случае. Иногда бывает полезно разлагать операторы и векторы по некоторым другим системам собственных векторов, кроме бесконечной несчетной системы $\mathbf{e}(\mathbf{r})$. Так, если оператор $\mathfrak{A}$ равняется $\mathfrak{L} - \lambda$, где λ — мультипликативная постоянная, то можно было бы соблазниться разлагать участвующие величины по собственным векторам $\mathbf{e}_n$ уравнения

$$\mathfrak{L} \cdot \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{nm},$$

где операторное уравнение включает в себя как граничные условия, так и дифференциальный оператор. Например, оператор тождественного преобразования $\mathfrak{I}$ равен $\sum \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^*$, и можно было бы выразить оператор Грина через компоненты его матрицы по его же осям:

$$\mathfrak{G} = \sum_{m,n} \mathbf{e}_m G_{mn} \mathbf{e}_n^*. \quad (7.5.35)$$

Если $\mathfrak{L}$ — эрмитов оператор (и если краевые условия эрмитовы), то все собственные значения λ_n вещественны и сопряженный оператор будет комплексно сопряженным к $\mathfrak{L}$. Функции ψ (функции преобразования), входящие в соотношение между $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{e}_n = \int \psi_n(\mathbf{r}) \mathbf{e}(\mathbf{r}) dV, \quad \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \sum_m \bar{\psi}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m, \quad (7.5.36)$$

комплексно сопряжены к функциям ψ для сопряженного оператора $\tilde{\mathfrak{L}}$. Если оператор $\mathfrak{L}$ самосопряженный, то либо ψ — вещественные функции $\mathbf{r}(x, y, z, t)$, либо же, если они комплексны, их комплексно сопряженные также входят в систему собственных функций, так что при желании (и если это позволяют краевые условия) можно было бы сделать все ψ вещественными (например, для угла φ можно пользоваться функциями $e^{im\varphi}$ с положительным или отрицательным m или же функциями $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$).

Чтобы решить неоднородное уравнение $(\mathfrak{L} - \lambda) \cdot \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{P}$, надо сначала решить операторное уравнение

$$(\mathfrak{L} - \lambda) \cdot \mathfrak{G} = -4\pi \mathfrak{I}. \quad (7.5.37)$$

Действуя затем обеими частями этого уравнения на вектор $\mathbf{P}$, соответствующий функции плотности, мы видим, что решением уравнения $(\mathfrak{L} - \lambda) \cdot \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{P}$ будет $\mathbf{F} = \mathfrak{G} \cdot \mathbf{P}$.

Мы знаем, что $\mathfrak{G}$ равно $-4\pi(\mathfrak{L} - \lambda)^{-1}$, но это формальное решение не очень полезно. Более плодотворным было бы получить разложение $\mathfrak{G}$ по собственным векторам $\mathbf{e}_n$. Подставляя (7.5.35) в уравнение (7.5.37), мы видим, что матричные компоненты $\mathfrak{G}$ по собственным векторам $\mathbf{e}_n$ равны

$$G_{mn} = \frac{4\pi \delta_{mn}}{\lambda - \lambda_n}, \quad \mathfrak{G} = \sum_n \frac{4\pi}{\lambda - \lambda_n} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^*. \quad (7.5.38)$$

Функция Грина равна матричной компоненте $\mathfrak{G}$ по векторам $\mathbf{e}(\mathbf{r})$:

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{G} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0)}{\lambda - \lambda_n}. \quad (7.5.39)$$

Сопряженной к G будет функция $G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r})$, которая комплексно сопряжена к $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$. Это, конечно, является следствием того, что если оператор $\mathfrak{L}$

эрмитов, то функция G также [см. формулу (7.5.29)]. Если оператор $\mathfrak{L}$ к тому же самосопряженный, так что все его элементы в этом разложении вещественны, то функция G также самосопряженная и $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0|\mathbf{r})$. В этом случае или все ψ вещественны, или, если имеются комплексные ψ , их сопряженные также являются собственными функциями, так что сумма (7.5.39) симметрична относительно $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$.

Следовательно, вообще для эрмитового оператора функция Грина с точкой наблюдения в $\mathbf{r}$ и источником в $\mathbf{r}_0$ комплексно сопряжена функции Грина с точкой наблюдения в $\mathbf{r}_0$ и источником в $\mathbf{r}$, тогда как для самосопряженного оператора (с самосопряженными краевыми условиями) источник и точку наблюдения можно переставить без изменения G . Это окончательное обобщение соотношения взаимности.

Неэрмитовы операторы; биортогональные функции. Иногда мы бываем вынуждены рассматривать дифференциальные уравнения или краевые условия, которые не соответствуют эрмитовым операторным уравнениям. В этом случае оператор $\mathfrak{L}^*$ отличается от оператора $\mathfrak{L}$ и собственные векторы также должны отличаться. Мы определим обе системы обычными уравнениями

$$\mathfrak{L} \cdot \mathbf{e}_m = \lambda_m \mathbf{e}_m, \quad \mathfrak{L}^* \cdot \mathbf{f}_n = \mu_n \mathbf{f}_n, \quad (7.5.40)$$

где, конечно, $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{f}_n$ имеют сопряженными векторами $\mathbf{e}_m^*$ и $\mathbf{f}_n^*$.

Собственные значения λ_n для $\mathfrak{L}$ можно в принципе получить, если известен эффект $\mathfrak{L}$ для некоторой стандартной системы взаимно ортогональных единичных векторов $\mathbf{a}_n$ (которыми, конечно, могут быть $\mathbf{e}(x)$):

$$\mathfrak{L} = \sum_{m,n} \mathbf{a}_m L_{mn} \mathbf{a}_n^*, \quad \mathfrak{L}^* = \sum_{m,n} \mathbf{a}_m \bar{L}_{nm} \mathbf{a}_n^*, \quad (7.5.41)$$

согласно формуле (1.6.36). Как показано в § 1.6, уравнениям (7.5.40) отвечают системы уравнений

$$\sum_n L_{mn} (\mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{e}_\nu) = \lambda_\nu (\mathbf{a}_m^* \cdot \mathbf{e}_\nu), \quad \sum_n \bar{L}_{nm} (\mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{f}_\nu) = \mu_\nu (\mathbf{a}_m^* \cdot \mathbf{f}_\nu),$$

которые для получения собственных значений λ_ν и μ_ν надо решить, находя корни уравнений, полученных приравниванием нулю определителя из коэффициентов при $\mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{e}_\nu$ и $\mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{f}_\nu$:

$$|L_{mn} - \lambda_\nu \delta_{mn}| = 0, \quad |\bar{L}_{nm} - \mu_\nu \delta_{nm}| = 0. \quad (7.5.42)$$

Система корней λ_ν тесно связана с системой корней μ_ν , что станет очевидным, если взять сопряженное к первому из уравнений (7.5.40),

$$(\mathfrak{L} \cdot \mathbf{e}_\nu)^* = \mathbf{e}_\nu^* \cdot \mathfrak{L}^* = \bar{\lambda}_\nu \mathbf{e}_\nu^*,$$

что даст

$$\sum_m (\mathbf{e}_\nu^* \cdot \mathbf{a}_m) \bar{L}_{nm} = \bar{\lambda}_\nu (\mathbf{e}_\nu^* \cdot \mathbf{a}_n)$$

с вековым определителем

$$|\bar{L}_{nm} - \bar{\lambda}_\nu \delta_{nm}| = 0,$$

который совпадает со вторым определителем (7.5.42). Следовательно, система корней μ_ν совпадает с системой корней $\bar{\lambda}_\nu$, и можно упорядочить индексы так, что $\mu_\nu = \bar{\lambda}_\nu$. Однако это не означает, что $\mathbf{e}_m = \mathbf{f}_m^*$ или $\mathbf{e}_n^* = \mathbf{f}_n$.

Если $\mathfrak{L}$ не эрмитов, то система собственных векторов $\mathbf{e}_n$ не является ортогональной, но векторы $\mathbf{f}_n$ имеют ортогональную взаимосвязь с векторами $\mathbf{e}_m$; действительно,

$$\mathbf{f}_n^* \cdot \mathfrak{L} \cdot \mathbf{e}_m = \lambda_m [\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m] = [(\mathfrak{L}^* \cdot \mathbf{f}_n)^* \cdot \mathbf{e}_m] = \lambda_n [\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m],$$

так что

$$(\lambda_m - \lambda_n)(\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m) = 0.$$

Следовательно, скалярное произведение $\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}_m$ равно нулю, за исключением случая, когда $m = n$. Поэтому разложение любого вектора $\mathbf{F}$ имеет вид

$$\mathbf{F} = \sum F_n \mathbf{e}_n, \quad \text{где} \quad F_n = \mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{F}. \quad (7.5.43)$$

Двойная система собственных векторов $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{f}_n$ называется *биортогональной системой* собственных векторов. Об их представлениях через векторы $\mathbf{e}(x)$

$$\psi_n(\mathbf{r}) = \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_n, \quad \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r})$$

говорят, что они образуют биортогональную систему собственных функций.

Отсюда оператор тождественного преобразования $\mathfrak{I}$ равен $\sum \mathbf{e}_n \mathbf{f}_n^*$, а разложение оператора Грина имеет вид

$$\mathfrak{G} = \sum_{m,n} \mathbf{e}_n G_{nm} \mathbf{f}_m^* = 4\pi \sum_n \frac{\mathbf{e}_n \mathbf{f}_n^*}{\lambda - \lambda_n},$$

и соответствующая функция Грина равна

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}) \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{\lambda - \lambda_n}. \quad (7.5.44)$$

Эта функция симметрична, только если $\varphi_n = \bar{\psi}_n$ (как будет в некоторых случаях).

В § 11.1 [формулы (11.1.21) и далее] мы рассмотрим случай колеблющейся струны с однородными граничными условиями, зависящими от частоты (наклон графика ψ на границе зависит как от значения ψ , так и от ее скорости). Эти граничные условия не самосопряженные, и соответствующий оператор не эрмитов, так что надо применять биортогональные собственные функции. Мы решаем задачу для данных условий, а также для сопряженных граничных условий, комплексно сопряженных к (11.1.22). Оказывается, что в этом случае $\varphi_n = \bar{\psi}_n$, так что ряд (11.2.25) соответствует формуле (7.5.44).

Задачи к главе 7

7.1. Круговой проводящий диск радиуса a с постоянным потенциалом V помещен целиком в бесконечный плоский проводник (совпадающий с плоскостью $z = 0$), на котором поддерживается нулевой потенциал. Показать, что функция Грина, соответствующая этой задаче, равна

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2]^{-1/2}.$$

Показать, что потенциал в точке (x, y, z) , порожденный этой комбинацией проводников, равен

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a y dy (r^2 + y^2 - 2ry \sin \vartheta \cos \varphi)^{-3/2},$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $\operatorname{tg} \vartheta = (1/z) \sqrt{x^2 + y^2}$. Найти плотность заряда на диске и на бесконечном проводнике в виде определенных интегралов. Найти ψ для r , больших по сравнению с a , и для r , малых по сравнению с a .

7.2. Пусть граничное условие на плоскости $z=0$ состоит в том, что $\partial\psi/\partial z = V$ на диске радиуса a и $=0$ в остальной части плоскости. Показать, что функция Грина равна

$$[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{-1/2} + [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2]^{-1/2}.$$

Подсчитать потенциал ψ на поверхности диска и его градиент при $r \gg a$.

7.3. Пусть диск, о котором говорится в задачах 7.1 и 7.2, колеблется нормально к своей плоскости со скоростью $Ve^{-i\omega t}$, излучая звук в области $z > 0$. Показать, что соответствующая функция Грина равна $(e^{ikR}/R) + (e^{ikR'}/R')$, где $k = \omega/c$ и

$$R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, \\ (R')^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2.$$

Показать, что если $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \gg a^2$, то асимптотическое выражение для ψ имеет вид

$$\psi \simeq (Va^2/r) e^{ikr - i\omega t} J_1(ka \sin \theta) / ka \sin \theta.$$

Применить этот результат для исследования диффракции Фраунгофера волн, исходящих из круглого отверстия.

7.4. На внутренней поверхности сферы радиуса a поддерживается потенциал $\psi_a(\vartheta, \varphi)$, где ϑ и φ — угловые координаты сферической системы, концентрической с данной сферой. Показать, что функция Грина, соответствующая этой задаче, равна

$$[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta]^{-1/2} - [(rr_0/a)^2 + a^2 - 2rr_0 \cos \theta]^{-1/2},$$

где θ — угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки наблюдения и радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ точки источника [$\cos \theta = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$]. Показать, что внутренний потенциал равен

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{a}{4\pi} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi \frac{\psi_a(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0}{[a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta]^{3/2}}.$$

Найти разложение ψ в ряд по степеням r/a , применимый для точек, находящихся вблизи начала координат.

7.5. Показать, что в сферических координатах функция Грина для уравнения Лапласа равна

$$\frac{1}{R} = \sum_{n,m} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cdot \begin{cases} (r^n/r_0^{n+1}) & \text{для } r \leq r_0, \\ (r_0^n/r^{n+1}) & \text{для } r \geq r_0, \end{cases}$$

а для уравнения Гельмгольца

$$\frac{e^{ikR}}{R} = ik \sum_{n,m} \varepsilon_m (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ \times P_n^m(\cos \vartheta_0) \cdot \begin{cases} j_n(kr) h_n(kr_0) & \text{для } r \leq r_0, \\ j_n(kr_0) h_n(kr) & \text{для } r \geq r_0, \end{cases}$$

где j_n и h_n — сферические функции Бесселя (см. задачу 5.20 и таблицы в конце гл. 11).

7.6. Решение уравнения Гельмгольца первоначально имеет вид

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sum A_{mn} \cos(m\varphi + \alpha_m) P_n^m(\cos \vartheta) j_n(kr)$$

и определено во всем пространстве. Вводится сфера радиуса a с центром в начале координат, на которой ψ должна удовлетворять граничному условию

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = \eta \psi, \quad r = a.$$

Показать, что новое решение ψ уравнения $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ вне сферы, удовлетворяющее указанному граничному условию при $r = a$ и тому условию, что ψ при $r \rightarrow \infty$ должна равняться сумме ψ_0 и расходящейся волны, является решением следующего интегрального уравнения:

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r_0^s) \left[\frac{\partial}{\partial r_0} G(r|r_0^s) - \eta G(r|r_0^s) \right] dA_0, \quad r \geq a,$$

где G — второй ряд задачи 7.5, а интегрирование производится по поверхности сферы.

7.7. Проволока радиуса b погружена в масляную ванну бесконечного объема. Коэффициент тепло-диффузии как масла, так и проволоки равен a^2 . Как масло, так и проволока сначала имели нулевую температуру. Через проволоку послан электрический импульс, мгновенно нагревающий ее до температуры T_0 . Показать, что температура на расстоянии r от оси провода через время t равна

$$T = \frac{T_0}{2a^2 t} e^{-r^2/4a^2 t} \int_0^b e^{-y^2/4a^2 t} J_0\left(\frac{iyr}{2a^2 t}\right) y dy.$$

При помощи разложения в ряд и асимптотического выражения для J_0 подсчитать T для двух предельных случаев, когда $2a^2 t/r$ значительно меньше или значительно больше b .

7.8. Определить одномерную функцию Грина $G_k(r|r_0)$ для дифференциального оператора Бесселя

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dG_k}{dr} \right) + k^2 r G_k = -\delta(r - r_0), \quad r \leq a,$$

где $G_k(a|r_0) = 0$. Показать, что G_k имеет особенности при $k = k_n$, где $J_0(k_n a) = 0$. Из поведения G_k в такой особенности определить нормирующий интеграл

$$\int_0^a r J_0^2(k_n r) dr.$$

7.9. Показать, что в цилиндрических координатах

$$\frac{e^{ikR}}{iR} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (2 - \delta_{0m}) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^\infty J_m(\lambda \rho) J_m(\lambda \rho_0) \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \lambda^2}|z - z_0|}}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \lambda d\lambda.$$

7.10. Пусть $u = E_x$ и $v = -E_y$, где $\mathbf{E}$ — двумерное электрическое поле. Показать, что уравнения, которым удовлетворяют u и v , можно объединить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x & -\partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Определить аффинор Грина

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющий уравнению

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x & -\partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix} \mathfrak{G} = -4\pi \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix} G,$$

где G — функция Грина для двумерного уравнения Лапласа. Исследовать смысл $\mathfrak{G}$ и получить при помощи $\mathfrak{G}$ решение неоднородного вида уравнений для u и v .

7.11. Пусть ψ удовлетворяет следующему уравнению:

$$(d^2\psi/dx^2) + k^2\psi = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

и граничному условию $\psi(0) = 0$ и $\psi(l) = f\psi'(l)$, где f — комплексная постоянная. Показать, что собственными функциями служат $\sin(k_n x)$, где $\operatorname{tg} k_n = fk_n$. Показать, что сопряженное решение удовлетворяет тому же уравнению, что и ψ , но с граничными условиями $\tilde{\psi}(0) = 0$, $\tilde{\psi}(l) = \bar{f}\tilde{\psi}'(l)$. Показать, что $\tilde{\psi}_n = \bar{\psi}_n$. Показать, что

$$\int_0^l \tilde{\psi}_n \psi_m dx = \int_0^l \psi_n \psi_m dx = 0, \quad n \neq m.$$

Рассмотреть нормировку функций ψ_n и проверить результат при помощи исследования функции Грина, которую можно получить в замкнутом виде для этой задачи.

7.12. Пусть самосопряженный оператор $\mathcal{L}$ можно разбить на две самосопряженных части $\mathcal{L}_r$ и $\mathcal{L}_\rho$, где $\mathcal{L}_r$ действует только на переменную r , а $\mathcal{L}_\rho$ — только на ρ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_\rho.$$

Пусть ортогональными и нормированными собственными функциями оператора $\mathcal{L}_\rho$ служат $\varphi_n(\rho)$:

$$\mathcal{L}_\rho \varphi_n(\rho) = \lambda_n \varphi_n(\rho).$$

Показать, что функция Грина $G_\lambda(r, \rho | r_0, \rho_0)$, удовлетворяющая уравнению

$$[\mathcal{L}(r, \rho) - \lambda] G_\lambda = -\delta(r - r_0) \delta(\rho - \rho_0),$$

выражается формулой

$$G_\lambda = \sum_n g_{\lambda - \lambda_n}(r | r_0) \varphi_n(\rho) \varphi_n(\rho_0),$$

где

$$[\mathcal{L}_r - (\lambda - \lambda_n)] g_{\lambda - \lambda_n} = -\delta(r - r_0).$$

7.13. Пусть

$$(\mathcal{L} - \lambda) G_\lambda = -4\pi \delta(r - r_0).$$

Показать, что

$$G_\lambda(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) - \frac{\lambda}{4\pi} \int G_\lambda(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_0) dV_1$$

и

$$G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = G_\lambda(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + \frac{\lambda}{4\pi} \int G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) G_\lambda(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_0) dV_1.$$

7.14. Пусть G — функция Грина скалярного уравнения Гельмгольца для полубесконечной области $x > 0$, удовлетворяющая смешанным граничным условиям

$$\partial\psi/\partial x = F\psi \quad \text{при} \quad x = 0;$$

показать, что

$$\frac{\partial G}{\partial x} - FG = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + F \right) \left(\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'} \right),$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, а $R' = |\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|$. При помощи интегрирования показать, что

$$G = (e^{ikR}/R) + T.$$

Определить T .

Таблица функций Грина

Общие свойства. Функция Грина $G_\lambda(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}(G) - \lambda G = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и некоторым однородным граничным условиям на граничной поверхности S . Сопряженная к ней функция [см. формулу (7.5.4)] $\tilde{G}_\lambda(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{G}) - \lambda \tilde{G} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и сопряженным граничным условиям [см. формулу (7.5.9)] на граничной поверхности S . *Принцип взаимности* состоит в том, что

$$G_\lambda(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \tilde{G}_\lambda(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}).$$

Если оператор $\mathcal{L}$ эрмитов (если его сопряженный и комплексно сопряженный операторы совпадают), то функция G_λ также эрмитова. В этом случае собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}(\phi_n) - \lambda_n \phi_n = 0,$$

вещественны, собственные функции ϕ_n взаимно ортогональны и

$$G_\lambda(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\phi}_n(\mathbf{r}_0) \phi_n(\mathbf{r})}{N_n(\lambda - \lambda_n)},$$

где $N_n = \int |\phi_n|^2 dV$. Если $\mathcal{L}$ не эрмитов, то собственные функции ϕ_n эрмитово сопряженного уравнения

$$\mathcal{L}^*(\Phi_n) - \mu_n \Phi_n = 0, \quad \bar{\mathcal{L}}^* = \tilde{\mathcal{L}}, \quad \mu_n = \bar{\lambda}_n,$$

могут отличаться от собственных функций ϕ_n , и как в той, так и в другой системе функции могут не быть взаимно ортогональными. Однако

в этом случае двойная система ψ, Φ биортогональна и

$$G_\lambda(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\Phi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r})}{N_n(\lambda - \lambda_n)},$$

а сопряженная функция $\tilde{G}$ не обязательно равна комплексно сопряженной $\bar{G}$ [см. формулу (7.5.44); $N_n = \int \bar{\Phi}_n \psi_n dv$].

Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Функция G является решением уравнения

$$\nabla^2 G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + k^2 G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на некоторой поверхности S . Тогда соотношение взаимности имеет вид $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = G_k(\mathbf{r}_0|\mathbf{r})$, так как уравнение самосопряженное. Если ψ представляет собой решение уравнения $(\nabla^2 + k^2)\psi = -4\pi\rho$, имеющее на поверхности S значение $\psi_0(\mathbf{r}^s)$ и производную по направлению внешней нормали $N_0(\mathbf{r}^s) = (\partial\psi/\partial n)_S$, то внутри и на S

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}_0) G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv_0 + \frac{1}{4\pi} \oint \left[G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) N_0(\mathbf{r}_0^s) - \psi_0(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0,$$

где первый интеграл берется по объему, ограниченному поверхностью S , а второй представляет собой поток через всю S наружу. Нормальная производная берется по внешней (указывающей наружу) нормали.

Если поверхность S находится на бесконечности и задаются расходящиеся волны [условие причинности, формула (7.2.17)], то G принимает простой вид $g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ для *бесконечной области*:

$$\begin{aligned} g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) &= e^{ikR}/R, & 3 \text{ измерения; } R^2 &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2; \\ &= i\pi H_0^{(1)}(kP), & 2 \text{ измерения; } P^2 &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2; \\ &= \frac{2\pi i}{k} e^{ik|x-z_0|}, & 1 \text{ измерение.} \end{aligned}$$

Функция Грина для уравнения Пуассона $\nabla^2\psi = -4\pi\rho$ равна $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$, т. е. $\lambda=0$. Соответствующий вид для бесконечной области:

$$\begin{aligned} g_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) &= 1/R, & 3 \text{ измерения;} \\ &= -2 \ln R, & 2 \text{ измерения.} \end{aligned}$$

Если S целиком или частично совпадает с одной из координатных поверхностей разделяющей системы координат, исследованных в § 5.1, то G можно разложить в ряд по разделенным решениям. Допустим, что граничные условия (конечность, периодичность или однородные условия на границе) таковы, что два из множителей могут быть собственными функциями, скажем ξ_2 - и ξ_3 -множители. ξ_1 -множитель должен также удовлетворять однородным условиям на поверхности, которую мы считаем соответствующей поверхностям $\xi_1=a$, $\xi_1=b$, $b>a$. Пусть координаты имеют коэффициенты Ламе h_1, h_2, h_3 , определитель Штеккеля S с элементами $\Phi_{mn}(\xi_m)$ и алгебраические дополнения $M_m = \partial S / \partial \Phi_{m1}$ [см. формулы (5.1.25) и далее]. Тогда в уравнении Гельмгольца

$$\sum_n \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(f_n \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right) + k_1^2 \psi = 0, \quad k_1^2 = k^2,$$

переменные разделяются, если положить $\psi = X_1(\xi_1) X_2(\xi_2) X_3(\xi_3)$, где

$$\frac{1}{f_m} \frac{d}{d\xi_m} \left(f_m \frac{dX_m}{d\xi_m} \right) + \sum_{n=1}^3 k_n^2 \Phi_{mn} X_m = 0$$

и в качестве X_2 и X_3 берутся решения, имеющие вид собственных функций для соответствующих граничных условий:

$$W_q(\xi_2, \xi_3) = \theta_{\nu_q}(\xi_2) X_{\mu_q}(\xi_3), \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, \dots$$

Они ортогональны относительно функции плотности ρ (часто $\rho = h_2 h_3$), так что

$$\iint \bar{W}_p W_q \rho(\xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3 = \begin{cases} 0 & \text{для } p \neq q, \\ N_q & \text{для } p = q, \end{cases}$$

причем функции W образуют полную систему для координат ξ_2, ξ_3 внутри поверхности S .

В качестве ξ_1 -множителя выбираются два независимых решения $y_{1q}(\xi_1)$ и $y_{2q}(\xi_1)$, каждое из которых соответствует константам разделения в W_q , причем эти решения выбраны так, что y_1 удовлетворяет требуемому граничному условию при $\xi_1 = a$, а y_2 — при $\xi_1 = b$ ($b > a$). Тогда

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\frac{4\pi h_1}{h_2 h_3} \sum_q \frac{\rho(\xi'_2, \xi'_3)}{N_{q1}} \bar{W}_q(\xi'_2, \xi'_3) W_q(\xi_2, \xi_3) \frac{1}{\Delta} \times \\ \times \begin{cases} y_{1q}(\xi_1) y_{2q}(\xi'_1) & \text{для } \xi_1 < \xi'_1, \\ y_{2q}(\xi_1) y_{1q}(\xi'_1) & \text{для } \xi_1 > \xi'_1, \end{cases}$$

где коэффициенты Ламе являются функциями координат со штрихами, а Δ — определитель Вронского для двух ξ'_1 -решений:

$$\Delta = \Delta(y_{1q}, y_{2q}) = y_{1q} y'_{2q} - y'_{1q} y_{2q} = \text{const}/f_1, \text{ функции от } \xi'_1.$$

Разложение функции Грина для бесконечной области в обобщенном сейчас виде приведено для двумерных полярных координат в формулах (7.2.51) и (11.2.23), для прямоугольных координат в формуле (11.2.11), для параболических координат в формуле (11.2.70) и для эллиптических координат в формуле (11.2.93). Разложения для трехмерных систем прямоугольных координат имеются в формуле (11.3.10), для сферических координат в формуле (11.3.44) и для сфероидальных координат в формуле (11.3.91). Подобные разложения для векторных решений даны в формулах (13.3.15) и (13.3.79).

Функция Грина для волнового уравнения. Функция G является решением уравнения

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на поверхности S и подчиняющимся требованию «причинности», состоящему в том, что $G = 0$ и $\partial G / \partial t = 0$ всюду при $t < t_0$. В этом случае соотношение взаимности имеет вид

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t).$$

Если $\psi(\mathbf{r}, t)$ — решение уравнения $\nabla^2 \psi - (1/c^2) (\partial^2 \psi / \partial t^2) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$, имеющее на поверхности S значение $\psi_s(\mathbf{r}^s)$ и производную по внешней нормали $N_s(\mathbf{r}^s)$, а внутри S при $t = 0$ начальное значение $\psi_0(\mathbf{r})$ и начальную производную

по времени $v_0(\mathbf{r}) = \partial\psi/\partial t|_{t=0}$, то для $t > 0$ внутри и на S

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int dV_0 \cdot G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \rho(\mathbf{r}_0, t_0) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \oint dA_0 \cdot \left[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0^s, t_0) N_s(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0^s, t_0) \right] - \\ & - \frac{1}{4\pi c^2} \int dV_0 \cdot \left[\left(\frac{\partial G}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} \psi_0(\mathbf{r}_0) - G_{t_0=0} v_0(\mathbf{r}_0) \right], \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Замкнутый вид функции Грина для бесконечной области таков:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = & (1/R) \delta[(R/c) - (t - t_0)] \quad \text{для 3 измерений,} \\ & R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2; \\ = & [2c/\sqrt{c^2(t - t_0)^2 - P^2}] u[(t - t_0) - (P/c)] \quad \text{для 2-измерений,} \\ & P^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2; \\ = & 2c\pi u[(t - t_0) - (|x - x_0|/c)] \quad \text{для 1 измерения,} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u(x) = & 0, \quad x < 0, \quad u(x) = 1, \quad x > 0, \quad \delta(x) = u'(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x+a) dx = & f(a), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x+a) dx = -f'(a). \end{aligned}$$

Функция Грина для волнового уравнения связана с функцией Грина для уравнения Гельмгольца интегральным соотношением Фурье

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = & \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) e^{-ikc(t-t_0)} dk = \\ = & 4\pi c^2 u(t - t_0) \sum_n \frac{1}{\omega_n} \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}) \sin[\omega_n(t - t_0)], \end{aligned}$$

где ψ_n является собственной функцией — решением уравнения $\nabla^2 \psi + k_n^2 \psi = 0$ внутри S , причем $\omega_n = k_n c$. Контур интегрирования по k расположен непосредственно выше вещественной оси.

Функция Грина для уравнения диффузии. Функция G является решением уравнения

$$\nabla^2 G_a(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) - a^2 \frac{\partial}{\partial t} G_a(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на поверхности S и подчиняющимся требованию причинности, состоящему в том, что G при $t < t_0$ равна нулю. Сопряженная функция $\tilde{G}_a(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G_a(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_0, -t_0)$ удовлетворяет сопряженному уравнению $\nabla^2 \tilde{G} + a^2 \partial \tilde{G} / \partial t = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0)$. Соотношение взаимности имеет вид

$$G_a(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \tilde{G}_a(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{r}, t) = G_a(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t).$$

Если $\psi(\mathbf{r})$ — решение уравнения $\nabla^2 \psi - a^2 \partial \psi / \partial t = -4\pi \rho(\mathbf{r})$, имеющее на поверхности S значение $\psi_s(\mathbf{r}^s)$ и производную по внешней нормали $N_s(\mathbf{r}^s) = \partial \psi / \partial n$, а внутри S при $t = 0$ — начальное значение $\psi_0(\mathbf{r})$, то для

$t > 0$ внутри и на S

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int \rho(\mathbf{r}_0, t) G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) dV_0 + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int \left[G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0^s, t_0) N_s(\mathbf{r}_0^s) - \psi_s(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0^s, t_0) \right] dA_0 + \\ & + \frac{a^2}{4\pi} \int \psi_0(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, 0) dV_0, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Вид функции Грина для бесконечной области в случае n измерений:

$$g_a(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2} \left(\frac{a}{2\sqrt{\pi\tau}} \right)^n e^{-a^2 R^2/4\tau} u(\tau),$$

где $\tau = t - t_0$ и $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. Функция Грина для уравнения диффузии связана с собственными функциями ψ_n соответствующего уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 + k_n^2)\psi_n = 0$ для области, заключенной внутри S , соотношением

$$G_a(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2} u(t - t_0) \sum_n \frac{e^{-(k_n^2/a^2)(t-t_0)}}{N_n} \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r}),$$

где $\int \bar{\psi}_n \psi_m dV = \delta_{nm} N_n$.

ЛИТЕРАТУРА

Сведения по функциям Грина и их приложениям разбросаны по разным работам. Удовлетворительное изложение различных аспектов этой теории можно найти в следующих книгах:

- Вебстер А., Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1934.
 Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1950.
 Карслоу Х. С., Теория теплопроводности, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
 Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
 Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957.
 Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1954.
 Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1953.
 Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ГИИ, М.—Л., 1937.
 Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, ch. 2, Cambridge, New York, 1932.
 Kellogg O., Foundations of Potential Theory, Berlin, 1939, перепечатка, New York, 1944.
 Murnaghan F., Introduction to Applied Mathematics, New York, 1948.

Интегральные уравнения

В предыдущих главах при описании распространения некоего поля ψ мы полагались главным образом на дифференциальные уравнения. Дополнительно задавались краевые условия, так как само дифференциальное уравнение описывает ψ лишь локально, связывая значения ψ в точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Дифференциальное уравнение позволяет, начав с какой-либо заданной точки $\mathbf{r}$, шаг за шагом строить различные возможные решения. Краевые условия призваны для того, чтобы можно было выбрать решение, соответствующее интересующим нас физическим условиям.

Поскольку граничные значения ψ играют столь важную роль, естественно попытаться так задать уравнение, определяющее ψ , чтобы оно сразу включало в себя краевые условия. Такое уравнение должно связать $\psi(\mathbf{r})$ не только со значениями ψ в точках, близких к $\mathbf{r}$, но и со значениями во всех точках области, включая граничные точки. Интегральные уравнения обладают именно таким свойством. Включая в себя краевые условия, такое уравнение в весьма компактной форме представляет всю физику задачи и оказывается, как мы увидим на многих примерах, удобнее, чем дифференциальное уравнение.

Это не единственная причина для изучения интегральных уравнений. Мы уже видели при рассмотрении диффузии и явлений переноса, что во многих случаях дифференциальные уравнения не могут служить средством описания таких явлений. Это имеет место в тех задачах, где поведение ψ в точке $\mathbf{r}$ зависит не только от значений ψ вблизи $\mathbf{r}$, но и от значений ψ в точках, удаленных от $\mathbf{r}$.

В первом параграфе этой главы мы рассмотрим некоторые из интегральных уравнений, встречающихся в физике, и опишем отдельные типы таких уравнений, обладающие различными свойствами и требующие различных способов решения. После обсуждения общих математических свойств этих уравнений, будут изложены способы их решения.

8. 1. Интегральные уравнения физики; их классификация

Рассмотрим сначала пример из теории переноса. Пусть некоторая частица, движущаяся в заданном направлении и обладающая определенной энергией, в результате соударения с другой частицей приобретает значение импульса $\mathbf{p}$, отличное по величине и направлению от первоначального значения $\mathbf{p}_0$. Обозначим через $P(\mathbf{p}|\mathbf{p}_0) d\mathbf{p} dt$ вероятность того, что частица, обладающая импульсом $\mathbf{p}_0$, за время dt , в результате соударений, приобретет значение импульса, заключенное между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$. Если в окрестности точки $\mathbf{r}$ доля частиц, имеющих импульсы, заключенные между $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_0 + d\mathbf{p}_0$, равна $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, t) d\mathbf{p}_0$, то вычисляя $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t + dt)$, мы должны учесть

приращение f , получающееся за счет соударений, т. е. величину

$$\left[\int P(p|p_0) f(r, p_0, t) dp_0 \right] dt.$$

Мы сразу же замечаем, что значение $f(r, p, t)$ при фиксированном p определяется значениями $f(r, p_0, t)$ при *всех* p_0 , совместимых с законами сохранения импульса и энергии. Для того чтобы получить полную картину, составим уравнение для f , учтя полное приращение f за время dt . Выражение, приведенное выше, дает число частиц, рассеянных в элемент фазового пространства, определяемый величинами r и p . Некоторое число частиц покинет этот элемент из-за соударений и за счет поглощения. Пусть $P_T(p)$ — вероятность того, что частица покинет окрестность значения p за единицу времени. Если поглощения нет, то $P_T(p) = \int P(p_0|p) dp_0$. Число частиц, покидающих эту окрестность за время dt , равно

$$P_T(p) f(r, p, t) dt.$$

Наконец, даже если нет соударений, f изменяется просто потому, что частицы движутся. Частица, находящаяся в точке r , за dt секунд до этого занимала положение $r - (p/m) dt$. Итак,

$$f(r, p, t + dt) = f[r - (p/m) dt, p, t] - P_T(p) f(r, p, t) dt + \left[\int P(p|p_0) f(r, p_0, t) dp_0 \right] dt.$$

Согласно этому уравнению, число частиц, находящихся в окрестности точки r в момент $t + dt$, равно числу частиц, достигших окрестности этой точки в результате движения, минус число частиц, поглощенных или рассеянных из интервала $(p, p + dp)$, плюс число частиц, рассеянных в этот интервал в результате соударений.

Разложив первый член правой части по степеням dt , получаем (см. § 2.4 и 12.2) интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left(\frac{p}{m} \cdot \nabla \right) f - P_T f + \int P(p|p_0) f(r, p_0, t) dp_0. \quad (8.1.1)$$

В стационарных условиях f не зависит от t , и мы приходим к уравнению

$$\left(\frac{p}{m} \cdot \nabla \right) f = - P_T f + \int P(p|p_0) f(r, p_0) dp_0. \quad (8.1.2)$$

Подчеркнем еще раз, что f при любом p связано со всей совокупностью значений f , а не только со значениями, отвечающими близким p . В § 2.4 была установлена связь вероятностей P_T и P с эффективными сечениями и соответствующее уравнение посредством интегрирования из интегро-дифференциального было превращено в интегральное. Уравнения переноса будут еще рассмотрены в гл. 12.

Пример из акустики. Не следует думать, что уравнения такого типа встречаются только в задачах переноса, где соударения являются естественной причиной скачкообразного изменения импульса p . Можно взять пример хотя бы из акустики. Интегро-дифференциальные уравнения появляются, как мы увидим, тогда, когда имеются две взаимодействующие друг с другом системы с распределенными массами или с какими-либо другими характеристическими

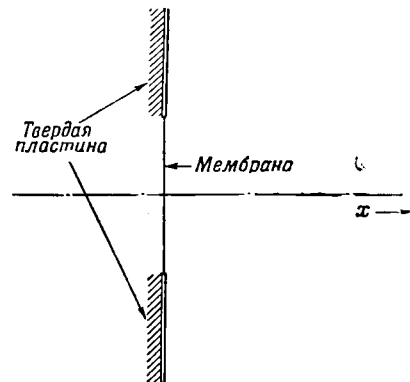


Рис. 8.1. Излучение мембраны, закрепленной в твердой пластине.

параметрами. Рассмотрим в качестве примера колебания мембраны, натянутой на отверстии в твердой пластине (см. рис. 8.1). Колебания мембраны вызывают звуковые волны, которые в свою очередь оказывают на мембрану обратное воздействие, вызывая ее колебания, и т. д. Пусть смещения точек мембраны описываются функцией $\psi(y, z)$; соответствующая скорость в направлении оси x равна $\partial\psi/\partial t = -i\omega\psi$, если предположить простую гармоническую зависимость от времени. Согласно уравнению (7.2.10), в среде, примыкающей к мембране справа, существует потенциал скоростей

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int G_k(x, y, z | 0, y_0, z_0) v_n(y_0, z_0) dS_0,$$

где G_k — функция Грина, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial G_k}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Здесь $k = \omega/c$, c — скорость распространения звука, а v_n — нормальная составляющая скорости, т. е. составляющая по оси x в отрицательном направлении. Таким образом, $v_n = i\omega\psi$. Функция G_k может быть получена методом изображений (см. стр. 753):

$$G_k(x, y, z | x_0, y_0, z_0) = -\frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'},$$

где

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \\ R'^2 = (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Звук, порожденный в области $x > 0$, вызывает появление давления, которое в свою очередь играет роль возмущающей силы в уравнении колебаний мембраны. Давление связано с потенциалом скоростей соотношением

$$p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega \rho_0 \varphi,$$

где ρ_0 — средняя плотность среды, в которой распространяется звук. Уравнение движения мембраны запишется в виде

$$\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi = -\frac{p}{T},$$

где $\kappa = \omega/V$, $V = \sqrt{T/\mu}$, T — натяжение, μ — поверхностная плотность мембраны. Подставив выражение для p , получим

$$\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi = \frac{\omega^2 \rho_0}{2\pi T} \int \frac{\exp[ik\sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}]}{\sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \psi(y_0, z_0) dS_0. \quad (8.1.3)$$

Мы видим, что и в этом уравнении значение ψ в какой-либо точке мембраны связано посредством интеграла в правой части не только со значениями ψ в соседних точках, но и с ее значениями во всех точках мембраны. Это уравнение — интегро-дифференциальное, но, если воспользоваться функцией Грина для мембраны, его можно свести к интегральному уравнению.

Приведенный пример ясно показывает, что интегральное уравнение появляется всякий раз, когда возбуждение в какой-либо точке среды может быть передано другим точкам через посредство некоторой среды, взаимодействующей с первой. При этом уравнение, описывающее колебания первой среды, будет содержать член, учитывающий распространение возбуждения во второй среде. Он будет зависеть от значений ψ во всех точках соприкосновения обеих сред; в приведенном примере таковым является член с интегралом в уравнении (8.1.3). Проблемы излучения волн, в которых нельзя пренебречь реакцией излучения на источник, естественным образом

приводят к интегральным уравнениям. Решение такого интегрального уравнения позволяет точно определить сопротивление излучения или, что является более общей задачей, импеданс излучения. Такого рода проблемы будут рассмотрены в гл. 11 и 13.

Пример из волновой механики. Последний пример мы заимствуем из квантовой механики. Уравнение Шредингера должно записываться в виде интегрального уравнения тогда, когда потенциальная энергия зависит от скоростей. Пусть

$$V(\mathbf{r}, \hbar \nabla / i)$$

— потенциальная энергия, причем вместо оператора импульса уже подставлено $(\hbar/i) \nabla$. В дифференциальной форме уравнение Шредингера имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \{E - V[\mathbf{r}, (\hbar/i) \nabla]\} \psi = 0.$$

Это уравнение имеет конечный порядок только в том случае, когда V является многочленом от ∇ . Для того чтобы получить эквивалентное интегральное уравнение, введем преобразование Фурье функции ψ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{p}) e^{(i/\hbar) \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{p}.$$

Подставляя это выражение в уравнение Шредингера, умножая на $(2\pi\hbar)^{-3/2} e^{-(i/\hbar) \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$ и интегрируя по $\mathbf{r}$, мы получаем

$$\frac{q^2}{2m} \varphi(\mathbf{q}) + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{p}) V(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = E \varphi(\mathbf{q}), \quad (8.1.4)$$

$$V(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r} / \hbar} V(\mathbf{r}, \mathbf{p}) dV.$$

Это интегральное уравнение, определяющее $\varphi(\mathbf{q})$, было приведено ранее в § 2.6. Смысл фигурирующего здесь интеграла легче всего понять, рассматривая задачу о рассеянии, вызываемом потенциалом V . Если плоская волна с амплитудой $\varphi(\mathbf{p})$ приходит в область, где существует потенциал, то она рассеивается. Иначе говоря, часть начальной волны изменяет направление, возможно, с потерей импульса. Интеграл в приведенном выше уравнении показывает, как меняется импульс $\mathbf{q}$ под влиянием совокупности плоских волн с разными импульсами, появляющейся при рассеянии на потенциале V . Здесь имеется аналогия с явлением переноса, ранее рассмотренным в этой главе, которая может быть использована для получения наглядного представления о некоторых квантовомеханических явлениях.

Мы рассмотрели некоторые задачи, требующие применения интегральных уравнений. Ранее мы указывали также, что даже те задачи, которые описываются дифференциальными уравнениями, могут быть сформулированы в виде интегральных уравнений. Приведем теперь несколько примеров этого рода.

Краевые условия и интегральные уравнения. Особенно хорошо поддаются формулировке в виде интегральных уравнений краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. В примере, приведенном ниже, дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка в двумерной области переформулировано в виде одномерного интегрального уравнения. Такое сведение двумерной задачи

к одномерной очень важно, конечно, для нахождения как точного, так и приближенного решения.

Рассмотрим задачу¹⁾, связанную с уравнением Гельмгольца. На отрицательной полуоси x поместим преграду (см. рис. 8.2). Плоская волна $e^{ik \cdot r}$, движущаяся по направлению вектора k , набегает на эту преграду. Полное поле ψ должно удовлетворять уравнению Гельмгольца $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$. Нас интересует воздействие преграды на волну в случае, когда решение ψ

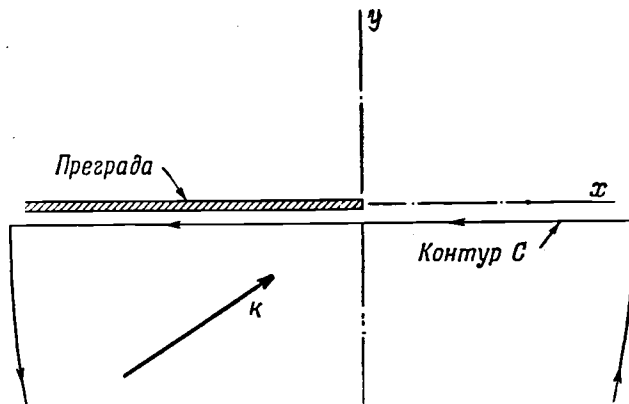


Рис. 8.2. Дифракция на полуплоскости $y=0$, $x < 0$.
Указан контур интегрирования для интегрального представления.

удовлетворяет краевому условию $\partial\psi/\partial y = 0$ на преграде. На больших расстояниях от начала координат это решение должно удовлетворять еще следующим условиям. В нижней полуплоскости $y < 0$

$$\psi = 2 \cos(k_y y) e^{ik_x x} + \psi^-, \quad (8.1.5)$$

где ψ^- представляет уходящую волну при $r \rightarrow \infty$, $y < 0$. В верхней полуплоскости $y > 0$ полагаем

$$\psi = \psi^+, \quad (8.1.6)$$

где ψ^+ представляет уходящую волну при $r \rightarrow \infty$, $y > 0$.

Именно из-за асимметрии условий на больших расстояниях, мы берем для ψ различные выражения при $y > 0$ (8.1.6) и при $y < 0$ (8.1.5). Необходимо, значит, проверить непрерывность ψ и $\partial\psi/\partial y$ на общей границе этих областей, т. е. в точках $y=0$, $x > 0$. Согласно теории функций Грина, изложенной в гл. 7, $\psi(r)$ при $y \leq 0$ должна иметь вид

$$\psi(r) = 2 \cos(k_y y) e^{ik_x x} + \frac{1}{4\pi} \oint \left[G_k(r|r_0) \frac{\partial \psi^-}{\partial n_0} - \psi \frac{\partial G_k(r|r_0)}{\partial n_0} \right] dS_0.$$

Путь интегрирования указан на рис. 8.2. Так как G_k должна удовлетворять условиям излучения, то интеграл вдоль большой полуокружности обращается в нуль. Поскольку, кроме того, $\partial G_k(r|x_0, y_0)/\partial y_0 = 0$ при $y_0 = 0$, интеграл вдоль оси x упрощается, и мы получаем

$$\psi_l(r) = 2 \cos(k_y y) e^{ik_x x} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty G_k(r|x_0, 0) \left(\frac{\partial \psi^-}{\partial y_0} \right)_{y_0=0} dx_0, \quad y < 0, \quad (8.1.7)$$

$$G_k(r|r_0) = \pi i [H_0(kR) + H_0(kR')],$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad R' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}.$$

¹⁾ В нижеследующем примере в переводе исправлены неточности оригинала.—
Прим. ред.

В области $y > 0$ при той же G_k получаем

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty G_k(\mathbf{r} | x_0, 0) \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial y_0} \right)_{y_0=0} dx_0, \quad y > 0. \quad (8.1.8)$$

При таком выборе выражений для ψ условие $\partial\psi/\partial y = 0$ при $y = 0$, $x < 0$, очевидно, выполняется.

Теперь нужно ввести условия непрерывности. Значения производной $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=0^+}$ и $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=0^-}$, вычисленные из формул (8.1.7) и (8.1.8), совпадут, если взять $\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial y_0} \right)_{y_0=0} = \left(\frac{\partial \psi^-}{\partial y_0} \right)_{y_0=0} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_0} \right)_{y_0=0}$. Кроме того, должны совпадать при $y = 0$, $x > 0$ и значения $(\psi)_{y=0^+}$ и $(\psi)_{y=0^-}$. Это условие дает

$$2e^{ik_x x} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty G_k(x, 0 | x_0, 0) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_0} \right)_{y_0=0} dx_0, \quad x > 0,$$

или

$$2e^{ik_x x} = -i \int_0^\infty H_0^{(1)}[k|x-x_0|] \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_0} \right)_{y_0=0} dx_0. \quad (8.1.9)$$

Мы получили для производной $(\partial\psi/\partial y_0)_{y_0=0}$ интегральное уравнение. Коль скоро $(\partial\psi/\partial y_0)_{y_0=0}$ найдена, мы подставляем ее в (8.1.7) и в (8.1.8) и находим ψ при $y < 0$ и $y > 0$.

Заметим, что можно было бы для этой задачи составить и другое интегральное уравнение, если за неизвестную функцию взять скачок $(\psi)_{y=0^+} - (\psi)_{y=0^-}$ при $x < 0$. При этом выражения для ψ при $y < 0$ и $y > 0$ надо было бы выбрать так, чтобы они удовлетворяли условиям непрерывности при $x > 0$ и затем подчинить их условию $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$ при $x < 0$.

Полученное тем или иным способом одномерное интегральное уравнение включает в себя краевые условия. Задавая другие краевые условия, мы придем к другому интегральному уравнению.

Уравнения, определяющие собственные функции. Интегральное уравнение другого типа получается из уравнения Шредингера

$$\left(\nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \right) \psi = 0,$$

которое мы запишем в виде

$$(\nabla^2 + k^2 - U) \psi = 0, \quad (8.1.10)$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad U = \frac{2m}{\hbar^2} V.$$

Перепишав (8.1.10) в форме $(\nabla^2 + k^2) \psi = U \psi$, видим, что решением этого уравнения является

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0, \quad (8.1.11)$$

где выбор функции Грина G_k определяется краевыми условиями, которым должна удовлетворять ψ . Уравнение (8.1.11) представляет собой интегральное уравнение относительно функции ψ .

От уравнения (8.1.9) оно отличается тем, что в (8.1.11) ψ входит как под знаком интеграла, так и вне интеграла.

Для того чтобы более отчетливо представить себе смысл уравнения (8.1.11), рассмотрим одномерный пример. Обратимся к задаче Штурма — Лиувилля, о которой шла речь в § 6.3. Незвестная функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz} \left[p \frac{d\psi}{dz} \right] + [q(z) + \lambda r(z)] \psi = 0. \quad (8.1.12)$$

Для того чтобы свести (8.1.12) к уравнению (8.1.11), введем функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d}{dz} \left[p \frac{dG(z|z_0)}{dz} \right] + qG(z|z_0) = -\delta(z - z_0). \quad (8.1.13)$$

Теперь мы должны задать какие-нибудь краевые условия для G и ψ . Для определенности будем считать заданными $\psi(0)$ и $\psi(l)$, т. е. подчиним ψ условиям Дирихле. Соответственно для G имеем $G(0|z_0) = G(l|z_0) = 0$. Переносим в (8.1.12) $\lambda r\psi$ в правую часть, получаем

$$\begin{aligned} \psi(z) = \lambda \int_0^l G(z|z_0) r(z_0) \psi(z_0) dz_0 + \left[\psi(0) p(0) \frac{dG(z_0|z)}{dz_0} \right]_{z_0=0} - \\ - \left[\psi(l) p(l) \frac{dG(z_0|z)}{dz_0} \right]_{z_0=l}. \end{aligned} \quad (8.1.14)$$

Это — интегральное уравнение относительно ψ . Если ψ должна удовлетворять однородным условиям Дирихле: $\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$, то это интегральное уравнение принимает вид

$$\psi(z) = \lambda \int_0^l G(z|z_0) r(z_0) \psi(z_0) dz_0. \quad (8.1.15)$$

Краевые условия фигурируют в уравнении (8.1.14), так сказать, в «явном» виде, и мы опять видим, что интегральное уравнение включает в себя все данные, относящиеся к задаче. Никаким дополнительным условиям подчинять ψ не нужно.

Интегральные уравнения некоторых собственных функций. Для иллюстрации уравнения (8.1.15) приведем интегральные уравнения, которым удовлетворяют классические ортогональные функции.

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{d^2\psi}{dz^2} + \lambda\psi = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0, \\ \psi(z) = \lambda \int_0^l G(z|z_0) \psi(z_0) dz_0, \\ G(z|z_0) = \frac{1}{l} \begin{cases} z(l - z_0), & z < z_0; \\ z_0(l - z), & z > z_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решения: $\sin(n\pi z/l)$, $\lambda = (n\pi/l)^2$, n — целое.

$$(б) \quad \frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{d\psi}{dz} \right] + \lambda \psi = 0, \quad \psi \text{ конечна при } z = \pm 1.$$

$$\psi(z) = \lambda \int_{-1}^1 G(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(z_0) dz_0,$$

$$G(z|z_0) = \frac{1}{2} \begin{cases} \ln \frac{1+z}{1-z_0}, & z < z_0, \\ \ln \frac{1+z_0}{1-z}, & z > z_0. \end{cases}$$

Решения: полиномы Лежандра $P_n(z)$, $\lambda = n(n+1)$, n — целое.

$$(в) \quad \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{d\psi}{dz} \right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{z^2} \right) \psi = 0, \quad \psi \text{ конечна при } z = 0, \infty.$$

$$\psi(z) = \lambda \int_0^\infty G(z|z_0) \psi(z_0) z_0 dz_0,$$

$$G(z|z_0) = \frac{1}{2n} \begin{cases} \left(\frac{z}{z_0} \right)^n, & z < z_0, \\ \left(\frac{z_0}{z} \right)^n, & z > z_0. \end{cases}$$

Решения: бесселевы функции $J_n(\sqrt{\lambda} z)$.

$$(г) \quad \frac{d^2 \psi}{dz^2} + (\beta^2 - \alpha^2 z^2) \psi = 0,$$

или

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + (\lambda - \alpha - \alpha^2 z^2) \psi = 0; \quad \lambda = \beta^2 + \alpha^2; \quad \psi(\infty), \quad \psi(-\infty) \text{ конечны.}$$

$$\psi(z) = \lambda \int_{-\infty}^\infty G(z|z_0) \psi(z_0) dz_0,$$

$$G(z|z_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \begin{cases} e^{\alpha z^2/2} \int_{-\infty}^z e^{-\alpha \xi^2} d\xi e^{\alpha z_0^2/2} \int_{z_0}^\infty e^{-\alpha \xi^2} d\xi, & z < z_0, \\ e^{\alpha z_0^2/2} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\alpha \xi^2} d\xi e^{\alpha z^2/2} \int_z^\infty e^{-\alpha \xi^2} d\xi, & z > z_0. \end{cases}$$

Решения: функции Эрмита $e^{-\alpha z^2/2} H_n(\sqrt{\alpha} z)$, $\lambda = 2(n+1)\alpha$, n — целое.

$$(д) \quad \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\psi}{dz} \right) + \left(-\beta^2 + \frac{2\alpha}{z} \right) \psi = 0; \quad \psi(0), \quad \psi(\infty) \text{ конечны.}$$

Параметр λ можно отождествить либо с 2α , либо с $\alpha^2 - \beta^2$.

В первом случае

$$\psi(z) = \lambda \int_0^\infty G(z|z_0) z_0 \psi(z_0) dz_0, \quad \lambda = 2\alpha,$$

$$G(z|z_0) = \frac{e^{-\beta|z-z_0|}}{2\beta z z_0}.$$

Решения: $e^{-\beta z} L_n^1(2\beta z)$, $L_n(2\beta z)$ — полиномы Лагерра, $\alpha/\beta - 1 = n$, n — целое.

Во втором случае эквивалентное уравнение имеет вид

$$(e) \quad \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\psi}{dz} \right) + \left(\lambda - \alpha^2 + \frac{2\alpha}{z} \right) \psi = 0, \quad \lambda = \alpha^2 - \beta^2.$$

$$\psi(z) = \lambda \int_0^\infty G(z|z_0) z_0^2 \psi(z_0) dz_0,$$

$$G(z|z_0) = e^{-\alpha(z+z_0)} \begin{cases} \int_{z_0}^\infty \frac{e^{2\alpha\xi}}{\xi^2} d\xi, & z < z_0, \\ \int_z^\infty \frac{e^{2\alpha\xi}}{\xi^2} d\xi, & z > z_0. \end{cases}$$

Типы интегральных уравнений; уравнения Фредгольма. Перейдем теперь к классификации рассмотренных интегральных уравнений и к некоторым обобщениям. Возвращаясь к (8.1.14), видим, что это уравнение имеет вид

$$\psi(z) = \lambda \int_a^b K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 + \varphi(z), \quad (8.1.16)$$

где в рассмотренном конкретном случае $K(z|z_0) = r(z_0) G(z|z_0)$, а $\varphi(z)$ — некоторая заданная функция; a и b — фиксированные точки, в которых ψ удовлетворяет краевым условиям. Интегральное уравнение относительно ψ вида (8.1.16) называется *неоднородным уравнением Фредгольма второго рода*. Функция $K(z|z_0)$ называется *ядром* этого интегрального уравнения. Ядро *симметрично*, если $K(z|z_0) = K(z_0|z)$. В (8.1.14) ядро несимметрично при $r(z_0) \neq 1$.

Отбрасывая $\varphi(z)$, превращаем (8.1.16) в *однородное уравнение Фредгольма второго рода*:

$$\psi(z) = \lambda \int_a^b K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0. \quad (8.1.17)$$

Однородными уравнениями Фредгольма второго рода являются уравнение (8.1.15) и уравнения в примерах (а) — (д). В примерах (а), (б) и (г) ядра симметричны. В примерах (д) и (е), а также в уравнении (8.1.14) фигурируют так называемые *полярные ядра*, т. е. ядра вида

$$K(z|z_0) = G(z|z_0) r(z_0), \quad \text{где } G(z|z_0) = G(z_0|z). \quad (8.1.18)$$

Во всех этих примерах ядра являются *определенными* в заданной области, т. е. при $0 \leq z \leq l$ в примере (а), при $0 \leq z < \infty$ в примере (в), и т. д. Положительно определенное ядро $K(z|z_0)$ характеризуется неравенством

$$\int_a^b dz_0 \int_a^b dz [K(z|z_0) \bar{\psi}(z) \psi(z_0)] > 0,$$

которое должно выполняться для любой функции ψ . В случае *отрицательно определенного* ядра этот интеграл всегда меньше нуля. В том и в другом случае ядро называется *определенным*. Если знак такого интеграла зависит от выбора ψ , то ядро называется *неопределенным*.

Уравнение (8.1.9) представляет собой пример уравнения Фредгольма первого рода, которое имеет общий вид

$$\varphi(z) = \int_a^b K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0, \quad (8.1.19)$$

где ψ — искомая функция, а функция φ известна.

Уравнения Вольтерра. В уравнения Фредгольма (8.1.16), (8.1.17) и (8.1.19) входят определенные интегралы. Если сделать пределы этих интегралов переменными, то мы получим уравнения Вольтерра. Уравнению (8.1.16) соответствует неоднородное уравнение Вольтерра второго рода, имеющее вид

$$\psi(z) = \int_a^z K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 + \varphi(z). \quad (8.1.20)$$

В соответствующем однородном уравнении $\varphi = 0$. Уравнение Вольтерра первого рода, соответствующее уравнению (8.1.19), имеет вид

$$\varphi(z) = \int_a^z K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0. \quad (8.1.21)$$

Уравнение Вольтерра можно, если угодно, рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, ядром которого служит

$$M(z|z_0) = \begin{cases} K(z|z_0), & z_0 < z, \\ 0, & z_0 > z. \end{cases} \quad (8.1.22)$$

Некоторые функции Грина, встретившиеся нам в предыдущей главе, обладали свойством (8.1.22). Стоит напомнить, что в задачах, в которых одним из параметров служило время, мы имели при $t < t_0$ равенство $G(r, t|r_0, t_0) = 0$; последнее является следствием принципа причинности, согласно которому никакое событие, происходящее в момент t_0 , не может как бы то ни было влиять на события, происшедшие ранее t_0 . Можно ожидать, что интегральное уравнение, для которого такая функция Грина G служит ядром, будет уравнением типа Вольтерра.

Чтобы показать, как появляется уравнение Вольтерра, рассмотрим движение простого гармонического осциллятора, описываемое уравнением

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k^2\psi = 0.$$

Возьмем импульсную функцию $\delta(t-t_0)$ и зададим функцию Грина $G(t|t_0)$, положив $d^2G(t|t_0)/dt_0^2 = -\delta(t-t_0)$ при $t > t_0$ и $G(t|t_0) = 0$ при $t < t_0$. Умножая уравнение движения на G , а равенство $d^2G/dt_0^2 = -\delta(t-t_0)$ — на ψ , вычитая из первого получившегося равенства второе и интегрируя по t_0 от $t_0 = 0$ до $t_0 = t^*$ (обозначение t^* указывает на то, что при интегрировании следует устремить t_0 к t с той стороны, где $t_0 > t$), получаем

$$\int_0^{t^*} \left(G(t|t_0) \frac{d^2\psi}{dt_0^2} - \frac{d^2G(t|t_0)}{dt_0^2} \psi \right) dt_0 + k^2 \int_0^{t^*} G(t|t_0) \psi(t_0) dt_0 = \psi(t),$$

или

$$\psi_0 \left[\frac{dG(t|t_0)}{dt_0} \right]_{t_0=0} - G(t|0) v_0 + k^2 \int_0^{t^*} G(t|t_0) \psi(t_0) dt_0 = \psi(t), \quad (8.1.23)$$

где ψ_0 и v_0 — начальные значения смещения ψ и скорости $d\psi/dt$. Уравнение (8.1.23) представляет собой неоднородное уравнение Вольтерра второго рода. В нем учтены начальные условия, которым должна удовлетворять ψ .

Из этого примера видно, что уравнения Вольтерра должны появляться в тех задачах, в которых существует предпочтительное направление изменения независимого переменного; в только что рассмотренном примере это — направление возрастания времени. То же имеет место в явлениях переноса, когда рассматриваются соударения частиц с рассеивающими центрами, обладающими большой массой. При этом энергия рассеиваемых частиц не возрастает в результате столкновений. Следствием этого является известная деградация энергии, которая и определяет предпочтительное направление изменения энергетической переменной.

В качестве примера такого рода рассмотрим пучок рентгеновских лучей, проходящий через вещество в положительном направлении оси x . Будем считать, что пучок при рассеянии сохраняет это направление. Рассмотрим совокупность лучей с заданной длиной волны. Проходя через слой вещества толщины dx часть этих лучей поглощается, а часть изменяет длину волны из-за рассеяния. Одновременно эта совокупность обогащается за счет тех лучей, которые, обладая первоначально большей энергией (иначе говоря, имея меньшую длину волны λ , так как энергия обратно пропорциональна λ), теряют часть своей энергии из-за рассеяния. Итак, если $f(\lambda, x) d\lambda$ — доля лучей, длины волн которых заключены в промежутке от λ до $\lambda + d\lambda$, то

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x} = -\mu f(\lambda, x) + \int_0^{\lambda} P(\lambda | \lambda_0) f(\lambda_0, x) d\lambda_0,$$

где μ — коэффициент поглощения, а $P(\lambda | \lambda_0) d\lambda$ — вероятность того, что луч с длиной волны λ_0 , проходя слой единичной толщины, приобретает длину волны, заключенную между λ и $\lambda + d\lambda$. Мы получили интегро-дифференциальное уравнение. Его можно свести к интегральному уравнению, если положить

$$f(\lambda, x) = \int_0^{\infty} e^{-px} \psi(\lambda, p) dp;$$

при этом $\psi(\lambda, p)$ будет удовлетворять однородному уравнению Вольтерра второго рода

$$(\mu - p) \psi(\lambda, p) = \int_0^{\lambda} P(\lambda | \lambda_0) \psi(\lambda_0, p) d\lambda_0.$$

8.2. Общие свойства интегральных уравнений

При рассмотрении общих свойств интегральных уравнений полезно воспользоваться некоторыми результатами теории операторных уравнений в абстрактном векторном пространстве. Мы сейчас покажем, что ранее приведенное уравнение Фредгольма есть не что иное, как координатная запись операторного уравнения. Рассмотрим в векторном пространстве неоднородное уравнение

$$\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e + f. \quad (8.2.1)$$

Так как функция Грина, постоянно фигурирующая в интегральных уравнениях, тесно связана с обратным оператором (см. стр. 816), то целесообразно записать (8.2.1) в виде

$$e = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \cdot e + g, \quad g = \mathfrak{A}^{-1} \cdot f. \quad (8.2.2)$$

Желая придать этому уравнению классическую форму, разложим все векторы по координатным ортам $e(z_0)$, соответствующим z_0 . Пусть

$$\begin{aligned} e &= \int e(z_0) \psi(z_0) dz_0, \\ g &= \int e(z_0) \varphi(z_0) dz_0, \\ \mathfrak{A}^{-1} \cdot e(z_0) &= \int e(z_1) K(z_1 | z_0) dz_1, \\ \mathfrak{A}^{-1} \cdot e &= \int e(z_0) dz_0 \int K(z_0 | z_1) \psi(z_1) dz_1. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Вводя эти выражения в (8.2.2), мы получаем неоднородное уравнение Фредгольма второго рода

$$\psi(z_0) = \lambda \int K(z_0 | z_1) \psi(z_1) dz_1 + \varphi(z_0). \quad (8.2.4)$$

Пределы интегрирования включены в определение функции K .

Таким образом, интегральное уравнение часто эквивалентно «обращенному» дифференциальному уравнению. Вместо дифференциального оператора $\mathfrak{A}$ рассматривается интегральный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$. Уравнение Фредгольма первого рода

$$-\varphi(z_0) = \int K(z_0 | z_1) \psi(z_1) dz_1$$

соответствует операторному уравнению

$$-g = \mathfrak{A}^{-1} \cdot e, \quad (8.2.5)$$

которое должно быть решено относительно e (или, в координатной трактовке, относительно ψ). Однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$\psi(z_0) = \lambda \int K(z_0 | z_1) \psi(z_1) dz_1$$

соответствует уравнению

$$e = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \cdot e,$$

тогда как неоднородное уравнение (8.2.4) соответствует (8.2.2).

Ядро $K(x_0 | x_1)$, входящее в уравнение Фредгольма любого из трех видов, тесно связано с оператором $\mathfrak{A}^{-1}$. Поэтому нам надлежит изучить свойства K и извлечь из них свойства оператора $\mathfrak{A}^{-1}$. Однако не всякий оператор имеет обратный; если оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ соответствует интегрированию с ядром K , то оператор $\mathfrak{A}$, изображающий какую-то дифференциальную операцию, может и не существовать (например, когда $\mathfrak{A}^{-1} \cdot f = 0$ при некотором $f \neq 0$, оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ не может быть однозначно обращен). Полезно выяснить, какие типы ядер соответствуют операторам, имеющим обратные, является ли дифференциальный оператор $\mathfrak{A}$ самосопряженным и т. д.

Однородное уравнение Фредгольма второго рода (уравнение (8.2.4) при $\varphi = 0$) в том случае, когда для $\mathfrak{A}^{-1}$ существует обратный, эквивалентно уравнению $\mathfrak{A}e = \lambda e$, определяющему собственные значения оператора $\mathfrak{A}$, или дифференциальной форме этого уравнения; поэтому мы вправе ожидать, что существует последовательность допустимых значений $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ ($\lambda_n < \lambda_{n+1}$) параметра λ , которым соответствуют решения — собственные функции ψ_n . Что касается неоднородного уравнения, то естественно ожидать, что оно эквивалентно уравнению $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e + f$, решения которого представимы с помощью функции Грина (см. гл. 7). Хотя мы и не собираемся, решая интегральные уравнения, предварительно обращать их в уравнения дифференциальные, тем не менее, изучая свойства ядер различных интегральных уравнений, следует помнить о связи между теми и другими, символически выражаемой записью $\mathfrak{A}^{-1}$ и $\mathfrak{A}$.

Ядра интегральных уравнений. Возможность решить интегральное уравнение в значительной мере зависит от двух свойств его ядра: симметрии и свойства, состоящего в том, что существует оператор $\mathfrak{M}$, обратный по отношению к $\mathfrak{M}^{-1}$. Симметричное ядро соответствует самосопряженному оператору. Если $\mathfrak{M}$ существует, то

$$\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}, \quad (8.2.6)$$

когда скоро $K(x_0|x_1) = K(x_1|x_0)$.

Ядро называется *определенным*, если интеграл

$$\int \bar{f}(x_0) dx_0 \int K(x_0|x_1) f(x_1) dx_1$$

либо для всех функций f положителен, либо для всех f отрицателен (в том и в другом случае значение этого интеграла всегда действительно). Аналогичные операторные свойства соответственно для положительно определенного и отрицательно определенного операторов выражаются неравенствами

$$\begin{aligned} (e^* \cdot \mathfrak{M}^{-1} \cdot e) &> 0, \\ (e^* \cdot \mathfrak{M}^{-1} \cdot e) &< 0. \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

В обоих случаях существование оператора $\mathfrak{M}$, обратного по отношению к $\mathfrak{M}^{-1}$, обеспечено. (Заметим, что если $\mathfrak{M}^{-1}$ — определенный оператор, то таков же и оператор $\mathfrak{M}$.) К сожалению не все ядра являются определенными; часто оказывается возможным найти функцию, соответствующую такому вектору e , для которого $(e^* \cdot \mathfrak{M}^{-1} \cdot e) = 0$, а при этом оператор $\mathfrak{M}$ оказывается не единственным. В некоторых случаях имеют место неравенства $(e^* \cdot \mathfrak{M}^{-1} \cdot e) \geq 0$ или $(e^* \cdot \mathfrak{M}^{-1} \cdot e) \leq 0$, причем нулевое значение достигается. Такие ядра и соответствующие операторы называются *полуопределенными* (это название может ввести в заблуждение, так как полуопределенное ядро немногим лучше любого другого неопределенного ядра).

Бывает, что интегральное уравнение первоначально задается в таком виде, что его ядро оказывается несимметричным и (или) неопределенным; поэтому полезно знать, можно ли преобразовать это уравнение так, чтобы новое уравнение имело симметричное определенное ядро.

Полярное ядро (см. 8.1.18) имеет вид

$$K(x|x_0) = r(x_0) G(x|x_0),$$

где G симметрично по x и x_0 . Такое ядро преобразуется в симметричное путем замены неизвестной функции $\psi(z) = \varphi(z)/\sqrt{r(z)}$. Например, подставляя $\psi = \varphi/\sqrt{r}$ в однородное уравнение второго рода

$$\psi(z) = \lambda \int G(z|z_0) r(z_0) \psi(z_0) dz_0,$$

приходим к уравнению

$$\varphi(z) = \lambda \int \sqrt{r(z)} G(z|z_0) \sqrt{r(z_0)} \varphi(z_0) dz_0,$$

в котором новое ядро $\sqrt{r(z)} G(z|z_0) \sqrt{r(z_0)}$ симметрично. Полезно указать операторный аналог уравнения с полярным ядром. Это — операторное уравнение

$$\mathfrak{M} \cdot e = \lambda \mathfrak{B} \cdot e, \quad (8.2.8)$$

в котором $\mathfrak{M}$ — симметричный оператор. Проведем преобразование, аналогичное переходу от ψ к φ . Пусть

$$f = \sqrt{\mathfrak{B}} \cdot e,$$

тогда

$$f = \lambda (\sqrt{\mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \sqrt{\mathfrak{B}}) \cdot f. \quad (8.2.9)$$

В действительности полярное уравнение является весьма частным случаем уравнения (8.2.8). В самом деле, уравнению $e = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{B} \cdot e$ соответствует интегральное уравнение

$$\psi(z) = \lambda \int M(z|z_0) \psi(z_0) dz_0,$$

где

$$M(z|z_0) = \int K(z|z_1) L(z_1|z_0) dz_1$$

и

$$\mathfrak{A}^{-1} \cdot e(z) = \int K(z|z_0) e(z_0) dz_0, \quad \mathfrak{B} \cdot e(z) = \int L(z|z_0) e(z_0) dz_0.$$

Полярное уравнение получается тогда, когда

$$L(z_1|z_0) = \delta(z_1 - z_0) r(z_0),$$

где δ — функция Дирака. Вычисляя интеграл, выражающий M , получаем

$$M(z|z_0) = K(z|z_0) r(z_0).$$

Переход к определенным ядрам. Мы желаем, если это окажется возможным, преобразовать наше уравнение так, чтобы новое уравнение имело *симметричное определенное* ядро. Выбором знака ядра K можно добиться того, чтобы оно было положительно определенным. Считая K определенным ядром, мы неизбежно ограничиваем себя рассмотрением задач, в которых ядра действительны, а соответствующие операторы в абстрактном пространстве — эрмитовы. Кроме того, не должно существовать собственных векторов e , для которых $\mathfrak{A} \cdot e = 0$. Прежде всего полезно перечислить те операторы, которые тем или иным путем могут быть преобразованы в операторы указанного типа. Вообще говоря, *преобразованные операторы будут лишь полуопределенными*, так как если не исключено равенство $\mathfrak{A} \cdot e = 0$ при некотором $e \neq 0$, то этот вектор e после действия преобразованного оператора даст также нуль.

Любой действительный эрмитов оператор превращается в определенный оператор посредством *итерации*. Пусть

$$\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e.$$

Поддействовав на это уравнение оператором $\mathfrak{A}$, т. е. итерируя, получаем

$$\mathfrak{A}^2 \cdot e = \lambda^2 e.$$

Оператор $\mathfrak{A}^2$ по меньшей мере полуопределенный, так как

$$e^* \cdot \mathfrak{A}^2 \cdot e = (\mathfrak{A} \cdot e)^* \cdot (\mathfrak{A} \cdot e) \geq 0.$$

Оператору $\mathfrak{A}^{-2}$ соответствует ядро

$$K_2(x|x_0) = \int K(x|x_1) K(x_1|x_0) dx_1, \quad (8.2.10)$$

и, значит,

$$\psi(x) = \lambda^2 \int K_2(x|x_0) \psi(x_0) dx_0,$$

когда скоро

$$\psi(x) = \lambda \int K(x|x_0) \psi(x_0) dx_0.$$

В качестве первого следствия этой теоремы мы замечаем, что антиэрмитов оператор $\mathfrak{A}$, определяемый тем свойством, что $\mathfrak{A}^* = -\mathfrak{A}$, также может быть преобразован в определенный оператор. Антиэрмитов оператор соответствует антисимметричному ядру, для которого

$$K(x|x_0) = -K(x_0|x), \quad (8.2.11)$$

если K действительно (если же K — комплексное ядро, то при перестановке аргументов действительная часть K изменяет знак, а мнимая часть не изменяется). Для доказательства заметим, что антиэрмитов оператор $\mathfrak{A}$ можно записать в виде

$$\mathfrak{A} = i\mathfrak{B},$$

где $\mathfrak{B}$ — эрмитов оператор. Тогда из $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e$ следует равенство

$$\mathfrak{B} \cdot e = -i\lambda e.$$

Поддействовав на это уравнение оператором $\mathfrak{B}$, получаем

$$\mathfrak{B}^2 \cdot e = -\lambda^2 e, \quad (8.2.12)$$

так что $\mathfrak{B}^2$ — по крайней мере полуопределенный оператор.

Вторым следствием является то, что полярное интегральное уравнение может быть сведено к интегральному уравнению с действительным, симметричным и определенным ядром. Соответственно этому покажем, что если

$$\mathfrak{A} \cdot e = \lambda \mathfrak{B} \cdot e,$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — либо оба эрмитовы, либо оба антиэрмитовы и один из этих операторов определенный, то e удовлетворяет некоторому операторному уравнению, в которое входят только определенные операторы. Докажем это для того случая, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — эрмитовы операторы, $\mathfrak{B}$ — положительно определенный, $\mathfrak{A}$ — неопределенный. Для положительно определенного оператора $\mathfrak{B}$ существует обратный оператор $\mathfrak{B}^{-1}$. Поэтому

$$(\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}) \cdot e = \lambda e,$$

$$(\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}) \cdot e = \lambda^2 e,$$

то есть

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}) \cdot e = \lambda^2 \mathfrak{B} e.$$

Оператор $\mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}$ в левой части — по меньшей мере полуопределенный.

Для изложенных здесь преобразований характерно, что получающиеся в результате ядро и соответствующий оператор не зависят от λ . Любой оператор может быть сведен к эрмитову, но этот последний в большинстве случаев будет зависеть от λ . Действительно, если

$$(\mathfrak{A} - \lambda) \cdot e = 0,$$

то, поддействовав на обе части этого равенства оператором $\mathfrak{A}^* - \bar{\lambda}$, получаем

$$(\mathfrak{A}^* - \bar{\lambda})(\mathfrak{A} - \lambda) \cdot e = 0,$$

или

$$(\lambda \mathfrak{A}^* + \bar{\lambda} \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^* \mathfrak{A}) \cdot e = |\lambda|^2 e.$$

Ясно, что $\lambda \mathfrak{A}^* + \bar{\lambda} \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^* \mathfrak{A}$ — эрмитов и, по самому его построению, определенный оператор. Однако, по сравнению с более простым уравнением $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e$, употребление последнего уравнения затруднительно, так как в нем сам оператор содержит λ и $\bar{\lambda}$. Поэтому в дальнейшем мы не будем пользоваться этим приемом. Ниже в этом параграфе будет изложен другой, практически более ценный метод.

Итак, если $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e$, то в отдельных случаях для e можно построить аналогичное уравнение с оператором, по меньшей мере полуопределенным и не зависящим от собственного значения λ . Это возможно тогда, когда $\mathfrak{A}$ — эрмитов или антиэрмитов оператор. Подобное же преобразование тогда применимо к уравнению вида $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda \mathfrak{B} \cdot e$, когда операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — эрмитовы или антиэрмитовы и один из них определенный.

Свойства симметричного определенного ядра. Займемся изучением действительного положительно определенного симметричного ядра. Соответствующий оператор — эрмитов. Из § 6.3 мы можем извлечь следующие результаты. Однородное уравнение $\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e$ имеет ненулевые решения лишь при некоторых специальных значениях λ_m параметра λ , называемых *собственными значениями*. Соответствующие *собственные векторы* e_m образуют ортогональную систему векторов, быть может конечную, которую мы можем считать нормированной:

$$e_n^* \cdot e_m = \delta_{nm}. \quad (8.2.13)$$

Будем предполагать, что вырожденных собственных значений нет. Все собственные значения действительны и могут быть расположены в возрастающую последовательность. Среди них есть наименьшее собственное значение λ_0 (положительно, если $\mathfrak{A}$ — положительно определенный оператор), следующее по величине λ_1 и т. д. Эти результаты могут быть обоснованы с помощью экстремального свойства собственных значений:

$$\lambda = \min \frac{e^* \cdot \mathfrak{A} \cdot e}{e^* \cdot e}. \quad (8.2.14)$$

Второе экстремальное свойство, если исходить из уравнения $e = \lambda \mathfrak{A}^{-1} \cdot e$, может быть сформулировано так:

$$\lambda = \min \frac{e^* \cdot e}{e^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot e}. \quad (8.2.15)$$

Неоднородная задача, соответствующая неоднородному уравнению Фредгольма второго рода, имеет решение при любом значении $\lambda \neq \lambda_m$. Решение может быть получено применением оператора, обратного по отношению к $\mathfrak{A} - \lambda$. Если

$$\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e + f,$$

то

$$e = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1} \cdot f = \mathfrak{G}_\lambda \cdot f, \quad (8.2.16)$$

где $\mathfrak{G}_\lambda$ — эрмитов оператор, называемый оператором Грина [см. (7.5.35)].

Установим некоторые свойства оператора $\mathfrak{G}_\lambda$. Сначала выясним его связь с $\mathfrak{A}^{-1}$. Из (8.2.16) непосредственно следует, что

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{A}^{-1}$$

является оператором, соответствующим ядру K . Далее,

$$\mathfrak{G}_\lambda = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1} = \mathfrak{A}^{-1} (1 - \lambda \mathfrak{A}^{-1})^{-1},$$

или

$$\mathfrak{G}_\lambda = \sum_n \mathfrak{A}^{-(n+1)} \lambda^n \quad (8.2.17)$$

для тех λ , для которых этот ряд сходится. Из (8.2.17) вытекает следующая общая формула:

$$\left[\frac{1}{n!} \frac{\partial^n \mathfrak{G}_\lambda}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0} = \mathfrak{A}^{-(n+1)}$$

Оператор $\mathfrak{G}_\lambda$ может быть также представлен с помощью собственных векторов оператора $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{G}_\lambda = \sum_m \frac{e_m e_m^*}{\lambda_m - \lambda}. \quad (8.2.18)$$

Отсюда при $\lambda = 0$ получаем разложение

$$\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{G}_0 = \sum_m \frac{e_m \cdot e_m^*}{\lambda_m}. \quad (8.2.19)$$

Для $\mathfrak{A}^{-p}$ имеем

$$\mathfrak{A}^{-p} = \sum_m \frac{e_m \cdot e_m^*}{\lambda_m^p}. \quad (8.2.20)$$

Возвращаясь к формуле (8.2.18), видим, что собственные значения $\lambda = \lambda_m$ оператора $\mathfrak{A}$ являются особыми точками $\mathfrak{G}$ как функции от λ . Это — общее свойство, не зависящее от того, является ли $\mathfrak{A}$ эрмитовым либо определенным или нет; в самом деле, если $\mathfrak{A} \cdot e_m = \lambda_m e_m$, то

$$\mathfrak{G}_\lambda \cdot e_m = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1} \cdot e_m = (\lambda_m - \lambda)^{-1} e_m,$$

и мы видим, что $\mathfrak{G}_\lambda \cdot e_m \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda_m$.

Характер соответствующих особенностей проще всего выяснить с помощью следа $|\mathfrak{G}_\lambda|$ (Spur) оператора $\mathfrak{G}_\lambda$ (в главах 1 и 3 это выражение называлось также коэффициентом расширения; см. (6.1.3)). Согласно разложению (8.2.18),

$$|\mathfrak{G}_\lambda| = \sum_m \frac{1}{\lambda_m - \lambda}. \quad (8.2.21)$$

Мы видим, что $|\mathfrak{G}_\lambda|$ представляет собой мероморфную функцию переменного λ , имеющую простые полюсы в точках $\lambda = \lambda_m$, причем соответствующие вычеты равны -1 . Скалярная функция $|\mathfrak{G}_\lambda|$, согласно (8.2.17), выражается через $|\mathfrak{A}^{-p}|$ по формуле

$$|\mathfrak{G}_\lambda| = \sum_n \lambda^n |\mathfrak{A}^{-(n+1)}|, \quad (8.2.21')$$

где в силу (8.2.20)

$$|\mathfrak{A}^{-p}| = \sum_m \frac{1}{\lambda_m^p}. \quad (8.2.22)$$

Перефразируем теперь эти результаты применительно к теории интегральных уравнений. Однородное уравнение второго рода

$$\phi(z) = \lambda \int K(z|z_0) \phi(z_0) dz_0$$

с действительным, симметричным, положительно определенным ядром K имеет решения лишь при некоторых специальных значениях λ_m параметра λ . Этим λ_m соответствуют решения — собственные функции ϕ_m . Последние образуют ортонормированную систему функций, быть может конечную, т. е.

$$\int \bar{\phi}_n(z) \phi_m(z) dz = \delta_{nm}. \quad (8.2.23)$$

Числа λ_m образуют возрастающую последовательность; наименьшее из них λ_0 положительно, если K — положительно определенное ядро. Экстремальное свойство чисел λ_m в соответствии с (8.2.15) записывается так:

$$\lambda = \min \left\{ \frac{\int \bar{\psi}(z) \psi(z) dz}{\int \bar{\psi}(z) K(z|z_0) \psi(z_0) dz dz_0} \right\}. \quad (8.2.24)$$

Ядра и функции Грина для неоднородных уравнений. Обратимся теперь к неоднородному уравнению

$$\phi(z) = \lambda \int K(z|z_0) \phi(z_0) dz_0 + \chi(z), \quad (8.2.25)$$

которое мы собираемся решать с помощью функции Грина. Последнюю мы выбираем так, чтобы она соответствовала оператору $\mathcal{G}_\lambda$ из (8.2.16). В абстрактном векторном пространстве аналогом (8.2.25) служит уравнение

$$e = \lambda \mathcal{A}^{-1} \cdot e + q.$$

Решение для e может быть получено следующим образом:

$$(1 - \lambda \mathcal{A}^{-1}) \cdot e = q,$$

или

$$(\mathcal{A} - \lambda) \cdot e = \mathcal{A} \cdot q.$$

Отсюда

$$e = (\mathcal{G}_\lambda \mathcal{A}) \cdot q,$$

где

$$\mathcal{G}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda)^{-1}.$$

Неудобство этого решения состоит в том, что оно выражается через произведение двух операторов. Это неудобство легко обойти, записав

$$e = [\mathcal{G}_\lambda (\mathcal{A} - \lambda)] \cdot q + \lambda \mathcal{G}_\lambda \cdot q;$$

тогда

$$e = q + \lambda \mathcal{G}_\lambda \cdot q. \quad (8.2.26)$$

Тем самым решение уравнения (8.2.25) выражено через $\mathcal{G}_\lambda$; в координатной записи имеем

$$\phi(z) = \chi(z) + \lambda \int G_\lambda(z|z_0) \chi(z_0) dz_0. \quad (8.2.27)$$

Входящую сюда функцию Грина в теории интегральных уравнений принято называть *резольвентой*.

Для того чтобы формулу (8.2.27) получить прямо, не обращаясь к операторным уравнениям, нужно получить интегральное уравнение для $\mathcal{G}_\lambda$. Из уравнения (8.2.16), определяющего $\mathcal{G}_\lambda$, следует, что

$$(\mathcal{A} - \lambda) \mathcal{G}_\lambda = \mathcal{I},$$

а отсюда

$$\mathcal{A}^{-1} (\mathcal{A} - \lambda) \mathcal{G}_\lambda = \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{G}_\lambda - \lambda \mathcal{A}^{-1} \mathcal{G}_\lambda$$

и

$$\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{A}^{-1} + \lambda \mathcal{A}^{-1} \mathcal{G}_\lambda. \quad (8.2.28)$$

Уравнению (8.2.28) соответствует интегральное уравнение для G_λ

$$G_\lambda(z|z_0) = K(z|z_0) + \lambda \int K(z|z_1) G_\lambda(z_1|z_0) dz_1. \quad (8.2.29)$$

Из этого интегрального уравнения следует, что

$$G_0(z|z_0) = K(z|z_0).$$

Комбинируя уравнения (8.2.25) и (8.2.29), можно, воспользовавшись симметрией G_λ и K , получить выражение ϕ в виде (8.2.27). Следует подчеркнуть, что именно эти свойства симметрии позволяют изменять порядок интегрирования.

Для дальнейшего нам полезно получить содержащее G_λ интегральное уравнение, которому должно удовлетворять ядро K . Снова прибегая к операторам в векторном пространстве, замечаем, что

$$(\mathfrak{A} - \lambda) \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{F} - \mathfrak{A}^{-1} \lambda,$$

откуда

$$\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{G}_\lambda - \lambda \mathfrak{G}_\lambda \mathfrak{A}^{-1}.$$

Соответствующее уравнение имеет вид

$$K(z|z_0) = G_\lambda(z|z_0) - \lambda \int G_\lambda(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1. \quad (8.2.30)$$

Отличие этого уравнения от (8.2.29) только кажущееся. Поменяем местами z и z_0 в уравнении (8.2.30); при этом

$$K(z_0|z) = G_\lambda(z_0|z) - \lambda \int G_\lambda(z_0|z_1) K(z_1|z) dz_1.$$

Теперь, пользуясь свойствами симметрии K и G_λ , мы можем от (8.2.30) перейти к (8.2.29). Эти соотношения между K и G_λ дали основание Вольтерра назвать K и $-G_\lambda$ *взаимными функциями*.

Формулы разложения (8.2.18) и (8.2.19) для $\mathfrak{G}_\lambda$ и $\mathfrak{A}^{-1}$ могут быть перенесены на G_λ и K в такой форме (см. сказанное на стр. 839):

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z) \bar{\psi}_m(z_0)}{\lambda_m - \lambda}, \quad (8.2.31)$$

$$K(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z) \psi_m(z_0)}{\lambda_m}. \quad (8.2.32)$$

Для того чтобы вывести формулы, аналогичные формулам (8.2.17), (8.2.20) и (8.2.22), нужно выяснить, что соответствует операторам $\mathfrak{A}^{-p}$. Выражению $\mathfrak{A}^{-p} \cdot e$ соответствует

$$\int K_p(z|z_0) \psi(z_0) dz_0,$$

где функция $K_p(z|z_0)$ подлежит определению. Будем исходить из выражения $\mathfrak{A}^{-1} \cdot e$, которому соответствует интеграл

$$\int K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0.$$

Заметив, что результат воздействия $\mathfrak{A}^{-2}$ на e есть $\mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{A}^{-1} \cdot e)$ и, следовательно,

$$\int K_2(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 = \int \int K(z|z_1) K(z_1|z_0) \psi(z_0) dz_0 dz_1,$$

получаем, что

$$K_2(z|z_0) = \int K(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1.$$

Далее, так как $\mathfrak{A}^{-3} \cdot e = \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{A}^{-2} \cdot e)$, то подобным же образом получаем

$$K_3(z|z_0) = \int K(z|z_1) K_2(z_1|z_0) dz_1.$$

Ясно, что из общего соотношения $\mathfrak{A}^{-(p+q)} = \mathfrak{A}^{-p} \mathfrak{A}^{-q}$ вытекают равенства

$$K_{p+q}(z|z_0) = \int K_p(z|z_1) K_q(z_1|z_0) dz_1 = \int K_q(z|z_1) K_p(z_1|z_0) dz_1. \quad (8.2.33)$$

Теперь мы можем написать формулы, аналогичные (8.2.17), (8.2.20), (8.2.21) и (8.2.22). Аналогом первой будет служить разложение

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(z|z_0) \lambda^n, \quad (8.2.34)$$

аналогом второй —

$$K_p(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z) \bar{\psi}_m(z_0)}{\lambda_m^p}. \quad (8.2.35)$$

Утверждения, относящиеся к $\mathcal{G}_\lambda$ и $\mathcal{A}^{-p}$, в которых говорится о следах операторов, можно будет перенести на G_λ и K_p , если определить скаляр, соответствующий $|\mathcal{G}_\lambda|$. Для этого положим $z = z_0$ в ядре, что соответствует взятию диагонального элемента матрицы, изображающей $\mathcal{G}_\lambda$, и, вместо того чтобы суммировать диагональные элементы, возьмем интеграл по z . Следующие формулы будут тогда соответствовать (8.2.21) и (8.2.22):

$$\int G_\lambda(z|z) dz = \sum_m \frac{1}{\lambda_m - \lambda}, \quad (8.2.36)$$

$$\int K_p(z|z) dz = \sum_m \frac{1}{\lambda_m^p} = C_p, \quad (8.2.37)$$

а отсюда получаем

$$\int G_\lambda(z|z) dz = \sum_n C_{n+1} \lambda^n. \quad (8.2.38)$$

Полуопределенные и неопределенные ядра. Во многих случаях ядра являются неопределенными и соответствующие операторы — неэрмитовыми, а поэтому предыдущие рассуждения к ним не применимы. Иногда даже в результате итерации получается не определенный, а лишь полуопределенный оператор, так что и в этих случаях приведенные выше теоремы непригодны.

Что можно сказать о неопределенных ядрах? Прежде всего, их собственные значения не обязательно действительны. В некоторых случаях может быть лишь конечное число собственных значений. Например, в случае уравнения Вольтерра собственных значений нет вовсе, так что однородное уравнение не имеет решений (см. стр. 851). В качестве примера рассмотрим следующее уравнение Фредгольма с весьма простым ядром:

$$\phi(z) = \lambda \int_0^1 (z - 2z_0) \phi(z_0) dz_0.$$

Ясно, что $\phi(z)$ должна быть линейной функцией

$$\phi(z) = \alpha z + \beta.$$

Постоянные α и β можно найти, подставив $\alpha z + \beta$ в интегральное уравнение:

$$\alpha z + \beta = \lambda \int_0^1 (z - 2z_0) (\alpha z_0 + \beta) dz_0,$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z . Мы получаем

$$\alpha = \lambda \left(\frac{1}{2} \alpha + \beta \right), \quad \beta = 2\lambda \left(-\frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{2} \beta \right)$$

— систему однородных линейных уравнений относительно α и β . Ненулевое решение можно получить только при равном нулю определителе системы, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} \lambda & -\lambda \\ \frac{2}{3} \lambda & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Двум корням последнего уравнения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (-3 + i\sqrt{15}), \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -\frac{1}{2} (3 + i\sqrt{15})$$

соответствуют решения

$$\psi_1 = z - \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_1}, \quad \psi_2 = z - \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

Итак, в этом примере имеется всего два комплексно сопряженных собственных значения и столько же решений заданного уравнения.

Число собственных значений и собственных функций *может* быть конечно, и в этом случае нельзя разложить произвольную функцию в ряд по собственным функциям; свойство полноты может быть сохранено лишь по отношению к какому-то специальному классу функций. Так, в только что рассмотренном примере по собственным функциям может быть разложена любая *линейная* функция от z . Важнее, однако, то, что собственных функций оказывается достаточно много для того, чтобы по ним можно было разложить ядро $K(z|z_0)$ и функцию Грина $G_\lambda(z|z_0)$. Таким образом сохраняется возможность решить методом собственных функций соответствующее неоднородное уравнение.

Необходимый для подобных случаев аппарат был рассмотрен в гл. 7. Задача о собственных значениях в абстрактном векторном пространстве ставится в форме уравнения

$$\mathfrak{A} \cdot e = \lambda e. \quad (8.2.39)$$

Поставим теперь эрмитовски сопряженную задачу о собственных значениях [см. (7.5.40)]:

$$\mathfrak{A}^* \cdot f = \bar{\lambda} f. \quad (8.2.40)$$

Решения уравнения (8.2.39) и решения уравнения (8.2.40) взаимно ортогональны, и поэтому мы можем положить, что

$$f_m^* \cdot e_n = \delta_{nm}. \quad (8.2.41)$$

С помощью этих соотношений можно вычислить коэффициенты разложения по e_n тех [векторов, которые допускают такое разложение [см. (7.5.43)]:

$$g = \sum_n g_n e_n, \quad g_n = (f_n^* \cdot g). \quad (8.2.42)$$

Справедливо следующее разложение оператора Грина $\mathfrak{G}_\lambda = (\mathfrak{A} - \lambda)^{-1}$:

$$\mathfrak{G}_\lambda = \sum_m \frac{e_m \cdot f_m^*}{\lambda_m - \lambda}. \quad (8.2.43)$$

След оператора $\mathfrak{A}$ выражается через $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{f}_m^*$ следующим образом:

$$|\mathfrak{A}| = \sum_m \mathbf{f}_m^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}_m. \quad (8.2.44)$$

Следы $|\mathfrak{A}^{-1}|$, $|\mathfrak{A}^{-p}|$, $|\mathfrak{G}_\lambda|$ и разложение $|\mathfrak{G}_\lambda|$ по следам $|\mathfrak{A}^{-p}|$ выражаются формулами (8.2.22), (8.2.21) и (8.2.21'). Если существует лишь конечное число собственных значений, то следы различных степеней оператора $\mathfrak{A}^{-1}$ связаны некоторыми соотношениями. Если, скажем, имеется ровно q различных собственных значений, то эти последние выражаются через следы первых q степеней оператора $\mathfrak{A}^{-1}$. Отсюда следует, что след $|\mathfrak{A}^{-(q+1)}|$ может быть выражен через $|\mathfrak{A}^{-1}|$, $|\mathfrak{A}^{-2}|$, ..., $|\mathfrak{A}^{-q}|$.

Экстремальное свойство решений уравнений (8.2.39) и (8.2.40) состоит в том, что

$$\lambda = \text{экстремальное значение } \frac{\mathbf{f}^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{e}}. \quad (8.2.45)$$

Варьируя $\mathbf{f}^*$ в этом уравнении, мы находим [см. (6.3.74)], что условие $\delta\lambda = 0$ приводит к уравнению (8.2.39), а варьируя $\mathbf{e}$ находим, что условие $\delta\lambda = 0$ приводит к (8.2.40). Равенство (8.2.45) аналогично (8.2.14). Аналогом (8.2.15) является равенство

$$\lambda = \text{экстремальное значение } \frac{\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{f}^* \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}}. \quad (8.2.46)$$

Особого внимания заслуживает случай антиэрмитова оператора (соответствующего антисимметричному действительному ядру), когда $\mathfrak{A}^* = -\mathfrak{A}$. В этом случае из уравнения

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$$

следует, что

$$(\mathfrak{A}^* \mathfrak{A}) \cdot \mathbf{e} = -\lambda^2 \mathbf{e}.$$

$\mathfrak{A}^* \mathfrak{A}$ — определенный оператор, т. е. $(\mathbf{e}^* \cdot \mathfrak{A}^* \mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}) \geq 0$, а поэтому $-\lambda^2 \geq 0$, т. е. значения λ чисто мнимые. Далее, интересно отметить одну особенность сопряженной задачи о собственных значениях: в случае антиэрмитова оператора $\mathbf{e}_n = \mathbf{f}_n$. В самом деле, если

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n,$$

то

$$\mathfrak{A}^* \cdot \mathbf{e}_n = -\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}_n = -\lambda_n \mathbf{e}_n.$$

Обращаясь к соотношению ортогональности (8.2.41), мы видим, что векторы $\mathbf{e}_n$ для антиэрмитова оператора ортогональны, так же как собственные векторы эрмитова оператора. Таким образом, при этом сохраняется формула разложения оператора Грина и, следовательно, остаются в силе формулы, выведенные для случая положительно определенного оператора.

Ядра, отличные от действительных определенных. Теперь посмотрим, как применяются формулы (8.2.39) — (8.2.46) к интегральным уравнениям. Ввиду большой сложности уравнений рассматриваемого типа некоторые выводы будут лишь продемонстрированы на примере интегрального уравнения с уже упоминавшимся ядром $z - 2z_0$.

Уравнение

$$\psi(z) = \lambda \int K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 \quad (8.2.47)$$

с действительным ядром $K(z|z_0)$, не являющимся положительно определенным, имеет ненулевые решения лишь при некоторых специальных значениях λ , которые мы обозначим λ_m . Этим λ_m соответствуют собственные функции ψ_m — решения уравнения (8.2.47). Числа λ_m не обязательно образуют бесконечную последовательность, и они не обязательно действительны. Система собственных функций может быть не полной, эти функции могут быть даже не ортогональны. Поэтому мы рассмотрим эрмитовски сопряженное уравнение [соответствующее уравнению (8.2.40)]

$$\varphi(z) = \bar{\lambda} \int K^*(z|z_0) \varphi(z_0) dz_0. \quad (8.2.48)$$

Как уже отмечалось выше, собственные значения сопряженной задачи комплексно сопряжены с собственными значениями задачи (8.2.47). Далее,

$$\int \bar{\varphi}_p \psi_q dz = \delta_{pq}, \quad (8.2.49)$$

где φ_p и ψ_q — собственные функции.

Собственные значения и собственные функции для ядра $z - 2z_0$ были указаны выше. Сопряженное уравнение имеет вид

$$\varphi(z) = \mu \int_0^1 (z_0 - 2z) \varphi_1(z_0) dz_0.$$

(Ядро K^* этого уравнения комплексно сопряжено ядру K , в котором представлены z и z_0 .)

И здесь мы видим, что φ зависит от z линейно, т. е. $\varphi = az + b$. Отсюда получаем уравнения

$$-(a + 2b)\mu = a, \quad \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{12}b\right)\mu = b,$$

и уравнение

$$\begin{vmatrix} \mu + 1 & 2\mu \\ \frac{1}{3}\mu & \frac{1}{12}\mu - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

определяющее μ . Последнее совпадает с уравнением, служившим для нахождения λ . Положим

$$\mu_1 = \bar{\lambda}_1, \quad \mu_2 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_1;$$

тогда

$$\varphi_1 = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda_1}, \quad \varphi_2 = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda_2}.$$

Сопоставляя φ_1 и φ_2 с ψ_1 и ψ_2 , найденными выше, мы замечаем, что φ_1 и ψ_1 не являются комплексно сопряженными. Очень легко показать, что в согласии с (8.2.49)

$$\int_0^1 \bar{\varphi}_1 \psi_2 dz = 0.$$

Функции φ_i и ψ_i еще не нормированы так, как это предписывают соотношения (8.2.49). Для нормировки нужно вычислить интеграл

$$\int_0^1 \overline{\varphi_1} \psi_1 dz = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\lambda_1^2}$$

и аналогичный интеграл для пары функций φ_2, ψ_2 .

Возвратимся к общим соображениям, касающимся функции Грина и однородного уравнения Фредгольма второго рода. И теперь решение неоднородного уравнения может быть получено с помощью функции Грина. Подобно (8.2.27),

$$\psi(z) = \chi(z) + \lambda \int G_\lambda(z|z_0) \chi(z_0) dz_0.$$

Снова функция Грина G_λ удовлетворяет интегральным уравнениям (8.2.28) и (8.2.30). Из (8.2.43) можно получить разложение $G_\lambda(z|z_0)$:

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z) \overline{\varphi_m(z_0)}}{\lambda_m - \lambda}, \quad (8.2.50)$$

где ψ_m и φ_m нормированы, разумеется, согласно (8.2.49). В рассмотренном нами примере

$$G_\lambda(z|z_0) = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\lambda_1^2} \right)^{-1} \frac{\psi_1(z) \overline{\varphi_1(z_0)}}{\lambda_1 - \lambda} + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\lambda_2^2} \right)^{-1} \frac{\psi_2(z) \overline{\varphi_2(z_0)}}{\lambda_2 - \lambda},$$

где нормирующие множители выписаны явно. Так как $\psi_1 = \overline{\psi_2}$, $\varphi_1 = \overline{\varphi_2}$ и $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, то G_λ при действительном λ принимает действительные значения. Однако мы замечаем, что $G_\lambda(z|z_0) \neq G_\lambda(z_0|z)$, т. е. нарушен принцип взаимности. Читатель без труда докажет, подставив в (8.2.27) ядро $z - 2z_0$ и найденную выше функцию Грина, что при любом выборе функции χ получается решение соответствующего неоднородного уравнения.

Интегральное уравнение Вольтерра. Интегральное уравнение Вольтерра [см. формулу (8.1.21) и следующие] представляет собой пример уравнения, ядро которого не имеет собственных значений. Это верно для любого уравнения Вольтерра с ограниченным ядром. Представим уравнение Вольтерра в виде уравнения Фредгольма

$$\psi(z) = \lambda \int_0^l M(z|z_0) \psi(z_0) dz_0$$

с ядром [см. (8.1.22)]

$$M(z|z_0) = \begin{cases} K(z|z_0), & z_0 < z, \\ 0, & z_0 > z. \end{cases}$$

Предположим, что ядро K ограничено. Отсутствие собственных значений будет доказано, если мы установим, что ряд

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_n M_{n+1}(z|z_0) \lambda^n,$$

где M_n есть n -я итерация M , сходится при всех значениях λ . Действительно, если бы существовало хоть одно собственное значение, то соответствующая конечная точка плоскости λ была бы особой для $G_\lambda(z|z_0)$ [см.

формулы (8.2.34) и (8.2.31)]. Необходимо оценить итерированные ядра. Сначала рассмотрим

$$M_2(z|z_0) = \int_0^l M(z|z_1) M(z_1|z_0) dz_1.$$

При $z > z_0$ разобьем промежуток интегрирования на отрезки от 0 до z_0 , от z_0 до z и от z до l . Интеграл вдоль первого отрезка обращается в нуль, потому что здесь $z_1 < z_0$ и, следовательно, $M(z_1|z_0) = 0$. Интеграл от z до l также равен нулю, так как при $z_1 > z$ обращается в нуль $M(z|z_1)$. Итак,

$$M_2(z|z_0) = \int_{z_0}^z K(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1, \quad z > z_0.$$

Рассуждая аналогично, убеждаемся в том, что $M_2(z|z_0) = 0$ при $z < z_0$ и, далее,

$$M_3(z|z_0) = \int_0^l M_2(z|z_1) M(z_1|z_0) dz_1,$$

$$M_3(z|z_0) = \begin{cases} \int_{z_0}^z M_2(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1, & z > z_0, \\ 0, & z < z_0. \end{cases}$$

Воспользуемся теперь тем, что M ограничено. Пусть $|K| \leq m$; тогда

$$\begin{aligned} |M| &\leq m, \\ |M_2| &\leq m^2 |z - z_0|, \\ |M_3| &\leq \frac{1}{2!} m^3 |z - z_0|^2, \\ &\dots \dots \dots \\ |M_n| &\leq \frac{1}{(n-1)!} m^n |z - z_0|^{n-1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_{n=0} \lambda^n M_{n+1}(z|z_0) \leq m \sum_n \frac{\lambda^n m^n |z - z_0|^n}{n!} = m e^{m\lambda |z - z_0|}$$

и мы видим, что $G_\lambda(z|z_0)$ как функция переменного λ не имеет особенностей в конечных точках; тем самым доказано, что уравнение Вольтерра с ограниченным ядром не имеет собственных значений.

Сингулярные ядра. Характер особенностей ядра оказывает сильнейшее влияние на распределение собственных значений уравнения Фредгольма второго рода. Ядро называется *сингулярным*, если оно или (1) имеет разрывы, или (2) имеет особые точки внутри области интегрирования, или (3) область интегрирования не ограничена. Случай (3) сводится к случаю (1) посредством замены переменного. Например, если интегрировать нужно от нуля до бесконечности, то подстановка $\zeta = 1/(1+z)$ приводит к интегралу в конечных пределах, но ценой появления полюса в конечной точке плоскости ζ .

Интегральные уравнения, содержащие функцию Грина уравнения Гельмгольца или Лапласа, часто оказываются сингулярными, причем встреча-

ются особенности всех трех типов. Например, интегральное уравнение (8.1.9), к которому была сведена задача дифракции на полуплоскости, имеет ядро $H_0^{(1)}(k|x-x_0|)$ с логарифмической особенностью при $x=x_0$. Кроме того, бесконечен один из пределов интегрирования. Ядра, перечисленные после уравнения (8.1.15), имеют разрывные производные.

Ядра с интегрируемым квадратом приводятся к ограниченными ядрам с помощью итерации. Так, если ядро $K(z|z_0)$ имеет конечное число разрывов, то уже $K_2(z|z_0)$ непрерывно. Проиллюстрируем это, положив

$$K(z|z_0) = \begin{cases} k(z|z_0) & \text{при } z < z_0, \\ h(z|z_0) & \text{при } z > z_0, \end{cases}$$

где функции $k(z|z_0)$ и $h(z|z_0)$ непрерывны, но могут иметь различные значения при $z=z_0$. Итерированное ядро задается формулой

$$K_2(z|z_0) = \int_a^b K(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1.$$

Для того чтобы вычислить K_2 , подставим в этот интеграл выражение K . При $z \geq z_0$

$$K_2(z|z_0) = \int_a^{z_0} h(z|z_1) k(z_1|z_0) dz_1 + \int_{z_0}^z h(z|z_1) h(z_1|z_0) dz_1 + \\ + \int_z^b k(z|z_1) h(z_1|z_0) dz_1,$$

а при $z \leq z_0$

$$K_2(z|z_0) = \int_a^z h(z|z_1) k(z_1|z_0) dz_1 + \int_z^{z_0} k(z|z_1) k(z_1|z_0) dz_1 + \\ + \int_{z_0}^b k(z|z_1) h(z_1|z_0) dz_1.$$

Функция $K_2(z|z_0)$ непрерывна, так как при $z=z_0$ приведенные выражения совпадают.

Сингулярное ядро вида¹⁾

$$K(z|z_0) = H(z|z_0)/|z-z_0|^\alpha, \quad |H(z|z_0)| \leq M, \quad (8.2.51)$$

может быть сведено к несингулярному посредством нескольких итераций, если $\alpha < 1$. Оценим итерированные ядра. Так как

$$K_2(z|z_0) = \int_a^b \frac{H(z|z_1) H(z_1|z_0)}{|z-z_1|^\alpha |z_1-z_0|^\alpha} dz_1,$$

то, очевидно, уже K_2 при $\alpha < 1/2$ ограничено; если $\alpha = 1/2$, то K_2 растет как $\ln(1/|z-z_0|)$ при $z \rightarrow z_0$, а потому следующая итерация K_3 будет ограничена; если, наконец, $1/2 < \alpha < 1$, то

$$|K_2(z|z_0)| \leq M^2 \int_a^b \frac{dz_1}{|z-z_1|^\alpha |z_1-z_0|^\alpha} \leq \\ \leq \frac{M^2}{|z-z_0|^{2\alpha-1}} \int_1^B \frac{d\zeta}{|1-\zeta|^\alpha |\zeta|^\alpha} \leq \frac{M^2}{|z-z_0|^{2\alpha-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{|1-\zeta|^\alpha |\zeta|^\alpha},$$

¹⁾ В нижеследующем рассуждении в переводе исправлены неточности оригинала. — Прим. ред.

где $\beta = (b - z_0)/(z - z_0)$, $\gamma = (a - z_0)/(z - z_0)$. Последний интеграл легко выразить через бета-функцию, и мы получаем

$$|K_2(z|z_0)| \leq \frac{C_0 M^2}{|z - z_0|^{2\alpha-1}},$$

где C_0 — значение интеграла, выписанного выше.

Как мы видели, K_2 ограничено при $2\alpha - 1 < 0$, т. е. при $\alpha < 1/2$. Если это неравенство не выполняется, то следует продолжить процесс итерации. Покажем, что при $\alpha < 1$ мы рано или поздно дойдем до ограниченного итерированного ядра. Доказательство основывается на неравенстве

$$|K_p(z|z_0)| \leq \int_a^b |K(z|z_1)| |K_{p-1}(z_1|z_0)| dz_1.$$

Отсюда получаем, что K_3 при $\alpha < 2/3$ ограничено, при $\alpha = 2/3$ имеет логарифмическую особенность, а при $2/3 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} |K_3(z|z_0)| &\leq \int_a^b |K(z|z_1)| |K_2(z_1|z_0)| dz_1 \leq C_0 M^3 \int_a^b \frac{dz_1}{|z - z_1|^\alpha |z_1 - z_0|^{2\alpha-1}} \leq \\ &\leq \frac{C_0 M^3}{|z - z_0|^{3\alpha-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{|1 - \zeta|^\alpha |\zeta|^{2\alpha-1}}, \end{aligned}$$

так что

$$|K_3(z|z_0)| \leq C_1 M^3 / |z - z_0|^{3\alpha-2},$$

где C_1 — некоторая другая постоянная. Вообще при $(n-1)/n < \alpha < 1$

$$|K_n(z|z_0)| \leq C M^n / |z - z_0|^{n\alpha-(n-1)}, \quad (8.2.52)$$

а при $n\alpha - (n-1) < 0$, т. е. при

$$\alpha < (n-1)/n, \quad (8.2.53)$$

n -с итерированное ядро оказывается ограниченным. Значит, для заданного $\alpha < 1$ существует такой номер n , что ядро K_n ограничено.

Особенности, весьма близкие к только что рассмотренным, встречаются у ядер, связанных с функцией Грина уравнения Лапласа. Трехмерная функция Грина пропорциональна

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (8.2.54)$$

двумерная — пропорциональна логарифму соответствующего расстояния на плоскости. Во втором случае мы только усилим особенность, если возьмем ядро

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Этот прием позволяет нам трактовать трех- и двумерный случаи аналогично. Остановимся на случае трех измерений. Пусть

$$|K(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)| \leq M/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

Тогда

$$|K_2(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)| \leq M^2 \int \frac{dx_1 dy_1 dz_1}{\sqrt{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2][(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]}}.$$

Пользуясь неравенством

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \geq 3 [(x - x_1)^2 (y - y_1)^2 (z - z_1)^2]^{\frac{1}{3}},$$

получаем оценку, подобную найденной ранее,

$$|K_2(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)| \leq \frac{M^2}{3} \left[\int \frac{dx_1}{(x - x_1)^{1/3} (x_1 - x_0)^{1/3}} \right] \left[\int \frac{dy_1}{(y - y_1)^{1/3} (y_1 - y_0)^{1/3}} \right] \left[\int \frac{dz_1}{(z - z_1)^{1/3} (z_1 - z_0)^{1/3}} \right].$$

Таким образом, K_2 ограничено. В двумерном случае, рассуждая аналогично, находим, что ограничено ядро K_3 .

Функция Грина уравнения Гельмгольца имеет в отличие от (8.2.54) существенную особенность при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow \infty$ [см. интегральное уравнение (8.1.9)]. Такие ядра называются *существенно сингулярными*. Для них процесс итерации не приводит к ограниченным ядрам.

Основное различие, важное для нас, между существенно сингулярными и ограниченными ядрами проявляется в строении спектра собственных значений соответствующего однородного уравнения Фредгольма второго рода. Можно показать, что в случае ограниченного ядра множество собственных значений конечно или счетно. Существенно сингулярное ядро может иметь непрерывный спектр собственных значений, т. е. при *любом* λ из некоторого промежутка может существовать ненулевое решение ψ_λ .

Это различие можно истолковать следующим образом. Если некоторое ядро K_n интегрируемо в квадрате, то оно может быть разложено в ряд по собственным функциям, образующим счетную ортогональную систему, и такой ряд будет сходиться в среднем (см. стр. 687). Такое ядро, в частности, может быть представлено двойным рядом Фурье. Иначе обстоит дело в случае ядра с неинтегрируемым квадратом. Для представления функции с неинтегрируемым квадратом, вообще говоря, требуется интеграл Фурье со специальным контуром интегрирования (который должен обходить особые точки). Мы уже видели при рассмотрении функций Грина, что в разложениях функций Грина (уравнений Лапласа и Гельмгольца) по собственным функциям в неограниченной области фигурируют интегралы типа интеграла Фурье; это согласуется с тем, что такие функции Грина не интегрируемы в квадрате.

В заключение этого параграфа приведем пример интегрального уравнения с существенно сингулярным ядром, имеющим непрерывный спектр собственных значений:

$$\psi(z) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z - z_0|} \psi(z_0) dz_0. \quad (8.2.55)$$

Ядро имеет особую точку в бесконечности. Это уравнение сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + (2\lambda - 1) \psi = 0,$$

откуда следует, что

$$\psi_\lambda = Ae^{\sqrt{1-2\lambda}z} + Be^{-\sqrt{1-2\lambda}z}.$$

Однако интеграл в (8.2.55) существует только при $\text{Re}[\sqrt{1-2\lambda}] < 1$. Все λ , удовлетворяющие этому ограничению, являются собственными значениями (8.2.55), а соответствующие ψ_λ — собственными функциями. Мы имеем непрерывный спектр собственных значений. Такого же типа случай (б) в примерах, следующих за уравнением (8.1.15).

8.3. Решение уравнений Фредгольма первого рода

Мы ограничимся изучением только тех случаев, когда может быть получено точное решение. Приближенные методы будут рассмотрены в гл. 9. Следует подчеркнуть, что приближенные методы решения физических проблем наиболее удобно основывать на интегральных уравнениях. И так как мы не в состоянии точно решить подавляющее большинство интегральных уравнений, то приближенным методам будет отведено особое место и они будут подробно изложены в гл. 9.

Общий метод, который будет здесь изложен, аналогичен методам решения дифференциальных уравнений, изученным в гл. 5. Главное в этом методе — разложение искомой функции по полной системе функций. Это разложение имеет вид суммы или интеграла по этой системе с неизвестными коэффициентами. Подставляя это разложение в дифференциальное уравнение, получаем соотношения между искомыми коэффициентами. Иными словами, *дифференциальное уравнение оказывается преобразованным в уравнение или систему уравнений, определяющее коэффициенты*. Полное семейство функций, если это возможно, выбирается так, чтобы эти новые уравнения легко решались. Например, если разложением является степенной ряд $\psi = \sum a_n z^{n+s}$, то преобразованное уравнение оказывается разностным уравнением относительно коэффициентов a_n . Для некоторых, изученных в гл. 5 типов, это разностное уравнение содержит только два различных значения n и легко решается.

Решения уравнений Фредгольма в форме рядов. Мы применим теперь этот метод к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, для которых он особенно хорошо приспособлен. Это интегральное уравнение [см. (8.1.19)] имеет вид

$$\varphi(z) = \int_a^b K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0. \quad (8.3.1)$$

В соответствии со сказанным положим

$$\psi(z) = \sum_n a_n g_n(z) w(z), \quad (8.3.2)$$

где функции g_n образуют полную систему на интервале (a, b) ; $w(z)$ является весовой функцией, которую можно выбрать близкой к $\psi(z)$ и тем самым улучшить сходимость ряда (8.3.2). Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_n a_n \int_a^b K(z|z_0) g_n(z_0) w(z_0) dz_0 = \sum_n a_n h_n(z), \\ h_n(z) &= \int_a^b K(z|z_0) g_n(z_0) w(z_0) dz_0, \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

где функции h_n известны.

Таким образом, решение интегрального уравнения сводится к нахождению коэффициентов a_n по известным φ и h_n . Это особенно просто делается в двух случаях. Если функции h_n пропорциональны степеням z , то (8.3.3) оказывается степенным рядом, так что неизвестные коэффициенты можно получить путем сравнения этого ряда с разложением φ по степеням z . Во втором случае, если функции h_n образуют ортогональное семейство:

$$\int_a^b \bar{h}_n(z) h_m(z) \rho(z) dz = N_n \delta_{nm},$$

то коэффициенты a_n можно определить при помощи квадратур

$$a_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b \bar{h}_n(z) \varphi(z) \rho(z) dz.$$

Как мы увидим ниже, существует важный класс уравнений, для которого осуществляется один из этих двух специальных случаев. К сожалению, чаще функции h_n не являются ни степенями z , ни элементами ортогональной системы, и в этом случае необходимо преобразовать разложение φ по функциям полной системы в ряд по h_n . Точнее, пусть φ разложена в ряд по функциям χ_q , образующим полную систему

$$\varphi = \sum_q f_q \chi_q(z). \quad (8.3.4)$$

Тогда возникает необходимость выразить функции χ_q при помощи функций h_n :

$$\chi_q = \sum_n \alpha_{qn} h_n. \quad (8.3.5)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (8.3.4), получаем

$$\varphi = \sum_{q,n} f_q \alpha_{qn} h_n = \sum_n \left(\sum_q f_q \alpha_{qn} \right) h_n.$$

Сравнивая с (8.3.3), имеем

$$a_n = \sum_q f_q \alpha_{qn}. \quad (8.3.6)$$

Таким образом, для решения данного интегрального уравнения достаточно найти коэффициенты α_{qn} из системы (8.3.5).

Определение коэффициентов. Мы изучим три метода определения коэффициентов. Первый из них предполагает, что χ_q образуют произвольное множество функций, не связанных каким-либо частным способом с функциями h_n . Во втором методе функции χ_q строятся из h_n при помощи процесса ортогонализации, т. е. находятся линейные комбинации из функций h_n , образующие полное семейство и попарно ортогональные. Наконец, функция φ может быть непосредственно разложена в ряд по χ_q , коэффициенты которого вычисляются при помощи квадратур.

В первом методе мы разлагаем функцию h_n из уравнения (8.3.5) в ряд по функциям χ_q :

$$h_n = \sum_p h_{np} \chi_p.$$

Уравнение (8.3.5) при этом дает

$$\chi_q = \sum_{n,p} \alpha_{qn} h_{np} \chi_p,$$

а следовательно,

$$\sum_n \alpha_{qn} h_{np} = \delta_{qp}. \quad (8.3.7)$$

Теперь система уравнений (8.3.7) должна быть решена относительно α_{qn} .

Обозначим через H определитель, составленный из элементов h_{np} :

$$H = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & \dots \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & \dots \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}. \quad (8.3.8)$$

Пусть M_{np} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу h_{np} . Так как

$$\sum_n M_{nq} h_{np} = H \delta_{qp},$$

то

$$\alpha_{qn} = \frac{M_{nq}}{H}. \quad (8.3.9)$$

Из полученного результата явствует, что этот метод может быть эффективным только в том случае, если каждая функция h_n является комбинацией, составленной из небольшого числа функций χ_p , так как тогда нетрудно вычислить определитель H и его миноры.

Ортогонализация. Процесс Шмидта упоминался в таблице, помещенной в конце гл. 6. Теперь мы его изучим подробнее. Ставится следующая задача. Дано полное семейство неортогональных функций h_n ; построить новое семейство функций χ_q , являющихся линейными комбинациями h_n и образующих полное ортогональное семейство. Процесс Шмидта состоит в последовательном построении функций χ_q . В качестве функции χ_0 берется h_0 . Функция χ_1 представляет собой линейную комбинацию h_0 и h_1 , подобранную так, чтобы она была ортогональна χ_0 ; функция χ_2 представляет собой линейную комбинацию h_0, h_1, h_2 , ортогональную χ_1 и χ_0 .

Можно выписать рекуррентное соотношение, выражающее χ_q через h_q и χ_p , $p < q$. Из способа построения видно, что h_q должна быть линейной комбинацией функций χ_p при $p \leq q$. Используя условие ортогональности

$$\int_a^b \bar{\chi}_p \chi_q \rho \, dz = \delta_{pq} N_q, \quad N_q = \int_a^b |\chi_p|^2 \rho \, dz,$$

получаем функцию h_q в виде суммы

$$h_q = \sum_{p=0}^q \frac{\int_a^b \bar{\chi}_p h_q \rho \, dz}{N_p} \chi_p,$$

где ρ — весовая функция. Разрешая относительно χ_q , находим

$$\chi_q = \frac{N_q}{\int_a^b \bar{\chi}_q h_q \rho \, dz} \left\{ h_q - \sum_{p=0}^{q-1} \frac{\int_a^b \bar{\chi}_p h_q \rho \, dz}{N_p} \chi_p \right\}.$$

Теперь мы можем так нормировать функции χ_q , чтобы было

$$N_q = \int_a^b \bar{\chi}_q h_q \rho \, dz. \quad (8.3.10)$$

Тогда выражение для χ_q приводится к виду

$$\chi_q = h_q - \sum_{p=0}^{q-1} \frac{\int_a^b \bar{\chi}_p h_{qp} dz}{N_p} \chi_p, \quad (8.3.11)$$

и

$$N_q = \int_a^b |h_q|^2 \rho dz - \sum_{p=0}^{q-1} \frac{\left| \int_a^b \bar{\chi}_p h_{qp} dz \right|^2}{N_p}. \quad (8.3.12)$$

Более подробно:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= h_0, \quad N_0 = \int_a^b |h_0|^2 \rho dx, \\ \chi_1 &= h_1 - \left(\int_a^b \bar{\chi}_0 h_{10} dz / N_0 \right) \chi_0, \\ \chi_2 &= h_2 - \left(\int_a^b \bar{\chi}_1 h_{21} dz / N_1 \right) \chi_1 - \left(\int_a^b \bar{\chi}_0 h_{20} dz / N_0 \right) \chi_0 \quad \text{и т. д.} \\ N_1 &= \int_a^b |h_1|^2 \rho dz - \frac{\left| \int_a^b \bar{\chi}_0 h_{10} dz \right|^2}{N_0}, \\ N_2 &= \int_a^b |h_2|^2 \rho dz - \frac{\left| \int_a^b \bar{\chi}_1 h_{21} dz \right|^2}{N_1} - \frac{\left| \int_a^b \bar{\chi}_0 h_{20} dz \right|^2}{N_0} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

В качестве примера произведем ортогонализацию семейства степеней z^n на промежутке $(-1, 1)$, $\rho = 1$. Этот процесс должен привести к полиномам Лежандра. Мы покажем, что это действительно так, вычислив функции χ_1 и χ_2 , которые должны быть пропорциональны соответственно z и $3z^2 - 1$. Интегралы, входящие в выражение для χ_1 , имеют значения

$$N_0 = 2, \quad \int_a^b \bar{\chi}_0 h_{10} dz = \int_{-1}^1 z dz = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\chi_1 = z, \quad N_1 = \frac{2}{3}.$$

Интегралы, необходимые для определения χ_2 , имеют значения

$$\int_a^b \bar{\chi}_1 h_{21} dz = \int_{-1}^1 z^3 dz = 0, \quad \int_a^b \bar{\chi}_0 h_{20} dz = \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\chi_2 = z^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = z^2 - \frac{1}{3},$$

а это выражение действительно пропорционально P_2 . Нормирующий интеграл равен

$$N_2 = \frac{2}{5} - \frac{\frac{4}{9}}{2} = \frac{8}{45}.$$

Продолжая этот процесс, получаем другие полиномы Лежандра и их нормирующие интегралы. В таблице, помещенной в конце гл. 6, приведены другие ортогональные полиномы, получающиеся при использовании других промежутков интегрирования и других весовых функций. Например, полиномы Эрмита соответствуют промежутку интегрирования $(-\infty, \infty)$ и весовой функции e^{-z^2} , в то время как полиномы Лагерра L_n^α соответствуют промежутку интегрирования $(0, \infty)$ и весу $x^\alpha e^{-x}$.

Однако коэффициенты α_{qn} уравнения (8.3.5) не получаются непосредственно из процесса Шмидта и потому мы в нашем рассмотрении не можем ограничиться этим процессом. Теперь мы должны получить явные выражения для α_{qn} . Из формулы (8.3.5) и из процесса получения функций χ имеем

$$\chi_q = \sum_{n=0}^q \alpha_{qn} h_n.$$

Так как функции χ ортогональны, то

$$\int_a^b \bar{\chi}_p \chi_q dz = 0, \text{ если } p \neq q.$$

Условия ортогональности будут выполнены для всех p и q при $p < q$, если потребовать, чтобы

$$\int_a^b \bar{h}_p \chi_q dz = 0, \quad p < q. \quad (8.3.13)$$

Теперь можно использовать условие (8.3.13) для определения α_{qn} , так как после подстановки выражения для χ_q в (8.3.13) получаем

$$\sum_{n=0}^q \alpha_{qn} d_{np} = 0, \quad p < q,$$

где

$$d_{np} = \int_a^b h_n \bar{h}_p dz.$$

При $p = q$ эта сумма обращается в N_q . Коэффициенты α_{qn} можно выразить при помощи миноров элементов d_{np} в определителе, составленном из этих элементов.

Рассмотрим определители D_q :

$$\begin{aligned} D_0 &= d_{00}, \\ D_1 &= \begin{vmatrix} d_{00} & d_{01} \\ d_{10} & d_{11} \end{vmatrix}, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

Коэффициент α_{qn} пропорционален алгебраическому дополнению M_{nq} элемента d_{nq} в D_q . Это следует из условия, которому удовлетворяют M_{nq} :

$$\sum_{n=0}^q M_{nq} d_{np} = \delta_{pq} D_q, \quad p \leq q.$$

Поскольку мы хотим, чтобы коэффициент при h_q в выражении для χ_q равнялся единице, следует положить $\alpha_{qn} = M_{nq}/M_{qq}$ и теперь разложение χ_q

запишется так:

$$\chi_q = \sum_{n=0}^q h_n \frac{M_{nq}}{M_{qq}}. \quad (8.3.15)$$

Этот ряд как раз и является другим представлением формулы Шмидта (8.3.14) и притом таким, которое дает явное выражение коэффициентов в разложении χ_q .

В качестве примера рассмотрим снова полиномы Лежандра, т. е. положим $\chi_q = P_q$, $h_n = z^n$, $\rho = 1$, а в качестве промежутка интегрирования возьмем $(-1, 1)$. Для определения P_2 нам необходимо рассмотреть определитель

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix}.$$

Теперь из (8.3.15) следует, что

$$P_2 \sim \frac{M_{02}}{M_{22}} + z \frac{M_{12}}{M_{22}} + z^2 = -\frac{1}{3} + z^2,$$

а это выражение действительно пропорционально P_2 .

Нормирующие интегралы также можно выразить при помощи определителей D_q . Интеграл

$$N_q = \int_a^b \bar{\chi}_q \chi_{q\rho} dz = \sum_{n=0}^q \frac{M_{nq}}{M_{qq}} \int_a^b \bar{h}_n \chi_{q\rho} dz$$

в силу уравнения (8.3.13) оказывается равным

$$N_q = \int_a^b \bar{h}_q \chi_{q\rho} dz = \frac{1}{M_{qq}} \sum_{p=0}^q M_{pq} \int_a^b \bar{h}_q h_{p\rho} dz,$$

то есть

$$N_q = \frac{1}{M_{qq}} \sum_{p=0}^q M_{pq} d_{pq}.$$

Эта последняя сумма в точности равна значению определителя D_q , в то время как M_{qq} равняется D_{q-1} . Следовательно,

$$N_q = D_q / D_{q-1}. \quad (8.3.16)$$

В примере, разобранным выше,

$$D_2 = \frac{32}{135}, \quad D_1 = \frac{4}{3}, \quad N_2 = \frac{8}{45}.$$

Биортогональные ряды. Вернемся к нашей исходной формуле (8.3.3), где функция φ разложена в ряд по известным, но не ортогональным функциям h_n :

$$\varphi(z) = \sum a_n h_n(z).$$

Коэффициенты a_n могут быть вычислены, если найдено семейство функций ω_n , удовлетворяющих условиям

$$\int \omega_n(z) h_m(z) dz = N_n \delta_{nm}. \quad (8.3.17)$$

Тогда a_n определяются при помощи квадратур

$$a_n = \frac{1}{N_n} \int \omega_n \varphi(z) dz. \quad (8.3.18)$$

В этой формуле мы не уточняем пределов интегрирования или, в более общем случае, пути интегрирования в плоскости комплексного переменного z . Необходимо только, чтобы область, в которой интегралы (8.3.18) имеют смысл, включала область определения интегрального уравнения.

Непосредственные попытки прямого определения функций $\omega_n(z)$ обычно не бывают удачными. Вместо этого мы рассмотрим метод, применение которого целесообразно тогда, когда разложения последовательных h_n начинаются со все более высоких степеней z (как, например, для функций Бесселя):

$$h_n(z) = \sum_{p=n}^{\infty} A_{pn} z^p, \quad A_{nn} = 1. \quad (8.3.19)$$

Коэффициент A_{nn} всегда можно положить равным единице, хотя исторически так делали не всегда. Следовательно, функция h_n регулярна в начале координат. Теперь мы покажем, что в этом случае функции ω_n получаются из разложения

$$\frac{1}{t-z} = \sum_n \omega_n(t) h_n(z). \quad (8.3.20)$$

Для доказательства вычислим интеграл

$$\oint \frac{h_q(t)}{t-z} dt = \sum_n \left[\oint \omega_n(t) h_q(t) dt \right] h_n(z),$$

взятый по некоторому замкнутому контуру, охватывающему точку z и начало координат и лежащему в области аналитичности $h_n(z)$. Тогда, согласно интегральной формуле Коши, левая часть этого уравнения в точности равна $2\pi i h_q(z)$. Сравнивая с правой частью, убеждаемся, что равенство возможно только в том случае, когда

$$\oint \omega_n(t) h_q(t) dt = 2\pi i \delta_{nq} \quad (8.3.21)$$

Соотношение (8.3.21) не зависит от предположения о поведении h_n , выраженного равенством (8.3.19); оно является общим и применимо всегда, когда h_n аналитична в области, ограниченной контуром интегрирования. Это требование является ограничением только в том случае, когда h_n имеет существенную особенность в точке z . В таких случаях разложение φ в ряд по h_n должно исследоваться особо тщательно.

Определение функций ω_n зависит от возможности осуществления разложения (8.3.20). Однако в том случае, когда выполняются условия (8.3.19), для определения ω_n можно дать общий алгоритм. Возьмем q -ю производную по z от (8.3.20), а затем положим $z=0$. Получим

$$\frac{q!}{t^{q+1}} = \sum_n \omega_n(t) \left\{ \frac{d^q}{dz^q} [h_n(z)] \right\}_{z=0}.$$

Используя условия (8.3.19), находим, что

$$\left\{ \frac{d^q}{dz^q} [h_n(z)] \right\}_{z=0} = \begin{cases} q! A_{qn}, & q \geq n, \\ 0 & q < n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{t^{q+1}} = \sum_{n=0}^q w_n(t) A_{qn}. \quad (8.3.22)$$

Эти равенства образуют систему рекуррентных соотношений, последовательно разрешая которые, получим функции $w_n(t)$. Это особенно удобно сделать, переписав уравнение (8.3.22) в следующем виде:

$$w_q = \frac{1}{t^{q+1}} - \sum_{n=0}^{q-1} w_n(t) A_{qn}.$$

Прежде всего положим $q=0$. Тогда

$$w_0(t) = 1/t.$$

Пусть $q=1$. Тогда

$$w_1(t) = \frac{1}{t^2} - A_{10}w_0 = \frac{1}{t^2} - \frac{A_{10}}{t}.$$

Ниже приведены первые четыре функции w_n , полученные таким способом:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{t}, \quad w_1 = \frac{1}{t^2} - \frac{A_{10}}{t}, \\ w_2 &= \frac{1}{t^3} - \frac{A_{21}}{t^2} + \frac{A_{21}A_{10} - A_{20}}{t}, \\ w_3 &= \frac{1}{t^4} - \frac{A_{32}}{t^3} + \frac{A_{32}A_{21} - A_{31}}{t^2} + \frac{-A_{30} + A_{31}A_{10} + A_{32}A_{20} - A_{32}A_{21}A_{10}}{t}. \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

Отсюда можно вывести общую формулу.

Ясно, что функции w_n являются полиномами относительно $1/t$, и наибольшая степень $1/t$, фигурирующая в w_n , равна $n+1$.

Вернемся теперь к исходному вопросу о получении разложения произвольной функции φ в ряд по h_n . Теперь этот вопрос сводится к вычислению интеграла (8.3.18). Контур интегрирования выбран так, что он охватывает начало координат. Если мы запишем

$$w_n = \sum_{p=0}^n \frac{b_{np}}{t^{p+1}}, \quad (8.3.24)$$

то равенство (8.3.18) преобразуется к виду

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint w_n(z) \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=0}^n b_{np} \oint \frac{\varphi(z)}{z^{p+1}} dz.$$

Из интегральной формулы Коши вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(z)}{z^{p+1}} dz = \frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!},$$

где $\varphi^{(p)}(0)$ — значение p -й производной от φ по ее аргументу в начале координат. Следовательно,

$$a_n = \sum_{p=0}^n \frac{b_{np}}{p!} \varphi^{(p)}(0). \quad (8.3.25)$$

Это и есть выражение, определяющее a_n . Ясно, что в случае, когда h_n удовлетворяют условию (8.3.19) (ряды начинаются с n -й степени z), вычисление a_n можно довести до конца, ни разу не прибегнув к бесконечным

процессам. Однако, если условие (8.3.19) не выполнено, процесс разыскания функций $\omega_n(t)$ уже не будет столь простым. В этом случае более эффективным оказывается метод ортогонализации, описанный выше. Фактически здесь можно провести некоторую аналогию с процессом Шмидта.

Мы закончим это рассмотрение примером. Предположим, что h_n являются функциями Бесселя $J_n(z)$. Тогда искомыми будут коэффициенты ряда

$$\varphi(z) = \sum a_n J_n(z).$$

Ряды такого типа называются *рядами Неймана*. Соответствующие биортогональные функции называются *полиномами Неймана* $O_n(t)$. Соотношения между J_n и O_n имеют вид

$$\frac{1}{t-z} = \sum_n \varepsilon_n O_n(t) J_n(z), \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$$

Функции O_n не совпадают в точности с функциями ω_n , так как первый член в разложении J_n равен $z^n/2^n n!$, а не z^n и разложение (8.3.20) не содержит ε_n . Однако это различие не принципиальное, а касается, скорее, деталей. Уравнения (8.3.22) можно легко решить и в том случае, когда $A_{qq} \neq 1$. Полиномы Неймана определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_n O_n(t) &= \frac{2^n n!}{t^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{t^2}{2(2n-2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2)(2n-4)} + \dots \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n/2} \left[\frac{n(n-m-1)!}{m! (t/2)^{n-2m+1}} \right], \quad n \neq 0. \end{aligned} \quad (8.3.26)$$

Первые несколько полиномов таковы:

$$\begin{aligned} O_0(t) &= \frac{1}{t}, \quad O_1(t) = \frac{1}{t^2}, \quad O_2(t) = \frac{1}{t} + \frac{4}{t^3}, \\ O_3(t) &= \frac{3}{t^2} + \frac{24}{t^4}, \quad O_4(t) = \frac{1}{t} + \frac{16}{t^3} + \frac{192}{t^5}, \\ O_5(t) &= \frac{5}{t^2} + \frac{120}{t^4} + \frac{1920}{t^6}. \end{aligned} \quad (8.3.27)$$

Коэффициенты a_n могут быть определены согласно формуле (8.3.25):

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{s=0,1}^n \frac{2^s n}{n+s} \binom{(n+s)/2}{s} \varphi^{(s)}(0), \quad n \neq 0, \\ a_0 &= \varphi(0), \quad n = 0. \end{aligned} \quad (8.3.28)$$

Штрих над знаком суммирования означает здесь, что следует брать сумму только по четным или только по нечетным s , если n соответственно четное или нечетное; $\binom{a}{\varepsilon}$ — биномиальные коэффициенты.

Интегральные уравнения первого рода и производящие функции. Теперь мы на нескольких примерах проиллюстрируем развитую выше общую теорию. Рассмотрим прежде всего случай $h_n = z^n$; это имеет место тогда, когда ядро интегрального уравнения служит одновременно производящей функцией для семейства ортогональных полиномов.

Согласно сказанному на стр. 729, производящую функцию для полиномов Эрмита $H_n(z_0)$ можно записать в виде

$$e^{-(z-z_0)^2} = \sum_n \frac{e^{-z_0^2} H_n(z_0) z^n}{n!}.$$

Это разложение можно применить для решения интегрального уравнения

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-z_0)^2} \psi(z_0) dz_0. \quad (8.3.29)$$

Проблема такого типа может возникнуть в задачах о распространении тепла, когда искомым является первоначальное распределение источников, порождающее некоторое заданное распределение температуры. Положим в равенстве (8.3.29)

$$\psi(z_0) = \sum a_n H_n(z_0).$$

Используя разложение ядра и нормировку функций Эрмита (см. стр. 730)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 e^{-z^2} dz = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

сводим уравнение (8.3.29) к виду

$$\varphi(z) = \sqrt{\pi} \sum_n a_n 2^n z^n.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{2^n n! \sqrt{\pi}}, \quad \text{где } \varphi^{(n)}(0) = \left[\frac{d^n \varphi}{dz^n} \right]_{z=0},$$

и решение ψ имеет вид

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{\varphi^{(n)}(0)}{2^n n!} H_n(z). \quad (8.3.30)$$

Если решено некоторое интегральное уравнение первого рода с заданным ядром, то можно найти другие примеры разрешимых уравнений, изменяя операторы по z , скажем, к обеим частям уравнения (8.3.29); (8.3.30) остается при этом решением. Ясно, что в рассматриваемом примере можно получить при помощи дифференцирования производящей функции новые ядра, разложимые в ряды по функциям Эрмита и в степенные ряды. Используя соотношения

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2},$$

мы получаем

$$e^{-(z-z_0)^2} H_p(z-z_0) = (-1)^p \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-z_0^2} H_{p+s}(z_0)}{s!} z^s.$$

Следовательно, уравнение

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-z_0)^2} H_p(z-z_0) \psi(z_0) dz_0 \quad (8.3.31)$$

имеет решение

$$\psi(z) = \sum_{q=0}^{p-1} \alpha_q H_q(z) + \frac{(-1)^p}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(s)}(0)}{2^s s!} H_{p+s}(z). \quad (8.3.32)$$

Здесь коэффициенты α_q при $q \leq p-1$ произвольны, так как их нельзя определить из интегрального уравнения (8.3.31), поскольку H_q ортогонально ядру $e^{-(z-z_0)^2} H_p(z-z_0)$.

Наконец, можно взять линейную комбинацию нескольких ядер такого вида и получить новое ядро

$$K(z|z_0) = e^{-(z-z_0)^2} \sum_p a_p H_p(z-z_0). \quad (8.3.33)$$

Ясно, что каждое ядро, являющееся функцией от $(z-z_0)$, можно разложить в такой ряд. Значит, имея решения соответствующих интегральных уравнений первого рода, можно найти решение интегрального уравнения, ядром которого является произвольная функция от $(z-z_0)$. Дальше, в этой же главе, мы увидим, что к таким ядрам можно также применить метод, использующий интегралы Фурье.

Теперь мы перепишем (8.3.33) в виде ряда по степеням z :

$$e^{-(z-z_0)^2} \sum_{p=0}^{\infty} a_p H_p(z-z_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} \left[\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p e^{-z_0^2} H_{p+s}(z_0) \right].$$

Подставляя это разложение в интегральное уравнение, получаем

$$\varphi^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_0^2} H_{p+s}(z_0) \psi(z_0) dz_0.$$

Пусть

$$\psi(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{C_q H_q(z)}{2^q \sqrt{\pi} q!},$$

тогда

$$\varphi^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p C_{p+s} \quad (8.3.34)$$

для любого s . Уравнения (8.3.34) образуют систему, определяющую коэффициенты C_p . Выпишем несколько таких уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= C_0 - a_1 C_1 + a_2 C_2 - a_3 C_3 + a_4 C_4 - \dots, \\ \varphi^{(1)}(0) &= C_1 - a_1 C_2 + a_2 C_3 - a_3 C_4 + \dots, \\ \varphi^{(2)}(0) &= C_2 - a_1 C_3 + a_2 C_4 - \dots, \end{aligned}$$

где a_0 считаем равным единице.

Решение этой системы можно получить методом итераций. Здесь мы приведем только результаты. Решение является линейной комбинацией $\varphi^{(s)}(0)$:

$$C_p = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(p+s)}(0) T_s, \quad (8.3.35)$$

причем коэффициенты T_s имеют вид

$$T_s = \sum (-1)^{r_2+r_4+\dots} \frac{(r_1+r_2+r_3+\dots)!}{(r_1)!(r_2)!(r_3)!\dots} (a_1)^{r_1} (a_2)^{r_2} (a_3)^{r_3} \dots,$$

где при суммировании должны быть учтены все такие комбинации r_i , что

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + \dots = s. \quad (8.3.36)$$

Выпишем несколько первых T_s :

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \quad T_1 = a_1, \quad T_2 = a_1^2 - a_2, \quad T_3 = a_1^3 - 2a_1 a_2 + a_3, \\ T_4 &= a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + a_2^2 + 2a_3 a_1 - a_4, \\ T_5 &= a_1^5 - 4a_1^3 a_2 + 3a_1^2 a_3 + 3a_2^2 a_1 - 2a_3 a_2 - 2a_4 a_1 + a_5. \end{aligned} \quad (8.3.37)$$

Аналогичным образом можно решать интегральные уравнения, ядрами которых служат производящие функции других ортогональных полиномов. Подробное решение мы приведем для полиномов Лагерра. Производящая функция имеет вид

$$\frac{J_a(2\sqrt{zz_0})}{(zz_0)^{a/2}} = e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(a)}(z_0)}{[\Gamma(n+1+a)]^2} z^n,$$

причем нормировка такова:

$$\int_0^{\infty} e^{-z_0} z_0^a [L_n^{(a)}(z_0)]^2 dz_0 = \frac{[\Gamma(n+a+1)]^2}{n!}.$$

Тогда решение уравнения

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} \frac{J_a(2\sqrt{zz_0})}{(zz_0)^{a/2}} \psi(z_0) dz_0, \quad 0 \leq z \leq \infty, \quad (8.3.38)$$

имеет вид

$$\psi(z) = e^{-z} z^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^{(n)}(0) L_n^{(a)}(z)}{\Gamma(n+a+1)}, \quad \chi(z) = e^z \varphi(z). \quad (8.3.39)$$

Упомянем также о другом разложении, из которого можно получить разрешимое интегральное уравнение. Это разложение основано на более общей производящей функции для $L_n^{(a)}$ (см. стр. 728):

$$\left(\frac{z_0}{z}\right)^{a+1} e^{-z_0/z} = e^{-z_0} z_0^{a+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(a)}(z_0)}{\Gamma(n+a+1)} (1-z)^n.$$

Если эта функция используется в качестве ядра, то решение соответствующего интегрального уравнения первого рода имеет вид

$$\phi = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\Gamma(n+a+1)]^2} \varphi^{(n)}(1) L_n^{(a)}(z). \quad (8.3.40)$$

Применение полиномов Гегенбауера. Производящая функция для полиномов Лежандра или, в более общем случае, для полиномов Гегенбауера также порождает интегральные уравнения первого рода, которые можно решить. Рассмотрим, например, следующее ядро:

$$K(z|z_0) = \frac{1}{\sqrt{1-2zz_0+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(z_0).$$

Тогда интегральное уравнение записывается так:

$$\varphi(z) = \int_{-1}^1 \frac{\psi(z_0)}{\sqrt{1-2zz_0+z^2}} dz_0, \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (8.3.41)$$

Используя разложение K и полагая $\phi = \sum a_n P_n$, получаем

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{2n+1} z^n,$$

где мы воспользовались равенством

$$\int_{-1}^1 [P_n(z)]^2 dz = \frac{2}{2n+1}.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \left[\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \right] \quad \text{и} \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{2n+1}{2} \left[\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \right].$$

Аналогичные результаты можно получить для системы полиномов Гегенбауера $T_n^\nu(z)$ с любым ν , для которых производящая функция имеет вид (см. таблицу в конце гл. 6)

$$(1 - 2zz_0 + z^2)^{-(\nu + \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^\nu(z_0) z^n \quad (8.3.42)$$

при нормировке

$$\int_{-1}^1 (1 - z^2)^\nu [T_n^\nu(z)]^2 dz = \frac{2\Gamma(2\nu + n + 1)}{(2\nu + 2n + 1)n!}. \quad (8.3.43)$$

Используя производящую функцию в качестве ядра и ограничиваясь промежутком изменения z от -1 до 1 , получаем решение интегрального уравнения первого рода (8.3.41), в котором ядро $1/\sqrt{1 - 2zz_0 + z^2}$ заменено ядром (8.3.42), в виде

$$\psi = \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) (1 - z^2)^\nu}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\nu + 2n + 1}{\Gamma(2\nu + n + 1)} \varphi^{(n)}(0) T_n^\nu(z). \quad (8.3.44)$$

Придавая ν соответствующие значения, можно получить важные частные случаи: при $\nu = 0$ — полиномы Лежандра, при ν целом — присоединенные функции Лежандра. При $\nu = 1/2$

$$\frac{1}{1 - 2zz_0 + z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{1/2}(z_0) z^n.$$

Здесь $T_n^{1/2}$ — полиномы Чебышева. Условие нормировки имеет вид

$$\int_{-1}^1 [T_n^{1/2}]^2 (1 - z^2)^{1/2} dz = 1.$$

Решение интегрального уравнения

$$\varphi(z) = \int_{-1}^1 \frac{\psi(z_0)}{1 - 2zz_0 + z^2} dz_0$$

дается формулой

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - z^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} T_n^{1/2}(z). \quad (8.3.45)$$

Во всех рассмотренных выше случаях можно получить новые разрешимые интегральные уравнения дифференцированием или интегрированием обеих частей по z .

До сих пор мы рассматривали производящие функции, которым соответствовали ортогональные системы функций. Такое благоприятное положение

ние не всегда имеет место. Представляется интересным найти подход к решению задачи и в более общем случае. Рассмотрим, например, интегральное уравнение, ядром которого служит производящая функция для функций Бесселя:

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} e^{iz \cos u} \psi(u) du, \quad 0 \leq z \leq \infty. \quad (8.3.46)$$

Интегральное уравнение такого вида возникает в задаче о распространении двумерных волн, амплитуда которых подчинена определенному условию на некоторой полуплоскости. Первый шаг при решении уравнения (8.3.46) состоит в разложении как ядра, так и функции $\psi(u)$ в ряды Фурье по $\cos(nu)$:

$$\psi = \sum a_n \cos nu, \quad e^{iz \cos u} = \sum \varepsilon_n J_n(z) \cos nu.$$

Тогда

$$\varphi(z) = \pi \sum_n a_n J_n(z). \quad (8.3.47)$$

Коэффициенты a_n можно непосредственно выразить через значения функции φ и ее производных при $z=0$, как это было сделано при получении формул (8.3.28).

Интегральные уравнения первого рода и функции Грина. Если оказывается, что ядром интегрального уравнения служит функция Грина, то решение получается легко. Это следует из того факта, что каждую функцию Грина можно разложить в ряд по собственным функциям [см. формулу (7.2.39)]. Для симметричной функции G_k

$$G_k(x|x_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\chi}_n(x_0) \chi_n(x)}{k_n^2 - k^2}, \quad (8.3.48)$$

где функции χ_n ортогональны и нормированы на отрезке $a \leq x \leq b$. Решение уравнения

$$\varphi(x) = \int_a^b G(x|x_0) \psi(x_0) dx_0$$

теперь может быть легко получено. Рассмотрим разложение для функции ψ :

$$\psi(x) = \sum_n a_n \chi_n(x).$$

Тогда

$$\varphi(x) = 4\pi \sum_n \frac{a_n}{k_n^2 - k^2} \chi_n(x),$$

причем коэффициенты a_n вычисляются при помощи квадратур:

$$a_n = \frac{1}{4\pi} (k_n^2 - k^2) \int_a^b \bar{\chi}_n(x) \varphi(x) dx. \quad (8.3.49)$$

Аналогичный процесс можно осуществить для дву- и трехмерных функций Грина, если только выражение

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\chi}_n(\mathbf{r}_0) \chi_n(\mathbf{r})}{k_n^2 - k^2}, \quad (8.3.50)$$

определяющее G_k , допускает разделение переменных. Функции, стоящие под знаком этой суммы, зависят от двух или от трех переменных. Тем не менее, предполагая, что переменные разделяются, мы можем записать каждую функцию χ_n в виде произведения функций от одной переменной. Более того, семейство всех этих функций от какой-либо переменной ортогонально (для каждой из переменных):

$$\chi_n(\mathbf{r}) = X_{n1}(x_1) X_{n2}(x_2) X_{n3}(x_3), \quad \int \bar{X}_{n1} X_{m1} \rho(x_1) dx_1 = \delta_{nm}.$$

Если при этом фиксировать значение двух переменных, например x_2 и x_3 , как для $\mathbf{r}$, так и для $\mathbf{r}_0$, то выражение (8.3.50) для G_k приводится к виду

$$K(x|x_0) = \sum_h \alpha_h \bar{X}_{h1}(x_0) X_{h1}(x). \quad (8.3.51)$$

Интегральное уравнение первого рода, ядром которого служит $K(x|x_0)$, легко решается. Решение имеет вид

$$\psi(x) = \rho(x) \sum_k \left[\frac{\int \bar{X}_{k1}(x_0) \varphi(x_0) \rho(x_0) dx_0}{\alpha_k} \right] X_{k1}(x). \quad (8.3.52)$$

Придавая переменным x_2 и x_3 различные значения и составляя линейные комбинации получаемых таким образом ядер, можно получить много ядер типа (8.3.51).

Поясним теперь эти замечания примером. Функция Грина двумерного уравнения Лапласа пропорциональна $\ln R$, где

$$R = \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

Используя общую теорию разложения функций Грина, развитую в предыдущей главе (см. также гл. 10), находим, что в полярных координатах

$$\ln R = \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \cos[n(\varphi - \varphi_0)], \quad r > r_0. \quad (8.3.53)$$

Пусть теперь $r = r_0 = 1$. Тогда это разложение приводится к виду

$$\ln \sqrt{2[1 - \cos(\varphi - \varphi_0)]} = \ln \left| 2 \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right| = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos[n(\varphi - \varphi_0)]$$

или

$$\ln \left| 2 \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right| = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\cos(n\varphi) \cos(n\varphi_0) + \sin(n\varphi) \sin(n\varphi_0)]. \quad (8.3.54)$$

Интегральное уравнение первого рода с ядром

$$K(\varphi|\varphi_0) = \ln \left| 2 \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right|,$$

где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, теперь легко решается.

Мы можем построить другое ядро с простым билинейным разложением типа (8.3.51) в виде суммы

$$\ln \left| 2 \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right| + \ln \left| 2 \sin \left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right) \right| = \ln [2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)].$$

Тогда

$$\ln [2|\cos \varphi - \cos \varphi_0|] = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cos(n\varphi) \cos(n\varphi_0). \quad (8.3.55)$$

Следовательно, интегральное уравнение

$$\Psi(\varphi) = \int_0^\pi \ln |2|\cos \varphi - \cos \varphi_0|| \psi(\varphi_0) d\varphi_0 \quad (8.3.56)$$

имеет решение

$$\psi(\varphi) = a_0 - \frac{2}{\pi^2} \sum_n n \left[\int_0^\pi \Psi(\varphi_0) \cos(n\varphi_0) d\varphi_0 \right] \cos(n\varphi), \quad (8.3.57)$$

где a_0 произвольно.

Дифференцируя только что приведенные ядра, можно получить другие полезные ядра. Дифференцирование $\ln |2 \sin(\varphi - \varphi_0)/2|$ и $\ln |2|\cos \varphi - \cos \varphi_0||$ соответственно дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) &= \sum_n [\sin(n\varphi) \cos(n\varphi_0) - \cos(n\varphi) \sin(n\varphi_0)], \\ \frac{1}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi} &= - \sum_n 2 \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \cos(n\varphi_0). \end{aligned}$$

Интегральное уравнение

$$\Phi(\varphi) = \int_0^\pi \frac{\psi(\varphi_0)}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi} d\varphi_0,$$

ядром которого служит функция $1/(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$, можно преобразовать в другое уравнение, представляющее интерес для гидродинамики. Пусть

$$\cos \varphi = x, \quad \Phi(\varphi) = \chi(x), \quad -\frac{\psi(\varphi_0)}{\sin \varphi_0} = \Psi(x_0).$$

Тогда

$$\chi(x) = \int_{-1}^1 \frac{\Psi(x_0)}{x - x_0} dx_0. \quad (8.3.58)$$

Операции, при помощи которых из функции Грина $\ln R$ мы получили много различных ядер, очевидно, могут быть использованы и для других функций Грина. Пример, который мы выбрали, особенно прост. В самом деле, перечисленные выше разложения можно было получить прямым путем быстрее, чем используя предварительное знание разложения функции Грина, и в принципе такое непосредственное разложение всегда возможно. Однако в последующих главах (гл. 10 и следующие) будут указаны разложения для многих функций Грина в системах координат, допускающих разделение переменных, и таким образом будут автоматически выделены многие интегральные уравнения первого рода, разрешимые при помощи разложения по собственным функциям.

Интегральные преобразования и интегральные уравнения первого рода. В равенстве

$$\Psi(z) = \int K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0$$

функция $\Psi(z)$ часто называется (интегральным) преобразованием функции $\psi(z)$. Решение интегрального уравнения, выражающее ψ через Ψ , называется обращением этого преобразования. Преобразования, в которых соотношение между Ψ и ψ особенно просто, изучены весьма подробно. Здесь мы рассмотрим несколько примеров.

Наиболее изученным и наиболее важным является преобразование Фурье (см. § 4.7)

$$\Psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \phi(z) dz. \quad (8.3.59)$$

Его обращение имеет вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \Psi(k) dk, \quad (8.3.60)$$

и, таким образом, интегральное уравнение (8.3.59) с известной функцией Ψ и ядром $K(k|z) = e^{ikz}$ имеет своим решением (8.3.60). Мы отсылаем читателя к § 4.7, где излагаются условия, при которых такое обращение возможно.

Преобразование Фурье можно обобщить на широкий класс функций. Как было показано в гл. 6, преобразование Фурье вытекает из условия полноты для семейства собственных функций с непрерывным спектром собственных значений. Напомним прежде всего, как выражается условие ортогональности и нормировки для случая непрерывного спектра. Если k — собственное значение, то

$$\int \bar{\varphi}(k|x) \varphi(k_0|x) dx = \delta(k - k_0), \quad (8.3.61)$$

где область интегрирования простирается до бесконечности хотя бы в одном направлении, а δ — дельта-функция Дирака. Произвольную функцию ϕ можно разложить по функциям φ только при условии, что существует интеграл

$$\phi(x) = \int \Psi(k) \varphi(k|x) dk. \quad (8.3.62)$$

Для получения функции $\Psi(k_0)$ умножаем обе части этого равенства на $\bar{\varphi}(k_0|x)$ и интегрируем по x :

$$\int \bar{\varphi}(k_0|x) \phi(x) dx = \iint \Psi(k) \bar{\varphi}(k_0|x) \varphi(k|x) dk dx.$$

Меняя порядок интегрирования (эту операцию следует обосновать в каждом частном случае) и используя уравнение (8.3.61), получаем

$$\int \bar{\varphi}(k_0|x) \phi(x) dx = \int \Psi(k) \delta(k - k_0) dk.$$

Следовательно,

$$\Psi(k) = \int \bar{\varphi}(k|x) \phi(x) dx. \quad (8.3.63)$$

Мы видим, что если $\Psi(k)$ является преобразованием функции $\phi(x)$ при помощи функции $\bar{\varphi}$, то ϕ является преобразованием функции Ψ при помощи функции φ . В случае преобразования Фурье, рассмотренного выше,

$$\bar{\varphi}(k|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx},$$

а интегральные соотношения Фурье (8.3.59) и (8.3.60) как раз являются частными случаями уравнений (8.3.63) и (8.3.62) соответственно.

Таким образом, ясно, что каждая функция двух переменных, которую можно нормировать в соответствии с уравнением (8.3.61), может быть использована для построения преобразования и его обращения. Иными

словами, для тех интегральных уравнений первого рода, ядрами которых служат указанные функции, решение дается формулой обращения.

Например, преобразование Ганкеля можно получить, используя свойства ортогональности функций Бесселя $J_m(kr)$ с произвольным m . В гл. 7 [см. также уравнение (6.3.62)] мы показали, что

$$\sqrt{kk_0} \int_0^\infty J_m(kr) J_m(k_0 r) r dr = \delta(k - k_0).$$

Следовательно, в предыдущих рассуждениях можно положить

$$\varphi(k|x) = \sqrt{k} J_m(kr).$$

Следуя традиции, мы опускаем множитель $\sqrt{k}$ в преобразовании Ганкеля. Таким образом,

$$\Psi(k) = \int_0^\infty J_m(kr) \psi(r) r dr. \quad (8.3.64)$$

Его обращение определяется так:

$$\psi(r) = \int_0^\infty J_m(kr) \Psi(k) k dk. \quad (8.3.65)$$

Из уравнений (8.3.64) и (8.3.65) получаем

$$\psi(r) = \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \rho [J_m(kr) J_m(k\rho) \psi(\rho)] d\rho.$$

Итак, решение интегрального уравнения (8.3.64) дается формулой (8.3.65).

При изучении некоторых интегральных уравнений важную роль играют различные преобразования, тесно связанные с преобразованием Фурье (см. также § 4.7). Преобразование Лапласа, которое мы применим в дальнейшем к интегральному уравнению Вольтерра, имеет вид

$$\Psi(p) = \int_0^\infty e^{-pz} \psi(z) dz. \quad (8.3.66)$$

Его обращение имеет вид

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pz} \Psi(p) dp. \quad (8.3.67)$$

Преобразование Меллина определяется формулой

$$\Psi(s) = \int_0^\infty z^{s-1} \psi(z) dz. \quad (8.3.68)$$

Его обращением является

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} \Psi(s) ds. \quad (8.3.69)$$

Как выражение (8.3.67), так и выражение (8.3.69) можно рассматривать как решения интегральных уравнений первого рода (8.3.66) и (8.3.68) соответственно.

Наконец, упомянем еще о двух преобразованиях, получаемых в теории аналитических функций, которые, по существу, выводятся из интегральной формулы Коши. Их называют *преобразованиями Гильберта*. Из формулы (4.2.18) следует, что если

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(z_0)}{z_0 - z} dz_0, \quad (8.3.70)$$

то

$$\psi(z) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(z_0)}{z_0 - z} dz_0. \quad (8.3.71)$$

Знак $\mathcal{P}$ перед интегралом показывает, что интеграл берется в смысле главного значения. Если (8.3.70) рассматривать как интегральное уравнение с искомой функцией $\psi(z)$, то решение дается формулой (8.3.71).

Из (4.2.28) получаем аналогичную пару:

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_0^{2\pi} \left[1 + \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right) \right] \psi(\varphi_0) d\varphi_0, \\ \psi(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_0^{2\pi} \left[1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right) \right] \Psi(\varphi_0) d\varphi_0. \end{aligned} \quad (8.3.72)$$

Мы уже говорили об этом частном виде ядра в предыдущем пункте, посвященном функциям Грина [см. (8.3.57)], где решение было найдено с помощью рядов Фурье. Эта связь не вызывает особого удивления, так как формула (4.2.28) основана на соотношении (4.2.25), в которое входит функция Грина.

В этом пункте была подчеркнута связь между интегральными преобразованиями и интегральными уравнениями первого рода. Ниже в этой главе мы используем преобразования для приведения интегральных уравнений к видам, более удобным для решения.

Дифференциальные уравнения и интегральные уравнения первого рода. В предыдущих пунктах мы видели, как можно решать уравнения первого рода довольно разнообразных типов. Еще большее количество разрешимых уравнений можно построить, действуя на обе части уравнения каким-нибудь оператором, дифференциальным или интегральным (или и тем и другим). Например, предположим, что мы знаем решение ψ уравнения

$$\varphi(z) = \int K(z | z_0) \psi(z_0) dz_0,$$

где K и φ — известные функции. Тогда мы можем найти решение уравнения

$$\chi(z) = \int \mathcal{L}_z [K(z | z_0)] \psi(z_0) dz_0 \quad (8.3.73)$$

в том случае, когда известно решение уравнения

$$\mathcal{L}_z [\varphi(z)] = \chi(z), \quad (8.3.74)$$

и выразить φ через χ . Обратно, если мы знаем решение уравнения с неизвестной χ , то мы можем решить уравнение с неизвестной φ . Таким образом, мы можем перейти от решения простого интегрального уравнения к решению более сложных интегральных уравнений в том случае, когда

мы можем решить уравнение, выражающее φ через χ . Если оператор, переводящий K в $\mathcal{L}(K)$, является дифференциальным оператором, то уравнение, которое следует решить, чтобы получить φ , является дифференциальным уравнением. Таким образом, если мы в состоянии решить дифференциальное уравнение, то мы можем решить и интегральное уравнение, и, наоборот, если мы в состоянии решить интегральное уравнение, то мы можем решить дифференциальное уравнение.

Пусть, например, $K(z|z_0) = e^{-zz_0}$, так что

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zz_0} \phi(z_0) dz_0.$$

Это как раз преобразование Лапласа; решение ϕ дается формулой обращения (8.3.67). Значительно более общий класс ядер можно получить из ядер

$$\mathcal{K}(z|z_0) = \sum_n z_0^n g_n(z) e^{-zz_0}$$

или

$$\mathcal{K}(z|z_0) = \sum_n (-1)^n g_n(z) \frac{d^n}{dz^n} (e^{-zz_0}) = \mathcal{L}_z[\mathcal{K}(z|z_0)],$$

где

$$\mathcal{L} = \sum_n (-1)^n g_n(z) \frac{d^n}{dz^n}. \quad (8.3.75)$$

В данном случае (8.3.74) является дифференциальным уравнением относительно φ , изученным довольно подробно в гл. 5:

$$\sum_n (-1)^n g_n(z) \frac{d^n \varphi}{dz^n} = \chi(z).$$

Решение этого дифференциального уравнения может оказаться нелегким. Для того чтобы воспользоваться более доступными методами, необходимо, чтобы сумма была конечной. Действительно, даже если дифференциальное уравнение имеет первый или второй порядок, разрешимость его маловероятна.

Другой пример получим с помощью полиномов Эрмита. Пусть $K(z|z_0) = e^{-(z-z_0)^2}$. Если

$$\mathcal{L} = \sum_n (-1)^n a_n \frac{d^n}{dz^n},$$

то

$$\mathcal{L}[K(z|z_0)] = \sum_n a_n e^{-(z-z_0)^2} H_n(z-z_0).$$

Это последнее соотношение весьма расширяет область выбора ядер для новых интегральных уравнений. Если a_n постоянны, то ядро $\mathcal{L}(K)$ является функцией общего вида от $(z-z_0)$, определенной на интервале $(-\infty, \infty)$. Если же a_n зависят от z , то ядро оказывается даже еще более общим. Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\sum_n (-1)^n a_n \frac{d^n \varphi}{dz^n} = \chi(z)$$

решается особенно просто, если коэффициенты a_n постоянны; следовательно, здесь мы имеем способ решения любого интегрального уравнения первого

рода, ядром которого служит функция от $(z - z_0)$, определенная на интервале $(-\infty, \infty)$.

С интегральным уравнением может быть связано также другое дифференциальное уравнение. Его можно получить из равенства (8.3.73) совершенно аналогично тому, как были получены интегральные представления для дифференциальных уравнений (см. § 5.3). Предположим, что

$$\mathcal{L}_z K(z|z_0) = \mathcal{M}_{z_0} K(z|z_0),$$

где индекс указывает, на какую из переменных действует оператор. Например, если $\mathcal{L}$ задается равенством (8.3.75), то

$$\mathcal{M}_{z_0} = \sum_n (-1)^n z_0^n g_n \left(-\frac{d}{dz_0} \right).$$

(Другие примеры см. в § 5.3.) Введем теперь сопряженный оператор $\tilde{\mathcal{M}}$, определяемый соотношением

$$u \mathcal{M}[v] - v \tilde{\mathcal{M}}[u] = \frac{dP[u, v]}{dz}.$$

Применяя эти соотношения к уравнению (8.3.73), получаем

$$\chi(z) + P[K(z|a), \psi(a)] - P[K(z|b), \psi(b)] = \int_a^b K(z|z_0) \tilde{\mathcal{M}}[\psi(z_0)] dz_0.$$

Согласно нашему предположению, это интегральное уравнение можно решить относительно $\tilde{\mathcal{M}}[\psi]$, так что

$$\tilde{\mathcal{M}}[\psi(z)] = r(z). \quad (8.3.76)$$

Может оказаться, что это дифференциальное уравнение решается проще, чем (8.3.74). Методы и примеры нахождения $\tilde{\mathcal{M}}$ по $\mathcal{M}$, а также примеры операторов $\mathcal{L}$ приведены в § 5.3.

Оператор $\mathcal{L}$ не обязательно должен быть дифференциальным. Например, он может оказаться операцией взятия преобразования и тогда проблема (8.3.73) сводится к проблеме обращения этого преобразования. Однако этот сильный метод заслуживает сам по себе целого параграфа и мы вернемся к нему в § 8.5.

Проблема моментов. Момент n -го порядка M_n функции (или, как это обычно бывает в физике, распределения) ψ определяется следующим образом:

$$M_n = \int_a^b z_0^n \psi(z_0) \rho(z_0) dz_0, \quad (8.3.77)$$

где $\rho(x)$ — весовая функция. Во многих случаях, в частности при рассмотрении явлений переноса (см. § 2.4 и 12.2), возможно вычислить последовательность моментов M_n , и искомой является функция ψ .

Прежде чем изучать методы, применяемые здесь, заметим, что линейной заменой переменной можно изменить пределы интегрирования. В результате мы изменим область определения ψ и новые моменты будут линейно выражаться через конечное число исходных. Например, пусть

$$\zeta_0 = 2\pi \frac{z_0 - a}{b - a}.$$

Тогда

$$M_n = \frac{2\pi}{b-a} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(b-a)\zeta_0}{2\pi} + a \right]^n \psi \left(\frac{b-a}{2\pi} \zeta_0 + a \right) \rho \left(\frac{b-a}{2\pi} \zeta_0 + a \right) d\zeta_0.$$

Положим

$$\psi(z_0) = \chi(\zeta_0), \quad \rho(z_0) = \omega(\zeta_0)$$

и

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} \zeta_0^n \chi(\zeta_0) \omega(\zeta_0) d\zeta_0.$$

Тогда

$$\mu_n = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^{n+1} \int_a^b (z_0 - a)^n \psi(z_0) \rho(z_0) dz_0$$

и, следовательно,

$$\mu_n = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^{n+1} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-a)^{n-s} M_s. \quad (8.3.78)$$

Отсюда ясно, что в силу линейности преобразования пределы интегрирования a и b в (8.3.77) можно изменить, не прибегая к каким-либо бесконечным процессам. Обычно рассматриваются пределы $(-\infty, \infty)$, $(0, \infty)$ и $(-1, 1)$.

Метод, пригодный для решения проблемы моментов, заключается в том, что устанавливается соотношение между моментами и коэффициентами разложения функции ψ по полиномам, ортогональным с весом ρ в промежутке (a, b) .

Например, предположим, что интервалом интегрирования является $(-\infty, \infty)$, а весовой множитель равен $e^{-z_0^2}$. [Можно, конечно, выделить множитель $e^{-z_0^2}$ из функции $\psi(z_0)$ и определить новую неизвестную функцию φ соотношением $\psi(z_0) = e^{-z_0^2} \varphi(z_0)$.] Соответствующими ортогональными полиномами будут $H_n(z_0)$. Разложим теперь $\psi(z_0)$ следующим образом:

$$\psi(z_0) = \sum a_n H_n(z_0), \quad a_n = \frac{1}{n! 2^n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z_0) H_n(z_0) e^{-z_0^2} dz_0.$$

Так как H_n — полиномы, то интеграл, входящий в выражение для a_n , можно непосредственно выразить через M_n . Например, $H_0(z_0) = 1$, так что

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z_0) e^{-z_0^2} dz_0 = \frac{M_0}{\sqrt{\pi}}.$$

В общем случае

$$\begin{aligned} H_n &= (2x)^n - \binom{n}{2} \frac{2!}{1!} (2x)^{n-2} + \binom{n}{4} \frac{4!}{2!} (2x)^{n-4} + \dots = \\ &= \sum_k \frac{(-1)^k n!}{(k!) (n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \end{aligned}$$

где при четном n последним членом разложения является постоянная, а при нечетном — член с первой степенью x . Тогда

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_k \frac{(-1)^k}{(k!) (n-2k)!} \frac{M_{n-2k}}{2^{2k}}. \quad (8.3.79)$$

При помощи (8.3.79) легко найти функцию ψ .

Существует и другой подход к проблеме моментов, в принципе более общий, но не всегда более эффективный практически. Можно показать, что эта проблема эквивалентна интегральному уравнению первого рода. Вернемся,

например, к разобранному выше случаю. Умножая обе части уравнения (8.3.77) на $e^{-z^2} (2z)^n/n!$, получаем

$$\frac{(2z)^n}{n!} e^{-z^2} M_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2zz_0)^n}{n!} e^{-(z^2+z_0^2)} \psi(z_0) dz_0.$$

Суммируя теперь в обеих частях по n , имеем

$$e^{-z^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} M_n \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-z_0)^2} \psi(z_0) dz_0. \quad (8.3.80)$$

Предполагая, что ряд в левой части сходится, мы видим, что проблема моментов свелась к интегральному уравнению первого рода. Конечно, это уравнение можно решить, разложив ψ по полиномам Эрмита. Однако существуют приближенные методы решения интегральных уравнений (см. гл. 9), которые часто могут оказаться более практичными, чем использование соотношения (8.3.79).

Подобным же образом можно поступать и в случаях других промежуточных интегрирования. Интервалу $(0, \infty)$ соответствуют весовая функция e^{-z^2} и полиномы Лагерра. Промежутку $(-1, 1)$ и $\rho=1$ соответствуют полиномы Лежандра. Если $\rho = \sqrt{1-z_0^2}$, то соответствующими полиномами являются полиномы Чебышева. Весьма важно заметить, что разложение ψ по ортогональным полиномам зависит от весовой функции ρ . Действительно, характер сходимости для различных весовых функций может быть совершенно различен. Однако, как указывалось выше, выделяя множитель из $\psi(z_0)$ и рассматривая оставшийся множитель как неизвестную функцию, можно произвольным образом менять вес. Обозначим вес через $\omega(z)$, так что

$$M_n = \int_a^b z_0^n \rho(z_0) \omega(z_0) \varphi(z_0) dz_0, \quad \text{где } \psi = \omega\varphi.$$

Наиболее подходящей (т. е. обеспечивающей наиболее быструю сходимость) будет такая весовая функция ω , которая возможно более близка к неизвестной функции ψ . Очевидно, если она в точности равна ψ , то в разложении φ по полиномам будет только один член, а именно $\varphi=1$. Весьма выгодно использовать любую доступную информацию, чтобы построить наилучшее возможное приближение к ψ , и затем взять это приближение в качестве ω .

Резюме. Мы исследовали те решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которые получаются при помощи разложения неизвестной функции в ряд по функциям какой-либо полной системы. Наиболее общие ядра, для которых могут быть получены точные решения, характеризуются разложением вида

$$K(z|z_0) = \sum_n a_n \psi_n(z) \varphi_n(z_0),$$

где как ψ_n , так и φ_n образуют полные и ортогональные семейства. Ортогональность, вообще говоря, не существенна, но на практике весьма удобна. Однако же обсуждались и методы, применяемые в случае, когда одно из этих семейств не является ортогональным.

Следует подчеркнуть, что уравнения Вольтерра первого рода могут быть решены некоторыми из описанных в этом разделе методов, хотя, вообще говоря, операции оказываются более трудными и требуют привлече-

ния всего аппарата метода Шмидта или биортогональных рядов. К счастью, многие ядра уравнений Вольтерра имеют специальную форму $v(z - z_0)$, что позволяет развить для них более эффективные методы; этот случай довольно подробно будет рассмотрен в § 8.5.

8.4. Решение интегральных уравнений второго рода

Методы, применяемые для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, также можно классифицировать в соответствии с типом разложения ядра. Эта классификация, конечно, весьма похожа на ту, которая была дана в § 8.3, но оперировать с уравнениями второго рода приходится совсем иначе. Вследствие этого целесообразно подойти к классификации иным путем, отличным от того, которому мы следовали в § 8.3, хотя, как мы увидим, будут изучаться те же типы ядер, что и раньше. Как и в предыдущем параграфе, мы будем заниматься здесь методами точного решения; приближенным методам будет полностью посвящена гл. 9. Один из методов решения при помощи рядов, называемый методом Фредгольма, весьма важен для изучения теории возмущений и поэтому мы откладываем его изложение также до следующей главы.

Уравнение, подлежащее изучению, имеет вид

$$\psi(z) = \lambda \int_a^b K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0, \quad a \leq z \leq b. \quad (8.4.1)$$

Эта задача имеет решения только для некоторых специальных значений λ . Мы будем их обозначать через λ_n , а соответствующие им решения — через ψ_n . Если ядро K симметрично и несингулярно, то собственные значения вещественны, а спектр собственных значений дискретен. Если ядро симметрично, но сингулярно, то часть спектра может быть непрерывной, если же ядро не симметрично, то собственные значения не обязательно вещественны.

Мы можем разложить $K(z|z_0)$ в ряд по функциям $h_n(z)$, образующим полное семейство; тогда коэффициентами будут функции $g_n(z_0)$ от z_0 :

$$K(z|z_0) = \sum_n h_n(z) g_n(z_0), \quad (8.4.2)$$

и

$$\psi(z) = \lambda \sum_n h_n(z) \int_a^b g_n(z_0) \psi(z_0) dz_0.$$

Это наводит нас на мысль, что решение можно искать в виде

$$\psi(z) = \sum_n A_n h_n(z). \quad (8.4.3)$$

(Следует подчеркнуть, что в дальнейших рассуждениях будет предполагаться, что это разложение сходится.) Значит,

$$A_n = \lambda \int_a^b g_n(z_0) \psi(z_0) dz_0 \quad \text{для всех } n, \quad (8.4.4)$$

$$A_n = \lambda \sum_p A_p \int_a^b g_n(z_0) h_p(z_0) dz_0.$$

Обозначив

$$\int_a^b g_n(z_0) h_p(z_0) dz_0 = \alpha_{pn},$$

получаем

$$A_n = \lambda \sum_p A_p \alpha_{pn},$$

или

$$\sum_p A_p (\lambda \alpha_{pn} - \delta_{pn}) = 0. \quad (8.4.5)$$

Это — система линейных *однородных* уравнений с неизвестными A_p . Ненулевые решения A_p существуют только тогда, когда равен нулю определитель, составленный из коэффициентов,

$$\begin{vmatrix} \lambda \alpha_{00} - 1 & \lambda \alpha_{10} & \lambda \alpha_{20} & \lambda \alpha_{30} & \dots \\ \lambda \alpha_{01} & \lambda \alpha_{11} - 1 & \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{31} & \dots \\ \lambda \alpha_{02} & \lambda \alpha_{12} & \lambda \alpha_{22} - 1 & \lambda \alpha_{32} & \dots \\ \lambda \alpha_{03} & \lambda \alpha_{13} & \lambda \alpha_{23} & \lambda \alpha_{33} - 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

или в сокращенной записи

$$|\lambda \alpha_{pn} - \delta_{pn}| = 0. \quad (8.4.6)$$

Все возможные решения λ_n этого уравнения, записанного с помощью определителя, можно найти, а затем из уравнения (8.4.5) находим соответствующие значения A_p и с помощью формулы (8.4.3) определяем ψ . Для того чтобы установить связь с задачей интегрирования дифференциального уравнения, заметим, что (8.4.5) представляет собой последовательность *рекуррентных соотношений* для определения A_p , очень похожих на соотношения, получающиеся при подстановке степенного ряда (или иного ряда по функциям полной системы) в дифференциальное уравнение.

Для разыскания «наилучшего» типа разложения ядра K не существует «столбовой дороги», не существует всегда пригодного правила, указывающего, какое из разложений в наибольшей степени упрощает решение. В самом деле, обычно для каждого типа ядер возможно несколько разложений и часто приходится испытывать каждое из них для того, чтобы найти наиболее удобное в данном, конкретном случае. В соответствии со сказанным наша классификация методов решения будет связана скорее с типами разложений, чем с ядрами, связана с природой коэффициентов α_{pn} , получающихся для данного K после выбора множеств g_n и h_p . Часто для данного K можно применить разложения различных классов, хотя, обычно, одно из разложений представляется наиболее подходящим. Сейчас мы дадим обзор наиболее употребительных классов разложений K , приводя примеры тех типов ядер, для которых эти разложения оказываются подходящими, а также остановимся на некоторых деталях решения уравнений.

Разложения первого класса. Наша классификация будет зависеть от свойств матрицы α_{pn} , т. е. от того, как связаны функции g_n и h_p . Например, *первым* назовем тот класс, для которого α_{pn} — *диагональная* матрица, т. е. $\alpha_{pn} = \alpha_n \delta_{pn}$. Это означает, что каждая функция g_n орто-

гональна всем функциям h_p , за исключением h_n . В этом случае

$$\lambda_n = \frac{1}{a_n}, \quad (8.4.7)$$

причем

$$\psi_n = h_n.$$

Проверить это решение можно непосредственной подстановкой в интегральное уравнение (8.4.1).

Ядра, являющиеся функциями Грина, дают примеры разложений *диагонального* типа. В предыдущем параграфе мы получили из разложения для $\ln R$ выражение (8.3.54)

$$\begin{aligned} K(\varphi | \varphi_0) &= \ln \left| 2 \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right| = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\cos(n\varphi) \cos(n\varphi_0) + \sin(n\varphi) \sin(n\varphi_0)]. \end{aligned}$$

При $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ собственными функциями соответствующих интегральных уравнений являются $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$; обе они соответствуют собственному значению $\lambda_n = -n/\pi$.

Второй пример получаем, объединяя $\ln |2 \sin(\varphi - \varphi_0)/2|$ и $\ln |2 \sin(\varphi + \varphi_0)/2|$ так, чтобы иметь (8.3.55)

$$K(\varphi | \varphi_0) = \ln |2 | \cos \varphi - \cos \varphi_0 || = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cos(n\varphi) \cos(n\varphi_0).$$

При $0 \leq \varphi \leq \pi$ соответствующее интегральное уравнение имеет собственные функции $\cos(n\varphi)$ и собственные значения $\lambda_n = -n/\pi$.

Дифференцируя только что выписанное $K(\varphi | \varphi_0)$ [см. (8.3.55)], мы получаем пример, иллюстрирующий существенную разницу между уравнениями первого и второго рода:

$$\frac{1}{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \cos(n\varphi_0).$$

Заметим, что хотя функции $\sin(n\varphi)$ и $\cos(n\varphi)$ образуют полные семейства, они не являются попарно ортогональными в промежутке $0 \leq \varphi \leq \pi$. При решении уравнения первого рода (см. § 8.3) это обстоятельство не порождало трудностей, так как свободный член не был связан никаким явным соотношением с функцией ψ ; напротив, для уравнения второго рода дело обстоит совершенно иначе.

Разложения второго класса. Разложениями второго класса мы будем считать такие, для которых

$$a_{pn} = 0, \text{ если } p < n \text{ (тип } a),$$

или

$$a_{pn} = 0, \text{ если } p > n \text{ (тип } b). \quad (8.4.8)$$

Такие разложения мы будем называть *полудиagonalными*. Функцию g_n можно следующим образом разложить в ряд по функциям h_p , которые

полагаем ортогональными и нормированными:

$$g_n(z) = \sum_{p=n}^{\infty} \alpha_{pn} h_p(z) \quad (\text{тип } a),$$

$$g_n(z) = \sum_{p=0}^n \alpha_{pn} h_p(z) \quad (\text{тип } b).$$
(8.4.9)

Рекуррентное соотношение, связывающее коэффициенты A_p в случае a , имеет вид

$$A_n = \lambda \sum_{p=n}^{\infty} A_p \alpha_{pn}.$$

Это соотношение включает как частный случай (если для заданного n отличны от нуля только два α_{pn}) двучленные рекуррентные соотношения, имеющие столь важное значение в случае дифференциальных уравнений. Уравнение, определяющее λ_n , выглядит в случае a весьма просто:

$$\begin{vmatrix} \lambda \alpha_{00} - 1 & \lambda \alpha_{10} & \lambda \alpha_{20} & \lambda \alpha_{30} & \dots \\ 0 & \lambda \alpha_{11} - 1 & \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{31} & \dots \\ 0 & 0 & \lambda \alpha_{22} - 1 & \lambda \alpha_{32} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \alpha_{33} - 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0.$$

Разложение этого определителя имеет вид $(\lambda \alpha_{00} - 1)(\lambda \alpha_{11} - 1) \dots$, так что собственными значениями служат $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$. Соответствующие собственные функции представляют собой линейные комбинации функций h_p , $p \leq n$. Таким образом, как это следует из рекуррентных соотношений для A_p ,

$$\psi_0 = h_0, \quad \psi_1 = h_1 + \frac{\lambda_1 \alpha_{10}}{1 - \lambda_1 \alpha_{00}} h_0 \quad \text{и т. д.}$$

Поучительно рассмотреть частный случай типа a , когда α_{pn} отличны от нуля только при $p = n$ и $p = n + 1$. Тогда рекуррентное соотношение приобретает вид

$$A_n (\lambda \alpha_{nn} - 1) + A_{n+1} \lambda \alpha_{n+1, n} = 0.$$

Это — двучленная рекуррентная формула, и она легко решается:

$$A_p = A_0 \prod_{j=0}^{p-1} (-1)^{j+1} \frac{\lambda \alpha_{j, j-1}}{\lambda \alpha_{j+1, j}}.$$

Мы видим, что выбор $\lambda = \lambda_n = 1/\alpha_{nn}$ влечет за собой равенства $A_p = 0$ при $p > n$; другими словами, ряд для ψ_n по функциям h_p обрывается при $p = n$. Почему же не каждое λ может быть использовано при подсчете A_p и, следовательно, не существует непрерывного спектра λ ? Единственным ограничивающим условием является сходимость ряда для ψ . Возможны только те значения λ , для которых ряд для ψ сходится. Положение здесь вполне аналогично тому, которое имеет место в теории дифференциальных уравнений. Например, решая дифференциальное уравнение Эрмита при помощи степенных рядов, мы получаем двучленную рекуррентную формулу. Сходящиеся степенные ряды нельзя получить без отбора

специальных значений, соответствующих специальным значениям λ в исследуемом случае (ср. стр. 713). В случае интегральных уравнений важно понять, что, помимо решений, соответствующих $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$, *могут также существовать решения, для которых спектр λ непрерывен.*

Рассмотрим теперь тип *b*. Рекуррентное соотношение и уравнение, определяющее λ_n , имеют вид

$$A_n = \lambda \sum_{p=0}^n A_p \alpha_{pn},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \alpha_{00} - 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda \alpha_{01} & \lambda \alpha_{11} - 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda \alpha_{02} & \lambda \alpha_{12} & \lambda \alpha_{22} - 1 & 0 & \dots \\ \lambda \alpha_{03} & \lambda \alpha_{13} & \lambda \alpha_{23} & \lambda \alpha_{33} - 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0.$$

Как и для типа *a*, собственные значения равны $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$. Соответствующие собственные функции не являются конечными линейными комбинациями функций h_p , как это было в случае *a*. Например, уравнения, определяющие коэффициенты разложения для ϕ_0 , имеют вид

$$A_n (1 - \lambda_0 \alpha_{nn}) = \lambda_0 \sum_{p=0}^{n-1} A_p \alpha_{pn}.$$

Следовательно,

$$A_1 = \frac{\lambda_0 A_0 \alpha_{01}}{1 - \lambda_0 \alpha_{11}}, \quad A_2 (1 - \lambda_0 \alpha_{22}) = \lambda_0 A_1 \alpha_{12} + \lambda_0 A_0 \alpha_{02},$$

или

$$A_2 = \frac{\lambda_0 A_0}{1 - \lambda_0 \alpha_{22}} \left[\frac{\alpha_{01}}{1 - \lambda_0 \alpha_{11}} + \alpha_{02} \right]$$

и т. д. Все сказанное для типа *a* относительно осторожности, необходимой при рассмотрении спектра λ , применимо также и здесь.

Примеры ядер полудиagonalного типа дают производящие функции. Рассмотрим

$$K(z|z_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zz_0 + z_0^2}} = \sum_n P_n(z) z_0^n.$$

Независимая переменная меняется от -1 до $+1$. После подстановки в интегральное уравнение $\phi = \sum A_p P_p(z)$ получаем

$$A_n = \lambda \sum_p A_p \int_{-1}^1 z_0^n P_p(z_0) dz_0. \quad (8.4.10)$$

Если $p > n$, то интеграл обращается в нуль. Следовательно, K является полудиagonalным ядром типа *b*. Для собственных значений имеем

$$\lambda_n = 1 / \int_{-1}^1 z_0^n P_n(z_0) dz_0.$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл, заметим, что z_0^n можно выразить в виде линейной комбинации P_p , $p \leq n$, и что при интегрировании этой линейной комбинации «выжить» может только тот член, который содержит P_n .

Следовательно, в представлении z_0^n при помощи P_p следует рассматривать только член, содержащий P_n . Так как

$$P_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} [z^n - \dots],$$

то

$$z^n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} [P_n + \dots].$$

После интегрирования получаем

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)!}{2^{n+1} (n!)^2} = \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{15}{4}, \dots$$

Коэффициенты A_n для каждого частного значения λ можно получить непосредственно из рекуррентных соотношений (8.4.10). Меняя в вышеприведенных рассуждениях ролями z и P_n , можно получить полубесконечное ядро типа a . Это ядро имеет вид

$$K(z|z_0) = \frac{1}{\sqrt{1-2z_0z+z^2}} = \sum_n P_n(z_0) z^n.$$

Тогда для

$$\psi = \lambda \int_{-1}^1 K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0$$

получаем

$$\psi = \lambda \sum_n z^n \int_{-1}^1 P_n \psi dz_0.$$

Если положить

$$\psi = \sum_n A_n z^n,$$

то

$$A_n = \lambda \sum_p A_p \int_{-1}^1 P_n z^p dz.$$

Так как $\int_{-1}^1 P_n z^p dz = 0$ при $p < n$, то мы можем написать

$$A_n = \lambda \sum_{p=n}^{\infty} A_p \alpha_{pn}, \quad \alpha_{pn} = \int_{-1}^1 P_n z^p dz = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{p+n}] \frac{p!}{2^n (p-n)!} \frac{\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+n+3}{2}\right)}.$$

Собственные значения определяются равенствами $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$ и совпадают с собственными значениями предыдущей задачи. Однако в этом случае соб-

ственные функции определяются легче:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1, \\ \psi_1 &= z, \\ \psi_2 &= z^2 + \frac{\alpha_{20}/\alpha_{22}}{1 - (\alpha_{00}/\alpha_{22})} \quad \text{и т. д.},\end{aligned}$$

где значения α_{pn} приведены выше.

Разложения третьего класса. Обратимся теперь к третьему классу разложений, которые мы назовем *конечными*. Эти разложения определяются условием

$$\alpha_{pn} = 0, \text{ когда } p \text{ или } n \text{ больше, чем } r. \quad (8.4.11)$$

В этом случае в уравнении (8.4.6), определяющем λ_n , определитель имеет конечный порядок r (r строк и r столбцов). Раскрывая этот определитель, получаем полином степени r . Таким образом, наше уравнение имеет r корней, которые могут быть определены обычными методами. Очевидно, как диагональные, так и полудигональные ядра могут быть конечными.

В простейшем примере из этого класса $K(z|z_0)$ представляется в виде произведения

$$K(z|z_0) = h(z)g(z_0).$$

Интегральное уравнение имеет вид

$$\psi(z) = \lambda h(z) \int g(z_0) \psi(z_0) dz_0.$$

Так как этот интеграл равен постоянной, то сразу видно, что $\psi(z) = h(z)$. Следовательно,

$$\lambda = 1 / \int g(z_0) h(z_0) dz_0.$$

Этот результат можно получить также непосредственно из уравнения (8.4.6), так как в этом случае только элемент α_{00} не равен нулю. Согласно уравнению (8.4.6), имеем

$$\lambda \alpha_{00} - 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\alpha_0}$$

в соответствии с результатом, полученным из интегрального уравнения.

Решения можно получить в явном виде также и в случае, когда в разложении K фигурируют только два члена. Мы приводим эти результаты для справок. Уравнение, определяющее λ ,

$$\begin{vmatrix} (\lambda \alpha_{00} - 1) & \lambda \alpha_{10} \\ \lambda \alpha_{01} & (\lambda \alpha_{11} - 1) \end{vmatrix} = 0$$

имеет два решения

$$\lambda_{\pm} = \frac{(\alpha_{00} + \alpha_{11}) \pm \sqrt{(\alpha_{00} - \alpha_{11})^2 + 4\alpha_{10}\alpha_{01}}}{2(\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01})}, \quad (8.4.12)$$

где λ_+ соответствует знак плюс перед квадратным корнем. Соответствующие собственные функции таковы:

$$\begin{aligned}\psi_+ &= h_0 + h_1 \frac{1 - \lambda_+ \alpha_{00}}{\lambda_+ \alpha_{10}}, \\ \psi_- &= h_0 + h_1 \frac{1 - \lambda_- \alpha_{00}}{\lambda_- \alpha_{10}}.\end{aligned} \quad (8.4.13)$$

Другие случаи. Наконец, может случиться, что выбор h_n был сделан столь неудачно, что привел к разложению ядра K , не относящемуся ни к одному из рассмотренных выше классов, т. е. разложение получилось не диагональное, не полудиagonalное и не конечное. Тогда, вообще говоря, невозможно получить точное выражение для собственного значения λ_n и следует прибегнуть к приближенным или численным методам. Эти методы будут изучены в гл. 9. Однако существует один случай, заслуживающий рассмотрения, когда уравнение для λ_n достаточно просто. Именно, предположим, что

$$a_{pn} = 0, \text{ когда } p \neq n-1, n, n+1. \quad (8.4.14)$$

Другими словами, разложение g_n по функциям h_n состоит только из трех членов. Предполагая, что функции h_n ортогональны и нормированы, получаем это разложение в виде

$$g_n = a_{n-1, n} h_{n-1} + a_{n, n} h_n + a_{n+1, n} h_{n+1}.$$

Уравнение, определяющее λ_n , имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{00} - 1 & \lambda a_{10} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{01} & \lambda a_{11} - 1 & \lambda a_{21} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda a_{12} & \lambda a_{22} - 1 & \lambda a_{32} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda a_{23} & \lambda a_{33} - 1 & \lambda a_{43} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Рекуррентное соотношение, связывающее неизвестные коэффициенты A_p в разложении функции ψ , согласно (8.4.5), имеет вид

$$\lambda a_{n-1, n} A_{n-1} + (\lambda a_{n, n} - 1) A_n + \lambda a_{n+1, n} A_{n+1} = 0. \quad (8.4.15)$$

Это — трехчленная рекуррентная формула. Мы изучали решение таких разностных уравнений в гл. 5 на стр. 532, где подобная проблема возникла при решении дифференциального уравнения Маттье.

Сначала введем новые неизвестные

$$G_n = A_n / A_{n-1}, \quad G_0 = \infty.$$

Тогда

$$\lambda a_{n-1, n} + (\lambda a_{n, n} - 1) G_n + \lambda a_{n+1, n} G_{n+1} G_n = 0.$$

Для упрощения обозначений положим

$$a_{n, n} / a_{n-1, n} = -p_n, \quad a_{n+1, n} / a_{n-1, n} = -q_n, \\ 1/\lambda = \mu, \quad 1/a_{n-1, n} = -r_n.$$

Теперь (8.4.15) можно переписать в виде

$$-1 + (p_n - \mu r_n) G_n + q_n G_n G_{n+1} = 0. \quad (8.4.16)$$

Выражая из этого уравнения G_n через G_{n+1} , получаем

$$G_n = \frac{1}{p_n - \mu r_n + q_n G_{n+1}}.$$

Подставляя в это выражение аналогичное выражение для G_{n+1} , находим

$$G_n = \frac{1}{p_n - \mu r_n + \frac{q_n}{p_{n+1} - \mu r_{n+1} + q_{n+1} G_{n+2}}}.$$

Продолжая этот процесс, получаем G_n в виде непрерывной дроби:

$$G_n = \frac{1}{p_n - \mu r_n + \frac{q_n}{p_{n+1} - \mu r_{n+1} + \frac{q_{n+1}}{p_{n+2} - \mu r_{n+2} + \frac{q_{n+2}}{p_{n+3} - \mu r_{n+3} + \dots}}}}$$

Для G_1 имеем

$$G_1 = \frac{1}{p_1 - \mu r_1 + \frac{q_1}{p_2 - \mu r_2 + \frac{q_2}{p_3 - \mu r_3 + \dots}}} \quad (8.4.17)$$

Мы можем также разрешить (8.4.16) относительно G_{n+1} :

$$G_{n+1} = -\frac{p_n - \mu r_n}{q_n} + \frac{1}{q_n G_n}.$$

Отсюда получаем конечную непрерывную дробь:

$$G_{n+1} = -\frac{p_n - \mu r_n}{q_n} + \frac{1}{-q_n \left\{ \frac{-(p_{n-1} - \mu r_{n-1})}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1} \left[\frac{-(\dots)}{q_{n-2}} + \dots + \frac{-q_1 (p_0 - r_0)}{q_0} \right]} \right\}}. \quad (8.4.18)$$

При $n=0$ (8.4.18) дает

$$G_1 = -\frac{p_0 - \mu r_0}{q_0},$$

Приравнявая это выражение выражению (8.4.17), получаем уравнение для определения $\mu = 1/\lambda$:

$$-\frac{p_0 - \mu r_0}{q_0} = \frac{1}{p_1 - \mu r_1 + \frac{q_1}{p_2 - \mu r_2 + \frac{q_2}{p_3 - \mu r_3 + \dots}}} \quad (8.4.19)$$

Численные методы, которые следует применять для решения этого уравнения, описаны в гл. 5 на стр. 532, и нет необходимости вновь говорить о них. Во всех случаях, когда разложение ядра имеет вид (8.4.14), все сводится к решению уравнения (8.4.19). Как только μ определено, соответствующие G_{n+1} можно найти из (8.4.18) и, следовательно, при помощи соотношений $G_n = A_n/A_{n-1}$ можно вычислить A_n .

Неоднородное [интегральное] уравнение Фредгольма второго рода. Решение неоднородного уравнения второго рода рассматривалось в § 8.2. Будет поучительно вновь вывести прямым путем результат, полученный там. Это уравнение имеет вид

$$\psi = \lambda \int_a^b K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 + \chi(z). \quad (8.4.20)$$

Пусть

$$\psi = \sum_n A_n \psi_n,$$

где

$$\psi_n = \lambda_n \int_a^b K(z|z_0) \psi_n(z_0) dz_0.$$

Кроме того, можно разложить K в ряд по биортогональным собственным функциям:

$$K(z|z_0) = \sum_n \frac{\psi_n(z) \varphi_n(z_0)}{\lambda_n},$$

где

$$\int_a^b \psi_n \varphi_m dz = \delta_{nm}.$$

Тогда, подставляя полученное выражение в (8.4.20), получаем

$$\sum_n A_n \psi_n = \lambda \sum_{n,p} \frac{\psi_n A_p}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n \psi_p dz_0 + \chi = \sum_n \frac{\lambda A_n}{\lambda_n} \psi_n + \chi,$$

или

$$\sum_n A_n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \psi_n = \chi.$$

Следовательно,

$$A_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b \chi \varphi_n dz$$

и

$$\psi = \sum_n \psi_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b \chi \varphi_n dz. \quad (8.4.21)$$

Конечно, записывая решение в форме (8.4.21), мы предполагаем, что нам известно достаточно много ψ_n . В случае когда этих решений мы не знаем, иногда оказывается удобным переписать интегральное уравнение (8.4.20) в виде интегрального уравнения первого рода. Затем можно применить методы § 8.3. Уравнение (8.4.20) можно записать так:

$$\chi(z) = \int_a^b [\delta(z - z_0) - \lambda K(z|z_0)] \psi(z_0) dz_0, \quad (8.4.22)$$

где $\delta(z - z_0)$ — дельта-функция Дирака. Это — уравнение первого рода с ядром $\delta(z - z_0) - \lambda K(z|z_0)$. Из формулы (8.4.21) явствует, что те значения λ , при которых ψ , рассматриваемая как функция от λ , имеет полюсы, являются собственными значениями λ_n .

8. 5. Преобразование Фурье и интегральные уравнения

В § 5.3 был рассмотрен метод преобразования одного дифференциального уравнения в другое, которое иногда оказывается более простым. Вместо того чтобы пытаться непосредственно решать заданное дифференциальное уравнение, мы изучали уравнение для соответствующего преобразования Фурье или Лапласа, Меллина или Эйлера. В случае когда одно

из этих уравнений для преобразования оказывалось проще первоначального, мы получали интегральное представление решения исходного уравнения, и этот способ, как мы видели, был весьма эффективным.

Иногда такой же метод может облегчить работу по решению интегральных уравнений. Мы находим интегральное уравнение, которому удовлетворяет преобразование исходной искомой функции; если оно оказывается более простым, чем первоначальное уравнение, то мы можем получить интегральное представление для исходной неизвестной функции.

Конечно, этот процесс является частным случаем развитых в § 8.3 методов разложения неизвестных функций по полной системе собственных функций. Если спектр собственных значений непрерывен в некоторой области, то такое разложение является интегралом, распространенным по этой области собственных значений, т. е. является интегральным представлением, а не разложением в ряд. Например, коэффициент в разложении $\psi(x)$ по собственным функциям $\sqrt{1/2\pi} e^{ikx}$, причем областью непрерывности служит $-\infty < k < \infty$, как раз и является преобразованием Фурье функции ψ .

Этот метод особенно хорош, когда интегральное уравнение после интегрального преобразования сводится прямо к алгебраическому уравнению, что имеет место, когда преобразованное ядро оказывается диагональным. Несколько примеров лучше проиллюстрируют вопрос, чем дальнейшее общее рассмотрение. Заметим сразу же, что мы не будем слишком заботиться о тонкостях (таких, как вопрос о существовании данного преобразования!). Мы вернемся к ним, после того как поясним на примерах общие черты метода.

Преобразование Фурье и ядра вида $v(x - x_0)$. Прежде всего отметим, что область изменения независимой переменной в преобразовании Фурье есть весь промежуток от $-\infty$ до $+\infty$, а поэтому наше внимание сначала будет сосредоточено на уравнениях вида

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(x|x_0) \psi(x_0) dx_0 \quad (8.5.1)$$

[уравнение Фредгольма второго рода на промежутке $(-\infty < x < \infty)$]. Возьмем теперь преобразования Фурье от обеих частей уравнения. Предполагая, что эти преобразования существуют (в дальнейшем мы будем более осторожны; настоящее рассмотрение упрощено, с тем чтобы не затемнять центральную идею деталями), мы находим

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(x|x_0) \psi(x_0) dx_0 \right].$$

Чтобы найти преобразование Фурье

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(x|x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{\infty} w(x|x_0) \psi(x_0) dx_0,$$

мы выразим $\psi(x_0)$ через $\Psi(k_0)$ при помощи формулы обращения

$$\psi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0 x_0} \Psi(k_0) dk_0.$$

Затем запишем

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(x|x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} W(k|k_0) \Psi(k_0) dk_0,$$

где

$$W(k|k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0 x_0} w(x|x_0) e^{ikx} dx. \quad (8.5.2)$$

Преобразованное интегральное уравнение имеет вид

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} W(k|k_0) \Psi(k_0) dk_0. \quad (8.5.3)$$

Применение преобразования имеет смысл, если новое ядро проще старого. Часто случается, что довольно сложная функция может быть представлена в виде интеграла Фурье от функции сравнительно простого вида.

Из уравнения (8.5.3) явствует, что если $W(k|k_0)$ имеет вид

$$W(k|k_0) = \sqrt{2\pi} V(k) \delta(k - k_0), \quad (8.5.4)$$

где δ — дельта-функция Дирака, то преобразованное интегральное уравнение решается немедленно. В этом случае уравнение (8.5.3) переходит в уравнение

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \sqrt{2\pi} \lambda V(k) \Psi(k).$$

Это уже простое алгебраическое уравнение относительно $\Psi(k)$:

$$\Psi(k) = \frac{\Phi(k)}{1 - \sqrt{2\pi} \lambda V(k)} \quad (8.5.5)$$

Применяя теперь формулу обращения Фурье, можно получить $\psi(x)$.

Требование, чтобы преобразованное ядро было диагональным (т. е. было пропорциональным дельта-функции от $k - k_0$), накладывает определенные ограничения на вид исходного ядра $w(x|x_0)$. Если мы научимся распознавать ядра, подчиняющиеся этим ограничениям, то мы будем в состоянии распознавать те интегральные уравнения, которые стоит подвергать преобразованию Фурье. Выражение (8.5.2) для преобразованного ядра является двойным преобразованием Фурье по обеим координатам x и x_0 ; его обращением служит

$$w(x|x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} W(k|k_0) e^{ik_0 x_0} dk dk_0.$$

Подставляя частное выражение (8.5.4) в это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} w(x|x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(k) e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0 x_0} \delta(k - k_0) dk_0 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(k) e^{ik(x_0 - x)} dk = v(x - x_0), \end{aligned} \quad (8.5.6)$$

где

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(k) e^{-ikx} dk$$

— преобразование Фурье функции V . Следовательно, уравнение Фредгольма второго рода (где переменная меняется от $-\infty$ до ∞) может быть упрощено при помощи преобразования Фурье, если его ядро является функцией от разности $(x - x_0)$.

Преобразование Ганкеля. Если переменные меняются в промежутке от 0 до ∞ , то мы можем испробовать преобразование Ганкеля [см. формулу (6.3.62)]:

$$\mathcal{H}(f) = F(k) = \int_0^{\infty} f(x) J_0(kx) x dx. \quad (8.5.7)$$

Формула обращения для него имеет вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(k) J_0(kx) k dk = \mathcal{H}(F). \quad (8.5.8)$$

Если применить преобразование Ганкеля к уравнению

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^{\infty} w(x|x_0) \psi(x_0) x_0 dx_0, \quad 0 \leq x < \infty,$$

то

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \mathcal{H} \left[\int_0^{\infty} w(x|x_0) \psi(x_0) x_0 dx_0 \right],$$

или

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \int_0^{\infty} W(k|k_0) \Psi(k_0) k_0 dk_0,$$

где

$$W(k|k_0) = \int_0^{\infty} x dx \int_0^{\infty} [J_0(kx) w(x|x_0) J_0(k_0 x_0)] x_0 dx_0. \quad (8.5.9)$$

Обращением этого двойного преобразования Ганкеля будет

$$w(x|x_0) = \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} k_0 J_0(kx) W(k|k_0) J_0(k_0 x_0) dk_0.$$

Как и раньше, для того чтобы это преобразование было полезным для нас, преобразованное ядро W должно быть диагональным:

$$W(k|k_0) = (1/k) V(k) \delta(k - k_0).$$

Отсюда следует соотношение, которому должно подчиняться первоначальное ядро w :

$$w(x|x_0) = \int_0^{\infty} J_0(kx) V(k) J_0(kx_0) k dk. \quad (8.5.10)$$

Это ограничение не может быть выражено в такой же простой форме, как его аналог для преобразования Фурье, и, таким образом, труднее охарактеризовать те ядра, которые подчиняются этому ограничению.

Приведем два примера таких ядер:

$$(a) \quad V(k) = e^{-p^2 k^2}, \quad w(x|x_0) = \frac{1}{2p^2} e^{-(x^2+x_0^2)/4p^2} I_0\left(\frac{xx_0}{2p^2}\right),$$

где I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента;

$$(б) \quad V(k) = e^{-a^2 k^2}, \quad w(x|x_0) = (1/\pi \sqrt{xx_0}) Q_{-1/2}[(x^2 + x_0^2 + a^2)/2xx_0],$$

де Q_n — второе решение уравнения Лежандра [см. формулу (5.3.29)].

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что ядро $w(x|x_0)$, удовлетворяющее уравнению (8.5.10), симметрично, т. е.

$$w(x|x_0) = w(x_0|x).$$

Чтобы получить более определенную информацию, разложим $J_0(kx)$ в формуле (8.5.10) в степенной ряд:

$$w(x|x_0) = \sum_m \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \int_0^\infty k^{2m+1} V(k) J_0(kx_0) dk.$$

Пусть $V(k)$ — преобразование Ганкеля от $v(x)$, т. е.

$$v(x_0) = \int_0^\infty k V(k) J_0(kx_0) dk.$$

Мы можем выразить интеграл более общего вида через $v(x)$, заметив, что

$$\left[\frac{d^2}{dx_0^2} + \frac{1}{x_0} \frac{d}{dx_0} \right] v = \int_0^\infty k^3 V(k) J_0(kx_0) dk.$$

Следовательно,

$$\left[\frac{d^2}{dx_0^2} + \frac{1}{x_0} \frac{d}{dx_0} \right]^m v = \int_0^\infty k^{2m+1} V(k) J_0(kx_0) dk$$

и

$$w(x|x_0) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \left[\frac{d^2}{dx_0^2} + \frac{1}{x_0} \frac{d}{dx_0} \right]^m v(x_0). \quad (8.5.11)$$

Итак, убедиться в том, что преобразование Ганкеля заданного ядра является диагональным, можно, проверив, что w симметрично по x и x_0 и что коэффициенты в разложении w по степеням x имеют форму (8.5.11).

Ядро $v(x-x_0)$ в бесконечной области. Преобразование Фурье (8.5.5) решения уравнения Фредгольма второго рода (8.5.1) с ядром $w(x|x_0) = v(x-x_0)$ можно также получить более прямым путем при помощи теоремы о свертке [см. (4.8.25)]:

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^\infty v(x-x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] = \sqrt{2\pi} V(k) \Psi(k).$$

Преобразование Фурье уравнения (8.5.1) в силу этой теоремы имеет вид

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Psi(k). \quad (8.5.12)$$

Разрешая (8.5.12) относительно $\Psi(k)$, получаем выражение (8.5.5). Такой подход возможен только в том случае, если существует область плоскости комплексного переменного k , в которой равенство (8.5.12) выполняется.

В § 4.8 мы видели, что интегралы, являющиеся преобразованиями Фурье, во многих случаях не сходятся во всей плоскости комплексного переменного k . В большинстве случаев интеграл дает представление преобразования только в полосе плоскости k , ограниченной сверху или снизу или и сверху и снизу прямыми, параллельными действительной оси. Внутри этой полосы преобразование всюду аналитично; наличие особенностей определяет верхнюю и нижнюю границы полосы. Следовательно, когда мы имеем дело с урав-

нением, в которое входят преобразования Фурье нескольких функций, мы должны заботиться о том, чтобы их полосы аналитичности имели общую часть.

В § 4.8 мы видели также, что преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ можно обобщить, введя две функции, аналитичные в двух различных поло-

сах плоскости k . Например, если интеграл $\int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-\tau x} dx$ сходится только

при $\tau \geq \tau'_0$, а интеграл $\int_{-\infty}^0 \varphi(x) e^{-\tau x} dx$ — только при $\tau \leq \tau'_1$, то мы видели,

что φ можно выразить следующим образом [см. уравнение (4.8.19)]:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty+i\tau'_0}^{\infty+i\tau'_0} \Phi_+(k) e^{-ikx} dk + \int_{-\infty+i\tau'_1}^{\infty+i\tau'_1} \Phi_-(k) e^{-ikx} dk \right\}, \quad (8.5.13)$$

где Φ_+ аналитична всюду в полосе $\text{Im } k > \tau'_0$, а Φ_- аналитична всюду в полосе $\text{Im } k < \tau'_1$. В этом случае желательно, чтобы полоса, в которой аналитично преобразование V , имела бы общую часть (перекрывалась) с полосой, в которой аналитична функция Φ_+ , а также с полосой, в которой аналитична функция Φ_- .

Подобным же образом преобразование Фурье неизвестной функции ϕ может появиться в обобщенном виде, т. е. в виде двух функций, одна из которых Ψ_+ аналитична всюду в полосе $\text{Im } k > \tau'_0$, а другая Ψ_- — аналитична при $\text{Im } k < \tau'_1$. Пусть преобразование $V(k)$, как и в предыдущем параграфе, аналитично всюду в полосе

$$\tau'_1'' < \text{Im } k < \tau'_0'', \quad (8.5.14)$$

причем

$$\tau'_1'' < \tau'_1 \text{ и } \tau'_1, \quad \tau'_0'' > \tau'_0 \text{ и } \tau'_0.$$

При этих условиях формулу обращения (8.5.13) можно применить ко всему интегральному уравнению, и мы получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty+i\tau'_0}^{\infty+i\tau'_0} \Psi_+(k) e^{-ikx} dk + \int_{-\infty+i\tau'_1}^{\infty+i\tau'_1} \Psi_-(k) e^{-ikx} dk = \\ & = \int_{-\infty+i\tau'_0}^{\infty+i\tau'_0} \Phi_+(k) e^{-ikx} dk + \int_{-\infty+i\tau'_1}^{\infty+i\tau'_1} \Phi_-(k) e^{-ikx} dk + \\ & + \int_{-\infty+i\tau'_0}^{\infty+i\tau'_0} \Psi_+(k) [V\sqrt{2\pi\lambda} V(k)] e^{-ikx} dk + \int_{-\infty+i\tau'_1}^{\infty+i\tau'_1} \Psi_-(k) [V\sqrt{2\pi\lambda} V(k)] e^{-ikx} dk, \\ \text{или} \\ & \int_{-\infty+i\tau'_0}^{\infty+i\tau'_0} [(1 - V\sqrt{2\pi\lambda} V) \Psi_+ - \Phi_+] e^{-ikx} dk + \\ & + \int_{-\infty+i\tau'_1}^{\infty+i\tau'_1} [(1 - V\sqrt{2\pi\lambda} V) \Psi_- - \Phi_-] e^{-ikx} dk = 0. \quad (8.5.15) \end{aligned}$$

Здесь τ_0 больше чем $\max(\tau'_0, \tau'_0'')$, но меньше чем τ'_0'' , а τ_1 меньше чем $\min(\tau'_1, \tau'_1'')$, но больше чем τ'_1'' . Тогда условие теоремы, сформулированной на стр. 439, выполнено и мы можем заключить, что

$$[(1 - V\sqrt{2\pi\lambda} V) \Psi_+ - \Phi_+] + [(1 - V\sqrt{2\pi\lambda} V) \Psi_- - \Phi_-] = 0.$$

В силу этой же теоремы не только сумма двух подинтегральных функций должна быть равна нулю, но, кроме того, каждое слагаемое в отдельности должно быть аналитично во всей полосе $\tau_0 \leq \operatorname{Im} k \leq \tau_1$. Таким образом, подинтегральная функция

$$(1 - \sqrt{2\pi\lambda V}) \Psi_+ - \Phi_+$$

должна быть равна некоторой функции $S_+(k)$, аналитичной в полосе $\tau_0 \leq \operatorname{Im} k \leq \tau_1$ и настолько быстро стремящейся к нулю, когда $|\operatorname{Re} k| \rightarrow \infty$, что интегралы в (8.5.15) сходятся. Тогда, для того чтобы сумма двух подинтегральных функций равнялась нулю, необходимо

$$[(1 - \sqrt{2\pi\lambda V}) \Psi_- - \Phi_-] = S_-(k) = -S_+(k).$$

Следовательно, уравнению (8.5.15) эквивалентна пара уравнений

$$\Psi_+(k) = \frac{\Phi_+(k) + S_+(k)}{1 - \sqrt{2\pi\lambda V(k)}}, \quad \Psi_-(k) = \frac{\Phi_-(k) + S_-(k)}{1 - \sqrt{2\pi\lambda V(k)}}, \quad (8.5.16)$$

где $S_+ = -S_-$ — функция, аналитичная всюду в полосе $\tau_0 \leq \operatorname{Im} k \leq \tau_1$. Эти уравнения сводятся к уравнению (8.5.5), если τ'_0 и τ'_1 можно положить равными нулю, так что $\Phi_+ = \Phi_-$ (в этом случае S_+ должна равняться S_- и поэтому обе должны обращаться в нуль). Подставляя в формулу обращения (8.5.13) выражения (8.5.16) для $\Psi_+(k)$ и $\Psi_-(k)$, получаем решение в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} \frac{\Phi_+ e^{-ihx}}{1 - \sqrt{2\pi\lambda V}} dk + \int_{-\infty + i\tau_1}^{\infty + i\tau_1} \frac{\Phi_- e^{-ihx}}{1 - \sqrt{2\pi\lambda V}} dk + \oint \frac{S_+ e^{-ihx}}{1 - \sqrt{2\pi\lambda V}} dk \right\}. \end{aligned} \quad (8.5.17)$$

Первые два интеграла соответствуют установившемуся решению (частное решение) неоднородного дифференциального уравнения, а последний интеграл, взятый по замкнутому контуру, лежащему внутри полосы аналитичности функций V и S_+ , соответствует «переходному» решению, которое существует и в случае, когда $\varphi = 0$.

Однородное уравнение. Изучим прежде всего «переходное» решение однородного уравнения

$$\psi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} v(x - x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (8.5.18)$$

Согласно (8.5.17), решением этого уравнения служит

$$\psi_c(x) = \oint \frac{S_+'(k) e^{-ihx}}{1 - \sqrt{2\pi\lambda V(k)}} dk, \quad (8.5.19)$$

где $V(k)$ — преобразование Фурье функции $v(z)$, а замкнутый путь интегрирования лежит внутри полосы аналитичности $V(k)$, $\tau_1''' < \operatorname{Im} k < \tau_0'''$, причем S_+ аналитична всюду внутри этой полосы. Таким образом, интеграл (8.5.19) равен нулю, если только функция $[1 - \sqrt{2\pi\lambda V(k)}]$ не имеет нулей или точек разветвления внутри указанной полосы.

Такое поведение не является неожиданным, так как из § 8.2 известно, что ненулевые решения однородного уравнения появляются только при некоторых определенных значениях λ , называемых собственными значениями. В настоящем случае дело обстоит таким образом, что собственные значения λ заполняют некоторые непрерывные полосы; это происходит потому, что промежуток интегрирования бесконечен и, следовательно, уравнение

является сингулярным [см. уравнение (8.2.55)]. Допустимыми будут все значения λ , при которых функция $(1 - \sqrt{2\pi\lambda V})$ имеет внутри полосы аналитичности один или более нулей. Для большинства значений λ , при которых существуют ненулевые решения, нули функции $(1 - \sqrt{2\pi\lambda V})$ являются простыми, функция стремится к нулю линейно вместе с $k - k_r$, так что особенности подинтегральной функции в выражении (8.5.19) обычно оказываются простыми полюсами. Предположим, что внутри данной полосы лежат полюсы $k_0, k_1, \dots, k_r, \dots, k_n$ (каждый из них является функцией от λ), и пусть вычет множителя $S_+/(1 - \sqrt{2\pi\lambda V})$ в точке k_r равен $A_r/2\pi i$; тогда

$$\phi_c(x) = \sum_{r=0}^n A_r e^{-ik_r x}. \quad (8.5.20)$$

(Может оказаться, что некоторые отдельные значения λ являются нулями $1 - \sqrt{2\pi\lambda V}$ высшего порядка, и в этом случае в выражении для ϕ появятся члены вида $B_s x^{s-1} e^{-ik_s x}$.) При этом постоянные A_r произвольны, так как до сих пор S_+ является произвольной аналитической функцией от k . Значения A_r могут быть определены, если заданы начальные или граничные условия, совершенно так же, как в случае дифференциального уравнения. В некоторых случаях приходится выбирать известное число отношений коэффициентов таким образом, чтобы выражение (8.5.20) было решением первоначального интегрального уравнения; это легко сделать, подставляя (8.5.20) в (8.5.18).

Может оказаться поучительным проверить, что $A_r e^{-ik_r x}$ является решением однородного уравнения (8.5.18). Непосредственной подстановкой получаем, учитывая, что $V(k)$ является преобразованием Фурье функции $v(z)$,

$$\begin{aligned} A_r e^{-ik_r x} &= \lambda A_r \int_{-\infty}^{\infty} v(x - x_0) e^{ik_r x_0} dx_0 = \\ &= \lambda A_r \int_{-\infty}^{\infty} v(y) e^{-ik_r (x - y)} dy = A_r \sqrt{2\pi\lambda V}(k_r) e^{-ik_r x}. \end{aligned}$$

Поэтому $A_r e^{-ik_r x}$ будет решением (8.5.18), если

$$1 - \sqrt{2\pi\lambda V}(k_r) = 0. \quad (8.5.21)$$

Последнее уравнение, очевидно, удовлетворяется, так как k_r с самого начала было определено как корень этого уравнения.

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi(x) = A e^{\alpha|x|} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x_0|} \psi(x_0) dx_0. \quad (8.5.22)$$

Начнем с решения соответствующего однородного уравнения

$$\chi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x_0|} \chi(x_0) dx_0 \quad (8.5.23)$$

[это решение дается равенством (8.5.20)]. Нам необходимо найти нули разности $1 - \lambda \sqrt{2\pi} V$, где V — преобразование Фурье функции $e^{-|x|}$. Имеем

$$V(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{ikx} dx, \text{ или } V(k) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{1+k^2}.$$

Таким образом, $V(k)$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} k| < 1$. Следовательно,

$$1 - \sqrt{2\pi\lambda}V = [k^2 - (2\lambda - 1)]/(1 + k^2).$$

Эта функция имеет простые нули при $k = \pm k_0$, где $k_0 = \sqrt{2\lambda - 1}$. Значит, решениями однородного уравнения являются функции

$$\chi = e^{\pm ik_0 x}, \quad (8.5.24)$$

если только точки $\pm k_0$ лежат внутри полосы регулярности V , $|\operatorname{Im} k_0| < 1$, а это соответствует условию $(\operatorname{Im} \lambda)^2 < 2\operatorname{Re} \lambda$. Эти решения можно проверить непосредственно подстановкой в первоначальное интегральное уравнение для χ или сведением этого уравнения к дифференциальному уравнению посредством двукратного дифференцирования обеих частей, что дает

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} + k_0^2 \chi = 0.$$

Теперь мы рассмотрим решение неоднородного уравнения, представленное в формуле (8.5.17) двумя первыми членами. С этой целью потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\alpha x} e^{ikhx} dx = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}(\alpha + ik)}, \quad \operatorname{Im} k > \alpha, \\ \Phi_- &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x} e^{ikhx} dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi}(ik - \alpha)}, \quad \operatorname{Im} k < -\alpha. \end{aligned}$$

Решение (8.5.17) имеет смысл только при $\alpha < 1$. Тогда

$$\psi(x) = \frac{A}{2\pi i} \left\{ - \int_{-\infty + i\tau_0''}^{\infty + i\tau_0''} \frac{(1+k^2)e^{-ikhx}}{(k^2 - k_0^2)(k - i\alpha)} dk + \int_{-\infty + i\tau_1''}^{\infty + i\tau_1''} \frac{(1+k^2)e^{-ikhx}}{(k^2 - k_0^2)(k + i\alpha)} dk \right\}, \quad (8.5.25)$$

причем к этому выражению мы можем добавить любое решение однородного уравнения, т. е. любую линейную комбинацию двух решений, задаваемых формулой (8.5.24). Пределы интегрирования удовлетворяют условиям $\tau_0'' < 1$, $\tau_1'' > -1$, как это показано на рис. 8.3. Рассмотрим два случая: $x > 0$ и $x < 0$. В первом случае мы можем добавить к контуру каждого из интегралов по полуокружности, расположенной в нижней полуплоскости, и получить таким образом замкнутый контур. Затем эти интегралы вычисляются при помощи интегральной формулы Коши. Второй интеграл обращается в нуль, так как все особенности подинтегральной функции находятся вне контура. Первый член вычисляется легко, и мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_+ &= A \left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + k_0^2} e^{\alpha x} + \frac{(k_0^2 + 1)e^{-ik_0 x}}{2k_0(k_0 - i\alpha)} + \frac{(k_0^2 + 1)e^{ik_0 x}}{2k_0(k_0 + i\alpha)} \right\} = \\ &= A \left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + k_0^2} e^{\alpha x} + \frac{k_0^2 + 1}{k_0 \sqrt{\alpha^2 + k_0^2}} \cos \left[k_0 x - \arctg \left(\frac{\alpha}{k_0} \right) \right] \right\}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

При $x < 0$ полуокружность лежит в верхней полуплоскости, так что отличен от нуля только второй интеграл:

$$\psi_- = A \left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + k_0^2} e^{-\alpha x} + \frac{k_0^2 + 1}{k_0 \sqrt{\alpha^2 + k_0^2}} \cos \left[k_0 x + \arctg \left(\frac{\alpha}{k_0} \right) \right] \right\}, \quad x < 0.$$

Комбинируя эти два выражения, мы получаем

$$\psi = A \left\{ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + k_0^2} e^{\alpha |x|} + \frac{k_0^2 + 1}{k_0 \sqrt{\alpha^2 + k_0^2}} \cos \left[k_0 |x| - \arctg \left(\frac{\alpha}{k_0} \right) \right] \right\}. \quad (8.5.26)$$

Ясно, что функция ψ непрерывна и равна A при $x=0$; однако ее первая производная разрывна. Этот скачок при $x=0$ нельзя изменить, добавляя решение однородного уравнения, так как такое решение может

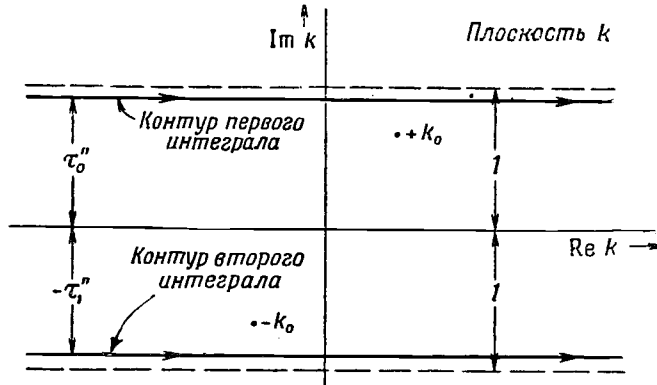


Рис. 8.3. Контур интегрирования для формулы (8.5.25).

изменить только значение ψ при $x=0$. Заметим, что к интегралам, входящим в выражение (8.5.25) и образующим частное решение, всегда можно добавить «переходную» функцию χ так, чтобы значение $\psi(0)$ сделалось равным A .

Проведенный выше анализ применим, если только $V(k)$ аналитична в полосе, содержащей вещественную ось плоскости k . Единственной трудностью, которая может здесь встретиться, является вычисление интегралов, входящих в обращение преобразований Φ_+ , Φ_- , V .

Точки ветвления. Не представляет больших трудностей распространить эти результаты на случай, когда $V(k)$ имеет точки ветвления внутри полосы, содержащей вещественную ось плоскости k . Однако здесь существенно наличие полосы, в которой аналитичны $V(k)$ и Φ_+ , и аналогичной полосы для $V(k)$ и Φ_- . Если эти условия выполнены, то необходимо только ввести разрезы и убедиться, что в процессе вычисления мы не интегрируем по контурам, пересекающим линии разреза. Это может породить известные трудности при выражении $\psi(x)$ через Ψ_+ и Ψ_- , так как вычислять интегралы в формуле обращения при помощи интегральной формулы Коши теперь уже невозможно. Появляются интегралы вдоль линии разреза, которые в одних случаях легко выражаются через элементарные функции, а в других — нет.

В связи с этим важно вспомнить, что преобразование Фурье содержит информацию об асимптотическом поведении функции $\psi(x)$. На основании результатов, изложенных на странице 437, мы знаем, что

$$\psi_+(k) \simeq \frac{\psi_+(0)}{\sqrt{2\pi}(-ik)}, \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \psi_+(0) \neq 0, \quad k = \sigma + i\tau,$$

или

$$-i\sqrt{2\pi}k\Psi_+(k) \simeq \psi_+(0).$$

В рассмотренном выше примере

$$\Psi_+(k) \simeq -(A/ik\sqrt{2\pi}), \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\psi(0) = A$, что согласуется с результатом, полученным из формулы (8.5.26) для полного решения.

Ядро $v(x+x_0)$ в неограниченной области. Здесь также можно применить теорему о свертке. Мы вновь можем представить $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ при помощи формулы обращения (8.5.13). Представление интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x+x_0) \psi(x_0) dx_0$$

получается заменой переменной интегрирования x_0 на $-\xi_0$, а затем применением теоремы о свертке. Мы находим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v(x+x_0) \psi(x_0) dx_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \Psi_-(-k) [V\sqrt{2\pi} V(k)] e^{-ikx} dk + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \Psi_+(-k) [V\sqrt{2\pi} V(k)] e^{-ikx} dk. \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что функция $\Psi_-(-k)$, так же как $\Phi_+(k)$ и $\Psi_+(k)$, аналитична при $\text{Im } k \geq \tau_0$. Соответственно, функции $\Psi_+(-k)$, $\Phi_-(k)$ и $\Psi_-(k)$ предполагаются аналитическими при $\text{Im } k \leq \tau_1$. Заметим, что если $\Phi_+(k)$ аналитична при $\text{Im } k \geq \tau'_0$, то $\Phi_+(-k)$ аналитична при $\text{Im } k \leq -\tau'_0$. Таким образом, уравнение, соответствующее уравнению, следующему за (8.5.15), имеет вид

$$\begin{aligned} \{\Psi_+(k) - \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Psi_-(-k) - \Phi_+(k)\} + \\ + \{\Psi_-(k) - \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Psi_+(-k) - \Phi_-(k)\} = 0. \end{aligned}$$

Члены, заключенные в скобки, аналитичны в некоторой полосе, параллельной вещественной оси, как и в (8.5.15). Опуская члены S_+ и S_- , фигурирующие в уравнениях (8.5.16) и порождающие, как мы убедимся ниже, решения однородного уравнения, получаем частные решения неоднородного уравнения. Следовательно,

$$\Psi_+(k) - \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Psi_-(-k) = \Phi_+(k),$$

$$\Psi_-(k) - \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Psi_+(-k) = \Phi_-(k).$$

Заменим во втором из этих равенств k на $-k$. Это можно сделать только при условии, что функции $\Phi_-(-k)$ и $V(-k)$ аналитичны в области, где аналитичны как $\Phi_+(k)$, так и $V(k)$. Теперь второе уравнение записывается так:

$$\Psi_-(-k) - \sqrt{2\pi\lambda} V(-k) \Psi_+(k) = \Phi_-(-k).$$

Разрешая полученную пару уравнений относительно $\Psi_+(k)$, находим

$$\Psi_+(k) = \frac{\Phi_+(k) + \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Phi_-(-k)}{1 - 2\pi\lambda^2 V(k) V(-k)}. \quad (8.5.27)$$

Аналогично

$$\Psi_-(k) = \frac{\Phi_-(k) + \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Phi_+(-k)}{1 - 2\pi\lambda^2 V(k) V(-k)}. \quad (8.5.28)$$

Формула (8.5.17), полученная для ядра $v(x-x_0)$, заменяется теперь формулой

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{\infty+i\tau_0} \left[\frac{\Phi_+(k) + \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Phi_-(-k)}{1-2\pi\lambda^2 V(k) V(-k)} \right] e^{-ikx} dk + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} \left[\frac{\Phi_-(k) + \sqrt{2\pi\lambda} V(k) \Phi_+(-k)}{1-2\pi\lambda^2 V(k) V(-k)} \right] e^{-ikx} dk. \end{aligned} \quad (8.5.29)$$

В первом интеграле подинтегральная функция аналитична при $\text{Im } k \geq \tau_0$, во втором — при $\text{Im } k \leq \tau_1$.

Решение однородного уравнения получаем из (8.5.29), заменяя Φ_+ на S_+ , Φ_- на S_- и учитывая, что $S_- = -S_+$. Таким образом,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint \left[\frac{S_+(k) - \sqrt{2\pi\lambda} V(k) S_+(-k)}{1-2\pi\lambda^2 V(k) V(-k)} \right] e^{-ikx} dk,$$

где контур интегрирования расположен внутри области, в которой $V(k)$ и $V(-k)$ аналитичны. Выполнив во втором члене замену переменной интегрирования, мы можем записать ψ в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint S_+(k) \left[\frac{1 + \sqrt{2\pi\lambda} V(-k) e^{2ihx}}{1-2\pi\lambda^2 V(k) V(-k)} \right] e^{-ikx} dk. \quad (8.5.30)$$

Так как обе функции S_+ и $1 + \sqrt{2\pi\lambda} V(-k)$ аналитичны в области, ограниченной этим контуром, то решение однородного уравнения может быть представлено в виде ряда

$$\psi = \sum_{r,s} A_{rs} x^{s-1} e^{-ih_r x}, \quad (8.5.31)$$

где предполагается, что

$$\frac{1}{1-2\pi\lambda^2 V(k) V(-k)} = \frac{b_s}{(k-k_r)^s} + \frac{b_{s-1}}{(k-k_r)^{s-1}} + \dots$$

Коэффициенты A_{rs} должны быть определены из начальных или граничных условий, но вместе с тем должны выполняться некоторые соотношения между ними, так как выражение (8.5.31) должно удовлетворять исходному интегральному уравнению.

Пример. В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi(x) = A e^{\alpha|x|} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x+x_0|} \psi(x_0) dx_0.$$

Из результатов, полученных при изучении интегрального уравнения (8.5.22), имеем

$$V(k) = \sqrt{(2/\pi)/(1+k^2)}, \quad |\text{Im } k| < 1,$$

$$\Phi_+ = -A/\sqrt{2\pi} (\alpha + ik), \quad \text{Im } k > \alpha,$$

$$\Phi_- = A/\sqrt{2\pi} (ik - \alpha), \quad \text{Im } k < -\alpha.$$

Рассмотрим прежде всего решение однородного уравнения. Для этого исследуем корни уравнения $1 - 2\pi\lambda^2 V(k) V(-k) = 0$, которые даются формулами

$$k = \pm k_0, \quad k_0 = \sqrt{2\lambda - 1},$$

$$k = \pm ik_1, \quad k_1 = \sqrt{2\lambda + 1}.$$

На основании (8.5.31) мы можем записать решение однородного уравнения в виде

$$\psi = a_1 e^{-ik_0 x} + a_2 e^{ik_0 x} + b_1 e^{-k_1 x} + b_2 e^{-k_1 x}.$$

Для того чтобы получить соотношения между коэффициентами этого выражения, его необходимо подставить в данное интегральное уравнение. Получаем

$$\psi(x) = \lambda \sqrt{2\pi} [a_1 V(k_0) e^{ik_0 x} + a_2 V(-k_0) e^{-ik_0 x} + b_1 V(-ik_1) e^{k_1 x} + b_2 V(ik_1) e^{-k_1 x}].$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем две независимые системы уравнений:

$$a_1 - \lambda \sqrt{2\pi} V(-k_0) a_2 = 0, \quad \lambda \sqrt{2\pi} V(k_0) a_1 - a_2 = 0$$

и

$$b_1 - \lambda \sqrt{2\pi} V(ik_1) b_2 = 0, \quad \lambda \sqrt{2\pi} V(-ik_1) b_1 - b_2 = 0.$$

Условие существования ненулевых решений — обращение в нуль определителя системы — приводит к уравнению, уже использованному выше для определения k_0 и k_1 , и поэтому удовлетворяется автоматически.

Теперь можно найти отношение коэффициентов. Для решений, соответствующих k_0 , оно равно

$$\frac{a_2}{a_1} = \lambda \sqrt{2\pi} V(k_0) = 1.$$

Следовательно, $\psi = \cos k_0 x$ является решением однородного уравнения. Аналогично, $\operatorname{sh} k_1 x$ является вторым независимым решением.

Обращаясь теперь к неоднородному уравнению (8.5.29), мы видим, что процесс вычисления интегралов, вполне аналогичный использованному в примере (8.5.22), с применением интегральной формулы Коши не встречает существенных затруднений.

Применения преобразования Лапласа. Из предыдущего изложения можно заключить, что преобразование Лапласа наиболее выгодно применять к интегральным уравнениям, к ядрам которых приложима теорема о свертке для преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^x v(x-x_0) f(x_0) dx_0 \right] = V(p) F(p),$$

где $V(p)$ и $F(p)$ — преобразования Лапласа функций $v(x)$ и $f(x)$ соответственно. Это наводит на мысль о том, что нам следует рассмотреть интегральное уравнение Вольтерра

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x v(x-x_0) f(x_0) dx_0, \quad x > 0. \quad (8.5.32)$$

Примеры уравнений Вольтерра, возникающих при решении задач о колебаниях и о поглощении энергии рентгеновских лучей в веществе, мы обсудили на страницах 837, 838.

Здесь мы рассмотрим общий случай. Возьмем преобразование Лапласа от обеих частей уравнения (8.5.32). Допустим, что преобразование функции φ аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \tau_0$ и что область аналитичности преобразования v содержит полосу, параллельную мнимой оси плоскости p

и принадлежащую полуплоскости $\operatorname{Re} p > \tau_0$. В этой полосе

$$F(p) = \Phi(p) + V(p) F(p).$$

Решая относительно $F(p)$, имеем

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - V(p)}. \quad (8.5.33)$$

Следовательно, частное решение уравнения (8.5.32) получается обращением преобразования Лапласа [формула (4.8.32)]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \tau_0}^{i\infty + \tau_0} \frac{\Phi(p)}{1 - V(p)} e^{px} dp, \quad \operatorname{Re} x > 0. \quad (8.5.34)$$

Однородное уравнение Вольтерра не имеет ненулевых решений, и, таким образом, формула (8.5.34) дает единственное решение уравнения (8.5.32).

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра, получающееся из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + k^2 \psi = 0$$

с начальными условиями: $\psi = \psi_0$, $d\psi/dt = v_0$ при $t = 0$. Эквивалентное интегральное уравнение дается формулой (8.1.23):

$$\psi(t) = \psi_0 \left[\frac{\partial G(t|t_0)}{\partial t_0} \right]_{t_0=0} - v_0 G(t|0) + k^2 \int_0^{t^+} G(t|t_0) \psi(t_0) dt_0.$$

Функция Грина G определяется из условий

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(t - t_0) \quad \text{при } t \geq t_0, \quad G(t|t_0) = 0 \quad \text{при } t < t_0.$$

Отсюда

$$G(t|t_0) = (t_0 - t) u(t - t_0),$$

где $u(t)$ — единичная функция (см. стр. 778). Подставляя это выражение для G в интегральное уравнение, получаем

$$\psi(t) = \psi_0 + v_0 t + k^2 \int_0^{t^+} (t_0 - t) \psi(t_0) dt_0, \quad t > 0.$$

Это уравнение имеет теперь вид, как раз пригодный для применения вышеуказанного приема:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \psi_0 + v_0 t, & \Phi(p) &= (\psi_0/p) + (v_0/p^2), \\ v(t - t_0) &= k^2(t_0 - t), & V(p) &= -k^2/p^2, \quad \operatorname{Re} p > 0. \end{aligned}$$

Подставляя в решение (8.5.34), получаем

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \tau_0}^{i\infty + \tau_0} \frac{v_0 + p\psi_0}{p^2 + k^2} e^{px} dp, \quad \tau_0 > 0.$$

Этот интеграл мы можем вычислить, добавляя бесконечную полуокружность, как это указано на рис. 8.4, и затем применяя интегральную формулу Коши. Конечно, мы получим уже знакомый результат

$$\psi = \psi_0 \cos kt + (v_0/k) \sin kt.$$

Интегральное уравнение Вольтерра с пределами (x, ∞) . Преобразование Лапласа можно применить также к интегральным уравнениям следующего вида:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty v(x-x_0) \psi(x_0) dx_0, \quad (8.5.35)$$

возникающим в связи с задачами переноса, причем x может обозначать энергию после столкновения, а x_0 — энергию до столкновения (см. § 2.4 и § 12.2). Для столкновений с неподвижными системами, не имеющими внутренних степеней свободы, $x_0 \geq x$; это означает, что столкновения всегда приводят к уменьшению энергии падающей частицы.

Для того чтобы решить уравнение (8.5.35), применяя преобразование Лапласа, необходимо вывести теорему о свертке для выражений вида

$$\int_x^\infty v(x-x_0) \psi(x_0) dx_0.$$

Мы начнем с теоремы о свертке для преобразования Фурье:

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^\infty g(x-x_0) \varphi(x_0) dx_0 \right\} = \sqrt{2\pi} G_f(k) \Phi_f(k).$$

Рис. 8.4. Контур интегрирования для обращения преобразования Лапласа.

Пусть $g(x) = v_-(x)$, т. е. $g(x)$ равна $v(x)$ при $x < 0$ и равна нулю при $x > 0$; подобным же образом пусть $\varphi(x) = \psi_+(x)$, т. е. $\varphi(x)$ равна $\psi(x)$ при $x > 0$ и равна нулю при $x < 0$. Тогда приведенное выше уравнение переписывается так:

$$\mathcal{F} \left\{ \int_x^\infty v(x-x_0) \psi(x_0) dx_0 \right\} = \sqrt{2\pi} [V_-(k)]_f [\Psi_+(k)]_f.$$

Для того чтобы перейти от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа, вспомним, что $F_l(p) = \sqrt{2\pi} [F_+(ip)]_f$. Следовательно,

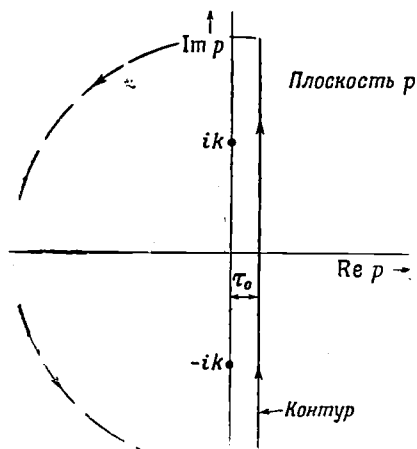
$$\mathcal{L} \left\{ \int_x^\infty v(x-x_0) \psi(x_0) dx_0 \right\} = \sqrt{2\pi} [V_-(ip)]_f [\Psi_+(p)]_l.$$

Мы можем выразить $[V_-(ip)]_f$ через преобразование Лапласа:

$$[V_-(ip)]_f = \int_{-\infty}^0 v(x) e^{-px} dx, \quad [V_-(ip)]_f = \int_0^\infty v(-x) e^{px} dx.$$

Поэтому, положив $v(-x) = w(x)$, мы получаем

$$[V_-(ip)]_f = W_l(-p).$$



Окончательно

$$\mathcal{L} \left\{ \int_x^\infty v(x-x_0) \psi(x_0) dx_0 \right\} = W_l(-p) \Psi_l(p). \quad (8.5.36)$$

Теперь мы можем вернуться к интегральному уравнению (8.5.35). Взяв преобразование Лапласа от обеих частей (начиная с этого момента мы не пишем индекс l , так как мы будем иметь дело только с преобразованием Лапласа), получим

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \Phi(p) + W(-p) \Psi(p), \\ \Psi(p) &= \Phi(p) / [1 - W(-p)]. \end{aligned} \quad (8.5.37)$$

Наконец, выражение

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\tau_0}^{i\infty+\tau_0} \frac{\Phi(p)}{1-W(-p)} e^{px} dp \quad (8.5.38)$$

является частным решением интегрального уравнения (8.5.35). Следует подчеркнуть, что для того, чтобы решение (8.5.37) или (8.5.38) имело смысл, необходимо, чтобы области аналитичности $W(-p)$ и $\Phi(p)$ перекрывались. Как упоминалось выше, если это установлено только для некоторой определенной области изменения параметров, от которых зависят Φ или W , то иногда оказывается возможным расширить эту область при помощи аналитического продолжения.

В качестве примера, иллюстрирующего этот случай, пусть $\varphi(x) = C$, $v(x) = Ae^{ax}$, A и a вещественны и положительны, так что (8.5.35) сводится к уравнению

$$\psi(x) = C + A \int_x^\infty e^{a(x-x_0)} \psi(x_0) dx_0.$$

Применим теперь преобразование Лапласа (хотя мы должны отметить, прежде чем погрузиться в этот анализ, что для этого частного вида функции $v(x)$ интегральное уравнение можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка, которое легко решается). Фигурирующие в формуле (8.5.38) функции $\Phi(p)$ и $W(-p)$ имеют вид

$$\Phi(p) = C/p, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

$$W(-p) = \int_0^\infty e^{px} v(-x) dx = A \int_0^\infty e^{(p-a)x} dx = A/(a-p), \quad \operatorname{Re} p < a.$$

Заметим, что $W(-p)$ и $\Phi(p)$ имеют общую полосу аналитичности только в случае $a > 0$. Равенство (8.5.38) дает

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\tau_0}^{i\infty+\tau_0} \frac{C(p-a)}{p[p-(a-A)]} e^{px} dp,$$

где $0 < \tau_0 < a$. Мы вновь замыкаем этот контур, добавляя полуокружность, лежащую в левой полуплоскости плоскости p , как показано на рис. 8.4. Тогда интеграл, определяющий ψ , можно вычислить по интегральной формуле Коши, причем простые полюсы имеются при $p=0$ и $p=a-A$ (последний появляется при $\tau_0 > a-A$). Этот произвол, связанный с вычетом в точке $a-A$, которую по желанию можно включать или нет, соответствует произволу при выборе переходной функции, т. е. решения однородного

уравнения, которое в случае включения пропорционально разности двух частных решений линейного неоднородного уравнения. Мы получаем

$$\psi(x) = \frac{C\alpha}{\alpha - A} - \frac{C_1 A}{\alpha - A} e^{(\alpha - A)x}.$$

Первый член является частным решением, которое представляет «установившийся процесс», порожденный «источником», соответствующим члену C , если $\alpha < A$. Второй член, пропорциональный $e^{(\alpha - A)x}$, описывает «переходный процесс» и является решением однородного уравнения.

Преобразование Меллина. Мы начнем этот пункт с того, что напомним определение и формулу обращения, приведенные в гл. 4 и задаче 4.48. Преобразование Меллина функции $f(x)$ определяется так:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx.$$

Если интеграл не существует, то часто оказывается возможным ввести обобщенные («полуплоскостные») преобразования, аналогичные обобщенным преобразованиям, введенным в теории преобразования Фурье:

$$F_-(s) = \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx, \quad F_+(s) = \int_1^{\infty} f(x) x^{s-1} dx. \quad (8.5.39)$$

Функция F_- существует при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, в то время как F_+ существует при $\operatorname{Re} s < \sigma_1$. В том случае, когда $F(s)$ не существует, $\sigma_0 > \sigma_1$; если же $F(s)$ существует, то имеет место противоположное неравенство.

В соответствии с этим формула обращения может быть записана так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-i\infty + \sigma'_0}^{i\infty + \sigma'_0} \frac{F_-(s)}{x^s} ds + \int_{-i\infty + \sigma'_1}^{i\infty + \sigma'_1} \frac{F_+(s)}{x^s} ds \right\}, \quad (8.5.40)$$

где $\sigma'_0 > \sigma_0$ и $\sigma'_1 < \sigma_1$. Теорема о свертке имеет вид

$$\mathcal{M} \left\{ \int_0^{\infty} \psi(x_0) v\left(\frac{x}{x_0}\right) \frac{dx_0}{x_0} \right\} = V(s) \Psi(s). \quad (8.5.41)$$

Эта формула наводит на мысль о том, что преобразование Меллина особенно выгодно применять при решении интегральных уравнений следующего типа:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_0^{\infty} v\left(\frac{x}{x_0}\right) \psi(x_0) \frac{dx_0}{x_0}. \quad (8.5.42)$$

Анализ, при помощи которого находится решение этого уравнения, до такой степени подобен тому, который был дан для случая преобразования Фурье [см. решение (8.5.17)], что здесь мы можем дать только его результаты:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-i\infty + \sigma'_0}^{i\infty + \sigma'_0} \frac{\Phi_-}{1-V} \frac{ds}{x^s} + \int_{-i\infty + \sigma'_1}^{i\infty + \sigma'_1} \frac{\Phi_+}{1-V} \frac{ds}{x^s} + \oint \frac{S}{1-V} \frac{ds}{x^s} \right\}, \quad (8.5.43)$$

где контурный интеграл берется по пути, лежащему внутри области $\sigma'_0 < \operatorname{Re} p < \sigma'_1$, внутри которой функция S должна быть аналитической. Решение χ соответствующего однородного уравнения выражается именно этим кон-

турным интегралом. Если нули $1-V$ лежат в точках s_r и если эти нули имеют кратность l , то

$$\chi = \sum B_{rl} (\ln x)^{l-1} x^{-s_r}, \quad (8.5.44)$$

где B_{rl} — произвольные постоянные.

В примере на применение преобразования Меллина положим

$$\varphi(x) = Ae^{-\alpha x}, \quad v(x/x_0) = Ce^{-x/x_0};$$

интегральное уравнение (8.5.42) принимает вид

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha x} + C \int_0^\infty e^{-x/x_0 \psi(x_0)} \frac{dx_0}{x_0}.$$

Преобразования Меллина соответствующих функций равны

$$\Phi(s) = A[\Gamma(s)/\alpha^s], \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$V(s) = C\Gamma(s), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Нет нужды разбивать Φ на Φ_+ и Φ_- , так как области регулярности Φ и Γ совпадают.

Рассмотрим сначала решения однородного уравнения. Согласно правилу, выражаемому формулой (8.5.44), мы находим, что

$$\chi = \sum_r B_r x^{-s_r}, \quad (8.5.45)$$

где s_r — корни уравнения

$$\Gamma(s_r) = 1/C.$$

Нули выражения $\Gamma(s) - 1/C$ простые; существует бесконечное множество решений.

Неоднородное уравнение имеет частным решением

$$\psi(x) = \frac{A}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma'_0}^{i\infty+\sigma'_0} \frac{\Gamma(s)}{1-C\Gamma(s)} \frac{ds}{(\alpha x)^s}, \quad \sigma'_0 > 0.$$

Этот интеграл можно вычислить при помощи интегральной формулы Коши. При $\alpha x > 1$ контур интегрирования замыкается полуокружностью, лежащей в правой полуплоскости. В этом случае единственная особенность подинтегральной функции лежит в точке s_0 , в которой $1-C\Gamma(s_0) = 0$. Тогда

$$\psi = \frac{A}{C(\alpha x)^{s_0} \psi_1(s_0)}, \quad \alpha x > 1, \quad (8.5.46)$$

где $\psi_1(s_0)$ — логарифмическая производная гамма-функции в точке s_0 . При $\alpha x < 1$ особенностью оказывается каждый отрицательный корень выражения $1-C\Gamma(s)$, так что

$$\psi = -\frac{A}{C} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha x)^{s_r} \psi_1(s_r)}, \quad \alpha x < 1. \quad (8.5.47)$$

[Заметим, что эти выражения для ψ не являются решениями однородного уравнения.] Ряд для ψ в области $\alpha x < 1$ сходится весьма быстро, так как корни s_r образуют последовательность отрицательных чисел, абсолютные величины которых возрастают вместе с r .

Метод Винера—Хопфа. Можно расширить класс интегральных уравнений, которые решаются при помощи преобразования Фурье, так, чтобы включить в него следующий тип:

$$\psi(x) = \lambda \int_0^{\infty} v(x-x_0) \psi(x_0) dx_0, \quad (8.5.48)$$

так же как и соответствующие неоднородные уравнения первого и второго рода. Важно отметить, что записанное выше уравнение, по предположению, имеет силу для *всех* вещественных значений x , как положительных, так и отрицательных. Для того чтобы этот факт был яснее виден из записи этого уравнения, введем функции ψ_+ и ψ_- , определенные обычным образом:

$$\begin{aligned} \psi_+(x) &= \psi(x) \text{ при } x > 0, & \psi_+(x) &= 0 \text{ при } x < 0, \\ \psi_-(x) &= \psi(x) \text{ при } x < 0, & \psi_-(x) &= 0 \text{ при } x > 0. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (8.5.48) переписывается так:

$$\psi_+(x) + \psi_-(x) = \lambda \int_0^{\infty} v(x-x_0) \psi_+(x_0) dx_0 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} v(x-x_0) \psi_+(x_0) dx_0. \quad (8.5.49)$$

Другими словами, как ψ_- , так и ψ_+ можно выразить через ψ_+ :

$$\begin{aligned} \psi_-(x) &= \lambda \int_0^{\infty} v(x-x_0) \psi_+(x_0) dx_0, & x < 0, \\ \psi_+(x) &= \lambda \int_0^{\infty} v(x-x_0) \psi_+(x_0) dx_0, & x > 0. \end{aligned} \quad (8.5.50)$$

Такие интегральные уравнения, называемые уравнениями *типа Винера—Хопфа*, возникают всякий раз, когда мы имеем дело с граничными задачами, где границы являются полубесконечными, а не бесконечными; последним соответствуют интегральные уравнения, рассмотренные ранее в этом параграфе. Один пример нам дает задача о дифракции волн на полуплоскости, другие примеры будут рассмотрены в гл. 11 и 12.

При изложении метода Винера—Хопфа мы сосредоточим внимание сначала на применяемых здесь формальных операциях и условиях, при которых эти операции законны, а в заключение проиллюстрируем этот метод примерами. Мы сделаем это без подробных, строгих доказательств; многие элементы этих доказательств были изложены в гл. 4. Те дополнения, которые потребуются, будут по мере надобности доказываться в ходе решения проблемы.

Как и при обсуждении ранее изученных в этом параграфе задач, мы предполагаем, что функция $V(k)$, являющаяся преобразованием Фурье функции $v(x)$, регулярна в области

$$-\tau_1 < \operatorname{Im} k < \tau_0,$$

что аналогично условию (8.5.14). Это требование соответствует асимптотическому поведению $v(x)$:

$$v(x) \simeq e^{-\tau_1 x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad v(x) \simeq e^{\tau_0 x}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Мы рассматриваем решения уравнения (8.5.48), которые ведут себя подобно $e^{\mu x}$ при $x \rightarrow \infty$ (где $\mu < -\tau_1$). Условие в скобках необходимо для сходимости интеграла, входящего в интегральное уравнение. Мы можем опреде-

лить асимптотическую зависимость для ψ_- непосредственно из уравнения (8.5.50):

$$\psi_- \simeq \lambda \int_0^{\infty} e^{-\tau_0(x-x_0)} \psi_+(x_0) dx_0 = \lambda e^{\tau_0 x} \int_0^{\infty} e^{-\tau_0 x_0} \psi_+(x_0) dx_0, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Следовательно, необходимо, чтобы $\mu < \tau_0$ и чтобы ψ_- вела себя при $x \rightarrow -\infty$ как $e^{-\tau_0 x}$. Полосой регулярности для Ψ_+ будет полуплоскость $\text{Im } k > \mu$, а для Ψ_- такой полосой будет $\text{Im } k < \tau_0$. Эти полосы показаны на рис. 8.5, на котором можно видеть, что существует полоса $\mu < \text{Im } k < \tau_0$, где все интересующие нас преобразования, V , Ψ_+ , Ψ_- , регулярны. Этот результат, как мы увидим, является основным в методе Винера — Хопфа.

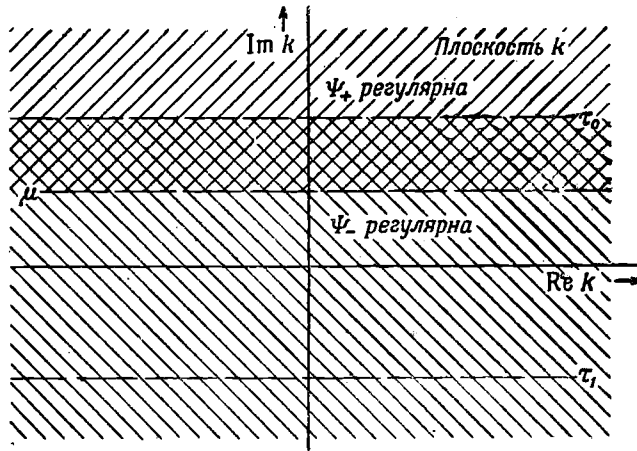


Рис. 8.5. Области регулярности функций Ψ_+ и Ψ_- в плоскости k .

Теперь можно, применяя теорему о свертке, составить преобразование выражения (8.5.49)

$$\Psi_+ + \Psi_- = \sqrt{2\pi} \lambda V \Psi_+,$$

или

$$\Psi_+ (1 - \sqrt{2\pi} \lambda V) + \Psi_- = 0. \quad (8.5.51)$$

Для того чтобы определить из этого уравнения как Ψ_+ , так и Ψ_- , нужны дополнительные сведения об этом уравнении. Эти сведения можно получить, разлагая на множители функцию $1 - \sqrt{2\pi} \lambda V$. Это выражение регулярно в полосе $-\tau_1 < \text{Im } k < \tau_0$. Попробуем разложить это выражение на множители Υ_+ и $1/\Upsilon_-$ так, чтобы иметь

$$1 - \sqrt{2\pi} \lambda V = \Upsilon_+(k)/\Upsilon_-(k). \quad (8.5.52)$$

Эти множители должны быть регулярными и отличными от нуля соответственно в полуплоскостях $\text{Im } k > \mu$ и $\text{Im } k < \tau_0$. Обычно дополнительно требуют, чтобы Υ_+ и Υ_- имели алгебраический рост, а не экспоненциальный. Возможность такого разложения на множители была показана Винером и Хопфом в их оригинальной работе.

В каждой данной задаче это разложение на множители должно быть явно осуществлено. Допуская, что равенство (8.5.52) имеет место, мы можем переписать уравнение (8.5.51) для Ψ_+ и Ψ_- следующим образом:

$$\Upsilon_+ \Psi_+ = -\Psi_- \Upsilon_-. \quad (8.5.53)$$

Левая часть этого уравнения регулярна в области $\text{Im } k > \mu$, в то время как правая часть регулярна при $\text{Im } k < \tau_0$. Так как они имеют общую область регулярности $\tau_0 > \text{Im } k > \mu$, в которой они равны, то мы можем утверждать, что $-\Psi_- \Upsilon_-$ является аналитическим продолжением $\Psi_+ \Upsilon_+$ в нижнюю полуплоскость. Следовательно, функция $\Psi_+ \Upsilon_+$ регулярна во всей комплексной плоскости и потому является целой функцией, которую мы и обозначим через $P(k)$.

Приведенного рассуждения совместно с уравнением (8.5.52), очевидно, еще недостаточно для того, чтобы найти вид $\Psi_+ \Upsilon_+$; необходимо еще учесть поведение этой функции при больших k . Заметим, что функция Υ_+ уже выбрана так, что имеет алгебраический рост, т. е. при больших k она ведет себя как полином. Поведение Ψ_+ при больших k определяется поведением $\psi_+(x)$ при $x \rightarrow 0^+$. Условие интегрируемости $\psi_+(x)$ в начале координат, необходимое для существования Ψ_+ , приводит к асимптотической зависимости

$$\psi_+(k) \simeq 0, \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Итак, мы видим, что $P(k)$ представляет собой полином степени, меньшей чем порядок роста Υ_+ (так как P/Υ_+ стремится к нулю при больших $|k|$). Этим определяется вид $P(k)$; неопределенные постоянные можно найти подстановкой в исходное уравнение (8.5.48).

Теперь уравнение (8.5.53) можно решить относительно Ψ_+ и Ψ_- :

$$\Psi_+ = \frac{P(k)}{\Upsilon_+(k)}, \quad \Psi_- = -\frac{P(k)}{\Upsilon_-(k)}. \quad (8.5.54)$$

Формула обращения имеет вид

$$\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{P(k)}{\Upsilon_+(k)} e^{-ikx} dk, \quad \mu < \tau < \tau_0. \quad (8.5.55)$$

Если известна функция ψ_+ , то ψ_- можно определить подстановкой в (8.5.50) или более прямым путем:

$$\psi_-(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{P(k)}{\Upsilon_-(k)} e^{-ikx} dk, \quad \mu < \tau < \tau_0. \quad (8.5.56)$$

Этим завершается решение интегрального уравнения Винера — Хопфа (8.5.48). Проиллюстрируем теперь эти рассуждения несколькими примерами.

Примеры применения метода. Весьма простой пример доставляет интегральное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-|x-x_0|} \psi(x_0) dx_0.$$

Преобразование функции $e^{-|x|}$ — функция $V(k)$ — равно

$$V(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+k^2)}, \quad \tau_0 = \tau_1 = 1.$$

Выражение, которое должно быть представлено в виде произведения Υ_+ и $1/\Upsilon_-$, согласно равенству (8.5.52), имеет вид

$$1 - \sqrt{2\pi}\lambda V = \frac{k^2 - (2\lambda - 1)}{k^2 + 1} = \frac{\Upsilon_+}{\Upsilon_-}.$$

Разложение на множители можно осуществить, заметив, что

$$1 - \sqrt{2\pi}\lambda V = \frac{k^2 - (2\lambda - 1)}{k + i} \frac{1}{k - i}.$$

Следовательно,

$$\Upsilon_+ = \frac{k^2 - (2\lambda - 1)}{k + i}, \quad \Upsilon_- = k - i.$$

Первая из этих функций Υ_+ , очевидно, регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im} k > \mu$, где μ меньше чем $\tau_0 = 1$, в то время как Υ_- регулярна и не обращается в нуль при $\operatorname{Im} k < \tau_0$, если только $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и $(\operatorname{Im} \lambda)^2 < 2 \operatorname{Re} \lambda$. Следовательно,

$$P(k) = \frac{\Psi_+(k) [k^2 - (2\lambda - 1)]}{k + i} = -(k - i) \Psi_-(k).$$

Функция $P(k)$ определяется из того условия, что она должна быть регулярной во всей конечной плоскости комплексного переменного k , в то время как $\Psi_+(k) \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$. Из этого условия следует, что в данном примере $P(k)$ должна равняться постоянной C . Она не может расти так быстро, как k , ибо из этого предположения вытекало бы, что $\Psi_+(k) \rightarrow 1$. Она не может убывать быстрее чем постоянная, так как отсюда вытекало бы существование особенности (полюса или точки разветвления) в конечной части комплексной плоскости. Теперь мы можем найти Ψ_+ и Ψ_- :

$$\Psi_+ = \frac{C(k+i)}{k^2 - (2\lambda - 1)}, \quad \Psi_- = -\frac{C}{k-i}$$

и

$$\phi_+ = C \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} \frac{k+i}{k^2 - (2\lambda - 1)} e^{-ikx} dx.$$

Так как в этом выражении $x > 0$, то мы можем замкнуть контур интегрирования полуокружностью, лежащей в нижней полуплоскости. Применяя интегральную формулу Коши, получаем

$$\begin{aligned} \phi_+ &= -\frac{C}{4\pi i} \left\{ \frac{\sqrt{2\lambda-1}+i}{\sqrt{2\lambda-1}} e^{-i\sqrt{2\lambda-1}x} + \frac{\sqrt{2\lambda-1}-i}{\sqrt{2\lambda-1}} e^{i\sqrt{2\lambda-1}x} \right\} = \\ &= D \left\{ \cos(\sqrt{2\lambda-1}x) + \frac{\sin(\sqrt{2\lambda-1}x)}{\sqrt{2\lambda-1}} \right\}, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (8.5.57)$$

где D — новая постоянная. Таким же способом находим

$$\phi_- = D e^x, \quad x < 0. \quad (8.5.58)$$

Конечно, для решения этого уравнения не было необходимости применять метод Вивера — Хопфа. Исходя непосредственно из интегрального уравнения, легко убедиться, что при $x > 0$ функция $\phi = \phi_+$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\phi'' + (2\lambda - 1)\phi = 0, \quad x > 0.$$

При $x < 0$ функция $\phi = \phi_-$ задается так:

$$\phi_- = \lambda \int_0^\infty e^{-|x-x_0|} \phi_+(x_0) dx_0, \quad \text{или} \quad \phi_- = \lambda e^x \int_0^\infty e^{-x_0} \phi_+(x_0) dx_0.$$

Это выражение, очевидно, той же формы, что и (8.5.58). Решение, которое дается равенствами (8.5.57) и (8.5.58), является непрерывным и имеет непрерывную производную при $x = 0$.

Наше разложение на множители не является столь непостижимым, как это может показаться. Прежде всего оно не обязательно единственно, так как условия, налагаемые на $P = \Psi_+ \Upsilon_+ = -\Psi_- \Upsilon_-$ и на асимптотический

вид Ψ , не являются вполне жесткими. Тем не менее оказывается, что соотношения между P , Υ_+ , Υ_- , Ψ_+ и Ψ_- таковы, что окончательное решение определяется однозначно, независимо от выбора, сделанного вначале. Во многих случаях разложение на множители оказывается *единственным*. Это имеет место в только что приведенном примере. Например, мы могли бы попытаться разложить так:

$$\Upsilon_+ = \frac{[k^2 - (2\lambda - 1)](k - \beta)}{k + i}, \quad \Upsilon_- = (k - i)(k - \beta).$$

Если Υ_+ не должна обращаться в нуль в области $\text{Im } k > \mu$ ($\mu < 1$), то следует положить $\text{Im } \beta < \mu$ ($\mu < 1$); но в этом случае $\Upsilon_- = 0$ в точке $k = \beta$, где, по предположению, не должно быть нулей функции Υ_- . Либо мы могли бы испробовать

$$\Upsilon_+ = \frac{k^2 - 2\lambda + 1}{(k + i)(k - \beta)}, \quad \Upsilon_- = \frac{k - i}{k - \beta},$$

но тогда появился бы полюс в той области плоскости k , где его не должно быть. Следовательно, единственная комбинация, для которой нули и полюсы функции Υ_+ остаются ниже прямой $\text{Im } k = 1$, а нули и полюсы Υ_- выше $\text{Im } k = 1$, — это та, которую мы выбрали, если только мы хотим ограничиться функциями, стремящимися к бесконечности при $|k| \rightarrow \infty$ как конечная степень k .

В качестве второго примера мы обратимся к задаче, рассмотренной Хейнсом:

$$\psi(x) = \lambda \int_0^\infty \frac{\psi(x_0) dx_0}{\text{ch}[(x - x_0)/2]}.$$

Преобразование Фурье от $\text{sech}[(x - x_0)/2]$ можно легко получить при помощи контурного интегрирования.

Функция, подлежащая разложению на множители, такова:

$$1 - \sqrt{2\pi} \lambda V = 1 - \frac{\lambda \pi}{\text{ch } \pi k} = \frac{\text{ch } \pi k - \lambda \pi}{\text{ch } \pi k}.$$

Пусть $\cos \pi \alpha = \lambda \pi$, где $|\alpha| < 1/2$. Тогда

$$\text{ch } \pi k - \cos \pi \alpha = 2 \sin \frac{\pi(\alpha + ik)}{2} \sin \frac{\pi(\alpha - ik)}{2}.$$

Эти множители можно в свою очередь выразить непосредственно через их нули, представляя их в виде бесконечных произведений [формула (4.3.8)], или эквивалентным образом при помощи гамма-функции, используя соотношение [формула (4.5.33)]

$$\Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Следовательно,

$$\sin \left[\pi \left(\frac{\alpha + ik}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{\Gamma \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} ik \right) \Gamma \left(1 - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} ik \right)}$$

и подобным же образом

$$\sin \left[\pi \left(\frac{\alpha - ik}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{\Gamma \left(\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} ik \right) \Gamma \left(1 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} ik \right)}.$$

Значит,

$$\operatorname{ch} \pi k = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ik\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + ik\right)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$1 - \sqrt{2\pi} \lambda V = \frac{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{2} - ik\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + ik\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha + ik}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - ik}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha + ik}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha - ik}{2}\right)}.$$

Исходя из этого, мы можем с некоторой степенью произвола написать

$$\begin{aligned} \Upsilon_+ &= \frac{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2} - ik\right) (\alpha + ik) e^{\chi(k)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha - ik}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha + ik}{2}\right)}, \\ \Upsilon_- &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha + ik}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha - ik}{2}\right) e^{\chi(k)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + ik\right)}. \end{aligned}$$

Функция $\chi(k)$ определяется из условия, чтобы Υ_+ , Υ_- имели алгебраический рост при больших значениях k . Для исследования их поведения при больших k применим формулу Стирлинга:

$$\ln \Gamma(z) \simeq \left[z - \frac{1}{2}\right] \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi, \quad z \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\ln \Upsilon_+ \simeq \chi - ik \ln 2 + \ln(ik) + \dots, \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы функция Υ_+ вела себя при больших $|k|$ подобно полиному мы должны выбрать $\chi = ik \ln 2$, и в этом случае будем иметь

$$\Upsilon_+ \simeq ik, \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Конечно, это соотношение имеет место только там, где Υ_+ регулярна.

Теперь мы можем определить $P(k)$. Так как $\Psi_+ \simeq 0$, $|k| \rightarrow \infty$, то из регулярности $P(k) = -\Psi_- \Upsilon_- = \Psi_+ \Upsilon_+$ следует, что $P(k)$ является постоянной, которую мы обозначим через C . Таким образом, определяется функция Ψ_+ :

$$\Psi_+ = \frac{C}{\Upsilon_+} = \frac{C}{\Upsilon_-} \frac{\operatorname{ch} \pi k}{\operatorname{ch} \pi k - \cos \pi \alpha}.$$

В данной задаче оказывается более полезным именно это представление. Функция $\psi_+(x)$ равна

$$\psi_+(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} e^{-ikx} \frac{\operatorname{ch} \pi k}{\operatorname{ch} \pi k - \cos \pi \alpha} \frac{dk}{\Upsilon_-}.$$

При $x > 0$ мы можем замкнуть контур в нижней полуплоскости, где Υ_- регулярна. Тогда полюсы подынтегральной функции лежат только в точках, где разность $\operatorname{ch} \pi k - \cos \pi \alpha$ обращается в нуль, т. е. при $-ik = -2n \pm \alpha$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому

$$\psi_+(x) = C' \frac{\operatorname{ctg} \pi \alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-(2n+\alpha)x}}{\Upsilon_-[-(2n+\alpha)i]} - \frac{e^{-(2n-\alpha)x}}{\Upsilon_-[-(2n-\alpha)i]} \right\},$$

где C' — новая постоянная. Подставляя выражение для Γ_- , получаем

$$\psi_+ = C' \frac{\operatorname{ctg} \pi \alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha + 2n\right)}{\Gamma(1 + \alpha + n)} \frac{(2e^x)^{-(2n+\alpha)}}{n!} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + 2n\right)}{\Gamma(1 - \alpha + n)} \frac{(2e^x)^{-(2n-\alpha)}}{n!} \right\}.$$

Это выражение можно свести к линейной комбинации гипергеометрических функций от e^{2x} ; для этого надо использовать формулу удвоения гамма-функции

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда

$$\psi_+ = C'' \frac{\operatorname{ctg} \pi \alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + n\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\alpha + n\right)}{\Gamma(1 + \alpha + n)} \frac{e^{-(2n+\alpha)x}}{n!} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha + n\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\alpha + n\right)}{\Gamma(1 - \alpha + n)} \frac{e^{-(2n-\alpha)x}}{n!} \right\},$$

где C'' — еще одна новая постоянная. Сравнивая полученные ряды с гипергеометрическим рядом, получаем

$$\psi_+ = C'' \frac{\operatorname{ctg} \pi \alpha}{\pi} \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\alpha\right)}{\Gamma(1 + \alpha)} e^{-\alpha x} F\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\alpha \mid 1 + \alpha \mid e^{-2x}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\alpha\right)}{\Gamma(1 - \alpha)} e^{\alpha x} F\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\alpha \mid 1 - \alpha \mid e^{-2x}\right) \right\}.$$

Это выражение можно в свою очередь преобразовать при помощи вторых решений дифференциального уравнения Лежандра $Q_{\alpha-\frac{1}{2}}$, $Q_{-\alpha-\frac{1}{2}}$. Мы имеем

$$Q_{\alpha-\frac{1}{2}}(e^x) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}{2^{\alpha+\frac{1}{2}} \Gamma(1 + \alpha)} e^{-x\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)} F\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\alpha \mid 1 + \alpha \mid e^{-2x}\right).$$

Применяя формулу удвоения для гамма-функции, получаем

$$\psi_+ = C'' \frac{\operatorname{tg} \pi \alpha}{\pi} e^{\frac{1}{2}x} [Q_{\alpha-\frac{1}{2}}(e^x) - Q_{-\alpha-\frac{1}{2}}(e^x)]. \quad (8.5.59)$$

Наконец, из соотношения между функциями Лежандра первого и второго рода

$$P_\beta = \frac{\operatorname{ctg} \pi \beta}{\pi} [Q_\beta - Q_{-\beta-1}]$$

имеем

$$\psi_+ = -C'' e^{\frac{1}{2}x} P_{\alpha-\frac{1}{2}}(e^x), \quad x > 0. \quad (8.5.60)$$

Таким образом, мы можем выразить решение этого интегрального уравнения для $x > 0$ через гипергеометрические функции или функции Лежандра,

а этого, учитывая формулы аналитического продолжения (см. таблицы в конце гл. 5), достаточно для представления ϕ при всех значениях x .

Задача Милна. Предыдущие примеры показывают, что разложение на множители выражения $1 - \sqrt{2\pi\lambda V}$ является единственным шагом в процессе Винера — Хопфа, при проведении которого можно натолкнуться на существенные трудности. В приведенных выше примерах это разложение было получено путем догадки и последующей проверки. Мы займемся сейчас задачей, в которой преобразование Фурье ядра имеет точку ветвления, делающую разложение на множители по догадке почти невозможным. Теперь мы увидим, как можно преодолеть эту трудность вполне общим, но зато достаточно громоздким приемом. Эта задача — задача Милна — возникает в связи с прохождением излучения (или любого другого множества частиц с независимыми скоростями, таких, например, как медленные нейтроны) через неабсорбирующую однородную среду, в которой излучение изотропно рассеивается (см. § 2.4). Эта среда берется полубесконечной по протяжению и мы рассмотрим случай, когда функция распределения f [см. уравнение (8.1.2)] не зависит от x, y , так же как и от величины импульса $|p|$.

В этих предположениях уравнение (8.1.2) принимает вид

$$v \cos \theta \frac{\partial f}{\partial z} = -P_T f + P_T \int f(z, \theta_0) \frac{d\Omega_0}{4\pi},$$

где θ — угол между направлением движения частицы и осью z . Мы можем осуществить интегрирование по азимутальному углу φ_0 . Кроме того, удобно ввести переменные

$$\zeta = (z/vP_T), \quad \mu = \cos \theta.$$

Заметим, что $P_T = N\sigma$, где N — число атомов в единице объема, а σ — полное эффективное сечение рассеяния. Тогда это уравнение приводится к виду [см. уравнение (2.4.16)]

$$\mu \frac{\partial f(\zeta, \mu)}{\partial \zeta} = -f(\zeta, \mu) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\zeta, \mu_0) d\mu_0. \quad (8.5.61)$$

Для того чтобы превратить это уравнение в интегральное, рассмотрим его как уравнение первого порядка по ζ и соответствующим образом проинтегрируем. Получим

$$f(\zeta, \mu) = A e^{-\zeta/\mu} + \frac{1}{2\mu} \int_a^\zeta e^{-(\zeta-\zeta_0)/\mu} d\zeta_0 \int_{-1}^1 f(\zeta_0, \mu_0) d\mu_0.$$

Постоянная интегрирования во втором члене и постоянный коэффициент A определяются из граничных условий. Рассмотрим две области изменения углов: $0 < \mu < 1$ и $-1 < \mu < 0$ (первая — для частиц, движущихся вправо, вторая — для частиц, у которых проекции скорости на ось z отрицательны). Обозначим соответствующие f через f_a и f_b , т. е. положим

$$\begin{aligned} f_b &= 0, & f_a &= f & \text{при } 0 < \mu < 1, \\ f_b &= f, & f_a &= 0 & \text{при } -1 < \mu < 0. \end{aligned}$$

Тогда граничные условия примут вид:

$$\left. \begin{aligned} f_a &= I_0(\mu) & \text{при } \zeta = 0, \\ f_b &= 0 & \text{при } \zeta = \infty, \end{aligned} \right\} \quad f_a, f_b > 0 \text{ для всех конечных } \zeta. \quad (8.5.62)$$

Здесь I_0 — функция распределения для падающего пучка частиц.

Эти граничные условия удовлетворяются следующими выражениями [см. (2.4.19)]:

$$\begin{aligned} f_a &= I_0 e^{-z/\mu} + \frac{1}{2|\mu|} \int_0^z e^{-(z-\zeta_0)/|\mu|} d\zeta_0 \int_{-1}^1 f(\zeta_0, \mu_0) d\mu_0, \\ f_b &= \frac{1}{2|\mu|} \int_z^\infty e^{(z-\zeta_0)/|\mu|} d\zeta_0 \int_{-1}^1 f(\zeta_0, \mu_0) d\mu_0. \end{aligned} \quad (8.5.63)$$

Для того чтобы свести их к одному интегральному уравнению, полезно заменить зависимую переменную f :

$$\rho(\zeta) = \int_{-1}^1 f(\zeta, \mu) d\mu = \int_{-1}^1 (f_a + f_b) d\mu. \quad (8.5.64)$$

Подставляя f_a и f_b из (8.5.63) в (8.5.64), получаем

$$\rho(\zeta) = \int_0^1 I_0(\mu) e^{-z/\mu} d\mu + \int_0^\infty \frac{d\mu}{2|\mu|} \int_0^\infty e^{-|\zeta-\zeta_0|/|\mu|} \rho(\zeta_0) d\zeta_0.$$

Меняя порядок интегрирования, находим [см. (2.4.20)]

$$\begin{aligned} \rho(\zeta) &= \int_0^1 I_0(\mu) e^{-z/\mu} d\mu + \int_0^\infty v(\zeta - \zeta_0) \rho(\zeta_0) d\zeta_0, \\ v(\zeta - \zeta_0) &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-|\zeta-\zeta_0|/\mu} \frac{d\mu}{\mu}. \end{aligned} \quad (8.5.65)$$

Мы узнаем в (8.5.65) неоднородное уравнение типа Винера — Хопфа. Опуская в этом уравнении член, связанный с источником, мы получаем однородное уравнение, которое называется уравнением Милна:

$$\rho(\zeta) = \int_0^\infty v(\zeta - \zeta_0) \rho(\zeta_0) d\zeta_0. \quad (8.5.66)$$

Сравнительно простое изменение в процессе Винера — Хопфа, которое нужно произвести для случая неоднородных уравнений, мы обсудим ниже. Решения уравнения (8.5.66) дают асимптотический (при большом ζ) вид решений неоднородного уравнения.

После определения ρ полное распределение можно найти, интегрируя выражение (8.5.63). Особенно интересным является распределение выходящего излучения у нижней поверхности при $\zeta = 0$. Здесь

$$f_b(0) = \frac{1}{2|\mu|} \int_0^\infty e^{-z/|\mu|} \rho(\zeta) d\zeta \quad \text{или} \quad f_b(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2|\mu|} R_+ \left(\frac{i}{|\mu|} \right),$$

где $R_+(k)$ — преобразование Фурье функции $\rho_+(\zeta)$. Этот результат особенно интересен, так как он показывает, что для нахождения распределения выходящего излучения на поверхности вещества нет необходимости обращать преобразование Фурье решения уравнения (8.5.66).

Теперь мы возвратимся к уравнению (8.5.66) и рассмотрим его решение методом Винера — Хопфа. Преобразование от v равно

$$V(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\arctg k}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2ik)} \ln \left(\frac{1+ik}{1-ik} \right).$$

Следовательно, функция Γ , которую надо представить в виде Γ_+/Γ_- , имеет вид

$$\Gamma = 1 - \sqrt{2\pi\lambda V} = \frac{k - \operatorname{arctg} k}{k}. \quad (8.5.67)$$

Γ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} k| < 1$; однако при $k = \pm i$ она имеет точки ветвления, из-за которых уже невозможно применить простой метод двух предшествующих примеров.

Общий метод разложения на множители. Метод, который мы изучим, основан на теореме о том, что каждая функция $f(k)$, аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} k| < \alpha$, является суммой двух функций, одна из которых аналитична при $\operatorname{Im} k > -\alpha$, а вторая — при $\operatorname{Im} k < \alpha$. Легко убедиться, что это — частный случай теоремы о разложении в ряд Лорана [равенство (4.3.4) и рассуждения, следующие за ним]. Процесс, используемый здесь, заключается в применении интегральной формулы Коши, причем контуром интегрирования служит граница области аналитичности $f(k)$; как и при выводе ряда Лорана, этой границей является граница полосы, которая представляет собой частный случай кругового кольца, когда центр кольца расположен на бесконечности. Интеграл Коши разбивается на два интеграла: один, по внешней окружности, берется в положительном направлении, другой, по внутренней, — в отрицательном направлении (для полосы эти окружности обращаются в прямые, ограничивающие полосу). Функция, представленная интегралом вдоль внешней окружности, аналитична внутри внешней окружности, т. е. внутри кольца, а также во внутреннем круге, а функция, представленная интегралом по внутренней окружности, аналитична вне внутренней окружности. Переходя к случаю полосы и помещая центр кольца в точку $k = -i\infty$, мы получаем

$$q(k) = q_-(k) - q_+(k),$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_-(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \beta i}^{\infty + \beta i} \frac{q(\eta)}{\eta - k} d\eta \\ q_+(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \beta i}^{\infty - \beta i} \frac{q(\eta)}{\eta - k} d\eta \end{aligned} \right\}, \quad \beta < \alpha. \quad (8.5.68)$$

Слагаемое q_- аналитично при $\operatorname{Im} k < \beta$, а q_+ аналитично при $\operatorname{Im} k > -\beta$, где $\beta < \alpha$; α определяется границей полосы аналитичности преобразования V ядра уравнения.

Теперь мы можем использовать равенства (8.5.68) для того, чтобы выполнить разложение на множители $\Gamma = \Gamma_+/\Gamma_-$ согласно равенству (8.5.52). Эта задача эквивалентна задаче о представлении $\ln \Gamma$ в виде $\ln \Gamma_+ - \ln \Gamma_-$, которая может быть решена при помощи равенства (8.5.68), если только $\ln \Gamma$ не имеет особенностей в данной полосе. Так как функция Γ аналитична в этой полосе, то трудности могут возникнуть только в точках, где Γ обращается в нуль; мы обозначим эти точки k_r . Кроме того, для обеспечения сходимости интегралов, фигурирующих в (8.5.68), мы должны потребовать, чтобы $q(\eta) \rightarrow 0$, когда $|\eta| \rightarrow \infty$ и η остается внутри данной полосы. Если $q(k)$ должно равняться логарифму Γ , то для выполнения последнего требования Γ должно стремиться к единице при $|k| \rightarrow \infty$.

Функция q не может в точности равняться логарифму Γ , так как мы должны ввести под знак логарифма множители, которые «компенсируют» нули Γ , лежащие внутри области аналитичности V , т. е. при $|\operatorname{Im} k| < \alpha$; затем мы должны заставить все выражение, стоящее под знаком логарифма,

стремиться к единице при $|k| \rightarrow \infty$. Как уже было сказано, нулями Υ , лежащими внутри области аналитичности, являются точки k_r ($r = 1, 2, \dots, N$). Поэтому отношение $\Upsilon/\Pi(k - k_r)$ не имеет нулей внутри данной полосы [некоторые из нулей могут иметь кратность, большую единицы, и в этом случае множитель $(k - k_r)$ должен фигурировать в произведении Π в соответствующей степени]. Однако это отношение не стремится к единице при $|k| \rightarrow \infty$, и поэтому мы должны умножить его на некоторый полином от k (не имеющий нулей в этой полосе). Если, например, $[\Upsilon/\Pi(k - k_r)] \simeq k^{-M/C}$, когда $|k| \rightarrow \infty$, то мы можем умножить это выражение на $C(k^2 + \alpha^2)^{M/2}$ и положить

$$q = \ln [C \Upsilon_1(k) (k^2 + \alpha^2)^{M/2} / \prod_r (k - k_r)]. \quad (8.5.69)$$

Соображения, по которым мы выбрали множитель $(k^2 + \alpha^2)^{M/2}$, довольно очевидны. Этот множитель не должен иметь нулей внутри области аналитичности Υ ($|\operatorname{Im} k| < \alpha$), и поэтому мы выбираем его так, чтобы нули были расположены на границе полосы. Кроме того, нам удобно, чтобы нули располагались парами, один на верхней, другой на нижней границе полосы, с тем чтобы q_+ имела все нули на одной из границ, а q_- — на другой. Постоянная C выбирается как раз так, чтобы величина в скобках стремилась к единице при $|k| \rightarrow \infty$.

Записав $q = -q_+ + q_-$ и выполнив вычисления по формулам (8.5.68), получим

$$\Upsilon = \prod_r [(k - k_r)/C (k^2 + \alpha^2)^{M/2}] e^{(q_- - q_+)}.$$

Теперь разложение Υ очевидно:

$$\Upsilon_+ = [\prod_r (k - k_r) e^{-q_+}/C (k + i\alpha)^{M/2}], \quad \Upsilon_- = (k - i\alpha)^{M/2} e^{-q_-}. \quad (8.5.70)$$

Таким образом, искомое разложение на множители формально получено, и этот общий процесс всегда применим при решении методом Винера — Хопфа (если мы можем найти q_+ и q_- !).

Задача Милна; продолжение. В задаче Милна Υ задается равенством (8.5.67) в виде $1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} k/k$. Эта функция имеет в точке $k=0$ единственный нуль второго порядка. Следовательно,

$$q = \ln \left[\frac{k^2 + 1}{k^2} \left(1 - \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} k}{k} \right) \right], \quad \alpha = 1,$$

откуда

$$q_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \beta i}^{\infty - \beta i} \ln \left[\frac{\eta^2 + 1}{\eta^2} \left(1 - \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta}{\eta} \right) \right] \frac{d\eta}{\eta - k}, \quad \beta < 1; \quad (8.5.71)$$

в выражение для q_- входят те же подинтегральные функции, но пределами интегрирования служат $\infty + \beta i$, $-\infty + \beta i$. В качестве заключительного шага мы должны определить $P(k) = \Psi_+ \Upsilon_+ = -\Psi_- \Upsilon_-$, где, согласно (8.5.70),

$$\Upsilon_+ = k^2 e^{-q_+}/(k + i), \quad \Upsilon_- = (k - i) e^{-q_-}. \quad (8.5.72)$$

Из сходимости интегралов, выражающих q_+ и q_- , следует, что обе эти функции ограничены при больших k , каждая в своей области регулярности. Следовательно, e^{-q_+} стремится к постоянной и, значит, $\Upsilon_+ \simeq k$. Далее, так как $\Psi_+(k) \simeq 0$, а P — целая функция, то P должна равняться постоянной; эту постоянную обозначим, например, через A . Итак, преобразование

Фурье функции ρ_+ имеет вид

$$R_+ = \frac{A}{Y_+} = \frac{A(k+i)}{k^2} e^{q_+(k)}, \quad (8.5.73)$$

где q_+ задается равенством (8.5.71).

Для получения углового распределения теперь необходимо [согласно (8.5.67)] найти $R_+(i/\mu)$. Здесь основной трудностью является вычисление интеграла для q_+ . Мы можем свести его к виду, удобному для численного интегрирования. С этой целью положим $\beta=0$ и будем интегрировать вдоль действительной оси η (при $k \neq 0$). Тогда при $k \neq 0$ получаем

$$q_+(k) = \frac{k}{\pi i} \int_0^\infty \ln \left[\frac{\eta^2+1}{\eta^2} \left(1 - \frac{\arctg \eta}{\eta} \right) \right] \frac{d\eta}{\eta^2 - k^2}. \quad (8.5.74)$$

Для нахождения асимптотического вида $\rho(\zeta)$ необходимо иметь разложение R_+ в степенной ряд по k . Вычислим $q_+(0)$ и затем высшие члены из выражения (8.5.74). Интеграл (8.5.71) при $k=0$ можно вычислить, рассматривая контур, состоящий из действительной оси, часть которой заменена малой полукругом с центром в точке $\eta=0$, лежащей ниже этой точки. Сумма интегралов по частям вещественной оси равна нулю в силу нечетности подинтегральной функции. Интегрирование по окружности дает

$$\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\eta^2+1}{\eta^2} \left(1 - \frac{\arctg \eta}{\eta} \right) \right], \quad \eta=0,$$

т. е. $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$, так что

$$q_+(0) = -\ln \sqrt{3}.$$

Чтобы найти следующий член, мы используем выражение (8.5.74), которое, прибавляя равный нулю интеграл, записываем в виде

$$q_+(k) = \frac{k}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln \left[\frac{3(\eta^2+1)}{\eta^2} \left(1 - \frac{\arctg \eta}{\eta} \right) \right]}{\eta^2 - k^2} d\eta.$$

Здесь подинтегральная функция регулярна при $k=0$, $\eta=0$. Следовательно,

$$q'_+(0) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln \left[\frac{3(\eta^2+1)}{\eta^2} \left(1 - \frac{\arctg \eta}{\eta} \right) \right]}{\eta^2} d\eta. \quad (8.5.75)$$

Возвращаясь к R_+ , получаем

$$R_+ \simeq \frac{A}{\sqrt{3}} \frac{(k+i)}{k^2} [1 + kq'_+(0)] \simeq \frac{Ai}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1+iq'_+(0)}{ik} \right], \quad k \rightarrow 0,$$

откуда

$$\rho_+(\zeta) \simeq \text{const} \cdot [1 + iq'_+(0) + \zeta], \quad \zeta \rightarrow 0.$$

Постоянная $1 + iq'_+(0)$ может быть вычислена интегрированием [в равенстве (8.5.75)] по частям. Мы получим $1 + iq'_+(0) \approx 0,7104 \dots$. Это уравнение и его решение будут изучены более подробно в § 12.2.

Неоднородное уравнение Винера — Хопфа. Уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^\infty v(x-x_0) \psi(x_0) dx_0 \quad (8.5.76)$$

можно решить тем же методом, который применялся в случае однородного уравнения. Так же находим преобразование Фурье

$$\Psi_+ + \Psi_- = \Phi_+ + \Phi_- + \sqrt{2\pi} \lambda V \Psi_+. \quad (8.5.77)$$

Разлагая на множители $1 - \sqrt{2\pi} \lambda V = \Upsilon_+ / \Upsilon_-$, мы можем переписать это равенство так:

$$\Psi_+ \Upsilon_+ + \Upsilon_- (\Psi_- - \Phi_-) - \Upsilon_- \Phi_+ = 0. \quad (8.5.78)$$

Первые два члена имеют требуемый вид, причем они аналитичны в общей части двух полуплоскостей. Третий член не имеет нужного вида и поэтому должен быть представлен в виде суммы двух слагаемых, одно из которых аналитично в верхней полуплоскости, другое — в нижней. Для этого необходимо, очевидно, чтобы существовала полоса, в которой регулярны и Υ_- и Φ_+ . Если это так, то мы можем применить разложение, даваемое равенством (8.5.68), где теперь $q = \Upsilon_- \Phi_+$. Поэтому мы пишем

$$\Upsilon_- \Phi_+ = q_- - q_+.$$

Переписывая (8.5.78), получаем

$$\Psi_+ \Upsilon_+ + q_+ = q_- + \Upsilon_- (\Phi_- - \Psi_-) \equiv P. \quad (8.5.79)$$

Левая часть уравнения аналитична в верхней полуплоскости, а правая — в нижней. Существует полоса регулярности, общая для них, так что, как и в случае однородного уравнения, правая часть является аналитическим продолжением левой части в нижнюю полуплоскость. Определенная таким образом функция P регулярна в любой конечной части плоскости и потому является целой функцией. Как и в случае однородного уравнения, характер функции P определяется асимптотическим поведением одного из определяющих ее выражений. После того, как P определена, имеем

$$\Psi_+ = \frac{P - q_+}{\Upsilon_+}, \quad (8.5.80)$$

и это выражение можно внести в формулу обращения для получения $\psi_+(x)$.

Если интегральное уравнение является уравнением первого, а не второго рода, т. е. если

$$0 = \varphi(x) + \lambda \int_0^\infty v(x - x_0) \psi(x_0) dx_0,$$

то решение можно выразить в виде (8.5.79) и (8.5.80), полагая

$$-\lambda \sqrt{2\pi} V = \frac{\Upsilon_+}{\Upsilon_-}.$$

На этом мы закончим общее изучение интегральных уравнений. Многие из методов, которых мы здесь коснулись, будут применены в последующих главах. Читая эту главу, можно было заметить, что теория интегральных уравнений развита далеко не с той полнотой, как теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Не существует правил, столь же простых, как правила для нахождения особых точек, которые давали бы нам возможность классифицировать ядра интегральных уравнений и легко распознавать, какое из представлений для неизвестной функции в виде интегралов или рядов быстро приводит к решению. Это положение отчасти обусловлено тем, что интегральные уравнения, вообще говоря, представляют более сложные физические и математические явления. Только в редких случаях интегральное уравнение оказывается эквивалентным дифференциальному уравнению второго порядка. Чаще они соответствуют дифференциальным уравнениям бесконечного порядка.

Тем не менее существуют случаи, для которых мы можем получить решение прямым путем. Например, для ядер вида $v(x-x_0)$ применимо преобразование Фурье. Однако для многих случаев еще не найден подходящий алгоритм для получения общего решения. Несмотря на это, сведение задач к интегральным уравнениям оказывается полезным, потому что, как мы увидим в следующей главе, интегральные уравнения служат основой для развития многих приближенных методов решения уравнений физики.

Основные свойства интегральных уравнений и их решений

Типы уравнений. В уравнениях Фредгольма фигурируют интегралы с фиксированными пределами; в уравнениях Вольтерра — интегралы, у которых один из пределов переменный; в уравнения первого рода неизвестная функция ψ входит только под знаком интеграла; в уравнениях второго рода ψ имеется также и вне интеграла.

Уравнение Фредгольма первого рода:

$$\varphi(z) = \int_a^b K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Уравнение Фредгольма второго рода:

$$\psi(z) = \varphi(z) + \lambda \int_a^b K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

При $\varphi = 0$ это уравнение становится однородным.

Уравнение Вольтерра первого рода:

$$\varphi(z) = \int_a^z K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Уравнение Вольтерра второго рода:

$$\psi(z) = \varphi(z) + \lambda \int_a^z K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0, \quad \varphi \text{ и } K \text{ известны.}$$

Соответствующее однородное уравнение, возникающее при $\varphi = 0$, не имеет ненулевых решений. Функция $K(z|z_0)$ называется *ядром* уравнения.

Типы ядер. *Симметрическое* ядро удовлетворяет равенству $K(z|z_0) = K(z_0|z)$. *Полярное* ядро имеет вид $r(z_0)G(z|z_0)$, где функция G симметрична. Уравнение Фредгольма с симметрическим ядром *самосопряженное*, уравнение Вольтерра с симметрическим ядром не является самосопряженным. Ядро является *определенным*, если

$$\int f(z) dz \int K(z|z_0) f(z_0) dz_0 > 0 \quad (\text{положительно определенное})$$

или

$$\int f(z) dz \int K(z|z_0) f(z_0) dz_0 < 0 \quad (\text{отрицательно определенное})$$

для любой функции f , конечной в промежутке интегрирования, соответствующем уравнению с ядром K .

Ядро называется *эрмитовым*, если для него $K(z_0|z) = \overline{K}(z|z_0)$, и *антиэрмитовым*, если $K(z_0|z) = -\overline{K}(z|z_0)$. Ядра обоих этих типов можно преобразовать в определенные или полуопределенные (полуопределенными называются ядра, для которых в предыдущих определениях знаки $>$ или $<$ заменены на $\geq$ или $\leq$ соответственно) при помощи итераций [см. формулу (8.2.10) и следующие]. Уравнение с полярным ядром можно преобразовать в уравнение с симметрическим ядром [см. формулу (8.2.8)].

Вещественное, положительно определенное, симметрическое ядро в уравнении Фредгольма обладает следующими свойствами. Однородное уравнение второго рода имеет ненулевые решения для некоторой последовательности значений параметра λ ; называемых собственными значениями ($0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$); соответствующие решения $\psi_n(z)$ являются *собственными функциями* и образуют семейство, ортогональное на отрезке $a \leq x \leq b$ (см. стр. 844). Эти собственные функции удовлетворяют вариационному принципу

$$\delta \left\{ \frac{\int \bar{\psi}(z) \psi(z) dz}{\int \int \bar{\psi}(z) K(z|z_0) \psi(z_0) dz_0 dz} \right\} = 0$$

[см. (6.3.20) по поводу аналогичного соотношения для дифференциальных уравнений]. Стационарными значениями выражения, стоящего в скобках, являются собственные значения λ_n [см. (8.2.24)].

Сингулярное ядро имеет разрывы или особенности внутри промежутка интегрирования или же бесконечные пределы интегрирования. Некоторые из этих ядер можно свести к несингулярным при помощи итераций; те ядра, которые не могут быть сведены к несингулярным, называются *существенно сингулярными* (см. стр. 855). Однородные уравнения Фредгольма с существенно сингулярными ядрами могут иметь несчетное множество собственных значений; могут оказаться допустимыми все значения λ из некоторой области.

Функция Грина для неоднородного уравнения. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода можно решить при помощи функции Грина $G_\lambda(z|z_0)$, являющейся решением уравнения

$$G_\lambda(z|z_0) = K(z|z_0) + \lambda \int K(z|z_1) G_\lambda(z_1|z_0) dz_1.$$

Решение исходного уравнения имеет вид

$$\psi(z) = \varphi(z) + \lambda \int G_\lambda(z|z_0) \varphi(z_0) dz_0.$$

Функция Грина G_λ может быть разложена в различные ряды, содержащие собственные функции ψ_n , собственные значения λ_n или итерированные ядра K_n :

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_m \frac{\psi_m(z) \bar{\psi}_m(z_0)}{\lambda_m - \lambda}, \quad \psi_m \text{ нормированы.}$$

$$G_\lambda(z|z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(z|z_0) \lambda^n,$$

$$K(z|z_0) = K_1(z|z_0) = G_0(z|z_0),$$

$$K_{n+1}(z|z_0) = \int K_n(z|z_1) K(z_1|z_0) dz_1 = \sum_m \frac{\psi_m(z) \bar{\psi}_m(z_0)}{(\lambda_m)^{n+1}}.$$

Следом функции Грина является

$$\int G_{\lambda}(z|z) dz = \sum_m \frac{1}{\lambda_m - \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \lambda^n, \quad C_n = \int K_n(z|z) dz = \sum_m \frac{1}{\lambda_m^n}.$$

Решение уравнений Фредгольма первого рода. Обычно это уравнение решается при помощи разложения φ , K и искомой функции ψ в какие-либо ряды и приравнивания коэффициентов. Тип применяемых рядов зависит от типа ядра K .

а. K является *производящей функцией* для некоторого множества собственных функций χ_n , соответствующих данным пределам интегрирования:

$$K(z|z_0) = \sum b_n z^n \bar{\chi}_n(z_0).$$

Полагая $\psi = \sum a_n \chi_n$, мы получаем $\varphi(z) = \sum a_n b_n z^n$, и неизвестные коэффициенты a_n могут быть определены при помощи сравнения с разложением в ряд функции φ .

б. K является *функцией Грина*, которую всегда можно выразить при помощи соответствующих собственных функций χ_n :

$$K(z|z_0) = \sum b_n \bar{\chi}_n(z_0) \chi_n(z).$$

Полагая $\psi = \sum a_n \chi_n$, мы получаем $a_n = (1/b_n) \int \varphi(z) \bar{\chi}_n(z) dz$, т. е. получаем формулу, выражающую коэффициенты a_n .

Если нельзя воспользоваться ни одной из этих возможностей, то коэффициенты a_n можно найти по методу Шмидта [см. равенства (8.3.10) и следующие] или при помощи биортогональных функций [см. равенства (8.3.19) и следующие], или же численными методами (см. гл. 9).

Для бесконечного промежутка интегрирования, когда ядра являются сингулярными, иногда можно воспользоваться тем, что уравнение Фредгольма первого рода представляет собой соотношение типа интегрального преобразования между известной функцией φ и неизвестной ψ при помощи ядра K :

в. $K(z|z_0) = e^{iz z_0}$, интегрирование от $-\infty$ до ∞ , — преобразование Фурье. Решение [см. (8.3.59)]

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{-i z k} dk.$$

г. $K = e^{-z z_0}$, интегрирование от 0 до ∞ , — преобразование Лапласа. Решение [см. (8.3.66)]

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \varphi(p) e^{p z} dp.$$

д. $K = J_m(z z_0) z_0$, интегрирование от 0 до ∞ , — преобразование Ганкеля. Решение [см. (8.3.64)]

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} J_m(z r) \varphi(r) r dr.$$

е. $K = (z_0)^{z-1}$, интегрирование от 0 до ∞ , — преобразование Меллина. Решение [см. (8.3.68)]

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} z^{-s} \varphi(s) ds.$$

Решение уравнений Вольтерра первого рода. Здесь отсутствуют типы а и б; обычно приходится прибегать к методу ортогонализации Шмидта или к биортогональным рядам. Для ядер вида $K = v(z - z_0)$ можно использовать преобразование Лапласа [равенство (4.8.30) и следующие]:

а. $K = v(z - z_0)$, интегрирование от 0 до z . Решение [см. (8.5.34)]

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \frac{\Phi(p)}{V(p)} e^{pz} dp, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

где

$$V(p) = \int_0^\infty v(x) e^{-px} dx, \quad \Phi(p) = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-px} dx.$$

б. $K = v(z - z_0)$, интегрирование от z до ∞ . Решение

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \left[\frac{\Phi(p)}{V(-p)} \right] e^{pz} dp,$$

где

$$V(-p) = \int_0^\infty v(-x) e^{px} dx.$$

Решение уравнений Фредгольма второго рода. Ядро можно представить при помощи соответствующего ортонормированного семейства собственных функций χ_n , $K(z|z_0) = \sum g_n(z_0) \chi_n(z)$. Тогда, полагая $\psi = \sum a_n \chi_n$, мы сводим однородное уравнение к системе уравнений

$$\sum_n a_n [\alpha_{mn} - (1/\lambda) \delta_{mn}] = 0, \quad \alpha_{mn} = \int \chi_m(z_0) g_n(z_0) dz_0.$$

Определитель этой системы $|\alpha_{mn} - (1/\lambda) \delta_{mn}|$ должен равняться нулю (вековое уравнение). Корни этого уравнения являются собственными значениями λ_n , а соответствующие ряды для ψ — собственными функциями. Некоторые случаи упрощения:

а. K является функцией Грина; тогда функции g_n пропорциональны χ_n , $\alpha_{mn} = \alpha_n \delta_{mn}$. Определитель, входящий в вековое уравнение (вековой определитель), диагонален, собственными значениями служат $1/\alpha_n$, а собственными функциями — χ_n .

б. K является производящей функцией или каким-либо другим выражением, для которого вековой определитель *полудиagonalen* [см. (8.4.3)].

в. K таково, что вековой определитель *конечен* [см. (8.4.11)].

Соответствующее неоднородное уравнение можно решить при помощи ряда по собственным функциям ψ_n однородного уравнения и по биортогональным решениям φ_n сопряженного уравнения (если K симметрично, то $\varphi_n = \psi_n$). Тогда

$$K(z|z_0) = \sum \frac{1}{\lambda_n} \psi_n(z) \varphi_n(z_0),$$

и частное решение имеет вид

$$\psi(z) = \sum_n \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \int \varphi(x) \varphi_n(x) dx \right] \psi_n(z),$$

где $\varphi(z)$ — неоднородный член в интегральном уравнении.

При бесконечном промежутке интегрирования появляется континуум собственных значений λ , вековой определитель превращается в интеграл, и следует применять метод интегральных преобразований.

г. $K = v(z - z_0)$, интегрирование от $-\infty$ до ∞ , — преобразование Фурье. Если оба преобразования $\Phi(k)$ и $V(k)$ регулярны при $\text{Im } k \leq \tau$, $-\infty \leq \text{Re } k \leq \infty$, то решением является

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} \frac{\Phi(k) e^{-ikz} dk}{1 - \sqrt{2\pi} \lambda V(k)}.$$

Если приходится вводить различные преобразования при $z < 0$ и при $z > 0$ (обобщенное преобразование Фурье), то применима формула (8.5.17).

д. $K = v(z - z_0)$, интегрирование от 0 до ∞ , — уравнение типа Винера — Хопфа. Для решения см. формулы (8.5.55), (8.5.56), а также (8.5.76) и следующие.

е. $K = v(z + z_0)$, интегрирование от $-\infty$ до ∞ , — преобразование Фурье. Для решения см. формулу (8.5.29).

ж. $K = (1/z_0) v(z/z_0)$, интегрирование от 0 до ∞ , — преобразование Меллина. Для решения см. формулу (8.5.43).

Решение уравнений Вольтерра второго рода. Однородное (несингулярное) уравнение не имеет ненулевых решений. В случаях когда $K = v(z - z_0)$ и интегрирование производится от 0 до z или от z до ∞ , можно воспользоваться преобразованием Лапласа, так же как для уравнений Вольтерра первого рода. Для решения неоднородного уравнения второго рода см. формулы (8.5.34) и (8.5.38).

ЛИТЕРАТУРА

- Книги, в которых излагаются вопросы общей теории интегральных уравнений:
- Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, изд. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1951, гл. 3.
- Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения, изд. 2, Гостехиздат, М., 1957.
- Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, 3, вып. 3 (25) (1948).
- Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, М., 1951.
- Привалов И. И., Интегральные уравнения, изд. 2, ОНТИ, М.—Л., 1937.
- Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957, гл. 1.
- Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1934, гл. 11.
- Hamel G., Integralgleichungen, Berlin, 1937.
- Kneser A., Integralgleichungen und ihre Anwendung in der Mathematischen Physik, Brunswick, 1911.
- Kowalewski G. W. H., Integralgleichungen, Berlin, 1930.
- Shohat J. A. and Tamarkin J. D., The Problem of Moments, New York, 1943.
- Vivanti G., Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen, Hanover, 1929.

Книги, в которых рассматривается применение преобразований Фурье и Лапласа для решения интегральных уравнений:

- Ван дер Поль Б. и Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, Изд. иностр. лит., М., 1952.
- Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- Doetsch G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.
- Hopf E., Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, New York, 1934.
- Paley R. E. A. C. and Wiener N., Fourier Transforms in the Complex Domain, New York, 1934.
- Smithies F., Singular Integral Equations, Proc. London Math. Soc., 46 (1939), 409.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие авторов	9
Глава I. ТИПЫ ПОЛЕЙ	13
1.1. Скалярные поля Поверхности уровня. Лапласиан.	15
1.2. Векторные поля Умножение векторов. Аксиальные векторы. Линии тока. Потенциальные поверхности. Поверхностные интегралы. Источник. Криволинейные интегралы. Вихревая линия. Особенности полей.	19
1.3. Криволинейные координаты Направляющие косинусы. Коэффициенты Ламе. Кривизна координатных линий. Элемент объема и другие формулы. Вращение осей. Законы преобразования векторов. Контравариантные и ковариантные векторы.	31
1.4. Дифференциальный оператор ∇ Градиент. Производная по направлению. Элементарные повороты. Дивергенция. Теорема Гаусса. Решение уравнения Пуассона. Ротор (вихрь). Вихревые линии. Теорема Стокса. Векторный оператор ∇ .	40
1.5. Аппарат векторного и тензорного исчисления Ковариантные и контравариантные векторы. Аксиальные векторы. Символы Кристоффеля. Ковариантная производная. Тензорные обозначения для дивергенции и ротора. Другие дифференциальные операторы. Другие операторы второго порядка. Вектор как сумма градиента и ротора.	52
1.6. Аффиноры и другие векторные операторы Аффиноры. Аффиноры как векторные операторы. Симметрические и кососимметрические аффиноры. Вращение осей и унитарные аффиноры. Аффинорные поля. Деформация упругих тел. Типы деформаций. Напряжения в упругой среде. Статическая взаимосвязь между напряжением и деформацией в изотропном упругом теле. Аффинорные операторы. Комплексные числа и кватернионы как операторы. Абстрактные векторные пространства. Собственные векторы и собственные значения. Операторы в квантовой механике. Направляющие косинусы и вероятности. Вероятности и неопределенности. Комплексное векторное пространство. Обобщенные аффиноры. Эрмитовы операторы. Примеры унитарных операторов. Преобразование операторов. Операторы квантовой механики. Спиноры операторы. Кватернионы. Операторы вращения.	60

1.7. Преобразование Лоренца. 4-векторы, спиноры	95
Собственное время. Преобразование Лоренца. Четырехмерные инварианты. 4-векторы. Тензор напряжения-энергии. Спиновое пространство и пространство-время. Спиноры и 4-векторы. Преобразование Лоренца для спиноров. Пространственный поворот спиноров. Спиновые векторы и тензоры. Оператор вращения в спинорной форме.	
Задачи к главе 1	108
Таблица наиболее употребительных векторных и аффинорных соотношений	115
Таблица свойств криволинейных координат	116
Литература	117
Глава 2. УРАВНЕНИЯ ПОЛЕЙ	119
2.1. Гибкая струна	119
Силы, действующие на элемент струны. Уравнение Пуассона. Сосредоточенная сила; дельта-функция. Волновое уравнение. Простое гармоническое движение, уравнение Гельмгольца. Волновая энергия. Поток энергии. Мощность и волновой импеданс. Вынужденное движение струны. Переходная характеристика; интеграл Фурье. Операторные уравнения струны. Собственные векторы оператора единичного сдвига. Предельный случай непрерывной струны. Влияние трения. Уравнение диффузии. Уравнение Клейна—Гордона. Вынужденное движение упруго подкрепленной струны. Резюме.	
2.2. Волны в упругой среде	140
Продольные волны. Поперечные волны. Волновое движение в трехмерном пространстве. Векторные волны. Интегральные представления. Напряжение и деформация. Волновая энергия и импеданс.	
2.3. Движение жидкости	149
Уравнение неразрывности. Решения для несжимаемых жидкостей. Примеры. Напряжения в жидкостях. Уравнение Бернулли. Волновое уравнение. Безвихревой поток сжимаемой жидкости. Дозвуковой и сверхзвуковой потоки. Потенциал скоростей; линейное приближение. Линии Маха и ударные волны.	
2.4. Диффузия и другие явления просачивания жидкости	168
Поток жидкости через пористое твердое тело. Диффузия. Фазовое пространство и функция распределения. Давление и уравнение состояния. Средняя длина свободного пробега и эффективное сечение рассеяния. Диффузия света, интегральное уравнение. Диффузия света, дифференциальное уравнение. Граничные условия. Влияние анизотропного рассеяния. Приближение первого порядка; уравнение диффузии. Единичные решения. Потеря энергии при столкновении. Действие внешней силы. Равномерный перенос, вызванный силовым полем. Уменьшение скорости частиц при столкновениях. Резюме.	
2.5. Электромагнитное поле	195
Электростатическое поле. Магнитостатическое поле. Зависимость от времени. Уравнения Максвелла. Запаздывание и релаксация. Преобразование Лоренца. Калибровочное преобразование. Поле движущегося заряда. Сила и энергия. Поверхности проводников и диэлектриков. Передача волн и импеданс. Уравнения Прока.	
2.6. Квантовая механика	215
Фотоны и электромагнитное поле. Соотношение неопределенности. Сопряженные переменные и скобки Пуассона. Основные постулаты квантовой теории. Независимые квантовые переменные и функции от операторов. Собственные векторы для координат. Функции преобразования. Операторные уравнения для функций преобразования. Преоб-	

разование к пространству импульсов. Функция Гамильтона и уравнение Шредингера. Гармонический осциллятор. Зависимость от времени. Время как параметр. Функция Гамильтона, зависящая от времени. Частица в электромагнитном поле. Относительность и спин. Уравнение Дирака. Полный момент количества движения. Волновая функция свободного поля. Резюме.	
Задачи к главе 2	256
Стандартные формы некоторых уравнений с частными производными теоретической физики	260
Л и т е р а т у р а	262
Глава 3. ПОЛЯ И ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП	264
3.1. Вариационный интеграл и уравнения Эйлера	265
Уравнения Эйлера. Уравнения связи.	
3.2. Принцип Гамильтона и классическая динамика	268
Уравнения Лагранжа. Энергия и функция Гамильтона. Импеданс. Канонические преобразования. Скобки Пуассона. Интеграл действия. Двумерный осциллятор. Заряженная частица в электромагнитном поле. Релятивистская частица. Диссипативные системы. Импеданс и полная проводимость для диссипативных систем.	
3.3. Скалярные поля	288
Гибкая струна. Волновое уравнение. Уравнение Гельмгольца. Потенциал скоростей. Волны сжатия. Волновой импеданс. Плоская волна. Уравнение диффузии. Уравнение Шредингера. Уравнение Клейна — Гордона.	
3.4. Векторные поля	303
Общие свойства поля. Изотропные упругие среды. Решения типа плоской волны. Импеданс. Электромагнитное поле. Тензор напряжения-энергии. Импульс поля. Изменение калибровки потенциалов. Аффинор импеданса. Плоская волна. Уравнение Дирака.	
Задачи к главе 3	320
Сводка результатов главы 3	324
Гибкая струна или мембрана. Сжимаемая невязкая жидкость. Уравнение диффузии. Уравнение Шредингера. Уравнение Клейна — Гордона. Уравнение упругих колебаний. Уравнения электромагнитного поля. Уравнение Дирака.	
Л и т е р а т у р а	328
Глава 4. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	330
4.1. Комплексные числа и комплексные переменные	331
Оператор вращения. Векторы и комплексные числа. Двумерное электростатическое поле. Контурные интегралы.	
4.2. Аналитические функции	337
Конформное отображение. Интегрирование в комплексной плоскости. Теорема Коши. Некоторые полезные следствия из теоремы Коши. Интегральная формула Коши. Действительная и мнимая части аналитической функции. Импеданс. Формула Пуассона.	
4.3. Производные аналитических функций. Ряды Тейлора и Лорана	354
Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Классификация функций; теорема Лиувилля. Мероморфные функции. Поведение степенного ряда на границе круга сходимости. Аналитическое продолжение. Основные теоремы. Точки ветвления. Приемы аналитического продолжения.	

4.4. Многозначные функции	376
Точки ветвления и линии ветвления. Римановы поверхности. Пример.	
4.5. Теория вычетов. Гамма-функция и эллиптические функции	386
Интегралы от функций, имеющих точки ветвления. Обращение рядов. Суммирование рядов. Интегральное представление функций. Интегралы, связанные с функцией ошибок. Гамма-функция. Контурные интегралы для гамма-функции. Представление гамма-функции в виде бесконечного произведения. Производные гамма-функции. Формула удвоения. Бета-функция. Периодические функции. Основные свойства двоякопериодических функций. Эллиптические функции второго порядка. Интегральные представления эллиптических функций.	
4.6. Асимптотические ряды. Метод перевала	410
Пример. Усреднение последовательных членов ряда. Интегральные представления и асимптотические ряды. Выбор контура. Первый член разложения. Остаток ряда.	
4.7. Конформное отображение	419
Общие свойства отображения. Преобразование Шварца—Кристоффеля. Примеры. Метод инверсии.	
4.8. Преобразование Фурье	428
Связь с рядами Фурье. Некоторые интегральные теоремы. Интегральная теорема Фурье. Свойства преобразования Фурье. Асимптотические значения преобразования. Общая формулировка. Свертка. Формула суммирования Пуассона. Преобразование Лапласа. Преобразование Меллина.	
Задачи к главе 4	446
Основные свойства функций комплексного переменного	455
Алгоритм Эйлера для вычисления сумм рядов. Представление интегралов посредством асимптотических рядов. Преобразование Фурье. Преобразование Лапласа. Преобразование Меллина.	
Часто встречающиеся специальные функции	461
Гамма-функция. Эллиптические функции. Тэта-функции.	
Литература	466
Глава 5. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	468
5.1. Координаты, в которых переменные разделяются	470
Граничные поверхности и системы координат. Двумерные разделяющие координаты. Разделяющие координаты для двумерного уравнения Лапласа. Разделение переменных в волновом уравнении. Прямоугольные и параболические координаты. Полярные и эллиптические координаты. Коэффициенты Ламе и геометрия систем координат. Константы разделения и граничные условия. Разделение для трех измерений. Определитель Штеккеля. Софокусные поверхности второго порядка. Вырожденные формы эллипсоидальных координат. Слияние особенностей. Константы разделения. Уравнение Лапласа для трех измерений, модуляционный множитель. Софокусные циклиды.	
5.2. Общие свойства, решение при помощи рядов	495
Определитель Вронского. Независимые решения. Интегрирующие множители и сопряженные уравнения. Решение неоднородного уравнения. Решение при помощи рядов вблизи обыкновенных точек. Особые точки, определяющие уравнение. Классификация уравнений, стандартные формы. Две регулярные особые точки. Одна иррегулярная особая точка. Три регулярные особые точки. Рекурсивные формулы. Гипергеометрическое уравнение. Функции, представимые гипергеометрическими рядами. Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда. Функции Гегенбауера. Одна регулярная и одна иррегулярная особые точки. Асимп-	

тотические ряды. Две регулярные, одна иррегулярная особые точки. Непрерывные дроби. Определитель Хилла. Функции Матье. Функции Матье второго рода. Еще о рекурсивных формулах. Функциональные ряды.	
5.3. Интегральные представления	542
Некоторые простые примеры. Общие уравнения для подинтегральной функции. Преобразование Эйлера. Преобразование Эйлера для гипергеометрического ряда. Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда. Функции Лежандра. Функции Лежандра второго рода. Полиномы Гегенбауера. Вырожденная (конфлюэнтная) гипергеометрическая функция. Преобразование Лапласа. Асимптотическое разложение. Решения третьего рода. Решение второго рода. Функции Бесселя. Функции Ганкеля. Функции Неймана. Приближенные формулы для больших ν . Кулоновская волновая функция. Функции Матье. Преобразование Лапласа и разделенное волновое уравнение. Еще о функциях Матье. Ядра, являющиеся функциями от zt .	
Задачи к главе 5	604
Таблица разделяющих координат для трех измерений	612
Прямоугольные координаты. Круговые цилиндрические координаты (вращения). Эллиптические цилиндрические координаты. Параболические цилиндрические координаты. Сферические координаты (вращения). Конические координаты. Параболические координаты (вращения). Вытянутые сфероидальные координаты (вращения). Сплюснутые сфероидальные координаты (вращения). Эллипсоидальные координаты. Параболоидальные координаты. Бисферические координаты. Тороидальные координаты.	
Дифференциальные уравнения второго порядка и их решения	622
Одна регулярная особая точка. Одна иррегулярная особая точка. Две регулярные особые точки. Три регулярные особые точки. Одна регулярная и одна иррегулярная особые точки. Две иррегулярные особые точки.	
Л и т е р а т у р а	629
 Глава 6. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ	 631
6.1. Типы уравнений и краевых условий	631
Типы краевых условий. Задача Коши и характеристические линии. Гиперболические уравнения. Условия Коши и гиперболические уравнения. Волны для нескольких пространственных измерений. Эллиптические уравнения и комплексные переменные. Параболические уравнения.	
6.2. Разностные уравнения и краевые условия	645
Линейные разностные уравнения первого порядка. Разностные уравнения для нескольких измерений. Эллиптическое уравнение и условия Дирихле. Собственные функции. Функции Грина. Эллиптическое уравнение и условия Коши. Гиперболическое разностное уравнение. Параболическое разностное уравнение.	
6.3. Собственные функции и их применения	658
Ряды Фурье. Функция Грина. Собственные функции. Типы краевых условий. Абстрактное векторное пространство. Задача Штурма—Лиувилля. Вырождение. Ряды по собственным функциям. Разложение уравнения Штурма—Лиувилля (факторизация). Собственные функции и вариационный принцип. Полнота системы собственных функций. Асимптотические формулы. Сравнение с рядом Фурье. Явление Гиббса. Производящие функции, полиномы Лежандра. Собственные функции для	

нескольких измерений. Разделимость констант разделения. Плотность собственных значений. Непрерывное распределение собственных значений. Собственные значения для уравнения Шредингера. Дискретные и непрерывные собственные значения. Дифференцирование и интегрирование как операторы. Задача о собственных значениях в абстрактном векторном пространстве.	
Задачи к главе 6	722
Таблица полезных собственных функций и их свойств	725
Интервал $-1 \leq z \leq 1$; функция плотности $(1-z^2)^{\beta}$; полиномы Гегенбауера $T_n^{\beta}(z)$. Интервал $0 \leq z < \infty$; функция плотности $z^a e^{-z}$; полиномы Лагерра $L_n^a(z)$. Интервал $-\infty < z < \infty$; функция плотности e^{-z^2} ; полиномы Эрмита $H_n(z)$.	
Собственные функции, полученные при помощи метода факторизации	731
Литература	733
 Глава 7. ФУНКЦИИ ГРИНА	 735
7.1. Точки источников и граничные точки	737
Формулировка в абстрактном векторном пространстве. Граничные условия и поверхностные заряды. Простой пример. Связь между объемной и поверхностной функциями Грина. Общее решение. Функция Грина и производящие функции.	
7.2. Функции Грина для установившихся колебаний	745
Теорема Грина. Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Решение неоднородного уравнения. Общие свойства функции Грина. Эффект граничных условий. Метод изображений. Ряд изображений. Другие разложения. Разложение функции Грина по собственным функциям. Разложения для бесконечной области. Полярные координаты. Общая теорема. Общая формула. Функции Грина и собственные функции.	
7.3. Функция Грина для скалярного волнового уравнения	772
Соотношение взаимности. Вид функции Грина. Поле подвижного источника. Двумерное решение. Одномерные решения. Начальные условия. Принцип Гюйгенса. Границы в конечной части пространства. Разложение по собственным функциям. Нестационарные малые колебания круглой мембраны. Уравнение Клейна—Гордона.	
7.4. Функция Грина для уравнения диффузии	793
Причинность и взаимность. Неоднородные граничные условия. Функция Грина для бесконечной области. Конечные границы. Решения при помощи собственных функций. Максимальная скорость передачи тепла.	
7.5. Функция Грина в абстрактной операторной форме	804
Обобщение теоремы Грина, сопряженные операторы. Эффект краевых условий. Еще о сопряженных дифференциальных операторах. Сопряженные интегральные операторы. Обобщение на абстрактное векторное пространство. Сопряженные, комплексно сопряженные и эрмитовы операторы. Функция Грина и оператор Грина. Соотношение взаимности. Разложение оператора Грина в эрмитовом случае. Неэрмитовы операторы; биортогональные функции.	
Задачи к главе 7	819
Таблица функций Грина	823
Общие свойства. Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Функция Грина для волнового уравнения. Функция Грина для уравнения диффузии.	
Литература	827

Глава 8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	828
8.1. Интегральные уравнения физики; их классификация	828
Пример из акустики. Пример из волновой механики. Краевые условия и интегральные уравнения. Уравнения, определяющие собственные функции. Интегральные уравнения некоторых собственных функций. Типы интегральных уравнений; уравнения Фредгольма. Уравнения Вольтерра.	
8.2. Общие свойства интегральных уравнений	838
Ядра интегральных уравнений. Переход к определенным ядрам. Свойства симметричного определенного ядра. Ядра и функции Грина для неоднородных уравнений. Полуопределенные и неопределенные ядра. Ядра, отличные от действительных определенных. Интегральное уравнение Вольтерра. Сингулярные ядра.	
8.3. Решение уравнений Фредгольма первого рода	856
Решения уравнений Фредгольма в форме рядов. Определение коэффициентов. Ортогонализация. Биортогональные ряды. Интегральные уравнения первого рода и производящие функции. Применение полиномов Гегенбауера. Интегральные уравнения первого рода и функции Грина. Интегральные преобразования и интегральные уравнения первого рода. Дифференциальные уравнения и интегральные уравнения первого рода. Проблема моментов. Резюме.	
8.4. Решение интегральных уравнений второго рода	879
Разложения первого класса. Разложения второго класса. Разложения третьего класса. Другие случаи. Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода.	
8.5. Преобразование Фурье и интегральные уравнения	883
Преобразование Фурье и ядра вида $v(x-x_0)$. Преобразование Ганкеля. Ядро $v(x-x_0)$ в бесконечной области. Однородное уравнение. Пример. Точки ветвления. Ядро $v(x+x_0)$ в неограниченной области. Пример. Применения преобразования Лапласа. Интегральное уравнение Вольтерра с пределами (x, ∞) . Преобразование Меллина. Метод Винера—Хопфа. Примеры применения метода. Задача Милна. Общий метод разложения на множители. Задача Милна; продолжение. Неоднородное уравнение Винера—Хопфа.	
Основные свойства интегральных уравнений и их решений	919
Типы уравнений. Типы ядер. Функция Грина для неоднородного уравнения. Решение уравнений Фредгольма первого рода. Решение уравнений Вольтерра первого рода. Решение уравнений Фредгольма второго рода. Решение уравнений Вольтерра второго рода.	
Литература	923

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По вине
401	5 св.	$\left(1 + \frac{z}{n}\right)$	$\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$	тип.
450	5 св.	e^{-}	e^{-b}	»
452	1 св.	$e^{-i\nu\pi/}$	$e^{-i\nu\pi/2}$	»
474	22 св.	$\partial\omega/\partial z$ и $\bar{\partial}\bar{\omega}/\partial z$	$d\omega/dz$ и $d\bar{\omega}/dz$	»
529	2 св.	$\frac{1}{2} h$	$\frac{1}{2} \hbar^2$	»
541	5 св.	стр. 000	стр. 499	ред.
576	12 св.	$e^{i\pi}$	$e^{i\pi}$	тип.
586	1 св.	$\frac{d}{dz} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (z/2)^{-n-\varepsilon-m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+1-\varepsilon)} +$ $+ \frac{d}{dz} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1}$	$\frac{d}{dz} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (z/2)^{-n-\varepsilon-m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+1-\varepsilon)} +$ $+ \frac{d}{dz} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1}$	»
602	17 св.	$(2n!)$	$(2n)!$	ред.
647	5 св.	$(1+c)$	$(1+c)^{-1}$	тип.
652	3 св.	$G(1,2)$	$G_2(1,2)$	ред.
653	18 св.	$\sum_{r,}$	$\sum_{r,s}$	тип.
684	2 св.	в конце,	в конце § 3.1,	»
713	2 св.	$\omega \rightarrow \infty$	$\omega \rightarrow -\infty$	»
726	4 св.	$(1+t^2-2tz)^{\beta+1/2}$	$(1+t^2-2tz)^{\beta+1/2}$	»
726	5 св.	ЛИНОМЫ	ПОЛИНОМЫ	»
726	9 св.	$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2\beta - 1$	$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\beta - 1)$	»