

Ф. М. МОРС и Г. ФЕШБАХ

МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

С. П. АЛЛИЛУЕВА, Н. С. КОШЛЯКОВА,
А. Д. МЫШКИСА и А. Г. СВЕШНИКОВА

Т О М
II

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1960

METHODS
OF
THEORETICAL PHYSICS

Philip M. Morse

Professor of Physics
Massachusetts Institute of Technology

Herman Feshbach

Associate Professor of Physics
Massachusetts Institute of Technology

Part II: chapters 9 to 13

New York Toronto London
McGraw-Hill Book Company, Inc.

1953

АННОТАЦИЯ

Двухтомный курс Ф. Морса и Г. Фешбаха занимает особое место в литературе по математической физике. Он написан физиками для физиков и инженеров и показывает в действии математические методы, наиболее успешно применяемые при изучении различных полей.

В книге излагается ряд важнейших разделов современной математики в плане их применения к задачам физики и техники. Большим достоинством является то, что авторы всюду стремятся выяснить основные идеи, существо и физический смысл излагаемых методов. Поэтому книга представляет значительный интерес и для математиков, которым она покажет новые стороны известных им методов. Некоторые из излагаемых методов (например, метод теории возмущений во втором томе) успешно применяются физиками, но еще недостаточно известны математикам и ждут своего математического обоснования. И физики и математики найдут в книге большое число подробно разобранных примеров важных прикладных задач.

Курс Морса и Фешбаха лежит на стыке физики и математики. Он отличается от обычных курсов математической физики своей значительно большей физичностью, а от курсов теоретической физики тем, что в нем основное место уделяется разработке математического аппарата.

Книга будет полезной студентам, аспирантам и научным работникам математических, физических и инженерных специальностей и вообще всем лицам, сталкивающимся с применением современной математики.

Приближенные методы

Точные решения уравнений физики могут быть получены только для ограниченного круга задач. Например, в случае скалярного уравнения Гельмгольца метод разделения переменных может быть применен лишь для 11 типов координатных систем (см. по этому поводу § 5.1). Если поверхность, на которой заданы граничные условия, не совпадает ни с одной из соответствующих координатных поверхностей или граничные условия не являются простыми условиями типа Дирихле или Неймана, то метод разделения переменных неприменим. Если рассматривается уравнение Шредингера, то число координатных систем, допускающих разделение переменных, может резко уменьшиться, так как разделение возможно только для частных видов зависимости потенциальной энергии от координат.

Подобное положение вещей имеет место и для интегральных уравнений. Здесь решения могут быть получены — например, при помощи интегральных преобразований — только в случаях, когда ядро интегрального уравнения имеет специальный вид. Так, например, преобразование Фурье применимо, если ядро представляет собой функцию, зависящую от разности двух переменных, а область интегрирования простирается от $-\infty$ до $+\infty$ или от 0 до ∞ . Таким образом, очень редко задача относится к классу точно разрешимых, так что обычно мы сталкиваемся с необходимостью развития достаточно сильных приближенных методов. Более того, мы увидим, что даже для задач, допускающих точное решение, иногда удобнее применять приближенные методы, так как вычисление точного решения может оказаться слишком сложным.

Отклонения от задачи, допускающей точное решение, мы будем называть *возмущениями*. *Поверхностными возмущениями* мы будем называть отклонения граничной поверхности, или граничных условий, или того и другого соответственно от поверхности и условий, допускающих точное решение. Например, мы можем пожелать определить резонансные частоты объема с трапецией в поперечном сечении, так что поверхность, ограничивающая этот объем, не является координатной поверхностью ни одной из 11 координатных систем, допускающих разделение переменных в скалярном уравнении Гельмгольца. Или поперечное сечение может быть прямоугольным, но стенки могут быть так акустически обработаны, что граничные условия уже не будут однородными условиями Неймана.

Объемными возмущениями мы назовем отклонения внутри объема, которые выводят задачу из класса точно разрешимых. Например, потенциал в уравнении Шредингера может быть таким, что уравнение не допускает разделения переменных. Это, вообще говоря, имеет место в случае, когда две взаимодействующие частицы или большее их число движутся в центральном поле сил, или в частном случае одной частицы, движущейся в поле, порожденном несколькими центрами сил. Уравнение Шредингера для двух электронов, движущихся в поле атомного ядра с зарядом Ze ,

имеет вид

$$\left\{ \nabla_1^2 + \nabla_2^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r_1} + \frac{Ze^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}} \right) \right\} \psi(r_1, r_2) = 0,$$

где r_1 и r_2 — расстояния первой и второй частицы от ядра, а r_{12} — расстояние между самими частицами. Если член e^2/r_{12} отсутствует, уравнение допускает разделение; член e^2/r_{12} является объемным возмущением. Объемные возмущения в акустических проблемах могут быть обусловлены наличием областей неоднородности в пространстве, соответствующих переменному показателю преломления, которые могут создаваться такими объектами, как колонны, занавеси или неоднородное распределение температуры в среде.

В этой главе мы рассмотрим три существенно разных метода получения приближенных решений: (1) метод *теории возмущений*, (2) *вариационный* метод и (3) *вариационно-итерационный* (сокращенно В-И) метод. В теории возмущений объемные или поверхностные возмущения предполагаются малыми, и поэтому может быть осуществлено разложение по степеням параметра, измеряющего величину возмущения; главный член разложения является решением при отсутствии возмущения.

Когда возмущения становятся большими, эта процедура неудобна, и тогда более подходит вариационный метод. Как мы показали в гл. 3, уравнения физики могут быть представлены в вариационной форме, т. е. можно найти функционал от неизвестной функции, который должен быть стационарным при варьировании этой функции. На практике употребляются функции, называемые пробными функциями или функциями сравнения, содержащие один или несколько параметров и подставляемые в качестве неизвестной функции в функционал, выражающий вариационный принцип. Вариация функции осуществляется изменением величины этих параметров. Улучшение может быть достигнуто увеличением гибкости пробной функции посредством дополнительных параметров.

Другой способ улучшения исходной пробной функции состоит в ее включении в качестве первого члена в полную систему функций, не обязательно взаимно ортогональных. Ни одна из этих процедур не является столь систематической, как схема, применяемая в В-И методе. Более того, В-И метод дает возможность оценки погрешности для каждой стадии вычислений, что является, по-видимому, его наиболее важным свойством.

Эти методы можно применять ко всем задачам, которые нам встретятся в этой книге. Задача может состоять в определении резонансных частот акустических или электромагнитных колебаний внутри полости. Мы встретимся с задачей определения емкости конфигурации проводников или течения жидкости, обтекающей препятствие. Нас будут интересовать рассеяние и диффракция волн на препятствии или, в квантовой механике, рассеяние потенциальным полем. Все три метода применимы в каждой из этих задач, но, как мы увидим, сильно различаются в деталях.

9. 1. Теория возмущений

Теория возмущений особенно хорошо применима, когда рассматриваемая задача очень близка к задаче, которая может быть точно решена. Предполагается, что отличия не носят сингулярного характера, так что изменение от точно разрешимой задачи до рассматриваемой можно произвести непрерывным образом. Аналитически это выражается в требовании, чтобы возмущение было непрерывной функцией параметра λ , измеряющего величину возмущения.

Если это имеет место, то можно вывести формулы, описывающие изменения физического состояния, когда λ изменяется от нуля; при этом чем больше λ , тем больше нужно членов, содержащих все более высокие степени λ , для того чтобы получить результат с нужной степенью точности. Вообще говоря, это будут отрезки бесконечных рядов по степеням λ , сходящихся для λ , меньших λ_0 , — радиуса сходимости, для которого мы выясним качественный смысл и получим количественную оценку. Кроме того, можно дать практический метод аналитического продолжения рядов за λ_0 , так что оказывается возможным решать задачи как о слабых, так и о сильных возмущениях.

В дальнейшем мы прежде всего рассмотрим те формулы теории возмущений, которые применимы к задачам с дискретным спектром собственных значений и в которых имеют место возмущения объемного типа. Затем мы применим эти результаты к граничным возмущениям в § 9.2 и к вопросам рассеяния и дифракции в § 9.3.

Обычная формула теории возмущений. Обычно выводимые формулы теории возмущений получаются, как можно показать, с помощью применения метода последовательных приближений к интегральной формулировке¹⁾ задачи. Для примера рассмотрим уравнение Шредингера, описывающее квантово-механическое движение частицы в одном измерении под действием потенциала $\lambda V(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda V(x) \psi = E\psi,$$

где E — энергия частицы. Вводя сокращенные обозначения

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad U = \frac{2m}{\hbar^2} V,$$

получим

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k^2 - \lambda U(x)] \psi = 0. \quad (9.1.1)$$

Мы предположим, что движение ограничено в области $0 \leq x \leq L$ бесконечно высоким потенциальным барьером (не включенным в U) при $x=0$ и при $x=L$. Следовательно, ψ должна удовлетворять граничным условиям

$$\psi(0) = 0 = \psi(L).$$

Точно разрешимая задача содержит те же самые граничные условия и состоит в решении уравнения

$$\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + k_n^2 \varphi_n = 0. \quad (9.1.2)$$

Решения этого уравнения таковы:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n - \text{целое}, \quad (9.1.3)$$

$$k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \int_0^L \varphi_n \varphi_m dx = \delta_{nm}.$$

Интегральную формулировку уравнения (9.1.1) можно получить с помощью соответствующей функции Грина, являющейся решением урав-

¹⁾ Термин «интегральная формулировка задачи» употребляется как сокращение выражения «формулировка задачи при помощи интегрального уравнения». — Прим. перев.

нения

$$\frac{d^2}{dx^2} G_k(x|x_0) + k^2 G_k(x|x_0) = -\delta(x-x_0)$$

и удовлетворяющей тем же граничным условиям, что и ψ . Из (7.2.8) имеем

$$\psi(x) = -\lambda \int_0^L G_k(x|x_0) U(x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (9.1.4)$$

Функцию Грина можно выразить через φ_n [см. (7.2.39)] следующим образом:

$$G_k(x|x_0) = \sum_p \frac{\varphi_p(x) \varphi_p(x_0)}{k_p^2 - k^2}. \quad (9.1.5)$$

В одномерном случае G_k можно выписать в явном виде:

$$G_k(x|x_0) = \frac{1}{k \sin(kL)} \begin{cases} \sin(kx) \sin[k(L-x_0)] & (\text{при } x \leq x_0), \\ \sin(kx_0) \sin[k(L-x)] & (\text{при } x \geq x_0). \end{cases} \quad (9.1.6)$$

Подставляя ряд (9.1.5) в интегральное уравнение (9.1.4), получаем

$$\psi(x) = \lambda \sum_p \frac{\int_0^L \varphi_p(x_0) U(x_0) \psi(x_0) dx_0}{k^2 - k_p^2} \varphi_p(x). \quad (9.1.7)$$

Удобно выделить из ряда тот член, к которому стремится ψ , когда λ стремится к нулю. Пусть это будет φ_n . Обозначим соответствующее ψ через ψ_n , так что

$$\psi_n \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \varphi_n.$$

Перепишем теперь разложение для ψ следующим образом:

$$\psi_n(x) = \varphi_n + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{\int_0^L \varphi_p(x_0) U(x_0) dx_0}{k^2 - k_p^2} \varphi_p(x). \quad (9.1.8)$$

Здесь мы пронормировали ψ_n так, чтобы коэффициент при φ_n был равен единице. Это всегда возможно, так как функция ψ_n , будучи умножена на произвольную постоянную, остается решением уравнения (9.1.1). Требование, чтобы коэффициент при φ_n в формуле (9.1.7) равнялся единице, приводит к условию

$$k^2 = k_n^2 + \lambda \int_0^L \varphi_n(x_0) U(x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (9.1.9)$$

Мы можем проверить, что это согласуется с разложением (9.1.8) и дифференциальным уравнением (9.1.1), следующим образом: умножая левую часть (9.1.1) на φ_n и интегрируя от 0 до L , получим

$$\int_0^L \varphi_n \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx + k^2 \int_0^L \psi \varphi_n dx - \lambda \int_0^L \varphi_n U \psi dx = 0.$$

Первый член можно вычислить двукратным интегрированием по частям. Используя уравнение, которому удовлетворяет φ_n , имеем

$$\int_0^L \varphi_n \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx = -k_n^2 \int_0^L \psi \varphi_n dx.$$

Из (9.1.8) и условий ортогональности в (9.1.3) вытекает, что $\int \psi \varphi_n dx = 1$. Подставляя эти результаты, немедленно приходим к (9.1.9).

Мы можем теперь применить метод последовательных приближений к уравнению (9.1.8) и, подставляя получающиеся результаты в (9.1.9), находить последовательные приближения для величины k^2 . За нулевое приближение для ψ_n , $\psi_n^{(0)}$ мы примем φ_n и, подставляя его в правую часть уравнения (9.1.8) вместо ψ , получим первое приближение

$$\psi_n^{(1)} = \varphi_n(x) + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{k^2 - k_p^2} \varphi_p, \quad (9.1.10)$$

где

$$U_{pn} = \int_0^L \varphi_p(x_0) U(x_0) \varphi_n(x_0) dx_0. \quad (9.1.11)$$

Второе приближение $\psi_n^{(2)}$ получается подстановкой $\psi_n^{(1)}$ в (9.1.8):

$$\psi_n^{(2)} = \varphi_n(x) + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{k^2 - k_p^2} \varphi_p + \lambda^2 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{pq} U_{qn}}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2)} \varphi_p, \quad (9.1.12)$$

где запись $pq \neq n$ означает, что члены с $p = n$ или $q = n$ в сумме опущены. Вообще

$$\psi_n^{(a)} = \varphi_n + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{\int_0^L \varphi_p U \psi_n^{(a-1)} dx_0}{k^2 - k_p^2} \varphi_p(x),$$

так что

$$\begin{aligned} \psi_n^{(a)} = \varphi_n + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{k^2 - k_p^2} \varphi_p + \dots + \\ + \lambda^a \sum_{pq \dots \neq n} \frac{U_{pq} U_{qr} \dots U_{zn}}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2) \dots (k^2 - k_z^2)} \varphi_p. \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

Следует отметить, что эти формулы содержат неизвестное k^2 . Его теперь можно определить подстановкой (9.1.13) в (9.1.9). Получаемое таким образом соотношение, определяющее k^2 , имеет вид

$$\begin{aligned} k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k^2 - k_p^2} + \dots + \\ + \lambda^{a+1} \sum_{pq \dots \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qr} U_{rs} \dots U_{zn}}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2)(k^2 - k_r^2) \dots (k^2 - k_z^2)}. \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

Это уравнение можно решить методом последовательных приближений. Если обозначить через $(k^2)^{(a)}$ a -е приближение, то

$$(k^2)^{(1)} = k_n^2 + \lambda U_{nn},$$

$$(k^2)^{(2)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k_n^2 - k_p^2},$$

$$\begin{aligned}
 (k^2)^{(3)} &= k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_p^2} + \\
 &\quad + \lambda^3 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)}, \\
 (k^2)^{(4)} &= k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{q \neq n} \frac{U_{nq} U_{qn}}{k_n^2 - k_q^2} - k_p^2} + \\
 &\quad + \lambda^3 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{(k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_p^2)(k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_q^2)} + \\
 &\quad + \lambda^4 \sum_{pqr \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qr} U_{rn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)(k_n^2 - k_r^2)}.
 \end{aligned}$$

Вообще

$$\begin{aligned}
 (k^2)^{(a)} &= k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{(k^2)^{(a-2)} - k_p^2} + \\
 &\quad + \lambda^3 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{[(k^2)^{(a-3)} - k_p^2][(k^2)^{(a-3)} - k_q^2]} + \dots + \\
 &\quad + \lambda^a \sum_{pq \dots \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qr} U_{rs} \dots U_{zn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)(k_n^2 - k_r^2) \dots (k_n^2 - k_z^2)}. \quad (9.1.15)
 \end{aligned}$$

Соответствующие волновые функции таковы:

$$\begin{aligned}
 \psi_n^{(1)} &= \varphi_n(x) + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{k_n^2 - k_p^2} \varphi_p(x), \\
 \psi_n^{(2)} &= \varphi_n(x) + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_p^2} \varphi_p(x) + \\
 &\quad + \lambda^2 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{pq} U_{qn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)} \varphi_p(x), \\
 \psi_n^{(a)} &= \varphi_n(x) + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{(k^2)^{(a-1)} - k_p^2} \varphi_p + \\
 &\quad + \lambda^2 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{pq} U_{qn}}{[(k^2)^{(a-2)} - k_p^2][(k^2)^{(a-2)} - k_q^2]} \varphi_p + \dots + \\
 &\quad + \lambda^a \sum_{pq \dots \neq n} \frac{U_{pq} U_{qr} U_{rs} \dots U_{zn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)(k_n^2 - k_r^2) \dots (k_n^2 - k_z^2)} \varphi_p. \quad (9.1.16)
 \end{aligned}$$

В каждом случае a -е приближение берется с точностью до λ^a . Необходимо, однако, обратить внимание на то, что (9.1.15) и (9.1.16) не являются разложениями по степеням λ , так как знаменатели содержат λ . Степенной ряд можно получить разложением знаменателей в ряды по степеням λ . Этот процесс приводит к пертурбационным формулам Рэлея — Шредингера¹⁾. Ясно, что эти последние выражения не только

¹⁾ См. любой учебник по квантовой механике, например, Kemble, The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, стр. 380—388; McGraw-Hill, New York, 1937. [Или Ландау и Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, стр. 159—162, М.—Л., ГИИТЛ, 1948.—Прим. ред.]

значительно сложнее, чем (9.1.15) и (9.1.16), но и, вообще говоря, имеют меньший радиус сходимости. Заметим также, что при получении (9.1.15) мы подставляли вместо k^2 ровно такое приближение, которое обеспечивает точность порядка λ^a . На практике часто бывает удобно при вычислениях всюду подставлять $(k^2)^{(a-1)}$ вместо k^2 .

Сходимость рядов. Сходимость рядов, которые дают выражения (9.1.16) для $\psi^{(a)}$ и (9.1.15) для $(k^2)^{(a)}$, является, конечно, существенной для их практического применения. Что касается рядов для $\psi^{(a)}$, то нас интересует их сходимость в среднем (см. 6.3), для которой требуется сходимость сумм квадратов коэффициентов при φ_p в разложении $\psi^{(a)}$. Более точно, если $\psi^{(a)} = \sum A_p \varphi_p$, то мы требуем, чтобы ряд

$$\sum |A_p|^2 = \int_0^L |\psi^{(a)}|^2 dx$$

сходил. Мы можем рассматривать прямо равенства (9.1.16), но более удобно использовать само исходное интегральное уравнение (9.1.4), из которого мы видим, что

$$\psi^{(a)} = \varphi_n - \lambda \int_0^L G_k(x|x_0) U(x_0) \psi^{(a-1)}(x_0) dx_0, \quad (9.1.16a)$$

где штрих у интеграла указывает, что из функции вычитается ее проекция на φ_n . Для сходимости в среднем разложения функции $\psi^{(a)}$ требуется, чтобы второе слагаемое в выражении для $\psi^{(a)}$ было интегрируемо с квадратом. В рассматриваемом одномерном случае G_k является кусочно-непрерывной функцией, хотя имеет разрывную производную. Следовательно, в предположении сходимости разложения для $\psi^{(a-1)}$ необходимым условием сходимости этого интеграла является интегрируемость U . Тем не менее мы видим, что U может иметь особенность, а интеграл все-таки будет сходиться; U может быть дельта-функцией Дирака или даже ее первой производной. Однако вторая производная дельта-функции слишком сингулярна, так как интеграл в этом случае пропорционален второй производной от функции $G_k \cdot \psi^{(a-1)}$, которая сингулярна. (Заметим, что особенность дельта-функции соответствует особенности функции $1/R$ для одного измерения; в n -мерном случае она соответствует особенности $1/R^n$.)

В терминах элементов U_{pn} сходимость в среднем для рядов (9.1.16) будет иметь место, если

$$|U_{pn}|^2 \underset{p \rightarrow \infty}{\simeq} k_p^{3-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (9.1.17)$$

Конечно, если U содержит дельта-функцию или ее производную, сходимость рядов для $\psi^{(a)}$ будет медленной, что делает решение практических задач утомительным и поглощающим много времени. Сходимость можно ускорить суммированием в замкнутом виде рядов $\sum B_p \varphi_p$, где B_p приближают A_p все точнее по мере стремления p к бесконечности. Затем этот ряд вычитается из исходного, а сумма в замкнутом виде прибавляется. Полученный таким образом новый ряд сходится быстрее старого. Процедура образования таких сумм наводит на мысль, что ряды, представляющие $\int G_k U \psi^{(a)} dx_0$ и $\int G_0 U \psi^{(a)} dx_0$, сходятся в точности одинаковым образом, так как медленная сходимость происходит из разрывного характера производной функции G_k .

Мы приходим таким образом к рассмотрению функции

$$\chi^{(a)} = \lambda \int_0^L G_0(x|x_0) U(x_0) \psi^{(a-1)} dx_0.$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d^2 \chi^{(a)} / dx^2 = \lambda U \psi^{(a-1)}.$$

Тогда функция $\psi^{(a)}$ представима в виде

$$\begin{aligned} \psi^{(a)} &= \varphi_n - (\chi^{(a)})' - \lambda \int_0^L (G_k - G_0) U(x_0) \psi^{(a-1)} dx_0 = \\ &= \varphi_n - (\chi^{(a)})' - \lambda k^2 \sum_{p \neq n} \frac{\int_0^L \varphi_p U \psi^{(a-1)} dx_0}{k_p^2 (k^2 - k_p^2)} \varphi_p. \end{aligned}$$

Здесь штрих у $\chi^{(a)}$ и у интеграла означает, что нужно вычесть компоненту, пропорциональную φ_n , т. е.

$$(\chi^{(a)})' = \chi^{(a)} - \varphi_n \int_0^L \chi^{(a)} \varphi_n dx.$$

Важный вывод, вытекающий из этого рассмотрения, состоит в том, что сходимость можно улучшить, если удастся или решить неоднородную задачу с нулевой энергией в замкнутом виде, или получить для нее сходимость, более быструю, чем для (9.1.16).

Сходимость в среднем рядов в (9.1.16) для $\psi^{(a)}$ не обеспечивает сходимости соответствующих рядов в (9.1.15) для $(k^2)^{(a)}$. Чтобы проверить это утверждение, подставим в равенство (9.1.9) для k^2 равенство (9.1.16a) для $\psi^{(a)}$. Тогда приближенным значением для k^2 будет

$$k^2 \simeq k_n^2 + \lambda U_{nn} - \lambda^2 \int_0^L dx \int_0^L \varphi_n(x) U(x) G_k(x|x_0) U(x_0) \psi^{(a-1)}(x_0) dx_0. \quad (9.1.18)$$

Снова необходимым условием сходимости является интегрируемость U . Функция U может иметь особенность типа дельта-функции, но в отличие от того, что было в случае рядов для ψ , она не может иметь особенности типа первой производной от дельта-функции [так как тогда для вычисления интеграла в (9.1.18) функцию G_k пришлось бы дважды дифференцировать]. Это не делает недействительными наши результаты для $\psi^{(a)}$, но указывает на то, что в данном случае, прежде чем подставить ряды в (9.1.9) для получения k^2 , нужно улучшить их сходимость при помощи указанной выше техники.

Многомерные задачи. Формулы (9.1.7)–(9.1.15) применимы к более общим задачам, чем (9.1.1). Если, например, мы имеем дело с движением частицы в трехмерном пространстве под действием потенциала $U_0 + \lambda U$, то ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi + (k^2 - U_0 - \lambda U) \psi = 0, \quad (9.1.19)$$

где невозмущенная задача с точным решением φ_n и собственным значением k_n состоит в решении уравнения

$$\nabla^2 \varphi_n + (k_n^2 - U_0) \varphi_n = 0.$$

Если мы рассматриваем две частицы, то необходимо ввести шестимерное пространство (три координаты для каждой частицы). Уравнение будет в этом случае следующее:

$$\nabla_1^2 \psi + \nabla_2^2 \psi + (k^2 - U_0 - \lambda U) \psi = 0. \quad (9.1.20)$$

Здесь ψ — функция шести переменных x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 . В каждом из этих случаев возмущение создается членом λU и поэтому можно использовать результаты (9.1.7) — (9.1.15), причем теперь

$$U_{pn} = \int \dots \int \bar{\varphi}_p(x_1, x_2, \dots, x_N) U(x_1, x_2, \dots, x_N) \times \\ \times \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N, \quad (9.1.21)$$

где N — число измерений ($=3$ или 6 в рассмотренных примерах).

В исследовании сходимости нужно внести некоторые изменения, так как характер особенности функции G_k зависит от размерности пространства. В одномерном случае G_k имеет разрывную производную в точке $x = x_0$; в двумерном случае G_k обладает логарифмической особенностью; в случае трех и более измерений $G_k \simeq AR^{-N+2}$, где R — расстояние от источника до точки наблюдения и N — число измерений. Поэтому нужно рассмотреть интеграл

$$\int \frac{U(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{N-2}} dv_0, \quad N \geq 3, \\ \int \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| U(\mathbf{r}_0) dv_0, \quad N = 2,$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ — векторы N -мерного пространства.

После интегрирования получится функция (от $\mathbf{r}$), интегрируемая с квадратом в том случае, когда $U(\mathbf{r}_0)$ имеет особенность в точке $\mathbf{r}_1$ вида $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^{N-2} \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)$ или $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^{-2}$ для всех N , кроме $N=2$. В случае $N=2$ допустимая особенность имеет вид $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^{\varepsilon} \delta$ ($\varepsilon > 0$). Эти функции дифференцируемы $N-1$ раз. Следующее дифференцирование дает саму δ -функцию. Следовательно, эти функции имеют разрывы в своих градиентах $(N-1)$ -го порядка. Мы видим, что при возрастании числа измерений допустимая точечная особенность по совокупности всех координат становится все более слабой. Если $U(\mathbf{r}_0)$ включает только одну из координат, то дело сводится, по существу, к одномерному случаю (это замечание может быть использовано для получения разобранных сейчас результатов).

В терминах элементов U_{pn} сходимость ряда (9.1.15) в среднем имеет место, если

$$|U_{pn}|^2 \underset{p \rightarrow \infty}{\simeq} k_p^{4-N-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (9.1.22)$$

Пример. Мы проиллюстрируем применение формул теории возмущений на уравнении Матье

$$\frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + [b - s \cos^2 \theta] \psi = 0, \quad \psi(0) = \psi(2\pi), \quad \psi'(0) = \psi'(2\pi).$$

Это уравнение было рассмотрено раньше (см. § 5.2), где был применен метод непрерывных дробей для определения значений величины b , совместимых с периодическими граничными условиями, наложенными на ψ . Физически уравнение Матье интересно при рассмотрении вопроса о распространении волн в эллиптических цилиндрических координатах [см. формулу (11.2.70) и дальше]. Невозмущенные собственные функции

имеют вид

$$\varphi_n^{\pm} = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{2\pi}} \frac{\cos}{\sin}(n\theta), \quad n=0, 1, 2, \dots; ^1)$$

соответствующие собственные значения равны n^2 . Знак «+» относится к четному решению — косинусу; знак «—» к нечетному — синусу. Эти собственные функции образуют на отрезке $(0, 2\pi)$ полную ортонормальную систему. Возмущение создается членом $s \cos^2 \theta$, где теперь s — параметр, определяющий величину возмущения, так что в формулах теории возмущений надо положить $\lambda = s$, $U = \cos^2 \theta$. Следующий шаг состоит в вычислении элементов U_{nm} для функции $\cos^2 \theta$. Так как $\cos^2 \theta$ — четная функция, то U_{nm} отличен от нуля только в том случае, когда φ_n и φ_m либо обе четные, либо обе нечетные. В этом примере мы сосредоточим внимание на четном случае. Тогда

$$U_{nm} = \frac{1}{2} \delta_{mn} + \frac{1}{4} [\delta_{m, n-2} + \delta_{m, n+2}] \quad \text{при } m \text{ и } n \neq 0,$$

$$U_{m0} = U_{0m} = \frac{1}{\sqrt{8}} \delta_{m2}, \quad m \neq 0, \quad U_{00} = \frac{1}{2},$$

Мы рассмотрим два случая, соответствующих невозмущенным собственным функциям φ_0 с собственным значением 0 и φ_6 с собственным значением $6^2 = 36$. Соответствующие значения b_n выражаются в согласии с формулой (9.1.14) в виде

$$b_n = n^2 + s U_{nn} + s^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{b_n - p^2} + s^3 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{(b_n - p^2)(b_n - q^2)} + \dots$$

В этом примере мы проведем вычисления с точностью до четвертого порядка включительно. Тогда

$$b_0 = 0 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{8(b_0 - 4)} + \frac{s^3}{16(b_0 - 4)^2} + \frac{s^4}{32(b_0 - 4)^2} \left[\frac{1}{b_0 - 4} + \frac{1}{4} \frac{1}{b_0 - 16} \right] + \dots$$

Величина b_0 вычислена для нескольких значений s . Результаты даны в табл. 9.1 вместе с точными значениями. Укажем, что $b_0^{(a)}$ есть a -е при-

Таблица 9.1

s	$b_0^{(0)}$	$b_0^{(1)}$	$b_0^{(2)}$	$b_0^{(3)}$	$b_0^{(4)}$	Точное
0,2	0	0,40000	0,09875			0,09875
1,0	0	0,50000	0,46430	0,46892		0,46896
2,0	0	1,00000	0,83333	0,89197	0,87367	0,87823
4,0	0	2,00000	1,00000	1,77778	1,15407	1,54486

ближение для b_0 . Как и следовало ожидать, сходимость, которая превосходна для $s < 1$, ухудшается при $s > 1$. При $s = 4$ сходимости нет вовсе, последовательные приближения колеблются вокруг точного значения.

Ясно, что эта величина s больше радиуса сходимости пертурбационных рядов или в лучшем случае только совсем немного меньше его.

Как мы увидим на стр. 28, имеется возможность обеспечить аналитическое продолжение за радиус сходимости и получить выражение,

¹⁾ Напомним, что по определению $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 2$. — Прим. ред.

справедливое для всех значений s . На данной стадии рассмотрения мы можем применить специальную технику преобразования Эйлера [см. равенство (4.3.16)], которая дает для b_0 при $s=4$ приближенное значение 1,46231.

Для b_6 выражение имеет вид

$$b_6 = 36 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{16} \left[\frac{1}{b_6 - 16} - \frac{1}{64 - b_6} \right] + \frac{s^3}{32} \left[\frac{1}{(b_6 - 16)^2} + \frac{1}{(64 - b_6)^2} \right] + \\ + \frac{s^4}{64} \left\{ \frac{1}{(b_6 - 16)^2} \left[\frac{1}{4(b_6 - 4)} + \frac{1}{b_6 - 16} \right] - \frac{1}{(64 - b_6)^2} \left[\frac{1}{4(100 - b_6)} + \frac{1}{64 - b_6} \right] \right\} + \dots$$

Величины s и последовательные приближения к b_6 приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

s	$b_6^{(0)}$	$b_6^{(1)}$	$b_6^{(2)}$	$b_6^{(3)}$	Точное
0,5	36	36,25	36,25022		36,25022
2	36	37,00	37,00356		37,00357
30	36	51,00	48,27998	53,28531	51,82897

Сходимость в этом случае аналогична сходимости для случая $n=0$, однако радиус сходимости значительно больше. Этого следовало ожидать, так как возмущающий член $s \cos^2 \theta$ не может приблизиться к невозмущенной величине n^2 до тех пор, пока s не станет достаточно большим. Позже (на стр. 28) мы разовьем приближенный метод, который основывается на этом соображении. Однако при $s=30$ пертурбационный ряд уже не сходится; преобразование Эйлера дает величину 48,89, все еще довольно далекую от точного значения.

Из этих примеров ясно, что метод улучшения сходимости ряда по возрастающим степеням λ был бы крайне желателен. Мы рассмотрим два таких метода — метод Фредгольма и метод Финберга. Формула Фредгольма дает выражение, справедливое для всех значений параметра возмущения λ .

Пертурбационная формула Финберга; вековой определитель. Финберг заметил, что в предшествующих формулах теории возмущений элемент U_{ab} в данном порядке возмущения может встречаться более одного раза, так что появляются $(U_{ab})^2$ и более высокие степени U_{ab} . Это можно увидеть, анализируя член пятого порядка в (9.1.14):

$$\lambda^5 \sum_{pqrs \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qr} U_{rs} U_{sn}}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2)(k^2 - k_r^2)(k^2 - k_s^2)}.$$

Ясно, что в процессе суммирования по всем индексам (кроме n) оба индекса p и r мы можем положить равными a и в то же время выбрать индексы q и s равными b , так что в этой сумме будет содержаться член $(U_{ab})^2$. Финберг затем указал, что можно получить пертурбационные формулы, в которых такого повторения элементов не будет.

Основания для такого замечания можно увидеть из следующего соображения. Пусть мы имеем задачу

$$\mathcal{L}(\psi) + k^2 \psi = \lambda U \psi, \quad (9.1.23)$$

где $\mathcal{L}$ — некоторый оператор. В уравнении (9.1.1) $\mathcal{L} = d^2/dx^2$, в (9.1.19) $\mathcal{L} = \nabla^2 - U_0$; в (9.1.20) $\mathcal{L} = \nabla_1^2 + \nabla_1^2 - U_0$. Невозмущенной является задача

$$\mathcal{L}(\varphi_n) + k_n^2 \varphi_n = 0, \quad (9.1.24)$$

где, если $\mathcal{L}$ предполагается эрмитовым оператором, функции φ_n образуют полную ортонормированную систему:

$$\int \bar{\varphi}_n \varphi_m dv = \delta_{nm}. \quad (9.1.25)$$

Разложим теперь ψ в ряд по этой системе:

$$\psi = \sum_p c_p \varphi_p.$$

Подставляя этот ряд в уравнение (9.1.23) и используя (9.1.24), мы получим

$$\sum_p c_p (k^2 - k_p^2) \varphi_p = \lambda \sum_p c_p U \varphi_p.$$

Отсюда

$$(k^2 - k_q^2) c_q = \lambda \sum_p c_p \int \bar{\varphi}_q U \varphi_p dv = \lambda \sum_p c_p U_{qp},$$

или

$$\sum_p [(k^2 - k_q^2) \delta_{qp} - \lambda U_{qp}] c_p = 0. \quad (9.1.26)$$

Это верно для всех q , так что мы имеем систему линейных однородных уравнений для коэффициентов c_p . Такая система имеет ненулевое решение только в том случае, если определитель, образованный из коэффициентов при неизвестных c_p , равен нулю. Поэтому

$$|(k^2 - k_q^2) \delta_{qp} - \lambda U_{qp}| = 0, \quad (9.1.27)$$

или

$$\begin{vmatrix} k^2 - k_0^2 - \lambda U_{00} & -\lambda U_{01} & -\lambda U_{02} & \dots \\ -\lambda U_{10} & k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11} & -\lambda U_{12} & \dots \\ -\lambda U_{20} & -\lambda U_{21} & k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0.$$

Это — уравнение, определяющее k^2 . Определитель слева называется *вековым определителем*. Он был рассмотрен в гл. 1 (стр. 65). Теперь можно видеть, что повторений элемента U_{ab} при раскрытии определителя не встретится. Предположим, например, что мы имеем дело с задачей, в которой отличны от нуля только те U_{ab} , для которых $a \leq 2$, $b \leq 2$. Тогда определитель после раскрытия и перегруппировки членов, которая нужна для приведения его к виду, аналогичному пертурбационной формуле (9.1.15), запишется следующим образом:

$$k^2 = k_0^2 + \lambda U_{00} + \lambda^2 \left\{ \frac{U_{01}U_{10}}{k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11} - \frac{\lambda^2 U_{21}U_{12}}{k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22}}} + \frac{U_{02}U_{20}}{k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22} - \frac{\lambda^2 U_{21}U_{12}}{k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11}}} \right\} + \lambda^3 \frac{U_{02}U_{21}U_{10} + U_{20}U_{01}U_{12}}{(k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11})(k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22}) - \lambda^2 U_{12}U_{21}}.$$

С другой стороны, если мы напомним равенство (9.1.15) для этого случая, то получим не конечное число членов, а бесконечный ряд. Можно показать, что дополнительные члены появляются в результате разложения

в ряд по степеням λ знаменателей в написанном выше выражении:

$$k^2 = k_0^2 + \lambda U_{00} + \lambda^2 \left[\frac{U_{01}U_{10}}{k^2 - k_1^2} + \frac{U_{02}U_{20}}{k^2 - k_2^2} \right] + \lambda^3 \left[\frac{U_{01}U_{11}U_{10}}{(k^2 - k_1^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{U_{01}U_{12}U_{20} + U_{02}U_{21}U_{10}}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)} + \frac{U_{02}U_{22}U_{20}}{(k^2 - k_2^2)^2} \right] + \dots$$

Первый и последний члены в скобках при λ^3 являются результатами разложения в ряд дробей $1/(k^2 - k_1^2 - \lambda U_{11})$ и $1/(k^2 - k_2^2 - \lambda U_{22})$, которые появляются в точном выражении. Все такие разложения уменьшают область применимости пертурбационных формул; обычно полезнее видоизменить развитие теории возмущений так, чтобы обойтись без этих разложений.

Рассмотрим для этой цели уравнения (9.1.26), определяющие неизвестные коэффициенты c_p . Предположим, что мы рассматриваем то решение, которое приводит к φ_n , если возмущение исчезает, так что $c_n = 1$. Тогда

$$(k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp}) c_p = \lambda U_{pn} + \lambda \sum_{q \neq np} c_q U_{pq}. \quad (9.1.28)$$

(Запись $q \neq np$ указывает, что в сумме индекс q не может принимать значений n и p .) Для построения метода последовательных приближений мы должны теперь написать уравнение, определяющее c_q . Во избежание повторений матричных элементов нужно выделить в уравнении для c_q члены с индексами p и n :

$$(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}) c_q = \lambda U_{qn} + \lambda c_p U_{qp} + \lambda \sum_{r \neq npq} c_r U_{qr}. \quad (9.1.29)$$

Аналогично для c_r

$$(k^2 - k_r^2 - \lambda U_{rr}) c_r = \lambda U_{rn} + \lambda c_p U_{rp} + \lambda c_q U_{rq} + \lambda \sum_{s \neq npqr} c_s U_{rs}. \quad (9.1.30)$$

Пока еще не было сделано никаких приближений. Для конечного векового определителя, содержащего, следовательно, только конечное число членов в разложении ψ , получится конечное число уравнений вида (9.1.28) — (9.1.30). Если бы мы имели дело, например, с вековым определителем третьего порядка, то уравнение (9.1.29) не содержало бы члена с суммой; для случая определителя четвертого порядка последним уравнением было бы (9.1.30) и оно не содержало бы члена с суммой; и т. д. В каждом случае последнее уравнение не содержит члена с суммой.

Для того чтобы решить уравнения (9.1.28) — (9.1.30) и другие, которые получатся в процессе последовательного выделения коэффициентов, отбросим член с суммой в N -ом уравнении и найдем из него N -е c . Подставив полученный результат в $(N-1)$ -е уравнение, находим $(N-1)$ -е c и т. д. Чтобы получить формулы для бесконечного векового определителя, применим метод полной математической индукции для получения общего решения при любом N , что позволит осуществить предельный переход при $N \rightarrow \infty$.

Мы проиллюстрируем первый шаг этой процедуры, взяв $N = 3$. Из (9.1.29) находим

$$(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}) c_q = \lambda U_{qn} + \lambda c_p U_{qp}.$$

Подставляя в (9.1.28), получаем формулу

$$\left[k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp} - \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{qp}U_{pq}}{k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}} \right] c_p = \\ = \lambda U_{pn} + \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq}U_{qn}}{k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}}, \quad (9.1.31)$$

дающую c_p до второго порядка точности включительно.

Уравнение, определяющее k^2 , получается, если положить $q = n$ в (9.1.26), а вместо c_n подставить единицу. Тогда

$$k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda \sum_{p \neq n} c_p U_{np}. \quad (9.1.32)$$

Подставляя значение c_p из (9.1.31), получаем k^2 с точностью до третьего порядка:

$$k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp} - \lambda^2 \sum_{q \neq pn} \frac{U_{pq} U_{qp}}{k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}}} + \\ + \lambda^3 \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq pn}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{\left[k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp} - \lambda^2 \sum_{r \neq pn} \frac{U_{pr} U_{rp}}{k^2 - k_r^2 - \lambda U_{rr}} \right] [k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}]} \quad (9.1.33)$$

Сравнение с приведенным выше точным выражением для векового определителя третьего порядка обнаруживает, что равенство (9.1.33) является точным для этого случая. Для определителей более высокого порядка оно дает точное разложение определителей третьего порядка, содержащих $k^2 - k_n^2 - \lambda U_{nn}$, а приближения входят только в алгебраические дополнения.

Легко провести аналогичное рассмотрение для $N = 4$ или больших значений N и увидеть, какова должна быть форма решения для бесконечного N . Мы приведем окончательные результаты.

Пусть

$$(x^2)_{np} = k_p^2 + \lambda U_{pp} + \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq} U_{qp}}{k^2 - (x^2)_{npq}} + \lambda^3 \sum_{\substack{q \neq np \\ r \neq npq}} \frac{U_{pq} U_{qr} U_{rp}}{[k^2 - (x^2)_{npq}] [k^2 - (x^2)_{npqr}]} + \dots, \\ (x^2)_{npq} = k_q^2 + \lambda U_{qq} + \lambda^2 \sum_{r \neq npq} \frac{U_{qr} U_{rq}}{k^2 - (x^2)_{npqr}} + \\ + \lambda^3 \sum_{\substack{r \neq npq \\ s \neq npqr}} \frac{U_{qr} U_{rs} U_{sq}}{[k^2 - (x^2)_{npqr}] [k^2 - (x^2)_{npqrs}]} + \dots \quad (9.1.34)$$

и т. д. Каждое x , с постепенно удлиняющимся индексом, имеет постепенно уменьшающееся число членов в каждом ряде, умножаемом на различные степени λ ; все больше матричных элементов опускается, и если имеется только конечное число состояний, то ряды в конце концов сводятся к нулю, так как все нулевые матричные элементы опущены. Можно дать общее выражение для c_p через эти константы $(x^2)_{np}, \dots$:

$$c_p = \lambda \frac{U_{pn}}{k^2 - (x^2)_{np}} + \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq} U_{qn}}{[k^2 - (x^2)_{np}] [k^2 - (x^2)_{npq}]} + \\ + \lambda^3 \sum_{\substack{q \neq np \\ r \neq npq}} \frac{U_{pq} U_{qr} U_{rn}}{[k^2 - (x^2)_{np}] [k^2 - (x^2)_{npq}] [k^2 - (x^2)_{npqr}]} + \dots \quad (9.1.35)$$

Подставляя этот результат для c_p в уравнение (9.1.32) для k^2 , получаем

$$k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k^2 - (x^2)_{np}} + \lambda^3 \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq pn}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{[k^2 - (x^2)_{np}] [k^2 - (x^2)_{npq}]} + \\ + \lambda^4 \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq pn \\ r \neq qpn}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qr} U_{rn}}{[k^2 - (x^2)_{np}] [k^2 - (x^2)_{npq}] [k^2 - (x^2)_{npqr}]} + \dots \quad (9.1.36)$$

Ясно, что здесь нет повторения элементов U_{ab} , ввиду условия суммирования, указанного под каждым знаком суммы и не позволяющего двум разным индексам принимать равные значения. Для любого конечного векового определителя равенство (9.1.36) дает точное разложение.

Чтобы решить уравнение (9.1.36) относительно k^2 , мы должны применить метод последовательных приближений. Это дает следующую формулу для a -го приближения:

$$(k^2)^{(a)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{[(k^2)^{(a-2)} - (x^2)_{np}^{(a-2)}]} + \\ + \lambda^3 \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{[(k^2)^{(a-3)} - (x^2)_{np}^{(a-3)}] [(k^2)^{(a-3)} - (x^2)_{npq}^{(a-3)}]} + \dots + \\ + \lambda^a \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np \\ r \neq npq \\ \vdots \\ z \neq npq \dots}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qr} U_{rs} \dots U_{zn}}{(k_n^2 - k_p^2) (k_n^2 - k_q^2) (k_n^2 - k_r^2) \dots (k_n^2 - k_z^2)}. \quad (9.1.37)$$

Здесь $(x^2)_{np \dots}^{(a-2)}$ есть величина $(x^2)_{np \dots}$ в $(a-2)$ -м приближении с погрешностью, пропорциональной λ^{a-1} . Применяя формулу (9.1.37), следует двигаться постепенно, образуя желаемый порядок приближения. Можно легко вычислить $(k^2)^{(2)}$ как

$$(k^2)^{(2)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k_n^2 - k_p^2}.$$

Затем $(k^2)^{(3)}$ получится из (9.1.37) и (9.1.34), $(k^2)^{(4)}$ из (9.1.37) и $(k^2)^{(3)}$ и т. д. Результаты этих вычислений можно затем подставить в (9.1.35) и определить соответствующие значения коэффициентов c_p .

Сходимость пертурбационной формулы Финберга (9.1.37) определяется сходимостью соответствующего детерминантного отношения, которое равно

$$\frac{1}{M_{nn}} \left| \frac{(k^2 - k_q^2) \delta_{qp} - \lambda U_{qp}}{\delta_{qn} + (1 - \delta_{qn}) [k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}]} \right|. \quad (9.1.38)$$

Здесь M_{nn} — алгебраическое дополнение элемента с индексами (n, n) , равного $(k^2 - k_n^2 - \lambda U_{nn})$, в определителе (9.1.38). В a -м приближении все произведения в разложении указанного определителя, которые содержат более чем a недиагональных элементов U_{pq} ($p \neq q$), должны быть опущены. Ряды (9.1.37) перестают сходиться, если λ превосходит λ_0 — первое значение λ , для которого M_{nn} обращается в нуль, — или в том случае, когда перестанет сходиться весь определитель. Определитель сходится, если сходится сумма

$$\sum_{p \neq n} \frac{U_{qp}}{k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}}. \quad (9.1.39)$$

Если число измерений N , то для этой сходимости U_{pq} должно для больших p и q стремиться к нулю по крайней мере со скоростью $(k_p k_q)^{-N-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (если U — эрмитов оператор, так что $\bar{U}_{qp} = U_{pq}$). Это условие имеет значение для тех $U(r)$, у которых $(2N-1)$ -я производная разрывна, так что $2N$ -я производная сингулярна. Любая более гладкая зависимость U от r приводит, конечно, к сходимости ряда (9.1.39). В одномерном случае, когда $2N-1$ равно единице, U должно быть по крайней мере кусочно-гладким. Конечно, условие сходимости в среднем рядов для ψ менее жестко. Мы можем установить требования относительно поведения элементов U_{pq} при рассмотрении сходимости рядов $\sum c_p^2$, где c_p выражаются формулой (9.1.35). Такой анализ показывает, что величина $|U_{pn}|^2$ при увеличении p должна быть порядка $k_p^{4-N-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, как было получено в (9.1.22) для итерационно-пертурбационной формулы.

Указанные выше условия не зависят от значения λ , и, следовательно, не имеют отношения к сходимости ряда (9.1.36), как ряда по степеням λ . Радиус сходимости этого ряда определяется первым нулем M_{nn} . На это указывает форма выражения (9.1.38). Более наглядно это можно также показать, вернувшись к вековому определителю (9.1.27) и уравнению (9.1.26) для определения коэффициентов c_p в предположении, что k^2 известно. Как мы увидим, эти коэффициенты бесконечны, если M_{nn} равно нулю. Пусть в равенстве (9.1.26) $c_n = 1$; тогда получается линейная неоднородная система уравнений

$$\sum_{p \neq n} [(k^2 - k_q^2) \delta_{qp} - \lambda U_{qp}] c_p = -[(k^2 - k_n^2) \delta_{qn} - \lambda U_{qn}].$$

Решения для c_p обратно пропорциональны определителю, образованному из коэффициентов при c_p . Этот определитель может быть получен из векового определителя зачеркиванием n -го столбца и n -й строки и равен, следовательно, как раз M_{nn} . Коэффициенты c_p становятся, таким образом, бесконечными, если M_{nn} обращается в нуль, и разложение (9.1.35) перестает существовать.

Абсолютная величина λ_0 — наименьшего λ , для которого M_{nn} как функция от λ равно нулю, — есть, следовательно, радиус сходимости ряда (9.1.35) для c_p . Мы покажем теперь, что M_{nn} становится равным нулю всякий раз, когда решения задачи (9.1.23) вырождаются. То, что M_{nn} равно нулю для этих частных значений λ_0 и k^2 , означает, что существует решение уравнения (9.1.23), не содержащее функции φ_n . Такое решение можно, конечно, получить, взяв линейную комбинацию двух вырожденных решений, что доказывает теорему. Можно доказать также обратную теорему.

Отсюда мы делаем вывод, что радиус сходимости пертурбационной формулы Финберга определяется наименьшей абсолютной величиной λ , для которого решения становятся вырожденными. Рис. 9.1 иллюстрирует сходящиеся и расходящиеся решения. Линии представляют изменение первых двух собственных значений k_0^2 и k_1^2 с увеличением λ от 0. Радиус сходимости рядов Финберга есть λ_0 , потому что именно при $\lambda = \lambda_0$ наблюдается вырождение. Для $\lambda < \lambda_0$ ряды будут сходиться, для $\lambda \geq \lambda_0$ — расходиться.

Пример. Применим теперь пертурбационную формулу (9.1.36) к четным периодическим решениям уравнения Матье, рассмотренного выше на стр. 13 с применением итерационно-пертурбационной формулы (которая перестала быть верной при $s=4$ для $n=0$ и $s=30$ для $n=6$).

Для второго порядка (9.1.36) дает $(b_n$ в знаменателе $\simeq n^2 + s/2)$

$$b_n = n^2 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{16} \left[\frac{1}{b_n - (n-2)^2 - s/2} + \frac{1}{b_n - (n+2)^2 - s/2} \right] + \dots \text{ при } n \neq 0,$$

$$b_0 = \frac{s}{2} + \frac{s^2}{8} \left[\frac{1}{b_0 - 4 - s/2} \right] + \dots \text{ при } n = 0.$$

Для случая $n=0$, $s=4$ в этом порядке получается $b=2-1/2=1,5$, что намного ближе к точному значению 1,54486, чем величина 1,00, которая получалась в итерационно-пертурбационном методе на этом этапе аппроксимации. Для случая $n=6$, $s=30$ получается 51,8035, что довольно хорошо согласуется с точным значением 51,8290, в то время как итерационно-пертурбационный метод в соответствующем случае дает 48,2800. Различие между двумя формулами возникает из-за предположения, что s мало, и связанного с этим в итерационно-пертурбационной формуле разложения по степеням s . Ясно, что в рассматриваемом случае это практически нецелесообразно. Например, в случае b_0 величина $4-b_0=2$ как раз равна $s/2$.

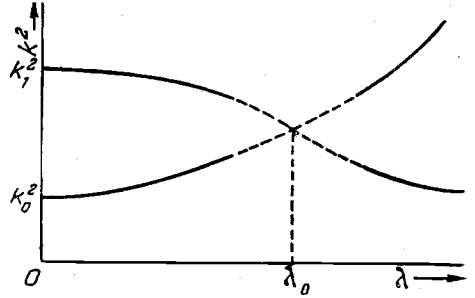


Рис. 9.1. Область сходимости последовательности (9.1.37) к точному значению k^2 имеется только для $\lambda < \lambda_0$.

По сути дела, для уравнения Матье ряды Финберга приводят к точным непрерывным дробям (см. т. I, стр. 531), которые и используются для получения точного значения, указанного выше. Члены порядка λ^3 и выше в (9.1.36) исчезают. Рассмотрим, например, член с λ^3 , который содержит $U_{np}U_{pq}U_{qn}$ ($p \neq n$, $q \neq np$). Из общего выражения для U_{nm} выше на стр. 14 мы видим, что p должно быть равно $n \pm 2$. Следовательно, q должно быть равно только $n \pm 4$, после чего U_{qn} исчезает, и значит, формула

$$b_n = n^2 + sU_{nn} + s^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np}U_{pn}}{b_n - (x^2)_{np}}$$

является точной. Теперь $(x^2)_{np}$ в (9.1.34) равно

$$x_{np}^2 = p^2 + sU_{pp} + s^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq}U_{qp}}{b_n - (x^2)_{npq}} = p^2 + sU_{pp} +$$

$$+ s^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq}U_{qp}}{b_n - q^2 - sU_{qq}} - s^2 \sum_{r \neq npq} \frac{U_{qr}U_{rq}}{b_n - r^2 - sU_{rr}} - s^2 \sum_{t \neq npqr} \frac{U_{rt}U_{tr}}{b_n - t^2 - sU_{tt}} - \dots$$

Нам нужно теперь только подставить сюда выражение для U_{pq} , позволяющее получить непрерывную дробь для b_n . Например, для $n=0$

$$b_0 = \frac{1}{2}s + \frac{s^2/8}{b_0 - 4 - \frac{1}{2}s - \frac{s^2/16}{b_0 - 9 - \frac{1}{2}s - \frac{s^2/16}{b_0 - 16 - \frac{1}{2}s - \dots}}},$$

Если для $s=4$ подставить $b_0=1,5$, как было получено раньше, и вычитать правую часть, включая члены $b_0-9-s/2$, то получится $b_0=1,545$, что уже близко к точному значению 1,54486.

Пертурбационная формула Фредгольма. Как было показано выше, пертурбационная формула Финберга может иметь конечный радиус сходимости; ряды расходятся, как только λ превосходит величину, при которой появляется вырождение собственных значений. Этот вывод тем более имеет место для итерационно-пертурбационной формулы, поскольку, как это было указано, эта формула может быть получена из формулы Финберга дальнейшими разложениями, что, вообще говоря, приводит к рядам с еще меньшим радиусом сходимости.

В настоящем пункте мы выведем пертурбационную формулу, которую можно применять при всех значениях λ ; тем самым она обеспечит аналитическое продолжение рядов итерационно-пертурбационной формулы и формулы Финберга за их радиусы сходимости. Эти формулы более обозримы, если исследовать возмущения в терминах операторов и векторов в абстрактном векторном пространстве. Кроме того, такое рассмотрение будет общим, допускающим распространение на любые задачи теории возмущений.

Рассмотрим задачу о собственных значениях

$$(\mathcal{A} - E)e = \lambda \mathcal{B}e, \quad (9.1.40)$$

где E — собственное значение, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — эрмитовы операторы. Невозмущенная задача соответствует оператору $\mathcal{A}$ с собственными значениями ε_n и собственными векторами f_n

$$\mathcal{A}f_n = \varepsilon_n f_n. \quad (9.1.41)$$

Возмущающий член выражается оператором $\lambda \mathcal{B}$. Уравнения (9.1.40) и (9.1.41) суть просто уравнения (9.1.1) и (9.1.2), записанные в абстрактном векторном пространстве. В случае более сложной многомерной задачи уравнение (9.1.40) имеет вид (9.1.19) или (9.1.20) и т. п.; как подчеркнуто выше, уравнения (9.1.40) и (9.1.41) применимы также ко многим другим задачам. Аналог интегрального уравнения (9.1.4), из которого были выведены итерационно-пертурбационные формулы, получается здесь введением оператора, обратного к $\mathcal{A} - E$. Уравнение (9.1.40) принимает вид

$$e = \lambda (\mathcal{A} - E)^{-1} \mathcal{B}e. \quad (9.1.42)$$

Мы снова отделяем собственный вектор, к которому стремится e , когда λ стремится к нулю. Пусть это будет f_n , а соответствующие e и E обозначим через e_n и E_n :

$$e_n \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} f_n.$$

Чтобы описать отделение f_n от остатка правой части в уравнении (9.1.42), необходимо использовать понятие *проекционного оператора* $\mathcal{P}_n$. Этот оператор определен так, что он выделяет ту часть любого вектора, которая пропорциональна f_n . Он, таким образом, имеет следующие свойства:

$$\mathcal{P}_n f_n = f_n; \quad \mathcal{P}_n f_m = 0 \quad \text{при } m \neq n.$$

Его можно представить более конкретно в форме аффинора

$$\mathcal{P}_n = f_n f_n^*.$$

Следовательно, если $e = \sum \alpha_p f_p$, то $\mathcal{P}_n e = \alpha_n f_n$. Таким образом, уравнение (9.1.42) для e_n мы можем записать в форме

$$e_n = f_n + \lambda (1 - \mathcal{P}_n) (\mathcal{A} - E_n)^{-1} \mathcal{B}e_n. \quad (9.1.43)$$

Для удобства введем обозначение

$$\mathfrak{K} = (1 - \mathfrak{P}_n)(\mathfrak{A} - E_n)^{-1}\mathfrak{B}, \quad (9.1.44)$$

так что теперь (9.1.42) принимает вид неоднородного относительно $\mathbf{e}_n$ уравнения

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{f}_n + \lambda \mathfrak{K} \mathbf{e}_n. \quad (9.1.45)$$

Символическое решение этого уравнения есть

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{1 - \lambda \mathfrak{K}} \mathbf{f}_n = \mathbf{f}_n + \frac{\lambda \mathfrak{K}}{1 - \lambda \mathfrak{K}} \mathbf{f}_n. \quad (9.1.46)$$

Итерационно-пертурбационная формула для вектора $\mathbf{e}_n$ получится разложением $1/(1 - \lambda \mathfrak{K})$ в степенной ряд по λ

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{f}_n + \lambda \mathfrak{K} \mathbf{f}_n + \lambda^2 (\mathfrak{K}^2 \mathbf{f}_n) + \dots \quad (9.1.47)$$

Этот ряд идентичен ряду (9.1.13), так как если мы подставим в разложение оператора $\mathfrak{K}$ по собственным векторам $\mathbf{f}_n$

$$\mathfrak{K} = \sum_{pq} \mathbf{f}_p \mathbf{f}_q^* (\mathbf{f}_p^* \mathfrak{K} \mathbf{f}_q)$$

величину скалярного произведения

$$\mathbf{f}_p^* \mathfrak{K} \mathbf{f}_q = \mathbf{f}_p^* (1 - \mathfrak{P}_n)(\mathfrak{A} - E_n)^{-1} \mathfrak{B} \mathbf{f}_q = \frac{\mathbf{f}_p^* \mathfrak{B} \mathbf{f}_q}{\varepsilon_p - E_n}, \quad p \neq n,$$

то это разложение примет вид

$$\mathfrak{K} = \sum_{pq \neq n} \frac{B_{pq}}{\varepsilon_p - E_n} \mathbf{f}_p \mathbf{f}_q^*, \quad B_{pq} = (\mathbf{f}_p^* \mathfrak{B} \mathbf{f}_q).$$

Произведение $\mathfrak{K} \mathbf{f}_n$ равно $\sum_{p \neq n} \frac{B_{pn} \mathbf{f}_p}{\varepsilon_p - E_n}$ и совпадает, конечно, с членом первого порядка в (9.1.10). Произведение $\mathfrak{K}^2 \mathbf{f}_n$ равно

$$\mathfrak{K}^2 \mathbf{f}_n = \sum_{q \neq n} \frac{B_{qn}}{\varepsilon_q - E_n} \mathfrak{K} \mathbf{f}_q = \sum_{pq \neq n} \frac{B_{pq} B_{qn}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)} \mathbf{f}_p \quad (9.1.48)$$

в согласии с членом второго порядка в (9.1.12) и т. д.

Радиус сходимости дается абсолютным значением той величины λ , для которой однородное уравнение, соответствующее (9.1.45), имеет ненулевое решение, так как, вообще говоря, $\mathfrak{K}^q \mathbf{f}_n$ не будет ортогональным к такому решению при всех значениях q . Таким образом, в (9.1.46) особенности сосредоточены в точках λ_r , являющихся собственными значениями уравнения

$$\mathbf{g}_r = \lambda_r \mathfrak{K} \mathbf{g}_r. \quad (9.1.49)$$

Подставляя из (9.1.44) выражение для $\mathfrak{K}$ и умножая¹⁾ на $\mathfrak{A} - E$, перепишем (9.1.49) в виде

$$(\mathfrak{A} - E) \mathbf{g}_r = \lambda_r (1 - \mathfrak{P}_n) \mathfrak{B} \mathbf{g}_r. \quad (9.1.50)$$

Важно отметить, что λ_r — не обязательно действительное число, так как $(1 - \mathfrak{P}_n) \mathfrak{B}$ — не обязательно эрмитов оператор. Из (9.1.50) вытекает, что $\mathbf{f}_n^* \cdot \mathbf{g}_r = 0$, и, следовательно, $\mathbf{g}_r$ является тем решением исходной задачи на собственные значения (9.1.40) с $\lambda = \lambda_r$, которое не содержит $\mathbf{f}_n$. Такое решение можно получить, если λ таково, что уравнение (9.1.40) имеет

¹⁾ Отметим, что $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \mathfrak{A}$. — Прим. ред.

вырожденные решения, т. е. существуют по крайней мере два решения с одинаковыми значениями E и λ , так что можно построить линейную комбинацию этих решений, не содержащую f_n . Следовательно, как и в случае формулы Финберга, радиус сходимости ряда (9.1.47) определяется наименьшей абсолютной величиной того λ , при котором уравнение (9.1.40) имеет вырожденные решения.

Обратимся теперь к задаче развития теории возмущений в такой форме, которая обеспечила бы аналитическое продолжение решения за указанный радиус сходимости.

Перепишем уравнение (9.1.46) для символического решения e_n , введя функцию $\chi(\lambda)$:

$$e_n = \frac{\chi(\lambda)/(1-\lambda\mathfrak{R})}{\chi(\lambda)} f_n. \quad (9.1.51)$$

Функцию $\chi(\lambda)$ выберем следующим образом. Она должна быть целой функцией от λ , т. е. не должна иметь особенностей во всей комплексной плоскости λ . Ее нули должны совпадать с полюсами функции $1/(1-\lambda\mathfrak{R})$ (т. е. $\lambda = \lambda_r$) и иметь тот же самый порядок. Поэтому $\chi(\lambda)/(1-\lambda\mathfrak{R})$, так же как и $\chi(\lambda)$, будет целой функцией, и ее можно разложить в степенной ряд по λ , имеющий бесконечный радиус сходимости (см. т. I, стр. 361). Таким образом, оператор, связывающий e_n с f_n , будет представлен в виде отношения двух выражений, каждое из которых можно разложить в степенной ряд по λ с бесконечным радиусом сходимости. Особенность, которая присутствует в исходном выражении, все еще остается в (9.1.51), так как $\chi(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda = \lambda_r$.

Перейдем теперь к определению целой функции χ . Аналогичная задача рассмотрена в гл. 4, стр. 364. Процедура, описанная там в общих чертах, включает в первую очередь вычисление логарифмической производной от χ , $\chi'(\lambda)/\chi(\lambda)$, где штрих означает дифференцирование. Ясно, что эта функция имеет полюсы в нулях функции $\chi(\lambda)$, т. е. при $\lambda = \lambda_r$. Таким образом, чтобы получить χ , необходимо приравнять χ'/χ функции, имеющей полюсы соответствующего вида в точках $\lambda = \lambda_r$. Таких функций много, и мы выберем простейшую из них:

$$\frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \text{Spur} \left[\frac{-\mathfrak{R}}{1-\lambda\mathfrak{R}} \right] = \sum_r \frac{1}{\lambda - \lambda_r}. \quad (9.1.52)$$

Здесь символ Spur (след) означает сумму диагональных элементов матрицы, стоящей под знаком Spur. Второе равенство вытекает из того, что диагональные элементы $\mathfrak{R}$ равны $1/\lambda_r$. Этот выбор выражения для χ'/χ был сделан потому, что он приводит к фредгольмовскому решению неоднородного интегрального уравнения второго рода, если $\mathfrak{R}$ соответствует интегральному оператору, так что (9.1.40) соответствует интегральному уравнению. Наиболее общий выбор функции $\chi'(\lambda)/\chi(\lambda)$ такой:

$$\frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \text{Spur} \left[\frac{f(\lambda, \mathfrak{R})}{1-\lambda\mathfrak{R}} \right] = \sum_r \frac{f(\lambda, 1/\lambda_r)}{1-(\lambda/\lambda_r)},$$

где f — любая целая функция от λ , которая не имеет нулей при $\lambda = \lambda_r$ и для которой $f(\lambda_r, 1/\lambda_r) = -1/\lambda_r$. Различные выборы f дают возможность выделить разные порядки возмущения.

Возвращаясь к (9.1.52), мы можем проинтегрировать обе части равенства от $\lambda = 0$ до $\lambda = \lambda$, предполагая, что $\lambda = 0$ не входит в множество $\{\lambda_r\}$, т. е. что невозмущенная задача не является вырожденной. Тогда

$$\chi(\lambda) = \exp \left[- \int_0^\lambda \text{Spur} \left(\frac{\mathfrak{R}}{1-\lambda\mathfrak{R}} \right) d\lambda \right]. \quad (9.1.53)$$

Следующий этап нашей программы — разложение $\chi(\lambda)$ и $\chi(\lambda)/(1-\lambda\mathfrak{K})$ в степенные ряды по λ . Нам придется ввести обозначение для следа различных степеней оператора $\mathfrak{K}$. Пусть

$$x_p = \text{Spur } \mathfrak{K}^p. \quad (9.1.54)$$

Рассмотрим сначала $\chi(\lambda)$. Пусть

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad a_0 = 1.$$

Тогда

$$\chi'(\lambda)/\chi(\lambda) = \sum n a_n \lambda^{n-1} / \sum a_n \lambda^n.$$

Но из (9.1.52) и определения (9.1.54) следует, что

$$\chi'(\lambda)/\chi(\lambda) = - \sum x_{n+1} \lambda^n,$$

т. е.

$$\sum n a_n \lambda^{n-1} = - \left(\sum x_{p+1} \lambda^p \right) \left(\sum a_s \lambda^s \right).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях этого равенства, мы получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов a_n

$$(n+1) a_{n+1} + \sum_{s=1}^n a_s x_{n+1-s} = -x_{n+1}. \quad (9.1.55)$$

Эти равенства образуют систему неоднородных линейных уравнений для a_s ; ее решение можно представить в форме определителя

$$a_n = -\frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ x_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & 3 & \dots & 0 & x_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \dots & x_1 & x_n \end{vmatrix}. \quad (9.1.56)$$

Первые четыре из этих коэффициентов таковы:

$$\begin{aligned} a_1 &= -x_1, \\ a_2 &= \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2), \\ a_3 &= -\frac{1}{6} (2x_3 - 3x_1 x_2 + x_1^3), \\ a_4 &= -\frac{1}{24} (6x_4 - 8x_1 x_3 + 6x_2 x_1^2 - 3x_2^2 - x_1^4). \end{aligned} \quad (9.1.57)$$

Мы можем использовать подобный метод для разложения $\chi(\lambda)/(1-\lambda\mathfrak{K})$ в степенной ряд по λ . Берем логарифм и дифференцируем. Тогда, если

$$\frac{\chi(\lambda)}{1-\lambda\mathfrak{K}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n, \quad b_0 = 1, \quad (9.1.58)$$

то

$$-\text{Spur} \left(\frac{\mathfrak{K}}{1-\lambda\mathfrak{K}} \right) + \frac{\mathfrak{K}}{1-\lambda\mathfrak{K}} = \sum \frac{n b_n \lambda^{n-1}}{b_n \lambda^n}.$$

Сравнивая с уравнениями, определяющими a_n , мы видим, что отличие состоит только в том, что в каждом члене x_p заменено на $x_p - \mathfrak{R}^p$. Следовательно,

$$b_n = -\frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 - \mathfrak{R} \\ x_1 - \mathfrak{R} & 2 & 0 & \dots & 0 & x_2 - \mathfrak{R}^2 \\ x_2 - \mathfrak{R}^2 & x_1 - \mathfrak{R} & 3 & \dots & 0 & x_3 - \mathfrak{R}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - \mathfrak{R}^{n-1} & x_{n-2} - \mathfrak{R}^{n-2} & x_{n-3} - \mathfrak{R}^{n-3} & \dots & x_1 - \mathfrak{R} & x_n - \mathfrak{R}^n \end{vmatrix}.$$

Если мы положим $b_n = b_n(x, \mathfrak{R})$ в знак того, что b_n есть функция от $\mathfrak{R}$ и от следов степеней $\mathfrak{R}$, то будем иметь

$$b_n(x, 0) = a_n.$$

Первые три из этих коэффициентов даны ниже:

$$\begin{aligned} b_1 &= \mathfrak{R} + a_1, \\ b_2 &= \mathfrak{R}^2 - \mathfrak{R}x_1 + a_2, \\ b_3 &= \mathfrak{R}^3 - \mathfrak{R}^2x_1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1^2)\mathfrak{R} + a_3, \\ b_n &= \mathfrak{R}^n + a_1\mathfrak{R}^{n-1} + a_2\mathfrak{R}^{n-2} + \dots \end{aligned} \quad (9.1.59)$$

Мы можем теперь раскрыть формулу (9.1.51) и получить таким образом фредгольмовское выражение для e_n :

$$e_n = f_n + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p \lambda^p}{\sum_{p=0}^{\infty} a_p \lambda^p} f_n, \quad c_p = b_p - a_p. \quad (9.1.60)$$

Отсюда с точностью до третьего порядка имеем

$$\dot{e}_n = f_n + \lambda \mathfrak{R} \frac{1 + \lambda(\mathfrak{R} - x_1) + \lambda^2 \left[\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{R}x_1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1^2) \right]}{1 - \lambda x_1 - \frac{1}{2} \lambda^2 (x_2 - x_1^2) - \frac{1}{6} \lambda^3 (2x_3 - 3x_1x_2 + x_1^3)} f_n. \quad (9.1.61)$$

Соответствующая величина собственного значения E_n получится из

$$E_n = \varepsilon_n - \lambda (f_n^* \mathfrak{B} e_n). \quad (9.1.62)$$

Если подставить (9.1.61) в это выражение, то получится формула для E с точностью до пятого порядка.

Для вычисления (9.1.61) мы должны найти величины следов, а также матричные элементы $(f_p^* \mathfrak{R}^a f_n) = (\mathfrak{R}^a)_{pn}$ для $a \leq 4$.

Вспоминая, что $\mathfrak{R} = (1 - \mathfrak{P}_n)(\mathfrak{A} - E)^{-1} \mathfrak{B}$, имеем:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R})_{pn} &= \frac{B_{pn}}{\varepsilon_p - E_n}, & p \neq n, \\ (\mathfrak{R}^2)_{pn} &= \sum_{q \neq n} \frac{B_{pq} B_{qn}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)}, & p \neq n, \\ (\mathfrak{R}^3)_{pn} &= \sum_{qr \neq n} \frac{B_{pq} B_{qr} B_{rn}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)(\varepsilon_r - E_n)}, & p \neq n, \\ (\mathfrak{R}^4)_{pn} &= \sum_{qrs \neq n} \frac{B_{pq} B_{qr} B_{rs} B_{sn}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)(\varepsilon_r - E_n)(\varepsilon_s - E_n)}, & p \neq n. \end{aligned} \quad (9.1.63)$$

$(\mathfrak{R}^a)_{nn}$ равно нулю из-за оператора $1 - \mathfrak{P}_n$, хотя для $(\mathfrak{R}^a)_{pp}$ это не так. Следы x_a выражаются формулами

$$x_a = \sum_{p \neq n} (\mathfrak{R}^a)_{pp},$$

так что

$$x_1 = \sum_{p \neq n} \frac{B_{pp}}{\varepsilon_p - E_n}, \quad x_2 = \sum_{pq \neq n} \frac{B_{pq} B_{qp}}{(\varepsilon_p - E_n)(\varepsilon_q - E_n)} \quad \text{и т. д.} \quad (9.1.64)$$

Теперь мы можем написать

$$\begin{aligned} e_n = f_n + \sum_{p \neq n} f_p \left\{ \lambda (\mathfrak{R})_{pn} + \lambda^2 [(\mathfrak{R}^2)_{pn} - x_1 (\mathfrak{R})_{pn}] + \lambda^3 [(\mathfrak{R}^3)_{pn} - x_1 (\mathfrak{R}^2)_{pn} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (x_2 - x_1^2) (\mathfrak{R})_{pn}] \right\} \left\{ 1 - \lambda x_1 - \frac{1}{2} \lambda^2 (x_2 - x_1^2) - \frac{1}{6} \lambda^3 (2x_3 - 3x_1 x_2 + x_1^3) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (9.1.65)$$

Равенство, определяющее E_n , как это следует из формулы (9.1.62), в третьем порядке имеет вид:

$$\begin{aligned} E_n = \varepsilon_n - \lambda B_{nn} - \lambda^2 \sum_{p \neq n} B_{np} \left\{ (\mathfrak{R})_{pn} + \lambda [(\mathfrak{R}^2)_{pn} - x_1 (\mathfrak{R})_{pn}] + \lambda^2 [(\mathfrak{R}^3)_{pn} - \right. \\ \left. - x_1 (\mathfrak{R}^2)_{pn} - \frac{1}{2} (x_2 - x_1^2) (\mathfrak{R})_{pn}] \right\} \left\{ 1 - \lambda x_1 - \frac{1}{2} \lambda^2 (x_2 - x_1^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \lambda^3 (2x_3 - 3x_1 x_2 + x_1^3) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (9.1.66)$$

Заметим, что энергетическое уравнение не отличается от результата, полученного итерационно-пертурбационным методом, пока не достигается третий порядок относительно λ . Так как $(\mathfrak{R})_{pn}$ и т. д. в (9.1.66) содержат E , то (9.1.66) нельзя рассматривать как явное выражение для E , а нужно рассматривать скорее как уравнение, которое надо решать серий последовательных приближений, уже использованных для получения равенств (9.1.15) и (9.1.37).

Формулы (9.1.65) и (9.1.66) можно употреблять только в одномерном случае, потому что x_1 обращается в бесконечность для любой задачи с большим числом измерений. По этой причине важно получить формулы, не содержащие x_1 . Этого легче всего достигнуть, если умножить выражение (9.1.53) для $\chi(\lambda)$ на целую функцию $e^{\lambda x_1}$, предполагая на момент, что x_1 конечно, так что

$$\chi(\lambda) = \exp \left\{ - \int_0^\lambda \text{Spur} \left(\frac{\mathfrak{R}}{1 - \lambda \mathfrak{R}} \right) d\lambda + \lambda x_1 \right\}. \quad (9.1.67)$$

Эта новая функция $\chi(\lambda)$ имеет следующую логарифмическую производную:

$$\frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = - \text{Spur} \left(\frac{\mathfrak{R}}{1 - \lambda \mathfrak{R}} \right) + x_1 = - \sum_{p=1}^{\infty} x_{p+1} \lambda^p.$$

Сравнивая с соответствующим уравнением, полученным раньше для $\chi(\lambda)$ из (9.1.53), мы видим, что данное уравнение получается из прежнего, если положить $x_1 = 0$. Мы можем, следовательно, немедленно напи-

сать для коэффициентов в разложении

$$\chi(\lambda) = \sum a_n^1 \lambda^n;$$

$$a_0^1 = 1, \quad a_1^1 = 0, \quad a_n^1 = -\frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & x_3 \\ x_2 & 0 & 4 & 0 & \dots & x_4 \\ x_3 & x_2 & 0 & 5 & \dots & x_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & x_{n-4} & \dots & x_n \end{vmatrix}. \quad (9.1.68)$$

Аналогично, если

$$\frac{\chi(\lambda)}{1-\lambda\Re} = \sum b_n^1 \lambda^n,$$

то

$$b_n^1 = -\frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\Re \\ -\Re & 2 & 0 & \dots & 0 & x_2 - \Re^2 \\ x_2 - \Re^2 & -\Re & 3 & \dots & 0 & x_3 - \Re^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - \Re^{n-1} & x_{n-2} - \Re^{n-2} & x_{n-3} - \Re^{n-3} & \dots & -\Re & x_n - \Re^n \end{vmatrix}, \quad (9.1.69)$$

так что

$$\begin{aligned} b_1 &= \Re, \\ b_2 &= \Re^2 + a_2, \\ b_3 &= \Re^3 - \frac{1}{2} x_2 \Re + a_3, \\ b_4 &= \Re^4 - \frac{1}{2} x_2 \Re^2 - \frac{1}{3} x_3 \Re + a_4. \end{aligned}$$

Наконец, в формулах (9.1.65) и (9.1.66) мы просто полагаем $x_1 = 0$. Выражение для E теперь согласуется с результатами итерационно-пертурбационного метода до третьего порядка; результаты в методе Фредгольма отличаются в членах пятого порядка и выше.

Пример. Рассмотрим снова уравнение Матье. Мы можем установить следующее соответствие: $-d^2/d\theta^2 \rightarrow \mathcal{A}$, $b_n \rightarrow E_n$, $s \rightarrow -\lambda$ и $U \rightarrow \mathfrak{B}$, так что $U_{pq} = B_{pq}$. Мы можем использовать равенство (9.1.66) без изменений, так как рассматриваемая задача одномерная. Для собственного значения b_0 , для которого $E_n = 0$, фредгольмовское выражение дает в четвертом порядке

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2} s + \left\{ \frac{\frac{1}{8} s^2}{(b_0 - 4)} + \left[\frac{\frac{1}{16} s^3}{(b_0 - 4)^2} + \frac{\frac{1}{8} x_1 s^3}{b_0 - 4} \right] + \left[\frac{\frac{1}{32} s^4}{(b_0 - 4)^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\frac{1}{128} s^4}{(b_0 - 4)^2 (b_0 - 16)} + \frac{\frac{1}{16} x_1 s^4}{(b_0 - 4)^2} - \frac{1}{16} s^4 \frac{x_2 - x_1^2}{b_0 - 4} \right] \right\} \left[1 + s x_1 + \frac{1}{2} s^2 (x_2 - x_1^2) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Это уравнение можно решить последовательными приближениями. Результаты помещены в таблице ниже для случая $s=4$ вместе с аналогичными результатами, полученными итерационно-пертурбационным методом.

Таблица 9.3

Метод	$b_0^{(0)}$	$b_0^{(1)}$	$b_0^{(2)}$	$b_0^{(3)}$	Точное
Фредгольма	2,0000	1,0000	1,5553	1,5442	1,5449
И.-П.	2,0000	1,0000	1,7778	1,1541	

Превосходство результатов Фредгольма очевидно; ошибка результата третьего приближения составляет менее чем один процент, четвертое приближение совпадает с точным значением вплоть до четвертой значащей цифры. Можно оценить радиус сходимости итерационно-пертурбационных формул, найдя наименьший нуль знаменателя в последнем выражении для b_0 . Это дает $s \simeq 5$ для величины корня. Таким образом, не удивительно, что сходимость для $s=4$ у итерационно-пертурбационных формул получилась такая медленная.

Вариационно-итерационный метод. Каждый из рассмотренных выше методов приводит к уравнению, определяющему собственное значение, — уравнению, которое с помощью метода последовательных приближений [см., например, уравнение (9.1.15)] дает формулу пертурбационного типа, в которой собственное значение выражается через параметр взаимодействия λ . Фактически такая зависимость редко бывает явно выраженной, так как получаются очень громоздкие выражения.

Конечно, было бы более удобно получить явное выражение E как функции λ . Оказывается возможным найти обратную функцию, т. е. представить λ как функцию от E при ограничениях, которые появятся ниже. При таком методе мы рассматриваем λ как собственное значение, а E как данную величину, т. е. ищем интенсивность взаимодействия, необходимую для получения данного значения E . Такое требование соответствует положению, часто встречающемуся в практике, когда E — величина, известная из опыта, а нас интересует природа взаимодействия. В случае, если желательно определить E для отдельного значения λ , необходимо при таком методе определить λ как функцию E в окрестности этого значения λ , а затем воспользоваться методом обратной интерполяции.

Рассмотрим (9.1.40) как уравнение для собственных значений λ . Соответствующее интегральное уравнение дается формулой (9.1.42):

$$e = \lambda (\mathfrak{M} - E)^{-1} \mathfrak{B} e.$$

Мы будем решать теперь это уравнение итерациями. Эта процедура будет отличаться от использованной в итерационно-пертурбационном методе тем, что мы не будем больше выделять специальный невозмущенный собственный вектор. Предположим снова, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}$ — эрмитовы операторы. Тогда существует собственное значение λ_0 , наименьшее по абсолютной величине, соответствующее наименьшей интенсивности взаимодействия, для которой E является собственной величиной. Большие собственные значения соответствуют интенсивностям взаимодействия, для которых e является не наимизшим состоянием, а следующим за ним, и т. д.

Пусть нулевым приближением к e будет $e^{(0)}$, за которое мы выберем одно из невозмущенных состояний f_n для E , близкого к ε_n . Первое приближение $e^{(1)}$ к e получится, если в правую часть данного выше интегрального уравнения подставить $e^{(0)}$ вместо e , так что

$$e^{(1)} = (\mathfrak{M} - E)^{-1} \mathfrak{B} e^{(0)}.$$

Заметим, что множитель λ можно опустить ввиду того, что мы интере-

суемся только формой e . Нормировка не имеет значения, так как при умножении на произвольную постоянную решение рассматриваемого линейного однородного уравнения остается решением. Эта возможность опустить λ в итерационном процессе позволяет вывести явную функциональную зависимость λ от E . Продолжая итерационный процесс дальше, с помощью следующего рекуррентного соотношения между $(n-1)$ -м и n -м приближением,

$$e^{(n)} = (\mathcal{A} - E)^{-1} \mathfrak{B} e^{(n-1)}, \quad (9.1.70)$$

получаем

$$e^{(n)} = [(\mathcal{A} - E)^{-1} \mathfrak{B}]^n e^{(0)}. \quad (9.1.71)$$

Соответствующие приближения для λ_0 получаются из первоначального уравнения

$$\lambda_0 = \frac{e^* (\mathcal{A} - E) e}{e^* \mathfrak{B} e} \quad (9.1.72)$$

или из интегрального уравнения

$$\lambda_0 = \frac{e^* \mathfrak{B} e}{e^* \mathfrak{B} (\mathcal{A} - E)^{-1} \mathfrak{B} e}. \quad (9.1.73)$$

Если теперь подставить $e^{(n)}$ вместо e в (9.1.72), получится n -е приближение для λ_0 :

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{(e^{(n)})^* (\mathcal{A} - E) e^{(n)}}{(e^{(n)})^* \mathfrak{B} e^{(n)}},$$

или из (9.1.70)

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{(e^{(n)})^* \mathfrak{B} e^{(n-1)}}{(e^{(n)})^* \mathfrak{B} e^{(n)}}. \quad (9.1.74)$$

Если же $e^{(n)}$ подставить вместо e в (9.1.73), мы получим $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ -е приближение (смысл этого обозначения будет выяснен ниже):

$$\lambda_0^{\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{(e^{(n)})^* \mathfrak{B} e^{(n)}}{(e^{(n)})^* \mathfrak{B} e^{(n+1)}}. \quad (9.1.75)$$

Очевидно, что удобно ввести обозначение

$$[n, m] = (e^{(n)})^* \mathfrak{B} e^{(m)},$$

так что

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{[n, n-1]}{[n, n]}, \quad \lambda_0^{\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{[n, n]}{[n, n+1]}. \quad (9.1.76)$$

Элементы $[n, m]$ имеют следующие свойства:

$$[n, m] = [m, n] = [n+p, m-p].$$

Если рассмотренный выше процесс сходится, то цель, к которой мы стремились, достигнута, поскольку правая часть как равенства (9.1.74), так и (9.1.75) зависит только от E , так что результатом является точная зависимость λ от E . Обсуждение сходимости относится скорее к § 9.4, посвященному вариационному методу, так как строгое доказательство сходимости существенно основывается на вариационном принципе. В настоящем параграфе мы удовлетворимся формулировкой нужных здесь результатов и поверхностным рассмотрением условий, гарантирующих сходимость; дальнейшие подробности можно найти в уравнениях (9.4.93) – (9.4.110).

Если операторы $\mathfrak{A} - E$ и $\mathfrak{B}$ являются *положительно определенными* (и удовлетворяют условиям, указанным ниже на стр. 133), то

$$\lambda_0^{(n)} \geq \lambda_0^{(n+\frac{1}{2})} \geq \lambda_0^{(n+1)} \dots \geq \lambda_0 > 0. \quad (9.1.77)$$

Другими словами, последовательные приближения образуют монотонную последовательность, сходящуюся к λ_0 справа [см. формулу (9.4.104)].

Если оператор $\mathfrak{B}$ положительно определенный, а $\mathfrak{A} - E$ — нет, то собственные значения λ_n не обязательно положительны. В этом случае справедливы более слабые неравенства. А именно,

$$|\lambda_0^{(n+\frac{1}{2})}| \geq |\lambda_0^{(n)}|, \quad |\lambda_0^{(n+\frac{1}{2})}| \geq |\lambda_0^{(n+\frac{3}{2})}| \dots \geq |\lambda_0|. \quad (9.1.78)$$

Следовательно, *только* полупелые приближения аппроксимируют $|\lambda_0|$ справа. Целые приближения могут быть как больше, так и меньше $|\lambda_0|$.

Сходимость метода. Скорость сходимости к точному значению λ_0 наиболее сильно зависит от отношения первых двух собственных значений λ_0 и λ_1 для данного E . Это можно в общих чертах продемонстрировать следующим образом. Пусть собственное значение λ_n в уравнении (9.1.40) имеет соответствующий собственный вектор g_n , т. е.

$$(\mathfrak{A} - E) g_n = \lambda_n \mathfrak{B} g_n. \quad (9.1.79)$$

Эти векторы образуют полную систему, по которой мы можем разложить нулевое приближение:

$$e^{(0)} = \sum a_m g_m, \quad (9.1.80)$$

где a_m — числовые коэффициенты. Мы можем теперь вычислить $e^{(1)}$ и затем $e^{(n)}$, так как

$$e^{(1)} = (\mathfrak{A} - E)^{-1} \mathfrak{B} \left(\sum a_m g_m \right),$$

или

$$e^{(1)} = \sum \frac{a_m}{\lambda_m} g_m,$$

и

$$e^{(n)} = \sum \frac{a_m}{\lambda_m^n} g_m. \quad (9.1.81)$$

Для положительно определенных эрмитовых операторов величины λ_m образуют монотонную последовательность $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots$. Следовательно, при отсутствии вырождения (т. е. равенства $\lambda_0 = \lambda_1$) отношение амплитуды низшего состояния g_0 к амплитуде первой гармоники g_1 возрастает при возрастании порядка приближения: оно равно

$$\frac{a_0}{a_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^n;$$

следовательно, для достаточно высокого порядка итерации разложение $e^{(n)}$ будет содержать главным образом g_0 , и соответствующая величина $\lambda_0^{(n)}$ будет очень близка к точному значению λ_0 . Скорость сходимости последовательности $\lambda_0^{(n)}$ подобна скорости сходимости последовательности $e^{(n)}$, поскольку, как будет показано в § 9.4 [см. (9.4.106)],

$$\frac{\lambda_0^{(n+1)} - \lambda_0^{(n+\frac{1}{2})}}{\lambda_0^{(n+\frac{1}{2})} - \lambda_0^{(n)}} \simeq \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Если отношение λ_0/λ_1 близко к единице, сходимость крайне медленная (слабая). Но в этом случае существует специальный прием, который позволяет экстраполировать точное значение, несмотря на медленную сходимость. Этот прием, конечно, можно применять и тогда, когда сходимость удовлетворительная, но обычно это не является необходимым.

Предположим, что процесс итерации продвинут настолько далеко, что остались только собственные векторы g_0 и g_1 . Тогда $e^{(n)}$, так же как и другие величины, такие, как $\lambda_0^{(n)}$, можно разложить на два члена: точный и ошибку. Если величину, нас интересующую, обозначить через F , то a -е приближение выражается формулой

$$F^{(a)} = F + F_1,$$

где F_1 — ошибка. Проведя еще одну итерацию и вычислив $F^{(a+1)}$, мы получим

$$F^{(a+1)} = F + \varepsilon F_1,$$

где ε — коэффициент сходимости, приблизительно равный λ_0/λ_1 , когда $F = \lambda_0$ или e . Итерируя снова, получим

$$F^{(a+2)} = F + \varepsilon^2 F_1.$$

Из этих трех уравнений можно теперь найти F и ε :

$$F = F^{(a+2)} - \frac{[F^{(a+1)} - F^{(a+2)}]^2}{F^{(a)} - 2F^{(a+1)} + F^{(a+2)}} \quad (9.1.82)$$

и

$$\varepsilon = \frac{F^{(a+1)} - F^{(a+2)}}{F^{(a)} - F^{(a+1)}}. \quad (9.1.83)$$

В большинстве приложений ε , данное в (9.1.83), получается подстановкой $F^{(a)} = \lambda_0^{(n)}$, $F^{(a+1)} = \lambda_0^{(n+1/2)}$ и $F^{(a+2)} = \lambda_0^{(n+1)}$. Величина ε , полученная таким образом, является оценкой для λ_0/λ_1 и может быть использована также для экстраполяции других величин, таких, как e , которые зависят от ε аналогичным образом. Если мы обозначим такую величину через G и ее a -е приближение через $G^{(a)}$, то экстраполированная величина G будет равна

$$G = G^{(a+2)} - \frac{F^{(a+1)} - F^{(a+2)}}{F^{(a)} - 2F^{(a+1)} + F^{(a+2)}} [G^{(a+1)} - G^{(a+2)}]. \quad (9.1.84)$$

В случае, когда оператор $\mathfrak{A} - E$ — эрмитов, но не положительно определенный, а $\mathfrak{B}$ — эрмитов положительно определенный оператор, сходимость последовательности $\lambda_0^{(n)}$ также зависит от отношения λ_0/λ_1 . Для операторов этого типа спектр собственных значений λ_m простирается в обе стороны, т. е. от $-\infty$ до $+\infty$. Это не отражается на форме разложения (9.1.81) и на дальнейших рассуждениях, за исключением того, что в них вместо λ_0/λ_1 нужно писать абсолютную величину $|\lambda_0/\lambda_1|$. Как и в случае положительной определенности, сходимость здесь зависит от распределения собственных значений, детали которого определяются точной структурой операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Если λ_0 приблизительно равно $+\lambda_1$ или $-\lambda_1$, то сходимость медленная. Способ экстраполяции, рассмотренный выше и приводящий к формулам (9.1.82) — (9.1.84), применяется и тогда, когда положительной определенности нет. Он оказывается вполне пригодным практически, если проведено достаточное число итераций.

Установив сходимость итерационного процесса, мы можем вывести специальные выражения для $\lambda_0^{(n)}$ и $e^{(n)}$ пертурбационного типа. Предположим, что мы интересуемся связью между λ_0 и E в окрестности E_m ,

собственного значения оператора $\mathfrak{A}$, с соответствующим собственным вектором $\mathbf{f}_m$. Тогда удобно выбрать $\mathbf{f}_m$ за первое приближение $\mathbf{e}^{(0)}$. Однако важно иметь уверенность в том, что соответствующее значение λ является наименьшим по абсолютной величине из тех, для которых можно получить требуемое значение E , так как именно для этого значения λ итерационный метод сходится. Если $\mathbf{f}_m$ приближенно равняется собственному вектору для λ_1 , итерационный процесс не будет сходиться. Этот недостаток у сходимости выявится в процессе вычисления. Кроме того, результаты (9.1.77) и (9.1.78) больше не будут иметь места.

Часто можно видоизменить операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ так, что новое значение λ будет наименьшим λ , как это будет показано на примере, приведенном ниже. Однако если это невозможно, то для обеспечения сходимости необходимы изменения в самом вариационно-итерационном методе; эти изменения слишком громоздки, чтобы можно было развить здесь формулы теории возмущений.

Предполагая, что за нулевое приближение $\mathbf{e}^{(0)}$ можно принять $\mathbf{f}_m$, легко получить необходимые выражения для вычисления $\lambda_0^{(n)}$ и $\lambda_0^{(n+1/2)}$. Для этого нам нужна общая формула для $\mathbf{e}^{(n)}$. Из (9.1.71) имеем

$$\mathbf{e}^{(n)} = [(\mathfrak{A} - E)^{-1}\mathfrak{B}]^n \mathbf{f}_m,$$

так что

$$\mathbf{e}^{(1)} = \sum_p \frac{B_{pm}}{\varepsilon_p - E} \mathbf{f}_p, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \sum_{pq} \frac{B_{pq}B_{qm}}{(\varepsilon_p - E)(\varepsilon_q - E)} \mathbf{f}_p. \quad (9.1.85)$$

Отсюда легко вывести и общую формулу. С помощью этих выражений для $\mathbf{e}^{(n)}$ становится возможным вычислить различные приближения (9.1.74) и (9.1.75). Из (9.1.76) и (9.1.85) имеем

$$\begin{aligned} [0,0] &= B_{mm}, \\ [0,1] &= \sum_p \frac{B_{mp}B_{pm}}{\varepsilon_p - E}, \\ [1,1] &= \sum_{pq} \frac{B_{mq}B_{qp}B_{pm}}{(\varepsilon_q - E)(\varepsilon_p - E)}, \\ [1,2] &= \sum_{pqr} \frac{B_{mr}B_{rq}B_{qp}B_{pm}}{(\varepsilon_r - E)(\varepsilon_q - E)(\varepsilon_p - E)}. \end{aligned} \quad (9.1.86)$$

Следовательно, мы можем теперь получить $\lambda_0^{(n)}$ и $\lambda_0^{(n+1/2)}$ по формуле (9.1.76). Например:

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(1/2)} &= \frac{B_{mm}}{\sum_p \frac{B_{mp}B_{pm}}{\varepsilon_p - E}}, \\ \lambda_0^{(1)} &= \frac{\sum_p \frac{B_{mp}B_{pm}}{\varepsilon_p - E}}{\sum_{pq} \frac{B_{mq}B_{qp}B_{pm}}{(\varepsilon_q - E)(\varepsilon_p - E)}} \end{aligned} \quad (9.1.87)$$

и т. д.

Пример. Мы возвратимся к уравнению Маттье [следующему за формулой (9.1.22)] и рассмотрим случай $b_0 = 1,54486$ ($s=4$), для которого итерационно-пертурбационный метод перестает сходиться (см. табл. 9.1).

Оператор $\mathfrak{B}$ соответствует $\cos^2 \theta$ и, следовательно, является положительно определенным. Собственное значение $\lambda = +s$. Оператор $\mathfrak{A} - E$ соответствует $\frac{d^2}{d\theta^2} + b$. Отметим, что $\frac{d^2}{d\theta^2}$ — отрицательно определенный оператор, так как

$$\int_0^\pi \psi \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} d\theta = - \int_0^\pi \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 d\theta.$$

Следовательно, $\mathfrak{A} - E$ не является положительно определенным, так как имеются такие функции ψ , для которых

$$\int \psi \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + b \right] \psi d\theta < 0.$$

Поэтому собственные значения λ , равные s , могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если вычислить $\lambda_0^{(1/2)}$, $\lambda_0^{(1)}$, $\lambda_0^{(3/2)}$ для $E = -b_0 = 1,54486$, то получается

$$\lambda_0^{(1/2)} = 4,5080, \quad \lambda_0^{(1)} = 3,5847, \quad \lambda_0^{(3/2)} = 4,9516.$$

Мы замечаем полную потерю сходимости к точному значению 4,0000 и нарушение неравенств (9.1.78). Это указывает на то, что существует собственное значение, меньшее значения $\lambda = 4$, для которого $b_0 = 1,54486$. Это утверждение можно проверить исследованием таблицы констант распределения b . Действительно, принимая λ_1 равным 4 и оценивая $\lambda_1/\lambda_0 = z$ (в этом случае) при помощи (9.1.83), мы получим $\lambda_0 \approx 2,7$, что недалеко от действительной величины 2,5...

Эту трудность можно преодолеть изменением определения операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, которое подсказывается следующей формой уравнения Маттье:

$$\frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + [b - s + s \sin^2 \theta] \psi = 0.$$

Здесь можно принять

$$\mathfrak{B} \rightarrow \sin^2 \theta, \quad \mathfrak{A} \rightarrow -\frac{d^2}{d\theta^2},$$

$$E \rightarrow (b - s), \quad \lambda \rightarrow s.$$

Ясно, что собственное значение λ_0 , которое меньше 4, дает для величины $b - s$ значение, большее, чем интересующее нас $b - s = -2,45514$. Чтобы получить это значение величины $b - s$, требуется поэтому возрастание λ_0 , могущее привести к тому, что λ_0 превзойдет значение 4.

Для элементов B_{pq} теперь получаем

$$B_{pq} = \frac{1}{2} \delta_{pq} - \frac{1}{4} (\delta_{p, q+2} + \delta_{p, q-2}),$$

$$B_{p0} = B_{0p} = -\frac{1}{\sqrt{8}} \delta_{p2}, \quad B_{00} = \frac{1}{2}.$$

Окончательные значения для $\lambda_0^{(1/2)}$, $\lambda_0^{(1)}$ и $\lambda_0^{(3/2)}$ получаются такие:

$$\lambda_0^{(1/2)} = 4,1257; \quad \lambda_0^{(1)} = 4,0230; \quad \lambda_0^{(3/2)} = 4,0045.$$

Мы замечаем, что здесь уже наблюдается сходимость. Четвертое приближение ($\lambda_0^{(0)}$ считается первым) уже имеет относительную точность в одну тысячную. Этот результат можно улучшить, если использовать экстраполяционную формулу (9.1.82), которая дает экстраполированную величину λ_0 , равную 4,0004, т. е. с относительной точностью до одной десятичной.

Работа, необходимая для вычисления этой последовательности приближений, одинакова с работой, нужной для вычислений по итерационно-пертурбационной формуле четвертого порядка. Единственная трудность, и мы вновь подчеркиваем ее здесь, связана с требованием, чтобы параметр λ сходил к наименьшей возможной для данного $E = E_n$ величине λ . Часто это ясно для рассматриваемой задачи из физических соображений. Если это не так, то отсутствие сходимости и нарушение соответствующих неравенств послужит указанием на то, что требование не выполнено. В этом случае следует применить какой-нибудь способ перестановки участвующих величин, как это было сделано в приведенном выше примере.

Улучшение пертурбационных формул. Результаты, полученные для итерационно-пертурбационного метода и метода Фредгольма, можно существенно улучшить, применив простое преобразование, приводящее к изменению знаменателей в выражении для энергии, аналогичному тому, которое было сделано Финбергом, хотя и не совсем такому полному. Здесь мы воспользуемся тем фактом, что рассмотренные выше методы дают решения векового уравнения:

$$|(k^2 - k_q^2)\delta_{qp} - \lambda U_{qp}| = 0.$$

Всякое детерминантное уравнение, которое можно представить в такой форме, будет иметь решения, которые, например, для итерационно-пертурбационного метода даны в (9.1.13) и (9.1.14). «Энергетические» знаменатели $k^2 - k_q^2$, появляющиеся в этих формулах, заменяются в формулах Финберга на $k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}$ плюс члены высшего порядка. Диагональные члены λU_{qq} можно включить в $k^2 - k_q^2$ при помощи простой перегруппировки членов в данном выше определителе следующим образом:

$$|(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq})\delta_{qp} - \lambda U_{qp}(1 - \delta_{qp})| = 0. \quad (9.1.88)$$

Затем в итерационно-пертурбационных формулах комбинацию $k^2 - k_q^2$ нужно заменить на $k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq}$, а U_{qp} на $U_{qp}(1 - \delta_{qp})$, чтобы получить решение векового уравнения (9.1.88). Оно получается следующее:

$$\begin{aligned} \psi_n = \varphi_n + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn}}{k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp}} \varphi_p + \\ + \lambda^2 \sum_{\substack{pq \neq n \\ q \neq p}} \frac{U_{pq} U_{qn}}{(k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp})(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq})} \varphi_p + \\ + \lambda^3 \sum_{\substack{pqr \neq n \\ pr \neq q}} \frac{U_{pq} U_{qr} U_{rn}}{(k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp})(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq})(k^2 - k_r^2 - \lambda U_{rr})} \varphi_p + \dots; \end{aligned} \quad (9.1.89)$$

в то же время уравнение, определяющее k^2 , приобретает вид

$$\begin{aligned} k^2 = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp}} + \\ + \lambda^3 \sum_{\substack{pq \neq n \\ q \neq p}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{(k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp})(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq})} + \\ + \lambda^4 \sum_{\substack{pqr \neq n \\ pr \neq q}} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qr} U_{rn}}{(k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp})(k^2 - k_q^2 - \lambda U_{qq})(k^2 - k_r^2 - \lambda U_{rr})} + \dots \end{aligned} \quad (9.1.90)$$

Мы будем называть их *модифицированными итерационно-пертурбационными формулами*; они представляют собой значительное улучшение по сравнению с немодифицированными. Вернемся снова к примеру с функциями Матве, в котором итерационно-пертурбационные формулы для случая $s=4$ и $b_0(\text{точное})=1,5449$ оказались такими несовершенными; новая формула дает уже во втором порядке $b_0^{(2)}=1,500$, против $b_0^{(2)}=1,000$, полученного по немодифицированным формулам. Выведенные выше формулы не так точны, как ряды Финберга, но значительно более удобны.

Подобные изменения можно внести в пертурбационную формулу Фредгольма. Рассматриваемое там вековое уравнение легко можно записать так:

$$|(E - \varepsilon_q) \delta_{qp} + \lambda B_{qp}| = 0.$$

Мы перегруппируем теперь члены следующим образом:

$$|(E - \varepsilon_q + \lambda B_{qq}) \delta_{qp} + \lambda B_{qp} (1 - \delta_{qp})| = 0. \quad (9.1.91)$$

Формулы (9.1.63), выражающие величины $(\mathfrak{R}^a)_{pn}$, можно теперь видоизменить, подставив $E - \varepsilon_q + \lambda B_{qq}$ вместо $E - \varepsilon_q$ и $B_{pq}(1 - \delta_{qp})$ вместо B_{qp} . Результаты таковы:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R})_{pn} &= \frac{B_{pn}}{\varepsilon_p - E - \lambda B_{pp}}, & p \neq n, \\ (\mathfrak{R}^2)_{pn} &= \sum_{q \neq np} \frac{B_{pq} B_{qn}}{(\varepsilon_p - E - \lambda B_{pp})(\varepsilon_q - E - \lambda B_{qq})}, & p \neq n, \end{aligned} \quad (9.1.92)$$

и т. д. Следы теперь нужно вычислять не по формулам (9.1.64), а по измененным формулам:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sum_{\substack{pq \neq n \\ q \neq p}} \frac{B_{pq} B_{qp}}{(\varepsilon_p - E - \lambda B_{pp})(\varepsilon_q - E - \lambda B_{qq})} \quad (9.1.93)$$

и т. д. Эти результаты, (9.1.92) и (9.1.93), надо подставить в (9.1.65) и (9.1.66), чтобы получить выражения для e и E . Так как $x_1 = 0$, то теперь нет необходимости в дополнительных изменениях, когда число измерений больше единицы.

Неортогональные функции. Выше при рассмотрении четырех методов теории возмущений мы всюду разлагали неизвестные собственные функции или собственные векторы по полной ортонормальной системе, членом которой является невозмущенная функция. Часто случается, однако (и мы это увидим на примере в следующем параграфе о граничных возмущениях), что невозмущенная функция является членом не такой системы, а системы, которая не ортогональна, хотя и полна. Конечно, такую систему можно ортогонализировать или биортогонализировать с помощью метода, описанного в гл. 8. Однако наша цель здесь — видоизменить методы теории возмущений таким образом, чтобы их можно было применять к разложениям по неортогональным системам, не прибегая к промежуточному этапу ортогонализации. Так же как и при улучшении пертурбационных формул, мы воспользуемся тем обстоятельством, что пертурбационные формулы дают решения некоторых вековых уравнений. В то же время, как мы увидим, детерминантное уравнение можно получить даже при разложении по неортогональной системе.

Прежде всего выведем только что упомянутое детерминантное уравнение. Пусть членами неортогональной системы будут f_p . Пусть f_n —

невозмущенное решение, и пусть, наконец, уравнением, которое мы будем решать, является

$$(\mathfrak{A} - E) \mathbf{e}_n = \lambda \mathfrak{B} \mathbf{e}_n.$$

Пусть

$$\mathbf{e}_n = \sum_p c_p \mathbf{f}_p.$$

Подставляя этот ряд в уравнение для $\mathbf{e}_n$, получаем

$$\sum (\mathfrak{A} - E - \lambda \mathfrak{B}) \cdot c_p \mathbf{f}_p = 0.$$

Умножим теперь это равенство слева на $\mathbf{f}_q^*$. В символических обозначениях

$$\begin{aligned} A_{qp} &= (\mathbf{f}_q^* \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{f}_p), \\ N_{qp} &= (\mathbf{f}_q^* \cdot \mathbf{f}_p), \\ B_{qp} &= (\mathbf{f}_q^* \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathbf{f}_p) \end{aligned} \quad (9.1.94)$$

получается следующая система линейных однородных уравнений:

$$\sum_p c_p (A_{qp} - EN_{qp} - \lambda B_{qp}) = 0 \quad (\text{для каждого } q). \quad (9.1.95)$$

Эта система имеет решения только при условии, что определитель, образованный из коэффициентов при c_p , равен нулю:

$$|EN_{qp} + (\lambda B_{qp} - A_{qp})| = 0.$$

(При разложении по ортогональным функциям $N_{qp} = \delta_{qp}$.) Удобнее будет ввести обозначение

$$H_{qp} = \lambda B_{qp} - A_{qp},$$

так что вековое уравнение примет вид

$$|EN_{qp} - H_{qp}| = 0. \quad (9.1.96)$$

Сравним теперь это уравнение с уравнением (9.1.27), которое получено в случае разложения по ортогональным функциям:

$$|(k^2 - k_q^2) \delta_{qp} - \lambda U_{qp}| = 0.$$

Для сравнения переищем (9.1.96) следующим образом:

$$|(EN_{qq} - H_{qq}) \delta_{qp} - (H_{qp} - EN_{qp})(1 - \delta_{qp})| = 0.$$

Это наводит на мысль, что мы можем использовать итерационно-пертурбационные формулы (9.1.13) и (9.1.14) и в настоящем случае, сделав следующие подстановки:

$$\begin{aligned} k^2 - k_q^2 &\rightarrow EN_{qq} - H_{qq}, \\ \lambda U_{qp} &\rightarrow (H_{qp} - EN_{qp})(1 - \delta_{qp}). \end{aligned} \quad (9.1.97)$$

Итерационно-пертурбационные формулы, справедливые в случае разложения по неортогональной системе $\mathbf{f}_p$, будут поэтому иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n &= \mathbf{f}_n + \sum_{p \neq n} \frac{H_{pn} - EN_{pn}}{EN_{pp} - H_{pp}} \mathbf{f}_p + \\ &+ \sum_{\substack{qp \neq n \\ q \neq p}} \frac{(H_{pq} - EN_{pq})(H_{qn} - EN_{qn})}{(EN_{pp} - H_{pp})(EN_{qq} - H_{qq})} \mathbf{f}_p + \dots, \end{aligned} \quad (9.1.98)$$

тогда как

$$EN_{nn} = H_{nn} + \sum_{p \neq n} \frac{(H_{np} - EN_{np})(H_{pn} - EN_{pn})}{EN_{pp} - H_{pp}} + \\ + \sum_{\substack{pq \neq n \\ q \neq p}} \frac{(H_{np} - EN_{np})(H_{pq} - EN_{pq})(H_{qn} - EN_{qn})}{(EN_{pp} - H_{pp})(EN_{qq} - H_{qq})} + \dots \quad (9.1.99)$$

Подстановки (9.1.97) можно также использовать и в пертурбационных формулах Финберга (9.1.35) и (9.1.36), чтобы получить соответствующие результаты, когда разложение производится по членам неортогональной системы. Это даст

$$c_p = \frac{H_{pn} - EN_{pn}}{EN_{pp} - H_{pp} - T_{np}} + \sum_{q \neq np} \frac{(H_{pq} - EN_{pq})(H_{qn} - EN_{qn})}{(EN_{pp} - H_{pp} - T_{np})(EN_{qq} - H_{qq} - T_{npq})} + \\ + \sum_{\substack{q \neq np \\ r \neq npq}} \frac{(H_{pq} - EN_{pq})(H_{qr} - EN_{qr})(H_{rn} - EN_{rn})}{(EN_{pp} - H_{pp} - T_{np})(EN_{qq} - H_{qq} - T_{npq})(EN_{rr} - H_{rr} - T_{npqr})} + \dots, \quad (9.1.100)$$

где

$$T_{np} = \sum_{q \neq np} \frac{(H_{pq} - EN_{pq})(H_{qp} - EN_{qp})}{EN_{qq} - H_{qq} - T_{npq}} + \\ + \sum_{\substack{q \neq np \\ r \neq npq}} \frac{(H_{pq} - EN_{pq})(H_{qr} - EN_{qr})(H_{rp} - EN_{rp})}{(EN_{qq} - H_{qq} - T_{npq})(EN_{rr} - H_{rr} - T_{npqr})} + \dots, \quad (9.1.101)$$

$$T_{npq} = \sum_{r \neq npq} \frac{(H_{qr} - EN_{qr})(H_{rq} - EN_{rq})}{EN_{rr} - H_{rr} - T_{npqr}} + \\ + \sum_{\substack{r \neq npq \\ s \neq npqr}} \frac{(H_{qr} - EN_{qr})(H_{rs} - EN_{rs})(H_{sq} - EN_{sq})}{(EN_{rr} - H_{rr} - T_{npqr})(EN_{ss} - H_{ss} - T_{npqrs})} + \dots$$

Уравнение для собственных значений получится соответствующей подстановкой в (9.1.36):

$$EN_{nn} = H_{nn} + \sum_{p \neq n} \frac{(H_{np} - EN_{np})(H_{pn} - EN_{pn})}{EN_{pp} - H_{pp} - T_{np}} + \\ + \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np}} \frac{(H_{np} - EN_{np})(H_{pq} - EN_{pq})(H_{qn} - EN_{qn})}{(EN_{pp} - H_{pp} - T_{np})(EN_{qq} - H_{qq} - T_{npq})}. \quad (9.1.102)$$

Мы можем также видоизменить формулы Фредгольма и вариационно-итерационные формулы для разложения по неортогональным векторам с помощью вышеуказанного процесса. Выражения (9.1.65), (9.1.66) совместно с (9.1.63) представляют решения задачи на собственные значения, приводящей к вековому определителю

$$|(E - \varepsilon_p) \delta_{qp} + \lambda B_{qp}| = 0.$$

Чтобы получить надлежащие формулы для рассматриваемой здесь задачи на собственные значения (9.1.96), нужно сделать следующие подстановки:

$$E - \varepsilon_p \rightarrow EN_{pp} - H_{pp}, \quad \lambda B_{qp} \rightarrow (EN_{qp} - H_{qp})(1 - \delta_{qp}). \quad (9.1.103)$$

Тогда формулы (9.1.63) принимают вид

$$\lambda (\mathfrak{R})_{pn} = (H_{pn} - EN_{pn}) / (EN_{pp} - H_{pp}) \quad \text{при } p \neq n,$$

$$\lambda^2 (\mathfrak{R}^2)_{pn} = \sum_{q \neq np} \frac{(H_{pq} - EN_{pq}) (H_{qn} - EN_{qn})}{(EN_{pp} - H_{pp}) (EN_{qq} - H_{qq})} \quad \text{при } p \neq n$$

и

$$\lambda^3 (\mathfrak{R}^3)_{pn} = \sum_{\substack{q \neq np \\ r \neq npq}} \frac{(H_{pq} - EN_{pq}) (H_{qr} - EN_{qr}) (H_{rn} - EN_{rn})}{(EN_{pp} - H_{pp}) (EN_{qq} - H_{qq}) (EN_{rr} - H_{rr})}, \quad p \neq n. \quad (9.1.104)$$

Формулы (9.1.64) принимают вид

$$\lambda x_1 = 0,$$

$$\lambda x_3 = \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np}} \frac{(H_{pq} - EN_{pq}) (H_{qp} - EN_{qp})}{(EN_{pp} - H_{pp}) (EN_{qq} - H_{qq})}, \quad (9.1.105)$$

$$\lambda x_3 = \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np \\ r \neq npq}} \frac{(H_{pq} - EN_{pq}) (H_{qr} - EN_{qr}) (H_{rp} - EN_{rp})}{(EN_{pp} - H_{pp}) (EN_{qq} - H_{qq}) (EN_{rr} - H_{rr})}$$

и т. д. При использовании формул (9.1.104) и (9.1.105) важно понимать, что $(\mathfrak{R}^a)_{pn}$ не совпадает с $(f_p^* \mathfrak{R}^a \cdot f_n)$ и x_2 не является следом $\mathfrak{R}^2$. Выражения, определяющие значения этих величин, нужно подставить в формулы (9.1.65) и (9.1.66) для того, чтобы получить разложения e_n и E .

Обратимся в заключение к вариационно-итерационному методу. Здесь λ рассматривается как собственное значение, которое нужно найти, а E предполагается известным, в то время как в формулах, данных выше, предполагается как раз обратное. Это означает, что вариационно-итерационные результаты можно обобщить с помощью простой перегруппировки членов в вековом уравнении только в случае, если величины N_{pq} и A_{pq} для $p \neq q$ пропорциональны λ , как это бывает в задачах с граничными возмущениями (см. § 9.2). Мы удовлетворимся здесь тем, что напомним формулы, вытекающие из этого дополнительного предположения, хотя, по-видимому, вариационно-итерационная формула существует, даже если это предположение становится неверным. Пусть

$$N_{qp} = \lambda n_{qp} \quad \text{при } q \neq p,$$

$$A_{qp} = \lambda a_{qp} \quad \text{при } q \neq p \quad (9.1.106)$$

и

$$En_{qp} + B_{qp} - a_{qp} = c_{qp}.$$

Вековой определитель (9.1.96) в этом случае имеет вид

$$|(EN_{pp} - A_{pp}) \delta_{pq} + \lambda c_{qp}| = 0,$$

подсказывающий следующие подстановки в (9.1.85) и (9.1.87):

$$E - \varepsilon_p \rightarrow EN_{pp} - A_{pp}, \quad B_{qp} \rightarrow c_{qp}.$$

Тогда вариационно-итерационные формулы при разложении по векторам

неортогональной системы и в предположении (9.1.106) имеют вид

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= \sum_p \frac{c_{pn}}{A_{pp} - EN_{pp}} f_p, \\ e^{(2)} &= \sum_{pq} \frac{c_{pq}c_{qn}}{(A_{pp} - EN_{pp})(A_{qq} - EN_{qq})} f_p, \end{aligned} \quad (9.1.107)$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(1/2)} &= \frac{c_{00}}{\sum_p \frac{c_{np}c_{pn}}{A_{pp} - EN_{pp}}}, \\ \lambda_0^{(1)} &= \frac{\sum_p \frac{c_{np}c_{pn}}{A_{pp} - EN_{pp}}}{\sum_{pq} \frac{c_{np}c_{pq}c_{qn}}{(A_{pp} - EN_{pp})(A_{qq} - EN_{qq})}} \end{aligned} \quad (9.1.108)$$

и т. д.

Мы закончим этот пункт о разложении по неортогональным функциям выяснением применимости формул возмущения для различных методов. Мы можем ожидать, что эти формулы будут давать быструю сходимость, если недиагональные элементы векового определителя (9.1.96) малы по сравнению с диагональными членами:

$$\frac{EN_{qp} - H_{qp}}{EN_{qq} - H_{qq}} \ll 1, \quad q \neq p. \quad (9.1.109)$$

Это неравенство будет выполнено, если, во-первых, λB_{qp} мало и, во-вторых, мало отклонение от диагональной формы определителей A_{qp} и N_{qp} . Другими словами, для неортогональных функций параметр λ не является больше мерой величины возмущения. Если значения N_{qp} и A_{qp} ($q \neq p$) сравнимы с N_{qq} и A_{qq} , то мы уже не имеем дела с малыми возмущениями, для которых применяются формулы теории возмущений. В части таких случаев дело можно исправить ортогонализацией системы f_p , так как тогда недиагональные величины N_{qp} станут равны нулю. Для малых возмущений следует по-прежнему требовать, чтобы недиагональные элементы λB и A , взятые по отношению к ортогональной системе, были малы по сравнению с диагональными элементами.

9. 2. Поверхностные возмущения

В этом параграфе мы обратимся к задачам, в которых отклонения от точно разрешимой задачи имеют место на границах, в то время как в предыдущем параграфе рассматривались задачи, в которых возмущения были сосредоточены внутри ограниченной области. Возмущения, являющиеся одновременно и объемными и поверхностными, можно изучать последовательным применением результатов §§ 9.1 и 9.2.

Поверхностные возмущения могут заключаться или в изменении граничных условий, или в изменении формы граничной поверхности, или в том и другом. Мы рассмотрим эти два случая отдельно; когда же встречаются оба типа одновременно, можно применить по очереди результаты исследования этих случаев. При решении задачи мы заменим

первоначальное дифференциальное уравнение и связанные с ним граничные условия на интегральное уравнение, которое можно или решить последовательными приближениями или свести к вековому определителю, к которому применимы результаты предыдущего параграфа.

Мы ограничимся рассмотрением скалярного уравнения Гельмгольца; обобщение на большую часть других линейных уравнений получается непосредственно.

Возмущения в граничных условиях, f мало. Здесь мы рассмотрим задачу о собственных значениях, которая получается, если однородные граничные условия Неймана или Дирихле заменяются смешанными граничными условиями:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + f(S) \psi = 0, \quad (9.2.1)$$

где f — вообще говоря, функция поверхностных координат. Точные решения, удовлетворяющие этим граничным условиям, можно получить для полостей (или объемов), имеющих форму параллелепипеда, круглого цилиндра, сферы и т. п., если f постоянно вдоль каждой стенки, на которой постоянна данная координата. Если же f меняется вдоль стенки или стенка имеет более сложную форму, задача не может быть решена методом разделения переменных, и мы должны снова прибегнуть к помощи приближенных методов. В теории возмущений они, естественно, зависят от величины f . Поэтому мы выведем два различных результата, соответствующих большому и малому f .

Рассмотрим сначала малые f . Здесь за невозмущенные решения удобно принять функции, удовлетворяющие однородным условиям Неймана. Пусть ими будут φ_n , и пусть эти функции образуют полную ортонормальную систему, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla^2 \varphi_n + k_n^2 \varphi_n = 0.$$

Чтобы получить интегральное уравнение для функции ψ , мы используем функцию Грина G_k , удовлетворяющую на границах однородным условиям Неймана. Следовательно, G_k является решением уравнения

$$\nabla_0^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) + k^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \frac{\partial G_k}{\partial n_0} = 0,$$

тогда как ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0) + k^2 \psi(\mathbf{r}_0) = 0$$

и граничным условиям (9.2.1). Умножая первое из этих уравнений на ψ , а второе на G_k , вычитая один результат из другого и интегрируя по области, заключенной внутри границ, мы получим

$$\int [G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \nabla_0^2 \psi - \psi \nabla_0^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)] dV_0 = 4\pi \psi(\mathbf{r}). \quad (9.2.2)$$

Используя теорему Грина и граничные условия, которым удовлетворяет G_k , имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int G_k \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0,$$

где подинтегральное выражение вычисляется на граничной поверхности S . Следует напомнить, что правая часть дает представление функции $\psi(\mathbf{r})$, только когда $\mathbf{r}$ находится внутри граничной поверхности, и равна нулю

для $\mathbf{r}$ вне ее. Величина ψ для $\mathbf{r}$, находящегося на поверхности S , получается как предел, когда $\mathbf{r}$ приближается к S изнутри области, ограниченной S . Подстановка граничных условий (9.2.1) в (9.2.2) дает

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int f(\mathbf{r}_0^S) G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S) \psi(\mathbf{r}_0^S) dS_0. \quad (9.2.3)$$

Мы видим, что если значения ψ на поверхности можно определить, то с помощью этого интеграла от поверхностных значений можно вычислить ψ и внутри поверхности; $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S)$ по существу определяет способ, которым значения ψ с границы распространяются внутрь. Для определения этих граничных значений ψ устремим $\mathbf{r}$ к граничной поверхности S в обеих частях равенства (9.2.3), что даст возможность получить интегральное уравнение для $\psi(\mathbf{r}^S)$:

$$\psi(\mathbf{r}^S) = -\frac{1}{4\pi} \int f(\mathbf{r}_0^S) G_k(\mathbf{r}^S | \mathbf{r}_0^S) \psi(\mathbf{r}_0^S) dS_0. \quad (9.2.4)$$

Это уравнение представляет собой однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Его можно решить методом последовательных приближений, а еще лучше свести его к вековому определителю, различные разложения для которого, включая результаты, полученные методом последовательных приближений, были рассмотрены в § 9.1.

Чтобы довести эту программу до конца, важно заметить, что G_k можно представить в виде билинейной формы [см. (7.2.39)]:

$$G_k = 4\pi \sum \frac{\bar{\varphi}_p(\mathbf{r}_0) \varphi_p(\mathbf{r})}{k_p^2 - k^2}$$

где собственные функции φ удовлетворяют однородным условиям Неймана. Тогда функция $\psi(\mathbf{r})$ может быть разложена аналогичным образом:

$$\psi = \sum c_p \varphi_p.$$

Подставляя эти разложения в (9.2.3), имеем

$$\sum_p c_p \varphi_p(\mathbf{r}) = \sum_{qp} c_q \varphi_p(\mathbf{r}) \left[\frac{\int f(\mathbf{r}_0^S) \bar{\varphi}_p(\mathbf{r}_0^S) \varphi_q(\mathbf{r}_0^S) dS_0}{k^2 - k_p^2} \right].$$

Пусть

$$f_{pq} = \int f(\mathbf{r}_0^S) \bar{\varphi}_p(\mathbf{r}_0^S) \varphi_q(\mathbf{r}_0^S) dS_0. \quad (9.2.5)$$

Мы, таким образом, получаем систему линейных уравнений

$$(k^2 - k_p^2) c_p = \sum_q f_{pq} c_q \quad (\text{для каждого } p). \quad (9.2.6)$$

Ненулевое решение этой однородной системы существует, если обращается в нуль определитель из коэффициентов при неизвестных c_p . Это приводит к вековому уравнению

$$|(k^2 - k_p^2) \delta_{pq} - f_{pq}| = 0. \quad (9.2.7)$$

Это уравнение становится идентичным вековому уравнению (9.1.27), к которому применимы итерационно-пертурбационные формулы (включая улучшенный вариант) и формулы Финберга, если λU_{pq} приравнять f_{pq} . Например, модифицированная итерационно-пертурбационная формула для (9.2.7) будет такая:

$$k^2 = k_p^2 + f_{pp} + \sum_{q \neq p} \frac{f_{pq} f_{qp}}{k^2 - k_q^2 - f_{qq}} + \sum_{\substack{qr \neq p \\ r \neq q}} \frac{f_{pq} f_{qr} f_{rp}}{(k^2 - k_q^2 - f_{qq})(k^2 - k_r^2 - f_{rr})} + \dots \quad (9.2.8)$$

Формулы Фредгольма и вариационно-пертурбационные формулы были даны для векового определителя

$$|(E - \varepsilon_p) \delta_{pq} + \lambda B_{pq}| = 0.$$

Следовательно, мы можем использовать эти формулы, подставив

$$E - \varepsilon_p = k^2 - k_p^2 \quad \text{и} \quad \lambda B_{pq} = -f_{pq}.$$

По поводу ограничений применимости формулы (9.2.8), возникающих, из-за того, что функция может иметь слишком сильную особенность, можно вновь сослаться на рассуждения в § 9.1, где мы видели, что f может иметь разрывы, но не должна при этом быть сингулярной. В дальнейшем мы возвратимся в нашем изложении к случаю сингулярности.

Ряды (9.2.8) содержат столько индексов, сколько измерений в рассматриваемой задаче. Можно достичь значительной экономии усилий уменьшением на единицу числа индексов, по которым происходит суммирование. Это можно осуществить, если граничная поверхность такова, что невозмущенные решения можно записать в разделяющихся переменных.

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = \chi_\alpha(S) \Xi_\beta(\xi), \quad (9.2.9)$$

где ξ — координата, которая на граничной поверхности постоянна, а индексы α и β нумеруют собственные функции. Буква S изображает две другие координаты, которые обозначают точку на рассматриваемой граничной поверхности $\xi = \xi_S$. Функции χ на поверхности S образуют полную ортонормальную систему. Тогда из формулы (7.2.63) для функции Грина G_k можно получить, что

$$G_k(\mathbf{r}^S | \mathbf{r}_0^S) = 4\pi \sum_\alpha A_\alpha(k) \chi_\alpha(S) \bar{\chi}_\alpha(S_0). \quad (9.2.10)$$

Пример такого разложения для цилиндрических координат дает формула (7.2.54); ниже помещены другие примеры. Зависимость $A_\alpha(k)$ от k значительно более сложная, чем встречающаяся в билинейном разложении $1/(k^2 - k_p^2)$. Поэтому становится неудобным употреблять k как собственное значение. Форма интегрального уравнения (9.2.4) наводит на мысль о следующей замене f :

$$f(S) = \mu F(S), \quad (9.2.11)$$

где μ есть мера отклонения граничных условий (9.2.1) от условий Неймана. Тогда μ можно рассматривать как собственное значение. Решение, которое мы получим, даст μ как функцию k^2 ; таким образом, это даст ответ на вопрос, какова должна быть величина f при заданном распределении F , чтобы k^2 имело заданное значение. Это, конечно, вопрос, с которым часто встречаются на практике. Действительно, если функциональная зависимость μ от k^2 известна (если f — комплексная функция, эта зависимость может быть представлена линиями уровня в комплексной плоскости k или f и т. п.), то обычно можно получить обратную зависимость k^2 от μ .

Подставляя как (9.2.10), так и (9.2.11) в интегральное уравнение (9.2.4), получаем

$$\psi(\mathbf{r}^S) = -\mu \sum_\alpha A_\alpha(k) \chi_\alpha(S) \int \bar{\chi}_\alpha(S_0) F(S_0) \psi(S_0) dS_0.$$

Разлагая $\psi(\mathbf{r}^S)$ по функциям $\chi_\alpha(S)$,

$$\psi(\mathbf{r}^S) = \sum_\gamma c_\gamma \chi_\gamma(S),$$

и подставляя в обе части последнего уравнения, имеем

$$c_\alpha = -\mu A_\alpha(k) \sum_\gamma c_\gamma F_{\alpha\gamma} \quad \text{для каждого } \alpha,$$

где

$$F_{\alpha\gamma} = \int \bar{\chi}_\alpha F \chi_\gamma dS. \quad (9.2.12)$$

Снова ненулевые решения этой системы уравнений можно получить только при условии, что определитель системы равен нулю, т. е.

$$\left| F_{\alpha\gamma} + \frac{1}{\mu A_\alpha} \delta_{\alpha\gamma} \right| = 0.$$

Можно получить для этого определителя несколько более симметричную форму

$$\left| \sqrt{A_\alpha A_\gamma} F_{\alpha\gamma} + \frac{1}{\mu} \delta_{\alpha\gamma} \right| = 0. \quad (9.2.13)$$

Это—вековое уравнение для $1/\mu$. Сравнивая его со стандартными формами, использованными в предыдущем параграфе, мы видим, что здесь тоже можно использовать и итерационно-пертурбационные формулы (модифицированные или немодифицированные) и формулы Финберга, если провести следующие отождествления:

$$k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp} \rightarrow \frac{1}{\mu} + A_\alpha F_{\alpha\alpha}, \quad -\lambda U_{pq} = \sqrt{A_\alpha A_\gamma} F_{\alpha\gamma}. \quad (9.2.14)$$

Формулы Фредгольма (модифицированные и немодифицированные) и вариационно-пертурбационные формулы можно использовать, если $E - \varepsilon_p + \lambda B_{pp}$ заменить на $(1/\mu) + A_\alpha F_{\alpha\alpha}$ и λB_{pq} на $\sqrt{A_\alpha A_\gamma} F_{\alpha\gamma}$. Например, для α -го собственного значения $1/\mu_\alpha$ модифицированная итерационно-пертурбационная формула дает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\alpha} = & -A_\alpha F_{\alpha\alpha} + \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{A_\alpha A_\gamma F_{\alpha\gamma} F_{\gamma\alpha}}{(1/\mu_\alpha) + A_\gamma F_{\gamma\gamma}} - \\ & - \sum_{\substack{\gamma \delta \neq \alpha \\ \delta \neq \gamma}} \frac{A_\alpha A_\gamma A_\delta F_{\alpha\gamma} F_{\gamma\delta} F_{\delta\alpha}}{[(1/\mu_\alpha) + A_\gamma F_{\gamma\gamma}] [(1/\mu_\alpha) + A_\delta F_{\delta\delta}]} + \dots \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

Этим мы закончим (кроме примера) наше рассмотрение граничного условия $(\partial\psi/\partial n) + f\psi = 0$ при малом f .

Возмущение в граничных условиях, f велико. Рассмотрим теперь случай, когда f велико. Соответствующей системой невозмущенных решений будет та, которая удовлетворяет условиям Дирихле. Мы выберем также и функцию Грина, которая удовлетворяет тем же условиям. При таких условиях уравнение (9.2.2), как читатель может проверить, заменится уравнением

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial G_h}{\partial n_0} \psi(\mathbf{r}_0^S) dS_0.$$

Подставляя граничные условия для функции ψ , получаем аналогично (9.2.3)

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial G_h}{\partial n_0} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.16)$$

Таким образом, значения ψ внутри можно снова получить, как только известны значения производной $\partial\psi/\partial n_0$ на поверхности.

Интегральное уравнение для последней производной получается, если взять нормальную производную от обеих частей, положив

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{r}^S)}{\partial n} = V(S); \quad (9.2.17)$$

тогда

$$V(S) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0} \frac{1}{f} V(S_0) dS_0. \quad (9.2.18)$$

Ядро этого интегрального уравнения, $\frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0}$, нужно вычислять осторожно, имея в виду разрывность G_k как функции точки наблюдения, когда точечный источник находится на поверхности (см. § 7.2). Поэтому мы уточним смысл $\frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0}$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0} = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow S} \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n_0} G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S) \right],$$

где $\mathbf{r}$ приближается к S изнутри. Чтобы вычислить этот предел, удобно сначала исследовать аффино́р

$$\nabla G_k \nabla_0,$$

из которого получается ядро уравнения (9.2.18) как скалярное произведение $\mathbf{n} \cdot \nabla G_k \nabla_0 \cdot \mathbf{n}_0$.

Разложение этого аффино́ра по функциям φ_n , удовлетворяющим условиям Дирихле на поверхности S , следующее:

$$4\pi \sum_n \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \nabla_0 \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 - k^2}.$$

Мы выделим из этого разложения члены с большими n , так как эти члены определяют особенность:

$$4\pi k^2 \sum_n \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \nabla_0 \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 (k_n^2 - k^2)} + 4\pi \sum_n \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \nabla_0 \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2}.$$

Второй член можно исследовать быстро, так как векторные функции

$$\mathbf{v}_n = \frac{\nabla \varphi_n}{k_n} \quad (9.2.19)$$

образуют ортонормальную систему, которую можно использовать для описания любого вектора, циркуляция которого равна нулю (см. § 13.1). Можно легко проверить, используя теорему Грина, что

$$\int \bar{\mathbf{v}}_n \cdot \mathbf{v}_m dV = \delta_{nm}.$$

Полезно ввести понятие сингулярного аффино́ра $\mathfrak{D}_l$, определяемого уравнением [см. (13.1.30)]

$$\mathfrak{D}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \sum_n \mathbf{v}_n(\mathbf{r}) \mathbf{v}_n(\mathbf{r}_0) = \sum_n \mathbf{v}_n(\mathbf{r}) \int \bar{\mathbf{v}}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathfrak{D}_l dV,$$

так что сумма $\mathfrak{D}_l$ удовлетворяет условию

$$\int \bar{\mathbf{v}}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{D}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) dV = \bar{\mathbf{v}}_n(\mathbf{r}_0).$$

Так как это соотношение справедливо для всех n , то оно справедливо и для любого безвихревого вектора $\mathbf{A}$:

$$\int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{D}_l(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dV = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0), \quad \text{rot } \mathbf{A} = 0. \quad (9.2.20)$$

Более того, так как $\mathbf{A}$ — любой безвихревой вектор, то отсюда следует, что $\mathfrak{D}_l$ должен иметь при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ особенность, очень похожую на особенность δ -функции Дирака, равной нулю везде, кроме $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Это можно видеть, выбирая вектор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, который равен нулю при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, но конечен в других точках. Для произвольного $\mathbf{A}$ уравнение (9.2.20) удовлетворяется, только если $\mathfrak{D}_l(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ равно нулю при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$.

Это все, в чем мы нуждаемся, чтобы вычислить $\partial^2 G_k / \partial n \partial n_0$; но мы должны добавить, что $\mathfrak{D}_l(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ появится снова в гл. 13, где $\mathfrak{D}_l$ будет рассматриваться как безвихревая часть (называемая там продольной) аффинора $\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — единичный оператор (идемфактор) (см. 13.1.34). Кроме того,

$$\mathfrak{G}_k = 4\pi \sum_n \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \cdot \nabla \bar{\phi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 (k_n^2 - k^2)} \quad (9.2.21)$$

упоминается в гл. 13 как продольный аффинор Грина.

Уравнения (9.2.16) и (9.2.18) можно теперь переписать, введя в них функцию $\mathfrak{G}_k$, причем мы отбрасываем $\mathfrak{D}_l$, так как он равен нулю при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$:

$$\nabla \psi(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int \mathfrak{G}_k \cdot \mathbf{n}_0 \frac{1}{f} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0 \quad (9.2.22)$$

и [см. (9.2.18)]

$$V(S) = \frac{k^2}{4\pi} \int \mathbf{n} \cdot \mathfrak{G}_k \cdot \mathbf{n}_0 \frac{1}{f} V(S_0) dS_0. \quad (9.2.23)$$

Мы можем получить вековые уравнения, подобные уравнениям (9.2.7) и (9.2.13). Чтобы получить первое из них, разложим $\nabla \psi$ по векторам (9.2.19),

$$\nabla \psi = \sum c_p \mathbf{v}_p = \sum \frac{c_p}{k_p} \nabla \varphi_p, \quad (9.2.24)$$

и подставим в (9.2.22). Тогда

$$c_p = \sum_q c_q \frac{k^2}{k_p k_q (k_p^2 - k^2)} \int \frac{\partial \bar{\varphi}_p}{\partial n_0} \frac{1}{f} \frac{\partial \varphi_q}{\partial n_0} dS_0.$$

Характеристическое уравнение, определяющее собственное значение k , будет иметь вид

$$\left| (k^2 - k_p^2) \delta_{pq} + \left(\frac{1}{f} \right)_{pq} \right| = 0, \quad (9.2.25)$$

где

$$\left(\frac{1}{f} \right)_{pq} = \frac{1}{k_p k_q} \int \frac{\partial \bar{\varphi}_p}{\partial n_0} \frac{1}{f} \frac{\partial \varphi_q}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.26)$$

Теперь можно получить различные пертурбационные формулы, установив соответствие со стандартными формами этого уравнения в § 9.1. Итерационно-пертурбационные формулы в этом случае можно вывести, заменив f_{pq} на $-(1/f)_{pq}$ в (9.2.8). Условия на сходимость отдельных рядов ограничивают возможные особенности в $1/f$, не допуская особенностей, более сильных, чем конечные разрывы.

Чтобы получить вековой определитель, аналогичный (9.2.13), мы должны не только ввести определение (9.2.11), $f(S) = \mu F(S)$, но должны также найти разложение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}_0$, подобное разложению (9.2.10) для G_k . Для этой цели заметим, что

$$\mathbf{G}_k = \nabla G_k \nabla_0 - \nabla G_0 \nabla_0.$$

Следовательно, если, как установлено в формуле (7.2.63) [см. также (9.2.10)], G_k можно разложить в разделяющихся переменных следующим образом:

$$G_k(S, \xi | S_0, \xi_0) = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{\chi}_{\alpha}(S) \chi_{\alpha}(S_0) \bar{\Xi}_{\alpha}(\xi, k) \Xi_{\alpha}(\xi_0, k),$$

где ξ — нормальная к S координата, то функции χ_{α} образуют полную ортонормальную систему относительно всех переменных, кроме ξ . Форма произведения функций, зависящих от ξ и ξ_0 , зависит от того, больше ξ_0 , чем ξ , или меньше. Предположим, что значение ξ на поверхности S меньше, чем внутри. В приведенном выше приложении мы использовали выражение, соответствующее случаю $\xi > \xi_0$.

Мы можем теперь написать

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}_0 = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(S) \bar{\chi}_{\alpha}(S_0) \left[\frac{\partial \Xi_{\alpha}(\xi, k)}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Xi}_{\alpha}(\xi_0, k)}{\partial \xi_0} - \frac{\partial \Xi_{\alpha}(\xi, 0)}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Xi}_{\alpha}(\xi_0, 0)}{\partial \xi_0} \right],$$

где производные вычисляются для ξ и ξ_0 , лежащих на поверхности, или, в более краткой форме,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}_0 = 4\pi \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(S) \bar{\chi}_{\alpha}(S_0) B_{\alpha}(k). \quad (9.2.27)$$

Если теперь в (9.2.23) подставить разложение для V по функциям χ_{α} , то характеристическое уравнение получается окончательно следующим:

$$\left| \mu \delta_{\alpha\gamma} - \sqrt{B_{\alpha} B_{\gamma}} \left(\frac{1}{F} \right)_{\alpha\gamma} \right| = 0, \quad (9.2.28)$$

где

$$\left(\frac{1}{F} \right)_{\alpha\gamma} = \int \bar{\chi}_{\alpha} \frac{1}{F} \chi_{\gamma} dS. \quad (9.2.29)$$

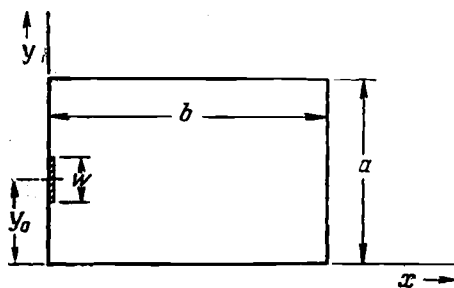
Результаты § 9.1 можно теперь применить к вековому уравнению, что уже знакомо читателю.

Подведем итоги обсуждения этого вопроса. Были выведены вековые уравнения, решение которых дает решение скалярного уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$, где ψ удовлетворяет смешанным граничным условиям: $(\partial \psi / \partial n) + f \psi = 0$. Уравнения (9.2.7) и (9.2.13) применимы при малых f , (9.2.25) и (9.2.28) — при больших. Уравнения (9.2.13) и (9.2.28) более удобны, если скалярное уравнение Гельмгольца можно решить разделением переменных для однородных условий Неймана и Дирихле соответственно. В противном случае надо использовать (9.2.7) и (9.2.25). Когда получено вековое уравнение, можно применять результаты § 9.1. Эти формулы пригодны до тех пор, пока сходятся отдельные ряды, входящие в решение, что будет иметь место в разбираемом случае, если у функции f нет особенностей, более сильных, чем разрывы. Действительно, если f имеет особенность типа дельта-функции $\delta(S - S')$, то из первоначального интегрального уравнения непосредственно ясно, что решения не существует. Это указывает на то, что если f (или $1/f$) отличается от нуля только в небольшой области, то практически сходимость в формулах (9.2.25) и (9.2.28) получается плохой.

В качестве примера рассмотрим сумму

$$\sum_{q \neq p} \frac{f_{pq} f_{qp}}{k^2 - k_q^2 - f_{qq}}.$$

Интегралы f_{pq} и f_{qp} будут уменьшаться для больших q , как $1/k_q$, так что сходимость обеспечена. Однако эта асимптотическая зависимость не достигается до тех пор, пока длина волны функции φ_q не станет значительно меньше, чем область, в которой f отлична от нуля. Следовательно,



если такая область невелика, необходимо взять много членов в сумме, прежде чем множитель $1/k_q^2$ станет существенным и сделает ряд сходящимся. Конечно, если такая область есть просто точка, как в случае дельта-функции, то это никогда не произойдет, и ряд расходится. Способ, которым можно обойти эту трудность в теории возмущений, будет показан на следующем примере.

Рис. 9.2. Волны в прямоугольнике со специальными отражающими свойствами вдоль области длины w .

Пример. Рассмотрим двумерную задачу, в которой граничная поверхность представляет собой прямоугольник со сторонами a и b (см. рис. 9.2).

Мы требуем, чтобы решение скалярного уравнения Гельмгольца удовлетворяло однородным условиям Неймана везде, кроме области на граничной линии $x=0$ с центром y_0 , т. е. для $(y_0 - w/2) < y < (y_0 + w/2)$. В этой области ψ удовлетворяет условию $(\partial\psi/\partial n) + \mu\psi = 0$ или, более точно, $-(\partial\psi/\partial x) + \mu\psi = 0$, где $\mu = \text{const}$. Другими словами, f в уравнении (9.2.1) равно нулю везде, за исключением области ширины w с центром в y_0 , где f равно постоянной μ .

Так как невозмущенную задачу можно решить разделением переменных, в данной задаче удобно использовать метод, изложенный в тексте после формулы (9.2.9) и приводящий в конце концов к вековому уравнению (9.2.13). Решениями φ_n невозмущенной задачи являются

$$\varphi_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{ab}} \cos\left(\frac{\pi\beta x}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi\alpha y}{a}\right); \quad \alpha \text{ и } \beta - \text{целые.}$$

В соответствии с обозначениями (9.2.9)

$$\chi_{\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\alpha}}{a}} \cos\left(\frac{\pi\alpha y}{a}\right), \quad \Xi_{\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\beta}}{b}} \cos\left(\frac{\pi\beta x}{b}\right)$$

Функцию Грина $G_k(x, y | x_0, y_0)$ можно получить согласно рецепту, данному в гл. 7:

$$G_k = -4\pi \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(y) \chi_{\alpha}(y_0) \frac{\text{cosec}[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} b]}{\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2}} \times \\ \times \begin{cases} \cos[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} x] \cos[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} (b - x_0)] & \text{при } x < x_0, \\ \cos[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} (b - x)] \cos[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} x_0] & \text{при } x > x_0. \end{cases}$$

Полагая на поверхности $x = x_0 = 0$, мы получаем

$$G_k(S | S_0) = -4\pi \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(y) \chi_{\alpha}(y_0) \frac{\text{ctg}[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} b]}{\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2}}, \quad (9.2.30)$$

так что множитель $A_\alpha(k)$, который появляется в формуле (9.2.10), равен

$$A_\alpha(k) = -\frac{\operatorname{ctg} \left[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} b \right]}{\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2}}.$$

Для векового уравнения (9.2.13) требуется найти, кроме величин A_α , еще и $F_{\alpha\gamma}$, определенные в (9.2.12). В данном случае

$$F_{\alpha\gamma} = \int_{y_0-w/2}^{y_0+w/2} \chi_\alpha \chi_\gamma dy = \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma}{a^2}} \int_{y_0-w/2}^{y_0+w/2} \cos\left(\frac{\pi\alpha y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi\gamma y}{a}\right) dy,$$

или

$$F_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma}{a^2}} \left[\frac{\sin \left[\frac{\pi}{a} (\alpha + \gamma) y \right]}{\frac{\pi}{a} (\alpha + \gamma)} + \frac{\sin \left[\frac{\pi}{a} (\alpha - \gamma) y \right]}{\frac{\pi}{a} (\alpha - \gamma)} \right]_{y_0-w/2}^{y_0+w/2} \quad (9.2.31)$$

и

$$F_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_\alpha}{a} \left[y + \frac{\sin \frac{2\pi\alpha y}{a}}{\frac{2\pi\alpha}{a}} \right]_{y_0-w/2}^{y_0+w/2} \quad (9.2.32)$$

Эти результаты можно теперь подставить в различные пертурбационные формулы, выведенные в § 9.1. Здесь мы удовлетворимся исследованием итерационно-пертурбационной формулы до второго порядка включительно, которая получится в данном случае из (9.2.15):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\alpha A_\alpha} = & -\frac{1}{2} \varepsilon_\alpha \left[\frac{y}{a} + \frac{\sin \frac{2\pi\alpha y}{a}}{2\pi\alpha} \right] - \frac{1}{4} \sum_{\gamma \neq \alpha} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma \frac{\operatorname{ctg} \left[\sqrt{(k\alpha)^2 - (\pi\gamma)^2} \frac{b}{a} \right]}{\sqrt{(k\alpha)^2 - (\pi\gamma)^2}} \times \\ & \times \frac{\left\{ \frac{\sin \left[\pi (\alpha + \gamma) \frac{y}{a} \right]}{\pi (\alpha + \gamma)} + \frac{\sin \left[\pi (\alpha - \gamma) \frac{y}{a} \right]}{\pi (\alpha - \gamma)} \right\}^2}{\frac{1}{\mu_\alpha a} + \frac{1}{2} \varepsilon_\gamma \left[\frac{y}{a} + \frac{\sin \left(2\pi\gamma \frac{y}{a} \right)}{2\pi\gamma} \right]}; \end{aligned} \quad (9.2.33)$$

здесь в каждую отдельную функцию от y надо подставить вместо y пределы $y_0 + w/2$ и $y_0 - w/2$, как указано в (9.2.31) и (9.2.32). Заметим, что в числителе эти подстановки нужно сделать до возведения в квадрат. Сходимость этого ряда хорошая, так как для больших γ члены ряда аппроксимируются выражением

$$\frac{-8\varepsilon_\alpha}{(\pi\gamma)^3} \frac{\left\{ \cos\left(\pi\alpha \frac{y}{a}\right) \sin\left(\pi\gamma \frac{y}{a}\right) \right\}^2}{\frac{1}{\mu_\alpha a} + \frac{w}{a}},$$

или, подставляя пределы,

$$\frac{-8\varepsilon_\alpha [\sin(\pi\gamma\eta_0^+) \cos(\pi\alpha\eta_0^+) - \sin(\pi\gamma\eta_0^-) \cos(\pi\alpha\eta_0^-)]^2}{(\pi\gamma)^3 \left(\frac{1}{\mu_\alpha a} + \frac{w}{a} \right)}, \quad (9.2.34)$$

где введены сокращенные обозначения

$$\eta_0 = \frac{y_0}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a}; \quad \eta_0^+ = \frac{y_0 + w/2}{a}; \quad \eta_0^- = \frac{y_0 - w/2}{a}.$$

Рассмотрим теперь, при каких значениях γ асимптотическая форма $O(\gamma^{-3})$ слагаемых в (9.2.33) становится существенной, так как тогда мы сможем приблизительно знать, какое количество членов ряда нужно подсчитать, чтобы получить точное значение для суммы. Конечно, необходимо, чтобы $\mu \gg \alpha$, $\pi\gamma \gg ka$ и $\pi\gamma b/a \gg 1$. Другое условие станет более очевидным, если подставить пределы в члены $\sin[\pi(\alpha \pm \gamma)\eta]/\pi(\alpha \pm \gamma)$. После подстановки получаем

$$\frac{2\cos[\pi(\alpha \pm \gamma)\eta_0] \sin\left[\pi(\alpha \pm \gamma)\frac{\omega}{2a}\right]}{\pi(\alpha \pm \gamma)}.$$

Теперь ясно, что асимптотическая зависимость будет иметь силу, лишь если γ настолько велико, что

$$(\alpha \pm \gamma)\frac{\omega}{a} > 1. \quad (9.2.35)$$

Если это условие не выполняется, т. е. если $(\alpha \pm \gamma)\omega \ll a$, то

$$\frac{\sin\left[\pi(\alpha \pm \gamma)\frac{\omega}{2a}\right]}{\pi(\alpha \pm \gamma)} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{\omega}{2a}$$

и дробь не будет иметь вида $O(\gamma^{-1})$, который получится, если удовлетворяется условие (9.2.35).

Таким образом, даже для больших γ члены ряда в (9.2.33) убывают очень медленно до тех пор, пока не начинает удовлетворяться неравенство (9.2.35). Мы видим, что число членов, необходимое для точного вычисления, равно приблизительно a/ω , так что ряд (9.2.33) неудобен при малом ω/a .

Формулы для малого ω . Чтобы обойти это затруднение, мы вычтем ряд, полученный суммированием (9.2.34) от единицы до ∞ . Члены оставшегося ряда будут тогда порядка γ^{-5} для больших γ , если удовлетворяется (9.2.35), и порядка γ^{-3} в противном случае, так что ряд вполне пригоден даже, когда ω приближается к нулю. Трудности, которые мы имели в первоначальном ряде, теперь перешли в вычитаемый ряд. Более определенно, пусть

$$S(\eta) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi\gamma\eta)}{\gamma^3} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{\omega}{a}. \quad (9.2.36)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_a A_a} = & -\frac{1}{2} \varepsilon_a \left[\omega + \frac{\sin(\pi\alpha\omega) \cos(2\pi\alpha\eta_0)}{\pi\alpha} \right] + \\ & + \frac{\varepsilon_a}{\pi^3 [\omega + (1/\mu_a a)]} \left\{ \cos^2(\pi\alpha\eta_0^+) [S(0) - S(2\eta_0^+)] + \cos^2(\pi\alpha\eta_0^-) [S(0) - S(2\eta_0^-)] - \right. \\ & - 2 \cos(\pi\alpha\eta_0^+) \cos(\pi\alpha\eta_0^-) [S(\omega) - S(\eta_0^+ + \eta_0^-)] - \frac{2}{a^3} \sin^2(\pi\alpha\omega) \cos^2(2\pi\alpha\eta_0) \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{4} \sum_{\gamma \neq a} \varepsilon_a \varepsilon_{\gamma} \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \left[\sqrt{(ka)^2 - (\pi\gamma)^2} \frac{b}{a} \right]}{\sqrt{(ka)^2 - (\pi\gamma)^2}} \left\{ \frac{\sin[\pi(\alpha + \gamma)\eta]}{\pi(\alpha + \gamma)} + \frac{\sin[\pi(\alpha - \gamma)\eta]}{\pi(\alpha - \gamma)} \right\}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu_a a} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma} \left[\eta + \frac{\sin(2\pi\gamma\eta)}{2\pi\gamma} \right] \right\} + \\ & + \frac{4(1 - \delta_{0\gamma})}{(\pi\gamma)^3} \frac{[\cos(\pi\alpha\eta) \sin(\pi\gamma\eta)]^2}{\frac{1}{\mu_a a} + \omega} \left. \right\}, \quad (9.2.37) \end{aligned}$$

где пределы $\eta = \eta_0^+$, η_0^- по-прежнему должны быть подставлены в последней части этого равенства. Множитель $1 - \alpha_0 \gamma$ указывает на то, что в сумме опускается член с $\gamma = 0$.

Мы перейдем теперь к исследованию поведения правой части равенства (9.2.37) для малого ω .

Нам нужны некоторые свойства $S(\eta)$. Сумму, полученную двукратным дифференцированием $S(\eta)$, можно выразить в замкнутой форме:

$$S''(\eta) = -\pi^2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi\gamma\eta)}{\gamma} = \frac{\pi^2}{2} \ln[2(1 - \cos \pi\eta)].$$

Для малого η

$$S''(\eta) \underset{\eta \rightarrow 0}{\simeq} \pi^2 \ln(\pi\eta). \quad (9.2.38)$$

Последовательным интегрированием получаем

$$S'(\eta) = -\pi \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[\sin \frac{\pi\gamma\eta}{\gamma^2} \right] \simeq \pi^2 \eta [\ln \eta + \ln \pi - 1] \quad (9.2.39)$$

и

$$S(\eta) \underset{\eta \rightarrow 0}{\simeq} S(0) + \frac{\pi^2 \eta^2}{2} \left[\ln \eta - \frac{3}{2} + \ln \pi \right]. \quad (9.2.40)$$

Графики сумм $S(\eta)$ и $-\frac{1}{\pi} S'(\eta)$ приведены на рис. 9.3 и 9.4.

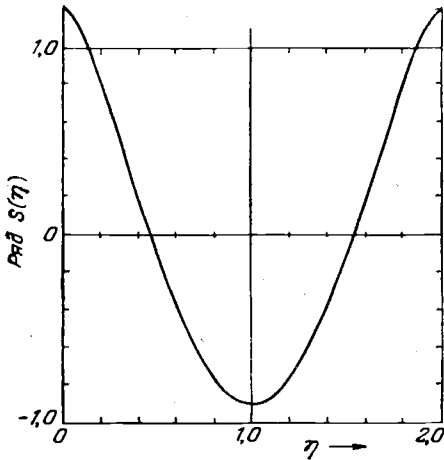


Рис. 9.3. Корректирующий ряд $S(\eta)$ [определенный формулой (9.2.36)] для эффекта неоднородности граничных условий.

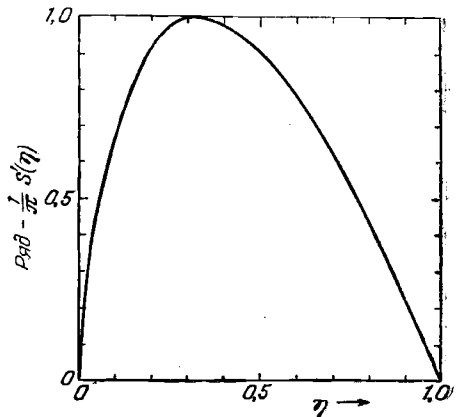


Рис. 9.4. Производная ряда $S(\eta)$ как функция от η .

Приведенные выше приближенные формулы справедливы в области $0 \leq \eta \leq 0,5$. Из равенства (9.2.37) мы можем теперь обнаружить невозможность особенности типа δ -функции, т. е. случая, когда $f(S)$ в (9.2.1) равна $\delta(y - y_0)$. Это можно получить из формул (9.2.37) и (9.2.40), полагая $\omega \rightarrow 0$ и $\mu_\alpha \rightarrow \infty$, причем $\mu_\alpha \omega \rightarrow C_\alpha = \text{const}$. Тогда из-за наличия $S(\omega)$ появляется член с логарифмической особенностью, указывающей, возможно, на несостоятельность в этом случае теории возмущений.

Этот результат не случаен, поскольку, как мы покажем сейчас, если $f(S) = C\delta(S - S')$, где S' — точка на поверхности, то не существует ко-

нечного решения интегрального уравнения, определяющего ψ . Подставляя это выражение для f в интегральное уравнение (9.2.4), получаем

$$\psi(S) = -\frac{C}{4\pi} G_k(S|S') \psi(S'). \quad (9.2.41)$$

Чтобы определить k^2 (или C), мы должны положить $S=S'$ и найти величину k^2 , которая делает уравнение разрешимым:

$$\frac{4\pi}{C} = -\lim_{S' \rightarrow S} G_k(S|S').$$

В двумерной задаче, рассматриваемой здесь, $G_k(S|S')$ имеет логарифмическую особенность при $S=S'$, независимо от k , а следовательно, при ненулевых C не существует решения интегрального уравнения.

Длинный узкий прямоугольник. Много членов в рядах теории возмущений нужно вычислять также и при малом значении b/a , т. е. когда прямоугольник длинный и узкий. Мы можем провести разложение каждого члена в ряд по степеням b/a . Однако, оказывается, более просто разложить саму функцию Грина. Из (9.2.30) при помощи ряда $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \dots$ получаем

$$G_k(0, y|0, y_0) \simeq \frac{4\pi}{b} \sum_{\alpha} \frac{\chi_{\alpha}(y) \chi_{\alpha}(y_0)}{\left(\frac{\pi a}{a}\right)^2 - k^2} + \frac{4\pi b}{3} \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(y) \chi_{\alpha}(y_0).$$

Первая сумма с точностью до множителя $1/b$ равна функции Грина для одномерной задачи

$$\Gamma_k(y|y_0) = 4\pi \sum_{\alpha} \frac{\chi_{\alpha}(y) \chi_{\alpha}(y_0)}{\left(\frac{\pi a}{a}\right)^2 - k^2}.$$

При этом

$$\frac{d^2 \Gamma_k}{dy^2} + k^2 \Gamma_k = -4\pi \delta(y - y_0).$$

Вторая сумма пропорциональна $\delta(y - y_0)$. Поэтому окончательно

$$G_k(0, y|0, y_0) \simeq \frac{1}{b} \Gamma_k(y|y_0) + \frac{4\pi b}{3} \delta(y - y_0). \quad (9.2.42)$$

Если мы возьмем больше членов в разложении котангенса, в (9.2.42) добавятся высшие производные дельта-функции. Подстановка (9.2.42) в интегральное уравнение (9.2.4) дает

$$\psi(y) = -\frac{1}{4\pi b} \int f(y_0) \Gamma_k(y|y_0) \psi(y_0) dy_0 - \frac{b}{3} f(y) \psi(y).$$

Это интегральное уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2}{dy^2} \left(1 + \frac{b}{3} f\right) \psi + \left(k^2 - \frac{f}{b}\right) \psi = 0 \quad (9.2.43)$$

с граничными условиями

$$\frac{d}{dy} \left(1 + \frac{b}{3} f\right) \psi = 0 \quad \text{при } y=0 \text{ и } y=a.$$

Если f — достаточно простая функция, как это имеет место в рассматриваемом случае, то дифференциальное уравнение (9.2.43) можно решить и получить функцию ψ на поверхности и величину собственного

значения k^2 . Если функция ψ на поверхности известна, то с помощью (9.2.3) можно получить ψ внутри области. Мы видим, таким образом, что если b достаточно мало, то эффект изменения граничных условий настолько локализован, что учитывается дифференциальным уравнением лучше, чем интегральным.

Возмущение формы границы. Рассмотрим теперь, как отражаются на собственных значениях и собственных функциях изменения в форме граничной поверхности. Пусть S' — первоначальная поверхность, а S — искривленная (см. рис. 9.5).

Аналогично, область, ограниченную поверхностью S' , обозначим через R' , а область, ограниченную поверхностью S , — через R . На чертеже R заключена внутри R' . Это существенно, если мы хотим выразить собственные функции для области R через собственные функции области R' . Мы ограничимся снова рассмотрением уравнения Гельмгольца и однородных граничных условий Неймана или Дирихле. Предположим, что собственные функции φ_n , удовлетворяющие этим граничным условиям на поверхности S' , и соответствующие им собственные значения k_n^2 известны, так что

$$\nabla^2 \varphi_n + k_n^2 \varphi_n = 0. \quad (9.2.44)$$

Займемся теперь выводом интегрального уравнения для функции ψ , удовлетворяющей граничным условиям на поверхности S и уравнению

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0.$$

Интегральное уравнение вытекает из интегрального представления функции ψ через функцию Грина $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$, удовлетворяющую граничным условиям на S' , и через саму функцию ψ , которое можно получить прямо применением теоремы Грина к уравнению (9.2.2):

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^S) \frac{\partial \psi}{\partial n_0} - \psi \frac{\partial G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^S)}{\partial n_0} \right\} dS_0. \quad (9.2.45)$$

Мы обращаем внимание на то, что этот интеграл представляет ψ *только внутри S* , будучи равным нулю вне ее.

Теперь нужно уточнить граничные условия. Рассмотрим сначала однородные условия Неймана на поверхности S . Выберем G_k и φ_n удовлетворяющими однородным условиям Неймана на поверхности S' ; тогда (9.2.45) приобретает вид

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \psi \frac{\partial G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^S)}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.46)$$

Мы видим опять, что если функция ψ на поверхности S известна, то ее можно вычислить для любого $\mathbf{r}$ внутри поверхности с помощью (9.2.46). Интегральное уравнение получится, если взять $\mathbf{r}$ лежащим на поверхности S :

$$\psi(S) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \psi(S_0) \frac{\partial G_k(S|S_0)}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.47)$$

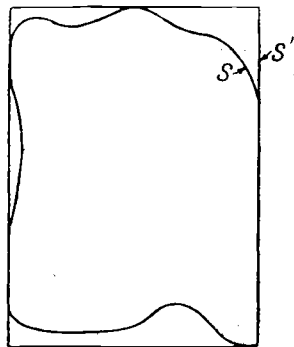


Рис. 9.5. Возмущение формы границы от простой формы S' к искривленной S .

Сведем затем равенства (9.2.46) и (9.2.47) к эквивалентным им векторным уравнениям, к которым можно применить технику, описанную в § 9.1. Так как функция, определяемая интегралом в (9.2.46), равна нулю вне S и, следовательно, имеет разрыв при переходе через S , ее разложение по функциям φ_n сходится не слишком хорошо. Это приводит к мысли, что разложение по функциям, равным φ_n внутри области, ограниченной S , и нулю вне этой области, будет более подходящим. Мы обозначим эти функции через Φ_n . Пусть тогда

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_p c_p \Phi_p. \quad (9.2.48)$$

Подставляем (9.2.48) в обе части равенства (9.2.46) и используем разложения (предполагая, что φ_p действительны)

$$G_k = 4\pi \sum_q \frac{\varphi_q(\mathbf{r}_0) \varphi_q(\mathbf{r})}{k_q^2 - k^2}$$

и

$$\Phi_p = \sum_q N_{qp} \varphi_q, \quad N_{pq} = \int_R \varphi_p \Phi_q dV, \quad (9.2.49)$$

где значок R означает, что интеграл берется только по области R . Получается следующая система уравнений для вычисления c_p :

$$\sum_p c_p [N_{qp}(k^2 - k_q^2) - A_{qp}] = 0 \text{ для каждого } q, \quad (9.2.50)$$

где

$$A_{qp} = \int \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} \varphi_p dS. \quad (9.2.51)$$

Уравнения (9.2.50) — точно такие же, как уравнения (9.1.95), полученные при рассмотрении теории возмущений в случае неортогональных функций. Мы отождествим

$$EN_{pp} - H_{pp} \text{ с } (k^2 - k_p^2) N_{pp} - A_{pp}$$

и

$$H_{pq} - EN_{pq} \text{ с } A_{pq} - (k^2 - k_p^2) N_{pq}.$$

Теперь можно непосредственно использовать выражение (9.1.98) для того, чтобы получить разложение функции ψ . Формула второго порядка для ψ дает

$$\begin{aligned} \psi = \Phi_n + \sum_{p \neq n} \frac{A_{pn} - (k^2 - k_p^2) N_{pn}}{N_{pp}(k^2 - k_p^2) - A_{pp}} \Phi_p + \\ + \sum_{\substack{qp \neq n \\ q \neq p}} \frac{[A_{pq} - (k^2 - k_p^2) N_{pq}][A_{qn} - (k^2 - k_q^2) N_{qn}]}{[N_{pp}(k^2 - k_p^2) - A_{pp}][N_{qq}(k^2 - k_q^2) - A_{qq}]} \Phi_p. \end{aligned} \quad (9.2.52)$$

Формулу (9.1.99) невозможно использовать для вычисления собственного значения точнее, чем во втором порядке, поскольку, как мы увидим ниже, второй ряд в (9.2.52) сходится только в среднем и поэтому не может быть вычислен на граничной поверхности прямой подстановкой. Однако существует способ улучшения сходимости; мы рассмотрим его позже. Выражение для k^2 второго порядка точности можно получить из фор-

мулы (9.1.99):

$$(k^2 - k_n^2) N_{nn} = A_{nn} + \sum_{p \neq n} \frac{[A_{np} - (k^2 - k_n^2) N_{np}] [A_{pn} - (k^2 - k_p^2) N_{pn}]}{N_{pp} (k^2 - k_p^2) - A_{pp}}. \quad (9.2.53)$$

Так как будет доказана невозможность получить подобные формулы для членов более высокого порядка, важно иметь выражение для $k^2 - k_n^2$ через функцию ψ , которое можно получить, минуя формулу (9.2.52). Мы начнем с дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют ψ и φ_n :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 \varphi_n + k_n^2 \varphi_n = 0.$$

Из них сразу следует, что

$$\psi \nabla^2 \varphi_n - \varphi_n \nabla^2 \psi = (k^2 - k_n^2) \varphi_n \psi.$$

Интегрируя по области R , используя теорему Грина и подставляя граничные условия для ψ , имеем

$$\int_S \psi \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} dS = (k^2 - k_n^2) \int_R \psi \varphi_n dV.$$

Напишем $\psi = \varphi_n + (\psi - \varphi_n)$. Тогда

$$(k^2 - k_n^2) N_{nn} = A_{nn} - (k^2 - k_n^2) \int_R \varphi_n (\psi - \varphi_n) dV + \int_S (\psi - \varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} dS. \quad (9.2.54)$$

Если члены нулевого и первого порядка в (9.2.52) подставить в это уравнение, то получается уравнение (9.2.53).

Вычисление интегралов. Для того чтобы рассмотреть важный вопрос о сходимости рядов (9.2.52) и (9.2.53), необходимо оценить величину интегралов N_{pq} и A_{pq} . Сначала мы покажем, что объемные интегралы N_{pq} можно выразить через поверхностные интегралы. Из уравнений для функций φ_p и φ_q получаем сразу

$$\varphi_q \nabla^2 \varphi_p - \varphi_p \nabla^2 \varphi_q = (k_q^2 - k_p^2) \varphi_p \varphi_q.$$

Интегрируя по области R и используя теорему Грина, находим

$$N_{pq} = \frac{A_{pq} - A_{qp}}{k_q^2 - k_p^2}. \quad (9.2.55)$$

Обращаясь теперь к N_{pp} , заметим, что соотношение между N_{pp} и производной по k^2 от A_{pq} подсказывается равенством (9.2.55). Рассмотрим поэтому уравнение для $\partial \varphi / \partial (k^2)$:

$$\nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} + k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} = -\varphi.$$

Комбинируя это уравнение с уравнением для $\bar{\varphi}$, получаем

$$-\bar{\varphi} \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} + \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} \nabla^2 \bar{\varphi} = \bar{\varphi} \varphi.$$

Интегрируя по области R и подставляя $k^2 = k_p^2$, получаем величину N_{pp} :

$$N_{pp} = \int_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial (k^2)} \bar{\varphi} \right]_{k^2=k_p^2} dS. \quad (9.2.56)$$

Это совершенно общий результат, он применим, в частности, и в случае разделяющихся переменных, который может служить поэтому иллюстрацией. Между прочим, формула (9.2.56) часто дает простейший способ вычисления нормирующего интеграла для случая разделяющихся

переменных, так как тогда она применима к каждой из собственных функций, дающих в произведении решение многомерной задачи. Для каждого из этих сомножителей поверхностный интеграл сводится к величине, получаемой подстановкой пределов изменения переменной, от которой эта собственная функция зависит, так что нормирующий интеграл можно получить без интегрирования! Чтобы проиллюстрировать это, найдем нормирующий интеграл для функции

$$\varphi_p = \cos \frac{p\pi x}{b},$$

которая удовлетворяет граничным условиям Неймана при $x=0$ и $x=b$. Пусть φ в (9.2.56) равна $\cos kx$, так что $k_p = \frac{p\pi}{b}$. Тогда

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} \right]_{k=k_p} = -\frac{bx}{2\pi p} \sin \frac{p\pi x}{b}.$$

Заметив, что для этой задачи $\partial/\partial n = \partial/\partial x$, приведем уравнение (9.2.56) к виду

$$N_{pp} = \frac{1}{2} \left[x \sin^2 \left(\frac{p\pi x}{b} \right) + x \cos^2 \left(\frac{p\pi x}{b} \right) + \frac{b}{\pi p} \sin \frac{p\pi x}{b} \cos \frac{p\pi x}{b} \right]_0^b,$$

так что $N_{pp} = b/2$, как и должно быть. Более сложный пример будет разобран ниже, когда будут рассмотрены конкретные задачи теории возмущений границы.

Показав, что мы можем ограничить наши рассмотрения поверхностными интегралами, мы обратимся теперь к способу, которым должна быть задана поверхность и вычислены нормальная производная и элемент площади поверхности. Предположим, что невозмущенная поверхность может быть определена заданием одной (скажем ξ_1) из трех переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 , в которых уравнение Гельмгольца разделяется. Тогда уравнение для возмущенной поверхности можно записать так:

$$S(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

где

$$S = \xi_1 - c - f(\xi_2, \xi_3),$$

а c — значение ξ_1 на невозмущенной поверхности; функция f описывает возмущение. Встречающаяся в формулах величина $\frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$ в терминах S оказывается такой:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = h_2 h_3 \nabla \varphi \cdot \nabla S d\xi_2 d\xi_3$$

п.

$$\nabla \varphi \cdot \nabla S = \frac{1}{h_1^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} - \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} - \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \frac{\partial f}{\partial \xi_3}, \quad (9.2.57)$$

где после того, как произведено дифференцирование, ξ_1 надо заменить на $c + f(\xi_2, \xi_3)$. Область, пробегаемая переменными ξ_2 и ξ_3 , как раз такая, которая требуется для описания первоначальной поверхности S' .

Сходимость. Сходимость различных рядов в (9.2.52) и (9.2.53) определяется поведением элементов A_{pq} при больших k_p и k_q . Это можно увидеть более ясно, если выписать A_{pq} в явной форме. Пусть

$$\varphi_p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \chi_p(\xi_2, \xi_3) X_p(\xi_1).$$

Тогда

$$A_{pq} = \int \int h_2 h_3 \chi_q(\xi_2, \xi_3) \left\{ X_q[c + f(\xi_2, \xi_3)] \left[\frac{1}{h_1^2} \chi_p(\xi_2, \xi_3) \left(\frac{dX_{1p}}{d\xi_1} \right)_{\xi_1=c+f} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{h_2^2} X_{1p}[c + f(\xi_2, \xi_3)] \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \frac{\partial \chi_p}{\partial \xi_2} - \frac{1}{h_3^2} X_{1p}[c + f(\xi_2, \xi_3)] \frac{\partial f}{\partial \xi_3} \frac{\partial \chi_p}{\partial \xi_3} \right] \right\} d\xi_2 d\xi_3.$$

Таким образом, A_{pq} пропорционально коэффициенту в разложении функции от ξ_2 и ξ_3 в фигурных скобках по системе функций $\chi_q(\xi_2, \xi_3)$. Вообще говоря, мы знаем, что если эта функция достаточно гладкая, A_{pq} быстро уменьшается при больших k_p и k_q . Если бы длина волны, связанная с χ_q , была значительно меньше, чем изменение функции, быстрое колебание χ_q привело бы к исчезновению интеграла. Отклонения от гладкой зависимости могут встречаться, если $f(\xi_2, \xi_3)$ — не гладкая функция, и будут встречаться, поскольку $X_{1q}[c + f(\xi_2, \xi_3)]$ колеблется все быстрее и быстрее при возрастании q . Мы можем рассмотреть каждую возможность отдельно, если предположим, что особенности функции f изолированные, так что ее можно разбить на гладкие куски, а все особенности ее будут находиться в местах соединения этих кусков. Эффекты, возникающие вследствие колебаний X , упомянутых выше, можно вычислить тогда отдельно для каждой такой области, что непосредственно приводит к рассмотрению следующего интеграла:

$$I = \int \int h_2 h_3 \chi_q(\xi_2, \xi_3) X_{1q}[c + f(\xi_2, \xi_3)] d\xi_2 d\xi_3.$$

A_{pq} пропорционально I , когда q настолько велико, что остаток подинтегрального выражения медленно меняется на протяжении многих колебаний χ_q и может быть поэтому приближенно заменен постоянной. Интеграл I мы оценим в частном случае декартовых координат. Это не приводит к потере общности; для достаточно больших значений q и, следовательно, частых колебаний χ_q кривизна граничной поверхности не играет роли. Действительно, в § 6.3 мы подробно доказали эту теорему, сравнивая ряды Фурье с другими рядами по ортогональным функциям. Таким образом,

$$I \simeq \int \int \cos\left(\frac{\pi q_3 \xi_3}{a_3}\right) \cos\left(\frac{\pi q_2 \xi_2}{a_2}\right) \cos\left\{\frac{\pi q_1}{a_1}[c + f(\xi_2, \xi_3)]\right\} d\xi_1 d\xi_2,$$

где $k_q^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{q_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{q_3}{a_3}\right)^2 \right]$ и в качестве функций φ_q взяты функции, удовлетворяющие условиям Неймана. Используя правило сложения косинусов, можно записать I в виде суммы нескольких членов, общий член которой есть

$$I' = \int \int \cos\left[\frac{\pi q_2}{a_2} \xi_2 \pm \frac{\pi q_3}{a_3} \xi_3 \pm \frac{\pi q_1}{a_1} (c + f)\right] d\xi_1 d\xi_2,$$

где знаки плюс и минус указывают, что в I могут встречаться различные комбинации членов. Величина I' может быть оценена по методу передела. Прежде всего запишем I' в комплексной форме:

$$I' = \text{Re} \left\{ \int \int \exp i \left[\pm \frac{\pi q_2}{a_2} \xi_2 \pm \frac{\pi q_3}{a_3} \xi_3 \pm \frac{\pi q_1}{a_1} (c + f) \right] d\xi_1 d\xi_2 \right\}.$$

Мы разложим экспоненту в окрестности тех значений ξ_2 и ξ_3 , ξ_2' и ξ_3' , для которых ее градиент равен нулю. Следовательно,

$$\frac{q_2}{a_2} = \pm \frac{q_1}{a_1} \frac{\partial f}{\partial \xi_2'}; \quad \frac{q_3}{a_3} = \pm \frac{q_1}{a_1} \frac{\partial f}{\partial \xi_3'}.$$

Всегда можно найти отношения q_2/q_1 и q_3/q_1 так, что эти уравнения будут удовлетворяться в каждой точке поверхности. Этим не исчерпываются все возможные значения отношений, а поэтому верхняя грань для I' получится, если мы предположим, что последним равенствам можно удовлетворять всегда. Мы можем теперь разложить экспоненту в степенной ряд в окрестности ξ'_2 и ξ'_3 :

$$\begin{aligned} \pm \frac{\pi q_2}{a_2} \xi'_2 \pm \frac{\pi q_3}{a_3} \xi'_3 + \frac{\pi q_1}{a_1} [c + f(\xi'_2, \xi'_3)] + \frac{i}{2} \frac{\pi q_1}{a_1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_2} (\xi_2 - \xi'_2)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_3} (\xi_2 - \xi'_2) (\xi_3 - \xi'_3) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_3} (\xi_3 - \xi'_3)^2 \right|, \end{aligned}$$

причем контуры интегрирования на комплексных плоскостях ξ_2 и ξ_3 выбираются так, чтобы получить «наибыстрейший спуск»¹⁾. Затем можно приблизительно вычислить интегралы, распространив область интегрирования от минус до плюс бесконечности, так что

$$|I'| \leq \frac{2a_1}{q_1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_3} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_3} \right)^2 \right|^{-1/2}. \quad (9.2.58)$$

Отсюда можно заключить, что I и, следовательно, A_{pq} имеют порядок $1/q_1$ при $q_1 \rightarrow \infty$, или

$$A_{pq} \underset{k_q \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{k_q}\right). \quad (9.2.59)$$

Этот результат перестает быть верным, если множитель, стоящий под знаком модуля в формуле (9.2.58), окажется равным нулю, как это случается для отдельных точек (которые должны быть седловыми точками) на граничной поверхности, а следовательно, только для определенных значений отношений q_3 и q_2 к q_1 . Ввиду последнего ограничения эти исключительные случаи не играют настолько заметной роли, чтобы изменить скорость сходимости ряда (9.2.53) по сравнению с той, которая предсказывается формулой (9.2.59).

Почти таким же способом, как выше, можно получить поведение A_{pq} для больших k_p . Имеется, однако, дополнительная зависимость, возникающая из-за производных от φ_p и приводящая к множителю k_p . Следовательно,

$$A_{pq} \underset{k_p \rightarrow \infty}{=} O(1). \quad (9.2.60)$$

Если же и k_p и k_q одновременно велики, то получается

$$A_{pq} \underset{k_p, k_q \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{k_p}{k_p \pm k_q}\right), \quad (9.2.61)$$

где знаки плюс и минус указывают, что встречаются обе комбинации k_p и k_q .

Формулы (9.2.59) — (9.2.61) дают асимптотическую зависимость, возникающую из-за наличия таких членов, как $X_q(c+f)$. Мы обсудим теперь ограничения, возникающие из-за особенностей функции f . Здесь важными членами являются производные $\partial f/\partial \xi_1$ и $\partial f/\partial \xi_2$. Следовательно, если f имеет конечные разрывы, эти производные заключают в себе дельта-функции по переменным ξ_1 и ξ_2 соответственно, и, значит,

$$A_{pq} \underset{k_p, k_q \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{k_p}{k_p \pm k_q}\right);$$

¹⁾ Это чисто описательное выражение. Не путать с методом «наискорейшего спуска», который состоит в отыскании минимума функции (или функционала) последовательными сдвигами по нормали к линиям уровня. — *Прим. перев.*

это также имеет место, если только одна из пары величин k_p и k_q стремится к бесконечности. Если f непрерывна, но имеет разрывный градиент, то

$$A_{pq_{k_p, k_q \rightarrow \infty}} = O \left[\frac{k_p}{(k_p \pm k_q)^2} \right]$$

и т. д. Видно, что никакой характер особенностей f не приводит к более медленному асимптотическому убыванию, чем (9.2.61). Следовательно, мы можем считать, что формулы (9.2.59) — (9.2.61) описывают асимптотическую зависимость A_{pq} .

Мы можем, наконец, дать асимптотическую зависимость коэффициентов при Φ_p в (9.2.52) и слагаемых в (9.2.53). Отдельные множители ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{np} - (k^2 - k_n^2) N_{np} &\underset{k_p \rightarrow \infty}{\simeq} A_{np} = O \left(\frac{1}{k_p} \right), \\ A_{pn} - (k^2 - k_p^2) N_{pn} &\underset{k_p \rightarrow \infty}{\simeq} A_{np}, \\ (k^2 - k_p^2) N_{pp} - A_{pp} &= O(k_p^2), \\ A_{pq} - (k^2 - k_p^2) N_{pq} &\underset{k_p, k_q \rightarrow \infty}{=} O(1). \end{aligned}$$

Подставляя эти асимптотические выражения в формулу (9.2.53) для $k^2 - k_n^2$, мы видим, что слагаемые уменьшаются как $1/k_p^4$, когда k_p возрастает. Этого достаточно для сходимости ряда. Ряд для следующего порядка может сходиться условно; сумма абсолютных величин его членов расходится логарифмически. Эта расходимость возникает вследствие того, что ряд для членов до второго порядка в волновой функции сходится только в среднем, т. е. сумма квадратов коэффициентов при φ_p сходится, что можно проверить следующим образом. Если данные выше асимптотические результаты подставить в члены второго порядка (9.2.52), то коэффициентом при Φ_p при больших k_p будет $[\ln(k_p)]/k_p^2$; сумма $\sum [\ln^2(k_p)]/k_p^4$ сходится.

Улучшение сходимости. Предыдущие рассмотрения должны привести нас к заключению, что получить явное разложение собственной функции ψ по членам невозмущенного типа невозможно. В случае итерационно-пертурбационной формулы мы должны представить хуже всего сходящуюся часть ряда в замкнутой форме, с тем чтобы остаток сходиллся достаточно быстро для того, чтобы можно было провести следующую итерацию. Часто это можно сделать подбором. Однако есть и более систематический метод, основанный на интегральном уравнении (9.2.47). Прежде всего выделим φ_n , так как это, конечно, главный член. Это даст

$$\begin{aligned} \psi - \varphi_n = & -\frac{1}{4\pi} \oint_S (\psi - \varphi_n) \frac{\partial}{\partial n_0} G_k(S|S_0) dS_0 - \\ & - \frac{1}{4\pi} \oint_S G_k(S|S_0) \frac{\partial \varphi_n}{\partial n_0} dS_0 + (k^2 - k_n^2) \int_R \varphi_n G_k dV_0. \quad (9.2.62) \end{aligned}$$

Мы можем отсюда получить первый ряд в (9.2.52), пренебрегая поверхностным интегралом, содержащим $\psi - \varphi_n$. Итерационный процесс в основном состоит в том, что полученный при этом результат для $\psi - \varphi_n$ подставляется затем в правую часть (9.2.62). Мы видим сразу же, что источником всех наших неприятностей является плохая сходимость $\partial G_k / \partial n_0$.

Сделаем поэтому подстановку

$$\frac{\partial G_k}{\partial n_0} = \frac{\partial G_0}{\partial n_0} + \frac{\partial}{\partial n_0} (G_k - G_0).$$

Здесь G_0 — функция Грина для уравнения Лапласа. Если G_0 можно выразить в замкнутой форме, а не посредством ряда, то мы сможем продолжать наш итерационный процесс. $\partial(G_k - G_0)/\partial n_0$ можно представить в виде ряда, так как сходимость последнего теперь будет соответствовать требованиям. Результат итерационного процесса можно выразить следующим образом. Пусть $\psi - \varphi_n = \Sigma \chi_p$, где χ_p удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\chi_{p+1} = -\frac{1}{4\pi} \oint \chi_p \frac{\partial G_0}{\partial n_0} dS_0 - \frac{1}{4\pi} \oint \chi_p \frac{\partial (G_k - G_0)}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.63)$$

Первый член в правой части нельзя вычислять разложением в ряд по φ_n . Нужно применить непосредственное интегрирование или численные методы. Во втором интеграле (9.2.63) можно использовать представление рядом и интегрировать ряд почленно.

Возмущения границ для условий Дирихле. Мы используем те же обозначения, что и раньше. Интегральное уравнение, определяющее ψ , можно получить непосредственно из уравнения (9.2.45), положив $\psi = 0$ на поверхности:

$$\psi(r) = \frac{1}{4\pi} \oint G_k(r|S_0) \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.64)$$

Мы не будем пытаться получать волновую функцию с точностью выше первого порядка, а собственное значение выше второго, ввиду возникающих трудностей в сходимости. Они имеют еще более непримиримый характер, чем для условий Неймана, рассмотренных выше.

Чтобы получить поправку первого порядка для функции ψ , выделим в правой части равенства (9.2.64) член, пропорциональный невозмущенной собственной функции φ_n :

$$\psi(r) = \frac{\oint \varphi_n \frac{\partial \psi}{\partial n} dS}{k_n^2 - k^2} \varphi_n + \sum_{p \neq n} \frac{\oint \varphi_p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS}{k_p^2 - k^2} \varphi_p.$$

Мы можем упростить коэффициент при φ_n , заметив, что

$$(k^2 - k_n^2) \int \varphi_n \psi dV = \int [\psi \nabla^2 \varphi_n - \varphi_n \nabla^2 \psi] dV = - \oint \varphi_n \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (9.2.65)$$

Следовательно,

$$\psi(r) = -\varphi_n \int \psi \varphi_n dV + \sum_{p \neq n} \frac{\oint \varphi_p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS}{k_p^2 - k^2} \varphi_p.$$

Поправка первого порядка для ψ получается подстановкой φ_n в правую часть равенства вместо ψ :

$$\psi(r) \simeq N_{nn} \varphi_n + \sum_{p \neq n} \frac{A_{np}}{k_p^2 - k^2} \varphi_p, \quad (9.2.66)$$

здесь N_{nn} и A_{np} определяются формулами (9.2.49) и (9.2.51). Поверхностный интеграл имеет порядок $1/k_p$ для больших k_p . Ряд в (9.2.66) сходится, таким образом, достаточно быстро, чтобы определить величину

объемного интеграла $\int \psi \varphi_n dV$ в (9.2.65):

$$\int \psi \varphi_n dV = N_{nn}^2 + \sum_{p \neq n} \frac{A_{np} N_{np}}{k_p^2 - k^2} \simeq N_{nn}^2, \quad (9.2.67)$$

где указано приближенное значение интеграла с точностью до первого порядка, так как этого вполне достаточно, чтобы вычислить $k^2 - k_n^2$ до второго порядка.

Ряд в (9.2.66) нельзя дифференцировать. Мы должны, следовательно, определить величину $\partial \psi / \partial n$ в формуле (9.2.65) другим путем. Рассмотрим интегральное уравнение, определяющее $\nabla \psi$:

$$\nabla \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint \nabla G_k(\mathbf{r} | S_0) \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.68)$$

Это представление $\nabla \psi$ обращается в нуль вне S и потому разрывно, так как $\nabla \psi$ не равно нулю на S . Мы используем подобное представление для $\nabla \varphi_n$ и образуем $\nabla \psi - \nabla \varphi_n$, «протолкнув» разрывность в более высокий порядок. Из теоремы Грина и уравнений для φ_n и G_k мы имеем

$$4\pi \nabla \varphi_n(\mathbf{r}) = (k_n^2 - k^2) \int \nabla G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \varphi_n(\mathbf{r}_0) dV_0 + \\ + \oint \left[\nabla G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \frac{\partial \varphi_n}{\partial n_0} - \varphi_n \nabla \frac{\partial G_k(\mathbf{r} | S_0)}{\partial n_0} \right] dS_0.$$

Следовательно,

$$\nabla(\psi - \varphi_n) = \frac{1}{4\pi} \oint \varphi_n \nabla \frac{\partial G_k}{\partial n_0} dS_0 + \frac{k^2 - k_n^2}{4\pi} \int \nabla G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \varphi_n(\mathbf{r}_0) dV_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \oint \nabla G_k(\mathbf{r} | S_0) \left(\frac{\partial \psi}{\partial n_0} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial n_0} \right) dS_0. \quad (9.2.69)$$

Первое приближение для $\nabla(\psi - \varphi_n)$ получается, если в правую часть (9.2.69) подставить φ_n вместо ψ . Мы должны также произвести замену $\nabla \nabla_0 G_k$ на $\nabla \nabla_0 (G_k - G_0)$, которая была уже сделана раньше в этой главе. Рядом для $\nabla \psi$ до первого порядка будет тогда

$$\nabla \psi \simeq \nabla \varphi_n + \sum_{p \neq n} \frac{\left[k^2 \frac{A_{pn}}{k_p^2} + (k^2 - k_n^2) N_{pn} \right]}{k_p^2 - k^2} \nabla \varphi_p, \quad (9.2.70)$$

где N_{pn} выражено через поверхностные интегралы формулой (9.2.55). Коэффициент при $\nabla \varphi_p$ имеет порядок $1/k_p^4$ для больших k_p и, таким образом, ряд сходится достаточно быстро для того, чтобы его можно было подставить в (9.2.65). Окончательно мы получаем для $k^2 - k_n^2$:

$$(k^2 - k_n^2) N_{nn} \simeq -A_{nn} + \sum_{p \neq n} \frac{A_{pn} [k^2 A_{pn} + (k^2 - k_n^2) k_p^2 N_{pn}]}{k_p^2 (k_p^2 - k^2)}. \quad (9.2.71)$$

Ряд сходится. В формулах (9.2.66) и (9.2.70) волновая функция и ее градиент выражаются рядами, которые сходятся в среднем, в то время как ряд (9.2.71) для собственного значения сходится абсолютно.

Специальный класс граничных возмущений. Из предыдущего следует, что для общих поверхностных возмущений трудности, связанные со сходимостью, препятствуют получению явного разложения собственных значений и собственных функций по системе невозмущенных собственных функций. Имеется, однако, особый вид граничных изменений, для которых достигается достаточная сходимость во всех порядках возмущения. Чтобы

выяснить, какими должны быть эти поверхности, мы вернемся к оценке поведения A_{pq} при больших k_p и k_q , выведенной из формулы (9.2.58). Мы напоминаем, что существование контура, для которого фаза

$$\pm \frac{\pi q_2}{a_2} \xi_2 \pm \frac{\pi q_3}{a_3} \xi_3 + \frac{\pi q_1}{a_1} [c + f(\xi_2, \xi_3)]$$

имеет нулевой градиент, привело к оценкам (9.2.59) — (9.2.61), на которых основаны рассуждения о сходимости. Ясно, что сходимость можно было бы улучшить, если бы $f(\xi_2, \xi_3)$ была *линейной функцией от ξ_2 и ξ_3* , так как тогда не было бы точки на поверхности, в которой градиент фазы

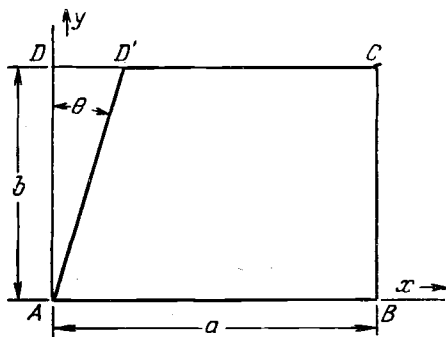


Рис. 9.6. Возмущение граничной поверхности отклонением стороны AD на угол θ .

был бы равен нулю, за исключением совсем особых отношений q_2/q_1 и q_3/q_1 , которые не влияют на сходимость в целом. В таком случае из (9.2.58) можно легко видеть, что $A_{pn} = O(k_p^{-2})$ при $k_p \rightarrow \infty$ и т. д. Это асимптотическое поведение обеспечивает сходимость ряда для собственных значений во всех порядках аппроксимации. Пример поверхностного возмущения такого специального вида приведен на рис. 9.6, где четырехугольник $ABCD'$ представляет возмущенную форму прямоугольника $ABCD$. В трехмерном пространстве прямоугольник следует заменить параллелепипедом, а линию AD' — плоскостью, образующей определенный

угол θ с одной из его граней. Можно легко придумать соответствующие возмущения и в других координатных системах. Теперь мы доведем до конца вычисление элементов A_{nn} и N_{rr} в указанном выше случае как для того, чтобы проверить наши рассуждения, так и для иллюстрации общей теории. В качестве граничных условий возьмем однородные условия Неймана.

Невозмущенные собственные функции равны

$$\varphi_{pq} = \sqrt{\frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{ab}} \cos \frac{\pi p y}{a} \cos \frac{\pi q x}{b}, \quad p \text{ и } q - \text{целые,}$$

$$k_n^2 = \left(\frac{\pi p}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{b}\right)^2,$$

где двойной индекс (pq) заменяет одинарный, как в формуле для A_{ps} . Подобным образом φ_r равно

$$\varphi_{st} = \sqrt{\frac{\varepsilon_s \varepsilon_t}{ab}} \cos \frac{\pi s y}{a} \cos \frac{\pi t x}{b}, \quad s \text{ и } t - \text{целые.}$$

Интеграл для A_{ps} можно получить, вычисляя нормальную производную согласно формуле (9.2.57). Для нечетных $p+s$

$$A_{nr} = \frac{\pi}{ab} \sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_s \varepsilon_t} \int_0^a \left\{ \left[\frac{q}{b} \sin \left(\frac{\pi q y \operatorname{tg} \theta}{b} \right) \cos \left(\frac{\pi p y}{a} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p}{a} \operatorname{tg} \theta \sin \left(\frac{\pi p y}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi q y \operatorname{tg} \theta}{b} \right) \right] \cos \left(\frac{\pi s y}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi t y \operatorname{tg} \theta}{b} \right) \right\} dy.$$

Непосредственное интегрирование дает

$$A_{nr} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \theta}{ab} \sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_s \varepsilon_t} \left\{ \sin^2 \left[\frac{\pi a (q+t) \operatorname{tg} \theta}{2b} \right] \times \right. \\ \times \left[\frac{p(p+s) - q(q+t) \left(\frac{a}{b} \right)^2}{(p+s)^2 - \left[(q+t) \frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta \right]^2} + \frac{p(p-s) - q(q+t) \left(\frac{a}{b} \right)^2}{(p-s)^2 - \left[(q+t) \frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta \right]^2} \right] + \\ + \sin^2 \left[\frac{\pi a (q-t) \operatorname{tg} \theta}{2b} \right] \left[\frac{p(p+s) - q(q-t) \left(\frac{a}{b} \right)^2}{(p+s)^2 - \left[(q-t) \frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta \right]^2} + \right. \\ \left. \left. + \frac{p(p-s) - q(q-t) \left(\frac{a}{b} \right)^2}{(p-s)^2 - \left[(q-t) \frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta \right]^2} \right] \right\}.$$

Выражение для N_{nn} имеет вид

$$N_{nn} = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{2ab} \left\{ \frac{ba}{2\varepsilon_p \varepsilon_q} - \frac{a^2 \operatorname{tg} \theta}{4\varepsilon_p \varepsilon_q} + \frac{b^2 \sin^2 \left(\frac{\pi q a}{b} \operatorname{tg} \theta \right)}{4\pi^2 q^2 \operatorname{tg} \theta} \left[1 - \frac{\left(\frac{q}{b} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{\left(\frac{b}{a} \right)^2 - \left(\frac{q}{b} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \right] \right\}.$$

Мы можем немедленно убедиться, что $A_{nr} = O(1/k_r)$, в то время как в случае двумерной задачи для общего случая произвольной поверхности $A_{nr} = O(1/\sqrt{k_r})$. Мы замечаем также, что для низшего состояния колебаний прямоугольника (при $p = q = 0$) A_{nr} равны нулю; следовательно, во всех порядках отсутствует изменение частоты. Это, конечно, правильно, так как $\varphi = \text{const}$ будет удовлетворять условиям Неймана и на возмущенной поверхности.

9.3. Приложение методов теории возмущений к изучению рассеяния и дифракции

В §§ 9.1 и 9.2 мы делали упор на применение теории возмущений к определению собственных значений и собственных функций. Здесь мы рассмотрим задачи, в которых собственные значения образуют непрерывный спектр.

Так как собственные значения могут быть какими угодно, то наше внимание будет теперь сосредоточено на волновых функциях, которые должны быть описаны в области, простирающейся обычно до бесконечности (непрерывный спектр и возникает вследствие этого). Существует связь между поведением волновой функции на бесконечности и свойствами среды, в которой распространяются волны, что представляет очень большой интерес. Поведение на бесконечности обычно наблюдается экспериментально; свойства же среды, как правило, выводятся из измерений, сравнивая теоретические предсказания, полученные в предположении, что среда обладает теми или иными свойствами, с результатами эксперимента (см. дальнейшие рассмотрения в §§ 11.3 и 12.3).

Наиболее распространенными являются следующие условия эксперимента: излучение источника, обычно помещенного в бесконечности, направ

лено на область, называемую *рассеивающей областью*, свойства которой отличаются от свойств окружающей среды. *Падающая волна* может быть, например, звуковой волной; среда — воздух, а неоднородность среды может создаваться некоторым твердым телом. В другом случае падающая волна может представлять собой пучок электронов с определенным импульсом, а рассеивающей областью может быть электрическое поле, создаваемое атомом. Ясно, что в каждом из этих случаев рассеивающая область

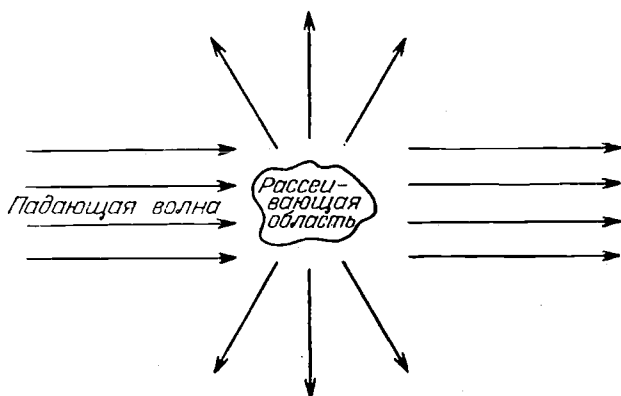


Рис. 9.7. Схематическое изображение падающей и рассеянной волны.

отклоняет часть падающих лучей от первоначального направления и создает *рассеянную волну*. На больших расстояниях от рассеивающей области мы наблюдаем и рассеянную и падающую волны.

В этом параграфе мы рассмотрим методы приближенного предсказания их относительной интенсивности. Точные решения задачи рассеяния будут рассмотрены в гл. 11. Мы ограничим наше исследование уравнением Шредингера и скалярным уравнением Гельмгольца; эти же методы можно применять и к другим уравнениям, причем в большинстве случаев возникающие затруднения невелики.

Граничные условия для рассеяния. Общую волновую функцию ψ можно разложить на падающую волну ψ_i и рассеянную ψ_s :

$$\psi = \psi_i + \psi_s. \quad (9.3.1)$$

Часть граничных условий, которая является общей для всех задач о рассеянии, состоит в том, что на больших расстояниях от рассеивающей области ψ_s приближается к волне, расходящейся из точечного источника, помещенного в рассеивающей области. В *трехмерном случае* мы можем считать ψ_i падающей плоской волной

$$\psi_i = e^{ikz},$$

тогда ψ_i удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \psi_i + k^2 \psi_i = 0$. Граничные условия на бесконечности в этом случае требуют, чтобы

$$\psi_s \simeq f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (9.3.2)$$

где r , ϑ и φ — сферические координаты с центром в рассеивающей области. Функция f называется *амплитудой рассеяния* или *фактором углового распределения*.

В двумерном случае падающая плоская волна ψ_i обычно записывается в виде

$$\psi_i = e^{ikhx}.$$

Рассеянная волна удовлетворяет условию

$$\psi_s \simeq f(\varphi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (9.3.3)$$

Здесь r и φ — полярные координаты с центром в рассеивающей области, а угол φ отсчитывается от положительного направления оси x .

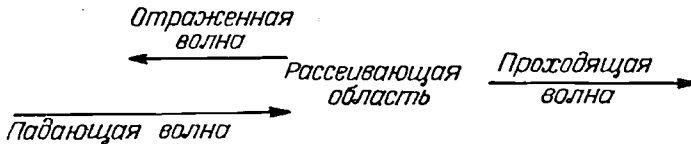


Рис. 9.8. Схематическое изображение одномерной задачи о прохождении и отражении волн.

В *одномерных* задачах употребляется несколько другая терминология, так как в этом случае рассеяние происходит вдоль направления падения. Возьмем снова падающую волну в виде

$$\psi_i = e^{ikhx}.$$

Граничные условия на бесконечности состоят теперь из двух частей. Для больших положительных значений x функция ψ приближается к проходящей плоской волне:

$$\psi \simeq Be^{ikhx} \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (9.3.4)$$

При больших отрицательных значениях x мы имеем сумму падающей и отраженной волн:

$$\psi \simeq e^{ikhx} + Ae^{-ikhx} \text{ при } x \rightarrow -\infty. \quad (9.3.5)$$

Поперечное сечение рассеяния. Величины, измеряемые на бесконечности, непосредственно связаны с функцией f или с коэффициентами A и B . Например, в акустике величина $|f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega$ — это мощность, рассеянная внутри телесного угла $d\Omega$ с направлением ϑ и φ , рассчитанная на единицу падающей интенсивности. С другой стороны, если ψ — шредингеровская волновая функция, то $|f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega$ дает величину рассеянного потока внутри телесного угла $d\Omega$, приходящуюся на единицу плотности падающего потока. Таким образом, $|f(\vartheta, \varphi)|^2$ дает угловое распределение рассеянного излучения или рассеянных частиц. Ясно, что множитель $|f(\vartheta, \varphi)|^2$ имеет размерность площади; поэтому он часто называется *дифференциальным поперечным сечением рассеяния* σ :

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = |f(\vartheta, \varphi)|^2 \text{ в трехмерном случае.} \quad (9.3.6)$$

В двумерном случае $|f(\varphi)|^2 d\varphi$ дает мощность, рассеянную внутри промежутка углов $d\varphi$, приходящуюся на единицу интенсивности падающего потока. Ясно, что в этом случае множитель имеет размерность длины и обычно также обозначается через σ :

$$\sigma(\varphi) = |f(\varphi)|^2 \text{ в двумерном случае.} \quad (9.3.7)$$

Полная рассеянная мощность, приходящаяся на единицу падающей интенсивности, или полный рассеянный поток на единицу плотности пада-

ющего потока получаются интегрированием $\sigma(\vartheta, \varphi)$ по всему телесному углу. Результат называется *полным поперечным сечением рассеяния* и обозначается буквой Q :

$$Q = \int \sigma(\vartheta, \varphi) d\Omega \text{ в трехмерном случае} \quad (9.3.8)$$

и

$$Q = \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi) d\varphi \text{ в двумерном случае.} \quad (9.3.9)$$

Полное поперечное сечение имеет простую физическую интерпретацию: это площадь (в двумерном случае отрезок прямой), нормальная к падающему пучку, загораживающая путь такому количеству падающей мощности, которое равно рассеянной.

Можно также выяснить физический смысл коэффициентов A и B в формулах (9.3.4) и (9.3.5) для одномерной задачи. Отраженная интенсивность, приходящаяся на единицу падающей интенсивности, называется *коэффициентом отражения* R и связывается с A по следующей формуле:

$$R = |A|^2. \quad (9.3.10)$$

Коэффициент прохождения T есть интенсивность прошедшей волны:

$$T = |B|^2. \quad (9.3.11)$$

При отсутствии поглощения $|A|^2 + |B|^2$ должно быть равно единице.

Рассеяние сферически симметричной областью. Сдвиги фаз. Если в уравнении Шредингера потенциал является функцией только r или если в акустике рассеивающая область имеет сферическую форму и изотропна, трехмерное уравнение можно свести к системе независимых одномерных уравнений относительно r . Они будут отличаться от одномерной задачи, рассмотренной ранее, так как $0 \leq r < \infty$, тогда как $-\infty < x < \infty$.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$[\nabla^2 + (k^2 - \lambda U(r))] \psi = 0, \quad (9.3.12)$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \text{ и } \lambda U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} \lambda V(r).$$

E равно полной энергии, а λV — потенциальной энергии частицы массы m . Можно применить метод разделения переменных, перейдя к сферическим координатам. Мы воспользуемся следующими элементарными решениями:

$$P_l(\cos \vartheta) \frac{u_l(kr)}{kr},$$

где P_l — полиномы Лежандра, а u_l удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \lambda U(r) \right] u_l = 0. \quad (9.3.13)$$

Это дифференциальное уравнение имеет два решения. Мы выделим то из них, которое равно нулю в начале координат, так как функция ψ не имеет там особенностей:

$$u_l(0) = 0. \quad (9.3.14)$$

Амплитуду u_l следует теперь выбрать так, чтобы ψ удовлетворяла граничному условию (9.3.2).

Для этих вычислений нам необходимо получить выражение для плоской волны в сферических координатах. Элементарные решения получаются, если положить $U=0$ в (9.3.13) и выбрать такое решение, которое ограничено в начале координат. Элементарные решения равны

$$P_l(\cos \vartheta) j_l(kr),$$

где [см. формулу (11.3.42)]

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr).$$

Можно показать [см. формулу (11.3.45)], что

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \vartheta) j_l(kr). \quad (9.3.15)$$

Эта форма для плоской волны приводит к мысли записать ψ в виде

$$\psi = \sum (2l+1) i^l P_l(\cos \vartheta) \frac{u_l}{kr} \quad (9.3.16)$$

и подобрать u_l так, чтобы удовлетворилось граничное условие (9.3.2). Следовательно, будем считать, что

$$\psi - e^{ikz} = \psi_s = \sum (2l+1) i^l P_l(\cos \vartheta) \left(\frac{u_l}{kr} - j_l \right).$$

Мы должны так выбрать u_l , чтобы

$$\frac{u_l}{kr} - j_l \simeq A_l \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Следовательно, u_l и j_l должны быть сравнимы. Асимптотически j_l ведет себя (при $r \rightarrow \infty$) следующим образом:

$$j_l(kr) \simeq \frac{\cos \left[kr - \frac{1}{2} \pi (l+1) \right]}{kr} \quad (r \rightarrow \infty).$$

Если $U(r)$ не простирается до бесконечности, то u_l асимптотически удовлетворяет тому же уравнению, что j_l . Следовательно, u_l можно записать в виде линейной комбинации двух решений свободного ($U=0$) волнового уравнения. Тогда получается следующее асимптотическое выражение для u_l :

$$u_l \simeq e^{-i\eta_l} \cos \left[kr - \frac{1}{2} \pi (l+1) - \eta_l \right], \quad (9.3.17)$$

где η_l — сдвиг фазы¹⁾. Амплитудный множитель выбран так, чтобы

$$\frac{u_l}{kr} - j_l \simeq (e^{-2i\eta_l} - 1) \frac{e^{i \left[kr - \frac{1}{2} \pi (l+1) \right]}}{2kr}.$$

Следовательно,

$$\psi_s \simeq \frac{1}{2ik} \sum (2l+1) P_l(\cos \vartheta) [e^{-2i\eta_l} - 1] \frac{e^{ikr}}{r}.$$

¹⁾ Обычно используется другое определение сдвига фазы, отличающееся знаком от определения (9.3.17). — *Прим. ред.*

Функция $f(\vartheta, \varphi)$ является коэффициентом при e^{ikr}/r , поэтому

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4k^2} \left| \sum (2l+1) (e^{-2i\eta_l} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2. \quad (9.3.18)$$

Полное поперечное сечение (в предположении, что η_l действительны) получается интегрированием:

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l. \quad (9.3.19)$$

Физический смысл этого результата будет рассмотрен подробно в гл. 11 и 12. Здесь нас интересует главным образом остающаяся математическая задача. Чтобы определить σ и Q , нам необходимо знать сдвиг фазы η_l . Его можно найти, решив дифференциальное уравнение (9.3.13) для u_l и выбрав решение, равное нулю в начале координат; исследуя, наконец, его асимптотическое поведение, можно найти η_l в соответствии с формулой (9.3.17).

Поучительно сравнить задачу об определении u_l и стандартную одномерную задачу. Заметим, что

$$u_l \simeq \text{const} [e^{-ikr} + (-1)^{l+1} e^{-2i\eta_l} e^{ikr}] \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Вспоминая, что $u_l(0) = 0$, мы видим, что $|(-1)^{l+1} \exp(-2i\eta_l)|^2$ можно истолковать как коэффициент отражения для волны $\exp(-ikr)$, падающей со стороны положительных r на рассеивающую область, оканчивающуюся при $r = 0$ совершенным отражателем.

Интегральное уравнение для рассеяния. Так же, как и в случае дискретного спектра, будет удобно использовать интегральное уравнение для неизвестной функции как исходный пункт для развития различных приближенных методов. Рассмотрим сначала полную трехмерную задачу, исходя из уравнения Шредингера, а затем обратимся к интегральному уравнению для u_l . Запишем (9.3.12) в форме неоднородного уравнения:

$$\nabla_0^2 \psi + k^2 \psi = \lambda U(\mathbf{r}_0) \psi,$$

где, как указано, мы не обязательно имеем дело с центральными силами. Используя затем для уравнения Гельмгольца функцию Грина для всего пространства $\exp(ikR)/R$, где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, мы имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) - \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{e^{ikR}}{R} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0. \quad (9.3.20)$$

Здесь мы добавили к частному решению, выражаемому интегралом, функцию ψ_i — решение однородного уравнения Гельмгольца. Можно теперь показать, что выражение (9.3.20) удовлетворяет граничным условиям на бесконечности. При больших r

$$R \simeq r - r_0 \cos \theta,$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$. Так как $\mathbf{r}$ — вектор, направленный в точку наблюдения, то удобно ввести вектор $\mathbf{k}_s$ с направлением вектора $\mathbf{r}$, но с величиной k , т. е.

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0 = kr_0 \cos \theta. \quad (9.3.21)$$

Следовательно, в пределе при $r \rightarrow \infty$

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0.$$

Амплитуда рассеяния $f(\vartheta, \varphi)$ является коэффициентом при $\exp(ikr)/r$, т. е.

$$f(\vartheta, \varphi) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int e^{-ik_s \cdot \mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0. \quad (9.3.22)$$

Мы, таким образом, проверили, что волновая функция, удовлетворяющая уравнению (9.3.20), автоматически удовлетворяет граничным условиям на бесконечности, и одновременно мы получили выражение амплитуды рассеяния f через ψ . Уравнение (9.3.20) и является, таким образом, интегральным уравнением для рассеяния. Прежде чем заниматься приближенным решением этого уравнения, полезно выяснить важное соотношение между полным поперечным сечением Q и f . Мы покажем сейчас, что для консервативных систем (мы могли бы также доказать это и в случае, когда частицы или энергия поглощаются)

$$Q = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0), \quad (9.3.23)$$

где под $f(0)$ мы понимаем значение амплитуды $f(\vartheta, \varphi)$ для $\vartheta = 0$, или, принимая во внимание определение $\mathbf{k}_s$, для случая, когда $\mathbf{k}_s$ в (9.3.22) равно $\mathbf{k}_i$. Другими словами, полное поперечное сечение связано с амплитудой рассеяния, вычисленной в направлении распространения падающей волны.

Чтобы доказать равенство (9.3.23), мы заметим, что из теоремы Грина и уравнений для ψ и $\bar{\psi}_i$ легко вытекает соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \left(\bar{\psi}_i \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial n} \right) dS = \lambda \int \bar{\psi}_i U \psi dV.$$

Правую часть этого равенства можно переписать, используя выражение для $f(0)$, получаемое из (9.3.22). Кроме того, за поверхность интегрирования примем сферу радиуса r . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \left(\bar{\psi}_i \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial r} \right) dS = -4\pi f(0). \quad (9.3.24)$$

Левую часть (9.3.24) можно выразить через Q с помощью закона сохранения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) dS = 0, \quad (9.3.25)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \left(\bar{\psi}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial r} - \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial r} \right) dS = 0.$$

Они, попросту говоря, означают сохранение излучения для полной или только для одной падающей волны (или в случае уравнения Шредингера — сохранение числа частиц). Если мы теперь в первом из этих двух равенств заменим ψ на $\psi_i + \psi_s$ и используем второе, то получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[2i \operatorname{Im} \int \left(\bar{\psi}_i \frac{\partial \psi_s}{\partial r} - \psi_s \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial r} \right) dS \right] + \lim_{r \rightarrow \infty} \int \left(\bar{\psi}_s \frac{\partial \psi_s}{\partial r} - \psi_s \frac{\partial \bar{\psi}_s}{\partial r} \right) dS = 0.$$

Принимая во внимание (9.3.2), мы видим, что второй из этих поверхностных интегралов равен

$$2ik \int |f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega = 2ikQ.$$

Что же касается первого из поверхностных интегралов, то он приблизительно равен поверхностному интегралу в (9.3.24), как это можно показать,

подставив $\psi = \psi_i + \psi_s$ в (9.3.42) и используя условие сохранения (9.3.25) для плоской волны. Отсюда сразу получается теорема (9.3.23). Читатель может проверить (9.3.23), сравнивая (9.3.19) и выражение для $f(\vartheta, \varphi)$, данное в формуле, стоящей непосредственно перед (9.3.18).

В этом последнем рассуждении мы обращали главное внимание на рассеяние, которое возникает в результате объемного возмущения. Аналогичные результаты можно получить, если рассеяние появляется вследствие введения отражающей поверхности, т. е. вследствие поверхностных возмущений. Предположим, например, что ψ должна удовлетворять условиям Дирихле на поверхности S . Тогда интегральным уравнением для рассеяния будет

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.3.26)$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, мы найдем, что граничные условия на бесконечности автоматически выполняются. Амплитуда рассеяния равна

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int e^{-ik_s \cdot \mathbf{r}_0} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.3.27)$$

Мы предоставляем читателю доказать, что формула (9.3.23) и здесь остается справедливой.

Интегральное уравнение для одномерных задач. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + [k^2 - \lambda U(x)] \psi = 0. \quad (9.3.28)$$

Граничные условия выражаются соотношениями (9.3.4) и (9.3.5). Используем функцию Грина

$$G(x|x_0) = -\frac{1}{2ik} e^{ik|x-x_0|}, \quad (9.3.29)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + k^2 G = -\delta(x-x_0).$$

Функция ψ удовлетворяет интегральному уравнению, ядром которого является G :

$$\psi(x) = e^{ikx} - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} G(x|x_0) U(x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (9.3.30)$$

Необходимо опять проверить, что выполняются граничные условия при $x = \pm \infty$. Для этой цели перепишем (9.3.30) подробнее:

$$\begin{aligned} \psi(x) = e^{ikx} + \frac{\lambda}{2ik} \int_{-\infty}^x e^{ik(x-x_0)} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 + \\ + \frac{\lambda}{2ik} \int_x^{\infty} e^{-ik(x-x_0)} U(x_0) \psi(x_0) dx_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $|x| \rightarrow \infty$

$$\psi(x) \simeq e^{ikx} \left[1 + \frac{\lambda}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$\psi(x) \simeq e^{ikx} + \frac{\lambda}{2ik} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Граничные условия (9.3.4) и (9.3.5) выполнены. Мы можем теперь немедленно получить выражение для коэффициента отражения

$$R = \frac{\lambda^2}{4k^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \right|^2. \quad (9.3.31)$$

Коэффициент прохождения равен

$$T = \left| 1 + \frac{\lambda}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \right|^2. \quad (9.3.32)$$

Отметим мимоходом, что условие сохранения

$$R + T = 1$$

вытекает из следующего уравнения, написанного ниже, которое можно получить прямо из дифференциального уравнения для ψ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\bar{\psi} \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\bar{\psi}}{dx} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\bar{\psi} \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\bar{\psi}}{dx} \right).$$

Интегральное уравнение в трехмерном случае. Обратимся теперь к интегральному уравнению для функции u_l , определенной уравнением (9.3.13) и соответствующими граничными условиями (9.3.14) и (9.3.17). Это интегральное уравнение даже в случае $l=0$ отличается от (9.3.30), так как включает другие граничные условия. Мы, естественно, используем функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^2 G(r|r_0)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] G(r|r_0) = -\delta(r-r_0).$$

Для того чтобы выполнялись граничные условия, функцию Грина нужно выбрать следующим образом:

$$G(r|r_0) = -kr r_0 \begin{cases} j_l(kr) n_l(kr_0) & \text{при } r \leq r_0, \\ j_l(kr_0) n_l(kr) & \text{при } r \geq r_0. \end{cases} \quad (9.3.33)$$

Функции j_l определены ранее (т. I, стр. 582), а n_l представляет собой сферическую функцию Неймана

$$n_l = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{l+1/2}(kr),$$

определяемую формулой (11.3.42). Для u_l получается тогда такой интеграл:

$$u_l(r) = kr j_l(kr) - \lambda \int_0^{\infty} G(r|r_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0. \quad (9.3.34)$$

Подставляя выражение для $G(r|r_0)$, получим

$$\begin{aligned} u_l(r) = kr j_l(kr) + \lambda k r n_l(kr) \int_0^r r_0 j_l(kr_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0 + \\ + \lambda k r j_l(kr) \int_r^{\infty} r_0 n_l(kr_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0. \end{aligned}$$

Вспоминая, что krj_l стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, мы видим, что граничное условие $u_l(0) = 0$ автоматически выполнено. Для больших значений r

$$krj_l(kr) \simeq \cos \left[kr - \frac{1}{2}(l+1)\pi \right], \quad krn_l(kr) \simeq \sin \left[kr - \frac{1}{2}(l+1)\pi \right].$$

Следовательно,

$$u_l \simeq \cos \left[kr - \frac{1}{2}(l+1)\pi \right] + \lambda \sin \left[kr - \frac{1}{2}(l+1)\pi \right] \int_0^\infty r_0 j_l(kr_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (9.3.35)$$

Это согласуется с требованием (9.3.17), чтобы при больших r функция u_l была пропорциональна $\cos \left[kr - \frac{1}{2}(l+1)\pi - \eta_l \right]$. Теперь мы можем выразить η_l через интеграл, входящий в формулу (9.3.35):

$$\operatorname{tg} \eta_l = \lambda \int_0^\infty r_0 j_l(kr_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0. \quad (9.3.36)$$

Функция u_l , стоящая справа, должна быть пронормирована так, чтобы асимптотически вести себя в согласии с формулой (9.3.35). Таким образом, решение уравнения (9.3.34) удовлетворяет всем граничным условиям, и, следовательно, это уравнение является корректным интегральным уравнением для u_l .

Приближение Борна. Возмущенные решения интегральных уравнений для рассеяния изучаются методами, развитыми в § 9.1 в случае дискретного спектра собственных значений. Первым из этих методов был итерационно-пертурбационный. Он состоит в том, что сначала вместо неизвестной функции в подинтегральное выражение подставляется невозмущенная функция; это дает первое приближение. Второе приближение получается, если под знаком интеграла вместо неизвестной функции подставить первое приближение и т. д. Первое приближение для амплитуды рассеяния можно получить, подставив невозмущенную волновую функцию в различные интегральные выражения: (9.3.22), (9.3.27), (9.3.31) и (9.3.36). Например, в формуле (9.3.22) соответствующая невозмущенная волновая функция представляет собой падающую волну $\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$. Эта подстановка дает приближение Борна

$$f_B(\vartheta, \varphi) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) dV. \quad (9.3.37)$$

Второе приближение для f мы найдем, подставив первое приближение для ψ в (9.3.22) и т. д. Получаются следующие рекуррентные формулы:

$$\psi^{(n)}(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) - \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{e^{ikR}}{R} U(\mathbf{r}_0) \psi^{(n-1)}(\mathbf{r}_0) dV_0; \quad (9.3.38)$$

$$f^{(n)}(\vartheta, \varphi) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \psi^{(n-1)}(\mathbf{r}) dV.$$

Аналогичные результаты можно получить и для других интегральных уравнений рассеяния, рассмотренных выше; в главе 12 будут даны выражения для u_l и соответствующих им фазовых сдвигов. Из интегрального уравнения, полученного для поверхностных возмущений [например, уравнения (9.3.26)], можно вычислить первое приближение, если подставить вместо неизвестной функции ее главный член — падающую волну. Это

приближение часто называют *приближением Кирхгофа*. Из формулы (9.3.27) получается соответствующая амплитуда рассеяния:

$$f_k(\vartheta, \varphi) = \frac{i}{4\pi} \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}_0} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}_i) dS_0. \quad (9.3.39)$$

Полное поперечное сечение можно вычислить из формулы (9.3.23). Однако можно показать, что если в этой формуле используется $\psi^{(n)}$, то полученное Q не лучше, чем $(n-1)$ -е приближение

$$Q \simeq \int |f^{(n-1)}|^2 d\Omega.$$

Поэтому не имеет большого смысла применять формулу (9.3.23) при такого рода схеме возмущений, хотя в других случаях мы найдем ее весьма полезной. Для иллюстрации заметим, что

$$f_B(0) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int U(\mathbf{r}) dV.$$

Амплитуда рассеяния действительна, и поэтому формула (9.3.23) дает для поперечного сечения Q нуль, если функция U интегрируема.

Обратимся теперь к вопросу о сходимости последовательности (9.3.38) и аналогичных последовательностей, которые получаются с помощью итерационно-пертурбационного метода для других интегральных уравнений рассеяния. Как и при дискретном распределении собственных значений, рассмотренном в § 9.1, радиус сходимости итерационно-пертурбационной последовательности определяется величиной λ , для которой однородное интегральное уравнение рассеяния имеет ненулевое решение. Например, для уравнения (9.3.20) итерационно-пертурбационная последовательность перестает сходиться при λ , больших некоторого λ_0 , для которого имеет решение следующее уравнение:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\lambda_0}{4\pi} \int \frac{e^{ikR}}{R} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0. \quad (9.3.40)$$

Здесь ищется, таким образом, решение, которое для больших значений r расходится из рассеивающей области, причем это имеет место, несмотря на отсутствие падающей волны. Физически ясно, что для того, чтобы это случилось, рассеивающая область должна содержать в себе источники, или, другими словами, λ должно быть комплексным. Математически это означает, что ядро интегрального уравнения не дефинитно, и поэтому такой вывод не является неожиданным.

Этим специальным решениям однородного уравнения можно дать физическое истолкование, заметив, что при $\lambda = \lambda_0$ амплитуда рассеяния бесконечна. Мы можем поэтому ожидать, что когда λ изменяется вдоль действительной оси, поперечное сечение должно обнаруживать острый максимум или резонанс при приближении λ к величине действительной части λ_0 .

Так как λ_0 является функцией от k , то мы можем ожидать, что при фиксированном λ резонансы в рассеянии будут иметь место при таких значениях k , для которых $\text{Re} \lambda_0$ близко к λ . К этому же выводу можно прийти более непосредственно, поставив вопрос, для каких комплексных значений k_r параметра k при фиксированном λ уравнение (9.3.40) имеет ненулевое решение. При таких значениях k_r поперечное сечение опять-таки бесконечно. Следовательно, мы можем ожидать резонанса в поперечном сечении, когда k приближается к действительной части k_r . Заметим, что решения для $k = k_r$ очень похожи на связанные состояния системы

по характеру зависимости от r при больших r . В последнем случае

$$\psi(\text{связанное}) \simeq \frac{e^{-xr}}{r},$$

в то время как для случая рассеяния

$$\psi(\text{свободное}) \simeq \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Следовательно, эти состояния системы являются логическим расширением понятия связанных состояний на непрерывный спектр. Они часто называются *виртуальными уровнями* и будут более подробно рассмотрены в гл. 12. Пока же мы отметим, что радиус сходимости итерационно-пертурбационного ряда как функции энергии определяется энергией, при которой наступает резонанс.

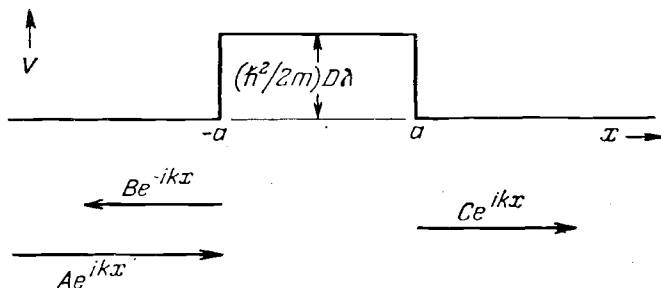


Рис. 9.9. Отражение и резонанс в одномерной задаче рассеяния.

В качестве примера к этим рассуждениям мы рассмотрим одномерное уравнение Шредингера при потенциальной энергии, заданной так, как показано на рис. 9.9. На рисунке изображены волны, существующие при $x > -a$ и $x > a$. При $-a < x < a$ мы берем $Ee^{ixx} + Fe^{-ixx}$, где

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \lambda D}.$$

Затем, вычисляя производную и значение ψ при $x = a$, мы получаем

$$Ce^{ika} = Ea^{ixa} + Fe^{-ixa}; \quad kCe^{ika} = \kappa Ee^{ixa} - \kappa Fe^{-ixa}.$$

Теперь можно выразить E и F через C :

$$E = \frac{kC}{2\kappa} \left(\frac{\kappa}{k} + 1 \right) e^{i(\kappa - \kappa)a},$$

$$F = \frac{kC}{2\kappa} \left(\frac{\kappa}{k} - 1 \right) e^{i(\kappa + \kappa)a}.$$

Мы можем снова вычислить значение производной уже при $x = -a$:

$$A = -Be^{2ika} + Ee^{i(\kappa - \kappa)a} + Fe^{i(\kappa + \kappa)a},$$

$$A = Be^{2ika} + [Ee^{i(\kappa - \kappa)a} - Fe^{i(\kappa + \kappa)a}] \frac{\kappa}{k}.$$

Подставляя вместо E и F их выражения через C , получаем для C

$$C = A \frac{4\kappa \exp(-2ika)}{(\kappa + k)^2 \exp(-2i\kappa a) - (\kappa - k)^2 \exp(2i\kappa a)}. \quad (9.3.41)$$

Решения при исчезающе малом A (условие существования виртуального уровня) будут существовать, только если знаменатель в формуле (9.3.41) равен нулю. Иными словами, C обращается в бесконечность для тех k (или λ), для которых этот знаменатель обращается в нуль,

когда A конечно. Кроме того, ясно, что всякое разложение этого выражения по степеням λ или по степеням k перестает быть справедливым, как только λ или k^2 приближается к тому критическому значению, при котором амплитуда прохождения становится бесконечной. В заключение мы покажем, что критические значения существуют. Определяющее уравнение имеет вид

$$i \operatorname{tg}(2\kappa a) = \frac{2\kappa x}{k^2 + x^2}.$$

Если, например, $\kappa a \ll 1$, т. е. энергия падающей частицы почти равна энергии потенциального барьера, то это уравнение принимает вид

$$a(2k^2 - \lambda D) = -ik,$$

откуда можно определить критическое значение λ или k . Решения являются комплексными величинами.

Борновские приближения высших порядков. Если предположить, что мы работаем в области сходимости итерационно-пертурбационных рядов, то трудности в вычислении интегралов все же ограничивают пригодность этих рядов. В одномерных задачах часто первое приближение можно вычислить аналитически и тогда получить второе приближение Борна для η_l . Третье и более высокие приближения получаются численным методом, который возможен здесь благодаря тому, что интегралы одномерны. Однако при решении двумерных и трехмерных задач численные методы значительно более трудоемки и утомительны. В этих условиях часто бывает полезно привлечь разложение функции Грина по собственным функциям. В настоящем случае соответствующими собственными функциями являются плоские волны

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

пронормированные так, что

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}} dV = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0).$$

Разложение функции Грина по этим собственным функциям можно выполнить по общим правилам, изложенным в гл. 7. Мы получим

$$\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{4\pi R} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{K^2 - k^2} dV_K. \quad (9.3.42)$$

Чтобы понять эту формулу и, следовательно, дальнейшие рассуждения, нужно проверить это равенство непосредственно. Переходя к сферическим координатам в пространстве K , мы быстро сводим этот интеграл к интегралу по K :

$$\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{4\pi R} = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{K \sin(KR)}{K^2 - k^2} dK.$$

Теперь нужно выбрать путь интегрирования на комплексной плоскости K . Наш выбор, показанный на рис. 9.10, продиктован требованием получить расходящуюся волну.

Так как подинтегральное выражение четно по K , то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K \sin(KR)}{K^2 - k^2} dK,$$

где путь интегрирования выбран так, как это указано на рис. 9.11. Интеграл можно теперь без труда вычислить с помощью интегральной формулы Коши (4.2.9), и таким образом формула (9.3.42) проверена.

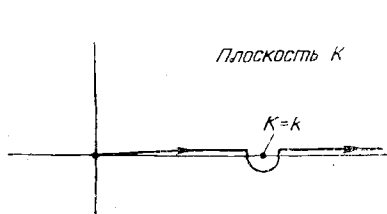


Рис. 9.10. Выбор контура для преобразования Фурье функции Грина.

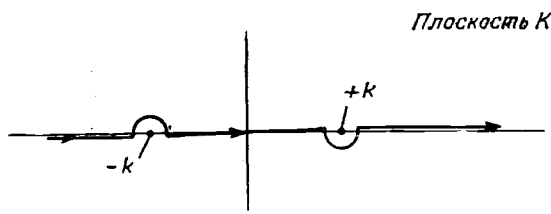


Рис. 9.11. Продолженный контур интегрирования для функции Грина.

Подстановка в интегральное уравнение (9.3.20) дает

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) - \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int \int \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{K^2 - k^2} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0 dV_K. \quad (9.3.43)$$

Введем теперь обозначения

$$T(\mathbf{K} | \mathbf{k}_i) = \lambda \int e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) dV_r, \quad (9.3.44)$$

$$U(\mathbf{K} | \mathbf{k}) = \lambda \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) dV_r. \quad (9.3.45)$$

Из формулы (9.3.22) ясно, что

$$f(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i), \quad (9.3.46)$$

в то время как первое приближение Борна (9.3.37) равно

$$f_B(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} U(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i). \quad (9.3.47)$$

Мы можем получить теперь интегральное уравнение, определяющее T , умножив обе части уравнения (9.3.43) на $\lambda U(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ и проинтегрировав:

$$T(\mathbf{p} | \mathbf{k}_i) = U(\mathbf{p} | \mathbf{k}_i) - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \frac{U(\mathbf{p} | \mathbf{K}) T(\mathbf{K} | \mathbf{k}_i)}{K^2 - k^2} dV_K. \quad (9.3.48)$$

Это интегральное уравнение эквивалентно, конечно, первоначальному интегральному уравнению (9.3.20). Но оно имеет преимущество перед первым, так как в последнем мы имеем дело непосредственно с амплитудой рассеяния.

Применяя итерационно-пертурбационный метод, немедленно получаем первое и более высокие приближения Борна. Мы используем верхний индекс для указания порядка приближения.

$$T^{(1)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = U(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i), \quad (9.3.49)$$

$$T^{(2)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = U(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{U(\mathbf{k}_s | \mathbf{K}) U(\mathbf{K} | \mathbf{k}_i)}{K^2 - k^2} dV_K,$$

$$T^{(3)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = T^{(2)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) + \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int \frac{U(\mathbf{k}_s | \mathbf{K}_1) U(\mathbf{K}_1 | \mathbf{K}_2) U(\mathbf{K}_2 | \mathbf{k}_i)}{(K_1^2 - k^2)(K_2^2 - k^2)} dV_{K_1} dV_{K_2} \quad (9.3.50)$$

и т. д. Пример применения этих формул будет дан в этом параграфе позднее.

Чтобы получить соответствующие интегральные уравнения для одномерной и двумерной задач, необходимо заменить множитель $(2\pi)^{-3}$ на $(2\pi)^{-n}$, где n — число измерений, и, конечно, объемные интегралы в пространствах $\mathbf{K}$ и $\mathbf{r}$ на соответствующие им интегралы более низкой размерности.

Ряд Фредгольма. В итерационно-пертурбационные формулы, данные выше в виде первого и более высоких приближений по Борну, можно внести улучшения, приспособив для этого к задаче рассеяния метод Фредгольма и вариационно-пертурбационный метод, разобранные в § 9.1. Мы не будем рассматривать ряд Финберга, а разберем только ряд Фредгольма. Вариационно-итерационный метод также отложим до § 9.4, где он будет применен к задаче рассеяния.

Ряд Фредгольма, данный в формулах (9.1.60) и (9.1.65), можно непосредственно применить к интегральным уравнениям рассеяния, так как ряд Фредгольма имеет силу для любого уравнения второго рода. Для одномерных задач решение уравнения

$$e = f_0 + \lambda \mathfrak{K} e$$

выражается формулой (мы берем только несколько первых членов)

$$e = \left\{ 1 + \lambda \mathfrak{K} \left[\frac{1 + \lambda (\mathfrak{K} - x_1) + (\lambda^2/2) (2\mathfrak{K}^2 - 2x_1\mathfrak{K} + x_1^2 - x_2) + \dots}{1 - \lambda x_1 + (\lambda^2/2) (x_1^2 - x_2) - \dots} \right] \right\} f_0, \quad (9.3.51)$$

где x_n представляют собой следы итерированных операторов $\mathfrak{K}$, как это определено в (9.1.54). Это выражение нельзя использовать для двумерных и трехмерных задач, поскольку x_1 в этих случаях бесконечно. Соответствующую формулу можно получить из приведенной выше формальной подстановкой $x_1 = 0$, как это показано в § 9.1. Ряды в числителе и знаменателе сходятся для всех значений λ и могут быть в принципе использованы для вычисления амплитуды рассеяния в любом порядке приближения. Чтобы сделать последнюю формулу более конкретной, мы выпишем явно числитель выражения для рассеянной волны в одномерной задаче, выраженной уравнением (9.3.30):

$$\begin{aligned} & -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G(x|x_0) U(x_0) e^{ikx_0} dx_0 + \\ & + \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x|x_1) U(x_1) G(x_1|x_0) U(x_0) e^{ikx_0} dx_0 dx_1 - \\ & - \lambda^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(x|x_0) U(x_0) e^{ikx_0} dx_0 \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(x_0|x_0) U(x_0) dx_0 \right] + \dots \end{aligned}$$

Знаменателю ряда Фредгольма можно дать физическую интерпретацию. Для этой цели мы заметим, что задачу рассеяния всегда можно заменить эквивалентной ей задачей излучения, в которой возбуждение излучающей системы производится падающей волной, а получающееся излучение образует рассеянную волну. Амплитуда излученной волны будет содержать типичный импедансный знаменатель вида $r + ix$. Активный член r относится к энергии, которая излучается системой и доходит до детектора на больших расстояниях от системы. Реактивные члены не содержат никаких потерь энергии и возникают из-за того, что излученная волна частично распадается, когда расстояние от излучающей системы возрастает. Величина x стремится к нулю при резонансных энергиях, рассмотренных ранее в разделе о сходимости высших приближений

Борна. Мы должны также ожидать, что активный член зависит от полного поперечного сечения, так как последнее характеризует излученную мощность.

Чтобы продемонстрировать соотношение между знаменателем Фредгольма и импедансом, рассмотрим первый вблизи резонанса, т. е. при λ , близких к λ_r . Тогда [см. (9.1.53)]

$$\chi(\lambda) = \exp \left[- \int_0^\lambda \text{Spur} \left(\frac{\mathfrak{R}}{1 - \lambda \mathfrak{R}} \right) d\lambda \right] \simeq \text{const} (\lambda - \lambda_r).$$

λ является функцией от k^2 , и при $k^2 = k_r^2 - i\gamma/2$ λ равно λ_r (k_r — действительное). Поэтому

$$\chi(\lambda) \simeq \text{const} \left[k^2 - k_r^2 + \frac{i\gamma}{2} \right] \left(\frac{\partial \lambda}{\partial (k^2)} \right)_{k^2 = k_r^2 - i\gamma/2}.$$

Амплитуда рассеяния f содержит $\chi(\lambda)$ в знаменателе, и, таким образом, получается типичное резонансное рассеяние при $k^2 = k_r^2$. Как указано выше, эта формула напоминает результат воздействия на простую гармоническую систему с резонансной угловой частотой k_r и Q , равным $\gamma/2$, допускающую определение соответствующего импеданса.

Убедимся теперь, что знаменатель в ряде Фредгольма содержит полное поперечное сечение. Рассмотрим трехмерный случай, в котором этот знаменатель с точностью до второго порядка равен $1 - \lambda^2 \kappa_2/2$, где κ_2 выражается формулой

$$\lambda^2 \kappa_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^6 \int \int \frac{U(\mathbf{p}|\mathbf{K}) U(\mathbf{K}|\mathbf{p})}{(K^2 - k^2)(p^2 - k^2)} dV_K dV_p.$$

Используя формулу (9.3.49), получим

$$\lambda^2 \kappa_2 = - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \frac{T^{(2)}(\mathbf{p}|\mathbf{p}) - U(\mathbf{p}|\mathbf{p})}{p^2 - k^2} dV_p.$$

Интегрирование по $\mathbf{p}$ разобьем на две части; одна появляется из-за полюса при $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ и, следовательно, разрешает $\mathbf{p}$ быть равным $\mathbf{k}$ в падающей волне. Перенишем κ_2 следующим образом:

$$\lambda^2 \kappa_2 = - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \left[\frac{1}{2} \oint \frac{T^{(2)}(\mathbf{p}|\mathbf{p}) - U(\mathbf{p}|\mathbf{p})}{p^2 - k^2} dV_p + \right. \\ \left. + \oint \frac{T^{(2)}(\mathbf{p}|\mathbf{p}) - U(\mathbf{p}|\mathbf{p})}{p^2 - k^2} dV_p \right],$$

где первый интеграл берется по замкнутому контуру вокруг $p = k$. Символ $\oint$ перед вторым интегралом означает, что берется главное значение интеграла [см. (4.2.9)], которое получается взятием среднего арифметического из результатов, полученных при интегрировании по двум контурам, обозначенным цифрами 1 и 2 на рис. 9.12. Первый интеграл можно вычислить с помощью интегральной теоремы Коши, так что окончательно

$$\lambda^2 \kappa_2 = - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \left\{ \frac{k\pi i}{2} \int [T^{(2)}(\mathbf{k}|\mathbf{k}) - U(\mathbf{k}|\mathbf{k})] d\Omega_k + \right. \\ \left. + \oint \frac{T^{(2)}(\mathbf{p}|\mathbf{p}) - U(\mathbf{p}|\mathbf{p})}{p^2 - k^2} dV_p \right\}. \quad (9.3.52)$$

Здесь $\mathbf{k}$ — вектор длины k . Величины $U(\mathbf{k}|\mathbf{k})$ и $T^{(2)}(\mathbf{k}|\mathbf{k})$ являются первым и вторым приближениями Борна для амплитуды рассеяния в направлении $\mathbf{k}$ плоской волны, падающей в направлении $\mathbf{k}$. Эти амплитуды зависят от направления $\mathbf{k}$, если рассеивающая система не имеет сферической симметрии. В этом случае мы воспользуемся формулой (9.3.23),

из которой получим

$$\operatorname{Im} T^{(2)}(\mathbf{k}|\mathbf{k}) = -kQ_B(\mathbf{k}), \quad (9.3.53)$$

где Q_B является первым борновским приближением для полного поперечного сечения. Следовательно, знаменатель в ряде Фредгольма содержит член, пропорциональный $k^2\bar{Q}_B$, где $\bar{Q}_B$ — полное борновское поперечное сечение, усредненное по всем углам падения.

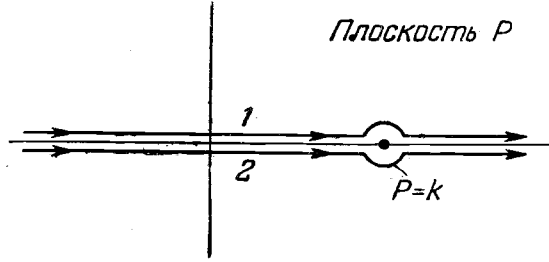


Рис. 9.12. Контуры, применяемые для получения главного значения интеграла для χ_2 .

Если, с другой стороны, система сферически симметрична, мы можем положить

$$U(\mathbf{k}|\mathbf{k}) = -4\pi f_B(0), \quad T^{(2)}(\mathbf{k}|\mathbf{k}) = -4\pi f_B^{(2)}(0),$$

где f_B и $f_B^{(2)}$ — первое и второе борновские приближения для амплитуды рассеяния в направлении распространения падающей волны. Подставляя эти выражения в формулу (9.3.52), имеем

$$\lambda^2 \chi_2 = ik [f_B^{(2)}(0) - f_B(0)] - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \oint \frac{T^{(2)}(\mathbf{p}|\mathbf{p}) - U(\mathbf{p}|\mathbf{p})}{p^2 - k^2} dV_p. \quad (9.3.54)$$

Пример. Рассмотрим прохождение и отражение волн материи для случая потенциального барьера, изображенного на рис. 9.9. Точное значение амплитуды прохождения C/A дается формулой (9.3.41). Эквивалентное интегральное уравнение и точное выражение для амплитуды прохождения даны в формулах (9.3.29)–(9.3.32). Так как $U(x_0)$ отлично от нуля только при $-a < x_0 < +a$, то ясно, что для того, чтобы получить $(n+1)$ -е приближение ψ и амплитуды прохождения, необходимо знать величину n -го приближения ψ , $\psi^{(n)}(x_0)$, только в этой области. Принимая за нулевое приближение невозмущенную падающую волну и используя рекуррентные соотношения (9.3.38), мы находим при $-a < x < a$, что

$$\psi^{(0)} = \exp(ikx),$$

$$\psi^{(1)} = \exp(ikx) + \frac{\lambda D}{2ik} \left\{ \left(x + a - \frac{1}{2ik} \right) \exp(ikx) + \frac{1}{2ik} \exp[ik(2a - x)] \right\}.$$

Используя формулу (9.3.32), мы можем получить первое и второе приближение Борна для амплитуды прохождения $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$:

$$f^{(1)} = 1 + \frac{\lambda D}{2ik} 2a, \\ f^{(2)} = f^{(1)} + \left(\frac{\lambda D}{2ik}\right)^2 \left[2a \left(a - \frac{1}{2ik} \right) + \frac{\exp(2ika)}{2ik^2} \sin(2ka) \right].$$

Сравним это с точным выражением (9.3.41), которое мы перепишем так:

$$f = \frac{1}{1 - \frac{(x-k)^2}{4kx} [\exp(4ika) - 1]}.$$

Его можно разложить в степенной ряд относительно D :

$$f \simeq 1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\lambda D}{2k^2} \right)^2 \exp(2ika) \sin(2ka).$$

Мы видим, что борновские приближения плохо соответствуют разложениям точного выражения амплитуды по степеням D . Этого можно было ожидать, так как величина силы взаимодействия зависит от a , так же как и от D . По-видимому, ответственным за это является наличие полюса в формуле (9.3.41). Однако, если вычислять коэффициент прохождения $T = |f|^2$, получается

$$T \simeq 1 - \left[\frac{\lambda D \sin(2ka)}{2k^2} \right]^2 \simeq T^{(2)},$$

где $T^{(2)}$ вычисляется по $f^{(2)}$ с точностью до величин порядка D^2 . Второе приближение Борна дает, следовательно, в этом порядке точное выражение для амплитуды прохождения, фаза же получается неправильной.

Обратимся теперь к разложению Фредгольма. Борновское приближение содержит разложение f в окрестности $k = \kappa$. Ряд Фредгольма, как мы увидим, надо сравнить с отдельными разложениями числителя (это не нужно в данном конкретном случае, так как числитель равен 1) и знаменателя. Из формулы (9.3.51) мы немедленно получаем

$$f \simeq 1 + \frac{(f^{(1)} - 1) + (f^{(2)} - f^{(1)}) - \lambda \kappa_1 (f^{(1)} - 1)}{1 - \lambda \kappa_1 + (\lambda^2/2)(\kappa_1^2 - \kappa_2)},$$

где $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ — борновские амплитуды. Следы κ_1 и κ_2 являются следами оператора $(1/2ik) \int \exp(ik|x - x_0|) U(x_0)$ и даются формулами

$$\kappa_1 = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0) dx_0,$$

$$\kappa_2 = -\frac{1}{4k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1) \exp(2ik|x_1 - x_0|) U(x_0) dx_0 dx_1.$$

Эти интегралы можно легко вычислить:

$$\lambda \kappa_1 = \frac{\lambda D}{2ik} 2a = f^{(1)} - 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{2} (\kappa_1^2 - \kappa_2) &= \frac{D^2 \lambda^2}{8ik^3} \left[\frac{1}{k} \exp(2ika) \sin(2ka) - 2a \right] - \frac{D^2 \lambda^2 a^2}{2k^2} = \\ &= -(f^{(2)} - f^{(1)}) + (f^{(1)} - 1)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, результат в методе Фредгольма получается таким:

$$f \simeq \frac{1}{1 - (f^{(2)} - 1) + (f^{(1)} - 1)^2}.$$

¹⁾ Эта формула для f неправильна: в числителе отсутствует множитель $\exp[2i(x-k)a]$ и в экспоненте знаменателя вместо x стоит k . Разложение исправленного выражения для f по степеням D совпадает с борновскими приближениями. — Прим. ред.

Коэффициент прохождения T , вычисленный до второго порядка относительно D в знаменателе, оказывается равным

$$T \simeq \frac{1}{1 + \left[\frac{\lambda D \sin(2ka)}{2k^2} \right]^2}.$$

Мы видим, что результат в методе Фредгольма почти всегда лучше, чем второе приближение Борна, так как первый не содержит ошибки, появляющейся из-за разложения χ около k при выполнении дальнейшего разложения знаменателя.

Трехмерный пример. Высшие борновские приближения можно вычислить аналитически только в некоторых случаях. Одним из них является потенциал Юкавы:

$$U = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}.$$

Мы применим исследование в импульсном пространстве, приводящее к формулам (9.3.49) и (9.3.50). Матричные элементы $U(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)$, входящие в них, определены формулой (9.3.45) и для указанного выше потенциала равны

$$U(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = \frac{4\pi\lambda}{\mu(\mu^2 + |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s|^2)} = \frac{4\pi\lambda}{\mu \left(\mu^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)}.$$

Первым борновским приближением для амплитуды $f(\vartheta, \varphi)$ будет поэтому, согласно (9.3.47),

$$f_B(\vartheta, \varphi) = -\frac{\lambda}{\mu(\mu^2 + |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s|^2)}.$$

Второе борновское приближение можно получить из $(-1/4\pi) T^{(2)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)$, где

$$T^{(2)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = U(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) - \frac{2\lambda^2}{\pi\mu^2} \int \frac{dV_K}{(\mu^2 + |\mathbf{K} - \mathbf{k}_s|^2)(\mu^2 + |\mathbf{K} - \mathbf{k}_i|^2)(K^2 - k^2)}.$$

Вычисление этого интеграла можно, как мы увидим, свести к вычислению

$$J = \int \frac{dV_K}{(\tau^2 + |\mathbf{K} - \mathbf{p}|^2)(K^2 - k^2)}.$$

Мы примем $\mathbf{p}$ за ось z сферической системы координат (K, α, β) в $\mathbf{K}$ -пространстве. Интегрирование по β можно осуществить сразу, так что

$$J = 2\pi \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^\infty \frac{K^2 dK}{(\tau^2 + K^2 + p^2 - 2Kp \cos \alpha)(K^2 - k^2)}.$$

Мы получим более удобное выражение для J , если сделаем подстановку $\alpha = \pi - \psi$ и $K = -K'$ и затем возьмем среднее арифметическое полученного таким образом и данного выше J :

$$J = \pi \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^2 dK}{(\tau^2 + K^2 + p^2 - 2Kp \cos \alpha)(K^2 - k^2)}.$$

Интегрирование по K производится по контуру, приведенному на рис. 9.11. Этот контур можно замкнуть полуокружностью бесконечного радиуса в верхней полуплоскости. После этого можно применить теорему о вычетах, учитывая, что подинтегральная функция имеет полюсы в нулях K_0 и K_1 знаменателя:

$$K_0 = k \quad \text{и} \quad K_1 = p \cos \alpha + i \sqrt{\tau^2 + p^2 \sin^2 \alpha}.$$

Разбивая J на соответствующие интегралы, имеем

$$J = J_0 + J_1,$$

где

$$J_0 = \pi^2 i k \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\tau^2 + k^2 + p^2 - 2kpx}$$

и

$$J_1 = \frac{\pi^2 i}{p} \int_{i\tau-p}^{i\tau+p} \frac{K_1}{K_1^2 - k^2} dK_1.$$

Следовательно, окончательно

$$J = \frac{\pi^2 i}{p} \ln \left(\frac{k+p+i\tau}{k-p+i\tau} \right).$$

Нам также будет необходимо знать величину L :

$$L = \int \frac{dV_K}{(\tau^2 + |\mathbf{K} - \mathbf{p}|^2)^2 (K^2 - k^2)}.$$

Этот интеграл можно получить, дифференцируя J по τ :

$$L = - \frac{\pi^2}{\tau [k^2 - \tau^2 - p^2 + 2ik\tau]}.$$

Интеграл, участвующий в $T^{(2)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)$,

$$M = \int \frac{dV_K}{(\mu^2 + |\mathbf{K} - \mathbf{k}_s|^2)(\mu^2 + |\mathbf{K} - \mathbf{k}_i|^2)(K^2 - k^2)}$$

можно связать с L при помощи соотношения

$$\frac{1}{ab} = \int_{-1}^{+1} \frac{2dz}{[a(1+z) + b(1-z)]^2}.$$

Из него следует, что

$$M = 2 \int_{-1}^{+1} dz \int \frac{dV_K}{[2\mu^2 + |\mathbf{K} - \mathbf{k}_s|^2(1+z) + |\mathbf{K} - \mathbf{k}_i|^2(1-z)]^2 (K^2 - k^2)}.$$

Переписав знаменатель в соответствии с формой L , мы получим

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \int \frac{dV_K}{K^2 - k^2} \left\{ \mu^2 + k^2(1-z^2) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \alpha \right) + \left| \frac{1}{2}(1+z)\mathbf{k}_i + \frac{1}{2}(1-z)\mathbf{k}_s - \mathbf{K} \right|^2 \right\}^{-2}.$$

Интеграл по пространству $\mathbf{K}$ записан теперь в более удобной форме, причем

$$\tau^2 = \mu^2 + k^2(1-z^2) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \alpha \right),$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(1+z)\mathbf{k}_i + \frac{1}{2}(1-z)\mathbf{k}_s.$$

Так как длины $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$ равны k , то

$$\tau^2 + p^2 = \mu^2 + k^2.$$

Следовательно,

$$M = -\frac{\pi^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\tau(-\mu^2 + 2ik\tau)}.$$

Благодаря тому что τ^2 является простой алгебраической функцией от z , этот интеграл можно найти в явном виде:

$$M = \frac{\pi^2}{k \sin \frac{1}{2} \vartheta \sqrt{\mu^4 + 4k^2 \left(\mu^2 + k^2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta \right)}} \times \\ \times \left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{\mu k \sin \frac{1}{2} \vartheta}{\sqrt{\mu^4 + 4k^2 \left(\mu^2 + k^2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta \right)}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{\mu^4 + 4k^2 \left(\mu^2 + k^2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta \right)} + 2k^2 \sin \frac{1}{2} \vartheta}{\sqrt{\mu^4 + 4k^2 \left(\mu^2 + k^2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta \right)} - 2k^2 \sin \frac{1}{2} \vartheta} \right] \right\}. \quad (9.3.55)$$

Этот результат можно подставить в формулу для $T^{(2)}$ на стр. 81. Сходимость здесь также ограничена, вследствие наличия «виртуальных уровней».

Мы закончим этот раздел вычислением по методу Фредгольма до второго порядка. Так как мы имеем дело с трехмерной задачей, то $\operatorname{Spig} \kappa$, больше не появляется, так что фредгольмовское выражение для f можно записать так:

$$f \simeq f^{(2)} / [1 - (\lambda^2/2) \kappa_2],$$

если в этом выражении в числителе и знаменателе сохранены все члены до второго порядка относительно λ^2 . Интеграл для κ_2 есть

$$\kappa_2 = \frac{1}{4\pi^4 \mu^2} \iint \frac{dV_p dV_K}{(p^2 - k^2)(K^2 - k^2)(\mu^2 + |\mathbf{K} - \mathbf{p}|^2)}.$$

Интеграл по пространству $\mathbf{K}$ пропорционален интегралу L , рассмотренному выше, так что

$$\kappa_2 = \frac{1}{4\pi^2 \mu^3} \int \frac{dV_p}{(p^2 - k^2)[p^2 - (k + i\mu)^2]}.$$

Этот интеграл можно сразу свести к контурному интегралу, дающему окончательно

$$\kappa_2 = \frac{1}{2\mu^3 (\mu - 2ik)}.$$

Следовательно, для малых λ фредгольмовское поперечное сечение второго порядка будет больше, чем соответствующее приближение по Борну.

Трудно определить точность этих результатов, не сделав либо перехода к более высокому порядку приближения, либо точного подсчета по методу фазовых сдвигов. Однако результаты, полученные в одномерной задаче, указывают на то, что необходимо сделать вычисления на один порядок выше, чтобы получить достаточно точные результаты.

Длинноволновое приближение. В борновском приближении потенциал $U(r)$ рассматривается как возмущение, а в качестве невозмущенных волновых функций берутся плоские волны. В других приближениях рассматривают k^2 или $1/k^2$ как параметр возмущения. Первый способ называется

длинноволновым приближением; он будет рассматриваться в этом параграфе; второй годится для коротковолнового предела.

Длинноволновое приближение особенно полезно для решения скалярного уравнения Гельмгольца, так как связывает его решение с решением уравнения Пуассона. Последнее же может быть решено методом разделения переменных, а в двумерном случае методом конформного отображения значительно чаще, чем в 11 координатных системах, в которых можно получить точные решения скалярного уравнения Гельмгольца. Сейчас мы рассмотрим это приложение, а затем перейдем к длинноволновому приближению для уравнения Шредингера.

Мы разложим волновую функцию ψ в следующий степенной ряд:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \varphi_n(\mathbf{r}). \quad (9.3.56)$$

В этом разложении предполагается, что ψ — аналитическая функция от k в окрестности точки $k=0$. В случае, если это не так (например, двумерная задача с условиями Дирихле на рассеивающей области), уравнения для φ_n окажутся не имеющими решений. Если возможно определить природу особенности, то всегда можно добавить соответствующие члены в формулу (9.3.56). Форма разложения подсказана разложением плоской волны, к которой должна, конечно, приближаться $\psi(\mathbf{r})$, когда расстояние от рассеивающей области бесконечно возрастает.

Подстановка разложения (9.3.56) в скалярное уравнение Гельмгольца и приравнивание нулю коэффициентов при каждой степени k дают

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_0 &= 0, \quad \nabla^2 \varphi_1 = 0, \\ \nabla^2 \varphi_n &= n(n-1) \varphi_{n-2}. \end{aligned} \quad (9.3.57)$$

Граничное условие на поверхности рассеивающей области для каждой из этих функций такое же, как для ψ . Граничное условие на бесконечности более сложное. Так как ψ приближается к

$$\exp(ikz) + \frac{1}{r} \exp(ikr) f(\vartheta, \varphi),$$

то ясно, что

$$\varphi_0(\mathbf{r}) \rightarrow 1 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы определить граничные условия для остальных φ_i , удобно обратиться к интегральному уравнению для ψ , так как оно включает в себя граничные условия. Чтобы сделать анализ более конкретным, возьмем условия Дирихле: $\psi = 0$. Перепишем снова интегральное уравнение (9.3.26):

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(ikz) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0.$$

Подставим сюда разложение (9.3.56) и приравняем опять коэффициенты при одинаковых степенях k . (Заметим, что если бы мы не интересовались разложением в степенной ряд по k , мы могли бы использовать это уравнение в качестве итерационной формулы, подставляя φ_0 вместо ψ , затем подставляя полученный результат вместо ψ , чтобы найти следующее приближение, и т. д.). Мы получаем

$$\varphi_n = z^n + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n_0} dS_0 + \frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \int R^{p-1} \frac{\partial \varphi_{n-p}}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.3.58)$$

Первые три из этих равенств имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 1 + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0, \\ \varphi_1 &= z + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_0} dS_0 + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0, \\ \varphi_2 &= z^2 + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_0} dS_0 + \frac{2}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_0} dS_0 + \frac{1}{4\pi} \int R \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0.\end{aligned}$$

Применяя оператор ∇^2 к этим уравнениям, можно проверить непосредственно, что уравнения (9.3.58) и (9.3.57) идентичны. Асимптотическое поведение при больших r получается, если разложить R^{p-1} по убывающим степеням r , начиная с r^p . Мы принимаем в расчет только члены вплоть до $1/r$, исключая сам член $1/r$, так как он является частью рассеянной волны. Например,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\simeq z + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \\ \varphi_2 &\simeq z^2 + \frac{r}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0 + \frac{1}{4\pi} \int \left[2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_0} - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} \right] dS_0.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{a}_r$ представляет собой единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$, т. е. в направлении рассеяния. Эти условия уточняют наш выбор функций φ_n . Когда последние определены, ряд (9.3.56) можно подставить в (9.3.27), чтобы получить амплитуду рассеяния. Если мы разложим ее по степеням k , то получим

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_n (-ik)^n \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{(n-p)! p!} \int (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}_0)^{n-p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.3.59)$$

Во втором порядке относительно k имеем

$$\begin{aligned}f(\vartheta, \varphi) &\simeq \frac{1}{4\pi} \left\{ \int \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0 - ik \left[\int \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0 - \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_0} dS_0 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2}{2} \left[\int (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}_0)^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0 - 2 \int \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_0} dS_0 + \int \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_0} dS_0 \right] \right\}. \quad (9.3.60)\end{aligned}$$

Непосредственно видно, что в пределе, при $k=0$, рассеяние сферически симметрично. Соответствующая амплитуда рассеяния имеет размерность длины и часто называется *длиной рассеяния* a . Поперечное сечение $Q(k=0)$, выраженное через a , равно $4\pi a^2$. Когда r стремится к бесконечности, φ_1 стремится к $z+a$.

Чтобы увидеть, как работают эти формулы, рассмотрим рассеяние на сфере радиуса A , на которой выполняются условия Дирихле. Тогда

$$\varphi_0 = 1 - \frac{A}{r}.$$

Амплитуда рассеяния при $k=0$ равна

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} dS_0 = -A^2 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right)_{r=A} = -A.$$

Волновая функция φ_1 должна приближаться к $z-A$ при больших r . Первый член z представляет собой однородный поток на бесконечности, тогда как второй — однородное давление, аналогично случаю φ_0 . Отсюда

$$\varphi_1 = \left(r - \frac{A^3}{r^2} \right) \cos \vartheta - A \left(1 - \frac{A}{r} \right).$$

Подставляя в (9.3.60), мы получаем

$$f(\vartheta, \varphi) = -A + ikA^2 + \dots$$

Функция φ_2 удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi_2 = 2 \left(1 - \frac{A}{r} \right)$$

и условию

$$\varphi_2 \simeq z^2 - rA + 2A^2 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Решение φ_2 будет следующим:

$$\varphi_2 = \frac{1}{3} \left(r^2 - \frac{A^3}{r^3} \right) P_2(\cos \vartheta) + \frac{1}{3} r^2 - Ar + 2A^2 - \frac{4}{3} \frac{A^3}{r}.$$

Во втором порядке относительно k имеем

$$f(\vartheta, \varphi) = -A + ikA^2 + \frac{k^2 A^3}{3} (2 - 3 \cos \vartheta). \quad (9.3.61)$$

Мы видим, что все, что необходимо знать для вывода длинноволнового приближения, эквивалентно знанию элементарных решений уравнения Лапласа в системе координат, соответствующей рассеивающей поверхности.

Для иллюстрации общего метода была выбрана трехмерная задача. Он, конечно, также применяется и в одномерном случае, как мы увидим на примере ниже. Мы должны всегда помнить, что предположение об аналитической зависимости ψ от k может оказаться необходимым видоизменить в особых случаях.

Длинноволновое приближение для уравнения Шредингера. Мы рассмотрим движение частицы с массой m и энергией E в сферически симметричном потенциальном поле $V(r)$. Так как длина волны λ и энергия связаны соотношением

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

то длинные волны соответствуют низким энергиям частицы. При таких длинах волн изотропная составляющая падающей волны оказывает наиболее сильное действие, поэтому мы сосредоточим свое внимание на уравнении для u_0 [см. (9.3.13)]:

$$u_0'' + [k^2 - U(r)] u_0 = 0, \quad U = \frac{2m}{\hbar^2} V. \quad (9.3.62)$$

(Заметим, однако, что техника и некоторые результаты применимы для любых l .) Будет удобно немного изменить наши обозначения в соответствии с этим. Заменим символ u_0 на u_k , чтобы указать, что мы имеем дело с решениями уравнения (9.3.62) с волновым числом k . В новых обозначениях u_0 представляет собой решение при $k=0$.

Граничные условия для $u_k(r)$ таковы:

$$u_k(0) = 0, \quad u_k(r) \simeq \sin(kr - \eta) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty,$$

где мы оставили амплитуду на бесконечности неопределенной. Позднее мы выберем ее так, как это будет удобно.

Задача, которую мы ставим здесь, состоит в том, чтобы найти $\eta(k)$, т. е. выразить сдвиг фазы для данного волнового числа k через предельный сдвиг фазы $\eta(0)$. Легко установить величину возмущения первого порядка, сравнивая уравнения для u_0 и u_k . Этот результат основывается на равенстве

$$u_0 u_k'' - u_k u_0'' + k^2 u_k u_0 = 0.$$

Обычный способ непосредственного интегрирования по всей области изменения независимого переменного здесь не применим, так как интегралы

по отдельности расходятся. Мы поэтому введем некоторые функции, которые имеют такое же асимптотическое поведение, как u_0 и u_k . Пусть этими функциями будут w_k и w_0 , причем

$$u_k(r) \simeq w_k(r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Здесь функция w_k пропорциональна $\sin(kr - \eta)$ и удовлетворяет уравнению Шредингера, полученному из уравнения для u_k при условии, что потенциал $U = 0$:

$$w_k'' + k^2 w_k = 0.$$

Комбинируя уравнения для w_k и w_0 , получаем уравнение

$$w_0 w_k'' - w_k w_0'' + k^2 w_k w_0 = 0.$$

Вычтем теперь это уравнение из аналогичного уравнения для u_k и u_0 . Интегрирование по r от нуля до бесконечности теперь можно осуществить, так как расходящиеся члены при больших r погашают друг друга. Подстановка граничных условий для u_k и u_0 приводит к уравнению

$$[w_0 w_k' - w_k w_0']_{r=0} = k^2 \int_0^{\infty} (w_k w_0 - u_k u_0) dr. \quad (9.3.63)$$

Мы должны теперь подставить функции w_k и w_0 . Выбирая их амплитуды так, чтобы

$$w_0(0) = w_k(0) = 1,$$

находим

$$w_k = -\frac{\sin(kr - \eta)}{\sin \eta}, \quad w_0 = 1 - \frac{r}{a}, \quad (9.3.64)$$

где

$$1/a = \lim_{k \rightarrow 0} (k \operatorname{ctg} \eta). \quad (9.3.65)$$

Величину a можно вычислить, решая уравнение Шредингера для $k = 0$.

Выражения (9.3.64) подставим теперь в (9.3.63), и это даст следующий результат:

$$-k \operatorname{ctg} \eta = -\frac{1}{a} + k^2 \int_0^{\infty} (w_k w_0 - u_k u_0) dr. \quad (9.3.66)$$

Из этого *точного* соотношения можно получить формулу для $-k \operatorname{ctg} \eta$, справедливую до первого порядка относительно k^2 , если приближенно заменить w_k на w_0 , а u_k на u_0 :

$$-k \operatorname{ctg} \eta \simeq -\frac{1}{a} + k^2 \int_0^{\infty} (w_0^2 - u_0^2) dr. \quad (9.3.67)$$

Эта формула очень полезна не только с вычислительной точки зрения, но также с точки зрения анализа экспериментальных данных. Из этих данных можно определить $k \operatorname{ctg} \eta$. Его зависимость от k^2 , т. е. от энергии, при малых k представляется прямой линией. Наклон этой прямой и отрезок, отсекаемый на оси, дают два параметра, определяющие величину a и интеграл $\int_0^{\infty} (w_0^2 - u_0^2) dr$. Таким образом, результаты эксперимента могут быть объяснены любым потенциалом, который имеет два свободных параметра.

Для того чтобы найти более высокие приближения, нужно в уравнение (9.3.66) подставить более точные выражения для w_k и u_k . Так как дифференциальное уравнение для u_k зависит от k^2 и «падающая» волна при соответствующей нормировке также является функцией от k^2 , то u_k можно разложить в степенной ряд по k^2 , так что

$$u_k = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \varphi_n. \quad (9.3.68)$$

Дифференциальные уравнения для функций φ_n имеют вид

$$\varphi_n'' - U\varphi_n = -\varphi_{n-1},$$

где $\varphi_0 = u_0$. Функции φ_n при $r=0$ равны нулю. Чтобы выяснить их поведение на бесконечности, мы разложим асимптотическую функцию, определенную в (9.3.64), в степенной ряд по k^2 . Для иллюстрации мы получим граничные условия для φ_1 , первого члена в разложении (9.3.68). Функция w_k выражается формулой

$$w_k = \cos kr - k \operatorname{ctg} \eta \frac{\sin kr}{k}.$$

Мы можем разложить правую часть в ряд до первого порядка относительно k^2 и заменить $k \operatorname{ctg} \eta$ по формуле (9.3.67). Это даст

$$w_k \simeq 1 - \frac{r}{a} + k^2 \left[\frac{r^3}{6a} - \frac{r^2}{2} + r \int_0^{\infty} (w_0^2 - u_0^2) dr \right]. \quad (9.3.69)$$

Следовательно,

$$\varphi_1 \simeq \frac{r^3}{6a} - \frac{r^2}{2} + r \int_0^{\infty} (w_0^2 - u_0^2) dr \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (9.3.70)$$

Конкретизация функции φ_1 является теперь полной. Если u_0 и v_0 являются двумя независимыми решениями уравнения для u_0 с вронскианом, равным -1 , то

$$\varphi_1 = Cu_0 + v_0 \int_0^r u_0^2 dr_0 - u_0 \int_0^r u_0 v_0 dr_0, \quad (9.3.71)$$

где C должно быть подобрано так, чтобы выполнялось граничное условие (9.3.70). Чтобы определить C , нам надо знать поведение написанных интегралов при больших r . Первый из них можно записать следующим образом:

$$\int_0^r (u_0^2 - w_0^2) dr + \int_0^r w_0^2 dr.$$

При бесконечном r первый из этих двух интегралов является как раз коэффициентом при k^2 в разложении (9.3.67) для $k \operatorname{ctg} \eta$ (и также остается конечным). Следовательно,

$$\int_0^r u_0^2 dr_0 \simeq \int_0^r w_0^2 dr_0 - \int_0^{\infty} (w_0^2 - u_0^2) dr_0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Второй интеграл в (9.3.71) также стремится к конечному значению при неограниченном возрастании r . Чтобы показать это, мы прежде всего

отметим, что для того чтобы интеграл

$$\int_0^{\infty} (\omega_0^2 - u_0^2) dr$$

был конечным, разложение u_0 для больших r не должно содержать членов с r^{-1} и r^{-2} . Этот факт в соединении с требованием, что вронскиан u_0 и v_0 должен равняться -1 , является достаточным для того, чтобы показать, что разложение v_0 для больших r также не содержит членов с r^{-1} и r^{-2} , откуда и вытекает желаемый результат. Следовательно,

$$\varphi_1 \simeq C \left(1 - \frac{r}{a}\right) + a \int_0^{\infty} (\omega_0^2 - u_0^2) dr_0 - \\ - \left(1 - \frac{r}{a}\right) \int_0^{\infty} (u_0 v_0 + a - r_0) dr_0 + \frac{r^3}{6a} - \frac{r^2}{2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

куда подставлено явное выражение для ω_0 и асимптотическое для v_0 . Сравнивая с граничным условием (9.2.70), мы видим, что

$$C = -a \int_0^{\infty} (\omega_0^2 - u_0^2) dr_0 + \int_0^{\infty} (u_0 v_0 + a - r_0) dr_0.$$

Следовательно,

$$\varphi_1 = u_0 \left[-a \int_0^{\infty} (\omega_0^2 - u_0^2) dr_0 + \int_r^{\infty} (u_0 v_0 + a - r_0) dr_0 + \right. \\ \left. + ar - \frac{1}{2} r^2 \right] + v_0 \int_0^r u_0^2 dr. \quad (9.3.72)$$

Раз известно φ_1 , то можно определить следующий член в разложении $k \operatorname{ctg} \eta$:

$$-k \operatorname{ctg} \eta \simeq -\frac{1}{a} + k^2 \int_0^{\infty} (\omega_0^2 - u_0^2) dr + k^4 \int_0^{\infty} [\omega_0 \chi_1 - u_0 \varphi_1] dr, \quad (9.3.73)$$

где

$$\omega_k = \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \chi_n,$$

так что $\varphi_1 \simeq \chi_1$ при $r \rightarrow \infty$. Функция χ_1 дана формулой (9.3.70).

Мы имеем, таким образом, возможность определить следующий член в разложении $k \operatorname{ctg} \eta$ в степенной ряд с помощью квадратур, заключающих в себе только два независимых решения уравнения для u_0 , «радикального» уравнения Шредингера с $k=0$. Этот процесс непосредственно продолжается для получения членов более высокого порядка. Нужно также отметить, что подобный степенной ряд для $k \operatorname{ctg} \eta$ можно получить вблизи любого значения k^2 . Однако сходимость таких рядов, вообще говоря, слабее, чем у рассмотренного выше ряда.

Сходимость. Выясним прежде всего, при каких условиях зависимость величины интеграла в формуле (9.3.66) от энергии будет слабой. Так как подинтегральная функция представляет собою разность между точной и асимптотической формами, то она имеет значение только в той области, где потенциал U отличен от нуля. Отметим, что для сходимости интеграла

необходимо, чтобы потенциал U быстро стремился к нулю при возрастании r . Поэтому предшествующий анализ применим только к короткодействующим потенциалам, а в случае потенциалов с бесконечным радиусом действия, например для кулоновского поля, — неприменим. Действительно, в этом последнем случае поперечное сечение при нулевой энергии бесконечно. Эффективный радиус взаимодействия r_e обычно выбирается следующим:

$$r_e = 2 \int_0^{\infty} (\omega_0^2 - u_0^2) dr, \quad (9.3.74)$$

так как эта формула дает точное значение для потенциала, постоянного при $r < r_e$ и равного нулю при $r > r_e$.

Обращаясь снова к интегралу, мы видим, что его зависимость от энергии определяется зависимостью ω_k и u_k от k внутри той области, где U отлично от нуля, т. е. для $r < r_e$. Если в этой области потенциал очень велик, то изменения в энергии падающей частицы, которые малы по сравнению с этим потенциалом, оказывают лишь небольшое влияние на u_k , так что замена u_k на u_0 приводит к небольшим ошибкам. Таким образом, сходимость будет хорошей, если

$$U_{\text{ср.}} \gg k^2, \quad (9.3.75)$$

где $U_{\text{ср.}}$ есть мера среднего значения потенциала в области $0 < r < r_e$. Если взять эту меру равной

$$\frac{1}{r_e} \int_0^{\infty} u_0^2 U dr,$$

где амплитуда величины u_0 выбрана так, что асимптотическая форма последней ω_0 равна единице при $r=0$, то неравенство (9.3.75) можно заменить приближенно неравенством

$$k^2 r_e a \ll 1. \quad (9.3.76)$$

Мы рассмотрим теперь зависимость ω_k от k в области $r < r_e$. Из формулы равенств (9.3.64) ясно, что эта зависимость будет слабой, если

$$kr_e \ll 1. \quad (9.3.77)$$

При этих условиях замена ω_k на ω_0 приводит к небольшой ошибке. Мы можем, таким образом, сделать вывод, что сходимость ряда для $k \operatorname{ctg} \eta$ будет быстрой, если потенциал большой и короткодействующий.

Радиус сходимости ряда дается величиной k^2 , при которой $\eta = \pi$, так как тогда $k \operatorname{ctg} \eta$ обращается в бесконечность и ряд должен расходиться. При такой величине энергии поперечное сечение равно нулю. Следовательно, можно ожидать, что ряд для $k \operatorname{ctg} \eta$ будет сходиться вплоть до той энергии, при которой появляется первый минимум полного поперечного сечения. Чтобы выйти за пределы этой энергии, необходимо применить какой-нибудь процесс аналитического продолжения, например преобразование Эйлера.

Коротковолновое приближение; WKBJ-метод¹⁾. Мы сосредоточим наше внимание на одномерных задачах. Наиболее удобной для нашего иссле-

¹⁾ WKBJ — первые буквы фамилий: G. Wentzel, H. A. Kramers, L. Brillouin, H. Jeffreys более или менее независимо открыли этот метод в связи с решением различных задач.

дования является следующая форма уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k^2 - U(x)]\psi = 0. \quad (9.3.78)$$

Это ограничение очень мало нарушает общность, так как любое дифференциальное уравнение второго порядка, в частности уравнение Штурма — Лиувилля, может быть преобразовано в уравнение Шредингера.

При уменьшении длины волны изменение потенциала $U(x)$ на протяжении длины волны становится все меньше и меньше. Это приводит к мысли, что в пределе можно считать $U(x)$ постоянным на протяжении нескольких длин волн в окрестности x и что в этой области эффективное волновое число $q(x)$ равно

$$q(x) = \sqrt{k^2 - U(x)}.$$

Соответствующим приближенным решением уравнения (9.3.78) будет тогда

$$\psi \simeq \exp \left[\pm i \int q(x) dx \right]. \quad (9.3.79)$$

Условие, что q изменяется медленно на протяжении длины волны, необходимое для того, чтобы приближение (9.3.79) имело силу, выражается неравенством

$$\frac{d(\ln q)}{q dx} \ll 1, \text{ или } \left| \frac{\partial U / \partial x}{2(k^2 - U)^{3/2}} \right| \ll 1. \quad (9.3.80)$$

Отсюда непосредственно ясно, что (9.3.79) теряет силу, когда $\partial U / \partial x \gg 1$ или $k^2 - U$ равно нулю.

Потенциальная энергия альфа-частицы в поле атомного ядра может служить примером случаев, в которых коротковолновое приближение не применимо из-за первой из названных причин. Пока частица находится вне ядра, на нее действует электростатическая сила отталкивания, но она очень быстро заменяется большой силой притяжения, как только α -частица попадает внутрь ядра. Коротковолновое приближение можно применять только при таких энергиях α -частицы, при которых ее длина волны мала по сравнению с расстоянием, на котором отталкивание сменяется притяжением.

Метод не применим по второй причине, если U в некоторой точке больше или равно k^2 . Тогда найдется точка, в которой $U = k^2$. По классическим представлениям в этой точке полная энергия падающей частицы равна ее потенциальной энергии и, следовательно, ее кинетическая энергия равна нулю. В следующий момент частица изменит направление движения; поэтому эти точки, в которых $U = k^2$, называются *классическими точками поворота*.

Выясним теперь более точно смысл этих замечаний. Уравнение (9.3.79) наводит на мысль сделать подстановку

$$\psi = \exp [\varphi(x)].$$

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(\varphi')^2 + \varphi'' + q^2 = 0. \quad (9.3.81)$$

Это нелинейное уравнение первого порядка для функции φ' , являющейся логарифмической производной от ψ . Его можно решить итерационным методом, предполагая при этом, что φ' — медленно меняющаяся функция. Тогда

$$(\varphi')^2 \simeq -q^2 + \frac{i}{2q} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{i}{2q} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{i}{2q^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Мы снова видим непригодность этого разложения при $q^2 = k^2 - U$, равном нулю, и при слишком быстрых колебаниях U . Беря первые два члена разложения, получаем

$$\psi \simeq q^{-1/2} \exp\left(\pm i \int q dx\right). \quad (9.3.82)$$

Общее решение представляется линейной комбинацией этих двух решений. Особенность при $q=0$ является, конечно, отражением несостоятельности представленного в виде ряда решения уравнения (9.3.81) при этом значении q .

Приближение (9.3.82) можно использовать в задаче о прохождении волн материи через потенциальный барьер $U(x)$ и отражении их от этого барьера, если энергия падающих частиц всюду больше $U(x)$ (см. рис. 9.13). Если частицы движутся в положительном направлении оси x с амплитудой, равной единице при $x \rightarrow -\infty$, то

$$\psi \simeq \sqrt{\frac{k}{q}} \exp\left[i \int_{-\infty}^x (q - k) dx\right] \exp(ikx). \quad (9.3.83)$$

Следовательно, в этом приближении коэффициент прохождения равен единице, а меняется только фаза волны. Это соответствует классическому результату. Мы можем получить следующее приближение для коэффициентов прохождения и отражения, подставив выражение (9.3.83) в формулы (9.3.31) и (9.3.32) ($\lambda=1$). Более точные выражения для ψ можно получить,

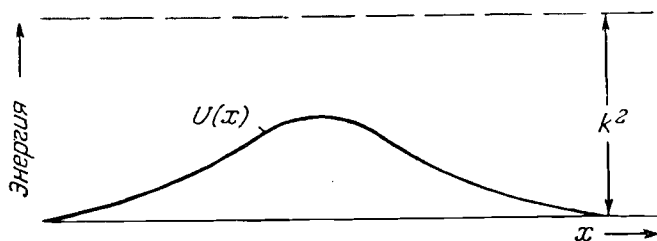


Рис. 9.13. Прохождение волн в случае, когда энергия k^2 везде превышает потенциал $U(x)$.

используя (9.3.83) в качестве исходной пробной функции в итерационном методе, основанном на интегральном уравнении (9.3.30). Можно ожидать, что сходимость такого итерационного метода тем лучше, чем больше k^2 по сравнению с U . Она, конечно, может быть улучшена и с помощью метода Фредгольма. Случай, когда k^2 близко к максимальному значению U , будет рассмотрен позднее [см. уравнение (9.3.117) и далее]. Необходимо указать, что итерационный метод, рассмотренный выше, не приводит к разложению коэффициента отражения по обратным степеням k . Вполне возможно, что коэффициент отражения не является на бесконечности аналитической функцией от k , даже если нам известно, что он там имеет нулевое значение.

Связь с интегральным уравнением. Прежде чем приступить к рассмотрению ситуаций, отличных от той, которая проиллюстрирована на рис. 9.13, стоит показать, как результаты, приведенные выше, можно получить непосредственно из интегрального уравнения. Мы исходим при этом из того замечания, что при k , стремящемся к бесконечности, коэффициент отражения стремится к нулю. Следовательно, если мы рассматриваем волны, падающие слева, как на рис. 9.13, мы должны ожидать, что в

интегральном уравнении для ψ

$$\psi = e^{ikx} + \frac{1}{2ik} \left[e^{ikx} \int_{-\infty}^x e^{-ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 + e^{-ikx} \int_x^{\infty} e^{ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \right]$$

член, содержащий множитель $\exp(ixk)$, должен быть преобладающим. Опустив другой интегральный член, имеем

$$\psi \simeq e^{ikx} + \frac{1}{2ik} e^{ikx} \int_{-\infty}^x e^{-ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0.$$

Умножая на $\exp(-ikx)$ и дифференцируя по x , приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} (e^{-ikx} \psi) = \frac{U}{2ik} (e^{-ikx} \psi).$$

Уравнение это можно сразу проинтегрировать:

$$\psi \simeq \exp i \left(kx - \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^x U dx \right). \quad (9.3.84)$$

Мы видим, что фаза в этом выражении содержит как раз первые два члена разложения $q(x)$ по обратным степеням k . Следовательно, эта функция ψ приближенно равна той, которая определяется по формуле (9.3.79). Улучшение результата (9.3.84) можно осуществить с помощью итераций, но это приводит к результату, полностью эквивалентному тому, который получается по итерационному методу, указанному после формулы (9.3.83).

Случай изолированных классических точек поворота. Если k^2 меньше максимального значения U , то имеется по крайней мере одна классическая точка поворота. Для потенциала, изображенного на рис. 9.13, их будет две. Анализ, который мы собираемся описать, применим в случае, если имеется только одна точка поворота или если их несколько, но они расположены далеко друг от друга.

Рассмотрим тот случай, когда q имеет один нуль при $x = x_0$; как мы предварительно заметили, при этом приближенное решение (9.3.82) имеет особенность при $x = x_0$. На самом же деле здесь никакой особенности нет, так как точка x_0 является, очевидно, регулярной точкой для дифференциального уравнения (9.3.78), которому удовлетворяет функция ψ . Мы можем легко получить решения в окрестности точки x_0 следующим способом. В окрестности нуля q мы можем положить приближенно

$$q^2 = a^2 (x - x_0),$$

где a — постоянная величина. Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a^2 (x - x_0) \psi = 0$$

можно решить с помощью функций Бесселя порядка $1/3$. Получается два решения:

$$\psi_+ = \sqrt{x - x_0} J_{1/3} \left[\frac{2}{3} a (x - x_0)^{3/2} \right], \quad (9.3.85)$$

$$\psi_- = \sqrt{x - x_0} J_{-1/3} \left[\frac{2}{3} a (x - x_0)^{3/2} \right]. \quad (9.3.86)$$

Истинное решение ψ должно приближаться к линейной комбинации ψ_+ и ψ_- при x , стремящемся к x_0 .

Чтобы найти эту комбинацию, полезно заменить независимую переменную x другой переменной, которая сводится к $2a(x-x_0)^{3/2}/3$ при $x \rightarrow x_0$, и к $\int q dx$ при больших x . Такой переменной является

$$w = \int_{x_0}^x q dx. \quad (9.3.87)$$

При этом мы видим, что функция

$$P = \sqrt{\frac{w}{q}} [AJ_{1/3}(w) + BJ_{-1/3}(w)], \quad (9.3.88)$$

где A и B — постоянные, сводится к линейной комбинации ψ_+ и ψ_- для x , близких к x_0 , и к линейной комбинации решений (9.3.82) при больших x . Это последнее утверждение основано на асимптотических выражениях (5.3.68) для функций Бесселя. Константы A и B определяются граничными условиями. Функция P является, таким образом, приближенным решением дифференциального уравнения для ψ как в окрестности точки x_0 , так и при $x \rightarrow \pm \infty$. В других местах она больше отклоняется от точного решения. Для того чтобы сообразить, как оценить порядок величины ошибки, а также чтобы найти способ улучшения P , мы найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет P . Непосредственное вычисление дает

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \left[q^2 - \frac{r''(x)}{r(x)} \right] P = 0, \quad (9.3.89)$$

где

$$r = \frac{w^{1/6}}{\sqrt{q}}. \quad (9.3.90)$$

Отношение r''/r является, таким образом, мерой ошибки. Оно равно нулю при бесконечном x . Оно конечно при $x = x_0$, и так как оно пропорционально второй производной U при $x = x_0$, то ошибка будет малой, если производная потенциала меняется медленно. Ошибка будет большой в любых других нулях q или в точках, где потенциал U меняется быстро.

Форма дифференциального уравнения (9.3.89) приводит к мысли, что если x_0 является единственным нулем q , то r''/r можно рассматривать как возмущение.

Более явно мы запишем это следующим образом:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(q^2 - \frac{r''}{r} \right) \psi = - \frac{r''}{r} \psi.$$

Это уравнение может быть преобразовано в интегральное уравнение с помощью функции Грина для оператора

$$\frac{d^2}{dx^2} + q^2 - \frac{r''}{r},$$

которая выражается через два независимых решения, получающихся из формулы (9.3.88). Это интегральное уравнение может затем служить основой для итерационного метода или метода Фредгольма, если это необходимо.

Вернемся теперь к приближению (9.3.88), чтобы установить явный вид его асимптотического поведения. Это нужно для того, чтобы удовлетворить граничным условиям при $\pm \infty$. Рассмотрим сначала случай, показанный на рис. 9.14, где $k^2 > U$ для $x > x_0$. Асимптотическое поведение решения (9.3.88) для $x \gg x_0$ может быть найдено сразу с помощью фор-

мул (5.3.68), дающих асимптотическое поведение бesselевых функций. Получается, что

$$P \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \left[A \cos\left(\omega - \frac{5}{12}\pi\right) + B \cos\left(\omega - \frac{1}{12}\pi\right) \right] \text{ при } x \gg x_0, k^2 > U. \quad (9.3.91)$$

Если $x \ll x_0$, то q^2 отрицательно, так что и q , и ω являются величинами мнимыми, имеющими точки ветвления при $x = x_0$. Чтобы продолжить наше исследование, мы должны внимательно выбрать ту ветвь q , которую надо использовать. Так как функция P на самом деле однозначна, то годится любая ветвь. Мы выберем $q = \exp(\pi i/2) |q|$ для $x < x_0$. Тогда из

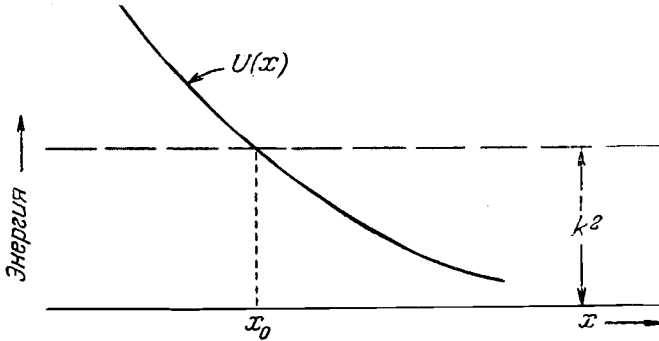


Рис. 9.14. Отражение волн от потенциального барьера.

определения (9.3.87) и линейного приближения для q^2 мы находим, что $\omega = \exp(3\pi i/2) |w|$ для $x < x_0$. Формула (5.3.68), дающая асимптотическое поведение бesselевых функций, аргумент которых имеет фазу, заключенную между $\pi/2$ и $3\pi/2$, может быть применена и здесь и дает следующий результат:

$$P \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi q}} [(B - A) e^{|w|} + (A e^{\pi i/6} + B e^{-\pi i/6}) e^{-|w|}], \quad x \ll x_0, k^2 < U. \quad (9.3.92)$$

Так как ошибка в асимптотическом выражении начинается с члена $\exp(+|w|)$, то член $\exp(-|w|)$ имеет смысл только тогда, когда B точно равно A .

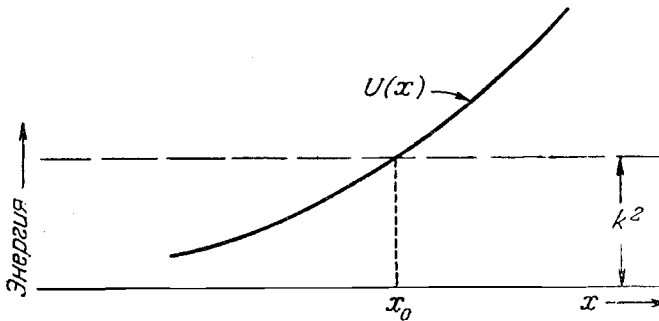


Рис. 9.15. Сшивание решений для возрастающего потенциала.

Рассмотрим теперь случай, представленный на рис. 9.15, где $k^2 < U$ для $x > x_0$. Здесь более удобно употреблять переменную

$$\omega' = \int_x^{x_0} q dx, \quad (9.3.93)$$

так как ω' положительно и действительно там, где действительно и положительно q . Соответствующее асимптотическое решение P' имеет вид

$$P' = \sqrt{\frac{\omega'}{q}} [A' J_{1/3}(\omega') + B' J_{-1/3}(\omega')]. \quad (9.3.94)$$

Асимптотическое поведение P' при $x \ll x_0$ можно получить из формулы (9.3.91) заменой ω на ω' , A на A' и B на B' . В области $x \gg x_0$ можно использовать формулу (9.3.92), заметив, что $|\omega| = |\omega'|$.

Рассмотрим теперь, как применяются эти формулы при решении конкретных задач.

WKBJ-метод для связанных состояний. Возьмем снова наш пример из квантовой механики. Потенциал $U(x)$ изображен на рис. 9.16. Для данного приложения существенно только то, что движение будет классически ограничено. Граничные условия состоят в том, что ϕ стремится к нулю при x , стремящемся к плюс и минус бесконечности.

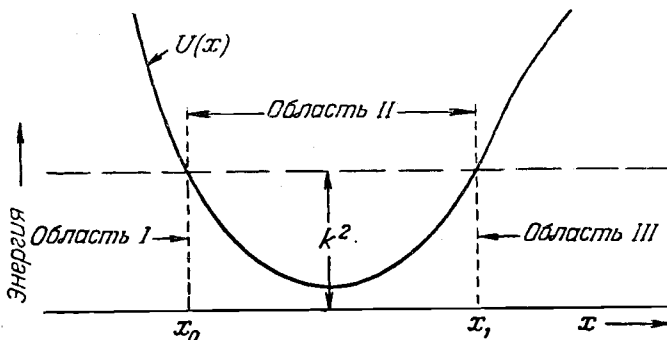


Рис. 9.16. Потенциальная функция для связанного состояния.

Выражение (9.3.92) пригодно для области I . Для того чтобы удовлетворялись граничные условия, мы должны взять $A=B$, так что

$$\begin{aligned} \phi &\simeq A \sqrt{(2/\pi q)} \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) e^{-|\omega|} \text{ при } x \ll x_0, \\ |\omega| &= \int_x^{x_0} |q| dx. \end{aligned} \quad (9.3.95)$$

Соответствующий результат для области II получается, если положить $A=B$ в формуле (9.3.91):

$$\begin{aligned} \phi &\simeq 2A \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) \cos\left(\omega - \frac{1}{4}\pi\right) \text{ при } x \gg x_0, \\ \omega &= \int_{x_0}^x q dx. \end{aligned} \quad (9.3.96)$$

Мы можем теперь на основе формулы (9.3.94) провести аналогичный анализ связи между волновыми функциями в областях III и II . Снова из-за граничных условий $B'=A'$, так что

$$\begin{aligned} \phi &\simeq A' \sqrt{(2/\pi q)} \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) e^{-|\omega'|} \text{ при } x \gg x_1, \\ |\omega'| &= \int_{x_1}^x |q| dx. \end{aligned}$$

В области II мы находим, что

$$\psi \simeq 2A' \sqrt{2/\pi q} \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) \cos\left(\omega' - \frac{1}{4}\pi\right) \text{ при } x \ll x_1,$$

$$\omega' = \int_x^{x_1} q dx. \quad (9.3.97)$$

Необходимо, конечно, чтобы решение этой задачи было непрерывным, так что выражения (9.3.96) и (9.3.97) должны совпадать. Переписывая аргумент косинуса в последнем из них в форме

$$\omega' - \frac{1}{4}\pi = \int_{x_0}^{x_1} q dx - \omega - \frac{1}{4}\pi,$$

мы видим, что непрерывности можно достигнуть, положив

$$\int_{x_0}^{x_1} q dx - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi + n\pi, \text{ где } n - \text{целое,}$$

или

$$\int_{x_0}^{x_1} q dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \quad (9.3.98)$$

Необходимо также выбрать соответствующим образом отношение A/A' .

Выражение (9.3.98) выводится, конечно, в предположении, что x_0 и x_1 отстоят друг от друга настолько, что можно использовать асимптотические выражения для бесселевых функций, встречающихся в формулах (9.3.88) и (9.3.94). Другими словами, волновая функция должна иметь много колебаний в области между x_0 и x_1 , так что для справедливости формулы (9.3.98) необходимым является условие

$$n \gg 1. \quad (9.3.99)$$

Нужно также, конечно, чтобы потенциал менялся медленно.

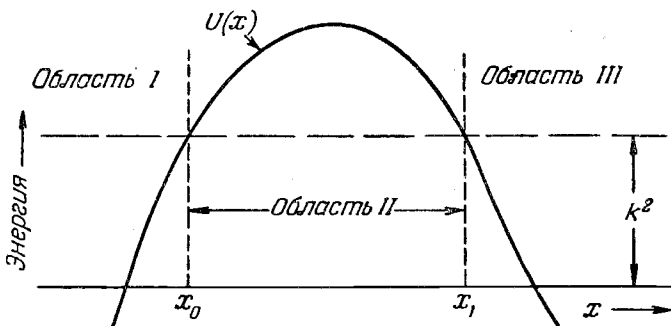


Рис. 9.17. Проникновение волны сквозь потенциальный барьер.

Проникновение сквозь потенциальный барьер. Мы будем здесь рассматривать плоскую волну, падающую на область, в которой потенциал имеет форму, изображенную на рис. 9.17. Пусть волна падает слева. Тогда в области III может существовать только прошедшая волна. Ее мы

возьмем в виде

$$\begin{aligned}\psi &\simeq \sqrt{2/\pi q} \exp \left[i \left(\omega - \frac{1}{4} \pi \right) \right] \text{ при } x \gg x_1, \\ \omega &= \int_{x_1}^x q dx.\end{aligned}\quad (9.3.100)$$

Это выражение можно получить из формулы (9.3.91), выбирая соответственно постоянные A и B . В области II формула (9.3.92) дает тогда

$$\psi \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi q}} i e^{|\omega|} \quad (x \ll x_1). \quad (9.3.101)$$

Мы отбросили член, пропорциональный $\exp(-|\omega|)$, в (9.3.92), так как он, вообще говоря, меньше, чем ошибка в члене $\exp|\omega|$. Мы видим, что ψ будет быстро возрастать при x , значительно меньших, чем x_1 .

Формула для функции ψ в области II также получится из (9.3.92), если ω заменить на ω' , где

$$\omega' = \int_x^{x_0} q dx. \quad (9.3.102)$$

Мы замечаем, что

$$|\omega| = -|\omega'| + \int_{x_0}^{x_1} |q| dx,$$

так что (9.3.101) приобретает вид

$$\psi \simeq \sqrt{2/\pi q} i e^x e^{-|\omega'|},$$

где

$$x = \int_{x_0}^{x_1} |q| dx. \quad (9.3.103)$$

Сравнивая с формулой (9.3.92) (с ω , A и B , замененными соответственно на ω' , A' и B'), мы видим, что $A' = B'$, так что

$$\psi \simeq \sqrt{(2/\pi q)} A' \cos \left(\frac{1}{6} \pi \right) e^{-|\omega'|}.$$

Сравнивая с формулой (9.3.101), получаем

$$A' = i e^x / \cos \left(\frac{1}{6} \pi \right).$$

В области I пригодной является форма (9.3.91), если в ней заменить ω на ω' . Вставляя туда найденную выше величину A' и переписывая (9.3.91) в виде

$$\sqrt{2/\pi q} \left\{ \alpha \exp \left[i \left(\omega' - \frac{1}{4} \pi \right) \right] + \beta \exp \left[-i \left(\omega' - \frac{1}{4} \pi \right) \right] \right\},$$

мы находим, что

$$\alpha = \beta = i e^x.$$

Сравнивая с формулой (9.3.100), мы видим, что коэффициент прохождения T выражается величиной $|1/\beta|^2$, так что

$$T \simeq e^{-2\kappa}. \quad (9.3.104)$$

В силу условия сохранения [см. (9.3.11)] коэффициент отражения R должен быть равен

$$R = 1 - T \simeq 1 - e^{-2\kappa}. \quad (9.3.105)$$

Формулы (9.3.104) и (9.3.105) должны иметь место всегда, когда $\kappa \gg 1$, т. е. $T \ll 1$, конечно, при условии, что потенциалы меняются медленно.

WKBJ-метод для радиальных уравнений. Приведенные выше результаты, в частности формулы (9.3.91) и (9.3.92), невозможно применять непосредственно к радиальному уравнению (9.3.13),

$$u'' + \left[k^2 - U(r) - l(l+1) \frac{1}{r^2} \right] u = 0,$$

так как при $r=0$ оно имеет особенность. Одномерное уравнение Шредингера имеет особенность при $x = \pm \infty$, поэтому, чтобы привести радиальное уравнение к такой же форме, мы введем новое независимое переменное x , так, чтобы точке $r=0$ отвечало $x = -\infty$. В соответствии с этим сделаем преобразование

$$r = e^x.$$

Функция u удовлетворяет тогда уравнению

$$u'' - u' + e^{2x} [k^2 - U(e^x) - l(l+1)e^{-2x}] u = 0,$$

где штрих теперь означает дифференцирование по x . Это еще не одномерное уравнение Шредингера, так как здесь присутствует член с первой производной. Его, однако, можно исключить, сделав следующую замену зависимой переменной:

$$u = e^{x/2} \chi(x). \quad (9.3.106)$$

Функция $\chi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\chi'' + e^{2x} \left[k^2 - U(e^x) - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 e^{-2x} \right] \chi = 0. \quad (9.3.107)$$

Теперь можно применять соотношения (9.3.91) и (9.3.92), [где q^2 должно быть равно коэффициенту при χ в уравнении (9.3.107)]. Функция w равна тогда

$$w = \int_{x_0}^x e^x \sqrt{k^2 - U(e^x) - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 e^{-2x}} dx.$$

Возвращаясь к первоначальной независимой переменной r , получаем

$$w = \int_{r_0}^r \sqrt{k^2 - U(r) - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{r^2}} dr. \quad (9.3.108)$$

Сравнивая с дифференциальным уравнением для u как функции от r , мы видим, что это уравнение можно решать методом WKBJ для одномерных уравнений, заменив множитель $l(l+1)$ на $\left(l + \frac{1}{2} \right)^2$. В соответствии с этим обозначим подинтегральное выражение в (9.3.108) через q_r . Простым применением этого результата является вычисление энергий связанных состояний. Согласно соотношению (9.3.98), они определяются

формулой

$$\int_{r_0}^{r_1} q_r dr = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi.$$

Величины r_0 и r_1 являются нулями для q_r . Как и раньше, необходимым условием справедливости этой формулы является неравенство $n \gg 1$.

Метод WKBJ для сдвига фазы. WKBJ-приближение можно также использовать для того, чтобы получить оценку сдвигов фаз η_l в задаче рассеяния (см. стр. 67 и 72). Мы рассмотрим случай, когда q_r имеет только один нуль, r_0 , для положительных значений k^2 . Типичная

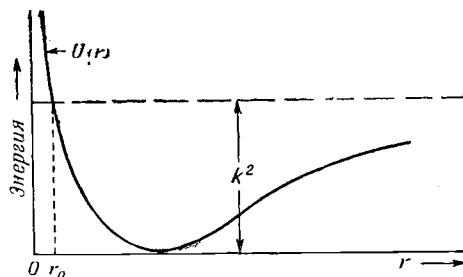


Рис. 9.18. Подсчет сдвигов фаз при решении задачи рассеяния.

кривая показана на рис. 9.18. Мы рассмотрим сначала удовлетворение граничным условиям при $r=0$. Здесь u должно быть равно нулю, так что $\chi(x)$ должно быть равно нулю при $x=-\infty$.

Следовательно, в формуле (9.3.92) мы должны считать $A=B$, так что

$$\chi \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi q_r}} 2A \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) \cos\left[\omega - \frac{1}{4}\pi\right] \quad \text{при } r \gg r_0.$$

Мы получим сдвиг фазы, если сравним аргументы косинуса при наличии и при отсутствии потенциала $U(r)$:

$$\eta_l = \int_{r_1}^{\infty} \sqrt{k^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{r^2}} dr - \int_{r_0}^{\infty} \sqrt{k^2 - U(r) - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{r^2}} dr, \quad (9.3.109)$$

Фаза η

l	Точная	WKBJ
0	-9,696	-9,597
1	-7,452	-7,540
2	-4,469	-4,505
3	-1,238	-1,355
4	-0,445	-0,535
5	-0,143	-0,174

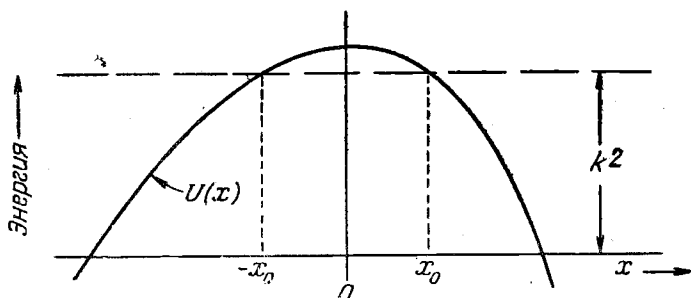
где $r_1 = (l + 1/2)/k$. Можно ожидать, что этот результат применим при больших сдвигах фаз. Малые сдвиги фаз можно оценивать с помощью борновского приближения (9.3.36), так что, используя WKBJ-метод и метод Борна, можно быстро получить оценку сдвигов фаз для всех l . Сравнение некоторых сдвигов фаз, вычисленных по формуле (9.3.109) WKBJ-приближения, с точными дается в приведенной слева таблице¹⁾ (взятой из книги Мотта и Месси, см. библиографию в конце этой главы). Мы видим, что WKBJ-приближение дает прекрасное совпадение с точным значением, когда сдвиг фазы порядка 1 радиана или больше. В то

¹⁾ В этой таблице даны сдвиги фаз для электронов с энергией 54 эВ, рассеянных на атомах криптона (см. цитированную книгу Мотта и Месси, стр. 256). — Прим. ред.

же время борновское приближение дает очень хорошие результаты для фаз, значительно меньших единицы.

Случай близко расположенных классических точек поворота. Приведенный выше анализ можно легко распространить на тот случай, когда имеется больше двух точек поворота, если только они лежат так далеко друг от друга, что можно использовать соответствующую асимптотическую форму (9.3.88). Мы рассмотрим теперь случай, когда точки поворота расположены настолько близко, что этого сделать нельзя. Ограничимся случаем, когда только две точки поворота близки друг к другу. Это никоим образом не ограничивает общности наших результатов, так как более сложный случай большего числа близких точек поворота может быть исследован рассмотрением каждой из соседних пар в отдельности.

Мы начнем следующим образом. Для удобства выберем начало координат посередине между нулями, которые будут иметь тогда координаты



Р и с. 9.19. Проникновение через барьер небольшой ширины и высоты.

$\pm x_0$ (см. рис. 9.19). Затем найдем решение дифференциального уравнения в области $-x_0 < x < x_0$. Это решение может быть связано с линейной комбинацией бесселевых функций порядка $1/3$, как в формуле (9.3.88), в случае $x > x_0$, и с другой линейной комбинацией для $x < -x_0$. Затем для каждой комбинации можно легко использовать асимптотические формы и определить в них константы так, чтобы удовлетворялись граничные условия.

В области $-x_0 < x < x_0$ функцию q^2 можно аппроксимировать с помощью параболы:

$$q^2 = b(x - x_0)(x + x_0),$$

так что дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + b(x^2 - x_0^2)\psi = 0. \quad (9.3.110)$$

Чтобы привести это уравнение к стандартной форме, сделаем подстановку

$$\zeta = b^{1/4} x; \quad (9.3.111)$$

тогда ψ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + (\zeta^2 - \sqrt{b}x_0^2)\psi = 0.$$

Этот тип уравнения встречается тогда, когда решают скалярное уравнение Гельмгольца методом разделения в параболических координатах; он детально рассматривается в гл. 11. Обращаясь к таблицам, помещенным в конце этой главы, мы видим, что двумя независимыми решениями

в этом случае являются $He(-\sqrt{b}x_0^2, \zeta)$ и $Ho(-\sqrt{b}x_0^2, \zeta)$. Мы будем пользоваться первыми двумя членами в степенных рядах, соответствующих этим функциям, так как предполагаем x_0 достаточно малым. Следовательно,

$$\phi \simeq \alpha \left(1 + \frac{1}{2} bx_0^2 x^2 - \frac{1}{12} bx^4 \right) + \beta x \left(1 + \frac{1}{6} bx_0^2 x^2 - \frac{1}{20} bx^4 \right), \quad (9.3.112)$$

где α и β — константы. Чтобы установить связь с аппроксимацией при помощи бесселевых функций при $x = \pm x_0$, нам необходимо знать величину ϕ и ϕ' при $x = \pm x_0$. Для $x = x_0$ имеем

$$\begin{aligned} \phi(x_0) &\simeq \alpha \left(1 + \frac{5}{12} bx_0^4 \right) + \beta x_0 \left(1 + \frac{7}{60} bx_0^4 \right), \\ \phi'(x_0) &\simeq \alpha \left(\frac{2}{3} bx_0^3 \right) + \beta \left(1 + \frac{1}{4} bx_0^4 \right). \end{aligned} \quad (9.3.113)$$

Для $x = -x_0$ мы просто заменяем x_0 на $-x_0$ в этом выражении. (Это замечание справедливо также для уравнений, приведенных ниже.) Сходимость этих выражений в основном определяется параметром bx_0^4 . Пусть теперь $x > x_0$; положим

$$\psi = \sqrt{\frac{w}{q}} [AJ_{1/3}(w) + BJ_{-1/3}(w)];$$

поведение ψ вблизи x_0 описывается формулами (9.3.85) и (9.3.86). В таком случае для x , близких к x_0 , имеем

$$\psi \simeq A \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} (x - x_0) + B \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},$$

где $q^2 = a^2(x - x_0)$ вблизи x_0 и $a^2 = 2bx_0$. Сравнение этой формулы с (9.3.112) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} B \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} &= \alpha \left(1 + \frac{5}{12} bx_0^4 \right) + \beta x_0 \left(1 + \frac{7}{60} bx_0^4 \right), \\ A \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} &= \alpha \left(\frac{2}{3} bx_0^3 \right) + \beta \left(1 + \frac{1}{4} bx_0^4 \right). \end{aligned} \quad (9.3.114)$$

Если α и β известны, то B и A могут быть определены из предыдущих соотношений. Если же известны A и B , то нужно обратить эти соотношения, что даст

$$\begin{aligned} \alpha &= x_0 \frac{B \left(\frac{a}{3}\right)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left(1 + \frac{4}{4} bx_0^4 \right) - \frac{A \left(\frac{a}{3}\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(1 + \frac{7}{60} bx_0^4 \right), \\ \beta &= \frac{A \left(\frac{a}{3}\right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(1 + \frac{5}{12} bx_0^4 \right) - \frac{B \left(\frac{a}{3}\right)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{3} bx_0^3 \right). \end{aligned} \quad (9.3.115)$$

Чтобы получить результаты, соответствующие x , близким к $-x_0$, мы должны просто заменить в уравнениях (9.3.114) и (9.3.115) x_0 на $-x_0$, а A и B , скажем, на A' и B' .

Мы теперь имеем достаточно данных для того, чтобы вычислить приближенно волновые функции, а также коэффициенты отражения и прохождения для величин k^2 , близких к максимуму $U(x)$. Мы наметим метод в общих чертах, предоставляя его детальный разбор читателю. Предположим, что волна падает слева на барьер, изображенный на рис. 9.19. Тогда граничное условие для $x \gg x_0$ требует наличия там только прошедшей волны. Из асимптотической формы для ψ [см. формулу (9.3.91), которая здесь применима] отношение A к B определяется так, чтобы это граничное условие выполнялось. Затем уравнения (9.3.115) используются для определения α и β . Из уравнения (9.3.114) можно тогда определять A' и B' (вспоминая про замену x_0 на $-x_0$); окончательно асимптотическая форма, имеющая вид

$$\sqrt{\frac{w}{q}} [A' J_{1/3}(w) + B' J_{-1/3}(w)],$$

где

$$w = \int_x^{-x_0} q dx,$$

дает амплитуду падающей волны.

Этот процесс становится невозможным, когда x_0 и $-x_0$ сливаются, так как в этом случае линейное приближение не имеет области применимости. Однако уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + cx^2\psi = 0$$

имеет решение, которое может быть продолжено на большие значения x точно тем же способом, при помощи которого решения (9.3.85) и (9.3.86) привели к формуле (9.3.88). Мы получаем

$$\psi \simeq \sqrt{\frac{w}{q}} [AJ_{1/4}(w) + BJ_{-1/4}(w)]. \quad (9.3.116)$$

Использование этого приближенного решения ни в чем существенном не отличается от использования приближения бесселевыми функциями порядка $\pm 1/3$, так что мы не будем здесь все это повторять.

На этом мы закончим обсуждение WKBJ-метода. Мы хотели бы снова особо отметить требование медленного изменения потенциала U , которое играло существенную роль во всем нашем анализе. Однако даже когда это условие не выполняется, решение, полученное по WKBJ-методу, часто удобно принять за исходную функцию для итерационного процесса, который может быть основан, например, на интегральном уравнении для функции ψ .

Коротковолновое приближение в трехмерном случае. Разобранный выше метод можно применять также к двумерным и к трехмерным задачам. Однако он может быть доведен до конца лишь частично. Мы удовольствуемся тем, что покажем, что уравнение типа уравнения Шредингера

$$[\nabla^2 + q^2(\mathbf{r})]\psi = 0 \quad (9.3.117)$$

для коротких волн сводится к уравнению, которое при акустических и оптических приложениях уравнения (9.3.117) соответствует геометрической оптике, т. е. лучевой теории. Поэтому все диффракционные эффекты, как и можно было ожидать, в этом приближении исчезают. Когда же уравнение (9.3.117) является уравнением Шредингера, описывающим движение частиц, коротковолновое приближение приводит к уравнению Гамильтона — Якоби [см. уравнение (3.2.12) и дальше], которое является

частной формой механики Ньютона. Эти результаты будут использованы главным образом в § 11.4, где предсказания геометрической оптики применяются в качестве первого приближения для волновой теории.

Снова делается основное предположение, что $q(\mathbf{r})$ мало меняется на протяжении длины волны. Говоря более определенно, если q сильно изменяется в некоторой области, то диффракционные эффекты остаются существенными, пока длина волны не станет значительно меньше размеров области. Если бы q была постоянной, то функция

$$\exp[iq(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{r})],$$

где $\mathbf{a}_k$ — единичный вектор в направлении распространения, являлась бы решением уравнения (9.3.117). Для медленно меняющихся q этот результат подсказывает следующую форму решения ψ :

$$\psi = e^{i\omega(\mathbf{r})}. \quad (9.3.118)$$

Подстановка в уравнение (9.3.117) приводит к следующему уравнению для величины ω :

$$(\nabla\omega)^2 - i\nabla^2\omega = q^2.$$

Приближенно для медленно меняющегося q можно в этом уравнении отбросить член $\nabla^2\omega$:

$$(\nabla\omega)^2 = q^2. \quad (9.3.119)$$

Это в точности уравнение Гамильтона — Якоби (3.2.12), где

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)$$

и $\omega = S/\hbar$, причем S — интеграл действия. Этим доказывается утверждение, что в предельном случае очень коротких волн уравнение Шредингера переходит в уравнения классической динамики. Как было уже показано в гл. 3, линии, ортогональные к поверхностям $\omega = \text{const}$, образуют множество возможных траекторий.

Чтобы показать, что уравнение (9.3.119) следует из геометрической оптики, нужно только вспомнить принцип наименьшего действия:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2mT} dt = \delta \int_{r_0}^{r_1} |\nabla S| ds = 0, \quad (9.3.120)$$

где S — интеграл действия, T — кинетическая энергия, ds — элемент длины, а символ δ означает вариацию. Варьирование совершается при условии, что энергия сохраняется. Уравнение (9.3.119) является следствием этого вариационного принципа. Он является также формулировкой принципа Ферма, как это можно видеть, заменяя $|\nabla S|$ в уравнении (9.3.120) через q согласно уравнению (9.3.119). Мы получаем, отбрасывая постоянный множитель,

$$\delta \int_{r_0}^{r_1} q ds = 0.$$

Следовательно, q пропорционально показателю преломления. Это уравнение является формулировкой того, что правильная траектория луча — это такая траектория, для которой оптическая длина пути стационарна.

9.4. Вариационные методы

Когда возмущающий член велик, применение методов теории возмущений, описанных в предшествующих параграфах, становится длинным и утомительным, а физический смысл результатов затемнен сложностью получающихся выражений. В случаях такого рода более выгодно применять вариационные методы, потому что, как мы увидим, они допускают использование любых сведений о задаче, которые могут быть получены из чисто интуитивных рассуждений. Конечно, и здесь имеются ограничения, которые мы укажем в дальнейшем изложении.

В гл. 3 мы видели, как вытекают уравнения физики из вариационных принципов, которые выражаются через плотность лагранжиана

$$L\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right):$$

$$\delta J = \delta \int \dots \int L\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right) dx_1 \dots dx_n = 0. \quad (9.4.1)$$

Получающееся уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial x_i)} \right]. \quad (9.4.2)$$

Содержание уравнения (9.4.1) можно выразить словами следующим образом. Будем подставлять в интеграл J уравнения (9.4.1) все функции φ , которые удовлетворяют тем же граничным и начальным данным, что и ψ . Эти функции называются *функциями сравнения* (или *пробными функциями*). Тогда для тех функций сравнения, которые отличаются на малую величину $\delta\varphi$ от правильной (искомой) функции ψ , величина интеграла J будет отличаться от его точного значения не больше чем на величину, пропорциональную $(\delta\varphi)^2$, так что разность δJ между этими значениями J и его точным значением должна быть малой второго порядка относительно $\delta\varphi$. Если функция сравнения имеет параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, определяющие ее вид, то $J(\varphi)$ будет функцией от α и будет иметь стационарное значение (т. е. $\max$, или $\min$, или седловую точку) для тех значений α , для которых φ является решением (9.4.2). В окрестности стационарной точки интеграл J , конечно, менее чувствителен к деталям строения функции сравнения, чем в каком-либо ином месте.

Вариационный метод имеет целью провести программу вычисления J для всех возможных функций сравнения путем применения функций сравнения, содержащих один или больше параметров, называемых *вариационными параметрами*, значения которых должны быть определены. Конкретная применяемая форма подсказывается какими-нибудь априорными догадками о характере точного решения. Пусть этими параметрами будут α_i . Тогда

$$J = J(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (9.4.3)$$

Условие стационарности интеграла приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (9.4.4)$$

Решение этих уравнений определяет различные возможные значения α_i и, следовательно, лучшую возможную при заданной форме функцию сравнения. Точность результата возрастает при введении большего числа параметров в функцию сравнения, так как это увеличивает ее гибкость и тем самым способность представить точное решение ψ .

Очень часто можно так выбрать форму вариационного принципа, что величина J для точного решения ψ будет иметь ясный физический смысл. Например, плотность лагранжиана, соответствующая уравнению Лапласа, равна

$$L = (\nabla\psi)^2.$$

В электростатике $\nabla\psi = -E$, где E — электрическое поле. Следовательно, L пропорциональна электростатической плотности энергии, а J — полной электростатической энергии. Для двух проводников с постоянной разностью потенциалов V_0 эта энергия равна $\frac{1}{2} CV_0^2$, где C — емкость. Более точно,

$$\int (\nabla\psi)^2 dV = 4\pi CV_0^2.$$

Вариационный принцип

$$\delta \left[\frac{1}{4\pi V_0^2} \int (\nabla\psi)^2 dV \right] = 0$$

сводится к вариационному принципу для C и записывается в виде

$$\delta [C] = 0,$$

где скобки, в которых заключено C , указывают, что величина, подлежащая варьированию, не есть C . Она, конечно, равна C , только если в $[C]$ подставить точное ψ .

Из-за стационарного характера вариационного интеграла (в этом случае он имеет минимум при точном ψ) и вытекающей отсюда нечувствительности к ошибкам в функции сравнения можно очень часто получать превосходные оценки для C при помощи довольно грубой функции сравнения. Ясно, что это свойство имеет большое практическое значение. Очень часто нас интересует главным образом одна величина, такая, как резонансная частота, энергия связи, сдвиг фазы при рассеянии или коэффициент отражения. Для этих величин можно сформулировать вариационные принципы аналогично тому, как это было сейчас сделано для емкости. Как и в первом случае, можно тогда получить хорошие оценки для этих величин, используя довольно грубые функции сравнения и не строя, следовательно, полного решения уравнения.

В большинстве случаев исходную задачу можно свести к задаче на собственные значения, причем собственным значением служит величина, которую желают найти. Поэтому мы обсудим сначала вариационный принцип для задачи на собственные значения.

Вариационный принцип для задачи на собственные значения. Мы будем использовать общие операторные обозначения не только ради их общности, но и потому, что они более отчетливо вскрывают технику получения вариационного принципа. Изучаемая задача на собственные значения имеет вид

$$\mathcal{L}(\psi) = \lambda \mathcal{M}(\psi), \quad (9.4.5)$$

где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — дифференциальные или интегральные операторы. Мы теперь утверждаем, что уравнение

$$\delta \left[\int \varphi \mathcal{L}(\psi) dV / \int \varphi \mathcal{M}(\psi) dV \right] = \delta[\lambda] = 0 \quad (9.4.6)$$

представляет вариационный принцип для λ . Функция φ будет вскоре определена. Интегрирование производится по всему объему, определенному независимыми переменными, от которых зависит ψ , а также φ . Способ,

которым получено это уравнение, очевиден. Уравнение (9.4.5) умножено на функцию φ , пока произвольную, и выполнено интегрирование. Полученное уравнение разрешено относительно λ . Таким образом, непосредственно ясно, что если в $[\lambda]$ подставить точное решение ψ , то будет получено точное значение λ .

Чтобы показать, что (9.4.5) вытекает из (9.4.6), рассмотрим уравнение

$$[\lambda] \int \varphi \mathcal{M}(\psi) dV = \int \varphi \mathcal{L}(\psi) dV.$$

Теперь выполним варьирование, варьируя φ и λ :

$$\delta[\lambda] \int \varphi \mathcal{M}(\psi) dV + [\lambda] \int \delta\varphi \mathcal{M}(\psi) dV = \int \delta\varphi \mathcal{L}(\psi) dV.$$

Подставляя условие $\delta[\lambda] = 0$ и заменяя $[\lambda]$ на λ во втором члене (так как результат варьирования вычисляется только в первом порядке), мы получаем

$$\int \delta\varphi [\mathcal{L}(\psi) - \lambda \mathcal{M}(\psi)] dV = 0.$$

Отсюда, поскольку $\delta\varphi$ произвольно, следует (9.4.5).

Обратимся теперь к уравнению, которому удовлетворяет φ (функция φ также должна быть определена из вариационного принципа). С этой целью перепишем интегралы в (9.4.6) следующим образом:

$$\int \varphi \mathcal{L}(\psi) dV = \int \tilde{\mathcal{L}}(\varphi) \psi dV + \oint P(\varphi, \psi) dS.$$

$$\int \varphi \mathcal{M}(\psi) dV = \int \tilde{\mathcal{M}}(\varphi) \psi dV + \oint Q(\varphi, \psi) dS.$$

Здесь $\tilde{\mathcal{L}}$ и $\tilde{\mathcal{M}}$ — операторы, сопряженные соответственно к $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$; P и Q — соответствующие присоединенные билинейные формы [см. (5.2.10) и (7.5.4)]. Вторые интегралы справа берутся по поверхности, ограничивающей V . Мы выберем теперь φ так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям, сопряженным к тем, которым удовлетворяет ψ [см. (7.5.12)], т. е. так, что

$$P(\varphi, \psi) = 0 \text{ на } S \text{ и } Q(\varphi, \psi) = 0 \text{ на } S.$$

При этих условиях (9.4.6) можно записать в виде

$$\delta[\lambda] = \delta \left[\int \psi \tilde{\mathcal{L}}(\varphi) dV / \int \psi \tilde{\mathcal{M}}(\varphi) dV \right] = 0.$$

Поэтому φ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi) = \lambda \tilde{\mathcal{M}}(\varphi). \quad (9.4.7)$$

Таким образом, φ удовлетворяет уравнению и граничным условиям, сопряженным к тем, которым удовлетворяет ψ . Поскольку φ является сопряженным решением, мы обозначим его через $\tilde{\psi}$, так что вариационный принцип (9.4.6) будет читаться следующим образом:

$$\delta \left[\int \tilde{\psi} \mathcal{L}(\psi) dV / \int \tilde{\psi} \mathcal{M}(\psi) dV \right] = 0.$$

Заметим, что если $\mathcal{L}$ — эрмитов оператор, ($\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$), то $\tilde{\psi} = \bar{\psi}$. Если операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ самосопряженные, то $\varphi = \psi$ и вариационный принцип приобретает простую форму:

$$\delta[\lambda] = \delta \left[\int \psi \mathcal{L}(\psi) dV / \int \psi \mathcal{M}(\psi) dV \right] = 0. \quad (9.4.8)$$

Можно получить и другие вариационные принципы для λ ; можно многими эквивалентными способами сформулировать одну и ту же задачу. Например, для каждого дифференциального уравнения с граничными условиями обычно можно написать эквивалентное интегральное уравнение. Мы проиллюстрируем это замечание, установив некоторые дополнительные вариационные принципы, которые будут полезны в наших дальнейших рассмотрениях.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{L}$ — оператор, для которого не существует ψ , удовлетворяющего уравнению $\mathcal{L}\psi = 0$. Это будет, например, в случае, когда $\mathcal{L}$ — положительно определенный оператор. Тогда можно написать

$$\psi = \lambda \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}(\psi), \quad (9.4.9)$$

где $\mathcal{L}^{-1}$ — оператор, обратный к $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ — дифференциальный оператор, это будет эквивалентное интегральное уравнение. В самосопряженном случае, т. е. когда $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — самосопряженные операторы, форма (9.4.9) неудобна, так как оператор $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, сопряженным к которому служит $\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}$, не обязательно самосопряженный. Эту трудность легко преодолеть применением к обеим частям равенства (9.4.9) оператора $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}(\psi) = \lambda \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}(\psi). \quad (9.4.10)$$

Для самосопряженных $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ оператор $\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ также будет самосопряженным.

Вариационный принцип, вытекающий из (9.4.10), запишется в виде

$$\delta[\lambda] = \delta \left[\int \tilde{\psi} \mathcal{M}(\psi) dV / \int \tilde{\psi} \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}(\psi) dV \right] = 0 \quad (9.4.11)$$

для общего случая, когда один из $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ или оба — несамопряженные операторы. Функция $\tilde{\psi}$ тогда является решением уравнения

$$\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\psi}) = \tilde{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{L}}^{-1}\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\psi}). \quad (9.4.12)$$

В самосопряженном случае

$$\delta[\lambda] = \delta \left[\int \psi \mathcal{M}(\psi) dV / \int \psi \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}(\psi) dV \right] = 0. \quad (9.4.13)$$

Если существуют решения ψ_0 уравнения $\mathcal{L}\psi_0 = 0$, то уравнение (9.4.9) следует заменить уравнением

$$\psi = A\psi_0 + \lambda \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}(\psi), \quad (9.4.14)$$

где A — константа. Это можно легко проверить применением к обеим частям равенства оператора $\mathcal{L}$. Постоянная A отлична от нуля, если $\mathcal{L}^{-1}$ выбран так, чтобы член $\lambda \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}(\psi)$ не мог удовлетворять граничным условиям, которым должна удовлетворять ψ . При этом подразумевается, что $\mathcal{L}^{-1}$ не единственен. Это следует из свойств ψ_0 , так как мы можем прибавить к разложению $\mathcal{L}^{-1}$ по собственным функциям член, содержащий ψ_0 , не нарушая соотношения

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = 1.$$

Добавление такого члена будет, конечно, менять граничные условия, соответствующие оператору $\mathcal{L}^{-1}$. Факт неединственности $\mathcal{L}^{-1}$ был отмечен раньше в нашем рассмотрении функции Грина, где было показано, что для данного дифференциального оператора имеется много функций Грина, удовлетворяющих разным граничным условиям.

Чтобы образовать вариационный принцип, приводящий к уравнению (9.4.14) и аналогичный уравнению (9.4.13), умножим (9.4.14) на $\mathcal{M}$ и вы-

пишем также сопряженное уравнение:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\psi) &= A\mathcal{M}(\psi_0) + \lambda\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}(\psi), \\ \tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\psi}) &= A\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\psi}_0) + \lambda\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\mathcal{L}})^{-1}\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\psi}).\end{aligned}\quad (9.4.15)$$

Здесь $\tilde{\psi}_0$ — решение уравнения $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\psi}_0 = 0$, удовлетворяющее граничным условиям, сопряженным к тем, которым удовлетворяет ψ_0 . Наш вариационный принцип должен давать оба эти уравнения. Он записывается в виде

$$\delta[J] = \delta \left\{ \int [\tilde{\psi}(\mathcal{M} - \lambda\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})\psi - A(\tilde{\psi}_0\mathcal{M}\psi_0 + \tilde{\psi}_0\mathcal{M}\psi)] dV \right\} = 0. \quad (9.4.16)$$

Этот вариационный принцип имеет ту неприятную особенность, что он зависит от амплитуд ψ и $\tilde{\psi}$. Так как исходная задача однородна, то неоднородность уравнения (9.4.14) фиктивна; поэтому можно сформулировать вариационный принцип так, чтобы он не содержал амплитуду ψ . Это достигается использованием вариационного принципа для определения наилучшей величины амплитуды для данной функции сравнения. Подставляем поэтому

$$\psi = \alpha\chi, \quad \tilde{\psi} = \alpha\tilde{\chi} \quad (9.4.17)$$

в $[J]$ и рассматриваем α как вариационный параметр. Тогда $[J]$ приобретает вид

$$[J] = \alpha^2 \int [\tilde{\chi}(\mathcal{M} - \lambda\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})\chi] dV - A\alpha \int [\tilde{\chi}_0\mathcal{M}\psi_0 + \tilde{\chi}_0\mathcal{M}\chi] dV.$$

Стационарные значения J получим при $dJ/d\alpha = 0$, так что

$$\alpha = A \int (\tilde{\chi}_0\mathcal{M}\psi_0 + \tilde{\chi}_0\mathcal{M}\chi) dV / 2 \int [\tilde{\chi}(\mathcal{M} - \lambda\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})\chi] dV. \quad (9.4.18)$$

Подставляя это значение α в J , мы получим

$$J = -\frac{1}{4} A^2 \left\{ \left[\int (\tilde{\chi}_0\mathcal{M}\psi_0 + \tilde{\chi}_0\mathcal{M}\chi) dV \right]^2 / \int [\tilde{\chi}(\mathcal{M} - \lambda\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})\chi] dV \right\}.$$

Так как мы еще не выполнили варьирование по параметрам, входящим в χ и $\tilde{\chi}$, то это выражение для $[J]$ все еще должно удовлетворять условию $\delta J = 0$.

Мы можем это проверить, выполнив варьирование и показав, что получающееся уравнение для χ и $\tilde{\chi}$ можно также получить, подставляя (9.4.17) и (9.4.18) в исходное уравнение. Для удобства заменим постоянную $-\frac{1}{4}A^2$ на $\frac{1}{2}$, обозначив новую величину через $[J']$:

$$[J'] = \left[\int (\tilde{\chi}_0\mathcal{M}\psi_0 + \tilde{\chi}_0\mathcal{M}\chi) dV \right]^2 / 2 \int [\tilde{\chi}(\mathcal{M} - \lambda\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})\chi] dV. \quad (9.4.19)$$

Условие $\delta[J'] = 0$ приводит к уравнению

$$J'[\mathcal{M} - \lambda\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}]\chi = \mathcal{M}\psi_0 \int (\tilde{\chi}_0\mathcal{M}\psi_0 + \tilde{\chi}_0\mathcal{M}\chi) dV, \quad (9.4.20)$$

в котором J' есть значение выражения (9.4.19) с подставленными точными значениями χ и $\tilde{\chi}$. Уравнение для сопряженного $\tilde{\chi}$ имеет вид

$$J'[\tilde{\mathcal{M}} - \lambda\tilde{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{L}}^{-1}\tilde{\mathcal{M}}]\tilde{\chi} = \tilde{\mathcal{M}}\tilde{\psi}_0 \int (\tilde{\chi}_0\mathcal{M}\psi_0 + \tilde{\chi}_0\mathcal{M}\chi) dV. \quad (9.4.21)$$

Эти уравнения получаются также, если определения (9.4.17) χ и $\tilde{\chi}$ и величину α из (9.4.18) подставить в (9.4.15).

Заметим, что оба вариационных принципа, основанные на рассмотрении $[J']$ и уравнений для χ и $\tilde{\chi}$, однородны, т. е. если решение χ умножить на константу, то получится снова решение. Это было достигнуто за счет введения дополнительного параметра J' в уравнение. Заметим, что J' можно рассматривать как параметр, так как любая пара точных решений уравнений (9.4.20) и (9.4.21) автоматически удовлетворяет уравнению (9.4.19). На практике неоднородное уравнение (9.4.14) часто встречается в случае непрерывного спектра λ . В этом случае J' оказывается физически интересной величиной. Например, при вариационном рассмотрении рассеяния J' — простая функция сдвига фазы (см. стр. 120).

Мы закончим это рассмотрение тем, что выпишем соответствующее выражение для J' и уравнение (9.4.20) для случая самосопряженного оператора $\mathcal{L}$. В этом случае

$$[J'] = \left[\int \chi \mathcal{M} \psi_0 dV \right]^2 / \int [\chi (\mathcal{M} - \lambda \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}) \chi] dV. \quad (9.4.22)$$

Уравнение для χ приобретает вид

$$J' (\mathcal{M} - \lambda \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}) \chi = \mathcal{M} \psi_0 \left(\int \chi \mathcal{M} \psi_0 dV \right). \quad (9.4.23)$$

Предшествующие рассмотрения мы провели в очень абстрактной форме, чтобы выявить технику, при помощи которой составляются вариационные принципы в различных интересных случаях. Мы возвращаемся теперь к частным примерам, конкретность которых может помочь пониманию проведенных выше рассуждений.

Вариационные принципы для резонансных частот и энергетических уровней. Рассмотрим скалярное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

где ψ удовлетворяет однородным условиям Дирихле или Неймана на поверхности S ; само уравнение должно удовлетворяться внутри объема, ограниченного поверхностью S . Оператор ∇^2 вместе с названными граничными условиями является самосопряженным, так что применим вариационный принцип (9.4.8). Собственное значение λ равно k^2 , так что оператор $\mathcal{L}$ здесь равен $-\nabla^2$ и, следовательно, уравнение (9.4.8) принимает вид

$$\delta[k^2] = \delta \left\{ - \int \psi \nabla^2 \psi dV / \int \psi^2 dV \right\}.$$

Характер числителя становится более ясным после применения теоремы Грина:

$$[k^2] = \int (\nabla \psi)^2 dV / \int \psi^2 dV. \quad (9.4.24)$$

Для иллюстрации вывода вариационного принципа проверим непосредственно, что $\delta[k^2] = 0$ приводит к скалярному уравнению Гельмгольца. Мы имеем

$$\delta[k^2] \int \psi^2 dV + k^2 \delta \left(\int \psi^2 dV \right) = \delta \left[\int (\nabla \psi)^2 dV \right].$$

Подставляя $\delta[k^2] = 0$ и выполняя варьирование, получим

$$2k^2 \int \psi \delta \psi dV - 2 \int \nabla \psi \cdot \delta(\nabla \psi) dV = 0.$$

Используя соотношение $\delta \nabla \psi = \nabla(\delta \psi)$ и теорему Грина, находим

$$\int \delta \psi (k^2 \psi + \nabla^2 \psi) dV - \int \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta \psi dS = 0. \quad (9.4.25)$$

Если выполнено однородное условие Неймана, то $\partial\psi/\partial n = 0$ на S ; если удовлетворяется однородное условие Дирихле, то ψ должно быть равно нулю на S ; следовательно, при любом из этих условий интеграл по поверхности в (9.4.25) исчезает, и мы получаем, что ψ удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца.

Возвращаясь к уравнению (9.4.24), мы непосредственно замечаем, что $[k^2]$ всегда ≥ 0 . Следовательно, если подставлять всевозможные функции сравнения, величина $[k^2]$ будет иметь абсолютный минимум. Функция сравнения, дающая этот минимум, является тогда точным решением, а величина $[k^2]$ в минимуме, k_0^2 , — соответствующим собственным значением. Этот минимум будет больше нуля для однородных условий Дирихле и равен нулю для условий Неймана (функция ψ , равная постоянной и дающая $k^2 = 0$, допустима при условиях Неймана, но, очевидно, не удовлетворяет условиям Дирихле). Как было выяснено в гл. 6, волновые функции других резонансных частот все ортогональны к ψ_0 , так же как и друг к другу. Можно поэтому получить вариационный принцип для k_1^2 — собственного значения, большего k_0^2 , но меньшего k_n^2 ($n > 1$), — если ограничиться функциями сравнения, ортогональными к ψ_0 , т. е. удовлетворяющими условию

$$\int \psi \psi_0 dV = 0.$$

Минимум выражения (9.4.24) для волновых функций сравнения, подчиненных этому условию, равен тогда k_1^2 ; соответствующая собственная функция есть ψ_1 . Этот процесс можно продолжить для получения k_2^2 дальнейшим ограничением выбора функций сравнения, а именно подчинением их условию ортогональности как к ψ_0 , так и к ψ_1 . Ясно, что (см. т. I, стр. 685)

$$k_0^2 \leq k_1^2 \leq k_2^2 \leq \dots$$

Вариационный принцип (9.4.24) не будет иметь места для смешанных граничных условий

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + f\psi = 0$$

на S , так как тогда интеграл по поверхности в (9.4.25) не исчезает. Эту трудность можно легко преодолеть прибавлением такого члена к числителю уравнения (9.4.24), который уничтожает поверхностный интеграл после проведения варьирования. Этот член после варьирования должен давать $2 \int f\psi \delta\psi dS$; следовательно,

$$[k^2] = \left\{ \int (\nabla\psi)^2 dV + \int f\psi^2 dS \right\} / \int \psi^2 dV. \quad (9.4.26)$$

Тогда уравнение (9.4.25) заменяется уравнением

$$\int \delta\psi (k^2\psi + \nabla^2\psi) dV - \int \left(f\psi + \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) \delta\psi dS = 0.$$

Поверхностный интеграл теперь исчезает в силу граничного условия которому удовлетворяет ψ , так что соотношение $\delta[k^2] = 0$ приводит к скалярному уравнению Гельмгольца для ψ .

Прежде чем оставить эту тему, необходимо показать, что после подстановки точного решения ψ формула (9.4.26) дает точное значение k^2 . Это, конечно, есть следствие уравнения, которое получится из (9.4.26) после обычного применения теоремы Грина.

Вариационный принцип для уравнения Шредингера

$$\nabla^2\psi + [k^2 - U(r)]\psi = 0$$

совершенно аналогичен разобранным выше. Следует заметить, что хотя оператор в этом уравнении самосопряженный, граничные условия в общем случае не будут действительными, так что ψ — часто комплексная функция. Поэтому оператор вместе с граничными условиями уже не самосопряженный. Тем не менее он эрмитов, так что уравнение (9.4.6) применимо с $\bar{\varphi} = \bar{\psi}$. Следовательно,

$$\delta[k^2] = \delta \left\{ \int \bar{\psi} (U - \nabla^2) \psi dV / \int |\psi|^2 dV \right\} = 0. \quad (9.4.27)$$

Интегралы в этом выражении, например нормирующий интеграл в знаменателе, будут конечны только для связанных состояний системы, для которых ψ стремится к нулю при неограниченно возрастающем r . В другой форме, которая может быть получена применением формулы Грина, $[k^2]$ определяется следующим образом:

$$[k^2] = \int (|\nabla \psi|^2 + U |\psi|^2) dV / \int |\psi|^2 dV. \quad (9.4.28)$$

Отсюда непосредственно видно, что если выбирать функции сравнения ψ так, чтобы интеграл от $U |\psi|^2$ был ограничен, то $[k^2]$ будет иметь абсолютный минимум. Соответствующее состояние системы называется *основным состоянием*. Мы можем опять получить первое состояние с большим k^2 : первое *возбужденное состояние* получится, если рассматривать волновые функции сравнения, ортогональные к волновой функции основного состояния. Второе возбужденное состояние получится, если волновые функции сравнения ортогональны к волновым функциям основного и первого возбужденного состояния и т. д.

Колебания круглой мембраны. Мы разберем теперь детально пример применения вариационного принципа (9.4.24) для скалярного уравнения Гельмгольца. Задача о колебаниях закрепленной круглой мембраны выбрана из-за ее алгебраической простоты. Пусть радиус мембраны равен a . Граничное условие для ψ имеет вид $\psi(a) = 0$, а внутри границы мы предполагаем ψ непрерывной вместе с ее градиентом. Мы еще упростим нашу рассматриваемую, ограничившись изучением только состояний с круговой симметрией, так что ψ будет функцией только от r . С этим упрощением формула (9.4.24) приобретает вид

$$[k^2] = \int_0^a \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 r dr / \int_0^a \psi^2 r dr.$$

Ясно, что удобно ввести безразмерную независимую переменную $x = r/a$. Тогда

$$[(ka)^2] = \int_0^1 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 x dx / \int_0^1 \psi^2 x dx. \quad (9.4.29)$$

Рассмотрим теперь возможные функции сравнения. Простейшим выражением, которое обращается в нуль при $x=1$ и в то же время имеет непрерывный градиент при $x=0$, является $1-x^2$. (Функция $1-x$ непригодна, так как она имеет производную -1 в начале координат, порождающую острие в этой точке.) Подставляя $1-x^2$ в формулу (9.4.29), мы получаем $[(ka)^2] = 6$. Точное значение 5,7836, так что уже эта чрезвычайно грубая функция сравнения дает результат, довольно близкий к точному. Заметим, что приближенное значение больше точного.

Чтобы получить более точное приближение, мы должны улучшить функцию сравнения. Мы используем два различных подхода. В первом из

них мы выбираем в качестве функции сравнения

$$\psi = A(1-x^2) + B(1-x^2)^2, \quad (9.4.30)$$

где A и B — вариационные параметры. Этот выбор основывается на том факте, что всякая функция, равная нулю при $x=1$ и имеющая нулевой наклон при $x=0$, может быть разложена по степеням $1-x^2$. Подставляя эту новую функцию сравнения в (9.4.29), получаем

$$\begin{aligned} & \left[A^2 \int_0^1 (1-x^2)^2 x dx + 2AB \int_0^1 (1-x^2)^3 x dx + B^2 \int_0^1 (1-x^2)^4 x dx \right] [k^2 a^2] = \\ & = A^2 \int_0^1 \left[\frac{d(1-x^2)}{dx} \right]^2 x dx + 2AB \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{dx} \frac{d(1-x^2)^2}{dx} x dx + \\ & + B^2 \int_0^1 \left[\frac{d(1-x^2)^2}{dx} \right]^2 x dx. \end{aligned}$$

Продифференцируем теперь по A и B , полагая $\partial[k^2 a^2]/\partial A$ и $\partial[k^2 a^2]/\partial B$ равными нулю в соответствии с требованиями вариационного принципа [см. уравнение (9.4.4)]. Получим

$$\begin{aligned} & A \left\{ [k^2 a^2] \int_0^1 (1-x^2)^2 x dx - \int_0^1 \left[\frac{d(1-x^2)}{dx} \right]^2 x dx \right\} + \\ & + B \left\{ [k^2 a^2] \int_0^1 (1-x^2)^3 x dx - \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{dx} \frac{d(1-x^2)^2}{dx} x dx \right\} = 0, \\ & A \left\{ [k^2 a^2] \int_0^1 (1-x^2)^3 x dx - \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{dx} \frac{d(1-x^2)^2}{dx} x dx \right\} + \\ & + B \left\{ [k^2 a^2] \int_0^1 (1-x^2)^4 x dx - \int_0^1 \left[\frac{d(1-x^2)^2}{dx} \right]^2 x dx \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9.4.31)$$

Это два линейных однородных уравнения для A и B , и они имеют ненулевое решение, только если определитель, составленный из коэффициентов при A и B , равен нулю. Этот определитель подобен тем, которые появляются в теории возмущений, когда неизвестная функция разлагается по неортогональной системе функций [см. уравнение (9.1.96)]. Мы увидим позже [см. уравнение (9.4.38) и далее], что это не случайно. Подставляя в определитель значения интегралов, получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6} [k^2 a^2] - 1 & \frac{1}{8} [k^2 a^2] - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{8} [k^2 a^2] - \frac{2}{3} & \frac{1}{10} [k^2 a^2] - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0. \quad (9.4.32)$$

Это квадратное уравнение для $[k^2 a^2]$. Его меньший корень равен 5,7837, что очень близко к точной величине 5,7832. Отношение B/A в силу второго уравнения (9.4.31) равно

$$\frac{B}{A} = - \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{8} [k^2 a^2]}{\frac{2}{3} - \frac{1}{10} [k^2 a^2]} = 0,637.$$

Волновая функция ψ , согласно формуле (9.4.30), равна

$$\psi = (1 - x^2) + 0,637(1 - x^2)^2. \quad (9.4.33)$$

Сопоставление этого приближенного результата, первой функции сравнения $1 - x^2$ и точного решения $J_0(2,4048x)$ даны в таблице ниже. Мы нормировали функцию ψ так, что она равна единице при $x=0$, умножением последнего выражения на $1/1,637$. Заметим, что функция $1 - x^2$ дает ошибку в некоторых областях до 30%; предсказываемое же ею собственное значение $k^2 a^2 = 6$ имеет ошибку только в 3%.

Второй корень уравнения (9.4.32) также имеет значение. Здесь важно, что приближенная волновая функция, соответствующая этому второму

Собственные функции для круглой мембраны

x	Точное	(9.4.33)	$1 - x^2$
0,1	0,986	0,986	0,990
0,2	0,943	0,944	0,960
0,3	0,875	0,878	0,910
0,4	0,783	0,788	0,840
0,5	0,671	0,677	0,750
0,6	0,545	0,550	0,640
0,7	0,410	0,413	0,510
0,8	0,270	0,270	0,360
0,9	0,133	0,130	0,190
1,0	0	0	0

корню, ортогональна волновой функции, определяемой первым корнем и выражаемой формулой (9.4.33).

Поэтому из рассмотрения, следующего за формулой (9.4.28), мы видим, что этот второй корень и соответствующая ему функция сравнения приближают второе решение исходной задачи, если, конечно, опять ограничиться рассмотрением состояний с круговой симметрией. Первое решение с низшим собственным значением не имеет узловой линии; второе решение с ближайшим высшим собственным значением имеет одну узловую линию. Точное значение для этого второго собственного значения $k^2 a^2 = 27,3$, в то время как второй корень уравнения (9.4.32) равен 36,9. Ошибка значительна и указывает на то, что для получения удовлетворительного результата следует

ввести зависимость, более сложную, чем предусмотренная формулой (9.4.30). Высшие состояния обычно оказываются более сложными для вычисления по вариационному методу, так как их волновые функции быстро осциллируют.

Нелинейные вариационные параметры. Функция сравнения (9.4.30) линейна по своим вариационным параметрам. Параметры могут, конечно, входить и нелинейно; это будет, например, у следующей функции сравнения для круглой мембраны:

$$\psi = \cos \alpha - \cos \alpha x.$$

Здесь α — вариационный параметр, который нужно определить вариационным методом. Мы не будем доводить это вычисление до конца, так как уравнение для α довольно сложно. В этой задаче нет особой выгоды от введения нелинейных параметров, но во многих случаях очень полезно сделать это. Для иллюстрации рассмотрим уравнение Шредингера

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (-\alpha^2 + U_0 e^{-x^2}) \psi = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Вариационный принцип гласит:

$$[\alpha^2] = - \int \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 - U_0 e^{-x^2} \psi^2 \right] dx / \int \psi^2 dx.$$

Подставляя волновую функцию сравнения $e^{-\beta x^2/2}$, находим

$$[\alpha^2] = - \left[\frac{\beta}{2} - U_0 \sqrt{\beta/(\beta+1)} \right].$$

Уравнение для определения β , $\partial [\alpha^2]/\partial \beta = 0$, сводится к

$$\beta^{1/2} (\beta + 1)^{3/2} = U_0.$$

Для этой величины β

$$[\alpha^2] = \beta \left(\beta + \frac{1}{2} \right).$$

Полученный результат очень прост; в этом случае нелинейная форма удобнее для вычислений, чем какая-либо линейная комбинация функций сравнения.

Метод Рэля — Ритца. Вариационный метод дает результат, который для случая положительно определенного оператора всегда больше точного значения. Чтобы определить точность подсчета по вариационному методу, необходимо иметь систематический способ улучшения исходной функции сравнения. Метод введения дополнительных нелинейных параметров, конечно, несколько увеличивает точность, но не дает уверенности, что обязательно получится точное решение, так как неясно, что будут включены всевозможные функции со всеми видами симметрии и поведения. Другой способ, в котором обходится эта трудность, состоит в рассмотрении линейных комбинаций функций, образующих полную систему, причем коэффициенты этих комбинаций образуют множество линейных вариационных параметров. Например, в случае колебания круглой мембраны мы положим

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1 - x^2)^n.$$

Для рассмотренного выше уравнения Шредингера удобно взять ψ в форме

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n e^{-\beta x^2/2}.$$

Мы можем, конечно, предпочесть ортогональные системы. Во втором случае, например, легче разлагать по полиномам Эрмита:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n(\sqrt{\beta}x) e^{-\beta x^2/2}. \quad (9.4.34)$$

Эти функции сравнения приводят к бесконечной системе уравнений для коэффициентов A_n или B_n . Уравнения мы теперь найдем в явной форме. Пусть волновая функция сравнения имеет вид

$$\psi = \sum A_n \varphi_n. \quad (9.4.35)$$

Уравнение, которое нужно решить, — это общее уравнение (9.4.5) с сопряженными $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$. Применим вариационный принцип для λ в форме

$$\delta J = \delta \left\{ \int \psi \mathcal{L}(\psi) dV - [\lambda] \int \psi \mathcal{M}(\psi) dV \right\} = 0, \quad \delta[\lambda] = 0.$$

Подставляя волновую функцию сравнения (9.4.35), мы находим

$$J = \sum_{nm} A_n A_m \{ L_{nm} - [\lambda] M_{nm} \} = 0,$$

где

$$L_{nm} = \int \varphi_n \mathcal{L}(\varphi_m) dV, \quad M_{nm} = \int \varphi_n \mathcal{M}(\varphi_m) dV. \quad (9.4.36)$$

Если функции φ_n ортогональны по отношению к оператору $\mathcal{M}$, то M_{nm} отличны от нуля только при $n=m$. Вариационный метод требует, чтобы $\partial J / \partial A_i = 0$. Следовательно,

$$\sum_j A_j (L_{ji} - \lambda M_{ji}) = 0 \quad \text{для каждого } i. \quad (9.4.37)$$

Мы использовали самосопряженность операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ и отбросили квадратные скобки вокруг λ , так как решение системы этих уравнений должно давать точное значение λ . Решение системы (9.4.37) существует только в том случае, когда определитель из коэффициентов при A_j равен нулю:

$$|L_{ji} - \lambda M_{ji}| = 0. \quad (9.4.38)$$

Уравнение (9.4.38) — это знакомое нам вековое уравнение, разобранные в § 9.1. Там предполагалось, что заранее имеется достаточно точное значение первого члена.

В вариационном методе первый член, так же как некоторые характерные параметры [например, параметр β в ряде (9.4.34)], определяются вариационно.

Решение векового уравнения (9.4.38) может быть проведено по методу, намеченному в § 9.1. Часто, однако, первый член φ_0 содержит достаточное число вариационных параметров, так что можно ожидать, что он весьма близок к точному решению. Дальнейший процесс, которому в общем случае надо следовать, состоит в точном решении векового уравнения для небольшого числа первых членов разложения (9.4.35), увеличении количества этих членов, повторном решении и т. д., причем вычисления прекращаются, если значение λ не изменяется при добавлении новых членов. Окончательное значение λ получается тогда экстраполяцией. Часто такой процесс диктуется, конечно, практическими соображениями. Ясно, что он является рискованным ввиду отсутствия каких-либо точных оснований для сходимости. В литературе имеется немало примеров кажущегося стремления к неверному пределу, вызванного, по-видимому, систематическим пропуском членов определенного вида. Поэтому важно дать точные оценки ошибки в вариационном методе, что мы сделаем позже в этом параграфе.

Приложения к теории возмущений. Используя волновые функции, полученные в теории возмущений в качестве волновых функций сравнения, можно глубже понять смысл этой теории. Пусть χ_m — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_0$, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathcal{L}_0 \chi_m = \lambda_m \mathcal{M} \chi_m, \quad \int \chi_n \mathcal{M} \chi_m dV = \delta_{nm}.$$

Тогда решение ψ задачи

$$\mathcal{L} \psi = \lambda \mathcal{M} \psi, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

с точностью до малых первого порядка равно

$$\psi = \chi_0 + \sum_{m \neq 0} \frac{L_{m0}^{(1)}}{\lambda - \lambda_m} \chi_m, \quad L_{m0}^{(1)} = \int \chi_m \mathcal{L}_1 \chi_0 dV.$$

Вариационный принцип (9.4.8) требует вычисления отношения

$$[\lambda] = \int \psi \mathcal{L} \psi dV / \int \psi \mathcal{M} \psi dV.$$

Если взять χ_0 в качестве функции сравнения, то мы получим

$$[\lambda] = \lambda_0 + L_{00}^{(1)}.$$

Это в точности совпадает с результатом теории возмущений в первом приближении. Для положительно определенного самосопряженного оператора $\mathcal{L}$ из вариационного принципа можно немедленно заключить, что

$$\lambda \leq \lambda_0 + L_{00}^{(1)}. \quad (9.4.39)$$

Заметим также, что выражение первого порядка точности для λ было получено при помощи функции сравнения нулевого приближения. Это еще раз показывает относительную нечувствительность вариационного выражения для $[\lambda]$ к ошибкам в волновой функции.

Подставим теперь волновую функцию первого порядка точности. Тогда

$$[\lambda] = \frac{\lambda_0 + L_{00}^{(1)} + 2 \sum_m \frac{(L_{m0}^{(1)})^2}{\lambda - \lambda_m} + \sum_m \frac{\lambda_m (L_{m0}^{(1)})^2}{(\lambda - \lambda_m)^2} + \sum_{mn} \frac{L_{0n}^{(1)} L_{nm}^{(1)} L_{m0}^{(1)}}{(\lambda - \lambda_m)(\lambda - \lambda_n)}}{1 + \sum_m \frac{(L_{m0}^{(1)})^2}{(\lambda - \lambda_m)^2}}.$$

Во всех суммах в этом выражении опущены члены, в которых хотя бы один из индексов m и n равен нулю. Вычисляя это отношение с точностью до третьего порядка относительно возмущения, мы получим

$$[\lambda] = \lambda_0 + L_{00}^{(1)} + \sum_{m \neq 0} \frac{(L_{m0}^{(1)})^2}{\lambda + L_{00}^{(1)} - \lambda_m} + \sum_{m, n \neq 0} \frac{L_{0n}^{(1)} L_{nm}^{(1)} L_{m0}^{(1)}}{(\lambda - \lambda_m)(\lambda - \lambda_n)}. \quad (9.4.40)$$

Это как раз результат теории возмущений [уравнение (9.1.15)] третьего порядка точности. Заметим, что он был получен с помощью волновой функции всего лишь первого порядка точности. Если мы используем волновую функцию второго порядка точности, то результат получится пятого порядка точности и т. д. Таким образом, результат теории возмущений нечетного порядка может быть получен из вариационного принципа, и он должен поэтому давать величину, которая больше точного значения λ . Соответствующее определенное суждение для четного порядка высказать нельзя.

Интегральное уравнение и соответствующий вариационный принцип. Проиллюстрируем теперь вариационный принцип (9.4.13) и уравнение (9.4.9) для ψ , содержащее обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$. Рассмотрим снова скалярное уравнение Гельмгольца, которое мы перепишем в более удобной форме

$$\nabla^2 \psi = -k^2 \psi.$$

Рассмотрим ограниченную область, на границе которой для ψ поставлены однородные граничные условия. Интегральное уравнение для ψ можно сразу получить, используя функцию Грина $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$:

$$\nabla^2 G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Мы выберем функцию Грина, удовлетворяющую тем же граничным условиям, что и ψ . Тогда

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0. \quad (9.4.41)$$

Это интегральное уравнение, соответствующее уравнению (9.4.9). Обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$ есть $-\frac{1}{4\pi} \int G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$. Вариационный принцип (9.4.13) принимает вид

$$\delta [k^2] = \delta \left[\frac{\int \psi^2(\mathbf{r}) dv}{\frac{1}{4\pi} \iint \psi(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv dv_0} \right] = 0. \quad (9.4.42)$$

Проверим теперь непосредственно, что этот вариационный принцип приводит к уравнению (9.4.41). Для этой цели проще рассматривать такую вариацию:

$$\delta \left\{ \frac{[k^2]}{4\pi} \iint \psi(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv dv_0 - \int \psi^2(\mathbf{r}) dv \right\} = 0.$$

Вспоминая, что $\delta[k^2] = 0$, получаем

$$\frac{k^2}{4\pi} \iint [\delta\psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}_0) + \psi(\mathbf{r}) \delta\psi(\mathbf{r}_0)] G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv dv_0 - 2 \int \psi \delta\psi dv = 0.$$

Чтобы получить общий множитель при $\delta\psi$, необходимо изменить порядок интегрирования для члена, содержащего $\delta\psi(\mathbf{r}_0)$. Для того чтобы это было возможно без появления дополнительных членов, необходимо, чтобы G_0 была симметричной функцией от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ и чтобы пределы интегрирования были одинаковы. В нашей задаче эти условия, конечно, выполнены так что

$$\iint \psi(\mathbf{r}) \delta\psi(\mathbf{r}_0) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv dv_0 = \iint \psi(\mathbf{r}_0) \delta\psi(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv dv_0.$$

Следовательно,

$$\int \delta\psi(\mathbf{r}) \left[\frac{k^2}{4\pi} \int G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0 - \psi(\mathbf{r}) \right] dv = 0.$$

Это уравнение приводит, конечно, к интегральному уравнению (9.4.41).

Вариационный принцип (9.4.42) применим также к уравнению Шредингера; в этом случае функция G_0 определяется уравнением

$$\nabla^2 G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Это уравнение используется не часто, так как отыскание G_0 в случае уравнения Шредингера очень затруднено. Чаше интегральное уравнение для уравнения Шредингера получается другим способом, при котором интенсивность потенциала рассматривается как параметр. Мы пишем поэтому потенциальную энергию в виде $-\lambda f(r)$, а уравнение Шредингера в виде

$$\nabla^2 \psi - \alpha^2 \psi = -\lambda f(r) \psi.$$

Соответствующим интегральным уравнением будет уравнение

$$\psi = \frac{\lambda}{4\pi} \int G_{i\alpha}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0, \quad (9.4.43)$$

где

$$\nabla^2 G_{i\alpha} - \alpha^2 G_{i\alpha} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (9.4.44)$$

Во многих задачах требуется найти $G_{i\alpha}$, соответствующее бесконечной области; тогда

$$G_{i\alpha}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} e^{-\alpha|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Вариационный принцип для λ можно теперь получить из уравнения (9.4.13):

$$\delta[\lambda] = \delta \left[\frac{\int f(\mathbf{r}) \psi^2 dv}{\int \int \psi(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) G_{i\alpha}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv dv_0} \right] = 0. \quad (9.4.45)$$

Заметим, что это введение $f(\mathbf{r})$ было необходимо для того, чтобы функция от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$, которая стоит в знаменателе формулы (9.4.45) между $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r}_0)$, была симметричной. Только тогда варьирование приводит к интегральному уравнению для ψ , что можно усмотреть из рассуждения, следующего за формулой (9.4.42).

Этот вариационный принцип исходит из известного значения α — уровня энергии системы — и дает значение λ — интенсивности потенциала, нужной для получения данного α . Такой вариационный принцип применим, в частности, если закон сил еще не известен, а уровни энергии известны из эксперимента. Если, с другой стороны, λ известно и нужно определить α , то уравнение (9.4.45) необходимо использовать для множества значений α , тогда как в скобки заключена известная величина λ . Соответствующее значение α получается при этом обратной интерполяцией.

Отметим важную практически особенность уравнения (9.4.45): в нем фигурируют только те значения $\psi(\mathbf{r})$, для которых $f(\mathbf{r})$ отлично от нуля. Правильная зависимость при очень больших значениях r обеспечивается функцией Грина.

Подобные вариационные принципы можно построить и для задач с возмущением граничных условий. Мы видели в § 9.2, как такая задача сводится к решению интегрального уравнения, в котором играют роль значения ψ (или ее нормальной производной, в зависимости от типа граничных условий) только на возмущенной поверхности. Вариационный принцип формулируется тогда для параметра, измеряющего величину возмущения (соответственно величине потенциала для случая уравнения Шредингера). Если желательно сформулировать вариационный принцип для k^2 , то нужно использовать формулу (9.4.26). В § 12.3 мы разберем примеры применения этой техники, в которых более полно выясним физический смысл различных членов.

Пример. Мы еще раз рассмотрим колебания круглой мембраны и вычислим резонансную частоту низшего симметричного состояния. В этом случае ψ является функцией только от r . Ее можно подставить в уравнения (9.4.41) и (9.4.42), или можно обратиться прямо к обыкновенному дифференциальному уравнению для ψ . И тот и другой путь приводят к получению следующего интегрального уравнения и вариационного принципа, которые мы напомним, введя безразмерную переменную $x = \frac{r}{a}$:

$$\psi = \frac{(ka)^2}{4\pi} \int_0^1 G_0(x|x_0) \psi(x_0) x_0 dx_0 \quad (9.4.46)$$

и

$$\delta[(ka)^2] = \delta \left\{ \int_0^1 \psi^2 x dx \middle| \int_0^1 \int_0^1 \psi(x) x G_0(x|x_0) x_0 \psi(x_0) dx dx_0 \right\} = 0. \quad (9.4.47)$$

Здесь

$$G_0(x|x_0) = -4\pi \begin{cases} \ln x & \text{для } x \geq x_0, \\ \ln x_0 & \text{для } x \leq x_0. \end{cases}$$

Мы воспользуемся теперь той же самой функцией сравнения $1 - x^2$, которая была применена раньше. Если ψ_1 — функция, получающаяся при подста-

новке $1 - x^2$ в правую часть уравнения (9.4.46), то, опуская множитель, содержащий k^2 , который (как и любой постоянный множитель) сократится при подстановке в вариационный принцип (9.4.47), получим

$$\psi_1 = \frac{3}{16} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4.$$

Соответствующая величина $(ka)^2$ из (9.4.47) равна

$$[(ka)^2] = \int_0^1 \psi^2 x dx / \int_0^1 \psi(x) \psi_1(x) x dx.$$

Подставляя ψ и ψ_1 , мы находим, что $[(ka)^2]$ приблизительно равно 5,8182, в то время как точное значение 5,7832. Заметим, что это приближение значительно лучше, чем величина 6, полученная прямой подстановкой $1 - x^2$ в формулу (9.4.29). Это достигается благодаря тому, что ψ_1 ближе к точной волновой функции, чем ψ , так как ψ_1 получается из ψ применением оператора Грина. Эта процедура, как мы видим, приводит к уменьшению ошибки в ψ и будет поэтому базисом вариационно-итерационного метода.

Вариационный принцип для сдвигов фаз. Вариационные принципы, разобранные до сих пор, соответствуют задачам, в которых уровни энергии образуют дискретный спектр. Мы имели дело либо с конечной областью, на границе которой волновая функция удовлетворяла граничным условиям, либо с бесконечной областью при условии, что волновая функция должна стремиться к нулю на бесконечности (более подробно об этом см. в § 12.3). Теперь мы обращаемся к задачам с непрерывным спектром собственных значений. Решения, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям, существуют здесь для всех собственных значений из некоторого интервала. Волновые функции уже не будут интегрируемыми с квадратом, так что вариационные принципы, соответствующие связанным системам, здесь непосредственно не применимы.

В качестве первого примера изменений, которые необходимо ввести, рассмотрим вариационный принцип для сдвига фазы η_0 . Радиальное дифференциальное уравнение, определяющее этот сдвиг, было рассмотрено раньше [уравнение (9.3.12)]:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + [k^2 - U(r)] u = 0; \quad (9.4.48)$$

оно снова будет рассмотрено в § 12.3. Здесь мы рассмотрим только схему вариационной техники решения этого уравнения. Функция u удовлетворяет граничным условиям

$$u(0) = 0, \quad u(r) \simeq \sin(kr - \eta) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Заметим, что интеграл от u^2 бесконечен. Если бы это было не так, то выражение

$$\int_0^\infty [(u')^2 - (k^2 - U) u^2] dr$$

привело бы после варьирования по u к уравнению (9.4.48). Чтобы обойти расходимость интеграла на бесконечности, мы рассмотрим разность между этим интегралом и некоторым интегралом, который расходится точно таким же образом на бесконечности. Рассмотрим поэтому функцию v — решение уравнения

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + k^2 v = 0,$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$v(r) \simeq u(r) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (9.4.49)$$

так что v с точностью до нормирующего множителя равно $\sin(kr - \eta)$.

Вариационный принцип для v , если вновь пренебречь указанной выше расходимостью, должен получаться из выражения

$$\int_0^{\infty} [(v')^2 - k^2 v^2] dr.$$

Это выражение расходится точно так же, как соответствующий интеграл, содержащий u , так как u и v для больших r близки друг к другу.

Это подсказывает идею рассмотреть разность двух интегралов

$$J = \int_0^{\infty} [(u')^2 - (v')^2 - k^2(u^2 - v^2) + Uu^2] dr, \quad (9.4.50)$$

где варьирование выполняется независимо как по u , так и по v , подчиненным, однако, дополнительному условию (9.4.49). Интеграл J конечен. Используя уравнение для u и v , можно показать, что его величина для точных u и v равна

$$J = \int_0^{\infty} \frac{d}{dr} [uu' - vv'] dr = v'(0)v(0),$$

так как $u \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $u \simeq v$ при $r \rightarrow \infty$. Вариацию интеграла J мы запишем следующим образом по причине, которая вскоре выяснится:

$$\delta J = \delta \left[\frac{v'(0)}{v(0)} v^2(0) \right] = v^2(0) \delta \left[\frac{v'(0)}{v(0)} \right] + 2v'(0) \delta[v(0)]. \quad (9.4.51)$$

Нетрудно показать, что условие

$$\delta \left[\frac{v'(0)}{v(0)} \right] = 0$$

приводит к правильным дифференциальным уравнениям для u и v .

Заметим прежде всего, что

$$\frac{v'(0)}{v(0)} = -k \operatorname{ctg} \eta,$$

так что вариационный принцип формулируется для $k \operatorname{ctg} \eta$. Мы вычислим сначала δJ из формулы (9.4.50), варьируя u и v и имея в виду соотношение (9.4.49) между ними:

$$\delta J = 2 \int_0^{\infty} [\delta u (-u'' - k^2 u + Uu) + \delta v (v'' + k^2 v)] dr + 2\delta[v(0)] v'(0).$$

Подставляя выражение (9.4.51), получаем

$$v^2(0) \delta[k \operatorname{ctg} \eta] = 2 \int_0^{\infty} [\delta u [u'' + k^2 u - Uu] - \delta v (v'' + k^2 v)] dr.$$

Из условия $\delta[k \operatorname{ctg} \eta] = 0$ мы непосредственно находим уравнения для u и v .

Мы выбрали эту специальную форму вывода для того, чтобы подчеркнуть независимость вариационного принципа для $k \operatorname{ctg} \eta$ от амплитуды v . Однако в приложениях удобнее выбирать $v(0) = 1$. Вариационный

интеграл J равен $-k \operatorname{ctg} \eta$ для точных u и v и должен быть проварьирован при условиях (9.4.49) и $v(0) = 1$. Окончательно

$$\delta[-k \operatorname{ctg} \eta] = 0,$$

где

$$[-k \operatorname{ctg} \eta] = \int_0^{\infty} [(u')^2 - (v')^2 - k^2(u^2 - v^2) + Uu^2] dr, \quad (9.4.52)$$

$$u(r) \simeq v(r) \text{ при } r \rightarrow \infty; \quad v(0) = 1.$$

Как простое приложение этой формулы, мы получим производную по k^2 от $-k \operatorname{ctg} \eta$, вычисленную для некоторого частного значения k (например, k_0). Подставляем с этой целью решения, соответствующие $k = k_0$, в качестве волновых функций сравнения в вариационный принцип (9.4.52). Тогда зависимость $[-k \operatorname{ctg} \eta]$ от k^2 становится явной и мы можем вычислить производную:

$$\frac{d(-k \operatorname{ctg} \eta)}{d(k^2)} = \int_0^{\infty} (v_k^2 - u_k^2) dr, \quad (9.4.53)$$

где u_k и v_k — функции u и v для волнового числа k . Если положить k равным нулю, то результат эквивалентен формуле (9.3.67), полученной методом теории возмущений.

Вариационный принцип (9.4.52) для сдвига фазы может быть использован почти таким же образом, как и соответствующий принцип (9.4.28) для k^2 . Подставляя в (9.4.52) волновые функции сравнения для u и v , удовлетворяющие дополнительным условиям, определяем значения вариационных параметров, входящих в u и v , из требования стационарности вариационного интеграла. Заметим, что так как подинтегральная функция в (9.4.52) не дефинитна, то стационарное значение может быть максимумом, минимумом, а также точкой перегиба.

Функцию сравнения для v можно взять в виде $\sin(kr - \eta)/\sin(-\eta)$, где, однако, нужно рассматривать η как вариационный параметр или, как это часто делают, подставить как-нибудь угаданное значение η . Ясно, что было бы удобнее, если бы можно было найти такой вариационный принцип для $k \operatorname{ctg} \eta$, который не содержит явной зависимости от η , как теперь в v . Для того чтобы это сделать, введем разность v и u :

$$w = v - u, \quad v = -\frac{\sin(kr - \eta)}{\sin \eta}, \quad (9.4.54)$$

$$w \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad w(0) = 1.$$

Дифференциальное уравнение для w имеет вид

$$w'' + [k^2 - U]w = -Uv. \quad (9.4.55)$$

Подставляя w в вариационный интеграл и используя свойства v , находим

$$AR^2 + BR + C = 0, \quad R = -k \operatorname{ctg} \eta,$$

$$A = \int_0^{\infty} \frac{U \sin^2(kr)}{k^2} dr,$$

$$B = 1 + \frac{2}{k} \int_0^{\infty} U \sin(kr) \cos(kr) dr - \frac{2}{k} \int_0^{\infty} U w \sin(kr) dr, \quad (9.4.56)$$

$$C = \int_0^{\infty} [(w')^2 - (k^2 - U)w^2] dr + \int_0^{\infty} U [\cos^2(kr) - 2w \cos(kr)] dr.$$

Мы решим теперь квадратное уравнение для R , выбирая корень, который ведет себя правильно в предельном случае очень малых U :

$$R = -\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (9.4.57)$$

Это точное выражение для R , которое не годится, конечно, в качестве вариационного принципа для R . Тем не менее нам здесь повезло; мы сейчас покажем, что требование $\delta(R) = 0$ для вариации ω , подчиненной граничным условиям, указанным в (9.4.54), приводит к нужному дифференциальному уравнению (9.4.55) для ω .

Обозначая правую часть уравнения (9.4.57) через $[R]$, мы находим, что

$$\delta[R] = 0 = \delta C + R \delta B, \quad (9.4.58)$$

где мы отбросили некоторые постоянные множители. Далее,

$$\delta B = -\frac{2}{k} \int_0^\infty \delta \omega U \sin(kr) dr,$$

$$\delta C = -2 \int_0^\infty \delta \omega U \cos(kr) dr - 2 \int_0^\infty \delta \omega (\omega'' + k^2 \omega - U \omega) dr.$$

Подстановка этих выражений для δB и δC в уравнение (9.4.58) непосредственно приводит к правильному дифференциальному уравнению для ω .

Вариационный принцип, основанный на формуле (9.4.57), часто легче использовать, чем принцип, основанный на формуле (9.4.50). Подставляют волновую функцию сравнения для ω , равную единице в нуле и нулю в бесконечности, содержащую один или несколько вариационных параметров, таких, как γ в функции $e^{-\gamma r}$. Затем определяют значения параметров, для которых R стационарно, или прямым табулированием R , или полагая дифференциал R по этим параметрам равным нулю, смотря по тому, что удобнее.

Этот вариационный принцип дает борновское приближение (9.3.37), если использовать $\omega = \cos(kr)$ как волновую функцию сравнения, так как тогда $C = 0$ и $B = 1$. Соответствующее u есть $\sin(kr)$ — падающая волна. На самом деле $\cos(kr)$ не удовлетворяет нужным условиям на бесконечности, так что мы должны рассматривать этот результат, как полученный предельным переходом. Мы могли, например, использовать $e^{-\epsilon r} \cos kr$ в качестве волновой функции сравнения и определить поведение R при ϵ , стремящемся к нулю.

Можно развить вариационные принципы описанного типа для высших сдвигов фаз η_l , $l \geq 1$, которые так же удобны и точны, как уравнение (9.4.57). Они сформулированы в задаче 9.8.

Вариационный принцип для сдвига фазы, основанный на интегральном уравнении. Интегральное уравнение для u_l выведено раньше [см. (9.3.34)]:

$$u_l = Akr j_l(kr) - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty G_k^{(l)}(r|r_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0. \quad (9.4.59)$$

Здесь A — постоянная, j_l — сферическая функция Бесселя [см. (5.3.67) и далее], $G_k^{(l)}$ определена в (9.3.33). Уравнение (9.4.59) — неоднородное интегральное уравнение, так что применим метод, приводящий к формуле (9.4.22). Тем не менее мы предпочтем прямой подход, чтобы выяснить физический смысл.

Метод состоит в замене уравнения (9.4.59) однородным уравнением, в котором сдвиг фазы η_l входит явным образом, а постоянная A исключена. Соотношение между A и η_l выводится исследованием уравнения (9.4.59) при больших значениях r . Следуя анализу, приводящему к формуле (9.3.36), мы приходим к точному соотношению

$$\operatorname{tg} \eta_l = \frac{1}{A} \int_0^{\infty} j_l(kr_0) U(r_0) u_l(r_0) r_0 dr_0.$$

Исключая A из уравнения (9.4.59), мы получаем теперь однородное уравнение

$$u_l(r) = kr j_l(kr) \operatorname{ctg} \eta_l \int_0^{\infty} j_l(kr_0) U(r_0) u_l(r_0) r_0 dr_0 - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} G_k^{(l)}(r|r_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0. \quad (9.4.60)$$

Соответствующий вариационный интеграл имеет вид

$$[\operatorname{ctg} \eta_l] = k \frac{\int_0^{\infty} U u_l^2 dr + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u_l(r) U(r) G_k^{(l)}(r|r_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0 dr}{\left(\int_0^{\infty} kr j_l U u_l dr \right)^2}. \quad (9.4.61)$$

Варьирование этого выражения приводит к написанному выше интегральному уравнению. Заметим, что так как $G_k^{(l)}$ — не дефинитная функция, то стационарное значение $[\operatorname{ctg} \eta_l]$ не обязательно будет максимумом или минимумом. Подставляя представление (9.3.33) вместо $G_k^{(l)}$, можем несколько упростить уравнение (9.4.61):

$$[\operatorname{ctg} \eta_l] = \frac{k \int_0^{\infty} U u_l^2 dr - 2 \int_0^{\infty} kr n_l(kr) U(r) u_l(r) \int_0^r kr_0 j_l(kr_0) U(r_0) u_l(r_0) dr_0 dr}{\left[\int_0^{\infty} kr j_l U u_l dr \right]^2}. \quad (9.4.62)$$

Борновское приближение для η_l может быть немедленно получено подстановкой падающей волны $kr j_l(kr)$ в качестве волновой функции сравнения и отбрасыванием второго члена в числителе, так как он более высокого порядка по U , чем первый. Часто очень существенное улучшение борновского приближения получается, если не отбрасывать второго члена:

$$[\operatorname{ctg} \eta_l] \simeq \operatorname{ctg} [\eta_l^B] \left[1 - 2 \frac{\int_0^{\infty} kr n_l U (kr j_l) \int_0^r (kr_0 j_l)^2 U dr_0 dr}{k \int_0^{\infty} U (kr j_l)^2 dr} \right]. \quad (9.4.63)$$

Здесь η_l^B — борновское приближение для сдвига фазы.

Мы не будем здесь приводить конкретных примеров использования этого вариационного принципа, так как он будет разобран детально

в гл. 12. Как обычно, вместо u_i подставляются функции сравнения, содержащие вариационные параметры. Лучшие значения этих параметров те, для которых $[\text{ctg } \eta_i]$ стационарен. Заметим, что играют роль только значения u_i внутри области, где U не равно нулю. Мы можем поэтому не заботиться о поведении u_i в остальных областях.

Вариационный принцип для амплитуды прохождения. Задача о прохождении и отражении волн для потенциального барьера исследуется почти таким же образом, как рассмотренная выше задача о сдвиге фазы. Есть, однако, одно важное различие, которое требует детального разбора. Уравнение имеет вид

$$\psi'' + [k^2 + U(x)] \psi = 0,$$

где U предполагается имеющей наибольшее значение при малых $|x|$ и стремящейся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Соответствующее интегральное уравнение для падающей волны амплитуды A , идущей из $-\infty$, запишется в виде

$$\psi = Ae^{ikx} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x|x_0) U(x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (9.4.64)$$

Мы преобразуем это неоднородное уравнение в однородное, выражая A через величину амплитуды прохождения f . Чтобы получить это соотношение, необходимо подставить явное выражение для G_k [см. формулу (9.3.29)]:

$$\psi = Ae^{ikx} + \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} U(x_0) \psi(x_0) dx_0.$$

Для больших положительных значений x мы получаем проходящую волну:

$$\psi \simeq e^{ikx} \left[A + \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Следовательно, амплитуда волны, проходящей через потенциальный барьер U , рассчитанная на единицу амплитуды падающей волны, равна

$$f = 1 + \frac{i}{2kA} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0.$$

Подставив в (9.4.64) найденное отсюда значение A , получим однородное уравнение

$$\begin{aligned} \psi = \frac{i}{2k(f-1)} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x|x_0) U(x_0) \psi(x_0) dx_0. \end{aligned} \quad (9.4.65)$$

Из-за наличия комплексных величин мы вынуждены ввести сопряженную функцию $\tilde{\psi}$, свойства которой будут определены из вариационного принципа для f :

$$\frac{1}{f-1} = \frac{2k}{i} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi} U \psi dx - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(x) U(x) G_k(x|x_0) U(x_0) \psi(x_0) dx dx}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi} U e^{ikx} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} U \psi dx \right)}. \quad (9.4.66)$$

Выполняя варьирование по $\tilde{\psi}$, получаем правильное уравнение для ψ . Уравнение для $\tilde{\psi}$ получается, если проварьировать это уравнение по ψ :

$$\tilde{\psi} = \frac{i}{2k(f-1)} e^{-ikh} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi} U e^{ikhx} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi} U(x_0) G_h(x|x_0) dx_0. \quad (9.4.67)$$

Сравнивая с уравнением (9.4.65), мы видим, что $\tilde{\psi}$ является решением задачи, в которой падающая волна распространяется в отрицательном направлении. Падающая волна имеет вид e^{-ikhx} , и когда x принимает большие отрицательные значения, мы находим только волны формы e^{-ikhx} . Заметим также, что f является амплитудой прохождения для падающих волн, идущих через барьер в обоих направлениях. Это, конечно, частный случай принципа взаимности.

При использовании вариационного принципа (9.4.66) нужно вместо ψ подставить функцию сравнения, которую мы обозначим через ψ_k . Вместо $\tilde{\psi}$ нужно подставить функцию ψ_{-k} , которая представляет собой ту же функцию сравнения, только с переменной знака направления движения падающей волны. Далее можно применить обычный метод определения вариационных параметров. В качестве простого примера мы получаем борновское приближение, если подставить $\psi_k = e^{ikhx}$ и $\psi_{-k} = e^{-ikhx}$. Тогда

$$\left[\frac{1}{f-1} \right] \simeq \frac{\frac{2k}{i}}{\int_{-\infty}^{\infty} U dx} \left\{ 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikhx} U(x) e^{ikh|x-x_0|} U(x_0) e^{ikhx_0} dx_0 dx}{\frac{2k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} U dx} \right\}. \quad (9.4.68)$$

Вариационный принцип для трехмерных задач рассеяния. Процедура, рассмотренная выше, позволяет вывести вариационный принцип для амплитуды рассеяния. Мы начнем с уравнения Шредингера

$$\nabla^2 \psi + (k^2 - U) \psi = 0,$$

где U велико только в области вблизи начала координат и стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Соответствующее интегральное уравнение для плоской падающей волны имеет вид

$$\psi = A e^{ik_i \cdot r} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ikR}}{R} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0,$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, $\mathbf{k}_i$ — вектор, идущий в направлении распространения падающей волны, и k — величина вектора $\mathbf{k}_i$, $k = |\mathbf{k}_i|$. Исключением A это уравнение можно сделать однородным. Для больших расстояний от начала

$$\psi \simeq A e^{ik_i \cdot r} - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int e^{-ik_s \cdot \mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0,$$

где $\mathbf{k}_s$ — вектор длины k , идущий в направлении наблюдения, т. е. в направлении рассеянной волны [см. также уравнение (12.3.68)]. Если амплитуду рассеянной волны записать в форме $-\frac{1}{4\pi} T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)$, то

$$T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = \frac{1}{A} \int e^{-ik_s \cdot \mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0$$

и интегральное уравнение примет вид

$$\phi = \frac{1}{T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) dV_0 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}}}{R} U(\mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) dV_0.$$

Соответствующий вариационный принцип для $T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)$ основан на варьировании выражения

$$[T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)] = \frac{[\int \tilde{\psi} U e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} dV][\int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} U \psi dV]}{\int \tilde{\psi} U \psi dV + \frac{1}{4\pi} \int \int \tilde{\psi}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \frac{e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}}}{R} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dV_0 dV}, \quad (9.4.69)$$

где $\tilde{\psi}$ — снова сопряженная к ψ функция. Варьируя $[T]$ по $\tilde{\psi}$, получим точное уравнение для ψ , тогда как варьируя $[T]$ по ψ , придем к аналогичному уравнению для $\tilde{\psi}$, в котором, однако, падающая плоская волна распространяется в направлении $-\mathbf{k}_s$. Если мы поэтому более явно введем в ψ направление падения при помощи обозначения $\psi(\mathbf{k}_i)$, то $\tilde{\psi} = \psi(-\mathbf{k}_s)$. Теорема взаимности

$$T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = T(-\mathbf{k}_i | -\mathbf{k}_s)$$

непосредственно вытекает из уравнения (9.4.69).

Приложения этого вариационного принципа будут подробно разобраны в § 12.3. Процедура снова включает выбор функций сравнения для $\psi(\mathbf{k}_i)$ и для соответствующей $\psi(-\mathbf{k}_s)$, подстановку их в уравнение (9.4.69) и варьирование. Мы здесь отметим только, что борновское приближение автоматически получится, если положить

$$\psi = \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \tilde{\psi} = \exp(-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r})$$

и отбросить второй член в знаменателе.

Мы могли бы также получить вариационный принцип для T , используя интегральное уравнение для T , выведенное в § 9.3 [см. уравнение (9.3.48)]. Это интегральное уравнение есть в точности преобразование Фурье интегрального уравнения для ψ , и соответствующий вариационный принцип может быть получен прямо из (9.4.69), если ввести преобразования Фурье встречающихся в этом уравнении функций.

Вариационные принципы для поверхностных возмущений. Вариационные принципы, развитые до сих пор в этом параграфе, касались объемных возмущений (применительно к уравнению Шредингера или к рассеянию волн при изменении показателя преломления). Теперь мы обращаемся к задачам, в которых или граница или граничные условия таковы, что обычные методы разделения переменных оказываются несостоятельными. Мы рассмотрим сперва вариационные принципы, основанные на дифференциальной форме, ограничившись для начала задачами, в которых возмущена граничная поверхность, а граничные условия остаются однородными условиями Неймана или Дирихле. Мы уже писали вариационный принцип для k^2 , в котором варьировемой величиной является $[k^2]$:

$$[k^2] = \int (\nabla \psi)^2 dV / \int \psi^2 dV, \quad (9.4.70)$$

причем мы особенно подробно останавливались на уравнении Гельмгольца. Наши замечания могут быть, однако, легко распространены и на более общий случай. Функции сравнения, которые можно подставлять в $[k^2]$,

должны быть определенного типа, что можно видеть при образовании вариации $[k^2]$:

$$\int \psi (\nabla^2 \psi + k^2 \psi) dV - \oint \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta \psi dS = 0.$$

Мы замечаем, что если $\partial \psi / \partial n = 0$, то для ψ немедленно получается скалярное уравнение Гельмгольца. Для условий Дирихле оно получается, только если $\delta \psi = 0$ на S , т. е. если функции сравнения, подставляемые в $[k^2]$, совпадают на S . Это ограничение для более сложных граничных условий практически бывает трудно сформулировать. Мы поэтому придумаем такой вариационный принцип, в котором функции сравнения могут быть произвольными, как в случае условий Неймана. Это достигается тем, что к вариационному принципу (9.4.70) добавляется член, изменяющий поверхностный член так, что подинтегральная функция становится пропорциональной ψ , а не $\partial \psi / \partial n$. Легко проверить, что соответствующее выражение для $[k^2]$ имеет вид

$$[k^2] = \left\{ \int (\nabla \psi)^2 dV - 2 \oint \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \right\} / \int \psi^2 dV. \quad (9.4.71)$$

Теперь в (9.4.71), так же как и в (9.4.70), мы можем подставить любую функцию сравнения. Уравнение (9.4.70) соответствует однородным условиям Неймана, а (9.4.71) применяется в случае условий Дирихле. Эти два уравнения приобретают более симметричную форму, если применить теорему Грина. Они принимают вид

$$[k^2] = \left\{ - \int \psi \nabla^2 \psi dV + \oint \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \right\} / \int \psi^2 dV \quad (\text{условия Неймана}) \quad (9.4.72)$$

и

$$[k^2] = \left\{ - \int \psi \nabla^2 \psi dV - \oint \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \right\} / \int \psi^2 dV \quad (\text{условия Дирихле}). \quad (9.4.73)$$

Эти выражения можно теперь употреблять в обычном вариационном способе, уже неоднократно описанном. Если, например, в одномерной задаче, в которой условия Дирихле удовлетворяются при $x=0$ и $x=1$, пробная волновая функция $\sin(xz)$ (z — вариационный параметр) подставлена в (9.4.73) и полученное выражение продифференцировано по z , то наилучшие значения z получаются при $\sin z$, равном нулю. Мы можем также получить пертурбационную формулу первого порядка, выведенную в § 9.2, используя нормализованные решения φ уравнения Гельмгольца в уравнениях (9.4.72) и (9.4.73):

$$k^2 \simeq k_0^2 + \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS / \int \varphi^2 dV \simeq k_0^2 + \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (\text{условия Неймана}),$$

$$k^2 \simeq k_0^2 - \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (\text{условия Дирихле}).$$

В случае смешанных граничных условий, $(\partial \psi / \partial n) + f \psi = 0$, соответствующей варьируемой величиной, в которой функция сравнения произвольна, является

$$[k^2] = \left\{ \int (\nabla \psi)^2 dV + 2 \oint f \psi^2 dS \right\} / \int \psi^2 dV.$$

После варьирования это выражение дает

$$\int \psi [\nabla^2 \psi + k^2 \psi] dV - \oint \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} + f \psi \right) dS = 0.$$

В симметричной форме, аналогичной (9.4.72),

$$[k^2] = \left\{ - \int \phi \nabla^2 \phi dV + \oint f \phi^2 dS \right\} / \int \phi^2 dV. \quad (9.4.74)$$

Подставляя сюда невозмущенную пронормированную волновую функцию ϕ , получаем

$$[k^2] \simeq k_0^2 + \int f \phi^2 dS.$$

Вариационный принцип, основанный на интегральном уравнении для граничных возмущений. Интегральные уравнения для ψ при различного рода граничных условиях были выведены в § 9.2 [см. уравнения (9.2.4), (9.2.16), (9.2.22) и (9.2.47)]. Простейшим случаем для настоящих рассмотрений является случай смешанного граничного условия. Проведем для иллюстрации одно из них. Уравнение имеет вид

$$\psi(S) = - \frac{1}{4\pi} \oint f(S_0) \psi(S_0) G_k(S|S_0) dS_0, \quad (9.4.75)$$

где G_k — функция Грина, удовлетворяющая однородным условиям Неймана. Параметр k слишком основательно спрятан в G_k и f , чтобы для него можно было получить явный вариационный принцип, исходя из уравнения (9.4.75). Удобнее принять k^2 за известную величину, а величину f использовать в качестве собственного значения. Чтобы сделать этот подход более явным, положим

$$f(S) = \mu F(S).$$

Тогда вариационный принцип для μ состоит в том, что вариация $[\mu]$ полагается равной нулю, где

$$[\mu] = - \frac{\oint \psi^2(S) F(S) dS}{\frac{1}{4\pi} \oint \oint \psi(S) F(S) G_k(S|S_0) F(S_0) \psi(S_0) dS dS_0}. \quad (9.4.76)$$

Для того чтобы сопряженная функция равнялась ψ , существенно, конечно, что G_k симметрична по S и S_0 . Этот принцип дает μ как функцию от k , что соответствует акустической задаче о том, какое количество вещества данного вида необходимо для получения данного поглощения. Чтобы получить резонансную частоту и поглощение для данного распределения вещества, необходимо найти — путем интерполяции, например, — обратную функцию $k = k(\mu)$ из $\mu = \mu(k)$.

Интегральное уравнение для возмущений в граничной поверхности, скажем в случае, когда ψ удовлетворяет однородным условиям Неймана, имеет вид

$$\psi = - \frac{1}{4\pi} \oint \psi \frac{\partial G_k}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.4.77)$$

Ядро $\partial G_k / \partial n_0$ не симметрично. Чтобы сделать его симметричным, возьмем от обеих частей равенства производную $\partial / \partial n$. Имеем

$$\oint \psi \frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0} dS_0 = 0.$$

Отметим вновь [ср. уравнение (9.2.18) и далее], что $\partial^2 G_k / \partial n \partial n_0$ следует вычислять осторожно, не разрешая переменной r приближаться к поверхности S при вычислении производной по второй переменной. Это вычисление в соответствии с нашими прежними рассуждениями можно провести

непосредственно, сделав подстановку

$$G_k \rightarrow \Gamma_k = G_k - G_0. \quad (9.4.78)$$

Интегральное уравнение принимает тогда вид

$$\oint \psi \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial n \partial n_0} dS_0 = 0. \quad (9.4.79)$$

Величиной, вариация которой равна нулю, будет интеграл

$$J = \oint \oint \psi(S) \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial n \partial n_0} \psi(S_0) dS_0 dS. \quad (9.4.80)$$

При варьировании величина k^2 (или величина возмущения) остается произвольной. Вариационные параметры в функции сравнения выбираются так, чтобы $\delta J = 0$. Затем уравнение (9.4.79) решается относительно k^2 . В более простых случаях, рассмотренных ранее, для k^2 можно получить явное решение, так что вариационный интеграл не зависит явно от k^2 . К сожалению, это не имеет места в рассматриваемой задаче. Взамен необходимо совместно решать уравнения (9.4.79) и $\delta J = 0$. Мы не будем рассматривать случай условий Дирихле, так как интегральное уравнение (9.2.64) не отличается существенно от уравнения (9.4.79).

Рассеяние поверхностями. Можно разработать вариационный метод для рассеяния таким объектом, на котором ψ удовлетворяет однородным граничным условиям. Рассмотрим сначала условия Неймана. Тогда интегральное уравнение для ψ имеет вид

$$\psi = A e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} \right) \psi(S_0) dS_0,$$

где A — постоянная, $\mathbf{k}_i$ — вектор в направлении распространения падающей волны, имеющий длину k , и $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, где $\mathbf{r}_0$ находится на рассеивающей поверхности. Мы можем сделать это уравнение однородным, выразив A через амплитуду рассеяния. Для больших r

$$\psi \simeq A e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \oint i(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}_s) \psi(S_0) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} dS_0,$$

где $\mathbf{k}_s$ — вектор длины k в направлении рассеяния. Амплитуда рассеяния f равна

$$f(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = +\frac{1}{4\pi A} \oint i(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}_s) \psi(S_0) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} dS_0.$$

Решая это уравнение относительно A и подставляя результат в уравнение для ψ , получаем

$$\psi = -\frac{1}{T} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \oint i(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}_s) \psi(S_0) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} dS_0 - \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} \right) \psi(S_0) dS_0. \quad (9.4.81)$$

Для образования вариационного принципа для ψ это уравнение неудобно, так как ядро интегрального уравнения не симметрично. Как и раньше, возьмем нормальную производную от обеих частей равенства (9.4.81) и вычислим ее значение на S . Тогда будем иметь

$$0 = \frac{1}{T} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \oint (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}_s) \psi(S_0) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} dS_0 - \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} \right) \psi(S_0) dS_0. \quad (9.4.82)$$

Мы снова отмечаем, что при вычислении $(\partial^2/\partial n \partial n_0)(e^{ikR}/R)$ сначала вычисляется нормальная производная, скажем, по n_0 при $\mathbf{r}$, не лежащем на S , а затем берется производная по $\mathbf{n}$. Теперь можно получить вариационный принцип для T . Мы требуем, чтобы $\delta[T] = 0$, где

$$[T] = \frac{\oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i) \tilde{\psi} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} dS \oint e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}_s) \psi(S_0) dS_0}{\frac{1}{4\pi} \oint \oint \tilde{\psi}(S) \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \psi(S_0) dS_0 dS}. \quad (9.4.83)$$

Выполняя варьирование по ψ , мы получаем интегральное уравнение для $\tilde{\psi}$. Как и следовало ожидать,

$$\tilde{\psi} = \psi(-\mathbf{k}_s). \quad (9.4.84)$$

Другими словами, сопряженное решение является решением первоначальной задачи, но только падающая на рассеиватель волна имеет направление $-\mathbf{k}_s$. Снова получается, что $T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = T(-\mathbf{k}_i | -\mathbf{k}_s)$.

Подобным же образом получается вариационный принцип для T , когда на поверхности рассеивателя удовлетворяются условия Дирихле. Мы находим, что $[T]$ выражается формулой

$$[T] = - \frac{\oint e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0 \oint e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} dS}{\frac{1}{4\pi} \oint \oint \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS dS_0}. \quad (9.4.85)$$

Здесь $\tilde{\psi}$ снова выражается формулой (9.4.84).

Мы замечаем, что оба вариационных принципа (9.4.83) и (9.4.85) содержат соответственно значения ψ и $\partial\psi/\partial n$ только на поверхности. Поэтому необходимо получить волновую функцию сравнения, которая бы приближала ψ или $\partial\psi/\partial n$ только на поверхности S . Примеры, содержащие эти вариационные принципы, так же как и весьма близкие к ним для диффракционных задач, разбираются в § 11.4.

Вариационный принцип для задач излучения. Физическая ситуация выражается здесь неоднородным граничным условием, в котором или нормальная производная от ψ или величина ψ задана на поверхности излучающей системы. Здесь мы рассмотрим пример, в котором ψ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и задана нормальная производная ψ на поверхности S . В акустике это соответствует нормальной скорости сжатия, которая, конечно, синусоидальна по времени. Интегральное уравнение получается сразу. Мы будем исходить из общего соотношения

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} - \psi(S_0) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] dS_0.$$

Подставив заданное значение $\partial\psi/\partial n$, которое мы обозначим через $N_{\mathbf{I}}(S)$, мы получим

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{e^{ikR}}{R} N - \psi(S_0) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] dS_0. \quad (9.4.86)$$

Для простоты выберем N действительным. Чтобы получить интегральное уравнение с симметричным ядром, мы вычислим нормальную производную $\partial\psi/\partial n$, так что

$$-N(S) + \frac{1}{4\pi} \oint N(S_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) dS_0 = \oint \psi(S_0) \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) dS_0. \quad (9.4.87)$$

Левая часть этого равенства является известной функцией, которую мы обозначим через φ , а уравнение (9.4.87) является, таким образом, неоднородным интегральным уравнением.

Функция φ противоположна по знаку разности между фактическим значением нормальной производной N и нормальной производной, вычисленной из первого приближения для ψ , полученного из уравнения (9.4.86), если отбросить второй член. Обозначая эту последнюю нормальную производную через $N^{(0)}$, мы имеем

$$\varphi = N^{(0)} - N. \quad (9.4.88)$$

Физически интересной величиной является излучаемая мощность, которая пропорциональна мнимой части интеграла $\oint \bar{\psi} N dS$, как указано в формулах (3.3.15) и (11.2.27). Однако для действительных N она пропорциональна также $\oint \psi N dS$. Действительной части $\oint \bar{\psi} N dS$ также можно дать интерпретацию, так как дробь $\psi/(\partial\psi/\partial n)$ пропорциональна акустическому импедансу. Следовательно, действительная часть выражения

$$\oint N \psi dS = \oint N^2 \frac{\psi}{\partial\psi/\partial n} dS$$

пропорциональна «реактивной» мощности, т. е. мощности, которая не покидает излучающую систему, навсегда уходя в бесконечность, а возвращается к излучателю, влияя тем самым на характер излучения.

Варьируемая величина J , которая должна быть стационарной, может быть найдена по общему методу для рассматриваемых неоднородных интегральных уравнений, как это показано в начале этого параграфа. Из уравнения (9.4.8) мы имеем

$$[J] = \frac{\left[\oint \psi \varphi dS \right]^2}{\frac{1}{4\pi} \oint \oint \psi(S) \frac{\partial^2 G_h}{\partial n \partial n_0} \psi(S_0) dS dS_0}. \quad (9.4.89)$$

Вариационный принцип состоит в том, что $\delta[J] = 0$. Теперь мы исследуем величину J для точного ψ . Из уравнений (9.4.87) и (9.4.88) имеем

$$J = \oint \psi \varphi dS; \quad J = \oint \psi (N^{(0)} - N) dS. \quad (9.4.90)$$

Мы можем преобразовать это выражение дальше, используя определение $N^{(0)}$:

$$\oint \psi N^{(0)} dS = \frac{1}{4\pi} \oint \oint \psi(S) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) N(S_0) dS_0 dS.$$

Применяя уравнение (9.4.86), имеем

$$\oint \psi N^{(0)} dS = \frac{1}{4\pi} \oint \oint N(S) \frac{e^{ikR}}{R} N(S_0) dS dS_0 - \oint \psi N dS.$$

Следовательно,

$$J = \frac{1}{4\pi} \oint \oint N(S) \frac{e^{ikR}}{R} N(S_0) dS dS_0 - 2 \oint \psi N dS. \quad (9.4.91)$$

Поэтому мы можем заключить, что формула (9.4.89) является основой вариационного принципа для $\oint \psi N dS$. Этот результат побуждает нас

ввести подлежащую варьированию величину $[K]$, такую, что $K = \oint \psi N dS$:

$$[K] = -\frac{1}{2} \frac{\left[\oint \psi \varphi dS \right]^2}{\frac{1}{4\pi} \oint \oint \psi(S) \frac{\partial^2 G_R}{\partial n \partial n_0} \psi(S_0) dS dS_0} + \quad (9.4.92)$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \oint \oint N(S) \frac{e^{ikR}}{R} N(S_0) dS dS_0,$$

где $\phi[K] = 0$.

Вариационно-итерационный метод. Вариационные методы, описанные выше, не дают простого способа оценки точности получающихся результатов. Вообще, при их применении просто увеличивают гибкость волновой функции сравнения, вводя дополнительные вариационные параметры и наблюдая сходимость интересующей нас величины с изменением числа этих параметров. В принципе такой метод должен привлекать бесконечное число параметров, так как уверенность в ответе есть только тогда, когда используется вся полная система функций в качестве волновых функций сравнения в вариационных интегралах. Вариационно-итерационная техника, которую мы рассматривали в § 9.1 (стр. 29—34), не только обеспечивает оценку ошибки, давая как верхнюю, так и нижнюю грань варьируемой величины, но дает также и способ систематического улучшения волновых функций сравнения. Так как мы уже рассматривали эту технику, то здесь мы остановимся лишь на ее существенных особенностях и дадим доказательства некоторых теорем, которые были отложены, пока мы разбирали вариационные задачи.

Мы будем снова употреблять для описания результатов формальный операторный язык, ограничившись сначала положительно определенными самосопряженными операторами. Пусть

$$\mathcal{L}\psi = \lambda \mathcal{M}\psi. \quad (9.4.93)$$

Итерационный процесс состоит в следующем. Пусть φ_0 — исходная волновая функция сравнения. Ее можно получить одним из тех вариационных методов, которые были описаны в этом параграфе. Первой итерацией φ_1 будет

$$\varphi_1 = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \varphi_0,$$

и вообще n -я итерация выражается через $(n-1)$ -ю по формуле

$$\varphi_n = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \varphi_{n-1}. \quad (9.4.93')$$

Мы предполагаем при этом, что $\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}$ — интегральный оператор, поскольку процесс интегрирования, зависящий от многих значений φ_{n-1} , вообще говоря, действует в сторону улучшения волновой функции, так что φ_n меньше отличается от ψ , чем φ_{n-1} . В более общих терминах, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ должны быть такими, чтобы возможные значения λ были ограничены снизу и простирались до $+\infty$. Если бы мы были так неуклюжи в своих построениях, что появилось бы $1/\lambda$ вместо λ , то спектр должен был бы располагаться от нуля до некоторого максимального значения, и сходимость итерационного процесса была бы соответственно слабее.

Качественную картину итерационного процесса можно получить следующим образом. Пусть собственными функциями уравнения (9.4.93) будут χ_n и соответствующими собственными значениями будут λ_n :

$$\mathcal{L}\chi_n = \lambda_n \mathcal{M}\chi_n, \quad \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Эти функции образуют полную ортогональную систему, по которой мы можем разложить φ_0 :

$$\varphi_0 = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \chi_p.$$

Мы немедленно находим, что

$$\varphi_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{\lambda_p^n} \chi_p.$$

Теперь можно видеть, что последовательность φ_n сходится к χ_0 , если λ_0 меньше чем λ_1 . Сходимость тем лучше, чем больше отношение λ_1/λ_0 . Если имеет место вырождение, т. е. $\lambda_0 = \lambda_1$, то тогда φ_n сходятся к линейной комбинации χ_0 и χ_1 .

Различные итерации можно подставлять в два вариационных выражения для λ , данные в (9.4.8) и (9.4.13). При этом получают следующие приближения для λ_0 , если в качестве функции сравнения используется φ_n :

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{\int \varphi_n \mathcal{L} \varphi_n dV}{\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_n dV} = \frac{\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_{n-1} dV}{\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_n dV}, \quad (9.4.94)$$

$$\lambda^{(n+1/2)} = \frac{\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_n dV}{\int \varphi_n \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \varphi_n dV} = \frac{\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_n dV}{\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_{n+1} dV}. \quad (9.4.95)$$

Причины особого выбора верхнего индекса для λ_0 в (9.4.95) вскоре станут ясны.

Ввиду формы выражений (9.4.94) и (9.4.95) удобно ввести символ $[n, m]$:

$$[n, m] = \int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_m dV. \quad (9.4.96)$$

Величины $\lambda_0^{(n)}$ и $\lambda_0^{(n+1/2)}$ можно выразить через эти матричные элементы:

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{[n, n-1]}{[n, n]}; \quad \lambda_0^{(n+1/2)} = \frac{[n, n]}{[n, n+1]}. \quad (9.4.97)$$

Отметим, между прочим, что

$$[n, m] = [m, n] = [n-s, m+s], \quad (9.4.98)$$

где s целое.

Мы можем теперь показать, что $\lambda_0^{(a)}$, включая как целые, так и полуцелые значения a , образуют монотонную последовательность уменьшающихся величин, приближающихся к точному собственному значению λ_0 сверху, т. е.

$$\lambda_0^{(n)} \geq \lambda_0^{(n+1/2)} \geq \lambda_0^{(n+1)} \geq \dots \geq \lambda_0, \quad (9.4.99)$$

$$\left. \begin{matrix} \lambda_0^{(n)} \\ \lambda_0^{(n+1/2)} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0, \text{ если } \int \chi_0 \mathcal{M} \varphi_0 dV \neq 0. \quad (9.4.100)$$

Условие в (9.4.100) включено для того, чтобы обеспечить наличие составляющей по χ_0 в первоначальной функции сравнения. Если этого нет, то последовательность $\lambda_0^{(n)}$ будет сходиться к λ_1 — второму собственному значению уравнения (9.4.93). Неравенства (9.4.99) следуют из неравенства Шварца (1.6.31), которое можно получить из положительной опре-

деленности $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$. Мы имеем

$$\left(\int \psi \mathcal{M} \chi dV \right)^2 \leq \left(\int \psi \mathcal{M} \psi dV \right) \left(\int \chi \mathcal{M} \chi dV \right)$$

и аналогичное неравенство, если здесь заменить $\mathcal{M}$ на $\mathcal{L}$. Функции ψ и χ произвольны. Если мы возьмем φ_n за ψ и φ_{n-1} за χ , то неравенство Шварца ввиду положительной определенности $\mathcal{M}$ приводит к неравенству

$$\lambda_0^{(n-1/2)} \geq \lambda_0^{(n)}. \quad (9.4.101)$$

Аналогично, на основании положительной определенности $\mathcal{L}$ неравенство Шварца дает

$$\lambda_0^{(n-1)} \geq \lambda_0^{(n-1/2)}.$$

Комбинация этих двух неравенств немедленно приводит к (9.4.99).

Соотношение (9.4.100) мы докажем *от противного*. Отметим, что это доказательство не вытекает непосредственно из вариационного принципа, пока не доказана полнота системы φ_n . Итак, предположим, что последовательность $\lambda_0^{(a)}$ ограничена снизу величиной ν , не равной λ_0 и (на основании вариационного принципа) большей, чем λ_0 . Покажем теперь, что это предположение противоречит поставленному требованию, чтобы

$$\int \chi_0 \mathcal{M} \varphi_0 dV \neq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0)^n \varphi_{n+1}. \quad (9.4.101')$$

Этот ряд сходится в среднем, если $\nu > \lambda_0$. Это следует из ограниченности $\int f \mathcal{M} f dV$:

$$\begin{aligned} \left[\int f \mathcal{M} f dV \right]^{1/2} &= \left[\int \left(\sum_n (\lambda_0)^n \varphi_{n+1} \right) \mathcal{M} \left(\sum_p (\lambda_0)^p \varphi_{p+1} \right) dV \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_n (\lambda_0)^n [n+1, n+1]^{1/2}. \end{aligned}$$

Это неравенство является частным случаем неравенства Бесселя (1.6.32). Согласно критерию сходимости Даламбера, этот последний ряд сходится, если

$$\frac{(\lambda_0)^{n+1} [n+2, n+2]^{1/2}}{(\lambda_0)^n [n+1, n+1]^{1/2}} < 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

или

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda_0^{(n+3/2)} \lambda_0^{(n+2)}} < 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Ввиду нашей гипотезы это условие имеет место, так как $\lambda_0^{(n+3/2)}$ и $\lambda_0^{(n+2)}$ оба больше числа ν , которое в свою очередь больше λ_0 . Следовательно, ряд (9.4.101') сходится в среднем.

Ввиду сходимости ряда можно теперь вычислить

$$(\mathcal{L} - \lambda_0 \mathcal{M}) f = \mathcal{M} \varphi_0$$

при помощи перегрушировки членов ряда. Мы видим, что

$$\int \chi_0 \mathcal{M} \varphi_0 dV = \int \chi_0 (\mathcal{L} - \lambda_0 \mathcal{M}) f dV = 0,$$

что противоречит условию в (9.4.100). Следовательно, предположение, что χ отличается от λ_0 , неверно, поэтому $\lambda_0^{(a)}$ приближается к λ_0 сверху и имеет λ_0 своим пределом; это указывает на то, что в принципе (т. е. если можно осуществить все интегрирования и если взять достаточно итераций) вариационно-итерационный метод даст достаточно точный ответ.

Нашей ближайшей задачей будет оценка скорости сходимости и определение нижней границы для λ_0 , которая совместно с верхними границами, даваемыми членами последовательности $\lambda_0^{(a)}$, указывает ошибку в методе, так как λ_0 должно лежать между верхней и нижней границами. Нам уже известно, что сходимость улучшается при уменьшении отношения λ_0/λ_1 . Более точная количественная оценка будет следовать из рассмотрения неравенства

$$\int [\varphi (1 - \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\lambda_1) \mathcal{M} (1 - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}\lambda_0) \varphi] dV \geq 0, \quad (9.4.102)$$

где φ произвольно. Это неравенство, как мы сейчас покажем, является следствием вариационного принципа. Заметим, что оператор

$$1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}$$

положительно определен, так как неравенство

$$\int \varphi \mathcal{M} (1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}) \varphi dV \geq 0$$

вытекает из вариационного принципа для λ_0 ,

$$\lambda_0 \leq \int \varphi \mathcal{M} \varphi dV / \int \varphi \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \varphi dV.$$

Мы можем поэтому ввести несингулярный оператор, равный квадратному корню из $(1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M})$. Отметим, кроме того, что функция $\sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}} \varphi$ ортогональна к функции χ_0 и годится поэтому в качестве функции сравнения в вариационном принципе для λ_1 . Следовательно,

$$\lambda_1 \leq \frac{\int (\sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}} \varphi) \mathcal{M} (\sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}} \varphi) dV}{\int (\sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}} \varphi) \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} (\sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}} \varphi) dV}.$$

Мы можем существенно упростить как числитель, так и знаменатель этого отношения. Проиллюстрируем это на числителе, который ввиду самосопряженности $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ можно записать в виде

$$\int \varphi [\sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1}} \mathcal{M} \sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}}] \varphi dV.$$

Кроме того,

$$\sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1}} \mathcal{M} = \mathcal{M} \sqrt{1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}}. \quad (9.4.103)$$

Это легко показать, если обе части равенства разложить в степенной ряд; например, общий член разложения в степенной ряд левой части можно записать так:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M} \mathcal{L}^{-1})^n \mathcal{M} &= \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \dots \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} = \\ &= \mathcal{M} (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \dots) = \mathcal{M} (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M})^n. \end{aligned}$$

Подстановка (9.4.103) в числитель дает

$$\int \varphi \mathcal{M} (1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}) \varphi dV,$$

и тогда неравенство для λ_1 принимает вид

$$\lambda_1 \leq \frac{\int \varphi \mathcal{M} (1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}) \varphi dV}{\int \varphi \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} (1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}) \varphi dV};$$

последнее неравенство совпадает с (9.4.102).

Несколько более простое и соблазнительное доказательство, содержащее, однако, бесконечный процесс, получается, если подставить вместо φ его разложение по членам полной ортогональной системы χ_m , которую мы в соответствии с нашими целями пронормируем следующим образом:

$$\int \chi_n \mathcal{M} \chi_m dV = \delta_{nm}.$$

Если

$$\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} C_p \chi_p,$$

то

$$\int [\varphi (1 - \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \lambda_1) \mathcal{M} (1 - \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \lambda_0) \varphi] dV = \sum C_p^2 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_p}\right) \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_p}\right),$$

что, очевидно, больше нуля.

Если мы подставим теперь в неравенство (9.4.102) φ_n вместо φ и используем определение (9.4.96), мы найдем, что

$$[n, n] - (\lambda_1 + \lambda_0) [n+1, n] + \lambda_0 \lambda_1 [n+1, n+1] \geq 0,$$

или, разделив на $[n+1, n+1]$, что

$$\lambda_0^{(n+1/2)} \lambda_0^{(n+1)} - (\lambda_1 + \lambda_0) \lambda_0^{(n+1)} + \lambda_0 \lambda_1 \geq 0. \quad (9.4.104)$$

Такое же неравенство, только с увеличенными на 1/2 всеми верхними индексами, следует из неравенства

$$\int [\varphi (1 - \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \lambda_1) \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} (1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}) \varphi] dV \geq 0. \quad (9.4.105)$$

В этом можно убедиться почти таким же путем, как в случае неравенства (9.4.102). Например, выражение для интеграла через коэффициенты разложения φ по χ_p будет таким:

$$\sum_p \frac{C_p^2}{\lambda_p} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_p}\right) \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_p}\right) \geq 0.$$

Мы используем неравенство (9.4.104) сначала для получения оценки скорости сходимости, так как члены в неравенстве можно сгруппировать следующим образом:

$$\lambda_0^{(n+1)} [\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0] - \lambda_1 [\lambda_0^{(n+1)} - \lambda_0] \geq 0,$$

или

$$\frac{\lambda_0^{(n+1)} - \lambda_0}{\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0} \leq \frac{\lambda_0^{(n+1)}}{\lambda_1} \simeq \frac{\lambda_0}{\lambda_1}. \quad (9.4.106)$$

Это неравенство прямо показывает, что $\lambda_0^{(n+1)}$ ближе к λ_0 , чем $\lambda_0^{(n+1/2)}$, причем отношение их расстояний до λ_0 меньше величины $\lambda_0^{(n+1)}/\lambda_1$, которая для достаточно больших n близка к λ_0/λ_1 . Поэтому отношение λ_0/λ_1 является верхней гранью скорости сходимости, к которой эта скорость прибли-

жается с увеличением n . Это можно видеть прямо из разложения в ряд φ_n и, наконец, $\lambda_0^{(n)}$. Если λ_1 существенно больше λ_0 , то сходимость очень быстрая. Она плохая в случае, близком к вырождению, когда $\lambda_0 \simeq \lambda_1$. В этом случае для того, чтобы сделать процесс более эффективным, применяется следующая специальная техника (она применима, даже когда $\lambda_0 \ll \lambda_1$, так как дает метод экстраполяции на точное значение).

Экстраполяционный метод. Предположим, что итерации продвинуты так далеко, что φ_n является линейной комбинацией собственных функций χ_0 и χ_1 , так что дальнейшие итерации должны привести просто к постепенному исключению χ_1 . Это, конечно, медленный процесс, если $\lambda_0 \simeq \lambda_1$. Положив тогда

$$\varphi_n = \chi_0 + b\chi_1,$$

мы можем вычислить последовательные итерации

$$\varphi_{n+1} = (\chi_0/\lambda_0) + b(\chi_1/\lambda_1), \quad \varphi_{n+2} = (\chi_0/\lambda_0^2) + b(\chi_1/\lambda_1^2).$$

Из этих волновых функций мы можем получить величины $\lambda_0^{(n+1/2)}$, $\lambda_0^{(n+1)}$ и $\lambda_0^{(n+3/2)}$, которые мы теперь запишем в предположении, что $b^2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(n+1/2)} &\simeq \lambda_0 + b^2\lambda_0[1 - (\lambda_0/\lambda_1)], \\ \lambda_0^{(n+1)} &\simeq \lambda_0 + b^2\lambda_0[1 - (\lambda_0/\lambda_1)](\lambda_0/\lambda_1), \\ \lambda_0^{(n+3/2)} &\simeq \lambda_0 + b^2\lambda_0[1 - (\lambda_0/\lambda_1)](\lambda_0/\lambda_1)^2. \end{aligned}$$

Эти формулы явным образом показывают, что сходимость $\lambda_0^{(a)}$ к λ_0 определяется отношением λ_0/λ_1 . Заметим также, что три написанных выше равенства можно рассматривать как три уравнения с тремя неизвестными λ_0 , $b^2\lambda_0[1 - (\lambda_0/\lambda_1)]$ и λ_0/λ_1 , так что из них можно найти λ_0 . Так как это замечание относится к любой величине, которая является отношением двух билинейных функций от ψ , то мы сможем записать результат этой экстраполяции довольно общим образом.

Пусть $F^{(0)}$, $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — члены последовательности, сходящейся к величине F , которая получается, как и λ_0 , методом итераций. Например, $F^{(0)} = \lambda_0^{(n+1/2)}$, $F^{(1)} = \lambda_0^{(n+1)}$, $F^{(2)} = \lambda_0^{(n+3/2)}$. Следуя сказанному выше и считая, что итерации на стадии $F^{(0)}$ достаточно далеко продвинуты, мы можем предположить, что

$$F^{(0)} = F + f, \quad F^{(1)} = F + \varepsilon f, \quad F^{(2)} = F + \varepsilon^2 f,$$

где f — ошибка на стадии $F^{(0)}$, а ε — параметр, определяющий скорость сходимости. — есть λ_0/λ_1 . Отсюда можно найти F :

$$F = F^{(0)} - \{[F^{(0)} - F^{(1)}]^2/[F^{(0)} - 2F^{(1)} + F^{(2)}]\}. \quad (9.4.107)$$

Если имеются два множества чисел $F^{(n)}$ и $G^{(n)}$, зависящих от ε одинаковым образом, то можно получить ε из одной последовательности и использовать для экстраполяции другой, так что

$$F = F^{(0)} - \{[F^{(0)} - F^{(1)}][G^{(0)} - G^{(1)}]/[G^{(0)} - 2G^{(1)} + G^{(2)}]\} \quad (9.4.108)$$

с

$$\varepsilon = [G^{(2)} - G^{(1)}]/[G^{(1)} - G^{(0)}]. \quad (9.4.109)$$

Как мы увидим дальше на примере, экстраполяционный метод обладает замечательной точностью.

Этот метод можно также использовать для экстраполяции φ_n на χ_0 . Здесь, однако, за $F^{(0)}$, $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ следует принять φ_n , $\lambda_0\varphi_{n+1}$ и $\lambda_0^2\varphi_{n+2}$, где λ_0 можно получить по экстраполяционному методу.

Нижние границы для λ_0 . Неравенство (9.4.104) можно также использовать для получения нижней границы величины λ_0 . Сгруппируем члены следующим образом:

$$\lambda_0 [\lambda_1 - \lambda_0^{(n+1)}] - \lambda_0^{(n+1)} [\lambda_1 - \lambda_0^{(n+1/2)}] \geq 0.$$

Если итерации продвинуты достаточно далеко, так что

$$\lambda_1 > \lambda_0^{(n+1)},$$

то

$$\lambda_0^{(n+1)} \geq \lambda_0 \geq \lambda_0^{(n+1)} \left[1 - \frac{\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0^{(n+1)}}{\lambda_1 - \lambda_0^{(n+1)}} \right]. \quad (9.4.110)$$

Мы снова замечаем, что это неравенство остается в силе, если всюду заменить n на $n + 1/2$. Можно поэтому заключить, что λ_0 лежит между двумя числами, причем точность этого ограничения зависит от близости между ними, т. е. от малости отношения $[\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0^{(n+1)}]/[\lambda_1 - \lambda_0^{(n+1)}]$. Мы еще должны найти путь для оценки λ_1 , но, прежде чем перейти к этому, отметим, что существует много неравенств, аналогичных (9.4.104), и что поэтому можно вывести, кроме (9.4.110), много других оценок снизу для λ_0 . Какая из них дает лучшее приближение, зависит от конкретных обстоятельств, возникающих из частных свойств величин $\lambda_0^{(a)}$. Оценку снизу можно, например, получить из неравенства

$$\int \varphi [1 - \lambda_1^2 (\mathcal{M} \mathcal{L}^{-1})^2] \mathcal{M} [1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}] \varphi dV \geq 0 \quad (9.4.111)$$

Доказательство почти такое же, как для неравенства (9.4.102). Подставляя в (9.4.111) φ_n вместо φ , имеем

$$[n, n] - \lambda_0 [n + 1, n] - \lambda_1^2 [n + 1, n + 1] + \lambda_0 \lambda_1^2 [n + 1, n + 2] \geq 0,$$

или

$$\lambda_0^{(n+1/2)} \lambda_0^{(n+1)} - \lambda_0 \lambda_0^{(n+1)} - \lambda_1^2 + [\lambda_0 \lambda_1^2 / \lambda_0^{(n+3/2)}] \geq 0.$$

Отсюда вытекает оценка снизу, если $\lambda_1^2 > \lambda_0^{(n+1)} \lambda_0^{(n+3/2)}$:

$$\lambda_0 \geq \lambda_0^{(n+3/2)} \left\{ 1 - \frac{\lambda_0^{(n+1)} [\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0^{(n+3/2)}]}{\lambda_1^2 - \lambda_0^{(n+3/2)} \lambda_0^{(n+1)}} \right\}. \quad (9.4.112)$$

Для пользования этой формулой необходимо знать величины трех последовательных приближений λ_0 , в то время как нижняя граница (9.4.110) требует знания только двух приближений.

Обратимся теперь к задаче об оценке λ_1 . Важно заметить, что оцениваемая величина должна быть меньше или равна λ_1 , но больше $\lambda_0^{(n+1)}$. При обычном способе применяется следующее соотношение:

$$\text{Spur} (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M})^2 = \sum_m \int \chi_m \mathcal{M} (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M})^2 \chi_m dV = \sum_m \frac{1}{\lambda_m^2}. \quad (9.4.113)$$

Это соотношение имеет ценность, потому что нередко след можно вычислить непосредственно, как мы увидим на примере, который вскоре рассмотрим (см. также § 12.3). Из формулы (9.4.113) вытекает, что

$$\text{Spur} (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M})^2 - \frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2}.$$

Поэтому

$$\lambda_1^2 > 1/[\text{Spur}(\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})^2 - (1/\lambda_0^2)] > 1/[\text{Spur}(\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})^2 - (1/\lambda_0^{n+1})^2]. \quad (9.4.114)$$

Следовательно, правую часть этого неравенства можно использовать в качестве λ_1 или в соотношении (9.4.110) или в (9.4.112). Мы можем, конечно, употреблять следы более высоких степеней $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, причем сходимость будет лучше, но зато их значительно труднее вычислять. Мы должны использовать след по крайней мере второй степени, потому что след $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ бесконечен и для двух и для трех измерений.

Другие методы получения грубых оценок для λ , (подчеркиваем: *грубых*) используют какие-нибудь особенности задачи. Можно, например, использовать экспериментальные данные. Ниже мы рассмотрим другие аналитические методы получения нижних границ, которые требуют меньше или даже вовсе не требуют данных, касающихся λ_1 .

Первый из них, который мы рассмотрим, начинается с изучения величины

$$[\beta^2] = \int [(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L} - \alpha)\varphi] \mathcal{M} [(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L} - \alpha)\varphi] dV / \int \varphi \mathcal{M} \varphi dV,$$

где α — произвольный параметр. Величина $[\beta^2]$ положительна. Найдем ее минимальное значение для данного α , полагая $\delta[\beta^2] = 0$. Мы находим, что φ , для которого β^2 стационарна, удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L} - \alpha)^2 \varphi = \beta^2 \varphi, \text{ или } (\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L} - \alpha - \beta)(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L} - \alpha + \beta) \varphi = 0.$$

Мы видим, что β^2 равно $(\lambda_n - \alpha)^2$ для тех φ , для которых β^2 стационарна. Для того чтобы наименьшее из этих стационарных значений получалось при $\lambda_n = \lambda_0$, мы требуем, чтобы

$$\lambda_0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1), \quad (9.4.115)$$

и тогда наименьшее значение β^2 будет равно $(\alpha - \lambda_0)^2$. Следовательно, для α , удовлетворяющего неравенствам (9.4.115),

$$(\alpha - \lambda_0)^2 \leq \int [(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L} - \alpha)\varphi] \mathcal{M} [(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L} - \alpha)\varphi] dV / \int \varphi \mathcal{M} \varphi dV.$$

Если мы положим φ равным φ_{n+1} , это неравенство примет вид

$$(\alpha - \lambda_0)^2 \leq \alpha^2 - 2\alpha\lambda_0^{(n+1)} + \lambda_0^{(n+1/2)}\lambda_0^{(n+1)}, \quad (9.4.116)$$

или

$$\lambda_0 \geq \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\lambda_0^{(n+1)} + \lambda_0^{(n+1)}\lambda_0^{(n+1/2)}},$$

или же

$$\lambda_0 \geq \lambda_0^{(n+1)} - \left[\sqrt{(\alpha - \lambda_0^{(n+1)})^2 + \lambda_0^{(n+1)}(\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0^{(n+1)})} - (\alpha - \lambda_0^{(n+1)}) \right]. \quad (9.4.117)$$

Неравенство (9.4.116) и нижняя граница (9.4.117) являются обобщениями неравенств (9.4.104) и (9.4.110), в чем можно убедиться, подставив $\alpha = (\lambda_0 + \lambda_1)/2$ в (9.4.116). Кроме того, так как нижняя граница (9.4.117) является монотонно возрастающей функцией от α , то наилучшая оценка нижней границы получается при значении $\alpha = (\lambda_0 + \lambda_1)/2$, которое в соответствии с (9.4.115) является для α максимальным значением. Следовательно, нижняя граница (9.4.110) является наилучшей нижней границей.

которую можно получить с помощью только что проведенного анализа. Его основное значение состоит в отсутствии явной зависимости от λ_1 . Нам необходимо только грубо знать положение λ_1 , чтобы быть уверенными, что выполняется неравенство (9.4.115).

Прежде чем перейти к следующему виду нижней границы, который довольно сильно отличается по своей природе от рассмотренного выше, следует указать на другую трудность при использовании нижних границ, данных выше в неравенствах (9.4.110) и (9.4.117). Она состоит в необходимости вычислять $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}\varphi_n$. Не всегда легко получить оператор, обратный к $\mathcal{L}$, и поэтому важно показать, что нет необходимости делать это, если только не требуется получить более точную оценку для λ_0 .

Однако имеется возможность заменить задачу отыскания $\mathcal{L}^{-1}$ на задачу отыскания $\mathcal{M}^{-1}$. Эта последняя часто значительно проще, так как $\mathcal{M}$ часто бывает константой или функцией координат, а не дифференциальным оператором. Процедура состоит в следующем. Предположим, что мы нашли (вариационным или другим методом) оценку для χ_0 . Назовем эту оценку φ_{n+1} . Как вытекает из (9.4.93'), φ_{n+1} и φ_n связаны следующим соотношением:

$$\mathcal{L}\varphi_{n+1} = \mathcal{M}\varphi_n.$$

Теперь можно выразить $\lambda_0^{(n+1/2)}$ и $\lambda_0^{(n+1)}$ через φ_{n+1} и операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, избегав появления $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\lambda_0^{(n+1/2)} = \frac{[n, n]}{[n, n+1]} = \frac{\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_n dV}{\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_{n+1} dV} = \frac{\int \varphi_{n+1} \mathcal{L} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{L} \varphi_{n+1} dV}{\int \varphi_{n+1} \mathcal{L} \varphi_{n+1} dV}, \quad (9.4.118)$$

$$\lambda_0^{(n+1)} = \frac{[n+1, n]}{[n+1, n+1]} = \frac{\int \varphi_{n+1} \mathcal{L} \varphi_{n+1} dV}{\int \varphi_{n+1} \mathcal{M} \varphi_{n+1} dV}. \quad (9.4.119)$$

В этих выражениях, как было указано, появляется только известная функция φ_{n+1} . Частная форма нижней границы, указанная в (9.4.117), вместе с равенствами (9.4.118) и (9.4.119) может быть использована для получения нижней границы энергии атома гелия в основном состоянии.

Метод сравнения для нижних границ. Несколько иной метод получения нижних границ основывается на теоремах сравнения, вполне аналогичных теоремам, употребляемым в штурмовской теории дифференциальных уравнений (см. § 6.3). Физический смысл этого метода очень простой. Пусть нужно решить уравнение Шредингера с потенциалом $-U(x)$. Мы будем сравнивать собственные значения этой задачи с собственными значениями, которые можно вычислить точно и для которых потенциал $-U'(x)$ всюду больше U , как показано на рис. 9.20, где мы изобразили два возможных потенциала сравнения $U'_1(x)$ и $U'_2(x)$. Из физических соображений ясно, что энергия основного состояния как для U'_1 , так и для U'_2 будет ниже, чем для $U(x)$, и является поэтому нижней границей для последнего случая.

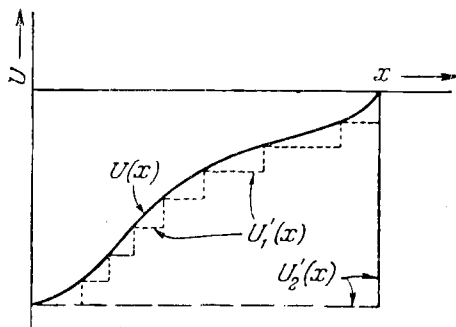


Рис. 9.20. Потенциальная функция $U(x)$ и сравниваемые с ней функции U'_1 и U'_2 , удовлетворяющие условию $U'_2 \leq U'_1 \leq U(x)$ для всех x .

Сформулируем теперь этот принцип сравнения в более точной форме. Пусть

$$\mathcal{L}\chi = \lambda_0 \mathcal{M}\chi \text{ и } \mathcal{L}\varphi = \lambda' \mathcal{M}'\varphi,$$

где

$$\int \varphi \mathcal{M}' \psi dV \geq \int \varphi \mathcal{M} \psi dV \quad (9.4.120)$$

для любого ψ . Мы хотим получить нижнюю границу для λ_0 , первого собственного значения «нестрихованной» задачи, с собственной функцией χ_0 . Из вариационного принципа для λ'_0 имеем

$$\lambda'_0 \leq \int \chi_0 \mathcal{L} \chi_0 dV / \int \chi_0 \mathcal{M}' \chi_0 dV,$$

или

$$\lambda'_0 \leq \lambda_0 \int \chi_0 \mathcal{M} \chi_0 dV / \int \chi_0 \mathcal{M}' \chi_0 dV.$$

Из неравенства (9.4.120)

$$\lambda_0 \geq \lambda'_0. \quad (9.4.121)$$

Общая пригодность этого метода получения нижних границ зависит от возможности точно сформулировать разрешимую задачу, удовлетворяющую неравенству (9.4.120). Чем ближе задача сравнения к исходной задаче, тем ближе значение нижней границы к λ_0 . На рис. 9.20 мы показали два возможных потенциала сравнения для одномерного уравнения Шредингера. Аналогичные возможности имеются и в трехмерных задачах. Для уравнения Шредингера в задаче о многих частицах можно получить задачи сравнения, отбросив взаимодействие между частицами, если они отталкиваются, или заменив его осцилляторным потенциалом, если они притягиваются. Применяя такой способ, можно также получить следующие грубые границы для λ_0 :

$$\min (\mathcal{M} \varphi_{n-1} / \mathcal{M} \varphi_n) < \lambda_0 < \max (\mathcal{M} \varphi_{n-1} / \mathcal{M} \varphi_n), \quad (9.4.122)$$

где под $\min$ и $\max$ мы понимаем наименьшее и наибольшее значения отношения этих функций.

Обозначим минимальное значение отношения $\mathcal{L} \varphi_n / \mathcal{M} \varphi_n$ через $\underline{\lambda}$, а максимальное через $\bar{\lambda}$. Тогда φ_n должно удовлетворять вариационному принципу $\delta[\underline{\lambda}] = 0$ и $\delta[\bar{\lambda}] = 0$, где

$$[\underline{\lambda}] = \int \varphi \mathcal{L} \varphi dV / \int \varphi f \mathcal{M} \varphi dV, \quad [\bar{\lambda}] = \int \varphi \mathcal{L} \varphi dV / \int \varphi g \mathcal{M} \varphi dV$$

и предполагается, что f и g — положительные функции, которые везде обязательно больше и соответственно меньше единицы. Они соответственно равны $\mathcal{L} \varphi_n / \lambda \mathcal{M} \varphi_n$ и $\mathcal{L} \varphi_n / \bar{\lambda} \mathcal{M} \varphi_n$.

Так как f больше единицы, то если χ_0 использовать в качестве пробной волновой функции, немедленно получается, что

$$\underline{\lambda} \leq \int \chi_0 \mathcal{L} \chi_0 dV / \int \chi_0 f \mathcal{M} \chi_0 dV \leq \int \chi_0 \mathcal{L} \chi_0 dV / \int \chi_0 \mathcal{M} \chi_0 dV = \lambda_0.$$

Это доказывает теорему, так как $\mathcal{L} \varphi_n / \mathcal{M} \varphi_n$ равно как раз $\mathcal{M} \varphi_{n-1} / \mathcal{M} \varphi_n$.

Вторая часть неравенства (9.4.122), относящаяся к $\bar{\lambda}$, может быть доказана на основании вариационного принципа для λ_0 :

$$\lambda_0 \leq \int \varphi_n \mathcal{L} \varphi_n dV / \int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_n dV \leq \int \varphi_n \mathcal{L} \varphi_n dV / \int \varphi_n g \mathcal{M} \varphi_n dV = \bar{\lambda}.$$

Заметим, что эта теорема, как доказано, имеет место только, когда $\mathcal{M}\varphi_{n-1}/\mathcal{M}\varphi_n$ является положительной функцией. Это почти всегда случай колебаний наинизшего тона, которые вообще не имеют узлов.

Аналогичный вид нижней границы собственного значения можно получить для задач, содержащих возмущение границ. Например, можно ожидать, что резонансная частота для круглой области, изображенной на рис. 9.21, будет больше, чем соответствующая частота для описанной области. Это замечание можно уточнить для условий Дирихле, используя вариационный принцип (9.4.70). Пусть собственным значением, которое соответствует вписанной области, будет k^2 , а соответствующей волновой функцией ψ . Собственным значением для описанной области пусть будет $(k')^2$. Тогда в вариационный принцип для $(k')^2$ мы подставим в качестве пробной функции функцию ψ , полагая ее равной нулю в области между двумя границами. Теперь из равенства (9.4.70) немедленно следует, что

$$(k')^2 \leq \int (\nabla \psi)^2 dV / \int \psi^2 dV = k^2,$$

или

$$k^2 \geq (k')^2. \quad (9.4.123)$$

Можно было бы добавить, что так как само k^2 должно быть меньше, чем соответствующая величина для области, содержащейся внутри первоначальной границы, то для области, имеющей объем (площадь), одинаковый с объемом исходной области, k^2 будет довольно близким к точному значению. Например, если граничная окружность имеет радиус a , то длина стороны равновеликого квадрата будет равна $a\sqrt{\pi}$. Величина k^2 для состояния с такой же симметрией, как круговая симметрия для круглой области, равна

$$k^2 = 2(\pi/\sqrt{\pi}a)^2, \quad \text{или } (ka)^2 = 2\pi,$$

что является неплохим приближением к точному значению, равному 5,7832.

Пример. Прежде чем продолжать применение вариационно-итерационного метода к задачам другого типа, разберем поясняющий пример. Рассмотрим еще раз колебания круглой мембраны радиуса a , снова касаясь подробно колебаний наинизшего состояния с круговой симметрией. Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx} + \lambda \psi = 0,$$

где $x = kr$ и $\lambda = (ka)^2$. Положительно определенными операторами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ являются операторы

$$\mathcal{L} = -\left(x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\right) \quad \text{и} \quad \mathcal{M} = x,$$

а оператор $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ равен

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi} \int G_R(x|x_0) x_0,$$

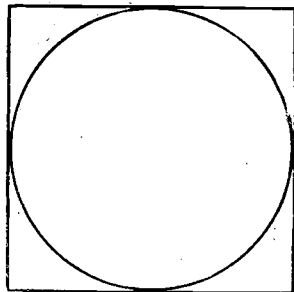


Рис. 9.21. Сравнение резонансных частот для двух различных границ.

как это можно видеть из интегрального уравнения (9.4.46). Функция Грина написана после уравнения (9.4.47). Мы полагаем $\varphi_0 = 1 - x^2$ и итерируем, получая

$$\varphi_0 = 1 - x^2,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{16} (3 - 4x^2 + x^4),$$

$$\varphi_2 = [1/(16 \cdot 576)] (19 - 27x^2 + 9x^4 - x^6).$$

Элементы $[n, m]$ можно теперь быстро подсчитать и получить следующие значения $\lambda_0^{(a)}$:

$$\lambda_0^{(0)} = 6; \quad \lambda_0^{(1/2)} = 5,818182; \quad \lambda_0^{(1)} = 5,789474; \quad \lambda_0^{(3/2)} = 5,784355. \quad (9.4.124)$$

Сравнивая их с точным значением 5,783186, мы видим, что $\lambda_0^{(3/2)}$ имеет ошибку всего около 1/5000. Конечно, на практике мы при оценке ошибки должны полагаться на нижнюю границу (9.4.110). Нам нужна для этого нижняя граница для λ_1 , которую можно получить из формулы (9.1.114). След $(\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})^2$ выражается интегралом

$$\text{Spur}(\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})^2 = \int_0^1 \int_0^1 G_k(x_0|x) x G_k(x|x_0) x_0 dx_0 dx = \frac{1}{32}.$$

Следовательно, λ_1 больше 27,2126. В действительности λ_1 равно 30,4713. Подставляя эту нижнюю границу для λ_1 в нижнюю границу (9.4.110), мы получаем

$$5,782972 < \lambda_0 < 5,784355.$$

Мы можем улучшить этот результат, используя экстраполяционный метод согласно формуле (9.4.107). Это дает величину 5,783244, которая имеет относительную ошибку всего в одну сотысячную.

Другие примеры на вариационно-итерационный метод будут приведены в гл. 12.

Не положительно определенный оператор $\mathcal{L}$. Мы сохраним предположение, что $\mathcal{M}$ — положительно определенный оператор, а $\mathcal{L}$ — самосопряженный. Задачи такого типа возникают при применении вариационно-итерационного метода к определению сдвига фазы при рассеянии. Как можно видеть из соотношения (9.3.35), ядра интегрального уравнения содержат синусоидальные функции, которые принимают как положительные, так и отрицательные значения. В некоторых задачах, например в задаче об энергии связи дейтрона с включением тензорных сил, $\mathcal{L}$ является положительно определенным оператором, а $\mathcal{M}$ — нет. Результаты в этом случае вполне аналогичны результатам, изложенным здесь.

При упомянутых выше предположениях собственные значения λ_n действительны, но могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, т. е. спектр собственных значений не ограничен теперь в обоих направлениях. Расположим собственные значения в порядке возрастания их абсолютных величин: $\lambda_0, \lambda_1, \dots$. Кроме того, выберем знак у $\mathcal{L}$ так, чтобы λ_0 было положительно. Итерационную процедуру (9.4.93') и определения $\lambda_0^{(n)}$ и $\lambda_0^{(n+1/2)}$ выражениями (9.4.97) можно построить, как прежде. Однако теперь необходимо пересмотреть теоремы, относящиеся к последовательности $\lambda_0^{(a)}$, выраженные в соотношениях (9.4.99), (9.4.100) и следующих.

Некоторые сведения можно получить, преобразуя исходную задачу (9.4.93) на собственные значения таким образом, чтобы получить задачу,

в которой все операторы положительно определены. Простейшей из таких задач является задача

$$[\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L}]\psi = \lambda^2 \mathcal{M}\psi. \quad (9.4.124')$$

Теперь можно применять *целиком* все предыдущие теоремы для положительно определенного случая. Последовательными приближениями к χ_0 , начиная с φ_0 , являются $\varphi_0, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}$. Следовательно, величины, соответствующие $\lambda_0^{(n)}$ и $\lambda_0^{(n+1/2)}$ и полученные подстановкой φ_{2n} в вариационные принципы для λ_0 , соответствующие (9.4.94) и (9.4.95), имеют вид

$$\lambda_0^{(n)} \rightarrow \lambda_0^{(2n-1/2)} \lambda_0^{(2n)}, \quad \lambda_0^{(n+1/2)} \rightarrow \lambda_0^{(2n+1/2)} \lambda_0^{(2n+1)}.$$

Их можно теперь подставить в соотношения (9.4.99) и (9.4.100), что дает

$$[\lambda_0^{(2n-1/2)} \lambda_0^{(2n)}] \geq [\lambda_0^{(2n+1/2)} \lambda_0^{(2n+1)}] \geq [\lambda_0^{(2n+3/2)} \lambda_0^{(2n+2)}] \geq \dots \geq \lambda_0^2, \quad (9.4.125)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0^{(2n-1/2)} \lambda_0^{(2n)} \\ \lambda_0^{(2n+1/2)} \lambda_0^{(2n+1)} \end{array} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0^2, \text{ если } \int \chi_0 \mathcal{M} \varphi_0 dV \neq 0.$$

Теперь можно установить аналог неравенства (9.4.104), откуда получаются критерий сходимости и нижняя граница. Сходимость регулируется величиной $(\lambda_0/\lambda_1)^2$ следующим образом:

$$\frac{\lambda_0^{(2n+3/2)} \lambda_0^{(2n+2)} - \lambda_0^2}{\lambda_0^{(2n+1/2)} \lambda_0^{(2n+1)} - \lambda_0^2} \leq \frac{\lambda_0^{(2n+3/2)} \lambda_0^{(2n+2)}}{\lambda_1^2} \simeq \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2,$$

а нижняя граница (9.4.110) приобретает вид

$$\lambda_0^2 \geq \lambda_0^{(2n+3/2)} \lambda_0^{(2n+2)} \left[1 - \frac{\lambda_0^{(2n+1/2)} \lambda_0^{(2n+1)} - \lambda_0^{(2n+3/2)} \lambda_0^{(2n+2)}}{\lambda_1^2 - \lambda_0^{(2n+3/2)} \lambda_0^{(2n+2)}} \right].$$

Важно отметить, что сходимость зависит от абсолютной величины отношения λ_0/λ_1 . Таким образом, если существуют два собственных значения, которые равны по величине, но противоположны по знаку, то сходимости не будет, потому что итерированная задача (9.4.124') имеет вырождение.

Ясно, что указанные выше соотношения не дают нам исчерпывающих сведений. Это легче всего увидеть, если соотношения (9.4.125) выразить непосредственно через $\lambda_0^{(a)}$ (используя $\varphi_1, \varphi_3, \dots$ наряду с $\varphi_0, \varphi_2, \dots$):

$$\lambda_0^{(n-1/2)} \lambda_0^{(n)} \geq \lambda_0^{(n+1/2)} \lambda_0^{(n+1)} \geq \dots \geq \lambda_0^2, \quad (9.4.126)$$

$$\lambda_0^{(n-1/2)} \lambda_0^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0^2, \text{ если } \int \chi_0 \mathcal{M} \varphi_0 dV \neq 0.$$

Поведение индивидуального $\lambda_0^{(a)}$, или, что равносильно, произведения $\lambda_0^{(n)} \lambda_0^{(n+1/2)}$ не установлено. Поэтому мы обратимся к свойствам индивидуальных значений $\lambda_0^{(a)}$.

Так как оператор $\mathcal{M}$ является положительно определенным, то неравенство (9.4.101) все еще имеет силу:

$$\lambda_0^{(n-1/2)} \geq \lambda_0^{(n)}.$$

Комбинируя его с соотношением (9.4.126), мы получаем

$$\lambda_0^{(n-1/2)} \geq \lambda_0. \quad (9.4.127)$$

Покажем теперь, что последовательность $\lambda_0^{(n-1/2)}$ монотонно приближается к λ_0 сверху, если процесс итерации продолжить достаточно далеко, так что

$$\lambda_1^2 > \lambda_0^{(n+1)} \lambda_0^{(n+3/2)}.$$

Когда оба оператора были положительны, обе последовательности монотонно приближались к λ_0 сверху. В настоящем случае это верно только для одной последовательности. Доказательство основано на неравенстве (9.4.114), которое справедливо независимо от положительной определенности $\mathcal{L}$. Оно приводит к неравенству

$$\lambda_0^{(n+1/2)} \lambda_0^{(n+1)} - \lambda_0 \lambda_0^{(n+1)} - \lambda_1^2 + (\lambda_0 \lambda_1^2 / \lambda_0^{(n+3/2)}) \geq 0.$$

Перегруппировывая члены и используя наше предположение относительно λ_1^2 , мы получаем

$$[\lambda_0^{(n+3/2)} - \lambda_0] / [\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0] \leq \lambda_0^{(n+1)} \lambda_0^{(n+3/2)} / \lambda_1^2 < 1. \quad (9.4.128)$$

Для того чтобы это неравенство было верным, необходимо, чтобы

$$\lambda_0^{(n+1/2)} > \lambda_0^{(n+3/2)}, \quad (9.4.129)$$

что и доказывает монотонность последовательности $\lambda_0^{(n+1/2)}$.

Относительно последовательности $\lambda_0^{(n)}$ такого утверждения сделать нельзя. Ее поведение может быть весьма неустойчивым; $\lambda_0^{(n)}$ может быть больше λ_0 для одних значений n и меньше λ_0 для других. Более определенное утверждение можно высказать, если процесс итерации продвинут настолько далеко, что главной частью поправки в φ_n является χ_1 . Тогда, если $\varphi_n = \chi_0 + b\chi_1$,

$$\lambda_0^{(n+1)} \simeq \lambda_0 + b^2 \lambda_0 [1 - (\lambda_0 / \lambda_1)] (\lambda_0 / \lambda_1),$$

$$\lambda_0^{(n+2)} \simeq \lambda_0 + b^2 \lambda_0 [1 - (\lambda_0 / \lambda_1)] (\lambda_0 / \lambda_1)^3.$$

Мы видим, что в пределе (т. е. при $n \rightarrow \infty$) последовательность $\lambda_0^{(n)}$ монотонно приближается к λ_0 снизу или сверху, в зависимости от знака отношения λ_0 / λ_1 . Если λ_0 / λ_1 положительно, $\lambda_0^{(n)}$ приближается к λ_0 сверху, если отрицательно — снизу.

Мы можем теперь перейти к обсуждению сходимости и оценке нижних границ. Скорость сходимости дается формулой (9.4.128) и определяется, как было предсказано, величиной $(\lambda_0 / \lambda_1)^2$. Можно придумать различные нижние границы, подобные (9.4.110). Некоторые из них мы теперь укажем.

Неравенство (9.4.110) остается справедливым, если λ_1 заменить его абсолютной величиной. Это следует из справедливости неравенства

$$\int \varphi (1 - \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} |\lambda_1|) \mathcal{M} (1 - \mathcal{L} \mathcal{M}^{-1} \lambda_0) \varphi dV \geq 0.$$

Это особенно легко увидеть, если подставить общее разложение для φ по функциям χ_p . Отсюда

$$\lambda_0 \geq \lambda_0^{(n+1)} \left[1 - \frac{\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0^{(n+1)}}{|\lambda_1| - \lambda_0^{(n+1)}} \right]. \quad (9.4.130)$$

Неравенство (9.4.111), очевидно, применимо в настоящей задаче, так как в него входит только λ_1^2 и, следовательно, знак λ_1 не важен. Из этого можно сделать тот вывод, что неравенство (9.4.112) сохраняется и для не положительно определенного $\mathcal{L}$.

Индефинитный характер $\mathcal{L}$ приводит как к преимуществам, так и к недостаткам, как указывалось выше. Например, то, что $\lambda_0^{(n)}$ (n целое) может быть меньше λ_0 , позволяет вывести верхнюю границу для λ_0 , которая может оказаться меньше $\lambda_0^{(n+1/2)}$. Мы исходим из неравенства

$$\int \varphi (1 + \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} |\lambda_1|) \mathcal{M} (1 - \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}) \varphi dV \geq 0.$$

Полагая φ равным φ_n , мы получаем верхнюю границу для λ_0 :

$$\lambda_0 \leq \lambda_0^{(n+1)} \left[1 + \frac{\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0^{(n+1)}}{|\lambda_1| + \lambda_0^{(n+1)}} \right]. \quad (9.4.131)$$

Во втором примере мы покажем, что если каким-нибудь способом можно показать, что λ_1 меньше нуля, то неравенство (9.4.130) можно улучшить. Действительно, в этом случае справедливо неравенство

$$\int \varphi (1 - \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} |\lambda_2|) \mathcal{M} (1 - \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \lambda_0) \varphi dV \geq 0. \quad (9.4.132)$$

Если сюда подставить общее разложение φ по функциям χ_p , то получится эквивалентное неравенство

$$\sum a_p^2 \left(1 - \frac{|\lambda_2|}{\lambda_p} \right) \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_p} \right) \geq 0.$$

Это неравенство приводит к следующей нижней границе:

$$\lambda_0 \geq \lambda_0^{(n+1)} \left[1 - \frac{\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0^{(n+1)}}{|\lambda_2| - \lambda_0^{(n+1)}} \right]. \quad (9.4.133)$$

Нужно, конечно, получить нижнюю границу для λ_2 . Ее дает следующая формула, которая является простым обобщением неравенства (9.4.114):

$$\lambda_2^2 > 1 / [\text{Spur} (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M})^2 - (1/\lambda_0^2) - (1/\lambda_1^2)]. \quad (9.4.134)$$

Если подставить сюда верхние границы для λ_0^2 и λ_1^2 , то получится нижняя граница для $|\lambda_2|$. Конечно, может быть также применена несколько более специальная процедура, описанная после (9.4.120).

Эти теоремы до сих пор использованы лишь в немногих задачах. Их, может быть, самым важным применением является приложение к интегральным уравнениям для рассеяния, таким, как (9.4.60), в которых используется как вариационный параметр интенсивность потенциала U , а η_l задано. Однако конкретные случаи еще недостаточно исследованы.

Вариационные методы для высших собственных значений. Описанные до сих пор вариационные методы применимы только для вычисления наименьшего по абсолютной величине собственного значения. Мы обратимся теперь к задаче применения аналогичных методов к другим собственным значениям. Большая часть из развитых ранее методов связана с тем, что волновая функция высшего состояния ортогональна к волновой функции низшего состояния. Если волновая функция для низшего состояния доступна, то используют волновые функции сравнения, которые ортогональны к ней. Это ведет к определению следующего собственного значения λ_1 и соответствующей собственной функции χ_1 . Если желают найти λ_2 , то используют пробные волновые функции, которые ортогональны к χ_0 и χ_1 , и т. д. На практике точная функция χ_0 обычно неизвестна и требование ортогональности к приближенной функции не может полностью исключить χ_0 из функции сравнения. Это приводит к некоторой неизбежной ошибке в определении λ_1 , которую мы теперь рассмотрим.

Для этой цели лучше всего подходит вариационно-итерационный метод. Мы начинаем с исходной пробной функции ψ_0 , ортогональной к χ_0' — приближению, которое мы получили для собственной функции χ_0 низшего состояния. Затем мы итерируем ψ_0 , снова ортогонализируем, опять итерируем и т. д. Если χ_0' разложить по собственным функциям χ_n , то вели-

чины коэффициентов при всех χ_n , кроме χ_0 , будут малы:

$$\chi'_0 = \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \chi_n, \quad \varepsilon_n \ll 1.$$

Приближенное значение λ_0 , получающееся при подстановке этой функции в вариационный принцип, отличается от λ_0 на $\Delta\lambda_0$:

$$\Delta\lambda_0 \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 (\lambda_n - \lambda_0). \quad (9.4.135)$$

Пробная функция, ортогональная к χ'_0 с точностью до первого порядка по ε_n , дается выражением

$$\psi_0 = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \right) \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \varepsilon_n) \chi_n.$$

Если ее проинтерировать, мы получим ψ'_0 :

$$\psi'_0 = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \right) \frac{\chi_0}{\lambda_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \varepsilon_n) \frac{\chi_n}{\lambda_n}.$$

Ортогонализация к χ'_0 дает

$$\psi_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n a_n}{\lambda_n} \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \varepsilon_n) \frac{\chi_n}{\lambda_n}.$$

Ясно, что p -я итерация, ортогональная к χ'_0 , имеет вид

$$\psi_p = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n a_n}{\lambda_n^p} \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \varepsilon_n) \frac{\chi_n}{\lambda_n^p}. \quad (9.4.136)$$

Отметим следующую очень важную особенность: отношение коэффициента при χ_0 к коэффициенту при χ_1 стремится к постоянной, когда число p итераций возрастает, в то время как отношение коэффициентов при других функциях χ_n к коэффициенту при χ_1 стремится к нулю. Подстановка формулы (9.4.136) в вариационный принцип для собственного значения дает

$$\frac{\lambda_0 \left[\sum_n (a_n \varepsilon_n / \lambda_n^p)^2 \right] + \sum_n \left[a_n^2 (1 - \varepsilon_n)^2 / \lambda_n^{2p-1} \right]}{\left[\sum_n (a_n \varepsilon_n / \lambda_n^p)^2 \right] + \sum_n \left[a_n^2 (1 - \varepsilon_n)^2 / \lambda_n^{2p} \right]}.$$

Возьмем теперь предел этого отношения при числе итераций, стремящемся к бесконечности, т. е. когда $p \rightarrow \infty$. Он равен числу λ'_1 , которое отличается от λ_1 :

$$\lambda'_1 = \lambda_1 \{1 - [1 - (\lambda_0 / \lambda_1)] \varepsilon_1^2\}. \quad (9.4.137)$$

Следовательно, существует неизбежная ошибка в определении λ_1 , которая остается, даже если проведено бесконечное число итераций. Окончательное значение λ'_1 меньше λ_1 , причем отклонение пропорционально квадрату составляющей по χ_1 , имеющейся в χ'_0 . Можно выразить верхнюю границу ошибки через $\Delta\lambda_0$, так как из соотношения (9.4.135) вытекает, что

$$\varepsilon_1^2 \leq \Delta\lambda_0 / (\lambda_1 - \lambda_0).$$

Поэтому

$$\lambda'_1 \geq \lambda_1 \{1 - (\Delta\lambda_0/\lambda_1)\}, \quad (9.4.138)$$

так что $\Delta\lambda_0/\lambda_1$ измеряет максимальное значение возможной относительной ошибки; этот результат является главным выводом из нашего рассмотрения. Следовательно, если ошибка в определении λ_0 достаточно мала, то в получении λ_1 при помощи описанного выше процесса итераций и ортогонализации трудностей нет. Сходимость итерационной схемы определяется отношением λ_1/λ_2 . В заключение мы выпишем линейную комбинацию ψ'_n (функции, получающейся итерацией из ψ_n) и χ'_0 , ортогональную к χ'_0 :

$$\psi_{n+1} = \psi'_n - \left(\int \psi'_n \mathcal{M} \chi'_0 dV / \int \chi'_0 \mathcal{M} \chi'_0 dV \right) \chi'_0. \quad (9.4.139)$$

Эту процедуру легко приспособить для вычисления λ_2 и высших собственных значений. Как только λ'_1 (с описанной выше ошибкой) и соответствующая собственная функция χ'_1 определены, мы выбираем функцию сравнения, ортогональную к χ'_0 и χ'_1 , итерируем, ортогонализируем и т. д. Ясно, что по мере перехода к более высоким собственным значениям неизбежные ошибки будут накапливаться. Кроме того, для получения какого-нибудь собственного значения необходимо найти все низшие собственные значения и собственные функции. Мы обратимся поэтому к другому методу; в нем нет этих трудностей, и он приводит к уравнению, из которого можно вычислить любое индивидуальное собственное значение.

Метод минимизированных итераций. Описанные выше итерационные схемы предназначены для выделения одного собственного значения за счет остальных, так что после нескольких итераций функция сравнения составлена главным образом из одной собственной функции и содержит поэтому очень малую информацию о других собственных функциях. Мы разовьем здесь итерационный метод, состоящий в итерационном построении семейства ортогональных функций, каждая из которых содержит довольно полную информацию обо всех или о некоторых собственных функциях. Это семейство образует базис для разложения решения задачи и приводит, как мы увидим, к уравнению в непрерывных дробях для собственных значений.

Мы обозначим функции этого семейства через ψ_n , а первую итерацию функции ψ_n через ψ'_n :

$$\mathcal{L}\psi'_n = \mathcal{M}\psi_n. \quad (9.4.140)$$

Будут использованы следующие сокращенные обозначения для интегралов, включающих $\mathcal{M}$:

$$\{n, m\} = \int \psi_n \mathcal{M} \psi_m dV, \quad (9.4.114)$$

$$\{n', m\} = \int \psi'_n \mathcal{M} \psi_m dV. \quad (9.4.142)$$

Пусть исходной функцией сравнения служит ψ_0 . Функция ψ_1 определяется из условия, что она является линейной комбинацией функций ψ_0 и ψ'_0 , ортогональной к ψ_0 :

$$\psi_1 = \psi'_0 - [\{0', 0\}/\{0, 0\}] \psi_0. \quad (9.4.143)$$

Функция ψ_2 определяется из условия, что она должна быть составленной из ψ'_1 , ψ_1 , ψ_0 и ортогональной к ψ_1 и ψ_0 . Следовательно,

$$\psi_2 = \psi'_1 - [\{1', 1\}/\{1, 1\}] \psi_1 - [\{1', 0\}/\{0, 0\}] \psi_0. \quad (9.4.144)$$

Хотелось бы по аналогии написать подобное выражение для ψ_3 . Однако, как мы покажем, она и все остальные ψ_n содержат только три члена. Например,

$$\psi_3 = \psi'_2 - \{2', 2\}/\{2, 2\} \psi_2 - \{2', 1\}/\{1, 1\} \psi_1. \quad (9.4.145)$$

Член ψ_0 умножается на коэффициент $\{2', 0\}/\{0, 0\}$, который равен нулю, потому что

$$\{2', 0\} = \int (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \psi_2) \mathcal{M} \psi_0 dV = \int \psi_2 \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \psi_0 dV = \{2, 0'\}.$$

А так как функция ψ'_0 может быть выражена из равенства (9.4.143) через ψ_1 и ψ_0 , которые обе ортогональны к ψ_2 , то $\{2, 0'\}$ равна нулю. Вообще, мы находим, что

$$\psi_{n+1} = \psi'_n - \frac{\{n', n\}}{\{n, n\}} \psi_n - \frac{\{n', n-1\}}{\{n-1, n-1\}} \psi_{n-1}. \quad (9.4.146)$$

Коэффициенты при ψ_{n-2} и остальных функциях равны нулю. Например, коэффициент при ψ_{n-2} пропорционален

$$\{n', n-2\} = \{n, (n-2)'\}.$$

Но так как функция ψ'_{n-2} может быть выражена через функции ψ_{n-1} , ψ_{n-2} и т. д., каждая из которых ортогональна к ψ_n , то $\{n, (n-2)'\}$ равно нулю.

Заметим, что формула (9.4.146), примененная к ψ_1 , дает (9.4.143), если мы примем условие, что функции ψ с отрицательными индексами, в частности ψ_{-1} , равны нулю. Мы развили, таким образом, схему получения ортогональной системы функций при помощи сравнительно простой трехчленной рекуррентной формулы. Отметим небольшое упрощение:

$$\{n', n-1\} = \{n, n\}. \quad (9.4.147)$$

Если бы мы имели дело с задачей, содержащей конечное число, скажем $N+1$, собственных функций и собственных значений, то ψ_{N+1} была бы нулем. Действительно, ясно, что все собственные функции от χ_0 до χ_N уравнения $\mathcal{L}\chi = \lambda \mathcal{M}\chi$ должны быть линейными комбинациями функций ортогонального семейства $\psi_0, \dots, \psi_N$, и так как функция ψ_{N+1} выражается через χ_i , то она должна быть линейной комбинацией функций ψ_k . Но так как ψ_{N+1} должна быть, кроме того, ортогональна к каждой из функций ψ_k , то она должна быть нулем. (Это верно, конечно, только в случае, если ψ_0 — исходная пробная функция — содержит все собственные функции. Если же это не так, то первая функция ψ_n , равная нулю, появится для n , меньшего $N+1$. За исключением этого случая, множество функций ψ_n образует полное ортогональное семейство.)

Мы можем тогда разложить χ , решение уравнения

$$\mathcal{L}\chi = \lambda \mathcal{M}\chi,$$

в ряд по ψ_n :

$$\chi = \sum_n a_n \psi_n.$$

Подставляя это разложение в уравнение, получаем

$$\sum a_n \psi_n = \lambda \sum a_n \psi'_n = \lambda \sum a_n \left[\psi_{n+1} + \frac{\{n', n\}}{\{n, n\}} \psi_n + \frac{\{n', n-1\}}{\{n-1, n-1\}} \psi_{n-1} \right].$$

Отсюда мы получаем для a_n трехчленную рекуррентную формулу

$$a_{n-1} + \left[\frac{\{n', n\}}{\{n, n\}} - \frac{1}{\lambda} \right] a_n + \left[\frac{\{(n+1)', n\}}{\{n, n\}} \right] a_{n+1} = 0. \quad (9.4.148)$$

Уравнение, определяющее λ , может быть получено при помощи техники, развитой для работы с трехчленной рекуррентной формулой в гл. 5 в разделе о функциях Матье [формула (5.2.77) и следующие]. После введения новых неизвестных

$$R_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

уравнение (9.4.148) приобретает вид

$$R_n = \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{\{n', n\}}{\{n, n\}} \right] - \left[\frac{\{n+1, n+1\}}{\{n, n\}} \right] \frac{1}{R_{n+1}}.$$

Последовательными подстановками получаем

$$R_1 = (1/\lambda) - [\{1', 1\}/\{1, 1\}] - \frac{\{2, 2\}/\{1, 1\}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{\{2', 2\}}{\{2, 2\}} - \frac{\{3, 3\}/\{2, 2\}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{\{3', 3\}}{\{3, 3\}} - \frac{\{4, 4\}/\{3, 3\}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{\{4', 4\}}{\{4, 4\}}}} \quad (9.4.149)$$

Однако из соотношения

$$a_0[\{0', 0\}/\{0, 0\}] - (1/\lambda) + a_1[\{1', 0\}/\{0, 0\}] = 0$$

мы также имеем

$$R_1 = \frac{\{1', 0\}/\{0, 0\}}{(1/\lambda) - \{0', 0\}/\{0, 0\}}. \quad (9.4.150)$$

Подстановка этого результата в (9.4.149) дает уравнение относительно $1/\lambda$. Различные методы решения уравнения с непрерывной дробью такого рода были разобраны в гл. 5 после формулы (5.2.78). Это разложение в непрерывную дробь есть точное представление векового уравнения для $1/\lambda$, которое может быть получено из формул (9.4.148). Кроме того, оно обрывается, если операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ таковы, что существует лишь конечное число собственных функций и собственных значений.

Сравнивая метод минимизированных итераций с описанным выше вариационно-итерационным методом, мы замечаем, что функции ψ_n являются просто взаимно ортогональными линейными комбинациями итераций ϕ_n . Эти комбинации могут быть определены прямо по методу ортогонализации Шмидта (см. гл. 8). Указанный здесь процесс имеет, однако, преимущество в численных приложениях, где метод Шмидта быстро становится неточным из-за ошибок округления. В методе минимизированных итераций ошибки можно исправлять проверкой ортогональности нового ψ_n ко всем предыдущим. Накопившуюся ошибку можно тогда исправить вычитанием соответствующей составляющей по каждой из предыдущих ψ_n , как это указано в формуле (9.4.139).

Как следствие мы можем вывести, что отношения $\{n', n\}/\{n, n\}$ и также $\{n, n\}/\{n+1, n+1\}$ могут быть выражены через $\lambda_0^{(n)}$ и $\lambda_0^{(n+1/2)}$. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\{0', 0\}}{\{0, 0\}} &= \frac{1}{\lambda_0^{(1/2)}}, \quad \frac{\{1', 0\}}{\{0, 0\}} = \frac{1 - (\lambda_0^{(1)}/\lambda_0^{(1/2)})}{\lambda_0^{(1)}\lambda_0^{(1/2)}}, \\ \frac{\{1', 1\}}{\{1, 1\}} &= \frac{1}{\lambda_0^{(3/2)}} \frac{1 - (\lambda_0^{(3/2)}/\lambda_0^{(1/2)})}{1 - (\lambda_0^{(1)}/\lambda_0^{(1/2)})} - \frac{1}{\lambda_0^{(1/2)}}. \end{aligned} \quad (9.4.151)$$

Используя данные, полученные ранее [см. (9.4.124)], относительно значений $\lambda_0^{(n)}$ в приложении вариационно-итерационного метода к колебаниям мембраны с круговой симметрией, можно вычислить различные

отношения, фигурирующие в (9.4.151), и подставить их в уравнения (9.4.150) и (9.4.149), отбрасывая в последнем все члены, содержащие индекс 2 и более высокие индексы. Мы получим тогда квадратное уравнение для λ , из которого можно найти λ_0 и λ_1 . Мы получаем 5,78325 для λ_0 (точное значение 5,78319), в то время как λ_1 получается равным 32,5, что следует сравнить с точным значением 30,471. Нужно включить в уравнение по крайней мере еще один член непрерывной дроби, чтобы получить значение λ_1 с такой же точностью, как и λ_0 .

В заключение мы хотели бы отметить еще одно преимущество метода минимизированных итераций. Если мы имеем дело с данным отрезком интегрирования, то для данной весовой функции M существует только одно семейство ортогональных функций, удовлетворяющих граничным условиям. Если эти функции будут известны заранее, то нет надобности проводить ортогонализацию (9.4.146). Нужно только определить постоянные, на которые нужно умножить каждую из ортогональных функций для того, чтобы было выполнено соотношение (9.4.146).

Задачи к главе 9

9.1. У эллиптической мембраны массы σ на единицу площади, находящейся под натяжением T , жестко закреплен край — эллипс с большой осью a и малой осью b . Показать, что решение уравнения свободных поперечных колебаний этой мембраны можно выразить в виде ряда

$$\psi = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} x^{2m} y^{2n}.$$

Получить вековой определитель, дающий волновое число k , подставляя это выражение в формулу (9.4.71) и выполняя нужные вариации. Получить возмущенное решение для низшего колебания, используя главный член A_{11} . Получить вариационное решение при условии, что в пробную волновую функцию включены только члены A_{11} , A_{02} и A_{20} . Получить оценку снизу из соотношения (9.4.117).

9.2. Частица массы m движется в поле с потенциалом $-V_0 \exp(-\beta r)$, где β и V_0 — постоянные. Показать, что решение уравнения Шредингера для сферически симметричного связанного состояния можно преобразовать к виду $u(x)$, где u — решение уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (-1 + \lambda e^{-x/2})u = 0; \quad u = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \infty,$$

а для β взято частное значение. Выбрав в качестве исходной пробной функции $u_0 = e^{-x}$, получить u_1 и u_2 по методу минимизированных итераций, рассматривая параметр λ как собственное значение. Найти λ из получающейся непрерывной дроби. Сравнить ответ с точным значением, данным в § 12.3.

9.3. Однородное электрическое поле E , направленное вдоль оси z , действует на электрический диполь с моментом p , который может только свободно вращаться. Записать уравнение Шредингера в сферических координатах (r, ϑ, φ) , где ϑ — угол между осью диполя и осью z . Показать, что если движение не зависит от φ , то уравнение принимает вид

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\psi}{d\mu} \right] + \frac{2I}{\hbar^2} (W + E p \mu) \psi = 0,$$

где $\mu = \cos \vartheta$, а I — момент инерции. Найти решение уравнения для состояния с минимальной энергией, используя (а) итерационно-пертурбацион-

ный метод, (б) вариационно-итерационный метод, начиная с постоянной в качестве исходной пробной функции. Найти две итерации и получить верхнюю и нижнюю границу. Отметим, что в вариационном методе параметром собственного значения является величина E_p . Сравнить результаты обоих методов.

9.4. Плоская звуковая волна падает под углом ϑ на диск радиуса a . Вычислить поперечное сечение рассеяния в длинноволновом приближении (см. в § 10.3 решения соответствующего уравнения Лапласа). Найти давление и вращающий момент, действующие на диск.

9.5. Звуковая волна распространяется вдоль канала, который внезапно меняет поперечное сечение. Канал ограничен следующими четырьмя линиями: $y = a$, положительная полуось x , ось y между $y = 0$ и $y = a - b$ и линия $y = a - b$ при $x \leq 0$. Мы рассматриваем движения, не зависящие от z . Показать, что при конформном отображении $w = w(\zeta)$, $\zeta = x + iy$, $w = u + iv$ уравнение Гельмгольца переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + k^2 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial w} \right|^2 \psi = 0.$$

Определить величину $|\partial \zeta / \partial w|$ для отображения ступенчатого канала в канал без ступеньки (см. задачу 10.21). Решить задачу об отражении волны, движущейся в канале в направлении положительной оси x , используя борновское приближение в координатах u , v .

9.6. При расчете задач рассеяния часто желательно получить асимптотическую фазу радиального множителя решения [см. уравнение (9.3.13), § 11.3 и § 12.3]. Предположим, что в такой задаче уравнение для радиального множителя имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + (k^2 + \lambda U) u = 0; \quad u(0) = 0; \quad u \rightarrow \sin(kr - \eta).$$

Показать, что решение u_+ этого уравнения, которое приближается к e^{ikr} для больших r , удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$u_+(r) = e^{ikr} \left(1 - \frac{i\lambda}{2k} \int_r^\infty e^{-ikr_0} U(r_0) u(r_0) dr_0 \right) + \frac{i\lambda}{2k} \int_r^\infty e^{ik(r_0-r)} U(r_0) u(r_0) dr_0.$$

Найти интегральное уравнение для функции $u_-(r)$, которая приближается к e^{-ikr} . Показать, что

$$u = u_-(r) + S(k) u_+(r); \quad S(k) = -u_-(0)/u_+(0).$$

Установить связь между S и сдвигом фазы η и показать, что $|S| = 1$ для действительных U . Показать, что $S(\alpha) = 0$ определяет возможные связанные состояния системы. Вычислить u_+ и u_- , а с ними и S , с точностью до второго порядка по λ для потенциальной ямы, т. е. для потенциала, который постоянен вплоть до точки $r = a$, а после нее равен нулю (используя e^{ikr} как начальное приближение для u_+ и e^{-ikr} для u_-). Сравнить с фредгольмовским решением.

9.7. Показать, что вариационный интеграл (9.4.61) для $\operatorname{ctg} \eta_0$ переходит в случае малых k в интеграл

$$k \operatorname{ctg} \eta_0 = \left[\int_0^\infty U u_0^2 dr - 2 \int_0^\infty U u_0 \int_0^{r_0} r U u_0 dr dr_0 \right] / \left[\int_0^\infty U u_0 r dr \right]^2.$$

Подставить пробную функцию $\alpha + \beta r$ в это выражение. U — притягивающий потенциал, имеющий постоянную глубину λ вплоть до радиуса a и равный нулю при $r > a$. Определить α , β и, наконец, $k \operatorname{ctg} \eta_0$ по вариационному методу.

9.8. Радиальное уравнение Шредингера для частицы с угловым моментом l имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[k^2 + U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0,$$

$$u(0) = 0, \quad u \simeq \cos \left[kr - \frac{1}{2}(l+1)\pi - \eta \right] \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Показать, что функция

$$y(r) = u(r) + w_1 \operatorname{ctg} \eta - w_{2\infty}, \quad w_1 = kr j_l(kr), \quad w_{2\infty} = \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + k^2 y - \frac{l(l+1)}{r^2} (y + w_{2\infty}) + U(y - w_1 \operatorname{ctg} \eta + w_{2\infty}) = 0,$$

$$y(0) = w_{2\infty}(0) + \text{члены порядка } r^{l+1}, \quad y(\infty) = 0.$$

Показать, что можно вывести вариационный принцип для $k \operatorname{ctg} \eta$:

$$[k \operatorname{ctg} \eta] = \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{dy}{dr} \right)^2 - k^2 y^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} (y + w_{2\infty})^2 + U(y - w_1 \operatorname{ctg} \eta + w_{2\infty})^2 \right\} dr.$$

Это можно переписать в виде

$$A(k \operatorname{ctg} \eta)^2 - 2B(k \operatorname{ctg} \eta) + C = 0.$$

Показать, что вариационный принцип, эквивалентный написанному выше, выражается формулой

$$[k \operatorname{ctg} \eta] = (B + \sqrt{B^2 - AC})/A.$$

Определить A , B и C .

9.9. Плоская волна с волновым числом k падает на бесконечный жесткий цилиндр радиуса a . Показать, что в пределе при $ka \gg 1$

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \text{ на затененной стороне цилиндра,} \\ \psi &= 2\psi_i \text{ на освещенной стороне цилиндра,} \end{aligned}$$

где ψ_i — падающая волна. Доказать, что точное выражение для амплитуды рассеяния дается формулой

$$|f(\varphi)|^2 = \frac{1}{8\pi k} \left| \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial n} - i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n} \psi_s \right) ds \right|^2,$$

где ψ_s — рассеянная волна. Подставить указанное коротковолновое приближение в интеграл. Показать, что интеграл по тени цилиндра дает вклад

$$\frac{ka^2}{2\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\sin^2(ka \sin \varphi)}{k^2 a^2 \sin^2(\varphi/2)}.$$

Приближенно вычислить интеграл по освещенной стороне. Его вклад в поперечное сечение равен

$$\frac{a}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \text{быстро осциллирующие члены.}$$

Показать, что полное поперечное сечение равно $4a$. Проанализировать результаты.

9.10. Частица массы m движется в притягивающем сферическом потенциальном поле $U = -V_0 \exp[-(r/a)^2]$. Использовать для вычисления сдвига фазы для $l=0$ пробную функцию $\sin \kappa r$ (считая κ вариационным параметром) в вариационном принципе (9.4.61). Сравнить результат по порядку величины κa с борновским приближением для V_0 , удовлетворяющим условию

$$2mV_0a^2/\hbar^2 = \frac{1}{4}\pi^2.$$

9.11. В дифференциальном уравнении

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + a^2q(x)\psi = 0, \quad q = a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0,$$

произвести замену независимой переменной на $z = \int_0^x \sqrt{q(x)} dx$ и ввести функции

$$Q = q^{-1/4} \frac{d^2q^{1/4}}{dz^2} = -\left(\frac{5}{36z^2} + \lambda z^{-2/3} + \lambda_0 + \lambda_1 z^{2/3} + \dots\right)$$

и

$$Q_1(z) = \int_0^z Q(y) dy.$$

Показать, что два решения уравнения для ψ выражаются приближенно формулами

$$\psi_{1,2} \simeq q^{-1/4} \exp\left[\pm i\left(az - \frac{Q_1}{2a} \mp \frac{i}{4a^2Q}\right)\right], \quad z \neq 0,$$

$$\psi_{1,2} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}\pi a} i^{\pm 5/6} \left\{ \exp \mp \left[\frac{1}{2ia} \int_0^\infty \left(Q + \frac{5}{36z^2}\right) dz \right] \right\} z^{1/6} \zeta H_{1/3}^{(1,2)}(\eta),$$

где

$$\zeta = \sqrt{z^{2/3} + \lambda x^{-2} - \frac{1}{5}\lambda_1 x^{-2}\xi^2}, \quad \eta = x \left(\xi + \frac{1}{5}\lambda_1 x^{-2}\xi^2 \right)^{3/2},$$

$$x^2 = a^2 + \lambda_0, \quad \xi = z^{2/3} + \lambda x^{-2}.$$

Применить эти формулы к функции Ганкеля $H_p(p \sec \lambda)$.

Таблица приближенных методов

Связанные состояния. Объемные возмущения. Уравнение, подлежащее решению:

$$\nabla^2 \psi + (k^2 - U_0 - \lambda U) \psi = 0.$$

Невозмущенная задача $\nabla^2 \varphi_n + (k_n^2 - U_0) \varphi_n = 0$, которая может быть решена точно, имеет собственные функции φ_n и собственные значения k_n^2 (предполагаемые здесь невырожденными; об эффектах вырождения см. стр. 623). Различные приближенные ряды для ψ содержат матричные элементы возмущающего потенциала

$$U_{mn} = \int \dots \int \bar{\varphi}_m U \varphi_n dx_1 \dots dx_N.$$

Итерационно-пертурбационные ряды. Первое, второе и a -е приближения для ψ и собственного значения k^2 выражаются формулами [см. (9.1.15)]

$$\psi^{(1)} = \varphi_n + \lambda \sum_{p \neq n} \left(\frac{U_{pn}}{k_n^2 - k_p^2} \right) \varphi_p,$$

$$(k^2)^{(1)} = k_n^2 + \lambda U_{nn},$$

$$\psi^{(2)} = \varphi_n + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn} \varphi_p}{k_n^2 + \lambda U_{nn} - k_p^2} + \lambda^2 \sum_{pq \neq n} \frac{U_{pq} U_{qn} \varphi_p}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)},$$

$$(k^2)^{(2)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{k_n^2 - k_p^2},$$

$$\psi^{(a)} = \varphi_n + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn} \varphi_p}{(k^2)^{(a-1)} - k_p^2} + \dots + \lambda^a \sum_{pq \dots \neq n} \frac{U_{pq} \dots U_{zn} \varphi_p}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2) \dots (k_n^2 - k_z^2)}$$

$$(k^2)^{(a)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{(k^2)^{(a-2)} - k_p^2} + \dots +$$

$$+ \lambda^a \sum_{pq \dots \neq n} \frac{U_{np} U_{pq} \dots U_{zn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2) \dots (k_n^2 - k_z^2)}$$

Рассмотрение сходимости проведено на стр. 11 и 13.

Ряды Финберга. Формулы, исключаящие повторение матричных элементов в последовательных рядах, не отличаются от написанных выше для первых двух порядков. Приближение a -го порядка имеет вид [см. (9.1.37)]

$$\psi^{(a)} = \varphi_n + \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pn} \varphi_p}{(k^2)^{(a-1)} - (\chi^2)_{np}^{(a-1)}} + \dots +$$

$$+ \lambda^a \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np \\ \dots}} \frac{U_{pq} \dots U_{zn} \varphi_p}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2) \dots (k_n^2 - k_z^2)}$$

$$(k^2)^{(a)} = k_n^2 + \lambda U_{nn} + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{U_{np} U_{pn}}{(k^2)^{(a-2)} - (\chi^2)_{np}^{(a-2)}} + \dots +$$

$$+ \lambda^a \sum_{\substack{p \neq n \\ q \neq np \\ \dots}} \frac{U_{np} U_{pq} \dots U_{zn}}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2) \dots (k_n^2 - k_z^2)},$$

где

$$(\chi^2)_{np}^{(m)} = k_p^2 + \lambda U_{pp} + \lambda^2 \sum_{q \neq np} \frac{U_{pq} U_{qp}}{(k^2)^{(m-2)} - (\chi^2)_{npq}^{(m-2)}} + \dots +$$

$$+ \lambda^m \sum_{\substack{q \neq np \\ r \neq npq \\ \dots}} \frac{U_{pq} U_{qr} \dots U_{rp}}{(k^2 - k_q^2)(k^2 - k_r^2) \dots (k^2 - k_z^2)},$$

$$(\chi^2)_{npq}^{(m)} = k_q^2 + \lambda U_{qq} + \lambda^2 \sum_{r \neq npq} \frac{U_{qr} U_{rq}}{(k^2)^{(m-2)} - (\chi^2)_{npqr}^{(m-2)}} + \dots$$

Эти формулы обычно сходятся для значений λ , меньших того, при котором наступает вырождение.

Формула Фредгольма. Следующие формулы сходятся при всех значениях λ . Они снова не отличаются от прежних для первых двух порядков аппроксимации. Формулы для следующего порядка в случае двумерных и трехмерных задач имеют вид

$$\begin{aligned} \phi^{(3)} = & \varphi_n + \sum_{p \neq n} \varphi_p \left\{ \frac{\lambda U_{pn}}{(k^2)^{(1)} - k_p^2} + \lambda^2 \sum_{q \neq n} \frac{U_{pq} U_{qn} - U_{pn} U_{qq}}{[(k^2)^{(1)} - k_p^2][(k^2)^{(1)} - k_q^2]} + \right. \\ & + \lambda^3 \sum_{qr \neq n} \frac{U_{pq} U_{qr} U_{rn} - U_{qq} U_{pr} U_{rn} - \frac{1}{2} U_{pn} (U_{qr} U_{rq} - U_{qq} U_{rr})}{(k_n^2 - k_p^2)(k_n^2 - k_q^2)(k_n^2 - k_r^2)} \left. \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 - \lambda \sum_{q \neq n} \frac{U_{qq}}{(k^2)^{(1)} - k_q^2} - \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{qr \neq n} \frac{U_{qr} U_{rq} - U_{qq} U_{rr}}{(k_n^2 - k_q^2)(k_n^2 - k_r^2)} \right\}^{-1}, \\ (k^2)^{(3)} = & k_n^2 + \lambda U_{nn} + \sum_{p \neq n} U_{np} \left\{ \frac{\lambda^2 U_{pn}}{(k^2)^{(1)} - k_p^2} + \right. \\ & + \lambda^3 \sum_{r \neq n} \frac{U_{pr} U_{rn} - U_{rr} U_{pn}}{(k_n^2 - k_r^2)(k_n^2 - k_p^2)} \left. \right\} \left\{ 1 - \lambda \sum_{p \neq n} \frac{U_{pp}}{k_n^2 - k_p^2} \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Общие формулы даны на стр. 26—28.

Эти формулы расходятся в одномерном случае, где след $\sum U_{rr} \times (1 - \delta_{rn}) / (k_n^2 - k_r^2)$ расходится, хотя высшие следы сходятся. В этом случае [см. формулу (9.1.67)] мы просто отбрасываем расходящийся ряд и используем формулы так, как если бы он был равен нулю.

Вариационный принцип для связанных состояний. Вариационный принцип для k^2 , соответствующий уравнению $(\nabla^2 + k^2 - U_0 - \lambda U) \psi = 0$, имеет вид

$$[k^2] = \int \tilde{\varphi} (-\nabla^2 + U_0 + \lambda U) \varphi dv / \int \tilde{\varphi} \varphi dv, \quad \delta[k^2] = 0$$

[см. уравнение (9.4.8)]. Функция φ — пробная функция, удовлетворяющая тем же граничным условиям, что и ψ , и снабженная параметрами для изменения ее формы внутри грани; $\tilde{\varphi}$ — сопряженная функция, удовлетворяющая уравнению и граничным условиям, сопряженным к φ (см. т. I, стр. 814). Величина $[k^2]$, рассматриваемая как функция параметров, имеет стационарное значение (которое мы будем называть «минимумом», хотя оно может быть и максимумом и точкой перегиба), при котором φ равна ψ_0 — собственной функции низшего состояния, а $[k^2]$ равно k_0^2 — соответствующему собственному значению уравнения. Чтобы получить k_1^2 и ψ_1 , мы добавляем условие, что φ ортогональна к ψ_0 , и находим новое стационарное значение $[k^2]$ и т. д.

Вместо «минимизации» $[k^2]$ мы можем использовать вариационное выражение для величины возмущающего потенциала λ :

$$[\lambda] = \int \tilde{\varphi} (\nabla^2 - U_0 + k^2) \varphi dv / \int \tilde{\varphi} U \varphi dv, \quad \delta[\lambda] = 0.$$

Тогда мы находим наименьшее значение λ , для которой k^2 является собственным значением.

Мы можем также использовать функцию Грина G_u , решение уравнения

$$(\nabla^2 - U_0 - \lambda U) G_u(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

и «минимизировать» выражение

$$[k^2] = \int \tilde{\varphi} \varphi \, dv / \int \int \tilde{\varphi}(\mathbf{r}) G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}_0) \, dv \, dv_0.$$

Или можно использовать функцию Грина G_k — решение уравнения

$$(\nabla^2 + k^2 - U_0) G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0);$$

тогда нужно «минимизировать» выражение для λ

$$[\lambda] = \int \tilde{\varphi} U \varphi \, dv / \int \int \tilde{\varphi}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) U(\mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}_0) \, dv \, dv_0.$$

Если существует решение ψ_0 уравнения $(\nabla^2 + k^2 - U_0)\psi = 0$ для выбранного значения k^2 , то мы должны «минимизировать» выражение

$$[J] = \left[\int \tilde{\varphi} U \psi_0 \, dv + \int \tilde{\psi}_0 U \varphi \, dv \right]^2 / \left[\int \tilde{\varphi} U \varphi \, dv - \lambda \int \int \tilde{\varphi} U G_k U \varphi \, dv \, dv_0 \right]$$

[см. формулу (9.4.19)].

Вариационно-итерационный метод. Мы преобразуем дифференциальное уравнение в интегральное при помощи данной выше функции Грина G_k . Интегральное уравнение для последовательных приближений имеет вид

$$\psi^{(n)}(\mathbf{r}) = \lambda \int G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \psi^{(n-1)}(\mathbf{r}_0) U(\mathbf{r}_0) \, dv_0.$$

При желании можно положить $\psi^{(0)} = \varphi_n$.

Величина λ является тогда собственным значением и вычисляется как функция от k^2 . Если нужно, то после выполнения вычислений результаты можно обратить и получить k^2 как функцию от λ . Положив

$$[m, n] = \int \psi^{(m)} U \psi^{(n)} \, dv,$$

мы можем показать, что если оба оператора $(\nabla^2 - k^2 - U_0)$ и U положительно определены, то последовательность $\lambda^{(n)} \geq \lambda^{(n+1/2)} \geq \lambda^{(n+1)} \geq \dots$, где

$$\lambda^{(n)} = [n, n-1]/[n, n] \quad \text{и} \quad \lambda^{(n+1/2)} = [n, n]/[n, n+1],$$

монотонно сходится к наименьшему собственному значению λ_0 , а соответствующие функции $\psi^{(n)}$ — к соответствующей собственной функции ψ_0 [формулы ускорения сходимости приведены в (9.1.84) и (9.4.108)].

Если параметр k^2 близок к k_n^2 , мы можем положить $\psi^{(0)} = \varphi_n$, и в этом случае

$$\psi^{(1)} = \sum_p \frac{U_{pn} \varphi_p}{k^2 - k_p^2}, \quad \psi^{(2)} = \sum_{pq} \frac{U_{pq} U_{qn} \varphi_p}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2)},$$

$$\lambda^{(1/2)} = U_{nn} / \sum_p \frac{U_{np} U_{pn}}{k^2 - k_p^2},$$

$$\lambda^{(1)} = \sum_p \frac{U_{np} U_{pn}}{k^2 - k_p^2} / \sum_{pq} \frac{U_{np} U_{pq} U_{qn}}{(k^2 - k_p^2)(k^2 - k_q^2)}$$

и т. д. Приложения см. на стр. 34 и 143.

Возмущения граничных условий. Если невозмущенная задача состоит в решении уравнения $(\nabla^2 + k_n^2) \varphi_n = 0$ в области R , ограниченной поверхностью S , на которой заданы однородные условия Неймана $\partial \varphi / \partial n = 0$, то решение уравнения $(\nabla^2 + k^2) \psi = 0$ в R при граничных условиях

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + \mu F(S) \psi = 0 \quad \text{на поверхности } S$$

может быть выражено через φ_n и k_n^2 , если μ достаточно мало. Мы положим $\mu = \lambda$ и просто подставим вместо λU_{mn} в приведенные выше приближенные формулы матричные элементы

$$f_{mn} = \oint \bar{\varphi}_m(S) F(S) \varphi_n(S) dS,$$

где интегрирование распространено на всю поверхность S , ограничивающую R .

Если μ велико, то наиболее удобной невозмущенной системой является множество решений уравнения $(\nabla^2 + k^2)\chi = 0$, удовлетворяющих на S условиям Дирихле ($\chi = 0$), с собственными функциями χ_n и собственными значениями k_n^2 . Мы полагаем $1/\mu = \lambda$ и подставляем

$$q_{mn} = \frac{1}{k_m k_n} \oint \frac{\partial \chi_m}{\partial n} \frac{1}{F(S)} \frac{\partial \chi_n}{\partial n} dS$$

вместо λU_{mn} в различные пертурбационные формулы. По поводу частных случаев и изучения сходимости см. § 9.2.

Мы можем также для получения ψ и k^2 использовать вариационный принцип; мы «минимизируем» выражение

$$[k^2] = \left[\int (\nabla \tilde{\varphi}) \cdot (\nabla \varphi) dv - \mu \oint \tilde{\varphi} F \varphi dS \right] / \int \tilde{\varphi} \varphi dv$$

[см. формулу (9.4.26)], где поверхностный интеграл берется по всей поверхности S .

Возмущения формы границы. Допустим, что область R , ограниченная поверхностью S , целиком содержится в области R' , ограниченной поверхностью S' , причем для области R' можно вычислить точные решения φ_n , удовлетворяющие условиям Неймана на S' , и соответствующие собственные значения k_n^2 . Пертурбационные ряды для решения уравнения $(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$, удовлетворяющего однородным условиям Неймана на S , получаются при использовании векового определителя

$$|N_{mn}(k^2 - k_m^2) - A_{mn}| = 0,$$

где

$$A_{mn} = \int \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial n} \varphi_n dS \quad (\text{по } S)$$

и

$$N_{mn} = \int \bar{\varphi}_m \varphi_n dv \quad (\text{по } R) = \frac{A_{mn} - A_{nm}}{k_n^2 - k_m^2},$$

$$N_{nn} = \int \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial (k^2)} \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial n} - \bar{\varphi}_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial (k^2)} \right)_{k=k_n} dS \quad (\text{по } S).$$

Тогда с точностью до второго порядка ψ равно нулю вне R , а внутри R выражается формулой

$$\begin{aligned} \psi \simeq \varphi_n + \sum_{p \neq n} \left[\frac{A_{pn} - (k_n^2 - k_p^2) N_{pn}}{(k_n^2 - k_p^2 + A_{nn}) N_{pp} - A_{pp}} \right] \varphi_p + \\ + \sum_{pq \neq n} \frac{[A_{pq} - (k_n^2 - k_p^2) N_{pq}] [A_{qn} - (k_n^2 - k_q^2) N_{qn}]}{[(k_n^2 - k_p^2) N_{pp} - A_{pp}] [(k_n^2 - k_q^2) N_{qq} - A_{qq}]} \varphi_p. \end{aligned}$$

Соответствующее собственное значение:

$$k^2 \simeq k_n^2 + \frac{A_{nn}}{N_{nn}} + \sum_{p \neq n} \frac{A_{np} [A_{pn} - (k_n^2 - k_p^2) N_{pn}]}{N_{nn} [(k_n^2 - k_p^2) N_{pp} - A_{pp}]}.$$

Выражения для более высоких порядков приближения обычно расходятся (см. стр. 56—59). Если граничными условиями служат однородные условия Дирихле ($\psi = 0$ на S , $\varphi_n = 0$ на S'), то обычно сходятся только выражение первого порядка для ψ и второго порядка для k^2 :

$$\psi \simeq N_{nn}\varphi_n + \sum_{p \neq n} \frac{A_{np}\varphi_p}{k_p^2 - k_n^2} \quad \text{в } R; \quad \psi = 0 \quad \text{вне } R;$$

$$k^2 \simeq k_n^2 - \frac{A_{nn}}{N_{nn}} + \sum_{p \neq n} \frac{k_n^2 A_{pn}^2}{N_{nn}k_p^2(k_p^2 - k_n^2)}.$$

Пертурбационные формулы для рассеяния. Плоская падающая волна $e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$ рассеивается на конечной области R вблизи начала координат. Асимптотическое выражение для рассеянной волны на расстоянии r в направлении $\mathbf{k}_s$ от области R имеет вид

$$\psi_s \simeq -T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) (e^{ihr}/4\pi r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

где k — модуль волнового вектора $\mathbf{k}_i$ падающей волны, а также волнового вектора $\mathbf{k}_s$ рассеянной волны.

Если рассеяние вызвано объемными возмущениями, такими, например, как потенциал U в уравнении Шредингера $(\nabla^2 + k^2 - U)\psi = 0$, то интегральное уравнение для ψ имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \int \frac{e^{ikR}}{4\pi R} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0$$

и

$$T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

Последовательные борновские приближения (9.3.38) получаются после выполнения следующего ряда интегрирований:

$$\psi^{(n)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \int \frac{e^{ikR}}{4\pi R} U(\mathbf{r}_0) \psi^{(n-1)}(\mathbf{r}_0) dv_0, \quad \psi^{(0)} = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}},$$

$$T^{(n)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \psi^{(n-1)}(\mathbf{r}) dv, \quad T^{(1)} = \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}} U dv.$$

Последовательные борновские приближения для фактора углового распределения T могут быть получены при помощи трансформации Фурье протенциальной функции

$$U(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) dv = T^{(1)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)$$

[см. формулу (9.3.45)],

$$T^{(2)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = U(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) - \int \frac{U(\mathbf{k}_s | \mathbf{K}) U(\mathbf{K} | \mathbf{k}_i)}{(2\pi)^3 (\mathbf{K}^2 - k^2)} dv_K \quad \text{и т. д.}$$

Если рассеяние обусловлено каким-нибудь возмущающим объектом вблизи начала координат с поверхностью S , на которой должны быть выполнены граничные условия, то интегральное уравнение для ψ приобретает вид

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \left\{ \begin{aligned} &+ \int \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0; \quad \psi = 0 \quad \text{на } S \\ &- \int \psi(S_0) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{ikR}}{4\pi R} \right) dS_0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S \end{aligned} \right\},$$

где нормальная производная берется по направлению внутрь поверхности. Последовательные приближения для ψ и T , начинающиеся с

$$T^{(1)}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = i \oint \frac{(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_0^s)}{(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}_0^s)} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}_0^s} dS,$$

где интегрирование производится по поверхности S (верхнее скалярное произведение относится к случаю $\psi = 0$, нижнее — к случаю $\partial\psi/\partial n = 0$ на S), называются приближениями *Кирхгофа* [см. (9.3.39)].

Вариационные принципы для задач рассеяния. При объемном возмущении, вызванном потенциальной функцией $U(\mathbf{r})$, отличной от нуля вблизи начала координат, вариационный принцип для фактора углового распределения T получается «минимизацией» выражения

$$[T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)] = \frac{\int \tilde{\varphi} U e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} dv \int \varphi U e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} dv}{\int \tilde{\varphi} U \varphi dv + \int \int \tilde{\varphi} U (e^{i\mathbf{h}R}/4\pi R) U \varphi dv dv_0}$$

[см. формулу (9.4.69)], где $\tilde{\varphi}$ — сопряженная к φ волновая функция, соответствующая плоской волне, падающей в направлении $-\mathbf{k}_s$ и рассеянной в направлении $-\mathbf{k}_i$. Для рассеяния на поверхности S , на которой $\partial\psi/\partial n = 0$, вариационное выражение, подлежащее «минимизации», имеет вид

$$[T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)] = \frac{\oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i) \tilde{\varphi} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dS \oint (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}_s) \varphi e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} dS_0}{\oint \oint \tilde{\varphi}(S) \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} \left(\frac{e^{i\mathbf{h}R}}{4\pi R} \right) \varphi(S_0) dS dS_0}$$

[см. (9.4.83)]. Если $\psi = 0$ на S , то мы «минимизируем» выражение

$$[T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)] = - \frac{\oint \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dS \oint e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} dS_0}{\oint \oint \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} \frac{e^{i\mathbf{h}R}}{4\pi R} \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} dS dS_0}$$

[см. (9.4.85)]. Каждое из этих интегрирований производится по S .

Рассеяние на сферически-симметричных объектах. Сумма падающей и рассеянной волн может быть разложена по сферическим гармоникам

$$\psi = e^{i\mathbf{k}r \cos \vartheta} + \psi_s = \sum (2m+1) i^m P_m(\cos \vartheta) \frac{u_m(r)}{kr},$$

где

$$e^{i\mathbf{k}r \cos \vartheta} = \sum (2m+1) i^m P_m(\cos \vartheta) j_m(kr).$$

Функции j_m — сферические функции Бесселя [см. формулу (11.3.42)]. Если рассеиватель изображается потенциалом U , функции $u_m(r)$ должны удовлетворять уравнению $u_m'' + \{k^2 - [m(m+1)/r^2] - U(r)\} u_m = 0$ и стремиться к нулю при $r \rightarrow 0$. Для больших значений r для них имеет место асимптотическое представление

$$u_m(r) \simeq e^{-i\eta_m} \cos \left[kr - \frac{1}{2} \pi (m+1) - \eta_m \right],$$

где η_m называется сдвигом фазы. Поэтому рассеянная волна имеет следующую асимптотическую форму (ϑ — угол между $\mathbf{k}_s$ и $\mathbf{k}_i$):

$$\begin{aligned} \psi_s(\mathbf{r}) &\simeq f(\vartheta) e^{i\mathbf{k}r/r}, & f(\vartheta) &= -(1/4\pi) T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i), \\ f(\vartheta) &= -\frac{1}{k} \sum (2m+1) e^{-i\eta_m} \sin(\eta_m) P_m(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Дифференциальное и полное поперечные сечения рассеяния равны тогда соответственно [см. формулы (9.3.6) и (9.3.8)] $\sigma = |f(\vartheta)|^2$ и

$$Q = \int \sigma d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum (2m+1) \sin^2 \eta_m.$$

Интегральное уравнение для u_m имеет вид

$$u_m(r) = kr j_m(kr) + kr \left[n_m(kr) \int_0^r r_0 j_m(kr_0) U(r_0) u_m(r_0) dr_0 + \right. \\ \left. + j_m(kr) \int_r^\infty r_0 n_m(kr_0) U(r_0) u_m(r_0) dr_0 \right]$$

[см. уравнение (9.3.34)], а сдвиг фазы определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \eta_m = \int_0^\infty r_0 j_m(kr_0) U(r_0) u_m(r_0) dr_0.$$

Первое борновское приближение получается заменой $u_m(r)$ на $j_m(kr)$ в этих уравнениях; высшие приближения получаются итерацией.

Можно также вывести вариационные принципы для u_m и η_m . Мы их напишем сначала для u_0 и η_0 ; нетрудно вывести соответствующие выражения и для $m > 0$. Первый из этих принципов использует функцию v_0 , решение уравнения $v_0'' + k^2 v_0 = 0$, которая имеет такой же сдвиг фазы, как и u , при $r \rightarrow \infty$ и которая стремится к 1, когда $r \rightarrow 0$. Иными словами,

$$v_0(r) = -\sin(kr - \eta_0)/\sin \eta_0; \quad u_0(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \operatorname{cosec} \eta_0 \cdot \sin(kr - \eta_0).$$

Первый принцип требует «минимизации» величины

$$[-k \operatorname{ctg} \eta_0] = \int_0^\infty \left[\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 - k^2 (\varphi^2 - v^2) + \varphi^2 U(r) \right] dr,$$

где φ — функция сравнения, которая должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } r \rightarrow 0, \\ -\operatorname{cosec} \eta_0 \cdot \sin(kr - \eta_0) & \text{при } r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Вариационный принцип, в котором η не появляется неявно внутри интеграла, использует пробную функцию w , причем $w = v - u$; $w(0) = 1$; $w \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$). Мы находим вид функции w , для которой «минимизируется»

$$[k \operatorname{ctg} \eta_0] = (1/2A) [B + \sqrt{B^2 - 4AC}],$$

где (см. формулы (9.4.56))

$$A = \int_0^\infty U \frac{\sin^2(kr)}{k^2} dr,$$

$$B = 1 + \frac{1}{k} \int_0^\infty U \sin(2kr) dr - \frac{2}{k} \int_0^\infty U w \sin(kr) dr,$$

$$C = \int_0^\infty \left\{ \left[\left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - (k^2 - U) w^2 \right] + U [\cos^2(kr) - 2w \cos(kr)] \right\} dr.$$

Другой вариационный принцип, годный для любого значения m , приведен ниже. Пробная функция φ_m , равная u_m , если «минимизируется» выражение

$$[k \operatorname{ctg} \eta_m] = \frac{\int_0^\infty U \varphi_m^2 dr - 2k \int_0^\infty r n_m(kr) \varphi_m U \int_0^r r_0 j_m(kr_0) \varphi_m U dr_0 dr}{\left[\int_0^\infty r j_m(kr) U(r) \varphi_m(r) dr \right]^2},$$

стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, как r^{m+1} , и остается конечной при $r \rightarrow \infty$. Точная форма φ_m при больших r несущественна, так как подинтегральные выражения там исчезают из-за наличия множителя $U(r)$. Правильный вид функции u_m может быть получен (если это нужно) подстановкой лучшей формы φ_m в интегральное уравнение для u_m , данное на стр. 162.

ЛИТЕРАТУРА

Теория возмущений, разобранный в этой главе, развивалась главным образом в связи с эволюцией квантовой механики.

Книги и статьи на эту тему, содержащие разбор некоторых аспектов теории возмущений:

- Ландау Л. и Лифшиц Е., Квантовая механика, ч. I, М.—Л., ГИИТЛ, 1948.
 Шифф Л., Квантовая механика, М., Издат. иностр. лит., 1957.
 Condon E. U., Morse P. M., Quantum Mechanics, chap. 4, New York, 1929.
 Feenberg E., A Note on Perturbation Theory, Phys. Rev., 74, 206 (1948).
 Feshbach H., On Feenberg's Perturbation Formula, Phys. Rev., 74, 1548 (1948).
 Kemble E. C., The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, chap. 11, New York, 1937.
 Mott N. F., Sheddon I. N., Quantum Mechanics and Its Applications, Oxford, New York, 1948.

Сведения об эффектах изменения формы границы:

- Brillouin L., Perturbation by Boundary Deformation as a Problem of Proper Values, Comptes rendus, 204, 1863 (1937).
 Cabrera, Perturbation of Boundary Conditions, Cahiers phys., 31, 24 (1948).
 Feshbach H., On the Perturbation of Boundary Conditions, Phys. Rev., 65, 307 (1944).
 Feshbach H., Harris C. M., The Effect of Non-uniform Wall Distributions of Absorbing Material on the Acoustics of Rooms, J. Acoust. Soc. Am., 18, 472 (1946).
 Wasserman G. D., On the Theory of Boundary Perturbations, Phil. Mag., 37, 563 (1946).
 Wasserman G. D., On Perturbation Problems Associated with Finite Boundaries, Proc. Cambridge Phil. Soc., 44, 251 (1947).

Дальнейшее изучение техники приближенных вычислений в вопросах рассеяния и диффракции:

- Мотт и Мессн, Теория атомных столкновений, М., Издат. иностр. лит., 1951.
 Condon E. U., Quantum Mechanics of Collision Processes, Rev. Modern Phys., 3, 43 (1931).
 Dalitz R. H., On Higher Born Approximations in Potential Scattering, Proc. Roy. Soc., A206, 509 (1951).
 Jost R., Pais A., On the Scattering of a Particle by a Static Potential, Phys. Rev., 82, 840 (1951).
 Morse P. M., Quantum Mechanics of Collision Processes, Rev. Modern Phys., 4, 577 (1932).

Ссылки на WKBJ-метод:

- Bohm D., Quantum Theory, chap. 12, Prentice-Hall, New York, 1951.
 Kemble E. C., The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, стр. 90 и далее, New York, 1937.
 Langer R. E., On the Connection Formulas and the Solutions of the Wave Equation, Phys. Rev., 51, 669 (1937).

Использование вариационного метода для вычисления дискретных собственных состояний:

- Коллатц Л., Численные методы решений дифференциальных уравнений, М. Издат. иностр. лит., 1953.
 Рэлей, Теория звука, М.—Л., Гостехиздат, 1955.
 Dushman S., Elements of Quantum Mechanics, chap. 11, New York, 1938.
 Hylleraas E. A., New Calculation of the Energy of Helium in the Ground State, Z. f. Physik, 54, 347 (1929).
 Pauling L., Wilson E. B., Introduction to Quantum Mechanics, New York, 1935.

Использование вариационного метода для вычисления рассеяния:

- Blatt J. M., Jackson J. D., On the Interpretation of Neutron-proton Scattering Data by the Schwinger Variational Method, Phys. Rev., 76, 18 (1949).
 Hulthen L., The Variational Principle for Continuous Spectra, X Cong. Math. Scand., Copenhagen, 1946.
 Hulthen L., Sturm—Liouville Problem Connected with Continuous Spectrum, Ark. Math., Ast. Phys., 35A, 1 (1948).
 Levine H., Schwinger J., On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane Screen, Phys. Rev., 75, 1423 (1949).
 Mott N. F., Sneddon I. N., Quantum Mechanics and Its Applications, Oxford, New York, 1948.
 Schwinger J., On the Charge Independence of Nuclear Forces (Appendix), Phys. Rev., 78, 138 (1950).

Сведения об итерационно-вариационном методе:

- Hestenes M. R., Karush W., Method of Gradients for Calculation of Characteristic Roots of Real Symmetric Matrix, Natl. Bur. Standards, J. Research, 47, 45 (1951).
 Kellogg O. D., On the Existence and Closure of Sets of Characteristic Functions, Math. Ann., 86, 14 (1922).
 Lanczos C., An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem, Nat. Bur. Standards, J. Research, 45, 255 (1950).
 Svartholm N., The Binding Energies of the Lightest Atomic Nuclei, Hakan Ohlssons, Lund, 1945 (dissertation).

Решение уравнений Лапласа и Пуассона

Мы в общем завершили изучение свойств и поведения полей. Мы рассмотрели различные виды полей, важные для физики, исследовали разнообразные уравнения и граничные условия, позволяющие строить поля, соответствующие в той или иной степени заданной физической картине, обсудили различные математические методы, при помощи которых уравнения могут быть решены, а граничные условия удовлетворены. Оставшаяся часть настоящей работы посвящается более или менее систематическому применению этих общих методов и результатов к конкретным физическим задачам.

В ходе предыдущих исследований мы уже рассмотрели многочисленные приложения общей теории в качестве примеров, выясняющих тот или иной вопрос; таким образом, характер возникающих задач и методы их решения в основном уже знакомы нам. Теперь необходимо систематически изложить, как применяются эти методы для решения новых задач, какие методы применять в первую очередь в тех или иных случаях и т. д. Этому будет посвящена остальная часть книги.

Следует еще раз подчеркнуть, что эта книга посвящена методам теоретической физики, математическому аппарату, который применяется при решении проблем во многих областях физики. Следовательно, мы ограничимся здесь изложением физического содержания рассматриваемых задач, достаточным лишь для того, чтобы показать их связь с физикой в целом, но не для того, чтобы дать связную картину физических явлений со всеми их подробностями. Мы будем часто переходить от одной области физики к другой, не всегда соблюдая логическое единство, показывая (мы надеемся, что это нам удастся), как данный математический аппарат может быть использован при решении задач, характерных для большого числа полей разнообразной природы.

Мы главным образом будем заниматься применениями наиболее современных методов расчета. Более простых приемов теоретической физики мы касались в различных местах предшествующей части этой книги, и они освещены во многих хорошо известных курсах. Но, как нам кажется, имеет смысл изложить здесь менее известные методы. Конечно, в результате этого чтение последующих глав книги будет затруднено для более или менее случайного читателя. Во многих местах ему будет трудно разглядеть за деревьями лес. Но мы надеемся, что за массой деталей более внимательный читатель в конце концов почувствует характер, дух метода и начнет приобретать то полунтуитивное «чувство» новой проблемы, которому так трудно научить, но которое является таким необходимым качеством для физика-теоретика.

Мы начнем с рассмотрения простейших уравнений: уравнения Лапласа $\nabla^2\phi = 0$ и соответствующего ему неоднородного уравнения — уравнения Пуассона $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$. Эти уравнения принадлежат к эллиптическому

типу, и поэтому к ним необходимо добавить условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе. Возвращаясь к изложенному на стр. 18 и 643 тома I, напомним, что уравнение Лапласа эквивалентно требованию, чтобы функция ψ не достигала ни максимума, ни минимума внутри области и чтобы значение ψ в каждой точке равнялось бы среднему из значений ψ в соседних точках.

Мы развили два метода для удовлетворения граничных условий, связанных соответственно с использованием собственных функций и функции Грина. Большей частью мы будем использовать оба этих метода, разлагая функцию Грина в ряд по собственным функциям в подходящей системе координат. В частном случае при решении уравнения Лапласа для двух измерений несколько весьма эффективных специальных методов дают нам свойства функций комплексного переменного и конформные отображения. К сожалению, эти методы не могут быть распространены на трехмерный случай, по крайней мере в их полной общности.

Уравнение Лапласа, как мы видели в гл. 2 и 3, появляется в гравитационных или электростатических проблемах; решения его суть электростатические или гравитационные потенциалы. Границами обычно являются поверхности проводников, а граничные условия — условиями Дирихле в том случае, когда задан потенциал проводника. Уравнение Лапласа появляется также в гидродинамике при изучении стационарного безвихревого потока несжимаемой жидкости; решением его является потенциал скоростей (или функция тока), граничные условия суть условия Неймана, возникающие из простого требования, чтобы жидкость не могла проникать сквозь твердые границы. К этому уравнению приходят также при описании установившегося потока тепла, стационарной (установившейся) диффузии в растворе (или диффузии нейтронов) и при исследовании многих других установившихся процессов. Скалярное поле, удовлетворяющее этому уравнению и граничным условиям, является *потенциалом*, его градиент пропорционален скорости потока или силе.

Когда имеются «источники» или «стоки», или «заряды», создающие поле, мы должны пользоваться уравнением Пуассона, где величина ρ есть плотность распределения источников или зарядов. При этом частное решение неоднородного уравнения строится с помощью функции Грина для свободного пространства, а граничные условия удовлетворяются подходящим выбором решений уравнения Лапласа.

Эти задачи будут последовательно рассмотрены для различных систем разделяющих координат, каждая из которых применяется для соответствующих видов граничных поверхностей. Сначала мы изучим двумерный случай с его специфическими методами, основанными на свойствах аналитических функций, а затем перейдем к трехмерному случаю, где имеющийся в нашем распоряжении аппарат более ограничен.

10.1. Решения в двумерном случае

В соответствии со сказанным на стр. 474—478 тома I в двумерном случае координатная система может быть выражена в декартовых координатах x, y с помощью функции $w(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$. Вещественная и мнимая части $w = \xi_1 + i\xi_2$ являются ортогональными координатами с тем специальным свойством, что соответствующие коэффициенты Ламе h_1 и h_2 равны (иными словами, отображение $w \rightarrow z$ *конформно*). Поэтому уравнение Лапласа имеет особенно простую форму

$$\nabla^2 \psi = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} \right] = 0, \quad (10.1.1)$$

а решения, представимые при помощи собственных функций, можно найти сразу для большого числа координатных систем.

Решения, являющиеся произведениями функций от одной переменной, могут иметь различный вид:

$$\xi_1, \xi_2, e^{ik\xi_1 \pm k\xi_2}, \sin(k\xi_1) \operatorname{sh}(k\xi_2), \operatorname{ch}(k\xi_1) \sin(k\xi_2) \text{ и т. д.} \quad (10.1.2)$$

Решением наиболее простого уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \psi = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} \right] = -4\pi \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (10.1.3)$$

соответствующего единичному «заряду», сосредоточенному в точке (x_0, y_0) , является, согласно формуле (7.1.9), функция Грина

$$G(x, y | x_0, y_0) = \operatorname{Re} [-2 \ln(z - z_0)] = \ln(1/|z - z_0|^2), \quad (10.1.4)$$

которая, конечно, должна быть преобразована к новым переменным w , ξ_1 и ξ_2 . Дальнейшие рассуждения более полезно проводить для какой-нибудь конкретной системы координат.

Декартовы координаты. Эти простейшие координаты удобны для бесконечных плоских границ (параллельных одна другой) и для областей, заключенных в прямоугольные призматические границы. Например,

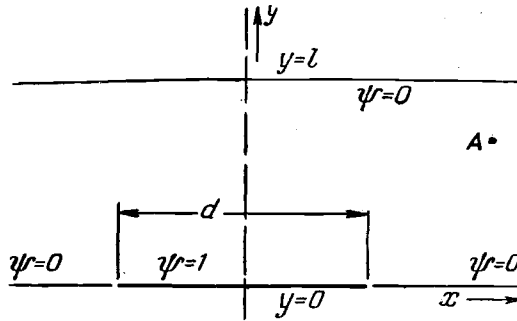


Рис. 10.1. Потенциал между двумя плоскостями с граничными значениями, зависящими только от x .

в полупространстве $y > 0$ (граничная плоскость $y=0$) с граничными значениями потенциала, зависящими только от x , мы пользуемся частными решениями $e^{-ky \pm ikx}$, так как выбранная зависимость от y обеспечивает стремление решения к нулю при $y \rightarrow \infty$, а зависимость от x позволяет получить собственные функции для области $-\infty < x < \infty$. Так как эта область бесконечна, то спектр собственных значений непрерывен и k^2 изменяется от 0 до ∞ . Этот случай был уже разобран в гл. 6. Формула (6.3.3) дает нам выражение для потенциала при положительных y , если вдоль границы $y=0$ задан потенциал $\phi_0(x)$.

В качестве примера можно вычислить распределение потенциала для конфигурации пластин, изображенной на рис. 10.1. Полоса шириной d имеет единичный потенциал, а остальная часть плоскости $y=0$ имеет нулевой потенциал, плоскость $y=l$ также имеет нулевой потенциал. Тогда, используя видоизмененную формулу (6.3.3), получаем

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[k(l-y)]}{\operatorname{sh}(kl)} dk \int_{-d/2}^{d/2} \cos[k(\xi - x)] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-d/2}^{d/2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[k(l-y)]}{\operatorname{sh}(kl)} e^{ik(\xi - x)} dk \right\}. \end{aligned}$$

Интеграл по k может быть вычислен при помощи контурного интегрирования. Если $(\xi - x) > 0$, мы замыкаем контур полуокружностью бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости k . Тогда интеграл равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов по всем полюсам подинтегральной функции в верхней полуплоскости (так как при $y < l$ и $\xi > x$ интеграл по верхней полуокружности равен нулю). Полюсы расположены в нулях функции $\text{sh}(kl)$, т. е. при $k = i \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, \dots$. Несколько громоздкие алгебраические выкладки приводят к выражению

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \int_{-d/2}^{d/2} e^{-(n\pi/l)|\xi-x|} d\xi = \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \left[1 - e^{-n\pi d/2l} \text{ch}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right], & |x| < \frac{1}{2}d, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) e^{-n\pi|x|/l} \text{sh}\left(\frac{n\pi d}{2l}\right), & |x| > \frac{1}{2}d. \end{cases} \end{aligned}$$

Естественно, что если потенциал полосы равняется V , а не 1, то результат надо будет умножить на V .

Таким образом, наш интеграл по собственным функциям вдоль оси x оказался разложенным в ряд по собственным функциям. Если раскрыть квадратные скобки в выражении, применяемом при $|x| < \frac{1}{2}d$, то первый из получающихся рядов оказывается разложением простой функции $lf(y)$, где

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) = 1 - \frac{y}{l}, \quad 0 < y \leq l.$$

Этот ряд сходится условно и, следовательно, его нельзя почленно дифференцировать (это связано с тем, что весьма неестественно выражать рядом по синусам функцию, равную единице при $y=0$). Если все же использовать это конечное выражение для ряда, то можно записать

$$\psi(x, y) = \begin{cases} l\left(1 - \frac{y}{l}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} e^{-n\pi d/2l} \text{ch}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), & |x| < \frac{1}{2}d, \\ \frac{1}{2}l\left(1 - \frac{y}{l}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi} e^{-n\pi d/l} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), & |x| = \frac{1}{2}d, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} e^{-n\pi|x|/l} \text{sh}\left(\frac{n\pi d}{2l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), & |x| > \frac{1}{2}d. \end{cases} \quad (10.1.5)$$

Эти ряды можно почленно дифференцировать всюду, исключая $x = \pm d$, $y = 0$, где имеется разрыв потенциала. Заметим, что конечное выражение $1 - y/l$ само является решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим граничным условиям при $y=0$ и $y=l$ для части области изменения x .

Отметим, что для $|x|$, значительно превосходящего $d/2$ (например, в точке A на рис. 10.1), третий ряд сходится столь быстро, что суще-

ственен только первый его член и

$$\psi(x, y) \simeq \frac{2l}{\pi} e^{-\pi|x|/l} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi d}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right), \quad |x| \gg \frac{1}{2}d.$$

Плотность заряда на полосе, где потенциал равен единице, получается по формуле $\sigma = -(1/4\pi)(\partial\psi/\partial y)$ при $y=0$. Так как мы избавились от недифференцируемой части ряда, то для плотности заряда получаем выражение

$$\sigma(x) = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi d/2l} \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad |x| < \frac{1}{2}d.$$

Используя разложение $\ln(1-x) = -\sum \frac{x^n}{n}$, мы можем получить конечное выражение для заряда, приходящегося на единицу длины полосы между $-x$ и $+x$ ($|x| < \frac{1}{2}d$):

$$Q = \int_{-x}^x \sigma dx = \frac{x}{2\pi} + \frac{l}{\pi^2} \ln \left[\frac{e^{\pi d/2l} - e^{-\pi x/l}}{e^{\pi d/2l} - e^{+\pi x/l}} \right], \quad 0 < x < \frac{1}{2}d. \quad (10.1.6)$$

Эта функция имеет логарифмическую особенность при $x \rightarrow \frac{1}{2}d$ (когда мы определяем полный заряд, размещенный на полосе), потому что плотность заряда у внешнего края полосы стремится к бесконечности благодаря близкому соседству проводящей плоскости, имеющей нулевой потенциал, каковой является вся оставшаяся часть плоскости $y=0$. Когда d велико по сравнению с l , логарифмический член мал по сравнению с первым членом всюду, исключая близкую окрестность края ($x \rightarrow \frac{1}{2}d$).

Прямоугольная призма, нагреваемая с одной стороны. Для плоских неограниченных областей можно провести много подобных расчетов распределения потенциала. Если же мы займемся областью, лежащей внутри прямоугольной призмы, то нам вместо интеграла Фурье понадобится ряд Фурье. Например, пусть имеется брус с прямоугольным поперечным сечением, показанным на рис. 10.2. Нижняя грань бруса нагрета до температуры $T=1$, а на верхней и боковых гранях поддерживается нулевая температура. Температура в точке (x, y) внутри бруса будет [на основании (6.3.2)] выражаться при помощи ряда

$$T(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\operatorname{sh}[(\pi/a)(2n+1)(b-y)]}{\operatorname{sh}[(2n+1)(\pi b/a)]} \sin\left[(2n+1)\frac{\pi x}{a}\right], \quad (10.1.7)$$

довольно быстро сходящегося всюду, если только y не стремится к нулю.

Мы можем еще более улучшить сходимость этого ряда, заметив, что для больших значений n отношение гиперболических синусов сводится к $e^{-(\pi y/a)(2n+1)}$. Такой ряд можно просуммировать; прибавляя и вычитая

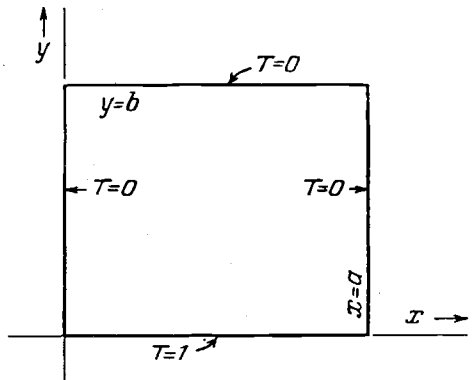


Рис. 10.2. Граничные условия для установившегося потока тепла в прямоугольном бруске.

этот ряд почленно, получим

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} \left\{ e^{-(\pi y/a)(2n+1)} \sin \left[\frac{\pi x}{a} (2n+1) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi}{a} (b-y)(2n+1) \right] - e^{-(\pi y/a)(2n+1)} \operatorname{sh} \left[\frac{\pi b}{a} (2n+1) \right]}{\operatorname{sh} [(2n+1)(\pi b/a)]} \sin \left[\frac{\pi x}{a} (2n+1) \right] \right\} = \\ & = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} \left\{ \operatorname{Im} [e^{i(\pi/a)(2n+1)(x+iy)}] + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{sh} [(\pi y/a)(2n+1)]}{\operatorname{sh} [(\pi b/a)(2n+1)]} e^{-(\pi b/a)(2n+1)} \sin \left[\frac{\pi x}{a} (2n+1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Arth} u = u + \frac{1}{3}u^3 + \dots$, то мы можем просуммировать первые члены (они образуют ряд, сходящийся более медленно), и получим ($z = x + iy$)

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{4}{\pi} \left\{ \operatorname{Im} [\operatorname{Arth} (e^{i\pi z/a})] - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\pi b/a)(2n+1)} \operatorname{sh} \left[\frac{\pi y}{a} (2n+1) \right]}{2n+1} \frac{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi y}{a} (2n+1) \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi b}{a} (2n+1) \right]} \sin \left[\frac{\pi x}{a} (2n+1) \right] \right\} = \\ & = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\sin (\pi x/a)}{\operatorname{sh} (\pi y/a)} \right] - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\pi b/a)(2n+1)} \operatorname{sh} \left[\frac{\pi y}{a} (2n+1) \right]}{\pi (2n+1)} \frac{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi y}{a} (2n+1) \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi b}{a} (2n+1) \right]} \sin \left[\frac{\pi x}{a} (2n+1) \right]. \end{aligned}$$

Последний ряд (и его производная) мал и сходится столь быстро, что обычно достаточно при его рассмотрении ограничиться первым членом. Действительно, первый член ряда всегда меньше 0,1, если b есть величина того же порядка, что и a . Поэтому с очень большой степенью точности

$$T(x, y) \simeq \frac{2}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\sin (\pi x/a)}{\operatorname{sh} (\pi y/a)} \right] - 2e^{-\pi b/a} \frac{\operatorname{sh} (\pi y/a)}{\operatorname{sh} (\pi b/a)} \sin (\pi x/a) \right\}. \quad (10.1.8)$$

Когда b стремится к бесконечности и призма превращается в полубесконечную плиту, нагретую по основанию, распределение температуры описывается одним только первым членом этого выражения. По своему происхождению этот первый член есть вещественная часть функции $-(4i/\pi) \operatorname{Arth} (e^{i\pi z/a}) = \psi + i\chi$:

$$\psi = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\sin (\pi x/a)}{\operatorname{sh} (\pi y/a)} \right], \quad \chi = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arth} \left[\frac{\cos (\pi x/a)}{\operatorname{ch} (\pi y/a)} \right].$$

Следовательно, в этом случае мы получаем в замкнутой форме выражения как для потенциала (в данном случае — температуры), так и для функции тока (см. стр. 153, 154 тома I). Остаток ряда в формуле (10.1.8) и в предыдущей может рассматриваться как поправочный член, добавляемый к этому основному решению для того, чтобы потенциал обращался в нуль при $y = b$, а не при $y = \infty$.

Градиент температуры пропорционален потоку тепла. Как и в предыдущем примере, этот градиент имеет особенность при $y = 0$ и $x = 0$.

Функция Грина. В соответствии с формулой (10.1.4) функция Грина в декартовых координатах имеет вид $-\ln [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]$. Она обращается в ∞ в точке (x_0, y_0) , где расположен «источник», и непрерывно убывает по мере удаления от этой точки. Когда границей является бесконечная плоскость, как, например, плоскость $y=0$, соответствующее решение может быть получено при помощи метода изображений (см. стр. 753 тома I).

Например, потенциал, соответствующий единичному линейному заряду в точке (x_0, y_0) (длинная тонкая проволока, перпендикулярная плоскости x, y , с линейной плотностью заряда, равной единице) и бесконечной проводящей плоскости $y=0$, на которой поддерживается нулевой потенциал, равен

$$\phi(x, y) = \ln \left[\frac{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right]. \quad (10.1.9)$$

Плотность заряда, индуцированного на заземленной плоскости, равна при этом

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{-y_0/\pi}{(x-x_0)^2 + y_0^2}.$$

Она достигает максимума при $x=x_0$. Весь заряд в полосе между z и $z+1$ (от $x=-\infty$ до $x=+\infty$) равен единице. Он и должен быть таковым, чтобы уравновесить единичный заряд, приходящийся на единицу длины проволоки.

Силовые линии такого поля образуют семейство координатных линий $\chi = \text{const}$, которые всюду ортогональны эквипотенциальным линиям $\psi = \text{const}$ (см. стр. 25 тома I). Другими словами, $\text{grad } \chi$ перпендикулярен $\text{grad } \psi$, что в рассматриваемом здесь двумерном случае можно получить, полагая

$$\partial \psi / \partial x = \partial \chi / \partial y \quad \text{и} \quad \partial \psi / \partial y = -\partial \chi / \partial x.$$

Но, согласно формуле (4.1.10), эти равенства соответствуют требованию, чтобы потенциальная функция ψ была вещественной частью, а χ мнимой частью некоторой функции комплексного переменного $z = x + iy$. В данном случае, если считать, что на единицу длины приходится заряд q , эта функция равна

$$\begin{aligned} F(z) &= \psi + i\chi = 2q \ln \left(\frac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0} \right), \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad \bar{z}_0 = x_0 - iy_0, \\ \psi &= q \ln \left[\frac{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right], \\ \chi &= 2q \arctg \left(\frac{y+y_0}{x-x_0} \right) - 2q \arctg \left(\frac{y-y_0}{x-x_0} \right) = \\ &= 2q \arctg \left[\frac{2y_0(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + y^2 - y_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (10.1.10)$$

Линии $\psi = \text{const}$, $\chi = \text{const}$ показаны на рис. 10.3,а (они являются координатными линиями биполярной системы координат). Функция χ называется *функцией тока* (см. стр. 24 тома I) или функцией силовых линий. К сожалению, этот простой метод разыскания силовых линий применим только для двумерных задач теории потенциала.

Как мы показали на стр. 753, 754 тома I, если «источник» в точке (x_0, y_0) является однородным линейным зарядом (с линейной плотностью q), параллельным оси z , то ψ представляет электростатический потенциал, а χ силовые линии, и напряженность электрического поля равна $-\text{grad } \psi$. С другой стороны, как показывает предыдущее рассмотрение, если «источник» является тонкой проволокой, по которой течет ток q в поло-

жительном направлении оси z , то функция ψ определяет магнитные силовые линии, а функция χ — магнитный «потенциал». Этот потенциал многозначен, так как $\operatorname{arctg} z$ — многозначная функция (зависящая от числа обходов вокруг проволоки), но его градиент в каждой точке равен напряженности магнитного поля в этой точке.

Поэтому, если через точку (x_0, y_0) проходит такая проволока, по которой в положительном направлении оси z течет ток q , а через точку $(x_0, -y_0)$ проходит вторая проволока с током q , текущим в противоположном направлении, то функция ψ , определяемая формулой (10.1.10), описывает магнитные силовые линии возникшего поля, а величина $\operatorname{grad} \chi$ (равная $|dF/dz|$) равна напряженности этого поля в точке (x, y) .

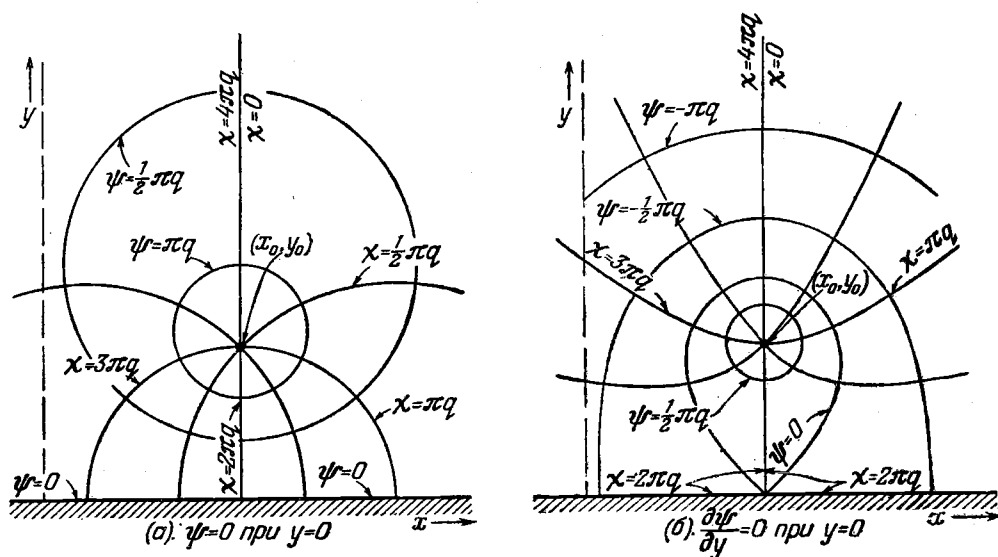


Рис. 10.3. Потенциал и функция тока для линейного источника и плоскости.

Записав уравнение $\psi = V$ в координатах $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, для которых точка (x_0, y_0) играет роль начала координат, мы можем показать, что эквипотенциальные линии $\psi = V$ являются окружностями. Потенцируя обе части этого уравнения и дополняя до полного квадрата, мы получаем уравнение для линии, соответствующей значению потенциала V :

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{2y_0}{e^{V/q} - 1} \right)^2 = \left(\frac{2y_0}{e^{V/q} - 1} \right)^2 e^{V/q}.$$

Это уравнение окружности радиуса $2y_0 e^{V/2q} / (e^{V/q} - 1)$. Точка $x_0, y_0 + [2y_0 / (e^{V/q} - 1)]$ является центром этой окружности и лежит несколько выше фокуса (x_0, y_0) линий тока $\chi = \text{const}$.

Для достаточно больших значений V можно пренебречь степенями $e^{-V/2q}$ выше первой. В этом приближении радиус окружности, вдоль которой потенциал равен V , будет равен $2y_0 e^{-V/2q}$, а центр окажется в точке (x_0, y_0) . Поэтому, если проволока такого радиуса с центром в точке (x_0, y_0) заряжена q единицами на единицу длины, то ее потенциал по отношению к потенциалу заземленной плоскости $y = 0$ будет равен V .

Обращая эти рассуждения, мы теперь можем найти заряд, необходимый для того, чтобы потенциал проволоки радиуса r с центром, отстоящим на расстояние y_0 от заземленной плоскости, превосходил потенциал земли на величину V . В первом приближении, т. е. учитывая лишь

первую степень $e^{-V/2q}$, можно считать

$$\rho \simeq 2y_0 e^{-V/2q} \text{ или } q \simeq \frac{V}{2 \ln(2y_0/\rho)}, \quad \rho \ll y_0.$$

Поэтому емкость, приходящаяся на единицу длины проволоки радиуса ρ с центром, удаленным на расстояние y_0 ($y_0 \gg \rho$) от проводящей плоскости, равна

$$C = q/V \simeq [2 \ln(2y_0/\rho)]^{-1} \quad (10.1.11)$$

электростатических единиц. Для проволок больших радиусов нам пришлось бы пользоваться точными выражениями для радиуса и координат центра. Этот вопрос будет рассмотрен позже.

При другом виде граничных условий, вычисляя потенциал скоростей в случае линейного источника жидкости, расположенного в точке (x_0, y_0) над твердой плоскостью $y = 0$, мы можем воспользоваться методом изображений. В этом случае нормальная производная потенциала скоростей на плоскости $y = 0$ должна равняться нулю. Этого можно добиться, прибавляя потенциал изображения, а не вычитая его:

$$\begin{aligned} F &= -2q \ln[(z - z_0)(z - \bar{z}_0)] = \phi + i\chi, \\ \phi &= -q \ln\{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2][(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2]\}, \\ \chi &= -2q \operatorname{arctg} \left[\frac{y - y_0}{x - x_0} \right] - 2q \operatorname{arctg} \left[\frac{y + y_0}{x - x_0} \right] = \\ &= -2q \operatorname{arctg} \left[\frac{2y(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2 - y^2} \right]. \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Соответствующие эквипотенциальные линии и линии тока показаны на рис. 10.3, б. Функция ϕ соответствует магнитным силовым линиям вокруг провода, по которому течет ток q и который проходит через точку (x_0, y_0) над пластиной из мягкого железа, расположенной в плоскости $y = 0$. Магнитная проницаемость пластины предполагается столь большой, что магнитное поле всюду нормально к ее поверхности.

Уравнение (2.4.2) показывает, что к этой же задаче сводится и задача о тонкой трубе, помещенной в пористую почву на расстоянии y_0 от плоской непроницаемой для жидкости поверхности. Боковая поверхность трубы пронизана отверстиями, являясь тем самым источником жидкости. Сопротивление почвы потоку обозначим через R . Полный поток, исходящий из трубы, рассчитанный на единицу длины, равен q . Этот поток просачивается через почву вдоль линий тока, заданных при помощи функции χ . В силу формулы (2.4.2) и следующих, давление в каждой точке равно потенциалу ϕ , умноженному на R , минус потенциал силы тяжести.

Согласно этому определению, на достаточно большом расстоянии от трубы давление должно было бы стать отрицательным. Поэтому положим, что на достаточно большом расстоянии существуют своего рода «стоки», где жидкость всасывается и давление равно нулю. Предположим, что это происходит на полукруглой поверхности цилиндра с осью, проходящей через точку $(x_0, 0)$, радиуса D ($D \gg y_0$). Тогда, для того чтобы ϕ обращалось в нуль на этой поверхности, надо прибавить $q \ln(D^2)$ к выражению (10.1.12). Потенциал на поверхности трубы радиуса ρ ($\rho \ll y_0$) при этом приближенно равен $\phi \simeq -2q \ln(2\rho y_0/D^2)$. Тогда давление в трубе, создающее на единицу ее длины поток q , равно

$$P \simeq y_0 g - 2qR \ln(2\rho y_0/D^2), \quad \rho \ll y_0 \ll D,$$

где y_0 — глубина залегания трубы, g — увеличение давления при погружении на единицу длины, вызванное силой тяжести, R — сопротивление почвы потоку, ρ — радиус трубы (предполагаемый малым по сравнению с y_0).

Заметим, что чем меньше y_0 , тем большим должно быть избыточное давление в трубе, необходимое для создания заданного потока. Это не является неожиданным, так как, уменьшая y_0 , мы приближаем к трубе непроницаемый слой, который в силу этого больше препятствует созданию потока. Давление в точке (x, y) равно

$$P = gy - 2qR \ln [(1/D^4)(x^2 + y^2 + y_0^2)^2 - 4(y_0 y/D^2)^2],$$

где y — расстояние от непроницаемого слоя (вниз от него) и где мы положили $x_0 = 0$, так как значение x_0 здесь не играет существенной роли.

Полярные координаты. При выражении потенциала вокруг уединенной заряженной проволоки удобно ввести полярные координаты

$$\omega = \ln(x + iy) = \zeta + i\varphi, \quad \text{где } \zeta = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

Коэффициенты Ламе для этих координат равны $h_\zeta = h_\varphi = |dz/d\omega| = e^\zeta$, а выражение для лапласиана [см. уравнение (10.1.1)]

$$\nabla^2 \psi = e^{-2\zeta} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right], \quad e^\zeta = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поэтому его частными решениями являются ζ , φ , $e^{m\zeta} \cos m\varphi$ и т. п. Каждое решение может быть представлено в виде вещественной части некоторой функции комплексного переменного $\omega = \zeta + i\varphi = \ln z$.

Если граничными поверхностями служат концентрические круговые цилиндры, то, очевидно, удобно применять эти координаты; например, потенциал вне цилиндра радиуса a может быть выражен при помощи ряда по функциям вида $e^{-m\zeta} \cos(m\varphi) = r^{-m} \cos(m\varphi)$ или $r^{-m} \sin(m\varphi)$, где m должно быть целым для того, чтобы ψ оставалось непрерывной функцией при $\varphi = 0, 2\pi$. Используя обычные выражения для рядов Фурье, а также условие, что $\psi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, мы найдем потенциал вне цилиндра

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \left\{ \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(x) \cos[n(x - \varphi)] dx \right\}, \quad (10.1.13)$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ при $n = 1, 2, \dots$, а $\psi_0(\varphi)$ есть заданное значение потенциала на поверхности цилиндра.

Например, этот потенциал в случае, когда одна часть боковой поверхности цилиндра ($0 < \varphi < \pi$) имеет потенциал $+1$, а другая часть ($\pi < \varphi < 2\pi$) потенциал -1 , равен

$$\psi(r, \varphi) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left(\frac{a}{r} \right)^{2m+1} \sin[(2m+1)\varphi] = \frac{2}{\pi} \arctg \left[\frac{2ar \sin \varphi}{r^2 - a^2} \right].$$

Учитывая сказанное на странице 170, замечаем, что функция тока, соответствующая этому потенциалу, равна

$$\chi(r, \varphi) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arth} \left[\frac{2ar \cos \varphi}{r^2 + a^2} \right]. \quad (10.1.14)$$

Далее, потенциал между двумя концентрическими цилиндрами, из которых внутренний (радиуса a) имеет нулевой потенциал, а внешний (радиуса b) потенциал V , равен

$$\psi = V \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0} = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Цилиндры, помещенные в поля. Во многих задачах теории потенциала нас будет интересовать вопрос о том, как определить влияние границы какой-либо формы на поле, порожденное границами другой формы. Например, нас интересует поле вокруг цилиндра, помещенного внутрь однородного поля, порожденного, например, двумя параллельными плоскостями, расположенными на большом расстоянии друг от друга. В подобных случаях полезно уметь выражать решения уравнения Лапласа, удобно записывающиеся в какой-то одной системе координат, через соответствующие решения в другой системе координат.

Очень простым примером этого является решение $\psi = -Ex$, которое соответствует прямоугольным границам и представляет собой однородное поле ($-\text{grad } \psi = Ei$), принимающее в полярных координатах $r = e^{\zeta}$ и φ вид $\psi = -Er \cos \varphi$. Поучительный пример использования подобных соотношений дает задача о цилиндре из диэлектрика, помещенном в однородное поле. Пусть диэлектрическая постоянная цилиндра равна ϵ , а граничные условия таковы, что на его поверхности производная потенциала по внешней нормали равна производной потенциала по внутренней нормали, умноженной на ϵ , в то время как тангенциальные производные потенциала равны друг другу (или, что то же, внутренний и внешний потенциалы равны на поверхности).

В выражение для потенциала однородного поля $-Er \cos \varphi$ входит сомножитель $\cos \varphi$. Следовательно, этот сомножитель должен входить во все члены, так как сопряжение осуществляется на поверхности $r = a$, где r постоянно, а φ изменяется от 0 до 2π . Внутри цилиндра только частное решение $Ar \cos \varphi$ имеет нужный нам вид зависимости от φ , так как решение другого вида $(B/r) \cos \varphi$ не остается конечным при $r = 0$. Допустимая форма решения вне цилиндра имеет вид $Ar \cos \varphi + (B/r) \cos \varphi$ и превращается в $Ar \cos \varphi$ при достаточно больших значениях r . Но, по предположению, при достаточно больших r потенциал поля сводится к выражению $-Er \cos \varphi$, соответствующему однородному полю. Следовательно, выражения, подлежащие сопряжению на границе $r = a$, таковы: $\psi = -Er \cos \varphi + (B/r) \cos \varphi$ для $r > a$ и $\psi = Ar \cos \varphi$ для $r < a$. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, мы должны иметь $-Ea + B/a = Aa$ и $-E - B/a^2 = \epsilon A$. Решая эти уравнения, получим

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} -Er \cos \varphi + E \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{a^2}{r} \cos \varphi, & r > a, \\ -\frac{2E}{\epsilon + 1} r \cos \varphi, & r < a. \end{cases}$$

Другой, более простой пример представляет цилиндр, погруженный в поток идеальной, несжимаемой жидкости, имеющей скорость v_0 . Здесь граничные условия заключаются в том, что при $r \rightarrow \infty$ скорость (т. е. $\text{grad } \psi$) должна равняться v_0 по величине и должна быть направлена по оси x , а при $r = a$ должна быть направлена по касательной к поверхности цилиндра ($\partial\psi/\partial r = 0$). Решение, удовлетворяющее этим требованиям, имеет вид

$$\psi = v_0 r \cos \varphi + v_0 (a^2/r) \cos \varphi, \quad \chi = v_0 r \sin \varphi - v_0 (a^2/r) \sin \varphi.$$

Эквипотенциальные линии и линии тока показаны на рис. 10.4.

Поток вязкой жидкости. Выражения (2.3.14) и (2.3.15) показывают, что соотношение между давлением и скоростью жидкости в медленном установившемся потоке вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\text{grad } p = -2\eta \text{ rot } \omega,$$

где p есть давление в жидкости, η — ее коэффициент вязкости, $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ — вихревой вектор (или просто вихрь), а $\mathbf{v}$ — скорость жидкости.

Мы пренебрегаем объемными силами $\mathbf{F}$, такими как, например, сила тяжести; мы считаем, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, так как жидкость предполагается несжимаемой; мы пренебрегаем членом $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, так как $\mathbf{v}$ предполагается малой.

В двумерном потоке $\mathbf{v} = i v_x + j v_y$, вихревой вектор ω направлен по оси z и имеет величину

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Уравнения, связывающие давление p с величиной вихря ω в случае двух измерений, имеют вид

$$\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

т. е. являются уравнениями Коши — Римана, связывающими вещественную и мнимую части аналитической функции комплексного переменного.

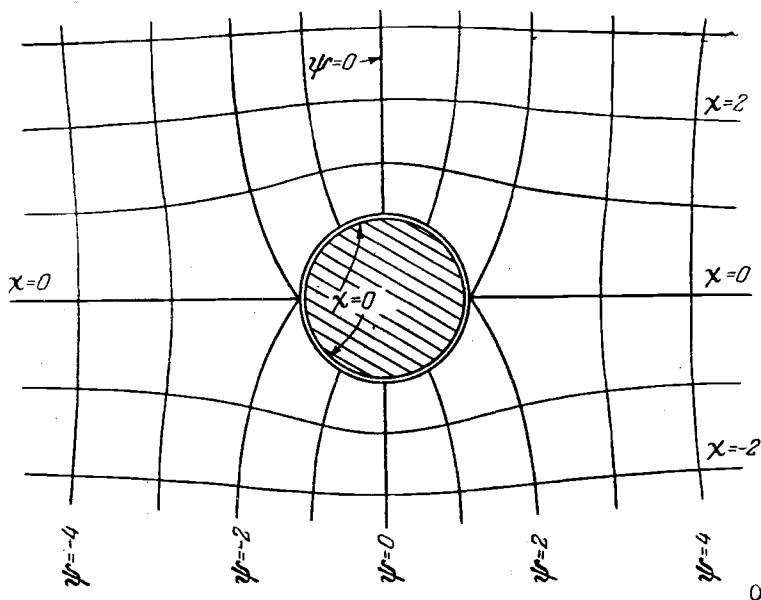


Рис. 10.4. Потенциал скоростей и функция тока для безвихревого потока, обтекающего цилиндр.

Поэтому, если мы сможем найти подходящую функцию $W(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, вещественная часть которой равна $p/2\eta$, а мнимая часть $-\omega$, то можно будет найти давление и вихрь.

С другой стороны, если существует функция тока $U(x, y)$, производные которой связаны со скоростью соотношениями

$$\frac{\partial U}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -v_y$$

(другими словами $\operatorname{rot} U \mathbf{k} = \mathbf{v}$), то U связана с вихрем уравнением Пуассона

$$\nabla^2 U = -2\omega.$$

Поэтому, определив U (либо W), удовлетворяющую граничным условиям, мы сможем найти ω и p (либо U и p) и решить задачу о движении вязкой жидкости.

Очень простым является случай двумерного (параллельного плоскости x, y) потока вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями.

одна из которых имеет уравнение $y = +b$, а другая $y = -b$. Весь поток параллелен оси x , а скорость жидкости в точке (x, y) равна

$$v_x = \frac{3Q}{4b^3} (b^2 - y^2),$$

где Q есть объем жидкости, протекающей в единицу времени между плоскостями, рассчитанный на единицу глубины. Отсюда следует, что $U = \frac{Q}{b^3} \left(\frac{3}{4} b^2 y - \frac{1}{4} y^3 \right)$. Лапласиан U равен $-\frac{3Q}{2b^3} y$, т. е. удвоенной мнимой части аналитической функции

$$W = -\frac{3Q}{4b^3} [x + iy - x_0] = \frac{p}{2\eta} - i\omega.$$

Поэтому давление равно $(3\eta Q/2b^3)(x_0 - x)$, где x_0 — край пластин (где давление равно нулю); вихрь равен $(3Q/4b^3)y$ и по абсолютной величине принимает наибольшее значение вблизи пластин при $y = \pm b$, что не является неожиданным.

Эти соотношения могут быть также выражены при помощи криволинейных координат на плоскости. Положим $f(\zeta + i\varphi) = x + iy$, где ζ и φ — новые координаты. Оба коэффициента Ламе h_ζ и h_φ равны $|df/d\omega|$, где $\omega = \zeta + i\varphi$, а лапласиан в новых координатах равен, согласно (4.1.11),

$$\nabla^2 U = 4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \right) = \frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} \right),$$

где $h^2 = |df/d\omega|^2$, а ω и $\bar{\omega}$ следует рассматривать как независимые переменные.

Представим теперь функцию тока U в виде суммы двух функций:

$$U = \frac{i}{8} [f(\omega) F(\bar{\omega}) - f(\bar{\omega}) F(\omega)] + U_0 = \frac{1}{4} \operatorname{Im} [f(\bar{\omega}) F(\omega)] + U_0, \quad (10.1.15)$$

где $f(\omega)$ — функция, определяющая координаты ξ и φ , F — произвольная функция от ω или $\bar{\omega}$, а U_0 — решение уравнения Лапласа $\nabla^2 U_0 = 0$; F и U_0 подбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия задачи. Выражение, стоящее в скобках, не является аналитической функцией, так как оно одновременно зависит от ω и $\bar{\omega}$. Однако из него мы можем получить скорость путем дифференцирования:

$$v_\zeta = \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

Так как выражение, стоящее в скобках, не является мнимой частью аналитической функции, то оно необязательно удовлетворяет уравнению Лапласа. Мы имели это в виду, так как в соответствии с предшествующими рассуждениями вихрь равен

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{2} \nabla^2 U = -\frac{i}{4h^2} [f'(\omega) F'(\bar{\omega}) - f'(\bar{\omega}) F'(\omega)] = \\ &= \frac{i}{4} \left[\frac{F'(\omega)}{f'(\bar{\omega})} - \frac{F'(\bar{\omega})}{f'(\omega)} \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\frac{F'(\omega)}{f'(\bar{\omega})} \right], \end{aligned}$$

где штрихи обозначают дифференцирование по ω или по $\bar{\omega}$. Но этот результат показывает, что если выбрать U в виде (10.1.15), то вихрь будет мнимой частью некоторой функции от $\omega = \zeta + i\varphi$, следовательно, на основании проведенных выше рассуждений для медленного потока давление и вихрь задаются при помощи комплексной функции

$$W = \frac{1}{2} \frac{F'(\omega)}{f'(\bar{\omega})} = \frac{p}{2\eta} + \operatorname{const} - i\omega. \quad (10.1.16)$$

Чтобы разобрать пример, не столь тривиальный, как пример с параллельными пластинами, предположим, что мы наклонили пластины так, что угол между ними равен 2α . В полярных координатах уравнение одной из граничных плоскостей имеет вид $\varphi = \alpha$, а другой $\varphi = -\alpha$. Предположим, что жидкость прогоняется из наиболее узкой области, например со стороны $r = r_0$, где расстояние между пластинами равно $2r_0 \sin \alpha$, в сторону более широкого раствора при $r = r_1$, где расстояние между пластинами равно $2r_1 \sin \alpha$. Подходящими являются полярные координаты ζ и φ , где $z = f(w) = e^w$, $w = \zeta + i\varphi$. Коэффициент Ламе h равен $|f'| = e^\zeta$; $x = e^\zeta \cos \varphi$, $y = e^\zeta \sin \varphi$.

Мы хотели бы найти такую функцию F , чтобы функция тока U зависела только от φ и не зависела от ζ , так что весь поток был бы радиальным. Чтобы получить такую функцию, попытаемся ее искать в виде $F(w) = Ae^{-w}$. Тогда из уравнения (10.1.15)

$$U = \frac{1}{8} iA [e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}] + B\varphi = B\varphi - \frac{1}{4} A \sin(2\varphi).$$

Функция $B\varphi$, являющаяся решением уравнения Лапласа, добавлена, чтобы удовлетворить граничным условиям. Вычисляя v , находим, что

$$v_r = e^{-\zeta} \left[B - \frac{1}{2} A \cos(2\varphi) \right], \quad v_\varphi = 0.$$

v_r должна обращаться в нуль при $\varphi = \pm \alpha$. Поэтому $B = \frac{1}{2} A \cos 2\alpha$.

Определим теперь значение A , подсчитав полный поток:

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} v_r e^\zeta d\varphi = \frac{1}{2} A [2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha],$$

откуда $A = Q / \left(\alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$. Следовательно,

$$F(w) = \frac{Qe^{-w}}{\alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \quad \text{и} \quad W = \frac{-Qe^{-2w}}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Окончательное решение имеет, таким образом, следующий вид:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{Q/r}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} [\cos 2\varphi - \cos 2\alpha], \quad v_\varphi = 0, \\ p &= \frac{-2\eta Q}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \left[\frac{1}{r_0^2} - \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \right], \\ w &= \frac{Q}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \frac{\sin 2\varphi}{r^2}, \end{aligned} \quad (10.1.17)$$

где мы положили давление равным нулю при $r = r_0$, $\varphi = 0$. Перепад давления вдоль оси между r_0 и r_1 равен

$$\frac{2\eta Q}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2 r_0^2}.$$

Как можно видеть, этот метод не является вполне удовлетворительным, поскольку приходится начинать с конца, подбирая различные функции F , пока не будет найдена (если это удастся) такая функция, которая соответствует физически интересному случаю для некоторой координатной системы. Когда такой случай найден, результаты оказываются полезными, но это не слишком удовлетворительный путь построения теоретической физики.

Функция Грина в полярных координатах. Потенциал создаваемый единичным линейным зарядом, расположенным в точке (r_0, φ_0) , является действительной частью комплексной функции [см. уравнение (10.1.4)]

$$-\ln [(z-z_0)^2] = \begin{cases} -2 \ln z + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z_0}{z} \right)^n, & |z| > |z_0|, \\ -2 \ln z_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_0} \right)^n, & |z| < |z_0|, \end{cases}$$

где $z = re^{i\varphi}$ и $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$. Поэтому потенциал, являющийся функцией Грина, выраженной в полярных координатах, имеет вид

$$G(r, \varphi | r_0, \varphi_0) = \begin{cases} -2 \ln r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \cos [n(\varphi - \varphi_0)], & r > r_0, \\ -2 \ln r_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos [n(\varphi_0 - \varphi)], & r < r_0. \end{cases} \quad (10.1.18)$$

При помощи этой функции Грина можно решить задачу о потенциале, который создается линейным зарядом с линейной плотностью q , находящимся в точке $(r_0, 0)$, в присутствии заземленного цилиндра радиуса a ($a < r_0$) с осью, совпадающей с осью z . Если бы не было заземленного цилиндра, то в координатах (r, φ) в силу уравнения (10.1.18) потенциал, создаваемый линейным зарядом, выражался бы в виде

$$-2q \ln r_0 + 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos(n\varphi), \quad r < r_0.$$

К этому выражению надо прибавить такую комбинацию из членов вида $(1/r)^n \cos(n\varphi)$, являющихся решениями уравнения Лапласа, чтобы потенциал обратился в нуль при $r=a$. Нетрудно видеть, что такой комбинацией является

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} 2q \ln \left(\frac{r}{a} \right) - 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{a^2}{r_0 r} \right)^n - \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \right] \cos(n\varphi), & a < r < r_0, \\ 2q \ln \left(\frac{r_0}{a} \right) - 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{a^2}{r_0 r} \right)^n - \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right] \cos(n\varphi), & r > r_0; \end{cases} \quad (10.1.19)$$

появление второго выражения связано с тем фактом, что форма функции Грина различна при $r > r_0$ и при $r < r_0$.

Таким образом, мы прибавили ряд

$$2q \ln \left(\frac{rr_0}{a} \right) - 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r} \right)^n \cos(n\varphi)$$

к функции Грина $qG(r, \varphi | r_0, 0)$. Но этот ряд (с точностью до константы) представляет собой потенциал, создаваемый линейным зарядом с плотностью $-q$, помещенным в точке $r = a^2/r_0$, $\varphi = 0$, являющейся изображением точки $(r_0, 0)$ относительно окружности $r = a$. Поэтому мы можем за-

писать потенциал, заданный равенством (10.1.19), в виде

$$\begin{aligned}\psi(r, \varphi) &= qG(r, \varphi | r_0, 0) - qG\left(r, \varphi \left| \frac{a^2}{r_0}, 0\right.\right) + 2q \ln\left(\frac{r_0}{a}\right) = \\ &= q \ln \left\{ \frac{(r/a)^2 + (a/r_0)^2 - 2(r/r_0) \cos \varphi}{1 + (r/r_0)^2 - 2(r/r_0) \cos \varphi} \right\}. \quad (10.1.20)\end{aligned}$$

Это выражение, очевидно, можно было получить непосредственно из рассуждений гл. 7 о потенциалах изображений относительно плоскостей, цилиндров и сфер.

Эта функция является вещественной частью функции

$$2q \ln \left[r_0 \left(z - \frac{a^2}{r_0} \right) / a(z - r_0) \right].$$

Мнимая часть этой функции есть функция

$$\chi(r, \varphi) = 2q \operatorname{arctg} \left[\frac{(a^2 - r_0^2)(r/r_0) \sin \varphi}{r^2 + a^2 - (r/r_0)(r_0^2 + a^2) \cos \varphi} \right],$$

которая задает силовые линии или линии тока.

Это решение описывает не только распределение потенциала и силовых линий в электростатическом поле, создаваемом линейным зарядом

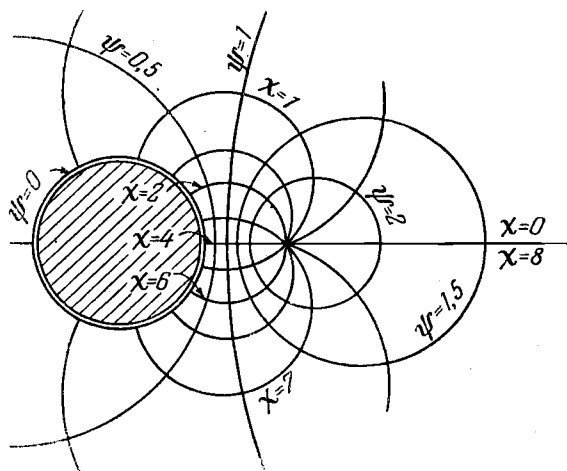


Рис. 10.5. Потенциал и функция тока для источника, расположенного вне заземленного кругового цилиндра.

вокруг заземленного цилиндра. Оно соответствует также случаю установившейся диффузии вещества, поступающего в раствор вдоль прямой, проходящей через точку $r=r_0$, $\varphi=0$, и выделяющегося из раствора вдоль цилиндрической поверхности $r=a$. Плотность вещества в каждой точке пропорциональна ψ . Линии тока и эквипотенциальные линии показаны на рис. 10.5.

В непосредственной близости от точки $r=r_0$, $\varphi=0$ эквипотенциальные линии приблизительно совпадают с окружностями. Потенциал в точках окружности радиуса ρ может быть получен наиболее просто путем подсчета, с точностью до членов первого порядка относительно ρ/r_0 , потенциала ψ для $z=r_0 + \rho e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}V &= \operatorname{Re} \left\{ 2q \ln \left[r_0 \left(z - \frac{a^2}{r_0} \right) / a(z - r_0) \right] \right\} \simeq \\ &\simeq -2q \operatorname{Re} \left\{ \ln \left[a \rho e^{i\theta} / r_0 \left(r_0 - \frac{a^2}{r_0} \right) \right] \right\} \simeq -2q \ln \left[\frac{\rho a}{r_0^2 - a^2} \right], \quad r_0 > a \gg \rho.\end{aligned}$$

Исходя из этого, можно вычислить емкость тонкого провода вблизи заземленного цилиндра. Дифференцируя выражение для потенциала, можно определить плотность заряда, индуцированного на цилиндре (или, в случае диффузии, скорость выделения вещества на цилиндре).

Внутреннее нагревание цилиндров Функция Грина может быть использована также при решении уравнения Пуассона в случае, когда заряды или источники распределены внутри кругового цилиндра. Типичная проблема такого рода возникает при вычислении распределения температуры внутри уранового цилиндра, нагревающегося изнутри в результате ядерного распада. В каждой точке скорость образования тепла пропорциональна скорости распада в этой точке, которая в свою очередь пропорциональна плотности медленных нейтронов. Если количество тепла, образующегося в единице объема за единицу времени, равно $q(x, y)$, а теплопроводность урана равна K , то температура внутри цилиндра, согласно (2.4.4), удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2 T = -q/K$.

Для источника тепла, расположенного на прямой, проходящей через точку (r_0, φ_0) внутри цилиндра, ось которого совпадает с осью z , стационарное распределение температуры задается суммой функции Грина (10.1.18) и решения уравнения Лапласа, выбранного так, чтобы полностью удовлетворялись граничные условия на поверхности цилиндра $r = a$. Если на границе задано условие $T = 0$ при $r = a$, то температура в точке (r, φ) равна

$$T(r, \varphi | r_0, \varphi_0) =$$

$$= \frac{q(r_0, \varphi_0)}{4\pi K} \left\{ G(r, \varphi | r_0, \varphi_0) + 2 \ln a - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0 r}{a^2} \right)^n \cos [n(\varphi_0 - \varphi)] \right\}.$$

Если плотность распределения источников тепла во внутренних точках (r_0, φ_0) цилиндра равна $q(r_0, \varphi_0)$ и не зависит от координаты z , то температура в точке (r, φ) равна интегралу от $T(r, \varphi | r_0, \varphi_0)$, взятому по внутренней части цилиндра:

$$T(r, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \left\{ \int_0^r r_0 \left[\ln \left(\frac{a}{r} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0^n r^n}{a^{2n}} - \frac{r_0^n}{r^n} \right) \cos n(\varphi_0 - \varphi) \right] q(r_0, \varphi_0) dr_0 + \right. \\ \left. + \int_r^a r_0 \left[\ln \left(\frac{a}{r_0} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0^n r^n}{a^{2n}} - \frac{r^n}{r_0^n} \right) \cos n(\varphi_0 - \varphi) \right] q(r_0, \varphi_0) dr_0 \right\}. \quad (10.1.21)$$

Если плотность нейтронов изотропна, то q не зависит от φ_0 и выражение для температуры принимает более простой вид:

$$T(r) = \frac{1}{K} \left\{ \ln \left(\frac{a}{r} \right) \int_0^r q(r_0) r_0 dr_0 + \int_r^a \ln \left(\frac{a}{r_0} \right) q(r_0) r_0 dr_0 \right\}.$$

При дальнейшем упрощении мы можем предположить, что скорость распада является наибольшей вблизи внешней поверхности цилиндра и падает с приближением к центру, грубо говоря, в соответствии с формулой $q(r_0) = (Q/\pi a^2) \left[(b^2 + r_0^2) / \left(b^2 + \frac{1}{2} a^2 \right) \right]$. Здесь Q — общее количество тепла, образующегося в секунду, рассчитанное на единицу длины ци-

линдра. В этом случае мы можем осуществить интегрирование в элементарных функциях и найдем, что

$$T(r) = \frac{Q}{4\pi K} \frac{b^2(a^2 - r^2) + \frac{1}{4}(a^4 - r^4)}{a^2b^2 + \frac{1}{2}a^4}.$$

Как и следовало ожидать, температура максимальна на оси цилиндра, причем чем меньше b (чем больше тепла выделяется вблизи поверхности), тем меньше максимум температуры, достигаемый в центре, и тем больше градиент температуры вблизи поверхности.

Потенциал вблизи цилиндра с щелью. Аппарат функции Грина может быть использован для вычисления потенциала вблизи заземленной металлической цилиндрической оболочки радиуса $r = a$, имеющей щель при $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. (Иными словами, поверхность $r = a$, $\varphi_2 < \varphi < 2\pi + \varphi_1$ для всех значений z является металлической оболочкой, а остальная часть поверхности цилиндра от φ_1 до φ_2 вырезана.) Мы будем исходить из соотношения (7.2.7). Если свободные заряды отсутствуют, то

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint [G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] dA_0.$$

Мы этим воспользуемся двояким образом.

Сначала в качестве поверхности S_0 мы выберем металлическую часть разрезанного цилиндра и возьмем функцию Грина для свободного пространства, определенную равенством (10.1.18). Так как, по предположению, потенциал ψ равен нулю на этой поверхности, то в подынтегральной функции остается только первый член и мы имеем

$$\psi(r, \varphi) = \frac{a}{4\pi} \int_{\varphi_2}^{2\pi + \varphi_1} G(r, \varphi | a, \beta) \left[\frac{\partial}{\partial r} \psi_i(r, \beta) - \frac{\partial}{\partial r} \psi_o(r, \beta) \right]_{r=a} d\beta,$$

где ψ_i — потенциал поля с внутренней стороны поверхности цилиндра, ψ_o — потенциал поля с ее внешней стороны. Как мы уже сказали, функция $G(r, \varphi | a, \beta)$ определяется формулой (10.1.18). Полученное уравнение очень просто интерпретируется: разность нормальных производных ψ изнутри и извне поверхности, деленная на 4π , равна плотности заряда, индуцированного полем на этой поверхности.

Естественно, что искомый потенциал совпадает с потенциалом, порожденным этим зарядом, с точностью до решения уравнения Лапласа, не имеющего особенностей в конечной части плоскости, которое мы должны добавить для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на бесконечности.

Точно решить это интегральное уравнение не очень просто, но мы можем с его помощью получить искомое поле в первом приближении. Предположим, что разрезанный цилиндр помещен в однородное поле, имеющее на большом расстоянии от цилиндра напряженность E . Тогда, в качестве нулевого приближения, положим потенциал вне цилиндра равным $\psi_o^{(0)} = -Er \cos \varphi + E(a^2/r) \cos \varphi$, а внутри цилиндра $\psi_i^{(0)} = 0$. При этом величина, стоящая в скобках под знаком интеграла, равна $2E \cos \varphi$, т. е. в 4π раз больше заряда, который индуцируется на цилиндре без щели. В соответствии с проведенными рассуждениями первое приближение для потенциала внутри или вне разрезанного цилиндра равно

$$\psi(r, \varphi) \simeq -Er \cos \varphi + \frac{Ea}{2\pi} \int_{\varphi_2}^{2\pi + \varphi_1} G(r, \varphi | a, \beta) \cos \beta d\beta,$$

где первый член добавлен для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на бесконечности.

Заметим, что если $\varphi_1 = \varphi_2$ (щель отсутствует), то $\phi_0 = -Er \cos \varphi + E(a^2/r) \cos \varphi$, а $\phi_i = 0$. как это и должно быть, а если же нет никакого цилиндра (т. е. весь он оказался щелью). то $\phi_0 = \phi_i = -Er \cos \varphi$. Для промежуточных случаев мы подставляем в полученное выражение ряд (10.1.18). Мы получим, например, для внутреннего потенциала

$$\phi_i^{(1)} \approx \frac{Ea}{\pi} \ln a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \beta d\beta - \frac{Ea}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \beta \cos [n(\varphi - \beta)] d\beta;$$

здесь мы использовали ортогональность косинусов для того, чтобы заменить интегрирование по металлической поверхности ($\varphi_2 < \varphi < 2\pi + \varphi_1$) интегрированием по щели ($\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$). Очевидно, этот потенциал в точности совпадает с взятым с обратным знаком потенциалом, создаваемым зарядом, устраненным при образовании щели. Этот потенциал не равен в точности нулю на остальной части цилиндра, но в конце концов это только лишь первое приближение.

В качестве следующего приближения мы построим потенциал, равный нулю при $r = a$, $\varphi_2 < \varphi < 2\pi + \varphi_1$, значения которого совпадают со значениями первого приближения при $r = a$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Для этого мы применим функцию Грина, заданную формулой (10.1.19), которая обращается в нуль при $r = a$. Вновь используя (7.2.7), получим

$$\phi(r, \varphi) = -\frac{a}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \phi_i^{(1)}(a, \gamma) \left[\pm \frac{\partial}{\partial r_0} G(r, \varphi | r_0, \gamma) \right]_{r_0=a} d\gamma,$$

где знак плюс у производной берется для $r < a$, знак минус для $r > a$. При $r = a$ для $\phi_i^{(1)}$ получается ряд

$$\phi_i^{(1)}(a, \gamma) = Ea \ln(a) X_{10} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ea}{n} \left[X_{1n} \cos(n\varphi) + Y_{1n} \sin(n\varphi) \right],$$

где

$$X_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos(m\gamma) \cos(n\gamma) d\gamma = \left[\frac{\sin[(m-n)\gamma]}{2\pi(m-n)} + \frac{\sin[(m+n)\gamma]}{2\pi(m+n)} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

$$Y_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos(m\gamma) \sin(n\gamma) d\gamma = \left[\frac{\cos[(m-n)\gamma]}{2\pi(m-n)} - \frac{\cos[(m+n)\gamma]}{2\pi(m+n)} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

В случае, когда $\varphi_2 = \varphi_1$ (щель отсутствует), все коэффициенты X и Y равны нулю, когда же $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$ (цилиндр отсутствует), $X_{mn} = 2/\varepsilon_m$, а все остальные коэффициенты равны нулю ($\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$ для $m > 0$).

Потенциал внутри разрезанного цилиндра во втором приближении получается при помощи функции Грина подобно тому, как была получена формула (10.1.19) для $r < a$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r_0} G(r, \varphi | r_0, \gamma) = \\ & = \frac{\partial}{\partial r_0} \left\{ 2 \ln \left(\frac{a}{r_0} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^m - \left(\frac{rr_0}{a^2} \right)^m \right] \cos[m(\varphi - \gamma)] \right\} \simeq \\ & \simeq -\frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left(\frac{r}{a} \right)^m \cos[m(\varphi - \gamma)] \quad \text{при } r_0 \rightarrow a. \end{aligned}$$

Подставляя все это в уравнение для второго приближения, получим

$$\phi_i^{(2)}(r, \varphi) \approx \frac{1}{2} a E \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left(\frac{r}{a} \right)^m [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)],$$

где

$$A_m = X_{10} X_{m0} \ln a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (X_{1n} X_{mn} + Y_{1n} Y_{mn}).$$

$$B_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (X_{1n} Y_{nm} + Y_{1n} Z_{mn})$$

и

$$Z_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin(m\gamma) \sin(n\gamma) d\gamma = \left[\frac{\sin[(m-n)\gamma]}{2\pi(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\gamma]}{2\pi(m+n)} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Таким образом, потенциал в центре цилиндра равен

$$\begin{aligned} \phi_i(0) = & \frac{1}{2} a E \left\{ (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) (\varphi_2 - \varphi_1) \ln a / \pi^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} (\sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1) \left[\frac{\sin[(n+1)\gamma]}{n+1} + \frac{\sin[(n-1)\gamma]}{n-1} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right\}. \end{aligned}$$

То же приближение для потенциала вне цилиндра имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_o^{(2)}(r, \varphi) \simeq & -Er \cos \varphi + E \frac{a^2}{r} \cos \varphi + \\ & + \frac{1}{2} a E \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left(\frac{a}{r} \right)^m [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)], \end{aligned}$$

где первые два члена введены, чтобы удовлетворить условиям на бесконечности. Эти члены, очевидно, равны нулю при $r = a$, и ряд равен нулю при $r = a$, $\varphi_2 < \varphi < 2\pi + \varphi_1$ в точности так же, как и ряд для ϕ_i . Поэтому эти два выражения полностью совпадают на щели, однако непрерывность градиента потенциала в щели не обеспечена. Еще лучшее приближение может быть получено, если проинтегрировать по металлической поверхности разность производных этих решений, как мы это сделали для $\phi_o^{(0)}$ и $\phi_i^{(0)}$, и т. д.

Другой метод вычисления поля предполагает, что нам известен потенциал $\phi_s(\varphi)$ в щели. Можно предположить, что щель расположена в промежутке $-\frac{1}{2}\Delta < \varphi < \frac{1}{2}\Delta$. Тогда потенциал внутри и вне цилиндра равен

$$\phi(r, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)] \left(\frac{r}{a} \right)^m, & r < a, \\ E \left[\frac{a^2}{r} - r \right] \cos(\varphi - \alpha) + \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)] \left(\frac{a}{r} \right)^m, & r > a, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi_s(u) \cos(mu) du, \\ B_m &= \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi_s(u) \sin(mu) du. \end{aligned} \quad (10.1.22)$$

На стр. 195, 196 мы увидим, что в некоторых случаях возможно высказать довольно точные предположения относительно зависимости $\psi_s(u)$ от u в промежутке $\pm \frac{1}{2}\Delta$. Тогда мы можем непосредственно получить выражение для потенциала. Можно также использовать эту формулу, сделав заранее предположение о виде функции ψ_s , а затем так подобрать функцию этого вида, чтобы осуществить сопряжение наилучшим образом. Как мы видели, производная функции $\psi(r, \varphi)$ испытывает скачок при $r = a$, $-\frac{1}{2}\Delta < \varphi < \frac{1}{2}\Delta$. Можно так подбирать функции ψ , чтобы средняя величина этого скачка вдоль щели равнялась нулю, или так, чтобы среднее квадратичное скачка было минимальным.

Эллиптические координаты. Из равенства (5.1.15) видно, что преобразование $w = \mu + i\vartheta = \text{Arch}(2z/a)$ приводит к эллиптическим координатам

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} a \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta, \quad y = \frac{1}{2} a \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta; \\ h_\mu &= h_\vartheta = \left| \frac{dz}{dw} \right| = \frac{1}{2} a \sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta} = \frac{1}{2} a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta}, \\ r &= \frac{1}{2} a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \vartheta}, \quad \varphi = \arctg [\operatorname{th} \mu \operatorname{tg} \vartheta], \\ r_1 &= \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} a\right)^2 + y^2} = \frac{1}{2} a (\operatorname{ch} \mu + \cos \vartheta), \\ r_2 &= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2} a\right)^2 + y^2} = \frac{1}{2} a (\operatorname{ch} \mu - \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (10.1.23)$$

где кривые $\mu = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$ представляют собой эллипсы и гиперболы с фокусами в точках $x = \pm \frac{1}{2}a$. Они показаны на рис. 10.6.

Как и выше, частными решениями уравнения Лапласа являются μ , ϑ , $e^\mu \cos \vartheta$, $\operatorname{ch}(n\mu) \sin(n\vartheta)$ и т. п. Поверхностями, которые удобно рассматривать в этой системе координат, являются эллиптические цилиндры с большой осью, равной $a \operatorname{ch} \mu$, и малой осью $a \operatorname{sh} \mu$ (поверхности $\mu = \text{const}$), в частности, их предельный случай $\mu = 0$, которому соответствует плоская полоса ширины a , симметричная относительно оси z , или гиперболические цилиндры $\vartheta = \text{const}$, в частности, их предельный случай $\vartheta = 0, \pi$, которому соответствует плоскость (x, z) с вырезанной полосой ширины a , симметричной относительно оси z .

Например, потенциал скоростей несжимаемой идеальной жидкости, протекающей через щель ширины a в плоской преграде, по обе стороны от которой пространство заполнено жидкостью, равен

$$\phi = A\mu = A \operatorname{Arch}[(r_1 + r_2)/a], \quad (10.1.24)$$

где r_1 — расстояние от точки, в которой измеряется потенциал, до одного края щели $x = -\frac{1}{2}a$, $y = 0$, а r_2 — до другого края $x = \frac{1}{2}a$, $y = 0$.

При очень больших значениях $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ для расстояний r_1 и r_2 имеем

$$r_1 \simeq r + \frac{1}{2} a \cos \varphi, \quad r_2 \simeq r - \frac{1}{2} a \cos \varphi.$$

Таким образом, с точностью до членов второго порядка относительно $\frac{a}{r}$ при больших r получаем

$$\psi \simeq A \ln(4r/a), \quad v = \text{grad } \psi \simeq A/r.$$

Очевидно, что функция тока равна

$$\chi = A\vartheta = A \arccos[(r_1 - r_2)/a] \simeq A|\varphi|.$$

В этом примере мы заставляем μ изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; при этом изменение знака μ вызывает изменение знака y . Угол ϑ доста-

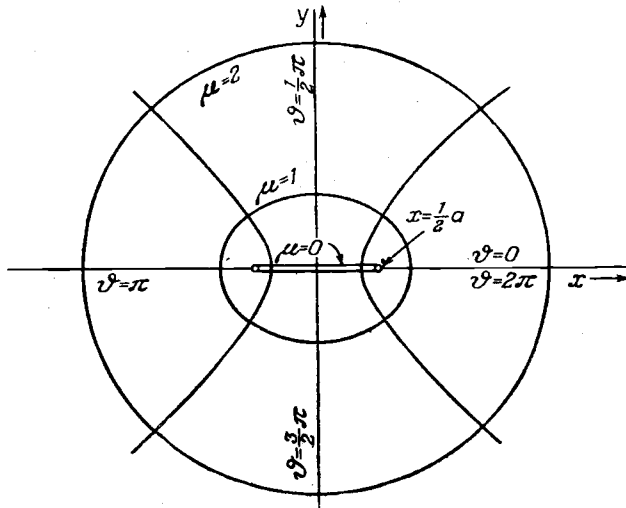


Рис. 10.6. Эллиптические координаты μ и ϑ .

точно изменять только от 0 до π ; мы не нуждаемся в полной непрерывности по ϑ , так как полуплоскости $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ являются преградами.

Скорость течения жидкости через линию $\mu = 0$ равна

$$\text{grad } \psi = \frac{2/a}{\sqrt{\cosh^2 \mu - \cos^2 \vartheta}} \left[a_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + a_\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right] = \frac{A}{\sqrt{(a/2)^2 - x^2}} j,$$

где $\mu = 0$, а поток через полосу между $x = x_0$ и $x = x_1$. ($|x_0|, |x_1| < \frac{1}{2} a$) равен

$$A(\vartheta_{x_1} - \vartheta_{x_0}) = A[\arccos(2x_1/a) - \arccos(2x_0/a)].$$

Следовательно, полный поток через щель равен πA .

В случае определения электростатического потенциала, создаваемого полосой ширины a , на которой поддерживается потенциал V по отношению к потенциалу заземленного конфокального эллиптического цилиндра с большой осью $a \cosh \mu_0$, малой осью $a \sinh \mu_0$, мы считаем, что ϑ меняется от 0 до 2π , а μ положительно. Тогда полуплоскость $y < 0$ соответствует значениям $\pi < \vartheta < 2\pi$, а не отрицательным значениям μ . Потенциал в рассматриваемом случае равен

$$\psi = V[1 - (\mu/\mu_0)],$$

плотность заряда в точке $\vartheta = \arccos(2x/a)$ на полосе равна

$$\sigma = \frac{V/\mu_0}{2\pi a |\sin \vartheta|},$$

а полный заряд, приходящийся на единицу длины полосы,

$$Q = \frac{1}{2} a \int_0^{2\pi} \sigma |\sin \vartheta| d\vartheta = \frac{V}{2\mu_0}.$$

Сюда мы включили заряд «обеих сторон» полосы (верхней $0 < \vartheta < \pi$ и нижней $\pi < \vartheta < 2\pi$). Следовательно, емкость единицы длины такого конденсатора равна $C = Q/V = 1/2\mu_0$. Если μ_0 велико, то эллиптический цилиндр почти не отличается от кругового цилиндра радиуса $r_0 \simeq (a/4)e^{\mu_0}$, концентричного с полосой. Поэтому емкость системы, состоящей из кругового цилиндра радиуса r_0 и малой полосы ширины a , симметричной относительно оси цилиндра, в пределе равна

$$C \simeq \frac{1}{2} [\ln(4r_0/a)]^{-1}$$

электростатических единиц на единицу длины.

Если полосу, помещенную внутри цилиндра, заменить концентрическим цилиндром диаметра a , равного ширине полосы, то емкость окажется равной $\frac{1}{2} [\ln(2r_0/a)]^{-1}$, т. е. будет несколько большей.

Поток вязкой жидкости через щель. Возвращаясь к уже встречавшемуся на стр. 176, 177 исследованию потока вязкой жидкости, мы, используя эллиптические координаты, можем провести расчет для случая несжимаемой вязкой жидкости, протекающей через щель ширины a . Мы хотим, чтобы в каждой точке скорость была направлена вдоль координатной линии $\vartheta = \text{const}$, проходящей через эту точку. Тогда функция тока U , определенная равенством (10.1.15), должна зависеть только от ϑ .

Так как $f(\mu + i\vartheta) = z = \frac{1}{2} a \operatorname{ch} w$, то можно добиться, чтобы в выражении (10.1.15) мнимая часть не зависела от μ , положив $F(w) = A \operatorname{sh} w$ и $U_0 = B\vartheta$ (это есть решение уравнения Лапласа). При вычислении значения скорости мы можем подобрать A и B так, чтобы v равнялась нулю на границах (при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$), а полный поток на единицу длины щели равнялся бы Q . Окончательный подсчет показывает, что точные выражения для $F(w)$ и U при $f(w) = \frac{1}{2} a \operatorname{ch} w = z$ таковы:

$$F(w) = -\frac{8Q}{\pi a} \operatorname{sh} w,$$

$$U = \frac{Q}{\pi} \left(\vartheta - \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \right), \quad v_\mu = \frac{4Q}{\pi a} \frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}}, \quad v_\vartheta = 0.$$

Скорость оказывается наибольшей в центре щели и падает до нуля у ее краев, а также на больших расстояниях от щели. В плоскости щели, на расстоянии x от центральной линии, скорость направлена вверх и величина ее равна

$$v_y = (4Q/\pi a) \sqrt{1 - (2x/a)^2}, \quad \mu = 0.$$

Это выражение обращается в нуль в точках $x = \pm \frac{1}{2} a$, соответствующих краям щели.

Теперь мы используем формулу (10.1.16), чтобы определить комплексную функцию W , с помощью которой вычислим давление и вихрь:

$$W = -\frac{8Q}{\pi a^2} \operatorname{cth} w, \quad w = \frac{4Q}{\pi a^2} \frac{-\sin 2\vartheta}{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta},$$

$$p = \frac{8\eta Q}{\pi a^2} \left[2 - \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta} \right] \simeq \begin{cases} 0, & \mu \rightarrow \infty, \\ 16\eta Q/\pi a^2, & \mu \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Активное сопротивление щели потоку, т. е. отношение перепада давления к потоку Q , приходящемуся на единицу длины щели, есть величина

$$R = p/Q = 16\eta/\pi a^2,$$

пропорциональная коэффициенту вязкости и обратно пропорциональная квадрату ширины щели.

Следует еще раз напомнить, что эти рассуждения обоснованны только тогда, когда вязкость достаточно велика, так что в формулах (2.3.15) можно пренебречь членом, соответствующим кинетической энергии, по сравнению с членом, зависящим от вязкости жидкости.

Распределение потенциала вне эллиптического цилиндра $\mu = \mu_0$, принимающего на поверхности цилиндра заданное значение $\psi_0(\vartheta)$, выражается, как и ранее, формулой

$$\begin{aligned} \psi(\mu, \vartheta) = & \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) d\beta \right] (\mu - \mu_0) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) \cos[m(\beta - \vartheta)] d\beta \right] e^{m(\mu_0 - \mu)}. \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

Это выражение остается конечным при $\mu > \mu_0$, за исключением первого члена. Аналогично потенциал внутри такой поверхности равен

$$\begin{aligned} \psi(\mu, \vartheta) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) d\beta + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) \cos(m\beta) d\beta \right] \cos(m\vartheta) \frac{\operatorname{ch}(m\mu)}{\operatorname{ch}(m\mu_0)} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(\beta) \sin(m\beta) d\beta \right] \sin(m\vartheta) \frac{\operatorname{sh}(m\mu)}{\operatorname{sh}(m\mu_0)}. \end{aligned}$$

Здесь множитель $\operatorname{ch}(m\mu)$ стоит при $\cos(m\vartheta)$, а $\operatorname{sh}(m\mu)$ при $\sin(m\vartheta)$ для того, чтобы обеспечить непрерывность потенциала при $\mu = 0$. Для четных функций от ϑ (т. е. членов, содержащих косинусы) производная множителя, содержащего μ , должна равняться нулю при $\mu = 0$, а для нечетных функций от ϑ (т. е. членов, содержащих синусы) множитель, зависящий от μ , должен равняться нулю при $\mu = 0$.

Например, потенциал и функция тока вне эллиптического цилиндра $\mu = \mu_0$, правая половина которого имеет потенциал $+1$, а левая -1 , равны (после суммирования рядов)

$$\psi = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{\cos \vartheta}{\operatorname{sh}(\mu - \mu_0)} \right], \quad \chi = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arth} \left[\frac{\sin \vartheta}{\operatorname{ch}(\mu - \mu_0)} \right]; \quad (10.1.26)$$

последняя формула является видоизменением формулы (10.1.14) в новых координатах.

Эллиптические цилиндры в однородных полях. Следуя ранее намеченному плану, мы прежде всего рассмотрим случай однородного поля, имеющего направление γ :

$$-E(x \cos \gamma + y \sin \gamma) = -\frac{1}{2} Ea [\operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \gamma + \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \gamma].$$

Другое множество решений, с той же зависимостью от ϑ , но обращающихся в нуль на бесконечности, образуют функции $e^{-\mu} \cos \vartheta$ и $e^{-\mu} \sin \vartheta$, которые можно использовать для того, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Например, если эллиптический цилиндр с большой осью $a \operatorname{ch} \mu_0$ и малой осью $a \operatorname{sh} \mu_0$, помещенный в однородное поле, имеет диэлектрическую постоянную ε , то соответствующий потенциал оказывается равным

$$\psi = \begin{cases} -Ee^{\mu_0} \left[\frac{x \cos \gamma}{\operatorname{ch} \mu_0 + \varepsilon \operatorname{sh} \mu_0} + \frac{y \sin \gamma}{\varepsilon \operatorname{ch} \mu_0 + \operatorname{sh} \mu_0} \right], & \mu < \mu_0, \\ -E(x \cos \gamma + y \sin \gamma) + \\ + \frac{1}{4} Ea (\varepsilon - 1) e^{\mu_0} \operatorname{sh} (2\mu_0) e^{-\mu} \left[\frac{\cos \vartheta \cos \gamma}{\operatorname{ch} \mu_0 + \varepsilon \operatorname{sh} \mu_0} + \frac{\sin \vartheta \sin \gamma}{\varepsilon \operatorname{ch} \mu_0 + \operatorname{sh} \mu_0} \right], & \mu > \mu_0. \end{cases} \quad (10.1.27)$$

Поле внутри этого эллиптического цилиндра однородно, но по величине и по направлению отличается от первоначально имевшегося поля. Вне цилиндра потенциал дополнительного поля стремится к нулю, когда расстояние от оси цилиндра стремится к бесконечности, что оказывается как раз достаточным для того, чтобы при $\mu = \mu_0$ полный потенциал был непрерывен, а производная по внешней нормали равна производной по внутренней нормали, умноженной на ε . Если ψ — магнитный потенциал, а ε — магнитная проницаемость, то приведенные здесь выражения дают потенциал ферромагнитного цилиндра в магнитном поле. Для железа магнитная проницаемость очень велика и ψ на поверхности практически равняется нулю.

Другой простой задачей является задача о безвихревом потоке жидкости, обтекающем эллиптический цилиндр. Для однородного потока в направлении γ со скоростью v_0 потенциал скоростей, очевидно, равен

$$v_0(x \cos \gamma + y \sin \gamma) = \frac{1}{2} av_0 [\operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \gamma + \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \gamma].$$

К этому выражению следует прибавить такую комбинацию решений $e^{-\mu} \cos \vartheta$, $e^{-\mu} \sin \vartheta$ (стремящихся к нулю при $\mu \rightarrow \infty$), чтобы нормальная производная ψ на поверхности цилиндра $\mu = \mu_0$ обращалась в нуль. Таким образом, потенциал скоростей и функция тока имеют вид

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} av_0 [\cos \gamma \cos \vartheta (\operatorname{ch} \mu + e^{\mu_0 - \mu} \operatorname{sh} \mu_0) + \sin \gamma \sin \vartheta (\operatorname{sh} \mu + e^{\mu_0 - \mu} \operatorname{ch} \mu_0)], \\ \chi &= \frac{1}{2} av_0 [\cos \gamma \sin \vartheta (\operatorname{sh} \mu - e^{\mu_0 - \mu} \operatorname{sh} \mu_0) - \sin \gamma \cos \vartheta (\operatorname{ch} \mu - e^{\mu_0 - \mu} \operatorname{ch} \mu_0)] \end{aligned} \quad (10.1.28)$$

и являются соответственно вещественной и мнимой частями функции

$$F(\mu + i\vartheta) = \frac{1}{2} av_0 [e^{-i\gamma} \operatorname{ch} (\mu + i\vartheta) + e^{\mu_0 - \mu - i\vartheta} \operatorname{sh} (\mu_0 + i\gamma)].$$

Если $\mu_0 = 0$, то эллиптический цилиндр стягивается к полосе ширины a , перпендикулярной оси y и, следовательно, образующей угол γ с направлением установившегося потока.

Скорость жидкости на поверхности $\mu = \mu_0$, очевидно, равна

$$v = |\operatorname{grad} \psi|_{\mu=\mu_0} = \frac{2/a}{V \operatorname{sh}^2 \mu_0 + \sin^2 \vartheta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right]_{\mu=\mu_0} = \frac{v_0 e^{\mu_0} \sin (\gamma - \vartheta)}{V \operatorname{sh}^2 \mu_0 + \sin^2 \vartheta}. \quad (10.1.29)$$

Согласно уравнению Бернулли, давление в точке (μ_0, ϑ) этой поверхности равно

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[1 - \frac{e^{2\mu_0} \sin^2(\gamma - \vartheta)}{\operatorname{sh}^2 \mu_0 + \sin^2 \vartheta} \right], \quad (10.1.30)$$

где p_0 — давление в жидкости на большом расстоянии от цилиндра. Мы пренебрегли влиянием гравитационной силы (эта сила должна была бы порождать слагаемое ρg , помноженное на глубину, измеряемую от поверхности жидкости).

В следующем параграфе мы рассмотрим более подробно эту задачу о давлениях и силах, связанных с движением жидкости. Сейчас мы, несколько забегаая вперед, сообщим результаты, которые будут получены там. Оказывается, что результирующая сила, действующая на эллиптический цилиндр, равна нулю, хотя результирующий момент отличен от нуля. Тот факт, что результирующая сила равна нулю, сначала кажется удивительным. Однако в случае безвихревого потока с пренебрежимой вязкостью картина потока вокруг цилиндра вполне симметрична; для каждого малого участка из нижней половины потока, имеющего заданную скорость, а следовательно, и давление, существует симметрично расположенный участок в верхней половине с той же скоростью и давлением, так что все вертикальные силы взаимно уничтожаются; аналогичным образом уничтожаются и горизонтальные составляющие.

Давление оказывается наименьшим вблизи точек наибольшей кривизны цилиндра $\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi$, где скорость наибольшая. Когда эллипс, являющийся поперечным сечением цилиндра, очень близок к отрезку, т. е. μ_0 мало, скорость в этих точках делается настолько большой, что давление становится отрицательным. Следовательно, жидкость не «прилипает» к цилиндру и стационарный безвихревой поток оказывается невозможным. Происходит следующее: вихри сбегает с острого заднего края, и это порождает циркуляцию жидкости вокруг цилиндра в обратном направлении, благодаря чему скорость у этого острого края оказывается конечной. Здесь мы не будем заниматься детальным рассмотрением движения жидкости в возникающих вихрях, нам нужно только учесть обратную циркуляцию жидкости, порождаемую этим движением.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим плоскую полосу ($\mu_0 = 0$). В этом случае скорость и давление у поверхности без учета циркуляции соответственно равны

$$v = \frac{v_0 \sin(\gamma - \vartheta)}{|\sin \vartheta|}, \quad p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[\frac{\sin^2(\gamma - \vartheta) - \sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right];$$

у заднего края полосы ($\vartheta = 0$) скорость бесконечна, а давление равно $-\infty$. На рис. 10.7,а изображены линии тока, соответствующие этому (физически невозможному) случаю.

Конечно, завихренный поток невозможно представить при помощи однозначного потенциала, но простую циркуляцию вокруг эллиптического цилиндра можно описать многозначным потенциалом $A\vartheta$, являющимся решением уравнения Лапласа и соответствующим скорости $2A/a \sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}$ в направлении ϑ в точке (μ, ϑ) . Теперь достаточно к потенциалу, определяемому формулой (10.1.28), прибавить потенциал $A\vartheta$, выбрав константу A так, чтобы соответствующая их сумме скорость обращалась в нуль (или по крайней мере была конечной) при $\vartheta = 0$.

В результате получим

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} a v_0 [\cos \gamma \cos \vartheta \operatorname{ch} \mu + \sin \gamma \sin \vartheta \operatorname{ch} \mu - \vartheta \sin \gamma], \\ \chi &= \frac{1}{2} a v_0 [\cos \gamma \sin \vartheta \operatorname{sh} \mu - \sin \gamma \cos \vartheta \operatorname{sh} \mu + \mu \sin \gamma], \end{aligned} \quad (10.1.31)$$

$$v_{x=0} = v_0 \frac{\sin(\gamma - \vartheta) - \sin \gamma}{|\sin \vartheta|} = -v_0 \left[\cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \vartheta \right) \right],$$

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left\{ \sin^2 \gamma \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{2} \vartheta \right) \right] - \sin 2\gamma \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \vartheta \right) \right\}.$$

Распределение давления на полосе оказывается теперь несколько «однобоким», имеется избыток давления на нижней стороне полосы ($\pi < \vartheta < 2\pi$), что можно заключить из наличия члена $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ в выражении для давления. Это происходит потому, что из-за циркуляции скорость у нижней стороны

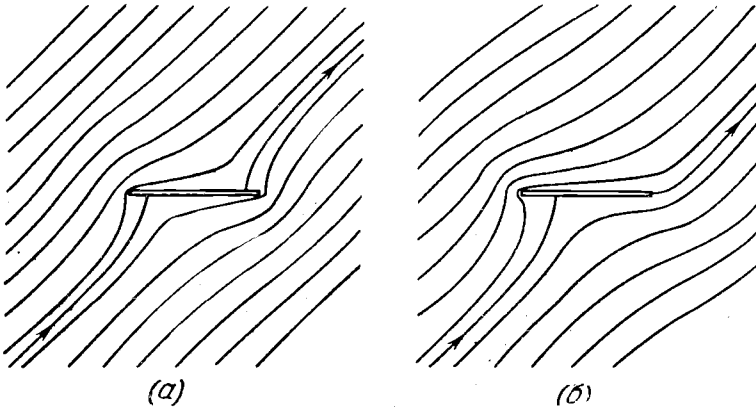


Рис. 10.7. Линии тока при обтекании полосы;
а) без циркуляции; б) с циркуляцией, достаточной для гладкого обтекания заднего края.

полосы, вообще говоря, меньше, чем у верхней, и, следовательно, связанное со скоростью падение давления там не так велико. Таким образом, мы получаем результирующую *подъемную силу*, действующую на полосу благодаря циркуляции.

Мы умышленно оставили в стороне два трудных вопроса: что происходит с циркуляцией на больших расстояниях от полосы и что делается у переднего края полосы при $\vartheta = \pi$, где скорость по-прежнему бесконечна. Связанный с циркуляцией член, пропорциональный ϑ , не убывает на бесконечности, и трудно усмотреть, почему вдали от полосы, где поток должен был бы оставаться невозмущенным, получается такая циркуляция. По-видимому, ответ заключается в следующем: вихри, срывающиеся с заднего края полосы, взаимно уничтожаются с циркуляцией вне круга некоторого радиуса, который не слишком велик, но достаточен для того, чтобы искажающее влияние этой суперпозиции циркуляции и вихрей на циркуляцию вблизи полосы было малым. Таким образом, нет необходимости вдаваться в подробности образования этой суперпозиции вихрей и циркуляции, и мы можем не отвлекаться от изучения потока вблизи полосы.

Не так легко объяснить, почему мы пренебрегаем бесконечной скоростью у переднего края. Возможно, только задний край создает вихри, которые покидают его таким способом, что порождают циркуляцию; вихри у ведущего края могут налипнуть на него, образуя значительное разрежение и изменяя форму линий тока. В обычных расчетах воздушного потока передний край не острый, а закругленный, поэтому скорость там не так велика, как вокруг заднего края, и тенденция к образованию вихрей, возможно, не так сильна. Мы продолжим исследование этой проблемы в следующем параграфе.

Функция Грина в эллиптических координатах. Потенциал, создаваемый линейным зарядом с единичной линейной плотностью в точке (x_0, y_0) , полученный обычным образом из комплексной функции $-2\ln(z - z_0)$, может быть также выражен через функцию эллиптических координат

$w = \mu + i\vartheta$ для $z = \frac{1}{2}a \operatorname{ch} w$. Мы имеем

$$\begin{aligned} -\ln[(a^2/16)(e^w + e^{-w} - e^{w_0} - e^{-w_0})^2] = \\ = -2\ln\left\{a \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(w + w_0)\right] \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(w - w_0)\right]\right\} = \\ = \begin{cases} -2\ln(a/4) - 2w - 2\ln(1 - e^{w_0 - w}) - 2\ln(1 - e^{-w_0 - w}), & \mu > \mu_0, \\ -2\ln(a/4) - 2w_0 + 2\ln(1 - e^{w - w_0}) - 2\ln(1 - e^{-w - w_0}), & \mu < \mu_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому функция Грина равна

$$G(\mu, \vartheta | \mu_0, \vartheta_0) = \begin{cases} -2\left[\mu + \ln\left(\frac{a}{4}\right)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} e^{-n\mu} [\operatorname{ch} n\mu_0 \cos n\vartheta \cos n\vartheta_0 + \\ + \operatorname{sh} n\mu_0 \sin n\vartheta \sin n\vartheta_0], & \mu > \mu_0, \\ -2\left[\mu_0 + \ln\left(\frac{a}{4}\right)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} e^{-n\mu_0} [\operatorname{ch} n\mu \cos n\vartheta \cos n\vartheta_0 + \\ + \operatorname{sh} n\mu \sin n\vartheta \sin n\vartheta_0], & \mu < \mu_0. \end{cases} \quad (10.1.32)$$

Как и во всех подобных разложениях функции Грина, ряд сходится лишь условно, и его можно дифференцировать только тогда, когда плохо сходящуюся часть этого ряда удастся просуммировать и записать в замкнутом виде.

Например, емкость тонкого провода радиуса ρ , помещенного внутрь полого эллиптического цилиндра с большой осью $a \operatorname{ch} \mu_1$ и малой осью $a \operatorname{sh} \mu_1$, можно найти, если удастся определить потенциал, создаваемый зарядом с линейной плотностью q , помещенным в точку (μ_0, ϑ_0) , когда при $\mu = \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_0$) поддерживается нулевой потенциал. Распределение потенциала имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(\mu, \vartheta) = -2q \operatorname{Re} [\ln(z - z_0)] + 2q \left[\mu_1 + \ln\left(\frac{a}{4}\right) \right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q}{n} e^{-n\mu_1} \left[\frac{\operatorname{ch} n\mu_0 \cos n\vartheta_0}{\operatorname{ch} n\mu_1} \operatorname{ch} n\mu \cos n\vartheta + \frac{\operatorname{sh} n\mu_0 \sin n\vartheta_0}{\operatorname{sh} n\mu_1} \operatorname{sh} n\mu \sin n\vartheta \right]. \quad (10.1.33) \end{aligned}$$

Если $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, где ρ намного меньше a , то потенциал на цилиндрической поверхности $\rho = \operatorname{const}$ с точностью до членов первого порядка относительно ρ/a равен

$$V \simeq 2q \ln(a/4\rho) + 2q\mu_1 - 4q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\mu_1} \left[\frac{\operatorname{ch}^2 n\mu_0 \cos^2 n\vartheta_0}{\operatorname{ch} n\mu_1} + \frac{\operatorname{sh}^2 n\mu_0 \sin^2 n\vartheta_0}{\operatorname{sh} n\mu_1} \right].$$

Отношение q/V есть емкость единицы длины провода, выраженная в электростатических единицах.

Можно так видоизменить функцию Грина, чтобы она удовлетворяла нулевым граничным условиям Неймана на границе $\mu = \mu_1$. Например, можно рассчитать магнитное поле между двумя проводами, проходящими через фокусы эллипса и окруженными эллиптическим цилиндром

($\mu = \mu_1$) из железа (с магнитной проницаемостью ε), по которым текут токи силы q в противоположных направлениях. Потенциальная функция «источников» противоположного знака, расположенных в фокусах, равна вещественной части функции, имеющей нужные особенности в точках $z = \pm \frac{1}{2}a$:

$$F(\mu, \vartheta) = -4q \ln \left[\frac{1 - e^{-w}}{1 + e^{-w}} \right] = 8q \operatorname{Arth}(e^{-w}),$$

т. е. равна

$$\begin{aligned} \psi_0(\mu, \vartheta) &= 8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)\mu} \cos[(2n+1)\vartheta] = \\ &= 4q \operatorname{Arth} \left[\frac{\cos \vartheta}{\operatorname{ch} \mu} \right], \end{aligned} \quad (10.1.34)$$

а «функция тока» равна мнимой части F , т. е.

$$\chi_0(\mu, \vartheta) = -8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)\mu} \sin[(2n+1)\vartheta] = 4q \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\sin \vartheta}{\operatorname{sh} \mu} \right].$$

Эта функция, конечно, разрывна вдоль линии $\mu = 0$, как и все функции тока, представляющие циркуляцию вокруг особых точек (например, функция тока вокруг отрезка $\mu = 0$ пропорциональна углу ϑ , который терпит разрыв при $\vartheta = 0, 2\pi$), хотя градиент χ непрерывен.

Как было отмечено выше, функция χ представляет потенциал магнитного поля двух проводов, а функция ψ — магнитные силовые линии. Влияние железного цилиндра ($\mu = \mu_1$) выражается в добавлении ряда с членами вида $A \operatorname{sh}(m\mu) \sin(m\vartheta)$, непрерывного при $\mu = 0$ и такого, что граничные условия при $\mu = \mu_1$ удовлетворяются. Внутри цилиндра ($\mu > \mu_1$) решение представляется рядом с членами вида $e^{-m\mu} \sin m\vartheta$, сходящимся при $\mu \rightarrow \infty$ (здесь нам не нужна непрерывность при $\mu = 0$, так как $\mu > \mu_1$). Граничные условия заключаются в том, чтобы нормальная производная χ изнутри поверхности $\mu = \mu_1$ равнялась нормальной производной извне (внутри железа), умноженной на ε , а сама функция χ была бы непрерывной при $\mu = \mu_1$.

Окончательное решение имеет вид

$$\chi = \begin{cases} -8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2n+1)(\mu_1 - \mu)} \sin[(2n+1)\vartheta]}{\varepsilon \operatorname{sh}[(2n+1)\mu_1] + \operatorname{ch}[(2n+1)\mu_1]} \frac{1}{(2n+1)}, & \mu > \mu_1, \\ 4q \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\sin \vartheta}{\operatorname{sh} \mu} \right] + \\ + 8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon - 1) e^{-(2n+1)\mu_1} \operatorname{sh}[(2n+1)\mu] \sin[(2n+1)\vartheta]}{\varepsilon \operatorname{sh}[(2n+1)\mu_1] + \operatorname{ch}[(2n+1)\mu_1]} \frac{1}{(2n+1)}, & \mu < \mu_1. \end{cases}$$

Если проницаемость ε очень велика, то граничное условие сводится к требованию, чтобы поверхность $\mu = \mu_1$ соответствовала эквипотенциальной поверхности $\chi = 0$, а линии уровня функции ψ (магнитные силовые линии) были ортогональны к этой поверхности. Тогда магнитный потенциал внутри железного эллиптического цилиндра, создаваемый противоположными токами, проходящими через фокусы, является

мнимой частью функции ($w = \mu + i\vartheta$)

$$F(w) = 8q \operatorname{Ar th}(e^{-w}) + 8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)\mu_1}}{(2n+1) \operatorname{sh}[(2n+1)\mu_1]} \operatorname{ch}[(2n+1)w].$$

Вещественная часть F , как показано выше, представляет магнитные силовые линии. Отметим, что поле между двумя проводниками приблизительно однородно. Расчеты этого типа применяются при конструировании больших электроядерных машин (ускорителей элементарных частиц и т. п.).

Ряд (10.1.33) можно использовать также для нахождения распределения температуры внутри эллиптического цилиндра при продольном расположении источников тепла. Например, если источник представляет собой полосу ширины a из металла, обладающего сопротивлением, окруженную изоляционным материалом, внешняя граница которого есть эллиптический цилиндр с фокусами, расположенными по краям полосы, то можно использовать ряд (10.1.33), считая q равным количеству тепла, выделяемому единицей площади полосы за единицу времени, а ψ — температуре (мы полагаем, что при $\mu = \mu_1$ поддерживается нулевая температура). Так как $\frac{1}{2}a|\sin \vartheta|d\vartheta$ есть линейный элемент поперечного сечения полосы, то мы интегрируем $\frac{1}{2}\psi$ по ϑ_0 , положив $\mu_0 = 0$ (мы приписали множитель $\frac{1}{2}$, потому что, интегрируя от 0 до 2π , мы проходим полосу дважды). Следовательно, в этом случае распределение температуры имеет вид

$$T(\mu) = \frac{1}{4} a \int_0^{2\pi} \psi |\sin \vartheta| d\vartheta = 2aq(\mu_1 - \mu) = 2aq \left[\mu_1 - \operatorname{Ar ch} \left(\frac{r_1 + r_2}{a} \right) \right],$$

где уравнение внешней поверхности имеет вид $r_1 + r_2 = a \operatorname{ch} \mu_1$ [см. (10.1.23)].

Полезно также рассчитать магнитное поле, порожденное двумя проводниками, симметрично расположенными в точках (μ_0, ϑ_0) и $(\mu_0, -\vartheta_0)$, с токами q , текущими в противоположных направлениях, при наличии железного эллиптического цилиндра с внешней поверхностью $\mu = \mu_1$ ($\mu_1 < \mu_0$). Мы полагаем проницаемость железа столь большой, что магнитный потенциал можно принять равным нулю всюду на поверхности μ_1 .

Потенциал и функция тока, порожденные «источником» $+q$ в точке $w_0 = \mu_0 + i\vartheta_0$ и «источником» $-q$ в точке $\bar{w}_0 = \mu_0 - i\vartheta_0$, равны, согласно (10.1.32), вещественной и мнимой частям функции

$$\begin{aligned} F(w) &= 2q \ln \left[\frac{e^w + e^{-w} - e^{\bar{w}_0} - e^{-\bar{w}_0}}{e^w + e^{-w} - e^{w_0} - e^{-w_0}} \right] = \\ &= 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sh} \left[\frac{1}{2}(w + \bar{w}_0) \right] \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2}(w - \bar{w}_0) \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{1}{2}(w + w_0) \right] \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2}(w - w_0) \right]} \right\}, \end{aligned}$$

которую можно разложить в ряд

$$F = \begin{cases} 8iq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nw}}{n} \operatorname{sh}(n\mu_0) \sin(n\vartheta_0), & \mu > \mu_0, \\ -8iq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\mu_0}}{n} \sin(n\vartheta_0) \operatorname{ch}(nw) - 4iq\vartheta_0, & \mu < \mu_0. \end{cases}$$

К этому выражению надо прибавить ряд по e^{-nw} , для того чтобы при $\mu = \mu_1 < \mu_0$ мнимая часть получающейся комбинации обращалась в нуль.

В результате для вещественной части ψ , описывающей магнитные силовые линии, и для мнимой части χ , представляющей магнитный потенциал, получим

$$\begin{aligned}\psi &= \operatorname{Re} [F(w)] + 8q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n(\mu_1 - \mu_0 - \mu)} \sin(n\vartheta_0) \operatorname{ch}(n\mu_1) \sin(n\vartheta), \\ \chi &= \operatorname{Im} [F(w)] + 8q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n(\mu_1 - \mu_0 - \mu)} \sin(n\vartheta_0) \operatorname{ch}(n\mu_1) \cos(n\vartheta) + 4q\vartheta_0,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\psi + i\chi &= 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} (w - \bar{w}_0) \right] \operatorname{sh} \left[\mu_1 - \frac{1}{2} (w + w_0) \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} (w - w_0) \right] \operatorname{sh} \left[\mu_1 - \frac{1}{2} (w + w_0) \right]} \right\} = \\ &= 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}(\mu_1 - \mu_0) - \operatorname{ch}(w + i\vartheta_0 - \mu_1)}{\operatorname{ch}(\mu_1 - \mu_0) - \operatorname{ch}(w - i\vartheta_0 - \mu_1)} \right\}. \quad (10.1.35)\end{aligned}$$

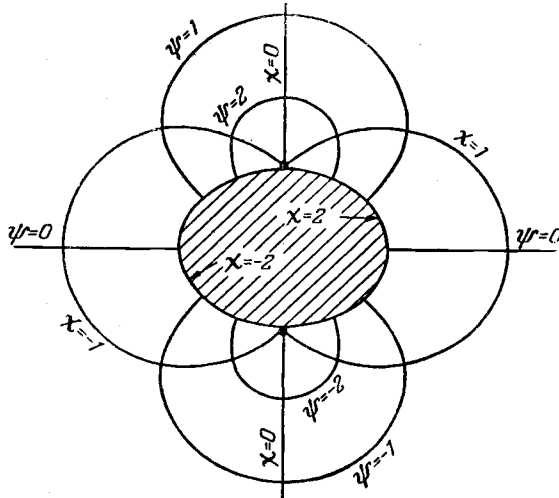


Рис. 10.8. Магнитные силовые линии ψ и эквипотенциальные линии χ вокруг эллиптического железного цилиндра.

Если эти два провода расположены на концах малой оси железного эллиптического цилиндра ($\mu_0 = \mu_1$, $\vartheta_0 = \frac{1}{2}\pi$), то предыдущие выражения сводятся к следующим:

$$\psi = 4q \ln \left[\frac{\operatorname{ch}(\mu - \mu_1) + \sin \vartheta}{\operatorname{ch}(\mu - \mu_1) - \sin \vartheta} \right], \quad \chi = 4q \operatorname{arctg} \left[\frac{\cos \vartheta}{\operatorname{sh}(\mu - \mu_1)} \right].$$

Линии $\psi = \text{const}$ (магнитные силовые линии) и $\chi = \text{const}$ (магнитный потенциал) показаны на рис. 10.8.

Потенциал внутри цилиндра с узкой щелью. Теперь, имея в своем распоряжении результаты, полученные при помощи эллиптических координат, мы можем найти более точное решение задачи, исследованной на стр. 182. Это решение будет получено более простым способом. Мы начнем с выражения для потенциала около заземленной металлической

плоскости, в которой имеется щель ширины c . Этот потенциал

$$\psi = -\frac{1}{4} c E e^{\mu} \sin \vartheta$$

стремится к величине $-\frac{1}{2} c E \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta = -E y$ для больших положительных значений μ , т. е. для точек, лежащих над осью x и на некотором расстоянии от щели. Иными словами, этот потенциал соответствует полю с напряженностью E , нормальному к плоскости (x, z) . Этот потенциал равен нулю на поверхностях металла $\vartheta = 0, \pi$. Для отрицательных μ (ниже оси x) потенциал быстро стремится к нулю, как это и должно быть.

Итак, мы показали, что если в однородное поле, имевшее напряженность E , поместить плоский заземленный проводник, перпендикулярный направлению поля и имеющий разрез ширины c , то потенциал внутри щели окажется равным

$$\psi = -\frac{1}{4} c E \sin \vartheta = -\frac{1}{4} c E \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} = -\frac{1}{2} E \sqrt{\left(\frac{1}{2} c\right)^2 - x^2}$$

для $y=0$, $-\frac{1}{2} c < x < \frac{1}{2} c$ (начало координат помещено в центр щели).

Для заземленного цилиндра радиуса a , помещенного в однородное поле напряженности E , образующее угол α с осью x , потенциал в случае отсутствия щели в цилиндре равен $-E[r - a^2/r] \cos(\varphi - \alpha)$. Тогда на поверхности цилиндра в точке $\varphi = 0$ нормальная производная равна $-2E \cos \alpha$, а если при $-\frac{1}{2} \Delta < \varphi < \frac{1}{2} \Delta$ в цилиндре имеется щель (ширины $a\Delta$ с центром в точке $r = a$, $\varphi = 0$), то потенциал в щели приближенно равен

$$\psi_{\text{щ}} \approx -\frac{1}{2} E \cos \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{2} a \Delta\right)^2 - (a\varphi)^2} = -\frac{1}{4} E a \Delta \cos \alpha \sqrt{1 - (2\varphi/\Delta)^2}$$

для $-\frac{1}{2} \Delta < \varphi < \frac{1}{2} \Delta$, $r = a$. Приближение будет тем лучше, чем меньше ширина щели $a\Delta$ по сравнению с диаметром цилиндра $2a$.

Возвращаясь теперь к формуле (10.1.22), мы можем подставить полученные значения непосредственно в выражения для коэффициентов A_m (коэффициенты B_m для этого приближения равны нулю). Используя интегральное представление (5.3.65) функций Бесселя, получим

$$\begin{aligned} A_m &\simeq -\frac{\varepsilon_m}{16\pi} E a \Delta^2 \cos \alpha \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{1}{2} m t \Delta\right) \sqrt{1-t^2} dt = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{32} E a \Delta^2 \cos \alpha, & m = 0, \\ -(1/4m) E a \Delta \cos \alpha J_1\left(\frac{1}{2} m \Delta\right) \simeq -\frac{1}{16} E a \Delta^2 \cos \alpha, & m > 0, \Delta \rightarrow 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, для этого приближения потенциал вдоль оси цилиндра равен $-(E a / 32) \Delta^2 \cos \alpha$. Когда Δ весьма мало, потенциал внутри цилиндра равен

$$\begin{aligned} \psi &\approx -\frac{E a \Delta^2}{16} \cos \alpha \operatorname{Re} \left[\sum_m \left(\frac{r}{a}\right)^m e^{i m \varphi} - \frac{1}{2} \right] = \\ &= -\frac{E a \Delta^2}{32} \cos \alpha \operatorname{Re} \left[\frac{1 + (r/a) e^{i \varphi}}{1 - (r/a) e^{i \varphi}} \right] = \\ &= -\frac{1}{32} E a \Delta^2 \cos \alpha \left[\frac{1 - (r/a)^2}{1 + (r/a)^2 - 2(r/a) \cos \varphi} \right], \end{aligned}$$

т. е. равен поверхностной функции Грина для условий Дирихле $\psi = 0$ при $r = a$, за исключением $r = a$, $\varphi = 0$.

Параболические координаты. Как мы показали на стр. 474—478 тома I, двумерные координаты, для которых волновое уравнение допускает разделение переменных, получаются при помощи конформных преобразований, представляющих $z = x + iy$ как простую функцию новых координат, $z = f(w)$, $w = \xi_1 + i\xi_2$. Для полярных координат $z = e^{iw}$, а для эллиптических координат $z = \frac{1}{2} \operatorname{asch} w$. Ясно, что уравнение Лапласа допускает разделение переменных для каждой координатной системы, связанной с конформным преобразованием, соответствующим любой аналитической функции f . Тем не менее те случаи, для которых волновое уравнение также допускает разделение переменных, представляют особый интерес, и все эти случаи будут нами изучены. Мы до сих пор не рассматривали случая параболических координат, соответствующего $z = \frac{1}{2} w^2$, $w = \lambda + i\eta$ [см. уравнение (5.1.9)]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (\lambda^2 - \eta^2), \quad y = \lambda\eta, \quad h_\lambda = h_\eta = |w| = \sqrt{\lambda^2 + \eta^2}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} (\lambda^2 + \eta^2), \quad \lambda^2 = r + x, \quad \eta^2 = r - x. \end{aligned} \quad (10.1.36)$$

Точка $z = 0$ является точкой ветвления для этого преобразования, и нужно использовать только одну половину плоскости w для того, чтобы полностью покрыть плоскость z . Линией разреза, выделяющей однозначную ветвь, может служить любая линия, идущая от $z = 0$ до $z = \infty$, и для удобства решения задачи можно так расположить ее внутри граничной поверхности, чтобы физические условия запрещали переход через разрез. Например, поле вне поверхности $\lambda = \lambda_0$, на которой потенциал постоянен, равно

$$\psi = A\lambda^2 + B = A(r + x) + B.$$

В этом случае нам нужно пользоваться только положительными значениями λ , большими λ_0 , а η изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Вообще, если в точке (λ_0, η) границы $\lambda = \lambda_0$ потенциал равен $\psi_0(\eta)$, то вне этой границы он равен

$$\psi(\lambda, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{k(\lambda_0 - \lambda)} dk \int_{-\infty}^\infty \psi_0(\beta) \cos[k(\eta - \beta)] d\beta, \quad \lambda > \lambda_0. \quad (10.1.37)$$

Если граница есть полуплоскость, заданная уравнением $\lambda_0 = 0$ (отрицательная ось x), а граничные условия заключаются в том, что полоса от $x = 0$ до $x = -a$ имеет потенциал V , в то время как остальная часть отрицательной оси x имеет нулевой потенциал, то эта общая формула приводится к виду

$$\psi(\lambda, \eta) = \frac{V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt{2a} + \eta}{\lambda} \right] + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt{2a} - \eta}{\lambda} \right] \right\}. \quad (10.1.38)$$

Соответствующая функция χ , определяющая силовые линии, равна

$$\chi(\lambda, \mu) = \frac{V}{2\pi} \ln \left[\frac{\lambda^2 + (\eta + \sqrt{2a})^2}{\lambda^2 + (\eta - \sqrt{2a})^2} \right].$$

Функция Грина в параболических координатах является, как обычно, вещественной частью функции

$$F = -2 \ln \left[\frac{1}{2} (w^2 - w_0^2) \right] = -2 \ln \left[\frac{1}{2} (w - w_0)(w + w_0) \right]. \quad (10.1.39)$$

Интересный пример применения метода изображений можно построить, пользуясь полярными координатами с центром в точке $\lambda = \eta = 0$. Предположим, что на положительной части оси x (поверхность $\eta = 0$) поддерживается нулевой потенциал. Решения в полярных координатах, удовлетворяющие граничному условию $\psi = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, образуют систему

$$r^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi\right) \text{ и } r^{-\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Функция Грина для этой системы функций равна [см. уравнение (7.2.63)]

$$G = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi_0\right) \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi\right), & r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi_0\right) \sin\left(\frac{1}{2}n\varphi\right), & r_0 < r. \end{cases} \quad (10.1.40)$$

Наличие коэффициентов, равных $\frac{1}{2}$, в показателях степеней и под

знаками синусов соответствует тому факту, что $\omega = \lambda + i\eta = \sqrt{2z} = \sqrt{2r}e^{\frac{1}{2}i\varphi}$, а при таком преобразовании лишь одна половина плоскости ω соответствует всей плоскости z .

В другой половине плоскости ω можно расположить фиктивные источники для того, чтобы удовлетворить граничным условиям при $\eta = 0$. Например, мы получим всю плоскость z с разрезом, идущим по положительной части оси x , при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$, а η — только от 0 до $+\infty$. Таким образом, если границей является положительная часть оси x , то множитель $\omega + \omega_0$ в правой части равенства (10.1.39), соответствующий «источнику» в точке $\lambda = -\lambda_0$, $\eta = -\eta_0$, должен быть исключен, и функция Грина должна быть действительной частью функции

$$F = \begin{cases} -2 \ln \left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0) \right] = -2 \ln \left[\frac{1}{2}(\lambda + i\eta) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}n} e^{\frac{1}{2}in(\varphi_0 - \varphi)}, & r > r_0, \\ -2 \ln \left[\frac{1}{2}(\lambda_0 + i\eta_0) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}n} e^{\frac{1}{2}in(\varphi - \varphi_0)}, & r < r_0. \end{cases}$$

Фиктивные источники должны располагаться в той части плоскости ω , которая не использовалась для представления плоскости z , иными словами, в той части, где $\eta < 0$. Как показано на рис. 10.9, изменение φ от 0 до 2π (отмеченное сплошными линиями) происходит в «действительной» части плоскости z (т. е. там, где находятся действительные источники) и соответствует положительным значениям η ; изменение φ от 0 до -2π (отмеченное пунктирными линиями) соответствует отрицательным η и должно быть использовано для фиктивных источников.

Для того чтобы поверхность $\eta = 0$ имела нулевой потенциал, мы помещаем отрицательный фиктивный источник в точке $\lambda = \lambda_0$, $\eta = -\eta_0$ (в «фиктивной» области), и в результате получаем

$$F = 2 \ln \left[\frac{\omega - \bar{\omega}_0}{\omega - \omega_0} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4i}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{n\varphi_0}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}in\varphi}.$$

Вещественная часть этой функции совпадает с рядом, данным в формуле (10.1.40). Таким образом, мы, наконец, нашли «практическое» применение понятия римановой поверхности в окрестности точки ветвления. Здесь один

лист соответствует «действительному пространству», а другой «фиктивному пространству».

Этим исчерпываются все те системы координат, для которых волновое уравнение допускает разделение переменных. Однако заслуживают обсуждения и другие системы, для которых уравнение Лапласа разделяется, а

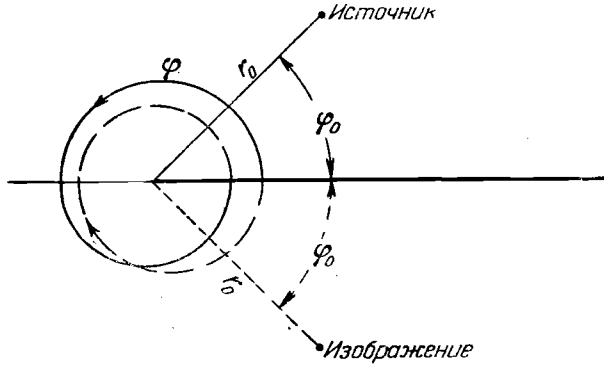


Рис. 10.9. Изображение источника на втором листе римановой поверхности около точки ветвления в конце полупрямой $\varphi=0$.

волновое уравнение не разделяется. Одной из таких систем являются *гиперболические координаты*, для которых $z = \sqrt{2w} = \sqrt{2u + 2ix}$, $r^2 = 2|w|$, $h_u = h_x = 1/r$. Эта система будет рассмотрена в дальнейшем в связи с некоторыми задачами.

Биполярные координаты. Более полезной системой координат, в которой волновое уравнение не разделяется (но уравнение Лапласа разделяется), является система, соответствующая случаю двух параллельных цилиндров или цилиндра (конечного радиуса), параллельного плоскости. Эту систему можно получить, рассматривая комплексную функцию, описывающую поле двух противоположных линейных зарядов, удаленных на расстояние $2a$ друг от друга:

$$w = \ln [(a+z)/(a-z)] = 2 \operatorname{Arth} (z/a).$$

Положив $w = \xi + i\theta$ и $z = x + iy = a \operatorname{th} (w/2)$, получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \theta}, \quad y = \frac{a \sin \theta}{\operatorname{ch} \xi + \cos \theta}, \quad h_\xi = h_\theta = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi + \cos \theta}, \\ \xi &= \operatorname{Arth} \left[\frac{2ax}{a^2 + x^2 + y^2} \right], \quad \theta = \operatorname{arctg} \left[\frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} \right], \\ r &= a \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \theta}{(\operatorname{ch} \xi + \cos \theta)^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \theta}{\operatorname{sh} \xi} \right]. \end{aligned} \quad (10.1.41)$$

Координата θ — угловая координата, изменяющаяся от 0 до 2π . Координата ξ — «радиальная», ее значениям от 0 до ∞ соответствует положительная полуплоскость плоскости (x, y) , области отрицательных значений ξ соответствует область отрицательных значений x . Часть оси x от $x = -a$ до $x = +a$ соответствует линии $\theta = 0$, $-\infty < \xi < \infty$; остальная часть оси x соответствует $\theta = \pi$ ($a < x < \infty$ соответствует $0 < \xi < \infty$, $a - \infty < x < -a$ соответствует $-\infty < \xi < 0$). Линия $\xi = \operatorname{const}$ есть окружность радиуса $a/\operatorname{sh} \xi$ с центром в точке $x = a \operatorname{cth} \xi$, $y = 0$; линия $\theta = \operatorname{const}$ есть окружность радиуса $a \operatorname{cosec} \theta$ с центром в точке $x = 0$, $y = a \operatorname{ctg} \theta$ [все θ -окружности проходят через точки $(\pm a, 0)$]. Эта система координат показана на

рис. 10.10. Мы замечаем, что на частях окружностей $\theta = \text{const}$, лежащих выше оси x , значения θ отличаются на π от значений, соответствующих частям тех же окружностей, расположенных ниже оси x . Это происходит по очевидным причинам.

При помощи этой системы координат можно найти распределение потенциала вне двух цилиндров. Если один цилиндр соответствует поверхности ξ_0 , то его радиус равен $b = a/\text{sh } \xi_0$, а расстояние от его оси до оси y равно $a \text{cth } \xi_0$; если другой цилиндр соответствует поверхности $-\xi_1$, то его радиус равен $c = a/\text{sh } \xi_1$, а расстояние от его центра до оси y равно $a \text{cth } \xi_1$. Поэтому,

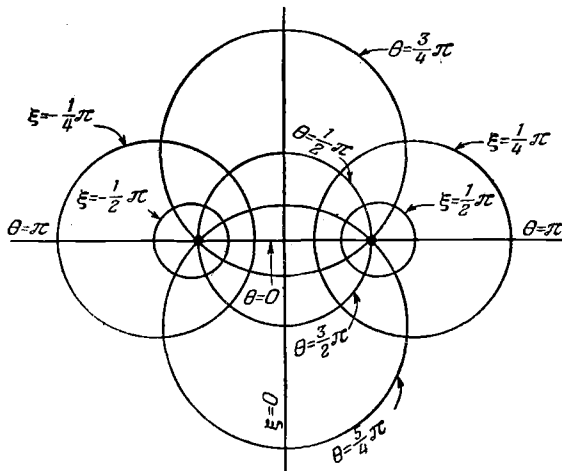


Рис. 10.10. Биполярные координаты ξ и θ .

если расстояние между осями цилиндров равно d , то расстояние a между фокусами соответствующей биполярной системы координат можно определить из уравнения

$$d = \sqrt{b^2 + a^2} + \sqrt{c^2 + a^2}. \quad (10.1.42)$$

Потенциал пропорционален ξ , и, если цилиндр радиуса b ($\xi = \xi_0$) имеет нулевой потенциал, а цилиндр радиуса c ($\xi = -\xi_1$) имеет потенциал V , то распределение потенциала дается функцией

$$\phi = V \frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0 + \xi_1} = V \frac{\text{Ar sh } (a/b) - \xi}{\text{Ar sh } (a/b) + \text{Ar sh } (a/c)}. \quad (10.1.43)$$

Электрическая напряженность на первой поверхности равна

$$E = \frac{\text{ch } \xi_0 + \cos \theta}{a} \frac{V}{\xi_0 + \xi_1},$$

а полный заряд, приходящийся на единицу длины первого цилиндра, равен

$$q = \int_0^{2\pi} \frac{E}{4\pi} \frac{a d\theta}{\text{ch } \xi_0 + \cos \theta} = \frac{V/2}{\xi_0 + \xi_1} = \frac{V/2}{\text{Ar sh } (a/b) + \text{Ar sh } (a/c)}. \quad (10.1.44)$$

Емкость цилиндров на единицу длины равна, как обычно, q/V . Если b и c одновременно малы по сравнению с d , то $a \approx d/2$ с точностью до членов первого порядка относительно b/a и c/a , а емкость на единицу длины приближенно равна

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\ln(d/b) + \ln(d/c)}$$

электростатических единиц, что совпадает с выражением (10.1.11), когда $d = 2y_0$, а $b = c = \rho$. Формула (10.1.44) дает точные значения емкости для любых геометрически возможных значений b , c и a .

Два цилиндра в однородном поле. Наш метод остается прежним: мы выражаем решение уравнения Лапласа, записанное в некоторой системе координат, при помощи элементарных решений в биполярных координатах. Снова, как и в других случаях двумерных систем, мы пользуемся свойствами функций комплексного переменного. На этот раз задача будет несколько более трудной, так как даже выражения для однородного поля оказываются бесконечными рядами. Имеем

$$z = x + iy = a \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} w \right) = a \frac{1 - e^{-w}}{1 + e^{-w}} = -a \frac{1 - e^w}{1 + e^w}.$$

Для $\xi > 0$ мы разлагаем z в ряд по e^{-w} , а для $\xi < 0$ используем e^w . Окончательные ряды для z имеют вид

$$z = x + iy = \begin{cases} a + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi - in\theta}, & \xi > 0, \\ -a - 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{n\xi + in\theta}, & \xi < 0. \end{cases} \quad (10.1.45)$$

Отсюда можно получить ряды для однородного поля, имеющего любое направление. Ряды сходятся всюду, за исключением $\xi = 0$.

Например, выражение для потенциального поля, напряженность которого (или скорость) образует угол φ с направлением оси, соединяющей полюсы биполярной системы, имеет вид

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \begin{cases} b + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\xi} \cos(n\theta + \varphi), & \xi > 0, \\ -b - 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{n\xi} \cos(n\theta - \varphi), & \xi < 0, \end{cases} \quad (10.1.46)$$

где $b = a \cos \varphi$.

К этому выражению мы должны прибавить такие решения, остающиеся конечными вне цилиндров, чтобы сумма удовлетворяла граничным условиям. Частными решениями, остающимися конечными вне цилиндров ($\xi < \xi_0$ или $\xi > -\xi_1$) и периодическими по θ , являются $\operatorname{sh}(m\xi) \sin(m\theta)$, $\operatorname{sh}(m\xi) \cos(m\theta)$, $\operatorname{ch}(m\xi) \sin(m\theta)$ и т. д.

Если дополнительные члены должны стремиться к нулю на бесконечности (которой соответствует точка $\xi = 0$, $\theta = \pi$), то можно пользоваться функциями $\operatorname{sh}(m\xi) \cos(m\theta)$ или $\operatorname{ch}(m\xi) \sin(m\theta)$, но не функциями $\operatorname{ch}(m\xi) \cos(m\theta)$.

Для случая несжимаемой идеальной жидкости, обтекающей с постоянной скоростью v эти цилиндры, граничные условия заключаются в том, чтобы $\partial\psi/\partial\xi$ равнялась нулю на границах цилиндров $\xi = \xi_0$ и $\xi = -\xi_1$, как указывалось выше. Окончательно получим

$$\begin{aligned} \psi = v_0 (x \cos \varphi + y \sin \varphi) + \\ + 2av_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{e^{n\xi}}{e^{2n\xi_0} - e^{-2n\xi_1}} [\cos(n\theta + \varphi) - e^{-2n\xi_1} \cos(n\theta - \varphi)] - \right. \\ \left. - \frac{e^{-n\xi}}{e^{2n\xi_1} - e^{-2n\xi_0}} [\cos(n\theta - \varphi) - e^{2n\xi_0} \cos(n\theta + \varphi)] \right\}. \quad (10.1.47) \end{aligned}$$

Добавленный ряд остается конечным на бесконечности ($\xi = 0$, $\theta = \pi$). Этот ряд, описывающий дополнительное поле, сходится всюду, за исключением

случаев, когда ξ_0 или ξ_1 равны нулю, т. е. когда радиус одного из цилиндров становится бесконечным и поверхность этого цилиндра совпадает с плоскостью y, z . В этом случае следует ожидать, что бесконечная плоская граница будет искажать поле даже на бесконечности, и нет ничего удивительного в том, что полученный ряд не является всюду сходящимся.

Если оба цилиндра имеют одинаковые размеры ($\xi_1 = \xi_0$), то потенциальная функция вблизи правого цилиндра ($\xi = \xi_0$) сводится к выражению

$$v_0 a \cos \varphi - 2v_0 a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\cos \varphi \cos (n\theta)}{\operatorname{ch} (n\xi_0)} - \frac{\sin \varphi \sin (n\theta)}{\operatorname{sh} (n\xi_0)} \right],$$

и скорость жидкости вблизи этого цилиндра равна

$$\begin{aligned} v &= \frac{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \\ &= 2v_0 (\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta) \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n \left[\frac{\cos \varphi \sin (n\theta)}{\operatorname{ch} (n\xi_0)} + \frac{\sin \varphi \cos (n\theta)}{\operatorname{sh} (n\xi_0)} \right]. \end{aligned}$$

Средняя скорость будет наибольшей при $\theta = 0$, т. е. на той стороне правого цилиндра, которая обращена в сторону второго цилиндра. Следовательно, давление на этой стороне будет меньше, чем на стороне, удаленной от второго цилиндра, а результирующая сила будет стремиться столкнуть (или вернее стянуть) оба цилиндра.

Если диаметр цилиндров мал по сравнению с a , то достаточно рассматривать один лишь первый член ряда. Кроме того, радиус каждого из цилиндров приближенно равен $2ae^{-\xi_0}$, а угол θ приближенно равен полярному углу относительно оси цилиндра, проходящей через точку $x = a, y = 0$. Давление в точке (ξ_0, θ) на поверхности $\xi = \xi_0$ приближенно равно

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2 \simeq p_0 - 2\rho v_0^2 (\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta)^2 \left[\frac{\cos \varphi \sin \theta}{\operatorname{ch} \xi_0} + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{\operatorname{sh} \xi_0} \right]^2 \simeq \\ &\simeq -2\rho v_0^2 \left(1 + \frac{2b}{a} \cos \theta \right)^2 \sin^2 (\theta + \varphi) + p_0, \end{aligned}$$

причем $\operatorname{sh} \xi_0 \simeq \operatorname{ch} \xi_0 = d/2b$ при $b \ll a$, а d — расстояние между центрами цилиндров — приближенно равно $2a$. Результирующая сила, действующая на правый цилиндр, приближенно равна интегралу от

$$[ap(i \cos \theta - j \sin \theta)/(\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta)] d\theta,$$

следовательно, она равна

$$F \simeq \pi \rho v_0^2 (b^2/d) [-i(1 + 2 \sin^2 \varphi) + j \sin 2\varphi]. \quad (10.1.48)$$

Ее составляющая по оси x всегда отрицательна, т. е. толкает правый цилиндр в сторону левого; это взаимное притяжение оказывается наибольшим, когда асимптотическое направление потока образует прямой угол с отрезком, соединяющим центры цилиндров (при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ или $\frac{3}{2}\pi$). Составляющая результирующей силы по оси y для правого цилиндра направлена вверх, если φ заключено между 0 и $\frac{1}{2}\pi$ или между π и $\frac{3}{2}\pi$, и равна нулю при $\varphi = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi$ или $\frac{3}{2}\pi$. Результирующая сила, действующая на левый цилиндр, равна вектору F , определенному формулой (10.1.48), взятому со знаком минус. Отметим, что величина F уменьшается с увеличением расстояния d между цилиндрами.

Функция Грина в биполярных координатах. Мы выражаем (так же, как это делалось для других координатных систем) функцию Грина через

элементарные решения в этой системе:

$$F = -2 \ln(z - z_0) = -2 \ln a - 2 \ln \left[\operatorname{th} \left(\frac{1}{2} w \right) - \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} w_0 \right) \right] = \\ = -2 \ln 2a - 2 \ln [(e^{-w_0} - e^{-w}) / (1 + e^{-w})(1 + e^{-w_0})]. \quad (10.1.49)$$

Разложение этой функции имеет различный вид в зависимости от знака величин ξ , ξ_0 и $\xi - \xi_0$. Например,

$$F = 2 \ln \left(\frac{-e^w}{2a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \{ e^{n(w-w_0)} - (-1)^n [e^{-nw_0} + e^{-nw}] \}$$

в случае, когда одновременно ξ и ξ_0 положительны и ξ_0 превосходит ξ , но

$$F' = 2 \ln \left(\frac{1}{2a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \{ e^{n(w_0-w)} - (-1)^n [e^{nw_0} + e^{-nw}] \}$$

для положительного ξ и отрицательного ξ_0 и т. д. Эти ряды сходятся, каждый в своей области, но расходятся в предельных случаях, когда ξ или $\xi_0 \rightarrow 0$, что соответствует оси y и окружности на бесконечности. Например, пусть по двум параллельным цилиндрическим проводящим оболочкам, каждая из которых имеет радиус $a/\operatorname{ch} \xi_0$ и расстояние между осями которых равно $2a \operatorname{cth} \xi_0$, текут токи силы I в противоположных направлениях. Тогда магнитным силовым линиям и потенциалу поля вне этих оболочек соответствуют вещественная и мнимая части ряда

$$\frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a F d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0} - \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a F' d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0}$$

где F и F' — вышеприведенные ряды, причем в F $w_0 = \xi_0 + i\theta_0$, а в F' — $w_0 = -\xi_0 + i\theta_0$.

Для этого (и других) расчетов нам надо разложить в ряд Фурье функцию $1/(\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0)$. Мы имеем

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta_0), \quad A_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta_0) d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0},$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ ($n > 0$). К интегралу, выражающему A_n , можно прибавить интеграл

$$i \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n\theta_0) d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0},$$

который равен нулю в силу нечетности подинтегральной функции. Следовательно,

$$A_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta_0} d\theta_0}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0}.$$

Производя подстановку $e^{i\theta_0} = z$, мы переходим к контурному интегралу по z :

$$A_n = \frac{\varepsilon_n}{\pi i} \oint \frac{z^n dz}{(z + e^{-\xi_0})(z + e^{\xi_0})},$$

где контуром интегрирования служит окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Подинтегральная функция имеет один простой полюс внутри контура в точке $z = -e^{-\xi_0}$ (если ξ_0 положительно, если же ξ_0 отрицательно, то

лежащий внутри контура полюс находится в точке $z = -e^{\xi_0}$. Вычет в этом полюсе равен

$$\frac{\varepsilon_n}{\pi} \left[\frac{(-e^{-\xi_0})^n}{e^{\xi_0} - e^{-\xi_0}} \right], \quad \xi_0 > 0, \text{ или } \frac{\varepsilon_n}{\pi i} \left[\frac{(-e^{\xi_0})^n}{e^{-\xi_0} - e^{\xi_0}} \right], \quad \xi_0 < 0.$$

Следовательно, искомый ряд Фурье имеет вид

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0} = \frac{1}{\operatorname{sh} |\xi_0|} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m e^{-m|\xi_0|}}{\operatorname{sh} |\xi_0|} \cos(m\theta_0) \quad (10.1.50)$$

независимо от знака ξ_0 (однако ξ_0 предполагается вещественным).

Возвращаясь к рядам для F и F' , мы комбинируем два ряда, используя ортогональность $\cos(n\theta_0)$ и $\cos(m\theta_0)$, $\sin(n\theta_0)$, и получаем функцию

$$\begin{aligned} \psi + i\chi &= \frac{2Ia}{\operatorname{sh} \xi_0} \left\{ \ln(-e^w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\xi_0} [e^{n(w-\xi_0)} - e^{-n(w+\xi_0)}] \right\} = \\ &= \frac{2Ia}{\operatorname{sh} \xi_0} \left\{ \xi + i(\theta - \pi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-2n\xi_0} \operatorname{sh}[n(\xi + i\theta)] \right\}, \end{aligned} \quad (10.1.51)$$

где ξ положительно. Вещественная часть этой функции соответствует магнитным силовым линиям, а мнимая часть — магнитному потенциалу. Ввиду наличия множителей $e^{-2n\xi_0}$ ряд сходится весьма быстро и на самом деле обычно представляет малый поправочный член, добавляемый к главному члену

$$(2Ia/\operatorname{sh} \xi_0) \cdot [\xi + i(\theta - \pi)].$$

Если ток не распределен равномерно по цилиндру, а его плотность изменяется вместе с θ_0 по закону $\operatorname{ch} \xi_0 + \cos \theta_0$ (так, что ток несколько слабее на стороне, удаленной от второго цилиндра, чем на обращенной к нему), то дополнительного ряда не требуется, силовыми линиями являются линии $\xi = \text{const}$, а потенциал пропорционален θ . Таким образом, наличие второго цилиндра искажает поле вокруг равномерно распределенного по поверхности цилиндра тока, и магнитные силовые линии вблизи цилиндра уже не параллельны его поверхности.

10.2. Комплексные переменные и двумерное уравнение Лапласа

В предыдущем параграфе мы исследовали решения уравнения Лапласа в двумерном случае при помощи методов, которые, вообще говоря, годятся и для трех измерений и для других уравнений. Мы находили решения с помощью собственных функций для различных систем координат, в которых переменные разделяются, и составляли ряды для функции Грина в этих координатах, показывая на примерах, как могут быть удовлетворены различные граничные условия. Но в процессе исследования выяснилось, что для уравнения Лапласа с двумя переменными существует весьма эффективный специальный аппарат — аппарат функций комплексного переменного, позволяющий упростить наши вычисления и получить решения, недостижимые иными путями. В этом разделе мы отойдем от основного направления наших исследований, с тем чтобы выяснить, что может дать нам этот специфический аппарат в случае двумерного уравнения Лапласа.

Мы начнем с функции $F(z) = \psi + i\chi$ комплексного переменного $z = x + iy$, где x и y — декартовы координаты для изучаемой двумерной задачи (все величины, по условию, не зависят от третьей декартовой координаты). В гл. 4 было показано, что как вещественная часть ψ , так и мнимая

часть χ являются решениями двумерного уравнения Лапласа и связаны между собой уравнениями Коши — Римана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (10.2.1)$$

Иными словами, функция $F(z)$ является аналитической функцией от z (за исключением дискретного множества особенностей), но комбинация $F(z)$ и $F(\bar{z})$ или $\bar{F}(\bar{z})$ не является аналитической функцией от z . Однако комбинации $\frac{1}{2}(F + \bar{F})$ и $\frac{1}{2}(F - \bar{F})$ (и вообще любая линейная комбинация F и $\bar{F}$), рассматриваемые как функции x и y , являются решениями уравнения Лапласа по x и y .

Можно перейти к новой системе координат при помощи конформного преобразования, определенного функциональным соотношением $z = f(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, где ξ и η — новые координаты. Коэффициенты Ламе равны при этом друг другу и система ортогональна, так как преобразование конформно:

$$h_\xi = h_\eta = h = |f'| = 1/|\zeta'|, \quad f' = dz/d\zeta, \quad \zeta' = d\zeta/dz, \quad (10.2.2)$$

$$f(\zeta) = x + iy, \quad \zeta(z) = \xi + i\eta.$$

Так как f зависит от одного лишь ζ , то комплексно сопряженная функция $\bar{f} = x - iy$ зависит от одного лишь $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$.

Так как F — функция от z , то она также может быть записана как функция от ζ , так что любая линейная комбинация ψ и χ является решением уравнения Лапласа в координатах ξ, η , а ψ и χ связаны соотношениями, такими же, как и (10.2.1), лишь вместо x, y нужно подставить ξ и η . Аналогично комплексно сопряженная функция $\bar{F} = \psi - i\chi$ зависит от одного лишь $\bar{\zeta}$ (не зависит от ζ), если F есть функция от z , а $z = f$ есть функция от ζ .

Мы, конечно, помним, что комплексные числа могут рассматриваться как векторы с определенной длиной и направлением. При помощи единичных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ функция $\Phi = R + iJ$ может быть записана как $R\mathbf{i} + J\mathbf{j}$. Как показано в § 4.1, дифференциальные операторы grad , div , rot для двух измерений можно записать при помощи комплексных чисел. Например, для скалярной функции R вектор $\text{grad} R$ можно записать как комплексное число

$$\nabla R = \frac{\partial R}{\partial x} + i \frac{\partial R}{\partial y}; \quad (10.2.3)$$

тогда $\bar{\nabla} R = \partial R / \partial x - i \partial R / \partial y$ будет комплексно сопряженным с ∇R . Вообще говоря, если R — произвольная вещественная функция вещественных переменных x и y , то комплексные величины ∇R и $\bar{\nabla} R$ не являются аналитическими функциями от z .

Если скалярная функция R от x и y есть длина вектора $R\mathbf{k}$, нормального к плоскости (x, y) , то его ротор равен

$$\text{rot}(R\mathbf{k}) = \mathbf{i} \frac{\partial R}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial R}{\partial y} - i \frac{\partial R}{\partial x} = -i \nabla R. \quad (10.2.4)$$

Далее, если $\Phi = R + iJ$ есть комплексная функция от x и y (не обязательно являющаяся аналитической функцией от $z = x + iy$), представляющая вектор Φ в плоскости (x, y) , то мы получим [см. уравнение (4.1.6)]

$$\bar{\nabla} \Phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial y} + i \left(\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) = \text{div} \Phi + i \text{rot}_z \Phi; \quad (10.2.5)$$

вещественная часть $\bar{\nabla} \Phi$ равна дивергенции вектора Φ , а мнимая часть равна $\text{rot}_z \Phi$ — составляющей его ротора по оси z . Если Φ является аналити-

ческой функцией $F(z)$, то из уравнений (10.2.1) следует, что $\nabla F = \nabla \bar{F} = 0$ и, следовательно, что $\nabla \Phi = \nabla \bar{\Phi} = 0$ и $\operatorname{div} \Phi$ и $\operatorname{rot} \Phi$ равны нулю (ср. стр. 334 тома I).

Последнее утверждение станет много понятнее, если мы выразим эти величины не через вещественную и мнимую части R, J и действительные аргументы x и y , а (если сможем) через функцию Φ комплексного аргумента z и его сопряженного $\bar{z}$. Так как $x = \frac{1}{2}(\bar{z} + z)$, а $y = \frac{1}{2}i(\bar{z} - z)$, то комплексную функцию $\Phi(z, \bar{z})$ от x и y можно представить как функцию от z и $\bar{z}$ или от ζ и $\bar{\zeta}$ [см. уравнение (10.2.2)]:

$$\nabla \Phi = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{2}{f'} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \quad \text{и} \quad \nabla \bar{\Phi} = 2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{z}} = \frac{2}{f'} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\zeta}}, \quad (10.2.6)$$

а лапласиан равен

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \nabla \nabla \bar{\Phi} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{4}{|f'|^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}.$$

В этих уравнениях Φ может быть, в частности, чисто вещественной функцией ($\Phi = R$), либо чисто мнимой ($\Phi = iJ$). Однако, если $\bar{\Phi}$ является функцией F от одного только z (т. е. аналитической функцией от z , за исключением дискретного множества особенностей), то $\bar{F} = \psi - i\chi$ является функцией от одного только $\bar{z}$, и мы имеем

$$\nabla^2 \bar{F} = \nabla^2 \bar{F} = \nabla^2 \psi = \nabla^2 \chi = 0 \quad (10.2.7)$$

всюду, за исключением дискретного множества особенностей F . Тогда комплексные числа, представляющие векторы, являющиеся градиентами от вещественной или мнимой частей $F(z)$, равны [согласно равенствам (10.2.6)]

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \psi &= \frac{1}{2} \nabla (\bar{F} + F) = \overline{\left(\frac{dF}{dz} \right)} = \overline{\left(\frac{1}{f'} \frac{dF}{d\zeta} \right)}, \quad F(z) = \psi + i\chi, \\ \operatorname{grad} \chi &= \frac{1}{2} i \nabla (\bar{F} - F) = -i \operatorname{grad} \psi, \quad z = x + iy = -f(\zeta), \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

где можно брать производные по z или по ζ , а затем переходить к комплексно сопряженным числам, либо брать производные от $\bar{F}$ по $\bar{z}$ или $\bar{\zeta}$. Имеем соответственно

$$\operatorname{rot}(\mathbf{k}\psi) = i \nabla \psi = i \overline{\left(\frac{dF}{dz} \right)} = i \operatorname{rot}(\mathbf{k}\chi),$$

где F является функцией от z и не является функцией от $\bar{z}$.

Поля, граничные условия и аналитические функции. Имея в виду все сказанное, мы можем легко восстановить в памяти соотношения, существующие между различными удобными для приложений аналитическими функциями $F(z)$, их вещественными и мнимыми частями ψ и χ , их производными по z (или по другой переменной $\zeta = \xi + i\eta$, представляющей другую систему координат) и физическими величинами, относящимися к различным задачам, связанным с решениями уравнений Лапласа и Пуассона. Например, для двумерных *электростатических* (или гравитационных) задач мы подбираем аналитическую функцию $F(z)$, такую, что ее вещественная часть $\psi(x, y)$ есть электростатический (или гравитационный) потенциал. Тогда ее мнимая часть $\chi(x, y)$ представляет силовые линии. Комплексная величина $-\operatorname{grad} \psi = -\overline{(dF/dz)}$ представляет вектор напряженности, а величина $(1/4\pi)|dF/dz|$ в точке на поверхности проводника равна плотности заряда в этой точке. Обычно задача заключается в том, чтобы найти такую функцию $F(z)$, чтобы границы (на которых потенциал постоянен) совпадали с одной или несколькими кривыми семейства $\psi = \text{const}$.

Весьма эффективен метод, состоящий в переходе от данной задачи теории потенциала с граничными условиями Дирихле на заданном контуре к другой задаче с аналогичными условиями на контуре, отличающемся своим видом от первого. Мы находим конформное отображение $\zeta = \zeta(z)$ [или $z = f(\zeta)$], при котором старая граница преобразуется в новую; тогда новый потенциал будет вещественной частью функции $F(\zeta)$, а ее мнимая часть будет соответствовать силовым линиям; напряженность будет выражаться комплексной функцией $-(1/\bar{f}') (dF/d\bar{\zeta})$, а плотность заряда в данной точке проводящей поверхности в новых координатах будет равна значению $(1/4\pi |f'|) |dF/d\bar{\zeta}|$ в этой точке. Некоторые примеры применения этого метода будут рассмотрены ниже в этом же параграфе.

Для *магнитостатического случая* мы обычно выбираем χ в качестве магнитного потенциала, а ψ соответствует магнитным силовым линиям. Тогда напряженность магнитного поля равна $\text{grad } \chi = i (dF/dz) = (i/\bar{f}') (dF/d\bar{\zeta})$. Для *установившейся диффузии* ψ обычно выражает плотность диффундирующего вещества (или температуру), а плотность потока равна $-a^2 (dF/dz)$, где a — постоянная диффузии [см. уравнение (2.4.3)].

Полный поток вещества между двумя линиями тока χ_0 и χ_1 и двумя плоскостями, параллельными плоскости x, y , расстояние между которыми равно единице, можно получить, интегрируя $-a^2 \text{grad } \psi = -a^2 (dF/dz)$ вдоль линии уровня функции ψ (эта линия всюду ортогональна к потоку) от χ_0 до χ_1 . Интегрирование производится по пути, вдоль которого ψ не изменяется, следовательно, интеграл от $-(dF/dz)$ в точности равен приращению χ и полный поток равен $a^2 (\chi_1 - \chi_0)$. Аналогично полный магнитный поток между силовыми линиями, ψ_0 и ψ_1 , приходящийся на единицу высоты, в точности равен $\psi_1 - \psi_0$.

Для *установившегося потока несжимаемой жидкости* уравнение (2.3.14) приводится к виду

$$\text{grad} \left(p + V + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + 2\eta \text{rot } \mathbf{w} - 2\rho \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0, \quad (10.2.9)$$

где p — давление, V — гравитационный потенциал (или другой объемный потенциал), ρ — плотность жидкости, η — ее коэффициент вязкости, $\mathbf{v}$ — ее скорость, а $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ — ее вихрь. Так как жидкость несжимаема, то $\text{div } \mathbf{v} = 0$, а это значит, что $\mathbf{v}$ равна сумме градиента скалярного потенциала и вихря векторного потенциала.

Для *безвихревого потока* векторный потенциал равен нулю и $\mathbf{v}$ определяется скалярным потенциалом скоростей, являющимся решением уравнения Лапласа. Для двумерного потока этот потенциал равен вещественной части некоторой аналитической функции от z , $F(z) = \psi + i\chi$, где χ — соответствующая функция тока. Скорость жидкости определяется комплексной функцией $-\nabla\psi = -(dF/dz)$, а полный поток жидкости между линиями тока χ_0 и χ_1 , приходящийся на единицу толщины слоя, параллельного плоскости x, y , равен $\chi_1 - \chi_0$. В этом случае $p + V + \frac{1}{2} \rho v^2$ есть величина постоянная, так что давление в каждой точке равно

$$p = \text{const} - V - \frac{1}{2} \rho |dF/dz|^2, \quad (10.2.10)$$

что представляет собой двумерную форму уравнения Бернулли. Обычно задача заключается в отыскании аналитической функции $F(z)$, для которой функция тока χ такова, что граничная поверхность совпадает с одной или более линиями $\chi = \text{const}$. Если это сделано, то результирующая сила на границе может быть вычислена при помощи уравнения (10.2.10).

Если поток не является безвихревым, но настолько медленный, что члены $2\rho\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ и $\frac{1}{2}\rho v^2$ в уравнении (10.2.9) весьма малы по сравнению с остальными членами, то, как показано на стр. 176, 177, мы находим аналитическую функцию $W(z)$ с вещественной частью $(p+V)/2\eta$, определяющей давление, и мнимой частью, равной со знаком минус величине вихря $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\text{rot}_z \mathbf{v}$, который в двумерном случае нормален к плоскости x, y . Теперь скорость уже не может быть только градиентом скалярного потенциала; необходимо также использовать векторный потенциал, нормальный к плоскости x, y . Пусть скалярный потенциал скоростей равен ϕ , а векторный $\mathbf{A} = A\mathbf{k}$; тогда скорость равна

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A} - \text{grad } \phi = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right).$$

Чтобы выразить скорость при помощи комплексного переменного, заметим, что скалярный потенциал равен вещественной части аналитической функции $F(z) = \phi + i\chi$ (так как $\nabla^2 \phi$ должен равняться нулю), но A , вообще говоря, зависит одновременно от z и $\bar{z}$ (т. е. является произвольной функцией от x и y). Представим $\phi(x, y)$ в виде функции $\frac{1}{2}[F(z) + \bar{F}(\bar{z})]$ от z и $\bar{z}$, а затем используем равенства (10.2.4) и (10.2.6), чтобы получить комплексную запись вектора $\mathbf{v}$:

$$v = v_x + iv_y = -(\partial/\partial \bar{z})[\bar{F}(\bar{z}) + 2iA(z, \bar{z})], \quad (10.2.11)$$

где $F(z)$ — комплексная функция от $z = x + iy$, $\bar{F}$ — функция от $\bar{z}$, а A — вещественная функция от z и $\bar{z} = x - iy$.

Связь между функциями F и A и функцией давления-завихренности $W(z) = [(p+V)/2\eta] - i\omega$ получается из определения вихря $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\text{rot } \mathbf{v}$. Так как дивергенция $\mathbf{v}$ равна нулю, то, используя равенства (10.2.5) и (10.2.6), получим

$$-i \frac{\partial v}{\partial z} = -2 \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \text{rot}_z \mathbf{v} = \omega = \frac{1}{2} i [W(z) - \bar{W}(\bar{z})].$$

Поэтому соотношение между A и W может быть выражено следующим образом: находим аналитическую функцию $U(z)$, такую, что $dU/dz = W(z)$, а затем полагаем

$$A = \frac{1}{2} \text{Im} [\bar{z}U(z)] = -\frac{1}{4} i [\bar{z}U(z) - z\bar{U}(\bar{z})], \quad (10.2.12)$$

откуда следует, что

$$4i \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \bar{z}} = U'(z) - \bar{U}'(\bar{z}) = -2i\omega,$$

если $U'(z) = W(z)$. Следовательно, при помощи двух аналитических функций U и F выражения для скорости, вихря и давления для медленного потока вязкой жидкости записываются в виде

$$\begin{aligned} v &= -\bar{F}'(\bar{z}) - \frac{1}{2} U(z) + \frac{1}{2} z \bar{U}'(\bar{z}) = v_x + iv_y, \\ \omega &= -\text{Im} [U'(z)], \quad p = -V + 2\eta \text{Re} [U'(z)], \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

где V есть гравитационный потенциал жидкости.

Граничным условиям можно удовлетворить, подбирая U и F таким образом, чтобы функция тока

$$\Omega = \text{Im} [F(z) - \frac{1}{2} \bar{z}U(z)]$$

определяла линии тока $\Omega = \text{const}$, совпадающие с границами. Нетрудно показать, что $\text{grad } \Omega = -iv$, так что скорости всюду параллельны линиям $\Omega = \text{const}$, а разность $\Omega_1 - \Omega_0$ равняется полному потоку жидкости между линиями тока Ω_0 и Ω_1 , приходящемуся на единицу толщины слоя, параллельного плоскости x, y (в этом и состоит определение функции тока). Оказывается необходимым в каждой координатной системе, заданной соотношением $z = f(\zeta)$, найти такую функцию $U(z)$, чтобы мнимая часть $\overline{f(\zeta)} U[f(\zeta)]$ равнялась нулю или постоянной величине на граничной поверхности $\xi = \xi_0$ или $\eta = \eta_0$ (см. стр. 176).

Наконец, нам желательно найти выражение для силы воздействия жидкости на граничную поверхность. Она также должна представляться в комплексной форме; наилучшим образом ее можно выразить при помощи силы, действующей на элемент поверхности. Рассмотрим элементарную площадку единичной длины в направлении, перпендикулярном плоскости x, y . Пусть ширина этой площадки равна $dz = dx + idy$, причем dz характеризует ширину площадки не только по ее величине, равной $|dz|$, но также и по направлению. Вектор, «представляющий» элементарную площадку, перпендикулярен dz и равен $|dz|$ по длине. Если предположить, что для наблюдателя, стоящего по направлению оси Oz , «внешняя сторона площадки» расположена справа, то векторный элемент площади равен $-idz = -dy - idx$, т. е. вектору, нормальному к dz и равному ему по длине.

На эту элементарную площадку действует сила, порожденная давлением жидкости и равная $ipdz$, где p — скаляр, определяемый равенством (10.2.10) или (10.2.13). Силу, действующую на эту площадку и порожденную вязкостью жидкости, можно получить при помощи соотношения (2.3.10). Для случая двух измерений в комплексной форме записи дополнительная сила, вызванная вязкостью, равна

$$dP = \eta \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx \right] + i\eta \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy - 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} dx \right]$$

с учетом того факта, что $\partial v_x / \partial x = -(\partial v_y / \partial y)$, так как $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Когда вектор $\mathbf{v}$ задан выражением (10.2.13), можно привести это соотношение к виду

$$\begin{aligned} dP &= \eta (dx - idy) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (iv_x - v_y) = 2i\eta d\bar{z} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \\ &= -i\eta [2\overline{F''(z)} - z\overline{U''(z)}] d\bar{z}. \quad [(10.2.14)] \end{aligned}$$

Для медленного потока вязкой жидкости это выражение может быть использовано как в случае безвихревого потока ($U = 0$), так и в случае завихренного потока ($U \neq 0$). Однако в случае чисто потенциального потока общая сила, действующая на границу от точки z_0 до точки z_1 , равна

$$-2i\eta \int_{z_0}^{z_1} \frac{d\overline{F'(z)}}{dz} d\bar{z} = 2i\eta [\overline{F'(z_0)} - \overline{F'(z_1)}]$$

и если границей служит замкнутый цилиндр или призма, то $z_1 = z_0$ и результирующая сила, порождаемая вязкостью, равна нулю. Так как потенциальный поток предполагает ничтожно малую вязкость, мы не должны удивляться тому, что силы, порождаемые вязкостью, взаимно уничтожаются. Если U не равно нулю, то v не является функцией одного только z и интеграл по замкнутому контуру не обязательно равен нулю.

Некоторые элементарные решения. Согласно программе, изложенной на стр. 204, 205, мы должны начать с нескольких особенно простых решений, соответствующих различным физическим условиям, и подробно разобрать

их. Затем могут быть получены и прочие решения простым (?) процессом подбора конформных преобразований, переводящих простые границы в границы, фигурирующие в новых задачах.

Наиболее простым случаем является, конечно, случай параллельных границ $y = y_0$ и $y = y_1$. Здесь потенциал обычно просто пропорционален самому z . Например, для электростатической задачи, в которой потенциал на границе $y = y_0$ равен нулю, а на верхней границе $y = y_1$ равен V , потенциал между пластинами выражается вещественной частью комплексной функции

$$F(z) = \phi + i\chi = \frac{V}{y_1 - y_0} (-iz - y_0) = V \frac{y - y_0 - ix}{y_1 - y_0}. \quad (10.2.15)$$

Напряженность электрического поля в точке z между пластинами равна $-F'(z) = -iV/(y_1 - y_0)$, направлена по оси y и (в простейшем случае) не зависит от z . На каждом из граничных проводников плотность заряда равна $V/4\pi(y_1 - y_0)$, так что емкость, приходящаяся на единицу площади пластины, равна $1/4\pi(y_1 - y_0)$ электростатических единиц.

Для потенциала безвихревого потока между пластинами, имеющего скорость v_0 , соответствующая аналитическая функция равна

$$F(z) = -v_0 z, \quad \phi = -v_0 x, \quad \chi = -v_0 y.$$

Скорость $-F'(z) = v_0$ всюду постоянна, а полный поток между границами, приходящийся на единицу глубины, равен разности значений χ на границах, т. е. $v_0(y_1 - y_0)$. Если давление на верхней пластине равно нулю, то на нижней оно равно $\rho g(y_1 - y_0)$, где g — ускорение силы тяжести.

Для потока вязкой жидкости между параллельными пластинами функция $U(z)$, введенная на стр. 176, 177, пропорциональна z или z^2 в зависимости от граничных условий. Если верхняя пластина движется со скоростью v_0 в направлении x , а нижняя неподвижна, то мы положим

$$F(z) = \frac{v_0}{y_1 - y_0} \left(\frac{1}{4} iz^2 + y_0 z \right), \quad U(z) = \frac{iv_0 z/2}{y_1 - y_0} = \frac{1}{2} v_0 \frac{ix - y}{y_1 - y_0}. \quad (10.2.16)$$

Так как

$$\overline{U'(z)} = -\frac{1}{2} \frac{iv_0}{y_1 - y_0},$$

мы видим, что скорость в точке z равна

$$v = \frac{v_0}{y_1 - y_0} \left[\frac{1}{2} (ix + y - 2y_0) + \frac{11}{4} (y - ix) + \frac{1}{4} (y - ix) \right] = v_0 \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Аналогично вихрь и давление в точке z равны $\omega = -\frac{v_0/2}{y_1 - y_0}$, и $p = \rho g(y_1 - y)$,

причем вихрь отрицателен (направлен по часовой стрелке) и не зависит от положения точки, а давление зависит только от силы тяжести. Используя формулу (10.2.14), найдем, что сила, приходящаяся на единицу площади дна (неподвижного), равна $-2i\eta F'' = \eta v_0/(y_1 - y_0)$ и направлена в положительном направлении по оси x .

С другой стороны, если обе пластины неподвижны, а жидкость прогоняется между пластинами, то, положив

$$F(z) = \frac{Q/2}{(y_1 - y_0)^3} [- (z - iy_0)^3 + 3i(y_1 - y_0)(z - iy_0)^2],$$

$$U(z) = \frac{3Q}{(y_1 - y_0)^3} [- (z - iy_0)^2 + i(y_1 - y_0)(z - iy_0)].$$

мы найдем, что

$$\begin{aligned} v &= \frac{6Q}{(y_1 - y_0)^3} [(y_1 - y_0)(y - y_0) - (y - y_0)^2] = \frac{6Q}{(y_1 - y_0)^3} (y - y_0)(y_1 - y), \\ \omega &= \frac{6Q}{(y_1 - y_0)^3} (2y - y_0 - y_1), \quad p = \rho g (y_1 - y) + \frac{12\eta Q}{(y_1 - y_0)^3} (x_0 - x), \end{aligned} \quad (10.2.17)$$

где Q — полный поток жидкости между пластинами, приходящийся на единицу толщины в направлении, перпендикулярном плоскости x, y . Вихрь равен нулю на средней линии $y = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)$, положителен (направлен против часовой стрелки) выше средней линии и отрицателен (направлен по часовой стрелке) ниже ее. Давление принимается равным нулю в точке $z = x_0 + iy_1$. Оно возрастает с убыванием y под действием силы тяжести, а также возрастает с убыванием x , так как необходима внешняя сила, чтобы прогнать вязкую жидкость между пластинами.

Получив простые решения физических задач для прямоугольной системы, мы покажем теперь, как перенести эти решения на другие системы координат. Одно из простых преобразований переменных определяется соотношениями (см. рис. 10.11)

$$\omega = \xi + i\varphi = \ln(z + a), \quad z = f(\omega) = e^\omega - a. \quad (10.2.18)$$

Оно переводит пару параллельных пластин CA и CB в плоскости w в пару пластин, образующих угол α и пересекающихся в точке $z = -a$ в плоскости z . При этом преобразовании началу координат ($\omega = 0$) соответствует точка $z = 1 - a$ плоскости z . Если пластина CA ($\varphi = 0$) имеет нулевой потенциал, а пластина CB ($\varphi = \alpha$) — потенциал V_0 , то потенциал между пластинами можно получить из (10.2.15), заменив z на ω и положив $y_0 = 0, y_1 = \alpha$:

$$F(z) = F(\omega) = \psi + i\chi = -iV_0\omega/\alpha = (-iV_0/\alpha) \ln(z + a) =$$

$$= \frac{V_0}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x+a} \right) - \frac{iV_0}{2\alpha} \ln [(x+a)^2 + y^2].$$

Эквипотенциальными линиями ($\varphi = \text{const}$) являются лучи, проходящие через точку $z = -a$ под различными углами φ к оси x . Силовыми линиями ($\xi = \text{const}$) служат дуги окружностей различных радиусов $r = e^\xi$ с центром в точке $z = -a$. Напряженность в точке z (или ω в зависимости от выбранной системы координат) равна

$$-\overline{F'(z)} = \frac{(iV_0/\alpha)}{z+a} = \frac{V_0}{\alpha} \frac{y - i(x+a)}{y^2 + (x+a)^2} = - \left[\frac{1}{f'} \frac{dF}{d\omega} \right] = -\frac{iV_0}{\alpha} e^{-i+i\varphi}.$$

Последнее выражение явно указывает на то, что напряженность обратно пропорциональна $r = e^\xi$, т. е. расстоянию от точки $z = -a$, образует прямой угол с радиус-вектором и обращена в сторону вещественной оси. (Направление напряженности характеризуется множителем $-ie^{i\varphi}$ и потому получается из направления этого радиус-вектора, характеризуемого множителем $e^{i\varphi}$, поворотом на -90° .) Плотность заряда в точке x на нижней пластине равна $(1/4\pi) |F'(z)| = V_0/4\pi\alpha r$ и убывает с удалением от вершины угла $z = -a$.

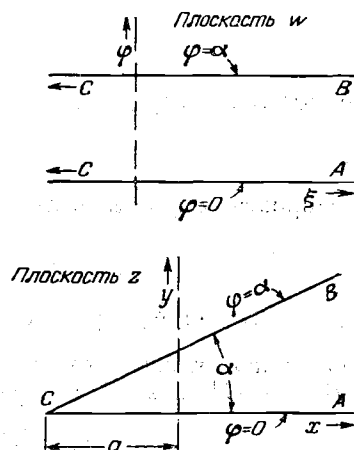


Рис. 10.11. Переход от прямоугольных координат к полярным при помощи конформного преобразования.

Если функция F описывает поток, протекающий между пластинами, то она имеет вид $-v_0\omega = -v_0 \ln[(z+a)/a]$. Здесь линии тока исходят из центра $z = -a$, а линии постоянного потенциала скоростей являются дугами концентрических окружностей. Скорость равна $-\overline{F}'(\bar{z}) = \overline{[v_0 e^{-w}]} = v_0 e^{-\bar{z}+i\varphi}$, имеет величину v_0/r и направлена по радиусу.

В случае потока вязкой жидкости между двумя пересекающимися пластинами необходимо выбрать комплексные функции $F(z)$ и $U(z)$ так, чтобы функция тока Ω , введенная на стр. 208, зависела только от φ . Оказывается, что в данном случае это осуществить легче, чем в прямоугольных координатах. Это было сделано на стр. 177. Так как $\bar{z} = e^{\bar{z}-i\varphi} - a$, то мы можем выбрать

$$U = Ce^{-w}, \quad F = -\frac{1}{2}Ce^{-w} + Bw.$$

Функция A , определяемая формулой (10.2.12), равна

$$A = -\frac{1}{4}i[Ce^{\bar{w}-w} - Ce^{-w} - \bar{C}e^{w-\bar{w}} + \bar{C}e^{-\bar{w}}],$$

а скорость, определяемая формулой (10.2.11), равна

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{2f'} \frac{d}{d\bar{w}} [-\bar{C}e^{-\bar{w}} + 2B\bar{w} + Ce^{\bar{w}-w} - Ce^{-w} - \bar{C}e^{w-\bar{w}} + \bar{C}e^{-\bar{w}}] = \\ &= -e^{-\bar{w}}[B + |C| \cos(2\varphi - \beta)], \quad \text{где } C = |C|e^{i\beta}. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить $v = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, положим $\beta = \alpha$, а $B = -|C| \cos \alpha$. Тогда функция тока будет равна

$$\Omega = \frac{1}{2}|C| \sin(2\varphi - \alpha) - |C|\varphi \cos \alpha.$$

Для завершения решения задачи используются равенства (10.1.17) и следующие.

Преобразование, пригодное для цилиндрических поверхностей, можно получить, положив в выражении (10.2.18) $a = 0$. Электростатический случай получается при $F = [V_0/(\xi_1 - \xi_0)](\omega - \xi_0)$; вещественная часть этой функции есть потенциал, равный нулю при $r = e^{\xi_0}$ и равный V_0 при $r = e^{\xi_1}$. Плотность заряда на внутреннем цилиндре равна

$$\frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{dz} \right| = \frac{1}{4\pi |f'|} \left| \frac{dF}{d\omega} \right| = \frac{V_0 e^{-\xi_0}}{4\pi (\xi_1 - \xi_0)},$$

а площадь поверхности, соответствующая единице длины цилиндра, равна $2\pi e^{\xi_0}$, так что на единицу длины приходится заряд, равный $V_0/2(\xi_1 - \xi_0)$, откуда можно вычислить и емкость.

Для вязкой жидкости, находящейся между неподвижным внутренним цилиндром радиуса $r_0 = e^{\xi_0}$ и внешним цилиндром радиуса $r_1 = e^{\xi_1}$, вращающимся с угловой скоростью ω , мы можем выбрать функции F и U так, чтобы функция тока

$$\Omega = \text{Im} \left[F(\omega) - \frac{1}{2}e^{\bar{w}}U(\bar{w}) \right]$$

зависела только от одного ξ (и не зависела от φ). Это означает, что U может равняться $iCz = iCe^w$, а F , возможно, будет равной iBw , где C и B — вещественные числа. Тогда модуль векторного потенциала будет равен $A = -\frac{1}{2}Ce^{w+\bar{w}}$, а скорость равна по величине

$$v = -\frac{1}{f'} \frac{d}{d\bar{w}} [-iB\bar{w} - iCe^{w+\bar{w}}] = ie^{i\varphi} [Be^{-\bar{z}} + Ce^{\bar{z}}]$$

и направлена в сторону положительных φ . Следует так подобрать B и C , чтобы получить $|v|=0$ при $\xi=\xi_0=\ln r_0$ и $v_0=\omega r_1$ при $\xi=\xi_1=\ln r_1$. Это дает $B=-Ce^{2\xi_0}$ и $C=v_0 e^{-\xi_0}/2 \operatorname{sh}(\xi_1-\xi_0)$, откуда в силу (10.2.3) имеем

$$v = iv_0 e^{i\varphi} \frac{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)}{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_0)}, \quad w = -C = \frac{v_0 e^{-\xi_0}}{2 \operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_0)}, \quad p = -\rho g y.$$

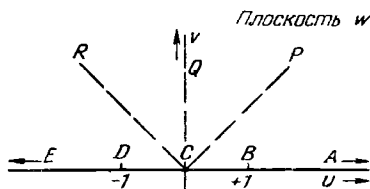
Результирующую силу на внутреннем цилиндре можно подсчитать при помощи формулы (10.2.14). Так как $U = iCz$, то $U'' = 0$; так как $F = -iCe^{2\xi_0} \ln z$, то $F'' = iCe^{2\xi_0}/z^2 = iCe^{-2i\varphi}$ при $\xi = \xi_0$ и, наконец, $dz = ie^{\xi_0 + i\varphi} d\varphi$ при $\xi = \xi_0$, откуда находим, что

$$dP = 2i\eta C e^{\xi_0 + i\varphi} d\varphi = ie^{i\varphi} \frac{v_0 \eta}{\text{sh}(\xi_1 - \xi_0)} d\varphi$$

и направлен в сторону положительных φ по касательной к поверхности цилиндра.

Результирующая сила, действующая на внутренний цилиндр, в точности равна выталкивающей силе перемещающейся жидкости, так как интеграл от dP равен нулю. Однако момент на внутреннем цилиндре, порожденный силой dP , равен $r_0 |dP| = e^{s_0} |dP|$, так что результирующий вращающий момент, порождаемый вязкостью, равен

$$\frac{2\pi\eta v_0 e^{\xi_0}}{\text{sh}(\xi_1 - \xi_0)} = \frac{4\pi\eta v_0 r_0^2 r_1}{r_1^2 - r_0^2}.$$



Преобразование решений. Применение последовательных преобразований часто приводит нас к требуемой граничной поверхности. Например, преобразование

$$w = u + iv = \operatorname{ch}(\pi z/a), \quad z = x + iy, \quad (10.2.19)$$

показанное на рис. 10.12, переводит вещественную ось $v=0$ в ломаную линию: положительная полуось x , отрезок оси y от нуля до ia , положительная часть прямой $y=a$ (ниже в этом же параграфе мы покажем, как получать такие преобразования более или менее произвольно). Теперь, если мы имеем решение, соответствующее граничным условиям, заданным на вещественной оси, мы можем при помощи введенного преобразования перейти к решению, для которого граничные условия показанной на рис. 10.12.

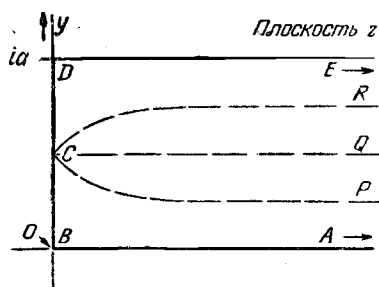


Рис. 10.12. Конформное отображение области ACE , лежащей в плоскости w , на плоскость z . Эллиптические координаты в плоскости w переходят в прямоугольные координаты в плоскости z .

Например, потенциал, возникающий, когда часть плоскости $v=0$ от $u=0$ до $u=+\infty$ имеет нулевой потенциал, а остальная часть этой плоскости имеет потенциал V_0 , равен вещественной части функции

$$F = \psi + i\chi = -i \frac{V_0}{\pi} \ln w = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u} \right) - i \frac{V_0}{2\pi} \ln (u^2 + v^2).$$

Выполнив замену переменных при помощи формул (10.2.19), мы получим

$$F = -i \frac{V_0}{\pi} \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\pi z}{a} \right) \right] = \\ = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{th} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi y}{a} \right) \right] - i \frac{V_0}{2\pi} \ln \left[\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi y}{a} \right) \right].$$

Вещественная часть этой функции равна потенциалу, возникающему, когда часть плоскости, обозначенная на рис. 10.12 через ABC , имеет нулевой потенциал, а часть CDE имеет потенциал V_0 .

Далее магнитный потенциал вокруг провода, проходящего через точку $w = ib$ перпендикулярно к плоскости w , по которому течет ток силы q в направлении к плоскости w , причем плоскость $v = 0$ является границей железной плиты с высокой магнитной проницаемостью, расположенной вниз от этой плоскости, равен [см. (10.2.24)] мнимой части функции

$$F = -2q \ln(w^2 + b^2).$$

Поэтому магнитный потенциал, создаваемый током силы q , текущим в направлении от читателя по проводу, проходящему через точку $x = (a/\pi) \operatorname{Arsh} b$, расположенную в прорезе, сделанном в массе железа, как это показано на рис. 10.12, равен мнимой части функции

$$F = -2q \ln[\operatorname{ch}^2(\pi z/a) + b^2].$$

Например, напряженность магнитного поля вдоль граничной поверхности, соответствующей положительной части оси x , равна

$$\left| \frac{dF}{dz} \right|_{y=0} = \left| \frac{dF}{dw} \right| \frac{1}{|dz/dw|} = \frac{4\pi q}{a} u \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^2 + b^2}, \quad u = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

В качестве третьего примера мы можем показать, что установившаяся температура в верхней полуплоскости w , когда отрезок $-1 < u < +1$ оси u поддерживается при температуре T_0 , а остальная часть оси u имеет нулевую температуру, оказывается равной вещественной части функции

$$F = -i \frac{T_0}{\pi} \ln \left[\frac{w-1}{w+1} \right] = \frac{2iT_0}{\pi} \operatorname{Arcth} w.$$

Следовательно, распределение температуры в полубесконечной сплошной плите ширины a , торец которой поддерживается при температуре T_0 , а стороны при нулевой температуре, выражается вещественной частью функции

$$F = (2iT_0/\pi) \operatorname{Arcth} [\operatorname{ch}(\pi z/a)].$$

Этот результат был уже получен другими методами [см. (10.1.8.)].

Можно применять преобразования последовательно для получения новых полезных примеров. Например, если подвергнуть преобразованию (10.2.19) плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ вместо плоскости z , где $w = \operatorname{ch} \zeta$, то можно перейти к преобразованию $\zeta = \ln(z/a)$ или $z = ae^\zeta$. При этом точка B в плоскости ζ (точка $\zeta = 0$) соответствует точке $z = a$, линия BCD на плоскости ζ ($0 \leq \eta \leq \pi$) соответствует полуокружности с центром в точке $z = 0$ радиуса a , а линия DE соответствует части оси x , лежащей левее точки $x = -a$. Следовательно, преобразование $w = 2a \operatorname{ch} [\ln(z/a)] = z + a^2/z$ переводит вещественную ось u плоскости w в линию, состоящую из частей вещественной оси и полуокружности, показанную на рис. 10.13. Благодаря наличию множителя $2a$ производная $dw/dz \rightarrow 1$ для больших значений z (это означает, что плоскости w и z совпадают при больших z).

Если задача заключается в исследовании безвихревого потока идеальной жидкости, обтекающего цилиндр, то мы можем начать с простого потенциала $F = -v_0 w$, соответствующего однородному потоку в плоскости w , движущемуся вправо со скоростью v_0 . Совершив преобразование, получим функцию

$$F = \psi + i\chi = -v_0 \left[z + \frac{a^2}{z} \right] = -v_0 x - \frac{v_0 a^2 x}{x^2 + y^2} - iv_0 y + \frac{iv_0 a^2 y}{x^2 + y^2},$$

вещественная часть которой равна потенциалу скоростей (см. стр. 207).

Далее, если часть плоскости z , лежащая выше линии $ABCDE$, изображенной на рис. 10.13, заполнена проводящим тепло материалом, на полуокружности BCD поддерживается температура T_0 , а на остальной

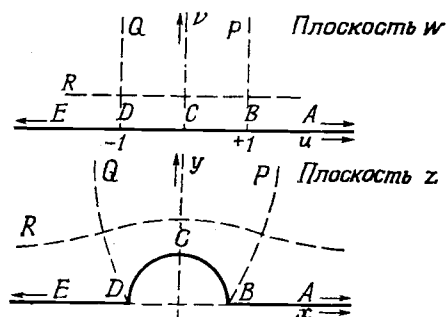


Рис. 10.13. Преобразование эллиптических координат в плоскости w в полярные координаты в плоскости z .

части границы нулевая температура, то распределение температуры описывается вещественной частью функции

$$F = (2iT_0/\pi) \operatorname{Arcth} [z + a^2/z]$$

и т. д.

Циркуляция и подъемная сила. Благодаря компактности комплексных обозначений вычисление ряда величин, связанных с двумерными полями, можно осуществить значительно проще, чем в § 10.1. Это видно, в частности, при изучении потока идеальной жидкости вокруг цилиндров различной формы. На стр. 189, 190 мы разбирали случай, когда наличие острого заднего края вызывало циркуляцию жидкости вокруг цилиндра в дополнение к безвихревому потоку, обтекающему цилиндр. Здесь мы используем преимущества метода комплексного переменного, чтобы более подробно изучить простейший случай и чтобы показать, как при помощи конформного отображения могут быть довольно просто разобраны и другие случаи.

Простейшей задачей является обтекание потоком с циркуляцией кругового цилиндра радиуса a , перпендикулярного плоскости ζ . Как указывалось на стр. 30 и 426 тома I, потенциал скоростей для такого потока равен вещественной части функции

$$F = -v_0 [\zeta + a^2/\zeta] - iv_r \ln \zeta,$$

где v_0 — скорость (вдоль оси ξ) жидкости на бесконечности, а v_r — циркуляция жидкости вокруг цилиндра.

Скорость жидкости у поверхности цилиндра равна $-\bar{F}'$ в точке $\zeta = ae^{i\theta}$, т. е. равна

$$v_0 - v_0 e^{2i\theta} - i(v_r/a) e^{i\theta} = -ie^{i\theta} [2v_0 \sin \theta + v_r/a].$$

Скорость направлена по касательной к этой поверхности, как и должно быть. Вдоль верхней части поверхности она направлена по часовой стрелке (в направлении отрицательных θ), и если v_r положительна, то величина скорости жидкости вдоль верхней части поверхности, вообще говоря, больше, чем вдоль нижней (другими словами, циркуляция ускоряет поток у верхней части поверхности и замедляет его у нижней).

Сила, действующая на цилиндр (если пренебречь силой трения, порожденной вязкостью), вызвана давлением жидкости в соответствии с уравнением Бернулли (2.3.16). Она состоит из двух компонент: вертикальной выталкивающей силы, равной весу вытесненной жидкости, и силы, равной интегралу по полной поверхности от падения давления $-\frac{1}{2}\rho v^2$, вызванного скоростью жидкости. Эта часть, приходящаяся на элемент цилиндра единичной длины, параллельной оси цилиндра, ширина которого равна $dz = iae^{i\theta}d\theta$, составляет

$$p_r idz = -\frac{1}{2}\rho |dF/dz|^2 i dz = \frac{1}{2}\rho a [2v_0 \sin \theta + v_r/a]^2 e^{i\theta} d\theta,$$

причем idz перпендикулярно dz и направлено внутрь цилиндра, когда интегрирование по поверхности цилиндра производится против часовой

стрелки (в направлении возрастающих θ). Следовательно, полная сила Бернулли по величине и направлению равна

$$\frac{1}{2}\rho a \int_0^{2\pi} \left[4v_0 \sin^2 \theta + 4\frac{v_0 v_r}{a} \sin \theta + \left(\frac{v_r}{a}\right)^2 \right] e^{i\theta} d\theta = 2\pi i \rho v_0 v_r.$$

Таким образом, подъемная сила, действующая на единицу длины цилиндра и возникающая в результате совместного действия скорости потока и циркуляции, равна

$$L = 2\pi \rho v_0 v_r. \quad (10.2.20)$$

Эта формула весьма интересна. Во-первых, она указывает на то, что подъемная сила не зависит от диаметра цилиндра; очевидно, что при заданных v_0 и v_r чем меньше цилиндр, тем больше сила, действующая на элемент площади, так что результирующая сила не зависит от a . Во-вторых, формула (10.2.20) показывает, что подъемная сила пропорциональна произведению скорости потока на циркуляцию; если либо v_0 , либо v_r равна нулю, то подъемная сила равна нулю.

Благодаря сочетанию этих факторов возникает разность значений v^2 у верхней и у нижней поверхности цилиндра.

Теперь мы в состоянии видоизменить линии тока и форму границы при помощи конформного отображения с тем, чтобы найти подъемную силу для цилиндров с другими поперечными сечениями. Можно показать, что если при отображении плоскости ζ на плоскость z на большом расстоянии от цилиндра плоскость z совпадает с плоскостью ζ , то подъемная сила для нового цилиндра будет такой же, какой она была для кругового цилиндра, т. е. будет определяться формулой (10.2.20).

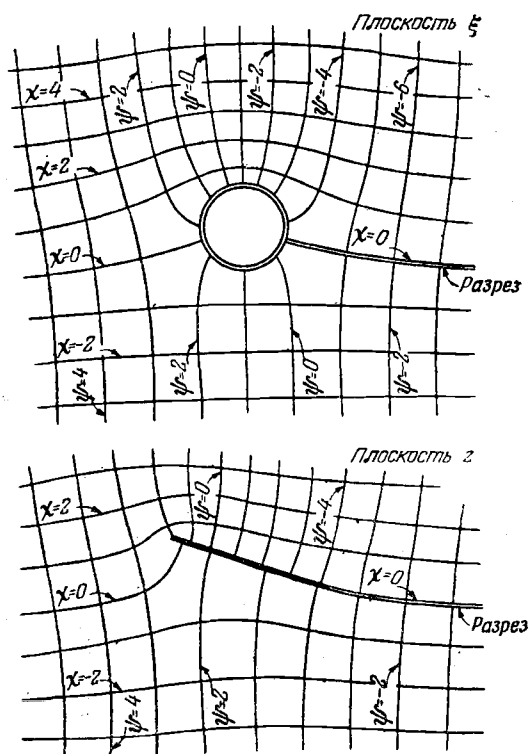


Рис. 10.14. Потенциал скоростей и линии тока в случае потока с циркуляцией вокруг цилиндра и полосы (см. рис. 10.7).

Двойной линией показан разрез, выделяющий однозначную ветвь.

Например, отображение $z = \zeta + a^2 e^{-2i\alpha}/\zeta$ преобразует круговой цилиндр $\zeta = ae^{i\theta}$ в полосу с поперечным сечением $z = 2ae^{-i\alpha} \cos(\theta + \alpha)$ ширины $4a$, образующую угол атаки α с осью x , как это показано на рис. 10.14. Скорость жидкости у поверхности полосы равна $|dF/dz| = |dF/d\zeta| [1/|dz/d\zeta|]$ для $\zeta = ae^{i\theta}$, т. е. равна

$$v_s = \frac{2v_0 \sin \theta + v_r/a}{2 \sin(\theta + \alpha)}.$$

В соответствии со сказанным на стр. 190, 191 следует так подобрать циркуляцию v_r , чтобы скорость v_s имела конечное значение у заднего края $\theta = -\alpha$. Поэтому $v_r = 2av_0 \sin \alpha$ и $v_s = v_0 [\sin \theta + \sin \alpha] / \sin(\theta + \alpha)$ на поверхности полосы.

Сила Бернулли, действующая на элемент полосы dz , вновь равна $-\frac{1}{2} \rho v^2 i dz$, так что результирующая сила равна

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \rho v_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin \theta + \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} \right]^2 [-2iae^{-i\alpha} \sin(\theta + \alpha)] d\theta = \\ & = 2\rho av_0^2 ie^{-i\alpha} \int_0^\pi [\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi] \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

где $2\varphi = \theta + \alpha$. Интеграл от первого члена в квадратных скобках равен нулю. Интеграл от второго члена равен $\pi \sin \alpha \cos \alpha$. Третий член обращается в ∞ при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ в соответствии с тем, что на переднем крае скорость бесконечна. Предполагая, однако, что в действительности контур несколько выходит за пределы рассматриваемой полосы, можно проинтегрировать по контуру, окружающему простой полюс, и после довольно сложных вычислений получить $i\pi \sin^2 \alpha$. Интеграл равен, таким образом,

$$\pi \sin \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \pi e^{i\alpha} \sin \alpha.$$

Итак, результирующая сила перпендикулярна асимптотической скорости v_0 и по модулю равна $2\pi \rho av_0^2 \sin \alpha$.

Однако мы могли бы избежать этих хлопот, вспомнив, что результирующую силу можно определить, подсчитав силу давления, действующую поперек линий тока на больших расстояниях от цилиндра. Исследуемое преобразование выбрано так, что на больших расстояниях поток, соответствующий полосе, совпадает с потоком для кругового цилиндра. Следовательно, подъемная сила будет той же и определяется формулой (10.2.20). В случае полосы нам достаточно вычислить скорость вокруг нее, с тем чтобы путем соответствующего подбора циркуляции обеспечить конечность потока у заднего края. Для этого v_r должна равняться $2av_0 \sin \alpha$. Подставляя это в формулу (10.2.20), получим значительно более простым путем тот же результат:

$$L = 2\pi \rho av_0^2 \sin \alpha.$$

Заметим, что подъемная сила должна возрастать непрерывно вместе с ростом α вплоть до значения $\alpha = \pi/2$. На практике же, если угол атаки α слишком велик, то с переднего края начинают «срываться» вихри, линии тока не следуют за верхней частью поверхности, и полоса полностью теряет подъемную силу, как говорят «застревает». Когда φ мало отличается от π , следует поменять ролями передний и задний края, v_r положить равным $-2av_0 \sin \alpha$ и изменить знак у «подъемной силы».

С другой стороны, порожденный силами Бернулли вращающий момент, приложенный к полосе, приходится вычислять заново для каждого

профиля. Для случая полосы мы умножаем подинтегральную функцию в выражении для силы на $|z| = 2a \cos(\theta + \alpha)$. После ряда преобразований получим, что существенную роль играет только средний член, содержащий $\sin \alpha \cos \alpha$. При этом результирующий вращающий момент относительно центра полосы, рассчитанный на единицу длины, равен

$$T = \pi a^2 v_0^2 \sin(2\alpha).$$

Многие другие преобразования координат приводят к интересным решениям для различных часто встречающихся граничных контуров. Некоторые из них будут рассмотрены ниже в этом же параграфе, когда мы будем использовать метод Шварца — Кристоффеля для построения преобразований, соответствующих границам произвольной призматической формы. Однако до этого мы изучим виды полей, образованных различным образом распределенными линейными источниками.

Поля, создаваемые распределениями линейных источников. Одно из основных полей — поле, порожденное единичным линейным источником, — имеет вид

$$F = -2 \ln z = -\ln(x^2 + y^2) - 2i \operatorname{arctg}(y/x). \quad (10.2.21)$$

Если это поле создается линейным единичным электростатическим зарядом (единица заряда на единицу длины), то $\phi = -\ln(x^2 + y^2)$ является потенциальной функцией, а $-\bar{F}' = 2/\bar{z}$ есть вектор напряженности, направленный вдоль радиус-вектора z , величина которого обратно пропорциональна $|z| = r$. Если поле порождено единичным током в проводе, проходящем через начало координат перпендикулярно к плоскости x, y , то $\chi = -2 \operatorname{arctg}(y/x)$ является магнитным потенциалом, $\phi = \operatorname{const}$ есть уравнение магнитных силовых линий, а $i\bar{F}' = -i(2/\bar{z})$ есть вектор магнитной напряженности (перпендикулярный радиус-вектору и направленный по часовой стрелке, так как положительным мы считаем направление тока *от читателя*).

Если поле порождено единичным линейным источником жидкости, то ϕ есть потенциал скоростей, χ — функция тока, а вектор скорости равен $-\bar{F}' = 2/\bar{z}$. С другой стороны, если F описывает завихренный поток жидкости в окрестности *вихревой линии*, то ϕ является функцией тока, χ — потенциалом скоростей и $-i\bar{F}' = i(2/\bar{z})$ — вектором скорости. Поток такого рода может возникнуть, если длинный стержень, проходящий через начало координат перпендикулярно плоскости x, y , вращается против часовой стрелки с угловой скоростью, равной $2/r_0^2$, где r_0 — радиус стержня. (Предполагается, что вязкость достаточна для того, чтобы вблизи поверхности стержня жидкость двигалась вместе с этой поверхностью, и что продолжительность движения достаточна для установления стационарного безвихревого потока.)

Нашей задачей теперь является нахождение мероморфной (см. стр. 362 тома I) функции (в нашем случае просто z), имеющей простой нуль в точке $z = 0$ и не имеющей никаких других нулей или полюсов в конечной части плоскости. Тогда, чтобы найти F , мы возьмем умноженный на -2 натуральный логарифм этой функции. Если мощность источника равна q , то следует применить функцию z^q с точкой ветвления $z = 0$. Для того чтобы найти решение в случае нескольких линейных источников, расположенных в точках $z_1, z_2, \dots$ и т. д., соответственно мощности $q_1, q_2, \dots$ и т. д. следует взять натуральный логарифм от произведения $(z - z_1)^{q_1} (z - z_2)^{q_2} \dots$, а потенциал, функцию тока, скорость и другие характеристики можно полу-

чить посредством функции

$$F = -2 \ln \left[\prod_n (z - z_n)^{q_n} \right]. \quad (10.2.22)$$

Например, функция

$$F = -2 \ln \left[\frac{z-a}{z+a} \right] = \psi + i\chi, \quad \psi = \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right],$$

$$\chi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x+a} \right) - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x-a} \right) = -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right] \quad (10.2.23)$$

соответствует единичному положительному линейному источнику, расположенному в точке $z = a$, и единичному отрицательному источнику в точке $z = -a$. Из этой же функции можно получить решение и в случае единичного линейного заряда в точке $z = a$ и проводящей плоскости $x = 0$, имеющей нулевой потенциал. Тогда ψ является электростатическим потенциалом, а

$$-\bar{F}' = \frac{2}{z-a} - \frac{2}{z+a} = \frac{4a}{z^2 - a^2} = 4a \left[\frac{x^2 - y^2 - a^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4} \right]$$

— электростатической напряженностью. Плотность заряда на проводящей плоскости $x = 0$ равна значению

$$\frac{1}{4\pi} |F'| = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{1}{(z^2 - a^2)(\bar{z}^2 - a^2)}} = \frac{a/\pi}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4}}$$

при $x = 0$, т. е. равна $a/\pi (y^2 + a^2)$. Если заряд расположен не на бесконечно тонкой линии, а на тонкой проволоке радиуса ρ с осью, проходящей через точку $z = a$, то потенциал на поверхности проволоки равен вещественной части функции

$$2 \ln \left[\frac{a + \rho e^{i\theta} + a}{a + \rho e^{i\theta} - a} \right] = 2 \ln (2a/\rho) - 2i\theta + 2 \ln [1 + (\rho/2a) e^{i\theta}],$$

причем мы считаем $z = a + \rho e^{i\theta}$ на поверхности проволоки. Благодаря последнему члену эквипотенциальные поверхности несколько отличаются от окружностей с центрами в точке $z = a$, и, таким образом, вещественная часть этого выражения не равна в точности постоянной величине при постоянном ρ . Но, когда ρ достаточно мало по сравнению с a , мы можем пренебречь последним членом. Поэтому с точностью до членов первого порядка относительно малой величины ρ/a потенциал на поверхности проволоки равен $2 \ln (2a/\rho)$. Отсюда можно вычислить емкость проволоки относительно проводящей плоскости (см. стр. 173).

Функция F , соответствующая безвихревому потоку вязкой жидкости вокруг двух вращающихся стержней, отстоящих на расстоянии $2a$ друг от друга, равна

$$F = 2iA \ln (z^2 - a^2) = \psi + i\chi,$$

$$\psi = -2A \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} \right], \quad (10.2.24)$$

$$\chi = A \ln [(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4],$$

если оба стержня вращаются в одном направлении. Вектор скорости равен

$$-\bar{F}' = \frac{4i\bar{z}A}{z^2 - a^2} = -4A \left[\frac{y(x^2 + y^2 - a^2) - ix(x^2 + y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4} \right] \simeq$$

$$\simeq (2iA/\rho) e^{i\theta} \quad \text{для } z = a + \rho e^{i\theta}, \quad \rho \rightarrow 0,$$

причем этот предел должен равняться скорости $i\rho\omega e^{i\theta}$ поверхности стержня. На поверхности одного из стержней ($z = a + \rho e^{i\theta}$) сила, вызванная вязкостью

[как это следует из (10.2.14)], получится, если положить $\bar{z} = a + \rho e^{-i\theta}$ в формуле $-2i\eta\bar{F}' = 8\eta A (z^2 + a^2)/(z^2 - a^2)^2$. С точностью до членов первого порядка относительно ρ/a эта величина равна $-(4i\eta A/\rho) e^{i\theta} d\theta$, так что результирующий тормозящий момент, приходящийся на единицу длины стержня, равен $8\pi\eta A = 4\pi\rho^2\eta\omega$.

Если оба источника заключены внутри кругового цилиндра радиуса $b > a$, то мы можем вновь использовать метод изображений, располагая изображения на расстоянии b^2/a от начала. Например, магнитное поле, возникающее вокруг двух помещенных внутрь железного цилиндра проводов, по которым текут равные по силе, но противоположно направленные токи, описывается функцией

$$\begin{aligned} F &= -2q \ln \left\{ \frac{[z-a][z-b^2/a]}{[z+a][z+b^2/a]} \right\} = \psi + i\chi, \\ \psi &= 2q \ln \left\{ \frac{[x+a]^2 + y^2}{[x-a]^2 + y^2} \frac{[x+b^2/a]^2 + y^2}{[x-b^2/a]^2 + y^2} \right\}, \\ \chi &= 2q \left\{ \arctg \left[\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right] + \arctg \left[\frac{2b^2y/a}{x^2 + y^2 - b^4/a^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.2.25)$$

Магнитный потенциал χ обращается в нуль на окружности $x^2 + y^2 = b^2$, и на этой поверхности ($z = be^{i\varphi}$) магнитная напряженность равна вектору

$$H = i\bar{F}' = 8aq \frac{(a^2 + b^2) \sin \varphi}{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \varphi} e^{i\varphi},$$

всюду нормальному к этой поверхности. Эта напряженность достигает наибольшей величины в точке $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, где она имеет значение $8aq(a^2 + b^2)/(b^2 - a^2)^2$. Если бы при $r = b$ не было железного цилиндра, то напряженность в той же точке имела бы значение $4aq/(a^2 + b^2)$, значительно меньшее предыдущего.

Подобным же образом можно построить функцию, описывающую поток тепла в цилиндре с D-образным поперечным сечением, образованным осью y и правой половиной окружности радиуса b . Если цилиндр нагревается трубкой небольшого радиуса ρ с осью, проходящей через точку $z = a$ ($0 < a < b$), каждая единица длины которой излучает q единиц тепла в единицу времени, то температура внутри цилиндра равна вещественной части функции

$$\begin{aligned} F &= -\frac{q}{2\pi K} \ln \left\{ \frac{[z-a][z+b^2/a]}{[z+a][z-b^2/a]} \right\} = \psi + i\chi, \\ \psi &= \frac{q}{2\pi K} \ln \left\{ \frac{[x+a]^2 + y^2}{[x-a]^2 + y^2} \frac{[x-b^2/a]^2 + y^2}{[x+b^2/a]^2 + y^2} \right\}, \\ \chi &= \frac{q}{2\pi K} \left\{ \arctg \left[\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right] - \arctg \left[\frac{2b^2y/a}{x^2 + y^2 - b^4/a^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.2.26)$$

где K — теплопроводность материала внутри цилиндра. При этом предполагается, что на D-образной границе цилиндра температура $T = 0$.

На поверхности нагревающей трубки ($z = a + \rho e^{i\theta}$) функция F равна

$$F = -\frac{q}{2\pi K} \ln \left\{ \frac{\rho e^{i\theta}}{2a + \rho e^{i\theta}} \frac{a^2 + b^2 + a\rho e^{i\theta}}{a^2 - b^2 + a\rho e^{i\theta}} \right\} \simeq \frac{q}{2\pi K} \left\{ \ln \left[\frac{2a(b^2 - a^2)}{\rho(b^2 + a^2)} \right] - i\theta \right\}, \quad \frac{\rho}{2a} \rightarrow 0.$$

Полный поток тепла равен приращению χ при изменении θ от 0 до 2π , умноженному на теплопроводность K , т. е. равен q (как и должно быть). Температура поверхности нагревающей трубки равна

$$(q/2\pi K) \ln \{ 2a(b^2 - a^2)/\rho(b^2 + a^2) \}$$

и оказывается тем меньше, чем меньше расстояние от трубки до поверхности цилиндра (a мало, либо $b - a$ мало) или чем больше теплопроводность цилиндра, и тем больше, чем меньше радиус нагревающей трубки.

Потенциалы сеток и коэффициенты усиления. Интересное распределение потенциала связано с триодной вакуумной радиолампой, состоящей из анода — полового, проводящего цилиндра с внутренним радиусом b , расположенной коаксиально внутри него проволоочной сетки, состоящей на величину a ($a < b$) от оси цилиндра, и катода в виде проволоки, расположенной по оси цилиндра. Если сетка состоит из n проволок, оси которых параллельны катоду, то можно считать, что первая проходит через точку $z = a$, вторая через точку $ae^{i2\pi/n}$ и т. д., т. е. координата z , характеризующая положение проволок, принимает значения всех корней уравнения $z^n - a^n = 0$. Тогда потенциал, создаваемый одновременно всеми n проволоками, заряженными одинаково, равен $-(2q_g/n) \ln(z^n - a^n)$, где q_g есть суммарный заряд, приходящийся на единицу длины всех n проволок. Потенциал, порожденный комбинированным воздействием заряда $-q_c$ на катоде и заряда $-q_g$ на сетке, в предположении, что на аноде подерживается нулевой потенциал, равен вещественной части функции

$$F = 2q_c \ln \left[\frac{z}{b} \right] + \frac{2}{n} q_g \ln \left[\frac{z^n - a^n}{z^n - (b^2/a)^n} \right]. \quad (10.2.27)$$

Если радиус катода равен ρ_c , то с точностью до членов первого порядка относительно ρ_c/a его потенциал равен

$$-2q_c \ln(b/\rho_c) - 4q_g \ln(b/a),$$

а если радиус каждой проволоки сетки равен ρ_g , то потенциал сетки приближенно равен

$$-2q_c \ln(b/a) + (2q_g/n) \ln[n\rho_g a^{2n-1}/(b^{2n} - a^{2n})].$$

Предположим теперь, что потенциалы подобраны так, что катод заземлен, потенциал сетки равен V_g , а потенциал анода V_a . На основании предыдущих выражений заключаем, что

$$V_a \simeq 2q_c \ln(b/\rho_c) + 4q_g \ln(b/a),$$

$$V_g \simeq 2q_c \ln(a/\rho_c) + (2q_g/n) \ln \left[\frac{n\rho_g/a}{1 - (a/b)^{2n}} \right]$$

или

$$\begin{aligned} q_c &\simeq \frac{1}{2} \frac{V_g \ln(b/a) + (V_a/2n) \ln\{(a/n\rho_g)[1 - (a/b)^{2n}]\}}{\ln(a/\rho_c) \ln(b/a) + (1/2n) \ln(b/\rho_c) \ln\{(a/n\rho_g)[1 - (a/b)^{2n}]\}}, \\ q_g &\simeq \frac{1}{4} \frac{V_a \ln(a/\rho_c) - V_g \ln(b/\rho_c)}{\ln(a/\rho_c) \ln(b/a) + (1/2n) \ln(b/\rho_c) \ln\{(a/n\rho_g)[1 - (a/b)^{2n}]\}}. \end{aligned} \quad (10.2.28)$$

Из этих формул можно вывести несколько свойств этой системы электродов. Если положить $V_g = V_a$, то емкость катода относительно сетки и анода будет равна отношению q_c к V_a ; если $V_a = 0$, то емкость сетки относительно анода и катода равна отношению q_g к V_g и т. п.

Напряженность электрического поля у поверхности катода ($z = \rho_c e^{i\theta}$) равна с точностью до членов первого порядка относительно малых величин ρ_c/a и $(a/b)^{2n}$

$$E \simeq \frac{2q_c}{\rho_c} \simeq \frac{1}{\rho_c} \frac{V_g \ln(b/a) + V_a (1/2n) [\ln(a/n\rho_g) - (a/b)^{2n}]}{\ln(a/\rho_c) \ln(b/a) + (1/2n) \ln(b/\rho_c) [\ln(a/n\rho_g) - (a/b)^{2n}]}.$$

Если n достаточно велико (4 или больше), то коэффициент при V_a в этом выражении оказывается значительно меньшим коэффициента при V_g . Это означает, что сетка *экранирует* катод, так что воздействие на E , оказы-

ваемое некоторым изменением V_a , значительно меньше воздействия, оказываемого таким же изменением V_g . Отношение воздействия сетки на поле у катода к воздействию анода называется *коэффициентом усиления* вакуумной радиолампы. В нашем простом случае этот коэффициент равен

$$\mu \simeq \frac{2n \ln(b/a)}{\ln(an/p_g) - (a/b)^{2n}}. \quad (10.2.29)$$

Одномерные системы линейных источников. Пусть имеется бесконечное множество равных параллельных линейных источников, расположенных вдоль оси x на расстоянии a один от другого. Распределение потенциала можно получить, взяв логарифм функции, которая в точках $0, \pm a, \pm 2a, \dots$ обращается в нуль как функции $[z - (na)]$ соответственно. Такой

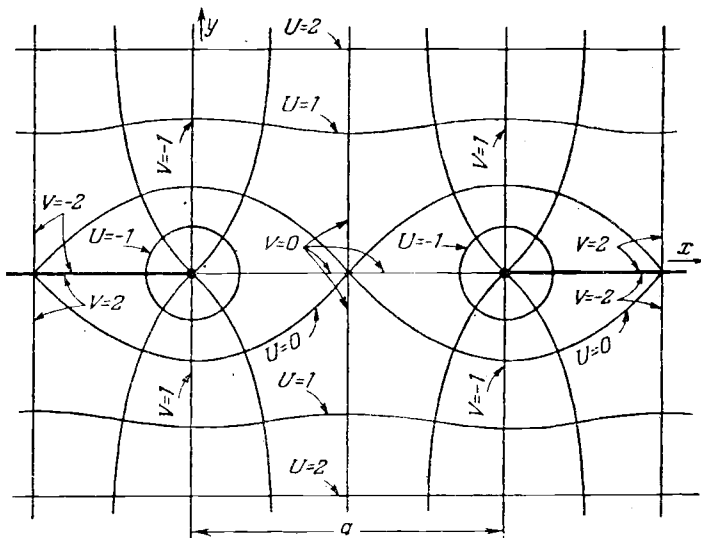


Рис. 10.15. Эквипотенциальные линии и линии тока около сетки из заряженных параллельных проводов: $\pi U = \psi - \ln 4$ и $\pi V = \chi$, где ψ и χ определяются выражениями (10.2.30).

функцией, очевидно, является $A \sin(\pi z/a)$. Поэтому потенциал, порожденный однородной сеткой из одинаковых линейных источников, расположенных вдоль оси x на расстоянии a один от другого, равен вещественной части функции

$$\begin{aligned} F_s &= -2 \ln[2 \sin(\pi z/a)] = \psi_s + i\chi_s \simeq \pm [(2\pi i/a)z - i\pi], \quad |y| \rightarrow \infty, \\ \psi_s &= -\ln 4 [\sin^2(\pi x/a) + \operatorname{sh}^2(\pi y/a)] \simeq -(2\pi/a)|y|, \quad |y| \rightarrow \infty, \\ \chi_s &= -2 \operatorname{arctg} [\operatorname{ctg}(\pi x/a) \operatorname{th}(\pi y/a)] \simeq \pm [(2\pi/a)x - \pi], \quad |y| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (10.2.30)$$

где знак плюс для предельных значений соответствует положительным значениям y , а знак минус — отрицательным и большим по абсолютной величине значениям y .

На большом расстоянии от сетки (при больших значениях $|y|$) поле однородно, как если бы оно было образовано заряженной плоскостью с постоянной поверхностной плотностью заряда, равной $1/a$. На малом расстоянии ρ от какого-нибудь из зарядов (например, в точках $z = \rho e^{i\theta}$) функция F_s приближенно равна

$$F_s \simeq -2 \ln(2\pi \rho e^{i\theta}/a) = 2 \ln(a/2\pi \rho) - 2i\theta.$$

В случае, когда знаки источников чередуются, потенциал можно получить при помощи функции

$$\begin{aligned} F_a &= -2 \ln [\operatorname{tg} (\pi z/a)] = 2 \ln [\operatorname{ctg} (\pi z/a)] \simeq \mp i\pi, \quad |y| \rightarrow \infty, \\ \psi_a &= \ln \left[\frac{\operatorname{ch} (2\pi y/a) + \cos (2\pi x/a)}{\operatorname{ch} (2\pi y/a) - \cos (2\pi x/a)} \right] \simeq 0, \quad |y| \rightarrow \infty, \\ \chi_a &= -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{sh} (2\pi y/a)}{\sin (2\pi x/a)} \right] \simeq \mp \pi, \quad |y| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10.2.31)$$

Если однородно заряженная сетка из параллельных проволок расположена на расстоянии b от заземленной проводящей плоскости, то потенциал можно получить при помощи функции

$$F = -2a\sigma \ln \left\{ \frac{\sin [(\pi/a)(z - ib)]}{\sin [(\pi/a)(z + ib)]} \right\}, \quad (10.2.32)$$

где a — расстояние между проволоками, σ — заряд сетки, приходящийся на единицу площади (так что $a\sigma$ есть величина заряда, приходящаяся на единицу длины каждой отдельной проволоки); заземленная пластина расположена вдоль оси x , сетка — вдоль прямой $y = b$, а изображение сетки — вдоль прямой $y = -b$.

Потенциал проволок сетки (например, в точке $z = ib + \rho e^{i\theta}$) приближенно равен

$$V \simeq 2a\sigma \ln (a/2\pi\rho) + 4\pi\sigma b, \quad \rho \ll a \ll b.$$

Поэтому емкость, рассчитанная на единицу площади, для системы из сетки и пластины равна

$$C = \frac{\sigma}{V} = \frac{1}{4\pi b + 2a \ln (a/2\pi\rho)}.$$

Предположим, что сетка заземлена, а пластина, расположенная вдоль оси $y = 0$, имеет потенциал $-V$; тогда потенциал в точке (x, y) равен

$$\psi = \frac{V}{2 \ln (a/2\pi\rho) + 4\pi b/a} \ln \left\{ \frac{\sin^2 [\pi x/a] + \operatorname{sh}^2 [(\pi/a)(y+b)]}{\sin^2 [\pi x/a] + \operatorname{sh}^2 [(\pi/a)(y-b)]} \right\} - V. \quad (10.2.33)$$

Над сеткой асимптотическое значение потенциала имеет вид

$$\psi \simeq -\frac{2 \ln (a/2\pi\rho)}{4\pi b/a + 2 \ln (a/2\pi\rho)} V, \quad y \gg b,$$

что указывает на экранирующее действие сетки. Если бы сетка была совершенным экраном, то асимптотический потенциал равнялся бы нулю. Если расстояние между проволоками сетки a существенно меньше расстояния b от сетки до пластины, то полученное асимптотическое выражение потенциала весьма мало, хотя и отлично от нуля.

Для случая конечной последовательности одинаково расположенных и одинаково заряженных проволок можно воспользоваться свойствами гамма-функции. Например, для последовательности из $N+1$ проволок, расположенных в точках $z = 0, -a, -2a, \dots, -Na$ и несущих заряд σa на единицу длины каждой проволоки (если бы плоскость, нормальная оси y , была заряжена с поверхностной плотностью σ , то на каждый прямоугольный участок этой плоскости, имеющий высоту единица и ограниченный двумя соседними проволоками, приходился бы заряд $a\sigma$), имеем

$$F = -2\sigma a \ln [z(z+a) \dots (z+Na)] = 2\sigma a \ln \left[a^{-N-1} \frac{\Gamma(z/a)}{\Gamma\left(\frac{z}{a} + N + 1\right)} \right]. \quad (10.2.34)$$

Если N мало, то для получения соответствующих результатов можно использовать представление F в виде произведения, как мы это делали раньше, но если N достаточно велико, то лучше пользоваться свойствами гамма-функции. Согласно гл. 4, мы имеем следующие свойства гамма-функции:

$$\begin{aligned} \ln [\Gamma(w)] &= -\gamma w - \ln w - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{w}{n} \right) - \frac{w}{n} \right] \simeq \\ &\simeq \left(w - \frac{1}{2} \right) \ln w - w + \ln \sqrt{2\pi} \quad \text{при } |w| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (10.2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \ln [\Gamma(w)] &= -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+w} \right] = \psi(w) \simeq \\ &\simeq \ln w \quad \text{при } |w| \rightarrow \infty, \quad \gamma = 0,5772 \dots, \end{aligned}$$

причем обе асимптотические формулы перестают быть верными для вещественных отрицательных значений w .

Например, если источниками являются провода, по которым текут токи (и $sa = I$ есть ток, текущий по каждому из проводов), то напряженность магнитного поля в точке z равна

$$\begin{aligned} H = i\bar{F}' &= \frac{2iI}{a} \left[\bar{\psi} \left(\frac{z}{a} \right) - \bar{\psi} \left(\frac{z}{a} + N + 1 \right) \right] = -2iI \sum_{n=0}^N \frac{1}{z + an} \simeq \\ &\simeq -i \frac{2I}{a} \ln \left[1 + \frac{a(N+1)}{z} \right]. \end{aligned}$$

Для вещественных и положительных z это поле направлено вниз, в то время как для z с большой мнимой частью поле горизонтально. Если $z = Re^{i\theta}$ и $R \gg Na$, то напряженность стремится к величине

$$H \simeq [2(N+1)I/R](-ie^{i\theta}),$$

соответствующей полю, порожденному одним единственным проводом, по которому течет ток $(N+1)I$.

Двумерная система линейных источников. Наконец, мы должны изучить распределение потенциала, создаваемого системой линейных источников, размещенных по всей плоскости x, y в некотором определенном порядке. Мы получим этот потенциал, взяв логарифм от эллиптической функции (см. § 4.5), поскольку нули и полюсы такой функции размещены на комплексной плоскости в определенном порядке. Как мы видели выше, эта система периодична, состоит из бесконечно повторяющихся *основных ячеек*, являющихся параллелограммами или, в большинстве приложений, прямоугольниками со сторонами a (параллельными оси x) и b (параллельными оси y). Эллиптические функции двояко-периодичны, вновь и вновь повторяют одни и те же значения; для каждой конгруэнтной точки, в каждой основной ячейке, эти значения те же самые.

Как мы установили [см. уравнение (4.5.66)], в основной ячейке число нулей эллиптической функции равно числу ее простых полюсов. Это соответствует требованию, чтобы суммарный заряд в основной ячейке равнялся нулю, так как иначе потенциал был бы всюду бесконечным. Выбор той или иной эллиптической функции определяется распределением линейных зарядов в отдельной ячейке.

Например, функция $\operatorname{sn}(u, k)$ имеет простые нули в точках $u = 2mK + + 2inK'$ (где $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и простые полюсы в точках

$2mK + i(2n+1)K'$; в последовательности нулей, расположенных по вещественной оси, расстояние между двумя соседними нулями равно $2K$, последовательность полюсов расположена вдоль линии $y = K'$, причем каждый полюс лежит над нулем из предыдущей последовательности, и т. д. Следовательно, потенциал, порожденный множеством линейных источников, показанных на рис. 10.16, а, равен вещественной части функции

$$F_a = 2q \ln \left\{ \operatorname{sn} \left[\frac{K}{a} z, k \right] \operatorname{sn} \left[\frac{K}{a} (z + a), k \right] \right\} = \\ = 2q \ln \{ \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) / \operatorname{dn}(u, k) \}, \quad u = Kz/a, \quad (10.2.36)$$

где k выбрано так, что $K'/K = b/a$ из таблицы на стр. 463 тома I.

Эта таблица содержит лишь те случаи, когда $K' \geq K$ (т. е. $b \geq a$). Для случаев, когда $b < a$, можно повернуть всю картину на 90° и поменять ролями a и b (а следовательно, и K и K' , k и k'). Тогда, используя преобразования $\operatorname{sn}(iu, k') = i \operatorname{sn}(u, k) / \operatorname{cn}(u, k)$ и т. д., получим потенциал в виде вещественной части функции

$$F'_a = 2q \ln \{ \operatorname{sn}(u, k) / \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \}, \\ u = Kz/a, \quad (10.2.37)$$

где новое b уже не меньше нового a , как это было раньше. [Или же можно поменять ролями a и b , K и K' , k и k' в таблице и опять воспользоваться формулой (10.2.36).]

Далее, если распределение источников имеет вид, изображенный на рис. 10.16, б, то потенциал равен вещественной части функции

$$F_b = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{sn}(u + K, k)} \right\} = \\ = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)} \right\}. \quad (10.2.38)$$

Наконец, если распределение источников имеет вид, указанный на рис. 10.16, в, мы можем использовать функцию $\operatorname{cn}(u, k)$, имеющую нули в точках $(2m+1)K + 2inK'$ и полюсы в точках $2mK + i(2n+1)K'$. Потенциал в этом случае определяется вещественной частью функции

$$F_v = 2q \ln [\operatorname{cn}(u, k)], \quad u = Kz/a. \quad (10.2.39)$$

В случае (а) (см. рис. 10.16) потенциал на поверхности проволоки $z = \rho e^{i\theta}$ ($\rho \ll a$) можно получить, исходя из свойств эллиптических функций

$$\operatorname{sn}(u, k) \simeq u, \quad \operatorname{cn}(u, k) \simeq 1, \quad \operatorname{dn}(u, k) \simeq 1 \quad \text{при } u \rightarrow 0.$$

Поэтому потенциал отрицательно заряженных проволок приближенно равен $-2q \ln(a/K\rho)$. Для вычисления потенциала на поверхности $z = iK' + \varepsilon e^{i\theta}$ положительно заряженной проволоки мы используем соотношения

$$\operatorname{sn}(u + iK', k) \simeq \frac{1}{ku}, \quad \operatorname{cn}(u + iK', k) \simeq \frac{1}{iku}, \quad \operatorname{dn}(u + iK', k) \simeq \frac{1}{iu} \quad \text{при } u \rightarrow 0.$$

Следовательно, приближенное выражение для разности потенциалов между положительно и отрицательно заряженными проволоками в случае а

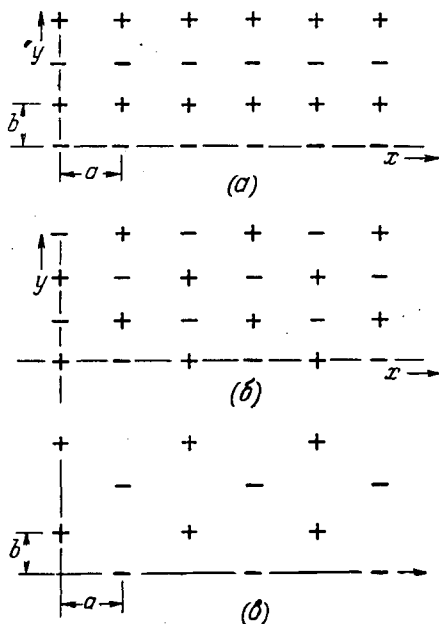


Рис. 10.16. Распределения параллельных линейных источников, соответствующие различным эллиптическим функциям.

имеет вид

$$V_a = 2a \ln(a^2/k^2 K^2 \varepsilon \rho). \quad (10.2.40)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что соответствующие разности потенциалов в случаях (б) и (в), изображенных на рис. 10.16, имеют вид

$$V_b = 2q \ln(a^2/K^2 \varepsilon \rho), \quad V_v = 2q \ln(a^2/kk' K^2 \varepsilon \rho). \quad (10.2.41)$$

Изучая рис. 10.16, легко понять, почему $V_a > V_v > V_b$, если $b > a$.

Периодические распределения изображений. Пусть линейные заряды расположены между двумя проводящими плоскостями, параллельными друг другу и линиям, несущим заряды. Тогда изображение каждого линейного заряда в одной из плоскостей порождает изображение в другой

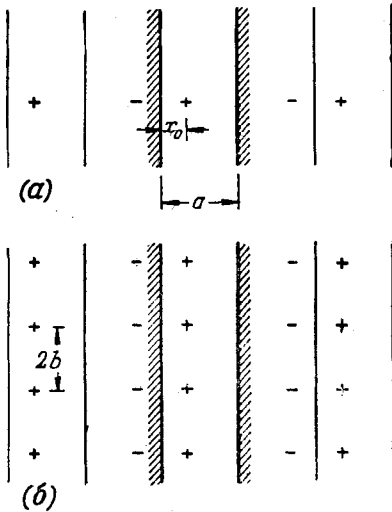


Рис. 10.17. Периодическое распределение изображений.

плоскости и т. д. до тех пор, пока мы, стремясь полностью удовлетворить обоим граничным условиям, не построим бесконечную последовательность симметрично расположенных изображений. Например, если две параллельные плоскости перпендикулярны оси x , причем одна из них проходит через начало, а другая через точку $x = a$, и если линейный заряд расположен в точке $x = x_0$ ($x_0 < a$), то должна существовать последовательность изображений, находящихся в точках $x = x_0 + 2ma$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$), причем все изображения должны иметь тот же знак, что и действительный источник, и еще одна последовательность изображений противоположного знака, расположенных в точках $x = -x_0 + 2na$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), как это показано на рис. 10.17, а.

Потенциал, соответствующий такому расположению линейного заряда и изображений, равен вещественной части логарифма от функции, имеющей полюсы в точках $x =$

$x_0 + 2ma$ и нули в точках $x = -x_0 + 2na$, а именно

$$F = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{ctg} [\pi x_0/a] + \operatorname{ctg} [(\pi/2a)(z - x_0)]}{\operatorname{ctg} [\pi x_0/a] - \operatorname{ctg} [\pi x_0/2a]} \right\} = \\ = 2q \ln \left\{ \frac{\sin [(\pi/2a)(x_0 + z)]}{\sin [(\pi/2a)(x_0 - z)]} \right\}, \quad (10.2.42)$$

подобранной так, чтобы выражение в скобках равнялось единице в точке $x = 0$ (следовательно, в силу периодичности, оно равно ± 1 при $x = na$). Поэтому потенциал обеих пластин равен нулю, а потенциал проволоки радиуса ρ , несущей заряд ($z = x_0 + \rho e^{i\theta}$), приближенно равен

$$V \simeq 2q \ln \left[\frac{\sin (\pi x_0/a)}{\pi \rho/2a} \right], \quad \rho \ll x_0. \quad (10.2.43)$$

Следовательно, емкость системы, состоящей из проволоки и двух пластин, равна

$$\frac{q}{V} \simeq \frac{1}{2 \ln [\sin (\pi x_0/a)/(\pi \rho/2a)]}.$$

Далее, мы можем найти потенциал сетки из параллельных проволок, отстоящих друг от друга на расстоянии $2b$, расположенной между двумя параллельными пластинами, как это показано на рис. 10.17, б. Мы ищем

эллиптическую функцию, имеющую полюсы в точках $x_0 + 2am + 2ibn$; такой функцией оказывается

$$\operatorname{cn}[(K/a)(z - x_0), k] / \operatorname{sn}[(K/a)(z - x_0), k],$$

где k подобрано так, чтобы иметь $K' = K(b/a)$. Но искомая функция должна равняться нулю в точках $-x_0 + 2am + 2ibn$, являющихся изображениями указанных выше точек. Функцией, удовлетворяющей этим условиям, является аналог выражения $\operatorname{ctg}[\pi x_0/a] + \operatorname{ctg}[(\pi/2a)(z - x_0)]$, и, следовательно, искомый потенциал равен вещественной части функции

$$F = 2q \ln \left\{ \frac{\frac{\operatorname{cn}(2Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(2Kx_0/a)} - \frac{\operatorname{cn}[(K/a)(x_0 - z)]}{\operatorname{sn}[(K/a)(x_0 - z)]}}{\frac{\operatorname{cn}(2Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(2Kx_0/a)} - \frac{\operatorname{cn}(Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(Kx_0/a)}} \right\}, \quad (10.2.44)$$

подобранной таким образом, чтобы потенциал пластин равнялся нулю.

На поверхности проводника $z = x_0 + \rho e^{i\theta}$ этот потенциал приближенно равен

$$V \simeq 2q \ln \left\{ \frac{-a/K\rho}{\frac{\operatorname{cn}(2Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(2Kx_0/a)} - \frac{\operatorname{cn}(Kx_0/a)}{\operatorname{sn}(Kx_0/a)}} \right\} = \\ = 2q \ln \left\{ \frac{(2a/K\rho) \operatorname{sn}(\alpha, k) \operatorname{cn}(\alpha, k) \operatorname{dn}(\alpha, k)}{\operatorname{cn}^2(\alpha, k) [2 \operatorname{dn}(\alpha, k) - 1] + \operatorname{sn}^2(\alpha, k) \operatorname{dn}^2(\alpha, k)} \right\},$$

где $\alpha = Kx_0/a$. Исходя из этого выражения для потенциала, мы можем вычислить емкость системы сетка-пластины, приходящуюся на одну проволоку. Заметим, что когда расстояние $2b$ между проволоками сетки делается много большим, чем расстояние a между пластинами, параметр k стремится к нулю и выражение для V сводится к (10.2.43), так как при $k \rightarrow 0$ имеем

$$\operatorname{sn}(u, k) \simeq \sin(\pi u/2K), \quad \operatorname{cn}(u, k) \simeq \cos(\pi u/2K), \quad \operatorname{dn}(u, k) \simeq 1.$$

Конечно, мы не показали, что потенциал, определяемый формулой (10.2.44), равен нулю всюду на прямых $x = 0$ и $x = a$. Однако, как мы видели на стр. 405 тома I, выбор характера и расположения нулей и полюсов эллиптической функции внутри основной ячейки определяет эллиптическую функцию единственным образом с точностью до постоянного множителя. Подобно этому мы знаем, что раз мы определили положение и величину действительных и фиктивных линейных зарядов, мы единственным образом определим потенциальное поле. Следовательно, функция, соответствующая всем фиктивным зарядам, должна удовлетворять тем граничным условиям, в связи с которыми появились эти фиктивные заряды. Этому соответствует следующее математическое утверждение: для $z = iy$ ($x = 0$) функция

$$\frac{\operatorname{cn}(2Kx_0/a, k)}{\operatorname{sn}(2Kx_0/a, k)} - \frac{\operatorname{cn}[(K/a)(x_0 - z), k]}{\operatorname{sn}[(K/a)(x_0 - z), k]} = Ae^{i\theta} \quad (10.2.45)$$

имеет постоянную амплитуду (т. е. A не зависит от y , когда $x = 0$). Для доказательства этого утверждения потребовался бы целый ряд утомительных операций.

Теперь можно применить преобразование

$$z = r_1 e^w, \quad w = \ln(z/r_1)$$

для того, чтобы перейти от распределения, показанного на рис. 10.17,б (теперь будем считать, что на нем изображена плоскость w), к распределению рис. 10.18, соответствующему сетке из n проволок, расположенной между двумя цилиндрами, внутренним с радиусом r_1 и внешним с радиусом r_2 .

Для определения k , K и K' мы требуем, чтобы $r_2 = r_1 e^a$ и чтобы $r_0 e^{2\pi i/n}$ соответствовало $w = x_0 + 2ib$. Поэтому

$$a = \ln(r_2/r_1), \quad x_0 = \ln(r_0/r_1), \quad b = \pi/n.$$

Потенциал равен вещественной части функции

$$F = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{cn} [2\gamma \ln(r_0/r_1)]}{\operatorname{sn} [2\gamma \ln(r_0/r_1)]} - \frac{\operatorname{cn} [\gamma \ln(r_0/z)]}{\operatorname{sn} [\gamma \ln(r_0/z)]} \right\}, \quad (10.2.46)$$

где $\gamma = K/a = K/\ln(r_2/r_1)$ и где K , K' и k выбраны так, что

$$K'/K = b/a = \pi/n \ln(r_2/r_1).$$

Наконец, если внутри прямоугольной призмы, поверхность которой имеет нулевой потенциал, расположен только один линейный заряд, то,

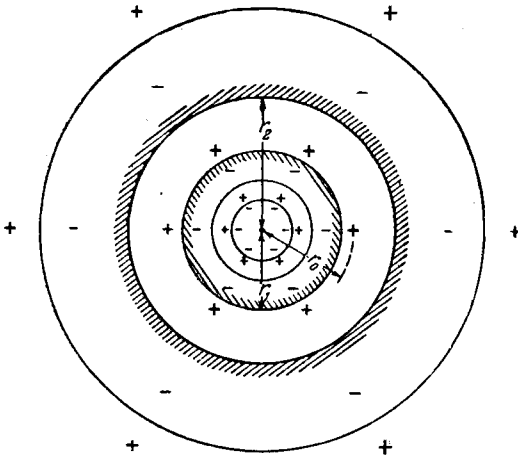


Рис. 10.18. Распределение изображений линейных источников, расположенных между концентрическими цилиндрами.

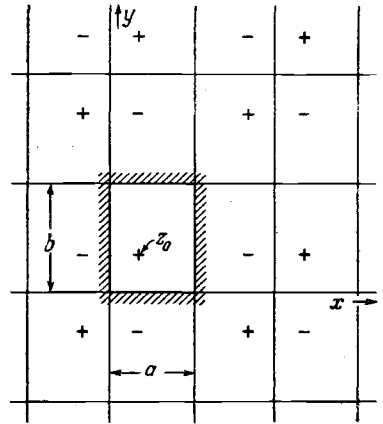


Рис. 10.19. Распределение изображений линейного источника, расположенного внутри прямоугольной призмы с размерами a и b .

как показано на рис. 10.19, изображения этого заряда повторяются двояко-периодическим образом по всей плоскости z . На основании уже сделанного нетрудно убедиться, что внутри области $0 < x < a$, $0 < y < b$ этот потенциал определяется вещественной частью функций

$$F = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{cn} (2Kx_0/a)}{\operatorname{sn} (2Kx_0/a)} - \frac{\operatorname{cn} [(K/a)(z_0 - z)]}{\operatorname{sn} [(K/a)(z_0 - z)]} \right\}, \quad (10.2.47)$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$, а $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$.

При помощи последней формулы можно вычислить емкость проволоки внутри прямоугольного волновода или же распределение температуры в прямоугольном брусе, внутри которого источники тепла распределены произвольным образом.

Потенциал в случае призматических границ. В качестве заключительного примера применения функций комплексного переменного к решению двумерного уравнения Лапласа рассмотрим распределение потенциала

в случае призматических граничных поверхностей, сечение которых плоскостью x, y есть многоугольник — обычный или вырожденный — и которые простираются неограниченно в направлении, перпендикулярном плоскости x, y .

Для решения этих задач нужно решить соответствующую задачу для верхней полуплоскости w , а затем преобразованием Кристоффеля — Шварца перевести вещественную ось плоскости w в границу заданного многоугольника на плоскости z .

Как мы видели в § 4.6, если многоугольник имеет внешние углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ в последовательно расположенных вершинах, соответствующих точкам $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, \infty$, лежащим на вещественной оси плоскости w , то преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость плоскости w во внутреннюю область данного многоугольника в плоскости z , определяется при помощи дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dw} = \prod_{n=1}^{N-1} \frac{A}{(w - a_n)^{\alpha_n/\pi}}. \quad (10.2.48)$$

Внутренняя область многоугольника, остающаяся слева при обходе периметра, отображается на верхнюю полуплоскость плоскости w , а α_n есть угол поворота налево (против часовой стрелки) вокруг n -й вершины.

Обычно величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}$, A и появляющаяся при интегрировании произвольная постоянная z_0 подбираются, после того как интегрирование завершено, такими, чтобы вершины многоугольника были нужным образом расположены в плоскости z . Это преобразование и некоторые его применения рассматривались в § 4.6; здесь мы для выяснения некоторых вопросов рассмотрим еще несколько примеров.

Вырожденная призма изображена на рис. 10.20. Точка A , лежащая в $z = -\infty$, соответствует $w = -\infty$. В точке B ($z = ia$, $w = -1$) внешний угол равен $\alpha_1 = -\pi$, в точке C ($z = -\infty$, $w = 0$) соответствующий угол равен $\alpha_2 = +\pi$ и в D ($z = 0$, $w = +1$) угол также равен $-\pi$. Поэтому преобразование задается формулой

$$z - z_0 = A \int \frac{w^2 - 1}{w} dw = A \left[\frac{1}{2} w^2 - \ln w \right].$$

Обходя в выбранном направлении «многоугольник» $ABCD A$, мы получим в качестве его «внутренней области» всю плоскость z (с разрезами), которая, следовательно, соответствует верхней полуплоскости плоскости w .

Для того чтобы точка $w = 1$ соответствовала точке $z = 0$, мы положим $z_0 = -\frac{1}{2} A$. Для того чтобы точка $w = -1 = e^{i\pi}$ соответствовала $z = ia$,

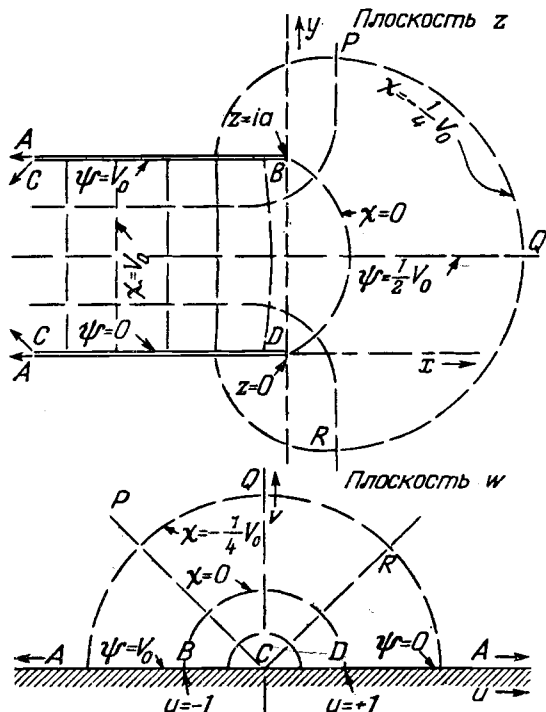


Рис. 10.20. Преобразование Кристоффеля — Шварца для конденсатора с параллельными пластинами $ABCDA$.

требуется, чтобы $-i\pi A = ia$, или $A = -a/\pi$. Поэтому окончательно искомое преобразование имеет вид

$$z = \frac{a}{\pi} \left[\ln w + \frac{1}{2} (1 - w^2) \right], \quad \frac{dz}{dw} = \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{w} - w \right). \quad (10.2.49)$$

Конденсатор с параллельными пластинами. Теперь найдем дальнейшие преобразования плоскости w , приводящие к интересующим нас распределениям потенциала. Например, функция

$$F = \psi + i\chi = (V_0/i\pi) \ln w, \quad w = e^{i\pi F/V_0}$$

определяет потенциал ψ , который на положительной вещественной полуоси плоскости w равен нулю, а на отрицательной V_0 . Выполним отображение на плоскость z . Тогда линии $\psi = \text{const}$ соответствуют эквипотенциальным линиям в поле конденсатора, образованном двумя параллельными полубесконечными пластинами, нижняя из которых имеет нулевой потенциал, а верхняя потенциал V_0 . Соотношение между z и $F = \psi + i\chi$ имеет вид

$$\begin{aligned} z &= \frac{a}{\pi} \left[\frac{i\pi}{V_0} F + \frac{1}{2} (1 - e^{2\pi i F/V_0}) \right], \quad \frac{dz}{dF} = i \frac{a}{V_0} (1 - e^{2\pi i F/V_0}), \\ x &= -\frac{a}{V_0} \chi + \frac{a}{2\pi} [1 - e^{-2\pi \chi/V_0} \cos(2\pi \psi/V_0)], \\ y &= \frac{a}{V_0} \psi - \frac{a}{2\pi} e^{-2\pi \chi/V_0} \sin(2\pi \psi/V_0) \end{aligned} \quad (10.2.50)$$

и дает возможность записать уравнения эквипотенциальных и силовых линий в параметрической форме.

Область, где $|w| < 1$, задается неравенством $\chi > 0$ и соответствует области между пластинами. Здесь экспоненциальный член мал и электрическая напряженность $(\bar{F}')$ приближенно равна iV_0/a , т. е. постоянному вектору, направленному от нижней пластины к верхней. Величина электрической напряженности в точке, соответствующей заданным значениям ψ, χ , равна

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| = \frac{V_0/a}{V \sqrt{1 + e^{-4\pi \chi/V_0} - 2e^{-2\pi \chi/V_0} \cos(2\pi \psi/V_0)}}, \quad (10.2.51)$$

а плотность заряда на нижней пластине ($\psi = 0$) равна

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{dz} \right|_{\psi=0} = \left| \frac{V_0/4\pi a}{1 - e^{-2\pi \chi/V_0}} \right|, \quad x = -\frac{a\chi}{V_0} + \frac{a}{2\pi} [1 - e^{-2\pi \chi/V_0}].$$

Область, где $\chi > 0$, есть верхняя сторона этой пластины, а на нижней стороне $\chi < 0$.

Для положительных χ (во внутренней, заключенной между пластинами области) плотность заряда с увеличением χ делается равной величине $V_0/4\pi a$, не зависящей от x . Для отрицательных χ наружная плотность σ при уменьшении χ делается равной $(V_0/4\pi a) e^{2\pi \chi/V_0} \simeq -V_0/2x$ — величине, быстро убывающей с удалением от края пластины, где $x = 0$. На краю пластины конденсатора плотность заряда бесконечна.

Вспомним, что, используя функцию тока χ , можно вычислить полный заряд на проводящей поверхности. Действительно, заряд (приходящийся на единицу длины конденсатора в направлении, перпендикулярном плоскости x, y) между точкой, где $\chi = \chi_1$, и точкой, где $\chi = \chi_2$, в точности равен $(\chi_2 - \chi_1)/4\pi$. Для того чтобы найти полный заряд, расположенный на внутренней и внешней сторонах одной из пластин на участке ширины l ,

считая от края пластины, достаточно найти значения χ для $x = -l$ на внутренней и на внешней стороне этой пластины. Если l больше, чем a , то это сделать нетрудно. Из выражений (10.2.50) мы видим, что для внутренней стороны, т. е. для положительных χ , хорошим приближением служит $\chi_2 \simeq V_0 l/a + V_0/2\pi$, в то время как для внешней стороны, т. е. для отрицательных χ , $\chi_1 \simeq -(V_0/2\pi) \ln(2\pi l/a)$.

Следовательно, полный заряд полосы единичной длины, имеющей ширину l , равен

$$Q \simeq \frac{V_0 l}{4\pi a} \left[1 + \frac{a}{2\pi l} \ln \left(\frac{2\pi l}{a} \right) \right], \quad \ln(e) = 1.$$

Второй член является «краевой поправкой», соответствующей дополнительному заряду, сосредоточенному вблизи края пластины. Таким образом, емкость пары длинных полос ширины $2l$, отстоящих друг от друга на расстояние a , рассчитанная на единицу длины полосы, приближенно равняется

$$C \simeq \frac{l}{2\pi a} \left[1 + \frac{a}{2\pi l} \ln \left(\frac{2\pi l}{a} \right) \right].$$

Чем больше l по сравнению с a , тем меньше поправочный член.

Между пластинами (где χ положительно) вдоль эквипотенциальной линии, проходящей вблизи нижней пластины (ψ мало), электрическая напряженность постоянна. Она возрастает до максимального значения, достигаемого у края пластины (где χ равно нулю), а затем быстро падает при отрицательных значениях χ . Для эквипотенциальных поверхностей, лежащих между $\psi = \frac{1}{4} V_0$ и $\psi = \frac{3}{4} V_0$, не существует максимального значения напряженности, $|dF/dz|$ является монотонно убывающей функцией χ для χ , изменяющегося от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, если проводящие поверхности расположены вдоль линий $\psi = \frac{1}{4} V_0$ и $\psi = \frac{3}{4} V_0$, как показано на рис. 10.20 (линии CR и CP), то на них нет точки, где напряженность максимальна и где мог бы произойти пробой конденсатора благодаря искрообразованию. Благодаря уменьшению расстояния разность потенциалов между такими проводниками равна лишь половине разности потенциалов между полубесконечными тонкими пластинами при той же средней напряженности между пластинами. Однако максимальная поверхностная напряженность у острого края в случае тонких пластин значительно превосходит среднюю напряженность, что способствует пробоем такого конденсатора. Поэтому если проводник закруглен, то пробой произойдет при более высокой разности потенциалов.

Возможны также иные преобразования, соответствующие другим граничным условиям. Например, функция Грина для линейного источника в точке $w = u_0 + iv_0$ равна

$$F = -2q \ln \left[\frac{w - u_0 - iv_0}{w - u_0 + iv_0} \right] = -4iq \operatorname{arctg} \left[\frac{w - u_0}{v_0} \right] = \psi + i\chi,$$

$$w = u_0 + iv_0 \operatorname{th} \left(\frac{F}{4q} \right), \quad \frac{dF}{dw} = \frac{-4iqv_0}{(w - u_0)^2 + v_0^2}. \quad (10.2.52)$$

Окончательный вид преобразования от ϕ, χ к x, y может быть получен при помощи подстановки только что найденного выражения для w в равенство (10.2.49). Источник перейдет в точку z_0 , лежащую в плоскости z и получающуюся при подстановке $w_0 = u_0 + iv_0$ в равенство (10.2.49).

Вблизи точки z_0 соотношение между z и F имеет вид

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \left(\frac{dz}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots = \\ &= z_0 + \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{\omega_0} - \omega_0 \right) [-2i v_0 e^{-F/2q}] + \dots \end{aligned}$$

или приближенно

$$F = \psi + i\chi \simeq -2q \ln \left[\frac{\pi \omega_0 (z - z_0)}{a (1 - \omega_0^2)} \right], \quad z \rightarrow z_0.$$

Например, если $\omega_0 = i$, то $z_0 = a/\pi + \frac{1}{2}ia$. Если проволока радиуса ρ ($\rho \ll a$), проходящая через эту точку, заряжена с линейной плотностью q , то потенциал ее поверхности приближенно равен

$$V \simeq 2q \ln (2a/\pi\rho),$$

а потенциал обеих пластин, очевидно, равен нулю. Плотность заряда, индуцированного на одной из пластин, в точке, соответствующей точке ω (на вещественной оси плоскости ω), равна

$$\frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{d\omega} \right| \left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \frac{qv_0/a}{(\omega - u_0)^2 + v_0^2} \left| \frac{\omega}{1 - \omega^2} \right|.$$

Эта плотность равна нулю на бесконечно удаленном конце пластины ($\omega = 0$ или $\omega = \pm \infty$); она возрастает до максимума у края пластины (ω равно $+1$ или -1), ближайшего к линейному заряду. Эта плотность, вообще говоря, меньше вне пластин (при $|\omega| > 1$), чем между ними (при $|\omega| < 1$).

Переменный конденсатор. Другим случаем вырожденной призмы являются две бесконечные пластины, между которыми (посередине) помещена полубесконечная пластина, как это показано на рис. 10.21. Мы должны отобразить область, заключенную между пластинами, на верхнюю полуплоскость плоскости ω . Начиная обход границы с точки A , получим, что углы многоугольника соответственно равны $+\pi$ в точке B , $+\pi$ в точке C и $-\pi$ в точке D . Поэтому формула, задающая преобразование, имеет вид

$$z - z_0 = A \int \frac{(u-1) du}{u(u+1)} = A \left[2 \ln \left(\frac{\omega+1}{2} \right) - \ln(\omega) \right].$$

Так как $z=0$ при $\omega=1$, то z_0 оказывается равным нулю. Так как при $0 > \omega > -1$, z должно равняться $-ia + (\text{вещественное число})$, то мы получим $A = a/\pi$. Поэтому

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \left[\frac{\omega}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega} \right] = \frac{2a}{\pi} \ln \left[\frac{1}{2} \sqrt{\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right]. \quad (10.2.53)$$

Задачу о распределении потенциала у края пластины в переменном конденсаторе можно решить, добившись такого соотношения между F и ω , чтобы пластина ADC имела нулевой потенциал, а пластины AB и BC имели потенциал V_0 . Для этого положим

$$\omega = e^{\pi i F / V_0}, \quad \frac{dF}{d\omega} = \frac{V_0}{i\pi\omega},$$

что в конечном счете дает

$$z = \frac{2a}{\pi} \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\pi i F}{2V_0} \right) \right], \quad F = \frac{2V_0}{\pi i} \operatorname{Arch} [e^{\pi z/2a}],$$

$$x = \frac{a}{\pi} \ln \left[\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi \chi}{2V_0} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi \psi}{2V_0} \right) + \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi \chi}{2V_0} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi \psi}{2V_0} \right) \right], \quad (10.2.54)$$

$$y = -\frac{2a}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \psi}{2V_0} \right) \operatorname{th} \left(\frac{\pi \chi}{2V_0} \right) \right].$$

Эквипотенциальные линии показаны на рис. 10.21; мы вновь замечаем, что поле однородно в областях, близких к A и C , что оно быстро исчезает, когда мы идем от D к B и что напряженность поля неограниченно

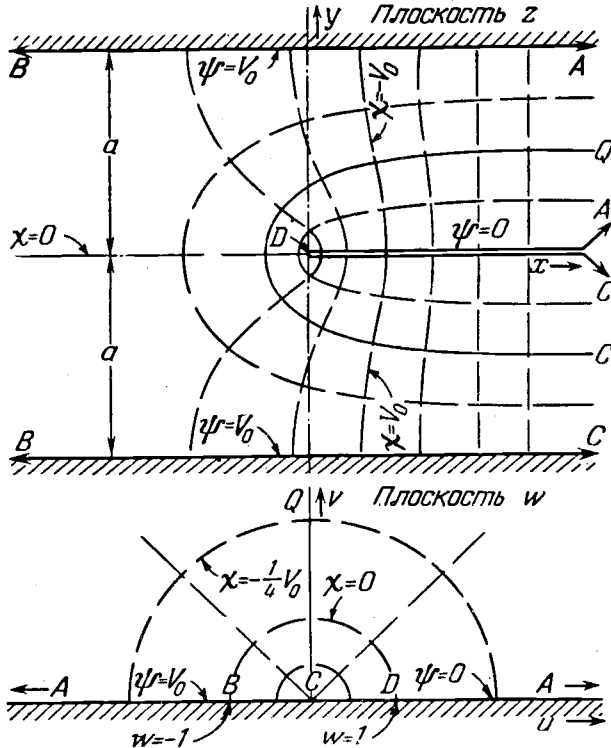


Рис. 10.21. Преобразование Кристоффеля—Шварца для конденсатора $AB-BC-CDA$. Наилучшая форма внутреннего проводника показана сплошной линией

$$CQ \left(\psi = \frac{1}{2} V_0 \right).$$

возрастает у края D внутренней пластины. Ясно, что величина электрической напряженности равна

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| = \frac{V_0/a}{\sqrt{1 + e^{-2\pi x/a} - 2e^{-\pi x/a} \cos(\pi y/a)}} = \frac{V_0}{a} \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi F}{aV_0} \right) \right|, \quad (10.2.55)$$

что вновь подчеркивает те же свойства поля: для положительных x $|dF/dz| \simeq (V_0/a)$ при $x \rightarrow \infty$, а для отрицательных x $|dF/dz| \simeq (V_0/a) e^{\pi x/a}$ при $x \rightarrow -\infty$, причем последняя величина быстро стремится к нулю.

Плотность заряда на средней пластине ($y=0$) равна (учитывая обе стороны).

$$\frac{2}{4\pi} \left| \frac{dF}{dz} \right|_{y=0} = \frac{V_0/2\pi a}{1 - e^{-\pi x/a}}.$$

Для бесконечно тонкой пластины, расположенной вдоль вещественной оси плоскости z , напряженность поля на ее поверхности равна V_0/a вдали от края и возрастает до бесконечности у края. У пластины конечной толщины с контуром, соответствующим кривой $\psi = \psi_0$ ($\psi_0 < V_0$), край закругленный, а не острый. На некотором расстоянии от края (для больших $|\chi|$) толщина ее равна $2\psi_0 a/V_0$, так что воздушный промежуток равен величине $a[1 - \psi_0/V_0]$, а не a . Напряженность поля у этой поверхности равна

$$\left| \frac{dF}{dz} \right|_{\psi=\psi_0} = \frac{V_0}{a} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(\pi\chi/2V_0) - \sin^2(\pi\psi_0/2V_0)}{\operatorname{sh}^2(\pi\chi/2V_0) + \sin^2(\pi\psi_0/2V_0)}}. \quad (10.2.56)$$

На некотором расстоянии от края (для больших $|\chi|$) эта величина равна V_0/a , а при $\psi_0 < \frac{1}{2} V_0$ она достигает максимального значения $(V_0/a) \operatorname{ctg}(\pi\psi_0/2V_0)$ у края $\chi = 0$. Если мы желаем выбрать внутреннюю пластину конденсатора.

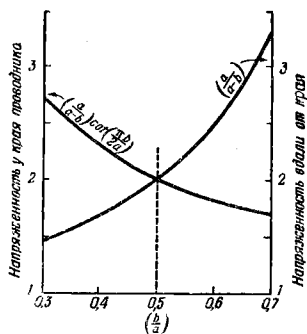


Рис. 10.22. Определение наилучшей формы пластины конденсатора.

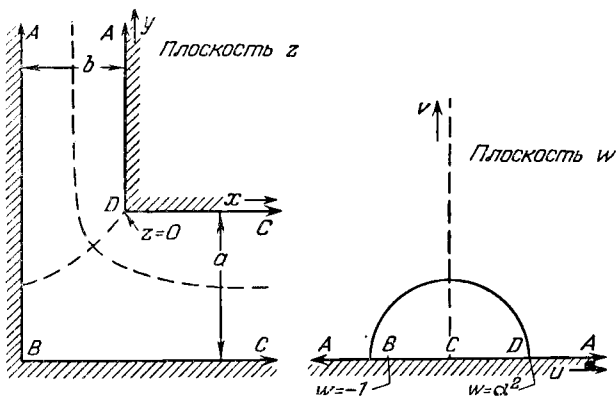


Рис. 10.23. Преобразование Кристоффеля — Шварца для «коленообразного изгиба».

тора так, чтобы вероятность пробоя диэлектрика была наименьшей, то нужно подобрать ψ_0 так, чтобы напряженность у края была не больше, чем вдали от него.

Предположим, что мы испытываем пластины различной формы, соответствующие различным значениям ψ_0 [толщина каждой пластины асимптотически равна $2b = 2\psi_0 a/V_0$], с тем чтобы максимальное значение напряженности на всей пластине было так мало, как это только возможно. Подберем V_0 — потенциал внешних плоскостей — так, чтобы разность потенциалов $V_0 - \psi_0$ была для всех пластин равна одной и той же величине V .

Имеем $\psi_0 = V_0 b/a$, и поэтому $V_0 = aV/(a - b)$, где $a - b$ есть асимптотическое значение ширины промежутка между средним проводником и верхней или нижней пластиной. Напряженность у края среднего проводника ($\chi = 0$) равна $[V/(a - b)] \operatorname{ctg}(\pi b/2a)$, в то время как асимптотическое значение напряженности на поверхности (для больших $|\chi|$) равно $V/(a - b)$. На рис. 10.22 показаны эти две предельные напряженности как функции от b/a , т. е. от величины отношения толщины средней пластины к ширине промежутка. Мы видим, что если средняя пластина очень тонкая, то поле у края слишком интенсивное, если же толщина этой пластины велика, то слишком интенсивным оказывается «асимптотическое» поле. Но если пластина заполняет точно половину промежутка, т. е. если $\psi_0 = \frac{1}{2} V_0$, то оба поля одинаковы и напряженность равна $2V/a$ всюду на поверхности центральной

пластины. Это оптимальное сечение показано на рис. 10.21. При такой конфигурации сводится до минимума возможность пробоя диэлектрика.

Другие прямоугольные границы. Другой «многоугольник», встречающийся при расчетах элементов волноводов (например, «колен» волноводов), показан на рис. 10.23. Начиная обход от точки A и имея, как всегда, «внутреннюю область» слева, получим, что углы соответственно равны $\pi/2$ при $w = -1$, π при $w = 0$, $-\frac{1}{2}\pi$ при $w = \alpha^2$. Тогда преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} z - z_0 &= A \int \sqrt{\frac{\alpha^2 - w}{1 + w}} \frac{dw}{w} = 2A \int \left[\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - t^2} \right] dt = \\ &= -2A \alpha \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{\alpha^2 - w}{\alpha^2 + \alpha^2 w}} + 2A \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha^2 - w}{1 + w}}, \end{aligned}$$

где $t = \sqrt{(\alpha^2 - w)/(w + 1)}$. Подставив сюда $w = \alpha^2$, убеждаемся, что $z_0 = 0$. При движении по вещественной оси плоскости w влево от α^2 гиперболический аретангенс принимает вещественные значения и возрастает, стремясь при $w \rightarrow 0$ к значению $\operatorname{Arth}(1) = \infty$. При переходе через точку $w = 0$ мнимая часть гиперболического аретангенса скачком изменяется от 0 до $-\frac{1}{2}i\pi$, а вещественная часть вновь начинает убывать, и при $w = -1$ эта функция стремится к значению $\operatorname{Arth}(\infty) = -\frac{1}{2}i\pi$, а $\operatorname{arctg}(\infty) = \frac{1}{2}\pi$. Следовательно, в точке $w = 1$, которая предполагается соответствующей точке $z = -b - ia$, имеем $z = i\pi A\alpha + \pi A$. Поэтому $A = -b/\pi$ и $A\alpha = -a/\pi$, и наше преобразование имеет вид

$$z = \frac{2a}{\pi} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - wb^2}{a^2(1+w)}} - \frac{2b}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - wb^2}{b^2(1+w)}}, \quad (10.2.57)$$

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{1}{\pi w} \sqrt{\frac{a^2 - wb^2}{1+w}}.$$

Выполним теперь преобразование

$$w = e^{\pi i F/V_0}, \quad F = \phi + i\chi = \frac{V_0}{\pi i} \ln w, \quad \frac{dF}{dw} = \frac{V_0}{\pi i w},$$

соответствующее такому распределению потенциала, при котором поверхность ADC имеет нулевой потенциал, а поверхность ABC — потенциал V_0 . Напряженность поля у этой поверхности равна (w берутся вещественными)

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| = \left| \frac{dF/dw}{dz/dw} \right| = V_0 \left| \sqrt{\frac{1+w}{a^2 - b^2 w}} \right|.$$

Например, на достаточном расстоянии от вершины угла в сторону C плотность заряда равна $V_0/4\pi a$, а в сторону A она равна $V_0/4\pi b$. При $w = a^2/b^2 = \alpha^2$ плотность заряда делается бесконечной, а при $w = -1$ (точка B) плотность заряда равна нулю.

Для безвихревого потока несжимаемой жидкости внутри описанного канала мы применим вспомогательное преобразование

$$w = e^{\pi F/Q}, \quad F = \phi + i\chi = (Q/\pi) \ln w,$$

где Q есть полный поток жидкости между граничными поверхностями,

ψ — потенциал скоростей, χ — функция тока. Для случая $a = b$ имеем

$$z = \frac{2a}{\pi} \left[\operatorname{Ar th} \frac{\pi}{V \operatorname{th} (F/2Q)} - \operatorname{arctg} V \operatorname{th} (\pi F/2Q) \right], \quad (10.2.58)$$

а величина скорости в точке, соответствующей значению $F = \psi + i\chi$, равна

$$v = (Q/a) \left| V \operatorname{cth} (\pi F/2Q) \right|.$$

Другие физические задачи, связанные с подобными границами, также могут быть решены, если основное преобразование (10.2.57) известно.

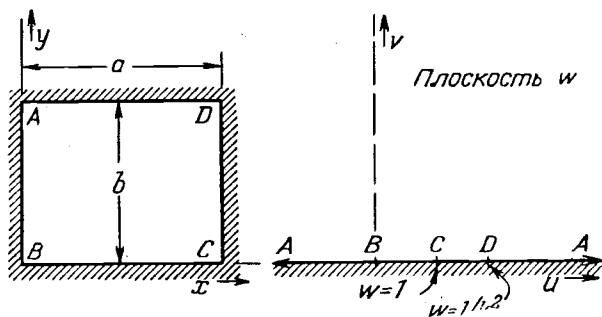


Рис. 10.24. Преобразование Кристоффеля — Шварца для внутренности прямоугольника.

Наконец, мы можем применить эллиптические функции Якоби, чтобы получить преобразование внутренней области прямоугольника на верхнюю полуплоскость плоскости w . В соответствии с рисунком 10.24 мы видим, что

$$z - z_0 = kA \int \frac{dw}{V w (1-w) (1-k^2 w)} = 2kA\Phi(\sqrt{w}, k)^1).$$

Величина z_0 равна нулю, так как, согласно сказанному на стр. 464 тома I, эллиптический синус равен нулю, когда w равно нулю. Таким же образом, если $w = 1$, Φ равна K , а z предполагается равным a , следовательно, $A = a/2kK$, и преобразование можно записать в виде

$$w = [\operatorname{sn}(Kz/a, k)]^2. \quad (10.2.59)$$

При $z = a + ib$ w должно быть равным i/k^2 , но $\operatorname{sn}(K + iK', k) = 1/k$, а следовательно, k должно быть подобрано так, чтобы иметь $Kb/a = K'$, или $K'/K = b/a$, как это дается в таблице, приведенной на стр. 463 тома I.

Как и выше, распределение потенциала внутри прямоугольника в случае, когда часть AB его границы имеет потенциал V_0 , а остальная часть границы — нулевой потенциал, задается соотношениями

$$w = e^{\pi i F/V_0}, \quad F = \psi + i\chi = -\frac{2V_0}{\pi i} \ln [\operatorname{sn}(Kz/a, k)]. \quad (10.2.60)$$

Силовые линии в этой задаче совпадают с эквипотенциальными линиями в задаче, когда линейные заряды противоположного знака помещены в углах A и B . Между прочим, это решение следует сравнить с формулой (10.1.7).

Далее, потенциал, создаваемый линейным зарядом, находящимся в точке z_0 , лежащей внутри прямоугольника, вся граница которого имеет нулевой потенциал, можно получить при помощи вещественной части

¹⁾ Φ обозначает функцию, обратную эллиптическому синусу. — Прим. ред.

функции

$$F = 2q \ln \left(\frac{\omega - \bar{\omega}_0}{\omega - \omega_0} \right) = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn}^2(Kz/a, k) - \operatorname{sn}^2(K\bar{z}_0/a, k)}{\operatorname{sn}^2(Kz/a, k) - \operatorname{sn}^2(Kz_0/a, k)} \right\}. \quad (10.2.61)$$

Эту функцию следует сравнить с выражением (10.2.47).

На этом мы закончим интересный экскурс в область специальных методов решения двумерных задач теории потенциала. Мы должны вернуться к основному предмету обсуждения — к получению представимых через собственные функции решений, связанных с различными системами координат, и к решению частных задач при помощи соответствующих рядов по этим собственным функциям.

10.3. Решения в трехмерном пространстве

С некоторым сожалением обращаемся мы теперь к решению уравнений Лапласа и Пуассона в трехмерном случае. Тот необычайно удобный путь, которым мы благодаря свойствам функций комплексного переменного получали решения в двумерном случае, был, возможно, слишком легким введением к задачам, стоящим перед нами теперь. Для многих измерений и для других уравнений решения почти всегда будут представляться бесконечными рядами или интегралами, которые лишь в очень редких случаях хорошо сходятся, да и наши задачи, вообще говоря, будут более трудными. Как мы видели в гл. 5, даже уравнение Лапласа допускает разделение переменных только в некоторых трехмерных системах координат, и в большинстве случаев получение решения, дающего численный ответ, ограничено выбором этих систем.

В случае трехмерного уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

разделение переменных осуществимо для всех тех систем координат, перечисленных на стр. 614—620 тома I, для которых допускает разделение волновое уравнение, а также для циклидных координат, среди которых наиболее употребительны бисферические и тороидальные. Эти системы распадаются на три основных класса: цилиндрические координаты, вращательные координаты и третий класс, состоящий из менее симметричных систем. Цилиндрические координаты получаются параллельным переносом двумерной системы координат в плоскости x, y вдоль оси z . Таким образом возникают цилиндрические поверхности с осями, параллельными оси z . Не зависящие от z частные решения для таких систем были изучены в первых двух параграфах этой главы; можно построить и более общие решения для таких систем, но они лишены особого интереса. Поэтому мы ограничимся решениями для декартовых и круговых цилиндрических координат, а прочими системами будем заниматься в дальнейшем в связи с волновым уравнением, для которого они имеют большее значение.

Вращательные координаты образуются вращением проходящей через ось z плоскости, в которой построена двумерная система координат, вокруг этой оси. Круговые цилиндрические координаты (единственная система, являющаяся одновременно и цилиндрической и вращательной) образованы вращением прямоугольных координат, сферические — вращением полярных, сфероидальные — вращением эллиптических и т. п. Тороидальные и бисферические координаты также могут быть включены в этот класс.

Третий, более общий класс, образуют параболоидальные и эллипсоидальные координаты, не имеющие ни цилиндрической, ни осевой симметрии.

Мы будем, насколько это возможно, придерживаться комплексных переменных, приносящих большую пользу. Например, каждая функция комплексного переменного X , соответствующего плоскости, параллельной оси z и образующей угол u с осью x ,

$$X = z + i(x \cos u + y \sin u) \quad (10.3.1)$$

является решением уравнения Лапласа, а также и любая комбинация таких решений

$$\psi(x, y, z) = \int_0^{2\pi} F(X)f(u) du. \quad (10.3.2)$$

Мы могли бы, очевидно, испробовать различные функции в качестве F и f и выяснить, какого вида решения при этом получаются. Однако мы попытаемся избежать этого процесса нахождения решения, так сказать, «обратным ходом», вместо этого мы будем получать решения для различных координат, позволяющих разделить переменные, решая соответствующие уравнения с меньшим числом переменных. Во многих случаях мы найдем, что окончательное решение можно представить интегралом вида (10.3.2), и это интегральное представление окажется весьма полезным для суммирования рядов по собственным функциям и для выражения собственных функций одной системы через другие.

Интегральная форма (10.3.2) является обобщением интегрального представления, обсуждавшегося в § 5.3, и является столь же общим аппаратом. Эта форма особенно проста и полезна в случае вращательных координатных систем, когда функция $f(u)$ оказывается равной либо $\cos(mu)$, либо $\sin(mu)$ с целым m .

В этом случае функции F , соответствующие множеству собственных функций, связанных с данной координатной системой, образуют последовательность, удобную для разложения в ряды, как, например, последовательность степеней X или последовательность одномерных собственных функций от X и т. д. При помощи соотношений между функциями F , соответствующих различным координатным системам, можно установить зависимости между решениями для различных координат.

Интегральная форма функции Грина. В качестве примера применения интегрального представления (10.3.2), а также для получения нескольких формул, которые будут нужны нам на всем протяжении этого параграфа, мы подвергнем некоторым преобразованиям функцию Грина для уравнения Лапласа в неограниченном трехмерном пространстве. В гл. 7 было показано, что для этого случая функция Грина имеет вид

$$G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) = 1/R, \quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \quad (10.3.3)$$

Однако эта форма весьма неудобна для различных разложений G в ряды по собственным функциям.

В гл. 7 были уже развиты общие методы получения разложения функции Грина по собственным функциям, и, следовательно, искомые ряды можно было бы получить, просто запустив в ход алгебраическую машину. Возможно, что полезнее всего в данном простом (и довольно частном) случае снова обратиться к этому «сложному агрегату», в особенности потому, что здесь мы сможем стать на точку зрения, отличную от изложенной в гл. 7.

Начнем с решения уравнения

$$\nabla^2 \psi = -4\pi\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \quad (10.3.4)$$

в прямоугольном параллелепипеде с ребрами конечной длины, равными соответственно a , b и c . Если краевые условия состоят лишь в том, что собственные функции должны быть периодическими на границах (т. е. чтобы значения ψ на одной из граней, перпендикулярных оси x , равнялись соответствующим значениям ψ на другой параллельной грани и т. д.), то собственные функции представимы в виде

$$\psi = \sum_{l,m,n} A_{lmn} e^{2\pi i \Omega_{lmn}}, \quad \Omega_{lmn} = \frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c},$$

где коэффициенты A должны быть выбраны так, чтобы ψ удовлетворяло уравнению (10.3.4)

Для вычисления коэффициентов A сначала подставим этот ряд в уравнение:

$$\begin{aligned} -4\pi^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu} A_{\lambda\mu\nu} \left[\left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 + \left(\frac{\mu}{b} \right)^2 + \left(\frac{\nu}{c} \right)^2 \right] e^{2\pi i \Omega_{\lambda\mu\nu}} = \\ = -4\pi \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0). \end{aligned}$$

Умножая обе части равенства на $\exp(-2\pi i \Omega_{lmn})$ и интегрируя по объему параллелепипеда, получим

$$-4\pi^2 abc A_{lmn} \left[\left(\frac{l}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 + \left(\frac{n}{c} \right)^2 \right] = -4\pi e^{-2\pi i \Omega'_{lmn}},$$

где $\Omega'_{lmn} = lx_0/a + my_0/b + nz_0/c$. Поэтому решение уравнения (10.3.4), удовлетворяющее требованию периодичности граничных значений, равно

$$\begin{aligned} \psi = \sum_{l,m,n} \frac{1/\pi abc}{(l/a)^2 + (m/b)^2 + (n/c)^2} \exp \left\{ 2\pi i \left[\frac{l}{a} (x-x_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m}{b} (y-y_0) + \frac{n}{c} (z-z_0) \right] \right\}. \quad (10.3.5) \end{aligned}$$

Подробным рассмотрением этого решения для конечного параллелепипеда мы займемся несколько позже, теперь же устремим a , b и c к бесконечности. Положим $2\pi l/a = k_x$, $2\pi m/b = k_y$, $2\pi n/c = k_z$. Так как a , b и c стремятся к бесконечности, то число целых значений l , соответствующих элементарному промежутку от k_x до $k_x + dk_x$, равно в среднем $(a/2\pi) dk_x$, аналогично дело обстоит с dk_y и dk_z . Следовательно, в пределе суммы, входящие в выражение функции Грина (10.3.5), переходят в интеграл

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i[k_x(x-x_0) + k_y(y-y_0) + k_z(z-z_0)]}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right\} dk_z. \quad (10.3.6)$$

Это вполне удовлетворительное интегральное представление для $1/R$, но значительно более полезные выражения можно получить, выполняя некоторые из интегрирований в « k -пространстве». Например, k_x , k_y , k_z можно считать компонентами вектора $\mathbf{K}$, а $(x-x_0)$ и т. д. — компонентами вектора $\mathbf{R}$. Тогда величина, заключенная в скобки, равна $e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}/K^2}$, а элемент объема равен $K^2 dK \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, где ϑ — угол между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} = KR \cos \vartheta$). Интегрируя по углу φ , получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dK \int_{-1}^1 e^{iKR\omega} d\omega = \frac{2}{\pi R} \int_0^{\infty} \sin(KR) \frac{dK}{K} = \frac{1}{R}, \quad \omega = \cos \vartheta. \quad (10.3.7)$$

Еще более интересное представление получается применением круговых цилиндрических координат в « k -пространстве», если положить

$k_x = k \cos u$ и $k_y = k \sin u$ и проинтегрировать по k_z . Интегрируемая функция

$$\frac{1/\pi}{k^2 + k_z^2} e^{ikG + ik_z(z-z_0)}, \quad G = (x-x_0) \cos u + (y-y_0) \sin u,$$

имеет простые полюсы в точках $k_z = \pm ik$ с вычетами $(1/2\pi ik) e^{ikG - k(z-z_0)}$ в точке $k_z = ik$ и $-(1/2\pi ik) e^{ikG + k(z-z_0)}$ в точке $k_z = -ik$. Интеграл по k_z с бесконечными пределами можно обычным способом заменить интегралом по контуру, охватывающему ik , если разность $z - z_0$ положительна, или $-ik$ (в отрицательном направлении), если $z - z_0$ отрицательна (см. стр. 392 тома I). Следовательно, другим интегральным представлением для функции Грина будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{-k|z-z_0| + ik[(x-x_0)\cos u + (y-y_0)\sin u]} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du \int_0^{\infty} dk e^{-k[X_0 - X]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{X_0 - X}, \\ k_x &= k \cos u, \quad k_y = k \sin u, \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

где $X = z + i(x \cos u + y \sin u)$, $X_0 = z_0 + i(x_0 \cos u + y_0 \sin u)$, если $z < z_0$, и $X = -z + i(x \cos u + y \sin u)$, $X_0 = -z_0 + i(x_0 \cos u + y_0 \sin u)$, если $z > z_0$.

В том, что последний интеграл равен $1/R$, можно убедиться, осуществляя интегрирование по u . В действительности мы могли бы с таким же успехом получить выражение (10.3.8) удачной догадкой, просматривая таблицу интегралов, но много полезнее получить эти результаты путем последовательных рассуждений. Мы могли бы, очевидно, получить первую строку в равенстве (10.3.8), применяя общие формулы гл. 7. в частности, формулу (7.2.42), но для выяснения вопроса, быть может, было более полезно повторить еще раз весь вывод в этом особенно важном случае.

Так или иначе мы показали, что функцию Грина $1/R$ можно представить в виде (10.3.2) при помощи величин типа (10.3.1). Интеграл (10.3.8) будет полезен для разложений функции $1/R$ в ряды по собственным функциям, соответствующим различным системам координат.

Решения в прямоугольных координатах. Частные решения, соответствующие декартовым координатам, имеют обычный вид: $e^{-kx} \sin(\pi my/a) \times \sin(\pi nz/b)$, $\sin(\pi mx/a) \operatorname{sh}(ky) \sin(\pi nz/b)$ и т. д., где $k^2 = (\pi m/a)^2 + (\pi n/b)^2$. Например, потенциал внутри прямоугольного параллелепипеда с ребрами a , b , c , у которого грань $z = 0$ имеет потенциал $\phi_0(x_0, y_0)$, а остальные пять граней — нулевой потенциал, равен

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{4}{ab} \sum_{m,n} \left[\int_0^a dx_0 \int_0^b \phi_0 \sin\left(\frac{\pi mx_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny_0}{b}\right) dy_0 \right] \times \\ &\quad \times \frac{\operatorname{sh}[k_{mn}(c-z)]}{\operatorname{sh}[k_{mn}c]} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right), \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

где $k_{mn}^2 = (\pi m/a)^2 + (\pi n/b)^2$. Для сравнения с формулой (10.1.7) проведем расчет в случае $\phi_0 = 1$ (на нижней грани поддерживается единичный потенциал, на остальных — нулевой):

$$\phi = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m,n} \frac{\operatorname{sh}[k_{mn}(c-z)]}{\operatorname{sh}[k_{mn}c]} \frac{\sin\left[\frac{\pi x}{a}(2m+1)\right] \sin\left[\frac{\pi y}{b}(2n+1)\right]}{(2m+1)(2n+1)}, \quad (10.3.10)$$

где, на этот раз, $k_{mn} = (\pi/a)^2(2m+1)^2 + (\pi/b)^2(2n+1)^2$. Наконец, если c

намного больше, чем a и b , то этот ряд сводится к ряду

$$\psi = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m,n} \exp \left[-z \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (2m+1)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 (2n+1)^2} \right] \times \\ \times \frac{\sin[(\pi x/a)(2m+1)] \sin[(\pi y/b)(2n+1)]}{(2m+1)(2n+1)}, \quad (10.3.11)$$

описывающему распределение температуры в длинном брусе прямоугольного поперечного сечения, на торце которого поддерживается единичная температура, а на боковых гранях — нулевая. Благодаря наличию экспоненциального множителя каждый член убывает и стремится к нулю с ростом z , т. е. с удалением от нагретого конца. Члены, соответствующие большим значениям m и n , убывают много быстрее, и для достаточно больших значений z температура приближенно равна

$$\psi \simeq (16/\pi^2) e^{-\pi z \sqrt{a^2+b^2}} \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b).$$

Ряд (10.3.11) следует сравнить с аналогичным двумерным рядом, входящим в формулу (10.1.8). В двумерном случае ряд можно просуммировать и получить решение в замкнутой форме. В трехмерном случае благодаря наличию квадратного корня в показателе ряд не представляет никакой известной простой функции от x , y , z .

Другой пример решения, достаточно просто выражающегося в прямоугольных координатах, можно получить, рассчитывая установившееся течение идеальной жидкости в трубе с прямоугольным сечением. Установившийся поток, имеющий скорость v_0 (направленную параллельно оси трубы), определяется потенциалом скоростей

$$\psi = -v_{\text{ср.}} z.$$

Однако распределение скоростей может быть неоднородным у начала трубы ($z=0$) и мы должны так исправить формулу для однородного потока, чтобы эта начальная неоднородность потока была учтена.

Предположим, что составляющая скорости по оси z при $z=0$ равна $v_0(x, y)$ и является функцией точки (x, y) в плоскости начального поперечного сечения. Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi}{\partial z} &= v_0(x, y) \quad \text{при } z=0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x=0, x=a, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y=0, y=b, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial z} &\simeq v_{\text{ср.}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

представляется рядом по собственным функциям

$$\psi = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \exp \left[-\pi z \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \right], \quad (10.3.12)$$

где член, соответствующий $m=n=0$, равен в точности $-A_{00}z$. Этот ряд удовлетворяет всем граничным условиям, за исключением условия при $z=0$. Чтобы удовлетворить и этому условию, полагаем

$$A_{00} = v_{\text{ср.}} = \frac{1}{ab} \int_0^a dx \int_0^b v_0(x, y) dy,$$

$$A_{m0} = \frac{2}{\pi mb} \int_0^a \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) dx \int_0^b v_0(x, y) dy,$$

$$A_{mn} = \frac{4/\pi ab}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} \int_0^a \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) dx \int_0^b \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) v_0(x, y) dy, \quad (10.3.13)$$

причем формула для A_{0n} получается из формулы для A_{m0} заменой x на y и m на n .

Мы замечаем, что все дополнительные члены, соответствующие значениям $m \neq 0$ или $n \neq 0$, содержат экспоненциальный множитель, благодаря которому они стремятся к нулю, когда z стремится к бесконечности. Таким образом, неоднородности в потоке, вызванные условиями у начала трубы, постепенно «сглаживаются», так что вдали от начала поток в трубе делается однородным, имеющим среднюю скорость $v_{\text{ср.}}$.

Например, если воздух пропускается в трубу через отверстие в пластинке, закрывающей конец трубы $z=0$, причем отверстие расположено в точке (x_0, y_0) пластинки, то $v_0 = Q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ и

$$A_{00} = \frac{Q}{ab}, \quad A_{m0} = \frac{2Q}{\pi mb} \cos\left(\frac{\pi mx_0}{a}\right),$$

$$A_{mn} = \frac{4Q/\pi ab}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} \cos\left(\frac{\pi mx_0}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny_0}{b}\right).$$

В тех случаях, когда две трубы разных размеров соединяются при $z=0$ (или поперек трубы при $z=0$ помещена диафрагма, снабженная отверстием произвольной формы), задачу можно решить, записав разложение в ряд для потока при $z < 0$ и при $z > 0$ и потребовав, чтобы эти ряды совпадали при $z=0$. Мы откладываем обсуждение такого рода задач на сопряжение до главы, посвященной распространению колебаний, в которой мы встретимся с подобными проблемами.

Функция Грина для внутренней области прямоугольного параллелепипеда с нулевым граничным условием на гранях является трехмерным аналогом эллиптической функции. Ее выражение в виде ряда можно получить точно так же, как был получен ряд (10.3.5), только здесь используются синусы:

$$G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) = \sum_{l, m, n} \frac{8/\pi abc}{(l/a)^2 + (m/b)^2 + (n/c)^2} \sin\left(\frac{\pi lx_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi my_0}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi nz_0}{c}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi lx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi my}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi nz}{c}\right). \quad (10.3.14)$$

Рассмотрим сплошной прямоугольный параллелепипед из металла, по всей внутренней области которого равномерно распределены источники тепла, а на поверхности поддерживается нулевая температура. Тогда функция, описывающая распределение температуры, будет пропорциональна функции G , проинтегрированной по всей внутренней области параллелепипеда (по переменным x_0, y_0, z_0). Окончательный результат имеет вид

$$\sum_{\substack{l, m, n \\ \text{нечетные}}} \frac{64/\pi^4 lmn}{(l/a)^2 + (m/b)^2 + (n/c)^2} \sin\left(\frac{\pi lx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi my}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi nz}{c}\right),$$

причем ряд сходится настолько быстро, что значение этой функции можно подсчитать без особых затруднений (в сумму входят только нечетные значения l, m, n).

Решения в круговых цилиндрических координатах. В координатах r, φ, z уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

При разделении переменных получаем

$$\begin{aligned} \psi &= \Phi(\varphi) R(r) Z(z), \quad (d^2 \Phi / d\varphi^2) + m^2 \Phi = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R &= 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0. \end{aligned}$$

Решение первого уравнения, т. е. множитель, зависящий от φ , есть либо $\sin m\varphi$, либо $\cos m\varphi$. Если отсутствуют границы, на которых $\varphi = \text{const}$, и φ может изменяться от 0 до 2π , то m должно быть либо нулем, либо целым числом. Решения уравнения для Z также выражаются через тригонометрические или гиперболические функции в зависимости от того, является ли k вещественным или мнимым числом. Если на обеих граничных поверхностях, перпендикулярных оси z (на основаниях цилиндра), заданы однородные граничные условия (например, нулевые значения функции или ее нормальной производной) и требуется удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, то k должно быть мнимым числом. Если же граничные условия на одном или обоих основаниях цилиндра неоднородны, то k должно быть вещественным числом, так как в этом случае множитель, зависящий от Z , оказывается гиперболической функцией.

Уравнение для R есть уравнение Бесселя. При вещественном k его решениями являются функции $J_m(kr)$ и $N_m(kr)$ [см. формулы (5.3.63) и (5.3.76), а также стр. 302]. Функция Бесселя J_m конечна в начале, и потому ее следует применять в тех случаях, когда ось z находится внутри области, охватываемой граничной поверхностью, т. е. области, в которой расположено искомое поле. Функция Неймана N_m является вторым решением этого уравнения и обращается в бесконечность в начале.

Гиперболические функции Бесселя K_m и I_m (см. стр. 303) применяются в случае, когда k — мнимое число. Функция I_m конечна в начале, но бесконечна на бесконечности. Функция K_m бесконечна в начале и равна нулю на бесконечности.

В качестве примера на применение этих решений рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры внутри цилиндрического бруса, на основаниях которого ($z=0$ и $z=l$) поддерживается нулевая температура, а на боковой поверхности ($r=a$) задана температура $T_a(z)$. Представление этого решения в виде ряда выглядит так:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{I_0(\pi n r / l)}{I_0(\pi n a / l)} \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right), \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l T_a(z) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dz.$$

Если температура на поверхности зависит от φ и z , то ряд содержит положительные значения m и в выражения коэффициентов входят как интегралы по φ , так и интегралы по z .

Если на боковой поверхности ($r=a$) поддерживается нулевая температура, а хотя бы на одном из оснований ($z=0, z=l$) заданы переменные граничные условия, то следует применять функции Бесселя с вещественными значениями k . Решая уравнение $J_m(ka) = 0$ при фиксированном m , мы находим соответствующую ортогональную систему собственных функций. Собственные значения, т. е. корни уравнения $J_m(\pi\beta) = 0$ записываются в виде β_{mn} . Первый индекс указывает порядок функции Бесселя, а второй — номер корня, так что наименьший корень соответствует значе-

нию $n = 1$ и $\beta_{m, n+1} > \beta_{mn}$. На стр. 523 даны значения нескольких первых корней.

Последовательность $J_m(\pi\beta_{mn}r/a)$ для различных n образует полную систему собственных функций, обладающую всеми соответствующими свойствами: ортогональностью и т. п. Например, так как $J_m(\pi\beta_{mn}) = 0$, то в силу формул стр. 302

$$\int_0^a J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{\pi\beta_{ms}r}{a}\right) r dr = \begin{cases} 0, & s \neq n, \\ -\frac{1}{2} a^2 J_{m-1}(\pi\beta_{mn}) J_{m+1}(\pi\beta_{mn}) = \\ = \frac{1}{2} a^2 [J_{m+1}(\pi\beta_{mn})]^2, & s = n. \end{cases} \quad (10.3.15)$$

Поэтому любую функцию $\psi_0(r, \varphi)$, заданную в круге ($0 \leq r \leq a$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), можно представить в виде ряда

$$\psi_0(r, \varphi) = \sum_{m, n} \frac{\varepsilon_m}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \theta)] d\theta \int_0^a u \psi_0(u, \theta) J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn}u}{a}\right) du \right\} \times \\ \times [a J_{m+1}(\pi\beta_{mn})]^{-2} J_m(\pi\beta_{mn}r/a),$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$ для $m = 1, 2, 3, \dots$.

Следовательно, потенциал внутри цилиндра радиуса a и высоты l , равный нулю на всей поверхности, за исключением основания $z = 0$, где он равен $\psi_0(r, \varphi)$, представляется двойным рядом

$$\psi(r, \varphi, z) = \sum_{m, n} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \theta)] d\theta \int_0^a \psi_0(u, \theta) J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn}u}{a}\right) u du \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\varepsilon_m \operatorname{sh}[(\pi\beta_{mn}/a)(l-z)]}{\pi [a J_{m+1}(\pi\beta_{mn})]^2 \operatorname{sh}[\pi\beta_{mn}l/a]} \right\} J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn}r}{a}\right). \quad (10.3.16)$$

Если r устремить к бесконечности, то этот ряд превратится в интеграл, как это было показано на стр. 710 тома I. Часто употребляется интеграл Фурье — Бесселя

$$F(r) = \int_0^\infty u du \int_0^\infty F(w) J_m(ur) J_m(uw) w dw, \quad (10.3.17)$$

а также его обобщение на случай полярных координат (r, φ) , получающееся при помощи (5.3.66):

$$\psi_0(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u du \int_0^\infty w dw \int_0^{2\pi} \psi_0(w, \theta) J_0(uR) d\theta, \quad (10.3.18)$$

где

$$R^2 = r^2 + w^2 - 2rw \cos(\varphi - \theta).$$

Пусть, например, на плоскости $z = 0$ потенциал равен нулю всюду вне круговой области ($0 \leq r < a$), где он равен V_0 . Тогда потенциал над этой плоскостью равен

$$\psi(r, \varphi, z) = V_0 \int_0^\infty e^{-uz} du \int_0^a J_0(ur) J_0(uw) w dw = V_0 a \int_0^\infty e^{-uz} J_1(ua) J_0(ur) du. \quad (10.3.19)$$

Используя первые члены разложений для J_0 и J_1 , можно получить приближенное выражение для функции ψ при больших значениях z :

$$\psi \simeq \frac{1}{2} V_0 a^2 \int_0^\infty e^{-uz} u \, du = \frac{1}{2} V_0 \frac{a^2}{z^2}, \quad z \gg r, a.$$

При помощи формул

$$\int_0^\infty e^{-uz} J_0(ur) \, du = \frac{1}{V(z^2 + r^2)}, \quad \int_0^\infty e^{-uz} J_0(ur) u \, du = \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (10.3.20)$$

можно получить более общее выражение, дающее хорошее приближение при $z \gg a$ и при любых значениях r . Первая из этих формул получена из интегрального представления функции J_0 , а вторая — дифференцированием первой по z . Используя вторую формулу, можно показать, что

$$\psi \simeq z V_0 a^2 / 2 (z^2 + r^2)^{3/2}, \quad z \gg a.$$

Решение задачи о безвихревом течении несжимаемой жидкости в круглой трубе радиуса a сводится к решению задачи Неймана. Для однородного потока решение, очевидно, имеет вид $\psi = -v_0 z$. Для неоднородного потока в такой трубе решения имеют вид

$$e^{\pm \pi \alpha_{mn} z/a} \cos(m\varphi) J_m(\pi \alpha_{mn} r/a),$$

где α_{mn} есть n -й корень уравнения

$$(d/d\alpha)[J_m(\pi\alpha)] = 0.$$

Первые несколько значений α даны на стр. 524. Мы видим, что $\alpha_{0n} = \beta_{1n}$, но все прочие α отличаются от всех прочих β .

Если поток начинается у конца трубы $z=0$, где составляющая скорости по z равна $v_0(r, \varphi)$, то потенциал скоростей вдоль трубы для $z > 0$ равен

$$\begin{aligned} \psi = \psi_{00} + \sum_{m,n} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \theta)] d\theta \int_0^a v_0(u, \theta) J_m\left(\frac{\pi \alpha_{mn} u}{a}\right) u \, du \right\} \times \\ \times \frac{\varepsilon_m \exp[-(\pi \alpha_{mn} z/a)]}{\pi^2 a \alpha_{mn} [J_m(\pi \alpha_{mn})]^2} J_m\left(\frac{\pi \alpha_{mn} r}{a}\right). \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

Эту формулу следует сравнить с выражением (10.3.16). Для больших значений z все члены, за исключением члена, соответствующего значениям $m=0$ и $n=0$, оказываются пренебрежимо малыми:

$$\psi \simeq \psi_{00} = \frac{-z}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a v_0(u, \theta) u \, du.$$

Например, если весь поток втекает в трубу через малое отверстие, расположенное в центре пластинки, помещенной при $z=0$, то ряд имеет вид

$$\psi = -\frac{zQ}{\pi a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{\pi^2 a \alpha_{0n}} e^{-\pi \alpha_{0n} z/a} [J_0(\pi \alpha_{0n})]^{-2} J_0\left(\frac{\pi \alpha_{0n} r}{a}\right).$$

Количество жидкости, протекающее в единицу времени через любое поперечное сечение трубы, равно Q , так как каждый член ряда для $n > 0$ ортогонален собственной функции наимизшего порядка $J_0(0)=1$, и поэтому полный поток, представленный рядом, равен нулю независимо от значения z .

Интегральное представление собственных функций. Так как собственные функции $\cos(m\varphi) e^{hz} J_m(kr)$ являются частными решениями уравнения Лапласа, то их можно выразить при помощи интеграла вида (10.3.2). Формула (5.3.65) и рассуждения, приведенные на стр. 238, подсказывают, каким должен быть общий вид функций $F(X)$ и $f(u)$. Мы имеем

$$\int_0^{2\pi} e^{ikr \cos u} \cos(mu) du = 2\pi i^m J_m(kr).$$

После замены $u = \omega - \varphi$ и умножения обеих частей равенства на e^{hz} показатель подинтегрального выражения станет равным

$$k[z + ir \cos(\omega - \varphi)] = k[z + i(x \cos \omega + y \sin \omega)] = kX$$

в соответствии с (10.3.1). Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{kX} \cos(mu) du &= e^{kz} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \omega} [\cos m\omega \cos m\varphi + \sin m\omega \sin m\varphi] d\omega = \\ &= 2\pi i^m e^{kz} \cos(m\varphi) J_m(kr); \quad (10.3.22) \end{aligned}$$

интеграл, содержащий $\sin(m\omega)$, равен нулю в силу нечетности синуса. Аналогично имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{kX} \sin(mu) du = 2\pi i^m e^{kz} \sin(m\varphi) J_m(kr),$$

где в обоих случаях

$$X = z + i(x \cos u + y \sin u).$$

Эти выражения оказываются чрезвычайно полезными, так как при их помощи можно выразить через цилиндрические функции все остальные элементарные решения. Например, в соответствии с формулой (10.3.8) функция Грина

$$1/R = [(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{-1/2}$$

равна

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} e^{-k|z - z_0| + ik[r \cos(u - \varphi) - r_0 \cos(u - \varphi_0)]} du.$$

Эта функция должна разлагаться в ряд Фурье по $\cos[m(\varphi - \varphi_0)]$ с коэффициентами

$$A_m = \frac{\varepsilon_m}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} \cos(mt) e^{-k|z - z_0| + ik[r \cos \omega - r_0 \cos(t + \omega)]} dt,$$

где $\omega = u - \varphi$ и $t = \varphi - \varphi_0$. Далее, полагая $t + \omega = v$, получаем

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\varepsilon_m}{4\pi^2} \int_0^\infty e^{-k|z - z_0|} dk \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \omega} \cos(m\omega) d\omega \int_0^{2\pi} e^{-ikr_0 \cos v} \cos(mv) dv = \\ &= \varepsilon_m i^{2m} \int_0^\infty e^{-k|z - z_0|} J_m(kr) (-1)^m J_m(kr_0) dk. \end{aligned}$$

Итак, окончательно ряд для функции Грина оказывается равным

$$\frac{1}{R} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^{\infty} J_m(kr) J_m(kr_0) e^{-k|z-z_0|} dk. \quad (10.3.23)$$

Это выражение оказывается полезным при расчетах полей, расположенных вне цилиндров.

Функция Грина для внутреннего поля. Функция Грина внутри цилиндра представляется рядом, аналогичным ряду (10.3.14), т. е. представленным в виде ряда решением уравнения $\nabla^2 \psi = -4\pi\delta$, где функция δ равна нулю всюду внутри цилиндра, за исключением точки (r_0, φ_0, z_0) , а интеграл от нее равен 1. Мы положим

$$\psi = \sum_{m,n,s} A_{mns} \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) J_m \left(\frac{\pi \beta_{ms} r}{a} \right).$$

Этот ряд обращается в нуль при $z=0$, $z=l$, $r=a$, т. е. на границах цилиндра. Подставляя этот ряд в уравнение для ψ , получим

$$\pi^2 \sum A_{mns} \left[\left(\frac{n}{l} \right)^2 + \left(\frac{\beta_{ms}}{a} \right)^2 \right] \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) J_m \left(\frac{\pi \beta_{ms} r}{a} \right) = 4\pi\delta.$$

Умножая на одну из собственных функций и интегрируя по объему цилиндра обе части этого уравнения, получим выражение для внутренней функции Грина

$$G(r, \varphi, z | r_0, \varphi_0, z_0) = \sum_{mns} \frac{(8\varepsilon_m / \pi^2 l a^2) \cos [m(\varphi - \varphi_0)]}{J_{m+1}^2(\pi \beta_{ms}) [(n/l)^2 + (\beta_{ms}/a)^2]} \times \\ \times \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) \sin \left(\frac{\pi n z_0}{l} \right) J_m \left(\frac{\pi \beta_{ms} r}{a} \right) J_m \left(\frac{\pi \beta_{ms} r_0}{a} \right). \quad (10.3.24)$$

Потенциал поля заземленного цилиндра, внутри которого равномерно распределен заряд единичной плотности, получается при помощи интегрирования этого выражения по объему цилиндра по переменным r_0, φ_0, z_0 :

$$\psi = \sum_{n,s} \frac{32/\pi^3 \beta_{0s} (2n+1)}{J_1(\pi \beta_{0s}) \{[(2n+1)/l]^2 + (\beta_{0s}/a)^2\}} \sin \left[\frac{\pi z}{l} (2n+1) \right] J_0 \left[\frac{\pi \beta_{0s} r}{a} \right].$$

Этот ряд пропорционален также распределению температуры внутри уранового цилиндра с равномерным распределением источников распада, на поверхности которого поддерживается нулевая температура.

Решения в сферических координатах. Сферические координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arctg [(1/z) \sqrt{x^2 + y^2}], \quad \varphi = \arctg (y/x)$$

являются весьма удобной системой и вполне заслуживают детального изучения. В уравнении Лапласа

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0$$

переменные разделяются следующим образом $[\psi = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)]$:

$$d^2 \Phi / d\varphi^2 + m^2 \Phi = 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \Theta = 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0.$$

Решениями первого уравнения являются функции $\cos(m\varphi)$ и $\sin(m\varphi)$, и если ни одна из плоскостей $\varphi = \text{const}$ не является граничной поверхностью, то из условий непрерывности и периодичности функции Φ следует, что m должно быть нулем или целым числом. Решениями второго уравнения являются функции Лежандра

$${}^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta T_{n-m}^m(\cos \vartheta),$$

о которых говорилось на стр. 564 и 726 тома I. Было показано, что эти функции, ограничены на отрезке $0 \leq \vartheta \leq \pi$ только для целых n , больших или равных m . Решениями третьего уравнения являются функции r^n или $1/r^{n+1}$. Поэтому частными решениями уравнения Лапласа в сферических координатах служат

$$r^n Y_{mn}^e, \quad r^n Y_{mn}^o, \quad r^{-n-1} Y_{mn}^e, \quad r^{-n-1} Y_{mn}^o,$$

где

$$Y_{mn}^e = \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta), \quad Y_{mn}^o = \sin(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta). \quad (10.3.25)$$

Функции Y называются *сферическими гармониками*. При этом функции, соответствующие значению $m=0$, называются *зональными гармониками* (так как эти функции зависят только от ϑ и их узловые линии делят сферу на зоны); если же m равно n , то мы получаем *секториальные гармониками*, так как эти функции зависят только от φ и их узловые линии делят сферу на «секторы» (сферические двуугольники, образованные меридианами). Остальные функции, соответствующие значениям $0 < m < n$, называются *тессеральными гармониками*. Эти функции, являющиеся собственными функциями оператора Лапласа на поверхности сферы, взаимно ортогональны и их норма равна

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi [Y_{mn}(\vartheta, \varphi)]^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{\varepsilon_m (2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

где верхний индекс у Y может быть либо e (четная), либо o (нечетная) (исключение составляет Y_{0n}^o , не существующая вовсе) и где (как и раньше) $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Следовательно, каждая функция $V_0(\varphi, \vartheta)$, заданная на поверхности сферы, может быть представлена рядом

$$V_0(\varphi, \vartheta) = \sum_{m,n} [A_{mn} Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + B_{mn} Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi)],$$

$$A_{mn} = \frac{(2n+1)\varepsilon_m}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi V_0 Y_{mn}^e \sin \vartheta d\vartheta, \quad (10.3.26)$$

где коэффициенты B_{mn} выражаются подобно коэффициентам A_{mn} с той только разницей, что под интегралом функции Y_{mn}^e заменены функциями Y_{mn}^o , а члены, соответствующие $m=0$, опущены.

Мы видим, следовательно, что если на поверхности сферы радиуса a потенциал равен $V_0(\varphi, \vartheta)$, то внутри сферы он представляется рядом

$$\phi = \sum_{m,n} [A_{mn} Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + B_{mn} Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi)] \left(\frac{r}{a}\right)^n, \quad (10.3.27)$$

где коэффициенты A и B определяются по формулам (10.3.26). Члены ряда, соответствующие большим значениям n , выражают «тонкие детали» изменения функции $V_0(\varphi, \vartheta)$ в зависимости от углов; эти члены велики только вблизи $r=a$. У центра сферы потенциал почти постоянен и равен приближенно

первому члену

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi V_0(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = V_{\text{ср.}},$$

представляющему среднее значение функции V_0 по поверхности сферы.

Например, если сферическая поверхность имеет потенциал V для значений ϑ , заключенных между 0 и ϑ_0 , и нулевой потенциал для значений ϑ между ϑ_0 и π , то мы применим формулу для интеграла от функции P_n , данную на стр. 307. Все коэффициенты B , а также все коэффициенты A , за исключением $A_{0n} = A_n$, равны нулю. Коэффициенты A_n равны

$$A_n = \frac{1}{2} (2n+1) \int_{\cos \vartheta_0}^1 V P_n(x) dx = \frac{1}{2} V [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)],$$

где для $n=0$ мы положим $P_{-1} = 1$. Поэтому потенциал внутри сферы равен

$$\psi = \frac{1}{2} V \sum_{n=0}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta) \left(\frac{r}{a}\right)^n.$$

Потенциал вне сферы радиуса a , на поверхности которой он равен $V_0(\varphi, \vartheta)$, представляется рядом, аналогичным ряду (10.3.27) и отличающимся от него лишь тем, что множители $(r/a)^n$ заменены множителями $(a/r)^{n+1}$, откуда следует, что потенциал стремится к нулю, когда r стремится к бесконечности. Отметим, что на очень большом расстоянии от сферы ($r \gg a$) потенциал пропорционален $1/r$ (кулоновское поле), причем множитель пропорциональности равен радиусу сферы a , умноженному на средний потенциал по поверхности сферы $V_{\text{ср.}}$. Рассматриваемая с достаточно большого расстояния, сфера действует так, как если бы она имела суммарный заряд, равный ее емкости a (в электростатических единицах), умноженной на средний потенциал.

Поля заряженных дисков и витков тоска. Однородное поле, направленное по оси z , имеет потенциал, пропорциональный $-z = -rP_1(\cos \vartheta)$. Если это поле возмущено присутствием сферы радиуса a с центром в начале координат, то к этому потенциалу следует добавить член $(1/r^2)P_1(\cos \vartheta)$ для того, чтобы удовлетворить граничным условиям при $r=a$. Например, если поле представляет поток идеальной несжимаемой жидкости, то граничные условия заключаются в том, что $\partial\psi/\partial r = 0$ при $r=a$. В результате потенциал скоростей равен

$$\psi = -vP_1(\cos \vartheta) \left[r + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \right]. \quad (10.3.28)$$

Скорость у поверхности сферы имеет ϑ -направление и равна

$$-\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right)_a = -\frac{3}{2} v \sin \vartheta.$$

Знак минус указывает на то, что скорость направлена в сторону убывания ϑ . Таким образом, наибольшая скорость жидкости достигается у экватора сферы и равна $3/2$ скорости однородного невозмущенного потока. Если жидкость пребывает в покое на бесконечности, а сфера движется сквозь жидкость со скоростью v , то жидкость непосредственно перед сферой будет двигаться вместе с ней со скоростью v , в то время как жидкость у экватора будет двигаться в противоположном направлении со скоростью $(1/2)v$, так что вытесняемая жидкость обтекает сферу. Очевидно, что

наличие вязкости видоизменило бы эту картину. Мы изучим действие вязкости в последней главе.

Если имеется однородное электрическое поле напряженности E , в которое вносится диэлектрическая сфера с диэлектрической постоянной ε , то потенциал следует выбрать так, чтобы его предельные значения изнутри поверхности сферы совпадали бы с его предельными значениями извне, а его нормальная производная извне равнялась бы нормальной производной изнутри, умноженной на ε . При помощи несложных алгебраических операций можно показать, что искомая пара функций имеет вид

$$\phi = \begin{cases} -[3E/(2+\varepsilon)]r \cos \vartheta, & r < a, \\ -Er \cos \vartheta + E[(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)](a^3/r^2) \cos \vartheta, & r > a. \end{cases}$$

Эти выражения показывают, что поле однородно на бесконечности, а также внутри сферы и что напряженность внутри сферы меньше, чем предельное значение напряженности на бесконечности, если диэлектрическая постоянная больше единицы.

Далее мы определим поле плоского однородно заряженного диска радиуса a , полный заряд которого равен Q , а плотность заряда $Q/\pi a^2$. Поместим центр диска в начало координат, а поверхность диска расположим перпендикулярно оси z .

В точке оси z , отстоящей от поверхности диска на расстояние r , потенциал равен

$$\begin{aligned} \phi_{\vartheta=0} &= \frac{Q}{\pi a^2} 2\pi \int_0^a \frac{y dy}{\sqrt{r^2 + y^2}} = \frac{2Q}{a^2} [V a^2 + r^2 - r] = \\ &= \begin{cases} \frac{2Q}{a} \left[1 - \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{r}{a} \right)^6 - \dots \right], & r < a, \\ \frac{2Q}{a} \left[\frac{1}{2} \frac{a}{r} - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \frac{1}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^5 - \dots \right], & r > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы знаем, что потенциал симметричен относительно оси z , и поэтому его можно разложить в ряд по зональным гармоникам $r^n P_n(\cos \vartheta)$ или $r^{-n-1} P_n(\cos \vartheta)$ для значений ϑ , отличных от нуля (т. е. вне оси z). Мы знаем также, что $P_n(1) = 1$. Из всего сказанного можно заключить, что разложение потенциала диска в точке (r, ϑ, φ) имеет вид

$$\phi = \begin{cases} \frac{2Q}{a} \left[1 - \frac{r}{a} P_1(\cos \vartheta) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) - \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^4 P_4(\cos \vartheta) + \dots \right], & r < a, \\ \frac{2Q}{a} \left[\frac{1}{2} \frac{a}{r} - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r} \right)^3 P_2(\cos \vartheta) + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^5 P_4(\cos \vartheta) - \dots \right], & r > a. \end{cases} \quad (10.3.29)$$

Этот потенциал, как и следовало ожидать, не зависит от φ . На очень больших расстояниях искомый потенциал сводится к функции Q/r , как это и должно быть. Мы замечаем, что имеет место скачок градиента у поверхности диска, вызванный наличием члена $(2Q/a^2)r|\cos \vartheta| = (2Q/a^2)|z|$. Поэтому скачок нормальной производной равен $4Q/a^2 = 4\pi\sigma$, где $\sigma = Q/\pi a^2$ есть поверхностная плотность заряда на диске. Вспоминая, что оба ряда должны совпадать при $r=a$, мы замечаем также, что

$$|\cos \vartheta| = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} P_2(\cos \vartheta) - \frac{3}{16} P_4(\cos \vartheta) + \frac{13}{128} P_6(\cos \vartheta) - \dots$$

Чтобы найти потенциал двойного слоя, расположенного на диске радиуса a с центром в начале, перпендикулярном оси z , напомним, что, согласно элементарной теории электромагнетизма, магнитный потенциал, порожденный витком тока силы I , равен магнитному потенциалу поверхности, границей которой служит эта проволока и на которой распределен магнитный двойной слой с плотностью диполей, равной I . Следовательно, потенциал диска, несущего двойной слой, равен магнитному потенциалу кругового витка тока, совпадающего с краем диска. Он равен также телесному углу, под которым виден диск из данной точки, умноженному на I . Магнитная напряженность в точке, лежащей на оси диска и отстоящей от его поверхности на расстояние r , равна

$$H = I 2\pi a \frac{1}{r^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} = 2\pi I \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от r до бесконечности, получим магнитный потенциал вдоль оси z

$$\psi = \begin{cases} 2\pi I \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right] = 2\pi I \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \right. \\ \quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{r}{a} \right)^6 - \dots \right], & r > a, \\ 2\pi I \left[1 - \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^3 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \right. \\ \quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{r}{a} \right)^7 - \dots \right], & r < a. \end{cases}$$

Потенциал на отрицательной полуоси z отличается от написанного только знаком.

Вновь строя ряд по сферическим гармоникам, соответствующий записанному степенному ряду, мы найдем, что магнитный потенциал, порожденный круговым током силы I , или потенциал диска радиуса a с поверхностной плотностью диполей I , равен

$$\psi = \begin{cases} 2\pi I \left[\frac{\cos \vartheta}{|\cos \vartheta|} - \frac{r}{a} P_1(\cos \vartheta) + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^3 P_3(\cos \vartheta) - \dots \right], & r < a, \\ 2\pi I \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_1(\cos \vartheta) - \right. \\ \quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_3(\cos \vartheta) + \dots \right], & r > a. \end{cases} \quad (10.3.30)$$

Первый член в первой скобке представляет собой разрывную функцию, равную $+1$ для $\vartheta < \pi/2$ и -1 для $\vartheta > \pi/2$. Этот разрыв при переходе через диск (когда ϑ переходит от $\pi/2 - \varepsilon$ к $\pi/2 + \varepsilon$ при $r < a$) влечет за собой разрыв потенциала ψ со скачком $4\pi I$. Это как раз тот скачок, которого следовало ожидать для диска с плотностью диполей I . Причиной этого разрыва магнитного потенциала витка тока является тот факт, что ток в витке порождает вихри в поле вблизи провода, и поэтому любая попытка представить поле с вихрями при помощи потенциальной функции приводит к разрывному потенциалу (см. рассуждение на стр. 215, 216 о циркуляции вокруг цилиндра).

Из формулы (10.3.30) следует, что на больших расстояниях от диска (или витка тока) потенциал сводится к функции $\pi a^2 I (1/r^2) \cos \vartheta$, которая, как мы покажем ниже в этом же параграфе, является потенциалом простого диполя, «сила» которого равна $\pi a^2 I$. Мы замечаем также, что

разрывная ступенчатая функция $\cos \vartheta / |\cos \vartheta|$ выражается рядом

$$\frac{3}{2} P_1(\cos \vartheta) - \frac{7}{8} P_3(\cos \vartheta) + \frac{11}{16} P_5(\cos \vartheta) - \dots = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < \frac{1}{2} \pi, \\ -1, & \frac{1}{2} \pi < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

Поля заряженных сферических сегментов. Как показывает предыдущий пример, при переходе через поверхность двойного слоя с плотностью диполей I потенциал претерпевает разрыв со скачком, равным $4\pi I$, но его нормальная производная остается непрерывной. Используя этот факт, мы можем вычислить потенциал двойного слоя, расположенного на поверхности сферы радиуса a . Например, функция

$$\psi_n(r, \vartheta) = \begin{cases} -\frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \vartheta), & r < a, \\ \frac{n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta), & r > a, \end{cases}$$

всюду конечна и претерпевает скачок, равный $P_n(\cos \vartheta)$ при $r = a$, а ее нормальная производная при этом остается непрерывной. Чтобы найти потенциал произвольного поверхностного распределения диполей по поверхности $r = a$, мы строим ряд из функций ψ_n , соответствующий данному распределению плотности.

Например, двойной слой может покрывать сферический сегмент. Пусть плотность диполей на поверхности сферы радиуса a равна I для значений ϑ , лежащих между 0 и ϑ_0 , и 0 для ϑ , лежащих между ϑ_0 и π . Потенциал такого распределения зарядов должен равняться $\sum A_n P_n(\cos \vartheta)$, где

$$A_n = 4\pi I \frac{2n+1}{2} \int_0^{\vartheta_0} \psi_n(r, \vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta;$$

поэтому

$$\begin{aligned} \psi = 2\pi I \sum_{n=0}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta) \times \\ \times \begin{cases} -\frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n, & r < a, \\ \frac{n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, & r > a, \end{cases} \end{aligned} \quad (10.3.31)$$

является потенциалом двойного слоя с постоянной поверхностной плотностью I , распределенного на сферическом сегменте с угловым радиусом ϑ_0 . Эта же функция ψ является магнитным потенциалом витка тока силы I , расположенного по окружности $r = a$, $\vartheta = \vartheta_0$. Здесь мы заменили виток тока сферической оболочкой, несущей двойной слой, а не плоским диском того же периметра, как это было сделано при выводе формулы (10.3.30). Обе формулы должны совпадать (различие будет только в положении поверхности разрыва), когда виток лежит в экваториальной плоскости, т. е. когда $\vartheta_0 = \pi/2$. В этом случае, применяя одну из формул, приведенных на стр. 306, получим

$$\psi = \begin{cases} 2\pi I \left[-1 - \frac{r}{a} P_1(\cos \vartheta) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos \vartheta) - \right. \\ \quad \left. - \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos \vartheta) + \dots \right], & r < a, \\ 2\pi I \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos \vartheta) - \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos \vartheta) + \dots \right], & r > a. \end{cases} \quad (10.3.32)$$

Заметим, что этот ряд при $r > a$ совпадает с соответствующим рядом из (10.3.30), в то время как ряды для $r < a$ эквивалентны, но отличаются тем, что мы переместили поверхность разрыва с экваториальной плоскости $\vartheta = \pi/2$ на сферическую поверхность $r = a$, $\vartheta < \pi/2$. Так как поверхностный заряд порождает скачок не функции ψ , а ее нормальной производной, то соответствующий ряд для потенциала однородно заряженного сферического сегмента

$$\psi = 2\pi\sigma a \sum_{n=0}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta) \times \\ \times \begin{cases} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n, & r < a, \\ \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, & r > a, \end{cases} \quad (10.3.33)$$

соответствует (но не эквивалентен) ряду (10.3.29).

Интегральное представление решений. Прежде чем приступить к рассмотрению других задач, мы займемся разысканием важного для нас интегрального представления вида (10.3.2) для решений, выражающихся через собственные функции в сферических координатах. Так как

$$X = z + ix \cos u + iy \sin u = r [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos (u - \varphi)],$$

то следует ожидать, что решение, содержащее степень r , может быть выражено при помощи интеграла, в котором функция $F(X)$ является простой степенью X . Мы рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} X^n \cos(mu) du = \\ = r^n \int_0^{2\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos w]^n \cos[m(w + \varphi)] dw = \\ = r^n \cos(m\varphi) \int_0^{2\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos w]^n e^{imw} dw = \\ = 2^{-n} i^{m-1} \sin^m \vartheta \left[\oint (t^2 - 1)^n (t - \cos \vartheta)^{-n-m-1} dt \right] r^n \cos(m\varphi) = \\ = 2\pi i^m \frac{r^n n!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) \sin^m \vartheta T_{n-m}^m(\cos \vartheta) = \frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!} r^n Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi), \quad (10.3.34)$$

где мы положили $t = \cos \vartheta + i \sin \vartheta e^{iw}$ и использовали формулу (5.3.37). Подобным же образом находим

$$\int_0^{2\pi} X^n \sin(mu) du = \frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!} r^n Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi).$$

Аналогичными методами легко показать, что

$$\int_0^{2\pi} X^{n-1} \frac{\cos}{\sin}(mu) du = 2\pi i^{-m} \frac{(n-m)!}{n!} r^{n-1} \begin{cases} Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi), \\ Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi). \end{cases} \quad (10.3.35)$$

Эти формулы окажутся чрезвычайно полезными в наших дальнейших исследованиях. Благодаря им мы сможем относительно легко переходить от сферических координат к другим системам. Например, выражая X

через x, y, z и затем осуществляя интегрирование, находим, что

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= 1, & Y_{01} &= \frac{z}{r}, & Y_{02} &= \frac{1}{2r^3}(2z^2 - x^2 - y^2), & Y_{03} &= \frac{z}{2r^3}(2z^2 - 3x^2 - 3y^2); \\
 Y_{11}^e &= \frac{x}{r}, & Y_{12}^e &= 3\frac{xz}{r^2}, & Y_{13}^e &= \frac{3}{2}\frac{x}{r^3}(4z^2 - x^2 - y^2); \\
 Y_{11}^o &= \frac{y}{r}, & Y_{12}^o &= 3\frac{yz}{r^2}, & Y_{13}^o &= \frac{3}{2}\frac{y}{r^3}(4z^2 - x^2 - y^2); \\
 Y_{22}^e &= 3\frac{x^2 - y^2}{r^2}, & Y_{23}^e &= 15\frac{x^2 - y^2}{r}z; \\
 Y_{22}^o &= 6\frac{xy}{r^2}, & Y_{23}^o &= 30\frac{xyz}{r^3}; & Y_{33}^e &= 15x\frac{x^2 - 3y^2}{r^3}; & Y_{33}^o &= 15y\frac{3x^2 - y^2}{r^3};
 \end{aligned} \tag{10.3.36}$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Отсюда нетрудно усмотреть, что все $2n+1$ функций

$$r^n Y_{0n}, \quad r^n Y_{1n}^e, \dots, r^n Y_{nn}^e, \quad r^n Y_{1n}^o, \dots, r^n Y_{nn}^o$$

являются однородными рациональными полиномами от x, y, z степени n , а также что все они являются решениями уравнения Лапласа. Оказывается, что все возможные однородные полиномы степени n от x, y, z , являющиеся решениями уравнения Лапласа, могут быть образованы при помощи линейных комбинаций $2n+1$ построенных таким образом независимых полиномов. Они образуют полное подмножество во всем множестве решений. С точки зрения теории групп они являются представлениями n -кратной группы вращений (для $n=0$ полная симметрия вращения вокруг любой оси; для $n=1$ трехкратная симметрия вращения на 90° вокруг трех декартовых осей; для $n=2$ симметрия вращения на 45° вокруг соответствующих осей и т. д.).

Те же самые функции степени n после деления на r^{2n+1} дают новое множество функций, также являющихся решениями уравнения Лапласа.

Решения, определяемые по формуле (10.3.34), могут быть выражены через решения, соответствующие новому началу координат, при помощи интегрального представления. Например, одно из решений, соответствующее центру в точке $(0, 0, a)$, может быть выражено через решения, соответствующие центру в точке $(0, 0, 0)$, следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (r')^n Y_{mn}^e(\vartheta', \varphi) &= \frac{(n+m)!}{2\pi i m n!} \int_0^{2\pi} (X-a)^n \cos(mu) du = \\
 &= \frac{(n+m)!}{2\pi i m n!} \int_0^{2\pi} \left[X^n - naX^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a^2X^{n-2} - \dots \right] \cos(mu) du = \\
 &= a^n \sum_{s=m}^n \frac{(-1)^{n-s} (n+m)!}{(n-s)! (m+s)!} \left(\frac{r}{a}\right)^s Y_{ms}^e(\vartheta, \varphi).
 \end{aligned}$$

Для решений, содержащих отрицательные степени r , мы, разлагая $(X-a)^{-n-1}$, получим бесконечные ряды, и, чтобы добиться сходимости,

надо пользоваться различными разложениями в зависимости от того, будет ли r больше или меньше a . Для r , большего a , мы получим

$$\begin{aligned}(r')^{-n-1} Y_{mn}^e(\vartheta', \varphi) &= \frac{n! i^m}{2\pi (n-m)!} \int_0^{2\pi} (X-a)^{-n-1} \cos(mu) du = \\ &= \frac{i^m n!}{2\pi (n-m)!} \int_0^{2\pi} \frac{1}{X^{n+1}} \left[1 + (n+1) \frac{a}{X} + \frac{(n+1)(n+2)}{2!} \left(\frac{a}{X} \right)^2 + \dots \right] \cos(mu) du = \\ &= a^{-n-1} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-m)!}{(n-m)! (s-n)!} \left(\frac{a}{r} \right)^{s+1} Y_{ms}^e(\vartheta, \varphi).\end{aligned}$$

Формулы, выражающие потенциал в координатах r, ϑ, φ через координаты r', ϑ', φ , получаются заменой в этих уравнениях a на $-a$.

Например, можно получить приближенное решение следующей задачи. Заземленная сфера с внешним радиусом b помещена внутрь сферы с внутренним радиусом c ($c > b$), имеющей потенциал V . Найти распределение потенциала между сферами, если центр внутренней сферы отстоит от центра внешней сферы на расстояние a ($a < c - b$). Предположим, что линия центров лежит на оси z , что координаты, связанные с большей сферой, суть r, ϑ, φ , а координаты, связанные с малой сферой (с центром в точке $r = a, \vartheta = 0$), суть r', ϑ', φ .

Так как потенциал при $r' = b$ должен равняться 0, то наиболее общее выражение его должно иметь вид

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\left(\frac{r'}{b} \right)^n - \left(\frac{b}{r'} \right)^{n+1} \right] P_n(\cos \vartheta'),$$

где мы использовали только гармоники, соответствующие значению $m=0$, так как вся картина симметрична относительно оси z . Заметим, что $A_0 b$ равно полному заряду Q , расположенному на внутренней сфере (можете ли вы это доказать?). Используя вышеприведенное разложение и меняя порядок суммирования, найдем, что тот же потенциал, выраженный в координатах r, ϑ , соответствующих большей сфере, равен

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^s \sum_{n=s}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{b} \right)^n \frac{(-1)^{n-s} n!}{s! (n-s)!} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a}{r} \right)^{s+1} \sum_{n=0}^s A_n \left(\frac{b}{a} \right)^{n+1} \frac{s!}{n! (s-n)!} \right\} P_s(\cos \vartheta).\end{aligned}$$

Так как большая сфера при $r=c$ должна иметь постоянный потенциал 1, то уравнения для коэффициентов A имеют вид

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{-a}{b} \right)^n - \frac{b}{c} A_0 &= V, \\ \sum_{n=0}^s A_n \left(\frac{b}{a} \right)^n \frac{s!}{n! (s-n)!} - \left(\frac{c}{a} \right)^{2s+1} \sum_{n=s}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{b} \right)^{n+1} \frac{(-1)^{n-s} n!}{s! (n-s)!} &= 0, \quad s > 0.\end{aligned}$$

Если a мало по сравнению с b или c , то эта система уравнений может быть решена методом последовательных приближений. Мы положим $A_n = (a/b)^n B_n$, где B_n не является ни слишком большим, ни слишком малым. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{c-b}{c} B_0 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 B_1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4 B_2 - \dots = V, \\ & B_0 + s B_1 + \frac{s(s-1)}{2} B_2 + \dots + s B_{s-1} + B_s - \\ & - \left(\frac{c}{b}\right)^{2s+1} \left[B_s - (s+1) \left(\frac{a}{b}\right)^2 B_{s+1} + \frac{(s+1)(s+2)}{2!} \left(\frac{a}{b}\right)^4 B_{s+2} - \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

Если отношение a/b мало, то, решая уравнения при $s > 0$, получим

$$B_1 \approx \frac{b^3}{c^3 - b^3} B_0, \quad B_2 \approx \frac{b^5(c^3 + b^3)}{(c^5 - b^5)(c^3 - b^3)} B_0, \dots$$

Значение B_0 получается из первого уравнения. Если b много меньше, чем c , то следует сохранить только B_1 , а коэффициентами B с более высокими индексами можно пренебречь. В этом случае

$$B_0 = A_0 \approx \frac{cV}{c-b} \left[1 - \frac{ca^4/b}{(c^3 - b^3)(c-b)} \right],$$

и емкость данной конфигурации проводников в этом приближении равна

$$C = \frac{bA_0}{V} \approx \frac{cb}{c-b} \left[1 - \frac{ca^4/b}{(c^3 - b^3)(c-b)} \right].$$

Более удобные пути исследования этой проблемы будут обсуждаться ниже.

Разложение функции Грина. Решение $1/r$ является функцией Грина для источника, расположенного в начале координат. Если источник находится в точке $r = r_0$, $\vartheta = 0$, то функция Грина равна

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta}} = \frac{1}{r_0} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{s+1} P_s(\cos \vartheta), \quad r > r_0,$$

как это можно показать, исходя из формулы (5.3.28). Если источник находится в произвольной точке $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, то лучше всего получить разложение, исходя из общей формулы (7.2.63).

Нормированные собственные функции, зависящие от ϑ , имеют вид

$$\sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \vartheta).$$

Нормированные собственные функции, зависящие от φ , имеют вид либо

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\varphi},$$

либо $\sqrt{\varepsilon_m/2\pi} \cos(m\varphi)$ и $\sqrt{\varepsilon_m/2\pi} \sin(m\varphi)$; из-за вырождения приходится использовать обе эти функции для каждого значения m . Радиальные функции не являются собственными функциями, но производная функции

$$L = \frac{1}{2n+1} \begin{cases} r^n/r_0^{n+1}, & r < r_0, \\ r_0^n/r^{n+1}, & r > r_0, \end{cases}$$

имеет скачок $1/r_0^2$ при $r = r_0$. Поэтому данная функция является функцией Грина от переменной r (см. стр. 770 тома I). Следовательно, соответ-

ствующие ряды для функции Грина трехмерного уравнения Лапласа в сферических координатах имеют вид

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \omega) \cdot \begin{cases} r^n/r_0^{n+1}, & r_0 > r, \\ r_0^n/r^{n+1}, & r_0 < r, \end{cases} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ \times \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \cdot \begin{cases} r^n/r_0^{n+1}, & r_0 > r, \\ r_0^n/r^{n+1}, & r_0 < r, \end{cases} \end{cases} \quad (10.3.37)$$

где $R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \omega$, а

$$\cos \omega = \cos \vartheta_0 \cos \vartheta + \sin \vartheta_0 \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0);$$

углы ω , ϑ и ϑ_0 образуют три стороны сферического треугольника.

Благодаря этим формулам мы можем получить некоторые полезные формулы, представляющие функцию Лежандра от угла ω через функции от сторон сферического треугольника ϑ и ϑ_0 и заключенного между ними угла $\varphi - \varphi_0$. Например, приравнявая коэффициенты при r^n/r_0^{n+1} в обоих рядах, мы получим *теорему сложения* для сферических гармоник

$$P_n(\cos \omega) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)], \quad (10.3.38)$$

где ε_m — множитель Неймана: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Но мы могли бы получить первый из рядов формулы (10.3.37), используя соотношения (10.3.8). Если $r_0 > r$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{X_0 - X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{X^n}{X_0^{n+1}} du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos(\varphi - u)]^n}{[\cos \vartheta_0 + i \sin \vartheta_0 \cos(\varphi_0 - u)]^{n+1}} du. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем интегральное представление для полинома Лежандра от ω :

$$P_n(\cos \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos(\varphi - u)]^n}{[\cos \vartheta_0 + i \sin \vartheta_0 \cos(\varphi_0 - u)]^{n+1}} du, \quad (10.3.39)$$

которое следует сравнить с выражениями (10.3.34) и (10.3.35). Интегральные представления для $P_n(\cos \vartheta)$ или $P_n(\cos \vartheta_0)$ можно получить, положив в формуле (10.3.39) либо $\vartheta = 0$, либо $\vartheta_0 = 0$.

Функция Грина для внутренней задачи, когда единичный заряд находится в точке $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ внутри заземленной сферы радиуса a ($a > r_0$), имеет вид

$$\begin{aligned} G_i(r, \vartheta, \varphi | r_0, \vartheta_0, \varphi_0) &= \\ &= \frac{1}{R} - \sum_{n,m} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}}, \end{aligned} \quad (10.3.40)$$

где разложение для $1/R$ дано равенствами (10.3.37).

Предположим, что однородно заряженная проволока натянута вдоль оси z от $+a$ до 0 и помещена внутрь полый заземленной сферы. Для положительных z потенциал элемента проволоки длины dz равен

$$q \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \left[A_n(z, r) - \frac{z^n r^n}{a^{2n+1}} \right] dz, \quad A_n = \begin{cases} \frac{r^n}{z^{n+1}}, & r < z, \\ \frac{z^n}{r^{n+1}}, & r > z, \end{cases}$$

где q есть заряд, приходящийся на единицу длины. Ряд для отрицательных значений z содержит дополнительный множитель $(-1)^n$ при n -м члене [равный $P_n(-1)$]. Поэтому потенциал в точке (r, ϑ, φ) внутри заземленной сферы, создаваемый заряженной проволокой, равен

$$\begin{aligned} q \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \left\{ \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r z^n dz + r^n \int_r^a \frac{dz}{z^{n+1}} - \frac{r^n}{a^{2n+1}} \int_0^a z^n dz \right\} = \\ = q \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{r^n}{na^n} - \frac{r^n}{(n+1)a^n} \right\} P_n(\cos \vartheta) = \\ = q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right] P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Первые члены сходятся плохо из-за разрыва потенциала при $r=a$, $\vartheta=0, \pi$.

Функция Грина для внешней задачи, т. е. потенциал заряда, находящегося в точке $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ в присутствии заземленной сферы радиуса a ($a < r_0$), имеет вид

$$\begin{aligned} G_0(r, \vartheta, \varphi | r_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \\ = \frac{1}{R} - \sum_{m,n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}}. \quad (10.3.41) \end{aligned}$$

Второй дополнительный член, благодаря которому потенциал обращается в 0 при $r=a$, совпадает с тем членом, который возник бы от фиктивного заряда величины a/r_0 , помещенного в точке $r=a^2/r_0$, $\vartheta=\vartheta_0$, $\varphi=\varphi_0$. Сравнение с формулой (10.3.40) показывает, что изображением точечного заряда q , находящегося в точке $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ заземленной сферической поверхности $r=a$ (где a либо больше, либо меньше r_0), является заряд qa/r_0 в точке $(a^2/r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$. Если заряд находится вне поверхности ($r_0 > a$), то изображение лежит внутри поверхности и меньше оригинала; если же заряд лежит внутри, то изображение лежит вне поверхности и больше оригинала.

Диполи, квадруполь и мультиполи. Потенциал, порожденный зарядом, распределенным внутри сферы $r=a$ с объемной плотностью $\rho(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, в точке, лежащей вне этой сферы, определяется рядом

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} Y_{nm}^e(\vartheta, \varphi) + B_{nm} Y_{nm}^o(\vartheta, \varphi)] \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (10.3.42)$$

где

$$A_{nm} = \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi_0) d\varphi_0 \int_0^{\pi} P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^a \rho(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) r_0^{n+2} dr_0,$$

а коэффициент B_{nm} выражается аналогичным объемным интегралом, в котором $\cos(m\varphi_0)$ заменен на $\sin(m\varphi_0)$ ($B_{n0} = 0$).

Мы замечаем, что коэффициент A_{00} равен полному заряду, находящемуся внутри сферы $r = a$, другими словами, вне сферы, в пространстве, свободном от зарядов, величина коэффициента при $1/r$ в (10.3.42) в точности равна полному заряду внутри сферы независимо от его распределения. Каждый из остальных членов ряда является определенной характеристикой распределения заряда, как это показывает соответствующий интеграл.

Однако существует иной путь для вычисления этого потенциала. В соответствии с формулой (1.4.8) потенциал в точке (x, y, z) равен

$$\phi = \iiint_V \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{R} dx_0 dy_0 dz_0,$$

где $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ и интегрирование производится по объему, заключенному внутри сферы $r = a$, где, по предположению, размещен весь заряд. Если r больше, чем a , мы можем получить достаточно хорошо сходящийся ряд для интеграла, разлагая $1/R$ в ряд Тейлора по переменным x_0, y_0, z_0 , которые никогда не превосходят a .

Нетрудно видеть, что мы можем символически записать

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right]^n \left(\frac{1}{r} \right),$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Поэтому мы можем разложить $1/R$ в ряд, каждый член которого является произведением $x_0^l y_0^k z_0^n$ на некоторый численный множитель и на множитель $(\partial^{\lambda+\mu+\nu}/\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu)(1/r)$, являющийся функцией от x, y, z (либо от r, ϑ, φ). Первый из этих сомножителей, умноженный на $\rho(x_0, y_0, z_0)$, следует проинтегрировать по внутренней области сферы $r_0 = a$, чтобы получить окончательный числовой коэффициент при функции от x, y, z .

Используя формулу для n -й степени трехчлена

$$(x + y + z)^n = \sum_{\lambda, \mu, \nu} \frac{n!}{\lambda! \mu! \nu!} x^\lambda y^\mu z^\nu$$

(где суммирование распространяется на все возможные значения λ, μ, ν , для которых $\lambda + \mu + \nu = n$), мы можем выписать разложение для ϕ в явном виде:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^n}{l! k! (n-l-k)!} \left\{ \iiint x_0^l y_0^k z_0^{n-l-k} \rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \right\} \times \\ \times \frac{\partial^n}{\partial x^l \partial y^k \partial z^{n-l-k}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{для } r > a, \quad (10.3.43)$$

где плотность ρ (и все ее производные) равна 0 на сфере радиуса a и вне этой сферы. Это согласуется с положениями предыдущего параграфа. Мы можем, если захотим, взять по частям интеграл в скобках, заменив, таким образом, множитель, содержащий степени x_0, y_0, z_0 , производными от ρ по переменным x_0, y_0, z_0 .

Этот ряд (в той или иной его форме) показывает, что, производя измерения потенциала *вне сферы*, мы можем найти только те характеристики распределения заряда ρ внутри сферы радиуса a , которые выражаются через значения интегралов

$$\frac{(-1)^n}{l! k! (n-l-k)!} \iiint x_0^l y_0^k z_0^{n-l-k} \rho dx_0 dy_0 dz_0 \quad (10.3.44)$$

либо

$$\iiint \frac{\partial^n}{\partial x_0^l \partial y_0^k \partial z_0^{n-l-k}} [\rho(x_0, y_0, z_0)] dx_0 dy_0 dz_0$$

в зависимости от того, каким из видов интеграла мы пользуемся при расчете. В самом деле, если перераспределить ρ внутри сферы любым сколь угодно сложным образом, *лишь бы значения интегралов (10.3.44) не изменились*, то мы не смогли бы, находясь вне сферы, обнаружить, что произведено перераспределение. Конечно, при ближайшем рассмотрении требование, чтобы все интегралы оставались неизменными, теоретически оказывается достаточно жестким ограничением на произвол перераспределения ρ . Действительно, из второй формы интегралов, казалось бы, следует, что, потребовав, чтобы ρ выражалось сходящимся степенным рядом по x_0, y_0, z_0 внутри сферы, мы сделали перераспределение теоретически невозможным, так как, фиксируя значения интегралов, мы тем самым фиксируем все коэффициенты этого степенного ряда. Однако, как мы сейчас увидим, вопрос решается не так просто.

На практике, кроме того, мы обладаем значительной свободой перераспределения, ибо если r существенно больше, чем a , то потенциалы (заданные при помощи производных от $1/r$) для больших значений n оказываются столь малыми, что не поддаются измерению, и мы можем получить только значение интегралов (10.3.44) для n , меньших некоторого конечного числа, которое будет тем меньше, чем больше r , т. е. чем больше расстояние, на котором мы измеряем потенциал.

Например, для весьма больших r мы можем измерить только коэффициент при члене $1/r$, соответствующем значению $n=0$. Величина этого коэффициента в точности равна *полному заряду* q . Эта величина останется неизменной, если мы сосредоточим весь заряд в начале, т. е. если мы заменим фактическое распределение ρ распределением вида $q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Для нескольких меньших r мы смогли бы измерить также величины $D_x = \iiint x_0 \rho dx_0 dy_0 dz_0$ и выражаемые аналогичными интегралами D_y и D_z . Вектор с компонентами D_x, D_y и D_z называется *дипольным моментом* для распределения заряда ρ . Его величина останется неизменной, если мы заменим ρ *диполем*, символически обозначаемым при помощи производных дельта-функций

$$-[D_x \delta'(x) \delta(y) \delta(z) + D_y \delta(x) \delta'(y) \delta(z) + D_z \delta(x) \delta(y) \delta'(z)]$$

(см. стр. 775 тома I) и соответствующим заряду $+D/\varepsilon$ ($D^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$) в точке $x = \varepsilon D_x/2D, y = \varepsilon D_y/2D, z = \varepsilon D_z/2D$ и заряду $-D/\varepsilon$, расположенному по другую сторону от начала, где ε исчезающе мало. Распределение столь простого вида даст, конечно, только три члена, соответствующие значению $n=1$ в ряде (10.3.43). Все остальные члены будут равны нулю.

Простейшее распределение зарядов, порождающее потенциалы второго порядка, содержит комбинации из трех или четырех точечных зарядов. Например, интеграл

$$\iiint x_0 y_0 \rho dx_0 dy_0 dz_0 = Q_{xy}$$

может быть истолкован при помощи «диполя из диполей», т. е. диполя, расположенного вдоль оси x , элементами которого служат диполи, расположенные параллельно оси y , с зарядами $+Q_{xy}/\varepsilon^2$ в точках $x=y=\pm \frac{1}{2}\varepsilon, z=0$ и зарядами $-Q_{xy}/\varepsilon^2$ в точках $x=-y=\pm \frac{1}{2}\varepsilon, z=0$, где ε исчезающе мало. При помощи дельта-функций это можно записать в виде

$$Q_{xy} \delta'(x) \delta'(y) \delta(z).$$

Далее, интеграл

$$\iiint z_0^2 \rho \, dx_0 \, dy_0 \, dz_0 = Q_{zz}$$

соответствует тройке зарядов: заряду $-2Q_{zz}/z^2$, помещенному в начале координат, заряду $+Q_{zz}/z^2$ в точке $x=y=0$, $z=z$ и заряду $+Q_{zz}/z^2$ в точке $x=y=0$, $z=-z$, причем опять z стремится к нулю. При помощи дельта-функции это запишется в виде

$$Q_{zz} \delta(x) \delta(y) \delta''(z).$$

Только что описанные распределения трех или четырех зарядов называются *квадрупольями*¹⁾. Мы видим, что потенциалы второго порядка можно с успехом заменить, подобрав соответствующим образом симметричные *квадрупольные аффины* с компонентами Q_{xx} , $Q_{xy}=Q_{yx}$ и т. д., определяемыми шестью интегралами второго порядка.

Мы можем здесь сказать «и так далее». Следующее простейшее распределение зарядов называется *октуполем*, а все последующие просто мультиполями. Теперь мы можем подтвердить положение, высказанное на стр. 260. *Значение потенциала вне сферы радиуса a не изменится, если заменить действительное распределение заряда ρ (находящегося внутри сферы) нижеследующим «упрощенным» распределением:*

точечный заряд величины q , помещенный в начале координат;

диполь, помещенный в начале, величина и направление которого задаются при помощи компонент D_x , D_y , D_z ;

квадруполь, находящийся в начале, с компонентами Q_{xx} , Q_{xy} и т. д.

Поскольку речь идет о значении потенциала вне заряженной части пространства, *любое распределение заряда можно заменить подходящим набором мультиполей.*

Возможно, в этом месте читатель будет удивлен тем, что мы занимались разложением по сферическим гармоникам, в то время как разложение по мультиполям значительно более «наглядно», и тем, что мы занимались рядом (10.3.42), когда имеется ряд (10.3.43). В ответ заметим, что, во-первых, ряд по мультиполям содержит излишние члены и, во-вторых, если оставить в стороне наличие излишних членов, разница между этими рядами не очень велика.

Сравнивая ряды (10.3.43) и (10.3.42), мы замечаем, что разложение в ряд Тейлора содержит $(n+1)(n+2)/2$ членов n -го порядка, в то время как ряд по сферическим гармоникам содержит $2n+1$ членов n -го порядка. Оба ряда имеют по одному члену «нулевого» порядка и по три члена первого порядка. Но ряд Тейлора имеет шесть членов второго порядка, в то время как ряд по сферическим гармоникам — только пять²⁾. Содержит ли ряд Тейлора излишние члены, или, наоборот, в ряд по сферическим гармоникам не включена одна «степень свободы» распределения заряда ρ , или имеет место и то, и другое?

¹⁾ Для квадруполья характерно наличие четырех зарядов. Случай трех зарядов является вырожденным и соответствует слиянию двух одноименных зарядов. — Прим. ред.

²⁾ Обычно аффины квадрупольного момента записываются в виде

$$Q_{ik} = \int \left(x_i x_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ik} \right) \rho \, dx \, dy \, dz.$$

При этом след аффина $\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0$, так что имеется только пять независимых компонент аффина. Следовательно, и в разложении Тейлора имеется только пять независимых членов второго порядка. [Добавленные члены $\left(-\frac{1}{3} \delta_{ik} \int r^2 \rho \, dx \, dy \, dz \right)$ не изменяют потенциала, так как соответствующий член в ряде Тейлора пропорционален $\nabla^2 \frac{1}{r} \equiv 0$.] — Прим. ред.

Правильным ответом будет «и то, и другое». Существует «степень свободы» в распределении заряда, включенная в ряд Тейлора, при которой не создается потенциала вне сферы и которая опускается в ряде по сферическим гармоникам именно потому, что она не создает потенциала. Симметричное распределение заряда, при котором $Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = Q$ и $Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$, согласно (10.3.43), порождает потенциал

$$Q \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left(\frac{1}{r} \right) = Q \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right),$$

равный нулю, так как $1/r$ является решением уравнения Лапласа при $r > 0$. Это распределение соответствует помещенному в начало отрицательному заряду, окруженному симметричной сферической оболочкой, несущей такой же положительный заряд. При этом результирующий потенциал равен нулю. Ряд по сферическим гармоникам не включает члена, соответствующего такому распределению, и поэтому имеет на один член второго порядка меньше, чем ряд Тейлора.

Дополнительному требованию, чтобы опускались те из «степеней свободы» в распределении плотности заряда, которые не создают потенциала вне сферы, значительно легче удовлетворить, если в формуле (10.3.43) переменные x, y, z заменить переменными $w = x + iy, \bar{w} = x - iy$ и z (см стр. 333 тома I). Тогда членами второго порядка будут

$$\frac{1}{2} \iiint \rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \left\{ w_0^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \bar{w}_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{w}^2} + z_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2w_0 \bar{w}_0 \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} + 2w_0 z_0 \frac{\partial^2}{\partial w \partial z} + 2\bar{w}_0 z_0 \frac{\partial^2}{\partial \bar{w} \partial z} \right\} \left(\frac{1}{r} \right),$$

где $r^2 = w\bar{w} + z^2$. Однако непосредственное дифференцирование показывает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

так как $1/r$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому четвертый член создает тот же самый потенциал, что и третий. И мы можем записать это выражение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint \rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \left\{ w_0^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \bar{w}_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{w}^2} + \right. \\ \left. + \left(z_0^2 - \frac{1}{2} w_0 \bar{w}_0 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2w_0 z_0 \frac{\partial^2}{\partial w \partial z} + 2\bar{w}_0 z_0 \frac{\partial^2}{\partial \bar{w} \partial z} \right\} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Выполнив все дифференцирования и сравнив полученные выражения с представлениями сферических гармоник, данными в (10.3.36), видим, что рассматриваемый интеграл в точности равен

$$\begin{aligned} \iiint \rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \frac{r_0^2}{r^3} \left\{ Y_{02}(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{02}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} Y_{12}^e(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{12}^e(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{3} Y_{12}^o(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{12}^o(\vartheta, \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} Y_{22}^e(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{22}^e(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{12} Y_{22}^o(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{22}^o(\vartheta, \varphi) \right\}, \end{aligned}$$

что и является совокупностью членов второго порядка в ряде по сферическим гармоникам.

Чтобы показать весьма тесную связь между обоими рядами для всех порядков, мы воспользуемся формулой (10.3.35), из которой получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{2^m}{2\pi} \frac{\partial^n}{\partial \bar{w}^m \partial z^{n-m}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{X} = \\ &= \frac{(-1)^{n-m}}{2\pi} n! \int_0^{2\pi} \frac{e^{imu} du}{X^{n+1}} = (-1)^n (n-m)! e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta) r^{-n-1} = \\ &= (-1)^n (n-m)! r^{-n-1} [Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + iY_{mn}^o(\vartheta, \varphi)], \end{aligned} \quad (10.3.45)$$

где $X = z + i(x \cos u + y \sin u) = z + \frac{1}{2} i (we^{-iu} + \bar{w}e^{iu})$. Эта формула совместно с формулой для смешанных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m+l} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^l \frac{\partial^{n-m-2l}}{\partial z^{n-m-2l}} \left(\frac{1}{r} \right) = (-1)^l \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

дает возможность после довольно громоздких алгебраических преобразований показать, что ряд (10.3.43) в точности равен ряду (10.3.42). Таким

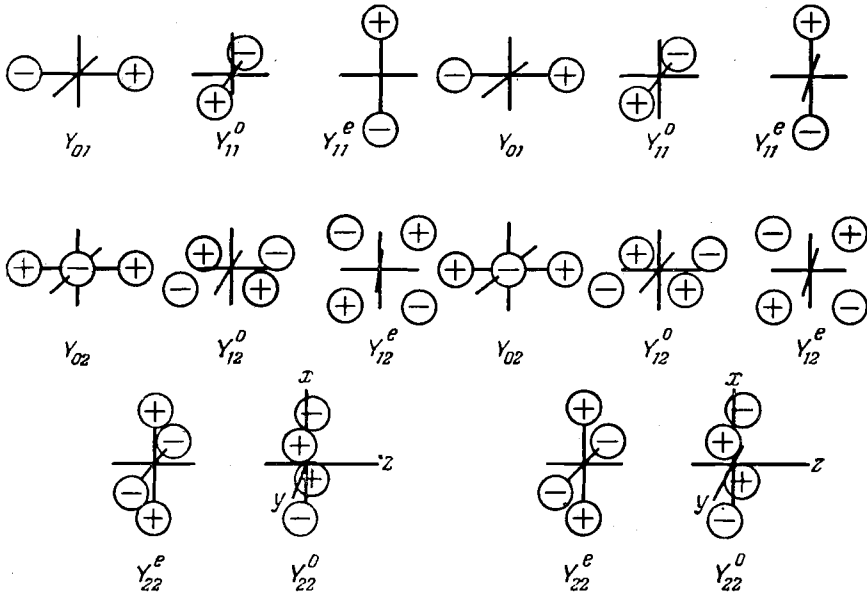


Рис. 10.25. Расположение диполей и квадруполь, создающих поля, соответствующие указанным сферическим гармоникам.

образом, оправдывается утверждение, высказанное на стр. 261, и, следовательно, мы можем связать потенциалы мультиполей и сферические гармоники. Рис. 10.25 показывает распределение диполей и квадруполь, соответствующее сферическим гармоникам первых двух порядков.

Теперь мы можем вернуться к вопросу о том, в какой мере можно судить о распределении плотности заряда $\rho(x_0, y_0, z_0)$ внутри сферы $r = a$ по измерениям порожденного этим распределением потенциала вне сферы $r = a$. Коэффициенты при сферических гармониках n -го порядка в ряде (10.3.42) являются интегралами, взятыми по объему, ограниченному сферой, от той же n -й сферической гармоники с переменными ϑ_0, φ_0 , умноженной на r_0^n и на ρ .

Каждое видоизменение распределения ρ , при котором эти коэффициенты остаются неизменными, создает тот же потенциал вне сферы

$r = a$. В частности, мы можем прибавить или вычесть из ρ распределение заряда вида $\chi_n(r_0) Y_{mn}(\vartheta_0, \varphi_0)$ с любым постоянным множителем, если только выполнено условие

$$\int_0^a \chi_n(r_0) r_0^{n+2} dr_0 = 0,$$

так как легко видеть, что любое такое распределение заряда дает нулевой потенциал вне сферы $r = a$.

При этом удобно пользоваться следующим разложением для ρ :

$$\rho(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \sum_{m,n} [\rho_{mn}^e(r_0) Y_{mn}^e(\vartheta_0, \varphi_0) + \rho_{mn}^o(r_0) Y_{mn}^o(\vartheta_0, \varphi_0)],$$

где

$$\rho_{mn}^e(r_0) = \frac{\varepsilon_m (2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi \sin \vartheta_0 \rho(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) Y_{mn}^e(\vartheta_0, \varphi_0) d\vartheta_0$$

и ρ^o выражено аналогичным образом. Ввиду полноты системы сферических гармоник этот ряд полностью соответствует самой функции ρ , т. е. сходится к ней в среднем в соответствии с определением § 6.3. Отметим, что ρ_{00} представляет полный заряд внутри сферы $r = a$ и что всем остальным ρY соответствует полный заряд, равный нулю.

Но, получив радиальные распределения ρ_{mn} , мы можем теперь изменить ρ , не меняя потенциала ϕ , путем произвольного изменения любого ρ_{mn} . Для этого надо, чтобы интеграл от измененного ρ_{mn} , умноженного на r_0^{n+2} , не отличался от такого же интеграла от первоначального ρ_{mn} . В частности, мы можем заменить каждое ρ_{mn} (за исключением случая $m = n = 0$) следующим выражением:

$$q_{mn}^e(r_0) = \varepsilon^{-n-3} \rho_{mn}^e(r_0/\varepsilon), \quad q_{mn}^o(r_0) = \varepsilon^{-n-3} \rho_{mn}^o(r_0/\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

поскольку тогда

$$\int_0^{a\varepsilon} q_{mn}^e(r_0) r_0^{n+2} dr_0 = \varepsilon^{-n-3} \int_0^{a\varepsilon} \rho_{mn}^e(r_0/\varepsilon) r_0^{n+2} dr_0 = \int_0^a \rho_{mn}^e(x) x^{n+2} dx = \frac{2n+1}{4\pi} A_{mn};$$

аналогичное равенство имеет место для q^o . Таким образом, мы можем концентрировать каждое частичное распределение ρ_{mn} во все меньшей и меньшей сфере радиуса $a\varepsilon$ (ε стремится к 0), увеличивая в то же время величину заряда при помощи соответствующего множителя $1/\varepsilon^{n+3}$ и нисколько не меняя потенциала вне сферы $r = a$. В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ эквивалентное распределение заряда сводится к последовательности мультиполей, причем мультиполю порядка n соответствует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{m=0}^n (q_{mn}^e Y_{mn}^e + q_{mn}^o Y_{mn}^o) \right].$$

Компонентами этих мультиполей действительно ограничиваются все характеристики распределения ρ , которые можно определить, измеряя потенциал ϕ вне сферы $r = a$.

Сферическая оболочка с отверстием. Построив функции Грина, мы можем теперь найти потенциал вокруг металлической сферической оболочки, в которой имеется круглое отверстие. При этом будет использован тот же метод, которым была получена формула (10.1.22) в случае цилиндра

со щелью. Предположим, что поверхность $r = a$, $\vartheta_1 < \vartheta < \pi$ сделана из металла, а область $0 < \vartheta < \vartheta_1$ представляет собой отверстие в этой поверхности. Мы хотим найти потенциал внутри и вне этой поверхности, считая, что разность потенциала металлической оболочки и потенциала на бесконечности равна V . Положим потенциал на бесконечности равным $-V$, тогда потенциал оболочки будет равен нулю.

Если бы не существовало отверстия ($\vartheta_1 = 0$), то потенциал вне оболочки равнялся бы $\phi_0^0 = -V + Va/r$, а внутри оболочки равнялся бы $\phi_1^0 = 0$. При этом разность между нормальными производными при $r = a$ равна V/a . Интегральное представление потенциала при наличии отверстия в первом приближении выражается формулой (см. стр. 747 тома I)

$$\psi(r, \vartheta) \approx \frac{Va}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{\vartheta_1}^{\pi} G(r, \vartheta, \varphi | a, \vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 - V \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} -\frac{1}{2} V \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \vartheta), & r < a, \\ -V + \frac{Va}{r} - \frac{1}{2} V \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta), & r > a, \end{cases}$$

где G есть ряд для $1/R$, заданный формулой (10.3.37), а

$$A_n = \int_0^{\vartheta_1} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2n+1} [P_{n-1}(\cos \vartheta_1) - P_{n+1}(\cos \vartheta_1)]$$

(для $n=0$ $A_0 = 1 - \cos \vartheta_1$).

Это выражение, очевидно, равно взятому с обратным знаком потенциалу, создаваемому той частью сферы, после удаления которой образовалось отверстие. Оно не равно в точности нулю на металлической оболочке, но остается непрерывным вместе с первыми производными при переходе через отверстие. Лучшим приближением является то, для которого

$$\psi(a, \vartheta) \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2} V \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta), & 0 < \vartheta < \vartheta_1, \\ 0, & \vartheta_1 < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

Этот потенциал легко вычислить. Он равен

$$\psi(r, \vartheta) \simeq \begin{cases} -\frac{1}{4} V \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_{0m} A_{nm} \right] P_n(\cos \vartheta) \left(\frac{r}{a}\right)^n, & r < a, \\ -V + \frac{Va}{r} - \frac{1}{4} V \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_{0m} A_{nm} \right] P_n(\cos \vartheta) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, & r > a, \end{cases}$$

где

$$A_{nm} = (2n+1) \int_{\cos \vartheta_1}^1 P_n(x) P_m(x) dx.$$

Ясно, что производные этого потенциала уже не остаются непрерывными при переходе через отверстие, но в остальном он хорошо удовлетворяет

граничным условиям. Потенциал в центре сферы при этом равен

$$\phi(0) \approx -\frac{1}{4} V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} [P_{n-1}(\cos \vartheta_1) - P_{n+1}(\cos \vartheta_1)]^2.$$

Эта величина весьма мала, если ϑ_1 мало, и равна $-V$, если $\vartheta_1 = \pi$ (т. е. если вообще не существует металлической оболочки).

Мы могли бы использовать также метод, данный на стр. 195, 196, для вычисления потенциала в случае, когда его значения в отверстии известны.

Вытянутые сфероидальные координаты. Сферические координаты образованы вращением полярных координат вокруг оси; вытянутые сфероидальные координаты образуются при вращении эллиптических координат, описанных на стр. 185, вокруг большой оси эллипса. Предположим, что фокусы сфероида расположены в точках $x=y=0$, $z = \pm \frac{1}{2} a$, тогда расстояния от точки (x, y, z) до этих фокусов равны

$$r_1 = \sqrt{\left(z + \frac{1}{2} a\right)^2 + x^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{\left(z - \frac{1}{2} a\right)^2 + x^2 + y^2}.$$

Система вытянутых сфероидальных координат ξ, η, φ определяется следующим образом:

$$\xi = (r_1 + r_2)/a, \quad \eta = (r_1 - r_2)/a, \quad \varphi = \arctg(y/x),$$

$$z = \frac{1}{2} a \xi \eta, \quad x = \frac{1}{2} a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi,$$

$$y = \frac{1}{2} a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi,$$

$$h_{\xi} = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_{\eta} = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_{\varphi} = \frac{1}{2} a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)},$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{4}{a^2 (\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \frac{\xi^2 - 1 + 1 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\}, \quad (10.3.46)$$

где ξ изменяется от 1 до ∞ , η изменяется от -1 до $+1$, а φ от 0 до 2π . Поверхность $\xi = \text{const}$ является вытянутым сфероидом с фокусным расстоянием a , большой осью $\frac{1}{2} \xi a$ и малой осью $\frac{1}{2} a \sqrt{\xi^2 - 1}$. Поверхность $\eta = \text{const}$ является двуполостным гиперболоидом вращения с фокусами в точках $z = \pm \frac{1}{2} a$, образующая асимптотического конуса которого составляет с осью z угол $\vartheta = \arccos \eta$. Поверхность $\varphi = \text{const}$ является плоскостью, проходящей через ось z и образующей угол φ с плоскостью x, z .

Положив $\psi = \Phi(\varphi) X(\xi) H(\eta)$, мы после разделения переменных в уравнении Лапласа получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi,$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dH}{d\eta} \right] + n(n+1) H - \frac{m^2}{1 - \eta^2} H = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right] + n(n+1) X - \frac{m^2}{1 - \xi^2} X = 0.$$

Допустимыми решениями первого уравнения для граничных условий, периодических по φ , будут $\cos(m\varphi)$, $\sin(m\varphi)$, где m есть нуль или целое число.

Решениями второго и третьего уравнений служат сферические гармоники P_n^m , а их вторыми решениями являются функции Q_n^m (см. стр. 308). Во втором уравнении переменная η изменяется от значения -1 (на отрицательной части оси z) до значения $+1$ (на положительной части оси z). Для того чтобы H была конечной в этом промежутке изменения η , постоянная разделения n должна быть нулем или целым положительным числом. При этом H пропорциональна присоединенной функции Лежандра первого рода $P_n^m(\eta)$. Переменная ξ изменяется от $+1$ (вдоль линии, соединяющей фокусы) до бесконечности. Для большинства значений m и n не существует решений, остающихся конечными во всем этом промежутке изменения ξ , поэтому приходится представлять решение такими комбинациями $P_n^m(\xi)$ и $Q_n^m(\xi)$, которые остаются конечными внутри области изменения ξ , определенной условиями задачи.

Например, если на вытянутой сфероидальной поверхности $\xi = \xi_0$ задан потенциал $\psi_0(\eta, \varphi)$, то вне этой поверхности распределение потенциала имеет вид

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)] P_n^m(\eta) \frac{Q_n^m(\xi)}{Q_n^m(\xi_0)}, \quad (10.3.47)$$

где

$$\left. \begin{matrix} A_{mn} \\ B_{mn} \end{matrix} \right\} = \frac{\varepsilon_m}{4\pi} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \int_{-1}^1 \psi_0(\eta, \varphi) P_n^m(\eta) d\eta.$$

Если ψ_0 равен постоянной на этой поверхности, то предыдущая формула принимает вид

$$\psi = \frac{\psi_0}{Q_0(\xi_0)} Q_0(\xi) = \psi_0 \frac{\ln [(\xi+1)/(\xi-1)]}{\ln [(\xi_0+1)/(\xi_0-1)]}.$$

На больших расстояниях от сфероида $\xi = \xi_0$ координата ξ стремится к $2r/a$, где r — расстояние от центра сфероида. Поэтому выражение потенциала на большом расстоянии от вытянутого сфероида $\xi = \xi_0$, имеющего постоянный потенциал ψ_0 , имеет вид

$$\psi \simeq \frac{\psi_0}{\ln [(\xi_0+1)/(\xi_0-1)]} \frac{a}{r}, \quad r \gg a,$$

т. е. потенциал вдали от сфероида обратно пропорционален расстоянию от его центра. При помощи этого выражения можно вычислить заряд на сфероиде, а следовательно, и его емкость.

Пусть заземленный проводящий сфероид $\xi = \xi_0$ находится в однородном поле, вектор напряженности которого на большом расстоянии от сфероида имеет величину E , лежит в плоскости x, z и образует угол θ с направлением оси z . Тогда в выражение потенциала должны входить слабые, соответствующие однородному полю,

$$\begin{aligned} -Ex \sin \theta - Ez \cos \theta &= -\frac{1}{2} aE [\xi \eta \cos \theta + \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi \sin \theta] = \\ &= -\frac{1}{2} aE [P_1^0(\xi) P_1^0(\eta) \cos \theta + iP_1^1(\xi) P_1^1(\eta) \cos \varphi \sin \theta], \end{aligned}$$

а также исчезающее на бесконечности решение, за счет которого суммарный потенциал равен 0 при $\xi = \xi_0$. Окончательное выражение потенциала

имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2} aE \left\{ \cos \theta P_1^0(\eta) \left[\frac{P_1^0(\xi_0)}{Q_1^0(\xi_0)} Q_1^0(\xi) - P_1^0(\xi) \right] + \right. \\ \left. + i \sin \theta \cos \varphi P_1^1(\eta) \left[\frac{P_1^1(\xi_0)}{Q_1^1(\xi_0)} Q_1^1(\xi) - P_1^1(\xi) \right] \right\}. \quad (10.3.48)$$

Мы должны были ввести множитель i , так как нами выбрано такое определение сферической гармоник

$$P_n^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} T_{n-m}^m(z),$$

что она остается вещественной для $z < 1$ (эти гармоники обычно называют *сферическими гармониками Феррера*). Для переменной ξ , которая всегда больше единицы, нам, быть может, следовало бы дать новое определение этой функции в виде

$$P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} T_{n-m}^m(z) = e^{im\pi/2} P_n^m(z)$$

(эти функции обычно называют *сферическими гармониками Гобсона*), с тем чтобы избавиться от мнимых величин в формулах. Однако, вместо того чтобы вводить новые символы, мы можем просто запомнить, что

$$i^m P_n^m(\xi) = (\xi^2 - 1)^{m/2} T_{n-m}^m(\xi)$$

есть вещественная функция от ξ для $\xi > 1$.

Вторые решения

$$Q_n^m(\xi) = (-1)^m (\xi^2 - 1)^{m/2} V_{n-m}^m(\xi)$$

(см. определение V на стр. 565, 566 тома I) тоже можно определить так, чтобы они были вещественными при $\xi > 1$, так как они используются только для координаты ξ .

Плотность распределения заряда, индуцированного на поверхности сфероида этим полем, равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} = -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}$$

Так как в знаменателе имеется множитель $\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}$, поверхностная плотность σ стремится стать у обоих вершин сфероида ($\eta = \pm 1$) наибольшей.

Представляет интерес задача о полусфереоиде ($\xi = \xi_0$ при $0 \leq \eta \leq 1$), потенциал которого по сравнению с заземленной плоскостью ($\eta = 0$ для $\xi_0 \leq \xi$) равняется V_0 . В пределе, когда значение ξ_0 стремится к единице, этой задаче соответствует случай вертикальной антенны или трубы зонда, погруженной в грунт для того, чтобы служить источником (или стоком) тока или фильтрующихся вод. Чтобы удовлетворить граничным условиям при $\eta = 0$, мы должны использовать зональные гармоники нечетного порядка, имеющие узлы при $\eta = 0$. Выпишем ряд

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_{2n+1}(\eta) \frac{Q_{2n+1}(\xi)}{Q_{2n+1}(\xi_0)},$$

где функции P_{2n+1} образуют полное семейство на отрезке $0 \leq \eta \leq 1$. На основании таблицы, приведенной в конце этой главы, можно заключить, что для выполнения условия $\psi = V_0$ при $\xi = \xi_0$ и положительных

значениях η коэффициенты ряда должны определяться по формуле

$$A_n = (4n+3) \int_0^1 V_0 P_{2n+1}(\eta) d\eta = V_0 [P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)] = \\ = \frac{(-1)^n (2n)! (4n+3)}{2^{2n+1} n! (n+1)!} V_0.$$

Следовательно,

$$\psi = V_0 \left\{ \frac{3}{2} P_1(\eta) \frac{Q_1(\xi)}{Q_1(\xi_0)} - \frac{1.7}{2.4} P_3(\eta) \frac{Q_3(\xi)}{Q_3(\xi_0)} + \right. \\ \left. + \frac{1.3 \cdot 11}{2.4 \cdot 6} P_5(\eta) \frac{Q_5(\xi)}{Q_5(\xi_0)} - \dots \right\}. \quad (10.3.49)$$

На больших расстояниях основным является первый член, и

$$Q_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi \ln \left(\frac{\xi+1}{\xi-1} \right) - 1 \simeq \frac{1}{3\xi^2}, \quad \xi \gg 1,$$

так что

$$\psi \simeq \frac{1}{8} V_0 \frac{a^2}{r^2 Q_1(\xi_0)} \cos \vartheta, \quad r \gg a,$$

где r — радиус-вектор, идущий от начала координат к точке, где измеряется ψ , а ϑ — угол между r и осью полусфереоида.

Если полусфереоид весьма длинный и узкий, то его высота над заземленной плоскостью приблизительно равна $\frac{1}{2}a$, т. е. половине фокусного расстояния. Если его радиус у земли ($\eta=0$) равен ρ , то $\rho = \frac{1}{2}a \sqrt{\xi_0^2 - 1}$, или $\xi_0^2 = 1 + (2\rho/a)^2$. Так как

$$Q_n(\xi) \simeq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\xi+1}{\xi-1} \right) \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\xi} Q_n(\xi) \simeq \frac{-1}{\xi^2 - 1},$$

когда ξ приближается к единице, то на поверхности полусфереоида потенциал и плотность заряда соответственно равны

$$\psi = V_0 \left[\frac{3}{2} P_1(\eta) - \frac{1.7}{2.4} P_3(\eta) + \dots \right] = V_0, \quad \eta > 0, \\ \sigma = -\frac{2/a}{4\pi} \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0} \simeq \\ \simeq \frac{1}{2\pi a} \frac{2\rho}{a} \frac{V_0}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{(a/2\rho)^2}{\ln(a/\rho)} \left[\frac{3}{2} P_1(\eta) - \frac{1.7}{2.4} P_3(\eta) + \dots \right] \simeq \\ \simeq \frac{1}{4\pi\rho} \frac{V_0}{\ln(a/\rho)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad \text{когда} \quad \xi_0^2 = 1 + \left(\frac{2\rho}{a} \right)^2 \rightarrow 1, \quad \eta > 0.$$

Полный заряд на поверхности полусфереоида в этом предельном случае равен

$$Q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sigma \frac{a^2}{4} \sqrt{(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta^2)} d\eta \simeq \frac{V_0 a}{4 \ln(a/\rho)}, \\ \xi_0^2 = 1 + \left(\frac{2\rho}{a} \right)^2 \rightarrow 1.$$

Следовательно, емкость этого длинного полусфереоида по отношению к заземленной плоскости равна $a/4 \ln(a/\rho)$, что равно емкости цилиндра радиуса ρ высотой $\frac{1}{2}a$ по отношению к заземленному концентрическому цилиндру радиуса a (см. стр. 174).

Интегральные представления решений в сфероидальных координатах. Выражение для X в вытянутых сфероидальных координатах имеет вид

$$X = z + i(x \cos u + y \sin u) = \frac{1}{2} a [\eta \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)} \cos(u - \varphi)].$$

Возвращаясь к формуле (10.3.39), видим, что

$$P_n [\eta \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)} \cos(\theta)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(\theta - w)]^n}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cos(w)]^{n+1}} dw,$$

а также что

$$\begin{aligned} P_n^m(\eta) &= \frac{n!}{2\pi i^m (n-m)!} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mu) du}{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(u)]^{n+1}} = \\ &= \frac{i^m (n+m)!}{2\pi n!} \int_0^{2\pi} \cos(mu) [\eta^2 + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos u]^n du. \end{aligned}$$

Отсюда легко показать, что интегральное представление для решений первого рода имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_n \left(\frac{2X}{a} \right) \frac{\cos(mu)}{\sin(m\varphi)} du &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mu) du}{\sin(m\varphi)} \int_0^{2\pi} \frac{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(u - \varphi - w)]^n}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cos(w)]^{n+1}} dw = \\ &= 2\pi i^{-m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{m/2} T_{n-m}^m(\xi) T_{n-m}^m(\eta) = \\ &= 2\pi \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} P_n^m(\xi) P_n^m(\eta). \end{aligned} \quad (10.3.50)$$

Методами, аналогичными использованным при выводе формул (10.3.34) и (10.3.39), мы можем также получить

$$Q_n^m(\xi) = \frac{i n!}{(n-m)!} \int_0^{i\infty} \frac{\cos(mu) du}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cos(u)]^{n+1}}$$

и

$$Q_n [\xi \eta - \sqrt{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)} \cos \theta] = i \int_0^{i\infty} \frac{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(\theta - w)]^n}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cos(w)]^{n+1}} dw.$$

Поэтому интегральное представление для решений второго рода имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} Q_n \left(\frac{2X}{a} \right) \frac{\cos(mu)}{\sin(m\varphi)} du &= 2\pi \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} P_n^m(\eta) Q_n^m(\xi) = \\ &= 2\pi (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{m/2} T_{n-m}^m(\eta) V_{n-m}^m(\xi). \end{aligned} \quad (10.3.51)$$

Эти интегральные представления дают возможность вычислить распределение потенциала вне вытянутого сфероида с фокусным расстоянием a , большой полуосью $\frac{1}{2} a \xi_0$ и малой полуосью $\frac{1}{2} a \sqrt{\xi_0^2 - 1} = \rho$, имею-

щего потенциал V_0 и помещенного внутрь имеющей тот же центр полой заземленной сферы с внутренним диаметром $2c$, бóльшим чем $a\xi_0$. В качестве «нулевого» приближения для потенциала вблизи сфероида имеем

$$V_0 \frac{Q_0(\xi)}{Q_0(\xi_0)} = \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\sqrt{1+(2\rho/a)^2+1}}{\sqrt{1+(2\rho/a)^2-1}} \right]} \ln \left[\frac{\xi+1}{\xi-1} \right] = \frac{V_0}{2\pi Q_0(\xi_0)} \int_0^{2\pi} Q_0\left(\frac{2X}{a}\right) du.$$

Но для $|X|$, бóльших чем a , имеем

$$Q_0\left(\frac{2X}{a}\right) = \frac{a}{2X} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2X}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{2X}\right)^4 + \dots \right].$$

Следовательно, используя формулу (10.3.35), мы можем записать нулевое приближение для r , бóльших чем $\frac{1}{2}a$, в виде

$$V_0 \frac{Q_0(\xi)}{Q_0(\xi_0)} = \frac{V_0}{Q_0(\xi_0)} \left[\frac{a}{2r} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2r}\right)^3 P_2(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{2r}\right)^5 P_4(\cos \vartheta) + \dots \right],$$

где r , ϑ и φ являются сферическими координатами с центром, лежащим в центре сфероида (и сферы).

На внутренней поверхности сферы ($r=c$) потенциал должен равняться нулю. С точностью до членов второго порядка относительно величины $a/2c$, которую мы предполагаем меньшей чем единица, мы можем добиться этого, вычитая решение уравнения Лапласа

$$\frac{V_0}{Q_0(\xi_0)} \left[\frac{a}{2c} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2c}\right)^3 \left(\frac{r}{c}\right)^2 P_2(\cos \vartheta) \right],$$

которое взаимно уничтожается с первыми двумя членами нулевого приближения при $r=c$. Мы могли бы также заменить постоянную $V_0/Q_0(\xi_0)$ неопределенным множителем A , который затем можно было бы подобрать так, чтобы поверхность сфероида имела потенциал V_0 .

Следовательно, если $a/2c < \frac{1}{2}$, то довольно хорошим приближением к точному решению вблизи сферической поверхности является выражение

$$\psi \simeq A \left\{ \left[\frac{a}{2r} - \frac{a}{2c} \right] + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{a}{2r}\right)^3 - \left(\frac{a}{2c}\right)^3 \left(\frac{r}{c}\right)^2 \right] P_2(\cos \vartheta) \right\},$$

равное нулю при $r=c$ и постоянное с точностью до членов второго порядка относительно $a/2c$ при $\xi = \xi_0$.

Вблизи сфероидальной поверхности нам нужно вновь вернуться к сфероидальным решениям. Используя формулу (10.3.34), мы получим

$$r^2 P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X^2 du, \text{ а в силу (6.3.40)}$$

$$\left(\frac{2X}{a}\right)^2 = \frac{2}{3} P_2\left(\frac{2X}{a}\right) + \frac{1}{3} P_0\left(\frac{2X}{a}\right),$$

и мы можем выразить слагаемое $r^2 P_2$ через сфероидальные решения при помощи формулы (10.3.50):

$$\begin{aligned} r^2 P_2(\cos \vartheta) &= \frac{a^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} P_2\left(\frac{2X}{a}\right) + \frac{1}{3} P_0\left(\frac{2X}{a}\right) \right] du = \\ &= \left[\frac{2}{3} P_2(\eta) P_2(\xi) + \frac{1}{3} \right] \left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Поэтому потенциал вблизи сфероида приближенно равен

$$\psi \simeq A \left\{ Q_0(\xi) - \frac{a}{2c} - \left(\frac{a}{2c} \right)^5 \left[\frac{2}{3} P_2(\eta) P_2(\xi) + \frac{1}{3} \right] \right\}.$$

Это выражение при $\xi = \xi_0$ отличается от постоянной на величину пятого порядка относительно малой величины $a/2c$. Для того чтобы ψ совпадало с V_0 при $\xi = \xi_0$ с точностью до членов четвертого порядка, мы выберем

$$A = V_0 / [Q_0(\xi_0) - a/2c].$$

Следовательно, если диаметр сфероида в его среднем сечении (равный 2ρ) значительно меньше его длины, приближенно равной a , и если a меньше радиуса полый заземленной сферы, то потенциал между сфероидом и сферой с точностью до членов четвертого порядка относительно $a/2c$ равен

$$\psi \simeq V_0 \frac{\ln [(\xi-1)/(\xi+1)] - a/c}{\ln [(\xi_0-1)/(\xi_0+1)] - a/c}, \quad \xi_0^2 = 1 + (2\rho/a)^2, \quad (10.3.52)$$

$$\psi \simeq \frac{2V_0}{\ln [(\xi_0+1)/(\xi_0-1)] - a/c} \left\{ \frac{a}{2r} - \frac{a}{2c} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{a}{2r} \right)^3 - \left(\frac{a}{2c} \right)^3 \left(\frac{r}{c} \right)^2 \right] P_2(\cos \vartheta) \right\}.$$

Полный заряд на внутренней поверхности полый сферы [плотность равна $-(1/4\pi)(\partial\psi/\partial r)$ при $r=c$] оказывается равным

$$Q \simeq \frac{aV_0}{\ln [(\xi_0+1)/(\xi_0-1)] - a/c} \simeq \frac{aV_0}{2 \ln(a/\rho) + (\rho/a)^2 - a/c}, \quad \rho \ll a.$$

Емкость этой системы, очевидно, равна Q/V_0 .

Функция Грина для вытянутого сфероида. При помощи выражения (6.3.44) можно получить разложение, удобное для представления функции Грина. Используя формулу (10.3.8), получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{X - X_0} = \frac{1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} P_n\left(\frac{2X_0}{a}\right) Q_n\left(\frac{2X}{a}\right) du, \quad r > r_0.$$

Каждый член этого ряда в свою очередь является рядом Фурье по $\cos(\varphi - \varphi_0)$. При вычислении коэффициентов этого разложения мы можем воспользоваться равенствами (10.3.50) и (10.3.51). Окончательно получим

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m i^m \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) \cdot \begin{cases} P_n^m(\xi_0) Q_n^m(\xi), & \xi > \xi_0, \\ P_n^m(\xi) Q_n^m(\xi_0), & \xi < \xi_0. \end{cases} \quad (10.3.53)$$

Потенциал, создаваемый зарядом Q , находящимся в точке $(\xi_0, \eta_0, \varphi_0)$ вне заземленного проводящего сфероида $\xi = \xi_1$ равен

$$\phi = \frac{2Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m i^m \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) \cdot \left[\frac{P_n^m(\xi_0) Q_n^m(\xi)}{P_n^m(\xi) Q_n^m(\xi_0)} - \frac{Q_n^m(\xi_0)}{Q_n^m(\xi_1)} P_n^m(\xi_1) Q_n^m(\xi) \right], \quad (10.3.54)$$

где верхний член в скобках используется, когда $\xi > \xi_0$, а нижний когда $\xi < \xi_0$.

Плотность заряда, индуцированного на сфероиде, равна

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{-1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\xi_1^2 - 1}{\xi_1^2 - \eta^2}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \psi \right]_{\xi=\xi_1} = \\ &= -\frac{Q}{2\pi a} \sqrt{\frac{\xi_1^2 - 1}{\xi_1^2 - \eta^2}} \sum_{n,m} (2n+1) i^m \varepsilon_m \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ &\quad \times P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) [Q_n^m(\xi_0)/Q_n^m(\xi_1)] \Delta(P_n^m, Q_n^m) = \\ &= \frac{Q}{\pi a^2 V(\xi_1^2 - 1)(\xi_1^2 - \eta^2)} \sum_{n,m} (2n+1) (-1)^m \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\ &\quad \times P_n^m(\eta_0) \frac{Q_n^m(\xi_0)}{Q_n^m(\xi_1)} P_n^m(\eta) \cos [m(\varphi - \varphi_0)],\end{aligned}$$

где Δ — определитель Вронского функций P и Q , который легко привести к простому виду. Интеграл от $\sigma h_\eta h_\varphi d\eta d\varphi$ по поверхности $\xi = \xi_1$, очевидно, в точности равен величине Q .

Сплюснутые сфероиды. Вращая софокусные эллиптические координаты вокруг их малой оси, мы получим сплюснутые сфероидальные координаты:

$$\begin{aligned}z &= a\xi\eta, \quad x = a\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \\ y &= a\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \\ h_\xi &= a\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + 1}}, \quad h_\eta = a\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}}, \\ h_\varphi &= a\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)},\end{aligned}\tag{10.3.55}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \frac{\xi^2 + 1 - 1 + \eta^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\},$$

где ξ изменяется от нуля до бесконечности, а η от -1 до $+1$. Поверхностью $\xi = 0$ является диск радиуса a с центром в начале координат, расположенный в плоскости x, y . Поверхность $\eta = 1$ есть положительная полуось z , поверхность $\eta = -1$ — отрицательная полуось z , а поверхность $\eta = 0$ — плоскость x, y , за исключением ее части, расположенной внутри круга радиуса a с центром в начале (эта часть есть поверхность $\xi = 0$). Поверхности $\xi = \text{const}$ являются сплюснутыми сфероидами, у которых длина оси вращения равна $2\xi a$, а радиус в экваториальной плоскости равен $a\sqrt{\xi^2 + 1}$. Поверхность $\eta = \text{const}$ является однополостным гиперболоидом вращения, осью которого является ось z , а образующая асимптотического конуса наклонена под углом $\arccos \eta$ к этой оси.

После разделения переменных уравнения относительно φ и η получаются такими же, что и для вытянутых сфероидальных координат, причем сомножители, на которые распадается решение, равны

$$\sin(m\varphi), \quad \cos(m\varphi) \text{ и } P_n^m(\eta),$$

где m и n — целые положительные числа (или нуль). Уравнению для сомножителя, зависящего от ξ , удовлетворяют функции

$$P_n^m(i\xi) \text{ и } Q_n^m(i\xi).$$

Если диск радиуса a ($\xi = 0$) имеет потенциал V_0 по сравнению с бесконечностью, то потенциал соответствующего поля равен

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{V_0}{Q_0(0)} Q_0(i\xi) = \frac{V_0}{\ln(-1)} \ln\left(\frac{i\xi + 1}{i\xi - 1}\right) = \\ &= \frac{iV_0}{\pi} \frac{2}{i} \arctg\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{2V_0}{\pi} \arctg\left(\frac{1}{\xi}\right).\end{aligned}\tag{10.3.56}$$

Если ξ очень велико, то она становится приближенно равной r/a , где r — расстояние от центра диска. Поэтому асимптотическим выражением этого потенциала является $2V_0 a/\pi r$, откуда явствует, что полный заряд диска радиуса a равен $2V_0 a/\pi$, а емкость его в точности равна $2a/\pi$.

Потенциал скоростей установившегося потока, направленного перпендикулярно к оси y и под углом θ к оси z , равен

$$\begin{aligned}\psi &= -v_0(z \cos \theta + x \sin \theta) = \\ &= -av_0[\xi \eta \cos \theta + V(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2) \cos \varphi \sin \theta] = \\ &= iav_0[\cos \theta P_1^0(\eta) P_1^0(i\xi) + i \sin \theta \cos \varphi P_1^1(\eta) P_1^1(i\xi)].\end{aligned}$$

Если теперь поместить в этот поток сплюснутый сфероид $\xi = \xi_0$ и потребовать, чтобы поток на его границе был направлен по касательной к поверхности, то к первоначальному потенциалу следует прибавить члены вида

$$AP_1^0(\eta) Q_1^0(i\xi) + BP_1^1(\eta) Q_1^1(i\xi);$$

A и B подбираются так, чтобы производная от всей суммы по ξ равнялась нулю при $\xi = \xi_0$. Для случая плоского диска, $\xi_0 = 0$, мы имеем $A = 2av_0/\pi$ и $B = 0$, откуда

$$\begin{aligned}\psi &= -av_0 \left\{ \eta \cos \theta \left[\xi + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \xi \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\xi} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cos \varphi V(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2) \right\}. \quad (10.3.57)\end{aligned}$$

На поверхности этого диска в точке $(\xi = 0, \eta, \varphi)$ компоненты скорости равны соответственно

$$v_\eta = \frac{2v_0}{\pi|\eta|} V(1 - \eta^2) \cos \theta - v_0 \frac{|\eta|}{\eta} \sin \theta \cos \varphi, \quad v_\varphi = -v_0 \sin \theta \sin \varphi,$$

а избыточное давление, появляющееся за счет движения жидкости, равно

$$-\frac{1}{2} \rho v^2 = -\frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[\frac{4}{\pi^2} \cos^2 \theta \frac{1 - \eta^2}{\eta^2} + \sin^2 \theta - \frac{4}{\pi \eta} V(1 - \eta^2) \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \right].$$

Оно, очевидно, равно отрицательной бесконечности у острого края диска ($\eta = 0$). Не удивительно также, что если $\theta = 90^\circ$, т. е. если поток параллелен плоскости тонкого диска, то избыточное давление в точности равно $-\frac{1}{2} \rho v_0^2$, т. е. той же величине, что и в случае отсутствия диска. Мы замечаем также, что скорость потока равна нулю на поверхности диска ($\xi = 0$) в точке

$$\varphi = 0, \quad \eta = \sqrt{1 + (\pi/4)^2 \operatorname{tg}^2 \theta} - (\pi/4) \operatorname{tg} \theta,$$

соответствующей

$$z = y = 0, \quad x = a \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \theta \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta \right]^{-1/2}$$

на стороне диска, обращенной к положительной полуоси z , и в точке

$$\varphi = \pi, \quad \eta = -[\sqrt{1 + (\pi/4)^2 \operatorname{tg}^2 \theta} - (\pi/4) \operatorname{tg} \theta],$$

соответствующей

$$z = y = 0, \quad x = -a \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \theta \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta \right]^{-1/2}$$

на отрицательной стороне диска.

Мы пока не станем рассматривать трехмерный завихренный поток и потому не будем вычислять циркуляцию вокруг диска, компенсирующую бесконечную скорость у заднего края в смысле стр. 190. Следовательно, мы не можем обсуждать также вопрос о результирующей силе, действующей на диск.

Поток через отверстие. Другая проблема касается установившегося бизвихревого потока через круглое отверстие радиуса a . Границей здесь служит поверхность $\eta = 0$. Решение должно быть непрерывным при $\xi = 0$. Благодаря наличию осевой симметрии мы пользуемся только решениями, соответствующими $n = 0$. Множитель, зависящий от η , в точности равен $P_0(\eta) = 1$, в то время как множитель, зависящий от ξ , является комбинацией функций $P_0(i\xi)$ и $Q_0(i\xi)$. Тогда решение равно

$$\psi = \begin{cases} -\frac{1}{4a} \dot{Q} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{1}{\xi} \right) \right], & 1 \geq \eta > 0, \\ \frac{1}{4a} \dot{Q} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{1}{\xi} \right) \right], & 0 > \eta \geq -1. \end{cases} \quad (10.3.58)$$

Эта функция равна нулю при $\xi = 0$, а производные ее непрерывны при переходе через эту поверхность. На больших расстояниях от отверстия $\xi \rightarrow r/a$ и потенциал становится равным

$$\psi \simeq \begin{cases} -\dot{Q}/4a + \dot{Q}/2\pi r, & \eta > 0, \\ +\dot{Q}/4a - \dot{Q}/2\pi r, & \eta < 0. \end{cases}$$

Скорость всюду перпендикулярна поверхности $\xi = \text{const}$ и равна

$$v_\xi = \begin{cases} \frac{\dot{Q}/2\pi a^2}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + 1)}}, & \eta > 0, \\ \frac{-\dot{Q}/2\pi a^2}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + 1)}}, & \eta < 0. \end{cases}$$

Количество жидкости в кубических сантиметрах, притекающей за секунду к отверстию (оно равно количеству жидкости, вытекающей из отверстия), равно

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 v_\xi h_\eta d\eta = \iint v_\xi dS = \dot{Q}.$$

Этим и объясняется, очевидно, наш выбор постоянной $\dot{Q}$ в формуле (10.3.58).

Если ξ_0 выбрано достаточно большим, то кинетическая энергия жидкости вне поверхности $\xi = \xi_0$ ничтожно мала, и чтобы вычислить полную кинетическую энергию жидкости, достаточно взять интеграл по объему, ограниченному этой поверхностью, от функции $\frac{1}{2} \rho v^2$: $T = \frac{1}{2} \rho \iiint |\text{grad } \psi|^2 dv$. Его можно вычислить непосредственно, но можно использовать и теорему Грина и заменить его поверхностным интегралом по поверхности S , которая является поверхностью $\xi = \xi_0$ для $\eta > 0$, и по поверхности S' , которая является поверхностью $\xi = \xi_0$ для $\eta < 0$. Таким образом, имеем

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[\iint_S \psi \text{grad } \psi dS' - \iint_{S'} \psi \text{grad } \psi dS \right].$$

Так как поверхности S и S' достаточно удалены от отверстия, то потенциал ψ практически постоянен на этих поверхностях, и кинетическая энергия в силу (10.3.58) оказывается равной

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[\psi_S \iint v_\xi dS - \psi_{S'} \iint v_\xi dS' \right] = \frac{1}{2} \rho (\psi_{S'} - \psi_S) \dot{Q} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2a} \dot{Q}^2. \quad (10.3.59)$$

Потенциальная энергия потока, протекающего через отверстие, в случае несжимаемой жидкости может быть выражена при помощи разности давлений ΔP на поверхностях S и S' . Если весь объем dQ см³ жидкости прогоняется через отверстие с преодолением этой разности давлений, то изменение потенциальной энергии равно

$$dV = -\Delta P dQ.$$

Используя уравнения Лагранжа (3.2.4), мы получим для ускорения потока выражение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) = \frac{\rho}{2a} \ddot{Q} = -\frac{\partial V}{\partial Q} = \Delta P.$$

Отношение падения давления в отверстии к ускорению потока, проходящего через отверстие $\rho/2a$, может быть названо *коэффициентом инерции* (inertance) отверстия. Эта величина связана с эффективной массой той «пробки» жидкости внутри отверстия и вблизи от него, которая получает ускорение за счет падения давления.

Так как $\dot{Q}$ есть полный поток, то $Q/\pi a^2$ есть выраженное в сантиметрах среднее перемещение жидкости через отверстие, а $\pi a^2 \Delta P$ есть выраженная в динах средняя сила, действующая в отверстии. Поэтому уравнение

$$\frac{1}{2} \pi^2 a^3 \rho \frac{\ddot{Q}}{\pi a^2} = \pi a^2 \Delta P$$

аналогично уравнению Ньютона, а величина

$$M = \frac{1}{2} \pi^2 a^3 \rho \quad (10.3.60)$$

является эффективной массой той «пробки» жидкости, которая получает ускорение, когда мы направляем поток через круглое отверстие в плоскости. Это выражение окажется полезным, когда мы в следующей главе начнем изучать прохождение волн через отверстие.

Интегральные представления и функции Грина. Нетрудно видоизменить формулы (10.3.50) и (10.3.51) так, чтобы получить соответствующие выражения для сплюснутых сфероидальных координат. Новое выражение для X имеет вид

$$X = a [\xi \eta - \sqrt{(\xi^2 + 1)(\eta^2 - 1)} \cos(u - \varphi)],$$

а интегральные представления таковы:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_n \left(\frac{X}{a} \right) \frac{\cos(mu)}{\sin(mu)} du &= \\ &= \frac{i^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mu)}{\sin(mu)} du \int_0^{2\pi} \frac{[\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \cos(u - \varphi - w)]^n}{[i\xi + \sqrt{-\xi^2 - 1} \cos(w)]^{n+1}} dw = \\ &= 2\pi i^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} [(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)]^{m/2} T_{n-m}^m(i\xi) T_{n-m}^m(\eta) = \\ &= 2\pi i^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} P_n^m(\eta) P_n^m(i\xi) \end{aligned} \quad (10.3.61)$$

и для второго решения

$$\int_0^{2\pi} Q_n \left(\frac{X}{a} \right) \frac{\cos(mu)}{\sin(mu)} du = 2\pi i^{n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} P_n^m(\eta) Q_n^m(i\xi). \quad (10.3.62)$$

Подобным же образом сравнивая наш результат с выражением (10.3.54), мы получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m i^{m+1} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) \cdot \begin{cases} P_n^m(i\xi_0) Q_n^m(i\xi), & \xi > \xi_0, \\ P_n^m(i\xi) Q_n^m(i\xi_0), & \xi_0 > \xi, \end{cases} \quad (10.3.63) \end{aligned}$$

при помощи которого можно решать уравнение Пуассона в этих координатах.

Параболические координаты. Система координат, образованная вращением двумерных параболических координат вокруг их оси, также называется параболической:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2), \quad x = \lambda\mu \cos \varphi, \quad y = \lambda\mu \sin \varphi, \quad r = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2), \\ h_\lambda = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = h_\mu, \quad h_\varphi = \lambda\mu, \quad (10.3.64) \\ \nabla^2 \psi = \frac{1}{\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)} \left[\mu \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda\mu} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) \right], \end{aligned}$$

где φ изменяется от 0 до 2π , а λ и μ от 0 до ∞ . Разделяя переменные, $\psi = L(\lambda) M(\mu) \Phi(\varphi)$, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{dL}{d\lambda} \right) - \frac{m^2}{\lambda^2} L = -k^2 L, \\ \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\mu} \left(\mu \frac{dM}{d\mu} \right) - \frac{m^2}{\mu^2} M = k^2 M. \end{aligned}$$

Если φ может изменяться от 0 до 2π , то m должно быть нулем или целым числом, причем Φ является либо синусом, либо косинусом $m\varphi$. Уравнения для L и M удовлетворяют функции Бесселя m -го порядка (см. стр. 579 тома I). При этом уравнению для L удовлетворяют функции Бесселя вещественного аргумента, а уравнению для M — функции Бесселя мнимого аргумента. Эти функции

$$\begin{aligned} I_m(z) = (-i)^m J_m(iz) \simeq e^z / \sqrt{2\pi z}, \\ K_m(z) = (\pi/2) (i)^{m+1} H_m(iz) \simeq (\sqrt{\pi/2z}) e^{-z} \end{aligned}$$

приведены в таблице в конце этой главы и там же указаны некоторые их свойства. Соотношения между этим функциями и обычными функциями Бесселя аналогичны соотношениям между гиперболическими функциями $\text{sh}(z)$, e^{-z} и тригонометрическими функциями $\sin(z)$, e^{iz} .

Типичным решением уравнения Лапласа в параболических координатах является выражение

$$\frac{\cos}{\sin} (m\varphi) J_m(k\lambda) [a_m(k) I_m(k\mu) + b_m(k) K_m(k\mu)],$$

где мы взяли гиперболические функции Бесселя от $k\mu$, так как мы предполагаем, что граничные условия заданы на поверхности $\mu = \text{const}$.

Например, если на поверхности $\mu = \mu_0$ задано осесимметричное распределение потенциала $\psi = \psi_0(\lambda)$ и если предполагается, что потенциал стремится к нулю при $\mu \rightarrow \infty$, то, используя интеграл Фурье — Бесселя, получим

$$\psi(\lambda, \mu) = \int_0^\infty J_0(k\lambda) [K_0(k\mu)/K_0(k\mu_0)] \left[\int_0^\infty \psi_0(u) J_0(ku) u du \right] k dk. \quad (10.3.65)$$

Если граничной поверхностью служит $\lambda = \lambda_0$, то мы просто должны поменять ролями μ и λ в этом выражении.

Если речь идет о внутренней задаче, то вместо функций K мы используем функции I . Функции I равны нулю при $z = 0$, за исключением функции I_0 , которая равна единице, а производная ее равна нулю. Например, если областью решения задачи является часть пространства, ограниченная двумя параболоидами $\mu = \mu_0$ и $\lambda = \lambda_0$ с граничными потенциалами соответственно $\psi_0(\lambda)$ на μ_0 и $\psi_1(\mu)$ на λ_0 , то, используя ряд Фурье — Бесселя (стр. 710 тома I), получим

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\lambda_0^2 J_1^2(\pi \beta_{0n})} \int_0^{\lambda_0} \psi_0(u) J_0\left(\frac{\pi \beta_{0n} u}{\lambda_0}\right) u du \right] J_0\left(\frac{\pi \beta_{0n} \lambda}{\lambda_0}\right) \frac{I_0(\pi \beta_{0n} \mu / \lambda_0)}{I_0(\pi \beta_{0n} \mu_0 / \lambda_0)} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\mu_0^2 J_1^2(\pi \beta_{0n})} \int_0^{\mu_0} \psi_1(w) J_0\left(\frac{\pi \beta_{0n} w}{\mu_0}\right) w dw \right] J_0\left(\frac{\pi \beta_{0n} \mu}{\mu_0}\right) \frac{I_0(\pi \beta_{0n} \lambda / \mu_0)}{I_0(\pi \beta_{0n} \lambda_0 / \mu_0)}. \end{aligned} \quad (10.3.66)$$

Получить для этих решений интегральное представление прямым путем нелегко. Так как координаты λ, μ имеют размерность квадратных корней из длины, а решениями служат функции Бесселя, то можно ожидать, что подинтегральное выражение в формуле (10.3.2) равно функции $J_n(k\sqrt{2X})$, умноженной на $\cos(mu)$ или $\sin(mu)$. Опуская длинный ряд второстепенных алгебраических преобразований, мы можем указать на следующие основные этапы вывода: используя соотношение (5.3.65), имеем

$$J_0(k\sqrt{2X}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{ik \cos v \sqrt{[\lambda \cos(u-\varphi) + i\mu]^2 + \lambda^2 \sin^2(u-\varphi)}\} dv.$$

Но

$$\sqrt{[\lambda \cos(u-\varphi) + i\mu]^2 + \lambda^2 \sin^2(u-\varphi)} \cos v = \lambda \cos(u-t-\varphi) + i\mu \cos t,$$

где

$$t = v + \arctg \left[\frac{\lambda \sin(u-\varphi)}{\lambda \cos(u-\varphi) + i\mu} \right].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} J_0(k\sqrt{2X}) \frac{\cos}{\sin}(mu) du &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda \cos \omega - k\mu \cos t} \frac{\cos}{\sin}[m(\omega + t + \varphi)] dt = \\ &= 2\pi i^{-m} \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) J_m(k\lambda) I_m(k\mu). \end{aligned} \quad (10.3.67)$$

Интегральное представление, содержащее функции $K_m(k\mu)$ вместо функций $I_m(k\mu)$, имеет под интегралом функцию $H_0(k\sqrt{2X})$ вместо функции $J_0(k\sqrt{2X})$.

Чтобы найти выражение для функции Грина, мы используем интеграл Фурье — Бесселя и приведенное на стр. 304 интегральное представление функции

$$K_0(-iz) = \frac{i\pi}{2} H_0(z).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{X-X_0} &= \int_0^\infty J_0(k\sqrt{2X}) k dk \int_0^\infty \frac{J_0(ky)}{y^2-2X_0} y dy = \\ &= 2\pi^2 i \int_0^\infty J_0(k\sqrt{2X}) H_0(k\sqrt{2X_0}) k dk \end{aligned}$$

и окончательно

$$\frac{1}{R} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^\infty J_m(k\lambda) J_m(k\lambda_0) I_m(k\mu) K_m(k\mu_0) k dk, \quad \mu_0 > \mu. \quad (10.3.68)$$

Более детальный разбор этой системы координат не является целесообразным.

Бисферические координаты. Большие применений находит система координат, получающаяся при вращении биполярной системы вокруг прямой, соединяющей полюсы:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad x = \frac{a \sin \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \\ y &= \frac{a \sin \eta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad h_\mu = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \\ h_\varphi &= \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad r = a \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \mu + \cos \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}}, \quad (10.3.69) \\ \nabla^2 \psi &= \frac{1}{h_\mu^3} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(h_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\mu \sin \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_\mu}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right], \end{aligned}$$

где μ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, η изменяется от 0 до π , а φ изменяется от 0 до 2π . Поверхность $\mu = \mu_0$ есть сфера с центром в точке $(z = a \operatorname{cth} \mu_0, x = y = 0)$ радиуса $a/|\operatorname{sh} \mu_0|$.

Полюсы получаются при $\mu = \pm \infty$ ($z = \pm a, x = y = 0$), а центральная плоскость $z = 0$ есть поверхность $\mu = 0$. Поверхность $\eta = \eta_0$ является поверхностью четвертого порядка, образованной вращением вокруг оси Oz дуги окружности с центром в точке $(z = 0, x = a \operatorname{ctg} \eta_0)$ радиуса $a \operatorname{cosec} \eta_0$, лежащей в первом и четвертом квадрантах плоскости x, z . Все эти поверхности, на которых η постоянна, проходят через оба полюса. Те из них, на которых $\eta < \frac{\pi}{2}$, имеют в каждом полюсе «впадину», те же, для которых $\eta > \frac{\pi}{2}$, имеют в полюсах точки заострения. Поверхность $\eta = 0$ состоит из частей оси z , где $|z| > a$, и бесконечно удаленной сферы, поверхность $\eta = \frac{1}{2}\pi$ есть сфера радиуса a с центром в начале координат, а поверхность $\eta = \pi$ есть та часть оси z , где $|z| < a$.

Как было указано на стр. 624 тома I, переменные в уравнении Лапласа разделяются только после замены $\psi = \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} F$. Тогда уравнение $\nabla^2 \psi = 0$ преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{4} F = 0,$$

допускающему разделение на три уравнения $[F = M(\mu) H(\eta) \Phi(\varphi)]$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -m^2 \Phi, \quad \frac{d^2 M}{d\mu^2} = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 M, \\ \frac{1}{\sin \eta} \frac{d}{d\eta} \left(\sin \eta \frac{dH}{d\eta} \right) - \frac{m^2 H}{\sin^2 \eta} &= -n(n+1) H. \end{aligned}$$

Мы уже знакомы со всеми этими уравнениями. Для того чтобы Φ была непрерывной, когда φ изменяется от 0 до 2π , m должно равняться нулю или целому числу. Для того чтобы H была конечной как при $\eta=0$, так и при $\eta=\pi$, n должно быть целым числом, не меньшим m . Поэтому типичными являются решения

$$e^{-(n+\frac{1}{2})\mu} P_n^m(\cos \eta) \cos(m\varphi) \quad \text{sh} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] P_n^m(\cos \eta) \sin(m\varphi) \text{ и т. д.,}$$

а типичными решениями исходного уравнения Лапласа служат функции

$$\sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta} e^{\pm(n+\frac{1}{2})\mu} P_n^m(\cos \eta) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\varphi) \text{ и т. д.}$$

Множитель $\sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta}$ порождает некоторые осложнения при необходимости удовлетворить граничным условиям. Например, для того чтобы вычислить потенциал вне сферы радиуса ρ с центром, находящимся на расстоянии b от начала [сфера $\mu = \mu_0 = \text{Ar ch}(b/\rho)$, если расстояние между полюсами $2a = 2\sqrt{b^2 - \rho^2}$], имеющей постоянный потенциал V_0 , мы должны найти коэффициенты ряда

$$\sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n e^{(n+\frac{1}{2})\mu} + B_n e^{-(n+\frac{1}{2})\mu}] P_n(\cos \eta),$$

который должен сводиться к постоянной V_0 при $\mu = \mu_0$. Другими словами, мы должны записать разложение для $(\text{ch} \mu - \cos \eta)^{-1/2}$ по зональным гармоникам от $\cos \eta$. Это можно осуществить, подставив $h = e^{-\mu}$ в разложение $(1 + h^2 - 2h \cos \eta)^{-1/2}$, фигурирующее в формуле (5.3.27). Окончательно получим

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu|} P_n(\cos \eta). \quad (10.3.70)$$

При помощи этого результата нетрудно показать, что распределение потенциала между имеющей потенциал V_0 сферой $\mu = \mu_0$ [радиус $\rho = a/\text{sh} \mu_0$, центр в точке $(x=y=0, z=b=a \text{cth} \mu_0)$] и заземленной плоскостью $\mu=0$ ($z=0$) представляется рядом

$$\psi = \sqrt{2} V_0 \sqrt{\text{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\mu_0}}{\text{sh} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu_0 \right]} \text{sh} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] P_n(\cos \eta). \quad (10.3.71)$$

Поверхностная плотность заряда на плоскости $\mu=0$ равна

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{1 - \cos \eta}{4\pi a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \\ &= -\frac{V_0}{\sqrt{8\pi a}} (1 - \cos \eta)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\mu_0}}{\text{sh} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu_0 \right]} P_n(\cos \eta), \end{aligned}$$

а полный заряд, индуцированный на этой плоскости, равен

$$\begin{aligned} \iint \frac{\sigma a^2 \sin \eta d\eta d\varphi}{(1 - \cos \eta)^2} &= \\ &= -\frac{a V_0}{\sqrt{8\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sum_n \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \cos \eta}} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\mu_0}}{\text{sh} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu_0 \right]} P_n(\cos \eta) \sin \eta d\eta. \end{aligned}$$

Вновь используя разложение (10.3.70), получим двойную сумму произведений зональных гармоник и, наконец, используя свойства ортогональности этих функций, найдем

$$Q = -aV_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{e^{(2n+1)\mu_0} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2V_0 \sqrt{b^2 - \rho^2}}{[b/\rho + \sqrt{(b/\rho)^2 - 1}]^{2n+1} - 1}. \quad (10.3.72)$$

При помощи этого равенства можно вычислить емкость сферы радиуса ρ по отношению к плоскости, удаленной от ее центра на расстояние b .

Дифференцируя выражение (10.3.70) по μ или по η , получим выражения для x , y , z :

$$|z| = \frac{a \operatorname{sh}' |\mu|}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} = \sqrt{2a} \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu|} P_n(\cos \eta), \quad (10.3.73)$$

$$\frac{x}{y} = \left\{ \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \sqrt{8a} \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu|} P_n^1(\cos \eta) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right.$$

Конечно, эти ряды не сходятся при $\mu=0$, что явствует из наличия в них $|\mu|$. Исходя из этих формул, можно показать, что потенциал вокруг двух заземленных проводящих сфер $\mu = \pm \mu_0$, помещенных в однородное поле с напряженностью E , направленной вдоль оси z , равен

$$\psi = -Ez + \sqrt{2Ea} \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) e^{-(n+\frac{1}{2})\mu_0}}{\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu_0} \operatorname{sh} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] P_n(\cos \eta).$$

Эта формула сохраняет силу как для положительных, так и для отрицательных значений μ , для которых $|\mu| \leq \mu_0$.

Функцию Грина в этой системе координат можно получить общим методом, указанным на стр. 825 тома I. Нормированные собственные функции от η и φ имеют вид

$$\sqrt{\varepsilon_m \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \eta) \frac{\cos}{\sin} (m\varphi) = \Psi_{nm}(\varphi, \eta).$$

Уравнение, подлежащее решению, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{4} F = \\ = -4\pi \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}}{a \sin \eta} \delta(\mu - \mu_0) \delta(\eta - \eta_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение ряд

$$F = \sum_{n,m} A_{nm} e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu-\mu_0|} \Psi_{nm}(\varphi, \eta), \quad G = \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} F$$

[производная по μ члена этого ряда с индексами n, m терпит при $\mu = \mu_0$ разрыв, причем скачок равен значению этого же члена при $\mu = \mu_0$, умноженному на $2n+1$], умножая обе части на $\Psi_{nm} \sin \eta$ и интегрируя по φ

и η , получим

$$A_{nm} = \frac{1}{a} \sqrt{\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \eta_0} \frac{4\pi}{2n+1} \Psi_{nm}(\varphi_0, \eta_0).$$

Следовательно, функция Грина равна

$$G = \frac{1}{a} \sqrt{(\operatorname{ch} \mu - \cos \eta)(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \eta_0)} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \eta_0) P_n^m(\cos \eta) e^{-(n+\frac{1}{2})|\mu - \mu_0|} \quad (10.3.74)$$

Это выражение используется при решении многих задач.

Тороидальные координаты. Вращая биполярную систему координат вокруг перпендикуляра, проходящего через середину отрезка, соединяющего полюсы, получим тороидальные координаты:

$$z = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad x = \frac{a \operatorname{sh} \mu \cos \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \mu \sin \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \\ h_\mu = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad h_\varphi = \frac{a \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}, \quad (10.3.75)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_\mu^3} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(h_\mu \operatorname{sh} \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_\mu}{\operatorname{sh}^2 \mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right],$$

где μ изменяется от 0 до ∞ , η от 0 до 2π и φ от 0 до 2π . Поверхность $\mu = \mu_0$ есть тор, осевая окружность которого лежит в плоскости x, y , имеет центр в начале координат и радиус $a \operatorname{cth} \mu_0$, а круговое поперечное сечение имеет радиус $a/\operatorname{sh} \mu_0$. Поверхность $\eta = \eta_0$ (при $\eta_0 < \pi$) является той частью сферы радиуса $a \operatorname{cosec} \eta_0$ с центром в точке $(x=y=0, z=a \operatorname{ctg} \eta_0)$, которая расположена выше плоскости x, y . Остальная часть той же сферы, расположенная ниже плоскости x, y , образует поверхность $\eta = 2\pi - \eta_0$. Разделяющая их линия есть окружность радиуса a , лежащая в плоскости x, y , с центром в начале координат. Этой окружности соответствует $\mu = \infty$. Ось z соответствует значению $\mu = 0$. Та часть плоскости x, y , которая лежит внутри окружности $\mu = \infty$, соответствует значению $\eta = \pi$, а остальная часть плоскости x, y , лежащая вне этой окружности, — значению $\eta = 0$ или $\eta = 2\pi$.

Мы вновь положим

$$\psi = \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} F(\mu, \eta, \varphi)$$

и найдем, что уравнение Лапласа приводится к виду

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\operatorname{sh} \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} F = 0.$$

Множитель, зависящий от φ , есть $\cos(m\varphi)$, или $\sin(m\varphi)$, и так как φ является периодической координатой, то из требования непрерывности следует, что m равно нулю или целому числу. Координата η также является периодической. Следовательно, множитель, зависящий от η , также равняется $\cos(n\eta)$ либо $\sin(n\eta)$, где n — нуль или натуральное число. Далее, множитель, зависящий от μ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{d}{d\mu} \left(\operatorname{sh} \mu \frac{dM}{d\mu} \right) - \frac{m^2 M}{\operatorname{sh}^2 \mu} - \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) M = 0,$$

а решением его являются сферические гармоники полужелого порядка, т. е. либо

$$\begin{aligned}
 P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) &= i^m \operatorname{sh}^m \mu T_{n-m-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) = \\
 &= \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sh}^m \mu F\left(m-n+\frac{1}{2}, m+n+\frac{3}{2} \mid m+1 \mid -\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \mu\right) = \\
 &= \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{ch}^{n-\frac{1}{2}} \mu \operatorname{th}^m \mu F\left(\frac{m-n+\frac{1}{2}}{2}, \frac{m-n+\frac{3}{2}}{2} \mid m+1 \mid \operatorname{th}^2 \mu\right) = \\
 &= \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \frac{\operatorname{th}^m(\mu)}{\operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}}(\mu)} F\left(\frac{m+n+\frac{1}{2}}{2}, \frac{m+n+\frac{3}{2}}{2} \mid m+1 \mid \operatorname{th}^2 \mu\right)
 \end{aligned} \tag{10.3.76}$$

[где использованы формулы (5.2.52), (5.3.17) и соотношения, указанные на стр. 623 тома I], либо

$$\begin{aligned}
 Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) &= (-1)^m \operatorname{sh}^m \mu V_{n-m-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) = \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right) \operatorname{th}^m \mu}{\Gamma(n+1) 2^{n+\frac{1}{2}} \operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}} \mu} F\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{n+m+\frac{3}{2}}{2} \mid n+1 \mid \operatorname{sech}^2 \mu\right).
 \end{aligned} \tag{10.3.77}$$

Так как оба числа $m+1$ и $n+1$ являются целыми, то, согласно сказанному на стр. 561 тома I и на стр. 309, 310, P имеет логарифмическую особенность при $\mu \rightarrow \infty$, а Q имеет такую же особенность при $\mu \rightarrow 0$. Например, для изучения поведения функции $Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ следует вычислить эту функцию для малых значений m , а затем устремить m к нулю. Для значений m , малых по сравнению с единицей, на основании (5.2.49) и (10.3.77) имеем

$$\begin{aligned}
 Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^{n+\frac{1}{2}} m} \times \\
 &\times \frac{\Gamma(1+m) \Gamma(1-m) \operatorname{ch}^{-n-\frac{1}{2}} \mu}{\Gamma\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+m+\frac{3}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+\frac{3}{2}}{2}\right)} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ e^{-m \ln [\operatorname{th} \mu]} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}m + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}m + s\right)}{s! \Gamma(s+1-m)} [\operatorname{th}^2 \mu]^s - \right. \\
& \left. - e^{m \ln [\operatorname{th} \mu]} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}m + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}m + s\right)}{s! \Gamma(s+1+m)} [\operatorname{th}^2 \mu]^s \right\} \simeq \\
& \simeq - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}} \mu} \left\{ 2 \ln [\operatorname{th} \mu] F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \mid 1 \mid \operatorname{th}^2 \mu\right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2^n}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right)}{[s!]^2} \times \right. \\
& \quad \left. \times \operatorname{th}^{2s}(\mu) \left[\psi\left(s + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right) + \psi\left(s + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right) - 2\psi(s+1) \right] \right\} \simeq \\
& \quad \simeq - \ln \mu, \quad \mu \rightarrow 0, \tag{10.3.78}
\end{aligned}$$

где ψ — логарифмическая производная от Γ , определенная в (4.5.43). Аналогичные выражения применяются для исследования поведения функции $P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ (см. таблицу в конце этой главы).

Следовательно, решение уравнения Лапласа в тороидальных координатах запишется в виде ряда

$$\begin{aligned}
\psi &= \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)] \times \\
& \quad \times [c_n \cos(n\eta) + d_n \sin(n\eta)] [A_{mn} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) + B_{mn} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu)].
\end{aligned}$$

Как и в случае бисферических координат, нам нужно получить разложение $[\operatorname{ch} \mu - \cos \eta]^{-1/2}$. Его можно вывести из интегрального представления для сферических гармоник второго рода. Исходя из формулы (5.3.29), после длинного ряда интегрирований по частям можно показать, что

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) &= e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\mu} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} \theta d\theta}{(1 - 2e^{-\mu} \cos \theta + e^{-2\mu})^{n+\frac{1}{2}}} = \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) e^{-\frac{1}{2}\mu} d\theta}{\sqrt{1 - 2e^{-\mu} \cos \theta + e^{-2\mu}}} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) d\theta}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) \cos(n\eta). \tag{10.3.79}$$

Поэтому для потенциала вне тора $\mu = \mu_0$ (с осевой окружностью радиуса $a \operatorname{cth} \mu_0$ и радиусом поперечного сечения $a \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_0}$), имеющего постоянный потенциал V_0 , получаем следующий ряд:

$$\psi = \frac{V_0}{\pi} \sqrt{2(\operatorname{ch} \mu - \cos \eta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \mu_0)}{P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \mu_0)} \right] P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) \cos(n\eta). \tag{10.3.80}$$

Много других интересных задач можно решить различными, уже знакомыми нам методами. Например, методом гл. 7 мы получим разложение функции Грина:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} \sqrt{(\operatorname{ch} \mu - \cos \eta)(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \eta_0)} \sum_{m, n=0}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n (-i)^m \frac{\Gamma\left(n - m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + m + \frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \cos [n(\eta - \eta_0)] \cdot \begin{cases} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu_0), & \mu_0 > \mu, \\ P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu), & \mu_0 < \mu. \end{cases} \quad (10.3.81)$$

При помощи этого ряда можно удовлетворить граничным условиям, а также получить потенциал, создаваемый зарядом, распределенным на торе.

Эллипсоидальные координаты. Наконец, мы переходим к наиболее общим координатам, позволяющим разделить переменные (наиболее общим для разделения переменных в волновом уравнении; для уравнения Лапласа общие циклидные координаты являются более общими, но значительно менее употребительными), — к эллипсоидальным координатам, для которых основные формулы приведены на стр. 484 и 619 тома I. Координата ξ_1 изменяется от a до ∞ . Промежуток изменения ξ_2 — от b до a ($b < a$), а для ξ_3 — от $-b$ до $+b$. Поверхностями $\xi_1 = \text{const}$ являются эллипсоиды, приближающиеся к сферам для больших значений ξ_1 ; при этом ξ_1 стремится к r . Поверхности $\xi_2 = \text{const}$ являются однополостными гиперболоидами, а поверхности $\xi_3 = \text{const}$ — двуполостными гиперболоидами.

При разделении переменных в уравнении Лапласа отсутствует множитель, приводивший к осложнениям в случае бисферических или тороидальных координат:

$$\psi = F(\xi_1) G(\xi_2) H(\xi_3).$$

Уравнения для всех сомножителей оказываются подобными во всем, за исключением знаков подкоренных выражений:

$$\sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)} \frac{d}{d\xi_1} \left[\sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_1^2 - b^2)} \frac{dF}{d\xi_1} \right] = [m(m+1)\xi_1^2 - \kappa] F,$$

$$\sqrt{(a^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - b^2)} \frac{d}{d\xi_2} \left[\sqrt{(a^2 - \xi_2^2)(\xi_2^2 - b^2)} \frac{dG}{d\xi_2} \right] = -[m(m+1)\xi_2^2 - \kappa] G,$$

$$(10.3.82)$$

$$\sqrt{(a^2 - \xi_3^2)(b^2 - \xi_3^2)} \frac{d}{d\xi_3} \left[\sqrt{(a^2 - \xi_3^2)(b^2 - \xi_3^2)} \frac{dH}{d\xi_3} \right] = [m(m+1)\xi_3^2 - \kappa] H.$$

Эти изменения необходимы для того, чтобы сохранить положительный знак на соответствующем промежутке изменения каждой переменной. Параметры m и κ являются константами разделения. Отметим, что они входят во все три уравнения, следовательно, переменные разделяются, а константы разделения не разделяются (см. стр. 491 и 703 тома I).

Все эти уравнения имеют один и тот же вид

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left[\frac{z}{z^2 - a^2} + \frac{z}{z^2 - b^2} \right] \frac{dF}{dz} + \frac{\kappa - m(m+1)z^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} F = 0, \quad (10.3.83)$$

$$[z^4 - (a^2 + b^2)z^2 + a^2 b^2] F'' + z[2z^2 - (a^2 + b^2)] F' + [\kappa - m(m+1)z^2] F = 0.$$

Решения, определенные в области $z > a$, соответствуют координате ξ_1 , решения в области $a > z > b$ — координате ξ_2 и в области $b > z > -b$ — координате ξ_3 . Это уравнение называется *уравнением Ламе*. Оно имеет следующие регулярные особые точки:

$$z = \pm b \quad \text{с индексами } 0 \text{ и } \frac{1}{2},$$

$$z = \pm a \quad \text{с индексами } 0 \text{ и } \frac{1}{2},$$

$$z = \infty \quad \text{с индексами } m+1 \text{ и } -m.$$

Обращаясь к уравнениям, с которыми нам пришлось столкнуться в этом разделе, заметим, что все они могут быть получены из уравнения Ламе при помощи подходящего совмещения его особых точек.

Для решений, соответствующих граничным условиям, заданным при $z=0$, мы пользуемся разложением по степеням z . Положив $F = \sum d_n z^n$, найдем для коэффициентов d трехчленную рекуррентную формулу:

$$a^2 b^2 n(n-1) d_n = [(n-2)^2 (a^2 + b^2) - \kappa] d_{n-2} + [m(m+1) - (n-3)(n-4)] d_{n-4} \quad (10.3.84)$$

(см. стр. 510 тома I), из которой следует, что ряды для F можно разделить на два рода: содержащие только четные и содержащие только нечетные степени z . Так как все три сомножителя в решении должны соответствовать одним и тем же значениям m и κ , то надо выяснить, можем ли мы найти решения, определенные сразу для всей области $0 < z < \infty$ и применимые для всех трех сомножителей. Для большинства значений m и κ соответствующие ряды оказываются бесконечными, и, прежде чем ими пользоваться, мы должны проверить, для каких значений z они сходятся.

Для проверки сходимости найдем предел при $n \rightarrow \infty$ выражения $z^2 \gamma_n$, где $\gamma_n = \frac{d_n}{d_{n-2}}$, и выясним, для каких значений z , m и κ это выражение меньше единицы. Разделив обе части выражения (10.3.84) на $n(n-1)a^2 b^2 d_{n-4}$ и отбросив члены порядка $1/n^2$ (и меньшие), получим

$$\gamma_n \gamma_{n-2} - \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \gamma_{n-2} + \left(1 - \frac{6}{n}\right) \frac{1}{a^2 b^2} = 0.$$

Так как при n , стремящемся к бесконечности, по предположению $\gamma_n \rightarrow \gamma_{n-2} \rightarrow \gamma$, то для весьма больших значений n последнее уравнение превращается в квадратное уравнение относительно γ , откуда

$$\gamma \simeq \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{1}{b^2} \text{ или } \gamma \simeq \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{1}{a^2}.$$

Поэтому $z^2 \gamma$ меньше единицы для z , меньших b или a , и ряд, если он бесконечен, сходится только до точки $z=b$ или точки $z=a$. Следовательно, из такого ряда, соответствующего произвольным значениям κ и m ,

можно получить сходящиеся выражения только для двух сомножителей, но не для всех трех одновременно. Если попытаться получить разложение в окрестности любой другой точки, то возникает то же препятствие: можно найти ряд, сходящийся в двух особых точках, но не в трех или более.

Тем не менее для целых значений m и для некоторых определенных значений κ тот или иной из этих рядов обрывается и дает полиномиальное решение, конечное в четырех особых точках из пяти. Например, из соотношения (10.3.84) явствует, что двумя возможными решениями уравнения (10.3.83) являются

$$\begin{aligned} E_0^0(z) &= 1 \text{ для } m=0, \quad \kappa = \kappa_0 = 0, \quad d_1 = 0, \\ E_1^0(z) &= z \text{ для } m=1, \quad \kappa = \kappa_1 = a^2 + b^2, \quad d_0 = 0. \end{aligned} \quad (10.3.85)$$

Эти решения сходятся всюду.

Поэтому частным решением уравнения Лапласа является постоянная $E_0^0(\xi_1) E_0^0(\xi_2) E_0^0(\xi_3)$. Она является одной из двух *эллипсоидальных гармоник первого рода* (вскоре будет сказано и об остальных). Подобным же образом другим решением уравнения Лапласа является функция

$$AE_1^0(\xi_1) E_1^0(\xi_2) E_1^0(\xi_3) = abAz$$

— одна из *эллипсоидальных гармоник второго рода*.

Чтобы получить следующие решения, выражающиеся через степени z , надо решить квадратное уравнение. Положив $m=2$ и $d_1=0$ в соотношении (10.3.84), мы видим, что

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{-\kappa}{2a^2b^2} d_0, \quad d_4 = \frac{4a^2 + 4b^2 - \kappa}{12a^2b^2} d_2 + \frac{1}{2a^2b^2} d_0, \\ d_6 &= \frac{16a^2 + 16b^2 - \kappa}{30a^2b^2} d_4. \end{aligned}$$

Поэтому если положить d_1 равным нулю, то и все d_n с большими индексами окажутся нулями и решение будет полиномом второго порядка. Для этого мы должны иметь

$$\begin{aligned} [4a^2 + 4b^2 - \kappa] (\kappa/2a^2b^2) &= 6, \quad \text{или} \\ \kappa &= 2 [a^2 + b^2 \mp \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2}], \end{aligned}$$

а соответствующие решения равны

$$\begin{aligned} E_0^2 &= z^2 - \frac{1}{3} [a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2}], \\ E_2^1 &= z^2 - \frac{1}{3} [a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2}]. \end{aligned} \quad (10.3.86)$$

Можно было бы продолжить этот процесс для больших целых значений m , получая полиномы высших порядков. При этом для определения κ приходится последовательно решать уравнения все более высокого порядка.

Можно также получить решения, содержащие сомножитель $\sqrt{z^2 - a^2}$. Положив $F = \sqrt{z^2 - a^2} B(z)$, получим из уравнения (10.3.83)

$$\begin{aligned} [z^4 - (a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2] B'' + z[4z^2 - (a^2 + 3b^2)] B' - \\ - [\kappa + b^2 + (m+3)(m-1)] B = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет полиномиальные решения, порождающие дальней-

шие виды сходящихся решений уравнения (10.3.83):

$$\begin{aligned} E_1^1(z) &= \sqrt{z^2 - a^2}, \quad m=1, \quad \kappa=b^2, \\ E_2^2(z) &= z \sqrt{z^2 - a^2}, \quad m=2, \quad \kappa=a^2 + 4b^2. \end{aligned} \quad (10.3.87)$$

Решение в общем виде

$$CE_1^1(\xi_1) E_1^1(\xi_2) E_1^1(\xi_3) = C \sqrt{a^2(a^2 - b^2)} x$$

является другой эллипсоидальной гармоникой второго рода, в то время как функция

$$DE_2^2(\xi_1) E_2^2(\xi_2) E_2^2(\xi_3) = Dab \sqrt{a^2(a^2 - b^2)} xz$$

есть одна из эллипсоидальных гармоник третьего рода. Заменяя a на b в формуле (10.3.87), мы получим решения

$$E_1^2 = \sqrt{z^2 - b^2} \quad \text{и} \quad E_2^3 = z \sqrt{z^2 - b^2}.$$

Наконец, существуют решения в виде полиномов от z , умноженных на $\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$, первым из которых является

$$E_2^4(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}, \quad m=2, \quad \kappa=a^2 + b^2. \quad (10.3.88)$$

Произведение $E_2^4(\xi_1) E_2^4(\xi_2) E_2^4(\xi_3)$, пропорциональное xy , является другой гармоникой третьего рода. Следующее решение $z \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$, соответствующее xzy , является эллипсоидальной гармоникой четвертого рода.

Все эти решения обращаются в нуль в точках 0 , a и b и имеют полюс на бесконечности, причем для больших z они ведут себя как z^m . Часто оказываются полезными и вторые решения, ведущие себя при больших z как z^{-m-1} . Их можно получить из уже известных решений E при помощи соотношения (5.2.6). Положим, по определению,

$$F_m^p(z) = (2m+1) E_m^p(z) \int_z^\infty \frac{dx}{V(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) [E_m^p(x)]^2}. \quad (10.3.89)$$

Функция $F_m^p(z)$ является решением уравнения (10.3.83) при тех же значениях κ и m , что и $E_m^p(z)$. Эти решения являются эллиптическими интегралами разных родов (см. стр. 408 тома I и след.). Первое из них

$$F_0^0(z) = \int_z^\infty \frac{dx}{V(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} = \frac{1}{a} \Phi\left(\frac{a}{z}, \frac{b}{a}\right)^1. \quad (10.3.90)$$

Например, потенциал вне проводящего эллипсоида $\xi_1 = c$, потенциал которого равен V_0 , имеет вид

$$\phi = AE_0^0(\xi_3) E_0^0(\xi_2) F_0^0(\xi_1) = V_0 \left[\Phi\left(\frac{a}{\xi_1}, \frac{b}{a}\right) / \Phi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}\right) \right]. \quad (10.3.91)$$

Если ξ_1 весьма велико, то F_0^0 стремится к $1/\xi_1$, а функция Φ , обратная sn, стремится к a/ξ_1 . Следовательно,

$$\phi \simeq V_0 a / \xi_1 \Phi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}\right)$$

и полный заряд эллипсоида оказывается равным $V_0 a / \Phi$. Поэтому емкость

¹⁾ См. примечание на стр. 236. — Прим. ред.

уединенного эллипсоида $\xi_1 = c$ с полуосями c , $\sqrt{c^2 - a^2}$, $\sqrt{c^2 - b^2}$ равна

$$C = \frac{a}{\Phi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}\right)}.$$

При $c = a$ эллипсоид превращается в плоский эллиптический диск с полуосями a и $\sqrt{a^2 - b^2}$, а функция Φ , обратная sn , сводится к величине $K(b/a)$, так что емкость в этом случае равна $a/K(b/a)$. Если $b = 0$, K делается равным $\frac{1}{2}\pi$ и, следовательно, емкость круглого диска радиуса a равна $2a/\pi$, что согласуется с выводами из (10.3.56).

Применяя эти функции, можно решить и другие, более сложные задачи. Заметим, что произведения $E_m^p(\xi_2) E_m^p(\xi_3)$ образуют полную систему функций, при помощи которой можно удовлетворить граничным условиям, заданным на поверхности эллипсоида $\xi_1 = \text{const}$. Тогда зависимость от ξ_1 будет выражаться при помощи комбинаций функций $E_m^p(\xi_1)$ и $F_m^p(\xi_1)$.

Заметим, наконец, что, переходя от координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 к координатам λ, μ, ν по формулам

$$\lambda = a \int_a^{\xi_1} \frac{dt}{V(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}, \quad \mu = a \int_{\xi_2}^a \frac{dt}{V(a^2 - t^2)(t^2 - b^2)}, \quad \nu = a \int_0^{\xi_3} \frac{dt}{V(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)},$$

мы получим уравнения (10.3.82) в особенно простой форме:

$$\frac{d^2 F}{d\lambda^2} = \frac{1}{a^2} [m(m+1)\xi_1^2 - x] F \quad \text{и т. д.}$$

Но, возвращаясь к данному в гл. 4 (или в специальных курсах) изложению теории эллиптических функций, мы видим, что этим уравнениям соответствуют

$$\xi_1 = a \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{cn}(\lambda, k)}, \quad \xi_2 = a \operatorname{dn}(\mu, k'), \quad \xi_3 = b \operatorname{sn}(\nu, k), \quad (10.3.92)$$

$$k = b/a, \quad k' = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - k^2}.$$

Благодаря этому уравнения записываются несколько проще, но упрощения при вычислениях почти не получается. Можно было бы показать, что интегральные представления функций Ламе содержат в качестве ядер функции Лежандра. Например, имеет место равенство

$$E_m^p[b \sin \nu] = h \int_{-2K}^{2K} P_m[k \operatorname{sn} \nu \operatorname{sn} u] E_m^p[b \operatorname{sn} u] du,$$

эквивалентное (10.3.2). Однако в данном случае это равенство не является интегральным представлением, выражающим функцию E при помощи более простых, уже известных функций. Оно является интегральным уравнением, представляющим искомую функцию в виде интеграла от этой же функции. Этот частный пример не столь уж интересен для практики, чтобы оправдать дальнейшее изучение вопроса, но ссылка на стр. 593 тома I, где говорится о функциях Матье, и на последующий раздел, посвященный сфероидальным волновым функциям, показывает, что даже интегральные уравнения могут быть полезными, хотя и не столь полезными, как простые интегральные представления.

Задачи к главе 10

10.1. Дан брус, сечение которого является прямоугольником с высотой b и шириной a . На трех его гранях $y = 0$, $x = 0$, $x = a$ поддерживается нулевая температура. Через четвертую грань $y = b$ происходит теплообмен с внешним источником по закону

$$\beta \frac{d}{db} T(x, b) = T_0 - T(x, b),$$

где $T(x, y)$ есть температура точки (x, y) , лежащей внутри бруса, T_0 — температура внешнего источника, β — постоянная. Написать удовлетворяющее граничным условиям разложение $T(x, y)$ в ряд Фурье. Показать, что количество тепла, протекающего через сечение $y = b$ за секунду, равно

$$\frac{8T_0 \kappa}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/(2n+1)}{(\pi\beta/a)(2n+1) + \text{th}[(2n+1)(\pi b/a)]},$$

где κ — коэффициент теплопроводности материала, из которого изготовлен брус.

10.2. Показать, что функция Грина единичного линейного источника внутри прореза, ограниченного плоскостями $y = 0$, $x = 0$, $x = a$, с однородными условиями Неймана на границе равна

$$G_0(x, y | x_0, y_0) =$$

$$= -\frac{4\pi}{a} \left\{ \begin{matrix} y \\ y_0 \end{matrix} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n} \cos\left(\frac{\pi n x_0}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot \begin{cases} \text{ch}\left(\frac{\pi n y_0}{a}\right) \exp\left(-\frac{\pi n y}{a}\right), \\ \text{ch}\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \exp\left(-\frac{\pi n y_0}{a}\right), \end{cases}$$

где верхние члены в скобках следует брать при $y \geq y_0$, а нижние при $y \leq y_0$. Показать, что эта функция является вещественной частью функции

$$F = -2 \ln \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi z_0}{a}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\pi \bar{z}}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi \bar{z}_0}{a}\right) \right] \right\},$$

где $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$. Показать, что мнимая часть функции F является магнитным потенциалом, создаваемым единичным током, текущим по проходящему через точку (x_0, y_0) проводу, помещенному в прорез внутри массы железа, имеющего весьма большую магнитную проницаемость.

10.3. Две параллельные проволоки, расстояние между которыми равно $2b$, помещены в изолирующий материал, внешней поверхностью которого является круговой цилиндр радиуса a ($a > b$). Ось цилиндра расположена между проволоками и равноудалена от них. Ток в каждой из проволок создает U единиц тепла в секунду на единицу длины. Пусть коэффициент теплопроводности изолирующего материала равен κ , а радиус поперечного сечения проволок ρ значительно меньше b . Найти установившуюся температуру поверхности каждой из проволок, если на внешней поверхности изолятора поддерживается нулевая температура.

10.4. Внутри области $r \leq R$ с магнитной проницаемостью $\mu = 1$ задается магнитное поле при помощи магнитного потенциала

$$\psi = H_0 [-x + (1/6R^2)(x^3 - 3xy^2)], \quad r^2 = x^2 + y^2 < R^2,$$

где $H = -\text{grad } \psi$. В это поле помещается цилиндр радиуса $a \ll R$ с осью, проходящей через точку $r = 0$, причем материал цилиндра имеет магнитную проницаемость μ . В результате поле оказывается искаженным. Каков будет искаженный магнитный потенциал внутри и вне цилиндра?

10.5. Длинная полоса ширины a , изготовленная из проводящего материала, помещена внутрь изолирующей оболочки, наружная поверхность которой есть цилиндр. Поперечным сечением этого цилиндра является эллипс, фокусы которого расположены на краях полосы, а малая ось равна $2b$. Разность потенциалов полосы и наружной поверхности оболочки равна V . Через оболочку, сопротивление которой равно R , происходит утечка тока.

Найти утечку тока, приходящуюся на единицу длины полосы, после того как процесс установился.

10.6. По медной проволоке, поперечное сечение которой есть круг радиуса a , течет ток высокой частоты. Частота его равна f гц. В этом случае плотность тока на расстоянии r от оси проволоки приближенно равна

$$i \approx \frac{3I}{\pi a^2} \frac{1 - k(1 - r^4/a^4)}{3 - 2k},$$

где $k = f^2 a^4 / 31000$ (для меди), а I есть эффективная сила тока в амперах. Этим приближением можно пользоваться, пока k меньше единицы. Каким будет стационарное распределение температуры внутри проволоки, если на ее поверхности поддерживается нулевая температура? Начертить график температуры в центре проволоки как функции от частоты f , когда f изменяется от $f = 0$ до $f = 2000$ гц, считая $a = 1/4$ см и $I = 10$ а.

10.7. Цилиндр из диэлектрика имеет радиус a и диэлектрическую постоянную ϵ . Параллельно оси цилиндра на расстоянии c от нее ($c > a$) расположен линейный заряд с плотностью q (на сантиметр). Найти распределение потенциала внутри цилиндра и вне его. Найти напряженность электрического поля в центре цилиндра.

10.8. Даны две поверхности, уравнения которых в эллиптических координатах имеют вид $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$. Эти поверхности являются компланарными полуплоскостями, разделенными щелью ширины a . Показать, что функция Грина для уравнения Лапласа при нулевых граничных условиях имеет вид

$$G_0(\mu, \vartheta | \mu_0, \vartheta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} e^{-n|\mu - \mu_0|} \sin(n\vartheta_0) \sin(n\vartheta),$$

где $0 \leq \vartheta, \vartheta_0 \leq \pi$ и $-\infty < \mu, \mu_0 < \infty$.

Показать, что эта функция Грина является вещественной частью функции

$$F = 2 \ln \left\{ \frac{\text{sh} \left[\frac{1}{2} (\mu + i\vartheta - \mu_0 - i\vartheta_0) \right]}{\text{sh} \left[\frac{1}{2} (\mu + i\vartheta - \mu_0 + i\vartheta_0) \right]} \right\}.$$

Вычислить емкость проволоки радиуса ρ с осью, проходящей через точку x_0, y_0 ($\rho \ll y_0$), по отношению к поверхностям $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$.

10.9. N проводников изолированы друг от друга. Проводник с номером n имеет потенциал V_n по отношению к бесконечности, а полный

заряд его равен Q_n . Показать, что

$$Q_n = \sum_{m=1}^N c_{nm} V_m \quad \text{и} \quad V_n = \sum_{m=1}^N a_{nm} Q_m, \quad c_{mn} = c_{nm}$$

и получить соотношение между коэффициентами c_{nm} и a_{nm} . Коэффициент c_{nn} называется *коэффициентом емкости* или просто емкостью n -го проводника; коэффициент c_{nm} называется *коэффициентом (электростатической) индукции* проводников с номерами n и m . Показать, исходя из результатов гл. 3, что поле этих проводников должно быть таким, чтобы выражение

$$W = \frac{1}{2} \sum_{m,n} V_m c_{mn} V_n = \frac{1}{2} \sum_{m,n} Q_m a_{mn} Q_n$$

достигало своего минимума при данных граничных условиях. Получить коэффициенты c_{nm} для случая, соответствующего формулам (10.2.28), и выразить через них коэффициент усиления.

10.10. Потенциал полуплоскости $y=0$, $x \geq 0$ равен нулю. Две проволоки, параллельные этой плоскости, с радиусами поперечных сечений ρ_1 и ρ_2 соответственно и осями, проходящими через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (причем $\rho_1 \ll y_1$, $\rho_2 \ll y_2$), имеют потенциалы V_1 и V_2 . Показать, что потенциал полного поля приближенно равен вещественной части выражения

$$F = 2Q_1 \ln \left(\frac{\omega - \bar{\omega}_1}{\omega - \omega_1} \right) + 2Q_2 \ln \left(\frac{\omega - \bar{\omega}_2}{\omega - \omega_2} \right), \quad \omega = \sqrt{2(x + iy)}.$$

Получить отсюда значения коэффициентов c_{11} , c_{22} , c_{01} , c_{02} , c_{12} , где полуплоскость считается проводником с номером 0. (Определение c_{nm} см. в задаче 10.9.)

10.11. Показать, что функция Грина для уравнения Лапласа в двумерной системе гиперболических координат, определяемых равенствами $z = x + iy = \sqrt{2}\omega$, $\omega = \mu + i\kappa$, может быть записана в виде

$$G(\mu, \kappa | \mu_0, \kappa_0) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0^2 + \kappa_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu u + i\kappa v}}{u^2 + v^2} du dv.$$

Показать, что функция Грина для области положительных значений κ (первый квадрант плоскости x, y), равная нулю на поверхности $\kappa = 0$ (положительная часть оси x , положительная часть оси y), может быть представлена в системе полярных координат r, φ в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \sin(2n\varphi_0) \sin(2n\varphi) \cdot \begin{cases} (r/r_0)^{2n}, & r < r_0 \\ (r_0/r)^{2n}, & r > r_0 \end{cases} = 2\operatorname{Re} \left[\ln \left(\frac{\omega - \bar{\omega}_0}{\omega - \omega_0} \right) \right].$$

Вычислить емкость поверхности $\kappa = 0$ относительно проволоки радиуса ρ с осью, параллельной оси z и проходящей через точку x_0, y_0 ($\rho \ll x_0, y_0$).

10.12. Два цилиндра из материала с диэлектрической постоянной ε (для остального пространства $\varepsilon = 1$) имеют одинаковые радиусы, равные c , и параллельные оси, расстояние между которыми равно $2b$. Вектор напряженности E однородного электрического поля перпендикулярен осям этих цилиндров и составляет угол $\pi/2 - \varphi$ с плоскостью, в которой лежат эти оси. Доказать, что потенциал искаженного поля можно записать

в биполярных координатах в виде

$$\psi = \begin{cases} Ea \cos \varphi + 2aE \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \operatorname{cth}(n\xi_0)}{\varepsilon + \operatorname{cth}(n\xi_0)} e^{-n\xi} \cos(n\theta + \varphi), & \xi > \xi_0, \\ Ea \cos \varphi + 2aE \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ e^{-n\xi} - \frac{(\varepsilon - 1)e^{-n\xi_0}}{\varepsilon + \operatorname{cth}(n\xi_0)} \frac{\operatorname{sh}(n\xi)}{\operatorname{sh}(n\xi_0)} \right\} \cos(n\theta + \varphi), & 0 < \xi < \xi_0. \end{cases}$$

Какой вид будут иметь эти выражения при $\xi < 0$? Выразить ξ_0 через b и c . Разобрать случай $b \gg c$ и найти член первого порядка, выражающий влияние одного из цилиндров на поле внутри второго.

10.13. Два металлических заземленных цилиндра с одинаковыми радиусами, равными c , и параллельными осями, расстояние между которыми равно $2b$, помещены в однородное электрическое поле, вектор напряженности E которого перпендикулярен к осям цилиндров и образует угол $\pi/2 - \varphi$ с плоскостью, в которой лежат эти оси. Найти распределение потенциала вне цилиндров в системе биполярных координат θ, ξ , определенных формулами (10.1.41), и подсчитать плотность заряда на поверхностях цилиндров. Стойкостью до членов первого порядка относительно величины c/b определить силу, действующую на каждый элемент поверхности цилиндров, и получить этим способом годную для $b \gg c$ и аналогичную формуле (10.1.48) приближенную формулу, выражающую силу взаимодействия между цилиндрами.

10.14. По проводящему цилиндру радиуса c с осью, параллельной плоскости y, z и отстоящей от нее на расстояние b , течет ток I , равномерно распределенный по поперечному сечению цилиндра. Полагая, что теплопроводность этого цилиндра та же, что и у остальной части пространства, и что на плоскости y, z поддерживается нулевая температура, найти распределение температуры внутри цилиндра и вне его.

10.15. Сетка из проводов помещена между бесконечной пластиной $y = c$, имеющей потенциал V_p , и второй пластиной $y = -b$, имеющей нулевой потенциал. Провода сетки имеют один и тот же потенциал V_g , их радиусы равны ρ , а их оси проходят через точки $y = 0, x = \dots, -2a, -a, 0, a, 2a, \dots$ (перпендикулярно плоскости x, y). Показать, что в области между пластинами потенциал приближенно равен

$$\psi = \frac{1}{4\pi cb + 2a(c+b) \ln(a/2\rho)} \left\{ 4\pi cb V_g + 2ab V_p \ln\left(\frac{a}{2\rho}\right) + \right. \\ \left. + y \left[2\pi V_g (c-b) + 2\pi b V_p + 2a V_p \ln\left(\frac{a}{2\rho}\right) \right] - \right. \\ \left. - [a V_g (c+b) - ab V_p] \ln \left[4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + 4 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right] \right\}.$$

Чему равны коэффициенты c_{gg}, c_{ga}, c_{gp} (см. задачу 10.9) для системы, состоящей из сетки и обеих пластин? Чему равен коэффициент усиления сетки по отношению к пластине (расположенной в плоскости $y = c$) и катоду ($y = -b$)?

10.16. Преобразование $z = w + iae^{i\varphi} \operatorname{tg} \psi + \frac{a^2 e^{2i\varphi}}{w + iae^{i\varphi} \operatorname{tg} \psi}$ переводит круг радиуса $a \operatorname{sech} \psi$ с центром в начале координат, лежащий в плоскости w ,

во внешность дужки некоторой окружности в плоскости z с хордой длины $4a$, образующей угол ϕ с горизонтальной осью. Получить выражение для потока с циркуляцией вокруг этой дужки. Для того чтобы у заднего края дужки поток не был турбулентным, циркуляция скорости должна равняться $V_r = 2aV_0 \sec \phi \sin(\phi + \psi)$. Доказать это. Показать, что если рассчитанные на единицу длины подъемная сила и лобовое сопротивление полосы, профиль которой имеет вид данной дужки, даются формулой $L + iD = 2\pi\rho V_0^2 V_r$, то подъемная сила равна $L = 4\pi\rho a V_0^2 \sec \phi \sin(\phi + \psi)$ [см. формулу (10.2.20)].

10.17. Область R_1 лежит вправо от полуплоскости $x=0, y \geq 0$ и выше полуплоскости $y=0, x \geq 0$; область R_2 лежит вправо от полуплоскости $x=0, y \leq -a$ и ниже полуплоскости $y=-a, x \geq 0$. Эти области заполнены железом, имеющим весьма большую магнитную проницаемость μ . Остальная часть пространства R_0 , лежащая влево от плоскости $x=0$ и между «полюсными наконечниками» R_1 и R_2 , имеет магнитную проницаемость $\mu=1$. При помощи формулы Шварца — Кристоффеля показать, что если разность магнитных потенциалов областей R_1 и R_2 равна V , то линии магнитного потенциала χ и магнитные силовые линии ϕ задаются при помощи функции

$$z = \frac{a}{\pi} \operatorname{Ar ch} \left\{ \exp \left[\frac{-\pi}{V} (\phi + i\chi) \right] \right\} - \frac{a}{\pi} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{2\pi}{V} (\phi + i\chi) \right] \right\}^{1/2},$$

осуществляющей соответствующее конформное отображение. Вычислив и начертив график изменения напряженности магнитного поля вдоль средней линии $y = -\frac{1}{2}a$, показать, как это поле убывает вблизи краев «полюсных наконечников». Показать, что вблизи вершины угла $z=0$ напряженность магнитного поля приближенно равна

$$H = -i(\overline{dF/dz})' \simeq -i(V/a)(a/2\pi z)^{1/3}.$$

10.18. Помимо двух «полюсных наконечников», описанных в предыдущей задаче, имеется проволока, величиной радиуса которой можно пренебречь, проходящая через точку $x=b, y = -\frac{1}{2}a$. По этой проволоке течет ток I . Предполагая, что в данной задаче единственным источником магнитного поля является этот ток, показать, что $z = x + iy$ и функция магнитных силовых линий и магнитного потенциала $F = \phi + i\chi$ связаны соотношением

$$z = \frac{a}{\pi} \{ \operatorname{Ar ch} [1/\sqrt{e^{-F/2I} - \beta^2}] - \sqrt{1 + \beta^2 - e^{-F/2I}} \},$$

где

$$\frac{\pi b}{a} = \operatorname{Ar ch} \beta - \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Начертить график изменения магнитной напряженности вдоль средней линии $y = -\frac{1}{2}a$ для $\beta = 0,5; 2$.

10.19. При помощи преобразования Шварца — Кристоффеля отобразить внутреннюю область многоугольника, ограниченного линиями $y=0$, $y=-a$ и частью оси y между точками $y=-b$ и $y=-a$ (канал между $y=0$ и $y=-a$, частично закрытый перпендикулярной перегородкой, оставляющей щель ширины b), на верхнюю полуплоскость w . Показать,

что потенциал скоростей ϕ и функция тока χ для течения жидкости по этому каналу связаны с переменной $z = x + iy$ соотношениями

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \left\{ \frac{V[\frac{1}{w} + \alpha][\frac{1}{w} + 1/\alpha] + 1/w + \frac{1}{2}[\alpha + 1/\alpha]}{V[w + \alpha][w + 1/\alpha] + w + \frac{1}{2}[\alpha + 1/\alpha]} \right\},$$

$$F = \phi + i\chi = (aU/\pi) \ln w, \quad \alpha = \operatorname{ctg}^2(\pi b/4a),$$

где U — скорость жидкости при $x = \pm \infty$. Показать, что скорость жидкости в точке, соответствующей точке w , равна

$$v = U \frac{V[\bar{w} + \alpha][\bar{w} + 1/\alpha]}{\bar{w} + 1}$$

по величине и направлению.

10.20. В условиях предыдущей задачи показать, что если $b \ll a$, то с точностью до членов третьего порядка относительно малой величины $\pi b/4a$ функция тока на отрицательной части оси y (т. е. в щели) связана с y приближенным уравнением

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi y}{4a}\right) \simeq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi b}{4a}\right) \sin\left(\frac{\pi \chi}{2aU}\right) \left[1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi b}{4a}\right) \cos^2\left(\frac{\pi \chi}{2aU}\right)\right]$$

и что скорость жидкости в направлении, нормальном к этой линии, равна с точностью до членов второго порядка

$$v \simeq \frac{2aU}{\pi b} \frac{1}{V_{1-y^2/b^2}} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi b}{4a}\right)^2 \left(1 - 2\frac{y^2}{b^2}\right)\right].$$

10.21. «Канал» переменного сечения ограничен следующими четырьмя линиями: $y = a$, положительной частью оси x , частью оси y от $y = 0$ до $y = a - b$ и прямой $y = a - b$ при $x \leq 0$. При помощи преобразования Шварца — Кристоффеля показать, что отображение этой области на верхнюю половину плоскости w имеет вид

$$z = \frac{a}{\pi} \left\{ \operatorname{Arch} \left[\frac{2w - \alpha - 1}{\alpha - 1} \right] - \frac{1}{V_{\alpha}} \operatorname{Arch} \left[\frac{(\alpha + 1)w - 2\alpha}{(\alpha - 1)w} \right] \right\},$$

где $\alpha = (a/b)^2$. Пользуясь вспомогательной формулой $F = \phi + i\chi = (aU/\pi) \ln w$, показать, что вектор скорости равен

$$v = U \sqrt{(\bar{w} - \alpha)/(\bar{w} - 1)}$$

и что вблизи точки $z = i(a - b)$ скорость приблизительно равна

$$v \simeq U \left[a^4 (a^2 - b^2) / \pi^2 b^2 \right]^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{1}{3}\pi i} (\bar{z} + ia - ib)^{-\frac{1}{3}}.$$

10.22. Показать, что функция

$$z = a / [\cos(n \operatorname{arc} \operatorname{tg} w)]^{2/n}$$

преобразует вещественную ось плоскости w в n лучей ($z = re^{i\varphi}$) $r \geq a$, $\varphi = 0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$. Где расположены в плоскости w точки, соответствующие точкам $r = a$, $\varphi = m/n$; $z = 0$? Показать, что если через точку $z = 0$ проходит проволока радиуса $\rho \ll a$, то емкость ее единицы длины относительно системы пластин, пересекающих плоскость x, y по

этим лучам, приближенно равна

$$C \simeq n/4 [\ln(2a/\rho)]^{\frac{1}{2}n}.$$

10.23. Конденсатор состоит из внешней замкнутой оболочки S_0 , имеющей потенциал V , внутри которой помещена оболочка S_i , имеющая нулевой потенциал. Область R , заключенная между этими поверхностями, заполнена веществом с диэлектрической постоянной ε . Показать, что интегральное уравнение для потенциала в области R имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = V + \frac{1}{4\pi} \int G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) \left[\frac{\partial}{\partial n_i} \psi(\mathbf{r}_i) \right] dS_i,$$

где G — функция Грина (для уравнения Лапласа), соответствующая всей области, ограниченной поверхностью S_0 (когда S_i отсутствует), обращающаяся в нуль на S_0 ; $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки, лежащей на S_i , и $\partial/\partial n_i$ — производная по нормали к S_i , внешней по отношению к области R [(1/4 π)($\partial\psi/\partial n_i$) есть плотность заряда на S_i]. Показать, что решение этого интегрального уравнения эквивалентно решению вариационной задачи для функционала

$$[C] = \left[\int \chi(\mathbf{r}_i) dS_i \right]^2 / \int \int \chi(\mathbf{r}_i) G(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_i') \chi(\mathbf{r}_i') dS_i dS_i'.$$

Функция распределения заряда χ , на которой функционал $[C]$ достигает стационарного значения, пропорциональна фактическому распределению заряда на S_i ($\sigma = V\chi \int \chi dS_i / \int \int \chi G \chi dS_i dS_i'$), и это стационарное значение $[C]$ есть значение емкости $C = (1/V) \int \sigma dS_i$.

10.24. Используя вариационный принцип задачи 10.23, вычислить емкость сферы радиуса b , находящейся внутри цилиндрической оболочки радиуса a с осью l ($b < a$, $\frac{1}{2}l$), причем центр сферы лежит на оси оболочки. Применяя функцию Грина (10.3.24) и формулу

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(\alpha \cos \vartheta) J_0(\beta \sin \vartheta) P_{2n}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ = (-1)^n 2P_{2n}(\alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) j_{2n}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \end{aligned}$$

вычислить соответствующие интегралы. Сначала вычислить C , считая $\chi = 1$ (однородное распределение заряда на сфере), затем, полагая $\chi = 1 + \gamma P_2(\cos \vartheta)$ и варьируя γ , получить более точное значение минимума C . Насколько более точным является второй результат?

10.25. Боковая поверхность и одно из оснований цилиндрического сосуда, имеющего радиус a и высоту b , сделаны из металла, и на них поддерживается нулевой потенциал. На другом конце сосуд закрыт сеткой, имеющей потенциал V_0 , настолько частой, что потенциал в пролетах сетки также равен V_0 . Внутри сосуда находится газ под давлением, достаточно низким для того, чтобы средняя длина свободного пробега его молекул была велика по сравнению с a и b . В некоторый момент газ оказывается однородно ионизированным, после чего возникшие электроны притягиваются к сетке и большинство из них вылетает из сосуда. Показать, что средняя энергия вылетающих ионов равна

$$eV_0 \left[1 - \frac{4a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{th}(\gamma_n b/2a)}{\gamma_n^3} \right],$$

где γ_n есть n -й корень уравнения $J_0(\gamma) = 0$, а e — заряд электрона. Вычислить эту среднюю энергию в случае, когда $a = b$.

10.26. Зонд, изготовленный из проводящего материала и имеющий форму половины вытянутого сфероида с наибольшим радиусом поперечного сечения b и длиной a , погружен в землю так, что ось его перпендикулярна поверхности земли, а поперечное сечение касательно к ней. Потенциал зонда по отношению к весьма удаленной от него части земли равен V_0 . Показать, что если к моменту, когда достигается стационарное состояние, с зонда стекает ток I , то проводимость земли (которую мы предполагаем однородной) равна

$$\frac{I}{4\pi V \sqrt{a^2 - b^2} V_0} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right).$$

10.27. Тело имеет форму, близкую к сферической, так что его поверхность может быть задана уравнением $r = a + F(\vartheta, \varphi)$, где функция F всюду настолько мала, что величиной F^2/a^2 можно пренебречь. Показать, что если

$$F(\vartheta, \varphi) = \sum_{m,n} (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta)$$

и на поверхности этого тела поддерживается потенциал V_0 , то соответствующий потенциал вне тела с той же степенью точности равен

$$\phi = V_0 \frac{a}{r} + V_0 \sum_{m,n} (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \vartheta).$$

Предположив, что сфера несколько сжата с одной стороны, так что ее поверхность задается уравнением

$$r = \begin{cases} a \cos \vartheta_0 / \cos \vartheta \simeq a (2 - \cos \vartheta) / (2 - \cos \vartheta_0), & \vartheta_0 \rightarrow 0, \quad \vartheta \leq \vartheta_0, \\ a, & \vartheta \geq \vartheta_0, \end{cases}$$

показать, что

$$F = \frac{a/2}{2 - \cos \vartheta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \vartheta)}{(2n+3)(2n-1)} [- (2n-1) P_{n+2}(\cos \vartheta_0) + \\ + 2(2n+1) P_n(\cos \vartheta_0) - (2n+3) P_{n-2}(\cos \vartheta_0)].$$

[В выражениях, соответствующих значениям $n=0$ и $n=1$, появляются отрицательные индексы. Здесь мы пользуемся соотношением $P_{-\lambda}(z) = -P_{\lambda-1}(z)$.] Показать, что емкость сжатой описанным образом сферы приближенно равна

$$C = a \left\{ 1 - \frac{1}{6(2 - \cos \vartheta_0)} [3P_1(\cos \vartheta_0) - P_2(\cos \vartheta_0) - 2] \right\}.$$

Чему равна величина поправки, если $\vartheta_0 = 10^\circ$? Чему равно приращение напряженности поля на этой поверхности при $\vartheta = \vartheta_0$, если $\vartheta_0 = 10^\circ$?

10.28. Показать, что если функция $\phi(r, \vartheta, \varphi)$ есть решение уравнения Лапласа в сферических координатах, то функция $(a^2/r)\phi(a^2/r, \vartheta, \varphi)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Пусть ϕ удовлетворяет некоторому уравнению Пуассона. Чему равна плотность заряда в том уравнении Пуассона, которому удовлетворяет функция $(a^2/r)\phi(a^2/r, \vartheta, \varphi)$?

Это преобразование $r \rightarrow \rho = \frac{a^2}{r}$ называется инверсией относительно сферы радиуса a с центром в начале. Показать, что если центр сферы, относительно которой производится инверсия, лежит на некоторой другой сфере, то последняя преобразуется в плоскость. Показать, что при данной инверсии сферический сегмент с углом ϑ_0 преобразуется в диск. Используя метод инверсии, вычислить плотность заряда и полный заряд на сфере, из которой удален сферический сегмент с углом ϑ_0 , помещенной в однородное электрическое поле, направленное по оси этого сегмента. Сравнить ответы с результатами, полученными на стр. 252.

10.29. Плотность распределения электрического заряда $\rho(r, \vartheta, \varphi)$ равна нулю вне сферы $r = a$. Показать, что поле вне сферы $r = a$ соответствует эффективному заряду $q = A_{00}$, эффективному дипольному моменту с компонентами $D_x = A_{11}$, $D_y = B_{11}$, $D_z = A_{10}$ и эффективному квадрупольному моменту с компонентами

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= 2A_{22} - \frac{1}{3}A_{20}, & Q_{xy} &= 2B_{22} = Q_{yx}, \\ Q_{xz} &= A_{21} = Q_{zx}, & Q_{yy} &= -2A_{22} - \frac{1}{3}A_{20}, \\ Q_{yz} &= B_{21} = Q_{zy}, & Q_{zz} &= \frac{2}{3}A_{20}, \end{aligned}$$

если потребовать, чтобы $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$ (определение величин A и B см. на стр. 258).

10.30. При помощи формул (10.3.22) и (10.3.34) показать, что

$$e^{kz} \cos(m\varphi) J_m(k\rho) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(kr)^n}{(n+m)!} \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta)$$

и, следовательно,

$$r^n \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) = \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{(n+m)!}{n!} \frac{d^n}{dk^n} [e^{kz} J_m(k\rho) \cos(m\varphi)] \right\},$$

где r, ϑ, φ — сферические, а ρ, z, φ — коаксиальные им круговые цилиндрические координаты. Во внутренней области кругового цилиндра конечной длины l ($\rho \leq a, |z| \leq \frac{1}{2}l$) распределен заряд с постоянной плотностью. Используя записанные выше соотношения, вычислить первые четыре члена ($n = 0, 1, 2, 3$) в разложении (10.3.42) потенциала по мультиполям на большом расстоянии от цилиндра. Чему равны элементы аффинора квадрупольного момента для этого распределения заряда (см. задачу 10.29)?

10.31. Пусть двухатомная молекула приближенно представлена при помощи ядра с зарядом $+3$, расположенного в точке $z = \frac{1}{2}a$, ядра с зарядом $+1$ в точке $z = -\frac{1}{2}a$ и распределения отрицательного заряда

$$\rho = -\frac{16}{\pi a^3} \frac{(\xi_0 - \xi) \left(1 + \frac{1}{3}\eta\right)}{(\xi_0 - 1)^2 (\xi^2 - \eta^2)} \text{ при } \xi < \xi_0, \quad \rho = 0 \text{ при } \xi \geq \xi_0,$$

где ξ, η, φ — вытянутые сфероидальные координаты с фокусами в точках $z = \pm a/2$. Вычислить при $\xi > \xi_0$ электростатический потенциал, соот-

ветствующий этому распределению зарядов. Используя формулы (10.3.35) и (10.3.51), подсчитать эффективные дипольные и квадрупольные моменты (см. задачу 10.29).

10.32. Диск радиуса a , потенциал которого V_0 , помещен внутрь сферы с тем же центром и радиусом c ($c > a$), имеющей нулевой потенциал. Используя метод, данный на стр. 270 и след., найти распределение потенциала в пространстве между диском и сферой и емкость этой системы, пренебрегая членами выше четвертого порядка относительно a/c .

10.33. В заземленной проводящей плоскости проделано круглое отверстие радиуса a . Точечный заряд q помещен на оси этого отверстия на расстоянии b от его центра. Найти соответствующее распределение потенциала. Как быстро стремится к нулю потенциал в точке на той половине оси отверстия, на которой нет заряда, если расстояние этой точки от центра отверстия неограниченно увеличивается?

10.34. При помощи бисферических координат вычислить емкость сферы с внешним радиусом b , помещенной внутрь сферы с внутренним радиусом c , причем центр внутренней сферы находится на расстоянии d от центра внешней ($c > b + d$). Каково распределение заряда на внутренней сфере? Сравнить эти результаты с результатами, приведенными на стр. 255, 256.

10.35. Расстояние от центра жесткой сферы радиуса ρ до некоторой бесконечной плоскости равно $b > \rho$. Несжимаемая жидкость обтекает сферу и плоскость, имея на бесконечности скорость v_0 , направленную параллельно плоскости (см. стр. 280). Вычислить составляющие η и φ скорости жидкости на поверхности сферы $\mu = \mu_0$. Получить приближенное выражение для результирующей силы, действующей на сферу.

10.36. Потенциал поверхности четвертого порядка, заданной параметрическими уравнениями

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta_0}, \quad x = \frac{a \sin \mu_0 \cos \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta_0}, \quad y = \frac{a \sin \eta_0 \sin \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta_0},$$

где $-\infty < \mu < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, η_0 — фиксированное число, превосходит на величину V_0 потенциал на бесконечности. Показать, что вне этой поверхности потенциал в бисферических координатах можно записать в виде

$$\psi = \frac{V_0}{2\pi} \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\mu} \frac{P_{ik-1/2}(\cos \eta)}{P_{ik-1/2}(\cos \eta_0)} dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\lambda} d\lambda}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta_0}},$$

где

$$P_{ik-1/2}(\cos \eta) = F\left(\frac{1}{2} - ik, \frac{1}{2} + ik \mid 1 \mid \sin^2 \frac{1}{2} \eta\right).$$

10.37. Показать, что в тороидальных координатах [см. (10.3.75)] z разлагается в ряд

$$z = \frac{\sqrt{8}}{\pi} a \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \eta Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) \sin'_1(n\eta).$$

При помощи этого ряда найти выражение для потенциала скоростей потока несжимаемой жидкости, обтекающего тор $\mu = \mu_0$, если известно, что на бесконечности вектор скорости имеет величину v_0 и направлен вдоль оси этого тора.

10.38. Проводящий эллипсоид с осями $\lambda_0, \sqrt{\lambda_0^2 - b^2}, \sqrt{\lambda_0^2 - c^2}$ поддерживается при нулевом потенциале. Эллипсоид помещен в первоначально однородное поле напряженности E , причем самая длинная из его осей параллельна вектору напряженности. Показать, что потенциал вне эллипсоида равен

$$\psi = -Ez + E \frac{\lambda\mu\nu}{bc} \frac{D(b/c, \arcsin c/\lambda)}{D(b/c, \arcsin c/\lambda_0)},$$

где λ, μ, ν — эллипсоидальные координаты (см. стр. 289) и

$$D(k, \psi) = \int_0^\psi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{V 1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Найти заряд, индуцированный на эллипсоиде. Найти потенциал скоростей для соответствующей гидродинамической задачи.

Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические функции (см. Приложение, табл. I—V).

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \operatorname{ch}(iz),$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -i \operatorname{sh}(iz),$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x+y) + \frac{1}{2} \cos(x-y),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin(x+y) + \frac{1}{2} \sin(x-y),$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} \cos(x+y) + \frac{1}{2} \cos(x-y),$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-itu} du = 2\pi f(z) \text{ — интеграл Фурье.}$$

Для $m = 2, 4, 6, \dots$

$$\cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left[\cos mz + m \cos(m-2)z + \frac{m(m-1)}{2!} \cos(m-4)z + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{m(m-1) \dots \left(\frac{1}{2}m+1\right)}{2\left(\frac{1}{2}m\right)} \right],$$

$$\sin^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left[\frac{m(m-1) \dots \left(\frac{1}{2}m+1\right)}{2\left(\frac{1}{2}m\right)!} - \frac{m(m-1) \dots \left(\frac{1}{2}m+2\right)}{\left(\frac{1}{2}m-1\right)!} \cos 2z + \dots \right. \\ \left. \dots - (-1)^{\frac{1}{2}m} m \cos(m-2)z + (-1)^{\frac{1}{2}m} \cos mz \right],$$

$$\cos(mz) = \cos^m z - \frac{m(m-1)}{2!} \cos^{m-2} z \sin^2 z + \dots + (-1)^{\frac{1}{2}m} \sin^m z,$$

$$\sin(mz) = m \cos^{m-1} z \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cos^{m-3} z \sin^3 z + \dots \\ \dots - (-1)^{\frac{1}{2}m} m \cos z \sin^{m-1} z$$

Для $m = 1, 3, 5, 7, \dots$

$$\cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left[\cos mz + m \cos(m-2)z + \frac{m(m-1)}{2!} \cos(m-4)z + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{m(m-1) \dots \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right)!} \cos z \right],$$

$$\sin^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left[\frac{m \dots \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right)!} \sin z - \frac{m \dots \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right)!} \sin 3z + \dots \right. \\ \left. \dots - (-1)^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} m \sin(m-2)z + (-1)^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} \sin mz \right],$$

$$\cos(mz) = \cos^m z - \frac{m(m-1)}{2!} \cos^{m-2} z \sin^2 z + \dots + (-1)^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} m \cos z \sin^{m-1} z,$$

$$\sin(mz) = m \cos^{m-1} z \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cos^{m-3} z \sin^3 z + \dots \\ \dots + (-1)^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} \sin^m z.$$

Гиперболические функции.

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \cos(iz),$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = -i \sin(iz),$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z.$$

Производящие функции, связывающие гиперболические и тригонометрические функции

$$\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-nu} \cos(nz), \quad \frac{e^{-u} \sin z}{\operatorname{ch} u - \cos z} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} \sin(nz).$$

Функции Бесселя

[См. формулу (5.3.63) и следующие, таблицы X и XI Приложения.]

$$J_m(z) = \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2} \right)^m \left[1 - \frac{(z/2)^2}{1!(m+1)} + \frac{(z/2)^4}{2!(m+1)(m+2)} - \dots \right] \simeq$$

$$\underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left[z - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right], \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[2 \ln \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma - \phi(n+1) \right] J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m! (z/2)^{n-2m}} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \left[\sum_{r=1}^m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+n} \right) \right] \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\ln z - 0,11593], & n=0, \quad z \rightarrow 0, \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z} \right)^n, & n=1, 2, 3, \dots, \quad z \rightarrow 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left[z - \frac{1}{2} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], & \operatorname{Re} z > 0, \quad z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z), \quad N_{-m}(z) = (-1)^m N_m(z),$$

$$N_{m-1}(z) J_m(z) - N_m(z) J_{m-1}(z) = \Delta(J_m, N_m) = 2/\pi z,$$

$$e^{iz \cos \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi + \frac{1}{2}\pi)} J_m(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos(m\varphi) J_m(z),$$

$$H_m(z) = J_m(z) + iN_m(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz - \frac{1}{2}\pi i(m + \frac{1}{2})}.$$

См. также таблицы в конце гл. 11.

Общие формулы, относящиеся к функциям Бесселя. Если $Z_m(z) = aJ_m(z) + bN_m(z)$ и $Y_m(z) = cJ_m(z) + dN_m(z)$, где a, b, c, d не зависят от m и z , то

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dZ_m}{dz} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2} \right) Z_m = 0 - \text{уравнение Бесселя},$$

$$(2m/z) Z_m(z) = Z_{m-1}(z) + Z_{m+1}(z),$$

$$2 \frac{d}{dz} Z_m(z) = Z_{m-1}(z) - Z_{m+1}(z),$$

$$\int z^{m+1} Z_m dz = z^{m+1} Z_{m+1}(z), \quad \int z^{-m+1} Z_m dz = -z^{-m+1} Z_{m-1}(z),$$

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int Z_m(\alpha z) Y_m(\beta z) z dz = \beta z Z_m(\alpha z) Y_{m-1}(\beta z) - \alpha z Z_{m-1}(\alpha z) Y_m(\beta z),$$

$$\int [Z_0(\alpha z)]^2 z dz = \frac{1}{2} z^2 [Z_0^2(\alpha z) + Z_1^2(\alpha z)],$$

$$\int [Z_m(az)]^2 z dz = \frac{1}{2} z^2 [Z_m^2(az) - Z_{m-1}(az) Z_{m+1}(az)],$$

$$\frac{d}{dz} [z^{m+1} Z_{m+1}(z)] = z^{m+1} Z_m(z), \quad \frac{d}{dz} [z^{-m+1} Z_{m-1}(z)] = -z^{-m+1} Z_m(z).$$

Соотношения, содержащие разложения в ряды. Если $r, r_0, R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi}$ являются сторонами треугольника, причем угол между r и r_0 равен φ , а угол между r_0 и R равен ψ , то

$$e^{i\psi} Z_\nu(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} J_m(kr) Z_{\nu+m}(kr_0),$$

где $0 < r < r_0, 0 < \psi < \frac{1}{2}\pi, \nu$ — вещественное число, $e^{2i\psi} = \frac{r_0 - re^{-i\varphi}}{r_0 - re^{i\varphi}}$

$$Z_0(kR) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(n\varphi) \cdot \begin{cases} J_n(kr) Z_n(kr_0), & r_0 > r, \\ J_n(kr_0) Z_n(kr), & r_0 < r, \end{cases}$$

$$\frac{Z_\nu(kR)}{R^\nu} = \frac{V\sqrt{2\pi}}{(krr_0)^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) T_m^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos \varphi) J_{\nu+m}(kr) Z_{\nu+m}(kr_0), \quad r_0 > r > 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) = \begin{cases} [1 - (x/b)^2]^\sigma, & 0 < |x| < b, \\ 0, & b < |x| < a, \end{cases}$$

где

$$B_0 = \frac{1}{2} V\pi \frac{b}{a} \frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)}, \quad B_n = V\pi \frac{b}{a} \frac{\Gamma(\sigma+1)}{(\pi n b/2a)^{\sigma+\frac{1}{2}}} J_{\sigma+\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi n b}{a}\right).$$

Гиперболические функции Бесселя.

$$I_m(z) = (1/i)^m J_m(iz) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{V\sqrt{2\pi z}} e^z,$$

$$K_m(z) = \frac{1}{2} \pi i^{m+1} [J_m(iz) + iN_m(iz)] \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

$$I_{-m}(z) = I_m(z), \quad K_m(z) = K_{-m}(z),$$

$$I_m(z) K_{m-1}(z) + I_{m-1}(z) K_m(z) = -\Delta(I_m, K_m) = 1/z,$$

$$I_{m-1}(z) - I_{m+1}(z) = \frac{2m}{z} I_m(z), \quad I_{m-1}(z) + I_{m+1}(z) = 2 \frac{d}{dz} I_m(z).$$

Определенные интегралы, содержащие функции Бесселя.

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos u} \cos(mu) du = \frac{2}{V\pi} \frac{(z/2)^m}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(z \cos u) \sin^{2m} u du;$$

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(zu)}{\sqrt{1-u^2}} du, \quad N_0(z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(z \operatorname{ch} u) du;$$

$$H_0(kx) = \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+t^2}}}{\sqrt{x^2+t^2}} dt, \quad K_0(kx) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{k^2+t^2}} dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{-kxu}}{\sqrt{u^2-1}} du;$$

$$J_m(z) = \frac{2(2/z)^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_1^{\infty} \frac{\sin(zt)}{(t^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} dt;$$

$$N_m(z) = \frac{-2(2/z)^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_1^{\infty} \frac{\cos(zt)}{(t^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} dt;$$

$$K_{m-n}(kx) = \frac{2^n \Gamma_*(n+1)}{k^n x^{m-n}} \int_0^{\infty} \frac{J_m(kt) t^{m+1}}{(t^2+x^2)^{n+1}} dt;$$

$$I_{\frac{1}{2}m}\left(\frac{1}{2}kx\right) K_{\frac{1}{2}m}\left(\frac{1}{2}kx\right) = \int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(kt)}{\sqrt{t^2+x^2}} dt;$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_m(bt) \frac{dt}{t} = \frac{1}{mb^m} [\sqrt{a^2+b^2}-a]^m, \quad a \text{ и } b \text{ — вещественные и положительные числа,}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_m(bt) t^m dt = \frac{(2b)^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (a^2+b^2)^{m+\frac{1}{2}}},$$

$$J_{m-n-1}(ax) = \frac{a^{n+1} x^{m-n-1}}{2^n \Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \frac{J_m(a\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{\frac{1}{2}m}} t^{2n+1} dt; \quad \frac{1}{2}m - \frac{1}{4} > n > -1;$$

$$\frac{e^{iuv}}{v} = \int_0^{\infty} \frac{J_0(tv)}{\sqrt{t^2-u^2}} t dt;$$

$$\int_0^{\pi/2} J_{\mu}(z \sin u) \sin^{\mu+1} u \cos^{2\nu+1} u du = \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}} J_{\mu+\nu+1}(z);$$

$$K_{m-n-1}(ax) = \frac{a^{n+1} x^{m-n-1}}{2^n \Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \frac{K_m(a\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{\frac{1}{2}m}} t^{2n+1} dt, \quad n > -1;$$

$$\int_0^{\infty} J_{m+1}(at) J_n(bt) t^{n-m} dt = \begin{cases} 0, & b > a \geq 0; \\ \frac{(a^2-b^2)^{m-n} b^n}{2^{m-n} a^{m+1} \Gamma(m-n+1)}, & a \geq b \geq 0; \end{cases}$$

a, b, m, n — вещественные числа, $m+1 > n > -1$;

$$\int_0^{\infty} J_m(bt) J_n(a\sqrt{t^2+x^2}) (t^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} t^{m+1} dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & b > a \geq 0, \\ \frac{b^m}{a^n} \left[\frac{1}{x} \sqrt{a^2-b^2} \right]^{n-m-1} J_{n-m-1}(x\sqrt{a^2-b^2}), & a > b \geq 0, \end{cases}$$

x, a, b, m, n — вещественные числа, $n > m > -1$.

$$\int_0^{\infty} \frac{[J_m(\sqrt{t^2+z^2})]^2}{(t^2+z^2)^m} t^{2m-2} dt = \int_z^{\infty} \frac{[J_m(u)]^2}{u^{2m-1}} (u^2-z^2)^{m-\frac{3}{2}} du =$$

$$= \frac{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)}{2z^{m+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} S_m(2z), \quad \operatorname{Re} m > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0,$$

где

$$S_m(z) = \frac{2(z/2)^m}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(z \cos u) \sin^{2m} u du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{m+2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+n+\frac{3}{2}\right)} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim}$$

$$\underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(z/2)^{m-1}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left[z - \frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\right], \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} [J_1(x \sin \theta)]^2 \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int_0^1 \frac{[J_1(xu)]^2}{u\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} J_1(2x).$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} N_0(bt) dt = -\frac{2/\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left[\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a} \right],$$

a, b — вещественные и положительные.

$$\int_0^{\infty} J_m(tz) t dt \int_0^{\infty} J_m(tu) F(u) u du = F(z) \text{ — интеграл Фурье—Бесселя.}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_m(z \sin \vartheta) \sin^{m+1} \vartheta \cos^{2n+1} \vartheta d\vartheta = \frac{2^n \Gamma(n+1)}{z^{n+1}} J_{m+n+1}(z),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_m(a \sin \theta) J_n(b \cos \theta) \sin^{m+1} \theta \cos^{n+1} \theta d\theta = a^m b^n \frac{J_{m+n+1}(\sqrt{a^2+b^2})}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(m+n+1)}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(a \cos \theta) \cos(b \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} \pi J_0(\sqrt{a^2+b^2}),$$

$$\int_0^\pi e^{iz \cos \vartheta \cos u} J_m(z \sin \vartheta \sin u) P_n^m(\cos u) \sin u \, du = i^{n-m} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} P_n^m(\cos \vartheta) J_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

Функции Лежандра

[См. (5.3.36) и стр. 726 тома I; см. также Приложение, табл. VI—IX и XIII.]

$$\begin{aligned} P_n^m(z) &= (1-z^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}m} T_{n-m}^m(z) = \\ &= \frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dz^{m+n}} (z^2-1)^n = \quad (m, n = 0, 1, 2, 3, \dots; m \leq n) \\ &= \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!} \left(\frac{1-z^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}m} F\left(m-n, m+n+1 \mid m+1 \mid \frac{1-z}{2}\right) = \\ &= \frac{i^n (2n)!}{2^n n! (n-m)!} (z^2-1)^{\frac{1}{2}m} z^{n-m} F\left(\frac{m-n}{2}, \frac{m-n+1}{2} \mid \frac{1}{2}-n \mid \frac{1}{z^2}\right), \\ P_{m+2l+1}^m(0) &= 0, \quad P_{m+2l}^m(0) = \frac{(-1)^l (2m+2l)!}{2^{m+2l} l! (m+l)!}. \end{aligned}$$

Для $z = \cos \vartheta$

$$P_0^0 = 1, \quad P_1^0 = z = \cos \vartheta, \quad P_2^0 = \frac{1}{2} (3z^2 - 1) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\vartheta + 1),$$

$$P_3^0 = \frac{1}{2} (5z^3 - 3z) = \frac{1}{8} (5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta), \dots,$$

$$P_1^1 = \sqrt{1-z^2} = \sin \vartheta, \quad P_2^1 = 3z \sqrt{1-z^2} = \frac{3}{2} \sin 2\vartheta,$$

$$P_3^1 = \frac{3}{2} \sqrt{1-z^2} (5z^2 - 1) = \frac{3}{8} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta), \dots,$$

$$P_2^2 = 3(1-z^2) = \frac{3}{2} (1 - \cos 2\vartheta),$$

$$P_3^2 = 15z(1-z^2) = \frac{15}{4} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta), \dots,$$

$$P_3^3 = 15(1-z^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4} (3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta), \dots$$

$$\begin{aligned} (2n+1) \sqrt{1-z^2} P_n^m(z) &= P_{n+1}^{m+1}(z) - P_{n-1}^{m+1}(z) = \\ &= (n+m)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1}(z) - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}(z), \end{aligned}$$

$$(2n+1) z P_n^m(z) = (n-m+1) P_{n+1}^m(z) + (n+m) P_{n-1}^m(z).$$

$$(1-z^2) \frac{d}{dz} P_n^m(z) = (n+1) z P_n^m(z) - (n-m+1) P_{n+1}^m(z),$$

$$\frac{d}{dz} [(1-z^2)^{\frac{1}{2}m} P_n^m(z)] = -(n-m+1)(n+m)(1-z^2)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}} P_n^{m-1}(z).$$

$$\int_{-1}^1 P_n^m(z) P_l^m(z) dz = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nl},$$

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^m(z) P_n^k(z)}{1-z^2} dz = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mk},$$

$$\frac{2^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \sin^m \vartheta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [1+h^2-2h \cos \vartheta]^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_{n+m}^m(\cos \vartheta),$$

$$P_n^m(z) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}m} \int_z^1 du_1 \int_{u_1}^1 du_2 \dots \int_{u_{m-1}}^1 du_m P_n(u_m).$$

Зональные гармоники: $P_n(z) = P_n^0(z) = T_n^0(z)$ (см. стр. 695 тома I).

$$P_{2n}(z) = (-1)^n \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} F\left(-n, n + \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| z^2\right),$$

$$P_{2n+1}(z) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{[2^n n!]^2} z F\left(-n, n + \frac{3}{2} \middle| \frac{3}{2} \middle| z^2\right),$$

$$(2n+1)z^{2n} = P_0(z) + \frac{5 \cdot 2n}{2n+3} P_2(z) + \frac{9 \cdot 2n(2n-2)}{(2n+3)(2n+5)} P_4(z) + \dots,$$

$$(2n+3)z^{2n+1} = 3P_1(z) + \frac{7 \cdot 2n}{2n+5} P_3(z) + \frac{11 \cdot 2n(2n-2)}{(2n+5)(2n+7)} P_5(z) + \dots,$$

$$\frac{d}{dz} P_n(z) = (2n-1) P_{n-1}(z) + (2n-5) P_{n-3}(z) + (2n-9) P_{n-5}(z) + \dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{2/\pi}{\sin \vartheta} = P_0(\cos \vartheta) + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2(\cos \vartheta) + 9 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 P_4(\cos \vartheta) + \\ + 13 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 P_6(\cos \vartheta) + \dots, \end{aligned}$$

$$\int (2n+1) P_n(z) dz = [P_{n+1}(z) - P_{n-1}(z)],$$

когда $n=0$, $P_{-1}(z)$ следует считать равным 1;

$$\int_0^\pi P_{2n}(\cos \vartheta) d\vartheta = \pi \left\{ \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} \right\}^2,$$

$$\int_0^\pi P_{2n+1}(\cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = \pi \frac{(2n)! (2n+2)!}{[2^n n! 2^{n+1} (n+1)!]^2};$$

$$\int_0^\pi P_n(\cos \vartheta) \sin(m\vartheta) d\vartheta =$$

$$= \begin{cases} 2 \frac{(m+n-1)(m+n-3) \dots (m-n+1)}{(m+n)(m+n-2) \dots (m-n)}, & \text{если } n < m, \text{ а } (n+m) \text{ нечетно,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$P_n[\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] =$$

$$= P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta_0) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)].$$

Если $Z_n(\vartheta_0, \varphi_0) = a_0 P_n(\cos \vartheta_0) + \sum_{m=1}^n a_m \cos(m\varphi_0 + \alpha_m) P_n^m(\cos \vartheta_0)$, то

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{2\pi} Z_n(\vartheta_0, \varphi_0) P_n[\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 = \\ = \frac{4\pi}{2n+1} Z_n(\vartheta, \varphi).$$

$$\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \beta \right] P_n(\cos \vartheta) = \begin{cases} 1/\sqrt{\cos \beta - \cos \vartheta}, & 0 \leq \beta < \vartheta \leq \pi, \\ 0, & 0 \leq \vartheta < \beta \leq \pi; \end{cases}$$

$$\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \beta \right] P_n(\cos \vartheta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \beta < \vartheta \leq \pi, \\ 1/\sqrt{\cos \vartheta - \cos \beta}, & 0 \leq \vartheta < \beta \leq \pi. \end{cases}$$

Функции Лежандра второго рода [см. формулу (5.3.41) и следующие].

$$Q_n^m = (-1)^m (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z) = (-1)^m (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} V_{n-m}^m(z) = \\ = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \frac{2^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (n+m)!}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) (2z)^{n+m+1}} F\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2} \middle| n + \frac{3}{2} \middle| \frac{1}{z^2}\right),$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z^2 - 1)^n \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \right] - \frac{1}{2} P_n(z) \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right).$$

Для того чтобы функция Q была однозначной, мы проводим разрез по вещественной оси между точками $+1$ и -1 .

$$\text{Для } z = \operatorname{ch} \mu, \quad \operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \mu \right) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}},$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = \ln \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \mu \right) \right] = 2 \operatorname{Arth}(e^{-\mu}):$$

$$Q_0^0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = \ln \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \mu \right) \right],$$

$$Q_1^0 = \frac{1}{2} z \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - 1 = \operatorname{ch} \mu \ln \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \mu \right) \right] - 1,$$

$$Q_2^0 = \frac{1}{4} (3z^2 - 1) \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - \frac{3}{2} z = \\ = \frac{1}{8} [3 \operatorname{ch}(2\mu) + 1] \ln \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \mu \right) \right] - \frac{3}{2} \operatorname{ch} \mu,$$

$$Q_1^1 = \sqrt{z^2 - 1} \left[\frac{z}{z^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \right] = \operatorname{cth} \mu - \operatorname{sh} \mu \ln \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \mu \right) \right],$$

$$Q_2^1 = \sqrt{z^2 - 1} \left[\frac{3z^2 - 2}{z^2 - 1} - \frac{3}{2} z \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \right] = \\ = \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} + 3 \operatorname{sh} \mu - \frac{3}{2} \operatorname{sh}(2\mu) \ln \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \mu \right) \right],$$

$$Q_3^2 = \frac{3}{2} (z^2 - 1) \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - \frac{3z^3 - 5z}{z^2 - 1} = \\ = \frac{3}{2} [\operatorname{ch}(2\mu) - 1] \ln \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \mu \right) \right] - \operatorname{ch} \mu \left[3 - \frac{2}{\operatorname{sh}^2 \mu} \right].$$

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(z) - \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(z) \dots,$$

$$\begin{aligned}
 (2n+1) \sqrt{z^2-1} Q_n^m(z) &= Q_{n-1}^m(z) - Q_{n+1}^m(z), \\
 (2n+1) z Q_n^m(z) &= (n-m+1) Q_{n+1}^m(z) + (n+m) Q_{n-1}^m(z), \\
 (z^2-1) \frac{d}{dz} Q_n^m(z) &= (n-m+1) Q_{n+1}^m(z) - (n+1) z Q_n^m(z),
 \end{aligned}$$

Для $|h| < 1$ мы имеем

$$\frac{\operatorname{Ar} \operatorname{ch} \left[h \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} - \operatorname{cth} \mu \right]}{\sqrt{1+h^2-2h \operatorname{ch} \mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n Q_n(\operatorname{ch} \mu).$$

Для точки $z = x + iy$, лежащей внутри эллипса, проходящего через точку t и имеющего фокусы в точках ± 1 , сходится разложение

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(z) Q_n(t).$$

Если $\mu > \mu_0$, то имеет место разложение

$$\begin{aligned}
 Q_n[\operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 + \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \mu_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] &= \\
 &= Q_n(\operatorname{ch} \mu) P_n(\operatorname{ch} \mu_0) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} i^m Q_n^m(\operatorname{ch} \mu) P_n^m(\operatorname{ch} \mu_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)].
 \end{aligned}$$

Отметим, что $P_n^m(\operatorname{ch} \mu_0) = i^m \operatorname{sh}^m \mu_0 T_{n-m}^m(\operatorname{ch} \mu_0)$,

$$\Delta(P_n^m, Q_n^m) = \frac{n-m+1}{1-z^2} [P_{n+1}^m(z) Q_n^m(z) - P_n^m(z) Q_{n+1}^m(z)] = \frac{i^m (n+m)!}{(n-m)! (1-z^2)}.$$

Функции мнимого аргумента.

$$P_n^m(iz) = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} (z^2+1)^{\frac{1}{2}m} (iz)^{n-m} F\left(\frac{m-n}{2}, \frac{m-n+1}{2} \middle| \frac{1}{2}-n \middle| -\frac{1}{z^2}\right),$$

$$Q_n^m(iz) =$$

$$= i^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} (z^2+1)^{\frac{1}{2}m} (iz)^{-n-m-1} F\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2} \middle| n + \frac{3}{2} \middle| -\frac{1}{z^2}\right),$$

$$Q_0^0(iz) = -i \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/z), \quad Q_1^0(iz) = z \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/z) - 1,$$

$$Q_1^1(iz) = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} - \sqrt{z^2+1} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/z).$$

Торондальные гармоники.

$$P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) = i^m \operatorname{sh}^m(\mu) T_{n-m-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) =$$

$$= \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \frac{\operatorname{th}^m \mu}{\operatorname{ch}^{-n+\frac{1}{2}} \mu} F\left(\frac{m-n+\frac{1}{2}}{2}, \frac{m-n+\frac{3}{2}}{2} \middle| m+1 \middle| \operatorname{th}^2 \mu\right) =$$

$$= \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \frac{\operatorname{th}^m\left(\frac{1}{2}\mu\right)}{\operatorname{ch}^{1-2n}\left(\frac{1}{2}\mu\right)} F\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}+m-n \middle| m+1 \middle| \operatorname{th}^2 \frac{1}{2}\mu\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i^m (n-1)! 2^n}{V^{2\pi} \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{th}^m \mu \operatorname{ch}^{n-\frac{1}{2}} \mu \times \\
&\quad \times \left[1 + \frac{\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\left(m-n+\frac{3}{2}\right)}{1!(1-n)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sech} \mu\right)^2 + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\left(m-n+\frac{3}{2}\right)\left(m-n+\frac{5}{2}\right) \dots \left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{(n-1)!(1-n)(2-n) \dots (-2)(-1)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sech} \mu\right)^{2n-2} \right] - \\
&\quad - (-i)^m \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^{n-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} n!} \frac{\operatorname{th}^m \mu}{\operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}} \mu} \ln [\operatorname{sech} \mu] \times \\
&\quad \times F\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{n+m+\frac{3}{2}}{2} \mid n+1 \mid \operatorname{sech}^2 z\right) + \\
&\quad + (-i)^m \frac{2^{m-1}}{\pi^2} \frac{\operatorname{th}^m \mu}{\operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}} \mu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{n+m+\frac{3}{2}}{2}\right)}{s!(n+s)!} \times \\
&\quad \times \left[\psi(s+1) + \psi(n+s+1) - \psi\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + s + \frac{1}{4}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \psi\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + s + \frac{3}{4}\right) \right] \operatorname{sech}^{2s} \mu
\end{aligned}$$

(при $m=0$ первое слагаемое исчезает),

$$Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) = (-1)^m \operatorname{sh}^m(\mu) V_{n-m-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} \mu) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{V \pi \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^{n+\frac{1}{2}} n!} \frac{\operatorname{cth}^m \mu}{\operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}} \mu} F\left(\frac{n-m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{n-m+\frac{3}{2}}{2} \mid n+1 \mid \operatorname{sech}^2 \mu\right) = \\
&= 2^{m-1} (m-1)! \frac{\operatorname{sech}^{n+\frac{1}{2}} \mu}{\operatorname{th}^m \mu} \left[1 + \frac{\left(n-m+\frac{1}{2}\right)\left(n-m+\frac{3}{2}\right)}{1!(1-m)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} \mu\right)^2 + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(n-m+\frac{1}{2}\right)\left(n-m+\frac{3}{2}\right)\left(n-m+\frac{5}{2}\right) \dots \left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{(m-1)!(1-m)(2-m) \dots (-2)(-1)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} \mu\right)^{2m-2} \right] - \\
&\quad - (-1)^m \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m! \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{th}^m \mu \operatorname{sech}^{n+\frac{1}{2}} \mu \ln [\operatorname{th} \mu] \times \\
&\quad \times F\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{n+m+\frac{3}{2}}{2} \mid m+1 \mid \operatorname{th}^2 \mu\right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^m \frac{2^{n-\frac{3}{2}} \operatorname{sech}^{n+\frac{1}{2}} \mu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{n+m+\frac{3}{2}}{2}\right)}{s!(m+s)!} \times \\
& \times \left[\psi\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}+s\right) + \psi\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+\frac{3}{4}+s\right) - \right. \\
& \left. - \psi(s+1) - \psi(m+s+1) \right] \operatorname{th}^{2s} \mu.
\end{aligned}$$

Определитель Вронского для этих решений равен

$$\begin{aligned}
\Delta(P, Q) &= P_{n-\frac{1}{2}}^m \frac{d}{d\mu} Q_{n-\frac{1}{2}}^m - Q_{n-\frac{1}{2}}^m \frac{d}{d\mu} P_{n-\frac{1}{2}}^m = - \frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right) \operatorname{sh} \mu}, \\
\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \eta}} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) \cos(n\eta).
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи, в которых обсуждаются решения уравнения Лапласа:

- Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Гостехиздат, М., 1953.
 Зоммерфельд А., Уравнения в частных производных математической физики, Издат. иностр. лит., М., 1951.
 Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
 Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957.
 Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ГИИ, М., 1937.
 Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.
 Green G., Solution of Problems in Viscous Flow, Phil. Mag. 35, 250 (1944).
 Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, New York, 1925.
 Jeffreys H., Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1946, ch. 6.
 MacMillan W. D., Theory of the Potential, New York, 1930.
 Milne-Thomson L. M., Theoretical Hydrodynamics, London, 1938.
 Ramsay A. S., Treatise on Hydromechanics, London, 1920, pt. 2: Hydrodynamics.
 Rothe R., Ollendorff F., Pohlhausen K., Theory of Functions, Technology Press, Cambridge, 1933.
 Smythe W. R., Static and Dynamic Electricity, 2d ed., New York, 1950.
 Thomson J. J., Recent Researches in Electricity and Magnetism, Oxford, New York, 1893.

Волновое уравнение

В гл. 10 имело место известное нарушение логического единства в нашем изложении различных подходов к решению уравнения Лапласа, обусловленное включением специальных методов теории функций комплексного переменного. Эти методы весьма ценны и не могут быть опущены, но их применимость ограничивается двумерным случаем, так что подход к двумерным задачам становится коренным образом отличным от подхода к задачам трехмерным. Определенная связь этих методов устанавливается интегральным представлением (10.3.2).

В настоящей главе логическое единство снова будет несколько нарушено. Специальный случай, когда имеет место простая гармоническая зависимость от времени, настолько важен, что его следует рассмотреть детально. Поскольку, однако, многие методы исследования этого специального случая неприменимы при отыскании решений с более общими временными зависимостями, логическое единство изложения в интересах лучшего понимания сущности явлений будет вновь нарушено. Однако связь между специальным и общим случаями устанавливается при помощи интеграла Фурье.

Простое гармоническое колебание «волновой» среды может возникнуть двояким путем: либо как свободное, либо как вынужденное колебание. Можно так привести в движение систему, сообщив ей в определенных местах соответствующие импульсы, что ее последующее свободное движение будет периодическим, и *обычно* такое периодическое движение оказывается простым гармоническим колебанием. Частоты таких свободных колебаний являются вполне определенными собственными значениями для системы. С другой стороны, чисто гармонический источник или чисто гармоническое краевое условие любой частоты вызовет вынужденное движение системы с той же частотой (если вынуждающая частота равна одной из частот свободных колебаний, то амплитуда этого движения может быть бесконечной).

Во всех случаях, когда имеет место простая гармоническая зависимость от времени, эта временная зависимость может быть выделена: $\Psi = \psi_k(x, y, z) e^{-i\omega t}$, и получающееся уравнение для ψ_k оказывается уравнением Гельмгольца $\nabla^2 \psi_k + k^2 \psi_k = 0$, $k = \omega/c$. Другими словами, если только все части решения всюду гармонически зависят от времени с одной и той же частотой, то можно отделить временной сомножитель и изучать зависящее только от пространственных координат решение уравнения Гельмгольца. Этот пространственный сомножитель, как мы видели, на границе должен удовлетворять однородным краевым условиям Дирихле или Неймана, за исключением тех ее частей, которые служат источниками и на которых имеют место неоднородные условия.

Если однородные краевые условия выполняются на всей конечной замкнутой поверхности, то соответствующие решения ψ_k однородного уравнения Гельмгольца являются собственными функциями, собственные значения k^2 образуют дискретное множество и все свободные дви-

жения системы представимы в виде рядов по собственным функциям. Вынужденные простые гармонические колебания описываются решениями неоднородного уравнения Гельмгольца или решениями однородного уравнения, удовлетворяющими неоднородным краевым условиям (или и теми, и другими); неоднородности соответствуют распределению «источников» в областях, где может происходить обмен энергией между рассматриваемой системой и некоторой «вынуждающей» системой. Такие решения существуют для любого значения k .

Если найдены решения, представляющие собой вынужденные простые гармонические колебания для всех значений $k = \omega/c$, то при помощи интеграла Фурье можно вычислить движение системы, вынуждаемое силами, произвольным образом зависящими от времени.

Поэтому мы в этой главе затратим значительную часть нашего времени на получение решений уравнения Гельмгольца. Отправляясь от этих решений, можно будет найти выражения для свободных колебаний системы либо для реакции, или «отклика» системы (response) на произвольно зависящие от времени воздействия. Глава содержит прежде всего изложение метода собственных функций для решения в одном, двух и трех измерениях. Оказывается, что этот метод наиболее удобен для низких частот (длинные волны). Последние параграфы посвящены методу функции Грина, который оказывается также полезным (если только он применим) в случае предельно высоких частот (очень коротких волн). В первом параграфе будут рассмотрены некоторые интересные видоизменения обычного волнового уравнения.

11.1. Волновое движение, одна пространственная координата

В §§ 2.1 и 6.3 мы рассматривали движение абсолютно гибкой струны, натянутой между жесткими опорами. Здесь мы рассмотрим встречающиеся в физических задачах видоизменения этого простейшего случая. Затем будет исследовано распространение звука в трубах, причем будут отмечены полезные аналогии с электропередающими линиями. В обоих случаях мы будем изучать применение метода преобразования Фурье, связывающего установившуюся реакцию системы с ее свободными колебаниями и с переходным процессом.

Углубляя наше изучение простой струны, мы можем исследовать разнообразные эффекты, отличающие реальную струну от идеализированной. Так, например (что уже было отмечено в § 2.1), силы, действующие на каждый элемент реальной струны, не сводятся только к восстанавливающему действию натяжения, как это было принято в простейшем случае, но зависят и от многих других факторов. Струна колеблется в воздухе или в какой-либо другой среде, которая создает дополнительную нагрузку на струну — как реактивную, так и активную. Реальные струны имеют некоторую жесткость и внутреннее трение, а концы никогда не бывают закреплены абсолютно жестко.

Большей частью дополнительные факторы оказывают по сравнению с натяжением сравнительно малое влияние на движение струны (этим прежде всего и объясняется то, что задача о простой струне представляет интерес). Далее оказывается полезным раздельно изучать эффекты, производимые одним или несколькими из этих усложняющих факторов, ибо эти эффекты в первом приближении аддитивны. В большинстве реальных процессов заметное влияние оказывает одновременно только один или два из этих дополнительных факторов. Поэтому вместо того, чтобы рассматривать без разбора все усложнения одновременно и получать неудобоваримо слож-

ный ответ, мы будем раздельно изучать движения струн *либо* с распределенным трением, *либо* с подвижными закреплениями, *либо* с дополнительной жесткостью и т. д.

Преобразование Фурье. Прежде чем последовательно рассматривать указанные дополнительные усложнения, полезно будет обрисовать связь между вынужденными и простыми гармоническими колебаниями, переходными процессами и свободными колебаниями, устанавливаемую при помощи преобразования Фурье. Силы могут быть приложены к струне (или к мембране, или к упругой среде, или к электромагнитному полю и т. д.) в некоторой области, лежащей внутри граничной поверхности или на этой поверхности. Если сила изменяется по простому гармоническому закону с частотой $\omega/2\pi$, то уравнение, описывающее процесс, оказывается неоднородным вида

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi F_\omega(x, y, z) e^{-i\omega t}$$

с однородными пространственными краевыми условиями в случае сил, приложенных внутри, или же однородным вида

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

в случае сил, приложенных на границе, с неоднородными краевыми условиями $\alpha \Psi(\mathbf{r}^s) + \beta B(\mathbf{r}^s) = F_\omega(\mathbf{r}^s) e^{-i\omega t}$ на соответствующей части границы. (B , как и прежде, означает нормальную к поверхности составляющую градиента Ψ .) В обоих случаях решение, описывающее установившийся режим, можно искать в виде $\Psi = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t}$, причем функция ψ должна удовлетворять неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -4\pi F_\omega, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

с однородными краевыми условиями или однородному уравнению

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

с неоднородными краевыми условиями $\alpha \psi(\mathbf{r}^s) + \beta N(\mathbf{r}^s) = F_\omega(\mathbf{r}^s)$ на части границы ($B = N e^{-i\omega t}$).

При первом обзоре метода нет необходимости останавливаться на всех этих деталях. Достаточно сказать, что сила $F(\omega) e^{-i\omega t}$, имеющая характер простой гармоник, вызывает реакцию системы, «амплитуда» которой равна произведению «амплитуды» $F(\omega)$ вынуждающей силы на функцию $\psi(x, y, z)$, представляющую собой амплитуду реакции системы на «единичную» силу.

Сила $F(\omega) e^{-i\omega t}$ вызывает установившуюся реакцию системы вида

$$F(\omega) \psi(x, y, z | \omega) e^{-i\omega t},$$

где ψ — реакция системы на единичную силу частоты $\omega/2\pi$ — называется по аналогии с теорией электрических цепей *адмитансом* (или *проводимостью*) системы.

Если мы интересуемся только установившимися реакциями системы на чисто гармонические силы, то нет необходимости что-либо добавлять к сказанному. Но мы желаем также вычислить реакцию системы на произвольную непериодическую силу $f(t)$. Естественно, конечно, достигнуть этого, разложив $f(t)$ на ее простые гармоникки при помощи интеграла Фурье [см. (4.8.2)]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (11.1.1)$$

Тогда, решив задачу об установившемся процессе и найдя адмитанс системы $\psi(x, y, z|\omega)$, мы собираем отдельные компоненты, соответствующие всем возможным частотам, и получаем реакцию системы на заданную непериодическую силу:

$$\Psi(x, y, z|t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, z|\omega) F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (11.1.2)$$

Все это вполне ясно, пока интеграл $F(\omega)$, содержащий $f(t)$, абсолютно сходится. Однако может оказаться, если, например, адмитанс $\psi(x, y, z|\omega)$ имеет особенности на действительной оси ω , что интеграл в (11.1.2) не будет абсолютно сходящимся. Можно, конечно, вычислить этот интеграл, рассматривая его как контурный интеграл и установив определенный «обход» особенностей. Однако результаты будут существенно различны в зависимости от того, будем ли мы обходить особенности по дугам окружностей, расположенным выше особенностей (в верхней полуплоскости) или ниже (в нижней полуплоскости). Поэтому мы должны обратиться к физике явления, чтобы найти правило обхода, соответствующее реальному процессу.

Только недиссипативные системы имеют адмитанс с особенностями на действительной ω -оси. В самом деле, как мы вскоре увидим, полюсы адмитанса, рассматриваемого как функция от комплексной величины $\omega = 2\pi\nu + i\chi$, определяют частоты ν_n и соответствующие постоянные затухания χ_n свободных колебаний системы. Если учитывается трение, то все полюсы должны быть *ниже* действительной ω -оси ($\omega_n = 2\pi\nu_n - i\chi_n$), ибо временной множитель для свободных колебаний системы имеет вид $\exp(-i\omega_n t) = \exp(-2\pi i\nu_n t - \chi_n t)$ и амплитуда должна *уменьшаться* с течением времени. Так как трение не может быть отрицательным, то выше действительной ω -оси полюсов адмитанса быть не может.

Мы видим теперь, почему затруднительно применять формулу (11.1.2), когда адмитанс ψ имеет полюсы на действительной оси. Это может произойти только в том случае, когда в системе нет трения и, следовательно, когда собственные колебания не затухают. В этом случае принципиально нельзя оперировать понятием вынужденного установившегося колебания. В самом деле, под установившимся колебанием понимают процесс, в котором неустановившаяся составляющая свободного колебания затухла и осталось только вынужденное движение; между тем при отсутствии трения эта неустановившаяся составляющая не может затухнуть. В таких случаях следует учесть, что не бывает реальных систем, абсолютно лишенных трения, и даже при исключительно малой постоянной затухания собственные колебания по прошествии достаточно большого времени затухнут, оставив только установившееся колебание. На этом основании мы должны считать и в этом предельном случае полюсы адмитанса немного смещенными *вниз* от действительной ω -оси. Таким образом, контур интегрирования должен проходить *выше* всех полюсов адмитанса ψ .

Чтобы избежать необходимости повторять эти длинные рассуждения каждый раз, когда мы имеем систему с «пренебрежимым» трением, можно просто предположить, что контур интегрирования в формуле (11.1.2) проходит на бесконечно малом расстоянии *выше* действительной ω -оси. При этом можно быть уверенным, что контур пройдет *над* всеми полюсами функции $\psi(x, y, z|\omega)$, даже если предположить, что трением в системе пренебрегли и полюсы расположены на действительной ω -оси. Такое соглашение приводит к сходящимся интегралам только при $t > 0$. Это обстоятельство не всегда является серьезным препятствием, так как вынуждающие силы обычно не имеют бесконечной предыстории и их можно считать равными нулю до определенного момента времени, который следует принять за $t = 0$. Если до момента $t = 0$ система находилась в покое, то такое

упрощающее предположение относительно вынуждающих сил вполне оправдано. На ближайших страницах мы покажем его значение.

Струна с трением. В качестве примера применения нашей процедуры рассмотрим гибкую струну, находящуюся под натяжением T и колеблющуюся в некоторой среде с малым трением. В соответствии с § 2.1 мы находим, что уравнение движения струны имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - R \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (11.1.3)$$

где ρ — масса единицы длины струны, R — сопротивление трения среды на единицу длины при единичной скорости этой части струны. Здесь скорость распространения волны будет равна $c = \sqrt{T/\rho}$. Для реальной среды сопротивление R зависит от частоты, но для упрощения задачи предположим сначала, что оно постоянно.

Если мы приложим в точке $x = x_0$ чисто гармоническую поперечную вынуждающую силу, то нужно будет удовлетворить неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{2\kappa}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F(x_0|\omega) \delta(x - x_0) e^{-i\omega t},$$

где $\kappa = R/2\rho$, $c^2 = T/\rho$, а $F(x_0|\omega)$ представляет собой отношение амплитуды приложенной силы к натяжению T струны. Чтобы найти установившуюся реакцию струны, полагаем $y(x, t) = \psi(x|\omega) e^{-i\omega t}$ и получаем неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{c^2} (\omega^2 + 2i\kappa\omega) \psi = -F(x_0|\omega) \delta(x - x_0). \quad (11.1.3')$$

Как мы видели в § 2.1 и 7.2, решение этого уравнения имеет разрыв производной в точке $x = x_0$ со скачком, равным значению функции F .

Предположим, что концы струны закреплены абсолютно жестко и что они находятся в точках $x = 0$ и $x = l$, где l — длина струны. Комбинируя решения однородного уравнения, обращающиеся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, так, чтобы получить единичный разрыв производной при $x = x_0$, находим функцию Грина

$$G(x|x_0|\omega) = \begin{cases} \frac{\sin(kx) \sin[k(l-x_0)]}{k \sin(kl)}, & x < x_0, \\ \frac{\sin(kx_0) \sin[k(l-x)]}{k \sin(kl)}, & x > x_0, \end{cases} \quad (11.1.4)$$

где $k = (\omega/c) \sqrt{1 + 2i\kappa/\omega}$. Решение уравнения (11.1.3') будет иметь вид $\psi = F(\omega) G(x|x_0|\omega)$. Отношение амплитуды смещения к амплитуде силы, $\psi/F = G$, является *адмитансом* струны для пары точек x, x_0 . Как функция от ω он имеет полюсы там, где $\sin(kl)$ обращается в нуль, т. е. при $kl = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), или при $\omega^2 + 2i\kappa\omega - (n\pi c/l)^2 = 0$. Корни этого уравнения

$$\omega_n = 2\pi\nu_n - i\kappa, \quad \nu_n = \frac{nc}{2l} \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa l}{n\pi c}\right)^2} \quad (11.1.5)$$

лежат, как мы и предвидели, ниже действительной оси на расстоянии κ от нее. Увеличение коэффициента сопротивления R увеличивает расстояние полюсов от действительной оси.

Решив задачу об установившихся колебаниях струны для частоты $\omega/2\pi$, мы можем, применяя формулы (11.1.1) и (11.1.2), получить реакцию струны на силу вида $Tf(t)\delta(x - x_0)$, приложенную в точке x_0 .

Пусть, например, сила $Tf(t)$ является односторонним толчком в точке $x = x_0$, так что функция $f(t) = (P_0 a / 2T) e^{-a|t|}$ достигает максимума при $t = 0$ и экспоненциально убывает по обе стороны от точки $t = 0$. Полный поперечный импульс, сообщаемый струне в точке $x = x_0$, составит

$$T \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = P_0 \quad \text{дин} \cdot \text{сек}$$

(поскольку F и f даны на единицу натяжения T , мы умножаем на T для получения силы в динах). Преобразование Фурье этой вынуждающей силы дает

$$\begin{aligned} F(x_0 | \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{P_0 a}{2T} \left[\int_{-\infty}^0 e^{at + i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at + i\omega t} dt \right] = \\ &= \frac{P_0 a}{2T} \left[\frac{1}{a + i\omega} + \frac{1}{a - i\omega} \right] = \frac{P_0 a^2}{T(\omega^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

Эта функция имеет два простых полюса при $\omega = \pm ia$.

Чтобы найти «отклик» струны, мы применяем формулу (11.1.2). Интеграл, подлежащий вычислению, имеет вид

$$\frac{P_0 a^2}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} G(x | x_0 | \omega) \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 + a^2} d\omega.$$

Полюсами подинтегральной функции являются $\omega = \pm ia$ [для $F(x_0 | \omega)$] и $2\pi\gamma_n - i\kappa$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (для G). Интеграл с бесконечными пределами можно заменить интегралом по замкнутому контуру, если подинтегральная функция достаточно быстро стремится к нулю на полуокружности бесконечно большого радиуса, лежащей в верхней или нижней полуплоскости. Подставляя $k = \pm i\omega/c$, $\omega = \pm i\omega$, в формулу (11.1.4), находим, что G экспоненциально стремится к нулю как на верхней, так и на нижней полуокружности, за исключением случая $x = x_0$, когда $G = O(1/2|k|)$ на обеих полуокружностях¹⁾. Экспонента $e^{-i\omega t}$ стремится к нулю на верхней полуокружности (к бесконечности на нижней) при отрицательном t и к нулю на нижней (к бесконечности на верхней) при положительном t . Следовательно, контур интегрирования лежит в верхней полуплоскости ω при отрицательном t (контур пробегается в положительном направлении) и в нижней полуплоскости при положительном t (контур пробегается в отрицательном направлении).

Для отрицательных значений t единственный полюс подинтегральной функции, лежащий внутри контура, находится в точке $\omega = ia$. Вычет в этом полюсе равен

$$\frac{P_0 a^2}{2\pi T} G(x | x_0 | ia) \frac{e^{at}}{2ia} = \frac{P_0 a e^{at}}{4\pi i T k_a} \begin{cases} \frac{\text{sh}(k_a x) \text{sh}[k_a(l - x_0)]}{\text{sh}(k_a l)}, & x < x_0, \\ \frac{(\text{sh} k_a x_0) \text{sh}[k_a(l - x)]}{\text{sh}(k_a l)}, & x > x_0, \end{cases}$$

где $k_a = (a/c)\sqrt{1 + 2\kappa/a}$. Поскольку контурный интеграл (обход против часовой стрелки) равен вычету, умноженному на $2\pi i$, мы получаем сле-

¹⁾ На самом деле функция G имеет на прямой $\text{Im } \omega = -\kappa$ полюсы, расположенные сколь угодно далеко от начала, и поэтому нужно брать дискретную последовательность полуокружностей с неограниченно возрастающими радиусами, проходящих между полюсами. Интегралы по таким полуокружностям будут стремиться к нулю. — *Прим. перев.*

дующее выражение для формы струны при $t < 0$:

$$y(x|t) = \frac{P_0 a e^{at}}{2T k_a} \begin{cases} \frac{\text{sh}(k_a x) \text{sh}[k_a(l-x_0)]}{\text{sh}(k_a l)}, & x < x_0, \\ \frac{\text{sh}(k_a x_0) \text{sh}[k_a(l-x)]}{\text{sh}(k_a l)}, & x > x_0. \end{cases} \quad (11.1.6)$$

Для положительных значений t контур лежит в нижней полуплоскости ω и обходится в отрицательном (по часовой стрелке) направлении. В дополнение к полюсу в точке $-ia$, дающему член, аналогичный (11.1.6), имеется еще последовательность полюсов, лежащих в точках $\omega_n = 2\pi\nu_n - i\chi$. В n -м из этих полюсов выражение $\sin(kl)$ стремится к нулю как $(-1)^n (kl - n\pi) = (-1)^n (2l^2\nu_n/c^2)(\omega - \omega_n)$, так что вычет в этом полюсе равен

$$-\frac{P_0 a^2}{2\pi T} \frac{\sin(\pi n x/l) \sin(\pi n x_0/l)}{2\pi(l\nu_n/c^2)} \frac{e^{-2\pi i \nu_n t - \chi t + 2i\varphi_n}}{W_n^2},$$

где

$$\omega_n^2 + a^2 = (2\pi\nu_n)^2 - \chi^2 + a^2 - 2i\chi 2\pi\nu_n = W_n^2 e^{-2i\varphi_n}.$$

Каждому полюсу с положительным n соответствует полюс с отрицательным n , причем соответствующие значения ν_n , а значит, и φ_n имеют противоположные знаки. Следовательно, вычеты удобно сложить попарно. Окончательный результат для $t > 0$ имеет вид

$$y = \frac{2P_0 a^2 c^2}{Tl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x/l) \sin(\pi n x_0/l)}{2\pi\nu_n W_n^2} e^{-\chi t} \sin(2\pi\nu_n t - 2\varphi_n) + \\ + \frac{P_0 a e^{-at}}{2T k'_a} \begin{cases} \frac{\text{sh}(k'_a x) \text{sh}[k'_a(l-x_0)]}{\text{sh}(k'_a l)}, & x < x_0, \\ \frac{\text{sh}(k'_a x_0) \text{sh}[k'_a(l-x)]}{\text{sh}(k'_a l)}, & x > x_0, \end{cases} \quad (11.1.7)$$

где

$$k'_a = (a/c) \sqrt{1 - 2\chi/a}.$$

Сопоставляя это выражение с полученным ранее для $t < 0$, можно рассмотреть интересные свойства, типичные для всех переходных процессов. Решение состоит из члена, ведущего себя так же, как вынуждающая функция (член с $e^{\pm at}$), и ряда, представляющего свободное колебание, «вызванное» скачком вынуждающей функции при $t=0$. Частоты ν_n и постоянная затухания χ соответствуют собственной частоте и коэффициенту затухания свободных колебаний струны с трением. Итак, при помощи преобразования Фурье мы использовали выражение установившейся реакции системы для нахождения переходного процесса и для изучения свойств свободных колебаний системы. Поэтому в этой главе нашей первой задачей всегда будет нахождение установившейся реакции системы на единичную простую гармоническую вынуждающую силу. Мы знаем, что из решения этой задачи можно получить выражения для переходного процесса и для свободных колебаний.

Прежде чем покончить с этим примером, мы несколько упростим рассматриваемую процедуру. Полагая a бесконечно большим, мы сводим в пределе вынуждающую функцию к мгновенному импульсу P_0 , действующему в момент $t=0$ в точке x_0 . Реакция системы на импульс $P_0=1$ является двойной функцией Грина для силы, сосредоточенной и во времени и в пространстве. При $a \rightarrow \infty$ второй член исчезает и $W_n^2 \simeq a^2$, $\varphi_n \simeq 0$. «Импульсная

функция» для мгновенного импульса при $t = \tau$, сосредоточенного в точке $x = x_0$, равна

$$g(x|x_0|t-\tau) = \frac{2c^2}{Tl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x/l) \sin(\pi n x_0/l)}{2\pi v_n} e^{-\kappa(t-\tau)} \sin[2\pi v_n(t-\tau)] \quad (11.1.8)$$

при $t > \tau$, где $v_n = (nc/2l) \sqrt{1 - (\kappa l/\pi n c)^2}$. Если теперь к струне приложена распределенная сила с плотностью $f(x|t)$, произвольно зависящая от времени, то результирующий «отклик» струны можно найти, вычислив двойной интеграл

$$y(x|t) = \int_0^t dx_0 \int_{-\infty}^t f(x_0|\tau) g(x|x_0|t-\tau) d\tau, \quad (11.1.9)$$

представляющий собой сумму «откликов», вызванных приложенными при $t = \tau$ и $x = x_0$ единичными импульсами, умноженными на амплитуду силы при $x = x_0$ и $t = \tau$, для всех τ до момента t .

Эта формула показывает, что решение может быть получено в виде суммы реакций системы на все силы, приложенные до момента t . Результат получается в виде ряда Фурье по x как для членов, представляющих свободное колебание, так и для членов, зависящих от времени как вынуждающая функция $f(t)$. Таким образом, величина, определяемая равенством (11.1.6) и вторым слагаемым равенства (11.1.7), получается в виде ряда Фурье, эквивалентного соответствующей части выражения (11.1.9). Хотя ряд для импульсной функции g сходится только условно, ряд, получаемый интегрированием в формуле (11.1.9), сходится, если функция $f(x|t)$ кусочно непрерывна и если сходится интеграл от $|f|$ по t в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Преобразование Лапласа. В основе предыдущих рассуждений лежали некоторые предположения, на которых мы не останавливались. Так, например, мы предполагали, что если $F(\omega)$ является преобразованием Фурье вынуждающей функции $f(t)$ и $\psi(\omega)$ — установившееся решение для единичной гармонической силы, то $\psi(\omega)F(\omega)$ должно быть преобразованием Фурье реакции системы на силу $f(t)$. Это, несомненно правдоподобное, предположение следует, однако, тщательно исследовать, чтобы выявить пределы применимости формулы и возможные исключения.

Мы проведем доказательство при некоторых ограничениях, которые, однако, не будут служить препятствием при дальнейших расчетах. Именно, предположим, что к рассматриваемой системе на протяжении неограниченного промежутка времени до заданного момента не было приложено никаких сил, т. е. предположим, что система не подвергалась каким-либо воздействиям ранее определенного момента времени. Это, конечно, эквивалентно предположению, что система до этого момента (который может быть принят за момент $t=0$) была в покое или, в некоторых случаях, что система двигалась с постоянной скоростью. Следовательно, указывая положение и скорость системы в момент $t=0$ и задавая характер силы, действующей начиная с момента $t=0$, мы определяем тем самым движение системы.

Коль скоро мы ограничили силой, приложенной при $t > 0$, можно воспользоваться условием, указанным на стр. 315, согласно которому в интеграле Фурье мнимая часть ω больше нуля (или, лучше сказать, аргумент ω больше нуля, но меньше π). Интеграл, преобразую-

щий $f(t)$ в $F(\omega)$, принимает вид

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt, \quad 0 < \arg \omega < \pi,$$

причем отличная от нуля мнимая часть ω обуславливает наличие экспоненциального множителя с действительным отрицательным показателем, обеспечивающим сходимость интеграла¹⁾. В связи с этим в некоторых отношениях удобнее ввести вместо ω параметр p , полагая $\omega = ip$, и записывать интегралы так:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p = -i\omega, \quad (11.1.10)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega,$$

причем интегрирование во втором интеграле совершается вдоль прямой, проходящей на расстоянии ε ($\varepsilon > 0$) выше действительной оси ω -плоскости.

Поскольку $f(t)$ равна нулю при $t < 0$, из первого интеграла (11.1.10) видно, что $F(\omega)$ аналитична в полуплоскости, лежащей выше прямой $\text{Im } \omega = \varepsilon > 0$. В большинстве случаев можно затем при помощи аналитического продолжения выяснить поведение $F(\omega)$ в нижней полуплоскости, где F имеет особенности.

Взаимозависимость между F и f , p и ω , задаваемая соотношениями (11.1.10), называется *преобразованием Лапласа* (см. §§ 4.8 и 5.3); функция $F(\omega)$ также называется *преобразованием*, или *трансформантой* Лапласа функции $f(t)$. Пусть выполнены следующие условия: 1) функция $f(t)$ определена для всех действительных значений t и равна нулю для $t < 0$; 2) интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} f(t) dt$$

сходится для всех действительных значений c , не меньших чем некоторое $\varepsilon > 0$; 3) функция $F(\omega)$ аналитична при всех конечных ω , лежащих выше прямой $\text{Im } \omega = \varepsilon$; 4) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + ic)| dx$$

сходится для всех действительных значений c , не меньших чем ε . Тогда, если имеет место одно из соотношений (11.1.10), то имеют место оба эти соотношения²⁾. В частности, соотношение, определяющее $F(\omega)$ через интеграл от f по t , дает представление, годное для всех значений $\omega = ip$, для которых $\text{Im } \omega \geq \varepsilon$. В большинстве случаев при помощи аналитического продолжения можно определить характер $F(\omega)$ в нижней ω -полуплоскости, где интегральное представление непригодно.

¹⁾ Предполагается, что $f(t)$ возрастает не быстрее некоторой экспоненты.
— Прим. перев.

²⁾ Подробнее см., например, в книге Лаврентьева М. А. и Шабата Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2, М.—Л., 1958, стр. 462—469. — Прим. перев.

В дальнейших выкладках будут играть роль некоторые общие формулы, касающиеся преобразования Лапласа. Если f и F связаны между собой так, как указано в (11.1.10) и в предыдущем абзаце, то, интегрируя по частям, мы получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d}{dt} f(t) dt = [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) - i\omega F(\omega), \quad p = -i\omega.$$

Следовательно, преобразования Лапласа функций df/dt и d^2f/dt^2 определяются правилами:

преобразованием Лапласа $f(t)$ является $F(\omega)$;

$$\gg \gg f'(t) \gg pF(\omega) - f(0), \quad (11.1.11)$$

$$\gg \gg f''(t) \gg p^2F(\omega) - pf(0) - f'(0).$$

Предполагается, что производные удовлетворяют требованиям сходимости, указанным на стр. 320.

Подобным же образом, меняя порядок интегрирования и полагая затем $t - \tau = u$, получаем [см. (4.8.33)]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pu} f_2(u) du \end{aligned}$$

Следовательно, если

преобразованием Лапласа $f_1(t)$ является $F_1(\omega)$

и

преобразованием Лапласа $f_2(t)$ является $F_2(\omega)$,

то

$$\text{преобразованием Лапласа } \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \text{ является } F_1(\omega) F_2(\omega). \quad (11.1.12)$$

Струна с трением. Теперь применим этот аппарат к описанной на стр. 316 задаче о струне с трением, неподвижно закрепленной на обоих концах. Уравнение колебаний такой струны при силе $Tf(t)$, приложенной в точке $x = x_0$ (где f равно нулю для $t < 0$), согласно (11.1.3), имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\kappa \frac{\partial y}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \delta(x - x_0) f(x_0 | t), \quad (11.1.13)$$

где $\kappa = R/2\rho$, $c^2 = T/\rho$, T — натяжение в динах, ρ — масса единицы длины и R — сопротивление среды, рассчитанное на единицу длины струны, причем fT измеряется в динах. Смещение струны является функцией x и t .

Применим преобразование Лапласа к обоим частям уравнения, умножая их на e^{-pt} и интегрируя по t от 0 до ∞ ; мы получим

$$(p^2 + 2\kappa p) Y - c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = c^2 \delta(x - x_0) F(x_0 | \omega) + (p + 2\kappa) y(0) + y'(0),$$

где $Y(x, \omega)$ — преобразование Лапласа $y(x, t)$, F — преобразование Лапласа $f(t)$, $y(0)$ и $y'(0)$ — начальные смещение и скорость струны (функции от x , но не от t или ω) и $p = -i\omega$. Представляя Y в виде ряда Фурье

$\sum A_n \sin(\pi n x/l)$ и предполагая на время, что струна находилась в покое и равновесии до момента приложения силы, мы найдем, решая полученные уравнения относительно A_n :

$$Y(x, \omega) = \frac{2c^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x_0/l) \sin(\pi n x/l)}{p^2 + 2\kappa p + (\pi n c/l)^2} F(x_0 | \omega).$$

Однако эта не зависящая от времени амплитуда равна амплитуде силы $TF(x_0 | \omega)$, умноженной на функцию Грина для приложенной в точке $x = x_0$ силы единичной амплитуды и частоты $\omega/2\pi$,

$$G(x | x_0 | \omega) = \frac{2c^2}{lT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x_0/l) \sin(\pi n x/l)}{p^2 + 2\kappa p + (\pi n c/l)^2}. \quad (11.1.14)$$

Эта величина представляет собой преобразование Лапласа реакции, или «отклика», струны на единичный импульс, приложенный при $t=0$ и $x=x_0$. Так как

$$\int_0^{\infty} e^{-pt-bt} \sin(at) dt = \frac{a}{(p+b)^2 + a^2},$$

то мы видим, что G оказывается преобразованием Лапласа определенного в (11.1.8) ряда Фурье функции $g(x | x_0 | t)$. Окончательно получаем, что Y [являющееся произведением $G(x | x_0 | \omega)$ — преобразования Лапласа функции $g(x | x_0 | t)$ — и $F(x_0 | \omega)$ — преобразования Лапласа вынуждающей силы $f(x_0 | t)$] представляет собой преобразование Лапласа функции $y(x | x_0 | t)$ — истинного смещения струны под действием силы $f(x_0 | t)$. Поэтому, согласно (11.1.12),

$$y(x | x_0 | t) = \int_0^t f(x_0 | \tau) g(x | x_0 | t - \tau) d\tau; \quad (11.1.15)$$

если сила распределена вдоль струны, мы получаем выражение (11.1.9) для $y(x | t)$.

Таким образом, метод преобразования Лапласа позволяет сократить исследования сходимости и вычисления. Выигрывая в надежности метода, мы теряем в его гибкости и непосредственности. Чтобы перейти от G к g , мы должны решить обратную задачу, т. е. найти такое g , чтобы интеграл $\int_0^{\infty} e^{-pt} g dt$ был равен G . Эта задача очень похожа на задачу об интегрировании некоторых конкретных функций, которая решается разысканием ответа в таблице интегралов. В настоящее время существуют подобные же таблицы преобразований Лапласа, и нужную функцию часто можно найти в такой таблице. (Краткая таблица преобразований приведена в конце этой главы.) Если этого сделать не удастся, то можно применить второе соотношение (11.1.10) с сопутствующими усложнениями, связанными с контурными интегралами и вычислением вычетов.

Мы можем теперь резюмировать процедуру вычисления реакции системы, находившейся вначале в равновесии, на силу $f(x | t)$, приложенную в точке x_0 (находящуюся внутри системы или на ее границе) при $t > 0$:

Сначала вычисляют функцию Грина $G(x | x_0 | \omega)$ для установившейся реакции системы на силу единичной амплитуды и частоты $\omega/2\pi$, приложенную в точке x_0 , лежащей внутри или на границе. Для

этого решают неоднородное или однородное с неоднородными краевыми условиями уравнение Гельмгольца. Либо по второй формуле (11.1.10), либо обращая первую из этих формул, находят импульсную функцию $g(x|x_0|t)$, для которой G является преобразованием Лапласа. Реакция системы на силу $f(x|t)$ дается тогда формулой (11.1.15).

Это правило применимо, если система находилась в покое и функция $f(x|t)$ равнялась нулю при $t < 0$. Если система не находилась в покое при $t < 0$, то при вычислении преобразований Лапласа нужно учесть начальное положение и скорость, как показано в (11.1.11). В оставшейся части параграфа будет продемонстрирован ряд приложений этого метода. Между прочим, интересно проследить тесную связь между преобразованиями Лапласа и Фурье и динамически сопряженными переменными квантовой механики, о которых была речь в § 2.6.

Струна в упругой среде. Чтобы рассмотреть пример системы, возбуждаемой на части границы, мы вновь вернемся к случаю гибкой струны в упругой среде, обсуждавшемуся уже в формуле (2.1.27) и далее.

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c^2 \mu^2 y, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}, \quad \mu^2 = \frac{K}{T}. \quad (11.1.17)$$

Предположим, что струна бесконечной длины и на нее действует поперечная сила, приложенная в ее конце $x=0$. Поперечная составляющая силы натяжения струны, как было показано, равна $-T(\partial y/\partial x)$, где T — натяжение струны. Как видно из уравнения (2.1.29), решение, соответствующее простой гармонической волне, бегущей в положительном направлении оси x , далеко от точки приложения вынуждающей силы $x=0$ имеет вид

$$y = A \exp \left[-\frac{x}{c} \sqrt{\mu^2 c^2 - \omega^2} - i\omega t \right].$$

Следовательно, решение уравнения Гельмгольца с неоднородным граничным условием $-T(\partial \psi/\partial x)_0 = 1$ (единичная амплитуда силы в точке $x=0$) имеет вид

$$G(x|0|\omega) = \frac{c}{T \sqrt{p^2 + \mu^2 c^2}} \exp \left[-\frac{x}{c} \sqrt{p^2 + \mu^2 c^2} \right], \quad p = i\omega. \quad (11.1.18)$$

Обращаясь к таблице преобразований Лапласа, помещенной в конце настоящей главы, мы находим импульсную функцию, которая соответствует «отклику» струны на единичный импульс, приложенный поперечно к концу струны $x=0$:

$$g(x|0|t) = \begin{cases} (c/T) J_0[\mu c \sqrt{t^2 - (x/c)^2}], & t > x/c, \\ 0, & t < x/c. \end{cases} \quad (11.1.19)$$

Форма этой волны показана на рис. 2.7, где она сравнивается с волной, вызванной таким же импульсом для простой струны и для струны с трением. Заметим, что, хотя фронт волны, передвигаясь вперед со скоростью c , остается резко выраженным, позади волны остается «след», с течением времени меняющий форму. В нашем случае фронт волны по мере ее продвижения становится заостреннее и уже.

Если на конце струны действует поперечная сила $f(t)$, то форма струны как функция от x и t в соответствии с (11.1.15) выражается инте-

гравом

$$y(x, t) = \frac{c}{T} \int_0^{t-x/c} f(\tau) J_0 \left[\mu c \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right] d\tau. \quad (11.1.20)$$

В случае необходимости это выражение может быть проинтегрировано численно.

Струна с нежестким закреплением. Может показаться, что способ определения свободных колебаний через установившиеся вынужденные колебания несколько сложен и что значительно легче найти свободные колебания непосредственно. Следующий пример покажет, что этот кажущийся обходным путь иногда является наиболее эффективным, а применение метода, кажущегося прямым, влечет за собой значительные трудности.

Предположим, что струна длины l , находящаяся под натяжением T , неподвижно закреплена в точке $x=0$, а ее конец $x=l$ закреплен нежестко. Это последнее закрепление имеет продольную сопротивляемость, достаточную, чтобы выдержать натяжение T , но может несколько смещаться под влиянием поперечного усилия, передаваемого опоре струной. Предположим, что этому смещению препятствуют трение и упругость закрепления. Таким образом, поперечная составляющая $-T(\partial y/\partial x)_l$ силы натяжения струны в точке $x=l$ равна сумме произведения R_s на поперечную скорость $(\partial y/\partial t)_l$ точки закрепления и произведения K_s на смещение $y(l)$ точки закрепления:

$$\begin{aligned} -T \frac{\partial y}{\partial x} &= R_s \frac{\partial y}{\partial t} + K_s y \quad \text{при } x=l, \\ y &= 0 \quad \text{при } x=0. \end{aligned} \quad (11.1.21)$$

Мы могли бы, конечно, предположить, что конец $x=0$ также может смещаться под влиянием поперечной силы, и включить в рассмотрение поперечную инерцию закрепления, однако уже введенных трудностей достаточно, чтобы продемонстрировать используемый метод, не запутывая вместе с тем результат излишними усложнениями; по той же причине мы пренебрегаем реакцией среды, окружающей струну.

Чтобы непосредственно рассчитать свободные колебания этой системы, нужно найти собственные функции

$$y = [A \sin(kx) + B \cos(kx)] e^{-ikt}$$

волнового уравнения, удовлетворяющие граничным условиям (11.1.21). Из этих условий следует, что B равно нулю и, таким образом,

$$y = \sin(kx) e^{-ikt},$$

где

$$-Tk \cos(kl) = -ikcR_s \sin(kl) + K_s \sin(kl),$$

или

$$\operatorname{tg}(kl) = -\frac{Tk}{K_s - ikcR_s}. \quad (11.1.22)$$

Корни этого трансцендентного уравнения для k являются собственными значениями k_n нашей системы. Наименьшее значение $k_0=0$, но его включать не следует, так как соответствующая собственная функция равна

нулю. Остальные корни могут быть с известными трудностями подсчитаны с любой желаемой точностью.

Трудность этой проблемы состоит не в вычислении собственных значений, а в применении собственных функций. Беда в том, что собственные функции *не ортогональны одна другой*. Не ортогональны же они потому, что *краевые условия зависят от собственных значений k* . В гл. 6 мы доказывали ортогональность собственных функций, интегрируя некоторую комбинацию решений, которая в рассматриваемом случае сводится к выражению

$$\left[y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right]_0^l = [k_1^2 - k_2^2] \int_0^l y_1 y_2 dx.$$

Поскольку обе собственные функции y_1 и y_2 обращаются в нуль при $x=0$, значение скобки слева при $x=0$, как и прежде, равно нулю. Однако, так как при $x=l$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ikcR_s - K_s}{T} y,$$

значение при $x=l$ имеет вид

$$\frac{icR_s}{T} (k_1 - k_2) y_1(l) y_2(l),$$

а это выражение *не* равно нулю при $k_1 \neq k_2$. Следовательно, интеграл справа в рассматриваемом случае не равен нулю при $k_1 \neq k_2$ и собственные функции не ортогональны между собой. (В гл. 6 этот интеграл был равен нулю при $k_1 \neq k_2$, поскольку мы предполагали, что соотношение между y и dy/dx на границе *не зависит от k* .) Это не означает, что собственные функции не образуют полной системы. В действительности эта система полна. Однако в этом случае не очень просто подсчитать коэффициенты в разложении заданной в интервале $0 < x < l$ функции от x по собственным функциям.

Попытаемся подойти к задаче с другой стороны, рассматривая вынужденное установившееся движение. Чтобы вычислить функцию Грина для силы единичной амплитуды и частоты $\omega/2\pi$, приложенной в точке $x=x_0$, мы должны решить уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + k^2 G = \frac{-1}{T} \delta(x - x_0), \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (11.1.23)$$

с граничными условиями (11.1.21), причем зависимость G от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$. Следовательно, граничные условия принимают вид

$$G = 0 \text{ при } x = 0, \quad T \frac{dG}{dx} = [ikcR_s - K_s] G \text{ при } x = l, \quad (11.1.24)$$

где $k = \omega/c$ и ω определяется частотой вынуждающей силы.

Мы можем найти решение уравнения (11.1.23) при помощи собственных функций, удовлетворяющих условиям (11.1.24). Эти собственные функции *заведомо* взаимно ортогональны, поскольку k и ω в этом уравнении определены вынуждающей силой и одинаковы для всех собственных функций. С другой стороны, мы можем найти решение уравнения (11.1.23) с соответствующим разрывом при $x=x_0$. Таким образом, методами, уже

применявшимися ранее, мы находим

$$G(x|x_0|\omega) = \begin{cases} \frac{\sin(kx) \sin[k(l-x_0)-\theta]}{kT \sin(kl-\theta)}, & x < x_0, \\ \frac{\sin(kx_0) \sin[k(l-x)-\theta]}{kT \sin(kl-\theta)}, & x > x_0, \end{cases} = \\ = 2 \frac{l}{T} c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi\beta_n}{2\pi\beta_n - \sin(2\pi\beta_n)} \frac{\sin\left(\frac{\pi\beta_n x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi\beta_n x}{l}\right)}{(kl)^2 - (\pi\beta_n)^2}, \quad (11.1.25)$$

где $\theta = \arctg [Tk/(ikcR_s - K_s)]$ и $\beta_n(k)$ — n -й корень уравнения

$$\operatorname{tg}(\pi\beta_n) = \frac{\pi\beta_n T}{l(ikcR_s - K_s)}. \quad (11.1.26)$$

Собственные функции $\sin(\pi\beta_n x/l)$ в разложении G взаимно ортогональны, поскольку все они удовлетворяют граничным условиям при $x=l$ для одного и того же значения $k=\omega/c$. Другими словами, граничные условия (11.1.24) не зависят от собственных значений, так что наше доказательство ортогональности, приведенное в гл. 6, остается в силе. Как собственные функции, так и собственные значения β_n , т. е. корни уравнения (11.1.26), являются функциями k или вынуждающей частоты $\omega/2\pi$. См. по этому поводу также рассуждения на стр. 675, 676 тома I.

Для нахождения импульсной функции g , для которой функция G является преобразованием Лапласа, мы должны либо вычислить контурный интеграл, определяемый вторым равенством (11.1.10), либо найти g в таблице преобразований Лапласа. На этот раз мы выберем первый из этих методов:

$$g(x|x_0|t) = \frac{c}{\pi l T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{2\pi\beta_n}{2\pi\beta_n - \sin(2\pi\beta_n)} \frac{\sin\left(\frac{\pi\beta_n x_0}{l}\right)}{k - \frac{\pi\beta_n}{l}} \frac{\sin\left(\frac{\pi\beta_n x}{l}\right)}{k + \frac{\pi\beta_n}{l}} e^{-ickt} dk.$$

Простые полюсы подинтегрального выражения являются решениями трансцендентного уравнения

$$lk = \pm \pi\beta_n(k) = \mp \arctg \left[\frac{\frac{K_s}{k} - icR_s}{T} \right],$$

или

$$\frac{K_s}{k} - icR_s + T \operatorname{ctg}(kl) = 0, \quad (11.1.27)$$

которое надлежит сравнить с уравнением (11.1.22). Для каждого значения n в β_n имеется пара корней, расположенных ниже действительной оси и симметрично относительно мнимой k -оси. Для больших значений n приближенные значения корней таковы:

$$\left. \begin{aligned} k_n &\simeq \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{K_s}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) T} - i \frac{cR_s}{lT}, \\ k'_n &\simeq -\frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{K_s}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) T} - i \frac{cR_s}{lT}, \end{aligned} \right\} Tn \gg lK_s, \quad cR_s \gg lT,$$

и для любых значений n и cR_s/lT корни могут быть представлены в виде

$$k_n = \frac{\pi\alpha_n}{l} - i\alpha_n \frac{cR_s}{lT}, \quad k'_n = -\frac{\pi\alpha_n}{l} - i\alpha_n \frac{cR_s}{lT}, \quad (11.1.28)$$

где α_n и χ_n — безразмерные числа, получаемые при решении уравнения (11.1.27). Как показано выше, $\alpha_n \simeq n + 1/2$ и $\chi_n \simeq 1$ для очень больших значений n .

Вычислив вычеты в этих полюсах, получим

$$g(x|x_0|t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\frac{4c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\sin(k_n x_0) \sin(k_n x)}{2k_n l - \sin(2k_n l)} e^{-ik_n c t} \right\}, & t > 0, \end{cases} \quad (11.1.29)$$

где k_n — n -й корень уравнения (11.1.27), имеющий вид (11.1.28). Это решение дает форму струны, когда при $t=0$ в точке $x=x_0$ струне сообщается единичный импульс.

Продолжая анализ, можно определить форму струны, когда сила TF_0 внезапно приложена в момент $t=0$ в точке $x=x_0$. Преобразование Лапласа функции $F_0 u(t)$ равно $F_0/p = iF_0/\omega$. Согласно таблице, помещенной в конце главы, если G является преобразованием g , то G/p является преобразованием $\int g dt$. Следовательно, искомая форма струны для силы $TF_0 u(t)$, приложенной при $x=x_0$, имеет вид

$$\psi_u = F_0 T \int_0^t g(x|x_0|\tau) d\tau = 4F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sin(k_n x_0) \sin(k_n x)}{2k_n l - \sin(2k_n l)} \frac{1 - e^{-ik_n c t}}{k_n} \right\}.$$

В этом выражении члены, не зависящие от времени, определяют окончательную форму струны, принимаемую после того, как переходный процесс затухнет. Это соответствует предельной форме при $k \rightarrow 0$ установившегося «отклика» струны, определяемого равенством (11.1.25):

$$TF_0 G(x|x_0|0) = \begin{cases} F_0 \frac{x[l + (T/K_s) - x_0]}{l + (T/K_s)}, & x < x_0, \\ F_0 \frac{x_0[l + (T/K_s) - x]}{l + (T/K_s)}, & x > x_0. \end{cases} \quad (11.1.30)$$

Следовательно, форма струны, оттянутой первоначально в точке $x=x_0$ постоянной силой TF_0 и затем отпущенной при $t=0$, такова:

$$\phi = TF_0 G(x|x_0|0) - \psi_u = 4F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sin(k_n x_0) \sin(k_n x)}{k_n l - \frac{1}{2} \sin(2k_n l)} \frac{e^{-ik_n c t}}{k_n} \right\}. \quad (11.1.31)$$

Этот ряд представляет свободное затухающее колебание струны, вызванное начальным отклонением вида (11.1.30). Это — ряд по собственным функциям $\sin(k_n x)$, которые, как мы указывали на стр. 325, между собой не ортогональны. Однако мы смогли получить этот ряд, отправляясь от ортогональной системы собственных функций $\sin(\pi \beta_n x/l)$ для вынужденного установившегося движения и применяя преобразование Лапласа для вычисления переходного процесса.

Отражение от закрепления с трением. Если $K_s = 0$, то поперечный импеданс закрепления имеет только активную составляющую и величины θ и β_n , фигурирующие в (11.1.25), не зависят от k . В этом случае значительно легче найти импульсную функцию $g(x|x_0|t)$ при помощи таблицы преобразований Лапласа, приведенной в конце настоящей главы. Используя

конечную форму решения при $x < x_0$, мы получаем

$$G(x|x_0|\omega) = c \frac{\text{sh}(px/c) \text{sh}[(p/c)(l-x_0)+b]}{T p \text{sh}[(pl/c)+b]} =$$

$$= \frac{c/4}{pT \text{sh}[(pl/c)+b]} \left\{ e^{(p/c)(l+x-x_0)+b} - e^{(p/c)(l-x-x_0)+b} + \right.$$

$$\left. + e^{(p/c)(x_0-x-l)-b} - e^{(p/c)(x+x_0-l)-b} \right\},$$

где $b = \text{Ar th}(T/cR_s)$. Применяя затем таблицу, находим

$$g(x|x_0|t) = \frac{1}{2} \frac{c}{T} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nb} [u(ct - |x - x_0| - 2nl) - u(ct - x - x_0 - 2nl)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nb} [u(ct + |x - x_0| - 2nl) - u(ct + x + x_0 - 2nl)] \right\}. \quad (11.1.32)$$

Это представление импульсной волны весьма интересно. Член $u(ct - |x - x_0|)$ ($n=0$) соответствует волне с крутым гребнем, распространяющейся от точки удара $x = x_0$ со скоростью c . Член $-u(ct - x - x_0)$ соответствует первому отражению этой волны от неподвижной точки закрепления $x=0$, происходящему без изменения амплитуды, но с изменением знака. Член $-e^{-2b}u(ct + x + x_0 - 2l)$ соответствует первому отражению от нежесткого закрепления. Здесь амплитуда изменяется, приобретая множитель

$$|e^{-2b}| = |e^{-2\text{Ar th}(T/cR_s)}| = \left| \frac{T - cR_s}{T + cR_s} \right|.$$

При $cR_s > T$ смещение меняет знак (при $cR_s < T$ нет изменения знака). Отражения повторяются с последующими изменениями амплитуды каждый раз, когда волна встречает нежесткое закрепление в точке $x = x_0$.

Если сила, приложенная к струне, распределена по ее длине и по времени, то нужно интегрировать в соответствии с формулой (11.1.9). Интересно отметить, что решение представляется через элементарные решения $f(x-ct)$ и $g(x+ct)$, изображающие основные волны противоположных направлений и их отражения от концов. Для закрепления с трением ($K_s = 0$) отраженная волна претерпевает изменение направления и амплитуды, но остается подобной по форме.

Звуковые волны в трубе. Другим простым примером на одномерное волновое уравнение является распространение звуковых волн внутри трубы (см. § 2.3). Если длина волны $2\pi c/\omega$ значительно больше периметра трубы, то любое волновое движение в такой трубе есть движение вдоль оси. Если поперечное сечение трубы постоянно, то смещение частиц ξ , скорость v , потенциал скоростей ψ и избыточное давление P являются функциями только расстояния x вдоль трубы и времени t . Эти величины связаны следующими соотношениями:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad P = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (11.1.33)$$

Вместе с потенциалом ψ решениями волнового уравнения являются также ξ , v и P .

Дальний конец трубы, $x = l$, может быть или открыт, или закрыт поршнем, могущим смещаться под влиянием избыточного давления внутри трубы. В последнем случае закрывающий поршень для наших целей может быть полностью охарактеризован заданием его *акустического импеданса*,

т. е. отношения z_l избыточного давления P к направленной из трубы скорости частиц v у поршня при простых гармонических колебаниях давления с частотой $\omega/2\pi$. Следовательно, z_l представляет собой функцию от ω , зависящую от устройства поршня.

Значение комплексной величины z_l определяет положение и относительную величину максимумов и минимумов амплитуды (узлов и пучностей) синусоидальной волны давления, идущей вдоль трубы от $x=l$ до ближайшего конца трубы $x=0$.

Одномерные падающая и отраженная синусоидальные волны одновременно могут быть записаны так:

$$\phi = A_i e^{i\omega(\frac{x}{c}-t)} + A_r e^{-i\omega(\frac{x}{c}+t)} = A \operatorname{sh} \left[\pi(\alpha - i\beta) + i \frac{\omega x}{c} \right] e^{-i\omega t}, \quad (11.1.34)$$

$$A = 2A_i e^{-\pi(\alpha - i\beta)} = -2A_r e^{\pi(\alpha - i\beta)},$$

где $|A_i|$ — амплитуда падающей волны, $|A_r|$ — амплитуда отраженной волны, а отношение $A_r/A_i = e^{-\pi[2\alpha - i(2\beta + 1)]}$ определяет и отношение амплитуд и разность фаз этих волн. Избыточное давление и скорость частиц на расстоянии x от начала трубы (мы употребляем β_0 для обозначения сдвига фаз при $x=0$) выражаются так:

$$P = -i\rho\omega A \operatorname{sh} \left[\pi(\alpha - i\beta_0) + i \frac{\omega x}{c} \right] e^{-i\omega t},$$

$$v = -i \frac{\omega}{c} A \operatorname{ch} \left[\pi(\alpha - i\beta_0) + i \frac{\omega x}{c} \right] e^{-i\omega t},$$

а их отношение —

$$z(x) = \rho c \operatorname{th} \left[\pi(\alpha - i\beta_0) + i \frac{\omega x}{c} \right]. \quad (11.1.35)$$

Итак, ясно, что, задавая значение $z = P/v$ при $x=l$, мы фиксируем значения α и β

$$\alpha - i\beta_l = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arth} \frac{z_l}{\rho c}, \quad \beta_0 = \beta_l + \frac{\omega l}{\pi c},$$

и, следовательно, задаем отношение амплитуд и относительные фазы падающей и отраженной волн в трубе. Если импеданс z_l чисто мнимый (чисто реактивный), то $\alpha=0$ и отраженная волна имеет ту же амплитуду, что и падающая. Если импеданс z_l действительный (чисто активный) и равен ρc , то $\alpha=\infty$, и отраженной волны вовсе не существует (таков будет, например, конечный импеданс, если к нашей трубе в точке $x=l$ присоединена другая труба такого же диаметра и бесконечной длины). Возвращаясь к формуле для P , мы видим, что амплитуда давления в точке x равна

$$|P| = \rho\omega |A| \sqrt{\operatorname{sh}^2 \pi\alpha + \sin^2 \left[\frac{\omega}{c} (l-x) + \pi\beta_l \right]}.$$

Таким образом, при $(\omega/c)(l-x) = -\pi\beta_l, \pi(1-\beta_l), \pi(2-\beta_l), \dots$ амплитуда давления достигает минимума, равного $\rho\omega |A| \operatorname{sh} \pi\alpha$, а при $(\omega/c)(l-x) = \pi\left(\frac{1}{2} - \beta_l\right)$,

$\pi\left(\frac{3}{2} - \beta_l\right), \dots$ она достигает максимума, равного $\rho\omega |A| \operatorname{ch} \pi\alpha$. Положение этих максимумов и минимумов фиксирует значение β_l , а значит, и β_0 , отношение же величины давления в точках минимума и максимума равно $\operatorname{th} \pi\alpha$ и, следовательно, определяет значение α .

Пусть колебания возбуждаются в конце трубы $x=0$. Чтобы измерить возникающий в трубе «отклик» на заданное возбуждение, мы можем предположить себе, что этот конец закрыт плоским поршнем с пренебрежимо малым

импедансом, который может двигаться взад и вперед вдоль оси, генерируя волны. Чтобы образовать волну описываемого формулой (11.1.34) типа, смещение, скорость поршня и давление на его поверхности должны быть таковы:

$$\xi_0 = \frac{A}{c} \operatorname{ch}(\pi x - i\pi\beta_0) e^{-i\omega t}, \quad v_0 = -\frac{i\omega}{c} A \operatorname{ch}(\pi x - i\pi\beta_0) e^{-i\omega t},$$

$$P_0 = -i\rho\omega A \operatorname{sh}(\pi x - i\pi\beta_0) e^{-i\omega t}.$$

Если поршень приводится в движение простой гармонической силой единичной амплитуды и частоты $\omega/2\pi$, то амплитуда волны A должна быть такова, чтобы давление на поршень, умноженное на площадь поперечного сечения трубы S , равнялось приложенной силе, т. е. $e^{-i\omega t}$ дин. Следовательно,

$$A = \frac{i}{S\rho\omega \operatorname{sh}\left(\pi\alpha - i\pi\beta_l - i\frac{\omega l}{c}\right)},$$

и результирующий потенциал скоростей, т. е. функция Грина, равен

$$G_f(x|0|\omega) = \frac{i \operatorname{sh}[\pi\alpha - i\pi\beta_l - i(\omega/c)(l-x)]}{S\rho\omega \operatorname{sh}[\pi\alpha - i\pi\beta_l - i(\omega l/c)]}. \quad (11.1.36)$$

Для нахождения «отклика» на единичный импульс, сообщаемый поршню, нужно построить импульсную функцию g , преобразованием Лапласа которой является G .

Если импеданс поршня z_l не зависит от ω , то α и β_l также не зависят от ω , и функцию g легко найти при помощи таблицы преобразований Лапласа:

$$g_f(x|0|t) = \frac{i}{S\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-2\pi n(\alpha - i\beta_l)} u\left[t - \frac{x}{c} - 2n\frac{l}{c}\right] - \right.$$

$$\left. - e^{-2\pi(n+1)(\alpha - i\beta_l)} u\left[t + \frac{x}{c} - 2(n+1)\frac{l}{c}\right] \right\}. \quad (11.1.37)$$

Скорость частиц и давление, будучи производными от g , содержат дельта-функции. Первый член при $n=0$ представляет исходную импульсную волну, движущуюся вперед от поршня, второй член при $n=0$ — первую отраженную волну, возвращающуюся к началу координат с амплитудой, уменьшенной в $e^{-2\pi\alpha}$ раз и, возможно, с обратным знаком (если z_l действительно, то β_l равно либо 0, либо $\pi/2$) и т. д., точно так же, как в формуле (11.1.32) для струны. Как и в формуле для струны, реакция системы на произвольную силу $f(t)$, приложенную к поршню, может быть получена интегрированием. Так, если $f(t)=0$ при $t < 0$, то скорость частиц равна

$$v(x, t) = \frac{1}{S\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-2\pi n(\alpha - i\beta_l)} f\left(t - \frac{x + 2nl}{c}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-2\pi(n+1)(\alpha - i\beta_l)} f\left(t + \frac{x - 2(n+1)l}{c}\right) \right\}. \quad (11.1.38)$$

С другой стороны, если смещение поршня $\xi_0(t)$ задано как функция времени, то смещение частиц может быть получено опять-таки по формуле (11.1.35). Если смещение поршня чисто гармоническое с единичной амплитудой, то установившееся смещение частиц равно

$$G_d(x|0|\omega) = \frac{\operatorname{ch}[\pi(\alpha - i\beta_l) - i(\omega/c)(l-x)]}{\operatorname{ch}[\pi(\alpha - i\beta_l) - i(\omega l/c)]},$$

а соответствующая импульсная функция —

$$g_d(x|0|t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ e^{-2\pi n(\alpha - i\beta l)} \delta\left(t - \frac{x+2nl}{c}\right) + e^{-2\pi(n+1)(\alpha - i\beta l)} \delta\left(t + \frac{x-2(n+1)l}{c}\right) \right\}.$$

Наконец, при смещении поршня $\xi_0(t)$ смещение частиц определяется выражением

$$\xi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ e^{-2\pi n(\alpha - i\beta l)} \xi_0\left(t - \frac{x+2nl}{c}\right) + e^{-2\pi(n+1)(\alpha - i\beta l)} \xi_0\left(t + \frac{x-2(n+1)l}{c}\right) \right\}. \quad (11.1.39)$$

Труба с переменным поперечным сечением. Когда площадь поперечного сечения трубы S меняется вместе с расстоянием x вдоль оси, так что $\sqrt{S}$ по-прежнему остается малым по сравнению с длиной звуковой волны, волна по-прежнему будет одномерной в первом приближении сравнительно с отношением $\sqrt{S}$ к длине волны. Уравнение колебаний не будет, конечно, обыкновенным волновым уравнением. В трубе переменного сечения скорости частиц v меняются от точки к точке в соответствии с изменением S . Однако мы должны, разумеется, предположить, что v постоянна на всем поперечном сечении для каждого x .

Видоизменяя в соответствии с нашими теперешними условиями рассуждение § 2.3, находим, что ускорение элемента объема среды, как и ранее, пропорционально градиенту давления:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (11.1.40)$$

Далее, при смещении среды на малую величину ξ относительное изменение объема тонкого слоя среды толщиной dx , расположенного поперек трубы, равно

$$\frac{dV}{V} = \frac{S\xi + dx \frac{\partial}{\partial x}(S\xi) - S\xi}{Sdx} = \frac{1}{S} \frac{\partial(S\xi)}{\partial x}.$$

Из соотношения между упругостью среды и скоростью звука c находим, что $-dV/V = P/\rho c^2$. Дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x}(Sv) = - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (11.1.41)$$

Сравнивая это уравнение с (11.1.40), получаем окончательное уравнение для определения избыточного давления и потенциала скоростей

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad P = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (11.1.42)$$

Этому модифицированному волновому уравнению, которое приближенно учитывает изменение величины поперечного сечения в зависимости от x , удовлетворяет как давление, так и скорость. Уравнение дает хорошее приближение, пока величина производной $\sqrt{S}$ по x много меньше единицы (т. е. пока труба остается достаточно гладкой). До тех пор пока это условие выполнено, истинная скорость среды приблизительно параллельна оси x и приблизительно постоянна в поперечном сечении трубы, так что поток среды I через сечение трубы может считаться равным vS .

Нетрудно оценить влияние такого малого изменения поперечного сечения на амплитуду волны. В соответствии с рассуждениями, приведенными на стр. 295 тома I, произведение давления и скорости среды равно плотности потока энергии, или *интенсивности* звуковой волны. Полный поток энергии через трубу, усредненный по времени, для установившейся волны не должен зависеть от расстояния вдоль трубы; в противном случае на некотором участке трубы энергия будет накапливаться и волна не будет установившейся. Общее выражение для установившейся волны имеет следующий вид:

$$\phi = A(x) e^{\pm i\varphi(x) - i\omega t}, \quad (11.1.43)$$

где A — амплитуда волны, а φ обычно называется *фазой* волны. Поскольку P и v пропорциональны A , интенсивность пропорциональна A^2 . Из сказанного выше об общем потоке энергии следует, что SA^2 в нашем случае не зависит от x (с той степенью точности, о которой идет речь), а, значит, A обратно пропорционально $\sqrt{S}$.

Зависимость A и φ от x легче всего найти, подставив (11.1.43) в уравнение (11.1.42) и приравняв нулю действительную и мнимую части отдельно:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \frac{1}{SA} \frac{d}{dx} \left(S \frac{dA}{dx}\right), \quad \frac{d}{dx} \left(SA^2 \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0. \quad (11.1.44)$$

Вспоминая, что dS/dx мало по сравнению с $\sqrt{S}$ [без чего уравнение (11.1.42) не имело бы места], мы можем получить решение этих двух уравнений последовательными приближениями. Для «нулевого» приближения принимаем A постоянным и $d\varphi/dx = \omega/c$. При этом мы совершенно не учитываем изменения S и получаем известное решение $Ae^{\pm i(\omega/c)x - i\omega t}$, справедливое для трубы постоянного сечения. Следующее приближение дает $A = C/\sqrt{S}$ и $\varphi = \omega x/c$. При этом второе уравнение удовлетворяется точно, но в первом остается малый член $-(1/\sqrt{S})(d^2\sqrt{S}/dx^2)$.

Второе приближение

$$A = \frac{C}{\sqrt{S}}, \quad \varphi = \int_0^x \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{d^2\sqrt{S}}{dx^2} \right]^{1/2} dx$$

удовлетворяет первому уравнению, но оставляет малый член во втором и т. д. В этом приближении давление и скорость частиц среды для волн в обоих направлениях приближенно выражаются так:

$$P \simeq -\frac{i\rho\omega}{\sqrt{S}} [C_+ e^{i\varphi(x)} + C_- e^{-i\varphi(x)}] e^{-i\omega t} \simeq -\frac{i\rho\omega}{\sqrt{S}} C \operatorname{sh} [\pi(\alpha - i\beta) + i\varphi(x)] e^{-i\omega t},$$

$$v \simeq -\frac{i\omega}{c\sqrt{S}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{d^2\sqrt{S}}{dx^2}} [C_+ e^{i\varphi} - C_- e^{-i\varphi}] e^{-i\omega t} \simeq \\ \simeq -\frac{i\omega}{c\sqrt{S}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{d^2\sqrt{S}}{dx^2}} C \operatorname{ch} [\pi(\alpha - i\beta) + i\varphi(x)] e^{-i\omega t}.$$

Случай *экспоненциального рожа* можно проанализировать детально. Здесь $S = S_0 e^{2x/h}$, так что отношение $(1/\sqrt{S})(d^2\sqrt{S}/dx^2) = 1/h^2$ постоянно. В этом случае для волны, распространяющейся в положительном направлении ($C_- = 0$),

$$P \simeq -\frac{i\rho\omega}{\sqrt{S_0}} C_+ \exp \left[ix \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{h}\right)^2} - i\omega t - \frac{x}{h} \right], \quad (11.1.45)$$

$$v \simeq -\frac{i}{\sqrt{S_0}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{h}\right)^2} C_+ \exp \left[ix \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{h}\right)^2} - i\omega t - \frac{x}{h} \right].$$

Амплитуда давления в экспоненциальном рожке при смещении поршня в точке $x=0$ с единичной амплитудой и частотой $\omega/2\pi$ ($\xi = -v/i\omega$) равна

$$G_d(x|0|\omega) = \frac{\rho c p^2}{\sqrt{p^2 + (c/h)^2}} \exp \left[-\frac{x}{h} - \frac{x}{c} \sqrt{p^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2} \right],$$

$$p = -i\omega.$$

Таблица в конце настоящей главы показывает, что волна давления в рожке, порожденная смещением поршня от единичного импульса, имеет вид

$$g_d(x|0|t) = \rho c e^{-x/h} \left(t - \frac{x}{c} \right) \frac{d^2}{dt^2} J_0 \left[\frac{c}{h} \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right]. \quad (11.1.46)$$

Наконец, волна давления, порожденная смещением поршня на величину $\xi_0(t)$ ($t > 0$) внутри бесконечного экспоненциального рожка (т. е. настолько длинного, что волны, отраженные от конца рожка, не возвращаются к месту наблюдения), по формуле (11.1.15) будет иметь вид

$$P(x, t) = \rho c e^{-x/h} \int_{x/c}^t \xi_0(t-\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} J_0 \left[\frac{c}{h} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right] d\tau. \quad (11.1.47)$$

Эта формула показывает, что волна меняет свою форму при продвижении вдоль экспоненциальной трубы [формула (11.1.39) показывает, что она не меняет формы в трубе постоянного сечения]. Давление в точке, отстоящей на расстоянии x от поршня, в момент времени t зависит от движения поршня в течение времени, протекшего от начала его движения ($t=0$) до момента $t-x/c$. В трубе постоянного сечения это давление зависело бы только от смещения поршня в момент $t-x/c$. Поскольку производная J_0'' имеет наибольшее значение, когда ее аргумент равен нулю, привнос от смещения поршня при $t-x/c$ больше, чем привносы от смещений в предшествующие моменты времени, особенно когда c/h мало. Однако этой зависимостью от предшествующих моментов времени в рассматриваемом случае пренебрегать нельзя.

Элементы акустической цепи. Обычно уравнения (11.1.44) достаточно точно описывают звуковые волны в трубах, площадь поперечного сечения которых мало меняется при изменении x . Если же S меняется резко (т. е. на промежутке, малом по сравнению с длиной волны), то возникает явление отражения, и отраженную волну можно (приближенно) рассчитать, приравняв давления и полные потоки по обе стороны от места изменения сечения.

Для этого подсчета полезно установить аналогию с явлениями в линиях электропередачи. Давление является аналогом напряжения, а полный поток Sv — аналогом тока (обозначение I будет напоминать об этой аналогии). Сопряжение решений в точке соединения может быть осуществлено введением эквивалентного импеданса

$$Z = \frac{P}{I} = \frac{1}{S} \frac{P}{v} = \frac{z}{S}, \quad (11.1.48)$$

поскольку P и I непрерывны в окрестности точки соединения.

Например, эквивалентный входной импеданс на одном из концов бесконечной трубы постоянного сечения, площадь поперечного сечения которой есть S , равен $\rho c/S$, а входной импеданс на конце $x=0$ трубы постоянного сечения длины l , на другом конце которой имеется эквивалентный импеданс Z_l , равен

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S} \operatorname{th} \left[\pi (\alpha - i\beta_l) - i \frac{\omega l}{c} \right], \quad (11.1.49)$$

где

$$\operatorname{th}(\pi\alpha - i\pi\beta_l) = \frac{SZ_l}{\rho c}.$$

Изменение размеров поперечного сечения вызывает отражение. Если площадь поперечного сечения трубы между $x=l$ и $x=\infty$ равна S_l , а между $x=0$ и $x=l$ она равна S_0 , то эквивалентный импеданс (в положительном направлении) равен $\rho c/S_l$, а эквивалентный импеданс при $x=0$ равен

$$\frac{\rho c}{S_0} \operatorname{th} \left[\operatorname{Arth} \frac{S_0}{S_l} - i \frac{\omega l}{c} \right].$$

При помощи этой формулы и предыдущих соотношений легко установить, что отраженная от соединения волна претерпевает изменение знака при $S_l > S_0$, не меняет знак при $S_l < S_0$, а при $S_l = S_0$ отраженной волны вовсе не существует.

Короткий и широкий участок трубы аналогичен емкости в линии передачи. Дополнительный объем V «накапливает» дополнительное смещение среды. Если полный приток в дополнительный объем равен $Q = \int I dt$, то соотношение между Q и P , как обычно, имеет вид $P = \rho c^2 Q/V$ и, таким образом, *эквивалентная емкость* равна

$$C = \frac{V}{\rho c^2}. \quad (11.1.50)$$

С другой стороны, короткий и узкий участок трубы подобен индуктивности. Разность давлений по обе стороны сужения вызывает ускорение

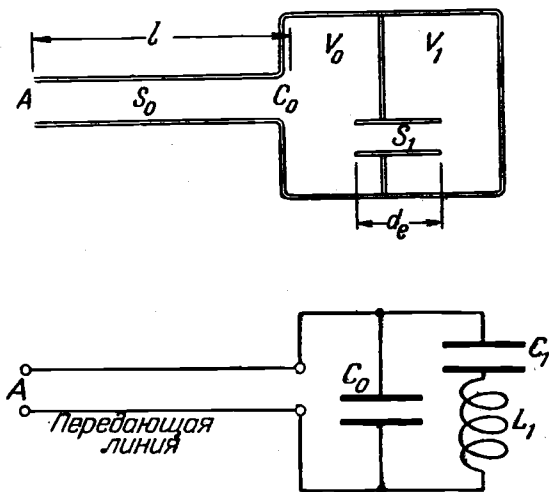


Рис. 11.1. Акустический контур и эквивалентный электрический контур.

течения в этой суженной части, обратно пропорциональное содержащейся в ней массе. Сила, действующая на эту «пробку», равна $(\Delta P)S$, где ΔP — разность давлений, а S — площадь поперечного сечения суженного участка. Ускоряемая масса равна произведению ρ на объем «пробки» Sd_e , где d_e — эффективная длина сужения (мы вскоре определим, что значит «эффективная»). Ускорение равно, конечно, dv/dt , а Sv есть объемный поток I через сужение. Следовательно, уравнение движения среды через

сужение будет иметь вид

$$S \Delta P = \rho S d_e \frac{dv}{dt}, \quad \text{или} \quad \Delta P = \frac{\rho d_e}{S} \frac{dI}{dt},$$

и по аналогии с электрической цепью величину

$$L = \frac{\rho d_e}{S} \quad (11.1.51)$$

можно назвать *эквивалентной индуктивностью*. Такую индуктивность следует ввести в эквивалентный электрический контур, чтобы рассчитать акустический режим. Так, например, акустический контур, изображенный на рис. 11.1, эквивалентен электрическому контуру, изображенному в нижней части этого же рисунка, причем передающая линия от A до C_0 (длины l) имеет характеристический импеданс $\rho c/S_0$, емкость C_0 равна $V_0/\rho c^2$, индуктивность L_1 равна $\rho d_e/S_1$, а емкость C_1 равна $V_1/\rho c^2$. *Акустический импеданс* (отношение давления к скорости) в точке A будет, следовательно, равен

$$-i\rho c \operatorname{tg} \left\{ \frac{\omega l}{c} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{S_0}{\rho c \omega} \left(C_0 + \frac{C_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} \right)^{-1} \right] \right\}.$$

Мы использовали эффективную длину сужения вместо его истинной длины, так как аналогия между влиянием суженной части трубы и индуктивностью только приближенная и можно улучшить это приближение, исправляя длину сужения с учетом «концевого эффекта». Сужение можно рассматривать как индуктивность также и с другой точки зрения. Дело в том, что в самом сужении и вблизи него среда движется быстрее и поэтому там происходит *концентрация кинетической энергии* (точно так же, как в дополнительном объеме концентрируется потенциальная энергия). Если в широкой части (поперечное сечение S_0) среда движется со скоростью v , то в узкой части (поперечное сечение S_1) ее скорость будет $v(S_0/S_1)$. Если отношение S_1/S_0 достаточно мало, то кинетическая энергия на единицу длины в суженной части трубы, равная $(1/2)\rho v^2 S_0 (S_0/S_1)$, будет значительно больше, чем в остальной части трубы, где она равна $(1/2)\rho v^2 S_0$.

При наличии индуктивности L в электрической цепи магнитная энергия равна $(1/2)LI^2$. Поэтому в нашем случае эквивалентную индуктивность можно найти, вычисляя полную кинетическую энергию «ускоренной» части среды. Мы видим, что эта энергия равна $(1/2)\rho d_e(v^2 S_0^2/S_1) = (1/2)(\rho d_e/S_1)I^2$, где $I = vS_0$ — полный поток через трубу. Мы снова использовали d_e вместо истинной длины сужения, поскольку среда начинает ускоряться, прежде чем она входит в суженную часть, и не может замедлить движения сразу же по выходе из этого сужения. Таким образом, с повышенной скоростью движется большее количество среды, нежели то, которое помещается в суженной части. Величина d_e равна сумме истинной длины d и поправочного члена, учитывающего наружную (по отношению к сужению) ускоряющуюся и замедляющуюся часть среды на обоих концах сужения.

Можно, конечно, поступить так: методами гл. 10 рассчитать безвихревой стационарный поток через сужение и вычислить дополнительную кинетическую энергию, создаваемую сужением. Если эту энергию представить в виде $(1/2)LI^2$, где I — полный поток через суженную часть, то L и будет эквивалентной индуктивностью. На стр. 275 был проведен такой расчет для круглого отверстия радиуса a в пластине пренебрежимой толщины, и там было показано, что кинетическая энергия равна $(1/2)(8\rho/3\pi^2 a)I^2$. Следовательно, для круглого сужения нулевой «длины» эквивалентный импеданс равен $8\rho/3\pi^2 a$, а «концевая поправка» в формуле (11.1.51) в этом предельном случае будет равна $8a/3\pi$. Мы можем теперь попытаться

использовать эту же поправку для круглого сужения истинной длины d , и равенство (11.1.51) примет вид

$$L = \frac{\rho}{\pi a^2} \left(d + \frac{8a}{3\pi} \right). \quad (11.1.52)$$

Эта формула дает хорошее приближение, пока a мало по сравнению с радиусом поперечного сечения остальной части трубы, а d значительно меньше длины волны. Эти ограничения весьма естественны. Действительно, во-первых, вывод стр. 275 был проведен для случая отверстия в бесконечной пластине, и, значит, остальная часть трубы должна быть достаточно широкой, чтобы можно было считать ее стенки удаленными в бесконечность по сравнению с радиусом a . Во-вторых, концепция цепи с сосредоточенными постоянными как для акустических, так и для электрических контуров вообще теряет смысл, если имеется заметная разность фаз на концах одного элемента.

Изложенный метод сопряжения решений уравнения Лапласа на коротких участках с решениями волнового уравнения для получения приближенных решений, удовлетворяющих краевым условиям, весьма полезен в тех случаях, когда краевые условия слишком сложны, чтобы можно было получить точное решение волнового уравнения (но не настолько сложны, чтобы нельзя было найти решение уравнения Лапласа). В дальнейшем мы будем время от времени прибегать к этому методу.

Представление бегущими волнами. В заключение напомним, что общее решение одномерного волнового уравнения может быть составлено из двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\phi = f(ct - x) + F(ct + x). \quad (11.1.53)$$

Используя бегущие волны, можно также удовлетворить краевым условиям, не обращаясь к решениям, выраженным через собственные функции [см., например, (7.3.18)].

В качестве примера рассмотрим простую струну бесконечной длины, простирающуюся вдоль положительной части оси x от точки $x=0$, где закрепление обладает поперечной упругостью и сопротивлением. Другими словами, поперечное перемещение y_0 точки закрепления связано с поперечным усилием $T(\partial y/\partial x)_0$, передаваемым струной, равенством

$$R_0 \frac{\partial y}{\partial t} + K_0 y = T \frac{\partial y}{\partial x}, \quad x=0. \quad (11.1.54)$$

Подставляя (11.1.53) в (11.1.54), получаем

$$(cR_0 + T) \frac{d}{dz} f(z) + (cR_0 - T) \frac{d}{dz} F(z) + K_0 f(z) + K_0 F(z) = 0. \quad (11.1.55)$$

Если падающая волна $F(ct + x)$ известна, полученное равенство является уравнением для определения f и его решением будет

$$f(z) = e^{-z_0 z} \int_0^z \left[\gamma_0 \frac{d}{du} F(u) - z_0 F(u) \right] e^{z_0 u} du, \quad (11.1.56)$$

где

$$z_0 = \frac{K_0}{cR_0 + T} \quad \text{и} \quad \gamma_0 = \frac{T - cR_0}{T + cR_0},$$

a — произвольная постоянная. Если $K_0 = 0$, т. е. закрепление обладает только трением, то $f(z) = \gamma_0 F(z)$ и

$$y = F(ct + x) + \frac{T - cR_0}{T + cR_0} F(ct - x). \quad (11.1.57)$$

Отраженная волна при этом тождественна с падающей по форме, но отличается по величине коэффициентом отражения γ_0 . Если R_0 бесконечно, то закрепление жесткое ($\gamma_0 = -1$) и отраженная волна отличается от падающей только знаком; если R_0 равно нулю, то закрепление не имеет поперечного импеданса ($\gamma_0 = 1$) и отраженная волна равна по величине и по знаку падающей.

Чтобы удовлетворить начальным условиям, определим f и F из равенств $y = y_0(x)$ и $\partial y / \partial t = v_0(x)$ при $t = 0$. Это даст

$$y = \frac{1}{2} y_0(x+ct) + \frac{1}{2} y_0(x-ct) + \frac{1}{2} U_0(x+ct) - \frac{1}{2} U_0(x-ct), \quad x > ct;$$

$$y = \frac{1}{2} y_0(x+ct) + \frac{1}{2} U_0(x+ct) + \frac{1}{2} [y_0(0) - U_0(0)] e^{z_0(x-ct)} +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{z_0(x-ct)} \int_0^{ct-x} \left[\gamma_0 \frac{dy_0(u)}{du} + \frac{\gamma_0}{c} v_0(u) - z_0 y_0(u) - \kappa_0 U_0(u) \right] e^{z_0 u} du, \quad x < ct,$$

где $U_0(z) = \frac{1}{c} \int_0^z v_0(u) du$. Третье слагаемое в выражении для $x < ct$ пред-

ставляет влияние начального смещения в закреплении, а четвертое слагаемое (интеграл) соответствует части волны, отраженной от закрепления.

Этим же методом можно рассчитать колебание струны, закрепленной с двух сторон на перемещающихся опорах, отстоящих друг от друга на расстоянии l . Чтобы избежать излишне сложных формул, мы выпишем решение только для случая закрепления с активным сопротивлением. Коэффициенты сопротивления в закреплении $x=0$ и $x=l$ пусть будут соответственно R_0 и R_l . Учитывая последовательные отражения от обоих концов, получаем

$$y = f(x-ct) + F(x+ct),$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} [y_0(z) - U_0(z)], & l > z > 0; \\ \frac{1}{2} \gamma_0 [y_0(-z) + U_0(-z)], & 0 > z > -l; \\ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_l [y_0(z-2l) - U_0(z-2l)], & -l > z > -2l; \\ \frac{1}{2} \gamma_0^2 \gamma_l [y_0(-z-2l) + U_0(-z-2l)], & -2l > z > -3l; \\ \dots & \dots \end{cases}$$

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} [y_0(z) + U_0(z)], & 0 < z < l; \\ \frac{1}{2} \gamma_l [y_0(2l-z) - U_0(2l-z)], & l < z < 2l; \\ \frac{1}{2} \gamma_l \gamma_0 [y_0(z+2l) + U_0(z+2l)], & 2l < z < 3l; \\ \frac{1}{2} \gamma_l^2 \gamma_0 [y_0(4l-z) - U_0(4l-z)], & 3l < z < 4l; \\ \dots & \dots \end{cases}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{T - cR_0}{T + cR_0}, \quad \gamma_l = \frac{T - cR_l}{T + cR_l}.$$

Если R_0 и R_l бесконечно велики, то оба закрепления жесткие и, поскольку $\gamma_0 = \gamma_l = -1$, каждое отражение приводит к изменению знака, а движение оказывается периодическим с периодом $2l/c$.

Подвижные закрепления. Еще заслуживает рассмотрения случай, когда одно или оба закрепления допускают конечное продольное перемещение. Как показано на рис. 11.2, а, этот случай может быть реализован,

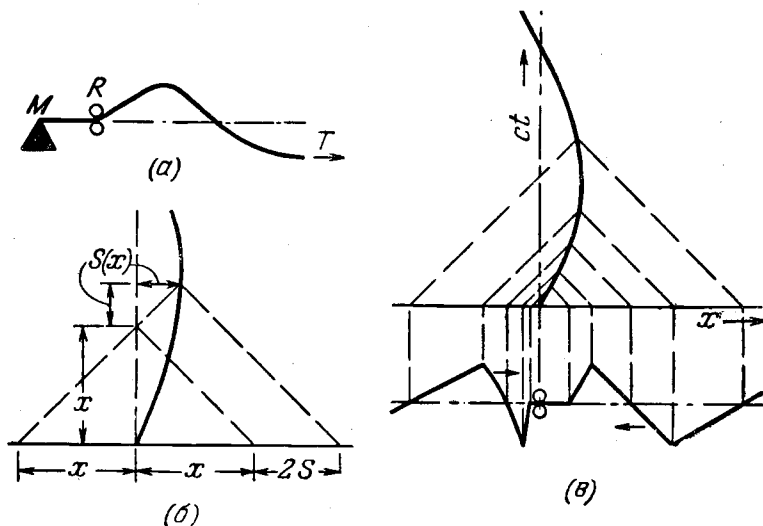


Рис. 11.2. Отражение поперечных волн от подвижного закрепления струны в точке R.

Рис. (б) определяет функцию $S(x)$; рис. (в) показывает, как можно построить отраженную волну.

если струна жестко закреплена в точке M, где создается натяжение, и, кроме того, пропущена через пару роликов R, которые обеспечивают равенство нулю смещения струны в той точке, где они находятся. Предположим, что ролики передвигаются взад и вперед. Соответствующие краевые условия иллюстрируются на рис. 11.2, в, где это движение изображено в (x, ct) -плоскости. Смещение y равно нулю вдоль указанной кривой.

Для решения этой задачи в случае, когда закрепление перемещается по закону $x = A \sin \omega t$, можно использовать функцию $S(x)$, определенную уравнением (см. рис. 11.2, б)

$$S(x) = A \sin k[x + S(x)]. \quad (11.1.59)$$

Для малых значений A функцию $S(x)$ можно выразить в виде ряда по степеням A :

$$S(x) = \left(A - \frac{1}{8} k^2 A^3 + \dots \right) \sin kx + \left(\frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{6} k^3 A^4 + \dots \right) \sin 2kx + \\ + \left(\frac{3}{8} k^2 A^3 - \dots \right) \sin 3kx + \left(\frac{1}{3} k^3 A^4 - \dots \right) \sin 4kx + \dots$$

Изучение рис. 11.2, в показывает, что смещение струны бесконечной длины с закреплением в точке $x = A \sin \omega t$ (натяжение T постоянно),

имеющей начальное смещение $y_0(x)$ и начальную скорость $v_0(x)$, определяется равенством

$$y(x, t) = \frac{1}{2} y_0(x+ct) + \frac{1}{2} y_0(x-ct) + \frac{1}{2} U_0(x+ct) - \frac{1}{2} U_0(x-ct) \text{ для } x > ct,$$

$$y(x, t) = \frac{1}{2} y_0(x+ct) + \frac{1}{2} U_0(x+ct) + \frac{1}{2} y_0[ct-x+2S(ct-x)] -$$

$$- \frac{1}{2} U_0[ct-x+2S(ct-x)] \quad \text{для } x < ct.$$

Отраженные волны здесь искажены благодаря движению точки закрепления. Заметим, что изложенный анализ применим, если скорость роликов всегда меньше, чем скорость волны c .

Аналогичные формулы могут быть получены для закреплений, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, причем одно или оба закрепления двигаются. Если движение закреплений периодическое, то результирующее движение струны не будет периодическим, *за исключением* случаев, когда частота колебаний закреплений есть целое кратное частоты $\pi c/l$ свободного колебания струны. Таким же образом можно получить формулы для движения воздуха в трубе, если поршень в точке $x=0$ перемещается на конечное расстояние взад и вперед.

11.2. Волновое движение, две пространственные координаты

Как только мы начинаем рассматривать волны в случае более чем одной пространственной координаты, мы встречаемся с новым явлением, которого не наблюдается у одномерных волн. Решения волнового уравнения с одной пространственной координатой, как было показано в предыдущем параграфе, можно представить общей формулой $f(x-ct) + F(x+ct)$, соответствующей наложению двух волн противоположного направления. Каждая волна движется в одном из двух направлений со скоростью c и не меняет своей формы во время движения. Зависимость от времени, с точностью до коэффициента размерности c , такая же, как зависимость от пространственной координаты, и каждая отдельная волна в последующий момент выглядит так же, как и секунду ранее, но она оказывается сдвинутой на расстояние c . Путь любой точки отдельной волны в плоскости x и t является *характеристикой* $x \pm ct = \text{const}$ (см. стр. 636 тома I).

В случае двух и более пространственных измерений направлений распространения волн бесконечно много. Существуют одномерные решения вида $F(x \cos u + y \sin u - ct)$, которые нам уже известны, но имеются и другие, более сложные процессы, когда волна распространяется одновременно в различных направлениях, меняя свою форму в процессе распространения [см. рассуждения в связи с формулой (6.1.16)]. Эти волны должны быть изучены прежде, чем мы сможем удовлетворить двумерным или трехмерным краевым условиям.

Основываясь на формуле (10.3.2), можно ожидать, что интегральное выражение

$$\phi(x, y, t) = \int_0^{2\pi} F_u(x \cos u + y \sin u - ct) du \quad (11.2.1)$$

пригодно для того, чтобы представить любую волну в случае двух пространственных измерений (всего три измерения). В частности, решение уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 + k^2)\phi = 0$ для волн частоты $\omega/2\pi = kc/2\pi$,

имеющих временной множитель $e^{-i\omega t}$, представимо в виде

$$\psi(x, y | \omega) = \int_0^{2\pi} \Phi(u) e^{ik(x \cos u + y \sin u)} du, \quad (11.2.2)$$

что является частным случаем общей интегральной формулы (5.8.86).

Показатель в подинтегральном выражении с точностью до множителя i является скалярным произведением двумерного вектора $\mathbf{r} = ix + jy$ и вектора $\mathbf{k} = k\mathbf{a}_u$, имеющего длину $k = \omega/c$ и образующего угол u с осью x . Волна $e^{ik \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$ — простая гармоническая, а волна $F_u(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_u - ct)$ является линейной волной общего вида, движущейся в направлении единичного вектора $\mathbf{a}_u$ (образующего угол u с осью x). Комбинация таких волн, распространяющихся по различным направлениям и с различными амплитудами и фазами для каждого направления, образует наиболее общее решение волнового уравнения (или уравнения Гельмгольца). (При двух пространственных измерениях бывает иногда необходимо распространить интегрирование на комплексные значения u .)

Полезно выразить все собственные функции и функции Грина в этой форме, так как взаимосвязь между ними станет при этом еще нагляднее.

Преобразование Фурье и функция Грина. Полезным введением к этому параграфу будет рассмотрение взаимосвязи между представлением решений в виде интеграла Фурье, функциями Грина и выражениями (11.2.1), (11.2.2). Предположим, что ищется решение неоднородного уравнения

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(x, y, t) \quad (11.2.3)$$

на всей плоскости x, y , причем единственным краевым условием является требование, чтобы излучение на бесконечности было направлено вовне.

Одним из возможных путей решения этой задачи могло бы явиться использование функции Грина уравнения Гельмгольца для единичного источника частоты $\omega/2\pi$, находящегося в точке (x_0, y_0) : $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \omega) = i\pi H_0^{(1)}(kR)$, где $k = \omega/c$ и $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ [см. (7.2.18)]. Такое установившееся решение для единичного чисто гармонического источника является, согласно правилу (11.1.16), преобразованием Лапласа решения $g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t)$ уравнения (11.2.3) для единичного импульса при $t = 0$ в точке (x_0, y_0) , т. е. для $\rho = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(t)$.

Предположим, однако, что сначала выполнено преобразование Фурье уравнения (11.2.3) по всем трем переменным. Всегда имеют место соотношения (предполагая, что ранее сформулированные условия сходимости выполняются)

$$\psi(x, y | t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta | \omega) e^{i\xi x + i\eta y - i\omega t} d\xi d\eta d\omega, \quad (11.2.4)$$

$$F(\xi, \eta | \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y | t) e^{-i\xi x - i\eta y + i\omega t} dx dy dt,$$

где F — преобразование Фурье функции ψ . Например, преобразование Фурье правой части уравнения для единичного импульсного источника $-4\pi\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(t - t_0)$ равно $-4\pi e^{-i\xi x_0 - i\eta y_0 + i\omega t_0}$. Подставляя интеграл для ψ в уравнение (11.2.3) и приравнявая подинтегральные выражения в обеих частях, получаем преобразование Фурье решения:

$$F(\xi, \eta | \omega) = \frac{4\pi e^{-i\xi x_0 - i\eta y_0 + i\omega t_0}}{\xi^2 + \eta^2 - (\omega/c)^2}. \quad (11.2.5)$$

Общее решение уравнения (11.2.3) для неограниченного пространства может быть получено из этого элементарного решения интегрированием. Например, решением неоднородного уравнения Гельмгольца для единичного чисто гармонического линейного источника в точке (x_0, y_0) является преобразование Фурье функции F по пространственным координатам

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{k^2 - (\omega/c)^2} d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR \cos(u-\theta)}}{k^2 - (\omega/c)^2} du,$$

где $\mathbf{k}$ — вектор с компонентами ξ, η , составляющий угол u с осью x , а $\mathbf{R}$ — вектор с компонентами $x-x_0, y-y_0$, составляющий угол θ с осью x . Интегрирование по u , как это следует из формулы (5.3.65) или из таблицы в конце гл. 10, приводит к бесселевой функции $2\pi J_0(kR)$. Для интегрирования по k мы используем следующее соотношение:

$$K_0(\alpha R) = \int_0^{\infty} \frac{J_0(kR)}{k^2 + \alpha^2} k dk, \quad K_0(z) = \frac{1}{2} \pi i H_0^{(1)}(iz),$$

которое может быть получено при помощи интегральных представлений цилиндрических функций и которое приведено в конце предыдущей главы. Полагая $\omega = ip$ (см. стр. 320), в конце концов получаем

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) = 2K_0\left(\frac{pR}{c}\right) = i\pi H_0^{(1)}\left(\frac{\omega R}{c}\right),$$

что совпадает с выражением (7.2.18) для функции Грина двумерного уравнения Гельмгольца.

Окончательное выражение решения уравнения (11.2.3) для импульсного источника содержит еще одно интегрирование по ω . Мы можем вместо этого использовать метод стр. 323 и найти функцию, имеющую G своим преобразованием Лапласа. Незначительное видоизменение интегрального представления для функции H_0 дает

$$K_0\left(\frac{pR}{c}\right) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-pRu/c}}{\sqrt{u^2-1}} du = \int_{R/c}^{\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t^2-(R/c)^2}} dt.$$

Следовательно, $2K_0(pR/c)$ является преобразованием Лапласа функции $2/\sqrt{t^2-(R/c)^2}$ при $t > R/c$. Таким образом, решение уравнения (11.2.3) для импульсного источника в точке (x_0, y_0) имеет вид [см. (7.3.15)]

$$g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|t) = \begin{cases} 0, & t < R/c, \\ 2/\sqrt{t^2-(R/c)^2}, & t > R/c. \end{cases} \quad (11.2.6)$$

Поэтому в двумерном случае смещение на расстоянии R от источника импульсного возмущения, происшедшего при $t=0$, равно нулю до момента R/c (время, требующееся для прохождения волновым фронтом расстояния R); после этого момента оно пропорционально $1/\sqrt{t^2-(R/c)^2}$. Эта волна имеет крутой передний фронт, но позади себя оставляет «возмущение», лишь медленно спадающее до нуля, как об этом уже упоминалось в связи с формулой (6.1.16). Поведение волны, порожденной источниками, распределение которых задается функцией $\rho(r, \varphi, t)$ (предполагается, что эта функция равна нулю при $t < 0$), легче всего изучить, положив, что точка наблюдения (r, φ) совпадает с началом координат, и пользуясь полярными координатами R, θ для точки источника. При-

меня формулу (11.1.15), видим, что решение уравнения (11.2.3) имеет вид

$$\begin{aligned}\psi(0, 0, t) &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{ct} R dR \int_{R/c}^t \frac{\rho(R, \theta, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (R/c)^2}} d\tau = \\ &= 2c \int_0^t d\tau \int_0^{c\tau} R dR \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R, \theta, t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2 - R^2}} d\theta.\end{aligned}\quad (11.2.7)$$

Второе выражение показывает, что по прошествии времени t после момента, когда начинает действовать источник, решение ψ зависит только от поведения функции ρ тех источников, расстояние которых от точки наблюдения (начала координат) не превосходит ct . Эффект более далеких источников сказывается лишь по прошествии более продолжительного времени.

Эти формулы следует сравнить с формулой (7.3.19), которая дает решение для специфического начального условия при $t=0$. Взаимосвязь между ними очевидна.

Мы можем представить наше решение также в другой форме, которая подчеркивает связь с формулой (11.2.1). Чтобы написать общую формулу для случая функции плотности источников $\rho(x, y, t)\delta(t-t_0)$, в первую очередь напомним преобразование Фурье этой функции плотности:

$$P(\xi, \eta | t_0) e^{i\omega t_0}, \quad \text{где} \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} \int \rho(x, y, t_0) e^{-i\xi x - i\eta y} dx dy.$$

Уравнение для F — преобразования Фурье функции ψ — получается подстановкой первого из выражений (11.2.4) в (11.2.3) для случая вышеуказанной плотности. В результате получим

$$F = \frac{4\pi P(\xi, \eta | t_0) e^{i\omega t_0}}{\xi^2 + \eta^2 - (\omega/c)^2}.$$

Преобразование Фурье этого выражения дает

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r} | t | t_0) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \frac{P(\xi, \eta | t_0)}{\xi^2 + \eta^2 - (\omega/c)^2} e^{i\xi x + i\eta y - i\omega(t-t_0)} d\xi d\eta d\omega = \\ &= -\frac{c^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} du \int_0^{\infty} P(k, u | t_0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} k dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t_0)}}{\omega^2 - k^2 c^2} d\omega.\end{aligned}$$

Интеграл по ω имеет форму, удобную для перехода к контурному интегрированию. Два полюса подинтегральной функции близки к контуру, и мы должны выбрать путь интегрирования так, чтобы удовлетворить физическим требованиям и крайевым условиям. Учитывая вычет в точке $\omega = kc$, приходим к расходящейся волне, которая является решением нашей задачи, но вычет в точке $\omega = -kc$ не нужен, так как он дает сходящуюся волну. Поэтому мы учитываем при $t > t_0$ вычет только в одном полюсе, что приводит к выражению $(\pi i/kc) e^{-ikc(t-t_0)}$. Следовательно, выражение для ψ при $t > t_0$ принимает вид

$$\psi(\mathbf{r} | t | t_0) = \frac{c}{2\pi i} \int_0^{2\pi} du \left\{ \int_0^{\infty} P(k, u | t_0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ikc(t-t_0)} dk \right\},$$

и решением уравнения (11.2.3) для произвольной плотности источников ρ ,

равной нулю при $t < 0$ и $\rho(x, y, t)$ при $t > 0$, является

$$\psi(x, y, t) = \int_0^\infty dk \left\{ \int_0^{2\pi} \Phi(k, u, t) e^{ik(x \cos u + y \sin u - ct)} du \right\}, \quad (11.2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{c} \Phi(k, u, t) &= \int_0^t P(k, u, t_0) e^{ihct_0} dt_0 = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int dx_0 dy_0 \int_0^t \rho(x_0, y_0, t_0) e^{ih(x_0 \cos u + y_0 \sin u - ct_0)} dt_0. \end{aligned}$$

Эта формула представляет ψ в виде интеграла по k от интегрального выражения типа (11.2.2) и одновременно является общей формулой типа (11.2.1).

Прямоугольные координаты. Когда границы прямоугольные, интегралы в формулах (11.2.1) и (11.2.2) вырождаются в суммы. Например, для гибкой мембраны, которая удерживается с натяжением T дн/см на неподвижном каркасе, расположенном на прямых $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, собственными функциями являются $\sin(\pi m x/a) \sin(\pi n y/b)$, где m и n — целые числа; собственные частоты равны $\omega_{mn}/2\pi$, где

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2 c^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right].$$

Если краевые условия на том же граничном прямоугольнике таковы, что нормальная составляющая градиента должна быть равна нулю, то собственными функциями являются $\cos(\pi m x/a) \cos(\pi n y/b)$, а собственные значения остаются те же, что и в предыдущем случае, и добавляется $\omega_{00} = 0$.

Функция Грина для чисто гармонической вынуждающей силы, которая сосредоточена в точке (x_0, y_0) , лежащей внутри области, может быть найдена теперь хорошо известными методами:

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \omega) = \frac{16}{\pi ab} \sum_{m, n} \frac{\sin\left(\frac{\pi m x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{(m/a)^2 + (n/b)^2 - (\omega/\pi c)^2}. \quad (11.2.9)$$

Отсюда, применяя метод преобразования Лапласа, мы можем получить выражение для решений при любом распределении источников и при любой зависимости от времени. Импульсная функция, соответствующая единичному импульсу, приложенному в точке (x_0, y_0) при $t_0 = 0$, такова:

$$g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t) = \frac{16c^2}{ab} \sum_{m, n} \frac{\sin\left(\frac{\pi m x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{V(m/a)^2 + (n/b)^2} \sin(\omega_{mn} t), \quad (11.2.10)$$

где $\omega_{mn}^2 = (\pi c m/a)^2 + (\pi c n/b)^2$.

Другую форму стационарной функции Грина G можно получить, применяя, как и выше, ряд Фурье по y и находя решения неоднородных уравнений по x , имеющие вид одного члена с особенностью при $x = x_0$. Полагая

$$G = \sum F_n(x) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right),$$

имеем для F_n уравнения

$$\frac{d^2 F_n}{dx^2} + k_n^2 F_n = -\frac{8\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right) \delta(x - x_0),$$

где $k_n^2 = (\omega/c)^2 - (\pi n/b)^2$. Решения этих уравнений, обращающиеся в нуль при $x=0$ и $x=a$, могут быть легко найдены, и мы приходим в конце концов к формуле для функции Грина

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) = \frac{8\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{k_n \sin(k_n a)} \begin{cases} \sin(k_n x_0) \sin[k_n(a-x)], & x > x_0, \\ \sin(k_n x) \sin[k_n(a-x_0)], & x < x_0. \end{cases} \quad (11.2.11)$$

Эта формула эквивалентна, конечно, формуле (11.2.9) и приводит при помощи преобразования Лапласа или Фурье к выражению (11.2.10). Мы можем точно так же получить еще одну формулу для G , заменяя в (11.2.11) x , x_0 , a на y , y_0 , b .

Другие краевые условия. Последняя форма функции Грина особенно удобна, когда приходится иметь дело с более сложными краевыми условиями. Так, например, сторона $x=a$ может быть закреплена не жестко, допуская смещение, пропорциональное поперечной силе, как это было принято для струны на стр. 324. Поскольку поперечная сила на единицу длины границы равна $T\partial\psi/\partial n$, где n — нормаль к границе в плоскости (x, y) ($-T\partial\psi/\partial x$ для $x=a$), это условие равносильно требованию, чтобы некоторая линейная комбинация величин ψ , $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$ была пропорциональна производной $\partial\psi/\partial n$ на границе; это последнее требование в свою очередь эквивалентно для простого гармонического колебания общему однородному краевому условию на границе $x=a$:

$$\psi = Y(\mathbf{r}^3, \omega) \frac{\partial\psi}{\partial n} = -Y \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Величина Y — комплексное отношение смещения к нормальной производной смещения в точке границы для простого гармонического колебания частоты $\omega/2\pi$ — является функцией ω и рассматриваемой точки границы. Она может быть названа *удельным адмитансом* границы. Для простейшей реакции закрепления, порождаемой инерцией, трением и упругостью, $Y = [-M\omega^2 - i\omega R + K]^{-1}$, но во многих случаях зависимость от ω сложнее; однако во всех физически осуществимых случаях мнимая часть Y положительна (поскольку мы принимаем зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$).

Если адмитанс Y постоянен на линии $x=a$ и равен нулю на остальной части границы (жесткое закрепление), то функция Грина имеет вид

$$G = \frac{8\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n y_0/b) \sin(\pi n y/b)}{k_n \sin(k_n a + \theta_n)} \begin{cases} \sin(k_n x_0) \sin[k_n(a-x) + \theta_n], & x > x_0, \\ \sin(k_n x) \sin[k_n(a-x_0) + \theta_n], & x < x_0, \end{cases} \quad (11.2.12)$$

где $k_n^2 = (\omega/c)^2 - (\pi n/b)^2$ и $\operatorname{tg} \theta_n = Y k_n$. Фазовый угол θ является функцией от ω ; это — комплексная функция, если Y комплексный.

Как было показано в предыдущем параграфе, чтобы определить собственные частоты колебаний системы, нужно применить преобразование Фурье (или Лапласа) к функции Грина и получить реакцию системы на импульс, приложенный при $t=0$. Значения ω , при которых подинтегральная функция имеет полюсы, являются собственными частотами, а форма «стоячих волн», имеющих эти собственные частоты, определяется характером зависимости от x вычетов в этих полюсах. Далее, было показано, что можно рассчитать переходный процесс для системы

при любых начальных условиях, даже если собственные функции в получаемых рядах не являются взаимно ортогональными. Собственные частоты — это те значения ω (деленные на 2π), при которых знаменатели различных членов ряда (11.2.12) обращаются в нуль:

$$\sin(k_n a + \theta_n) = 0, \quad k_n a + \arctg(k_n Y) = \pi m, \quad (11.2.13)$$

где m — положительное целое число. Так как k_n и Y — функции ω , то получается трансцендентное уравнение относительно ω , m , n , a , b и тех физических постоянных участка границы $x = a$, которые входят в выражение адмитанса Y . Если адмитанс Y комплексный (т. е. если Y имеет и активную и реактивную составляющие), то корни ω комплексные, и зависимость от времени свободных колебаний, $e^{-i\omega t}$, включает экспоненциальный множитель, обуславливающий затухание. Значение ω , удовлетворяющее уравнению (11.2.13) для данных значений m и n , может быть записано в виде $\omega_{mn} = 2\pi\nu_{mn} - i\chi_{mn}$.

Отметим, между прочим, что, зная Y , можно вычислить ω , и, наоборот, можно вычислить Y , если известны различные корни ω_{mn} . Иногда бывает полезно уметь определить краевые условия по измеренным собственным частотам и постоянным затухания.

Переменный адмитанс границы. Функция Грина в форме (11.2.11) может быть использована для определения свободных колебаний также в тех случаях, когда адмитанс Y границы $x = a$ изменяется от точки к точке вдоль этой границы, т. е. когда Y является функцией не только ω , но и y . Чтобы сделать это, обратимся к формуле (7.1.15), связывающей решение ψ краевой задачи с функцией Грина.

В качестве примера мы можем вместо мембраны рассмотреть акустическую задачу. Пусть часть пространства, ограниченная плоскостями $x = 0$ и $x = a$, $y = 0$ и $y = b$, заполнена некоторой средой, колеблющейся только в плоскости x, y . Решение $\psi(x, y, t)$ является потенциалом скоростей, $-\text{grad } \psi$ — скорость частиц среды, $\rho \partial \psi / \partial t$ — избыточное давление. Предположим, что три стенки $x = 0$, $y = 0$, $y = b$ жесткие, т. е. что нормальная составляющая градиента ψ у этих стенок равна нулю. Однако стенка $x = a$ пористая или не совсем жесткая, так что отношение нормальной составляющей скорости к давлению на этой поверхности не равно нулю. Мы определяем *нормальный акустический импеданс* z этой стенки равенством

$$z = \frac{\text{Давление}}{\text{Нормальная составляющая скорости}} = \frac{i\omega\rho\psi}{\partial\psi/\partial x}, \quad x = a,$$

для простого гармонического колебания с частотой $\omega/2\pi$, так что зависимость ψ от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$. Отношение нормальной составляющей градиента к величине ψ при $x = a$ обозначим через $Y(y, \omega)$, т. е. положим

$$Y(y, \omega)\psi(a, y) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \Big|_{x=a},$$

где $Y = i\omega\rho/z$ может быть названо *отклоняющим адмитансом* стенки. (Он пропорционален отношению нормального смещения к давлению у стенки.)

Для решения этой краевой задачи (нормальная составляющая градиента равна нулю у стенок $x = 0$, $y = 0$, $y = b$ и равна $Y\psi$ при $x = a$) воспользуемся функцией Грина

$$G(x, y | x_0, y_0 | \omega) = \quad (11.2.14)$$

$$= -\frac{4\pi}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[\frac{\cos(\pi n y_0 / b)}{k_n \sin k_n a} \right] \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \begin{cases} \cos(k_n x_0) \cos[k_n(a-x)], & x > x_0, \\ \cos(k_n x) \cos[k_n(a-x_0)], & x < x_0, \end{cases}$$

где, как и выше, $k_n^2 = (\omega/c)^2 - (\pi n/b)^2$. Поскольку нормальная производная этой функции равна нулю на всех граничных поверхностях, формула (7.1.15) дает

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^b G(x, y | a, y_0) \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \psi(x_0, y_0) \right]_{x_0=a} dy_0 = \\ &= -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\cos(\pi n y/b) \cos(k_n x)}{k_n \sin(k_n a)} \int_0^b Y(y_0, \omega) \psi(a, y_0) \cos\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right) dy_0.\end{aligned}\quad (11.2.15)$$

На той части границы, где $Y \neq 0$ (т. е. при $x=a$), это равенство представляет собой интегральное уравнение для ψ . Заметим, что функция $G(x, y | a, y_0 | \omega)$ разрывна на этой части границы.

Всюду, кроме точек разрыва на части границы $x=a$, мы можем представить решение ψ в виде ряда

$$\psi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x) \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right) e^{-i\omega t}.\quad (11.2.16)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (11.2.15), приходим к уравнениям для определения функций F_m

$$F_n(x) = -\frac{\cos(k_n x)}{k_n \sin(k_n a)} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{nm} F_m(a),\quad (11.2.17)$$

где

$$Y_{mn}(\omega) = \frac{\varepsilon_n}{b} \int_0^b Y(y, \omega) \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) dy$$

— матричный элемент Y в базисе собственных функций $\cos(\pi n y/b)$.

Мы до сих пор еще не определили резонансные частоты и коэффициенты затухания системы. В принципе это можно сделать, полагая $x=a$ в уравнении (11.2.17):

$$\sum_{m=0}^{\infty} Y_{mn} F_m(a) + k_n \operatorname{tg}(k_n a) F_n(a) = 0.\quad (11.2.18)$$

Эта система имеет нетривиальные решения $F_n(a)$, если равен нулю определитель

$$D = \begin{vmatrix} Y_{00} + k_0 \operatorname{tg}(k_0 a) & Y_{10} & Y_{20} & \dots \\ Y_{01} & Y_{11} + k_1 \operatorname{tg}(k_1 a) & Y_{21} & \dots \\ Y_{02} & Y_{12} & Y_{22} + k_2 \operatorname{tg}(k_2 a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Как Y_{mn} , так и $k_n \operatorname{tg}(k_n a)$ являются функциями от ω . Значения ω , для которых этот определитель равен нулю, являются собственными частотами системы, и соответствующие величины k_n и F_n позволяют вычислить собственные функции ψ . Импеданс z , конечно, может быть и комплексным; в этом случае матричные элементы Y_{mn} будут иметь как мнимые, так и действительные части и корни ω будут комплексными. Действительные части корней — это *собственные частоты* (умноженные на 2π ; см. стр. 315 и 318), а мнимые части (которые должны быть отрицательными для поглощающей стенки) являются *коэффициентами затухания*.

Процесс решения и связь между различными факторами станут яснее, если мы подсчитаем приближенное решение для случая, когда матричные элементы Y_{mn} малы по сравнению с величиной $1/b$. Когда все Y_{mn} равны нулю, собственные функции имеют простой вид: $\psi_{\sigma\tau}^0 = \cos(\pi\sigma x/a) \cos(\pi\tau y/b)$ (σ, τ — целые числа), и собственные значения равны

$$\omega_{\sigma\tau}^0 = c \sqrt{\left(\frac{\pi\sigma}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\tau}{b}\right)^2}.$$

Естественно предположить, что при малых Y_{mn} в найденные значения ψ и ω нужно внести малые поправки и этим можно воспользоваться для расчетов. В гл. 9 указываются детали этого процесса.

Можно, например, положить, что в членах ряда (11.2.16) коэффициент F_τ значительно больше всех прочих F_m . В уравнениях (11.2.18) члены $Y_{mn}F_m(a)$ при $m \neq \tau$ будут меньше, чем $Y_{\tau n}F_\tau(a)$, и они могут быть отброшены как члены второго порядка. Следовательно, приближенно малые F_n выражаются через F_τ таким образом:

$$F_n(a) \approx -\frac{Y_{\tau n}F_\tau(a)}{k_n \operatorname{tg}(k_n a)}, \quad n \neq \tau.$$

Теперь ω определяется из уравнения (11.2.18), соответствующего $n = \tau$:

$$k_\tau \operatorname{tg}(k_\tau a) \approx -Y_{\tau\tau} + \sum_{m \neq \tau} \frac{Y_{\tau m} Y_{m\tau}}{k_m \operatorname{tg}(k_m a)}. \quad (11.2.19)$$

Вспоминая определение k_n и величину предельного собственного значения $\omega_{\sigma\tau}^0$, мы видим, что $k_\tau a$ должно быть равно $\pi\sigma + e_{\sigma\tau}$, где σ — другое целое число и $e_{\sigma\tau}$ мало по сравнению с π . Собственное значение ω определяется, конечно, равенством

$$\omega_{\sigma\tau}^2 = \pi^2 c^2 \left[\left(\frac{\sigma}{a} + \frac{e_{\sigma\tau}}{\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{b} \right)^2 \right],$$

а величины k_m с достаточной точностью могут быть вычислены по формуле

$$k_m \approx \sqrt{\left(\frac{\pi\sigma}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\tau}{b}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}, \quad m \neq \tau.$$

Поэтому $k_\tau \operatorname{tg}(k_\tau a) \approx (\pi\sigma e_{\sigma\tau}/a) + (e_{\sigma\tau}^2/a)$ и решение уравнения (11.2.19) с точностью до членов второго порядка относительно малых величин Y_{mn} дает

$$e_{0\tau} \approx \sqrt{-aY_{\tau\tau}} + \sqrt{-\frac{a}{4Y_{\tau\tau}}} \sum_{m \neq \tau} \frac{Y_{\tau m} Y_{m\tau}}{k_m \operatorname{tg}(k_m a)},$$

$$e_{\sigma\tau} \approx -\frac{a}{\pi\sigma} Y_{\tau\tau} - \frac{a^2}{(\pi\sigma)^3} Y_{\tau\tau}^2 + \frac{a}{\pi\sigma} \sum_{m \neq \tau} \frac{Y_{\tau m} Y_{m\tau}}{k_m \operatorname{tg}(k_m a)}, \quad \sigma \neq 0.$$

Отсюда можно получить собственные значения $\omega_{\sigma\tau}$ с точностью до членов первого или второго порядка. С точностью до членов первого порядка по Y_{mn} собственные функции имеют вид

$$\psi \approx F_\tau(a) \left\{ \cos \left[\left(\pi\sigma + e_{\sigma\tau} \right) \frac{x}{a} \right] \cos \left(\frac{\pi\tau y}{b} \right) - \sum_{n \neq \tau} \frac{Y_{n\tau} \cos(k_n x)}{k_n \sin(k_n a)} \cos \left(\frac{\pi n y}{b} \right) \right\} e^{-i\omega_{\sigma\tau} t}, \quad (11.2.20)$$

где постоянная $F_\tau(a)$ может быть принята равной единице или выбрана из условия нормировки ψ .

Первый член в этом выражении учитывает краевое условие на границе $x=a$, в некотором роде усредняя его; второй член (ряд) учитывает влияние на решение зависимости Y от расстояния y вдоль рассматриваемой стенки. Если стенка имеет однородное покрытие, так что z и Y не зависят от y , то все матричные элементы $Y_{n\tau}$ ($n \neq \tau$) равны нулю вследствие ортогональности $\cos(\pi\tau y/b)$ и $\cos(\pi n y/b)$ и в выражении (11.2.20) остается только первый член.

При низких частотах стенки часто обладают наряду с активным также и реактивным сопротивлением, зависящим от их упругости, так что

$$z(y, \omega) = \rho c \left[\gamma(y) + \frac{i}{\omega} \kappa(y) \right] = \frac{i\omega\rho}{Y}, \quad 0 < y < b,$$

где ρc — характеристический импеданс среды (см. стр. 298 тома I), а значит γ и κ/ω безразмерны. Для низких частот κ значительно больше, чем $\gamma\omega$. Следовательно, матричные элементы выражаются так:

$$Y_{mn} \approx \frac{\omega^2}{c} S_{mn} + i \frac{\omega^3}{c} K_{mn},$$

где

$$S_{mn} = \frac{\varepsilon_n}{b} \int_0^b \frac{1}{\kappa(y)} \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) dy$$

и

$$K_{mn} = \frac{\varepsilon_n}{b} \int_0^b \frac{\gamma(y)}{\kappa^2(y)} \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) dy.$$

Матрица K может быть названа матрицей активной проводимости, или кондуктанса, а S — матрицей реактивной проводимости, или сусептанса.

В первом приближении собственная функция определяется формулой (11.2.20), в которую вместо Y_{mn} нужно подставить полученные значения. Собственные значения $\omega_{\tau\tau}$ в первом приближении имеют вид

$$\omega_{\tau\tau} = 2\pi\nu_{\tau\tau} - i\kappa_{\tau\tau}, \quad \kappa_{\tau\tau} = \frac{\varepsilon_0 c}{2a} [\omega_{\tau\tau}^0]^2 K_{\tau\tau},$$

$$2\pi\nu_{\tau\tau} = \omega_{\tau\tau}^0 \left[1 - \frac{\varepsilon_0 c}{2a} S_{\tau\tau} \right], \quad [\omega_{\tau\tau}^0]^2 = \pi^2 c^2 \left[\left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{b} \right)^2 \right],$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = 2$. Каждая собственная частота, таким образом, несколько уменьшается пропорционально эффективной реактивной проводимости. Коэффициенты затухания κ , определяющие быстроту затухания стоячей волны, пропорциональны постоянным проводимости K , т. е., как видно из формулы для $K_{\tau\tau}$, пропорциональны проводимости, усредненной по стенке $x=a$ с весом $\cos^2(\pi\tau y/b)$.

Полярные координаты. Волновое уравнение разделяется в полярных координатах r, φ (см. стр. 478 тома I), причем, если положить $\psi = R(r)\Phi(\varphi)e^{-i\omega t}$, разделенные уравнения имеют вид

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m}{r} \right)^2 \right] R = 0.$$

Решение первого уравнения — это синус или косинус угла $m\varphi$, и если переменная φ периодическая с периодом 2π , то m должно быть целым числом (мы в дальнейшем рассмотрим случай, когда m может не быть целым). Решением второго уравнения является цилиндрическая функция порядка m с аргументом $\omega r/c$, которая может быть представлена в виде линейной

комбинации функций $J_m(\omega r/c)$ и $N_m(\omega r/c)$, рассмотренных в § 5.3. Многие из свойств этих функций указаны в таблицах в конце этой главы и гл. 10. Мы напомним, что функции J_m конечны при $r=0$, а функции N_m при $r=0$ имеют особенность.

Соотношение (5.3.65) выражает одно из самых важных свойств функции Бесселя — оно дает ее интегральное представление. Нетрудно видоизменить это представление так, чтобы получить выражение типа (11.2.2) для решения волнового уравнения в полярных координатах:

$$\begin{aligned}\cos(m\varphi) J_m(kr) &= \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{-ihr \cos(\varphi-u)} \cos(mu) du, \\ \sin(m\varphi) J_m(kr) &= \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{-ihr \cos(\varphi-u)} \sin(mu) du,\end{aligned}\quad (11.2.21)$$

где m — целое число. Эта формула выражает, очевидно, коэффициенты ряда Фурье. Отсюда получаем связь между решением волнового уравнения в виде плоской волны $e^{ik \cdot r} = e^{ihr \cos \varphi}$ и решениями в полярных координатах:

$$e^{ihr \cos \varphi} = e^{ik \cdot r} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos(m\varphi) J_m(kr);$$

эта формула уже обсуждалась (см. стр. 581 тома I). Мы также получили полезную формулу [см. (5.3.66)]

$$J_0(kR) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(kr_0) J_m(kr) \cos[m(\varphi - \varphi_0)],$$

где $R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ — расстояние между двумя точками (r, φ) и (r_0, φ_0) .

Для расходящихся волн мы используем функцию Ганкеля первого рода

$$H_m^{(1)}(kr) = J_m(kr) + iN_m(kr) = \frac{2}{\pi i^{m+1}} \int_0^{i\infty} e^{ihr \cos u} \cos(mu) du. \quad (11.2.22)$$

(Во многих случаях, когда нет опасности смешения с функцией Ганкеля второго рода $H_m^{(2)} = J_m - iN_m$ для сходящихся волн, мы будем опускать верхний индекс и будем просто писать H_m .) Это интегральное представление отличается от представления для J_m верхним пределом интегрирования (и множителем $2/i$). Следовательно, многие из формул, относящихся к функциям J , могут быть легко преобразованы в формулы для функций H . Например, функция Грина для двумерной неограниченной области (см. стр. 752 тома I) может быть записана при помощи ряда вида (5.3.66) [см. формулы (7.2.51)]

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \omega) = i\pi H_0(kR) =$$

$$= i\pi \sum_{m=0}^{\infty} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} J_m(kr) H_m(kr_0), & r < r_0, \\ J_m(kr_0) H_m(kr), & r > r_0, \end{cases} \quad (11.2.23)$$

который, конечно, может быть получен также из общей формулы (7.2.63)

Волны внутри круговой области. Для решения волнового уравнения внутри области, ограниченной окружностью $r = a$, мы пользуемся функциями Бесселя J_m , конечными при $r = 0$.

В случае круглой мембраны ($\varphi = 0$ при $r = a$) воспользуемся комбинациями вида

$$\frac{\cos}{\sin}(m\varphi) J_m(\pi\beta_{mn} r/a), \quad J_m(\pi\beta_{mn}) = 0.$$

Величины некоторых корней β_{mn} приведены в конце главы. Функции $J_m(\pi\beta_{mn} r/a)$ для различных n взаимно ортогональны. Их нормирующая постоянная равна

$$\int_0^a \left[J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r}{a}\right) \right]^2 r dr = \frac{1}{2} a^2 [J_{m-1}(\pi\beta_{mn})]^2,$$

причем $J_{-1}(z) = -J_1(z)$ при $m = 0$. Функции $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$ ортогональны для различных m , так что приведенные выше произведения образуют полную ортогональную систему собственных функций, по которым при $r < a$ может быть разложена любая кусочно гладкая функция r и φ . Например, если круглой мембране, находившейся вначале в покое, при $t = 0$ сообщается начальная скорость $v_0(r, \varphi)$, то последующие смещения точек мембраны описываются формулой

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{m, n} [A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)] J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r}{a}\right) \sin(\omega_{mn} t), \\ \left. \begin{aligned} A_{mn} \\ B_{mn} \end{aligned} \right\} &= \frac{\varepsilon_m}{\pi^2 a c \beta_{mn} [J_{m-1}(\pi\beta_{mn})]^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) d\varphi \int_0^a v_0 J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r}{a}\right) r dr, \quad (11.2.24) \\ \omega_{mn} &= \left(\frac{\pi c}{a}\right) \beta_{mn}. \end{aligned}$$

Функция Грина для чисто гармонического источника единичной амплитуды, расположенного в точке (r_0, φ_0) , имеет вид

$$G(r | r_0 | \omega) = \frac{c^2}{\pi a^2} \sum_{m, n} \frac{\varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)]}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) [J_{m-1}(\pi\beta_{mn})]^2} J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r_0}{a}\right) J_m\left(\frac{\pi\beta_{mn} r}{a}\right). \quad (11.2.25)$$

Интересно сравнить это выражение с разложением (11.2.23) функции Грина для неограниченного пространства. В рассматриваемом случае функции Ганкеля не применяются, так как граница $r = a$ отражает расходящиеся и создает стоячие волны. Поскольку отражение при $r = a$ учтено в формуле (11.2.25), ее предельная форма при очень больших a дает выражение, отличное от ряда (11.2.23). Пользуясь формулой (11.2.25), при помощи преобразования Лапласа можно рассчитать неустановившиеся колебания мембраны.

Если краевое условие при $r = a$ заключается в равенстве нулю нормальной составляющей градиента, как в случае звуковых волн, то решения строятся из произведений

$$\frac{\cos}{\sin}(m\varphi) J_m\left(\frac{\pi\alpha_{mn} r}{a}\right), \quad \frac{d}{d\alpha} J_m(\pi\alpha_{mn}) = 0.$$

Значения α_{mn} также приведены в конце главы. Можно вывести формулы, аналогичные (11.2.24) и (11.2.25) с α_{mn} вместо β_{mn} и с $[1 - (m/\pi\alpha_{mn})^2] \times [J_m(\pi\alpha_{mn})]^2$ вместо $[J_{m-1}(\pi\beta_{mn})]^2$. Например, импульсную функцию потен-

циала скоростей ψ , соответствующую единичному импульсу давления, приложенному в момент $t=0$ в точке (r_0, φ_0) , можно получить при помощи преобразования Лапласа. Давление, вызванное таким импульсом, описывается функцией, для которой функция G , определяемая формулой (11.2.25), является преобразованием Лапласа (с α вместо β и т. д.). Поскольку преобразованием Лапласа функции $(1/\omega_{mn}) \sin(\omega_{mn}t)$ является $(p^2 + \omega_{mn}^2)^{-1}$, где $p = i\omega$, это давление легко подсчитать. Потенциал скоростей равен интегралу давления от $t=0$ до t , умноженному на $-1/p$. Поэтому окончательно получаем

$$g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|t) = -\frac{c^2}{\pi a^2} \sum_{m,n} \varepsilon_m \frac{\cos[m(\varphi - \varphi_0)]}{\omega_{mn}^2 [1 - (m/\pi\alpha_{mn})^2] [J_m(\pi\alpha_{mn})]^2} J_m\left(\frac{\pi\alpha_{mn}r_0}{a}\right) \times \\ \times J_m\left(\frac{\pi\alpha_{mn}r}{a}\right) [\cos(\omega_{mn}t) - 1],$$

где $\omega_{mn} = (\pi c/a) \alpha_{mn}$. Скорость равна градиенту этой функции.

Случай более общего краевого условия $Y(\varphi, \omega)\psi = \partial\psi/\partial r$ при $r=a$ может быть изучен способом, продемонстрированным на задаче о прямоугольной области.

Излучение кругового цилиндра. Имея дело с волнами вне кругового цилиндра, мы можем пользоваться функциями Бесселя и Неймана в комбинациях, удовлетворяющих краевым условиям на бесконечности. Например, если поверхность кругового цилиндра является «причиной» волнового движения, то волны должны быть расходящимися и мы должны пользоваться функциями Ганкеля первого рода $H_m(kr) = J_m(kr) + iN_m(kr)$. Верхний индекс у функции H_m опущен, поскольку функцию Ганкеля второго рода $H_m^{(2)}(kr)$ мы не будем употреблять (практически мы никогда не имеем сходящихся волн). Применяя обозначения, поясняемые в конце главы, имеем

$$H_m(z) = -iC_m(z) e^{i\delta_m(z)}, \quad \frac{d}{dz} H_m(z) = iC'_m(z) e^{i\delta'_m(z)},$$

и мы можем выразить краевые условия при $r=a$ через функции C и δ .

Предположим, например, что длинный круговой цилиндр колеблется так, что радиальная скорость точек его поверхности равна $V(\varphi)e^{-i\omega t}$, где φ — полярный угол [т. е. поверхность в момент t задается уравнением $r = a + (iV/\omega)e^{-i\omega t}$, причем V/ω мало по сравнению с a]. Очевидно, что потенциал скоростей точек среды вне цилиндра имеет вид

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(kr) \cos(m\varphi) e^{-i\omega t}, \quad \omega = kc,$$

если функция $V(\varphi)$ четна по φ , так что $V(2\pi - \varphi) = V(\varphi)$ (в противном случае мы добавили бы еще ряд по синусам). Радиальная скорость на поверхности цилиндра равна радиальной составляющей градиента ψ , и, таким образом, мы получаем выражение V в виде ряда Фурье

$$V(\varphi) = ik \sum_{m=0}^{\infty} A_m C'_m(ka) e^{i\delta'_m(ka)} \cos(m\varphi).$$

(Конечно, и здесь следовало бы прибавить ряд по синусам, если бы V

не была четной.) Следовательно, коэффициентами ряда для ψ являются

$$A_m = \frac{V_m e^{-i\delta'_m(ka)}}{ikC'_m(ka)}, \quad V_m = \frac{s_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi.$$

На большом расстоянии от цилиндра можно применить асимптотические формулы для функций Ганкеля и придать решению следующую простую форму:

$$\psi \simeq \sqrt{\frac{ac^2}{\pi rk^2}} e^{ikr - i\omega t} f(\varphi), \quad f(\varphi) = \sqrt{\frac{2k}{iac^2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m i^{-m} \cos(m\varphi). \quad (11.2.26)$$

Для чисто гармонической звуковой волны интенсивность звука (см. стр. 332) равна произведению давления на скорость (следует брать и для p и для v действительные части соответствующих комплексных выражений). Средняя интенсивность за один период равна половине действительной части произведения комплексного p на величину, комплексно сопряженную с v . Для больших значений kr поток энергии радиален и определяется формулами

$$S = \frac{\rho c^3 a}{2\pi r} F(\varphi), \quad F(\varphi) = |f(\varphi)|^2, \quad (11.2.27)$$

$$F(\varphi) = \frac{2}{c^2 ka} \sum_{m, n} \frac{V_m V_n}{C'_m C'_n} \cos \left[\delta'_m - \delta'_n + \frac{1}{2} \pi (m - n) \right] \cos(m\varphi) \cos(n\varphi),$$

где у функций C'_m и δ'_m подразумевается аргумент ka . Безразмерная функция $F(\varphi)$ называется *плотностью углового распределения*, ибо она пропорциональна энергии, излучаемой цилиндром в направлении φ . Мы видим, что, за исключением случая, когда только один из коэффициентов V_m отличен от нуля, это распределение весьма сложно. Действительно, легко видеть, что интенсивность имеет одинаковую зависимость от угла для всех значений r , только если распределение радиальной скорости по цилиндру пропорционально линейной комбинации функций $\cos(m\varphi)$ и $\sin(m\varphi)$ с одинаковым целым m .

Общая энергия, излучаемая за секунду единицей длины колеблющегося цилиндра, равна интегралу по φ от Sr :

$$P = \frac{\rho c}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{s_m} \left[\frac{V_m}{C'_m} \right]^2,$$

т. е. равна величине $\rho c^2 a$, умноженной на безразмерную функцию от ka , вид которой определяется функцией $V(\varphi)$.

Обращаясь к таблице в конце настоящей главы, мы видим, что если величина $ka = \omega a/c = 2\pi a/\lambda$ очень мала (т. е. если длина излучаемой волны λ значительно больше периметра излучающего цилиндра), то C'_0 и δ'_0 значительно больше, чем C'_m и δ'_m при $m > 0$. Следовательно, в области длинных волн зависимость от угла амплитуды волны, и интенсивности и полная излучаемая мощность даются формулами (11.2.26) и (11.2.27), где

$$f(\varphi) \simeq -\sqrt{\frac{ika}{8c^2}} \int_0^{2\pi} V(\varphi) d\varphi, \quad P \simeq \frac{1}{8} \rho \omega a^2 \left[\int_0^{2\pi} V(\varphi) d\varphi \right]^2, \quad ka \ll 1,$$

за исключением только случая $V_0 = 0$. Таким образом, в случае низких частот излучение распространяется равномерно по всем направлениям с амплитудой, пропорциональной средней радиальной скорости излучающей поверхности.

Для случая высоких частот величина $ka = 2\pi a/\lambda$ велика и длина волны λ много меньше, чем периметр цилиндра $2\pi a$. Теперь в сумме (11.2.26) для f можно ограничиться числом членов, несколько меньшим чем ka . Для указанных малых значений m мы имеем

$$\delta'_m \simeq ka - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \text{ и } C'_m \simeq \sqrt{2/\pi ka}.$$

Для значений m , близких к ka , эти соотношения теряют силу, а для значений m , значительно больших чем ka , δ'_m очень мало, а C'_m весьма велико. Следовательно, с довольно хорошим приближением ряд для потенциала скоростей имеет вид

$$\psi \simeq \frac{1}{ik} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{ik(r-a)-i\omega t} \sum_{m=0}^M V_m \cos(m\varphi), \quad M \simeq ka \gg 1.$$

Радиальная скорость среды на достаточно большом расстоянии от поверхности цилиндра равна

$$v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \simeq \sqrt{\frac{a}{r}} e^{ik(r-a)-i\omega t} \sum_{m=0}^M \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\alpha) \cos(m\alpha) \cos(m\varphi) d\alpha.$$

Если $V(\varphi)$ является произвольной функцией от φ (не обязательно четной), то приближенная асимптотическая формула для радиальной скорости в случае коротких волн имеет вид

$$v(r, \varphi) \simeq \sqrt{\frac{a}{r}} e^{ik(r-a)-i\omega t} \int_0^{2\pi} V(\alpha) \left\{ \sum_{m=0}^M \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \cos[m(\alpha - \varphi)] \right\} d\alpha.$$

Как было показано на стр. 694 тома I, это выражение равно

$$\sqrt{\frac{a}{r}} e^{ik(r-a)-i\omega t} \int_0^{2\pi} V(\alpha) \frac{\sin \left[\left(M + \frac{1}{2} \right) (\alpha - \varphi) \right]}{2\pi \sin \left[\frac{1}{2} (\alpha - \varphi) \right]} d\alpha, \quad M \simeq ka.$$

Дробь, стоящая под интегралом, стремится к дельта-функции $\delta(\alpha - \varphi)$ при M , стремящемся к бесконечности (т. е. при ka , неограниченно возрастающем). Следовательно, когда длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/k$ исчезающе мала по сравнению с $2\pi a$, скорость среды на большом расстоянии от цилиндра определяется формулой

$$v(r, \varphi) \simeq \sqrt{\frac{a}{r}} e^{ik(r-a)} [V(\varphi) e^{-i\omega t}],$$

где величина в квадратных скобках является радиальной скоростью в точке цилиндрической поверхности, находящейся на одном радиусе с точкой наблюдения.

Следовательно, для очень коротких волн амплитуда скорости среды в точке (r, φ) равна амплитуде скорости точки цилиндрической поверхности (a, φ) , уменьшенной в $\sqrt{a/r}$ раз. Если колеблющиеся точки поверхности цилиндра сосредоточены вдоль одной образующей [т. с. если $V = \delta(\varphi - \varphi_0)$], то излучение распространяется от этой линии радиально, и ни в каком другом направлении излучения не будет. Подобную картину можно было бы ожидать скорее при корпускулярном, чем при волновом характере излучения. Если ka велико, но не бесконечно, то дробь, стоящая под интегралом в вышеприведенной формуле, имеет пик при $\alpha = \varphi$, но этот пик уже не бесконечно узкий; его ширина приблизительно равна $\pi/ka = \lambda/2a$. Поэтому фронт волны на некотором расстоянии от поверхности

не будет в точности воспроизводить все тончайшие детали распределения скоростей на поверхности цилиндра; здесь будут «смазываться» детали с угловыми размерами, меньшими чем $\lambda/2a$ радиан. Другими словами, становится заметной диффракция.

Таким образом, меняя соотношение между длиной волны и диаметром цилиндра, мы переходим от излучения, равномерного во всех направлениях (очень длинные волны), к излучению, которое воспроизводит распределение скоростей точек излучающей поверхности (весьма короткие волны, геометрическая оптика). В промежуточных случаях, когда λ имеет порядок $2\pi a$, излучаемая волна сложна по форме и вычислять ее нужно при помощи ряда (11.2.27).

Рассеяние плоской волны на цилиндре. Предположим, что волна возбуждается не на нашей цилиндрической поверхности, а имеет какое-либо другое происхождение, цилиндр же влияет на структуру поля только благодаря необходимости соблюдения краевых условий на его поверхности. Простейшим примером этого типа является случай, когда плоская волна, порожденная бесконечно удаленными источниками, рассеивается на цилиндре. Типичная плоская волна, распространяющаяся перпендикулярно оси цилиндра, имеет вид

$$\phi = Ae^{ikx - i\omega t} = Ae^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\varphi).$$

Эта волна сама по себе обычно не удовлетворяет краевым условиям на поверхности цилиндра $r=a$ (если бы она удовлетворяла им, цилиндр был бы «прозрачным»). Поэтому возникает дополнительная волна, обеспечивающая выполнение краевых условий при $r=a$. Эта волна, обусловленная присутствием цилиндра, называется *рассеянной волной*. Она излучается от цилиндра и поэтому должна быть составлена из функций Ганкеля первого рода, представляющих расходящиеся волны.

К каждому члену разложения плоской волны мы должны, следовательно, присоединить другой член вида $B_m H_m(kr) \cos(m\varphi)$ так, чтобы сумма $A \epsilon_m i^m J_m(kr) + B_m H_m(kr)$ удовлетворяла краевым условиям при $r=a$. Если речь идет о плоской электромагнитной волне с электрическим вектором, параллельным оси цилиндра, и цилиндр представляет собой идеальный проводник, то краевое условие состоит в том, что волновая функция должна быть равна нулю при $r=a$ (см. стр. 212 тома I). Если же параллелен оси магнитный вектор или если речь идет об акустической волне и поверхность цилиндра жесткая, то требуется, чтобы нормальная составляющая градиента была равна нулю при $r=a$. Промежуточные случаи, когда значения функции пропорциональны составляющей градиента, имеют место, если поверхность не является идеальным проводником или, соответственно, не абсолютно жесткая.

Чтобы проиллюстрировать ход расчетов, мы рассмотрим случай, когда волновая функция равна нулю при $r=a$. Выражая функции Бесселя и Ганкеля через их амплитуды и фазовые углы по формулам, приведенным в таблицах в конце этой главы, получаем

$$0 = A \epsilon_m i^m C_m(ka) \sin[\delta_m(ka)] - i B_m C_m(ka) e^{i\delta_m(ka)},$$

или

$$B_m = A \epsilon_m i^{m-1} e^{-i\delta_m} \sin \delta_m,$$

причем здесь и в дальнейшем фазовый угол δ_m является функцией аргумента ka . Поэтому совокупное поле, удовлетворяющее обоим требованиям (на далеких расстояниях от цилиндра оно состоит из плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , и расходящейся

радиальной волны; на поверхности цилиндра оно равно нулю), имеет вид

$$\Psi = A e^{ikx - i\omega t} + \psi_s(r, \varphi) e^{-i\omega t},$$

где

$$\psi_s = -iA \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{\frac{1}{2} m\pi i - i\delta_m} \sin \delta_m H_m(kr) \cos(m\varphi) \quad (11.2.28)$$

— рассеянная волна. Рассеянная волна интерферирует с плоской волной, местами усиливая и местами (как, например, на поверхности цилиндра) ослабляя ее.

Чтобы выделить рассеянную волну, мы должны представить себе «плоскую волну» ограниченной с боков (например, прошедшей через щель) так, что она распространяется только в области между $y = -b$ и $y = b$, покрывая полностью цилиндр, но не занимая все пространство. Конечно, как нам известно из рассуждений стр. 220 тома I, для того чтобы волна, пройдя через щель, осталась плоской с существенно параллельными волновыми фронтами, b должно быть значительно больше длины волны $2\pi/k$. Фактически плоская волна не может быть заключена точно между двумя параллельными линиями $y = \pm b$; она будет слегка расходиться, но угловая ширина пучка, приблизительно равная $\lambda/2b = \pi/kb$, будет мала.

Измерение рассеянной волны ψ_s следует производить в области, лежащей за плоскостями $y = \pm b$, и, таким образом, мы не можем измерить ψ_s для $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, т. е. точно в направлении распространения плоской волны или в противоположном к нему. На достаточно большом расстоянии R от цилиндра угол $\varphi \simeq b/R$, начиная с которого можно отделить ψ_s от плоской волны, сколь угодно мал, но никогда не равен нулю. Следовательно, мы никогда не можем полностью сравнить вычисленное ψ_s с измеренным. Если функция ψ_s меняется при изменении φ вблизи $\varphi = 0$ достаточно медленно, то с разумной достоверностью ее можно экстраполировать для значения $\varphi = 0$, но если ψ_s быстро меняется вблизи $\varphi = 0$, то мы не можем быть уверены, соответствуют ли экстраполированные данные измерения вычисленным величинам.

Для больших значений r , при которых следует измерять рассеянную волну, выражение (11.2.28) имеет следующую асимптотическую форму:

$$\psi_s \simeq -A \sqrt{\frac{2i}{\pi kr}} e^{ikr} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{-i\delta_m(ka)} \sin[\delta_m(ka)] \cos(m\varphi), \quad (11.2.29)$$

где ряд выражает зависимость рассеянной волны от угла. Как для электромагнитной, так и для акустической волны интенсивность пропорциональна квадрату модуля волновой функции. Интенсивность плоской волны равна $K|A|^2$ (K — коэффициент пропорциональности) и направлена в положительном направлении оси x . Подобно этому интенсивность рассеянной волны для больших r с точностью до множителя K равна квадрату модуля функции ψ_s , определенной формулой (11.2.29), и направлена в этом случае от центра вдоль радиуса. Следовательно, отношение интенсивности рассеянной волны в точке (r, φ) (r очень велико) к интенсивности падающей плоской волны равно квадрату модуля функции ψ_s , разделенному на $|A|^2$:

$$S(\varphi) = \frac{2}{\pi kr} \sum_{m, n} \varepsilon_m \varepsilon_n \sin \delta_m \sin \delta_n \cos(\delta_m - \delta_n) \cos(m\varphi) \cos(n\varphi). \quad (11.2.30)$$

Истинная интенсивность поля в точке (r, φ) ($kr \gg 1$) равна функции $S(\varphi)$, умноженной на интенсивность падающей плоской волны, и направлена от центра.

Общая энергия, рассеянная за секунду, при единичной интенсивности падающей волны равна, следовательно, интегралу от $S(\varphi)r$ по φ :

$$Q = \int_0^{2\pi} S(\varphi) r d\varphi = \frac{4}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin^2 [\delta_m(ka)]. \quad (11.2.31)$$

Эта величина имеет размерность длины (k имеет размерность, обратную длине), так как она представляет собой отношение потока энергии, излучаемой в единицу длины цилиндра, к потоку энергии падающей волны через единицу площади. Чтобы получить истинную энергию, рассеянную за секунду единицей длины цилиндра, мы умножаем Q на интенсивность (поток энергии через единицу площади) падающей волны. Этот результат выглядит так, как если бы энергия, падающая на полосу ширины Q , параллельную оси цилиндра, передавалась от падающей волны к рассеянной. Поэтому Q часто называют *эффективной шириной* цилиндра для рассеяния плоской волны с длиной волны $2\pi/k$.

Рассеянная и отраженная волны. Чтобы понять некоторые аспекты явления рассеяния, полезно еще несколько перегруппировать слагаемые в полученных выражениях. Мы только что показали, что наше разделение решения на чисто плоскую и рассеянную волны может быть сопоставлено с результатами измерений только для тех углов, которые настолько отличаются от 0 и π , что для них имеет место только рассеянная волна. В направлениях, достаточно близких к направлениям 0 и π , мы можем измерить только результат наложения плоской и рассеянной волн. В этих областях указанное наложение вызывает в некоторых местах ослабление, в других же — усиление поля.

Асимптотическое разложение самой плоской волны дает

$$Ae^{ikx-i\omega t} \simeq A \sqrt{\frac{1}{2\pi ikr}} \left\{ e^{ikr} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos(m\varphi) + ie^{-ikr} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \pi)] \right\} e^{-i\omega t}.$$

Но мы видели несколькими страницами выше, что

$$\sum_{m=0}^M \varepsilon_m \cos(m\varphi) = e^{-iM\varphi} \frac{1 - e^{(2M+1)i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{\sin \left[\left(M + \frac{1}{2} \right) \varphi \right]}{\sin(\varphi/2)},$$

а эта величина при больших M приближается к умноженной на 2π дельта-функции $\delta(\varphi)$. Следовательно, на очень больших расстояниях от начала сходящаяся волна (с e^{-ikr}) целиком приходит слева ($\varphi = \pi$), а расходящаяся волна (с e^{ikr}) целиком уходит вправо ($\varphi = 0$). Такой результат для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , можно было заранее предвидеть.

Посмотрим теперь, как присутствие рассеянной волны влияет на асимптотическое поведение суммарного поля плоской и рассеянной волн. Имеем

$$Ae^{ikx-i\omega t} + \phi_s e^{-i\omega t} \simeq A \sqrt{\frac{1}{2\pi ikr}} \left\{ ie^{-ikr-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \pi)] + \right. \\ \left. + e^{ikr-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{-2i\delta_m(ka)} \cos(m\varphi) \right\}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (11.2.32)$$

Мы видим, что сходящаяся волна остается той же самой, но расходящаяся волна благодаря появлению множителя e^{-2im} в каждом члене изменяется. Поэтому, вообще говоря, разрушается структура плоской волны, и интенсивность поля в направлении оси x уменьшается, а интенсивность в некоторых других направлениях возрастает. Интегралы от квадратов абсолютных величин сумм второго и первого рядов равны (покуда δ_m действительны), так что, за исключением случаев, когда краевые условия обуславливают потери энергии (некоторые δ_m комплексные), энергия расходящейся волны равна энергии сходящейся.

Когда цилиндр становится очень большим, он практически оказывается плоским отражателем, и волна отражается обратно влево. В этом можно убедиться, подставляя во второй ряд (11.2.32) асимптотическое значение $\delta_m(z) \simeq z - (1/2)\pi(m - 1/2)$ для бесконечно больших значений a (a , однако, не так велико, как r !). Мы получаем тогда

$$\frac{A}{i} \sqrt{\frac{1}{2\pi ikr}} e^{ik(r-2a) - i\omega t} \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin \left[\left(M + \frac{1}{2} \right) (\varphi - \pi) \right]}{\sin [(\varphi - \pi)/2]} \right\}.$$

Угловой множитель показывает, что расходящаяся волна уходит целиком влево ($\varphi = \pi$).

Предельные случаи коротких и длинных волн. Когда ka велико, но не бесконечно, не вся падающая волна отражается в обратном направлении: часть ее идет на образование плоской волны, распространяющейся с ослабленной интенсивностью вправо в области тени позади цилиндра, а часть ее отражается в других направлениях. Другими словами, в случае волн, длина волны которых мала по сравнению с $2\pi a$, рассеянная волна ψ_s имеет две части: одну, идущую вправо, которая, интерферируя с неизменной плоской волной e^{ikx} , образует тень, и вторую, которая, излучаясь в других направлениях, образует *отраженную волну*.

Это разделение *рассеянной волны* на две части — *отраженную волну* и *тенеобразующую волну* — может быть получено подстановкой асимптотического выражения для $\delta_m(ka)$ в формулы (11.2.31) и (11.2.30). Из формулы (11.2.31) для эффективной ширины рассеяния Q замечаем, что δ_m приблизительно равно $ka - (1/2)\pi(m - 1/2)$ для m , меньших ka , и нулю для m , больших ka . Следовательно,

$$Q \simeq \frac{4}{k} \sum_{m=0}^{ka} \varepsilon_m \sin^2 \left[ka + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}m\pi \right] \simeq 4a, \quad (11.2.33)$$

что равно *удвоенной ширине* ($2a$) цилиндра. Этот результат мог бы показаться весьма странным, если бы не наши предыдущие рассуждения. Чтобы получить рассеянную волну ψ_s , мы отделили абсолютно нетронутую плоскую волну. Такое разделение естественно для больших длин волн, так как в этом случае плоская волна мало меняется; однако в случае коротких волн плоская волна не может считаться неизменной: часть ее позади цилиндра отрезана полностью (тень). Очевидно, часть рассеянной волны используется для того, чтобы, интерферируя с плоской волной, образовать тень, а остаток отражается в других направлениях. Так как при действительных значениях δ_m нет потерь энергии, то половина рассеянной волны должна формировать тень, уничтожая плоскую волну в полосе ширины $2a$ позади цилиндра, а другая половина представляет собой отраженную волну с эффективной шириной, также равной $2a$. Таким образом, то, что было потеряно плоской волной (тень), превращается в отраженную волну.

Чтобы рассчитать детали этого двойственного поведения рассеянной волны, мы должны подставить асимптотические значения величин $\delta_m(ka)$ в формулу (11.2.30). Оказывается, что при этом требуется больший порядок точности, чем для подсчета предельной величины эффективной ширины рассеяния Q . Конечный результат

$$S(\varphi) \simeq \frac{a}{2r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi kr} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin^2(ka \sin \varphi) \quad (11.2.34)$$

для $ka \gg 1$ будет получен ниже в этой же главе другим методом. Первый член представляет интенсивность отраженной волны и совпадает с интенсивностью, вычисленной по правилам геометрической оптики при упругом отражении «элементарных волн» от каждого элемента того полуцилиндра, который «освещен» падающей волной. Второй член имеет очень высокий пик в направлении распространения плоской волны ($\varphi = 0$) и очень малую интенсивность в остальных направлениях. Этот член, конечно, соответствует тенеобразующей части рассеянной волны. По степени приближения и исходным геометрическим предположениям ($r \gg a \gg \lambda$) рассмотренная ситуация соответствует так называемой фраунгоферовой диффракции в оптике. Диффракцию Френеля вблизи от цилиндра нужно изучать, используя весь ряд (11.2.28), без перехода к асимптотическим выражениям для функций $J_m(kr)$ или $H_m(kr)$.

Вычисления значительно упрощаются в случае предельно длинных волн $ka \ll 1$. Тогда, в соответствии с формулами, приведенными в конце настоящей главы, $\delta_0 \approx \pi/2 \ln(1/ka)$ и δ_m при $m > 0$ стремится к нулю как $(ka)^{2m}$. Следовательно, в рядах (11.2.30) и (11.2.31) должны быть оставлены только первые члены, а потому

$$\begin{aligned} S(\varphi) &\simeq \frac{\pi}{2kr \ln^2(1/ka)}, \\ Q &\simeq \frac{\pi^2 a}{ka \ln^2(1/ka)}, \quad ka \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (11.2.35)$$

для случая, когда ψ равно нулю на поверхности цилиндра. Здесь рассеянная волна распространяется равномерно по всем направлениям, нет резкого формирующего тень пика вблизи $\varphi = 0$ и всю рассеянную мощность легко сравнить с результатами измерения. Мы видим, что эффективная ширина рассеяния Q велика для больших длин волн. Это происходит вследствие того, что условие $\psi = 0$ при $r = a$ влияет на поле, как бы мало ни было a по сравнению с $\lambda = 2\pi/k$, и диаметр области, где сказывается это воздействие, имеет порядок длины волны.

Если бы мы исходили из краевого условия, состоящего в равенстве нулю нормальной составляющей градиента ψ при $r = a$, то при больших длинах волн влияние цилиндра было бы менее сильным. Решение одной из задач в конце этой главы показывает, что для случая, когда составляющая градиента равна нулю при $r = a$, интенсивность рассеянной волны и эффективная ширина рассеяния Q даются формулами, подобными (11.2.30) и (11.2.31), с заменой величины δ_m на δ'_m . Итак,

$$\begin{aligned} S(\varphi) &\simeq \frac{\pi a}{8r} (ka)^3 (1 - 2 \cos \varphi)^2, \\ Q &\simeq \frac{3}{4} \pi^2 a (ka)^3, \quad ka \ll 1, \end{aligned} \quad (11.2.36)$$

в случае $\partial\psi/\partial r = 0$ при $r = a$. Здесь интенсивность рассеянной волны не одинакова по различным направлениям и в целом значительно меньше, чем в случае (11.2.35). С другой стороны, рассеяние очень коротких волн для обоих случаев в основном одинаково и приближенно описывается формулами (11.2.33) и (11.2.34). Если, начав с очень длинных волн, постепенно уве-

личивать частоту (т. е. уменьшать длину волны), то зависимость рассеянной интенсивности S от угла φ постепенно все более усложняется. Постепенно развивается пик, направленный вперед, но вначале он настолько широк, что результаты измерений, произведенных вдали от основного луча, могут быть экстраполированы для $\varphi = 0$ с точностью, достаточной для сравнения значений S и Q с экспериментом. Однако при дальнейшем уменьшении длины волны передний пик все более и более стягивается к направлению $\varphi = 0$, где разделение падающей и рассеянной волн нельзя полностью произвести. Как следствие получаем, что измеренные значения Q имеют тенденцию быть меньше значений, предсказываемых формулой (11.2.31), а в пределе измеренные значения будут скорее соответствовать полной *отраженной* интенсивности, равной $Q/2$, а не полной *рассеянной* интенсивности, поскольку передний пик в S не будет измерен вовсе. Детали этого явления зависят от метода измерения.

Рассеяние плоской волны на крае экрана. Другая задача, при решении которой используются полярные координаты, относится к рассеянию на полуплоскости $x = 0$, $y < 0$. Функциями угла, удовлетворяющими условиям Дирихле или Неймана, являются синус или косинус от $m\varphi/2$, где m — целое число. Таким образом, мы приходим к разложению решений волнового уравнения по тригонометрическим функциям полуцелых кратных полярного угла и по функциям Бесселя с полуцелым индексом. Например, функция, пропорциональная функции Грина,

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos \left[\frac{1}{2} m (\varphi - \varphi_0) \right] \begin{cases} J_{\frac{1}{2}m}(kr) H_{\frac{1}{2}m}(kr_0), & r < r_0, \\ J_{\frac{1}{2}m}(kr_0) H_{\frac{1}{2}m}(kr), & r > r_0, \end{cases} \quad (11.2.37)$$

аналогична функции (10.1.40) для уравнения Лапласа. В обоих случаях φ изменяется от 0 до 4π (или, если угодно, от $-\pi/2$ до $7\pi/2$), и мы должны исследовать поведение функции во всей этой области.

Значительно больший интерес представляет разложение «плоской волны», получающееся при $\varphi_0 = 0$, $r_0 \rightarrow \infty$:

$$\sqrt{\frac{\pi i k r_0}{2}} e^{-i k r_0} \Gamma \simeq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{m/2} \cos \left(\frac{1}{2} m \varphi \right) J_{\frac{1}{2}m}(kr) = u(r, \varphi). \quad (11.2.38)$$

Эта функция имеет по φ период 4π , а не 2π . Поэтому $u(r, \varphi + 2\pi)$ не обязательно равно $u(r, \varphi)$. Об использовании этого свойства мы уже говорили в связи с формулой (10.1.40). Для экрана, расположенного вдоль отрицательной оси y , область $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ является «действительным пространством», а область $3\pi/2 < \varphi < 7\pi/2$ — «фиктивным пространством», необходимым для того, чтобы удовлетворить краевым условиям при $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$.

Итак, для того чтобы найти решения, удовлетворяющие краевым условиям, при помощи отраженных волн или фиктивных источников, нам нужно «фиктивное пространство» вне области измерения, в которое можно было бы поместить вспомогательные волны или источники. Если границей служит вся ось y и рассматривается область $x > 0$, то область отрицательных x представляет собой «фиктивное пространство», и мы удовлетворяем краевым условиям вдоль оси y , располагая в этом фиктивном пространстве вспомогательные источники так, чтобы обратить в нуль решение (или градиент решения), порождаемое действительными источниками, расположенными в «действительном пространстве». Если границей служит только отрицательная полуось y , то вся область $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ оказывается действительным пространством, и, чтобы разместить вспомогательные

источники, следует ввести в качестве «фиктивного пространства» еще область $3\pi/2 < \varphi < 7\pi/2$. Для начала мы, конечно, будем рассматривать плоские волны (источники в бесконечности), но принцип всегда остается тот же. «Действительный» источник находится в бесконечности при $\varphi = 0$, фиктивный источник при $\varphi = 3\pi$.

Нетрудно видеть, что $u(r, \varphi)$ — это нечто отличное от плоской волны. Прежде всего, $u(r, \varphi + 2\pi)$ не равно $u(r, \varphi)$, но сумма их дает в точности плоскую волну:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) + u(r, \varphi + 2\pi) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m [1 + (-1)^m] (-i)^{m/2} \cos\left(\frac{1}{2} m\varphi\right) J_{\frac{1}{2}m}(kr) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \cos(n\varphi) J_n(kr) = e^{-ihr \cos \varphi} \end{aligned} \quad (11.2.39)$$

в соответствии с формулой на стр. 349. Теперь находим асимптотическое поведение $u(r, \varphi)$ при $r \rightarrow \infty$:

$$u(r, \varphi) \simeq \sqrt{\frac{1}{8\pi ikr}} \left[e^{ihr} F\left(-\frac{1}{2}\pi, \varphi\right) + ie^{-ihr} F(0, \varphi) \right],$$

где

$$F(\alpha, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{im\alpha} \cos\left(\frac{1}{2} m\varphi\right),$$

и асимптотическое поведение $u(r, \varphi) - e^{-ihr \cos \varphi} = -u(r, \varphi + 2\pi)$ таково:

$$u(r, \varphi) - e^{-ihr \cos \varphi} \simeq -\sqrt{\frac{1}{8\pi ikr}} \left[e^{ihr} F\left(\frac{1}{2}\pi, \varphi\right) + ie^{-ihr} F(\pi, \varphi) \right].$$

Ряды по косинусам для $F(\alpha, \varphi)$ в этой формуле не сходятся ни в одной точке; они получаются из асимптотических разложений функций Бесселя и с ними надо обращаться так же осторожно, как с этими последними разложениями. В частности, нужно ожидать, что при изменении φ от 0 до 4π обнаружится нечто вроде явления Стокса (см. стр. 571 тома I). Мы, правда, рассматривали уже несколькими страницами ранее подобные ряды и нашли, что они связаны с дельта-функциями.

Чтобы просуммировать эти ряды, необходимо прежде всего рассмотреть сумму

$$2 \sum_m e^{im\alpha + im\varphi/2} - 1 = \frac{2}{1 - e^{i\alpha + i\varphi/2}} - 1 = \frac{1 + e^{i\alpha + i\varphi/2}}{1 - e^{i\alpha + i\varphi/2}}, \quad \text{Im } \varphi = 0,$$

где мнимая часть α должна быть положительной, чтобы обеспечить сходимость. Комбинируя этот ряд с рядом для отрицательных φ , получаем

$$F(\alpha, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{im\alpha} \cos\left(\frac{1}{2} m\varphi\right) = \frac{-i \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos(\varphi/2)}, \quad \text{Im } \alpha > 0. \quad (11.2.40)$$

Полагая $\alpha = i\delta$ и устремляя δ к нулю, убеждаемся, что $F(0, \varphi)$ пропорциональна периодической дельта-функции, равной нулю всюду, за исключением точек $\varphi = 0, 4\pi, \dots$. Подобно этому, полагая $\alpha = \pi + i\delta$, убеждаемся, что $F(\pi, \varphi)$ равна нулю всюду, за исключением точек $\varphi = -2\pi, 2\pi$, в которых $F(\pi, \varphi)$ имеет те же особенности, что и дельта-функция.

С другой стороны,

$$F\left(\frac{1}{2}\pi, \varphi\right) = \frac{i}{\cos(\varphi/2)}, \quad F\left(-\frac{1}{2}\pi, \varphi\right) = \frac{-i}{\cos(\varphi/2)}.$$

Возвращаясь к асимптотическим рядам для u , видим, что дельта-функции представляют невозмущенную плоскую волну, так как $u(r, \varphi)$ имеет член, содержащий произведение e^{-ikr} на дельта-функцию с пиком при $\varphi = 0$; это соответствует плоской волне e^{-ikx} , приходящей справа вдоль оси x . Мы убеждаемся в этом, замечая, что $u(r, \varphi)$ может быть представлена в виде суммы e^{-ikx} и ряда, не содержащего дельта-функции с особенностью при $\varphi = 0$ (но имеющего дельта-функцию с особенностью при $\varphi = 2\pi$ и т. д.). Выполнив выкладки во всех деталях, в конце концов найдем, что функция u имеет следующее асимптотическое поведение для различных интервалов φ :

$$\tilde{u}(r, \varphi) \simeq \begin{cases} e^{-ikr \cos \varphi} - \sqrt{\frac{i}{8\pi kr}} \frac{e^{ikr}}{\cos(\varphi/2)}, & -\pi < \varphi < \pi; \\ -\sqrt{\frac{i}{8\pi kr}} \frac{e^{ikr}}{\cos(\varphi/2)}, & \pi < \varphi < 3\pi; \\ e^{-ikr \cos \varphi} - \sqrt{\frac{i}{8\pi kr}} \frac{e^{ikr}}{\cos(\varphi/2)}, & 3\pi < \varphi < 5\pi; \end{cases} \quad (11.2.41)$$

и т. д. для $r \rightarrow \infty$.

Возвращаясь к точным рядам для $u(r, \varphi)$, мы замечаем, что u само по себе не удовлетворяет крайним условиям при $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$. Однако, чтобы удовлетворить условиям Неймана или Дирихле где-то между 0 и 3π , можно прибавить или вычесть $u(r, 3\pi - \varphi)$. Так, например, в случае условий Неймана в качестве решения берем сумму, которая имеет равную нулю нормальную составляющую градиента по обеим сторонам преграды, т. е. при $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$. Асимптотическое поведение этой функции в различных частях «действительного пространства» дается выражением

$$\psi = u(r, \varphi) + u(r, 3\pi - \varphi) \simeq \begin{cases} e^{-ikr \cos \varphi} + e^{ikr \cos \varphi} + f(r, \varphi), & -\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0; \\ e^{-ikr \cos \varphi} + f(r, \varphi), & 0 < \varphi < \pi; \\ f(r, \varphi), & \pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Здесь

$$f(r, \varphi) = \sqrt{\frac{i}{8\pi kr}} e^{ikr} \left[-\frac{1}{\sin(\varphi/2)} - \frac{1}{\cos(\varphi/2)} \right].$$

Поведение в «фиктивном пространстве», т. е. при $3\pi/2 < \varphi < 7\pi/2$, хотя оно может быть легко найдено, не представляет для нас интереса.

Функция ψ обладает всеми свойствами, которые можно было предвидеть у решения рассматриваемой физической задачи: плоская волна e^{-ikx} приходит справа и встречает экран; в области $-\pi/2 < \varphi < 0$ падающая волна отражается от плоскости экрана ($e^{ikr \cos \varphi}$); в области $0 < \varphi < \pi$ плоская волна продвигается беспрепятственно влево; в области «тени» $\pi < \varphi < 3\pi/2$

нет вовсе плоской волны. В каждой из этих областей, однако, имеется рассеянная волна, излучающаяся от края экрана. Асимптотически ее интенсивность равна произведению выражения

$$S(\varphi) = \frac{1}{8\pi kr} \left[\frac{1}{\sin(\varphi/2)} - \frac{1}{\cos(\varphi/2)} \right]^2, \quad \varphi \neq 0, \pi,$$

на интенсивность падающей волны. Это выражение применимо, конечно, только на очень больших расстояниях от края. Оно показывает, что край экрана будет казаться светящимся независимо от того, под каким углом φ он будет рассматриваться (за исключением $\varphi = \pi/2$).

Диффракция Френеля на крае экрана. Лучшее приближение для функции u можно получить, исходя из точных рядов (11.2.38). Дифференцируя по φ , имеем

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{4} k \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^{\frac{1}{2}m} \frac{m}{kr} J_{\frac{1}{2}m}(kr) \sin\left(\frac{1}{2}m\varphi\right).$$

Используя формулы

$$(2n/z) J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z),$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{2/\pi z} \cos z, \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{2/\pi z} \sin z,$$

получаем отсюда дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} - ikr \sin \varphi u = -\frac{1}{2} kr \sqrt{\frac{2}{\pi ikr}} e^{ihr} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right),$$

решением которого является

$$u(r, \varphi) = \frac{e^{-ihr \cos \varphi}}{\sqrt{i\pi}} \Phi \left[\sqrt{2kr} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \right], \quad (11.2.42)$$

где $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z e^{it^2} dt$ — интеграл Френеля (точнее, интегралами Френеля называются действительная и мнимая части Φ). Нижний предел интеграла выбран так, чтобы в области тени, где $\cos(\varphi/2)$ отрицателен, u стремилось к нулю при r , стремящемся к бесконечности. Решение, удовлетворяющее условиям Неймана на границе $\varphi = -\pi/2, 3\pi/2$, имеет, следовательно, вид

$$\begin{aligned} \psi &= u(r, \varphi) + u(r, 3\pi - \varphi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \left\{ e^{-ihr \cos \varphi} \Phi \left[\sqrt{2kr} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \right] + e^{ihr \cos \varphi} \Phi \left[-\sqrt{2kr} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Функция $\Phi(z)$ равна нулю при z бесконечно большом и отрицательном; когда z изменяется от $-\infty$ до нуля, эта функция колеблется вокруг нуля, описывая в комплексной плоскости постепенно расширяющуюся спираль, и при $z=0$ переходит на спираль, закручивающуюся вокруг точки $\sqrt{\pi}i$ при z , стремящемся к ∞ . Зная поведение функции $\Phi(z)$, определяем область тени и область отраженной волны для любого значения r .

Для $0 < \varphi < \pi$ и большого r только первый член велик и $\psi \simeq e^{-ihr \cos \varphi}$. Для $-\pi/2 < \varphi < 0$ и больших r оба члена велики, и мы имеем как падающую, так и отраженную волны. При изменении φ от $\pi - \delta$ до $\pi + \delta$ первый член убывает от величины, приблизительно равной единице, до величины, близкой к нулю, причем тем быстрее, чем больше kr . Поскольку второй член здесь незначителен, линия $\varphi = \pi$ представляет собой границу

области тени, ниже которой интенсивность мала, а выше которой она велика. Вблизи этой линии наблюдаются диффракционные явления.

Формула (11.2.42) иллюстрирует как возможности, так и трудности метода интегральных представлений. Казалось бы, эта замкнутая форма проще всего позволяет получить точное решение волнового уравнения для заданных краевых условий, но эта простота обманчива. Предельное поведение решения, конечно, легче получить из такой замкнутой формы, нежели из выражения в виде ряда (11.2.38). Однако трудно указать, каким образом можно непосредственно найти интегральное представление искомого решения (или, вообще, любого решения) волнового уравнения. По-видимому, эта форма решения была первоначально найдена по аналогии с интегралами Френеля, которые возникают при изучении интерференции, к чему мы еще вернемся далее в связи с рассмотрением в параболических координатах. Если интегральное представление найдено, то обычно нетрудно показать, что оно действительно является нужным решением волнового уравнения или доказать его эквивалентность выражению в виде ряда, как это было сделано в разобранным случае. Мы осветим этот вопрос более подробно, когда приступим к систематическому изучению метода интегральных уравнений (функций Грина) для решения задач диффракции.

Рассеяние на цилиндре со щелью. Приближенные решения для волн, рассеянных на цилиндрической поверхности с щелью в ней, могут быть получены методами, использованными при выводе формул (10.1.22) (см. также стр. 195). Предположим, что в цилиндре радиуса a имеется щель между $\varphi = -\Delta/2$ и $\varphi = \Delta/2$ и пусть на поверхности цилиндра $\varphi = 0$. Решение вне цилиндра строим в виде комбинации решения для полного цилиндра и ряда, нужного для того чтобы удовлетворить условиям на щели; решение же внутри цилиндра — в виде аналогичного ряда, но только из стоячих волн (функции Бесселя) вместо расходящихся (функции Ганкеля):

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(kr)}{J_m(ka)} [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)] e^{-i\omega t}, & r < a; \\ A \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m [J_m(kr) - ie^{-i\delta_m} \sin \delta_m H_m(kr)] \cos[m(\varphi - \alpha)] e^{-i\omega t} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(kr)}{H_m(ka)} [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)] e^{-i\omega t}, & r > a. \end{cases} \quad (11.2.43)$$

Первый ряд для $r > a$ является суммой плоской и рассеянной волн [см. (11.2.28)], которая равна нулю при $r = a$. Следовательно, выражения для $r < a$ и $r > a$ равны при $r = a$. Так как при $r = a$ решение ψ равно нулю для $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$ и равно $\psi(a, \varphi)$ для $-\Delta/2 < \varphi < \Delta/2$, то коэффициенты A_m, B_m определяются выражениями

$$A_m = \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi(a, \omega) \cos(m\omega) d\omega, \quad B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi(a, \omega) \sin(m\omega) d\omega.$$

В точной постановке эта задача приводится к решению бесконечной последовательности уравнений с неизвестными A_m, B_m , полученными из условий, что ψ и $\partial\psi/\partial r$ непрерывны на щели. Однако такой путь получения точного решения слишком сложен; рассмотрим, поэтому, соответствующий приближенный метод.

На стр. 195 мы решали подобную задачу для уравнения Лапласа. В этом случае мы подставляли вместо $\phi(a, \varphi)$ точное решение, полученное для случая щели в плоскости; это приближение оказывалось хорошим для случая щели в цилиндре, так как ширина щели была мала по сравнению с окружностью цилиндра. Дело в том, что при статических условиях поле слабо проникает сквозь щель и не может распространиться очень далеко «по другую сторону» щели (где $r < a$ для цилиндра и $y < 0$ для плоскости).

Применительно к волновому уравнению этот метод нуждается в некоторых изменениях. Новое осложнение состоит в возможности резонанса. Статическое поле всегда слабо проникает в закрытое пространство, быстро затухая по мере удаления от щели. Однако в случае колебаний в закрытом пространстве может возникнуть резонанс; при этом даже весьма слабая «вынуждающая сила» на щели может вызвать стоячую волну большой амплитуды.

Возвращаясь к статическому случаю, напомним, что потенциал в щели был равен $B\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}$, где постоянная B определялась из связи с градиентом приложенного поля. Внутри цилиндра потенциал имел вид $\sum A_m (r/a)^m \cos(m\varphi)$, где

$$A_m = \frac{\varepsilon_m \Delta}{4\pi} B \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{1}{2} \Delta mu\right) \sqrt{1-u^2} du = BD_m, \quad (11.2.44)$$

$$D_0 = \frac{1}{8} \Delta, \quad D_m = \frac{1}{m} J_1\left(\frac{1}{2} m \Delta\right), \quad m > 0.$$

Другими словами, мы предполагали известными приближенные отношения между A_m и, таким образом, сводили нашу задачу к определению одной неизвестной величины B . Найденное выражение для потенциала получается из формулы для потенциала в эллиптических координатах. Мы предполагали центр щели в точке $\mu = \vartheta = 0$ и предполагали, что цилиндр вблизи щели практически совпадает с плоскостью. Тогда полярные координаты выражаются таким образом:

$$r - a \approx \frac{1}{2} a \Delta \operatorname{sh} \mu \cdot \sin \vartheta, \quad \varphi \approx \frac{1}{2} \Delta \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta,$$

где $a\Delta$ — ширина щели.

Потенциал, экспоненциально убывающий при $r < a$ ($\mu < 0$), равен $Be^{\mu} \sin \vartheta$ при $r < a$ и $(4B/a\Delta)(r-a) + Be^{-\mu} \sin \vartheta$ при $r > a$ ($\mu > 0$). Как мы видели выше, сумма ряда $B \sum D_m (r/a)^m \cos(m\varphi)$ равна $Be^{\mu} \sin \vartheta$ в щели, приблизительно равна $Be^{\mu} \sin \vartheta$ непосредственно у щели и удовлетворяет краевому условию $\phi = 0$ при $r = a$ вдали от щели, где решение $Be^{\mu} \sin \vartheta$ не применимо. Этот ряд дает, следовательно, хорошее приближение к истинному решению для статического случая, если только выбор B согласован в щели с радиальной составляющей градиента приложенного поля. Все это было указано на стр. 182.

В рассматриваемом случае мы вновь воспользуемся выражением

$$V \sqrt{1 - \left(\frac{2\varphi}{\Delta}\right)^2} = V \sin \vartheta$$

для ϕ на щели ($\mu = 0$), но теперь нельзя считать $Ve^{\mu} \sin \vartheta$ близким к решению вне щели. Потенциал может оказаться большим и внутри цилиндра. Другими словами, мы должны предположить, что $\phi = (1/2)(V+R)e^{\mu} \sin \vartheta + (1/2)(V-R)e^{-\mu} \sin \vartheta$. Это выражение также равно $V \sin \vartheta$ при $\mu = 0$. Вне цилиндра на некотором расстоянии от щели это выражение приближенно равно функции $(2/a\Delta)(V+R)(r-a)$, а в точках внутри цилиндра, находящихся не слишком близко к щели, но и не слишком далеко от нее

(т. е. на расстояниях, больших чем $a\Delta$, но меньших чем a), — функции $\{2/a\Delta\}(R-V)(r-a)$.

Два сравниваемых случая можно различить путем вычисления радиальной составляющей градиента потенциала в щели. Для статического случая имеем

$$\frac{2}{a\Delta \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} (V e^{\mu} \sin \vartheta) \right]_{\mu=0} = \frac{2V}{a\Delta} \approx \frac{V}{a} \sum_m m D_m \cos(m\varphi).$$

Этот ряд получен дифференцированием ряда для ψ при $r < a$; он очень плохо сходится, но нам известно из предыдущего рассмотрения, что его сумма приближенно равна $2V/a\Delta$ для $-\Delta/2 < \varphi < \Delta/2$ и нулю для других значений φ .

В исследуемом случае выражение для ψ при $r < a$ содержит, как видно из формулы (11.2.43), не степени r , а функции Бесселя. Радиальная производная ψ при $r = a$ равна

$$-\frac{V}{a} \sum_m D_m \operatorname{tg} \alpha_m \cos(m\varphi), \quad \operatorname{tg} \alpha_m = -\frac{a}{J_m(ka)} \left[\frac{d}{dr} J_m(kr) \right]_{r=a}$$

и отличается от аналогичной величины для статического случая $2V/a\Delta$ суммой

$$-\frac{V}{a} \sum_m D_m [m + \operatorname{tg} \alpha_m] \cos(m\varphi).$$

Таблицы в конце настоящей главы показывают, что $\operatorname{tg} \alpha_m \simeq -m$ для $m \gg ka$, так что этот ряд сходится значительно быстрее, чем ряд для производной ψ . Итак, радиальную производную ψ в щели ($r = a$, $\varphi = 0$) удобно выразить таким образом:

$$v_i = \frac{2V}{a\Delta} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \Delta \sum_{m=0}^{\infty} D_m [m + \operatorname{tg} \alpha_m] \right\}.$$

Эта величина радиальной производной ψ на щели была получена исходя из решения внутри цилиндра, которое мы обозначим ψ_i . С другой стороны, ее можно, конечно, получить в виде суммы радиальной производной v_f «приложенного к щели» поля плоской и рассеянной волн и производной v_o последнего ряда формулы (11.2.43). Производная этого приложенного поля в центре щели равна

$$v_f = Ak \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left[J'_m(ka) - \frac{J_m(ka)}{H'_m(ka)} H'_m(ka) \right] \cos(mx),$$

где штрихи обозначают дифференцирование по аргументу ka и где i_m вновь выражено через J_m и H_m . Этот ряд можно упростить, используя выражение для вронскиана функций Бесселя:

$$\Delta(J_m, H_m) = J_m(ka) H_{m-1}(ka) - J_{m-1}(ka) H_m(ka) = \frac{2i}{\pi ka}. \quad (11.2.45)$$

Радиальная составляющая градиента приложенного поля в центре щели теперь записывается так:

$$v_f = \frac{2A}{\pi a} F(x),$$

где

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \frac{e^{-i\beta_m(ka)}}{C_m(ka)} \cos(mx). \quad (11.2.46)$$

Отрицательная радиальная составляющая градиента наружного «вынужденного» поля при $r = a$, $\varphi = 0$ имеет вид

$$v_o = -Vk \sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{H'_m(ka)}{H_m(ka)}.$$

Условие, выражающее непрерывность производной в щели: $v_i = v_f - v_o$ или $v_f = v_i + v_o$, служит для определения неизвестной константы V , т. е. значения ψ при $r = a$, $\varphi = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} v_i + v_o &= Vk \sum_{m=0}^{\infty} D_m \left[\frac{J'_m(ka)}{J_m(ka)} - \frac{H'_m(ka)}{H_m(ka)} \right] = -Vk \sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{\Delta(J_m, H_m)}{J_m(ka) H_m(ka)} = \\ &= \frac{2V}{\pi a} \sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{e^{-i\delta_m(ka)}}{[C_m(ka)]^2 \sin[\delta_m(ka)]} = \frac{2V}{\pi a \Delta} Y(\Delta, ka), \end{aligned}$$

$$Y(\Delta, ka) = \frac{1}{8} \frac{\Delta^2 e^{-i\delta_0}}{C_0^2 \sin \delta_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta e^{-i\delta_m}}{C_m^2 \sin \delta_m} \frac{J_1(m\Delta/2)}{m}.$$

Этот ряд также сходится плохо. Как видно из таблицы в конце этой главы, при $m \gg ka$ мы получаем

$$\frac{e^{-i\delta_m}}{C_m^2 \sin \delta_m} \simeq \frac{\pi^2 \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m} (m!)^2}{[(m-1)!]^2 \pi m \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m}} = \pi m,$$

так что предельная форма суммы $v_i + v_o$ имеет вид $\frac{2V}{\pi a} \sum \pi m D_m$. Однако мы видели выше, что $\sum m D_m \simeq \frac{2}{\Delta}$, так что, вычитая и прибавляя $\Delta \sum \pi m D_m$, мы получаем выражение, сходящееся значительно лучше,

$$Y(\Delta, ka) = 2\pi + \Delta^2 \left\{ \frac{1}{8} \frac{e^{-i\delta_0}}{C_0^2 \sin \delta_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-i\delta_m}}{C_m^2 \sin \delta_m} - \pi m \right] \frac{J_1(m\Delta/2)}{m\Delta} \right\}. \quad (11.2.47)$$

Но, для того чтобы обеспечить непрерывность производной в щели, $v_i + v_o$ должна быть равна v_f . Поэтому формула

$$V = A\Delta \frac{F(a)}{Y(\Delta, ka)}$$

выражает амплитуду поля в щели через производную приложенного поля и «адмитанс» (отношение) Y наружного и внутреннего вынужденных полей.

Этот адмитанс становится бесконечным для таких значений ka , при которых $\sin \delta_m$ для некоторых m равен нулю. При этом $J_m(ka) = 0$, т. е. для внутренности цилиндра без щели имел бы место резонанс. При таких частотах поле V в щели равно нулю, что и должно быть. Следовательно, при частотах, резонансных для внутренней области, цилиндр ведет себя так, как будто у него нет щели. Непосредственно вблизи одной из этих точек резонанса адмитанс Y равен

$$Y \simeq \begin{cases} \frac{e^{-i\delta_0}}{C_0} \frac{\Delta^2/8}{J_0(ka)}, & J_0(ka) \rightarrow 0, \\ \frac{J_1(m\Delta/2)}{m\Delta} \frac{e^{-i\delta_m}}{C_m} \frac{\Delta^2}{J_m(ka)}, & J_m(ka) \rightarrow 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы нашли приближенное выражение для $\psi(a, \varphi)$, $V\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}$, где V определено равенством (11.2.47). Для подсчета рассеянной волны и поля внутри цилиндра это значение $\psi(a, \varphi)$ следует подставить в (11.2.43). Как видно из (11.2.44), коэффициенты A_m равны VD_m , а коэффициенты B_m равны нулю. Таким образом, потенциал волны в центре цилиндра имеет вид

$$\psi(0) \simeq \frac{A\Delta^2}{8J_0(ka)} \frac{F(a)}{Y(\Delta, ka)} e^{-i\omega t}.$$

Эта величина обычно мала благодаря множителю Δ^2 . Если имеется резонанс для стоячих волн типа $m=0$, т. е. если $J_0(ka)=0$, то $\psi(0)$ велико, но не бесконечно, поскольку Y неограниченно возрастает, когда $J_0(ka) \rightarrow 0$. В пределе при $J_0(ka)=0$ мы получаем $\psi(0) \simeq iH_0(ka)AF(a)$. Эта величина больше, чем нерезонансная, так как она не содержит множителя Δ^2 . При резонансных частотах правильным решением во внешней области будет комбинация плоской и рассеянной волн для цилиндра без щели.

Конечно, если частота такова, что $J_m(ka)=0$, то функция Y становится бесконечной и поскольку при этом $J_0(ka)$ не обращается в нуль, значение потенциала волны при $r=0$ оказывается равным нулю. Это объясняется тем, что все возбуждаемые стоячие волны для $m \neq 0$ имеют нулевую амплитуду при $r=0$; в других точках внутри цилиндра такие волны могут быть обнаружены. При каждой резонансной частоте, т. е. каждый раз, когда $J_m(2\pi a/c)$ обращается в нуль, стоячая волна внутри цилиндра имеет форму определенной собственной функции; остальные стоячие волны при этом отсутствуют.

Рассеянная волна, соответствующая падающей волне единичной амплитуды ($A=1$), имеет вид

$$\psi_s \simeq -\sqrt{\frac{2i}{\pi kr}} e^{ikr-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m e^{-i\delta_m} \left\{ \sin \delta_m \cos [m(\varphi - \alpha)] - \frac{\Delta J_1(m\Delta/2)}{2m^i m C_m Y(\Delta, ka)} F(a) \cos(m\varphi) \right\}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (11.2.48)$$

Эту формулу интересно сравнить с (11.2.29). Эффективная ширина рассеяния цилиндра со щелью выражается так:

$$Q = \frac{4}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left\{ \sin^2 \delta_m - \frac{\sin \delta_m \cos(m\pi/2) \Delta J_1(m\Delta/2)}{m C_m Y(\Delta, ka)} F(a) \cos(m\alpha) + \left[\frac{\Delta J_1(m\Delta/2)}{2m C_m} \right]^2 \frac{F^2(a)}{Y^2(\Delta, ka)} \right\}, \quad (11.2.49)$$

где функции $F(a)$ и $Y(\Delta, ka)$ заданы формулами (11.2.46) и (11.2.47). Эти формулы выведены для краевого условия $\psi=0$ при $r=a$, $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$, и для единичной плоской падающей волны, распространяющейся под углом α к оси щели ($\varphi=0$). Мы считаем, что $(\Delta/m)J_1(m\Delta/2) = \Delta^2/4$ при $m=0$.

Подчеркнем еще раз, что при $J_m(ka)=0$ поле внутри цилиндра велико и наружные признаки щели отсутствуют. Мы не получили бесконечных решений, так как приняли во внимание не только резонанс внутри цилиндра, но и излучение вовне, а адмитанс излучения никогда не бывает равным нулю.

Цилиндр со щелью; условия Неймана. Случай, когда нормальная составляющая градиента потенциала равна нулю на цилиндре, отличается

от только что рассмотренного нами в основном тем, что при рассмотрении предельного статического поля ($k \rightarrow 0$) не получается решения, связанного с проникновением в цилиндр. Условия Неймана соответствуют движению жидкости и случай $k = 0$ — потоку несжимаемой жидкости. Очевидно, установившийся поток несжимаемой жидкости как внутри, так и вне цилиндра не может существовать без того, чтобы не наблюдались сложные вихревые движения, возможность которых мы исключаем, когда собираемся искать решение в виде потенциального потока. Если же рассматривать осциллирующий поток упругой жидкости, то, конечно, возможны движения внутри цилиндра, и может иметь место резонанс. Однако здесь мы лишены возможности найти решение для статического случая.

Тем не менее можно использовать некоторые выводы, полученные при изучении решения уравнения Лапласа в эллиптических координатах. Для щели в плоском экране шириной $a\Delta$ установившийся поток через щель задается потенциалом скоростей $\psi = \kappa + (a\Delta/2)v_0\mu$, где эллиптические координаты μ, ϑ определены на стр. 185.

Потенциал ψ постоянен здесь вдоль щели ($\mu = 0$), но скорость движения жидкости через щель не одинакова вдоль щели:

$$v = \frac{2}{a\Delta \sin \vartheta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = \frac{v_0}{\sin \vartheta} = \frac{v_0}{\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}}. \quad (11.2.50)$$

Эта скорость имеет минимальное значение v_0 в середине щели ($\varphi = 0$) и возрастает до бесконечности вблизи обоих концов, где происходит обтекание острых краев. Пока ширина щели мала по сравнению с окружностью цилиндра $2\pi a$ и по сравнению с длиной волны $2\pi/k = 2\pi c/\omega$ можно предположить распределение потенциала ψ и распределение скоростей в щели совпадающими с указанными выражениями, хотя мы не можем ожидать такого совпадения вдали от щели.

Соответственно этому потенциал скоростей для волнового движения можно представить в виде

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{J_m(kr)}{kJ'_m(ka)} \cos(m\varphi) e^{-i\omega t}, & r < a, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left[J_m(kr) - \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} H_m(kr) \right] \cos[m(\varphi - \alpha)] e^{-i\omega t} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{H_m(kr)}{kH'_m(ka)} \cos(m\varphi) e^{-i\omega t}, & r > a, \end{cases} \quad (11.2.51)$$

где, учитывая принятое распределение скоростей в щели, положено

$$A_m = \frac{v_0 \varepsilon_m}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu) du}{\sqrt{1-(2u/\Delta)^2}} = \frac{1}{4} v_0 \Delta \varepsilon_m J_0\left(\frac{1}{2} m\Delta\right).$$

Заметим, между прочим, что ряды (11.2.51) можно рассматривать или как ряды по собственным функциям, удовлетворяющим краевым условиям при $r = a$, или как решение, выраженное через функцию Грина и соответствующее условию, что $\partial\psi(r, \varphi)/\partial r$ равна нулю при $r = a$, $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$ и равна $v_0/\sqrt{1-(2\varphi/\Delta)^2}$ при $-\Delta/2 < \varphi < \Delta/2$. Например, для внутренней функции Грина, удовлетворяющей условиям Неймана при $r = a$

из (7.2.51) имеем

$$G(r, \varphi | r_0, \varphi_0) = \\ = i\pi \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)] J_m(kr) \left\{ H_m(kr_0) - \frac{H'_m(ka) J_m(kr_0)}{J'_m(ka)} \right\}, \quad r < r_0.$$

Решение внутренней задачи, отвечающее упомянутому условию, в соответствии с (7.2.10) имеет вид

$$\psi(r, \varphi) = \frac{a}{4\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{v_0}{\sqrt{1 - (2\varphi_0/\Delta)^2}} G(r, \varphi | a, \varphi_0) d\varphi_0,$$

откуда, используя выражение для вронскиана $\Delta(J_m, H_m)$, получаем первую часть формулы (11.2.51). Таким образом, введенное приближение позволяет нам избежать определения бесконечного множества неизвестных A_m и ограничиться определением единственной неизвестной v_0 , что является, конечно, более легкой задачей.

Мы находим величину v_0 для заданного A , определяя импедансы. Давление в жидкости связано с потенциалом скоростей ψ соотношением $p = -i\omega\rho\psi$, а скорость равна $-\text{grad } \psi$. Отношение давления к амплитуде скорости называется *акустическим импедансом* (см. стр. 296 тома I и стр. 345). Отношение ψ к v может быть названо *импедансом поля*. При постоянной частоте импеданс поля пропорционален акустическому импедансу, и нам проще употреблять именно эту величину. Амплитуда комбинации плоской и рассеянной волн, построенных для неразрезанного цилиндра, в центре щели имеет значение

$$\psi_f = A \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m [J_m(ka) H'_m(ka) - J'_m(ka) H_m(ka)] \frac{\cos(m\alpha)}{H'_m(ka)} = 2AF'(\alpha), \\ F'(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \frac{e^{-i\delta'_m}}{\pi ka C'_m} \cos(m\alpha). \quad (11.2.52)$$

Ее можно рассматривать как «вынуждающую силу», возбуждающую стоячую волну внутри цилиндра, а также дополнительную рассеянную волну вне цилиндра. Для определения амплитуды вынужденного движения (скорости v_0) нам следует в первую очередь найти импеданс поля внутренней и внешней волн.

Импеданс поля внутренней стоячей волны является отношением внутреннего ψ в центре щели к v_0 — соответствующей составляющей скорости в той же точке:

$$z_i = \frac{1}{4} \Delta a \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{J_m(ka)}{ka J'_m(ka)} J_0\left(\frac{1}{2} m\Delta\right) = -\frac{a}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \text{ctg } \alpha_m \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} du.$$

Этот ряд очень плохо сходится, и требуются некоторые искусственные приемы, чтобы упростить вычисления. Мы усматриваем из таблиц в конце этой главы, что $\text{ctg } \alpha_m \simeq -1/m$ для $m \gg ka$. Но при помощи простой

выкладки легко убедиться, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a}{\pi m} \cos(mu) = -\frac{a}{\pi} \operatorname{Re} [\ln(1 - e^{iu})] = -\frac{a}{2\pi} \ln[2 - 2 \cos u] \simeq$$

$$\simeq -\frac{a}{\pi} \ln|u| \text{ для } u \ll \pi.$$

Поэтому

$$\frac{a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} du \simeq -\frac{a\Delta}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{2}|w| \Delta\right)}{\sqrt{1-w^2}} dw =$$

$$= -\frac{a\Delta}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\Delta \cos z\right) dz = \frac{1}{2} a\Delta \ln \frac{4}{\Delta}$$

и

$$z_i \simeq \frac{1}{2} a\Delta \left[\ln \frac{4}{\Delta} - \frac{1}{2} f'(\Delta, ka) \right], \quad (11.2.53)$$

где

$$f'(\Delta, ka) = \operatorname{ctg} \alpha_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m} + \operatorname{ctg} \alpha_m \right] J_0\left(\frac{1}{2} m\Delta\right),$$

причем ряд для f' сходится довольно быстро. Акустический импеданс равен, конечно, $i\omega\rho z_i$, т. е. является чисто реактивным. Заметим, что f' есть функция не только Δ , но также и ka , поскольку углы α_m являются функциями ka . Эти углы приведены в таблице в конце книги. Благодаря члену $\operatorname{ctg} \alpha_m$ импеданс становится бесконечным для тех частот, для которых $J'_m(ka) = 0$.

Импеданс поля дополнительной внешней волны в центре щели равен величине дополнительного внешнего поля, разделенной на $-v_0$:

$$z_0 = -\frac{a}{2\pi} \sum \varepsilon_m \frac{H_m(ka)}{kaH'_m(ka)} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} du =$$

$$= \frac{1}{2} a\Delta \left\{ \ln \frac{4}{\Delta} + \frac{e^{i(\delta_0 - \delta'_0)}}{2ka} \frac{C_0}{C'_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{e^{i(\delta_m - \delta'_m)}}{2ka} \frac{C_m}{C'_m} - \frac{1}{m} \right] J_0\left(\frac{1}{2} m\Delta\right) \right\}.$$

Акустический импеданс $i\omega\rho z_0$ в отличие от $i\omega\rho z_i$ не является чисто мнимым; он имеет некоторую действительную часть — *сопротивление излучения*. Сумма этих двух импедансов представляет собой полный импеданс системы, на которую действует «вынуждающая сила» ψ_j :

$$z_0 + z_i = -\frac{\Delta a}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[\frac{H_m(ka)}{kaH'_m(ka)} - \frac{J_m(ka)}{kaJ'_m(ka)} \right] J_0\left(\frac{1}{2} m\Delta\right) = 2a\Delta Z(\Delta, ka),$$

где

$$Z(\Delta, ka) = -\frac{1}{4\pi(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m e^{-i\delta'_m} J_0(m\Delta/2)}{(C'_m)^2 \sin \delta'_m}.$$

Этот ряд также плохо сходится, и при больших m его члены ведут себя как члены ряда

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi (ka)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \frac{4\pi^2 \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m+2}}{(m!)^2} \frac{(m!)^2}{\pi m \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m}} \frac{2}{\pi \Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\cos(mu) du}{\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} = \\ = \frac{1}{\pi \Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos(mu) \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{\Delta}\right)^2}} \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\Delta}. \end{aligned}$$

Следовательно, можно написать

$$\begin{aligned} Z(\Delta, ka) = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\Delta} - \frac{e^{-i\delta'_0}}{4\pi k^2 a^2 (C'_0)^2 \sin \delta'_0} - \\ - \frac{1}{2(ka)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-i\delta'_m}}{\pi (ka C'_m)^2 \sin \delta'_m} + \frac{1}{m} \right] J_0\left(\frac{1}{2} m \Delta\right). \quad (11.2.54) \end{aligned}$$

Эта величина пропорциональна импедансу движения среды через щель, включая реактивную нагрузку, создаваемую средой внутри цилиндра, и, частично, активную нагрузку поля излучения вне цилиндра. Сравнение с (11.2.47) показывает, что отношение первого члена к остальным при малом Δ здесь больше, чем в предыдущем случае. Это происходит потому, что условия для проникновения поля через щель много лучше в случае, когда составляющая градиента равна нулю на границе, нежели тогда, когда равен нулю сам потенциал.

Мы можем теперь определить скорость среды в щели:

$$v_0 \simeq \frac{\psi_f}{z_0 + z_i} = \frac{A}{a\Delta} \frac{F'(a)}{Z(\Delta, ka)}.$$

Эту величину можно подставить вновь в (11.2.51), чтобы получить потенциал скоростей внутри и вне цилиндра. Величина потенциала скоростей в щели определяется равенством

$$\begin{aligned} \psi_i = v_0 z_i = \psi_f \frac{z_i}{z_0 + z_i}, \\ \psi_i \simeq \frac{AF'(a)}{2Z(\Delta, ka)} \left[\ln \frac{4}{\Delta} - \frac{1}{2} f'(\Delta, ka) \right] \end{aligned} \quad (11.2.55)$$

при $-\Delta/2 < \varphi < \Delta/2$.

Если во внутренней области имеет место резонанс, то $J'_m(ka) = 0$ для некоторого m , так что $\sin \delta'_m$ обращается в нуль и z_i бесконечен. Следовательно, скорость течения через щель v_0 равна нулю для резонансных частот (поскольку нет поглощения энергии) и потенциал в щели, конечно, точно равен ψ_f .

Выражение для рассеянной волны и эффективной ширины рассеяния цилиндра полностью совпадает с (11.2.49). В этом случае Q также никогда не становится бесконечной, так как $Z(\Delta, ka)$, будучи комплексным, никогда не обращается в нуль, хотя два дополнительных члена в ряде для Q могут обращаться в нуль, когда $Z(\Delta, ka)$ становится бесконечным (при $\sin \delta'_m = 0$).

Соотношение между двумя рассмотренными случаями станет более ясным, если рассмотреть их с другой точки зрения. Значения потенциала в щели можно рассматривать как аналоги напряжений, а нормальные составляющие градиента в щели — как токи. В случае, рассматриваемом в этом пункте, «вынуждающей силой» служит напряжение ψ_f ; комбинация плоской и рассеянной волн для неразрезанного цилиндра не имеет нормальной

составляющей градиента в щели. Составляющая градиента внутренней функции ψ_i должна быть равна составляющей градиента внешней функции ψ_0 и обе они должны быть равны v_0 . В то же время для того, чтобы потенциал был непрерывен, должно иметь место равенство $\psi_i = \psi_f + \psi_0$. Можно рассматривать ψ_i как падение напряжения на внутренней нагрузке и $-\psi_0$ как падение напряжения на наружной нагрузке. Тогда уравнения будут такими же, как при последовательном соединении контуров, и падения напряжения на обеих нагрузках складываются, ток в нагрузках одинаков и вынуждающее напряжение приложено к обоим нагрузкам. Если какая-либо из нагрузок обладает бесконечным импедансом, то ток, естественно, будет равен нулю; но когда импеданс какой-либо нагрузки равен нулю, ток не бесконечен, и он становится бесконечным только в том случае, когда при некоторой частоте импедансы обеих нагрузок взаимно уничтожаются (чего обычно не бывает). Внешняя нагрузка монотонно меняется с изменением частоты, а внутренняя нагрузка заметно колеблется, становясь бесконечной при резонансных частотах и обращаясь в нуль при промежуточных частотах. Максимум величины v_0 , а значит, и наибольшая амплитуда дополнительной рассеянной волны достигается при этих промежуточных частотах.

Возвращаясь к ранее рассмотренному случаю условий Дирихле, мы видим противоположную картину. Здесь «вынуждающей силой» является источник постоянного тока v_f . По условию непрерывности внутренняя производная (или ток) v_i должна равняться сумме внешних $v_f - v_0$, так что вынуждающий ток v_f разделяется на две части v_i и v_0 . С другой стороны, значения внешнего и внутреннего потенциалов (напряжений) одинаковы на щели и равны V . Ситуация является типичной для параллельного соединения — источник постоянного тока питает параллельно внутреннюю и внешнюю нагрузки. Общий адмитанс равен сумме двух адмитансов, и напряжение V равно отношению v_f к сумме адмитансов. Для резонансных частот внутренней области [т. е. при $J_m(ka) = 0$] V равно нулю и рассеянная волна такая же, как при отсутствии щели. Для других частот дополнительная волна, порожденная движением среды через щель, местами усиливает, а местами ослабляет обычную рассеянную волну.

Различие между рассмотренными двумя случаями легко продемонстрировать на численных примерах. Пусть $ka = 2\pi a/\lambda$ весьма мало; тогда для этих двух случаев получаем следующее.

Случай I ($\psi = 0$ при $r = a$, $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$; амплитуда первичной плоской волны, падающей под углом α , равна A).

Потенциал в щели

$$\psi(a, \varphi) \simeq -\frac{A\Delta}{4\ln(ka)} \sqrt{1 - \left(\frac{2\varphi}{\Delta}\right)^2}, \quad -\Delta/2 < \varphi < \Delta/2.$$

Радиальная составляющая градиента в щели $v_i \simeq -\frac{A}{2a \ln(ka)}.$

Потенциал на оси цилиндра $\psi(0) \simeq -\frac{A\Delta^2}{32 \ln(ka)}.$

Эффективная ширина рассеяния

$$Q \simeq \frac{\pi^2 a}{ka \ln^2(ka)} \left[1 + \frac{\Delta^2}{16 \ln(ka)} \right].$$

Случай II ($\partial\psi/\partial r = 0$ при $r = a$, $\Delta/2 < \varphi < 2\pi - \Delta/2$).

Потенциал в щели

$$\psi_i \simeq \frac{\pi ka A}{2 \ln(4/\Delta)} \left[\ln \frac{4}{\Delta} - \frac{1}{(ka)^2} \right].$$

Радиальная составляющая градиента в щели

$$v_i \simeq \frac{\pi k a A}{2 \Delta a \ln(4/\Delta)} \frac{1}{\sqrt{1 - (2\varphi/\Delta)^2}}.$$

Потенциал на оси цилиндра

$$\psi(0) \simeq -\frac{\pi A}{2 k a \ln(4/\Delta)}.$$

Эффективная ширина рассеяния

$$Q \simeq \pi^2 (ka)^3 \left[1 - \frac{\pi}{ka \ln(4/\Delta)} \right].$$

Эти величины являются функциями двух малых величин ka и Δ . Как функции от Δ , при Δ , стремящемся к нулю, в случае I все величины стремятся к нулю быстрее, чем в случае II. Это происходит потому, что поле, удовлетворяющее условиям Дирихле, проникает через щель значительно слабее, чем поле, удовлетворяющее условиям Неймана. Потенциал в центре цилиндра $\psi(0)$ во втором случае стремится к бесконечности при ka , стремящемся к нулю, но мы видели, что в этом случае статическая задача имеет свои особенности. При конечном (но малом) ka и малом Δ первый член Q (относящийся к цилиндру без щели) меньше для случая II, чем для случая I, однако второй член в скобках в случае I меньше, чем в случае II. Цилиндр, на поверхности которого составляющие градиента равны нулю, деформирует длинные волны меньше, чем цилиндр, на поверхности которого потенциал равен нулю, но щель в первом случае производит большее изменение в рассеянии, чем во втором.

Задачи подобного типа, где решения должны быть сопряжены на щели в границе, в § 11.4 будут решаться при помощи интегральных уравнений и вариационных методов.

Волновое уравнение в параболических координатах. Возвращаясь к формуле (5.1.10), мы видим, что в параболических координатах

$$x = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2), \quad y = \lambda\mu, \quad h_\mu = h_\nu = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2} = \sqrt{2r},$$

$$\lambda = \sqrt{r+x}, \quad \mu = \sqrt{r-x},$$

а уравнение Гельмгольца $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ разделяется следующим образом [$\psi = M(\mu)L(\lambda)$]:

$$\frac{d^2 M}{d\mu^2} + (ka + k^2 \mu^2) M = 0,$$

$$\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + (-ka + k^2 \lambda^2) L = 0$$

[см. формулу (10.1.36) и следующие, относящиеся к уравнению Лапласа в этих координатах]. Решения для обоих множителей M и L могут быть выражены через функции $H(a, \mu\sqrt{k})$ и $H(-a, \lambda\sqrt{k})$, где $H(a, x)$ — решение уравнения

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + (a + x^2) H = 0, \quad x^2 = k(\lambda^2, \mu^2). \quad (11.2.56)$$

Это уравнение имеет иррегулярную особую точку на бесконечности и не имеет особых точек в конечной части плоскости. Особенность на бесконечности, однако, иного рода, чем для простой экспоненты от x . Фундаментальная вблизи $x=0$ система решений состоит из четной функции

$H_e(a, x)$, представимой рядом по четным (even) степеням x и нечетной функции $H_o(a, x)$, представимой рядом по нечетным (odd) степеням. Производя замену $z = (1/2)x^2$, убеждаемся, что уравнение (11.2.56) переходит в гипергеометрическое уравнение типа (5.3.44). В самом деле,

$$\begin{aligned} H_e(a, x) &= e^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia \middle| \frac{1}{2} \middle| ix^2\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{24}(a^2 - 2)x^4 - \frac{1}{720}(a^3 - 14a)x^6 + \dots, \\ H_o(a, x) &= xe^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia \middle| \frac{3}{2} \middle| ix^2\right) = \\ &= x - \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{120}(a^2 - 6)x^5 - \frac{1}{5040}(a^3 - 26a)x^7 + \dots \end{aligned} \quad (11.2.57)$$

Хотя в эти выражения, содержащие вырожденные гипергеометрические функции, входят мнимые величины, все коэффициенты при степенях x в рядах для H_e и H_o действительны, так что H_e и H_o действительны при действительном x .

Из (5.3.63) видно, что при $a = 0$

$$H_e(0, x) = \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\frac{x}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right), \quad H_o(0, x) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \sqrt{2x} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right). \quad (11.2.57')$$

Решения для $a \neq 0$ можно получить в виде ряда по функциям Бесселя. Так, например, полагая $H(a, x) = \sqrt{x} G(a, z)$, где $z = (1/2)x^2$, находим, что G удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2G}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dG}{dz} + \left[1 + \frac{a}{2z} - \frac{1}{16z^2}\right] G = 0.$$

Полагая $G_e = \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{n-\frac{1}{4}}(z)$, для четной функции получаем

$$\begin{aligned} &= 2z \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{n-\frac{1}{4}}(z) \left[\frac{1}{2} \frac{a}{z} + \frac{\left(n - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}{z^2} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{n-\frac{1}{4}}(z) \left[a + \frac{2n\left(n - \frac{1}{2}\right)}{z} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_{n-\frac{1}{4}}(z) \left[\frac{(n-1)\left(n - \frac{3}{2}\right)}{n - \frac{5}{4}} b_{n-1} + ab_n + \frac{(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n + \frac{3}{4}} b_{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при различных J нулю, находим, что $ab_0 + (2/3)b_1 = 0$, $(12/7)b_2 + ab_1 = 0$, $(30/11)b_3 + ab_2 + (2/3)b_1 = 0$ и т. д. Решая последовательно эти рекурсивные соотношения (см. стр. 509 тома I) и выбирая b_0 таким образом, чтобы новый ряд соответствовал ряду

(11.2.57), мы, наконец, получаем

$$H_e(a, x) = \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\frac{x}{2}} \left[J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{3}{2}aJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \right. \\ \left. + \frac{7}{8}a^2J_{\frac{7}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{11}{30}\left(a - \frac{7}{8}a^3\right)J_{\frac{11}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \dots \right].$$

Аналогично

$$H_o(a, x) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \sqrt{2x} \left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{5}{6}aJ_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8}a^2J_{\frac{9}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{13}{42}\left(a - \frac{3}{8}a^3\right)J_{\frac{13}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \dots \right]. \quad (11.2.58)$$

Эти ряды удовлетворительно сходятся, когда приблизительно $x^2/2 \leq 10$ и $a < 1/2$.

Собственные функции для внутренних задач. Полученные в предыдущем пункте функции могут быть использованы для определения собственных функций и собственных значений для внутренней области, ограниченной двумя софокусными и соосными параболой. Как только мы приступаем к решению указанной задачи, проявляются некоторые свойства параболических координат, оказывающие значительное влияние на выбор функций. Изучение системы координат (см. рис. 5.1) показывает, что одна из двух координат λ или μ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, но не обе координаты одновременно. Если μ принимает как отрицательные, так и положительные значения, то границы изменения λ будут 0 и $+\infty$. Во внешних задачах это обстоятельство не вызывает осложнений; так, например, для области вне параболы $\lambda = \lambda_0$ значения λ лежат между λ_0 и ∞ , а значения μ между $-\infty$ и $+\infty$. Но при решении внутренних задач, скажем, для области, заключенной между параболой $\lambda = \lambda_0$ и $\mu = \mu_0$, можно положить, что переменные меняются или в промежутках $0 < \lambda < \lambda_0$, $-\mu_0 < \mu < \mu_0$ или в промежутках $-\lambda_0 < \lambda < \lambda_0$, $0 < \mu < \mu_0$. При этом простое рассмотрение показывает, что если в решении внутренней задачи множитель, зависящий от λ , нечетный, т. е. имеет при отрицательном λ знак, противоположный тому, который он имеет при положительном λ , то множитель, зависящий от μ , должен также быть нечетным, так как он должен обращаться в нуль при $\mu = 0$ (и наоборот). Другими словами, если функция имеет узел при $\lambda = 0$ (т. е. вдоль отрицательной полуоси x), то тот же узел должен быть и при $\mu = 0$ (вдоль положительной полуоси x). Наоборот, если множитель, зависящий от λ , четный и имеет максимум или минимум при $\lambda = 0$, то множитель, зависящий от μ , для внутренней задачи также должен быть четным, так что максимум (или минимум) продолжается через $\mu = 0$. Такое сочетание множителей во внутренней задаче вызвано симметрией границ $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$; вся ось x должна быть либо узлом, либо пучностью для соответствующей функции.

Если ограниченная область симметрична также относительно оси y , то $\lambda_0 = \mu_0$, и оказывается, что некоторые из собственных функций соответствуют значению постоянной разделения $a = 0$. В этих случаях, как видно из (11.2.57'), решения выражаются через функции Бесселя. Некоторые собственные значения k в этом случае выражаются через корни уравнений

$$J_{-\frac{1}{4}}(\gamma_{2m}) = 0, \quad J_{\frac{1}{4}}(\gamma_{2m+1}) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.2.59)$$

если краевое условие требует равенства собственной функции нулю при $\mu = \mu_0 = \lambda = \lambda_0$. Четным n соответствуют корни γ_n ($n=0, 2, \dots$) четных решений, нечетным n — корни γ_n ($n=1, 3, \dots$) нечетных решений, причем множители, зависящие от λ и от μ , имеют одинаковую форму. Эти решения соответствуют решениям $\sin(\pi n_x x/a) \sin(\pi n_y y/b)$ для квадратной мембраны, у которой $n_x = n_y$. Итак, мы показали, что для симметричного случая при $\mu_0 = \lambda_0$ некоторые собственные функции и собственные значения при $n_\mu = n_\lambda = n$ имеют следующую форму:

$$\psi_{nn}(\lambda, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right]^2 \sqrt{\lambda \mu} J_{-\frac{1}{4}}\left(\gamma_n \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\gamma_n \frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right), & n - \text{четное}, \\ 2 \left[\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \right]^2 \sqrt{\lambda \mu} J_{\frac{1}{4}}\left(\gamma_n \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right) J_{\frac{1}{4}}\left(\gamma_n \frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right), & n - \text{нечетное}; \end{cases} \quad (11.2.60)$$

$$k_{nn} = 2 \frac{\gamma_n}{\lambda_0^2} = 2 \frac{\gamma_n}{\mu_0^2}, \quad a_{nn} = 0;$$

$$\gamma_0 = 2,006, \quad \gamma_1 = 2,781, \quad \gamma_2 = 5,123, \quad \gamma_3 = 5,906, \quad \dots;$$

собственные значения γ являются здесь решениями уравнений (11.2.59).

Для случаев $\mu_0 \neq \lambda_0$ и для несимметричных решений при $\mu_0 = \lambda_0$ постоянная a_{mn} не равна нулю и задача оказывается более трудной. Уравнение $H_e(a, \lambda_0 \sqrt{k}) = 0$ при заданном значении λ_0 определяет семейство кривых, связывающих a и k (задающих k как функцию от a). Ближайшая к оси a кривая может быть снабжена индексом $m=0$, следующая $m=2$ и т. д. Уравнение $H_e(-a, \mu_0 \sqrt{k}) = 0$ определяет другое семейство кривых на плоскости a, k , причем нижняя из них может быть снабжена индексом $n=0$, следующая $n=2$ и т. д. Точка пересечения любых двух кривых, принадлежащих различным семействам, определяет допустимое значение a (обозначаемое a_{mn}) и допустимое значение k (обозначаемое k_{mn}), а следовательно, соответствующую собственную функцию

$$\psi_{mn} = H_e(a_{mn}, \lambda \sqrt{k_{mn}}) H_e(-a_{mn}, \mu \sqrt{k_{mn}}).$$

Эти функции четные и квантовые числа (n, m) соответственно четные. Для получения нечетной функции мы выполняем ту же процедуру с нечетными функциями H_o . Уравнение $H_o(a, \lambda_0 \sqrt{k}) = 0$ определяет семейство кривых на плоскости a, k , наименьшая из которых соответствует $m=1$, следующая $m=3$ и т. д. Другое семейство кривых для $n=1, 3, \dots$ получается из уравнения $H_o(-a, \mu_0 \sqrt{k}) = 0$. Пересечения кривых этих двух семейств определяют нечетные функции. Таким путем мы получаем все собственные функции и собственные значения [отсутствие решений с m нечетным и n четным (или наоборот) просто отражает тот факт, что множитель, зависящий от λ , не может быть нечетным, если множитель, зависящий от μ , четный, и наоборот].

Для случая $\lambda_0 = \mu_0$ собственные функции, соответствующие наименьшему собственному значению k_{00} и следующему за ним k_{11} , даются равенствами (11.2.60). Последующие функции для k_{02} (и k_{20} , которое в данном случае равно k_{02}) не входят в (11.2.60) и должны быть вычислены методами, изложенными в двух предыдущих пунктах. Собственные функции для значений k_{13} и k_{31} также подлежат вычислению более сложными методами. Собственная функция для шестого собственного значения k_{22} вновь содержится в (11.2.60) и т. д.

В действительности лишь в немногих случаях мы имеем дело с областями, которые достаточно хорошо соответствуют областям с параболическими границами, и поэтому представляется нецелесообразным продолжать

дальнейшее рассмотрение вопроса о внутренних решениях. В случае необходимости к решениям H_e и H_o без большого труда могут быть применены общие методы гл. 6 и 7.

Волны вне параболических границ. Больше оснований имеется для продолжения рассмотрения внешней задачи в параболических координатах. Плоский полубесконечный экран можно рассматривать как границу $\lambda = \lambda_0$, где λ_0 стремится к нулю. Полезно будет выразить функцию Грина и ее предел — плоскую волну — через параболические волновые функции. Мы, правда, решили уже задачу о рассеянии плоской волны на полуплоскости при помощи цилиндрических волновых функций (см. стр. 359), но использование новых волновых функций может упростить решение или может позволить представить решение в другой форме.

Прежде всего необходимо изучить асимптотическое поведение H_e и H_o , чтобы выяснить, не будет ли некоторая комбинация этих двух независимых решений более подходящей для решения внешних задач. Возвращаясь к (5.3.51), мы видим, что если $x = |x|e^{i\theta}$ ($x = \sqrt{k}\lambda$ или $x = \sqrt{k}\mu$), то асимптотическое поведение функций H для действительных x и a имеет вид

$$\begin{aligned} H_e(a, x) &\simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\pi a/8}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}} \cos\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a \ln x - \frac{1}{8}\pi - \sigma(a)\right], \\ H_o(a, x) &\simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)e^{-\pi a/8}}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}} \cos\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a \ln x - \frac{3}{8}\pi - \tau(a)\right], \end{aligned} \quad (11.2.61)$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right) = \left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|e^{i\sigma(a)}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right) = \left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|e^{i\tau(a)}.$$

Эти формулы показывают, что наши функции, несмотря на то, что они действительны при действительных x , с точки зрения их поведения на бесконечности не вполне удовлетворительны. Неудобство заключается в наличии члена $(a/2)\ln x$ в аргументе косинуса. Это обстоятельство не позволяет, по-видимому, привести (11.2.61) к виду обычных асимптотических волновых формул для других координат. Трудность, очевидно, возникает из-за того, что a предполагается действительным; при a мнимом множитель $x^{ia/2}$ был бы действительной степенью x и логарифмический член исчез бы из аргумента косинуса. Конечно, нет никаких оснований для того, чтобы во внешних задачах считать a действительным. При решении внутренних задач a должно быть действительным потому, что функции H_e и H_o действительны. Но при решении внешней задачи нет необходимости, чтобы наши функции были действительными; в полярных координатах мы пользуемся для внешних задач комплексной функцией Ганкеля $H_m(kr)$, предпочитая ее действительным функциям $J_m(kr)$ в связи с ее простым асимптотическим поведением.

Предположим, что a — чисто мнимая величина, и обозначим ее $(2m+1)i$, где m — действительное число, положительное или отрицательное. Разделенными решениями уравнения Гельмгольца тогда будут функции

$$H_e[(2m+1)i, \lambda\sqrt{k}] H_e[-(2m+1)i, \mu\sqrt{k}]$$

или

$$H_o[(2m+1)i, \lambda\sqrt{k}] H_o[-(2m+1)i, \mu\sqrt{k}],$$

которые выражаются через вырожденные гипергеометрические функции следующим образом:

$$H_e[(2m+1)i, x] = e^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(-\frac{1}{2}m \middle| \frac{1}{2} \middle| ix^2\right), \quad (11.2.62)$$

$$H_o[(2m+1)i, x] = xe^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \middle| \frac{3}{2} \middle| ix^2\right).$$

Асимптотическое поведение этих функций опять можно получить, используя (5.3.51). Для действительных x и m имеем

$$H_e[(2m+1)i, x] \simeq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{-m-1}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}m\right)} e^{\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{4}i\pi(m+1)} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m\right)} e^{-\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{4}i\pi m},$$

$$H_o[(2m+1)i, x] \simeq \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)x^{-m-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m\right)} e^{\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{4}i\pi(m+2)} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)x^m}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}m\right)} e^{-\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{4}i\pi(m-1)}.$$

Изучение этих выражений показывает, что для внешней задачи было бы проще вместо комбинаций, представляющих H , выбрать пару решений, которые асимптотически вели бы себя как $x^{-m-1}e^{\frac{1}{2}ix^2}$ и $x^m e^{-\frac{1}{2}ix^2}$. Таким образом, мы приходим к рассмотрению вырожденных гипергеометрических функций третьего рода U_1 и U_2 , определенных в (5.3.52). Функция, которую мы используем, называется *функцией Вебера* и определяется следующим образом: для $z = |z|e^{i\varphi}$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

$$D_m(z) = 2^{\frac{1}{2}m} e^{-\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}i\pi m} U_2\left(-\frac{1}{2}m \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}z^2\right) \simeq z^m e^{-\frac{1}{4}z^2}, \quad (11.2.63)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} D_m(z) + \left[m + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right] D_m(z) = 0.$$

Пара решений, подходящих для внешних задач в параболических координатах, выражается через эти функции так (при действительных x и m):

$$D_m(x\sqrt{2i}) = 2^{\frac{1}{2}m} i^m e^{-\frac{1}{2}ix^2} U_2\left(-\frac{1}{2}m \middle| \frac{1}{2} \middle| ix^2\right) =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}m} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m\right)} H_e[(2m+1)i, x] - \right.$$

$$\left. - \frac{2\sqrt{i}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}m\right)} H_o[(2m+1)i, x] \right\} \simeq (2ix^2)^{\frac{1}{2}m} e^{-\frac{1}{4}ix^2}, \quad (11.2.64)$$

$$D_{-m-1}(x\sqrt{-2i}) = 2^{-\frac{1}{2}(m+1)} i^{m+1} e^{-\frac{1}{4}ix^2} U_1\left(-\frac{1}{2}m \middle| \frac{1}{2} \middle| ix^2\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{1}{2}(m+1)}} \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}m\right)} H_e[(2m+1)i, x] + \right.$$

$$\left. + \frac{2i^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m\right)} H_o[(2m+1)i, x] \right\} \simeq \frac{e^{\frac{1}{2}ix^2}}{(-2ix^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Таким образом, переход от решения с одним поведением на бесконечности к решению с противоположным поведением осуществляется в этих обозначениях заменой m на $-m-1$ и одновременным переходом к комплексно сопряженным величинам. Обе функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [(2m+1)i + x^2] y = 0,$$

которое соответствует уравнению (11.2.56) с $a = (2m+1)i$, как это и должно быть. Если решение для множителя, зависящего от λ , является комбинацией $D_m(\lambda \sqrt{2ik})$ и $D_{-m-1}(\lambda \sqrt{-2ik})$ с $a = (2m+1)i$, то соответствующее решение для множителя, зависящего от μ , является решением уравнения для $-a$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [-(2m+1)i + x^2] y = 0.$$

Это последнее решение представляет собой комбинацию функций, комплексно сопряженных с функциями (11.2.64):

$$\begin{aligned} D_m(x \sqrt{-2i}) &= 2^{\frac{1}{2}m} i^{-m} e^{-\frac{1}{2}ix^2} U_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m \middle| \frac{1}{2} \middle| ix^2\right) = \\ &= 2^{\frac{1}{2}m} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m\right)} H_e[-(2m+1)i, x] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{-i}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}m\right)} H_o[-(2m+1)i, x] \right\} \simeq (-2ix^2)^{\frac{1}{2}m} e^{\frac{1}{2}ix^2}, \quad (11.2.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{-m-1}(x \sqrt{2i}) &= 2^{-\frac{1}{2}(m+1)} i^{-m-1} e^{-\frac{1}{2}ix^2} U_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m \middle| \frac{1}{2} \middle| ix^2\right) = \\ &= 2^{-\frac{1}{2}(m+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}m\right)} H_e[-(2m+1)i, x] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(-i)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m\right)} H_o[-(2m+1)i, x] \right\} \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}ix^2}}{(2ix^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}. \quad (11.2.66) \end{aligned}$$

Чтобы получить (11.2.65) и (11.2.66), мы произвели соответствующую замену в (11.2.64), применяя (5.2.62) и (11.2.62).

Поскольку мы хотим, чтобы внешнее решение уравнения Гельмгольца в параболических координатах было однозначной функцией на плоскости λ, μ , следует ограничиться целыми m , причем допустимы и положительные и отрицательные целые значения (отрицательные значения соответствуют вторым решениям). Если бы m не было целым, решение было бы многозначным и нужно было бы выделять определенные ветви. Выражение функции Вебера при целом m значительно упрощается. Например, для $m=0$

$$D_0(z) = e^{-\frac{1}{4}z^2} F\left(0 \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}z^2\right) = e^{-\frac{1}{4}z^2}. \quad (11.2.67)$$

Используя интегральное представление для U_2 и рекуррентные формулы для вырожденных гипергеометрических функций, убеждаемся, что для любого целого m

$$\frac{dD_m(z)}{dz} = \frac{1}{2} z D_m(z) - D_{m+1}(z) = -\frac{1}{2} z D_m(z) + m D_{m-1}(z),$$

или

$$D_{m+1}(z) = -e^{\frac{1}{4}z^2} \frac{d}{dz} [e^{-\frac{1}{4}z^2} D_m(z)], \quad D_m(z) = e^{\frac{1}{4}z^2} \int_z^\infty e^{-\frac{1}{4}u^2} D_{m+1}(u) du.$$

Пределы интегрирования здесь выбраны так, чтобы получить надлежащее асимптотическое поведение D .

Следовательно, для целых положительных m имеем

$$\begin{aligned} D_m(z) &= (-1)^m e^{\frac{1}{4}z^2} \frac{d^m}{dz^m} (e^{-\frac{1}{2}z^2}) = 2^{\frac{1}{2}m} e^{-\frac{1}{4}z^2} H_m\left(z\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \\ D_{-m-1}(z) &= e^{\frac{1}{4}z^2} \int_z^\infty du_0 \int_{u_0}^\infty du_1 \dots \int_{u_{m-1}}^\infty e^{-\frac{1}{2}u_m^2} du_m. \end{aligned} \quad (11.2.68)$$

Функция $H_m(z)$ представляет собой полином Эрмита; о нем см. таблицы в конце гл. 6. Заметим также, что

$$D_{-1}(z\sqrt{2i}) = e^{\frac{1}{2}iz^2} \int_{z\sqrt{2i}}^\infty e^{-\frac{1}{2}u_0^2} du_0. \quad (11.2.69)$$

Это выражение тесно связано с интегралами Френеля, рассмотренными на стр. 362.

Разложения функции Грина и плоской волны. Функцию Грина для свободного пространства двух измерений $i\pi H_0(kR)$ и плоскую волну $e^{ikr \cos(\varphi-u)}$ можно выразить в виде рядов, содержащих функции D_m и D_{-m-1} , введенные для решения внешних задач. Эти ряды можно получить различными способами. Например, применяя общую формулу (7.2.63), имеем

$$\begin{aligned} i\pi H_0(kR) &= \frac{\sqrt{8\pi}}{i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} D_m(\lambda_0 \sqrt{-2ik}) D_m(\lambda \sqrt{-2ik}) \times \\ &\times \begin{cases} D_m(\mu \sqrt{2ik}) D_{-m-1}(\mu_0 \sqrt{-2ik}), & \mu_0 > \mu, \\ D_m(\mu_0 \sqrt{2ik}) D_{-m-1}(\mu \sqrt{-2ik}), & \mu > \mu_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (11.2.70)$$

что, впрочем, не очень легко получить, так как множители зависят от m и k , притом во многих отношениях одинаковым образом. Чтобы выбрать, какой из множителей является «собственной функцией» и какой — «коэффициентом», следует учесть, что переменная в полиномах Эрмита меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, в формуле (11.2.70) $-\infty < \lambda < +\infty$ и $0 < \mu < \infty$. Это значит, что «разрез» сделан вдоль положительной полуоси x . Осложнения возникают, когда мы пересекаем эту линию.

Из формулы (11.2.70) можно получить разложение плоской волны, устремляя источник (λ_0, μ_0) в бесконечность. Но мы можем также получить искомым ряд, обратившись к одной из формул таблицы в конце этой главы, а именно к теореме разложения, которая получается (после преодоления значительных трудностей) из интегрального представления функ-

ции D . Искомое разложение имеет вид

$$\begin{aligned}
 e^{ik(x \cos u + y \sin u)} &= e^{-\frac{1}{2} ik(\lambda^2 + \mu^2) + ik[\lambda \cos(\frac{1}{2}u) + \mu \sin(\frac{1}{2}u)]^2} = \\
 &= \sec\left(\frac{1}{2}u\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \operatorname{tg}^m\left(\frac{1}{2}u\right)}{m!} D_m(\lambda \sqrt{-2ik}) D_m(\mu \sqrt{2ik}) = \\
 &= \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}u\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg}^m\left(\frac{1}{2}u\right)}{i^m m!} D_m(\lambda \sqrt{2ik}) D_m(\mu \sqrt{-2ik}),
 \end{aligned} \tag{11.2.71}$$

причем первый ряд хорошо сходится для u , близких к нулю, а второй — для u , близких к π .

Когда $u = \pi$, т. е. когда плоская волна распространяется влево параллельно оси x , формула принимает исключительно простой вид:

$$e^{-ikx} = D_0(\lambda \sqrt{2ik}) D_0(\mu \sqrt{-2ik}) = e^{\frac{1}{2} ik(\mu^2 - \lambda^2)}. \tag{11.2.72}$$

Мы выбрали направление $u = \pi$ для того, чтобы «разрез» $\mu = 0$ оказался в области падающей волны и не вызывал путаницы при исследовании области тени. Эта простая формула может служить отправным пунктом при расчете диффракции плоской волны на крае экрана, перпендикулярного волновому вектору. Экраном является отрицательная полуось y , или линия $\lambda = -\mu$. Нам нужно к выражению (11.2.72) для плоской волны прибавить еще несколько других решений в параболических координатах так, чтобы образовалась комбинация, обращающаяся в нуль (для условий Дирихле) вдоль линии $\lambda = -\mu$ (и только вдоль этой линии). Это последнее требование несколько затрудняет дело, так как прежде всего приходит в голову мысль использовать разность

$$D_0(\lambda \sqrt{2ik}) D_0(\mu \sqrt{-2ik}) - D_0(\lambda \sqrt{-2ik}) D_0(\mu \sqrt{2ik}).$$

Но это выражение (оно равно $e^{-ikx} - e^{ikx}$) обращается в нуль также при $\lambda = +\mu$ (положительная полуось y), и, следовательно, оно представляет собой отражение от всей оси y , т. е. не то, что требуется.

Мы поэтому пробуем другие комбинации функций $D_0(\lambda \sqrt{\pm 2ik})$, $D_{-1}(\lambda \sqrt{\pm 2ik})$ и соответствующих множителей, зависящих от μ , используя при дальнейших вычислениях соотношения

$$D_0(-w) = D_0(w), \tag{11.2.73}$$

$$D_{-1}(-x \sqrt{-2i}) = -D_{-1}(x \sqrt{-2i}) + \sqrt{2\pi} D_0(x \sqrt{2i}).$$

В конечном счете получаем выражение

$$\begin{aligned}
 \psi(\lambda, \mu) &= D_0(\lambda \sqrt{2ik}) D_0(\mu \sqrt{-2ik}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [D_0(\mu \sqrt{-2ik}) D_{-1}(\lambda \sqrt{-2ik}) + \\
 &\quad + D_0(\lambda \sqrt{-2ik}) D_{-1}(\mu \sqrt{-2ik})], \tag{11.2.74}
 \end{aligned}$$

которое обращается в нуль при $\lambda = -\mu$, но не при $\lambda = +\mu$, и является, таким образом, нужным решением.

Анализ этого решения ведется в основном так же, как это было только что сделано на стр. 362.

Функция

$$D_{-1}(\omega \sqrt{-2ik}) = \sqrt{-2ik} e^{-\frac{1}{2}ik\omega^2} \int_w^{\infty \sqrt{i}} e^{ikv^2} dv \quad (11.2.75)$$

мала для больших положительных значений ω и асимптотически стремится к требуемой функции $e^{\frac{1}{2}ik\omega^2}/\omega\sqrt{-2ik}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Для ω , больших по модулю и отрицательных, D_{-1} не исчезает и имеет асимптотическую форму $\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}ik\omega^2} - e^{\frac{1}{2}ik\omega^2}/\omega\sqrt{-2ik}$. Для ω , близких к нулю, D_{-1} имеет осциллирующий характер, типичный для интеграла Френеля. Функция $D_0(\omega \sqrt{-2ik})$ при всех ω равна просто $e^{\frac{1}{2}ik\omega^2}$.

Имея в виду эти свойства, выясним, что дает формула (11.2.74) на некотором расстоянии от края экрана, где μ велико, и вблизи края тени, где λ мало. Подставляя выражения функций D_0 через экспоненты и асимптотическое выражение функции $D_{-1}(\mu \sqrt{-2ik})$, получаем

$$\psi \simeq e^{-ikx} - \frac{e^{ikr}}{2\sqrt{-2i\pi k r}} - \frac{e^{\frac{1}{2}ik\mu^2}}{\sqrt{2\pi}} D_{-1}(\lambda \sqrt{-2ik}), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (11.2.76)$$

где $r = (\lambda^2 + \mu^2)/2$ — расстояние от края экрана. Первое слагаемое представляет падающую волну, второе слагаемое — радиально расходящуюся волну, рассеянную на крае экрана, и третье слагаемое — это член, описывающий диффракционную картину и образование тени. Когда λ положительно ($y > 0$), этот член мал и привносит в рассеянную волну малую добавку. С возрастанием λ в отрицательном направлении этот член приближается к $-e^{-ikx} + e^{ikr}/\lambda \sqrt{-2i\pi k}$. Первое слагаемое этой последней суммы уничтожается с падающей волной (образуя тень), а второе слагаемое добавляется к рассеянной волне; для λ , близких к нулю, второе слагаемое осциллирует, порождая диффракционные эффекты.

Эллиптические координаты. Более полезна эллиптическая система координат, определяемая равенствами [см. также (10.1.23)]

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} a \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta, & y &= \frac{1}{2} a \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta, \\ h_\mu &= h_\vartheta = \frac{1}{2} a \sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}, & r &= \frac{1}{2} a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta}, \\ r_1 &= \frac{1}{2} a (\operatorname{ch} \mu + \cos \vartheta), & r_2 &= \frac{1}{2} a (\operatorname{ch} \mu - \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (11.2.77)$$

где r — расстояние точки (x, y) от начала координат, r_2 — ее расстояние от правого фокуса $(\frac{1}{2}a, 0)$, r_1 — ее расстояние от левого фокуса $(-\frac{1}{2}a, 0)$. Решения уравнения Лапласа для таких координат были рассмотрены в § 10.1. Система координат изображена на рис. 5.3. Уравнение Гельмгольца в этих координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{4} a^2 k^2 [\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta] \psi = 0. \quad (11.2.78)$$

В этом уравнении можно разделить переменные, полагая $\psi = M(\mu)H(\vartheta)$, причем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{d\vartheta^2} + (b - h^2 \cos^2 \vartheta) H &= 0, \\ -\frac{d^2 M}{d\mu^2} + (b - h^2 \operatorname{ch}^2 \mu) M &= 0. \end{aligned} \quad (11.2.79)$$

Первое из этих уравнений — это уравнение Матье, рассмотренное в гл. 5 [см. (5.2.67)]. Второе — также уравнение Матье, но для функций мнимого аргумента. Если выбрать в качестве независимого переменного $z = \cos \vartheta$, то интервал $-1 \leq z \leq 1$ будет соответствовать координате ϑ , а интервал $1 \leq z < \infty$ — координате μ . Как указано в (5.2.77) и (5.3.87), для вычисления коэффициентов разложений решений удобнее использовать переменные ϑ , μ , однако для изучения общих математических свойств решений лучше всего воспользоваться переменной

$$z = \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{1}{a} (r_1 - r_2), & -1 \leq z \leq 1, \\ \operatorname{ch} \mu = \frac{1}{a} (r_1 + r_2), & 1 \leq z < \infty. \end{cases} \quad (11.2.80)$$

Если граничной линией является эллипс $\mu = \operatorname{const}$ и ϑ изменяется в пределах от 0 до 2π (как это обычно бывает), то множитель $H(\vartheta)$ должен быть периодическим с периодом π или 2π . Это возможно только для дискретного множества значений b . В результате получаем собственные функции Se , So , называемые *функциями Матье* и определенные на стр. 530 тома I. Когда h обращается в нуль, они сводятся к тригонометрическим функциям, а b становится квадратом целого числа:

$$\begin{aligned} Se_m(h, \cos \vartheta) &\rightarrow \cos m\vartheta, \quad So_m(h, \cos \vartheta) \rightarrow \sin m\vartheta, \\ be_m &\rightarrow m^2, \quad bo_m \rightarrow m^2 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Параметр $h = ak/2 = a\omega/2c = \pi a/\lambda$ пропорционален частоте и равен отношению произведения π на фокальное расстояние a к длине волны λ .

В § 5.2 и 5.3 мы обсудили многие свойства этих функций, а в таблицах в конце книги приведены некоторые их численные значения. Для координаты ϑ , если только она может изменяться от 0 до 2π , достаточно этих функций. Для координаты μ нам потребуются вторые решения, непериодические по ϑ , но это обстоятельство не является препятствием, ибо координата μ сама непериодична. Итак, для целей этой главы нам нужны будут периодические собственные функции от ϑ , а также два решения, зависящие от переменной μ : одно — пропорциональное Se , So и второе — линейно независимое от Se , So . Такие решения были определены в (5.3.84) и (5.3.91).

Здесь мы ограничимся тем, что приведем лишь непосредственно необходимые формулы. Однако этот минимум не так уж незначителен. Дело в том, что каждая формула для функций Матье имеет четыре различные формы в зависимости от того, идет ли речь о четных или нечетных функциях (относительно $\vartheta = 0$), а также в зависимости от того, равен ли период π или 2π . Собственные функции для углового множителя таковы:

$$Se_{2m}(h, \cos \vartheta) = \sum_n B_{2n}^e(h, 2m) \cos(2n\vartheta), \quad \sum_n B_{2n}^e = 1; \quad (11.2.81)$$

$$Se_{2m+1}(h, \cos \vartheta) = \sum_n B_{2n+1}^e(h, 2m+1) \cos[(2n+1)\vartheta], \quad \sum_n B_{2n+1}^e = 1;$$

$$\begin{aligned}
 So_{2m}(h, \cos \vartheta) &= \sum_n B_{2n}^o(h, 2m) \sin(2n\vartheta), \quad \sum_n 2n B_{2n}^o = 1; \\
 So_{2m+1}(h, \cos \vartheta) &= \sum_n B_{2n+1}^o(h, 2m+1) \sin[(2n+1)\vartheta], \quad (11.2.82) \\
 \sum_n (2n+1) B_{2n+1}^o &= 1.
 \end{aligned}$$

Все эти функции при заданном значении h образуют полную систему собственных функций, взаимно ортогональных между собой. Функции Se_m четны по отношению к $\vartheta=0, \pi$, а функции So_m нечетны. Функции Se четного порядка $2m$ четны относительно $\vartheta=\pi/2, 3\pi/2$, а функции с нечетным индексом $2m+1$ нечетны. Функции So четного порядка в указанном смысле нечетны, а нечетного — четны. Например, $Se_{2m}(\vartheta) = Se_{2m}(\pi \pm \vartheta) = Se_{2m}(-\vartheta)$ и $So_{2m+1}(\vartheta) = -So_{2m+1}(\pi - \vartheta) = So_{2m+1}(\pi + \vartheta) = -So_{2m+1}(-\vartheta)$ и т. д. Нормирующие постоянные для этих функций таковы:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} [Se_{2m}(h, \cos \vartheta)]^2 d\vartheta &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} [B_{2n}^e(h, 2m)]^2 = M_{2m}^e(h), \\
 \int_0^{2\pi} [Se_{2m+1}]^2 d\vartheta &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} [B_{2n+1}^e(h, 2m+1)]^2 = M_{2m+1}^e(h), \\
 \int_0^{2\pi} [So_{2m}]^2 d\vartheta &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} [B_{2n}^o(h, 2m)]^2 = M_{2m}^o(h), \\
 \int_0^{2\pi} [So_{2m+1}]^2 d\vartheta &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} [B_{2n+1}^o(h, 2m+1)]^2 = M_{2m+1}^o(h).
 \end{aligned} \quad (11.2.83)$$

Как указано на стр. 531 тома I, мы определили коэффициенты B таким образом, чтобы функция Se и производная от So при $\vartheta=0$ были равны единице. Это сделано для того, чтобы некоторые наши формулы выглядели проще и чтобы наши функции возможно больше походили на тригонометрические функции, к которым они сводятся при $h \rightarrow 0$. Однако вследствие такого выбора получаются некоторые неудобства, так как при увеличении h значение Se_m , например, вблизи $\vartheta=\pi/2$ становится много больше, чем при $\vartheta=0$.

Другой метод нормирования заключается в том, чтобы сохранить $B_m(h, m)$ равным единице для всех h , что также приводит к соотношению $Se_m \rightarrow \cos(m\vartheta)$ при $h \rightarrow 0$; но при таком нормировании для некоторых h получается, что $Se_m \rightarrow \infty$. Еще один «надежный» способ состоит в том, чтобы определить нормирующую постоянную M так, чтобы интеграл от квадрата Se_m по ϑ от 0 до 2π , так же, как для предельной формы $\cos(m\vartheta)$, равнялся $2\pi/\varepsilon_m$. Это нормирование обеспечивает конечность собственных функций при всех действительных значениях h , но вводит во многие часто применяемые формулы постоянные, равные значениям Se_m при $\vartheta=0$. Поэтому лучше всего принять $Se_m=1$ при $\vartheta=0$ для всех h . В обычной применяемой области значений h затруднений при таком соглашении не возникает. Поскольку нормирующие постоянные M вычислены и внесены в таблицы, легко получить функцию, нормированную к $2\pi/\varepsilon_m$, умножая Se_m на $[2\pi/\varepsilon_m M_m^e(h)]^{1/2}$; аналогично поступают с нечетными функциями So_m .

Все коэффициенты B , постоянные разделения b и нормирующие постоянные M являются функциями h с индексом m и значком e или o , отли-

чающим четные и нечетные относительно $\vartheta = 0$ решения. Когда нужно подчеркнуть эту зависимость, приходится сохранять в записи все индексы, значки и скобки, как это было сделано в формулах (11.2.82) и (11.2.83); в противном случае мы будем настолько возможно упрощать обозначения, записывая, например, be_m , B_{2m} или M .

Радиальные решения. Возвращаясь к решениям для μ , напомним вновь, что, как это было показано на стр. 594 тома I, коэффициенты разложения в ряд по функциям Бесселя те же, что и коэффициенты разложения в ряд Фурье. Мы могли бы, конечно, в (11.2.82) просто заменить ϑ на $i\mu$ и использовать полученные ряды по гиперболическим функциям. Можно поступить и более изящно, возвратившись к переменной $z = \cos \vartheta = \operatorname{ch} \mu$ и введя соответственно многочлены Чебышева, определенные в (5.3.43) и в таблицах в конце гл. 6. Например, мы имеем

$$S_{o_{2m+1}}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2} (z^2 - 1)} \sum_n B_{2n+1}^o T_{2n}^{\frac{1}{2}}(z),$$

$$S_{e_{2m}}(h, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n (2n) B_{2n}^e T_{2n}^{\frac{1}{2}}(z). \quad (11.2.84)$$

Поведение этих рядов можно выяснить, используя аналитические свойства многочленов T , связанных с гипергеометрической функцией.

Но ни один из этих способов не приводит так просто к асимптотическим выражениям для функций Se , So при больших значениях z , как разложение по функциям Бесселя, рассмотренное на стр. 598 тома I и следующих. Формула (5.3.83) показывает, что функция

$$J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n}^e(h, 2m) J_{2n}(h \operatorname{ch} \mu)$$

пропорциональна $Se_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu)$. Мы могли бы сделать эти две функции равными, подобрав множитель пропорциональности, но лучше оставить найденный выше множитель, поскольку так определенная функция Je_{2m} имеет простую асимптотическую форму при $\mu \rightarrow \infty$:

$$Je_{2m} \simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \cos \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Таблицы в конце этой главы содержат полный набор формул, определяющих радиальные функции первого рода Je , Jo . Заметим только, что, когда h обращается в нуль, эти функции сводятся к функциям Бесселя. Таким образом, предельная форма разделенного решения уравнения Гельмгольца $Se_m(h, \cos \vartheta) J_{e_m}(h, \operatorname{ch} \mu)$ имеет вид $\sqrt{\pi/2} \cos(m\vartheta) J_m(h \operatorname{ch} \mu)$, что и должно быть (в пределе волна сводится к круговой). Отметим также разложения по произведениям функций Бесселя; эти разложения сходятся быстрее, чем приведенные выше ряды. Поскольку Je , Jo и Se , So пропорциональны, они одинаково ведут себя при $z = 1$ ($\mu, \vartheta = 0$); другими словами, значение Jo_m при $\mu = 0$ и производная от Je_m при $\mu = 0$ равны нулю. Значение Je_m и производная Jo_m при $\mu = 0$ могут быть выражены через коэффициенты B , как это указано в формулах в конце этой главы.

Для радиальной координаты μ необходимы также и вторые решения уравнений Матье при значениях b , соответствующих собственным функциям Se , So . Их легче всего получить заменой в выражениях для Je , Jo функций Бесселя J_m на функции Бесселя второго рода N_m . Например,

радиальная функция второго рода, соответствующая Je_{2m} , имеет вид

$$Ne_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n}^e(h, 2m) N_{2n}(h \operatorname{ch} \mu).$$

Между функциями Je и Ne имеется, таким образом, весьма простая связь, а асимптотическое поведение Ne при $\mu \rightarrow \infty$ таково:

$$Ne_{2m} \simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \sin \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Фаза этого выражения на 90° отличается от фазы асимптотического выражения для Je . Приведенный выше ряд сходится не очень хорошо; он ни при каком конечном значении μ не сходится абсолютно. Но эквивалентный ряд

$$Ne_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \frac{1}{B_0^e} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n}^e N_n \left(\frac{1}{2} h e^\mu \right) J_n \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right)$$

(для экономии места мы опустили символы $h, 2m$ у коэффициентов B_{2n}^e и B_0^e) сходится удовлетворительно вблизи $\mu = 0$.

Вронскиан, связывающий решение первого рода с соответствующим решением второго рода, равен единице (этим, конечно, объясняется сделанный выше выбор коэффициентов). Это связано с вопросом о значении функций Ne, No и их производных при $\mu = 0$. Например, поскольку производная Je_m при $\mu = 0$ равна нулю, производная Ne_m (по переменной μ) при $\mu = 0$ должна иметь значение, обратное значению Je_m при $\mu = 0$. Наоборот, No_m при $\mu = 0$ должна иметь значение, обратное значению производной от Jo_m при $\mu = 0$, взятому со знаком минус. Значения функций Ne_m и производной No_m могут быть вычислены с помощью рядов по произведениям функций Бесселя. Заметим также, что равенство $\Delta(Je, Ne) = 1$ упрощает вычисление функции Грина.

Приближения для малых значений h и m . Иногда приближенные выражения для некоторых собственных функций полезнее, чем более точные численные таблицы. Для случая длинных волн, например, разложения по степеням h позволяют вычислить предельное поведение решения. С другой стороны, иногда требуется вычислять значения функций для очень больших значений h и желательно иметь приближенные формулы и для этого предельного случая.

Для получения приближения в случае длинных волн мы отправляемся от видоизмененного уравнения Матье

$$\frac{d^2 y}{d\vartheta^2} + \left(b - \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h^2 \cos 2\vartheta \right) y = 0.$$

Очевидно, зависимость решения от h всегда может быть представлена в виде ряда по степеням h^2 . В качестве примера этого метода вычислений мы рассмотрим функцию наименьшего порядка

$$y = Se_0(h, \cos \vartheta) = B_0 + B_2 \cos 2\vartheta + B_4 \cos 4\vartheta + \dots$$

Поскольку эта функция должна стремиться к 1 при $h \rightarrow 0$, коэффициенты B как функции от h должны разлагаться в ряды вида

$$B_0 = 1 + a_0 h^2 + b_0 h^4 + \dots, \quad B_2 = a_2 h^2 + b_2 h^4 + \dots, \\ B_4 = a_4 h^2 + b_4 h^4 + \dots$$

Поскольку $be_0(h)$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$,

$$be_0 - \frac{1}{2} h^2 = \alpha h^2 + \beta h^4 + \dots$$

Пользуясь разложением Se_0 в ряд Фурье, получаем

$$y'' = -4B_2 \cos 2\vartheta - \dots,$$

$$\begin{aligned} \left(b - \frac{1}{2} h^2\right) y &= \left(b - \frac{1}{2} h^2\right) B_0 + \left(b - \frac{1}{2} h^2\right) B_2 \cos 2\vartheta + \dots, \\ -\frac{1}{2} h^2 y \cos 2\vartheta &= -\frac{1}{4} h^2 B_2 - \frac{1}{4} h^2 (2B_0 + B_4) \cos 2\vartheta - \dots \end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов в дифференциальном уравнении дает

$$\left(b - \frac{1}{2} h^2\right) B_0 = \frac{1}{4} h^2 B_2, \quad \left[\left(b - \frac{1}{2} h^2\right) - 4\right] B_2 = \frac{1}{4} h^2 (2B_0 + B_4), \dots$$

Подставляя теперь вместо $b - \frac{1}{2} h^2$ и B степенные ряды, находим: $\alpha = 0$,

$\beta = \frac{1}{4} a_2$, $a_2 = -\frac{1}{8}$, $b_2 = -\frac{1}{8} a_0 - \frac{1}{16} a_4$ и т. д., откуда получаем $\alpha = 0$,

$\beta = -\frac{1}{32}$, $a_2 = -\frac{1}{8}$, $a_4 = 0$, $b_4 = \frac{1}{512}$. Отсюда имеем

$$Se_0 = 1 + a_0 h^2 + b_0 h^4 - \left(\frac{1}{8} h^2 + \frac{1}{8} a_0 h^4\right) \cos 2\vartheta + \frac{h^4}{512} \cos 4\vartheta + \dots$$

Так как Se_0 должна равняться единице при $\vartheta = 0$, то $a_0 = 1/8$ и $b_0 = 7/512$. Следовательно, с точностью до четвертой степени h мы имеем

$$Se_0 = 1 + \frac{1}{8} h^2 + \frac{7}{512} h^4 - \left(\frac{1}{8} h^2 + \frac{1}{64} h^4\right) \cos 2\vartheta + \frac{h^4}{512} \cos 4\vartheta - \dots$$

Постоянная разделения с той же точностью выражается так:

$$be_0 = \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{32} h^4 + \dots$$

Выполняя те же вычисления для других функций, окончательно получаем с точностью до четвертой степени малой величины h :

$$Se_0(h, \cos \vartheta) = 1 + \frac{h^2}{8} + \frac{7h^4}{512} - \left(\frac{h^2}{8} + \frac{h^4}{64}\right) \cos 2\vartheta + \frac{h^4}{512} \cos 4\vartheta - \dots,$$

$$be_0(h) = \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{32} h^4 + \dots;$$

$$So_1(h, \cos \vartheta) = \left(1 + \frac{3h^2}{32} + \frac{13h^4}{3072}\right) \sin \vartheta - \left(\frac{h^2}{32} + \frac{h^4}{512}\right) \sin 3\vartheta + \frac{h^4}{3072} \sin 5\vartheta - \dots,$$

$$bo_1(h) = 1 + \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{128} h^4 + \dots; \quad (11.2.85)$$

$$Se_1(h, \cos \vartheta) = \left(1 + \frac{h^2}{32} + \frac{5h^4}{3072}\right) \cos \vartheta - \left(\frac{h^2}{32} + \frac{h^4}{512}\right) \cos 3\vartheta + \frac{h^4}{3072} \cos 5\vartheta - \dots,$$

$$be_1(h) = 1 + \frac{3}{4} h^2 - \frac{1}{128} h^4 + \dots;$$

$$So_2(h, \cos \vartheta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{48} + \frac{23h^4}{36864}\right) \sin 2\vartheta - \left(\frac{h^2}{96} + \frac{h^4}{2304}\right) \sin 4\vartheta + \frac{h^4}{12288} \sin 6\vartheta - \dots,$$

$$bo_2(h) = 4 + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{192} h^4 + \dots$$

Соответствующие нормирующие постоянные таковы:

$$M_0^e(h) = \pi \left(2 + \frac{1}{2} h^2 + \frac{13}{128} h^4 + \dots \right),$$

$$M_1^o(h) = \pi \left(1 + \frac{3}{16} h^2 + \frac{7}{384} h^4 + \dots \right),$$

$$M_1^e(h) = \pi \left(1 + \frac{1}{16} h^2 + \frac{1}{192} h^4 + \dots \right),$$

$$M_2^e = \frac{1}{4} \pi \left(1 + \frac{1}{12} h^2 + \frac{43}{9216} h^4 + \dots \right).$$

Из таблиц в конце этой главы видно, что коль скоро коэффициенты B определены, представляется возможным вычислить все радиальные функции. Наиболее важны значения этих функций и их производных по μ при $\mu=0$, ибо эти значения нужны для того, чтобы удовлетворить краевым условиям при $\mu=0$. Соответствующие выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} J_{e_0}(h, 1) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{h^2}{8} + \frac{7h^4}{512} - \dots \right], & J_{e_0}'(h, 1) &= 0; \\ J_{o_1}(h, 1) &= 0, & J_{o_1}'(h, 1) &= \frac{1}{2} h \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{h^2}{32} + \frac{5h^4}{3072} - \dots \right]; \\ J_{e_1}(h, 1) &= \frac{1}{2} h \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{3h^2}{32} + \frac{13h^4}{3072} - \dots \right], & J_{e_1}'(h, 1) &= 0; \\ J_{o_2}(h, 1) &= 0, & J_{o_2}'(h, 1) &= \frac{1}{8} h^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{1}{24} h^2 + \dots \right]; \\ N_{e_0}(h, 1) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{8} h^2 \right) \ln \left(\frac{\gamma h}{4} \right), & \gamma &= 1,781, \\ N_{e_0}'(h, 1) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 + \frac{h^2}{8} + \frac{h^4}{512} + \dots \right]; \\ N_{o_1}(h, 1) &= -\frac{2}{h} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 + \frac{h^2}{32} - \frac{h^4}{1536} + \dots \right], \\ N_{o_1}'(h, 1) &\simeq \frac{2}{h} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \frac{3}{32} h^2 + \frac{1}{4} h^2 \ln \left(\frac{\gamma h}{4} \right) \right]; \\ N_{e_1}(h, 1) &\simeq -\frac{2}{h} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 + \frac{3}{32} h^2 \right], \\ N_{e_1}'(h, 1) &= \frac{2}{h} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 + \frac{3h^2}{32} + \frac{7h^4}{1536} + \dots \right]; \\ N_{o_2}(h, 1) &\simeq -\frac{8}{h^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{24} h^2 \right), & N_{o_2}'(h, 1) &\simeq \frac{16}{h^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{24} h^2 \right); \end{aligned} \quad (11.2.86)$$

при этом формулы для N_{e_0} , N_{o_1}' , N_{e_1} , N_{o_2} , N_{o_2}' имеют точность первого порядка по h^2 , а остальные — второго порядка.

Приближения для малых h и больших m . Для получения приближенных решений при больших значениях m , в частности при b , больших чем h^2 , мы можем использовать метод WKBJ, рассмотренный в § 9.3. Согласно этому методу, решения уравнений (11.2.79) имеют вид

$$H(\vartheta) \simeq [b - h^2 \cos^2 \vartheta]^{-\frac{1}{4}} \frac{\cos}{\sin} \left[\int_0^{\vartheta} \sqrt{b - h^2 \cos^2 u} du \right]$$

при условии, что разность $b - h^2 \cos^2 \vartheta$ нигде на действительной оси не обращается в нуль. Интеграл в скобках выражается через эллиптические интегралы второго рода:

$$\int_0^{\vartheta} \sqrt{b - h^2 \cos^2 u} du = \sqrt{b} \left[E\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{h}{\sqrt{b}}\right) + E\left(\vartheta - \frac{1}{2}\pi, \frac{h}{\sqrt{b}}\right) \right],$$

где

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

и

$$E\left(\frac{1}{2}\pi, k\right) = \frac{1}{2}\pi \left[1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \frac{5}{256}k^6 \dots \right].$$

Для того чтобы $H(\vartheta)$ была периодической по ϑ с периодом 2π , необходимо, чтобы аргумент косинуса или синуса был целым кратным π при $\vartheta = \pi$. Это условие равносильно уравнению

$$2\sqrt{b}E\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{h}{\sqrt{b}}\right) = m\pi,$$

устанавливающему связь между m и b . Используя степенной ряд для $E\left(\frac{1}{2}\pi, k\right)$, мы можем получить приближенные выражения для постоянных разделения:

$$be_m \simeq bo_m \simeq m^2 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{32}\frac{h^4}{m^2} + \dots$$

В этом приближении нет разницы между значениями be и bo при одном и том же номере m . Точные разложения высших собственных функций по степеням h показывают, что полученное выражение верно с точностью до степеней h^2 , меньших чем порядок m собственной функции. Имеет место общая формула

$$be_m \simeq bo_m \simeq m^2 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{h^4}{32(m^2-1)} + \frac{(5m^2+7)h^6}{2048(m^2-1)^3(m^2-4)} + \dots, \quad (11.2.87)$$

которая верна при $m=1$ только с точностью до постоянного члена ($m^2=1$), при $m=2$ с точностью до члена h^2 , при $m=3$ с точностью до члена h^4 и т. д. При каждом значении m разность между be_m и bo_m имеет при малых h порядок h^{2m} . При $m > 4$ можно использовать все члены, выписанные в (11.2.87).

Возвращаясь теперь к самим собственным функциям, мы можем в формуле для $H(\vartheta)$ разложить подинтегральное выражение, стоящее в аргументе косинуса или синуса, по степеням h^2 и, используя это разложение для собственных значений b , произвести интегрирование. С той же степенью точности, что и в (11.2.87), получаем

$$\begin{aligned} Se_m(h, \cos \vartheta) &\simeq \left[\frac{be_m - h^2}{be_m - h^2 \cos^2 \vartheta} \right]^{\frac{1}{4}} \times \\ &\quad \times \cos \left[m\vartheta - \frac{h^2}{8m} \sin 2\vartheta - \frac{h^4}{256m^3} \sin 4\vartheta - \dots \right], \\ So_m(h, \cos \vartheta) &\simeq \left[\frac{bo_m - h^2}{bo_m - h^2 \cos^2 \vartheta} \right]^{\frac{1}{4}} \left[m - \frac{h^2}{4m} - \frac{h^4}{32m^3} - \dots \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \sin \left[m\vartheta - \frac{h^2}{8m} \sin 2\vartheta - \frac{h^4}{256m^3} \sin 4\vartheta - \dots \right]. \end{aligned} \quad (11.2.88)$$

Правые части, как и в (11.2.85), можно разложить в ряды Фурье. Зная коэффициенты рядов Фурье, можно, как и ранее, вычислить ряды для радиальных функций.

Заметим, что чем больше m , тем большим должно быть h , для того чтобы Se_m , So_m начали заметно отличаться от обычных тригонометрических функций и для того чтобы be_m , bo_m начали заметно отличаться друг от друга. При увеличении h разность $be_m - bo_m$ возрастает от нуля (сначала как h^{2m}), пока, наконец, be_m не становится почти равным bo_{m+1} , что мы вскоре покажем. При малых h величины b возрастают, начиная с их первоначального значения m^2 , пропорционально h^2 ; при больших h они меняются линейно вместе с h , как это будет показано ниже.

Выражения для больших h . Если h очень велико, то, как следует из теории Штурма — Лиувилля, решения будут велики только при $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = -\pi/2$. Обращаясь к уравнению Лиувилля (6.3.12), видим, что для уравнения Матье $p=1$, $q = -h^2 \cos^2 \vartheta$, $r=1$ и $\lambda=b$. Как было указано на стр. 672 тома I, если разность $b - h^2 \cos^2 \vartheta$ положительна, то решение y имеет синусоидальный характер, а если $b - h^2 \cos^2 \vartheta$ отрицательна, то характер y экспоненциальный. Если бы b было отрицательно, то y имело бы экспоненциальный характер для всей области значений ϑ , и поэтому не могло бы быть периодическим. Если b положительно, но меньше h^2 , то y может быть синусоидальным только вблизи точек $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = -\pi/2$, где $\cos^2 \vartheta$ обращается в нуль. Следовательно, y может принимать большие значения только вблизи этих точек и y убывает до весьма малых значений при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, причем кривые в окрестности этих точек выпуклые, т. е. ведут себя подобно экспоненте.

Для больших значений h функции Se , So должны, следовательно, иметь свои наибольшие значения вблизи $\vartheta = \pm \pi/2$ и быстро убывать с каждой стороны от этих точек, чтобы вблизи $\vartheta = 0$, π принять сравнительно малые значения. Быть может, следует попытаться решить уравнение (11.2.79) вблизи точек $\vartheta = \pm \pi/2$, потребовав в качестве краевых условий, чтобы решения экспоненциально убывали (подобно отрицательной экспоненте) на границах соответствующих областей.

Для больших значений h вблизи точки $\vartheta = \pi/2$ уравнение (11.2.79) приближенно записывается в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (b - h^2 x^2) y = 0, \quad x = \vartheta - \frac{1}{2} \pi.$$

Это — уравнение полиномов Эрмита, если только интервал изменения x совпадает с $(-\infty, +\infty)$. Формулы, касающиеся полиномов Эрмита, даны в таблицах в конце гл. 6. Собственными функциями, экспоненциально стремящимися к нулю при больших значениях z , являются $\psi_n(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} H_n(z)$. Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \psi_n}{dz^2} + [(2n+1) - z^2] \psi_n = 0.$$

Если мы потребуем, чтобы $y \simeq A \psi_n(x \sqrt{h})$ вблизи $x=0$ ($\vartheta = \frac{1}{2} \pi$), то y должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [h(2n+1) - h^2 x^2] y = 0$$

и экспоненциально убывать при удалении от $x=0$.

Истинное решение должно поэтому почти равняться $A \psi_n(x \sqrt{h})$ вблизи $x=0$, но для других значений x его поведение должно отличаться от этой функции, ибо y должно быть периодическим по x с перио-

дом 2π , в то время как ϕ_n — непериодическая функция, стремящаяся к нулю по мере увеличения $|x|$. Все же мы в состоянии приближенно решить уравнение (11.2.79) в важных областях вблизи $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = -\pi/2$, составляя линейную комбинацию функций ϕ . Мы можем использовать одну из комбинаций $A \left\{ \phi_n \left[V\bar{h} \left(\vartheta - \frac{1}{2} \pi \right) \right] \pm \phi_n \left[V\bar{h} \left(\vartheta + \frac{1}{2} \pi \right) \right] \right\}$, причем комбинация со знаком плюс симметрична по отношению $\vartheta = 0$ и потому должна соответствовать функциям Se ; комбинация со знаком минус антисимметрична, и потому она должна соответствовать So . Если две функции ϕ мало «перекрываются», то наша комбинация даст, вероятно, хорошее приближение.

Нам остается еще обеспечить периодичность решения, но это может быть сделано добавлением функций, подобных выписанным, у которых ϑ увеличено последовательно на $2\pi, 4\pi, \dots, -2\pi, -4\pi, \dots$. Таким образом, мы получаем, наконец, приближенное решение для больших h :

$$Se_m(h, \cos \vartheta) \simeq A_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \phi_m \left[V\bar{h} \left(\vartheta - \frac{1}{2} \pi + 2n\pi \right) \right] + \right. \\ \left. + \phi_m \left[V\bar{h} \left(\vartheta + \frac{1}{2} \pi + 2n\pi \right) \right] \right\}, \quad (11.2.89)$$

$$So_m(h, \cos \vartheta) \simeq B_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \phi_{m-1} \left[V\bar{h} \left(\vartheta - \frac{1}{2} \pi + 2n\pi \right) \right] - \right. \\ \left. - \phi_{m-1} \left[V\bar{h} \left(\vartheta + \frac{1}{2} \pi + 2n\pi \right) \right] \right\},$$

$$\phi_m(z) = e^{-z^2/2} H_m(z),$$

где постоянные A_m, B_m определяются из условий, которым должны удовлетворять Se, So при $\vartheta = 0$. Несколько первых собственных функций можно выразить через эллиптические функции. Так, функция наименьшего порядка имеет вид

$$Se_0(h, \cos \vartheta) \simeq A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{1}{2}h \left(\vartheta - \frac{1}{2} \pi + 2m\pi \right)^2} + e^{-\frac{1}{2}h \left(\vartheta + \frac{1}{2} \pi + 2m\pi \right)^2} \right] = \\ = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}h \left(\vartheta + n\pi + \frac{1}{2} \pi \right)^2} = A e^{-\frac{1}{2}h\vartheta^2} \vartheta_2 \left(\frac{1}{2} i h \pi \vartheta, e^{-\frac{1}{2}h\pi^2} \right),$$

где ϑ_2 — одна из эллиптических тэта-функций, определенная в (4.5.70). Поскольку $Se_0(h, 1)$ должна быть равна единице, коэффициент A должен иметь вид $1/\vartheta_2(0, e^{-\frac{1}{2}h\pi^2})$. С помощью хорошо известного преобразования тэта-функций (см. задачу 4.51) можно показать, что

$$Se_0(h, \cos \vartheta) \simeq \frac{\vartheta_4(\vartheta, e^{-2/h})}{\vartheta_4(0, e^{-2/h})},$$

и это доказывает периодичность функции Se_0 .

Итак, мы имеем

$$Se_0(h, \cos \vartheta) \simeq \frac{\sqrt{\frac{1}{2}h\pi}}{\vartheta_4(0, e^{-2/h})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}h \left(\vartheta + n\pi + \frac{1}{2} \pi \right)^2} = \frac{\vartheta_4(\vartheta, e^{-2/h})}{\vartheta_4(0, e^{-2/h})}.$$

Аналогично

$$S_{01}(h, \cos \vartheta) \simeq \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \pi h}}{\vartheta_2(0, e^{-2/h}) \vartheta_3(0, e^{-2/h}) \vartheta_4(0, e^{-2/h})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{1}{2} h (\vartheta + n\pi + \frac{1}{2} \pi)^2} =$$

$$= \frac{\vartheta_1(\vartheta, e^{-2/h})}{\vartheta_2(0, e^{-2/h}) \vartheta_3(0, e^{-2/h}) \vartheta_4(0, e^{-2/h})}. \quad (11.2.90)$$

Эти результаты, связывающие решения волнового уравнения в эллиптических координатах с эллиптическими функциями, исключительно интересны. В нашем приближении функции S_{e1} , S_{02} оказываются связанными с производными S_{e0} , S_{01} по ϑ .

Чтобы выяснить, в какой области пригодны эти приближения, и вычислить приближенные значения постоянной разделения b , мы используем полученное приближенное выражение для y в качестве функции сравнения в вариационном методе. В соответствии с (6.2.20) величина

$$\Omega = \frac{\left\{ \int_0^{2\pi} \psi \left[-\left(\frac{d^2 \psi}{d\vartheta^2} \right) + h^2 \psi \cos^2 \vartheta \right] d\vartheta \right\}}{\int_0^{2\pi} \psi^2 d\vartheta}$$

не меньше чем b_0^e и приближается к точному значению b_0^e , когда ψ приближается к истинной функции S_{e0} .

Чтобы увидеть, как ведут себя эти интегралы, мы вычислим нормирующую постоянную для приближенного выражения S_{e0} . Переставляя знаки суммирования и интегрирования, получаем

$$M_0^e = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} h x^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} h (x+n\pi)^2} dx = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\frac{1}{4} h \pi^2 n^2} =$$

$$= A^2 \sqrt{\frac{\pi}{h}} \vartheta_3(0, e^{-\frac{1}{4} h \pi^2}) = A^2 \frac{2}{h} \vartheta_3(0, e^{-4/h}).$$

Числитель упрощаем, используя равенства $-\psi'' = (h - h^2 x^2) \psi$ и $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\vartheta$. Вычисления дают

$$b_0^e \leq h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{h^2 \sqrt{h/\pi}}{\vartheta_3(0, e^{-\frac{1}{4} h \pi^2})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} h x^2} \left[x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x \right] e^{-\frac{1}{2} h (x+n\pi)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h^2 e^{-1/h} \frac{\vartheta_4(0, e^{-\frac{1}{4} h \pi^2})}{\vartheta_3(0, e^{-\frac{1}{4} h \pi^2})} - \frac{h}{\vartheta_3} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{1}{4} h \pi^2 n^2 e^{-\frac{1}{4} h \pi^2 n^2} \simeq$$

$$\simeq h - \frac{1}{4} + \frac{1}{6h} - \frac{1}{24h^2} + \dots - \left(\frac{1}{2} \pi^2 - 2 \right) h^2 e^{-\frac{1}{4} h \pi^2} + \dots, \quad h \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, для постоянной разделения b_1^e , соответствующей S_{01} ,

имеем

$$b_1^0 \leq \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2 e^{-1/h} \frac{\vartheta_3\left(0, e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}\right)}{\vartheta_4\left(0, e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}\right)} - \frac{h}{\vartheta_4} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{1}{4} h \pi^2 n^2 e^{-\frac{1}{4}h\pi^2 n^2} \simeq \quad (11.2.91)$$

$$\simeq h - \frac{1}{4} + \frac{1}{6h} - \frac{1}{24h^2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\pi^2 - 2\right) h^2 e^{-\frac{1}{4}h\pi^2} + \dots, \quad h \rightarrow \infty.$$

Заметим, что эти выражения отличаются только последними членами. Оба собственных значения возрастают при больших h пропорционально h .

Множитель $e^{-\frac{1}{4}h\pi^2}$ измеряет «перекрытие» одного из членов ряда с последующим. Если оно мало, то мы можем быть уверены, что приведенные формулы дают хорошее приближение к точным решениям; пока $h > 2$ этот «перекрывающий» член меньше 0,01 и мы можем ожидать, что формула, грубо говоря, будет правильной с точностью до одного процента.

Волны внутри эллиптической области. Для решения внутренних задач следует найти значения h , при которых радиальные функции J_e , J_o удовлетворяют заданным краевым условиям на граничном эллипсе $\mu = \mu_0$. Функции J_e , J_o должны здесь использоваться потому, что функции N_e , N_o или их производные имеют особенность при $\mu = 0$ и применяются только во внешних задачах.

Для эллиптической мембраны краевое условие имеет вид: $\psi = 0$ на границе. Предположим, что границей служит эллипс с большой осью A и малой осью B . Возвращаясь к выражениям для координат, мы видим, что $a \operatorname{ch} \mu_0 = A$ и $a \operatorname{sh} \mu_0 = B$, так что $a^2 = A^2 - B^2$ и $\mu_0 = \operatorname{Arth}(B/A)$. Следовательно, можно вычислить a и μ_0 , если заданы A и B или если заданы фокальное расстояние a и эксцентриситет $e = \sqrt{1 - (B/A)^2} = \operatorname{sech} \mu_0$ (или какая-либо другая пара величин A, B, a, e). Краевое условие, определяющее собственные частоты, имеет вид

$$J_{e_m}(h, \operatorname{ch} \mu_0) = 0 \quad \text{или} \quad J_{o_m}(h, \operatorname{ch} \mu_0) = 0,$$

где $h = a\omega/2c = \pi a \nu / c = \pi a / \lambda$. Мы выбираем ω , а вместе с тем и h так чтобы J_e (или J_o) обращалась в нуль при $\mu = \mu_0$.

Если μ_0 велико (т. е. эксцентриситет $e = 1/\operatorname{ch} \mu_0$ мал), то корни этих уравнений существуют для малых h . В этом случае для определения собственных частот можно использовать приближенные выражения (11.2.85). Например, для наинизшей формы колебания ($m=0$) радиальная функция с точностью до величин второго порядка относительно малого h имеет вид

$$J_{e_0}(h, \operatorname{ch} \mu) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{8} h^2\right) J_0(h \operatorname{ch} \mu) + \frac{1}{8} h^2 J_2(h \operatorname{ch} \mu) + \dots \right\}.$$

Если высшие члены отсутствуют, то эта функция обращается в нуль при $h \operatorname{ch} \mu_0 = \pi \beta_{01}$ (см. таблицу на стр. 523), т. е. когда $h \operatorname{ch} \mu_0$ равно наименьшему корню уравнения $J_0(\pi \beta) = 0$. Если h мало, то корень уравнения $J_e = 0$ мало отличается от этого значения. Вблизи $\pi \beta_{01}$ мы имеем $J_0(x) \simeq (\pi \beta_{01} - x) J_1(\pi \beta_{01})$, так что уравнение $J_{e_0} = 0$ приближенно сводится к следующему:

$$\left(1 + \frac{1}{8} h^2\right) (\pi \beta_{01} - h \operatorname{ch} \mu_0) J_1(\pi \beta_{01}) + \frac{1}{8} h^2 J_2(\pi \beta_{01}) = 0.$$

Решение последнего уравнения с точностью до малых второго порядка относительно $e = 1/\text{ch } \mu_0$ равно

$$h_{01} \simeq \pi \beta_{01} e + \frac{1}{8} (\pi \beta_{01} e)^2 \frac{J_2(\pi \beta_{01})}{J_1(\pi \beta_{01})}. \quad (11.2.92)$$

Подставляя численные значения $\beta_{01} = 0,7655$, $J_2(\pi \beta_{01}) = 0,4318$, $J_1(\pi \beta_{01}) = 0,5191$ и выражая все через непосредственно измеряемые величины, для наинизшей формы колебаний и для почти круглой мембраны получаем

$$\gamma_{01} \approx \frac{c}{A} [0,7655 + 0,1914 e] \quad (B \approx A),$$

где $c = \sqrt{T/\rho}$ — скорость распространения поперечных волн вдоль мембраны, A — большая ось граничного эллипса, а $e = \sqrt{1 - (B/A)^2}$ — его эксцентриситет. Первый член представляет собой собственную частоту круглой мембраны диаметра A . Второй член дает поправку первого порядка, которую следует внести в эту частоту для учета эффекта эксцентricности границы. Эта поправка, очевидно, пригодна только для очень малых значений эксцентриситета. Соответствующая собственная функция выражается так:

$$\vartheta \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{8} h^2 \cos 2\vartheta \right] \left[\left(1 + \frac{1}{8} h^2 \right) J_0(h \text{ch } \mu) + \frac{1}{8} h^2 J_2(h \text{ch } \mu) \right],$$

где величина h определена в (11.2.92).

Когда эксцентриситет велик, μ_0 мало и $B \approx a\mu_0$, $A \approx a \left(1 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right)$ с точностью до членов второго порядка относительно μ_0 или $a \approx A - \frac{1}{2} (B^2/A)$, $\mu_0 \approx (B/A) + (1/3)(B/A)^3$ с точностью до членов третьего порядка относительно B/A . В этом случае даже наинизшее допустимое значение h велико и мы должны использовать формулы, предшествующие (11.2.90). Чтобы удовлетворить крайевым условиям, подставим $i\mu$ вместо ϑ в выражение для S_{e_0} через зэта-функции. Приравнявая это выражение нулю, получаем

$$\begin{aligned} \vartheta_2 \left(-\frac{1}{2} h \pi \mu_0, e^{-\frac{1}{2} h \pi^2} \right) = \\ = 2e^{-\frac{1}{8} \pi^2 h} \left[\cos \left(\frac{1}{2} h \pi \mu_0 \right) + e^{-h \pi^2} \cos \left(\frac{3}{2} h \pi \mu_0 \right) + \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

Наинизшим корнем является $h\mu_0 = 1$, или

$$h_{01} \approx \frac{A}{B} - \frac{1}{3} \frac{B}{A}, \text{ или } \gamma_{01} \approx \frac{c}{\pi B} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{B}{A} \right)^2 \right] \quad (B \ll A).$$

В этом предельном случае частота точнее выражается не через большую ось A , а через малую ось B ($A \gg B$).

Соответствующее выражение для наинизшей собственной функции в случае очень эксцентricной эллиптической мембраны имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{01} \simeq K \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n e^{-2n^2/h} \cos 2n\vartheta \right] \times \\ \times \left\{ e^{\frac{1}{2} h \mu^2} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} h \pi^2 \left(m + \frac{1}{2} \right)^2} \cos \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi h \mu \right] \right\}, \end{aligned}$$

где величина h определена выше.

Для промежуточных значений эксцентриситета границы или для получения более точных результатов приходится пользоваться точными решениями, помещенными в таблицах в конце этой книги. Эти решения выражаются в виде $Se_m(h, \cos \vartheta) Je_m(h, \text{ch } \mu)$, где h — корень уравнения $Je_m(h, \text{ch } \mu_0) = 0$, или в виде соответствующей комбинации So и Jo .

Разложения функции Грина и плоской волны. Обычную методику, приведшую нас к (7.2.63), легко применить и здесь для получения разложения в эллиптических координатах двумерной функции Грина для всей плоскости:

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \omega) = G_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = i\pi H_0^1(kR) = \quad (11.2.93)$$

$$= 4\pi i \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Se_m(h, \cos \vartheta)}{M_m^e(h)} Se_m(h, \cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{l} Je_m(h, \text{ch } \mu_0) He_m(h, \text{ch } \mu) \\ Je_m(h, \text{ch } \mu) He_m(h, \text{ch } \mu_0) \end{array} \right\} + \right. \\ \left. + 4\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{So_m(h, \cos \vartheta_0)}{M_m^o(h)} So_m(h, \cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{l} Jo_m(h, \text{ch } \mu_0) Ho_m(h, \text{ch } \mu), \mu > \mu_0, \\ Jo_m(h, \text{ch } \mu) Ho_m(h, \text{ch } \mu_0), \mu_0 > \mu, \end{array} \right\} \right\}$$

где $h = ak/2 = a\omega/2c$ и

$$He_m = Je_m + iNe_m = -iC_m^e(h, \mu) e^{i\delta_m^e(h, \mu)},$$

$$Ho_m = Jo_m + iNo_m = -iC_m^o(h, \mu) e^{i\delta_m^o(h, \mu)}$$

— решения, соответствующие расходящимся волнам.

От этого разложения можно непосредственно перейти к разложению плоской волны, но для рассматриваемого случая мы все же проведем вычисления. Поместим источник в точке на большом расстоянии от начала в направлении, образующем угол $u + \pi$ с положительной полуосью x . Тогда величина R будет равна $r_0 + r \cos(u - \varphi)$ при $r_0 \gg r$, $\vartheta_0 \approx \varphi + \pi$ и $kr_0 \approx h \text{ch } \mu_0$. Асимптотическое выражение для $i\pi H_0^1(kR)$ имеет вид $\sqrt{2\pi i / kr_0} e^{ikr_0 + ikr \cos(u - \varphi)}$. Пользуясь соотношением

$$Se_m(h, -\cos u) = (-1)^m Se_m(h, \cos u),$$

а также асимптотическими формулами для He_m и Ho_m , получаем

$$\sqrt{\frac{2\pi i}{kr_0}} e^{ikr_0 + ikr \cos(u - \varphi)} \simeq \frac{4\pi V \bar{i}}{V h \text{ch } \mu_0} e^{ih \text{ch } \mu_0} \times \\ \times \sum_m (-1)^m e^{-\frac{1}{2}im\pi} \left\{ \frac{Se_m(u)}{M_m^e} Se_m(\vartheta) Je_m(\mu) + \frac{So_m(u)}{M_m^o} So_m(\vartheta) Jo_m(\mu) \right\}.$$

Произведя возможные сокращения, в конце концов придем к формуле

$$e^{ikr \cos(u - \varphi)} = e^{ik[x \cos u + y \sin u]} =$$

$$= \sqrt{8\pi} \sum_m i^m \left\{ \frac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} Se_m(h, \cos \vartheta) Je_m(h, \text{ch } \mu) + \right. \\ \left. + \frac{So_m(h, \cos u)}{M_m^o(h)} So_m(h, \cos \vartheta) Jo_m(h, \text{ch } \mu) \right\}, \quad (11.2.94)$$

которая представляет собой разложение плоской волны, распространяющейся под углом u к положительной полуоси x (т. е. по отношению к большой оси эллипса).

Из этой последней формулы можно получить интегральное представление собственных функций в эллиптических координатах типа (11.2.2)

$$\begin{aligned} Se_m(h, \cos \vartheta) Je_m(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{1}{V 8\pi i m} \int_0^{2\pi} e^{ikhX} Se_m(h, \cos u) du, \\ So_m(h, \cos \vartheta) Jo_m(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{1}{V 8\pi i m} \int_0^{2\pi} e^{ikhX} So_m(h, \cos u) du, \end{aligned} \quad (11.2.95)$$

где $X = r \cos(u - \varphi) = x \cos u + y \sin u$. Из этой формулы в свою очередь можно извлечь выражение для $Se_m Je_m$ через решения в полярных координатах $r^m J_m$. Разложив $Se_m(h, \cos u)$ в ряд Фурье (11.2.81) и пользуясь формулой (11.2.21), находим

$$Se_{2m}(h, \cos \vartheta) Je_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^e(h, 2m) \cos(2n\varphi) J_{2n}(kr) \quad (11.2.96)$$

и аналогично для Se_{2m+1} и функций So, Jo .

Так как Se_m — собственная функция, то тригонометрическую функцию от u можно разложить в ряды по Se, So вида

$$\cos(2mu) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M_{2n}^e \varepsilon_m} B_{2n}^e(h, 2n) Se_{2n}(h, \cos u).$$

Поэтому мы можем написать

$$\cos(2m\varphi) J_{2m}(kr) = \frac{V 8\pi}{\varepsilon_m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}^e(h, 2n)}{M_{2n}^e(h)} Se_{2n}(h, \cos \vartheta) Je_{2n}(h, \operatorname{ch} \mu).$$

Это — обращение разложения (11.2.96). Полученные результаты нетрудно распространить на случаи симметрий иных типов по φ или ϑ .

Излучение колеблющейся полосы. Простейшей внешней задачей является излучение поверхности, которая представляет собой полосу $\mu = 0$ нулевой толщины и ширины a . Если полоса достаточно длинна и каждая точка любой вертикальной прямой движется одинаково, то задача становится двумерной, и можно использовать эллиптические координаты, расположив фокусы эллипса на «краях» полосы. Мы приведем два примера: в одном будет рассмотрено акустическое излучение колеблющейся полосы, во втором — электромагнитное излучение тока, текущего по полосе.

В случае колеблющейся полосы положим, что в точках ее поверхности движение окружающей среды нормально к поверхности и имеет скорость $v_0 e^{-i\omega t}$ на части поверхности от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \pi$ и $-v_0 e^{-i\omega t}$ на части от $\vartheta = \pi$ до $\vartheta = 2\pi$. Поэтому если ψ — потенциал скоростей, то краевое условие при $\mu = 0$ таково:

$$-\operatorname{grad}_{\mu} \psi = \begin{cases} v_0 & (0 < \vartheta < \pi), \\ -v_0 & (\pi < \vartheta < 2\pi). \end{cases}$$

Поскольку $\operatorname{grad}_{\mu} \psi$ при $\mu = 0$ равен $[2/a |\sin \vartheta|] (\partial \psi / \partial \mu)$, это условие принимает вид

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = -\frac{1}{2} a v_0 \sin \vartheta.$$

Это означает, что ψ должно быть нечетной функцией от ϑ , так что следует пользоваться функциями So, Jo, No . Краевое условие на бесконеч-

ности сводится к требованию, чтобы решение представлялось расходящимися волнами, так что для радиальных решений мы будем пользоваться функциями Ho_m — аналогом функций Ганкеля. Производные этих функций имеют вид

$$\frac{d}{d\mu} Ho_m(h, \text{ch } \mu) = iC_m^o(h, \mu) e^{i\delta_m^o(h, \mu)} = \frac{d}{d\mu} [Jo_m + iNo_m],$$

где величины C_m^o и δ_m^o определяются аналогично случаю полярных координат.

В нашей задаче нужно найти величину производной при $\mu=0$. Обозначая значения величин C и δ при $\mu=0$ снова через C_m^o и δ_m^o и используя формулы, помещенные в конце этой главы, получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\mu} Ho_m(h, \text{ch } \mu) \right]_{\mu=0} &= iC_m^o e^{i\delta_m^o} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \frac{\frac{1}{4}h^2(-1)^{\frac{1}{2}m}B_2^o(h, m)}{So'_m(h, 0)} + \right. \\ &+ \left. \frac{i}{B_2^o(h, m)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-\frac{1}{2}m} (2n) B_{2n}^o(h, m) [2J_n N_n - J_{n-1} N_{n+1} - J_{n+1} N_{n-1}] \right\} \\ &\quad (m - \text{четное}), \end{aligned}$$

где аргументы всех функций J_n , N_n и т. д. равны $h/2$. Аналогичная формула имеет место для нечетного m . Используя формулы (11.2.86), находим, что для малых h

$$C_1^o \simeq \frac{2}{h} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{3}{32} h^2 \right), \quad \delta_1^o \simeq -\frac{\pi}{8} h^2 \left(1 + \frac{1}{16} h^2 \right).$$

Теперь разложим $\sin \vartheta$ в ряд по собственным функциям So . В разложение войдут только нечетные значения m (почему?), и мы в конце концов получим

$$\sin \vartheta = \pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^o(h, 2m+1)}{M_{2m+1}^o(h)} So_{2m+1}(h, \cos \vartheta).$$

Следовательно, выражение для излученной волны имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2} i \pi a v_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^o(h, 2m+1)}{M_{2m+1}^o(h)} \frac{e^{-i\delta_{2m+1}^o}}{C_{2m+1}^o} So_{2m+1}(h, \cos \vartheta) Ho_{2m+1}(h, \text{ch } \mu).$$

Пользуясь этим выражением, можно подсчитать обратное воздействие поля на полосу (а значит, акустический импеданс полосы) и количество энергии, излученной полосой. Чтобы найти импеданс, найдем прежде всего давление на поверхности полосы $\mu=0$. Так как

$$\begin{aligned} Ho_{2m+1}(h, 1) &= Jo_{2m+1}(h, 1) + iNo_{2m+1}(h, 1) = \\ &= 0 - \frac{i}{Jo'_{2m+1}(h, 1)} = \frac{i}{C_{2m+1}^o \sin(\delta_{2m+1}^o)} \end{aligned}$$

и давление p в любой точке равно произведению $-i\omega\rho$ на потенциал скоростей ψ , то мы имеем

$$p = \frac{1}{2} \pi a \omega \rho v_0 \sum_m \frac{B_1^o(h, 2m+1)}{M_{2m+1}^o} \frac{ie^{-i\delta_{2m+1}^o}}{(C_{2m+1}^o)^2 \sin(\delta_{2m+1}^o)} So_{2m+1}(h, \cos \vartheta).$$

Полная сила F , действующая на единицу длины полосы равна $\frac{1}{2} a \int p \sin \vartheta d\vartheta$ и направлена в сторону убывания y -ов:

$$F = \frac{1}{2} a \pi^2 h \rho c v_0 \sum_m \left[\frac{B_1^o(h, 2m+1)}{C_{2m+1}^o} \right]^2 \frac{1 + i \operatorname{ctg}(\delta_{2m+1}^o)}{M_{2m+1}^o}.$$

Отношение силы F к скорости полосы v_0 является акустическим импедансом излучения единицы длины полосы $Z = R - iX$, где

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} a \pi^2 h \rho c \sum_m \left[\frac{B_1^o(h, 2m+1)}{C_{2m+1}^o} \right]^2 \frac{1}{M_{2m+1}^o}, \\ X &= -\frac{1}{2} a \pi^2 h \rho c \sum_m \left[\frac{B_1^o(h, 2m+1)}{C_{2m+1}^o} \right]^2 \frac{\operatorname{ctg}(\delta_{2m+1}^o)}{M_{2m+1}^o}, \end{aligned} \quad (11.2.97)$$

причем R — активная, а X — реактивная составляющие импеданса излучения единицы длины полосы.

Для низких частот ($\omega \ll 2c/a$), или длинных волн ($\lambda \gg \pi a$) h мало по сравнению с единицей и можно вычислить приближенные значения составляющих импеданса, пользуясь формулами (11.2.85) и (11.2.86):

$$R \simeq \frac{\pi^2}{16} a \rho c h^3 = \frac{\pi^2 a^4 \omega^3}{128 c^3} \rho c, \quad X \simeq \frac{\pi a h}{2} \rho c = \frac{\pi a^2 \omega}{4} \rho.$$

Таким образом, активная составляющая импеданса излучения при низких частотах возрастает как третья степень частоты, в то время как реактивная составляющая возрастает с частотой линейно. Поэтому при очень низких частотах обратное воздействие поля излучения подобно реактивной нагрузке массой ($X = M\omega$), причем эффективная масса единицы длины полосы равна $\pi \rho a^2/4$.

При очень высоких частотах излучение представляет собой плоскую волну, распространяющуюся от обеих сторон полосы нормально к ее поверхности. Так как акустический импеданс для плоской волны, согласно сказанному на стр. 298 тома I, составляет ρc на единицу площади, то предельное значение R при очень высоких частотах ($\omega \gg 2c/a$) равно $2\rho c a$, а предельное значение X равно нулю. Для средних частот, т. е. для ω порядка величины $2c/a$, следует пользоваться таблицами и полными формулами (11.2.97).

Возвращаясь к уравнению для ψ , видим, что предельное значение ψ на больших расстояниях от полосы, где $\sinh \vartheta \simeq 2r/a$, $\vartheta \simeq \varphi$ (r и φ — полярные координаты с началом в центре полосы), имеет вид

$$\psi \simeq \frac{i \pi a v_0}{\sqrt{2 i k r}} e^{i k r} \sum_m \frac{B_1^o(h, 2m+1) e^{-i \delta_{2m+1}^o}}{(-1)^m M_{2m+1}^o C_{2m+1}^o} S_{02m+1}(h, \cos \varphi).$$

На таких расстояниях волна практически является плоской, так что ее интенсивность (см. стр. 352) $P = \frac{1}{2} \bar{p} u = \frac{1}{2} \rho c k^2 |\psi|^2$, и

$$S = \frac{\pi^2 \rho c k a^2 v_0^2}{4 r} \sum_{m, n} \frac{B_1^o(h, 2m+1) B_1^o(h, 2n+1)}{M_{2m+1}^o M_{2n+1}^o C_{2m+1}^o C_{2n+1}^o} \times$$

$$\times \cos[\delta_{2m+1}^o - \delta_{2n+1}^o + \pi(m-n)] S_{02m+1}(h, \cos \varphi) S_{02n+1}(h, \cos \varphi). \quad (11.2.98)$$

Полная энергия, излучаемая единицей длины полосы, равна этой интенсивности, умноженной на r и проинтегрированной по φ . Вследствие орто-

гональности функций S_0 получаем

$$P = \frac{1}{4} a \pi^2 h \rho c v_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{B_1^0(h, 2m+1)}{C_{2m+1}^0} \right]^2 \frac{1}{M_{2m+1}^0},$$

т. е., как и следовало ожидать, эта полная энергия равна произведению $\frac{1}{2} v_0^2$ на активную часть R импеданса излучения.

Излучение тока, текущего по полосе. Чтобы определить излучение тока, текущего по проводящей полосе, мы должны вернуться к электродинамическим уравнениям из § 2.5. Будем исходить из векторного потенциала A . Если отсутствуют свободные заряды, то скалярный потенциал можно положить равным нулю, приняв, что дивергенция векторного потенциала равна нулю. Тогда в случае чисто гармонических колебаний ($\epsilon = \mu = 1$) напряженность электрического поля равна $-\partial A / c \partial t = i\omega A / c$, а напряженность магнитного поля $H = \text{rot } A$. Уравнение для A имеет вид

$$\square^2 A = -\text{rot rot } A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} J,$$

где J — плотность тока.

Если падение напряжения, вызывающее ток в полосе, равномерно по всей длине полосы, то вектор A всюду направлен по оси z перпендикулярно к плоскости координат x, y или μ, ϑ и имеет вид $a_z \psi e^{-i\omega t}$, где ψ — скаляр. Для того чтобы $\text{div } A = 0$, ψ должно быть функцией от x, y или μ, ϑ , но не от z , и тем самым задача сводится к двумерной. Несмотря на то, что A и E направлены по оси z , зависимости ψ, A, E и H от пространственных координат включают только x и y , но не z , и можно рассматривать только скалярную функцию ψ . Эта амплитуда векторного потенциала удовлетворяет уравнению Гельмгольца, однородному вне полосы и неоднородному внутри нее.

Краевые условия для ψ вытекают из требования, чтобы падение потенциала было равномерным вдоль полосы и чтобы волна была расходящейся. Если падение потенциала на единицу длины полосы равно $E_0 e^{-i\omega t}$, то первое из этих условий состоит в том, что $\psi = -icE_0/\omega$ при $\mu = 0$; из второго условия следует, что ψ должно выражаться через радиальные функции He, Ho .

Из краевого условия, которому должна удовлетворять ψ при $\mu = 0$, следует симметрия ψ относительно $\vartheta = 0$, что сводит допустимые радиальные функции к типу He , а также симметрия ψ относительно $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = 3\pi/2$, что еще сокращает множество допустимых функций до типа He_{2m} . Следовательно, $J(\vartheta)$ симметрична относительно $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, а также $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = 3\pi/2$. Таким образом, ряд для ψ имеет вид.

$$\sum c_m S e_{2m}(h, \cos \vartheta) H e_{2m}(h, \text{ch } \mu).$$

Полученное решение позволяет вычислить ток вдоль полосы (а следовательно, и импеданс), а также и интенсивность излучения на больших расстояниях. Функции He_{2m} , фигурирующие в решении, указывают на наличие разрыва производной ψ при переходе сквозь полосу с одной ее стороны на другую. При этом скачок равен удвоенной производной ψ при $\mu = 0$, так что плотность тока в полосе ($\mu = 0$) в точке $(0, \vartheta)$ равна произведению $-1/2\pi$ на производную ψ при $\mu = 0$:

$$\frac{2}{a|\sin \vartheta|} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = -2\pi J(\vartheta).$$

Полный ток вдоль полосы в положительном направлении оси z при этом равен $(a/2) \int J(\vartheta) |\sin \vartheta| d\vartheta$.

Используя свойство ортогональности функций Se_{2m} , из краевого условия при $\mu=0$ вычисляем коэффициенты ряда, и для амплитуды векторного потенциала в точке (μ, ϑ) получаем выражение

$$\psi(\mu, \vartheta) = 2\pi \frac{cE_0}{\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_0^e(h, 2m)}{M_{2m}^e(h)} \frac{e^{-i\delta_{2m}^e}}{C_{2m}^e} Se_{2m}(h, \cos \vartheta) He_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu),$$

где

$$He_{2m}(h, 1) = -iC_{2m}^e e^{i\delta_{2m}^e} = Je_{2m}(h, 1) + iNe_{2m}(h, 1).$$

Плотность тока на поверхности полосы в точках $\mu=0$ [обе «стороны» считаются различными и токи на них должны суммироваться; точки $0 < \vartheta < \pi$ считаются отличными от точек $\pi < \vartheta < 2\pi$, а полная плотность тока в полосе в точке $x = (a/2) \cos \vartheta$ представляется суммой $J(\vartheta)$ и $J(2\pi - \vartheta)$] выражается таким образом:

$$J(\vartheta) = \frac{E_0}{h |\sin \vartheta|} \sum_m \frac{B_0^e(h, 2m)}{M_{2m}^e(h)} \frac{1 + i \operatorname{ctg}(\delta_{2m}^e)}{(C_{2m}^e)^2} Se_{2m}(h, \cos \vartheta).$$

Мы видим, что плотность тока не постоянна по поперечному сечению полосы и стремится к бесконечности при приближении к каждому из ее краев (как это происходит со скоростью потока через щель). Полный ток I , однако, не бесконечен. Адмитанс единицы длины полосы, т. е. отношение $I/E_0 = Y = G - iS$, в нашем случае выражается формулой

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{\pi a}{h} \sum_m \left[\frac{B_0^e(h, 2m)}{C_{2m}^e(h)} \right]^2 \frac{1}{M_{2m}^e}, \\ S(\omega) &= -\frac{\pi a}{h} \sum_m \left[\frac{B_0^e(h, 2m)}{C_{2m}^e} \right]^2 \frac{\operatorname{ctg}(\delta_{2m}^e)}{M_{2m}^e}. \end{aligned} \quad (11.2.99)$$

При очень низких частотах ($\lambda \gg \pi a$) предельная зависимость от ω и a дается формулами

$$G \simeq \frac{\pi c}{2\omega} \frac{1}{\ln^2(4/\gamma h)}, \quad S = -\frac{c/\omega}{\ln(4/\gamma h)} \quad (h \ll 1).$$

В этом приближении соответствующие сопротивление R и индуктивность излучения L , приходящиеся на единицу длины полосы, выражаются формулами

$$R \simeq \frac{\pi\omega}{2c}, \quad L \simeq \frac{1}{c} \ln \left(\frac{0,717\lambda}{a} \right),$$

до тех пор пока $\ln(0,717\lambda/a) \gg 1$ (в обычных обозначениях мы имеем $1/Y = Z = R - i\omega L$). Таким образом, сопротивление излучения при очень низких частотах не зависит от размера (или формы) полосы. Для проводника, поперечное сечение которого мало по сравнению с длиной волны, действительная часть импеданса не зависит от формы поперечного сечения проводника. Эффективная индуктивность при низких частотах зависит от ширины полосы a , но только логарифмически. Из-за этой логарифмической зависимости сходимость делается сравнительно медленной и приближенные формулы применимы в значительно более узкой области значений ω , чем это имеет место для акустического излучения.

Нетрудно вычислить интенсивность излучения полосы на больших расстояниях, определяя вектор Пойнтинга [см. (2.5.28)]. Полная энергия, излучаемая единицей длины полосы, конечно, равна $GE_\delta^2/2$.

Рассеяние волн на полосе. Рассеяние волн на полосе можно исследовать методами, аналогичными тем, которыми была получена формула (11.2.28) для рассеяния на цилиндре. Возможны два предельных случая: случай I, когда поле равно нулю при $\mu=0$, что соответствует электромагнитным волнам с электрическим вектором, направленным вдоль оси полосы, и случай II, когда нормальная составляющая градиента равна нулю при $\mu=0$, что соответствует акустическим волнам, а также электромагнитным волнам с магнитным вектором, направленным вдоль оси z . В обоих случаях мы исходим из разложения плоской волны (11.2.94) и, чтобы удовлетворить краевым условиям, добавляем достаточное количество расходящихся волн (с функциями He , Ho).

Для упрощения формул будут полезны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Je_m &= C_m^e \sin \delta_m^e, & Ne_m &= -C_m^e \cos \delta_m^e, & He_m &= -iC_m^e e^{i\delta_m^e} \\ Jo_m' &= -C_m^o \sin \delta_m^o, & No_m' &= C_m^o \cos \delta_m^o, & Ho_m' &= iC_m^o e^{i\delta_m^o}, \\ Je_m' &= -C_m^{e'} \sin \delta_m^{e'}, & Ne_m' &= C_m^{e'} \cos \delta_m^{e'}, & He_m' &= iC_m^{e'} e^{i\delta_m^{e'}}; \\ Jo_m &= C_m^{o''} \sin \delta_m^{o''}, & No_m &= -C_m^{o''} \cos \delta_m^{o''}, & Ho_m &= -iC_m^{o''} e^{i\delta_m^{o''}}. \end{aligned} \quad (11.2.100)$$

Здесь штрих у функций Je , Ne и т. д. означает производную по μ . Причина отсутствия штриха у C_m^o и δ_m^o и наличия двойного штриха у $C_m^{o''}$ и $\delta_m^{o''}$ скоро станет ясной. Параметр h опущен для упрощения записи. То же самое относится к аргументу μ , который может принимать любые положительные значения, хотя в большинстве случаев в наших формулах μ будет равно нулю. При $\mu=0$ две из четырех строк этих соотношений упрощаются:

$$\begin{aligned} \delta_m^{o''} &= 0, & C_m^{o''} &= -\frac{1}{C_m^o \sin \delta_m^o}, \\ \delta_m^{e'} &= 0, & C_m^{e'} &= \frac{1}{C_m^e \sin \delta_m^e} \quad (\mu=0), \end{aligned}$$

так что в случае $\mu=0$ мы можем обойтись только амплитудами и фазовыми множителями без штрихов. Эти упрощения заслуживают внимания, поскольку в дальнейшем величины C и δ будут рассматриваться только при $\mu=0$.

Для малых значений h имеем

$$\begin{aligned} C_0^e &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{8} h^2 \right) \left[\ln \left(\frac{4}{\gamma h} \right) + \frac{\pi^2}{8 \ln(4/\gamma h)} \right], \\ \delta_0^e &\simeq \frac{\pi/2}{\ln(4/\gamma h)} \left[1 - \frac{\pi^2/12}{\ln^2(4/\gamma h)} \right]; \\ C_1^e &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{h} + \frac{3}{16} h \right), & \delta_1^e &\simeq \frac{\pi h^2}{8}; \\ C_1^o &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{h} - \frac{3}{16} h \right), & \delta_1^o &\simeq -\frac{\pi h^2}{8} \left(1 + \frac{1}{16} h^2 \right); \\ C_2^o &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{16}{h^2} - \frac{2}{3} \right), & \delta_2^o &\simeq -\frac{\pi h^4}{256}; \quad \gamma = 1,7811 \dots \end{aligned} \quad (11.2.101)$$

Так как функции Jo_m обращаются в нуль при $\mu=0$, то в случае I ($\psi=0$ при $\mu=0$) в выражении (11.2.94) только члены Je требуют исправления. Ряд для рассеянной волны в этом случае получается точно так

же, как это было сделано при выводе выражения (11.2.28):

$$\psi_s^I = -i\sqrt{8\pi} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} e^{-i\delta_m^e} \sin(\delta_m^e) Se_m(h, \cos \vartheta) He_m(h, \operatorname{ch} \mu) \quad (11.2.102)$$

при единичной амплитуде падающей волны. С другой стороны, рассеянная волна для случая II содержит только функции So , Ho , поскольку функции Je'_m равны нулю при $\mu = 0$:

$$\psi_s^{II} = -i\sqrt{8\pi} \sum_{m=1}^{\infty} i^m \frac{So_m(h, \cos u)}{M_m^o(h)} e^{-i\delta_m^o} \sin(\delta_m^o) So_m(h, \cos \vartheta) Ho_m(h, \operatorname{ch} \mu). \quad (11.2.103)$$

Интенсивность рассеяния на единицу амплитуды падающей волны на больших расстояниях от полосы совпадает со значением $|\psi_s|^2$ для больших μ :

$$S^I \simeq \frac{8\pi}{kr} \sum_{m,n} \frac{\sin(\delta_m^e) \sin(\delta_n^e)}{M_m^e M_n^e} \cos(\delta_m^e - \delta_n^e) \times \\ \times Se_m(h, \cos u) Se_n(h, \cos u) Se_m(h, \cos \vartheta) Se_n(h, \cos \vartheta). \quad (11.2.104)$$

Аналогичное соотношение с M_m^o , δ_m^o , So_m имеет место в случае II. Полная энергия, рассеянная единицей длины полосы для падающей волны единичной амплитуды (т. е. эффективная ширина рассеяния полосы), в случае I равна

$$Q^I = \frac{4\pi a}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{M_m^e(h)} \sin^2 \delta_m^e [Se_m(h, \cos u)]^2, \quad (11.2.105)$$

где u — угол падения плоской волны. Ясно, как выглядит аналогичная формула для случая II.

Из этих формул следуют многие интересные (хотя и очевидные) факты. Прежде всего Q^{II} равно нулю, когда $u = 0$, в то время как Q^I при этом отлично от нуля. Если плоская волна распространяется параллельно поперечному сечению полосы (вдоль оси x), то полоса вовсе не искажает волну при краевом условии, требующем, чтобы нормальная составляющая градиента равнялась нулю, но волна искажается при условии, требующем равенства ψ нулю на полосе. Подобно этому, интенсивность рассеяния в случае II равна нулю при $\vartheta = 0, \pi$, независимо от угла падения, что не имеет места в случае I.

При очень низких частотах, т. е. для длин волн λ , очень больших по сравнению с πa , интенсивность рассеяния и эффективная ширина рассеяния имеют вид:

$$S^I \simeq \frac{\pi a/4r}{h \ln^2(4/\gamma h)} = \frac{\lambda}{4r \ln^2(0,717\lambda/a)}, \\ Q^I \simeq \frac{\pi^2 a}{2h \ln^2(4/\gamma h)} = \frac{\pi \lambda}{2 \ln^2(0,717\lambda/a)}, \quad (11.2.106) \\ S^{II} \simeq \frac{\pi a h^3}{16r} \sin^2 u \sin^2 \vartheta = \frac{\pi^4 a^4}{16r \lambda^3} \sin^2 u \sin^2 \vartheta, \\ Q^{II} \simeq \frac{\pi^2 a h^3}{16} \sin^2 u = \frac{\pi^5 a^4}{16 \lambda^3} \sin^2 u \quad (\lambda \gg \pi a \text{ или } h \ll 1).$$

Заметим, что если частота стремится к нулю ($\lambda \rightarrow \infty$), рассеяние в случае I ($\psi = 0$) возрастает, в то время как в случае II ($\partial\psi/\partial\mu = 0$) оно убывает. Такой же эффект наблюдался для рассеяния на круглом цилиндре.

Краевое условие $\phi = 0$ воздействует даже на очень длинные волны, в то время как длинные волны не реагируют на условие $\partial\phi/\partial\mu = 0$.

Диффракция на щели; принцип Бабине. Те же самые функции можно использовать для расчета диффракции плоской волны на щели в плоскости. Граница здесь состоит из двух полубесконечных плоскостей $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, края которых отстоят друг от друга на расстояние a (ширина щели). Рассматриваемая область разделяется на две части $0 < \vartheta < \pi$ и $\pi < \vartheta < 2\pi$, соединенные между собой щелью $\mu = 0$. В щели решение и его градиент должны быть непрерывны. В первой области $\pi < \vartheta < 2\pi$ существуют падающая волна, распространяющаяся под углом u к положительной оси x , волна, отраженная от плоской поверхности и распространяющаяся в направлении $-u$, и рассеянная волна, порожденная отсутствием границы в щели. Во второй области $0 < \vartheta < \pi$ имеется только диффрагированная волна, проникшая через щель. В каждой области полную систему собственных функций образуют *либо* функции Se_m , *либо* So_m (но не обе).

В случае краевого условия II (нормальная составляющая градиента равна нулю на поверхностях $\vartheta = 0, \pi$) в каждой области следует использовать только четные относительно $\vartheta = 0, \pi$ угловые функции, т. е. $Se_m(h, \cos \vartheta)$. Суперпозиция падающей и отраженной волн в области $\pi < \vartheta < 2\pi$, согласно (11.2.94), определяется формулой

$$e^{ikr \cos(\vartheta - u)} + e^{ikr \cos(\vartheta + u)} = 2 \sqrt{8\pi} \sum i^m \frac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} Se_m(h, \cos \vartheta) Je_m(h, \text{ch } \mu).$$

К этой комбинации нужно, конечно, прибавить расходящуюся волну чтобы обеспечить непрерывность на границе $\mu = 0$. В области $0 < \vartheta < \pi$ имеется только расходящаяся волна. Итак:

$$\phi = \begin{cases} \sqrt{8\pi} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} Se_m(h, \cos \vartheta) D_m He_m(h, \text{ch } \mu), & 0 < \vartheta < \pi; \\ \sqrt{8\pi} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{Se_m(h, \cos u)}{M_m^e(h)} Se_m(h, \cos \vartheta) \times \\ \times [2Je_m(h, \text{ch } \mu) + A_m He_m(h, \text{ch } \mu)], & \pi < \vartheta < 2\pi. \end{cases} \quad (11.2.107)$$

При этом коэффициенты D_m и A_m для каждого значения m должны быть подобраны так, чтобы при $\mu = 0$ выполнялись следующие условия:

[Значение в области $0 < \vartheta < \pi]_{\mu=0} = [\text{Значение в области } \pi < \vartheta < 2\pi]_{\mu=0}$,
[Производная по μ в области $0 < \vartheta < \pi]_{\mu=0} =$

$$= -[\text{Производная по } \mu \text{ в области } \pi < \vartheta < 2\pi]_{\mu=0}.$$

Поскольку производная Je_m при $\mu = 0$ равна нулю, мы должны иметь $D_m = -A_m$, и, окончательно, используя соотношения (11.2.100), получаем

$$-A_m = D_m = ie^{-i\vartheta_m^e} \sin \vartheta_m^e.$$

Таким образом, диффрагированная волна в области $0 < \vartheta < \pi$ для краевых условий II на поверхности $\vartheta = 0, \pi$ точно такая же, как волна $-\phi_s^I$ из (11.2.102), рассеянная полосой при краевых условиях I. Этот интересный результат следует сформулировать отдельно, чтобы оценить его значение: волна, рассеянная полосой ширины a при краевых условиях I, такая же (с точностью до знака), как и волна, проникшая через щель ширины a при краевых условиях II, причем угол падения и интен-

сивность падающей плоской волны в обоих случаях совпадают. Замена экранов щелями и наоборот при одновременной замене условий Дирихле условиями Неймана оставляет диффрагированную волну неизменной.

Иначе можно сказать, что для краевых условий II на поверхности $\vartheta = 0, \pi$ волна в области $0 < \vartheta < \pi$ равна волне ψ_s^I из (11.2.102), взятой с обратным знаком; для краевых условий I на поверхности $\mu = 0$ волна в этой области (позади полосы или щели) равна $e^{ihr \cos(\varphi - u)} + \psi_s^I$; сумма этих двух волн равна неискаженной плоской волне $e^{ihr \cos(\varphi - u)}$ в области $0 < \vartheta < \pi$. Утверждение, состоящее в том, что сумма волны, диффрагированной от некоторой границы, и волны, диффрагированной от «обращенной» (в указанном выше смысле) границы, есть как раз неискаженная плоская волна, называется *принципом Бабиня*. Он справедлив, как это будет показано в § 11.4, для значительно более широкого класса границ, нежели система полоса — щель, о которой здесь была речь.

Этот принцип верен, конечно, и для обратной системы: краевые условия II (производная равна нулю) на полосе $\mu = 0$ и краевые условия I (значение функции равно нулю) на полуплоскостях $\vartheta = 0, \pi$, ограничивающих щель. В области $0 < \vartheta < \pi$ волна для случая I равна $e^{ihr \cos(\varphi - u)} + \psi_s^{II}$ [см. (11.2.103)], а волна для случая II равна $-\psi_s^{II}$. Полная энергия, проникающая через щель, при единичной амплитуде падающей волны равна половине эффективной ширины Q для «обращенной» полосы [множитель $1/2$ получается потому, что в случае проникновения мы интегрируем только по одной половине плоскости ($0 < \vartheta < \pi$), а не по всей плоскости ($0 < \vartheta < 2\pi$), как это было при подсчете Q].

11.3. Волновое движение, три пространственные координаты

Трудности, с которыми связано изучение волн в случае двух пространственных координат, в трехмерном случае проявляются еще в большей степени. В трехмерном пространстве существуют плоские волны с волновым фронтом, параллельным плоскости, перпендикулярной направлению движения. Они имеют функциональную форму $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения и $\mathbf{k}$ — волновой вектор¹⁾, длина которого равна $k = \omega/c$ и направление совпадает с направлением распространения волны [см. рассуждения, относящиеся к формуле (2.2.4)].

Имеются также цилиндрические волны, волновой фронт которых представляет собой цилиндрическую поверхность, а направление распространения перпендикулярно оси цилиндра. Заметим, кроме того, что существуют волны более общего вида, у которых пространственные зависимости не связаны ни с прямыми линиями, ни с плоскостями.

Все эти волны могут быть построены суперпозицией плоских волн по способу, близкому к примененному в (11.2.1). Если мы выразим направление волнового вектора $\mathbf{k}$ через сферические углы u (угол между вектором $\mathbf{k}$ и осью z) и v (угол между плоскостью $\mathbf{k}$, z и плоскостью x, z), то общее выражение для волны в пространстве трех измерений будет иметь вид

$$\Psi = \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \sin u F(u, v | \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - kct) du. \quad (11.3.1)$$

¹⁾ К сожалению, в соответствии с традицией волновой вектор имеет тот же символ, что и единичный вектор оси z . В этой и следующих главах мы будем употреблять $\mathbf{k}$ для обозначения волнового вектора и $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ — для обозначения единичных векторов, когда это понадобится.

Эта волна при помощи интегрирования по трем прямоугольным составляющим вектора $\mathbf{k}$ может быть представлена в виде тройного интеграла Фурье

$$\Psi = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - kct)} d\zeta, \quad (11.3.2)$$

где ξ, η, ζ — компоненты вектора $\mathbf{k}$ по осям x, y, z .

Для простых гармонических волн $\Psi = \psi e^{-i\omega t}$, где ψ — решение трехмерного уравнения Гельмгольца и интегрирование должно быть выполнено по поверхности сферы в « k -пространстве», поскольку длина k фиксирована:

$$\psi_k(x, y, z) = \int_0^{2\pi} dv \int \sin u A(u, v) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} du, \quad (11.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} &= x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u = \\ &= r [\cos \vartheta \cos u + \sin \vartheta \sin u \cos(v - \varphi)], \end{aligned}$$

причем r, ϑ, φ — сферические координаты точки наблюдения. По u можно интегрировать от 0 до π или в комплексной плоскости u . Мы убедимся, что интегральные представления типа (11.3.3) для собственных функций в различных трехмерных координатах окажутся весьма полезными [см., например, (11.4.49)].

Функция Грина для свободного пространства. Наши рассуждения по поводу преобразования Фурье и функции Грина (см. стр. 762 тома I и стр. 340) также переносятся на случай трех измерений. Будем исходить из приведенного в (7.3.8) выражения для излучения единичного точечного импульса, сообщаемого системе при (x_0, y_0, z_0, t_0) ,

$$g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t - t_0) = \frac{1}{R} \delta\left(t - t_0 - \frac{R}{c}\right), \quad (11.3.4)$$

где $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. Излучение единичного чисто гармонического источника будет тогда преобразованием Лапласа предыдущего выражения:

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \omega) = \int_0^{\infty} g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t) e^{-pt} dt = \frac{1}{R} e^{-pR/c} = \frac{1}{R} e^{ikR},$$

$$p = -i\omega, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (11.3.5)$$

Полное преобразование Фурье функции g имеет вид

$$F(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{k}, \omega) = 4\pi \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 + i\omega t_0}}{k^2 - (\omega/c)^2}, \quad (11.3.6)$$

где ξ, η, ζ — компоненты $\mathbf{k}$. Тогда

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \omega) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t_0} d\xi d\eta d\zeta, \\ g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | t - t_0) &= \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} d\xi d\eta d\zeta d\omega. \end{aligned}$$

Эти равенства похожи на квантово-механические соотношения (2.6.24) между волновыми функциями в координатном и импульсном представлениях.

Решение неоднородного уравнения

$$\square^2 \psi = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -4\pi p(\mathbf{r}, t), & t > 0, \end{cases}$$

не подчиненное никаким краевым условиям, за исключением требования, чтобы волна по всем направлениям была расходящейся на бесконечности, может быть представлено в различных формах:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{r}_0, t_0) g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|t-t_0) dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 = \\ &= \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{r}_0|\omega) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) e^{-i\omega t} dx_0 dy_0 dz_0 d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{k}|\omega) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}}{k^2 - (\omega/c)^2} d\xi d\eta d\zeta d\omega, \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

где

$$P(\mathbf{r}_0|\omega) = \int_0^{\infty} e^{-p t_0} p(\mathbf{r}_0, t_0) dt_0 \quad (p = -i\omega)$$

и

$$Q(\mathbf{k}|\omega) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 dy_0 dz_0 \int_0^{\infty} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - p t_0} p(\mathbf{r}_0, t_0) dt_0,$$

а выражения для g и G те же, что и в (11.3.4) и (11.3.5). Эти решения пригодны, если не существует границ на конечном расстоянии от объема, в котором p отлична от нуля.

При наличии границ на конечном расстоянии функции g , G и F изменяются. Для простых типов границ эти измененные функции можно подсчитать так, как было указано в § 7.3. Мы вернемся к этому в дальнейшем, когда разовьем соответствующие методы.

Прямоугольный параллелепипед. Собственные функции в случае стоячих волн в прямоугольном параллелепипеде со сторонами l_x , l_y , l_z имеют вид либо

$$\psi_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} = \cos\left(\frac{\pi n_x x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n_y y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{\pi n_z z}{l_z}\right) e^{-i\omega_n t}, \quad (11.3.8)$$

либо

$$\psi_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} = \sin\left(\frac{\pi n_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi n_z z}{l_z}\right) e^{-i\omega_n t},$$

где n_x , n_y , n_z — целые числа. Предполагается, что начало координат находится в одном из углов параллелепипеда. Первая форма дает решение для однородных краевых условий Неймана, вторая — для однородных условий Дирихле. В обоих случаях собственные частоты определяются выражением

$$\omega_n = \pi c \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}, \quad (11.3.9)$$

причем во втором случае все n отличны от нуля.

Если краевые условия являются более сложными, то можно найти выражения собственных функций, собственные частоты и коэффициенты затухания методами, использованными для получения (11.2.20). Задачу

о неустановившихся колебаниях можно решить методами, использованными для получения (11.1.29).

В этих и других расчетах используется выражение поля, создаваемого внутри параллелепипеда чисто гармоническим единичным источником, помещенным в точке (x_0, y_0, z_0) . Знакомыми нам методами легко убедиться, что функция Грина для случая условий Неймана (нормальная составляющая градиента равна нулю) имеет вид

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) = \frac{4\pi c^2}{l_x l_y l_z} \sum_n \epsilon_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}_0)}{\omega_n^2 - \omega^2} \psi_n(\mathbf{r}) =$$

$$= -\frac{4\pi}{l_x l_y} \sum_{m,n} \epsilon_m \epsilon_n \frac{\cos(\pi m x_0 / l_x) \cos(\pi n y_0 / l_y)}{k_{mn} \sin(k_{mn} l_z)} \times \quad (11.3.10)$$

$$\times \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) \cdot \begin{cases} \cos(k_{mn} z_0) \cos[k_{mn}(l_z - z)], & z > z_0, \\ \cos(k_{mn} z) \cos[k_{mn}(l_z - z_0)], & z < z_0 \end{cases}$$

где n в первой форме заменяет тройку целых чисел n_x, n_y, n_z ; ψ_n — первая из функций, определенных в (11.3.8); $\epsilon_n = \epsilon_{n_x} \epsilon_{n_y} \epsilon_{n_z}$ и ω_n задается равенством (11.3.9). Во второй форме, аналогично (11.2.14), $k_{mn}^2 = (\omega/c)^2 - (\pi m/l_x)^2 - (\pi n/l_y)^2$, эта вторая форма может быть, конечно, видоизменена путем перестановки x, y и z . В функции Грина для условий Дирихле мы заменяем косинусы на синусы, отбрасываем значения нуль для каждого индекса в суммах, заменяем ϵ_n в первой форме на 8 и $\epsilon_m \epsilon_n$ во второй форме на 4.

Для случаев, в которых на одной или нескольких стенках задается краевое условие, более общее чем условия Дирихле или Неймана, можно перенести на три измерения формулы (11.2.12). В частности, если граничный импеданс имеет действительную составляющую (активное сопротивление), то собственные «частоты» ω представляют собой комплексные числа с мнимой частью $-ix$, которая вызывает экспоненциальное затухание волн с течением времени.

Искажение стоячей волны полосой. Функция Грина может быть также применена для вычисления воздействия на стоячие волны и на резонансные частоты малых изменений границы области. Не очень сложный пример

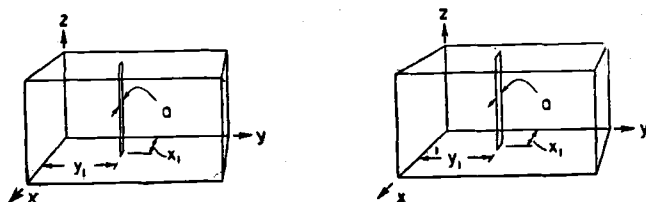


Рис. 11.3. Искажение стоячих волн полосой ширины a .

такого рода представляет собой случай, когда полоса ширины a помещена между полом и потолком параллелепипеда (рис. 11.3). Мы предполагаем, что центральная линия полосы совпадает с прямой $x = x_1, y = y_1$ и что поверхность полосы параллельна плоскости x, z . Если полоса достаточно мала и достаточно удалена от стен, то можно полагать, что она находится в бесконечной области, и применить функции, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Стоячая волна внутри параллелепипеда без наличия полосы имеет вид $\psi_0 = \cos(\pi x/l_x) \cos(\pi y/l_y) \cos(\pi z/l_z)$ ($\nu, \sigma, \tau = 0, 1, 2, 3, \dots$). Это выражение может рассматриваться как надлежащим образом составленная комбинация восьми плоских волн. У одной из них волновой вектор $\mathbf{k}$

имеет компоненты $+(\pi\nu/l_x)$, $+(\pi\sigma/l_y)$, $+(\pi\tau/l_z)$, у другой—компоненты $+(\pi\nu/l_x)$, $+(\pi\sigma/l_y)$, $-(\pi\tau/l_z)$ и т. д. для всех восьми возможных комбинаций знаков плюс или минус у компонент; для всех восьми волн вектор $\mathbf{k}$ имеет одну и ту же длину

$$k_0 = \pi \sqrt{\left(\frac{\nu}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{l_z}\right)^2}. \quad (11.3.11)$$

С этой точки зрения стоячая волна является комбинацией всех плоских волн, отраженных от каждой из шести стен. Все эти волны ударяются о полосу и рассеиваются на ней.

Возвращаясь к стр. 401, где обсуждалось рассеяние плоских волн на полосе, мы видим, что z -компоненту решения $\cos(\pi\tau z/l_z)$ можно рассматривать как модулирующий множитель у решения двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \pi^2 \left[\left(\frac{\nu}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{l_y}\right)^2 \right] \psi = 0,$$

что соответствует рассеянию плоских волн на полосе, середина которой находится в x_1, y_1 . Перенесем начало координат в точку x_1, y_1 ($x = x_1 + \xi$, $y = y_1 + \eta$) и перейдем к эллиптическим координатам $\xi = (1/2)a \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta$, $\eta = (1/2)a \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta$. Мы интересуемся вызванным полосой искажением комбинаций плоских волн

$$\begin{aligned} \psi = \cos(\pi\tau z/l_z) [& e^{(i\pi\nu/l_x)x_1 + (i\pi\sigma/l_y)y_1} e^{(2ih/a)\rho} \cos(u - \varphi) + \\ & + e^{(i\pi\nu/l_x)x_1 - (i\pi\sigma/l_y)y_1} e^{(2ih/a)\rho} \cos(-u - \varphi) + e^{-(i\pi\nu/l_x)x_1 - (i\pi\sigma/l_y)y_1} e^{(2ih/a)\rho} \cos(\pi + u - \varphi) + \\ & + e^{-(i\pi\nu/l_x)x_1 + (i\pi\sigma/l_y)y_1} e^{(2ih/a)\rho} \cos(\pi - u - \varphi)], \quad (11.3.12) \end{aligned}$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\operatorname{tg} \varphi = \eta/\xi$, $\operatorname{tg} u = \sigma l_x / \nu l_y$ и $h^2 = (\pi a/2)^2 [(\nu/l_x)^2 + (\sigma/l_y)^2]$.

С помощью формулы (11.2.102) и следующих мы можем вычислить воздействие, которое полоса произвела бы на эти четыре плоские волны, если бы они распространялись в открытом пространстве без стен. Наличие стен существенно изменяет эти результаты на некотором расстоянии от полосы, но если только полоса не находится вплотную у одной из стен, они будут мало влиять на значения решения у поверхности полосы. Следовательно, мы достаточно точно знаем поведение измененной стоячей волны вблизи полосы. Чтобы найти ее поведение в остальной части параллелепипеда, можно применить метод функции Грина.

Из (7.2.7) имеем выражение

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint [\psi(\mathbf{r}_0^s) \operatorname{grad}_0 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s | \omega)] dA_0$$

для решения ψ , нормальная составляющая градиента которого на всех граничных поверхностях обращается в нуль. Если мы применим функцию G из (11.3.10), то интеграл по границе области исчезнет, так как на этой границе нормальная составляющая градиента G обращается в нуль; поэтому остается только интеграл по поверхности полосы. Обозначая величину ψ на стороне полосы, обращенной к плоскости x, z , через $\psi_-(\xi)$ и на обратной стороне через $\psi_+(\xi)$, приведем формулу (7.2.7) в конце концов к виду

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{l_z} dz_0 \int_{-a/2}^{a/2} [\psi_+(\xi) - \psi_-(\xi)] \left[\frac{\partial}{\partial \eta} G(\mathbf{r} | x_1 + \xi, y_1 + \eta | \omega) \right]_{\eta=0} d\xi. \quad (11.3.13)$$

Поэтому, если мы получим хорошее приближение для значений ψ на поверхности полосы, то сможем получить хорошее приближение для ψ и в любом месте внутри области. Как было отмечено выше, значения ψ на поверхности полосы не слишком чувствительны к присутствию или

отсутствию границы области, до тех пор пока полоса узка и расположена не вплотную у стены. Таким образом, мы можем в качестве функции $\psi(\mathbf{r}_0^s)$ взять ее величину для свободного пространства и использовать равенство (11.3.13) для учета влияния стен.

Из (11.2.103) мы видим, что для волны, распространяющейся под углом u к оси x , суперпозиция плоской и рассеянной волн на поверхности полосы равна

$$\psi(\xi, u) = \sqrt{8\pi} \sum_m i^m \left\{ \frac{Se_m(h, \cos u) Se_m(h, \cos \vartheta)}{M_m^e} Je_m(h, 1) + \right. \\ \left. + \frac{So_m(h, \cos u) So_m(h, \cos \vartheta)}{M_m^o} [Jo_m(h, 1) - ie^{-i\vartheta_m^2} \sin \vartheta_m^2 Ho_m(h, 1)] \right\}.$$

Но ряды по четным функциям представляют в точности часть плоской волны, четную относительно $\vartheta = 0, \pi$. Из (11.2.94) следует, что

$$\sqrt{8\pi} \sum_m i^m \frac{Se_m(h, \cos u) Se_m(h, \cos \vartheta)}{M_m^e} Je_m(h, \text{ch } \mu) = e^{(2ih/a)\xi} \cos u \cos \left[\frac{2h}{a} \eta \sin u \right].$$

Член в квадратных скобках в первой сумме пропорционален вронскиану $\Delta(Jo_m, Ho_m) = i$. Поэтому из приближенного выражения (11.2.101) мы, наконец, получаем с точностью до членов второго порядка по h

$$\psi(\xi, u) \simeq e^{ih \cos \vartheta \cos u} + ih \sin u \sin \vartheta - \frac{1}{8} h^2 \sin(2u) \sin(2\vartheta),$$

где

$$\xi = (1/2) a \cos \vartheta \text{ и } h^2 = (\pi a/2)^2 [(\nu/l_x)^2 + (\sigma/l_y)^2].$$

Обращаясь к равенству (11.3.12), мы видим, что значения ψ на поверхности полосы, полученные при суперпозиции волн, распространяющихся в четырех направлениях $u, -u, \pi - u$ и $\pi + u$, выражаются формулой

$$\psi \simeq \cos \left[\frac{\pi \nu (x_1 + \xi)}{l_x} \right] \cos \left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y} \right) \cos \left(\frac{\pi \tau z_0}{l_z} \right) - \\ - \frac{\pi \sigma a}{2l_y} \cos \left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x} \right) \sin \left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y} \right) \cos \left(\frac{\pi \tau z_0}{l_z} \right) \sin \vartheta + \dots$$

Члены порядка h^2 здесь не выписаны, так как они не нужны для дальнейшего. Величина $\psi_+(\xi)$ является значением ψ при $0 < \vartheta < \pi$, когда $\sin \vartheta = \sqrt{1 - (2\xi/a)^2}$, а $\psi_-(\xi)$ — значением при $\pi < \vartheta < 2\pi$, когда $\sin \vartheta = -\sqrt{1 - (2\xi/a)^2}$.

Поэтому

$$\psi_+(\xi) - \psi_-(\xi) \simeq -\frac{\pi \sigma a}{l_y} \cos \left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x} \right) \sin \left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y} \right) \cos \left(\frac{\pi \tau z_0}{l_z} \right) \sqrt{1 - (2\xi/a)^2} \quad (11.3.14)$$

с точностью до членов второго порядка по малому параметру h (h мало, когда a мало по сравнению с длиной волны).

Чтобы вычислить интеграл (11.3.13), нам необходимо иметь выражение для градиента G . Используя вторую форму в (11.3.10) и меняя в ней ролями y и z , мы имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} G \right]_{\eta=0} = \frac{4\pi}{l_x l_z} \sum_{m,n} \varepsilon_m \varepsilon_n \frac{\cos(\pi m x_0/l_x) \cos(\pi n z_0/l_z)}{\sin(k_{mn} l_y)} \times \\ \times \cos \left(\frac{\pi m x}{l_x} \right) \cos \left(\frac{\pi n z}{l_z} \right) \cdot \begin{cases} \sin(k_{mn} y_1) \cos[k_{mn}(l_y - y)], & y > y_1, \\ -\cos(k_{mn} y) \sin[k_{mn}(l_y - y_1)], & y < y_1. \end{cases}$$

где $x_0 = x_1 + \xi$ и $k_{mn} = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi m/l_x)^2 - (\pi n/l_z)^2}$. Вследствие ортогональности множителей $\cos(\pi \tau z_0/l_z)$ из ψ и $\cos(\pi n z_0/l_z)$ из G интегрирование выражения (11.3.13) по z_0 обращает в нуль все члены суммы по n , кроме тех, у которых $n = \tau$. В интеграле по ξ множитель $\cos(\pi m x_0/l_x)$ может быть заменен на $\cos(\pi m x_1/l_x)$, поскольку ширина полосы мала по сравнению с длиной волны. Следовательно,

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\left[\frac{\pi m}{l_x}(x_1 + \xi)\right] \sqrt{1 - \left(\frac{2\xi}{a}\right)^2} d\xi \simeq \frac{1}{4} \pi a \cos\left(\frac{\pi m x_1}{l_x}\right).$$

Поэтому приближенное решение уравнения Гельмгольца, имеющее равную нулю нормальную составляющую градиента как на границе области, так и на полосе, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) \simeq \frac{\pi^2 a^2}{4 l_x l_y} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\cos(\pi m x_1/l_x) \cos(\pi \nu x_1/l_x)}{\sin(k_{m\tau} l_y)} \sin\left(\frac{\pi \nu y_1}{l_y}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi \tau z}{l_z}\right) \cdot \begin{cases} -\sin(k_{m\tau} y_1) \cos[k_{m\tau}(l_y - y)], & y > y_1, \\ \cos(k_{m\tau} y) \sin[k_{m\tau}(l_y - y_1)], & y < y_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3.15)$$

где $k_{m\tau} = \sqrt{k^2 - (\pi m/l_x)^2 - (\pi \tau/l_z)^2}$ и $k = \omega/c$, причем ω — собственная частота для искаженной собственной функции.

Вычисление собственных значений. Решение задачи еще не закончено, поскольку собственное значение k еще не вычислено и в выражение, написанное нами для $\psi(\mathbf{r})$, нужно подставить это, пока неизвестное, значение величины k . Для определения k воспользуемся вновь теоремой Грина. Умножаем уравнение для $\psi_0 = \cos(\pi x/l_x) \cos(\pi \nu y/l_y) \cos(\pi \tau z/l_z)$ на приближенное выражение (11.3.15), аппроксимирующее решение ψ , и вычитаем уравнение для ψ , умноженное на ψ_0 ; в результате получим

$$\psi \nabla^2 \psi_0 - \psi_0 \nabla^2 \psi = (k^2 - k_0^2) \psi \psi_0,$$

где k_0 определяется равенством (11.3.11), а k должно быть определено.

Интегрируя обе части этого равенства по всему объему внутри параллелепипеда и вне полосы, заменим интеграл слева интегралом по поверхности с помощью (7.2.2). Этот интеграл по поверхности обращается в нуль, за исключением интеграла от $\psi \text{grad} \psi_0$ по поверхности полосы. В конечном счете в обозначениях (11.3.13) имеем

$$k^2 = k_0^2 - \int_0^{l_z} dz \int_{-a/2}^{a/2} [\psi_+(\xi) - \psi_-(\xi)] \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right]_{y=y_1} \left[\int \int \int \psi \psi_0 dv \right]^{-1} d\xi.$$

Но мы можем получить приближенное значение разности $\psi_+ - \psi_-$ из (11.3.14), а $\partial \psi_0 / \partial y$ вычислить легко. Мы предполагаем, что ψ в большей части области приближенно равно ψ_0 , и поэтому объемный интеграл приближенно равен $l_x l_y l_z / \varepsilon_{\nu \varepsilon_{\sigma} \varepsilon_{\tau}}$.

Итак, с точностью до членов второго порядка по a/l_y ,

$$\begin{aligned} k^2 \simeq \left(\frac{\pi \nu}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi \tau}{l_z}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\pi \sigma}{l_y}\right)^2 \left[1 - \frac{\pi \varepsilon_{\nu \varepsilon_{\sigma}}}{4} \frac{a^2}{l_x l_y} \cos^2\left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \nu y_1}{l_y}\right) \right]. \end{aligned} \quad (11.3.16)$$

Собственная частота, конечно, равна $ck/2\pi$.

Мы замечаем прежде всего, что собственные частоты уменьшаются (если они вообще изменяются). Это представляется естественным, так как наличие полосы замедляет движение воздуха в помещении и тем самым снижает все резонансные частоты. Далее, мы видим, что это уменьшение частоты пропорционально квадрату y -компоненты скорости воздуха в невозмущенной волне в точках, где расположена полоса. Если, например, полоса установлена там, где скорость параллельна плоскости x, z [т. е. где $\sin(\pi\sigma y/l_y) = 0$], то k^2 не будет отличаться от k_0^2 . Это явление также легко объяснить, так как «замедление» колебаний вызывается обтеканием полосы, и величина уменьшения зависит от того, какая часть потока перпендикулярна поверхности полосы. Поток, параллельный поверхности, не искажается ею. Возможно, точнее будет сказать, что искажение течения вблизи полосы увеличивает эффективную массу воздуха по сравнению с его упругостью, так что резонансные частоты убывают до тех пор, пока a/l_y мало.

Вернемся теперь к равенству (11.3.15) и подставим в него величину k , чтобы получить приближенное выражение для ψ . В силу того, что разность $k_0 - k$ мала, ее можно учитывать в выражениях для $k_{m\tau}$ только при $m = \nu$. Поэтому мы можем принять, что $k_{m\tau} = k_m \simeq \sqrt{(\pi/l_x)^2 (\nu^2 - m^2) + (\pi\sigma/l_y)^2}$, $m \neq \nu$. С другой стороны,

$$k_{\nu\tau} = k_\nu \simeq \frac{\pi\sigma}{l_y} - \frac{\epsilon_\nu}{4} \frac{\pi^2 \sigma a^2}{l_x l_y^2} \cos^2\left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y}\right).$$

Следовательно, $\sin(k_\nu l_y)$ оказывается весьма малым, значительно меньшим, чем $\sin(k_m l_y)$ для $m \neq \nu$. Единственное большое слагаемое для $m = \nu$ можно выделить из суммы, и, поскольку

$$\sin(k_\nu l_y) \simeq -(-1)^\nu \frac{\pi^2 \sigma a^2}{l_x l_y^2} \frac{\epsilon_\nu}{4} \cos^2\left(\frac{\pi \nu x_1}{l_x}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \sigma y_1}{l_y}\right),$$

мы получаем в конечном счете

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) \simeq & \psi_0 + \frac{\pi^2 \sigma a^2}{4 l_x l_y^2} \sum_{m \neq \nu} \epsilon_m \frac{\cos(\pi m x_1/l_x) \cos(\pi \nu x_1/l_x) \sin(\pi \sigma y_1/l_y)}{\sin(k_m l_y)} \times \\ & \times \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi \tau z}{l_z}\right) \cdot \begin{cases} -\sin(k_m y_1) \cos[k_m(l_y - y_1)], & y > y_1, \\ \cos(k_m y) \sin[k_m(l_y - y)], & y < y_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3.17)$$

В дополнение к невозмущенной части ψ_0 в этой формуле имеется небольшой член, представляющий рассеяние на полосе и выражающийся через другие стоячие волны для различных m . Можно сказать, что из-за наличия полосы происходит преобразование одних стоячих волн в другие. До тех пор пока ось полосы параллельна оси z , ни одна волна с заданной величиной τ (квантовое число по z) не преобразуется в волны с другими значениями τ , но волны с различными квантовыми числами по x и y по большей части преобразуются из-за наличия полосы.

Распространение колебаний в трубах. Целый ряд трехмерных задач, тесно связанных с некоторыми рассмотренными в предыдущем параграфе двумерными задачами, возникает при рассмотрении передачи колебаний по трубам. Предположим, что труба является цилиндром, поперечное сечение которого имеет такую форму, что волновое уравнение допускает разделение переменных в соответствующих координатах ξ_1 и ξ_2 . Тогда волновая функция может быть представлена в виде произведения функции φ от ξ_1 и ξ_2 и функции F от расстояния z вдоль оси цилиндра:

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi(\xi_1, \xi_2) F(z), \quad \nabla^2 \varphi + k_i^2 \varphi = 0, \\ \frac{d^2 F}{dz^2} + k_z^2 F &= 0, \quad k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_i^2 + k_z^2. \end{aligned}$$

Краевые условия для φ на границе (например, $\xi_1 = K$) определяют допустимые значения поперечного волнового числа k_t . Величина k фиксирована, коль скоро задана частота ω передаваемого колебания. Следовательно, продольное волновое число k_z фиксируется заданием ω и выбором определяющей значение k_t формы поперечной стоячей волны, исходя из заданных краевых условий. Решением для F может быть бегущая волна $e^{ik_z z - i\omega t}$ или комбинация из волн противоположных направлений. Если это простая бегущая волна, то ее фазовая скорость ω/k_z *никогда не меньше, чем скорость c волны в свободном пространстве*. В самом деле, k_z никогда не больше, чем $k = \omega/c$, и будет много меньше k , если k_t велико. Для высших типов поперечных колебаний k_t может быть больше, чем k . В этом случае k_z оказывается мнимым, и действительное волновое движение отсутствует; волна, так сказать, настолько «занята» колебаниями взад и вперед поперек трубы, что она «забывает» продвигаться вдоль нее.

Если нормальная составляющая градиента обращается в нуль на внутренней поверхности цилиндрической трубы, то поперечная собственная функция φ наимизшего типа постоянна и для нее $k_t = 0$. В этом случае $k_z = k = \omega/c$, фазовая скорость равна скорости c в свободном пространстве и дисперсии не происходит. Для всех более высоких типов поперечных собственных функций $k_z < k$, фазовая скорость больше c и, следовательно, имеется дисперсия. Если ψ равно нулю на поверхности, то даже для наимизшего типа поперечной собственной функции k_t больше нуля и все k_z меньше k . В этом случае существует такая определенная частота, пропорциональная наимизшему значению k_t и называемая *критической частотой*, что волны с меньшей частотой не могут распространяться вдоль трубы.

Распространение волн вдоль цилиндрических труб — явление весьма простое, покуда не учитываются эффекты от воздействия одного или другого конца трубы и поперечное сечение остается постоянным вдоль всей трубы. Но как раз в этих-то случаях практически важно изучить распространение волн в трубах, поэтому целесообразно рассмотреть несколько типичных примеров. Сначала мы будем рассматривать бесконечно длинную трубу и изучать исключительно возбуждение волны на входе. Если в этом случае возникает волновое движение вдоль трубы, то оно направлено от входа.

Акустические волны в прямоугольной трубе. Если известна продольная скорость воздуха у входа в трубу, то можно рассчитать акустические волны в трубе. Краевые условия сводятся к требованию, чтобы скорость воздуха на жестких стенках трубы была касательной к поверхности трубы. Так, для прямоугольной трубы в случае чисто гармонических колебаний общее выражение для потенциала скоростей волны, распространяющейся от входа ($z = 0$), имеет вид

$$\psi = \sum_{m,n} A_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) e^{i\omega[(\tau/c)z - t]}, \quad (11.3.18)$$

где

$$\tau = \tau_{mn} = \sqrt{1 - (\pi m c / \omega l_x)^2 - (\pi n c / \omega l_y)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

для трубы прямоугольного сечения со сторонами l_x и l_y . Для заданного значения ω величина τ при достаточно больших m и n будет мнимой. Будем считать, что мнимая часть τ положительна, так что в этом случае

$$\tau = i \frac{\chi_{mn}}{\omega}, \quad \chi_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l_y}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}, \quad (11.3.19)$$

где κ — постоянная затухания для волны высшего типа. В этом случае множитель, зависящий от z , приобретает вид $e^{-\kappa z}$, и это показывает, что вдоль трубы вместо волнового движения наблюдается затухающее.

Если задано давление у входа в трубу $p_0(x, y)e^{-i\omega t} = -i\omega\phi|_{z=0}$, то коэффициенты ряда имеют вид

$$A_{mn} = i \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\rho l_x l_y \omega} F_{mn}, \quad F_{mn} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} p_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) dx dy,$$

где F_{mn} — mn -я компонента силы, обуславливающей движение волны вдоль трубы. Однако обычно у конца $z=0$ задается продольная скорость воздуха, по которой затем определяется давление. Если эта скорость $(v_z)_{z=0} = (\partial\phi/\partial z)_{z=0} = v_0(x, y)e^{-i\omega t}$, то

$$A_{mn} = -\frac{ic\varepsilon_m \varepsilon_n}{l_x l_y} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} I_{mn},$$

$$I_{mn} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} v_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) dx dy,$$

где $\omega_{mn} = \pi c \sqrt{(m/l_x)^2 + (n/l_y)^2}$ называется критической частотой mn -й волны, по причине, которая вскоре выяснится.

Отношение F_{mn}/I_{mn} может быть названо импедансом mn -й волны

$$Z_{mn} = \rho c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} = \frac{\rho c}{\tau_{mn}}. \quad (11.3.20)$$

Если частота возбуждения ω больше критической частоты mn -й волны, то Z_{mn} и τ_{mn} действительны и волна распространяется вдоль трубы со скоростью c/τ_{mn} . Если ω уменьшается, то скорость возрастает, пока при $\omega = \omega_{mn}$ она не становится бесконечной, τ_{mn} обращается в нуль и Z_{mn} становится бесконечным. При частотах ниже этой критической mn -я волна не распространяется, а затухает и импеданс становится мнимым

$$Z_{mn} = -i \frac{\rho \omega}{\tau_{mn}} = -i \omega \frac{\rho c}{\sqrt{\omega_{mn}^2 - \omega^2}},$$

соответствуя эффективной массе $M_{mn} = \rho c / \sqrt{\omega_{mn}^2 - \omega^2}$ на единицу площади поперечного сечения трубы. Следовательно, при данной частоте возбуждения ω только волны, у которых критические частоты ω_{mn} меньше ω , в действительности распространяются по трубе и приносят некоторую действительную часть во входной импеданс; все более высокие типы волн приносят только реактивную часть и не распространяются далеко от источника, т. е. от $z=0$.

Если колебания возбуждаются импульсом, приложенным при $z=0$ в момент времени $t=0$, то результирующее движение может быть найдено с помощью преобразования Лапласа. Предположим, что начальная скорость имеет характер импульса $(v_z)_{z=0} = v_0(x, y)\delta(t)$. Тогда в соответствии с (11.1.16) волна (11.3.18) является преобразованием Лапласа импульсной волны. Таблица в конце этой главы показывает, что преобразованием Лапласа от $u(t-b)J_0(a\sqrt{t^2-b^2})$ является $[\exp(-b\sqrt{p^2+a^2})]/\sqrt{p^2+a^2}$. mn -й член ряда (11.3.18) имеет вид

$$-\frac{c\varepsilon_m \varepsilon_n}{l_x l_y} I_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l_y}\right) \frac{\exp[-(z/c)\sqrt{p^2 + \omega_{mn}^2}]}{\sqrt{p^2 + \omega_{mn}^2}}, \quad \omega = ip,$$

что соответствует выражению, помещенному в таблице. Поэтому рассматриваемая волна имеет потенциал скоростей

$$\psi = -u \left(t - \frac{z}{c} \right) \frac{c}{l_x l_y} \sum_{m, n} \varepsilon_m \varepsilon_n \cos \left(\frac{\pi m x}{l_x} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{\pi n y}{l_y} \right) J_0 \left[\omega_{mn} \sqrt{t^2 - \left(\frac{z}{c} \right)^2} \right]. \quad (11.3.21)$$

Для наинизшей парциальной волны $\omega_{00} = 0$ и множитель, зависящий от времени, равен просто $J_0(0) = 1$; эта волна представляет собой импульс, продвигающийся вдоль трубы (давление равно $-\rho \partial \psi / \partial t$, благодаря чему вместо ступенчатой функции u мы имеем дельта-функцию, т. е. настоящий импульс). Чем выше тип парциальной волны, тем больше ω_{mn} и тем быстрее осциллирует функция Бесселя. Фазовая скорость волны наинизшего типа равна c ; для этой волны дисперсии нет, она возникает от мгновенного импульса и продвигается в виде скачка давления вдоль трубы. Для волн высших типов имеет место дисперсия, ибо их фазовая скорость c/τ_{mn} зависит от частоты, так что скачок размывается по мере продвижения по трубе, оставляя за собой осциллирующий след (см. рис. 2.7).

Соответствующие исследования распространения электромагнитных волн в трубах (волноводах) будут проведены в гл. 13.

Препграда со щелью в прямоугольной трубе. Препятствия в трубе вызывают частичные отражения проходящей по ней волны. Если препятствие настолько мало, что вызывает только незначительное изменение невозмущенного течения (как, например, узкая полоса, помещенная поперек

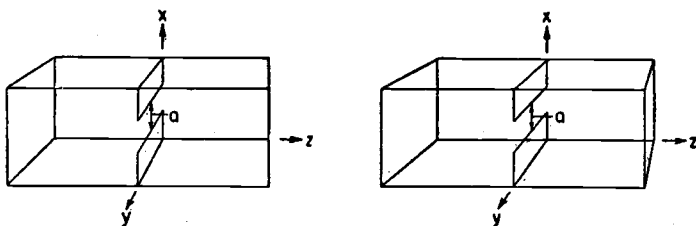


Рис. 11.4. Отражение и распространение волн в трубе при наличии плоской преграды со щелью.

трубы), то для получения приближенных формул можно пользоваться методами, использующими формулу (11.3.13). Однако при значительных относительных размерах препятствия приходится обращаться к другим методам. Примером может служить прямоугольная труба со сторонами поперечного сечения l_x и l_y , в которой при $z = 0$ помещена жесткая поперечная диафрагма со щелью ширины a , проделанной посередине диафрагмы, параллельно оси y [другими словами, щель находится между $x = (l_x - a)/2$ и $x = (l_x + a)/2$ при $z = 0$ и $0 \leq y \leq l_y$ (см. рис. 11.4)]. Волна, идущая слева ($z < 0$), ударяясь о преграду, частично отражается влево, а частично проходит через щель и распространяется далее вправо.

Здесь, как мы уже видели в нескольких местах ранее, до тех пор пока длина волны значительно больше, чем ширина щели, можно считать, что движение воздуха в щели и вблизи нее происходит в одной и той же фазе. Все, что нам требуется знать, это общее выражение потенциала скоростей, соответствующего установившемуся течению через щель, и его градиента внутри щели. Сопрягая эти выражения с волновыми решениями на каждой стороне преграды, находим поток через щель.

Нет особой нужды производить эти вычисления для волны самого общего вида, распространяющейся вдоль трубы. Приближенное решение, которое мы собираемся получить, лучше всего подходит для длинных волн и процесс отражения описывается достаточно просто только при низких частотах. В самом деле, пока частота достаточно низка, только волна типа $m = n = 0$ может распространяться вдоль трубы и отраженная волна вдали от преграды будет того же типа, что и падающая волна. Воздействие преграды в этом случае можно выразить, указав амплитуду и фазу отраженной волны для падающей волны единичной амплитуды и стандартной фазы. При частотах, более высоких, чем следующая самая низкая критическая частота ω_{10} или ω_{01} , отражаются по крайней мере два типа волн и для описания отражения потребуется более двух величин.

В случае падающей на преграду плоской волны мы можем принять потенциал скоростей равным

$$\psi(x, z) = \begin{cases} e^{ikhz} + (1 - A_0) e^{-ikhz} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) e^{\kappa_m z}, & z < 0, \\ A_0 e^{ikhz} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) e^{-\kappa_m z}, & z > 0, \end{cases} \quad (11.3.22)$$

где $k = \omega/c$, $\kappa_m = \sqrt{(\pi m/l_x)^2 - k^2}$ ($k < \pi/l_x$), и где коэффициенты рядов выбраны так, чтобы обеспечить непрерывность составляющей градиента $\partial\psi/\partial z$ при $z=0$. Задача будет решена, если мы определим коэффициенты A так, чтобы потенциал ψ , выражаемый обоими рядами, был непрерывен в щели, ибо производная его там уже непрерывна. Вообще говоря, эта задача сводится к решению бесконечной системы линейных уравнений, однако мы попытаемся использовать решение задачи об установившемся потоке в качестве отправного пункта для получения последовательных приближений.

Обращаясь к формуле (10.1.24) и следующим, мы видим, что для установившегося потока потенциал скоростей в щели постоянен, а z -компонента градиента ψ в щели равна постоянной, разделенной на $\sin \vartheta$, где $x = (l_x - a \cos \vartheta)/2$. Следовательно, при $k \ll 2\pi/a$ имеем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=0} \simeq \begin{cases} 0, & 0 \leq x < (l_x - a)/2, \\ \frac{2Q}{\pi a l_y} \operatorname{cosec} \vartheta, & (l_x - a)/2 < x < (l_x + a)/2, \\ 0, & (l_x + a)/2 < x \leq l_x, \end{cases}$$

где Q — полный поток через щель. Но, согласно (11.3.22), разложение в ряд этой составляющей градиента должно иметь вид $ikA_0 + \sum \kappa_m A_m \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right)$, так что коэффициенты A должны иметь вид

$$A_0 \simeq \frac{2Q}{i\pi k a l_x l_y} \int \operatorname{cosec} \vartheta dx = -i \frac{Q}{k l_x l_y},$$

$$A_m \simeq \frac{4Q}{\pi \kappa_m l_x l_y} \int \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \operatorname{cosec} \vartheta dx = \frac{2Q}{\kappa_m l_x l_y} \cos\left(\frac{1}{2} \pi m\right) J_0\left(\frac{\pi m a}{2 l_x}\right),$$

где для получения последнего выражения мы применили (5.3.65). Как и ранее, мы уменьшили число неизвестных до одной неизвестной Q .

Для того чтобы определить Q , необходимо вычислить потенциал ψ в середине щели и выбрать Q таким образом, чтобы ψ оставался непре-

рывным при переходе через щель. Со стороны $z > 0$ предельное значение в середине щели приближенно равно

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{2}l_x, 0\right) &\simeq -i\frac{Q}{kl_xl_y} - \frac{2Q}{l_xl_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_{2n}} J_0\left(\frac{\pi na}{l_x}\right) \simeq \\ &\simeq -i\frac{Q}{kl_xl_y} - \frac{2Q}{\pi l_xl_y} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left[\pi n\left(1 - \frac{a}{l_x} \cos \vartheta\right)\right] \frac{1}{\kappa_{2n}} \cos(\pi n) \right\} d\vartheta. \end{aligned}$$

Этот ряд сходится плохо, поэтому было бы желательно найти похожий ряд, который можно было бы просуммировать, чтобы вычесть и прибавить его к данному. Мы написали с этой целью вторую формулу, в которой коэффициенты записаны в интегральной форме. Однако ряд, стоящий под знаком интеграла, достаточно прост, и если мы заменим в нем κ_{2n} через $2\pi n/l_x$ (обе величины приближенно равны между собой при больших значениях n), то его можно будет просуммировать:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_x}{2\pi n} \cos\left(\frac{\pi na}{l_x} \cos \vartheta\right) &= -\operatorname{Re} \left\{ \frac{l_x}{2\pi} \ln [1 - e^{(\pi ia/l_x) \cos \vartheta}] \right\} = \\ &= -\frac{l_x}{4\pi} \ln \left[2 - 2 \cos\left(\frac{\pi a}{l_x} \cos \vartheta\right) \right] = -\frac{l_x}{4\pi} \ln \left[4 \sin^2\left(\frac{\pi a}{2l_x} \cos \vartheta\right) \right]. \end{aligned}$$

При $\pi a/2l_x \ll 1$ можно считать величину в квадратных скобках пропорциональной $\cos^2 \vartheta$. Окончательно получаем

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_x}{2\pi n} \cos\left(\frac{\pi na}{l_x} \cos \vartheta\right) d\vartheta \simeq -\frac{1}{2} l_x \ln\left(\frac{\pi a}{2l_x}\right).$$

Обозначим ряд, входящий в выражение для $\psi\left(\frac{1}{2}l_x, 0\right)$, через $(Q/\pi l_y)W(a/l_x)$, где функция

$$\begin{aligned} W\left(\frac{a}{l_x}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l_x \kappa_{2n}} J_0\left(\frac{\pi na}{l_x}\right) \simeq \\ &\simeq \ln\left(\frac{2l_x}{\pi a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi n} - \frac{2}{l_x \kappa_{2n}} \right] J_0\left(\frac{\pi na}{l_x}\right), \quad \kappa_{2n} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{l_x}\right)^2 - k^2}, \end{aligned} \quad (11.3.23)$$

действительна, положительна и велика, когда a/l_x мало. Ряд, стоящий в правой части этой формулы, быстро сходится.

Возвращаясь снова к соотношению, выражающему непрерывность ψ в щели, мы видим, что условие, определяющее Q , сводится к требованию, чтобы два выражения для ψ в (11.3.22) были равны при $z=0$, $x=\frac{1}{2}l_x$:

$$2 + i\frac{Q}{kl_xl_y} + \frac{Q}{l_y} W = -i\frac{Q}{kl_xl_y} - \frac{Q}{l_y} W.$$

Отсюда амплитуда и фаза потока через щель для случая падающей волны единичной амплитуды определяются выражением

$$Q \simeq \frac{ikl_xl_y}{1 - ikl_xW(a/l_x)}. \quad (11.3.24)$$

Потенциал скоростей имеет вид

$$\psi \simeq \begin{cases} e^{ikz} - \frac{ikl_x W}{1-ikl_x W} e^{-ikz} + \\ + \frac{2ik}{1-ikl_x W} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_0\left(\frac{\pi n a}{l_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{l_x}\right) \frac{e^{-\kappa_{2n} z}}{\kappa_{2n}}, & z < 0, \\ \frac{e^{ikz}}{1-ikl_x W} - \frac{2ik}{1-ikl_x W} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_0\left(\frac{\pi n a}{l_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{l_x}\right) \frac{e^{-\kappa_{2n} z}}{\kappa_{2n}}, & z > 0. \end{cases}$$

Оба эти ряда достаточно хорошо сходятся пока z не равно нулю.

Взглянем теперь еще раз на полученные результаты. Если отношение a/l_x мало, то величина W велика, но произведение $kl_x W (a/l_x)$ может и не быть большим, если kl_x мало по сравнению с единицей. Тем не менее, каково бы ни было kl_x , мы можем сделать a достаточно малым по сравнению с l_x , так что $kl_x W (a/l_x)$ будет заметно больше единицы. В этом случае амплитуда отраженной волны почти равна амплитуде падающей и изменение фазы при отражении близко к нулю. Величины, представленные рядами, определяют искажение волны вблизи щели. Благодаря экспоненциальным множителям они становятся пренебрежимо малыми, когда $|z|$ превышает несколько длин волн. За пределами этой области искажения существуют только плоские волны (пока $k < 2\pi/l_x$): падающая и отраженная волны слева, прошедшая волна справа. Вдали от щели, потенциал скоростей имеет вид

$$\psi \simeq \begin{cases} e^{ikz} - \frac{ikl_x W}{1-ikl_x W} e^{-ikz}, & z < 0, \\ \frac{1}{1-ikl_x W} e^{ikz}, & z > 0. \end{cases}$$

Если произвести измерения на некотором расстоянии от щели, то результат будет таков, как если бы при $z=0$ имелась мембрана или другое препятствие, при проходе через которое давление падает на

$$ik\rho c [\psi_- - \psi_+] \simeq -2ik\rho c \frac{ikl_x W}{1-ikl_x W}.$$

При этом скорость мембраны равна $Q/l_x l_y$, так что *эффективный импеданс* преграды (какова бы ни была ее природа) имеет значение

$$\frac{\text{Перепад давления}}{\text{Средняя скорость}} \simeq \rho c [-2ikl_x W] = -i\omega (2\rho l_x W) = Z_s. \quad (11.3.25)$$

Величина в круглых скобках, умноженная на $l_x l_y$ (чтобы получить величину, рассчитанную на все сечение трубы, а не на единицу площади), может быть названа *эффективной массой* воздуха в щели. Эта эффективная масса, приближенно равная $(2\rho l_x^2 l_y) \ln(2l_x/\pi a)$ при $k \ll 2\pi/l_x$ (или $\lambda \gg l_x$), под влиянием падающей волны движется взад и вперед в щели, образуя при этом отраженную и проходящую волны. Полный импеданс для падающей волны складывается из импеданса препятствия и импеданса части трубы позади препятствия.

В соответствии с формулами (2.1.13) и (2.1.15), если волна e^{ikz} (без дисперсии) встречает границу при $z=0$ с импедансом Z_0 , то отраженная волна отличается от падающей по амплитуде и фазе множителем $-(A_-/A_+) = -e^{-2\pi(a-i\beta)}$, связанным с Z_0 соотношениями

$$e^{-2\pi(a-i\beta)} = \frac{A_-}{A_+} = \frac{\rho c - Z_0}{\rho c + Z_0}, \quad Z_0 = \rho c \frac{1-(A_-/A_+)}{1+(A_-/A_+)} = \rho c \operatorname{th}[\pi(x-i\beta)].$$

В нашем случае $A_+ = 1$, $A_- = ikl_x W/(1-ikl_x W)$, так что импеданс для

падающей волны равен

$$Z_0 \simeq \rho c (1 - 2ikl_x W) = \rho c + Z_s,$$

где Z_s — эффективный импеданс преграды со щелью. Поскольку ρc — импеданс открытой трубы, это равенство показывает, что Z_0 получается сложением импеданса преграды и импеданса участка трубы, лежащего за щелью.

Когда частота возбуждения ω становится больше, чем критическая частота ω_{10} , отраженные и проходящие волны не будут более простыми плоскими волнами и одного комплексного импеданса будет недостаточно для описания связи с падающей волной.

Конечно, наше решение не точно; мы обеспечили непрерывность только в центре щели, а в других местах ψ будет разрывным. Этот дефект может быть исправлен с помощью дополнительных рядов, которые введут малый разрыв градиента и т. д. Однако найденное первое приближение обычно оказывается достаточно точным.

Волны в трубе, изогнутой под прямым углом. Иногда бывает полезно уметь рассчитать распространение волн внутри изогнутого участка трубы. В качестве примера расчета такого типа мы рассмотрим трубу прямоугольного поперечного сечения с размерами l_y и l_z , изогнутую под прямым углом, ось которой находится в плоскости x, y . В § 10.2 мы рассматривали установившееся течение внутри такого колена. Потенциал скоростей, задаваемый формулой (10.2.57), и преобразование, показанное на рис. 10.23, могут быть применены и здесь, если мы положим $a = b = l_y$, так что $\alpha = 1$. Потенциал скоростей ψ связан с ω уравнением $\omega = e^{-\pi F l_z / l_y}$, где $F = \phi + i\chi$. Здесь через Q обозначен полный поток в колене, так что Q/l_z равно $\dot{Q}$ в формуле (10.2.57), т. е. потоку на единицу размера l_z , перпендикулярного плоскости чертежа.

В этих обозначениях соотношение между $z = x + iy$ и F имеет вид

$$z = \frac{2l_y}{\pi} \left[\operatorname{Arth} \sqrt{\operatorname{th} \left(\frac{\pi F l_z}{2Q} \right)} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} \left(\frac{\pi F l_z}{2Q} \right)} \right], \quad (11.3.26)$$

$$|v| = \left| \frac{dF}{dz} \right| = \left| \frac{Q/l_y l_z}{\sqrt{\operatorname{th} (\pi F l_z / 2Q)}} \right|,$$

где $|v|$ — величина установившейся скорости в точке F (или z). Теперь мы будем рассматривать течение в квадратной области $BP'DP$ (рис. 11.5) как течение несжимаемой жидкости, а течение на участках от A до $P'D$ и от DP до C — как волновое движение сжимаемой жидкости. До тех пор пока длина волны больше l_y , пренебрежение сжатием в колене несущественно, и оно дает нам возможность использовать формулы (11.3.26) для сопряжения решений на границах $P'D$ и DP .

Когда мы рассматриваем волновые решения, можно считать, что две полубесконечные трубы связаны своего рода преобразователем, который создает некоторое распределение скоростей по линии $P'D$ и то же самое распределение по PD . Трубу от A до $P'D$ можно рассматривать отдельно от трубы от PD до C и для изучения движения в каждой из них можно считать ось x направленной вдоль обеих труб, причем положительная полуось направлена от PD к C и отрицательная — от A к $P'D$. За исключением области $BP'DP$, волна вдоль трубы при $k < \pi/l_y$ имеет обычную форму

$$\psi(x, y) = \begin{cases} e^{ikx} + (1 - A_0) e^{-ikx} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \left(\frac{\pi m y}{l_y} \right) e^{x m}, & x < 0, \\ A_0 e^{ikx} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \left(\frac{\pi m y}{l_y} \right) e^{-x m}, & x > 0. \end{cases} \quad (11.3.27)$$

где $\kappa_m = \sqrt{(\pi m/l_y)^2 - k^2}$ и где начало координат x, y для $x < 0$ расположено в P' , а для $x > 0$ в P . Чтобы найти начальную зависимость нормальной составляющей градиента от y при $x=0$, мы рассчитываем величину v вдоль линий DP и DP' , используя стационарное решение (11.3.26).

В первую очередь нам нужно найти образы линий DP и DP' на плоскости F . Точке D , очевидно, соответствует начало $F=0$, но образ точки P ($-il_y$ на плоскости z) не так легко найти. Ей должно соответствовать на плоскости F число с положительной действительной частью и мнимой частью, равной $-i(Q/l_z)$. Но $\text{th}[(\pi\psi l_z/2Q) - i\pi/2] = \text{cth}(\pi\psi l_z/2Q)$, и эта величина больше единицы. Поэтому вдоль линии BC

$$z = -il_y + \frac{2l_y}{\pi} \left[\text{Arth} \sqrt{\text{th}\left(\frac{\pi\psi l_z}{2Q}\right)} - \text{arctg} \sqrt{\text{cth}\left(\frac{\pi\psi l_z}{2Q}\right)} \right],$$

и чтобы z равнялось $-il_y$, мы должны, полагая $\text{th}(\pi\psi_0 l_z/2Q) = \gamma^2$, иметь $\text{Arth} \gamma = \text{arctg}(1/\gamma)$. Это уравнение имеет корень $\gamma = 0,7341$; $\text{Arth} \gamma = 0,9376$, $\text{th}(\pi\psi_0 l_z/2Q) = \gamma^2 = 0,5389$, $\pi\psi_0 l_z/2Q = 0,6026$, так что точка P на плоскости F соответствует $F = (Q/l_z)[0,3836 - i]$, а точке P' соответствует $F' = (Q/l_z)[-0,3836 - i]$. В обеих точках плоскости z скорость жидкости параллельна границе на плоскости z и имеет в точке $x=0, y=0$ на первом чертеже рис. 11.5 значение

$$v_0 = \left| \frac{(Q/l_y l_z)}{\sqrt{\text{th}[(\pi\psi_0 l_z/2Q) - i\pi/2]}} \right| = 0,7341 \frac{Q}{l_y l_z}.$$

Из симметрии решения (можно добавить вторую трубу с изгибом в противоположном направлении и рассматривать поток через Т-образную трубу) видно, что $dv_0/dy = 0$ в точке P .

По мере продвижения вдоль пунктирных линий PD на любом из трех чертежей рис. 11.5, x -компонента скорости $v_0(y)$ монотонно возрастает, стремясь к бесконечности при приближении к D . Если бы мы знали точное направление пунктирной линии на плоскости F , мы могли бы определить точное поведение v_0 как функции от y ; но эта функция от y будет, очевидно, настолько сложной, что мы никак не сумеем использовать ее. Однако нам известно значение v_0 при $y=0$ и известно, что $\int v_0 dy = Q/l_z$. Поэтому естественно предположить, что изучение поведения v_0 вблизи точки D ($y=l_y$) позволит найти более простую функцию от y , которая удовлетворит всем требованиям достаточно точно.

Формула (11.3.26) показывает, что вблизи точки $F=0$ разложение z в ряд по степеням $\text{th}(\pi F l_z/2Q) = \delta^2$ имеет вид

$$z = \frac{2l_y}{\pi} \left[\delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \dots - \delta + \frac{1}{3}\delta^3 - \dots \right] \simeq \frac{4l_y}{3\pi} \delta^3,$$

откуда

$$\delta = \sqrt[3]{\text{th}(\pi F l_z/2Q)} \simeq (3\pi z/4l_y)^{1/3}.$$

Для того чтобы z перемещалась вдоль пунктирной линии от D к P , она должна быть равна $-i\zeta = \zeta e^{-i\pi/2}$, где $\zeta = l_y - y$ (первый чертеж рис. 11.5).

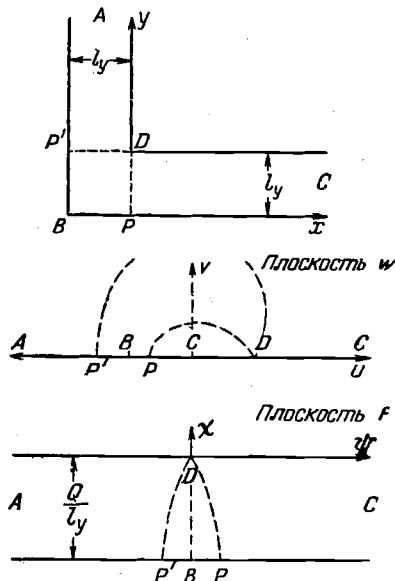


Рис. 11.5. Распространение волн в трубе, изогнутой под прямым углом.

Два нижних чертежа поясняют конформные преобразования, которые нужно осуществить, чтобы вычислить установившийся поток в сечениях $P'D$ и DP .

Это означает, что F приближенно равно $(2Q/\pi l_z) e^{-i\pi/3} (3\pi\zeta/4l_y)^{2/3}$ и пунктирная линия выходит из D на плоскости F под углом -60° к оси ψ . Скорость v_0 по величине и направлению является величиной, комплексно сопряженной к dF/dz , которая вдоль DP вблизи точки D приближенно равна $(Q/l_y l_z) (4l_y/3\pi\zeta)^{1/3} e^{-i\pi/6}$ и направлена книзу под углом 30° к горизонтали. Поэтому вдоль DP вблизи D ($y=l_y$) горизонтальная компонента скорости равна

$$v_0(y) \simeq \frac{Q}{l_y l_z} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \left[\frac{8/3\pi}{2-2y/l_y} \right]^{1/3} = 0,821 \frac{Q/l_y l_z}{\sqrt[3]{2[1-y/l_y]}}.$$

Итак, все предельные условия для $v_0(y)$ получены и остается найти простую функцию, которая будет аппроксимировать поведение $v_0(y)$. Простейшей функцией, имеющей требуемый характер зависимости от y как вблизи $y=0$ (точка P), так и при $y=l_y$ (точка D), является $v_0 = C/\sqrt[3]{1-(y/l_y)^2}$.

Для того чтобы эта функция была точным решением, C должно быть равно $0,734(Q/l_y l_z)$ при $y=0$ и $0,821(Q/l_y l_z)$ при $y=l_y$, так что при $C = \text{const}$ это выражение не может быть точным. Однако если для C принять некоторое промежуточное значение, то найденная функция оказывается вполне пригодным приближенным решением. Посмотрим, какое значение должно иметь C для того, чтобы интеграл от v_0 по сечению трубы был равен полному потоку Q . Имеем

$$Q = l_z C \int_0^{l_y} \frac{dy}{\sqrt[3]{1-(y/l_y)^2}} = C l_y l_z \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} \varphi d\varphi = \frac{V\pi \Gamma(2/3)}{2\Gamma(7/6)} C l_y l_z$$

и

$$C = \frac{2\Gamma(7/6)}{V\pi \Gamma(2/3)} \frac{Q}{l_y l_z} = 0,7714 \frac{Q}{l_y l_z}.$$

Это значение действительно является промежуточным между приведенными выше.

Итак, мы предполагаем, что вдоль линии PD (а также линии $P'D$) x -компонента градиента ψ приближенно равна $C[1-(y/l_y)^2]^{-1/3}$, где значение C указано выше. Теперь можно вернуться к (11.3.27) и преобразовать соответственно ряд Фурье для градиента ψ . Согласно (5.3.63), коэффициенты Фурье определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l_y A_m x_m &= C \int_0^{l_y} \frac{\cos(\pi m y/l_y)}{\sqrt[3]{1-(y/l_y)^2}} dy = C l_y \int_0^1 \frac{\cos(\pi m u)}{\sqrt[3]{1-u^2}} du = \\ &= C l_y \frac{V\pi \Gamma(2/3)}{2(\pi m/2)^{1/6}} J_{1/6}(\pi m), \\ A_m &= \frac{2\Gamma(7/6) J_{1/6}(\pi m)}{x_m (\pi m/2)^{1/6}} \frac{Q}{l_y l_z}, \quad A_0 = \frac{Q}{i k l_y l_z}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить поток Q и тем самым решить задачу (по крайней мере в том приближении, которое мы здесь рассматриваем), мы должны связать значение потенциала ψ на входе в колено с его значением на выходе. Мы получили бы, возможно, более точный результат, если бы нам удалось достигнуть сопряжения значений ψ для всех y в данном поперечном сечении. Однако мы не будем к этому стремиться, зная, что в рассматриваемом приближении при $k < \pi/l_y$ достаточно установить надлежащую связь значений ψ в одной точке, чтобы обеспечить достаточно хорошее соответствие во всех точках. Парой точек, в которых это легче всего сделать, являются $y=l$ (точка D), где требование состоит

в том, чтобы $\psi_- = \psi_+$, и $y = 0$ (точки P и P'), где требуется, как это показало предыдущее рассмотрение, чтобы $\psi_+ = \psi_- + 0,7672 (Q/l_z)$. Конечно, результаты сопряжения в этих точках будут несколько различаться.

Мы выбираем соответствие в точке D , ибо оно проще, а также и потому, что это точка максимальной скорости. В этой точке сумма ряда для волн высших типов равна $(Q/l_z) G(kl_y)$, где

$$G(kl_y) = 2\Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m J_{1/6}(\pi m)}{l_y^m (\pi m/2)^{1/6}}, \quad (11.3.28)$$

так что искомое соотношение имеет вид $2 = 2(Q/l_z)[(1/ikl_y) - G]$, т. е.

$$Q = \frac{2ikl_y l_z}{1 - ikl_y G(kl_y)}.$$

Поскольку это выражение вычислено как функция от kl_y (при $kl_y < \pi$), все остальные искомые величины могут быть получены точно так же, как это было сделано в случае преграды со щелью. В частности, мы видим, что импеданс колена вместе с полубесконечной трубой позади него для плоской падающей волны равен

$$Z_0 \simeq \rho c + Z_e, \quad Z_e = -\rho c (2ikl_y G) = -i\omega (2\rho l_y G), \quad (11.3.29)$$

где Z_e — эффективный импеданс отдельно взятого колена, а ρc — импеданс полубесконечной трубы.

При низких частотах Z_e имеет реактивный характер; эффективная масса (для всей трубы) при этом равна $2\rho l_y^2 G(kl_y)$. Для очень малых значений kl_y функция G стремится к постоянной

$$G_0 = \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{2} \pi m\right)^{-7/6} J_{1/6}(\pi m) = 0,2518.$$

Для несколько больших значений $kl_y < 1$ мы можем разложить $G(kl_y)$ в степенной ряд

$$G(kl_y) = G_0 + \frac{1}{2} (kl_y)^2 G_1 + \frac{3}{8} (kl_y)^4 G_2 + \frac{5}{16} (kl_y)^6 G_3 + \dots,$$

где

$$G_n = 2^{7/6} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m}{(\pi m)^{2n+7/6}} \right] J_{1/6}(\pi m),$$

$$G_1 = 0,01306, \quad G_2 = 0,001217, \dots$$

Ряды для G_n сходятся абсолютно, но вычисления можно упростить следующим образом. Для больших m функции Бесселя имеют асимптотическую форму

$$J_{1/6}(\pi m) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi^2 m}} \cos\left(\pi m - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} (-1)^m.$$

Поэтому ряды для G_n могут быть переписаны следующим образом:

$$G_n = \frac{2^{2/3} \Gamma(7/6)}{\pi^{2(n+1)+1/6}} \left\{ \zeta\left(2n + \frac{5}{3}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n+5/3}} [1 - (-1)^m \pi \sqrt{2m} J_{1/6}(\pi m)] \right\}.$$

Здесь $\zeta\left(2n + \frac{5}{3}\right)$ — дзета-функция Римана

$$\zeta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^z} = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1},$$

где произведение берется по всем положительным простым числам ($p=2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$). Ряды, которые следует прибавлять к дзета-функции для получения G_n , сходятся очень быстро. Действительно, для $n > 2$ последняя формула при одном члене

$$G_n \simeq \frac{0,12343}{\pi^{2n}} \zeta \left(2n + \frac{5}{3} \right) - \frac{0,00764}{\pi^{2n}}$$

дает лучшую точность, чем первый ряд для G_n со значительно большим количеством членов.

Мембрана в круглой трубе. Следующим примером, связанным с распространением волн в трубах, нам послужит задача об упругой мембране, натянутой поперек круглой трубы, радиус сечения которой равен a . Задача включает в себя расчет волны, отраженной от мембраны, и волны, прошедшей сквозь нее. Если падающая волна симметрична относительно оси трубы, то весь процесс будет симметричным, т. е. возникают лишь парциальные колебания вида

$$J_0 \left(\frac{\pi \alpha_n r}{a} \right) e^{ik\tau_n z - i\omega t}, \quad \tau_n = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi \alpha_n}{ka} \right)^2},$$

где постоянная α_n при краевых условиях, соответствующих акустическим волнам (условия Неймана), является n -м корнем уравнения $J'_0(\pi \alpha) = -J_1(\pi \alpha) = 0$. Эти корни приведены в таблице в конце настоящей главы, где они обозначены α_{0n} . Далее, r , как обычно, — радиальная координата, z — расстояние вдоль трубы и $k = \omega/c$ (c — скорость акустических волн в воздухе).

С другой стороны, если упругая мембрана характеризуется поверхностной плотностью M и натяжением T и если ее край ($r=a$) неподвижно закреплен, то форма свободных колебаний при симметричном возбуждении имеет вид

$$\zeta = J_0 \left(\frac{\pi \beta_n r}{a} \right) e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{\pi C \beta_n}{a},$$

где ζ — перемещение точки (r, φ) мембраны в направлении z , отсчитываемое от положения равновесия, $C = \sqrt{T/M}$ — скорость поперечных волн на мембране, $\omega_n/2\pi$ — n -я резонансная частота и β_n — n -й корень уравнения $J_0(\pi \beta) = 0$ (обозначенный β_{0n} в таблице в конце этой главы).

Теперь предположим, что плоская волна ($n=0$) с частотой, меньшей $\alpha_s c/2a$, возбуждается в левой части трубы на некотором расстоянии от мембраны, расположенной в плоскости $z=0$, и распространяется вправо. Волна ударяется о мембрану, частично отражается и частично проходит сквозь нее, вызывая при этом колебания и самой мембраны. Мы можем принять, что акустическая волна имеет потенциал скоростей

$$\psi = \begin{cases} e^{ikz} + (1 - A_0) e^{-ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{\pi \alpha_n r}{a} \right) e^{\kappa_n z}, & z < 0, \\ A_0 e^{ikz} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{\pi \alpha_n r}{a} \right) e^{-\kappa_n z}, & z > 0, \end{cases} \quad (11.3.30)$$

где $\kappa_n = \sqrt{(\pi \alpha_n/a)^2 - k^2}$. Экспоненты и коэффициенты A выбраны так, что z -компонента скорости при $z=0$ одинакова по обе стороны от мембраны (и, конечно, равна z -компоненте скорости мембраны), а на больших расстояниях от мембраны ($|z|$ велико) справа имеется прошедшая волна, а слева — падающая и отраженная волны.

Коэффициенты A определяются путем подстановки полученных выражений в уравнение колебаний мембраны. При колебаниях, симметричных

относительно центра мембраны, уравнение для перемещения имеет вид

$$M \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + p(r), \quad (11.3.31)$$

причем, согласно (11.3.30), вынуждающее давление равно

$$p(r) = 2i\omega\rho \left[1 - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) \right] e^{-i\omega t},$$

где ρ — плотность воздуха в трубе и $k_n = \pi \alpha_n / a$ не равно ω_n / c .

Мы можем решить уравнение (11.3.31) двумя способами (хотя, конечно, независимо от примененного способа результаты должны получиться одни и те же). Первый способ — разложение ζ и p по собственным функциям $J_0(\pi \beta_n r / a)$, обращающимся в нуль при $r = a$; второй способ состоит в том, что (11.3.31) рассматривается как обыкновенное линейное неоднородное уравнение, подлежащее решению по методу (5.2.19). Так как у нас рядов и без того достаточно, то мы избираем последний способ, не ведущий непосредственно к двойным рядам. Независимыми решениями однородного уравнения являются $J_0(Kr)$ и $N_0(Kr)$, где $K = \omega / C = \omega \sqrt{M/T}$, с вронскианом

$$\Delta(J_0, N_0) = J_0(Kr) N'_0(Kr) - N_0(Kr) J'_0(Kr) = 2/\pi Kr,$$

причем J'_0, N'_0 обозначают производные по аргументу Kr . Решение уравнения (11.3.31) сводится, таким образом, к применению формулы (5.2.19) и к такому выбору пределов интегрирования и постоянных, чтобы ζ обращалось в нуль при $r = a$ и не было бы бесконечным при $r = 0$. Используя формулы для интегрирования произведений функций Бесселя, приведенные в конце гл. 10, мы получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \zeta = \frac{-\pi}{2T} \left\{ J_0(Kr) \left[\int_r^a N_0(Kx) p(x) x dx - \frac{N_0(Ka)}{J_0(Ka)} \int_0^a J_0(Kx) p(x) x dx \right] + \right. \\ \left. + N_0(Kr) \int_0^r J_0(Kx) p(x) x dx \right\} = \\ = -i \frac{2K\rho}{MC} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{1-A_0}{K^2} \left[1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{K^2 - k_n^2} \left[J_0(k_n r) - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} J_0(k_n a) \right] \right\}. \quad (11.3.32) \end{aligned}$$

Это выражение стремится к нулю при $r \rightarrow a$.

Коэффициенты A и, следовательно, форма мембраны и звуковой волны могут быть определены из условия, чтобы скорость движения мембраны $-i\omega\zeta$ была равна z -компоненте скорости воздуха при $z = 0$:

$$-i\omega\zeta = ikA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n J_0(k_n r), \quad \alpha_n = \sqrt{k_n^2 - k^2}.$$

Это условие приводит к бесконечной системе линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных A_n . Для их решения лучше всего пользоваться последовательными приближениями. Обычно отношение $a\rho/M$ для мембраны мало; если это так, то все A также малы по сравнению с единицей (если только частота возбуждения не совпадает с резонансной частотой мембраны).

Если нет резонанса, если $a\rho/M \ll 1$ и если частота меньше, чем первая критическая частота трубы ($k < k_1$), то в нулевом приближении

скорость мембраны равна

$$ikA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n A_n J_0(k_n r) \simeq -2 \frac{\rho}{M} \left[1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} \right] (1 - A_0).$$

Коэффициенты A в первом приближении по ρ/M можно получить, умножая обе части на $J_0(k_n r) r = J_0(\pi \kappa_n r/a) r$ и интегрируя по r от нуля до a :

$$\begin{aligned} A_0 &\simeq \frac{2\rho J_2(Ka)}{ikMJ_0(Ka) + 2\rho J_2(Ka)} \simeq -i\omega \frac{\rho ca^2}{4T}, \quad Ka \rightarrow 0, \\ A_n &\simeq \frac{-2\rho}{\kappa_n J_0^2(k_n a) M} \frac{K^2}{K^2 - k_n^2} \left[\frac{J_0(Ka) J_2(k_n a) - J_0(k_n a) J_2(Ka)}{J_0(Ka) + (2\rho/ikM) J_2(Ka)} \right] \simeq \\ &\simeq -\frac{2\rho}{M \kappa_n} \frac{J_2(k_n a)}{J_0^2(k_n a)}, \quad K \rightarrow k_n. \end{aligned} \quad (11.3.33)$$

Здесь важно отметить, что, используя множитель $(1 - A_0)$ вместо 1, мы добились того, что формулы (11.3.33) остаются в первом приближении по ρ/M правильными даже при наличии резонанса. Резонанс имеет место, если K таково, что $J_0(Ka) = 0$. При этом

$$A_0 \simeq 1 \text{ и } A_n \simeq -i(k/\kappa_n) [K^2/(K^2 - k_n^2)] [1/J_0(k_n a)].$$

Эти значения A_n много больше тех, которые получаются при других K , но они не бесконечны. Точно так же ни один из A не стремится к бесконечности, когда K близко к k_n [следует иметь в виду, что при $K \rightarrow k_n$, $\omega \rightarrow C\pi \kappa_n/a$ резонанса нет; резонанс наступает при $\omega = C\pi \beta_n/a$, когда $J_0(Ka) = 0$].

Возвращаясь к формуле (11.3.25) и последующим, мы видим, что отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей равно $A_-/A_+ = -(1 - A_0)$, так что эффективный импеданс мембраны и части трубы позади нее для плоской волны, ударяющейся о мембрану с левой стороны, равен

$$Z_0 = \rho c \frac{1 - (A_-/A_+)}{1 + (A_-/A_+)} = i\omega M \frac{J_0(Ka)}{J_2(Ka)} + \rho c.$$

Активный член ρc является акустическим импедансом части трубы позади мембраны; к нему мембрана добавляет реактивную часть. При очень низких частотах этот реактивный импеданс мембраны обращается в

$$X_0 \simeq -\frac{8T}{i\omega a^2},$$

а это реактивный импеданс упругости, порожденной натяжением T в мембране. При резонансе $J_0(Ka) = 0$, импеданс мембраны обращается в нуль и импеданс системы сводится к импедансу трубы ρc . При $J_2(Ka) = 0$ мембрана в процессе колебаний одинаково воздействует на воздух как по одну сторону от нее, так и по другую, и полный импеданс бесконечен. Для частот, больших чем $k_1 c/a\pi = a_1 c/2a$, по трубе могут передаваться волны и более высоких типов, и явление усложняется, так что для его описания уже недостаточно единственного импеданса.

Излучение из открытого конца трубы. Другим примером расчетов, используемых в акустических задачах, является вычисление волны, выходящей из открытого конца круглой трубы. Характер излучения и его обратное влияние на волну внутри трубы зависят от выбранного вида окончания трубы. Простейшим с точки зрения вычислений окончанием трубы является бесконечный фланец. При этом конец трубы представляет собой отверстие в плоской стене, размеры которой велики по сравнению

с длиной волны λ . Случай бесфланцевого окончания будет рассмотрен в § 11.4. Здесь мы рассматриваем случай круглой трубы радиуса a , осью которой служит отрицательная часть z -оси и которая кончается при $z=0$. Плоскость x, y — это жесткая стена с круглым отверстием, являющимся концом трубы.

Когда плоская волна, распространяющаяся вправо вдоль трубы, достигает отверстия, часть ее переходит во внешнее свободное пространство, вправо от стены, а часть отражается обратно в трубу. Если частота возбуждения ниже первой критической частоты ($k < k_1 = \pi a_1/a$), то поле в трубе, как и ранее, имеет вид

$$\psi = e^{ikhz} - A_0 e^{-ikhz} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) e^{x_n z}, \quad z < 0, \quad (11.3.34)$$

где $x_n = \sqrt{k_n^2 - k^2}$. В нулевом приближении по (предполагаемо) малым величинам A_n скорость воздуха у открытого конца трубы равна

$$v_0 \simeq \begin{cases} ik(1 + A_0), & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Для вычисления излучения вправо из открытого конца мы можем использовать метод функции Грина. Здесь применима функция Грина, нормальная производная которой при $z=0$ равна нулю:

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{e^{ikhR}}{R} + \frac{e^{ikhR'}}{R'},$$

где

$$k = \omega/c, \quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

и

$$(R')^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2,$$

что соответствует единичным источникам в точке (x_0, y_0, z_0) и в симметричной точке $(x_0, y_0, -z_0)$. Используя выражение для скорости при $z=0$

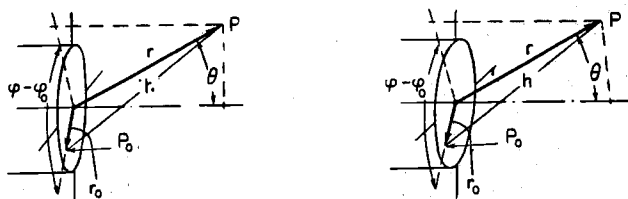


Рис. 11.6. Углы и расстояния для случая излучения из открытого конца трубы.

(которая равна нормальной производной потенциала со знаком минус) и формулу (7.2.10), получим для поля излучения выражение

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a r_0 v_0(r_0) \frac{e^{ikh}}{h} dr_0, \quad (11.3.35)$$

где $h^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0)$ (см. рис. 11.6). Точка P_0 находится в плоскости $z=0$ и определена полярными координатами r_0, φ_0 , точка P — в конце вектора $\mathbf{r}$ и определена сферическими координатами r, ϑ, φ (ось этой системы координат является продолжением оси трубы

и начало находится в центре отверстия); h — расстояние между точками P_0 и P .

Чтобы определить коэффициенты A_n и тем самым распределение давления и скоростей в отверстии, нам следует приравнять, хотя бы приближенно, выражения для давления при $z=0$. Используя интегральное представление, мы выразим давление в точке (r, φ) плоскости $z=0$ в виде

$$p(r) = -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a r_0 v_0(r_0) \frac{\exp(ik\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0})}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0}} dr_0.$$

Но, как показывает таблица в конце гл. 10,

$$\frac{e^{ikh}}{h} = \int_0^\infty J_0(xh) \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - k^2}},$$

где

$$\sqrt{x^2 - k^2} = -i \sqrt{k^2 - x^2},$$

когда x и k положительны и $x < k$ (другими словами, путь интегрирования по x проходит ниже точки k). Заметим также, что

$$J_0\left(x\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos(m\varphi_0) J_m(xr_0) J_m(xr).$$

Эти подстановки кажутся уведящими от цели, так как добавляется новое интегрирование к двум первоначальным. Однако они дадут нам возможность продвинуться вперед, так как мы можем теперь интегрировать по φ_0 :

$$\begin{aligned} p(r) &= -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a r_0 v_0(r_0) dr_0 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos(m\varphi_0) \int_0^\infty \frac{J_m(xr_0) J_m(xr)}{\sqrt{x^2 - k^2}} x dx \right\} = \\ &= -ik\rho c \int_0^\infty x dx \int_0^a v_0(r_0) \frac{J_0(xr_0) J_0(xr)}{\sqrt{x^2 - k^2}} r_0 dr_0. \end{aligned}$$

В эту формулу можно уже подставить выражение для $v_0(r_0)$.

Если мы допустим, что коэффициенты A_n ряда в выражении для ψ внутри трубы малы, то можно будет подставить приближенное выражение $v_0 \simeq ik(1 + A_0)$ в интеграл для p ; приравнявая результат ряду, полученному из (11.3.34), получаем

$$ik\rho c \left[(1 - A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) \right] \simeq \rho c k^2 a (1 + A_0) \int_0^\infty J_0(xr) J_1(xa) \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k^2}}.$$

Из этого соотношения можно получить приближенные выражения для A_n . Так, умножая обе части равенства на r и интегрируя по r от нуля до a , мы видим, что с левой стороны вследствие ортогональности собственных функций $J_0(k_n a)$ исчезают все члены, за исключением одного, содержащего множитель $1 - A_0$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 - A_0}{1 + A_0} &\simeq -2ik \int_0^\infty [J_1(xa)]^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - k^2}} = \\ &= 2\mu \int_0^\mu \frac{[J_1(u)]^2 du}{u \sqrt{\mu^2 - u^2}} - 2i\mu \int_\mu^\infty \frac{[J_1(u)]^2 du}{u \sqrt{u^2 - \mu^2}}, \end{aligned}$$

где $u = xa$ и $\mu = ka = \omega a/c = 2\pi a/\lambda$.

Оба эти интеграла приведены в таблице на стр. 305. Первый оказывается равным $1 - (1/\mu) J_1(2\mu)$, а второй — произведению $1/\mu$ на функцию Струве $S_1(2\mu)$, определенную на стр. 305. Заметим, что в этом приближении эффективный акустический импеданс отверстия для плоской волны, распространяющейся вдоль трубы слева, равен произведению ρc на $(1 - A_0)/(1 + A_0)$:

$$Z_0 \simeq \rho c \left[1 - \frac{1}{ka} J_1(2ka) - \frac{i}{ka} S_1(2ka) \right] \simeq \frac{1}{2} \rho c (ka)^2 - i\omega \frac{8\rho a}{3\pi}, \quad ka \ll 1,$$

покуда $k < \pi a_1/a$, т. е. покуда только наименьшая гармоника может распространяться вдоль трубы. Из этих предельных формул следует, что при низких частотах открытый конец имеет меньший импеданс, чем продолжение той же трубы в бесконечность.

Мы можем теперь найти другие A_n , умножая уравнение для давления на $J_0(k_n r) r$ и интегрируя по r от нуля до a ($k_n = \pi a_{0n}/a$). При этом

$$\int_0^a J_0(xr) J_0(k_n r) r dr = \frac{xa}{x^2 - k_n^2} \left[J_0(k_n a) J_1(xa) - \frac{k_n}{x} J_0(xa) J_1(k_n a) \right],$$

где второй член в квадратных скобках обращается в нуль, поскольку $J_1(k_n a) = J_1(\pi a_{0n}) = 0$. Интегрирование в конечном счете дает

$$A_n \simeq \frac{1 + A_0}{J_0(\pi a_{0n})} [\Theta_n(\mu) - i\chi_n(\mu)], \quad \mu = ka = \frac{2\pi a}{\lambda},$$

$$\Theta_n = 2\mu \int_0^\mu \frac{[J_1(u)]^2}{u^2 - u_n^2} \frac{u du}{\sqrt{\mu^2 - u^2}}, \quad \chi_n = 2\mu \int_\mu^\infty \frac{[J_1(u)]^2}{u^2 - u_n^2} \frac{u du}{\sqrt{u^2 - \mu^2}}, \quad (11.3.36)$$

где $u_n = k_n a = \pi a_{0n}$. При $\mu < u_1$ эти величины быстро убывают с возрастанием n , тем самым оправдывая наш приближенный метод. Существуют таблицы этих функций¹⁾. Предельные значения для низших частот таковы:

$$\Theta_n \simeq -(\mu^4/3\pi^2 a_{0n}^2); \quad \chi_n \simeq -g_n \mu; \quad \mu \rightarrow 0, \quad n > 0, \\ g_1 = 0,0920; \quad g_2 = 0,0356; \quad g_3 = 0,0194, \dots$$

Функции для $n=0$ были указаны выше:

$$\Theta_0 = 1 - \frac{1}{\mu} J_1(2\mu) \simeq \frac{1}{2} \mu^2, \quad \chi_0 = \frac{1}{\mu} S_1(2\mu) \simeq \frac{8\mu}{3\pi}; \quad \mu \rightarrow 0.$$

Мы можем теперь вернуться к (11.3.35), чтобы подсчитать в первом приближении по малым величинам A_n излучение из открытого конца трубы. На больших по сравнению с длиной волны расстояниях от отверстия можно положить $h \simeq r - r_0 \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0)$ и, используя выражение

$$v_0 \simeq \frac{2}{1 + \Theta_0 - i\chi_0} \left\{ ik + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n (\Theta_n - i\chi_n) \frac{J_0(k_n r)}{J_0(k_n a)} \right\},$$

где $k_n = \pi a_{0n}/a$ и $\kappa_n = \sqrt{k_n^2 - k^2}$, мы получаем

$$\phi \simeq \frac{-(1/\pi)}{1 + \Theta_0 - i\chi_0} \frac{e^{ikr}}{r} \times \\ \times \left\{ \int_0^a r_0 dr_0 \left[ik + \sum \kappa_n (\Theta_n - i\chi_n) \frac{J_0(k_n r_0)}{J_0(k_n a)} \right] \int_0^{2\pi} e^{-ikr_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)} d\varphi_0 \right\}.$$

Интегрирование по φ_0 дает $2\pi J_0(kr_0 \sin \vartheta)$, где ϑ — угол между вектором

¹⁾ См., например, Морз Ф., Колебания и звук, ГТТИ, М., 1949.

г и осью трубы, продолженной за отверстие в плоской стене при $z = 0$ (т. е. сферический угол между r и осью z). Теперь можно выполнить интегрирование по r_0 , откуда получаем

$$\psi \simeq \frac{-i\mu a}{1 + \Theta_0 - i\chi_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \Phi_0(\mu \sin \vartheta) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{k} (\Theta_n - i\chi_n) \Phi_n(\mu \sin \vartheta) \right\}, \quad (11.3.37)$$

где

$$\mu = ka, \quad \Phi_n(s) = \frac{2sJ_1(s)}{s^2 - (\pi a_{0n})^2} \simeq \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -(s/\pi a_{0n})^2, & n > 0, \quad s \rightarrow 0. \end{cases}$$

Из этого выражения можно определить давление и интенсивность излучения на больших расстояниях от отверстия при единичной амплитуде плоской волны, распространяющейся вдоль трубы по направлению к отверстию. Эти выводы справедливы для частот, удовлетворяющих условию $k < k_1$, т. е. для частот ниже первой критической частоты трубы.

Мы могли бы, конечно, изучить случаи распространения волн внутри и вне других цилиндров — эллиптических или параболических, — но подобные случаи практически очень редки и ничего существенно нового при их изучении мы не узнаем. (Несколько подобных задач приведено в конце главы.) Вместо этого, прежде чем перейти к нецилиндрическим координатам, мы займемся задачей другого типа.

Распространение волн в упругих трубах. Имеются случаи, когда изменения давления в звуковой волне, распространяющейся в круглой трубе, производят заметное растяжение стенок трубы. Это обстоятельство особенно существенно, когда труба содержит сравнительно мало сжимаемую жидкость (например, воду), а сама находится в воздухе, так что внешнее давление на стенки трубы сравнительно мало. Реакция стенок трубы на асимметричные типы волн (для $m > 0$) резко отличается от реакции на симметричные ($m = 0$) волны; в первом случае существенную роль играет сопротивляемость стенок изгибу, в то время как во втором достаточно знать только простой модуль Юнга для растяжения. Таким образом, симметричный случай проще; к тому же он чаще встречается.

Пусть в определенном поперечном сечении (для определенного значения z) избыток давления сверх равновесного равен $p(z, t)$. Можно предположить, что радиус поперечного сечения трубы в этом месте на некоторую величину, пропорциональную p , будет больше, чем в состоянии равновесия. Приращение внутреннего давления p должно компенсироваться увеличением напряжения растяжения в стенке трубы ap/h , где h — толщина стенки. Поэтому радиус трубы будет больше на величину $a^2 p / h E_t$, где E_t — модуль Юнга материала стенок трубы. Таким образом, при медленных колебаниях давления радиус трубы должен меняться от равновесного значения a до значения $a + p(a^2/hE_t)$, если только стенки трубы достаточно гибки, так что растяжение в одной точке не вызывает растяжения в ближайших точках.

Однако если изменения происходят быстро, то следует принять в расчет и эффективную массу стенки трубы. Если обозначить приращение радиуса через δ , то уравнение, связывающее δ с приращением внутреннего давления, принимает вид

$$\rho_t h \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \delta \frac{h E_t}{a^2} = p,$$

где ρ_t — плотность материала стенки трубы. Следовательно, если можно пренебречь внутренним трением в стенке трубы, то радиальная скорость

этой стенки v_r (являющаяся также радиальной скоростью жидкости на внутренней поверхности) при колебании давления $p(z)e^{-i\omega t}$ равна

$$v_r = \frac{p(z)}{Z_t} e^{-i\omega t}, \quad Z_t = -i\omega(\rho_t h) - \frac{hE_t}{i\omega a^2}.$$

Величина Z_t может быть названа *поперечным механическим импедансом* стенки трубы. Мы исходим из того, что реакцией внешнего воздуха на трубу можно пренебречь и что стенки трубы гибкие (подобно резине), а не жесткие (подобно стали).

Симметричная звуковая волна внутри круглой трубы задается потенциалом скоростей

$$\psi = A \exp(ikz \sqrt{1-\sigma^2}) J_0(k\sigma r) e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (11.3.38)$$

где значение параметра σ определяется импедансом Z_t . Избыточное давление на стенку трубы в точке (z, a) равно

$$p = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \rho \psi = i\omega \rho A \exp(ikz \sqrt{1-\sigma^2}) J_0(k\sigma a) e^{-i\omega t},$$

где ρ — плотность жидкости. Радиальная скорость жидкости у стенки в той же точке равна

$$v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -k\sigma A \exp(ikz \sqrt{1-\sigma^2}) J_1(k\sigma a) e^{-i\omega t},$$

и σ определяется уравнением

$$\frac{p}{v_r} = -i\omega \rho_t h - \frac{hE_t}{i\omega a^2} = -\frac{i\omega \rho J_0(k\sigma a)}{k\sigma J_1(k\sigma a)}.$$

Для низких частот, когда $\omega^2 \ll E_t/\rho_t a^2$, наименьший корень σ оказывается мнимым, так что ψ следует выражать через гиперболическую функцию Бесселя $I_0(k\tau r) = J_0(ik\tau r)$, где $\sigma = i\tau$. На практике, кроме того, hE_t/a^2 достаточно велико, так что τ значительно меньше, чем $1/ka$; и можно ограничиться только несколькими первыми членами разложения I_0 в ряд. Следовательно, потенциал скоростей можно выразить так:

$$\psi \simeq A \left[1 + \frac{1}{4}(k\tau r)^2 \right] \exp(ikz \sqrt{1+\tau^2} - i\omega t), \quad 2\rho\omega^2 a^3 \ll hE_t,$$

и уравнение для τ принимает вид

$$-i\omega \rho_t h + \frac{ihE_t}{\omega a^2} \simeq \frac{2i\omega \rho}{k^2 \tau^2 a} = i \frac{2\rho c^2}{\omega \tau^2 a},$$

то есть

$$\tau^2 \simeq \frac{2\rho c^2 a/h}{E_t - \omega^2 a^2 \rho_t} \simeq \frac{2\rho c^2 a}{hE_t} \left[1 + \frac{\omega^2 a^2 \rho_t}{E_t} \right].$$

Поэтому потенциал скоростей (с рассматриваемой степенью точности) принимает вид

$$\psi \simeq A \left[1 + \frac{\rho \omega^2 a r^2}{2hE_t} + \frac{\rho \rho_t \omega^4 a^3 r^2}{2hE_t^2} \right] e^{i\omega[(z/c_t) - t]},$$

где c_t — скорость волны при ее распространении вдоль трубы:

$$c_t \simeq c \left[1 - \frac{\rho c^2 a}{hE_t} - \frac{\rho \rho_t \omega^2 c^2 a^3}{hE_t^2} \right],$$

что меньше, чем скорость звука c в свободном пространстве, заполненном такой же жидкостью. Для жестких труб ($hE_t \gg \rho c^2 a$) скорость уменьшается мало. Имеет место дисперсия рассматриваемых волн, поскольку c_t зависит от ω .

Высшие формы симметричных волн могут быть выражены через угол

$$\alpha_0(z) = \arctg \left[\frac{-z}{J_0(z)} \frac{dJ_0(z)}{dz} \right] = \arctg \left[\frac{zJ_1(z)}{J_0(z)} \right],$$

значения которого приведены в таблицах в конце этой главы и в конце книги. Предельные значения таковы:

$$\alpha_0(z) \simeq \frac{1}{2} z^2, \quad z \rightarrow 0;$$

$$\alpha_0(z) \simeq \arctg \left[z \operatorname{tg} \left(z - \frac{1}{4} \pi \right) \right], \quad z \rightarrow \infty,$$

$$\alpha_0(z) \simeq -\arctg y, \quad z = iy \rightarrow i\infty.$$

Уравнение для σ можно при этом записать в виде

$$\operatorname{ctg} [\alpha_0(k\sigma a)] = -\frac{hE_t/\rho a}{(k\sigma a)^2} + \frac{\rho_t h}{\rho a}.$$

Значения σ для высших типов волн можно вычислить при помощи таблицы углов α_0 в конце книги. Для этих высших типов волн σ действительно и скорость распространения $c_t = c/\sqrt{1-\sigma^2}$ больше c .

Для волны наинизшего типа и для очень эластичных труб или для высоких частот число $k\sigma a$ чисто мнимое и по модулю велико, а значит

$$\tau \simeq \frac{\rho \sigma \omega a^2/h}{E_t - \rho_t \omega^2 a^2}, \quad \frac{\rho \omega^2 a^3}{h} > E_t > \rho_t \omega^2 a^2$$

и скорость распространения равна

$$c_t = \frac{c}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Эта величина при большом τ может быть мала. Наконец, если $\rho_t \omega^2 a^2 > E_t$, то σ действительно также и для наинизшего типа волн и c_t больше c для всех типов волн. В этом предельном случае стенки трубы «управляемы массой» и они, двигаясь противоположно по фазе давлению, «толкают» волны вперед быстрее, чем они двигались бы в свободном пространстве. Конечно, рассмотренный нами здесь пример сильно упрощен. В действительности обычно приходится учитывать реакцию внешней среды и жесткость самой трубы. Наши формулы, однако, дают удовлетворительные результаты для движения воды внутри тонкой резиновой трубки или для движения крови в артериях.

Сферические координаты. Мы рассматривали сферические координаты r, ϑ, φ в связи с уравнением Лапласа [см. формулу (10.3.25) и следующие]. Выражения для коэффициентов Ламе ($h_r = 1$, h_ϑ и h_φ зависят от r) показывают, что в уравнении Гельмгольца только r -множитель зависит от k , и поэтому множители, зависящие от ϑ и φ , для уравнений Лапласа и Гельмгольца одинаковы. Разделяя переменные в уравнении Гельмгольца, получаем $\psi = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ и

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \Theta = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] R = 0.$$

Это разделение в отношении постоянных m, n, k почти полное: Θ и Φ не зависят от k , Φ не зависит от n и R не зависит от m .

Если φ может свободно меняться от нуля до 2π , то множитель Φ должен быть периодическим с периодом 2π относительно φ и m должно быть либо целым числом, либо нулем. Соответствующими собственными функциями являются $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$, или $e^{\pm im\varphi}$. Если ϑ может меняться от 0 до π , то постоянная n также должна быть целой и множитель Θ является присоединенной функцией Лежандра, определенной в (5.3.36) и (10.3.25). Чтобы освежить в памяти определения этих функций углов, уже рассматривавшихся в гл. 10, мы приведем их вновь:

$$\begin{aligned}\Theta &= P_n^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta T_{n-m}^m(\cos \vartheta) = \\ &= \frac{(n+m)!}{2^n n! (n-m)!} \sin^m \vartheta F\left(m-n, m+n+1 \mid m+1 \mid \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta\right).\end{aligned}$$

Свойства этих функций были подробно изучены в § 10.3 и функции табулированы в конце гл. 10. Полные угловые функции для сферических координат называются *сферическими гармониками*.

$$\begin{aligned}Y_{emn}(\vartheta, \varphi) &= \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta), \quad n=0, 1, 2, 3, \dots, \\ Y_{omn}(\vartheta, \varphi) &= \sin(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta), \quad m=1, 2, \dots, n-1, n; \\ Y_{e0n}(\vartheta, \varphi) &= Y_n(\vartheta) = P_n(\cos \vartheta).\end{aligned}$$

Функции при $m=0$ называются *зональными гармониками*, при $m=n$ — *секториальными гармониками*, а остальные — *тессеральными гармониками*. На стр. 262 мы видели, как они связаны с производными функции $1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ по x , y и z . На стр. 253 были также приведены интегральные представления этих функций.

Рассмотрим некоторые свойства симметрии сферических гармоник. Эти вопросы могли бы быть разобраны в гл. 10, но мы отложили их до этой главы, чтобы внести в нее некоторое разнообразие. Мы несколько раз подчеркивали, что оператор $\mathbf{r} \times \nabla$ есть оператор вращения. Этим утверждением мы хотели сказать, что изменение функции $\psi(\mathbf{r})$ в результате вращения по часовой стрелке на угол $|d\omega|$ вокруг оси, проходящей через начало в направлении $d\omega$, равно $d\omega \cdot \mathbf{r} \times \nabla \psi(\mathbf{r})$. Перемещение точки $\mathbf{r}$ при подобном вращении равно $d\omega \times \mathbf{r}$ и разность между значениями ψ при $\mathbf{r} + d\omega \times \mathbf{r}$ и $\mathbf{r}$ имеет вид

$$(d\omega \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi = d\omega \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \psi).$$

Интересное замечание по поводу сферических гармоник, которое мы хотели бы здесь сделать, состоит в том, что оператор вращения $\mathbf{r} \times \nabla$ оказывает на них весьма простое воздействие. Это легко показать, используя комплексную сферическую гармонику

$$X_n^m(\vartheta, \varphi) = Y_{emn} + iY_{omn} = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta).$$

Вектор $\mathbf{r} \times \nabla \psi = \mathbf{R}(\psi)$ в сферических координатах выражается так:

$$\mathbf{R}(\psi) = \mathbf{a}_\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \frac{\mathbf{a}_\vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \quad (11.3.39)$$

Компонента этого вектора по оси z , определяющая эффект вращения вокруг сферической оси, имеет вид

$$R_z(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

как это и должно быть. Вместо рассмотрения x - и y -компонент вектора $\mathbf{R}$, мы введем комплексную величину

$$R_x + iR_y = ie^{i\varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right),$$

что легче приведет нас к желаемым результатам:

Используя рекуррентные формулы для сферических гармоник, приведенные на стр. 307, мы получаем

$$\begin{aligned} R_z(X_n^m) &= (\mathbf{r} \times \nabla X_n^m)_z = imX_n^m, \\ R_x(X_n^m) + iR_y(X_n^m) &= -iX_n^{m+1}, \\ R_x(X_n^m) - iR_y(X_n^m) &= -i(n-m+1)(n+m)X_n^{m-1}. \end{aligned} \quad (11.3.40)$$

Следовательно, вращение X_n^m вокруг оси z просто меняет фазу этой функции — весьма очевидное утверждение, поскольку вращение вокруг оси z сводится к изменению переменной φ . Менее очевидный результат состоит, однако, в том, что вращение вокруг оси x или y переводит X_n^m в комбинацию не любых функций, а только двух соседних: X_n^{m+1} и X_n^{m-1} . Распространение этих правил на действительные операторы R_x и R_y и действительные гармоники Y не вызывает затруднений. Между прочим, существует очень тесная связь между этими результатами и формулой (1.6.42) и следующими, касающимися момента количества движения.

Если рассматривать операторы R_x , R_y , R_z как компоненты векторного оператора вращения, то возникает вопрос, что получится в результате применения к сферической гармонике квадрата абсолютной величины этого оператора. Имеет место формула

$$\begin{aligned} R^2 X_n^m &= \left[R_z^2 + \frac{1}{2}(R_x + iR_y)(R_x - iR_y) + \frac{1}{2}(R_x - iR_y)(R_x + iR_y) \right] X_n^m = \\ &= n(n+1)X_n^m, \end{aligned}$$

так что сферическая гармоника оказывается собственной функцией оператора R^2 . Это обстоятельство не имеет большого значения в классической физике, но для волновой механики оно очень важно, ибо векторный оператор $\mathbf{R}$ пропорционален моменту количества движения поля относительно начала, и квадрат оператора $\mathbf{R}$ совпадает с квадратом момента количества движения¹⁾.

Таким образом, сферические гармоники являются собственными функциями вращения вокруг сферической оси z и связаны очень простыми рекуррентными соотношениями для вращений вокруг осей x и y . Поскольку сферическая граница инвариантна относительно вращения вокруг любой оси, проходящей через ее центр, вполне естественно, что приспособленные к таким границам решения в сферических координатах обладают простыми свойствами по отношению к таким вращениям.

Совокупность сферических гармоник образует полную ортогональную систему собственных функций для координат ϑ , φ . Нормирующий множитель имеет вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta [Y_{emn}]^2 d\vartheta = \frac{4\pi}{\varepsilon_m (2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta [Y_{omn}]^2 d\vartheta,$$

так что для кусочно-непрерывной в области $0 < \vartheta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ функции F от ϑ , φ имеет место равенство

$$\begin{aligned} F(\vartheta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\varepsilon_m}{4\pi} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \sin u F(u, v) \times \\ &\times \{Y_{emn}(\vartheta, \varphi) Y_{emn}(u, v) + Y_{omn}(\vartheta, \varphi) Y_{omn}(u, v)\} du. \end{aligned} \quad (11.3.41)$$

Радиальные множители связаны с функциями Бесселя, рассмотренными в § 5.3 и 10.3 и табулированными в конце гл. 10. Полагая

¹⁾ С точностью до множителя — $\hbar^2$. — *Прим. ред.*

$R = J(r)/\sqrt{r}$, имеем

$$\frac{d^2 J}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right] J = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют функции

$$J_{n+\frac{1}{2}}(kr), N_{n+\frac{1}{2}}(kr), H_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Чтобы упростить асимптотические разложения, мы определяем радиальные решения следующим образом:

$$\begin{aligned} j_n(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \simeq \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi n\right), \quad kr \rightarrow \infty; \\ n_n(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{n+\frac{1}{2}}(kr) \simeq \frac{-1}{kr} \cos\left(kr - \frac{1}{2}\pi n\right), \quad kr \rightarrow \infty; \\ h_n(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) \simeq \frac{i^{-n}}{ikr} e^{ikr}, \quad kr \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (11.3.42)$$

Эти функции можно назвать *сферическими функциями Бесселя* соответственно первого, второго и третьего рода [см. (5.3.67)].

Сферические функции Бесселя. Специфической особенностью этих функций является то, что их разложения в ряды вблизи $z = \infty$ оказываются не асимптотическими, а точными. Причина этого заключается в том, что после выделения члена с существенной особенностью остается не бесконечный (расходящийся) ряд, а многочлен. Это легче всего показать для h_n ; две другие функции j_n и n_n являются соответственно действительной и мнимой частью $h_n(kr)$.

Из уравнения для h_n видно, что эта функция имеет полюс порядка $n+1$ при $r=0$ и существенную особенность при $r=\infty$. Чтобы явно выделить эту особенность, мы сначала положим $r=u/ik$ в уравнении для функции J , а затем произведем замену $J=e^u S(u)/u$. В получившемся уравнении для S положим $u=1/\omega$, чтобы изучить поведение S при $r \rightarrow \infty$. В конце концов имеем

$$\frac{d^2 S}{d\omega^2} + \left(\frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2}\right) \frac{dS}{d\omega} - \frac{n(n+1)}{\omega^2} S = 0.$$

Это уравнение допускает решение в виде ряда

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2}n(n+1)\omega + \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)\omega^2 - \dots = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m!(n-m)!} \left(-\frac{1}{2}\omega\right)^m, \end{aligned}$$

который обрывается на члене с n -й степенью ω . Следовательно, наша сферическая функция Ганкеля, удовлетворяющая требуемым предельным соотношениям при $r \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\begin{aligned} h_n(z) &= \frac{e^{iz}}{iz} i^{-n} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m!(n-m)!} \left(\frac{i}{2z}\right)^m = \\ &= -ie^{iz} \frac{(2n)!}{2^n n! z^{n+1}} F(-n | -2n | -2iz), \quad z = kr. \end{aligned} \quad (11.3.43)$$

Это выражение применимо при всех $z > 0$. Действительная часть этой функции равна $j_n(z)$, а мнимая часть $n_n(z)$. Другие свойства этих функций указаны в таблице в конце настоящей главы. В частности, там табулированы корни уравнений $j_n(\pi\beta) = 0$ и $dj_n(\pi\alpha)/d\alpha = 0$, которые используются при решении внутренних задач для условий Дирихле или Неймана на сферической поверхности.

Функция Грина и разложение плоской волны. Исходя из формулы (7.2.63) или из свойств функций Бесселя, указанных в конце гл. 10, мы находим, что функция Грина свободного пространства для расходящейся волны с частотой $\omega/2\pi$ имеет вид

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|\omega) = \frac{e^{ikhR}}{R} = ikh_0(kR) =$$

$$= ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \vartheta_0) \times$$

$$\times P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} j_n(kr_0) h_n(kr), & r > r_0, \\ j_n(kr) h_n(kr_0), & r < r_0. \end{cases} \quad (11.3.44)$$

Предполагая, что точка, где расположен источник, стремится к бесконечности, $r_0 \rightarrow \infty$, так, что $\vartheta_0 = \pi$, мы получаем разложение плоской волны e^{ikhz} , как в (7.2.52),

$$e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta) j_n(kr). \quad (11.3.45)$$

Для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении u, v , получаем

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - v)] P_n^m(\cos u) P_n^m(\cos \vartheta) j_n(kr), \quad (11.3.46)$$

где вектор $\mathbf{r}$ имеет длину r и сферические углы ϑ, φ , а вектор $\mathbf{k}$ — длину k и сферические углы u, v .

Это последнее разложение дает возможность получить интегральное представление разделенных решений в сферических координатах. Умножая обе части последнего равенства на Y_{emn} или Y_{omn} и интегрируя по u, v , получаем

$$Y_{emn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr) = \frac{1}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} Y_{emn}(u, v) \sin u \, du,$$

$$Y_{omn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr) = \frac{1}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} Y_{omn}(u, v) \sin u \, du. \quad (11.3.47)$$

Эти формулы связаны с интегральными представлениями (5.3.67). Подобные же интегральные формулы для функций Бесселя второго или третьего рода могут быть получены изменением контура интегрирования по u . Например, используя контур B рис. 5.10 (идя от $i\infty - \varepsilon$ до $-i\infty + \varepsilon$,

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$) и n раз интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} 2\pi \int_B e^{ikr \cos u} P_n(\cos u) \sin u \, du &= \frac{4\pi}{2^n n!} \int_{-\infty}^1 e^{ikrz} \left[\frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \right] dz = \\ &= \frac{4\pi}{n!} \left(\frac{ikr}{2} \right)^n \int_{-\infty}^1 e^{ikrz} (1 - z^2)^n dz = \frac{4\pi}{in!} \left(\frac{ikr}{2} \right)^n \int_{-\infty}^i e^{krt} (1 + t^2)^n dt = \\ &= 4\pi i^n \sqrt{\pi/2kr} H_{n+\frac{1}{2}}(kr) = 4\pi i^n h_n(kr), \end{aligned}$$

а отсюда

$$P_n(\cos \vartheta) h_n(kr) = \frac{1}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} dv \int_B e^{ik \cdot r} P_n(\cos u) \sin u \, du \quad (11.3.48)$$

и т. д.

Эти представления будут многократно использованы на последующих страницах. Здесь с их помощью мы установим связь между волновыми решениями в цилиндрических [$\eta = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$, z] и сферических [$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vartheta = \arccos(z/r)$, $\varphi = \arctg(y/x)$] координатах. С помощью соотношений $\eta = r \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$,

$$ik \cdot r = ikr [\cos \vartheta \cos u + \sin \vartheta \sin u \cos(\varphi - v)] = ik [z \cos u + \eta \sin u \cos(\varphi - v)]$$

и соотношения (11.2.21) для соответствующего интегрального представления функции $\cos(m\varphi) J_m(kr)$ формула (11.3.47) дает

$$P_n^m(\cos \vartheta) j_n(kr) = \frac{1}{2} i^{m-n} \int_0^\pi e^{ikz \cos u} J_m(k\eta \sin u) P_n^m(\cos u) \sin u \, du. \quad (11.3.49)$$

Аналогично решение $\cos(m\varphi) J_m(k\eta)$ может быть представлено в виде ряда $\sum B_n P_n^m(\cos \vartheta)$, коэффициенты B_n которого являются коэффициентами разложения по сферическим гармоникам:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \cos(m\varphi) J_n(kr \sin u) P_n^m(\cos u) \sin u \, du = \\ &= \frac{2n+1}{4\pi i^m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi e^{ikr \sin u \cos(\varphi-v)} \cos(mv) P_n^m(\cos u) \sin u \, du = \\ &= i^{n-m} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) P_n^m(0) j_n(kr), \end{aligned}$$

где $P_n^m(0) = 0$, когда $n - m$ нечетно, и $P_n^m(0) = (-1)^l [(2m+2l)!/2^{m+2l} l! (m+l)!]$, когда $n - m = 2l$ четно. Следовательно,

$$J_m(k\eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2m+4l+1)(2l)!}{2^{m+2l} l! (m+l)!} P_{m+2l}^m(\cos \vartheta) j_{m+2l}(kr) \quad (11.3.50)$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} J_0(k\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} P_{2n}(\cos \vartheta) j_{2n}(kr), \\ H_0(k\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} P_{2n}(\cos \vartheta) h_{2n}(kr). \end{aligned} \quad (11.3.51)$$

Вторая формула получена методами, аналогичными примененным для вывода (11.3.48).

Возникает естественный вопрос, достаточно ли хорошо сходятся вышеприведенные ряды. Ряд (11.3.45), например, не выглядит многообещающим в этом отношении. Однако изучение ряда для $j_n(kr)$ (который сходится абсолютно для всех конечных значений kr) показывает, что

$$j_n(kr) \simeq (kr/2)^n \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) / \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \right] \text{ при } n \gg \frac{1}{2} kr.$$

Следовательно, остаток ряда для n , больших чем $N \gg \frac{1}{2} kr$, ведет себя так же, как

$$\sum \left(\frac{ikr}{2}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} P_n(\cos \vartheta),$$

а этот ряд сходится абсолютно. Конечно, если kr велико, приходится брать много членов ряда, прежде чем их величина начнет уменьшаться, но в конце концов она будет уменьшаться, и мы сможем пренебречь остатком ряда.

Собственные колебания внутри сферы. Резонансные частоты для колебаний внутри сферы определяются корнями функций $j_n(kr)$. Если, например, краевые условия соответствуют звуковым волнам внутри сферы радиуса a , то следует пользоваться функцией первого рода $j_n(\pi\alpha_{ns}r/a)$, ограниченной при $r=0$, и величины α следует подобрать так, чтобы $dj_n(\pi\alpha)/d\alpha = 0$. Величина α_{ns} является s -м корнем этого уравнения; значения нескольких первых корней этого уравнения даны в таблице в конце главы. Собственными функциями для внутренности сферы при краевых условиях Неймана служат функции

$$\psi_{mns}^e(r) = \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) j_n\left(\frac{\pi\alpha_{ns}r}{a}\right), \quad (11.3.52)$$

а также аналогичные функции с $\sin(m\varphi)$ вместо $\cos(m\varphi)$ и с буквой o (нечетная) в качестве верхнего индекса. Эти собственные функции взаимно ортогональны между собой. Их нормирующие постоянные имеют вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^a [\psi_{mns}^e]^2 r^2 dr = \\ = \frac{2\pi a^3 (n+m)!}{\varepsilon_m (2n+1) (n-m)!} \frac{(\pi\alpha_{ns})^2 - n(n+1)}{(\pi\alpha_{ns})^2} [j_n(\pi\alpha_{ns})]^2 = \Lambda_{mns}^2, \end{aligned}$$

и точно так же для нечетных функций. Все эти волны для заданной пары значений n, s при всех допустимых значениях m (от 0 до n), как четные $[\cos(m\varphi)]$, так и нечетные $[\sin(m\varphi)]$, соответствуют одной и той же резонансной частоте $\omega_{ns}/2\pi$, где $\omega_{ns} = \pi c \alpha_{ns}/a$.

Стоячие волны для m и n , меньших чем s , соответствуют почти нормальному отражению от сферической поверхности и поэтому они фокусируются в центре сферы. Первый максимум находится примерно на расстоянии $na/\pi\alpha_{ns} \simeq na/\pi s$ от центра, а затем до наружной сферической границы амплитуда уменьшается приблизительно обратно пропорционально расстоянию от центра. С другой стороны, амплитуды волн, у которых m или n много больше чем s , очень малы в центре сферы и становятся большими приблизительно для тех r , которые превосходят $a(n-s-1)/n$. Заметим, что в этом случае (при $s \ll n$) $\pi\alpha_{ns} \simeq n + \pi s/2$, так что множитель

$[(\pi a_{ns})^2 - n(n+1)]/(\pi a_{ns})^2$ немного меньше единицы. Это показывает, что амплитуда волны подобного типа весьма мала почти во всей области внутри сферы.

Функция Грина для области, ограниченной сферой, имеет вид

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \sum_{m, n, s} \frac{4\pi}{\Lambda_{mns}^2 (k_{ns}^2 - k^2)} [\psi_{mns}^e(\mathbf{r}_0) \psi_{mns}^e(\mathbf{r}) + \psi_{mns}^o(\mathbf{r}_0) \psi_{mns}^o(\mathbf{r})], \quad (11.3.53)$$

где $k_{ns} = \pi a_{ns}/a$. Она, конечно, не равна функции Грина (11.3.44), так как функция (11.3.53) удовлетворяет условиям Неймана при $r = a$, в то время как функция (11.3.44) удовлетворяет условию для расходящегося излучения при $r \rightarrow \infty$.

Следующие два примера волновых процессов внутри сферы должны быть изучены не потому, что звуковые волны в областях, ограниченных сферой, часто встречаются, а потому что навыки в применении методов, приобретенные при решении этих задач, могут оказаться полезными в других, практически более интересных случаях.

Колебания полой гибкой сферы. Интересная во многих отношениях задача связана со свободными колебаниями сферической оболочки, надутой воздухом (сферической мембраны). Избыточное воздушное давление внутри сферы создает в мембране равномерное натяжение T (дин на сантиметр). В состоянии равновесия мембрана представляет собой полую сферу радиуса a и равновесное избыточное внутреннее давление равно $P = 2T/a$ (ибо $2\pi aT = \pi a^2 P$). В первом приближении мы пренебрегаем реакцией воздуха вне сферы; влияние излучения будет рассмотрено ниже, в этом параграфе.

Очень важно разделить колебания нашей сферы на различные типы, зависимость которых от угловых сферических координат имеет вид различных сферических гармоник, так как сферическим гармоникам различных порядков соответствуют различные собственные частоты. Кроме того, восстанавливающая сила, возвращающая мембрану в ее состояние равновесия, различна для гармоник нулевого или более высоких порядков.

Рассмотрим в первую очередь случай нулевого порядка, когда колебания сферически симметричны. В этом случае движение воздуха внутри сферы определяется потенциалом скоростей $\psi = A j_0(kr) e^{-i\omega t}$, где частота $\omega = kc$ подлежит определению. Избыточное давление p на внутренней стороне мембраны и радиальная скорость мембраны выражаются формулами

$$p_a = i\omega \rho A j_0(ka) e^{-i\omega t}, \quad v_r = -k A j_1(ka) e^{-i\omega t},$$

и их отношение должно быть равно акустическому импедансу мембраны для сферически симметричных колебаний. Если плотность мембраны равна ρ_s и ее толщина равна h , то масса мембраны, приходящаяся на единицу площади, составляет $h\rho_s$, так что нагрузка, создаваемая массой, равна $-i\omega h\rho_s$. Если радиус сферы увеличится сверх равновесного значения a на η , то напряжение в мембране увеличится сверх равновесного на величину $2\eta h E/a$, где E — модуль упругости мембраны для растяжения. Приращение сверх равновесного значения избыточного давления у мембраны при этом составит $4\eta h E/a^2$. Таким образом, импеданс упругости равен $i(4Eh/\omega a^2)$.

Следовательно, для свободных симметричных колебаний

$$\frac{p_a}{v_r} = -i\rho c \frac{j_0(ka)}{j_1(ka)} = -i\omega h\rho_s + i \frac{4Eh}{\omega a^2},$$

или

$$\frac{j_0(ka)}{j_1(ka)} = \frac{\rho_s h}{\rho a} ka - \frac{4Eh}{\rho c^2 ka^2}. \quad (11.3.54)$$

Различные значения $\pi\gamma_{0s}$ величины ka , которые удовлетворяют этому уравнению, определяют собственные частоты симметричных колебаний $\omega_{0s} = \pi\gamma_{0s}c/a$. Если определяющим фактором является масса мембраны, то самая низкая собственная частота равна

$$\pi\gamma_{01} \simeq \sqrt{\frac{3\rho a}{\rho_s h}} \left[1 + \frac{2Eh}{3\rho c^2 a} \right], \quad \rho_s h \gg 3\rho a; \quad 3\rho c^2 a \gg 2Eh. \quad (11.3.55)$$

Высшие частоты для симметрии такого типа следует определить из таблиц сферических функций Бесселя.

Чтобы найти резонансные частоты для других типов симметрии, мы должны вернуться к § 1.3 и рассмотреть вопрос о кривизне мембраны. Восстанавливающая сила мембраны для высших типов колебаний создается изменением соотношения между давлением и натяжением, вызванным изменением кривизны мембраны. Обращаясь к (1.3.6) и к рассуждениям начала § 2.1 о кривизне струны и мембраны, мы видим, что кривизна (или «выпученность») поверхности $\xi_1 = \text{const}$ равна $C = -(1/h_1 h_2 h_3) (\partial h_2 h_3 / \partial \xi_1)$. Отсюда можно найти восстанавливающую силу мембраны. Сила на единицу площади, возникающая в мембране с натяжением T при изгибании ее до совпадения с поверхностью $\xi_1 = \text{const}$, равна TC и давление, необходимое, чтобы удержать мембрану в этом положении, равно $-TC$. Для сферы в состоянии равновесия ($h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \sin \vartheta$) $C = -2/a$ и давление равно $2T/a$, как и было указано выше.

Но, поскольку мы интересуемся кривизной и полной силой для случая мембраны, выведенной из состояния равновесия, мы должны пойти дальше. Это нетрудно сделать, если смещение невелико. Предположим, что истинная поверхность имеет уравнение $\xi_1 = \eta(\xi_2, \xi_3) + \text{const}$, где смещение η достаточно мало, так что угол между нормалью к ξ_1 -поверхности и нормалью к истинной поверхности мал. Тогда единичный вектор, нормальный к истинной деформированной поверхности, с достаточной точностью выражается формулой

$$\mathbf{e} = \mathbf{a}_1 - \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} - \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_3}.$$

Чтобы получить кривизну деформированной поверхности, сложим составляющую вектора $\partial \mathbf{e} / \partial \xi_2$ вдоль ξ_2 и составляющую вектора $\partial \mathbf{e} / \partial \xi_3$ вдоль ξ_3 :

$$C_\eta \simeq \frac{-1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3) + \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_3}{h_2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_2}{h_3} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_3} \right) \right], \quad (11.3.56)$$

где первый член взят при $\xi_1 + \eta$.

Поэтому, когда мембрана с натяжением T , бывшая первоначально сферической, совпадает с поверхностью $r = a + \eta(\xi_2, \xi_3)$, сила реакций на единицу поверхности мембраны равна TC_η , а приращение сверх равновесного значения силы реакции равно

$$\begin{aligned} TC_\eta + \frac{2T}{a} &\simeq -\frac{2T}{a+\eta} + \frac{2T}{a} + \frac{T}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{T}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} \simeq \\ &\simeq \frac{T}{a^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{2T\eta}{a^2}. \end{aligned}$$

Если смещение равно $\eta = \eta_0 Y_{emn}(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}$, то приращение силы реакции на единицу поверхности составит

$$-p = -(n-1)(n+2) \frac{T}{a^2} \eta_0 Y_{emn}(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (11.3.57)$$

Это любопытный результат: функции углов Y оказываются собственными функциями оператора, измеряющего кривизну. Акустический импеданс мембраны для этого типа колебаний равен $-i\omega\rho_s h + i(n-1)(n+2)(T/\omega a^2)$. Тот же результат получается для нечетных функций Y_{omn} . Заметим, что при смещениях типа $n=1$ (например, $Y = \cos \vartheta$) в мембране не возникает восстанавливающей силы, что вполне естественно, так как подобное движение представляет собой смещение сферы как целого в ту или другую сторону и не вызывает изменения ее кривизны.

Если смещение η мембраны пропорционально определенной сферической гармонике Y_{emn} или Y_{omn} , то волновое движение внутри сферы должно иметь такую же зависимость от угла, как и это смещение:

$$\psi = A \frac{\cos}{\sin} (m\varphi) P_n^m (\cos \vartheta) j_n(kr) e^{-i\omega t}.$$

Отношение давления к радиальной скорости при $r=a$ для этого типа колебаний равно

$$z(a) = \frac{i\omega\rho j_n(ka)}{k j_n'(ka)} = -i\omega\rho a \operatorname{ctg} [\alpha_n(ka)],$$

где, как указано в таблице в конце этой главы, $\operatorname{tg} \alpha_n = -z j_n'(z)/j_n(z)$.

Собственные частоты колебаний мембраны и заключенного внутри нее воздуха получим, потребовав, чтобы импеданс мембраны равнялся импедансу заключенного внутри воздуха вблизи мембраны:

$$\operatorname{ctg} [\alpha_n(ka)] = \frac{\rho_s h}{\rho a} - \frac{(n-1)(n+2)}{(ka)^2} \frac{T}{\rho a c^2}, \quad n > 1. \quad (11.3.58)$$

Значения ka , полученные при решении этого уравнения, можно обозначить $\pi\gamma_{ns}$. Они могут быть использованы для определения резонансных частот системы $\omega_{ns} = \pi\gamma_{ns}c/a$ при $n > 1$. Для случая полной симметрии, когда $n=0$, эти частоты получаются из уравнения (11.3.54); в случае $n=1$, как уже отмечалось, нет вовсе восстанавливающей силы.

Колеблющаяся струна внутри сферы. В качестве второго примера рассмотрим гибкую струну, натянутую вдоль диаметра полой сферы. Этот диаметр будем считать совпадающим со сферической осью ($\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$). Радиус поперечного сечения струны η_1 много меньше радиуса сферы a . Пусть, далее, струна характеризуется натяжением T и массой на единицу длины ρ_s , а скорость распространения поперечных волн вдоль нее пусть равна c_s (скорость распространения акустических волн в воздухе внутри сферы обозначена через c). Предположим, что каким-нибудь образом эта струна приведена в колебание, соответствующее ее основному тону, так, что точки струны остаются в плоскости x, z . При этом струна взаимодействует с воздухом, заключенным внутри сферы, и задача состоит в вычислении результирующего акустического поля.

При изучении звуковой волны вблизи наружных стенок лучше всего использовать сферические координаты r, ϑ, φ , но когда мы имеем дело с явлениями вблизи поверхности струны, удобнее применить цилиндрические координаты $\eta = r \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$ и φ (то же φ , что и для сферических координат). Мы рассматриваем колебания системы, состоящей из струны и воздуха, заключенного внутри сферы. Струна колеблется, «возбуждая» звуковые волны в воздухе, которые в свою очередь воздействуют на струну, «возбуждая» ее колебания. Взаимодействие колебаний происходит на поверхности струны.

Так как мы не можем решить эту задачу точно, то придется начать с некоторого приближения; мы задаемся некоторым колебанием или вынуждающей силой и определяем последующие колебания и силы, пока не возвратимся к первоначальному колебанию и не выясним, насколько оно соответствует выбранному приближению. Мы начинаем с задания силы,

воздействующей на струну, предполагая, что она не зависит от положения точки на струне и равна $F_0 e^{-i\omega t}$ на единицу длины струны. В этом случае смещение точки струны, находящейся на расстоянии z от середины, составляет

$$\xi = \frac{F_0}{k_s^2 T} \left[\frac{\cos(k_s z)}{\cos(k_s a)} - 1 \right] e^{-i\omega t}, \quad k_s = \frac{\omega}{c_s}, \quad c_s^2 = \frac{T}{\rho_s}.$$

Так как движение происходит в плоскости x, z , то x -компонента скорости точки струны с координатой z равна $-i\omega\xi$, а радиальная компонента скорости воздуха у поверхности струны ($\eta = \eta_1$) равна

$$v_p = \frac{F_0}{i\omega\rho_s} \cos\varphi \left[\frac{\cos(k_s z)}{\cos(k_s a)} - 1 \right] e^{-i\omega t}.$$

Если бы струна была бесконечной и колебалась в свободном пространстве, то потенциал скоростей звуковой волны, излучаемой струной, был бы равен

$$\frac{F_0}{i\omega\rho_s} \cos\varphi \left[\frac{\cos(k_s z)}{\cos(k_s a)} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_s^2}} \frac{Z_1(\eta_1 \sqrt{k^2 - k_s^2})}{Z_1'(\eta_1 \sqrt{k^2 - k_s^2})} - \frac{Z_1(k\eta)}{kZ_1'(k\eta_1)} \right] e^{-i\omega t},$$

где $k = \omega/c$, Z_1 — некоторая линейная комбинация J_1 и N_1 , удовлетворяющая краевым условиям в бесконечности, а Z_1' — ее производная. Если радиус струны много меньше, чем длина волны $2\pi/k$, то вблизи струны главным членом в Z является функция Неймана (за исключением того маловероятного случая, когда краевые условия могут быть удовлетворены вовсе без привлечения функции Неймана). Поэтому вблизи поверхности струны $Z_1(x) \simeq A/x$ и $Z_1'(x) \simeq -A/x^2$, а значит,

$$\psi_a \simeq \frac{F_0}{i\omega\rho_s} \cos\varphi \left[1 - \frac{\cos(k_s z)}{\cos(k_s a)} \right] \frac{\eta_1^2}{\eta}, \quad \eta_1 < \eta \ll \frac{2\pi}{k}. \quad (11.3.59)$$

Предположим далее, что радиус струны η_1 достаточно мал по сравнению с радиусом сферической оболочки a , так что присутствие сферы заметно не изменяет потенциал вблизи струны, хотя вблизи сферической стенки он изменяется значительно. Следовательно, в формуле Грина

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint [\psi(\mathbf{r}_0) \text{grad}_0 G - G \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0)] dS_0$$

на поверхности струны с незначительной погрешностью можно использовать функцию G и ее производную из (11.3.53). В рассматриваемом случае следует, конечно, взять функцию Грина, нормальная составляющая градиента которой при $r_0 = a$ равна нулю [т. е. функцию ψ_{mns}^e из (11.3.52)]. Таким образом, решение, удовлетворяющее краевым условиям Неймана при $r = a$, может быть представлено в виде интеграла по поверхности струны

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\eta_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{-a}^a \left[G \frac{\partial}{\partial \eta_0} \psi_a - \psi_a \frac{\partial}{\partial \eta_0} G \right]_{\eta_0 = \eta_1} dz_0,$$

где G определяется формулой (11.3.53), а ψ_a — формулой (11.3.59).

При интегрировании по φ_0 все члены ряда для G дают нуль, за исключением тех, которые содержат ψ_{mns}^e при $m = 1$. Собрав все такие члены, мы получим

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) = & \frac{F_0 \eta_1^2}{2\omega \rho_s a^2} \sum_{n,s} \frac{i^{-n} (\pi a_{ns})^3 (2n+1)}{n(n+1) [(\pi a_{ns})^2 - n(n+1)] [(\pi a_{ns})^2 - k^2 a^2]} \frac{1}{j_n^2(\pi a_{ns})} \cos\varphi P_n^1(\cos\vartheta) \times \\ & \times j_n\left(\frac{\pi a_{ns} r}{a}\right) \int_{-a}^a \left[\frac{\cos(k_s z_0)}{\cos(k_s a)} - 1 \right] dz_0 \int_0^{2\pi} e^{i(\pi a_{ns}/a) z_0 \cos u} P_n^1(\cos u) \sin^2 u du. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (11.3.49), чтобы превратить $P_n^1(\cos \vartheta_0) j_n(\pi \alpha_{ns} r_0/a)$ в функцию от η_0 и z_0 , которую удобно дифференцировать по η_0 . В интегральном выражении (11.3.49) мы также положили $J_1(\pi \alpha_{ns} \eta_1 \sin u/a)$ равным $\pi \alpha_{ns} \eta_1 \sin u/2a$, поскольку η_1 значительно меньше a (это приближение непригодно для больших n или s , но соответствующие члены во всех случаях малы). Используем затем таблицу в конце гл. 10, чтобы выразить P_n^1 через производные и произвести интегрирование по u по частям (производим замену $x = \cos u$). В результате получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 e^{igzx} (1-x^2) \left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2-1)^n \right] dx = \\ & = 2i^{n+1} \frac{(gz/2)^{n+1}}{n!} \int_{-1}^1 e^{igzx} \left\{ -(1-x^2)^{n+1} + (1-x^2)^n \left[\frac{2(n+1)x}{igz} + \frac{n(n+1)}{(igz)^2} \right] \right\} dx = \\ & = i^{n+1} \sqrt{\pi} \frac{n+1}{\sqrt{gz/2}} \left\{ -J_{n+\frac{3}{2}}(gz) - \frac{n}{gz} J_{n+\frac{1}{2}}(gz) + J_{n-\frac{1}{2}}(gz) \right\} = \\ & = 2i^{n+1} (n+1) \left\{ \frac{n+1}{gz} j_n(gz) - 2j_{n+1}(gz) \right\}, \quad g = \frac{\pi \alpha_{ns}}{a}, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались одним из интегральных представлений функций Бесселя.

Чтобы вычислить коэффициенты разложения для ψ , следует полученное выражение проинтегрировать по z_0 . Поскольку мы изучаем только те силы, действующие на струну (и тем самым движения струны), которые симметричны по отношению к центру струны и сферы, в разложение войдут только звуковые волны, обладающие соответствующей симметрией и, значит, все члены с четными значениями n исчезнут. Интегралы для нечетных n не могут быть выражены в конечной форме и обычно их приходится подсчитывать численно. Мы можем положить

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left[\frac{\cos(k_s z_0)}{\cos(k_s a)} - 1 \right] dz_0 \int_0^\pi e^{igz_0 \cos u} P_n^1(\cos u) \sin^2 u \, du = \\ & = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2i^{n+1} (n+1) a}{\cos(k_s a)} A_n(k_s a; \pi \alpha_{ns}), & n = 1, 3, 5, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$A_n(\alpha; \beta) = \int_{-1}^1 [\cos(\alpha w) - \cos(\alpha)] \left[\frac{n+1}{\beta w} j_n(\beta w) - 2j_{n+1}(\beta w) \right] dw$$

— безразмерная функция параметров α, β , конечная для конечных действительных значений α, β .

Теперь можно написать

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) \simeq i \frac{F_0 \eta_1^2}{\omega \rho_s a} \sum_{n, s} \frac{(\pi \alpha_{ns})^2 (2n+1) A_n(k_s a; \pi \alpha_{ns})}{n [(\pi \alpha_{ns})^2 - n(n+1)] [(\pi \alpha_{ns})^2 - k^2 a^2]} \frac{\cos \varphi P_n^1(\cos \vartheta) j_n(\pi \alpha_{ns} r/a)}{\cos(k_s a) j_n^2(\pi \alpha_{ns})}, \quad (11.3.60)$$

где суммирование производится по нечетным значениям n . Сила, с которой звуковые волны действуют на единицу длины струны в направлении положительных x , равна интегралу от x -компоненты давления при $\eta = \eta_1$. Так, при $z = 0$ (середина струны) эта сила равна

$$F_s = -i\omega\rho\eta_1 \int_0^{2\pi} \psi(\eta_1, \frac{1}{2}\pi, \varphi) \cos\varphi d\varphi,$$

где параметр k , входящий в члены ka и $k_s a = kca/c_s$, пока остается неопределенным.

Эта сила F_s , вообще говоря, не равна первоначальной силе F_0 . Во-первых, она зависит от z , что не имеет места для F_0 . Во-вторых, она обычно значительно меньше, чем F_0 , благодаря безразмерному множителю $\rho\eta_1^3/\rho_s a$, который весьма мал, поскольку η_1 значительно меньше, чем a , и плотность воздуха ρ много меньше, чем ρ_s/η_1^2 . Однако в знаменателе каждого члена имеются два множителя $[(\pi\alpha_{ns})^2 - (ka)^2]$ и $\cos(k_s a) = \cos(kac/c_s)$; за счет этих множителей, которые могут быть весьма малыми, можно добиться равенства F_s и F_0 в каждой точке струны. Если приравнять F_s и F_0 во всех точках, то, мы, конечно, получим точное решение для одного из свободных колебаний системы струна — воздух. Для получения этого точного решения следовало бы использовать F_s вместо F_0 в нашем уравнении. В формуле для $F_0 A_n$ мы получили бы вместо $F_0 \left[\frac{\cos(k_s z_0)}{\cos(k_s a)} - 1 \right]$ выражение

$$\begin{aligned} \cos(k_s z_0) \left[\operatorname{tg}(k_s a) \int_0^{k_s a} F_s \left(\frac{\xi}{a} \right) \cos \xi d\xi - \int_{k_s z_0}^{k_s a} F_s \left(\frac{\xi}{a} \right) \sin \xi d\xi \right] - \\ - \sin(k_s z_0) \int_0^{k_s z_0} F_s \left(\frac{\xi}{a} \right) \cos \xi d\xi \end{aligned}$$

В результате получилось бы интегральное уравнение для F_s , которое, однако, слишком сложно для решения. Вместо этого мы предположим, что F_s для некоторых свободных колебаний почти постоянна и равна F_0 . Для некоторых из низших частот это почти верно, и мы можем получить приближенное решение, приняв F_s равным F_0 при $z_0 = 0$.

Резонансные частоты системы. Резонанс системы имеет место только в тех случаях, когда струна находится вблизи своего резонанса, т. е. при $\cos(kac/c_s) \simeq 0$, или когда близки к резонансу колебания воздуха внутри сферы, т. е. при $ka \simeq \pi\alpha_{ns}$. В первом случае энергия колебаний сосредоточена главным образом в струне и струна «вынуждает» колебания воздуха внутри сферы; во втором случае стоячая звуковая волна внутри сферы, обладая основной частью энергии, «вынуждает» колебания струны. В каждом из этих случаев, поскольку $\rho\eta_1^3/\rho_s a$ мало, взаимодействие между воздухом и струной слабое, и собственные частоты системы близки к собственным частотам либо струны, либо воздуха внутри сферы. Для нескольких первых собственных колебаний струны или воздуха внутри сферы, симметричных относительно $z = 0$, F_s почти не зависит от z , и F_s , полученная при помощи (11.3.60), приближенно равна F_0 .

Например, вблизи наинизшего звукового резонанса рассматриваемого типа симметрии имеем $k = \pi\alpha_{11}/a - \epsilon$, где ϵ мало. В первом приближении по ϵ мы в ряде (11.3.60) ограничиваемся только членом $n = 1, s = 1$ и получаем

$$\epsilon_{11} \simeq \frac{(\pi\rho\eta_1^4/2\rho_s a^3) (\pi\alpha_{11})^2 A_1 (\pi\alpha_{11}c/c_s; \pi\alpha_{11})}{[(\pi\alpha_{11})^2 - 2] I_1^2 (\pi\alpha_{11}) \cos(\pi\alpha_{11}c/c_s)}. \quad (11.3.61)$$

При этом мы учли, что $P_1^1(0) = 1$ и $j_1(\pi\alpha_{11}\eta_1/a) \simeq \frac{1}{3}(\pi\alpha_{11}\eta_1/a)$. Это выражение служит для определения резонансной частоты по формуле

$$\nu_{11} \simeq \frac{c\alpha_{11}}{2a} - \frac{c\epsilon_{11}}{2\pi}.$$

Для вычисления ψ при этом следует подставить в (11.3.60) $k_{11}a = \pi\alpha_{11} - \epsilon_{11}a$ и $k_{11}ac/c_s$ соответственно вместо ka и $k_s a$. В первом приближении следует рассмотреть только член $n = 1, s = 1$. Тогда

$$\psi_{11} \simeq F_0 \frac{3a}{\pi\alpha_{11}\eta_1} \cos \varphi P_1^1(\cos \vartheta) j_1\left(\frac{\pi\alpha_{11}r}{a}\right),$$

где F_0 теперь постоянная, которую следует выбрать так, чтобы решение согласовывалось с заданной амплитудой колебаний струны или воздуха. Заметим, что если ν_{11} ниже наименьшей собственной частоты струны, то ν_{11} также ниже собственной частоты сферической полости без струны. В области частот ниже своей наименьшей собственной частоты струна действует как дополнительная нагрузка массой для колебаний воздуха.

Для наименьшего резонанса, для которого большая часть энергии сосредоточена в струне, мы принимаем $k = \pi c_s/2ac - \delta$ и получаем

$$\delta \simeq \frac{\pi r \eta_1^4}{3\rho_s a^3} \sum_{n,s} \frac{(\pi\alpha_{ns})^3 (2n+1) A_n\left(\frac{1}{2}\pi; \pi\alpha_{ns}\right)}{n[(\pi\alpha_{ns})^2 - n(n+1)] [(\pi\alpha_{11})^2 - (\pi c_s/2c)^2] j_n^2(\pi\alpha_{ns})}. \quad (11.3.62)$$

Зная δ , мы можем рассчитать колебания и струны и воздуха.

Случай, когда собственные частоты струны и сферы близки друг к другу, является случаем *вырождения*, и его следует рассмотреть отдельно. Когда наименьшая собственная частота полости $\pi\alpha_{11}/2a$ отличается от наименьшей собственной частоты струны $c_s/4a$ на малую величину $\Delta\nu$, т. е. когда $\pi c_s/2c = \pi\alpha_{11} + (2\pi a\Delta\nu/c)$ и $2\pi a\Delta\nu/c \ll 1$, мы полагаем $ka = \pi\alpha_{11} - \gamma$. Два допустимых значения ka , определяющих две резонансные частоты, при этом равны

$$(ka)_{\text{рез}} \simeq \pi\alpha_{11} + \frac{\pi a\Delta\nu}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi a\Delta\nu}{c}\right)^2 + K}, \quad (11.3.63)$$

где

$$K \simeq \frac{\pi r \eta_1^4 c_s}{2\rho_s a^2 c} \frac{(\pi\alpha_{11})^2 A_1(\pi\alpha_{11}c/c_s; \pi\alpha_{11})}{[(\pi\alpha_{11})^2 - 2] j_1^2(\pi\alpha_{11})}.$$

Как показано на рис. 11.7, когда $|\Delta\nu|$ больше чем $(c/\pi a)\sqrt{K}$, две допустимые частоты резко отличаются друг от друга; одна из них приближается к горизонтальной линии, соответствующей решению (11.3.61), а другая — к решению (11.3.62). Когда собственная частота отдельно взятой струны приближается к собственной частоте резонатора без струны ($\Delta\nu \rightarrow 0$), две резонансные частоты не сливаются, а остаются разделенными некоторым расстоянием, которое при $\Delta\nu = 0$ пропорционально $\sqrt{K}$. Поэтому, когда $\Delta\nu$ меняет знак, тип колебания с концентрацией энергии в струне (диагональная линия) переходит в тип колебания с концентрацией энергии в звуковой волне (горизонтальная линия), и наоборот. Очевидна аналогия между этим фактом и известными свойствами простых связанных осцилляторов.

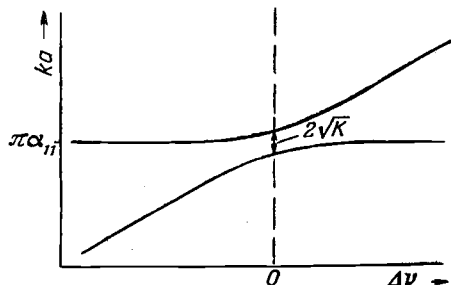


Рис. 11.7. Поведение резонансных частот вблизи точки вырождения $\Delta\nu=0$ [см. формулу (11.3.63)]; K — постоянная связи.

Излучение сферы. Для решения внешних задач введем фазовые углы, аналогичные тем, которые уже применялись в задачах об излучении и рассеянии на цилиндре (см. стр. 351 и таблицы в конце этой главы):

$$\begin{aligned} j_n(z) &= D_n(z) \sin[\delta_n(z)], & \frac{d}{dz} j_n(z) &= -D'_n(z) \sin[\delta'_n(z)]; \\ n_n(z) &= -D_n \cos \delta_n, & \frac{d}{dz} n_n(z) &= D'_n \cos \delta'_n; \\ h_n(z) &= -iD_n e^{i\delta_n}, & \frac{d}{dz} h_n(z) &= iD'_n e^{i\delta'_n}. \end{aligned} \quad (11.3.64)$$

Потенциал скоростей звуковых волн вне сферы радиуса a , радиальная скорость на поверхности которой равна $v_0(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi i k} \sum_{m, n} \varepsilon_m (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{e^{-i\delta'_n(ka)}}{D'_n(ka)} h_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0. \end{aligned} \quad (11.3.65)$$

Потенциал скоростей, радиальная скорость и давление на больших расстояниях от сферы при этом равны

$$\begin{aligned} \psi &\simeq \frac{ca}{ikr} e^{ik(r-ct)} f(\vartheta, \varphi), & v_r &\simeq \frac{ca}{r} e^{ik(r-ct)} f(\vartheta, \varphi), \\ p &\simeq \frac{\rho c^2 a}{r} e^{ik(r-ct)} f(\vartheta, \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= \frac{-i}{cka} \sum_{n, m} \frac{i^{-n} \varepsilon_m}{4\pi} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{e^{-i\delta'_n}}{D'_n} P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0. \end{aligned} \quad (11.3.66)$$

Средняя интенсивность S излучаемого звука в точке (r, ϑ, φ) ($r \gg a$) равна $\frac{1}{2} |pv_r|$, так что

$$S = \frac{\rho c^3 a^2}{2r^2} |f(\vartheta, \varphi)|^2,$$

и полная мощность излучения колеблющейся сферы выражается формулой

$$\begin{aligned} P &= \frac{\rho c^3}{8\pi k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \times \\ &\times \frac{v_0(\vartheta_0, \varphi_0) v_0(\vartheta_1, \varphi_1)}{c D'_n(ka) c D'_n(ka)} P_n [\cos \vartheta_0 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_0 \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_0 - \varphi_1)]. \end{aligned} \quad (11.3.67)$$

Для очень длинных волн ($ka \ll 1$), как и при излучении цилиндрических волн, формула упрощается. Приближенные формулы показывают, что при этом $1/D'_0(ka) \simeq (ka)^2$ и $1/D'_n$ для $n > 0$ убывают как высшие степени ka ; $\delta'_0(ka) \simeq (1/3)(ka)^3$ и δ'_n при $n > 0$ является также величиной более высокого порядка малости. Поэтому, если интеграл от $v_0(\vartheta, \varphi)$ по φ и ϑ не равен нулю, то

$$f(\vartheta, \varphi) \simeq \frac{-ika}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0, \quad ka \rightarrow 0.$$

Излучаемая волна сферически симметрична, как если бы сфера расширялась и сжималась равномерно по всей поверхности. Величина Q , равная

$$Q = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{\pi} v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0, \quad f(\vartheta, \varphi) \simeq -i \frac{kQ}{4\pi ac},$$

называется *эквивалентной производительностью* колеблющейся сферы как источника излучения. Интенсивность излучения на расстоянии r от центра сферы для предельного случая длинных волн равна

$$S \simeq \frac{\rho c k^2 Q^2}{32\pi^2 r^2} = \frac{\rho \omega^2 Q^2}{32\pi^2 c r^2}, \quad ka \rightarrow 0,$$

а предельное выражение для полной излучаемой сферой мощности имеет вид

$$P \simeq 4\pi S r^2 \simeq \frac{\rho \omega^2 Q^2}{8\pi c}, \quad ka \rightarrow 0.$$

Очень короткие волны стремятся распространяться вонне радиально от каждой точки сферы, так что угловая зависимость на любом расстоянии такая же, как угловая зависимость движения точек поверхности сферы. Как показывают таблицы в конце этой главы, при $ka \gg 1$ фазовый угол $\delta'_n(ka)$ для $n < N = \sqrt{ka}$ приблизительно равен $ka - \pi(n+1)/2$, а амплитуды $D'_n(ka)$ равны $1/ka$, в то время как для $n > N$ амплитуды D'_n при $n \rightarrow \infty$ неограниченно возрастают. Поэтому функция углового распределения (11.3.66) приобретает вид

$$f(\vartheta, \varphi) \simeq \frac{1}{c} \sum_{m,n} \frac{\varepsilon_m}{4\pi} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{\pi} v_0(\vartheta_0, \varphi_0) \times \\ \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 = \frac{v_0(\vartheta, \varphi)}{c}, \quad ka \rightarrow \infty,$$

так что для очень коротких волн $v_r \simeq [av_0(\vartheta, \varphi)/r] e^{ik(r-ct)}$ и $p = \rho c v_r$; отсюда $S \simeq (\rho c a^2/r^2) |v_0(\vartheta, \varphi)|^2$ при $ka \rightarrow \infty$. Этот результат аналогичен полученному на стр. 353 для полярных координат.

Излучение диполя. Сфера, сжимающаяся и расширяющаяся равномерно по всей поверхности, представляет собой пример источника простейшего типа; следующим по простоте является случай, когда сфера колеблется как целое взад и вперед вдоль оси z . Если смещение вдоль оси z равно $Ae^{-i\omega t}$, то радиальная скорость поверхности сферы в точке (a, ϑ, φ) равна $-i\omega A \cos \vartheta e^{-i\omega t}$, и функция углового распределения f имеет вид

$$f(\vartheta, \varphi) = i \frac{A}{a} \frac{e^{-i\delta'_1(ka)}}{D'_1(ka)} \cos \vartheta,$$

а излучаемая мощность равна

$$P = \frac{2\pi \rho c^3 |A|^2}{3 [D'_1(ka)]^2} \simeq \begin{cases} \frac{1}{6} \pi \rho c^3 k^6 a^6 |A|^2, & ka \rightarrow 0, \\ \frac{2}{3} \pi \rho c^3 k^2 a^2 |A|^2, & ka \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Избыточное давление волны, вызванной движением сферы, вблизи сферической поверхности равно

$$p = \rho c \omega A \frac{D_1(ka)}{D'_1(ka)} e^{i(\delta_1 - \delta'_1) - i\omega t} \cos \vartheta,$$

где $-i\omega A$ является, очевидно, амплитудой скорости движения сферы. Полная сила реакции поля излучения, препятствующая движению сферы,

равна интегралу по сфере от z -компоненты вектора $p\mathbf{n}_0$, где $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор нормали к поверхности сферы. Опуская временной множитель $e^{-i\omega t}$, мы получаем

$$F = \frac{4}{3} \pi a^2 \rho c \omega A \frac{D_1}{D_1'} e^{i(\delta_1 - \delta_1')} = -\frac{4}{3} \pi a^2 \rho c \omega A \frac{h_1(ka)}{h_1'(ka)} =$$

$$= -\frac{4}{3} i \pi a^2 \rho c \frac{\omega^2 (\omega + i\omega_0)}{[\omega + \omega_0 (i+1)] [\omega + \omega_0 (i-1)]} A, \quad \omega_0 = \frac{c}{a}.$$

Вместо h_1 и h_1' мы подставили их выражения через $ka = \omega/\omega_0$, имеющиеся в таблицах в конце этой главы. Импеданс излучения сферы для колебательного движения такого типа поэтому равен

$$Z_r = \frac{F}{-i\omega A} = M_a \frac{\omega \omega_0 (\omega + i\omega_0)}{\omega^2 + 2i\omega\omega_0 - 2\omega_0^2},$$

где $M_a = (4/3) \pi a^3 \rho$ — масса воздуха в объеме сферы. При низких частотах ($\omega \ll \omega_0 = c/a$) имеем чисто реактивный импеданс $-(1/2) i\omega M_a$, эквивалентный нагрузке массой $M_a/2$; при высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) имеем чисто активный импеданс $(4/3) \pi a^2 \rho c$.

Предположим теперь, что сфера имеет массу M_0 . Тогда комбинированный импеданс механической массы и излучения равен $Z_r - i\omega M_0$, и если сила $F_\omega e^{-i\omega t}$ приложена к сфере в направлении оси z , то скорость сферы и потенциал скоростей звуковой волны на больших расстояниях от сферы выражаются формулами

$$U_\omega = \frac{(F_\omega M_0 / -i\omega) [\omega + \omega_0 (i+1)] [\omega + \omega_0 (i-1)] e^{-i\omega t}}{[M_0 \omega + i\omega_0 (M_0 + M_a/2) + \omega_0 \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}]} \times$$

$$\times [M_0 \omega + i\omega_0 (M_0 + M_a/2) - \omega_0 \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}]^{-1}$$

$$\psi_\omega \simeq \frac{(F_\omega M_0 a c / r) \exp \left\{ i\omega \left[\frac{r-a}{c} - t \right] \right\} \cos \vartheta}{\{M_0 \omega + i\omega_0 (M_0 + M_a/2) + \omega_0 \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}\}} \times$$

$$\times [M_0 \omega + i\omega_0 (M_0 + M_a/2) - \omega_0 \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}]^{-1}.$$

Теперь при помощи метода преобразования Фурье или Лапласа можно рассмотреть неустановившиеся колебания сферы и излучение сферы при воздействии на нее силы, приложенной в направлении оси z . Если, например, сообщить сфере единичный импульс при $t=0$, то потенциал скоростей в момент t в точке (r, ϑ, φ) будет равен

$$g(\mathbf{r}|t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_\omega}{F_\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & ct < r-a, \\ \frac{a^2 \cos \vartheta}{r \sqrt{M_0^2 - M_a^2/4}} \exp \left[\left(1 + \frac{M_a}{2M_0} \right) \left(\frac{r-a}{a} - \frac{ct}{a} \right) \right] \times \\ \times \sin \left[\sqrt{1 - \left(\frac{M_a}{2M_0} \right)^2} \left(\frac{ct}{a} - \frac{r-a}{a} \right) \right], & ct > r-a \end{cases}$$

Колебание существенно затухает; оно заметно только на первой половине длины волны. Отметим, между прочим, что если масса сферы значительно больше, чем масса воздуха в объеме сферы, то длина излучаемой волны равна $2\pi a$.

Излучение при неустановившемся движении сферы, вызванном произвольной силой $f(t)$, приложенной к сфере, можно определить по формуле (11.1.15).

Излучение группы источников. Если излучение создается не колебаниями поверхности сферы, а группой источников, находящихся внутри

сферической области радиуса a , то для расчета поля излучения можно воспользоваться функцией Грина (11.3.44). Предположим, что плотность источников в единице объема равна $q(r, \vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}$, причем q обращается в нуль при $r > a$. Тогда потенциал скоростей при $r \gg a$ имеет вид

$$\psi \simeq (e^{ikr - i\omega t} / r) f(\vartheta, \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= \iiint q(x_0, y_0, z_0) e^{-i(k/r)(xx_0 + yy_0 + zz_0)} dV_0 = \\ &= \sum_{m,n} \varepsilon_m i^{-n} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi_0 \int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^a q(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) j_n(kr_0) r_0^2 dr_0. \end{aligned} \quad (11.3.68)$$

Сравним эти формулы с аналогичными формулами (10.3.42) и (10.3.44) для статического случая. Разложение по сферическим гармоникам мало отличается от (10.3.42), ибо при $n > ka$ интегралы в этих двух выражениях мало отличаются друг от друга. Однако в нашем случае все члены, соответствующие различным сферическим гармоникам, умножаются на одну и ту же функцию от r , а именно на e^{ikr}/r , а не на различные степени $1/r^{n+1}$. Поле излучения для всех высших типов сферических гармоник убывает с расстоянием значительно медленнее, чем статическое поле. Интеграл, на который умножается сферическая гармоника Y_{emn} или Y_{omn} , представляет собой mn -ю компоненту плотности распределения источников.

Интеграл по x, y, z , однако, в большей мере отличается от своего статического аналога. Прежде всего зависимость от x_0, y_0, z_0 , фигурирующая под интегралом, выражается через показательную функцию, а не через алгебраическую.

Если ka больше единицы, то разложение экспоненты по степеням x, y, z сходится медленно и непосредственное интегрирование экспоненты возвращает нас ко второй формуле, содержащей сферические гармоники.

Если, однако, $ka < 1$, то разложение экспоненты в ряд сходится быстро. При этом нулевой член представляет собой полную *производительность источников* $\iiint q dV$. Первые члены разложения $f(\vartheta, \varphi)$ по x, y, z равны $-ikx/r \iiint x_0 q(x_0, y_0, z_0) dV_0$ и аналогично для y и z . Интеграл, входящий в это выражение, называется x -компонентой *дипольного момента* распределения источников (см. стр. 260). Члены второго порядка содержат интегралы, называемые *квадрупольными моментами*, и т. д. Соотношения между этими *мультипольными моментами* и интегралами по сферическим гармоникам такое же, как и в рассмотренном на стр. 263 статическом случае.

Излучение поршня, являющегося частью сферы. Пусть часть сферы (радиуса a) $0 < \vartheta < \vartheta_0$ представляет собой поршень, движущийся с радиальной скоростью $Ue^{-i\omega t}$, а остальная часть сферы неподвижна. Тогда, вычисляя интеграл (11.3.65), получаем выражение для потенциала

скоростей вне сферы

$$\psi = \frac{Ue^{-i\omega t}}{2ik} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\delta'_n(ka)}}{D'_n(ka)} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta) h_n(kr). \quad (11.3.69)$$

Коэффициент в скобках при $n=0$ равен $1 - \cos \vartheta_0$.

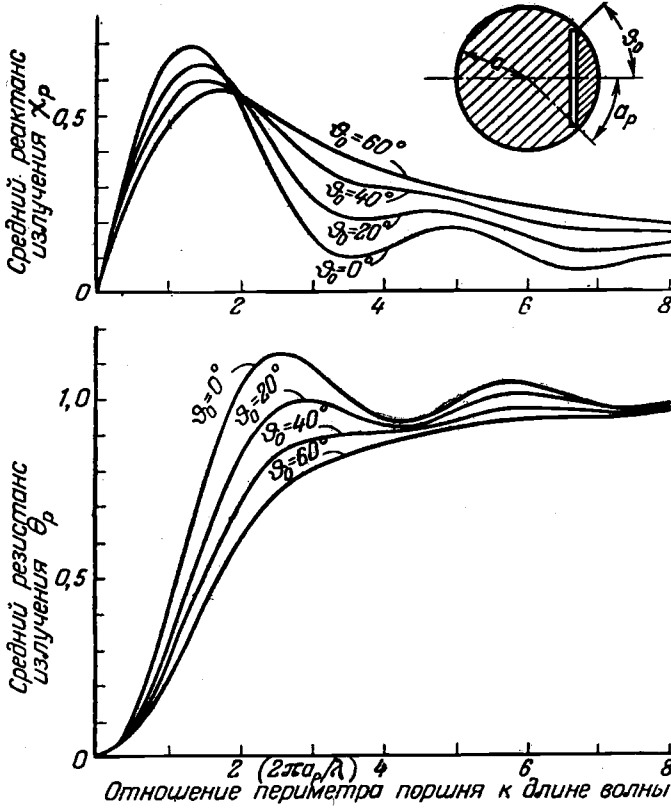


Рис. 11.8. Активная и реактивная составляющие акустического импеданса для случая поршня, являющегося частью сферы.

Полный импеданс поршня равен $\rho c (4\pi a^2) \sin^2(\vartheta_0/2) (\theta_p - i\chi_p)$.

На больших расстояниях от сферы это выражение переходит в следующее:

$$\psi \simeq \frac{-Ue^{i\hbar(r-ct)}}{2k^2 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\delta'_n - in\pi/2}}{D'_n(ka)} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] P_n(\cos \vartheta).$$

На поверхности сферы давление равно $(ikrc\psi)_{r=a}$; интегрируя по поверхности поршня ($0 < \vartheta < \vartheta_0$), получаем

$$F = \frac{i\rho c}{2} Ue^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(ka)}{h'_n(ka)} \frac{2\pi a^2}{2n+1} [P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)]^2 =$$

$$= 4\pi a^2 \rho c Ue^{-i\omega t} \sin^2\left(\frac{1}{2} \vartheta_0\right) [\theta_p - i\chi_p],$$

где

$$\theta_p = \frac{1}{4 \sin^2(\vartheta_0/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)]^2}{(2n+1)(ka)^2 [D'_n(ka)]^2}, \quad (11.3.70)$$

$$\chi_p = \frac{1}{4 \sin^2(\vartheta_0/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[P_{n-1}(\cos \vartheta_0) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)]^2}{2n+1} \frac{D_n(ka)}{D'_n(ka)} \cos [\delta_n(ka) - \delta'_n(ka)].$$

На рис. 11.8 изображены графики величин θ_p и χ_p , как функций от отношения эквивалентного периметра поршня к длине волны $2\pi a_p/\lambda = 2ka \sin(\vartheta_0/2)$. Заметим, что для длинных волн (по сравнению с $2\pi a_p$) активная часть импеданса меньше реактивной; последняя представляет собой реактивный импеданс эквивалентной механической массы, пропорциональный k . Для коротких волн $\theta_p \simeq 1$ и $\chi_p \simeq 0$, так что полный импеданс действителен и равен произведению ρc на площадь поршня $\pi a_p^2 = 4\pi a^2 \sin^2(\vartheta_0/2)$.

Рассеяние плоской волны на сфере. На стр. 354—359 в связи с задачей о рассеянии на круглом цилиндре были рассмотрены общие методы и принципы расчета рассеяния плоских волн. При изучении рассеяния на сфере мы исходим из разложения плоской волны (11.3.45). Если в силу краевых условий ψ равно нулю при $r=a$, то решение принимает вид

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta) \left[j_n(kr) - \frac{j_n(ka)}{h_n(ka)} h_n(kr) \right] e^{-i\omega t} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta) e^{-i\delta_n(ka)} [\cos \delta_n j_n(kr) + \sin \delta_n n_n(kr)] e^{-i\omega t} = \\ &= e^{ik(z-ct)} + \psi_s e^{-i\omega t}, \\ \psi_s &= - \sum_n (2n+1) i^{n+1} e^{-i\delta_n(ka)} \sin [\delta_n(ka)] P_n(\cos \vartheta) h_n(kr). \end{aligned} \quad (11.3.71)$$

Амплитуда рассеянной волны на больших расстояниях от сферы, отношение S интенсивности рассеянной волны к интенсивности падающей и отношение Q полной рассеянной мощности к интенсивности падающей волны (эффективное поперечное сечение рассеяния сферы) выражаются формулами

$$\begin{aligned} \psi_s &\simeq - \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_n (2n+1) e^{-i\delta_n} \sin \delta_n P_n(\cos \vartheta), \\ S &= \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{m,n} (2m+1)(2n+1) \cos(\delta_m - \delta_n) \sin \delta_m \sin \delta_n P_m(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta), \\ Q &= 4\pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(ka)^2} \sin^2 [\delta_n(ka)]. \end{aligned} \quad (11.3.72)$$

Эффективное поперечное сечение Q можно вычислить и иным путем, который окажется полезным позднее, когда мы будем изучать поглощение сферой. Мы найдем Q , вычислив работу, произведенную давлением падающей волны на поверхности сферы за единицу времени, и разделив ее

на интенсивность падающей волны $\frac{1}{2} \rho c k^2$. Давление падающей волны $i\omega\rho\psi$ на поверхности сферы равно

$$p_0 = i\rho c k \sum i^n (2n+1) P_n(\cos \vartheta) j_n(ka),$$

а истинная скорость (мы имеем в виду составляющую скорости по внутренней нормали) при $r=a$ равна

$$\begin{aligned} -v_r &= -k \sum i^n (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \frac{e^{-i\delta_n}}{D_n} [-n_n(ka) j'_n(ka) + n'_n(ka) j_n(ka)] = \\ &= -\frac{k}{(ka)^2} \sum i^n (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \frac{e^{-i\delta_n}}{D_n}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались выражением для вронскиана $\Delta(j_n, n_n) = 1/(ka)^2$. Мощность, отбираемая у волны на поверхности сферы, равна интегралу от $\text{Re}(-\bar{p}_0 v_r)/2$ по поверхности сферы:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \text{Re}[-\bar{p}_0 v_r] dA &= \frac{1}{2} \rho c k^2 \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \text{Re} \left\{ \sum (2n+1) i e^{-i\delta_n} \frac{j_n(ka)}{D_n(ka)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \rho c k^2 \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum (2n+1) \sin^2 \delta_n. \end{aligned}$$

Частное от деления этой мощности на интенсивность падающей волны $(1/2) \rho c k^2$ как раз равно Q . Мощность, передаваемая падающей волной сфере, переходит в этом случае целиком в рассеянную волну. Для случая крайних условий Неймана, когда в формулу (11.3.72) вместо ϕ_n подставляется ϕ'_n , величина v_r равна нулю при $r=a$; в этом случае нужно сосчитать произведение истинного давления на радиальную скорость падающей волны, которое может быть представлено в виде $\text{Re}(-\bar{p} v_{0r})/2$.

Для длинных волн ($ka \ll 1$) $\phi_0 \simeq ka$, $\phi_1 \simeq (ka)^3/3$ и т. д., так что в первом приближении при условиях Дирихле

$$S \simeq \left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad Q \simeq 4\pi a^2, \quad ka \rightarrow 0.$$

В этом предельном случае рассеяние сферически симметрично, и предельное эффективное поперечное сечение Q больше, чем геометрическое поперечное сечение πa^2 . В случае условий Неймана выражение для Q содержит ϕ'_n вместо ϕ_n , и асимптотическое выражение для Q при $ka \rightarrow 0$ равно $(4/9) \pi a^2 (ka)^4$. Эта величина значительно меньше, чем πa^2 , поскольку $ka \ll 1$. Как уже упоминалось в связи с изучением рассеяния на цилиндре, длинные волны в случае условий Дирихле рассеиваются сильнее, чем при условиях Неймана.

В случае очень коротких волн рассеянная волна распадается на две части: на тенеобразующую волну, распространяющуюся в направлении плоской волны, и отраженную волну, распространяющуюся по всем направлениям. При ka большом $\delta_n(ka)$ велико при $n < ka$ и мало при $n > ka$. Следовательно, приближенное выражение для эффективного поперечного сечения рассеяния имеет вид

$$Q \simeq \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{ka} (2n+1) = 2\pi a^2, \quad ka \gg 1,$$

где вместо $\sin^2 \delta_n$ подставлено его среднее значение $1/2$ для $n < ka$, а быстро сходящаяся часть ряда при $n > ka$ отброшена. Это эффективное поперечное сечение равно удвоенному геометрическому поперечному сечению πa^2 . Это объясняется тем, что оно включает в себе части, соответ-

ствующие и тенеобразующей и отраженной волне. Для каждой из них поперечное сечение равняется πa^2 .

Ниже в этой главе мы покажем, что если ka очень велико, то интенсивность рассеяния приобретает вид

$$S \simeq \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a^2}{4r^2} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) J_1^2(ka \sin \vartheta).$$

Первый член этой формулы соответствует равномерно распределенной по всем направлениям отраженной волне, полная мощность которой равна πa^2 . Второй член соответствует тенеобразующей волне: для подсчета интенсивности полного поля ее следует скомбинировать с падающей волной. Тенеобразующая волна имеет пик, направленный вперед ($\vartheta = 0$), величина которого в $ka/2$ раз больше, чем в других направлениях; по мере удаления от направления распространения падающей волны тенеобразующая волна быстро убывает и скоро становится меньше первого слагаемого. Зависимость интенсивности рассеянной волны от частоты для крайевых условий Неймана ($v_r = 0$ при $r = a$) показана на рис. 11.9. В этом случае диаграмма рассеяния искажена даже для длинных волн, а характер ее для коротких волн, когда впереди пик, такой же, как и в случае условий Дирихле.

Представляют определенный интерес случаи, когда крайевые условия при $r = a$ не сводятся ни к условиям Дирихле, ни к условиям Неймана. Иногда волны могут распространяться внутри сферы, но со скоростью, отличной от скорости распространения в воздухе, и, возможно, с поглощением. В таких задачах возникают два, несколько отличных друг от друга варианта крайевых условий: в первом появляются общие однородные крайевые условия при $r = a$, а во втором используется при $r < a$ эффективный показатель преломления. Первый вариант возникает, когда воздух не проникает глубоко внутрь сферы и поверхность лишь слегка деформируется под влиянием давления, но настоящего волнового движения внутри сферы не возникает. В этом случае мы можем принять с разумной степенью точности, что имеется акустический импеданс поверхности

$$Z = -\left(\frac{p}{v_r}\right)_a = -\left(\frac{i\omega\rho\psi}{\partial\psi/\partial r}\right)_a = R - iX,$$

более или менее независимый от угла падения волны, но изменяющийся с изменением ω .

Второй вариант более пригоден в тех случаях, когда колебания действительно проникают внутрь сферы $r = a$ и когда среда внутри сферы более или менее однородна, хотя ее свойства могут быть совершенно иными, нежели свойства окружающего сферу воздуха. В этом случае мы

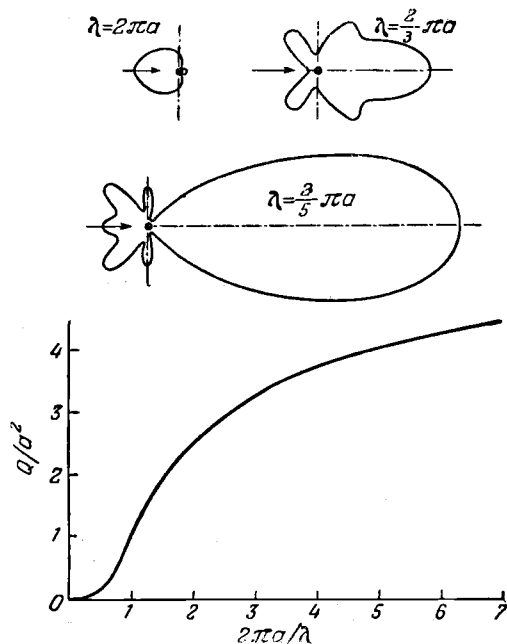


Рис. 11.9. Интенсивность рассеянной волны и эффективное поперечное сечение рассеяния Q для случая рассеяния плоской волны с длиной волны λ на сфере радиуса a [$v_r(a) = 0$].

можем рассматривать также колебания внутри (при $r < a$) сферы $r = a$ и согласовывать оба решения при $r = a$. Внутри сферы волновое уравнение имеет вид

$$\nabla^2 \psi - \left(\frac{n+iq}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

где $n+iq$ — комплексный показатель преломления среды внутри сферы. В обоих этих случаях энергия поглощается сферой (если только R_s или q не равно нулю) в противоположность случаям простых условий Дирихле или Неймана, где вся приходящая энергия вновь излучается вовне, частично в виде неискаженной плоской, а частично в виде рассеянной волны.

Рассеяние на сфере с комплексным показателем преломления. Рассмотрим здесь второй случай, когда колебания проникают внутрь сферы, причем среда внутри нее имеет показатель преломления $n+iq$ и эффективную плотность ρ_s , отличную от плотности воздуха ρ . Потенциал скоростей, давление и скорость плоской волны в этой среде соответственно равны

$$\psi = A e^{-kqx + ik(nx - ct)}, \quad p = i\omega \rho_s \psi, \quad v_x = (ikn - kq) \psi,$$

где, как и ранее, $k = \omega/c$. Средняя интенсивность этой волны в точке x равна $(1/2) \rho_s c n k^2 |A|^2 e^{-2kqx}$, что указывает на затухание колебаний во внутренней среде.

Конечные при $r < a$ решения для рассматриваемого показателя преломления, которыми удобно пользоваться для того, чтобы удовлетворить краевым условиям при $r = a$, имеют вид

$$\frac{\cos}{\sin} (m\varphi) P_l^m (\cos \vartheta) j_l [k(n+iq)r].$$

Чтобы удовлетворить краевым условиям, нужно определить отношение радиальной составляющей градиента к величине потенциала при $r = a$. Как и при решении других задач, мы вводим углы

$$\operatorname{tg}[\alpha_n(z)] = -\frac{z j_n'(z)}{j_n(z)}, \quad \operatorname{tg}[\beta_n(z)] = -\frac{z n_n'(z)}{n_n(z)},$$

значения которых приведены в таблицах в конце этой главы. Для внутренних функций нам нужны только углы α_n для комплексного аргумента $k(n+iq)a$. Чтобы упростить запись, будем обозначать этот угол $\alpha_n^i = \alpha_n[k(n+iq)a]$. Далее потенциалы скоростей внутри и вне сферы должны сопрягаться при $r = a$ и потенциал вне сферы должен быть комбинацией плоской и рассеянной волны. Поэтому мы ищем эти потенциалы в виде

$$\psi = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^m A_m P_m (\cos \vartheta) j_m [k(n+iq)r] e^{-i\omega t}, & r < a, \\ \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^m P_m (\cos \vartheta) e^{-i\gamma_m} [\cos(\gamma_m) j_m(kr) + \sin(\gamma_m) n_m(kr)] e^{-i\omega t}, & r > a, \end{cases}$$

где коэффициенты A_m и фазовые углы γ_m должны быть определены таким образом, чтобы давление и радиальная скорость оставались непрерыв-

ными при $r = a$. Соответствующие равенства для m -х членов имеют вид

$$A_m i \omega \rho_s j_m [k(n+iq)a] = i \omega \rho e^{-i\eta_m} [\cos(\eta_m) j_m(ka) + \sin(\eta_m) n_m(ka)],$$

$$A_m k(n+iq) a j'_m [k(n+iq)a] = k a e^{-i\eta_m} [\cos(\eta_m) j'_m(ka) + \sin(\eta_m) n'_m(ka)].$$

Разделив одно равенство на другое, мы получаем

$$\frac{k(n+iq)a}{j_m[k(n+iq)a]} j'_m[k(n+iq)a] = -\operatorname{tg} \alpha_m^i = k a \frac{\rho_s}{\rho} \frac{j'_m(ka) + \operatorname{tg}(\eta_m) n'_m(ka)}{j_m(ka) + \operatorname{tg}(\eta_m) n_m(ka)},$$

или

$$\operatorname{tg} \eta_m = \operatorname{tg} [\delta_m(ka)] \frac{\rho \operatorname{tg} \alpha_m^i - \rho_s \operatorname{tg} \alpha_m^0}{\rho \operatorname{tg} \alpha_m^i - \rho_s \operatorname{tg} \beta_m^0}, \quad (11.3.73)$$

где

$$\alpha_m^i = \alpha_m[k(n+iq)a], \quad \alpha_m^0 = \alpha_m(ka) \quad \text{и} \quad \beta_m^0 = \beta_m(ka).$$

Отсюда можно получить оба предельных случая, а также и все промежуточные. Например, если $\rho \gg \rho_s$, то $\eta_m \simeq \delta_m(ka)$, но если $\rho \ll \rho_s$, то $\eta_m \simeq \delta'_m(ka)$. Если $q > 0$, то углы η_m комплексные, и мы их обозначаем

$$\eta_m = \chi_m - i x_m.$$

Значения χ и x находим из равенства (11.3.73).

Выражение для рассеянной волны приобретает вид

$$\psi_s = - \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) e^{-i\eta_n} \sin \eta_n h_n(kr) \simeq$$

$$\simeq - \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) e^{-i\eta_n} \sin \eta_n, \quad r \rightarrow \infty.$$

Интенсивность рассеянной волны при единичной интенсивности падающей составляет

$$S = \frac{1}{4k^2 r^2} \sum_{m,n} (2m+1)(2n+1) P_m(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta) \times$$

$$\times [1 + \cos[2(\chi_m - \chi_n)] e^{-2(x_m + x_n)} - e^{-2x_m} \cos(2\chi_m) - e^{-2x_n} \cos(2\chi_n)],$$

и, наконец, эффективное поперечное сечение рассеяния, т. е. полная рассеянная мощность, приходящаяся на единицу интенсивности падающей волны, равна

$$Q_s = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-2x_n} [\operatorname{sh}^2 x_n + \sin^2 \chi_n]. \quad (11.3.74)$$

Однако при наличии поглощения это не единственное эффективное поперечное сечение. Часть мощности теряется внутри сферы, не создавая излучения. Комбинация падающей плоской волны и рассеянной может быть представлена следующим образом:

$$e^{ikz} + \psi_s \simeq \frac{i}{2kr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) [(-1)^n e^{-ikr} - e^{ikr-2i\eta_n}], \quad r \rightarrow \infty.$$

Первые члены соответствуют падающей плоской волне: поглощения или изменения фазы этой волны нет. С другой стороны, вторые члены, представляющие уходящие волны, искажены введением угла рассеяния η_n . Пока η_n действительно (пока $x_n = 0$), из сферы излучается вовне столько же мощности, сколько ее поступает. Но если $\eta_n = \chi_n - i x_n$ и $x_n > 0$, то

излучаемая мощность меньше поступающей. Часть волны, которая поглощается внутри сферы и вовсе не выходит вовне, равна уменьшению полного излучения вовне. Мы составляем разность между излучаемой мощностью при отсутствии поглощения ($\kappa_n = 0$) $\frac{\pi}{k^2} \sum (2n+1)$ и излучаемой мощностью при наличии поглощения $\frac{\pi}{k^2} \sum (2n+1) e^{-4\kappa_n}$. Эта разность, равная

$$Q_a = \frac{2\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-2\kappa_n} \operatorname{sh}(2\kappa_n),$$

представляет собой мощность, поглощаемую сферой на единицу интенсивности падающей волны, и называется *эффективным сечением поглощения*.

Сумма двух названных эффективных сечений является *полным эффективным сечением*, т. е. частью энергии, потерянной плоской волной как на рассеяние, так и на поглощение:

$$Q_t = Q_s + Q_a = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-\kappa_n} [\operatorname{ch} \kappa_n \sin^2 \chi_n + \operatorname{sh} \kappa_n \cos^2 \chi_n]. \quad (11.3.75)$$

Это последнее выражение для полного эффективного сечения можно также получить вычислением мощности, потерянной падающей плоской волной на поверхности сферы. Мы умножаем давление плоской волны на радиальную составляющую скорости у поверхности сферы, взятую со знаком минус, и складываем результат с произведением радиальной составляющей скорости плоской волны, взятой со знаком минус, на истинное давление у поверхности; в итоге получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \operatorname{Re} [-p_0 v_r - p v_{0r}] dA = \frac{1}{2} \rho c k^2 4\pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) D_n(ka) D'_n(ka) e^{-\kappa_n} \times \\ \times \{ \operatorname{ch} \kappa_n \sin \chi_n [\sin \delta_n \sin (\chi_n - \delta'_n) + \sin \delta'_n \sin (\delta_n - \chi_n)] + \\ + \operatorname{sh} \kappa_n \cos \chi_n [\sin \delta_n \cos (\chi_n - \delta'_n) - \sin \delta'_n \cos (\delta_n - \chi_n)] \}, \end{aligned}$$

что после некоторой перестановки членов и элементарных преобразований приводит к формуле (11.3.75).

Формулы, до некоторой степени подобные этим, можно получить, исходя из акустического импеданса материала. Если этот импеданс равен $Z = R - iX$, то краевое условие имеет вид

$$\left(\frac{p}{-v_r} \right)_a = \frac{-i\omega\rho\psi}{(\partial\psi/\partial r)_{r=a}} = Z = R - iX.$$

Выражение для ϕ вне сферы, а также и формулы для эффективного поперечного сечения рассеяния, поглощения и полного эффективного сечения остаются те же самые, что и вышеприведенные. Единственное отличие представляет формула для фазового угла $\eta_n = \chi_n - i\kappa_n$, которая теперь имеет вид

$$\operatorname{tg} \eta_n = \operatorname{tg} \delta'_n \frac{iZ + \rho c k a \operatorname{ctg} \alpha_n}{iZ + \rho c k a \operatorname{ctg} \beta_n}.$$

При $Z \rightarrow \infty$ требуется, чтобы радиальная скорость равнялась нулю при $r = a$, и $\eta_n \simeq \delta'_n$; при $Z \rightarrow 0$ имеем $\eta_n \simeq \delta_n$.

Иногда для конкретных вычислений легче использовать вместо фазового угла η_n коэффициент отражения $R_m = e^{-2i\eta_m}$, выражая через него результат. Полное поле и поле рассеянной волны на больших расстояниях

от сферы имеют при этом вид

$$\begin{aligned}\psi &\simeq \frac{i}{2kr} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(\cos \vartheta) [(-1)^m e^{-ikr} - R_m e^{ikr}], \\ \psi_s &\simeq \frac{ie^{ikr}}{2kr} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(\cos \vartheta) (1 - R_m).\end{aligned}$$

Эффективные сечения рассеяния и поглощения и полное эффективное сечение в этом случае выражаются значительно проще по формулам:

$$\begin{aligned}Q_s &= \frac{\pi a^2}{k^2 a^2} \sum (2m+1) |1 - R_m|^2, \quad Q_a = \frac{\pi a^2}{k^2 a^2} \sum (2m+1) [1 - |R_m|^2], \\ Q_t &= \frac{\pi a^2}{k^2 a^2} \sum (2m+1) [2 - R_m - \bar{R}_m].\end{aligned}\quad (11.3.76)$$

Формулы, выражающие коэффициент отражения R_m через внутреннее поле или импеданс поверхности, таковы:

$$-R_m = \frac{ka\rho_s \bar{h}'_m(ka) + \rho \operatorname{tg}(\alpha_m^i) \bar{h}_m(ka)}{ka\rho_s h'_m(ka) + \rho \operatorname{tg}(\alpha_m^i) h_m(ka)} = \frac{\rho \bar{c} h_m(ka) - iZ \bar{h}'_m(ka)}{\rho c h_m(ka) - iZ h'_m(ka)}. \quad (11.3.77)$$

Заметим, что если iZ или $\operatorname{tg}(\alpha_m^i)$ действительны, то $|R_m| = 1$ и $Q_a = 0$. Поскольку

$$R_m = e^{-2i\delta_m} \frac{[1 + (iZ D'_m / \rho c D_m) \cos(\delta_m - \delta'_m)] + (Z / \rho c D_m^2 k^2 a^2)}{[1 + (iZ D'_m / \rho c D_m) \cos(\delta_m - \delta'_m)] - (Z / \rho c D_m^2 k^2 a^2)},$$

значения ka , обращающие в нуль квадратную скобку, приводят к $R_m = -1$ и при этом полное эффективное сечение достигает наибольшего значения. Подобные резонансные пики встречаются как при рассеянии звуковых волн, так и при рассеянии нейтронов.

Рассеяние на резонаторе Гельмгольца. Другая весьма интересная задача, которую следует рассмотреть детально, — диффракция звуковой волны на полой сфере, снабженной круглым отверстием, диаметр которого мал по сравнению с диаметром сферы. Подобная сфера с отверстием является простейшим возможным видом *резонатора Гельмгольца*, и ее поведение в звуковом поле представляет значительный интерес. Обозначим радиус сферы через a и предположим, что центр отверстия расположен на оси z , так что отверстие находится между $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \vartheta_1$ (радиус отверстия при этом равен $a \sin \vartheta_1$), а твердая сферическая оболочка находится между $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \pi$.

Избыток давления в отверстии вызывает поток воздуха, входящего или выходящего через отверстие. Если радиус отверстия меньше длины волны, то поток вблизи отверстия будет подобен стационарному, описываемому формулой (10.3.58) и рассмотренному на страницах, следующих за этой формулой. Для дальнейшего нам достаточно только знать, что давление равномерно вдоль всего отверстия и что нормальная к плоскости отверстия составляющая скорости равна $C / \sqrt{a_h^2 - \eta^2}$, где a_h — радиус отверстия (в данном случае $a \sin \vartheta_1$) и η — расстояние в плоскости отверстия от его центра. В рассматриваемом здесь случае, когда a_h значительно меньше чем a , мы получим хорошее приближение, предположив, что в отверстии p постоянно и

$$v_r \simeq \frac{V}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1}}, \quad 0 \leq \vartheta < \vartheta_1,$$

причем $v_r = 0$ при $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi$. Соотношение между постоянной V и давлением подлежит определению.

Предположим, что, каково бы ни было избыточное давление падающей волны вдоль площади отверстия, его среднее равно $p_0 e^{-i\omega t}$. Это давление действует как вынуждающая сила на воздух в отверстии, толкая его внутрь или вовне и вызывая колебания внутри и вне сферы. Потенциал скоростей этого вынужденного движения можно написать в виде

$$\psi_f = \begin{cases} a \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta) \frac{j_n(kr)}{ka j'_n(ka)} e^{-i\omega t}, & r < a, \\ a \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta) \frac{h_n(kr)}{ka h'_n(ka)} e^{-i\omega t}, & r > a; \end{cases} \quad (11.3.78)$$

так что радиальная составляющая скорости при $r = a$ равна

$$v_r = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta) e^{-i\omega t}.$$

Для определения точного решения нужно решить бесконечную систему уравнений для коэффициентов A_n . Как и на стр. 364, мы получим приближенное решение, задаваясь определенными соотношениями между A_n и решая уравнение относительно единственного оставшегося неизвестного V .

Чтобы аппроксимировать установившееся распределение скоростей в отверстии, радиальная составляющая скорости должна равняться (приближенно) $[V/\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1}] e^{-i\omega t}$ при $0 \leq \vartheta < \vartheta_1$ и нулю при $\vartheta_1 < \vartheta \leq \pi$. Таблицы в конце гл. 10 содержат нужный ряд. Мы находим, что

$$V\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] P_n(\cos \vartheta) = \begin{cases} V/\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1}, & 0 \leq \vartheta < \vartheta_1, \\ 0, & \vartheta_1 < \vartheta \leq \pi, \end{cases}$$

так что $A_n \simeq V\sqrt{2} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right]$, а значит, все A_n выражаются через одно неизвестное V .

В приближении, которое мы ищем, давление в отверстии должно быть равномерным. Но давление, вычисленное из ряда для $r < a$, не равно вычисленному из ряда для $r > a$; разность должна быть равна вынуждающему давлению $p_0 e^{-i\omega t}$, и это соотношение дает возможность определить величину V . Ряды для давления при $\vartheta = 0, r = a$ не сходятся, но разность между ними, как легко убедиться, сходится. Таким образом, уравнение для определения V имеет вид

$$\begin{aligned} p_0 &= i\rho c V\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \left[\frac{j_n(ka)}{j'_n(ka)} - \frac{j_n(ka) + in_n(ka)}{j'_n(ka) + in'_n(ka)} \right] = \\ &= -i V\sqrt{2} \frac{\rho c}{k^2 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \frac{e^{-i\delta'_n}}{(D'_n)^2 \sin(\delta'_n)}, \end{aligned}$$

где у δ'_n и D'_n подразумевается аргумент ka .

Сходимость может быть улучшена путем прибавления и вычитания ряда, ведущего себя при больших n подобно рассматриваемому. Для $n \gg ka$ мы имеем

$$\frac{-e^{-i\delta'_n}}{(ka)^2 (D'_n)^2 \sin(\delta'_n)} \simeq ka \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{ka}{n} + \frac{ka}{n+1},$$

так что рядом сравнения будет

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}ka \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \right\} = \\ & = \sqrt{8}ka \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\vartheta_1} \right] = -\sqrt{8}ka \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \operatorname{Im} [\ln(1 - e^{i\vartheta_1})] = \\ & = \sqrt{2}ka (\pi - \vartheta_1) \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right), \quad m = n + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, для вынуждающего давления мы получаем

$$p_0 = -\frac{\sqrt{2}\rho c V}{\sin(\vartheta_1/2)} \zeta(ka, \vartheta_1),$$

где величина

$$\begin{aligned} \zeta(ka, \vartheta_1) = & -ika \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \left\{ (\pi - \vartheta_1) \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta_1 \right] \left[\frac{e^{-i\delta'_n}}{(ka)^3 (D'_n)^2 \sin \delta'_n} + \frac{1 - \delta_{0n}}{n} + \frac{1}{n+1} \right] \right\} \quad (11.3.79) \end{aligned}$$

может быть названа, по соображениям, которые вскоре станут ясными, *удельным импедансом* отверстия. Величина V не равна средней скорости по отверстию. Действительно, амплитуда полного потока выражается формулой

$$Q = 2\pi \int_0^{a_h} \frac{V y dy}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1}} = 2\pi V a^2 \int_{\cos \vartheta_1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x - \cos \vartheta_1}} = 4\pi a^2 V \sqrt{2} \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right).$$

Но эта амплитуда равна амплитуде средней скорости, умноженной на площадь отверстия $4\pi a^2 \sin^2(\vartheta_1/2)$. Поэтому соотношение между V и амплитудой средней скорости v_0 имеет вид $V = (\sqrt{2}/2) \sin(\vartheta_1/2) v_0$. Следовательно, $p_0 = \rho c v_0 \zeta(ka, \vartheta_1)$ и $\zeta(ka, \vartheta_1)$ является акустическим импедансом отверстия (с учетом и внешних и внутренних колебаний), выраженным в единицах ρc .

Для длинных волн ($ka \ll 1$) этот импеданс принимает вид

$$\begin{aligned} \zeta \simeq & -ika \left[(\pi - \vartheta_1) \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) - \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) \right] \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) + \\ & + i \frac{3}{ka} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right) + (ka)^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \vartheta_1 \right), \quad ka \rightarrow 0, \\ \zeta \simeq & -i \left(\frac{1}{2} \pi ka \vartheta_1 \right) + i \frac{3\vartheta_1^2}{4ka} + \left(\frac{1}{2} ka \vartheta_1 \right)^2, \quad \vartheta_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для небольших значений ϑ_1 и ka механический импеданс воздуха в отверстии, т. е. отношение $\pi(a\vartheta_1)^2 p_0$ к v_0 , равен

$$\frac{F}{v_0} \simeq -i\omega \left(\frac{1}{2} \pi^2 a_h^3 \rho \right) + \frac{i}{\omega} (\pi a_h^2)^2 \frac{\rho c^2}{(4/3) \pi a^3} + \omega^2 (\pi a_h^2)^2 \frac{\rho}{4\pi c},$$

где $a_h \simeq a\vartheta_1$. Первый член этого выражения дает реактивную часть импеданса, связанную с определяемой формулой (10.3.60) эффективной массой воздуха в отверстии. Второй член представляет собой реактивную часть импеданса, связанную с упругостью воздуха внутри сферы и определяемую отношением удельной упругости воздуха ρc^2 к объему шара. Последний член — это активное сопротивление излучения, создаваемое

уходящими волнами. Резонанс имеет место при $\omega = \omega_0 \simeq \sqrt{3\vartheta_1 c^2 / 2\pi a^2}$, а также и при больших частотах, близких к тем, для которых $\sin \delta'_n$ обращается в нуль. Для учета вязкости воздуха приходится добавлять четвертый член, соответствующий сопротивлению трения при движении через отверстие.

Далее, нам следует согласовать это вынужденное движение с падающей волной. Пусть падающая плоская волна распространяется в направлении $\vartheta = \alpha$, $\varphi = 0$ по отношению к оси отверстия. Комбинация плоской и рассеянной волн, удовлетворяющая краевому условию $v_r = 0$ при $r = a$ (в нулевом приближении отверстие отсутствует), имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{m, n} \varepsilon_m (2n+1) i^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ & \times \left[j_n(kr) - \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} h_n(kr) \right] e^{-i\omega t} = e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - i\omega t} - \\ & - i \sum_n (2n+1) i^n P_n [\cos \alpha \cos \vartheta + \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi] \times \\ & \times e^{-i\delta'_n(ka)} \sin[\delta'_n(ka)] h_n(kr) e^{-i\omega t}. \quad (11.3.80) \end{aligned}$$

Среднее по площади отверстия давление при этом равно

$$\begin{aligned} p_0 = & \frac{ik\rho c}{2 \sin^2(\vartheta_1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} i^n P_n(\cos \alpha) [P_{n-1}(\cos \vartheta_1) - P_{n+1}(\cos \vartheta_1)] \frac{e^{-i\delta'_n(ka)}}{(ka)^2 D'_n(ka)} \simeq \\ & \simeq ik\rho c \left[1 + \frac{3}{2} ika \cos \alpha \cos^2\left(\frac{1}{2} \vartheta_1\right) \right], \quad ka \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить ту часть волны, которая порождается движением воздуха в отверстии, это среднее давление нужно подставить в выражения для коэффициентов ряда (11.3.78):

$$A_n = -\frac{p_0}{\rho c \zeta(ka, \vartheta_1)} \sin\left(\frac{1}{2} \vartheta_1\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta_1\right].$$

Полное выражение для рассеянной волны, включая волну, обусловленную движением в отверстии, на больших расстояниях от резонатора принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_s \simeq & -\frac{e^{ikr-i\omega t}}{kr} \sum_{m, n} \left\{ \varepsilon_m (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) e^{-i\delta'_n} \sin \delta'_n - \right. \\ & \left. - i^{-n} \frac{\delta_{0m} p_0}{k\rho c \zeta(ka, \vartheta_1)} \sin\left(\frac{1}{2} \vartheta_1\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta_1\right] \frac{e^{-i\delta'_n}}{D'_n} \right\} \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \simeq \\ & \simeq -\frac{ae^{ikr-i\omega t}}{r} (ka)^2 \left\{ \frac{1}{3} - [\cos \alpha \cos \vartheta + \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{2} ika \cos \alpha\right) \left(1 - \frac{3}{2} ika \cos \vartheta\right)}{1 - (2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1) - \frac{1}{3} i(ka)^3} \right] \right\}, \quad ka \rightarrow 0, \vartheta_1 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11.3.81)$$

Отсюда можно получить выражения для интенсивности рассеянной волны и эффективного поперечного сечения рассеяния.

При очень большой длине волны часть волны, порождаемая отверстием, уничтожает сферически симметричную часть волны, рассеянную сферической оболочкой. Отверстие как бы «закрывает накоротко» сферу, уничтожая сферически симметричное и оставляя только «дипольное» рас-

ссяние. Единственным членом, содержащим ϑ_1 (в этом приближении), является реактивная часть импеданса, связанная с массой. Чем меньше отверстие, тем ниже резонансная частота резонатора $(ka)_0 \simeq \sqrt{3\vartheta_1/2\pi}$. При резонансе часть волны, порождаемая отверстием, сильнее, чем часть, рассеянная оболочкой, приблизительно в $(2\pi/3\vartheta_1)^{3/2}$ раз, что значительно больше единицы:

$$\psi_s \simeq i \frac{ae^{ikr-i\omega t}}{r} \sqrt{\frac{2\pi}{3\vartheta_1}}, \quad \omega = \omega_0, \quad \vartheta_1 \ll 1.$$

В первом приближении по ka и по ϑ_1 эффективное сечение рассеяния равно

$$Q \simeq 4\pi a^2 (ka)^4 \left\{ \frac{(2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1)^2 + (k^3 a^3 / 3)^2}{[1 - (2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1)]^2 + (k^3 a^3 / 3)^2} + 3 \right\}. \quad (11.3.82)$$

Оно много меньше площади сферы $4\pi a^2$ (покуда $ka < 1$), за исключением случая резонансной частоты резонатора, когда

$$Q \simeq \frac{24\pi}{\vartheta_1} \pi a^2, \quad ka = \sqrt{\frac{3\vartheta_1}{2\pi}}.$$

При этой частоте эффективное поперечное сечение рассеяния значительно больше, чем геометрическое поперечное сечение πa^2 .

Выражения для ψ_s и Q при резонансе существенно изменятся, если мы будем учитывать влияние вязкости. В основном влияние вязкости приводит к появлению дополнительного активного члена импеданса, возникающего вследствие течения через отверстие. Если амплитуды скоростей достаточно малы, так что отсутствуют завихрения, то эффект заключается в прибавлении действительного слагаемого к импедансу ζ , что приводит к появлению дополнительного слагаемого в знаменателе последней строки формулы (11.3.81) и превращает его в $1 - (2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1) - i(ka)^3/3 - i\delta$. Знаменатель формулы (11.3.82) принимает при этом вид $[1 - (2\pi k^2 a^2 / 3\vartheta_1)]^2 + [(ka)^3/3 + \delta]^2$. Член δ зависит от частоты не так, как $(ka)^3/3$, и превосходит эту величину, хотя обычно в области частот, для которых наши формулы применимы, он меньше единицы. Поэтому выражения ψ_s , S и Q меняются незначительно, за исключением случая частот, близких к резонансным, когда $ka \simeq \sqrt{3\vartheta_1/2\pi}$. При учете вязкости пик резонанса оказывается не столь высоким, как было ранее. Например, Q при резонансе приближенно равно $\pi a^2 (3\vartheta_1/\pi\delta)^2$ вместо $\pi a^2 (24\pi/\vartheta_1)$; поскольку в большинстве случаев $(24\pi/\vartheta_1) > (3\vartheta_1/\pi\delta)^2 > 1$, пик все еще высок, хотя и не настолько, как при отсутствии вязкости.

Рассеяние на совокупности рассеивателей. К изучению диффракции волн на совокупности рассеивателей сводится широкий круг вопросов, начиная от голубизны неба до электропроводности металлов, от реверберации звука в морской воде до диффракции рентгеновских лучей. Детальное рассмотрение всего комплекса относящихся сюда задач увело бы нас слишком далеко и потребовало бы по меньшей мере дополнительной главы в книге. Вместо этого мы коснемся лишь некоторых простейших концепций и примеров.

Степень сложности подобных задач в значительной мере зависит от интенсивности рассеяния. Если эффективное поперечное сечение рассеяния составляет незначительную часть площади, облучаемой падающей волной, как это имеет место с рентгеновскими лучами или звуковыми волнами в «пузырящейся» воде, то с хорошим приближением можно считать, что рассеяние на каком-либо отдельном центре не зависит от нали-

чия других рассеивателей (множественностью рассеяния можно пренебречь). С другой стороны, для электронных волн в металле и для некоторых акустических случаев волна на каждом рассеивателе в значительной степени подвержена влиянию других рассеивателей и разделение на однократно или множественно рассеянные волны теряет свой смысл. Мы начнем рассмотрение вопроса с простого случая слабого рассеяния.

Обращаясь к рис. 11.10, допустим, что имеется N рассеивателей, и все они расположены внутри сферы радиуса a , причем n -й рассеиватель находится в точке, положение которой относительно центра сферы

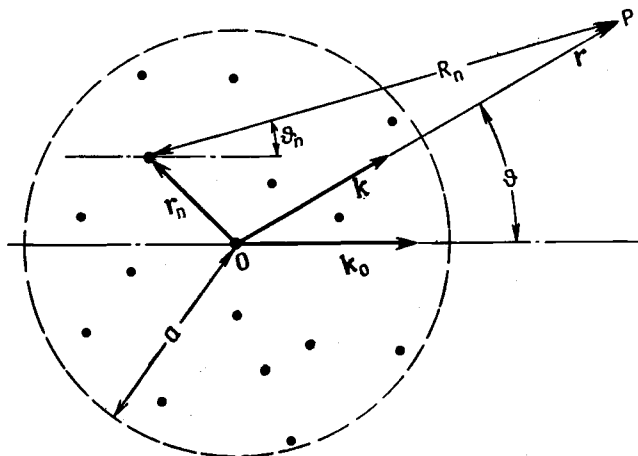


Рис. 11.10. Углы и векторы положения и распространения для случая рассеяния плоской волны на совокупности рассеивателей.

определяется вектором $\mathbf{r}_n$. Падающая плоская волна единичной интенсивности имеет вид $\phi_i = e^{ikr \cos \vartheta}$ (мы определили потенциал волны так, чтобы ее интенсивность равнялась $|\phi|^2$). Если полное рассеяние мало, то каждый рассеиватель ведет себя так, как если бы он был единственным; рассеянная им волна характеризуется функцией углового распределения $f(\vartheta)$. Следовательно, рассеянная волна в точке P имеет вид

$$\phi_s = \sum_{n=1}^N \frac{f(\vartheta_n)}{R_n} \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_n + kR_n)],$$

причем фаза в центре сферы положена равной нулю. При $r \gg a$ эта волна в первом приближении по a/r может быть представлена в виде

$$\phi_s \simeq \frac{e^{ikr}}{r} f(\vartheta) \sum_{n=1}^N \exp(i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}_n), \quad (11.3.83)$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, \quad \mu = 2k \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right).$$

Каждая составляющая волна в точке P имеет свою собственную фазу; в некоторых случаях все или почти все волны находятся в одинаковых фазах и тогда рассеянный пучок интенсивен. В других случаях совпадения фаз вовсе нет или же только немногие из составляющих волн имеют одинаковые фазы и тогда рассеянная волна заметно слабее. В первом случае рассеяние называется *когерентным*, во втором случае — *неко-*

герентным. Относительное количество когерентных и некогерентных волн в рассеянной волне в какой-то мере зависит от степени равномерности расположения рассеивателей.

Чтобы получить экстремальный случай, предположим сначала, что все рассеиватели расположены в равноотстоящих друг от друга плоскостях, перпендикулярных вектору $\mu = k - k_0$. Предположим, что имеется M плоскостей на расстоянии d друг от друга и в каждой из этих плоскостей L рассеивателей, так что $LM = N$ и $d < 2a$. Направим ось x параллельно вектору μ ; тогда x -координата n -й плоскости рассеивателей равна $x = x_1 + (n-1)d$. Формула (11.3.83) приобретает тогда вид

$$\phi_s = \frac{e^{ikr}}{r} f(\vartheta) L e^{i\mu x_1} \sum_{n=1}^M e^{i\mu(n-1)d} = N \frac{e^{ikr}}{r} f(\vartheta) e^{i\mu(x_1 + \frac{1}{2}Md)} \frac{\sin \left[kMd \sin \left(\frac{1}{2}\vartheta \right) \right]}{M \sin \left[kd \sin \left(\frac{1}{2}\vartheta \right) \right]}. \quad (11.3.84)$$

Для $\vartheta \rightarrow 0$, т. е. в направлении распространения падающей волны, рассеянная волна $\phi_s = Nf(\vartheta)(e^{ikr}/r)$ интерферирует с падающей и образует тень. Если величина $Mkd = 2\pi Md/\lambda$ значительно меньше, чем единица, то это предельное выражение пригодно для всех значений ϑ , и полная рассеянная волна точно равна произведению N на волну, рассеянную одним рассеивателем. В этом случае, т. е. если $2\pi a$ меньше, чем длина волны, все рассеянные волны когерентны и вся совокупность рассеивателей действует подобно единому рассеивателю с «силой» в N раз большей, чем у отдельного рассеивателя.

Если, однако, $Mkd > 1 \gg kd$ ($4\pi a > \lambda \gg 2\pi d$), то выражение для ϕ_s , соответствующее отдельному рассеивателю, умножается на $\{\sin [Mkd \sin(\vartheta/2)] : Mkd \sin(\vartheta/2)\}$. Если ось x (перпендикулярная к плоскостям рассеивателей) остается при изменении ϑ параллельной вектору μ , то амплитуда рассеянной волны быстро убывает с ростом ϑ и, за исключением резко выраженного тенеобразующего луча, амплитуда рассеянной волны значительно меньше, чем N раз взятая амплитуда, соответствующая одному рассеивателю.

Наконец, когда длина волны λ меньше, чем $2\pi d$, мы должны воспользоваться точной формулой (11.3.84). В этом случае, если $kd \sin(\vartheta/2) = (2\pi d/\lambda) \sin(\vartheta/2)$ равно произведению целого числа m на π , то знаменатель вновь обращается в нуль и образуется сильный луч. Другими словами, сильный луч возникает, когда угол ϑ таков, что $2d \sin(\vartheta/2) = m\lambda$ (и когда μ остается перпендикулярным к плоскостям рассеивателей). Это и есть углы Брэгга для диффракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке.

Когда μ не перпендикулярен к правильно расположенным плоскостям рассеивателей или когда рассеиватели не расположены в каком-либо регулярном порядке, разобраться в происходящем явлении легче не при помощи амплитуды ϕ_s , а путем подсчета интенсивности рассеяния $|\phi_s|^2$ (при единичной интенсивности падающей волны). (Бесспорно, обычно легче экспериментально измерить $|\phi_s|^2$, чем ϕ_s .) Из (11.3.83) мы имеем

$$S = \frac{|f(\vartheta)|^2}{r^2} \sum_{m, n=1}^N \exp(i\mu \cdot R_{mn}),$$

где $\mu = 2k \sin(\vartheta/2)$, $\mu = k_0 - k$ и $R_{mn} = r_m - r_n$ представляет собой вектор, проведенный от n -го к m -му рассеивателю. В этой сумме выделим члены

с $m = n$:

$$S = \frac{|f(\vartheta)|^2}{r^2} \left[N + \sum_{n \neq m} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}_{mn}) \right].$$

Первый член представляет интенсивность, которая получилась бы, если бы N рассеивателей посылали свои волны независимо друг от друга, так что складывались бы не амплитуды, а интенсивности этих волн. Это — некогерентная часть рассеяния. Второй член является когерентной частью. В нем учтены соотношения между фазами различных рассеянных волн. Если рассеиватели в среднем достаточно удалены друг от друга, т. е. если $\mu = 2k \sin(\vartheta/2)$ достаточно велико, так что $\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}_{mn} > \pi/2$ для большинства m и n , и если рассеиватели так распределены, что величины $\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}_{mn}$ распределяются случайно (т. е. если вектор $\mathbf{p}$ не перпендикулярен к плоскостям регулярно размещенных рассеивателей, как это было выше), то экспоненты в двойной сумме взаимно уничтожаются и остается только некогерентный член.

Однако для достаточно малого μ все же сохраняется и когерентная часть, которая доминирует в направлении распространения падающей волны. Если, например, рассеиватели случайно распределены внутри сферы радиуса a , так что средняя плотность их постоянна и равна $3N/4\pi a^3$, то наша сумма будет приблизительно равна

$$\begin{aligned} \frac{3N(N-1)}{4\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx \int_0^a e^{i\mu r x} r^2 dr &= \frac{3N(N-1)}{a^3} \int_0^a \frac{\sin(\mu r)}{\mu r} r^2 dr = \\ &= 3N(N-1) \frac{\sin(\mu a) - \mu a \cos(\mu a)}{\mu^3 a^3} \simeq N(N-1) \left[1 - \frac{1}{10} \mu^2 a^2 \right], \quad \mu a \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где множитель $N(N-1)$ появляется, несмотря на суммирование по m от 1 до N , потому что при суммировании по n мы опускаем член $n = m$.

Эта формула показывает, что при $\mu a \ll 1$ [$2\pi a \sin(\vartheta/2) \ll \lambda$] полная интенсивность рассеянной волны имеет резко выраженный пик

$$S \simeq N^2 \frac{|f(\vartheta)|^2}{r^2} \left[1 - \frac{2}{5} \frac{N-1}{N} k^2 a^2 \sin^2\left(\frac{1}{2} \vartheta\right) + \dots \right],$$

пропорциональный квадрату числа рассеивателей. Здесь амплитуды всех рассеянных волн складываются и когерентное рассеяние преобладает. С другой стороны, при $4a \sin(\vartheta/2) \gg \lambda$ когерентное рассеяние относительно мало (в особенности, если N велико) и преобладает некогерентное рассеяние

$$S \simeq \frac{N |f(\vartheta)|^2}{r^2},$$

пропорциональное первой степени числа рассеивателей.

Рассеяние звука на пузырьках воздуха в воде. В предыдущих рассуждениях мы предполагали рассеяние «слабым», так что можно было пренебречь воздействием рассеянных волн на волны, падающие на рассеиватели. Для иллюстрации многократного рассеяния мы рассмотрим случай рассеяния звуковых волн на распределенных в воде малых пузырьках воздуха. Чтобы провести эти вычисления до конца, мы предположим, что радиус пузырьков мал по сравнению с длиной волны, так что рассеяние единственным пузырьком сферически симметрично. Прежде всего следует выяснить, что представляет собой рассеяние от одного единственного пузырька.

Поскольку размер пузырька значительно меньше длины волны, избыточное давление p падающей звуковой волны (по сравнению со средним давлением P) практически одинаково по всей поверхности пузырька. Пусть $p = p_0 e^{-i\omega t}$. Отношение избыточного давления p к изменению объема пузырька, если расширение воздуха в пузырьке происходит адиабатически, равно $p/P = -\gamma (dV/V)$, а так как для воздуха $\gamma P = \rho_a c_a^2$, то

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = i\omega p = \frac{3\rho_a c_a^2}{4\pi a^3} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{3\rho_a c_a^2}{a} v_r e^{-i\omega t},$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей (для воздуха 1,4), а v_r — радиальная скорость поверхности пузырька.

Возникающее колебание поверхности пузырька вызывает в воде радиально расходящуюся звуковую волну

$$\phi_s = \frac{A}{r} e^{ikr - i\omega t}, \quad \omega = kc_w,$$

где ρ_w и c_w — соответственно плотность и скорость звука для воды, а ρ_a и c_a — соответствующие величины для воздуха при среднем давлении P . Избыточное давление падающей и рассеянной волн вне пузырька у его поверхности должно быть равно избыточному давлению внутри него. Радиальная скорость также должна оставаться непрерывной при $r = a$:

$$p_0 + \frac{i\omega \rho_w}{a} A = -i \frac{3\rho_a c_a^2}{\omega a} v_r = i \frac{3\rho_a c_a^2}{\omega a^3} A + \frac{3\rho_a c_a^2}{a^2 c_w} A;$$

здесь принято $ka \ll 1$, так что $e^{ika} \simeq 1$. Наконец, потенциал скоростей рассеянной волны в этом приближении имеет вид

$$\psi_s \simeq \frac{a p_0 / i\omega \rho_w}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i(B/\omega)} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r},$$

где $\omega_0^2 = 3\rho_a c_a^2 / a^2 \rho_w$ — резонансная частота воздушного пузырька, а $B = 3\rho_a c_a^2 / a \rho_w c_w$ — активное сопротивление излучения сферической поверхности. Практически имеются также активные потери, связанные с вязкостью, и другие потери, связанные с тем, что изменение давления в малых пузырьках происходит не точно адиабатически, а потому и не вполне обратимо. Таким образом, последний член знаменателя должен быть заменен функцией $-i\delta(\omega)$, зависящей от частоты более сложным образом, нежели $-i(B/\omega)$, при этом $\delta(\omega)$ несколько больше, чем B/ω . Функция $\delta(\omega)$ в общем случае также несколько больше единицы при $\omega = \omega_0$.

Следовательно, если потенциал скоростей падающей волны на пузырьке имеет вид $\phi_i e^{-i\omega t}$, то рассеянный потенциал скоростей, «порожденный» падающей волной, равен

$$\psi_s \simeq \frac{a\psi_i}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i\delta(\omega)} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} = \frac{i\psi_i}{2k} (1 - R_0) \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r},$$

где R_0 — коэффициент отражения из (11.3.76). Эффективные поперечные сечения рассеяния и поглощения и полное эффективное поперечное сечение пузырька при этом равны

$$Q_t \simeq \frac{4\pi a^2 [1 + \delta/ka]}{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + \delta^2}, \quad Q_s \simeq \frac{4\pi a^2}{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + \delta^2}, \\ Q_a \simeq \frac{4\pi a^2 \delta/ka}{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + \delta^2}.$$

Все это указывает на наличие при $\omega = \omega_0$ резонанса между упругостью воздуха в пузырьке и эффективной массой воды непосредственно у пузырька. Как ω_0 , так и δ являются функциями радиуса пузырька a .

Теперь рассмотрим действие нескольких пузырьков. Предположим, что внутри сферы с радиусом P_0 мы имеем N пузырьков. Они различны по размеру и распределены в пространстве случайно, но можно полагать, что существует функция плотности распределения $n(\mathbf{r}, a) da$, которая дает среднюю плотность пузырьков, имеющих радиус между a и $a + da$ и находящихся в точке $\mathbf{r}$. Тогда полное количество пузырьков равно

$$N = \int_0^{a_m} da \iiint n(\mathbf{r}, a) dV, \quad \text{а} \quad n(\mathbf{r}) = \int_0^{a_m} n(\mathbf{r}, a) da$$

является средней плотностью пузырьков всех размеров в точке $\mathbf{r}$. Мы предполагаем, что максимальный радиус пузырька равен a_m и что область интегрирования по сфере радиуса P_0 включает в себе все пузырьки какого-либо размера. Чтобы предыдущие расчеты рассеяния оставались в силе, мы должны предположить, что длина звуковой волны в свободной воде значительно больше чем $2\pi a_m$.

Если $c_w/\omega \gg a_m$, то мы можем представить потенциал скоростей в некоторой точке $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ в виде суммы падающей волны ψ_i и сферически симметричных волн, рассеянных от N пузырьков, причем n -й пузырек находится в точке $\mathbf{r}_n$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{r} e^{ikR_n},$$

где $k = \omega/c_w$ и $R_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|$ — расстояние от n -го пузырька до точки P . Величина A_n связана с потенциалом скоростей в точке расположения n -го пузырька.

При этом ψ не является еще истинным потенциалом, так как ψ включает в себе эффект рассеянной волны от самого n -го пузырька, а «вынуждающая сила» должна быть комбинацией первичной волны и волн, рассеянных на других пузырьках. Другими словами,

$$A_n = \frac{a\psi_n}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i\delta}, \quad \psi_n = \psi_i(R_n) + \sum_{m \neq n} \frac{A_m}{R_{mn}} e^{ikR_{mn}},$$

где $R_{mn} = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|$. Эта формула учитывает действие на n -й пузырек рассеяния на всех других пузырьках.

Формулы, необходимые для дальнейшей выкладки, могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \psi_i(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N \psi_n \left(\frac{g_n}{R_n} \right) e^{ikR_n}, \\ \psi_n &= \psi(\mathbf{r}_n) - \frac{g_n}{R_{nn}} \psi_n e^{ikR_{nn}} = \psi_i(\mathbf{r}_n) + \sum_{m \neq n} \frac{g_m}{R_{mn}} \psi_m e^{ikR_{mn}}, \end{aligned}$$

$$g_n = \frac{a}{[\omega_0(a)/\omega]^2 - 1 - i\delta(\omega, a)}, \quad Q_{sn} = 4\pi |g_n|^2.$$

Поля для конкретных конфигураций пузырьков, даже если они могут быть рассчитаны, не представляют особого интереса. Более интересным является среднее поле, получаемое при усреднении по всем конфигурациям пузырьков внутри сферы радиуса P_0 . Такое усреднение мы будем обозначать скобками $\langle \rangle$. Усреднение потенциала ψ_i не меняет его, так как это — первичное поле, не зависящее от конфигурации пузырьков; следовательно,

$\langle \psi_i(\mathbf{r}) \rangle = \psi_i(\mathbf{r})$. Конфигурационное среднее для ψ выражается формулой

$$\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle = \psi_i(\mathbf{r}) + \iiint G(\mathbf{r}_n) \langle \psi_n(\mathbf{r}_n) \rangle \frac{e^{ikR_n}}{R_n} dV_n,$$

где $\langle \psi_n(\mathbf{r}) \rangle$ — среднее внешнее поле, действующее на n -й пузырек и являющееся комбинацией поля падающей волны и поля рассеяния на всех пузырьках, за исключением n -го. Величина $G(\mathbf{r})$ представляет среднюю плотность рассеяния на пузырьках, находящихся в точке $\mathbf{r}$, усредненную в этой точке по всем размерам пузырьков:

$$G(\mathbf{r}) = \int_0^{P_0} n(\mathbf{r}, a) g(a) da.$$

Она равна средней «силе» рассеяния, умноженной на среднюю плотность пузырьков в точке $\mathbf{r}$.

Среднее от ψ_n — наружного поля, воздействующего на n -ю частицу, — приближенно равно среднему от всего поля ψ в той же точке. Если имеется только один рассеиватель, то это среднее равно ψ_i ; для большого количества пузырьков оно отличается от $\langle \psi \rangle$ на величину порядка $1/N$. Следовательно, для больших N мы имеем

$$\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle \simeq \psi_i(\mathbf{r}) + \iiint G(\mathbf{r}_n) \langle \psi(\mathbf{r}_n) \rangle \frac{e^{ikR_n}}{R_n} dV_n.$$

Это интегральное уравнение относительно $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$ равносильно дифференциальному уравнению в частных производных

$$\nabla^2 \langle \psi \rangle + k^2 \langle \psi \rangle = -4\pi G \langle \psi \rangle \text{ или } \nabla^2 \langle \psi \rangle + k_s^2(r) \langle \psi \rangle = 0,$$

где

$$k_s(r) = k \left[1 + \frac{4\pi G}{k^2} \right]^{1/2} \simeq k + \frac{2\pi}{k} \int_0^{P_0} \frac{n(\mathbf{r}, a) ada}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i\delta(a)}.$$

Таким образом, конфигурационное среднее потенциала скоростей является решением волнового уравнения, в котором показатель преломления $\sqrt{1 + 4\pi G/k^2}$ меняется вместе с плотностью пузырьков. Благодаря наличию члена с δ этот показатель преломления оказывается комплексным, и присутствие этого члена указывает на затухание волны по мере ее прохождения через область, заполненную пузырьками. Функция Грина для нашего среднего удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 K(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) + k_s^2(r) K(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Она ведет себя как $1/R$ при $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow 0$, а для больших R представляет расходящуюся волну.

Точно так же можно вычислить конфигурационное среднее квадрата потенциала скоростей $|\psi(\mathbf{r})|^2$. Интегральное уравнение, аналогичное полученному для $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$, имеет вид

$$\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle \simeq \langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle + \frac{1}{4\pi} \iiint S(\mathbf{r}_0) \langle |\psi(\mathbf{r}_0)|^2 \rangle |K(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)|^2 dV_0,$$

где

$$S(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^{P_0} n(\mathbf{r}, a) |g(a)|^2 da = \int_0^{P_0} n(\mathbf{r}, a) Q_s(a) da$$

— полное эффективное поперечное сечение рассеяния пузырьков на единицу объема в точке, определяемой вектором $\mathbf{r}$. Это уравнение показывает,

что когерентная часть рассеянной волны определяется квадратом конфигурационного среднего $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$; пузырьки влияют на эту часть через показатель преломления $\sqrt{1 - 4\pi G/k^2}$. В дополнение к когерентной волне $|\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle|^2$ имеется также некогерентное рассеяние (определяемое интегралом), пропорциональное плотности S эффективного сечения рассеяния, причем излучение от каждого элемента объема пропорционально $\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle$. Это рассеяние затухает при прохождении через область, заполненную пузырьками, как квадрат модуля функции Грина $K(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$.

Сфероидальные координаты. Вытянутые сфероидальные координаты были определены формулами (10.3.46). Их можно также выразить через переменные $\mu = \text{Ar} \, \text{ch} \xi$, $\vartheta = \arccos \eta$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} a \, \text{ch} \mu \cos \vartheta, \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{2} a \, \text{sh} \mu \sin \vartheta \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \\ h_\mu &= h_\vartheta = \frac{1}{2} a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta} = \frac{a}{\sqrt{8}} \sqrt{\text{ch} 2\mu - \cos 2\vartheta}, \quad h_\varphi = \frac{1}{2} a \, \text{sh} \mu \sin \vartheta, \\ \nabla^2 \psi &= \frac{4/a^2}{\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \vartheta} \left[\frac{1}{\text{sh} \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\text{sh} \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}{\text{sh}^2 \mu \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned} \quad (11.3.85)$$

Исходя из этих формул, можно произвести разделение переменных. Сплюсненные сфероидальные координаты определены формулами (10.3.55). Они могут быть получены из вытянутых сфероидальных координат заменой a на $-ia$ и одновременно ξ на $i\xi$ или же заменой $\text{ch} \mu$ на $i \, \text{sh} \mu$ в формулах (11.3.85). Следовательно, решения, полученные для случая вытянутых сфероидальных координат, допускают весьма простое продолжение на мнимые значения параметров и координат.

Сомножителями решения уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ в вытянутых сфероидальных координатах являются тригонометрические функции угловой координаты φ [а именно $\frac{\cos}{\sin}(m\varphi)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, если допустимы все значения φ от 0 до 2π] и решения следующих уравнений (в координатах ξ и η):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{dJ}{d\xi} \right] - \left[A - h^2 \xi^2 + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right] J &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} \right] + \left[A - h^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] S &= 0, \end{aligned} \quad (11.3.86)$$

где $h = ak/2 = \omega a/2c = \pi a/\lambda$ и A — постоянная разделения. При этом

$$\psi = \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) S(\eta) J(\xi).$$

Заметим, что уравнения для J и S в действительности совершенно одинаковы. Одно из них — для S — рассматривается на интервале между особыми точками -1 и $+1$, а второе — для J — на интервале от $+1$ до ∞ . Поэтому мы можем изучать решения одного уравнения для z , причем η пробегает интервал от -1 до $+1$, а ξ — интервал от $+1$ до ∞ .

Вопрос о свойствах этих решений был уже затронут в гл. 5 [см. (5.3.95)]. Мы выяснили, что для данного уравнения точки ± 1 регулярные особые с индексами $\pm m/2$, а бесконечность — иррегулярная особая точка. Мы показали также, что функция $S(\eta)$ может быть представлена

в виде ряда по присоединенным функциям Лежандра

$$S(\eta) = \sum_n d_n P_{m+n}^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{m/2} \sum_n d_n T_n^m(\eta),$$

где последовательные коэффициенты связаны рекурсивной формулой

$$\frac{n(n-1)h^2}{(2n+2m-1)(2n+2m-3)} d_{n-2} + h^2 \frac{(n+2m+1)(n+2m+2)}{(2n+2m+3)(2n+2m+5)} d_{n+2} + \\ + \left[h^2 \frac{2(n+m)(n+m+1)-m^2-1}{(2n+2m+3)(2n+2m-1)} + (n+m)(n+m+1) - A \right] d_n = 0.$$

Решение S , конечное при $\eta = 1$ для большинства значений A , будет бесконечным при $\eta = -1$. Однако рекурсивные уравнения могут быть решены методом непрерывных дробей, изученным в § 5.2 (в связи с уравнением Матье), и сходимость рядов может быть обеспечена для дискретного ряда значений постоянной разделения A . Имеются две последовательности конечных решений, одна с четными значениями n , другая с нечетными. Мы нумеруем каждую последовательность по возрастающим значениям A и окончательно получаем

$$S_{ml}(h, \eta) = \begin{cases} (1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}m} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}(h | m, l) T_{2n}^m(\eta), & l = m, m+2, m+4, \dots, \\ (1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}m} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1}(h | m, l) T_{2n+1}^m(\eta), & l = m+1, m+3, \dots, \end{cases} \quad (11.3.87)$$

где $A_{ml}(h) < A_{m(l+1)}(h)$. Для данного m наименьшее значение A имеет номер $l = m$ (т. е. обозначается A_{mm}), следующее — номер $l = m+1$ и т. д. Соответствующие функции S_{ml} являются собственными функциями, и при данном m и различных l они взаимно ортогональны.

Когда $h \rightarrow 0$, уравнение для S сводится к уравнению для простой сферической гармоник $P_l^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{m/2} T_l^m(\eta)$ и $A_{ml} \simeq l(l+1)$. Мы можем нормировать функцию S таким образом, чтобы ее поведение вблизи $\eta = 1$ было при любом значении h таким же, как и у функции P . Другими словами, поскольку $T_{l-m}^m(1) = [(l+m)!/2^m m! (l-m)!]$, мы требуем, чтобы

$$\sum_n' \frac{(n+2m)!}{n!} d_n(h | m, l) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}, \quad (11.3.88)$$

где штрих над знаком суммирования показывает, что в сумму включаются только члены с четными номерами n , если $l-m$ четно, и только с нечетными номерами n , если $l-m$ нечетно. Это позволяет объединить в одной формуле как четные, так и нечетные функции. Легко также получить разложения в степенные ряды коэффициентов d и других постоянных при малом h . Например, полагая

$$S_{00} = d_0 P_0(\eta) + d_2 P_2(\eta) + d_4 P_4(\eta) + \dots$$

и

$$A_{00} = a_2 h^2 + a_4 h^4 + \dots,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} h^2 d_0 + \frac{2}{15} h^2 d_2 - A d_0 \right] P_0(\eta) + \\ & + \left[6d_2 + \frac{2}{3} h^2 d_0 + \frac{11}{21} h^2 d_2 + \frac{4}{21} h^2 d_4 - A d_2 \right] P_2(\eta) + \\ & + \left[20d_4 + \frac{12}{35} h^2 d_2 + \frac{39}{77} h^2 d_4 + \frac{30}{143} h^2 d_6 - A d_4 \right] P_4(\eta) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Полагая $d_2 = [h^2 \alpha_2 + h^4 \alpha_4 + \dots] d_0$ и $d_4 = [h^4 \beta_4 + \dots] d_0$ и приравнивая коэффициенты при $P_0, P_2, \dots$ нулю, получаем

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{2}{15} a_2, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{9}, \quad -\alpha_2 a_2 + 6\alpha_4 + \frac{11}{21} a_2 = 0, \\ a_4 &= -\frac{2}{135}, \quad \alpha_4 = \frac{2}{567}, \quad 20\beta_4 + \frac{12}{35} a_2 = 0, \quad \beta_4 = \frac{1}{525}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_{00} \simeq d_0 P_0 - d_0 \left[\frac{1}{9} h^2 - \frac{2}{567} h^4 \right] P_2 + d_0 \frac{h^4}{525} P_4 + \dots$$

Так как при $\eta = 1$ эта величина должна равняться единице, то мы получаем

$$d_0 \left[1 - \frac{1}{9} h^2 + \frac{11}{2025} h^4 - \dots \right] = 1,$$

или

$$d_0 = 1 + \frac{1}{9} h^2 + \frac{14}{2025} h^4 + \dots$$

Таким образом можно найти приближенные формулы для малых значений h :

$$\begin{aligned} S_{00} &\simeq \left(1 + \frac{1}{9} h^2 + \frac{14}{2025} h^4 \right) P_0(\eta) - \left(\frac{1}{9} h^2 + \frac{5}{567} h^4 \right) P_2(\eta) + \frac{h^4}{525} P_4(\eta), \\ A_{00} &\simeq \frac{1}{3} h^2 - \frac{2}{135} h^4, \quad \Lambda_{00} \simeq 2 \left[1 + \frac{2}{9} h^2 + \frac{116}{2025} h^4 \right]; \\ S_{01} &\simeq \left(1 + \frac{1}{25} h^2 + \frac{144}{55125} h^4 \right) P_1^1(\eta) - \left(\frac{1}{25} h^2 + \frac{29}{6525} h^4 \right) P_3^1(\eta) + \frac{h^4}{2205} P_5^1(\eta), \\ A_{01} &\simeq 2 + \frac{3}{5} h^2 - \frac{6}{875} h^4, \quad \Lambda_{01} \simeq \frac{2}{3} + \frac{4}{75} h^2 + \frac{92}{18375} h^4; \\ S_{11} &\simeq \left(1 + \frac{2}{25} h^2 + \frac{1193}{275625} h^4 \right) P_1^1(\eta) - \left(\frac{1}{75} h^2 + \frac{16}{16875} h^4 \right) P_3^1(\eta) + \frac{h^4}{11025} P_5^1(\eta), \\ A_{11} &\simeq 2 + \frac{2}{5} h^2 - \frac{4}{875} h^4, \quad \Lambda_{11} \simeq \frac{4}{3} + \frac{16}{75} h^2 + \frac{17104}{826875} h^4; \end{aligned} \quad (11.3.89)$$

величины Λ_{ml} являются нормирующими постоянными

$$\Lambda_{ml}(h) = \sum_n [d_n(h|m, l)]^2 \frac{2}{2n+2m+1} \frac{(n+2m)!}{n!} = \int_{-1}^1 [S_{ml}]^2 d\eta.$$

Вторые решения могут быть получены в виде рядов по функциям Лежандра второго рода Q_n^m , причем эти ряды следует распространить и на отрицательные значения n ; однако вторые решения для угловых функций требуются очень редко.

Радиальные функции. Функция

$$F_{ml}(\eta) = (1 - \eta^2)^{-m/2} S_{ml}(h, \eta) = \sum_n' d_n T_n^m \eta$$

(где штрих над знаком суммирования показывает, что в сумму включаются члены только с четными n , когда $l - m$ четно, и с нечетными n , когда $l - m$ нечетно) является решением дифференциального уравнения ($\eta = z$)

$$L_z(f) = (z^2 - 1)f'' + 2(m + 1)zf' + [m(m + 1) - A + h^2z^2]f = 0, \quad (11.3.90)$$

которое мы рассматривали в гл. 5 [см. (5.3.95)]. Было показано, что для решения этого уравнения имеет место интегральное представление

$$f(z) = \int_{-1}^1 e^{ihzt} (1 - t^2)^m F(t) dt, \quad L_z(f) = 0,$$

где F — решение уравнения $L_t(F) = 0$. Используя это соотношение как интегральное преобразование, мы можем подставить F_{ml} под знак интеграла и снова получить решение уравнения (11.3.90), которое оказывается удобным для координаты ξ . Используя одно из указанных в конце этой главы соотношений между T_n^m и сферическими функциями Бесселя j_n , мы получаем

$$\int_{-1}^1 e^{ihzt} (1 - t^2)^{m/2} S_{ml}(h, t) dt = \frac{2}{(hz)^m} \sum_n' i^n d_n \frac{(n + 2m)!}{n!} j_{n+m}(hz),$$

и, следовательно, радиальная функция первого рода

$$\begin{aligned} j_{e_{ml}}(h, z) &= \frac{1}{2} i^{m-l} h^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \int_{-1}^1 e^{ihzt} (1 - t^2)^{m/2} S_{ml}(h, t) dt = \\ &= \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{z^2 - 1}{z^2} \right)^{m/2} \sum_n' i^{n+m-l} d_n(h | ml) \frac{(n + 2m)!}{n!} j_{n+m}(hz) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{hz} \cos \left[hz - \frac{1}{2} \pi(l + 1) \right], \quad hz \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (11.3.91)$$

является решением первого из уравнений (11.3.86). Мы нормировали эту функцию так, чтобы она имела при любом h такое же асимптотическое поведение, как и предельное решение при $h \rightarrow 0$ ($j_{e_{ml}} \simeq j_l$).

Отнюдь не очевидно, что $j_{e_{ml}}$ ведет себя при $z = 1$ так же, как $S_{ml}(h, z)$. Несколько страницами выше было упомянуто, что индексы обеих особых точек ± 1 равны $\pm m/2$, и мы видим, что функции S (для указанных значений A) выбраны таким образом, что они соответствуют *только* индексу $+m/2$ как при $+1$, так и при -1 (т. е. они конечны в обеих точках). При $z = \pm 1$ функции Бесселя $j_{n+m}(hz)$ аналитичны, и, поскольку ряды сходятся, их суммы аналитичны при $z = \pm 1$. Таким образом, индекс при $z = \pm 1$ определяется множителем $(z^2 - 1)^{m/2}$ и, значит, он равен $m/2$, как и для функции S . Следовательно, $j_{e_{ml}}(h, z)$ пропорциональна $S_{ml}(h, z)$. Может показаться, что множитель z^{-m} в формуле для $j_{e_{ml}}$ указывает на наличие полюса в точке $z = 0$, но оказывается, что функции $j_{n+m}(hz)$ стремятся к нулю при $z \rightarrow 0$ как $(hz)^{n+m}$, так что для неотрицательных значений n функция j_{n+m}/z^m аналитична при $z = 0$.

Коэффициент пропорциональности между $j_{e_{ml}}$ и S_{ml} можно найти из соотношения между ними при $z = 0$. Для четных значений $l - m$ в сумме со штрихом для j_e имеется член $i^{m-l} d_0 (2m)! j_m(hz)$, который не исчезает

при $z = 0$:

$$je_{ml} \simeq \frac{(l-m)!}{(l+m)!} i^{-l} d_0 (2m)! \frac{h^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}, \quad z \rightarrow 0, \quad l-m = 0, 2, 4, 6, \dots$$

Но для четных $l-m$

$$S_{ml}(h, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} T_{2n}^m(0) = \sum_n d_{2n} (-1)^n \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+2n-1)}{2^n (n)!}.$$

Для нечетных значений $l-m$ в сумме фигурируют только нечетные значения n и

$$je_{ml}(h, z) \simeq z \frac{(l-m)!}{(l+m)!} i^{-l+1} d_1 (2m+1)! \frac{h^{m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+3)}, \quad z \rightarrow 0.$$

Все T_n^m стремятся к нулю при $z \rightarrow 0$, если n нечетное, и, следовательно, нам предстоит сравнить производные. Поскольку $dT_n^m/dz = T_{n-1}^{m+1}$, мы имеем

$$S_{ml}(h, z) \simeq z \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} T_{2n}^{m+1}(0) = z \sum_n d_{2n+1} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+2m+1)}{2^n (n)!}.$$

Следовательно, мы можем положить $S_{ml}(h, z) = \lambda_{ml}(h) je_{ml}(h, z)$, где

$$\lambda_{ml}(h) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{i^l}{d_0 h^m} \frac{2m+1}{2^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} S_{ml}(h, 0), \quad l = m, m+2, m+4, \dots; \\ \frac{i^l}{\pi h^m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2^{2m+1}}{(2m)!} \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) \times \\ \quad \times \sum_n (-1)^n \frac{d_{2n}}{d_0} \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{(n)!}, \quad l-m = 0, 2, \dots; \\ \frac{i^{l-1}}{\pi h^{m+1}} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2^{2m+3}}{(2m+1)!} \Gamma\left(m + \frac{5}{2}\right) \times \\ \quad \times \sum_n (-1)^n \frac{d_{2n+1}}{d_1} \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{3}{2}\right)}{(n)!}, \quad l-m = 1, 3, \dots; \\ \frac{i^{l-1}}{d_1 h^{m+1}} \frac{(2m+2)(2m+3)}{2^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} S'_{ml}(h, 0), \quad l = m+1, m+3, \dots \end{array} \right. \quad (11.3.92)$$

Для радиальной координаты ξ необходимо найти также и второе решение. Это решение должно иметь особенность при $\xi = \pm 1$, а именно оно должно содержать сумму члена с логарифмической особенностью и члена вида $(\xi^2 - 1)^{-m/2}$. Мы можем нормировать это решение так, чтобы его асимптотическое поведение было просто связано с поведением je . Один из возможных способов для получения искомого решения состоит в том, чтобы подставить в ряд (11.3.91) вместо функций $j_{n+m}(hz)$ соответствующие сферические функции Неймана $n_{n+m}(hz)$, так что

$$ne_{ml}(h, z) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{z^2 - 1}{z^2} \right)^{m/2} \sum_n i^{n+m-l} d_n(h | ml) \frac{(n+2m)!}{n!} n_{n+m}(hz) \simeq \\ \simeq \frac{1}{hz} \sin \left[hz - \frac{1}{2} \pi (l+1) \right], \quad hz \rightarrow \infty. \quad (11.3.93)$$

К сожалению, эти ряды плохо сходятся при малых hz ; на самом деле это — асимптотические ряды, которые не сходятся абсолютно ни для какого конечного значения hz . Другие разложения будут рассмотрены ниже. Однако из асимптотического поведения мы видим, что вронскиан имеет вид

$$\Delta(je_{ml}, ne_{ml}) = \frac{1}{h(z^2 - 1)}. \quad (11.3.94)$$

Функция Грина и другие разложения. Уже привычными нам методами мы получаем разложение функции Грина в вытянутых сфероидальных координатах

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikhR}}{R} = 2ik \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m}{\Lambda_{ml}} S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) S_{ml}(h, \cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu_0) he_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu), & \mu > \mu_0, \\ je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) he_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu_0), & \mu < \mu_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3.95)$$

где $he_{ml} = je_{ml} + ine_{ml}$ — радиальная функция, которая сводится к функции Ганкеля при $h \rightarrow 0$, и

$$\begin{aligned} R^2 = \frac{1}{4} a^2 [\operatorname{ch}^2 \mu + \operatorname{ch}^2 \mu_0 - \sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0 - 2 \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 \cos \vartheta \cos \vartheta_0 - \\ - 2 \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \mu_0 \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned}$$

Аналогично разложение плоской волны имеет вид

$$e^{ik \cdot r} = 2 \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m i^l}{\Lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] S_{ml}(h, \cos \vartheta) je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu),$$

где $(11.3.96)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k [z \cos \vartheta_0 + x \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + y \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0] = \\ = h [\operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned}$$

Эти разложения могут быть использованы, в частности, для вывода некоторых интегральных соотношений между различными функциями. Например, умножая обе части равенства (11.3.96) на $\cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \times S_{ml}(h, \cos \vartheta)$ и интегрируя по φ и по $\cos \vartheta$, мы получаем

$$\int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi \int_0^\pi e^{ik \cdot r} S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi i^l S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu).$$

Выделив из $e^{ik \cdot r}$ множитель $e^{ih \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$ и выполнив интегрирование по φ , приведем это равенство к виду

$$\begin{aligned} 4\pi i^l S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\ = 2\pi i^m \int_0^\pi e^{ih \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \vartheta_0} J_m(h \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \vartheta_0) S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Разделив теперь обе части равенства на $\sin^m \vartheta_0$ и устремляя ϑ_0 к нулю, получим

$$je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = \frac{1}{2} i^{m-l} h^m \operatorname{sh}^m \mu \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_0^\pi e^{ih \operatorname{ch} \mu \cos \vartheta} S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin^{m+1} \vartheta d\vartheta.$$

Эту формулу полезно сопоставить с (11.3.91).

Другое интегральное представление получается умножением обеих частей равенства (11.3.95) на $\cos[m(\varphi - \varphi_0)] S_{ml}(h, \cos \vartheta)$ и интегрированием по $\cos \vartheta$ и φ :

$$S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) j e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu_0) h e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi \int_0^\pi h_0(kR) S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.3.97)$$

При $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ и $\mu_0 \rightarrow 0$ левая часть этого равенства стремится к

$$\operatorname{sh}^m \mu_0 \frac{i^{m-1} d_0 h^m}{2m+1} h e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu),$$

если $l = m, m+2, m+4, \dots$, или же к

$$\operatorname{sh}^m \mu_0 \frac{i^{m+1-l} d_l h^{m+1}}{(2m+2)(2m+3)} \cos \vartheta_0 h e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu),$$

если $l = m+1, m+3, \dots$.

Далее мы рассмотрим правую часть равенства (11.3.97) при $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ и $\mu_0 \rightarrow 0$. Обращаясь сначала к случаю $l = m, m+2, m+4, \dots$, мы предположим, что $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ и μ_0 мало. При этом с точностью до величин первого порядка малости относительно $\operatorname{sh} \mu_0$

$$kR \simeq h \sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где

$$\rho^2 = \operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \vartheta \quad \text{и} \quad \eta^2 = \frac{\operatorname{sh}^2 \mu \sin^2 \vartheta}{\operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \vartheta} \operatorname{sh}^2 \mu_0.$$

Используя разложение, данное на стр. 303, мы можем представить функцию $h_0(kR)$ в виде ряда

$$h_0(kR) \simeq \frac{V^{\pi/2h}}{[\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/4}} H_{1/2}[h\sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)}] \simeq \\ \simeq \frac{e^{-i\varphi/2}}{1 - (\eta/2\rho) \cos(\varphi - \varphi_0)} \sqrt{\frac{\pi}{2h\rho}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)} J_m(h\eta) H_{m+1/2}(h\rho) \simeq \\ \simeq \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)} J_m(h\eta) h_m(h\rho) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\rho} e^{-i(\varphi - \varphi_0)} \right].$$

Подставим это выражение в (11.3.97), проинтегрируем по φ и разделим обе части полученного равенства на $\operatorname{sh}^m \mu_0$; переходя затем к пределу при $\mu_0 \rightarrow 0$, мы в конце концов получим формулу для $h e_{ml}$ при $l = m, m+2, m+4, \dots$:

$$h e_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = i^{l-m} (2m+1) \frac{\operatorname{sh}^m \mu}{2^{m+2} m! d_0} \int_0^\pi \frac{1}{\rho^m} \left[h_m(h\rho) + (-1)^m h_{-m}(h\rho) - \right. \\ \left. - (-1)^m \frac{m}{h\rho} h_{m+1}(h\rho) \right] S_{ml}(h, \cos \vartheta) \sin^{m+1} \vartheta d\vartheta, \quad (11.3.98)$$

где

$$\rho^2 = \operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2\mu + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta = u^2 + v^2 + 2uv \cos 2\vartheta,$$

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = \frac{1}{2} e^{-\mu}.$$

Отсюда с помощью еще одного преобразования можно получить разложение в ряд he . При $m=0$ величина в скобках под знаком интеграла обращается в (см. стр. 532)

$$2h_0(h\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos 2\vartheta) j_n(h\nu) h_n(hu),$$

так что для $l=0, 2, 4, \dots$

$$\begin{aligned} he_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \\ &= \frac{i^l}{2d_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_n\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) \int_0^{\pi} P_n(\cos 2\vartheta) S_{0l}(h, \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Из этой формулы, используя (11.3.87), мы можем получить новое разложение для he , удовлетворительно сходящееся при $\mu=0$. Поскольку

$$P_0(\cos 2\vartheta) = P_0(\cos \vartheta),$$

$$P_1(\cos 2\vartheta) = \frac{4}{3} P_2(\cos \vartheta) - \frac{1}{3} P_0(\cos \vartheta),$$

$$P_2(\cos 2\vartheta) = \frac{48}{35} P_4(\cos \vartheta) - \frac{4}{7} P_2(\cos \vartheta) + \frac{1}{5} P_0(\cos \vartheta)$$

и т. д., мы имеем

$$\begin{aligned} he_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) &= i^l \left\{ j_0\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_0\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) - \right. \\ &\quad - \left[\frac{4}{5} \frac{d_2(h|0l)}{d_0(h|0l)} - 1 \right] j_1\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_1\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) + \\ &\quad \left. + \left[\frac{16}{21} \frac{d_4(h|0l)}{d_0(h|0l)} - \frac{4}{7} \frac{d_2(h|0l)}{d_0(h|0l)} + 1 \right] j_2\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_2\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

для $l=0, 2, 4, \dots$

Эти ряды хорошо сходятся при малых h и часто их можно непосредственно суммировать. Так, используя (11.3.89), разложения в ряд для j и h и формулу

$$\operatorname{Ar th}(e^{-\mu}) = e^{-\mu} + \frac{1}{3} e^{-3\mu} + \frac{1}{5} e^{-5\mu} + \dots,$$

мы получаем при $he^{\mu} \ll 1$

$$ne_{00}(h, \operatorname{ch} \mu) \simeq -\frac{2}{h} \left\{ \frac{1}{3} h^2 \operatorname{ch} \mu + \left(1 + \frac{11}{72} h^2 - \frac{1}{24} h^2 \operatorname{ch} 2\mu\right) \operatorname{Ar th} e^{-\mu} \right\}.$$

При $m=1$ величина в скобках под знаком интеграла в (11.3.98) равна $2h_1(h\rho)$, и мы в конце концов получаем

$$\begin{aligned} he_{1l}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \frac{3i^{l-1} \operatorname{sh} \mu}{hd_0} \sum_n (-1)^n (2n+3) j_{n+1}\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_{n+1}\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) \times \\ &\times \int_0^{\pi} T_n^1(\cos 2\vartheta) S_{1l}(h, \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{12}{h} i^{l-1} \operatorname{sh} \mu \left\{ j_1\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_1\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) - \right. \\ &\quad - \left[\frac{24}{5} \frac{d_2}{d_0} - 3 \right] j_2\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_2\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) + \\ &\quad \left. + \left[\frac{80}{11} \frac{d_4}{d_0} - 8 \frac{d_2}{d_0} + 6 \right] j_3\left(\frac{1}{2} he^{-\mu}\right) h_3\left(\frac{1}{2} he^{\mu}\right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Тем же путем находим, что при $he^\mu \ll 1$

$$ne_{11}(h, \operatorname{ch} \mu) \simeq -\frac{3}{2h^2} \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \left\{ \left[\left(1 - \frac{19}{75} h^2 \right) \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{75} h^2 \operatorname{ch}^2 \mu \right] - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{sh}^2 \mu \left[\left(1 + \frac{3}{50} h^2 \right) + \frac{1}{10} h^2 \operatorname{ch}^2 \mu \right] \operatorname{Ar th} e^{-\mu} \right\}.$$

Возвращаясь теперь к случаю $l = m + 1$, $m + 3$, ..., замечаем, что, прежде чем положить $\vartheta_0 = \pi/2$, следует взять производную по $\cos \vartheta_0$ от правой части равенства (11.3.97). Для этого надо взять производную от $h_0(kR)$:

$$\left[\frac{dh_0(kR)}{d \cos \vartheta_0} \right]_{\vartheta_0 = \pi/2} = \\ = \frac{h \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 \cos \vartheta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)}} h_1 [h \sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)}] = \\ = h \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 \cos \vartheta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(\varphi - \varphi_0)}}{\rho} J_m(h\eta) h_{m+1}(h\rho) \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{\rho} e^{-i(\varphi - \varphi_0)} \right].$$

Полагая теперь $\operatorname{sh} \mu_0 \rightarrow 0$ и используя разложения J_m и h_{m+1} , мы, наконец, получаем для $l = m + 1$, $m + 3$, ...

$$he_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\ = i^{l-m-1} \frac{(2m+2)(2m+3)}{2^{m+2} m! d_1(h|ml)} \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh}^m \mu \int_0^\pi \frac{1}{\rho^{m+1}} \left[h_{m+1}(h\rho) + (-1)^m h_{-m+1}(h\rho) - \right. \\ \left. - (-1)^m \frac{3m}{\rho} h_{-m+2}(h\rho) \right] S_{ml}(h, \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin^{m+1} \vartheta d\vartheta.$$

При $m = 0$ величина в квадратных скобках равна $2h_1(h\rho)$, так что

$$he_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) = i^{l-1} \frac{6 \operatorname{ch} \mu}{h d_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+3) j_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) h_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) \times \\ \times \int_0^\pi T_n^1(\cos 2\vartheta) S_{01}(h, \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \\ = i^{l-1} \frac{12 \operatorname{ch} \mu}{h} \left\{ j_1 \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) h_1 \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) - \left[\frac{12 d_3}{7 d_1} + 1 \right] j_2 \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) \times \right. \\ \left. \times h_2 \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) + \left[\frac{80}{33} \frac{d_3}{d_1} + \frac{d_3}{d_1} + 2 \right] j_3 \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) h_3 \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) - \dots \right\},$$

а при $he^\mu \ll 1$ мы имеем

$$ne_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) \simeq -\frac{6}{h^2} \left\{ \left[\left(1 + \frac{17}{200} h^2 \right) \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{40} h^2 \operatorname{ch} 3\mu \right] \operatorname{Ar th} e^{-\mu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{12} h^2 \right) - \frac{1}{20} h^2 \operatorname{ch} 2\mu \right] \right\}.$$

Эти приближенные формулы вместе с соответствующими формулами для

решений первого рода:

$$\begin{aligned} j e_{00}(h, \operatorname{ch} \mu) &\simeq 1 - \frac{1}{18} h^2 - \frac{1}{6} h^2 \operatorname{sh}^2 \mu, \\ j e_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) &\simeq \left(\frac{1}{3} h + \frac{1}{75} h^3 \right) \operatorname{ch} \mu, \\ j e_{1l}(h, \operatorname{ch} \mu) &\simeq \left(\frac{1}{3} h + \frac{2}{75} h^3 \right) \operatorname{sh} \mu \end{aligned} \quad (11.3.99)$$

при $he^u \ll 1$ служат для вычисления излучения и рассеяния в случае предельно длинных волн.

Сплюсненные сфероидальные координаты. Эти координаты, определенные формулами (10.3.55), через $\rho = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \xi$, $\vartheta = \arccos \eta$ выражаются так:

$$\begin{aligned} z &= b \operatorname{sh} \rho \cos \vartheta, \quad \frac{x}{y} = b \operatorname{ch} \rho \sin \vartheta \frac{\sin}{\cos} \varphi, \\ h_\rho &= h_\vartheta = b \sqrt{\operatorname{sh}^2 \rho + \cos^2 \vartheta} = \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} 2\rho + \cos 2\vartheta}, \\ h_\varphi &= b \operatorname{ch} \rho \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (11.3.100)$$

причем при $\rho = 0$ получаем диск радиуса b , перпендикулярный к оси z .

Эти формулы могут быть получены из формул для вытянутых сфероидальных координат (11.3.81), если координату μ заменить на $\rho - i\pi/2$ и одновременно параметр a заменить на $2ib$. Следовательно, все формулы, полученные для волновых функций в вытянутых сфероидальных координатах, можно преобразовать в соответствующие формулы для сплюсненных сфероидальных координат заменой μ на $\rho - \pi i/2$ и $h = ka/2$ на $ig = ikb$ (здесь $k = \omega/c$, как обычно).

Через эти функции можно, например, выразить излучение колеблющегося диска. Предположим, что диск радиуса b колеблется как целое взад и вперед перпендикулярно к своей плоскости (которую можно для удобства предположить параллельной x, y -плоскости). В сплюсненных сфероидальных координатах нормальная скорость поверхности диска $\rho = 0$ равна $v_0 e^{-i\omega t}$ при $0 < \vartheta < \pi/2$ и $-v_0 e^{-i\omega t}$ при $\pi/2 < \vartheta < \pi$. Волна, порожденная колебаниями диска, может быть представлена рядом

$$\psi = \sum_l A_l S_{0l}(ig, \cos \vartheta) h e_{0l}(ig, -i \operatorname{sh} \rho),$$

где

$$\begin{aligned} A_l \Lambda_{0l} G_l &= b v_0 e^{-i\omega t} \int_{-1}^1 S_{0l}(ig, \eta) \eta d\eta = \\ &= \begin{cases} 0, & l = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2}{3} b v_0 e^{-i\omega t} d_1(ig | 0l), & l = 1, 3, 5, \dots, \end{cases} \\ G_l &= \left[\frac{d}{d\rho} h e_{0l}(ig, -i \operatorname{sh} \rho) \right]_{\rho=0}, \end{aligned}$$

При этом давление на задней стороне диска выражается формулой

$$p = \frac{2}{3} i \rho c g v_0 e^{-i\omega t} \sum_l \left[\frac{d}{d\rho} h e_{0l}(ig, -i \operatorname{sh} \rho) \right]_{\rho=0} \frac{d_1(ig | 0l)}{\Lambda_{0l}} S_{0l}(ig, \cos \vartheta)$$

(штрих означает, что в сумму включены только члены с нечетными l), а отношение полной силы к скорости диска, т. е. акустический импеданс свободного диска, равно

$$Z = \frac{8}{9} \pi i \rho c g b^2 \sum_l' \frac{d_1(ig|0l)}{\Lambda_{0l}} \left[\frac{he_{0l}(ig, 0)}{\frac{d}{d\rho} he_{0l}(ig, -ig \operatorname{sh} \rho)} \right]_{\rho=0} \simeq$$

$$\simeq -\frac{8}{3} i \rho c g b^2 + \frac{16}{27\pi} \rho c g^4 b^2 = -i\omega \frac{8b^3\rho}{3} + \frac{16\rho\omega^4 b^6}{27\pi c^2},$$

$$g = \frac{2\pi b}{\lambda} \ll 1.$$

Эта формула дает для волн большой длины волны λ эффективную массу воздушной нагрузки $8b^3\rho/3$ и сопротивление излучения.

С помощью выписанных функций можно выполнить многие другие расчеты. Некоторые из них будут указаны в качестве задач.

Мы не останавливались здесь на других системах координат, в которых волновое уравнение разделяется, таких, как параболические, конические и т. п., ибо, по-видимому, отсутствуют достаточно важные физические приложения этих координат. Общие методы вычисления решений, разложения плоской волны, нахождения функции Грина и формул рассеяния — все это остается таким же, как в уже описанных случаях.

11.4. Интегральные уравнения и вариационные методы

Читателю давно должно было стать очевидным, что задачи с простыми краевыми условиями на простых, допускающих разделение переменных поверхностях, хотя и легко разрешимы, но не очень интересны. Для сфер и круглых цилиндров решения хорошо изучены, и даже в задачах о рассеянии для этих поверхностей получаются результаты, давно известные и потому могущие вызвать пренебрежительное отношение. Конечно, при решении методами фундаментальных собственных функций задач для более необычных, допускающих разделение поверхностей, таких, как полоса, диск или расплющенный конус, имеются еще элементы новизны, и поэтому эти задачи продолжают привлекать интерес по крайней мере до тех пор, пока не будут опубликованы соответствующие численные таблицы; однако в основном они представляют собой «добавление того же самого». Поскольку в «реальной жизни» редко встречаются столь регулярные поверхности, эти задачи практически мало полезны.

С другой стороны, задачи, в которых граничные поверхности не «полностью разделяются», труднее, интереснее и более соответствуют действительности. Задачи о рассеянии волн на не точно сферическом теле и о распространении волн в трубе, которая имеет не везде одинаковое поперечное сечение или на поверхности которой не везде одинаковы краевые условия, уже были рассмотрены в § 9.3, и мы встречались с ними также и в этой главе (см. стр. 418 и 455). Обычно такие задачи не могут быть решены точно, но важно уметь найти для них приближенные решения, компактные по форме и имеющие по возможности малую погрешность.

Для подобных задач весьма полезны и весьма важны методы, основанные на применении функций Грина, интегральных уравнений и вариационных принципов. В настоящем параграфе мы имеем в виду рассмотреть несколько типичных задач этого рода и показать, как к этим задачам могут быть применены методы, изученные в гл. 7, 8 и 9. Некоторые из наших примеров касаются проникновения волн через отверстия в регу-

лярных поверхностях, в других же имеются иррегулярности в краевых условиях; только в немногих случаях эти задачи допускают точные решения в форме, пригодной для практического применения.

Некоторое количество подобных задач уже было рассмотрено нами в качестве примеров в § 9.3 и 9.4 и в настоящей главе. Например, мы анализировали случай диафрагмы в регулярной трубе. Метод решения сводился к тому, чтобы найти решения для каждой половины трубы, удовлетворяющие условиям вдали от диафрагмы (уходящая прошедшая волна по одну сторону, падающая и отраженная волны — по другую сторону), и затем произвести гладкое сопряжение найденных решений и их производных на отверстии в диафрагме. При этом получалась бесконечная система уравнений для неизвестных коэффициентов разложений по собственным функциям на каждой стороне диафрагмы, не допускавшая точного решения. Поэтому мы задавались приближенной формой решения непосредственно в отверстии (в большинстве случаев этой формой служило решение уравнения Лапласа для соответствующей границы), из которого можно было определить приближенные соотношения между коэффициентами неизвестного разложения и в принятом приближении свести число неизвестных к одному или двум. Эти последние неизвестные мы определяли, приравнивая решения в одной или двух точках отверстия; если выбранная приближенная форма была близка к точной, то решения приближенно совпадали в остальных точках отверстия.

Однако этот метод, несмотря на простоту концепции и легкость применения, имеет ряд недостатков. Отсутствует простой способ повышения точности приближенного решения и даже установления степени его приближения к точному решению. Поэтому мы позволим себе вновь рассмотреть задачу указанного типа, чтобы выяснить, что можно позаимствовать из методов гл. 7, 8 и 9.

Диафрагма в трубе. В первую очередь мы рассмотрим задачу о распространении звука в трубе с жесткими стенками круглого поперечного сечения радиуса a , в которой при $z=0$ помещена неподвижная диафрагма с концентрическим отверстием радиуса b . Мы уже рассматривали подобную задачу (см. стр. 414) для случая щели в диафрагме, помещенной в прямоугольной трубе. Мы предполагали, что решение при $z > 0$ представляет собой волну, движущуюся в положительном направлении (для высших типов волн зависимость от z выражалась убывающей экспонентой), а решение при $z < 0$ — комбинацию падающей и отраженной волн (и более высоких типов волн, экспоненциально убывающих при $z \rightarrow -\infty$). Эти два решения подбирались так, чтобы они имели равную нулю составляющую градиента на закрытой части диафрагмы и одинаковые градиенты в открытом отверстии или щели. Для получения точного решения нам нужно было бы добиться, чтобы потенциал скоростей ψ был также непрерывен в щели, однако достигнуть здесь полной точности было слишком трудно и мы удовлетворялись приближенным выражением для составляющей градиента в отверстии, содержащим одну произвольную постоянную. Эта постоянная была выбрана так, чтобы обеспечить непрерывность величины ψ вдоль оси трубы. Если выбор составляющей градиента в отверстии был сделан удачно, то разрыв ψ в других точках отверстия представлялся незначительным; однако провести обратный расчет, чтобы установить, каков этот разрыв на самом деле, было затруднительно.

Воспроизведем теперь наш процесс с помощью функции Грина; результаты помогут нам увидеть, какие улучшения могут быть сделаны. Функцию Грина, имеющую равную нулю составляющую градиента на поверхности трубы, а также при $z=0$ и соответствующую уходящим волнам при $z \rightarrow +\infty$, мы обозначим через $G_k^+(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$, и, соответственно, при $z \rightarrow -\infty$ —

через $G_k^-(r|r_0)$. Для круглой трубы обычная процедура дает

$$G_k^+(r, \varphi, z|r_0, \varphi_0, z_0) = \frac{4i}{a^2} \sum_{m, n} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \frac{J_m(\pi \alpha_{mn} r/a) J_m(\pi \alpha_{mn} r_0/a)}{k_{mn} [1 - (m/\pi \alpha_{mn})^2] J_m^2(\pi \alpha_{mn})} \begin{cases} \cos(k_{mn} z_0) e^{ik_{mn} z}, & z > z_0, \\ \cos(k_{mn} z) e^{ik_{mn} z_0}, & z < z_0, \end{cases} \quad (11.4.1)$$

где α_{mn} — n -й корень уравнения $dJ_m(\pi \alpha)/d\alpha = 0$ и $k_{mn}^2 = k^2 - (\pi \alpha_{mn}/a)^2$. Для m и n больших $k_{mn} = i \sqrt{(\pi \alpha_{mn}/a)^2 - k^2} \simeq i \pi n/a$. Функция G_k^- получается отсюда изменением знаков при z и z_0 .

Нетрудно видеть, что задача будет решена, если мы найдем распределение скорости воздушного потока, обозначаемой $u_z^0(r)$, по отверстию $z = 0$, $r < b$. Действительно, тогда нормальная составляющая градиента потенциала скоростей ψ будет равна $-u_z^0$ в открытом отверстии, нулю во всех остальных точках границы, и из теоремы Грина [см. (7.2.10)] следует, что потенциал скоростей внутри трубы будет, опуская множитель $e^{-i\omega t}$, равен

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^b r_0 u_z^0(r_0) G_k^+(r, \varphi, z|r_0, \varphi_0, 0) dr_0, & z > 0, \\ 2A \cos(kz) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^b r_0 u_z^0(r_0) G_k^-(r, \varphi, z|r_0, \varphi_0, 0) dr_0, & z < 0, \end{cases} \quad (11.4.2)$$

где, как обычно, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. В области $z < 0$ мы имеем комбинацию падающей плоской волны амплитуды A с такой же отраженной волной, фаза которой выбрана так, чтобы для этой комбинации составляющая градиента при $z = 0$ равнялась нулю. Такая комбинация была бы решением задачи, если бы в диафрагме не было отверстия; изменение отраженной волны, порожденное отверстием, учитывается интегралом от $G^- u_z^0$, который также представляет волну, распространяющуюся к $-\infty$. В области $z > 0$ имеется только прошедшая волна, представленная интегралом от $G^+ u_z^0$ и распространяющаяся в положительном направлении.

Если волновой вектор k меньше критического значения $\pi \alpha_{01}/a$, то в функции Грина при $z \rightarrow \infty$ сохраняется только плоская волна, для которой $m = n = 0$, и предельная формула для прошедшей волны имеет вид

$$\psi \simeq \frac{i\tau A}{\pi k a^2} e^{ikz}, \quad z \rightarrow \infty, \quad k < \frac{\pi \alpha_{01}}{a},$$

где

$$\tau = \frac{2\pi}{A} \int_0^b u_z^0(r_0) r_0 dr_0 \quad (11.4.3)$$

— отношение амплитуды потока воздуха через отверстие в диафрагме к амплитуде падающей волны. Отношение квадрата амплитуды потенциала ψ при $z \rightarrow \infty$ к квадрату амплитуды A падающей волны $T = |\tau/\pi k a^2|^2$ представляет собой коэффициент прохождения через отверстие, т. е. отношение интенсивности прошедшей волны к интенсивности падающей. Этот коэффициент прохождения (и отражения) можно легко вычислить, если известна u_z^0 .

В § 11.3 мы предполагали, что u_z^0 выражается приблизительно так же, как и в случае установившегося потока через отверстие (решение при $k = 0$), и соответственно проводили вычисления, выбирая амплитуду u_z^0 так, чтобы обеспечить приближенную непрерывность ψ при $z = 0$. Здесь мы хотим получить интегральное уравнение для определения u_z^0 , которое мо-

жет быть решено последовательными приближениями и с помощью которого мы сможем оценить степень точности приближения, полученного ранее. Практически, во многих задачах не требуется знать детально поведение u_z^0 или ψ вблизи диафрагмы, если только мы в состоянии получить достаточно точное значение для величины τ , определенной в (11.4.3). Не вычисляя непосредственно u_z^0 , мы можем вычислить коэффициенты прохождения и отражения

$$T = \left| \frac{\tau}{\pi k a^2} \right|^2, \quad R = 1 - T. \quad (11.4.4)$$

Эти величины определяют, какая часть мощности, падающей на диафрагму, проходит через отверстие и какая часть отражается. Часто эти величины составляют все то, что нужно знать в данной задаче.

Интегральное уравнение для u_z^0 получается из условия непрерывности ψ в отверстии, другими словами, из условия равенства значений ψ при $z=0$, полученных из выражений для $z > 0$ и для $z < 0$ по формуле (11.4.2). Поскольку $G^+ - G^- \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow 0$, мы получаем искомое интегральное уравнение в виде

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^b r_0 u_z^0(r_0) G_k(r, \varphi, 0 | r_0, \varphi_0, 0) dr_0, \quad r < b.$$

Если это уравнение будет решено точно, то, как мы показали, задача будет решена полностью.

Вариационный принцип. Решить это уравнение непосредственно не так просто, но оно имеет форму, удобную для получения вариационного принципа для u_z^0 и τ (см. § 9.4). Умножая обе части на $u_z^0(r)$ и интегрируя по φ и r , мы получаем

$$\frac{1}{4\pi} \iiint u_z^0(r) u_z^0(r_0) r r_0 G_k d\varphi d\varphi_0 dr dr_0 = A \iint u_z^0 r d\varphi dr = A^2 \tau,$$

или

$$A^2 \tau = 2A \iint u_z^0 r d\varphi dr - \frac{1}{4\pi} \iiint u_z^0(r) u_z^0(r_0) G_k r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0. \quad (11.4.5)$$

Если мы теперь изменим u_z^0 , отходя от его истинного значения, на малую величину δu , то получим

$$A^2 \delta \tau = 2 \iint \left[A - \frac{1}{4\pi} \iint u_z^0(r_0) G_k r_0 d\varphi_0 dr_0 \right] r d\varphi dr \delta u,$$

а это и дает уравнение для A , если положить $\delta \tau = 0$. Итак, истинное значение u_z^0 даст стационарное значение интегралу из (11.4.5). Сначала мы варьируем только амплитуду u_z^0 , полагая $u_z^0 = B\chi(r)$, где B подлежит варьированию для определения экстремума:

$$\delta \left[2AB \iint \chi r d\varphi dr - \frac{B^2}{4\pi} \iiint \chi(r) \chi(r_0) G_k r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0 \right] = 0.$$

Отсюда определяем значение

$$B = \frac{4\pi A \iint \chi r d\varphi dr}{\iiint \chi(r) \chi(r_0) G_k r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0}.$$

Пользуясь формулой (11.4.3), можно исключить из этого соотношения A — амплитуду падающей волны. Получим вариационный принцип, связывающий амплитуду потока τ с распределением потока χ , соответствующим

падающей волне единичной амплитуды [см. (9.4.8)]:

$$[\tau] = \frac{4\pi \int \int \chi(r) r d\varphi dr \int \int \chi(r_0) r_0 d\varphi_0 dr_0}{\int \int \int \int \chi(r) \chi(r_0) G_k(r, \varphi, 0 | r_0, \varphi_0, 0) r r_0 d\varphi_0 d\varphi dr_0 dr}. \quad (11.4.6)$$

Выражение, стоящее справа, достигает своего экстремального значения, т. е. экстремального значения τ , при истинном χ . Мы пойдем, однако, другим путем: если даже χ не имеет его истинной формы, но близко к истинному, то вычисленное значение нашего отношения интегралов будет отличаться от истинного значения τ на величину второго порядка малости относительно малой вариации χ . Более того, используя формулу (11.4.6), как в гл. 9, мы можем получить итерированное выражение для χ , более близкое к истинному, чем первое приближение. Заметим, что и числитель и знаменатель содержат оба множителя χ , а следовательно, амплитуда функции сравнения, использованной для χ , может быть установлена позднее; она не влияет на величину τ . Если мы хотим рассчитать только коэффициенты прохождения и отражения, то можно вообще обойтись без определения амплитуды χ .

Вычисление коэффициента прохождения. Выберем в качестве функции сравнения выражение, использованное в § 11.3, для диафрагмы с концентрическим отверстием, помещенной в круглой трубе,

$$\chi \simeq C \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

которое является достаточно хорошим приближением в случае $b < a/2$. Чтобы вычислить интегралы в (11.4.6), нужно использовать общее выражение интегралов вида

$$\begin{aligned} \int_0^b \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^{n-1/2} J_0(\beta r) r dr &= b^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^{2n} \theta J_0(\beta b \sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{2^{n-1/2} b^2 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(\beta b)^{n+1/2}} J_{n+1/2}(\beta b) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(\beta b)^n} b^2 j_n(\beta b). \end{aligned}$$

Пользуясь этим результатом для различных значений n и β , мы получаем

$$\int \int \chi r d\varphi dr = 2\pi C b^2 j_0(0) = 2\pi b^2 C,$$

$$\int \int \int \int \chi(r) \chi(r_0) G_k r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0 = \frac{16\pi^2 C^2 b^4}{ka^2} \left\{ i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{K_n} \left[\frac{j_0(\pi \alpha_{0n} b/a)}{J_0(\pi \alpha_{0n})} \right]^2 \right\},$$

где $K_n^2 = (\pi \alpha_{0n}/a)^2 - k^2$ ($k < \pi \alpha_{01}/a$ и $b < a/2$). Таким образом, приближенное значение коэффициента прохождения равно

$$T \simeq \frac{1}{1 + (\Sigma)^2}, \quad (\Sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ka^3/b^2}{V 1 - (ka/\pi \alpha_{0n})^2} \frac{\sin^2(\pi \alpha_{0n} b/a)}{(\pi \alpha_{0n})^2 J_0^2(\pi \alpha_{0n})}. \quad (11.4.7)$$

Сходимость этого ряда может быть улучшена, если учесть, что $J_0^2(\pi \alpha_{0n}) \simeq 2/\pi^2 \alpha_{0n}$ при $n \rightarrow \infty$, так что вспомогательный ряд, который

следует прибавить и вычесть из данного ряда, имеет вид

$$S = \frac{ka^3}{2\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{\pi nb}{a}\right) = \frac{ka^3}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi nb}{a}\right) \right] = \\ = \frac{ka^3}{4\pi b^2} \operatorname{Re} [I(e^{2\pi i b/a})],$$

где

$$I(x) = - \int_x^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \ln x \ln(1-x) - \int_1^x \frac{\ln t}{t-1} dt = \\ = \ln x \ln(1-x) - \ln x - \frac{1}{4} (\ln x)^2 - [\text{ряд по нечетным степеням } \ln x], \\ |\ln x| < 2\pi.$$

При этом последние соотношения получены заменой переменных интегрирования и интегрированием по частям. Окончательно

$$S = \pi \frac{ka^2}{4b} \left[1 - \frac{b}{a} \right]$$

и ряд (Σ) в (11.4.7) может быть записан так:

$$(\Sigma) = \frac{\pi ka^2}{4b} - \frac{1}{4} \pi ka + \\ + \frac{ka^3}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n^2 \sin^2\left(\frac{\pi \alpha_{0n} b}{a}\right) - (\pi \alpha_{0n})^3 \sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \alpha_{0n}}\right)^2} J_0^2(\pi \alpha_{0n}) \sin^2\left(\frac{\pi nb}{a}\right)}{2\pi n^2 (\pi \alpha_{0n})^3 \sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \alpha_{0n}}\right)^2} J_0^2(\pi \alpha_{0n})} \quad (11.4.8)$$

где новый ряд быстро сходится и его можно рассматривать как поправку к первым двум членам.

Когда b/a мало (отверстие мало по сравнению с поперечным сечением трубы), в выражении (Σ) наибольшим является первый член и коэффициент прохождения равен

$$T \simeq \frac{1}{1 + (\pi ka^2/4b)^2} \simeq \frac{16}{(ka)^2} \frac{b^2}{\pi^2 a^2}, \quad b \ll ka^2.$$

Часть падающей волны, проходящая через очень малое отверстие, пропорциональна отношению площади отверстия к площади поперечного сечения трубы и обратно пропорциональна квадрату частоты (если частота не слишком мала). С другой стороны, если частота стремится к нулю ($ka \ll b/a$), то T стремится к единице; если частота достаточно низка (т. е. если каждый период колебания длится достаточно долго), то звук проходит через отверстие практически беспрепятственно.

Из этой формулы ничего нельзя узнать относительно предельно высоких частот, ибо при ее выводе мы предположили, что частота меньше, чем частота первой парциальной волны, так что по трубе передается только наинизший тип волн. Нельзя также ожидать, что эта формула будет пригодной для значений b , близких к a (радиус отверстия примерно равен радиусу трубы), так как использованная нами функция сравнения для χ не является в этом случае хорошим приближением.

Если бы мы использовали метод §11.3, мы бы получили для T близкое выражение, отличающееся только тем, что при его выводе требовалась непрерывность лишь вдоль оси трубы, в то время как в изложенном здесь выводе мы требуем, так сказать, непрерывности в среднем по всему отверстию.

Лучшее приближение, которое может дать удовлетворительные результаты даже при $b \rightarrow a$ (но не при $ka \rightarrow \infty$), получим, если положим

$$\chi \simeq \frac{C}{V 1 - (r/b)^2} + \gamma C \sqrt{1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2},$$

и, варьируя γ , будем искать стационарное значение выражения (11.4.6).

Положив $(d/d\gamma)(1/\tau) = 0$, получаем простую формулу: значение γ для стационарного τ равно

$$\gamma = -\frac{b}{a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_0(\pi a_{0n} b/a) j_2(\pi a_{0n} b/a)}{\pi a_{0n} V 1 - (ka/\pi a_{0n})^2 J_0^2(\pi a_{0n})} \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_1(\pi a_{0n} b/a) j_2(\pi a_{0n} b/a)}{(\pi a_{0n})^2 V 1 - (ka/\pi a_{0n})^2 J_0^2(\pi a_{0n})} \right\}^{-1}. \quad (11.4.9)$$

Отсюда находим значение коэффициента прохождения

$$T \simeq \left\{ 1 + \frac{(ka)^2}{(1+\gamma/3)^4} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_0(\pi a_{0n} b/a) + (\gamma a/\pi a_{0n} b) j_1(\pi a_{0n} b/a)}{\pi a_{0n} V 1 - (ka/\pi a_{0n})^2 J_0^2(\pi a_{0n})} \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (11.4.10)$$

где γ определяется формулой (11.4.9). Этот ряд можно просуммировать методом, аналогичным тому, который привел к (11.4.8).

Отверстие в бесконечной плоскости. Этот же общий метод может быть применен в предельном случае при a , стремящемся к бесконечности, когда выражение для G в виде ряда переходит в интегральное представление

$$G_k^+ = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^{\infty} \frac{J_m(ur) J_m(ur_0)}{V u^2 - k^2} \times \\ \times \begin{cases} \text{ch}(z_0 \sqrt{u^2 - k^2}) \exp(-z \sqrt{u^2 - k^2}) u du, & z > z_0, \\ \text{ch}(z \sqrt{u^2 - k^2}) \exp(-z_0 \sqrt{u^2 - k^2}) u du, & z < z_0. \end{cases} \quad (11.4.11)$$

Полагая $\chi = C/V 1 - (r/b)^2$, мы имеем, как и ранее, $\int \int \chi r d\varphi dr = 2\pi b^2 C$, но

$$\iiint \chi(r) \chi(r_0) G_k r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0 = 8\pi^2 i b^4 C^2 \int_0^{\infty} \frac{u du}{V k^2 - u^2} j_0^2(ub) = \\ = \frac{8\pi^2 b^4 C^2}{k} \left\{ i \int_0^1 \frac{\sin^2(kbv)}{v V 1 - v^2} dv + \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(kbv)}{v V v^2 - 1} dv \right\}.$$

Эти два интеграла можно подсчитать численно для любого значения kb . Если kb мало, то их можно представить следующим образом:

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(kbv)}{v V 1 - v^2} dv \simeq k^2 b^2 \int_0^1 \frac{v dv}{V 1 - v^2} - \frac{1}{3} k^4 b^4 \int_0^1 \frac{v^3 dv}{V 1 - v^2} = k^2 b^2 - \frac{2}{9} k^4 b^4, \\ \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(kbv)}{v V v^2 - 1} dv \simeq \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(kbv)}{v^2} dv + (kb)^2 \int_1^{\infty} \left[\frac{v}{V v^2 - 1} - 1 \right] dv \simeq \\ \simeq \frac{1}{2} \pi kb - k^2 b^2 + k^2 b^2 = \frac{1}{2} \pi kb.$$

Отсюда получаем приближенное значение для полного потока через отверстие

$$\tau \simeq 2\pi k b^2 \left\{ i \left(k^2 b^2 - \frac{2}{9} k^4 b^4 \right) + \frac{1}{2} \pi k b \right\}^{-1}.$$

Вместо коэффициента прохождения T теперь требуется определить *эффективную площадь* отверстия, т. е. отношение полной мощности, проходящей через отверстие, к интенсивности падающей волны. Эту величину можно выразить через τ при помощи следующего полезного приема. Интенсивность падающей волны $\phi_i = A e^{ikz - i\omega t}$ равна

$$I_i = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right\} = \frac{1}{2} \rho c k^2 |A|^2,$$

в то время как полная мощность, проходящая через отверстие, равна интегралу от интенсивности полного решения при $z > 0$ по площади отверстия

$$P_t = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} i \rho c k \int \int \bar{\psi}^+ \frac{\partial \psi^+}{\partial z} r_0 d\varphi_0 dr_0 \right\}.$$

Эффективная площадь отверстия для прохождения волны поэтому равна

$$Q_t = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{k |A|^2} \int \int \bar{\psi}^+ (r_0) u_z^0 (r_0) r_0 d\varphi_0 dr_0 \right\}.$$

Но из (11.4.2) или из интегрального уравнения для u_z^0 заключаем, что для обеспечения непрерывности ψ^+ в отверстии должно быть $\psi^+(r_0) = A$. Поэтому

$$Q_t = \operatorname{Im} \left\{ \frac{-1}{kA} \int \int u_z^0 (r_0) r_0 d\varphi_0 dr_0 \right\} = \operatorname{Im} \left[-\frac{\tau}{k} \right], \quad (11.4.12)$$

где τ — амплитуда потока, определенная в (11.4.3) (поскольку τ имеет размерность длины, а Q — размерность площади).

Используя выражение для τ , полученное из вариационного принципа, мы находим эффективную площадь отверстия для прохождения плоской волны, падающей нормально на круглое отверстие в бесконечной плоскости,

$$Q_t \simeq \pi b^2 \left[\frac{8}{\pi^2} - \frac{16}{9\pi^2} k^2 b^2 - \frac{32}{\pi^4} k^4 b^4 \right] \quad (11.4.13)$$

(для условий Неймана). Эффективное отверстие для длинных волн оказывается немного меньшим, чем истинное. Первый член этого выражения может быть получен также при помощи следующих соображений. Можно рассматривать воздух в круглом отверстии как эффективную массу $\pi^2 b^3 \rho / 2$ [см. (10.3.60)], на которую воздействует вынуждающая сила $2\pi b^2 P_0$, где P_0 — амплитуда давления падающей волны и $P_0^2 / \rho c$ — ее интенсивность. Тогда амплитуда скорости воздуха равна $4P_0 / \pi k b \rho c$ и, поскольку сопротивление излучения волны вправо приблизительно равно $(1/2) \rho c k^2 b^2$ [см. рассмотрение, предшествующее (11.3.36)], проникающая через отверстие мощность составляет

$$\frac{1}{2} \rho c k^2 b^2 \left(\frac{4P_0}{\pi k b \rho c} \right)^2 = \frac{8\pi b^2 P_0^2}{\pi \rho c}.$$

Отношение этой мощности к интенсивности падающей волны как раз равно $8\pi b^2 / \pi^2$, т. е. первому члену (11.4.13).

Более точное выражение можно получить, взяв более точно выражение для u_z^0 . В соответствии с принципом Бабине (см. стр. 403) $2Q_t$ представляет собой также поперечное сечение рассеяния волны, падающей нормально на диск радиуса b , причем ψ равно нулю на диске.

Расчет проникновения волн через круглое отверстие в диафрагме в случае однородных условий Дирихле на границе может быть произведен тем же способом. Функцию Грина нужно изменить таким образом, чтобы она равнялась нулю при $z=0$, и вариационное выражение для τ принимает вид

$$[\tau] = \frac{4\pi k^2 \left[\iint \psi_0(r_0) r_0 d\varphi_0 dr_0 \right]^2}{\iiint \psi_0(r_0) \psi_0(r) \left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \right]_{z=0} r r_0 d\varphi d\varphi_0 dr dr_0}, \quad (11.4.14)$$

причем теперь мы задаемся не производной потенциала скоростей в отверстии, а самим потенциалом ψ_0 . Для ψ можно принять выражение $C \sqrt{1 - (r/b)^2}$, прибавляя для большей точности член с $[1 - (r/b)^2]^{3/2}$. Используя один член для ψ , мы получаем для поперечного сечения в случае условий Дирихле приближенную формулу

$$Q_t \simeq \pi b^2 \frac{8}{27\pi^2} (kb)^4 [1 + 0,32(kb)^2 + 0,049(kb)^4 + \dots]. \quad (11.4.15)$$

Этот результат достаточно точен при $kb < 1$. Действительно, численный подсчет интегралов в (11.4.14) показывает, что выражение для Q , вычисленное с помощью простейшего одночленного выражения для ψ_0 , дает разумную точность до $kb \simeq 3$, а уточненная двучленная формула — до $kb \simeq 5$. По принципу Бабине, эти результаты применимы также для случая рассеяния акустических волн, падающих нормально на жесткий диск (условия Неймана).

Отражение в облицованной трубе. Мы переходим теперь к другой задаче о распространении волн, для решения которой следует применить интегральные уравнения, а именно к задаче о распространении звука в трубе, облицованной звукопоглощающим материалом. Предположим, что поперечное сечение трубы представляет собой прямоугольник со сторонами a и b (ось вдоль оси z) и что внутренняя поверхность при $z < 0$ абсолютно жесткая. При $z > 0$ стенки трубы $x=0$, $y=0$, $y=b$ также жесткие, а стенка $x=a$ покрыта материалом, который допускает некоторое нормальное к поверхности смещение воздуха. Предположим, далее, что истинные краевые условия при $x=a$, $z > 0$ сводятся к требованию, чтобы нормальная составляющая градиента потенциала скоростей на стенке была пропорциональна ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\eta\psi \text{ при } x=a, z > 0. \quad (11.4.16)$$

Коэффициент пропорциональности η называется удельным акустическим адмитансом стенки.

Поскольку $ikc\psi$ — давление, а $\partial\psi/\partial x$ — скорость в направлении x , наше краевое условие можно сформулировать и так: нормальный удельный акустический импеданс, т. е. отношение давления на поверхности к нормальной составляющей скорости воздуха на поверхности, равен $z_n = ikrc\psi/(\partial\psi/\partial x)$. Таким образом,

$$\eta = \frac{rc}{z_n} = \gamma + i\sigma,$$

где γ — активная (всегда положительная), а σ — реактивная составляющие акустического адмитанса материала поверхности [σ может быть положительной (инерционная реакция) и отрицательной (упругая реакция)].

Решения волнового уравнения внутри трубы содержат множитель $\cos(\pi ny/b)$; так как парциальные волны для различных n не взаимодей-

ствуют между собой, то этот множитель одинаков как для положительных, так и для отрицательных значений z . Нам, таким образом, незачем говорить об y -множителе, и n можно при желании считать равным нулю. Множитель, соответствующий координате x , при $z > 0$ несколько более сложен. Возьмем этот множитель в виде $\cos(\mu_m x/a)$ при $z > 0$, где значение μ_m определяется из краевого условия при $x = a$ (для $z > 0$)

$$(\mu_m) \operatorname{tg}(\mu_m) = -ika\eta(k) = ka(\sigma - i\gamma). \quad (11.4.17)$$

Это уравнение было рассмотрено в § 4.7; его корни комплексные, и если $ka\eta$ меньше $m+1$, то приближенные выражения для корней имеют вид

$$\mu_0 \simeq \frac{1}{\pi} \sqrt{-ika\eta} \left[1 + \frac{1}{6} ika\eta \right],$$

$$\mu_m = m - \frac{ika\eta}{\pi^2 m} + \frac{k^2 a^2 \eta^2}{\pi^4 m^3} + \dots, \quad m > 0.$$

Для больших значений $ka\eta$ имеются таблицы корней.

Таким образом, возможные типы волн, распространяющихся вдоль части трубы $z > 0$, имеют форму

$$\varphi_{mn} e^{ik_{mn}z} = \cos\left(\frac{\mu_m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{ik_{mn}z - ikct},$$

где

$$k_{mn}^2 = k^2 - (\mu_m/a)^2 - (\pi n/b)^2.$$

Поскольку μ комплексное, k_{mn} тоже комплексное и волна затухает по мере продвижения в направлении возрастания z . Когда действительная часть суммы $(\mu_m/a)^2 + (\pi n/b)^2$ становится больше k^2 , мнимая часть k_{mn} становится очень большой и соответствующие типы волн сильно затухают; для меньших значений m и n также имеет место затухание (если только η не чисто мнимое), но оно значительно менее заметно. Следовательно, в этом случае нет столь резкого различия в поведении типов волн выше и ниже критической частоты, какое мы наблюдали для непоглощающих границ. Это различие только количественное, но в большинстве случаев оно достаточно ясно выражено, чтобы говорить о реальном разделении. При заданном значении k и при m , лежащем ниже некоторого значения m_0 (для $n=0$), поглощение весьма мало по сравнению с поглощением при значениях m , лежащих выше m_0 . Для небольших значений k только k_{00} имеет относительно небольшую мнимую часть; более высокие типы волн затухают гораздо быстрее.

Для решения рассматриваемой задачи мы пользуемся функцией Грина, соответствующей краевым условиям на жестких стенках при $z < 0$, и получаем интегральное уравнение на части границы с видоизмененным краевым условием (при $z > 0$). Функция Грина для $n=0$ (нам нет нужды учитывать зависимость от y и потому можно рассматривать задачу как двумерную) имеет вид

$$G_k(x, z | x_0, z_0) = \frac{2\pi i}{ka} e^{ik|z-z_0|} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi}{aK_m} \cos\left(\frac{\pi m x_0}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) e^{-K_m|z-z_0|}, \quad (11.4.18)$$

где $K_m^2 = (\pi m/a)^2 - k^2$. (Мы предполагаем, что частота меньше, чем наименьшая критическая.)

Применяя теорему Грина, мы находим, что потенциал $\psi(x, z)$ равен сумме интегралов по двум стенкам трубы $x=0$, $x=a$ от произведения G на составляющую градиента $\partial\psi/\partial x$ и интегралов по сечениям трубы при

$z = \pm \infty$ от $G(\partial\psi/\partial z) - \psi(\partial G/\partial z)$. Интеграл по сечению $z = +\infty$ равен нулю, ибо $\psi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ (вследствие поглощения энергии стенкой). Однако интеграл по сечению $z = -\infty$ не равен нулю, что весьма осложняет дальнейшие рассмотрения. Тут следует заметить, что мы не обязаны пользоваться только простой функцией Грина (11.4.18). Всегда можно прибавить к ней некоторое решение однородного уравнения с теми же краевыми условиями на стенках и получить таким путем другую функцию Грина. Поскольку только первый член G_k не исчезает при $z_0 \rightarrow -\infty$, мы введем дополнительное слагаемое, которое уничтожит этот член при $z_0 \rightarrow -\infty$. Таким образом получаем

$$\gamma_k(x, z | x_0, z_0) = \frac{2\pi i}{ka} [e^{ikh|z-z_0|} - e^{ikh(z-z_0)}] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi}{aK_m} \cos\left(\frac{\pi m x_0}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) e^{-K_m|z-z_0|}. \quad (11.4.19)$$

Интеграл от $\gamma_k(\partial\psi/\partial z) - \psi(\partial\gamma_k/\partial z)$ по обоим граничным сечениям $z = \pm\infty$ исчезает и интеграл в формуле Грина сводится к интегралу от произведения $(\partial\psi/\partial x_0)_{x_0=a}$ на $\gamma_k(x, z | a, z_0)$ по z_0 в пределах от 0 до ∞ . Но эта поверхность $x_0 = a$, $z_0 > 0$ покрыта таким материалом, что на ней $\partial\psi/\partial x_0$ связано с ψ соотношением (11.4.16), так что мы в конце концов приходим к равенству

$$\psi(x, z) = \frac{ik\eta}{4\pi} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) \gamma_k(x, z | a, z_0) dz_0. \quad (11.4.20)$$

Полагая здесь $x = a$, мы получаем интегральное уравнение для $\psi(a, z)$; его решение можно вновь подставить в (11.4.20) и получить $\psi(x, z)$.

Это — интегральное уравнение типа Винера — Хопфа (см. стр. 906 тома I); поскольку γ_k — функция от $z - z_0$, чтобы вычислить $\psi(a, z)$, мы воспользуемся, поэтому, методом преобразования Фурье. Фактически функция $\psi(a, z)$ (или, вернее, ее преобразование Фурье) — это все, что требуется, чтобы вычислить относительную амплитуду волны, отраженной поглощающим материалом. При $z \rightarrow -\infty$ ψ должна иметь вид

$$\psi \simeq \alpha e^{ikhz} + \beta e^{-ikhz}, \quad z \rightarrow -\infty,$$

а из (11.4.20), применив асимптотическую формулу для γ , мы получаем

$$\psi \simeq \frac{\eta}{2a} \left\{ e^{ikhz} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) e^{-ikhz_0} dz_0 - e^{-ikhz} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) e^{ikhz_0} dz_0 \right\}.$$

Сравнивая эти две формулы, мы видим, что отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей пропорционально отношению между двумя преобразованиями Фурье функции $\psi(a, z_0)$. Если

$$\Phi_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \psi(a, z_0) e^{i\omega z_0} dz_0,$$

то отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей определяется выражением

$$r(k) = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\Phi_+(k)}{\Phi_+(-k)}. \quad (11.4.21)$$

Преобразование Фурье интегрального уравнения. Согласно § 4.8, следует разбить $\psi(a, z)$ на две функции: $\Phi_+(z)$, равную $\psi(a, z)$ при $z > 0$,

и $\varphi_-(z)$, равную $\phi(a, z)$ при $z < 0$:

$$\varphi_+(z) = \begin{cases} \phi(a, z), & z > 0; \\ 0, & z < 0; \end{cases} \quad \varphi_-(z) = \begin{cases} 0, & z > 0, \\ \phi(a, z), & z < 0. \end{cases}$$

Запишем их преобразования Фурье:

$$\Phi_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \phi(a, z_0) e^{i\omega z_0} dz_0, \quad \Phi_-(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \phi(a, z_0) e^{i\omega z_0} dz_0.$$

Вследствие асимптотического поведения ϕ интеграл, выражающий Φ_+ , сходится при $\text{Im } \omega > -\text{Im } k_0$ [где $k_0^2 = k^2 - (\pi\mu_0/a)^2$, μ_0 определено в (11.4.17)]; так как $\text{Re } \eta > 0$, то $\text{Im } k_0 > 0$, а интеграл для Φ_- сходится при $\text{Im } \omega < 0$. Таким образом области сходимости перекрываются по полюсе

$$-\text{Im } k_0 < \text{Im } \omega < 0, \quad k_0^2 = k^2 - \left(\frac{\pi\mu_0}{a}\right)^2 \simeq k^2 + \frac{ik\eta}{a}.$$

В соответствии с (8.5.6) двойное преобразование Фурье функции от $z - z_0$ равно произведению $\delta(\omega - \omega_0)$ на функцию от ω , являющуюся преобразованием Фурье по $z - z_0$. Другими словами, поскольку $\gamma_k = \gamma(z - z_0)$, ее двойное преобразование Фурье имеет вид $\Gamma\delta(\omega - \omega_0)$, где

$$\Gamma(\omega | x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \gamma(\zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta, \quad \zeta = z - z_0,$$

при условии, что интеграл сходится. Мы теперь видим другую причину (а может быть ту же самую?) для перехода от G к γ путем добавления члена, содержащего $e^{ih(z-z_0)}$. Если не добавлять этот член, то интеграл от функции Грина по области $\zeta = (z - z_0) > 0$ будет сходиться только при $\text{Im } \omega > 0$, интеграл по области $\zeta < 0$ — только при $\text{Im } \omega < 0$ и общей области аналитичности вовсе не будет. Благодаря введению дополнительного слагаемого γ при $\zeta \rightarrow \infty$ асимптотически ведет себя как $e^{-K_1\zeta}$, где $K_1 = \sqrt{(\pi/a)^2 - k^2} > 0$. Поведение γ при $\zeta \rightarrow -\infty$ то же, что и ранее, но теперь можно выбрать ω так, чтобы его мнимая часть заключалась между 0 и $-K_1$, и при этом интеграл, выражающий Γ , будет сходиться.

В результате (при $0 > \text{Im } \omega > -K_1$) мы получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega | x, x_0) &= \frac{2}{a} \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{-1}{k^2 - \omega^2} + 2 \sum_{m=1}^\infty \frac{\cos(\pi m x_0/a) \cos(\pi m x/a)}{(\pi m/a)^2 - (k^2 - \omega^2)} \right\} \simeq \\ &\simeq -\frac{2}{\sigma} \sqrt{2\pi} \text{ctg}(\sigma a), \quad x, x_0 \rightarrow a, \end{aligned}$$

где $\sigma^2 = k^2 - \omega^2$. При суммировании ряда мы поступили так же, как при выводе (4.3.7).

Однако Γ можно получить более изящным приемом, решая преобразованное по Фурье уравнение для γ . Это уравнение (такое же, как и уравнение для G) имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + k^2 \right) \gamma = -4\pi \delta(x - x_0) \delta(\zeta),$$

так что для Γ получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 - \omega^2 \right) \Gamma = -2\sqrt{2\pi} \delta(x - x_0).$$

Решение этого уравнения, имеющее равную нулю нормальную составляющую градиента при $x=0$ и $x=a$, таково:

$$\Gamma(\omega | x, x_0) = \frac{-2\sqrt{2\pi}}{\sigma \sin(\sigma a)} \begin{cases} \cos(\sigma x_0) \cos \sigma(x-a), & x > x_0, \\ \cos(\sigma x) \cos \sigma(x_0-a), & x < x_0, \end{cases} \quad (11.4.22)$$

$$\Gamma(\omega | x, x_0) \simeq -\frac{2}{\sigma} \sqrt{2\pi} \operatorname{ctg}(\sigma a), \quad x, x_0 \rightarrow a,$$

где $\sigma = \sqrt{k^2 - \omega^2}$. Естественно поставить вопрос, является ли эта функция преобразованием γ или G или какой-либо другой функции, полученной добавлением к G какого-либо другого решения однородного уравнения. Ответ заключается в том, что она представляет любую из этих функций (дающую сходящееся преобразование Фурье), но только в определенных интервалах изменения мнимой части ω . Она представляет γ , как мы это видели, при $0 > \operatorname{Im} \omega > -K_1$. Если же к G добавить $-e^{-ik(z_0-z)}$, так что «свободная волна» будет существовать не при $z < 0$, а при $z > 0$, то получающееся при этом сходящееся преобразование Фурье будет соответствовать Γ из (11.4.22) в области $0 < \operatorname{Im} \omega < K_1$ и т. д.

Мы решили использовать γ именно потому, что его преобразованием Фурье является Γ в области $0 > \operatorname{Im} \omega > -K_1$, которая перекрывает области аналитичности функций Φ_+ и Φ_- , т. е. преобразований ψ соответственно при $z > 0$ и $z < 0$. Теперь мы можем сделать следующий шаг в процессе Винера—Хопфа. Преобразование Фурье интегрального уравнения

$$\psi(a, z) = \frac{ik\eta}{4\pi} \int_0^\infty \psi(a, z_0) \gamma_k(a, z | a, z_0) dz_0,$$

согласно (8.5.5) и (8.5.51), имеет вид

$$\Phi_+(\omega) + \Phi_-(\omega) = \frac{ik\eta}{2\sqrt{2\pi}} \Phi_+(\omega) \Gamma(\omega | a, a) = -ik\eta \frac{\operatorname{ctg}(\sigma a)}{\sigma} \Phi_+(\omega),$$

т. е.

$$\Phi_+(\omega) = \frac{-\sigma \sin(\sigma a)}{ik\eta \cos(\sigma a) + \sigma \sin(\sigma a)} \Phi_-(\omega). \quad (11.4.23)$$

Факторизация преобразованного уравнения. Если теперь отношение Φ_+ к Φ_- будет факторизовано, т. е. будут получены две функции Υ_+ и Υ_- [см. (8.5.52)], такие, что $\Upsilon_+(\sigma)$ регулярна (т. е. не имеет ни нулей, ни полюсов) при $\operatorname{Im} \sigma > -\operatorname{Im} \mu_0$ и $\Upsilon_-(\sigma)$ регулярна при $\operatorname{Im} \sigma < 0$, то функции Φ_+ и Φ_- можно будет найти и наша задача будет полностью решена. Выражение в скобках имеет нули при $\sigma = n\pi/a$ ($n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$). Его полюсы совпадают с корнями уравнения $\sigma \operatorname{tg}(\sigma a) = -ik\eta$; другими словами, эти полюсы связаны с корнями уравнения (11.4.17) соотношением

$$\sigma_m = \frac{\pi \mu_m}{a} \simeq \begin{cases} \sqrt{-\frac{ik\eta}{a}}, & m=0, \\ \frac{\pi m}{a} - \frac{ik\eta}{\pi m}, & m \neq 0, \end{cases} \quad \eta \rightarrow 0, \quad (11.4.24)$$

где m может быть как отрицательным, так и положительным целым числом. При этом корни для отрицательных m отличаются только знаком от корней для положительных m . Мы можем теперь выразить отношение, подле-

жащее факторизации, через бесконечные произведения [см. (4.3.9)]:

$$\frac{\sigma \sin(\sigma a)}{ik\eta \cos(\sigma a) + \sigma \sin(\sigma a)} = \frac{a(k^2 - \omega^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{a}{\pi n} \right)^2 (k^2 - \omega^2) \right]}{ik\eta \prod_{m=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{a}{\pi \mu_m} \right)^2 (k^2 - \omega^2) \right]} =$$

$$= a(k + \omega)(k - \omega) \times$$

$$\times \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi n} \right)^2} + \frac{\omega a}{\pi n} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \frac{ka^2}{\pi n^2}} - i \frac{\omega a}{\pi n} \right]}{ik\eta \prod_{m=0}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} + i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right] \prod_{m=0}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right]}$$

Для улучшения сходимости можно умножать и делить отдельные члены на $e^{i\omega a/\pi n}$. Чтобы добиться большей симметрии, обозначим $\sqrt{(\pi \mu_0/a)^2 - k^2} = -ik_0 \simeq -i\sqrt{k^2} + i(k\eta/a)$ и представим первые множители двух бесконечных произведений в знаменателе в виде $-(a/\pi \mu_m)^2(k_0 + \omega)(k_0 - \omega)$. Произведение $(k + \omega)(k - \omega)$ на первое бесконечное произведение в числителе, а также и первое произведение в знаменателе регулярны при $\text{Im } \omega < 0$. В то же время вторые произведения (как в числителе, так и в знаменателе дроби) регулярны при $\text{Im } \omega > -\text{Im } k_0$, $-\text{Im } k_0 < 0$. Следовательно, в равенстве

$$\Phi_+(\omega) = \frac{\frac{ik\eta}{\pi^2 \mu_0^2} (\omega + k_0) \prod_{m=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right] e^{i\omega a/\pi m}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi n} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi n} \right] e^{i\omega a/\pi n}} =$$

$$= \Phi_-(\omega) \frac{(\omega + k)(\omega - k) \prod_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi n} \right)^2} + i \frac{\omega a}{\pi n} \right] e^{-i\omega a/\pi n}}{(\omega - k_0) \prod_{m=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} + i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right] e^{-i\omega a/\pi m}}$$

левая часть регулярна в верхней полуплоскости ω и в полосе $0 \gg \text{Im } \omega > -\text{Im } k_0$, а правая часть регулярна в нижней полуплоскости. Таким образом, эти области перекрываются и можно утверждать, что одна часть равенства является аналитическим продолжением другой. Следовательно, каждая часть является целой функцией (см. стр. 361 тома I). Изучение асимптотической зависимости обеих частей показывает, что на бесконечности они не имеют никаких особенностей. Итак, особенностей нет нигде, и поэтому каждая часть должна быть постоянной C .

Таким образом, мы получили выражение для преобразований Фурье функции ψ при $z > 0$ и при $z < 0$. Первое преобразование важнее: мы запишем его в виде

$$\Phi_+(\omega) = C \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi n} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi n} \right] e^{i\omega a/\pi n}}{(\omega + k_0) \prod_{m=1}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m} \right)^2} - i \frac{\omega a}{\pi \mu_m} \right] e^{i\omega a/\pi m}} \quad (11.4.25)$$

в соответствующей области регулярности. Отсюда с помощью обратного преобразования Фурье можно найти $\phi(a, z)$ при $z > 0$ и далее с помощью (11.4.20) вычислить $\phi(x, z)$. Однако если мы желаем вычислить только амплитуду волны, отраженной от неоднородности при $z=0$, нет необходимости заниматься такой сложной работой. На основании (11.4.21) коэффициент отражения можно получить непосредственно из только что нами найденных преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} r(k) &= -\frac{\Phi_+(k)}{\Phi_+(-k)} = \frac{k-k_0}{k+k_0} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi n}\right)^2} - i \frac{ka}{\pi n} \right]}{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi n}\right)^2} + i \frac{ka}{\pi n} \right]} e^{2iah/\pi n} \times \\ &\quad \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m}\right)^2} + i \frac{ka}{\pi \mu_m} \right]}{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m}\right)^2} - i \frac{ka}{\pi \mu_m} \right]} e^{-2iah/\pi m} = \\ &= \frac{k-k_0}{k+k_0} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi \mu_m}\right)^2} + i \frac{ka}{\pi \mu_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{ka}{\pi m}\right)^2} + i \frac{ka}{\pi m}} \right]^2, \quad ka < \pi. \end{aligned} \quad (11.4.26)$$

Второе выражение здесь получено умножением и делением на дополнительные бесконечные произведения с последующим использованием формулы

$$\lim_{\omega \rightarrow k} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \left(\frac{a}{\pi m}\right)^2 (k^2 - \omega^2)}{1 - \left(\frac{a}{\pi \mu_m}\right)^2 (k^2 - \omega^2)} \right] = 1.$$

Формула (11.4.26) выражает отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей. Множитель $(k-k_0)/(k+k_0)$ [где $k_0^2 = k^2 - (\pi \mu_0/a)^2 \simeq k^2 + i(k\eta/a)$] можно получить в качестве первого приближения, учитывая при вычислении затухания среднюю величину потери энергии. Бесконечное произведение служит поправкой к этому первому приближению; чтобы получить требуемую точность, достаточно вычислить несколько членов этого произведения, так как множители с ростом m быстро приближаются к единице. Заметим также, что $r \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$ или при $a \rightarrow \infty$. Укажем еще, что задачу о распространении волн (см. гл. 13) вдоль прямоугольного волновода, проводимость одной из стенок которого меняется при $z=0$, можно решить почти аналогичным образом.

Излучение из конца круглой трубы. В качестве другого примера применения метода Винера-Хопфа мы рассмотрим случай полубесконечной трубы с жесткими стенками круглого поперечного сечения радиуса a ; осью трубы пусть является ось z , и труба простирается от $z = -\infty$ до $z = 0$. Другими словами, единственная (жесткая) граничная поверхность в цилиндрических координатах ρ, φ, z имеет вид $\rho = a, z < 0$. Нужная здесь функция Грина является, пожалуй, простейшей из функций этого рода:

$$g(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = (1/R) e^{ikR},$$

где R — расстояние от точки наблюдения (ρ, φ, z) [или (r, ϑ, φ) в сферических координатах с началом в центре отверстия трубы] до точки источника (ρ_0, φ_0, z_0) [или $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$]. Эта функция Грина не удовлетворяет

краевым условиям на стенках трубы, но она является решением неоднородного уравнения

$$(\nabla^2 + k^2)g = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

изображающим расходящуюся волну при $r \rightarrow \infty$.

Физически интересны два возможных решения. Одно из них представляет волну, которая порождается внутри трубы при $z = -\infty$, и, дойдя до открытого конца трубы, частично отражается обратно вдоль трубы по направлению к $z = -\infty$, а частично выходит наружу, имея при $r \rightarrow \infty$ амплитуду $f(\vartheta)/r$, где ϑ — угол между радиус-вектором точки наблюдения (r, ϑ, φ) и продолжением оси трубы; при этом

$$\psi \simeq \begin{cases} Ae^{ikhz} + Be^{-ikhz} & \text{внутри трубы при } z \rightarrow -\infty, \\ \frac{f(\vartheta)}{r} e^{ikr} & \text{вне трубы при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (11.4.27)$$

Заметим, что угол ϑ может меняться от нуля до величины, сколь угодно близкой к π , если r достаточно велико. Другая интересная ситуация обратна только что рассмотренной: источник, находящийся вне трубы в точке $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ ($r_0 \rightarrow \infty$), излучает волну, достигающую отверстия трубы; часть этой падающей волны проникает в трубу, порождая внутри нее волну, распространяющуюся к $z = -\infty$, а остальная ее часть отражается от отверстия назад к $r = \infty$. В этом случае

$$\psi_r \simeq \begin{cases} Ce^{-ikhz} & \text{внутри трубы при } z \rightarrow -\infty, \\ \exp\{-ikr[\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0)]\} + \\ + \frac{f_r(\vartheta)}{r} e^{ikr} & \text{вне трубы при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (11.4.28)$$

Прежде чем изучать соотношения между этими функциями и их параметрами A, B, C, f, f_r , мы покажем, как можно получить интегральное уравнение, например для ψ , решая которое мы и найдем эти полезные соотношения. Обычная формула Грина (7.27) имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint [g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 \psi(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \text{grad}_0 g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] dA_0. \quad (11.4.29)$$

В рассматриваемом случае поверхность интегрирования состоит из части A_1 — сферы радиуса L ($L \rightarrow \infty$), лежащей вне трубы, части A_2 — плоского кругового сечения трубы при $z_0 \rightarrow -\infty$ и части A_3 — внутренней и внешней поверхности стенок самой трубы. Поскольку и g и ψ стремятся к нулю как $1/L$ на поверхности A_1 , произведение одной из них на радиальную составляющую градиента второй стремится к нулю как $1/L^3$ и интеграл от этого произведения по A_1 стремится к нулю. Аналогично, поскольку g внутри трубы также стремится к нулю как $1/|z|$ при $z \rightarrow -\infty$ (хотя ψ не стремится к нулю), интеграл по A_2 также исчезает. Поскольку $\text{grad}_r \psi$ равен нулю на внутренней и внешней поверхности стенок трубы, один из интегралов по A_3 обращается в нуль, и для случая (11.4.27) мы имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{A_3} \psi(\mathbf{r}_0^s) [\text{grad}_0 g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] dA_0.$$

Если мы ограничимся случаем аксиально симметричного решения ψ (т. е. предположим, что при $z = -\infty$ внутри трубы возбуждается только простая плоская волна), то интегрирование по φ даст просто 2π и все интегрирование по A_3 сводится к интегрированию по z (при $\rho = a$) от $-\infty$ до 0 для внутренней поверхности стенок и от 0 до $-\infty$ для

наружной поверхности. Нормальная составляющая градиента g на внутренней поверхности равна $\partial g / \partial \rho_0$, на наружной поверхности $-(\partial g / \partial \rho_0)$. Следовательно, интегральное уравнение для ψ принимает вид

$$\psi(\rho, z) = \frac{1}{2} a \int_{-\infty}^0 [\psi^+(a, z_0) - \psi^-(a, z_0)] \left[\frac{\partial}{\partial a} g_s(\rho, z | a, z_0) \right] dz_0, \quad (11.4.30)$$

где ψ^+ — значение ψ на наружной поверхности стенок трубы, ψ^- — значение на внутренней поверхности, а g_s — часть g , не зависящая от $\varphi - \varphi_0$. Позднее из этого уравнения (точнее, из несколько видоизмененного уравнения) мы получим решение для $\psi^+ - \psi^-$.

Формулы для излученной и отраженной мощности. Прежде чем решать интегральное уравнение, целесообразно установить, какие величины имеют физический интерес и как они связаны с разностью $\psi^+ - \psi^-$. Так, в случае (11.4.27), т. е. в случае волны, возникающей в трубе при $z = -\infty$, желательно знать величину амплитуды отражения $R = B/A$, т. е. отношение амплитуды B волны, отраженной в трубу от открытого конца, к амплитуде падающей волны, распространяющейся из $-\infty$; также желательно иметь возможность вычислить угловое распределение $f(\vartheta)$ волны, излученной из конца трубы вовне. Эти величины можно получить иным способом, применяя теорему Грина, либо же из формулы (11.4.29), полагая в ней r достаточно большим, для того чтобы можно было воспользоваться асимптотическим выражением $[f(\vartheta)/r] e^{ikr}$ для ψ и асимптотическим выражением $(e^{ikr}/r) e^{-ikr_0 \cos \vartheta}$ для g , где ϑ — угол между r и r_0 .

Радиус L внешней сферической поверхности A_1 можно сделать значительно большим, чем r , так что интеграл по этой поверхности по-прежнему исчезает, но интегралом по сечению трубы $z = -L$, $\rho < a$ пренебречь уже нельзя. Этот последний интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a \{ \exp[-ikz_0 \cos \vartheta - ik\rho_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)] \} \frac{\partial}{\partial z_0} (Ae^{ikz_0} + Be^{-ikz_0}) - \\ & - (Ae^{ikz_0} + Be^{-ikz_0}) \frac{\partial}{\partial z_0} \exp[-ikz_0 \cos \vartheta - ik\rho_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)] \}_{z_0=-L} \rho_0 d\rho_0 = \\ & = ik \frac{e^{ikr}}{2r} \int_0^a \rho_0 J_0(k\rho_0 \sin \vartheta) [A(1 + \cos \vartheta) e^{-ikL(1 - \cos \vartheta)} - \\ & - B(1 - \cos \vartheta) e^{ikL(1 + \cos \vartheta)}] d\rho_0 = \\ & = \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ia}{2} \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} [A(1 + \cos \vartheta) e^{-ikL(1 - \cos \vartheta)} - B(1 - \cos \vartheta) e^{ikL(1 + \cos \vartheta)}]. \end{aligned}$$

Для получения этого выражения мы использовали интегральное представление функции Бесселя.

Интеграл по внутренней и внешней поверхности стенок трубы при помощи асимптотического выражения для g может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{-L}^0 \left\{ \chi(z_0) \frac{\partial}{\partial a} \exp[-ikz_0 \cos \vartheta - ika \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)] \right\} dz_0 = \\ & = \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} ka \sin \vartheta J_1(ka \sin \vartheta) \int_{-L}^0 \chi(z_0) e^{-ikz_0 \cos \vartheta} dz_0, \end{aligned}$$

где $\chi(z_0) = [\psi^+(a, z_0) - \psi^-(a, z_0)]$ — разность значений ψ у наружной и у внутренней поверхности стенок трубы, которая входит в интегральное уравнение (11.4.30). В итоге получаем выражение для углового распределения волны, выходящей из конца трубы:

$$f(\vartheta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} a \sqrt{k^2 - \zeta^2} J_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \int_{-L}^0 \chi(z_0) e^{-iz_0 \zeta} dz_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} ia \frac{J_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} [A(k + \zeta) e^{-iL(k - \zeta)} - B(k - \zeta) e^{iL(k + \zeta)}] \right\}, \quad (11.4.31)$$

где $\zeta = k \cos \vartheta$.

Рассматриваемые как функции комплексной переменной ζ члены, содержащие A и B , исчезают при $\text{Im} \zeta > \text{Im} k > 0$ (мы на время предполагаем, что k имеет малую положительную мнимую часть, которая в конце вычислений может быть положена равной нулю). С другой стороны, содержащий χ интеграл, который является преобразованием Фурье функции $\chi(z_0)$, определяющей разрыв ψ на поверхности стенок, имеет вид

$$\Xi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(z_0) e^{-iz_0 \zeta} dz_0, \\ \chi(z) = \begin{cases} 0, & z > 0, \\ \psi^+(a, z) - \psi^-(a, z), & z < 0. \end{cases} \quad (11.4.32)$$

Согласно асимптотическому выражению для $\psi^-(a, z)$ [см. (11.4.27)] этот интеграл имеет смысл только при $\text{Im} \zeta > \text{Im} k$. Следовательно, (11.4.31) в действительности означает, что $f(\vartheta)$ равна первому члену (содержащему Ξ) при $\text{Im} \zeta > \text{Im} k$ и второму члену (содержащему A и B) при $\text{Im} \zeta < \text{Im} k$. Эти два члена должны быть равны при $\zeta = \pm k$. Поскольку $J_1 z \simeq \frac{1}{2} z$, $z \rightarrow 0$, мы получаем

$$-\frac{2i}{ka^2} f(0) = A = i\Omega^+, \quad \frac{2i}{ka^2} f(\pi) = B = i\Omega^-, \\ \Omega^+ = \sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow k} [(\zeta - k) \Xi(\zeta)], \quad \Omega^- = \sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow -k} [(\zeta + k) \Xi(\zeta)]. \quad (11.4.33)$$

Величины Ω^+ и Ω^- являются вычетами преобразования $\Xi(\zeta)$ в его полюсах $\pm k$.

Следовательно, амплитуда отражения, отношение амплитуд отраженной и падающей волн внутри трубы, будет определяться поведением преобразования Фурье от разности значений ψ на поверхности стенок трубы вблизи полюсов этого преобразования $\zeta = \pm k$:

$$\frac{B}{A} = \frac{\Omega^-}{\Omega^+} = -Re^{2ihl}, \quad R = \left| \frac{B}{A} \right|, \quad (11.4.34)$$

где l — «концевая поправка» трубы, координата кажущегося места отражения волны. Квадрат величины $|B/A|$ представляет собой коэффициент отражения. Интенсивность падающей волны пропорциональна $|A|^2$ (множитель пропорциональности обозначим D ; в дальнейшем он сокращается); мощность, излученная вовне из открытого конца, равна

$$P_{\text{излуч.}} = \pi a^2 D (|A|^2 - |B|^2) = \pi a^2 D |A|^2 (1 - R^2).$$

Если бы эта мощность распределялась равномерно по всем направлениям, то интенсивность на больших расстояниях от открытого конца была бы равна $(a^2 D / 4r^2) |A|^2 (1 - R^2)$, в действительности же интенсивность равна

$D|f(\vartheta)|^2/r^2$. Отношение этих двух величин можно назвать *фактором углового распределения*:

$$\alpha(\vartheta) = \frac{4|f(\vartheta)|^2}{|A|^2(1-R^2)a^2} = \frac{(ka)^2|f(\vartheta)|^2}{(1-R^2)|f(0)|^2}. \quad (11.4.35)$$

Формально функцию $f(\vartheta)$ можно выразить через преобразование Фурье разности значений ψ на поверхностях стенок [в соответствии с обсуждением формулы (11.4.31)]:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2}ka \sin \vartheta J_1(ka \sin \vartheta) \Xi(k \cos \vartheta), \quad (11.4.36)$$

где под $\Xi(k \cos \vartheta)$ понимается аналитическое продолжение $\Xi(\zeta)$ из области $\text{Im} \zeta > \text{Im} k$ на действительную ось.

Дальнейшее использование только что выписанных формул приводит к соотношению между коэффициентом отражения и фактором углового распределения

$$|R|^2 = \left| \frac{\Omega^-}{\Omega^+} \right|^2 = \frac{\alpha(\pi)}{\alpha(0)} \quad (11.4.37)$$

и к явному выражению для $\alpha(\vartheta)$ через Ξ и Ω

$$\alpha(\vartheta) = [k \sin \vartheta J_1(ka \sin \vartheta)]^2 \frac{|\Xi(k \cos \vartheta)|^2}{|\Omega^+|^2 - |\Omega^-|^2}. \quad (11.4.38)$$

Наконец, мы можем связать эти результаты с решением обратной задачи (11.4.28) о плоской волне, падающей на открытый конец трубы и частично отражающейся от него, а частично входящей в трубу. Для этого надо применить теорему Грина (7.2.2) к ψ и ψ_r . Для отношения интенсивности волны, проникающей в трубу, к интенсивности падающей волны получаем значение

$$|C|^2 = \frac{\alpha(\vartheta_0)}{\alpha(0)}, \quad (11.4.39)$$

а эффективное поперечное сечение поглощения звука открытым концом трубы, т. е. отношение полной мощности волны, проникающей в трубу, к интенсивности падающей волны, равно

$$\sigma_a(\vartheta) = \pi a^2 |C|^2 = \pi a^2 \frac{\alpha(\vartheta)}{\alpha(0)}, \quad (11.4.40)$$

где $\alpha(\vartheta)$ определяется формулой (11.4.38) (мы опустили индекс 0 при ϑ , так как он более не нужен). Таким образом, часть падающей под углом ϑ к оси трубы плоской волны, которая поглощается трубой, пропорциональна той части возбуждаемой внутри трубы волны, которая выходит из конца трубы под углом ϑ к оси трубы (в этом для нашей задачи проявляется, очевидно, принцип взаимности).

Преобразование Фурье интегрального уравнения. Однако ни одна из полученных формул не дает непосредственного ответа, пока не вычислено преобразование Фурье $\Xi(\zeta)$, определенное в (11.4.32). Мы найдем эту функцию, решив преобразованное по Фурье интегральное уравнение (11.4.30). Однако это уравнение по своей форме не приспособлено для применения метода Винера — Хопфа. Прежде всего $(\partial/\partial a)g_s(r, z|a, z_0)$ не является симметричной функцией z и z_0 (из-за входящей в это выражение частной производной). Кроме того, потенциал $\psi(a, z)$ не связан непосредственно с $\chi(z) = \psi^+(a, z) - \psi^-(a, z)$.

Если взять производную по r от обеих частей уравнения (11.4.30) и затем положить $r = a$, то производная функции Грина оказывается симметричной по z и z_0 , а производная от ψ благодаря краевым условиям при

$z < 0$ будет равна нулю. Следовательно, интегральное уравнение, с которым придется иметь дело, принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(z_0) \gamma(z - z_0) dz_0 = \begin{cases} v_p(z), & z > 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases} \quad (11.4.41)$$

где χ определяется формулой (11.4.32), $v_p(z) = (2/a) [\partial\psi/\partial\rho]_{\rho=a}$ и

$$\gamma(z - z_0) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\rho_0} g(\rho, z, \varphi | \rho_0, z_0, \varphi_0) \right]_{\rho, \rho_0=a} d\varphi_0.$$

Проинтегрировав по φ_0 , мы получим умноженную на 2π часть функции g , не зависящую от $\varphi - \varphi_0$.

Построим преобразования Фурье нужных нам величин. Преобразование $\Xi(\zeta)$ функции $\chi(z_0)$ было только что определено в (11.4.32); произведение $(k^2 - \zeta^2) \Xi(\zeta)$ регулярно при $\text{Im } \zeta > -\text{Im } k$. Можно показать, используя асимптотическую формулу для ψ и дифференцируя ее по ρ , что и преобразование Фурье функции $v_p(z)$

$$V(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} v_p(z) e^{i\zeta z} dz$$

регулярно в области $\text{Im } \zeta < \text{Im } k$.

Двойное преобразование Фурье функции $\gamma(z - z_0)$ [см. (8.5.6)] равно $\Gamma(\zeta) \delta(\zeta - \zeta_0)$, где $\Gamma(\zeta)$ — преобразование Фурье функции $\gamma(z)$. Эта функция Γ может быть получена непосредственно применением преобразования Фурье по $z - z_0$ к уравнению для g [см. (11.4.22)]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right] g = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(z - z_0) \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0),$$

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \zeta^2) \right] G = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

(здесь G — преобразование Фурье функции g). Разлагая G в ряд Фурье по $\varphi - \varphi_0$ и решая уравнения для радиальных компонент, мы найдем, что преобразование Фурье g по $z - z_0$ имеет вид

$$G(\rho, \varphi | \rho_0, \varphi_0 | \zeta) = \frac{i\pi}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} H_m(\rho_0 \sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_m(\rho \sqrt{k^2 - \zeta^2}), & \rho < \rho_0, \\ J_m(\rho_0 \sqrt{k^2 - \zeta^2}) H_m(\rho \sqrt{k^2 - \zeta^2}), & \rho > \rho_0, \end{cases}$$

где H_m — функция Ганкеля первого рода, $H_m^{(1)}$. Взяв производные от этого выражения по ρ и ρ_0 , полагая как ρ , так и ρ_0 , равным a и затем интегрируя по φ , мы приходим в конечном счете к искомому преобразованию Фурье

$$\Gamma(\zeta) = i\pi \sqrt{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} [H_0(a \sqrt{k^2 - \zeta^2})] \frac{\partial}{\partial a} [J_0(a \sqrt{k^2 - \zeta^2})] = \\ = i\pi \sqrt{2\pi} (k^2 - \zeta^2) H_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2}), \quad (11.4.42)$$

которое регулярно в области $|\text{Im } \zeta| < \text{Im } k$.

Поэтому [см. (8.5.5)] преобразование Фурье интегрального уравнения (11.4.41) имеет вид

$$2\pi^2 i (k^2 - \zeta^2) H_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \Xi(\zeta) = V(\zeta), \quad (11.4.43)$$

где все члены регулярны в полосе $|\operatorname{Im} \zeta| < \operatorname{Im} k$. Теперь уравнение готово для факторизации.

Факторизация преобразованного уравнения. Произведение $2\pi(k^2 - \zeta^2) \Xi(\zeta)$ регулярно в «верхней» полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > -\operatorname{Im} k$, в то время как $V(\zeta)$ регулярна в «нижней» полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta < \operatorname{Im} k$ (мы предполагаем в дальнейших рассуждениях, что $\operatorname{Im} k > 0$). Если мы сможем факторизовать оставшуюся часть

$$\pi i H_1(\bar{a} \sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2}),$$

представив ее в виде Γ_+/Γ_- , где Γ_+ регулярна в верхней, а Γ_- — в нижней полуплоскости, то мы получим искомый ответ. Наличие логарифмической особенности у H_1 лишает нас возможности представить H_1 в виде бесконечного произведения, хотя J_1 представить таким образом можно. Поэтому мы вынуждены вернуться к использованию контурных интегралов, как об этом говорилось в конце гл. 8.

Функция $\ln[\pi i H_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2}) J_1(a \sqrt{k^2 - \zeta^2})]$ регулярна в полосе $|\operatorname{Im} \zeta| < \operatorname{Im} k$, а следовательно, она может быть представлена интегралом Коши, контур которого можно деформировать так, чтобы он почти полностью охватил полосу регулярности:

$$\begin{aligned} \ln \Gamma_+ - \ln \Gamma_- = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} \frac{\ln[\pi i H_1(a \sqrt{k^2 - t^2}) J_1(a \sqrt{k^2 - t^2})]}{t - \zeta} dt - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \frac{\ln[\pi i H_1(a \sqrt{k^2 - t^2}) J_1(a \sqrt{k^2 - t^2})]}{t - \zeta} dt. \end{aligned}$$

Поскольку первый интеграл регулярен при $\operatorname{Im} \zeta > -\varepsilon$ (где $0 < \varepsilon < \operatorname{Im} k$), он может быть принят за $\ln \Gamma_+$, а второй интеграл, регулярный при $\operatorname{Im} \zeta < +\varepsilon$, может быть принят за $\ln \Gamma_-$. Когда k становится действительным ($\varepsilon \rightarrow 0$), интеграл для $\ln \Gamma_-$ отличается от $\ln \Gamma_+$ только способом обхода точки $t = \zeta$; для Γ_- контур обходит точку $t = \zeta$ сверху, а для Γ_+ — снизу.

Поэтому мы получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_+(\zeta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-k}^k \frac{\ln[\pi i H_1(a \sqrt{k^2 - t^2}) J_1(a \sqrt{k^2 - t^2})]}{t - \zeta} dt + \right. \\ \left. + \frac{\zeta}{\pi i} \int_k^\infty \frac{\ln[2K_1(a \sqrt{t^2 - k^2}) I_1(a \sqrt{t^2 - k^2})]}{t^2 - \zeta^2} dt \right\}, \quad (11.4.44) \end{aligned}$$

где K_1 и I_1 — гиперболические функции Бесселя, определенные в конце гл. 10, и $\Gamma_-(\zeta) = 1/\Gamma_+(-\zeta)$. Если ζ находится на действительной оси и $|\zeta| < k$, то первый интеграл сингулярен. Его значение равно сумме умноженного на πi вычета подинтегральной функции в точке $t = \zeta$ и главного значения интеграла [см. (4.2.9)]:

$$\begin{aligned} \Gamma_+(k \cos \vartheta) = \sqrt{\pi i H_1(ka \sin \vartheta) J_1(ka \sin \vartheta)} \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{ka \cos \vartheta}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{ka} \frac{x \ln[\pi i H_1(x) J_1(x)] dx}{[x^2 - (ka \sin \vartheta)^2] \sqrt{(ka)^2 - x^2}} + \right. \\ \left. + \frac{ika \cos \vartheta}{\pi} \int_0^\infty \frac{x \ln[1/2 I_1(x) K_1(x)] dx}{[x^2 + (ka \sin \vartheta)^2] \sqrt{x^2 + (ka)^2}} \right\}, \quad (11.4.45) \end{aligned}$$

где $\mathcal{P}$ — символ главного значения интеграла (для Γ_- берется сумма вычета, умноженного на $-\pi i$, и главного значения). При $\zeta = \pm k$ никаких

особенностей нет и

$$\begin{aligned} \Upsilon_+(k) &= \frac{1}{\Upsilon_+(-k)} = \\ &= \exp \left\{ \frac{ika}{\pi} \int_0^{ka} \frac{\ln [\pi i H_1(x) J_1(x)]}{x V (ka)^2 - x^2} dx + \frac{ika}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln [1/2 I_1(x) K_1(x)]}{x V x^2 + (ka)^2} dx \right\} \end{aligned}$$

Возвратимся к преобразованному уравнению

$$(k^2 - \zeta^2) \Xi(\zeta) \Upsilon_+(\zeta) = \frac{V(\zeta) \Upsilon_-(\zeta)}{2\pi},$$

левая часть которого регулярна в полуплоскости $\text{Im } \zeta > -\varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \text{Im } k$), а правая часть — в полуплоскости $\text{Im } \zeta < \varepsilon$. Можно показать, что левая часть (а следовательно, и правая) остается конечной при $\text{Re } \zeta \rightarrow \infty$ в полосе $|\text{Im } \zeta| < \varepsilon$. Следовательно, одна часть является аналитическим продолжением другой и обе равны некоторой постоянной C . Поэтому

$$\begin{aligned} \Xi(\zeta) &= \frac{C}{(k^2 - \zeta^2) \Upsilon_+(\zeta)}, \\ \Omega^+ &= \lim_{\zeta \rightarrow h} [(\zeta - k) \Xi(\zeta)] = -\frac{C}{2k \Upsilon_+(k)}, \\ \Omega^- &= \frac{C}{2k \Upsilon_+(-k)} = \frac{C \Upsilon_+(k)}{2k}. \end{aligned} \quad (11.4.46)$$

С помощью этих соотношений мы можем выразить величины, имеющие физическое значение для нашей задачи, через функцию $\Upsilon_+(\zeta)$. Функция Υ_+ , конечно, не выражается через известные табулированные функции, но она определена через пару интегралов, которые могут быть численно найдены с любой степенью точности. В частности, формулы для отношения амплитуд падающей и отраженной волн и коэффициента отражения R имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= -\frac{\Upsilon_+(k)}{\Upsilon_+(-k)} = [\Upsilon_+(k)]^2 = -\sqrt{R} e^{2\pi i h l}, \\ \sqrt{R} &= \exp \left\{ -\frac{2ka}{\pi} \int_0^{ka} \frac{\arctg [-F_1(x)/N_1(x)]}{x V (ka)^2 - x^2} dx \right\}, \\ \frac{l l}{a_-} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{ka} \frac{\ln [\pi J_1(x) V J_1^2(x) + N_1^2(x)]}{x V (ka)^2 - x^2} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln [1/2 I_1(x) K_1(x)]}{x V x^2 + (ka)^2} dx. \end{aligned} \quad (11.4.47)$$

Кривые изменения квадратного корня из коэффициента отражения $\sqrt{R}$ и концевой поправки l/a показаны на рис. 11.11. Практически при малом ka вся падающая волна отражается обратно в трубу ($|R| \rightarrow 1$); при большом ka падающая волна практически вся выходит через отверстие ($|R| \rightarrow 0$).

Наконец, функция углового распределения

$$\begin{aligned} \alpha(\vartheta) &= \frac{4}{\pi \sin^2 \vartheta} \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{[J_1^2(ka \sin \vartheta) + N_1^2(ka \sin \vartheta)]} \frac{|R|}{1 - |R|^2} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2ka \cos \vartheta}{\pi} \oint \int_0^{ka} \frac{x \arctg [-J_1(x)/N_1(x)] dx}{(x^2 - k^2 a^2 \sin^2 \vartheta) V k^2 a^2 - x^2} \right\} \end{aligned}$$

выражается через главное значение интеграла. Зависимость этой функции от угла ϑ для различных значений ka показана на рис. 11.12. Мы видим, что с увеличением ka выходящая из трубы волна все более и более концентрируется в направлении оси трубы.

Все эти решения становятся непригодными, если значения ka настолько велики, что по трубе могут передаваться волны высших типов, но

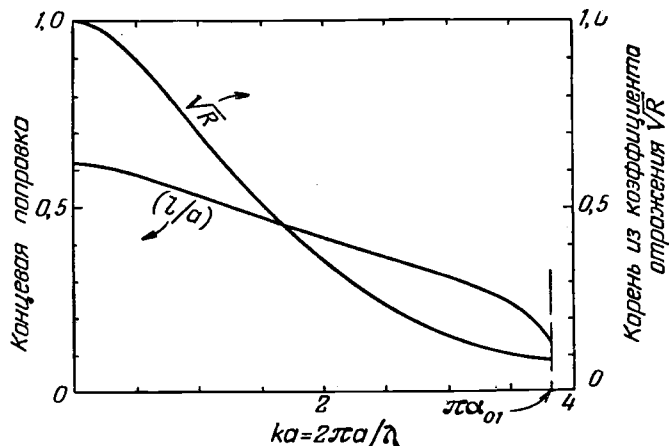


Рис. 11.11. Кривые изменения коэффициента отражения R и концевой поправки для случая излучения из открытого конца круглой трубы без фланца.

пока $ka < \pi\alpha_{01} = 3,832$ результаты будут точны настолько, насколько хватит терпения точно вычислить все входящие в формулы интегралы.

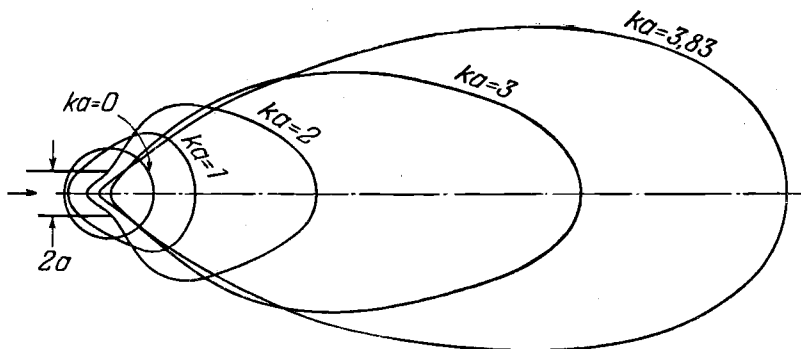


Рис. 11.12. Полярная диаграмма функции углового распределения интенсивности $a(\varphi)$ для случая волны, излученной из открытого конца круглой трубы без фланца.

Излучение колеблющегося тела. Следующая задача, подлежащая рассмотрению, — это задача о расходящемся излучении объемного источника конечных размеров. Положим, что начало координат находится внутри источника, а на его поверхности A задается либо само поле излучения, либо нормальная составляющая градиента этого поля. Эта замкнутая граничная поверхность источника задается уравнением в сферических координатах

$$r = a(\vartheta, \varphi),$$

причем, поскольку начало находится внутри поверхности, эта функция для любой пары значений ϑ, φ из области $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \vartheta < \pi$ имеет конечные значения. Мы не очень существенно ограничим наши исследования, если исключим из рассмотрения те поверхности, для которых a имеет при некоторых ϑ, φ несколько значений. В действительности ради упрощения мы введем еще большее ограничение, предположив, что поверх-

ность A всюду выпуклая и что не существует плоскостей, которые касались бы A в двух различных точках.

Если мы применим теорему Грина к полю излучения ψ и к функции Грина для свободного пространства $g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = e^{ikR}/R$ [см. (7.2.7)], то получим

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint \left[g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi(\mathbf{r}_0^s) - \psi(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \right] dA, \quad (11.4.48)$$

где $\partial/\partial n_0$ — составляющая градиента по направлению внешней нормали к поверхности A в точке с координатой $\mathbf{r}_0$. (Знак минус объясняется тем, что область, в которой задано ψ , находится *вне поверхности* A , так что составляющая градиента из (7.2.7) равна $-\partial/\partial n_0$.) Затем мы вводим преобразование Фурье функции g_k [см. формулу (11.3.6) и следующие]

$$g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} d p_x d p_y d p_z}{p^2 - k^2},$$

где волновой вектор $\mathbf{p}$ имеет компоненты p_x, p_y, p_z и модуль p , а направление его задается полярными углами u и v .

Интегрирование производится по всему p -пространству и, чтобы получить расходящиеся волны, мы обходим в комплексной плоскости p полюс $p = -k$ сверху, а полюс $p = k$ — снизу.

Подставляя это выражение в (11.4.48), получаем

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^3} \iiint \left\{ \oint \left[i(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{p}) \psi(\mathbf{r}_0^s) + \frac{\partial}{\partial n_0} \psi(\mathbf{r}_0^s) \right] e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0 \right\} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{p^2 - k^2} d p_x d p_y d p_z,$$

где $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности A . Величина в фигурных скобках является функцией от $\mathbf{p}$, но не от $\mathbf{r}_0$. Далее мы интегрируем по p_z , обходя (в комплексной плоскости p_z) полюс $p_z = -\sqrt{k^2 - p_x^2 - p_y^2}$ сверху, а полюс $p_z = +\sqrt{k^2 - p_x^2 - p_y^2}$ снизу. Когда z больше любого z на поверхности A , интеграл сводится к умноженному на $2\pi i$ вычету подинтегральной функции в точке $p_z = \sqrt{k^2 - p_x^2 - p_y^2}$.

Теперь преобразуем прямоугольные координаты p_x, p_y в p -пространстве к сферическим координатам p, u и v , полагая $p_x = k \sin u \cos v$ и $p_y = k \sin u \sin v$. Для того чтобы p_x и p_y могли изменяться до бесконечности, u должно быть комплексным. Элемент площади $d p_x d p_y$ равен $k^2 \cos u \sin u du dv$, и выражение для ψ после интегрирования по p_z принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin u F(u, v, k) \exp \{ ikr [\cos u \cos \vartheta + \sin u \sin \vartheta \cos(v - \varphi)] \} du, \quad (11.4.49)$$

где ϑ и φ — сферические углы для $\mathbf{r}$ и где

$$F(u, v, k) = \frac{-1}{2\pi} \oint \left[i(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}) \psi(\mathbf{r}_0^s) + \frac{\partial}{\partial n_0} \psi(\mathbf{r}_0^s) \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0,$$

причем $\mathbf{k} = \mathbf{a}_x k \sin u \cos v + \mathbf{a}_y k \sin u \sin v + \mathbf{a}_z k \cos u$. Интегрирование по u производится вдоль контура, который обеспечивает сходимость интеграла. Это выражение, конечно, применимо, только если $\mathbf{r}$ находится вне поверхности A .

Таким образом, мы нашли связь между выражением решения через функцию Грина и разложением его по плоским волнам, как об этом уже говорилось в начале § 11.3 [см. (11.3.3)]. Мы не намерены вычислять

приведенный выше интеграл для F . Вместо этого мы изложим другие методы определения F через краевые условия; здесь мы хотели только показать, что формула (11.4.49) представляет расходящуюся волну, излучаемую источником конечных размеров.

Угловое распределение излучения. Функция F имеет простое и важное физическое значение, которое можно продемонстрировать, устремив в (11.4.49) r к бесконечности и найдя методом перевала асимптотическую формулу для ϕ (см. § 4.6). Прежде всего заменим переменные интегрирования, т. е. углы u и v , характеризующие положение переменной точки интегрирования по отношению соответственно к осям z и x , на углы θ и ϕ , характеризующие положение точки интегрирования относительно вектора $\mathbf{r}$. При этом

$$\begin{aligned}\sin u \, du \, dv &= \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \\ \cos \theta &= \cos u \cos \vartheta + \sin u \sin \vartheta \cos(v - \phi), \\ \cos u &= \cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos \phi, \\ \sin \theta \sin \phi &= \sin u \sin(v - \varphi).\end{aligned}$$

Так как u изменяется в пределах $\pm i\infty$, то такие же пределы будут и для θ , а поэтому

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-i\infty + \frac{1}{2}i\pi}^{i\infty - \frac{1}{2}i\pi} \sin \theta F(u, v, k) e^{ikr \cos \theta} d\theta.$$

При этом контур интегрирования по θ выбран так, чтобы мнимая часть $\cos \theta$ была положительной при $\theta \rightarrow \pm i\infty$, так что подынтегральная функция обращается в нуль в обоих концах контура.

Показатель экспоненты имеет стационарную точку при $\theta=0$ ($u=\vartheta, v=\varphi$), так что фаза экспоненты остается постоянной, а ее абсолютная величина стремится к нулю по мере удаления от $\theta=0$ вдоль одной из линий, определенных уравнениями

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 1 + i\zeta, \quad \theta = \xi + i\eta, \\ \cos \xi &= \operatorname{sech} \eta, \quad \operatorname{sh} \eta \operatorname{th} \eta = \zeta,\end{aligned}$$

где η положительно или отрицательно. Интеграл тогда приобретает вид

$$\psi(\mathbf{r}) = ke^{ikr} \int_0^{\infty} F(u, v, k) e^{-kr\zeta} d\zeta.$$

Если $kr \rightarrow \infty$, то существенный приток дает интегрирование только по участку, где ζ очень близко к нулю, т. е. u очень близко к ϑ и v очень близко к φ . Таким образом, асимптотическая форма решения при $kr \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq F(\vartheta, \varphi, k) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad kr \rightarrow \infty. \quad (11.4.50)$$

Итак, амплитуда плоской волны, входящей в интегральное представление ψ через плоские волны, пропорциональна фактору углового распределения излучения $F(\vartheta, \varphi, k)$ на больших расстояниях от источника. (Это верно только для случая, когда контур интеграла по u проходит от $-i\infty$ до $+i\infty$, что исключает все приходящие из бесконечности волны.) Это соотношение не является неожиданным, однако его стоило доказать и, заодно, вычислить коэффициент пропорциональности, равный $ik/4\pi$.

Применение краевых условий. Нам остается еще определить фактор углового распределения при помощи краевых условий, заданных на границе излучателя $r = a(\vartheta, \varphi)$. Предположим, что на граничной поверхности задаются значения ϕ при $r = a(\vartheta, \varphi)$, равные $\phi_0(\vartheta, \varphi)$. Эта функция связана с фактором углового распределения формулой (11.4.49), которая представляет собой интегральное уравнение для определения $F(\vartheta, \varphi, k)$ через известные функции ϕ_0 и a :

$$\phi_0(\vartheta, \varphi) = \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin u F(u, v) \times \\ \times \exp\{ika(\vartheta, \varphi)[\cos u \cos \vartheta + \sin u \sin \vartheta \cos(v - \varphi)]\} du. \quad (11.4.51)$$

Это уравнение, вообще говоря, нелегко решить; если $a(\vartheta, \varphi)$ — координатная поверхность в некоторой разделяющей системе координат и если ka не слишком велико, то лучше всего применить разложение по собственным функциям, уже рассмотренное в § 11.3. Но если ka велико (грубо говоря, больше 10), то мы можем использовать метод перевала (см. § 4.6), чтобы найти приближенное соотношение между F и ϕ_0 . Выделим прежде всего в функции F амплитуду и фазу

$$F(u, v) = f(u, v) e^{-i\beta(u, v)}, \quad (11.4.52)$$

а затем рассмотрим поведение фазы подинтегральной функции в формуле (11.4.51).

Мы выбрали контур в плоскости u так, что основная часть интеграла приходится на участок, близкий к действительной оси u ; на самом деле, выше было показано, что контур можно выбрать так, что существенным оказывается лишь интегрирование по участку, близкому к $u = \vartheta, v = \varphi$. Теперь этот результат несколько изменяется вследствие того, что a является функцией ϑ и φ . Полный показатель экспоненты у подинтегрального выражения из (11.4.51) равен

$$t(u, v | \vartheta, \varphi) = ika(\vartheta, \varphi) \cos \theta - i\beta(u, v), \\ \cos \theta = \cos u \cos \vartheta + \sin u \sin \vartheta \cos(v - \varphi). \quad (11.4.53)$$

Если ka велико по сравнению с единицей (> 10), то экспонента меняется значительно быстрее, чем амплитуда f . Поэтому для того, чтобы выяснить, где подинтегральная функция имеет наибольшее значение, можно ограничиться рассмотрением только t и можно выбрать β так, чтобы в соответствующей точке t было равно нулю, так же как $\partial t / \partial u$ и $\partial t / \partial v$.

Величина $a(\vartheta, \varphi) \cos \theta$ является проекцией вектора $\mathbf{a}(\vartheta, \varphi)$ на направление u, v , и если бы в выражение для t не входило β , то величина $ka \cos \theta$ имела бы максимальное значение ka при $\theta = 0$ (на рис. 11.3 единичный вектор $\mathbf{u}$, направление которого определяется углами u, v , совпадает с вектором $\mathbf{a}$, направление которого определяется углами ϑ, φ в точке, в которой задано граничное значение ϕ_0). Но если положить $\beta = ka$, то β оказывается функцией ϑ и φ , а не u и v . Правильный способ выбора соответствующего седловой точке t направления $\mathbf{u}_0$, при котором β может быть определено как функция от u и v , обращающая в этой точке t в нуль, излагается ниже.

Для каждого направления u, v вектора $\mathbf{u}$ мы определяем на поверхности излучателя точку, в которой нормаль параллельна $\mathbf{u}$ (вследствие ограничений, наложенных на форму поверхности, такая точка определяется единственным образом). Обозначим радиус-вектор этой точки через $\mathbf{h}$ и его сферические углы через σ, τ (они, конечно, являются функциями u, v). Проекция $\mathbf{h}$ на $\mathbf{u}$ есть не что иное, как расстояние от начала до пересечения $\mathbf{u}$ с плоскостью, касательной к поверхности и перпендикулярной к $\mathbf{u}$. При этом,

если фиксировать u, v и изменять ϑ, φ , то значения ϑ, φ , при которых величина $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = a(\vartheta, \varphi) \cos \theta$ будет наибольшей, равны соответственно σ, τ , а значит $\mathbf{a}(\sigma, \tau) = \mathbf{h}$ (это, конечно, функция u, v).

Мы выбираем теперь в качестве β величину

$$k\mathbf{h}(u, v) \cdot \mathbf{u} = ka(\sigma, \tau) \cos \eta,$$

где

$$\cos \eta = \cos u \cos \sigma + \sin u \sin \sigma \cos(v - \tau).$$

Тогда, очевидно, показатель

$$t = ik[\mathbf{a}(\vartheta, \varphi) - \mathbf{h}(u, v)] \cdot \mathbf{u}$$

равен нулю и имеет стационарное значение, когда вектор $\mathbf{u}$ направлен так, что $\mathbf{h}(u, v)$ совпадает с $\mathbf{a}(\vartheta, \varphi)$. Таким образом, удастся так выбрать функцию β , зависящую только от u и v , что t для некоторых u, v будет равно нулю и стационарно при любых значениях ϑ и φ .

Для заданных ϑ, φ примем теперь за ось сферической системы координат для интегрирования по u, v направление $\mathbf{u}_0(\vartheta, \varphi)$ (направление нор-

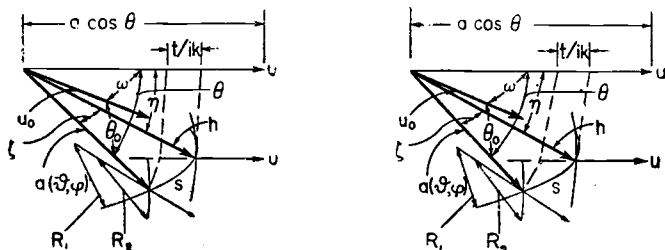


Рис. 11.13. Углы и направления, необходимые для вычисления излучения поверхности $\mathbf{a}(\vartheta, \varphi)$.

мали к поверхности в точке ϑ, φ , характеризуемое углами u_0, v_0). Когда $\mathbf{u}$ отклоняется от направления $\mathbf{u}_0$, вектор $\mathbf{h}$ отклоняется от направления $\mathbf{a}(\vartheta, \varphi)$. Соотношение между соответствующими углами ω (угол между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_0$) и ζ (угол между $\mathbf{h}$ и $\mathbf{a}$) зависит от кривизны поверхности в точке (ϑ, φ) . Вблизи точки (ϑ, φ) поверхность имеет форму, близкую к соприкасающемуся эллипсоиду с главными радиусами кривизны R_1 и R_2 , как показано на рис. 11.13. Если мы будем отсчитывать второй угол интегрирования α (который вместе с ω определяет ориентацию $\mathbf{u}$ относительно $\mathbf{u}_0$) от осевой плоскости с радиусом кривизны R_1 , то сможем сразу увидеть, что отношение угла поворота вектора $\mathbf{h}$ к углу поворота вектора $\mathbf{u}$ равно отношению $a(\vartheta, \varphi)$ к радиусу кривизны сечения поверхности в направлении α :

$$\left(\frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} \right) \zeta = \frac{\omega}{a(\vartheta, \varphi)} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2(\alpha - \alpha_0)}, \quad \zeta, \omega \ll 1, \quad (11.4.54)$$

$$\cos \zeta = \cos \vartheta \cos \sigma + \sin \vartheta \sin \sigma \cos(\varphi - \tau),$$

$$\cos \omega = \cos u \cos u_0 + \sin u \sin u_0 \cos(v - v_0),$$

где α_0 — угол между плоскостью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{u}_0$ и осевой плоскостью с радиусом кривизны R_1 , являющейся начальной плоскостью для отсчета угла поворота α . (Корень появляется потому, что поверхность в точке (ϑ, φ) нормальна не к $\mathbf{a}$, а к $\mathbf{u}_0$, так что поворот вектора $\mathbf{a}$ на угол ζ вызывает различные линейные перемещения, зависящие от величины угла $\alpha - \alpha_0$.)

Если ζ мало, то оказывается, что $t \simeq \frac{1}{2} ikS^2 [(1/R_1) \cos^2 \alpha + (1/R_2) \sin^2 \alpha]$ и $S \simeq \zeta \alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 (\alpha - \alpha_0)}$. Поэтому для малых значений угла ω

$$t \simeq \frac{1}{2} ik \frac{R_1 R_2}{R_2 \cos^2 \alpha + R_1 \sin^2 \alpha} \omega^2 = -x.$$

Мы можем выбрать контур для u (или, скорее, ω) от $-i\infty$ до $+i\infty$ таким образом, чтобы x оставался действительным и менялся от нуля до бесконечности в обоих направлениях, и от u_0 до $+i\infty$ и от u_0 до $-i\infty$. Следовательно, наше интегральное представление приобретает вид (учитывая, что $\sin \omega d\omega \simeq \omega d\omega$, если ω мало)

$$\phi_0(\vartheta, \varphi) = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty \frac{R_2 \cos^2 \alpha + R_1 \sin^2 \alpha}{ikR_1 R_2} e^{-x} f(u, v) dx.$$

Теперь мы должны выразить амплитуду $f(u, v)$ таким образом, чтобы связать ее с заданными значениями ϕ_0 на поверхности. Для этого лучше всего разложить f в ряд Тейлора вблизи u_0, v_0 , выражая смещения, отсчитываемые от u_0 , через угловые компоненты: ω_x в осевой плоскости с радиусом кривизны R_1 (точнее, такие угловые смещения вектора u , которые вызывают угловые смещения вектора h в плоскости с радиусом кривизны R_1) и ω_y в плоскости с радиусом кривизны R_2 . Получаем

$$f(u, v) = f(u_0, v_0) + f_x \omega_x + f_y \omega_y + \frac{1}{2} f_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} f_{yy} \omega_y^2 + f_{xy} \omega_x \omega_y + \dots,$$

где $\omega_x = \omega \cos \alpha$, $\omega_y = \omega \sin \alpha$ и индексы при f обозначают производные от f по ω_x, ω_y , вычисленные при $\omega_x = \omega_y = 0$ (т. е. при u_0, v_0).

Выполняя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} \phi_0(\vartheta, \varphi) \simeq & \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} f(u_0, v_0) + \frac{\frac{1}{16} R_1^2 + \frac{1}{8} R_1 R_2 + \frac{5}{16} R_2^2}{ikR_1^2 R_2^2} f_{xx}(u_0, v_0) + \\ & + \frac{\frac{5}{16} R_1^2 + \frac{1}{8} R_1 R_2 + \frac{1}{16} R_2^2}{ikR_1^2 R_2^2} f_{yy}(u_0, v_0) + \dots \end{aligned}$$

Эти ряды хорошо сходятся, пока $kR_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ достаточно велико. Чтобы получить формулу для асимптотической амплитуды f поля излучения через амплитуду полного поля ϕ_0 в точках на поверхности источника, этот ряд нужно обратить. Первое приближение, годное при $kR \rightarrow \infty$ (т. е. годное для случая «геометрической оптики»), имеет вид

$$f(u, v) = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} \phi_0(\sigma, \tau), \quad (11.4.55)$$

где (σ, τ) — точка на поверхности источника, в которой нормаль имеет направление u, v . Другими словами, в случае предельно коротких волн, волны излучаются нормально из каждой точки поверхности, причем относительная амплитуда пропорциональна гармоническому среднему радиусов кривизны поверхности $2R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ в соответствующей точке.

Следующее приближение получается подстановкой первого приближения в последующие члены ряда в правой части разложения, причем учитываются соотношения между ω и ζ . Окончательный результат можно сформулировать следующим образом: находим на поверхности точку (σ, τ) , в которой нормаль имеет направление u, v , и определяем плоскости главных радиусов кривизны поверхности в этой точке. Обозначаем через ϑ_1 угловое смещение от (σ, τ) в плоскости R_1 и через ϑ_2 — в перпендикулярном к этой плоскости направлении. Тогда фактор углового распределения

$f(u, v)$, дающий асимптотическую амплитуду волны в направлении u, v , равен

$$f(u, v) \simeq \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} \phi_0(\sigma, \tau) - \\ - \frac{\frac{1}{8} R_1^2 + \frac{1}{4} R_1 R_2 + \frac{5}{8} R_2^2}{ika R_2 (R_1 + R_2)} \left[(1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \alpha_0) \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left(\frac{R_1}{a} \frac{\partial \phi_0}{\partial \vartheta_1} \right) \right]_{\sigma, \tau} - \\ - \frac{\frac{5}{8} R_1^2 + \frac{1}{4} R_1 R_2 + \frac{1}{8} R_2^2}{ika R_1 (R_1 + R_2)} \left[(1 - \sin^2 \theta_0 \sin^2 \alpha_0) \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \left(\frac{R_2}{a} \frac{\partial \phi_0}{\partial \vartheta_2} \right) \right]_{\sigma, \tau}, \quad (11.4.56)$$

где $a = a(\sigma, \tau)$, θ_0 — угол между направлением $\mathbf{u}(u, v)$ и направлением $\mathbf{h}(\sigma, \tau)$, т. е. направлением от начала координат к точке на поверхности, в которой нормаль имеет направление $\mathbf{u}$; α_0 — угол между плоскостью, содержащей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{h}$, и плоскостью главного радиуса R_1 . Все производные в этой формуле берутся в точке (σ, τ) .

Наша формула показывает в первом приближении по малой величине $1/ka$, как конечная длина волны «стирает» четкие формы геометрической оптики, определенные в (11.4.55). Эта формула дает удовлетворительное приближение, если граничные значения $\phi(\vartheta, \varphi)$ не слишком быстро меняются с изменением ϑ_1 и ϑ_2 . Подробное изучение случая, когда ϕ_0 разрывно, показывает, что в f возникают диффракционные полосы обычного френелевского типа, а в случае геометрической оптики (11.4.55) разрывность сохраняется.

Тот же анализ можно провести с теми же общими результатами, если на поверхности $r = a(\vartheta, \varphi)$ задать вместо величины ϕ_0 нормальную составляющую ее градиента. Последующие члены ряда, первые два члена которого даны в (11.4.56), можно найти, рассматривая высшие члены разложения t и f . При этом возникают, однако, значительные алгебраические трудности, и мы не будем их здесь исследовать. Для двумерной задачи, которая, конечно, значительно проще, были найдены приближения всех порядков, а также был исследован и случай разрывной функции ϕ (см. в библиографии в конце этой главы работу Лакса и Фешбаха).

Рассеяние волн, вариационный принцип. Задачи рассеяния, так же как и задачи излучения, могут быть решены методом: функция Грина — интегральное уравнение — вариационный принцип. Полезно рассмотреть случай рассеяния плоской волны на объекте конечных размеров (поверхность, объем) с определенными краевыми условиями на его границе (Дирихле, Неймана или смешанными). Воспользуемся функцией Грина

$$g_R(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{R} e^{ikR}$$

для расходящихся волн в свободном пространстве. Мы ищем решение, которое должно иметь, например, равную нулю составляющую градиента на рассеивающей поверхности и которое соответствует падающей плоской волне $Ce^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$, распространяющейся в направлении z с волновым числом k и волновым вектором $\mathbf{k}_i = k\mathbf{a}_z$. Используя наши обычные методы, легко показать, что это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(\mathbf{r}) = Ce^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \frac{1}{4\pi} \oint \psi(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_R(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) dA_0, \quad (11.4.57)$$

где интеграл берется по поверхности рассеивателя, а $\mathbf{n}_0$ — вектор внешней нормали к этой поверхности (его направление, следовательно, противоположно тому, которое было принято в гл. 7).

Постоянная C представляет собой амплитуду падающей волны; интенсивность этой волны равна некоторой постоянной D , умноженной на $|C|^2$. Асимптотическую форму рассеянной волны можно найти, используя асимптотическую форму $(e^{ikr}/r)e^{-ik_s \cdot r_0}$ функции g_k , где $\mathbf{k}_s = k\mathbf{a}_r$ — волновой вектор рассеянной волны, имеющий направление $\mathbf{r}$ точки наблюдения в бесконечности. Эта рассеянная волна пропорциональна, конечно, амплитуде падающей волны:

$$\begin{aligned}\psi_s &\simeq Cf(\mathbf{k}_i|\mathbf{k}_s)\frac{e^{ikr}}{r}, \\ f(\mathbf{k}_i|\mathbf{k}_s) &= \frac{-i}{4\pi C} \oint (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) \psi(\mathbf{r}_0^s) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0,\end{aligned}\quad (11.4.58)$$

где f — амплитуда рассеянной волны при единичной амплитуде падающей. Квадрат функции f дает интенсивность рассеянной волны в направлении, составляющем с направлением распространения падающей волны углы ϑ, φ , а интеграл от $|f|^2$ по ϑ и φ есть *эффективное поперечное сечение* рассеяния плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k}_i$ (т. е. волны, имеющей длину волны $2\pi/k$ и направление распространения $\mathbf{a}_z$).

Для применения вариационного принципа необходимо, чтобы функция углового распределения $f(\mathbf{k}_i|\mathbf{k}_s)$ явно входила в интегральное уравнение (11.4.57). Этого можно достигнуть, умножая и деля на f первый член правой части (при этом заодно исключается произвольная амплитуда падающей волны C):

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{-ie^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}}{4\pi f(\mathbf{k}_i|\mathbf{k}_s)} \oint (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) \psi(\mathbf{r}_0^s) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0 + \frac{1}{4\pi} \oint \psi(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) dA_0. \quad (11.4.59)$$

Из этой формулы можно определить $\psi(\mathbf{r})$, если будет известно $\psi(\mathbf{r}_0^s)$ на поверхности рассеивателя. Чтобы получить интегральное уравнение только для $\psi(\mathbf{r}_0^s)$, предыдущее уравнение можно рассматривать для значений $\mathbf{r}$, соответствующих точкам поверхности; однако таким образом мы получаем слишком сложное уравнение, содержащее несимметричную функцию $\partial g_k / \partial n_0$. Значительно более простая форма уравнения получится, если взять от обеих частей равенства (11.4.59) нормальную производную на поверхности. Левая часть тогда обращается в нуль, так как нормальная составляющая градиента ψ на поверхности равна нулю, и мы получаем

$$\frac{(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s}}{f(\mathbf{k}_i|\mathbf{k}_s)} \oint (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) \psi(\mathbf{r}_0^s) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0 = - \oint \psi(\mathbf{r}_0^s) \left[\frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_k(\mathbf{r}^s|\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0. \quad (11.4.60)$$

Теперь можно применить вариационный принцип. Для этого умножим обе части на $\tilde{\psi}(\mathbf{r}^s)$ и проинтегрируем по поверхности рассеивателя в координатах $\mathbf{r}^s$; получим

$$-[f] = \frac{\oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}_1) \tilde{\psi}(\mathbf{r}_1^s) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_1^s} dA_1 \oint (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) \psi(\mathbf{r}_0^s) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s} dA_0}{\oint dA \oint \tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) \psi(\mathbf{r}_0^s) \left[\frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_k(\mathbf{r}^s|\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0}. \quad (11.4.61)$$

Истинные ψ и $\tilde{\psi}$ дают стационарное значение величине $[f]$, равное функции углового распределения $f(\mathbf{k}_i|\mathbf{k}_s)$. В справедливости этого утверждения можно убедиться, варьируя ψ и приравнявая нулю коэффициент при $\delta\tilde{\psi}$. Получающееся соотношение содержит, однако, функцию $\tilde{\psi}$, и мы не можем его использовать, пока не выясним характер этой функции. Это

можно сделать, приравнявая нулю коэффициент при $\delta\psi$, что приводит к уравнению

$$\frac{(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}_0) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0^s}}{f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)} \oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \psi(\mathbf{r}^s) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA = - \oint \tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) \left[\frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_k(\mathbf{r}^s | \mathbf{r}_0^s) \right] dA_s.$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (11.4.60) показывает, что $\tilde{\psi}$ является *решением сопряженной задачи*: плоская волна с волновым вектором $-\mathbf{k}_s$ посылается из точки (r, ϑ, φ) , которая для ψ служит точкой наблюдения, и после встречи с препятствием возвращается как рассеянная волна с волновым вектором $-\mathbf{k}_i$ к отрицательной бесконечности на оси z , соответствующей источнику для ψ . Приведенное доказательство того, что функция углового распределения f для основной и взаимной задач одинакова, представляет собой только другой способ обоснования принципа взаимности. Как указано на стр. 807 тома I, переход к сопряженному решению $\tilde{\psi}$ связан с процессом перемены местами источника и наблюдателя.

Функция углового распределения и полное эффективное поперечное сечение рассеяния. Теперь мы можем следующим образом формулировать наш вариационный принцип для рассеяния. Берем достаточно общее выражение величины ψ на поверхности для случая падающей плоской волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}_i$, и соответствующее выражение для волны $\tilde{\psi}$, распространяющейся в направлении $-\mathbf{k}_s$. Затем вычисляем по формуле (11.4.61) функцию f , как функцию параметров, входящих в ψ и $\tilde{\psi}$. Выражение ψ (и соответственно $\tilde{\psi}$), для которого обращаются в нуль все первые производные от f по параметрам ψ (а также $\tilde{\psi}$), будет наилучшим, а получающаяся при этом функция f будет ближе всего к истинной функции углового распределения $f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)$. В пределе, если семейства функций, определяемых выбранными выражениями ψ и $\tilde{\psi}$ полны, функции, дающие стационарное значение величине f , представляют собой истинные значения ψ и $\tilde{\psi}$ на граничной поверхности, а соответствующая величина f равна истинной функции углового распределения $f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)$.

Если нужно определить значения ψ вне граничной поверхности, подставляем найденные значения ψ на поверхности в формулу (11.4.59). Но делать это приходится редко, так как обычно требуется только угловое распределение и полное эффективное поперечное сечение рассеяния

$$Q(\mathbf{k}_i) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)|^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.4.62)$$

Эту последнюю величину можно найти, исходя из f , интегрированием по углам ϑ, φ , определяющим направление $\mathbf{k}_s$ по отношению к $\mathbf{k}_i$. Однако нет необходимости непосредственно производить это интегрирование, так как величину Q можно найти непосредственно из f на основании следующих соображений.

Интенсивность рассеянной волны в направлении $\mathbf{k}_s$ при единичной интенсивности падающей выражается формулой

$$|f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)|^2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 = - \frac{1}{k|C|^2} \operatorname{Im} \left[\psi_s \frac{\partial \bar{\psi}_s}{\partial r} \right]_{r \rightarrow \infty},$$

где ψ_s — рассеянная волна [эту волну представляет, очевидно, второй член правой части формулы (11.4.57), стремящийся к $(Cf/r) e^{ikr}$ при $r \rightarrow \infty$]. Интеграл от этого выражения по сфере бесконечного радиуса дает эффек-

тивное сечение Q . Однако нет необходимости интегрировать по бесконечно большой сфере; интеграл от $(1/k|C|^2) \operatorname{Im} [\psi_s (\partial \bar{\psi}_s / \partial n)]$ по любой замкнутой поверхности, внешней по отношению к рассеивателю, даст тот же результат. В частности, можно интегрировать по поверхности, отстоящей от рассеивателя на бесконечно малое расстояние:

$$Q(\mathbf{k}_i) = \frac{-1}{k|C|^2} \operatorname{Im} \left\{ \oint \psi_s(\mathbf{r}^s) \left[\frac{\partial}{\partial n} \bar{\psi}_s(\mathbf{r}^s) \right] dA \right\}. \quad (11.4.63)$$

В любой точке вне рассеивателя полное поле ψ равно сумме падающей плоской волны $Ce^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$ и рассеянной волны ψ_s . Поскольку нормальная производная ψ на поверхности рассеивателя равна нулю, нормальная производная ψ_s на этой поверхности равна взятой со знаком минус нормальной производной плоской волны:

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial n} = -iC(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_s}{\partial n} = iC(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{k}_i) &= \frac{1}{k|C|^2} \operatorname{Im} \left\{ i\bar{C} \oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \psi_s(\mathbf{r}^s) e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA \right\} = \\ &= \frac{1}{k|C|^2} \operatorname{Im} \left\{ i\bar{C} \oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) [\psi(\mathbf{r}^s) - Ce^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s}] e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA \right\}. \end{aligned}$$

Интеграл от второго слагаемого в квадратных скобках равен нулю, поскольку поток постоянного вектора $\mathbf{k}_i$ равен нулю. Интеграл от первого слагаемого, согласно (11.4.58), пропорционален предельному значению f при $\mathbf{k}_s \rightarrow \mathbf{k}_i$, равному $\mathbf{k}_i$. Поэтому

$$Q(\mathbf{k}_i) = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} [f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_i)]. \quad (11.4.64)$$

Вместо того чтобы интегрировать $|f|^2$ по всем направлениям $\mathbf{k}_s$, мы получаем Q , определяя мнимую часть предельного значения функции f при $\mathbf{k}_s \rightarrow \mathbf{k}_i$ [см. (9.3.23)].

Если рассеивающей поверхностью является сфера радиуса a , то функция Грина может быть разложена по сферическим гармоникам [см. (11.3.44)]. Чтобы найти составляющие градиента, которые теперь являются производными по r и r_0 , мы вспоминаем, что сначала на поверхность была помещена точка r_0 , и, следовательно, нужно пользоваться выражением, пригодным для $r > r_0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} g_k = ik^3 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) j_n'(kr_0) h_n'(kr), \end{aligned} \quad (11.4.65)$$

причем вместо r_0 и r должно быть подставлено значение a .

Рассеяние на сфере. Если рассеивающей поверхностью является сфера и если ψ и $\bar{\psi}$ на поверхности разложены по сферическим гармоникам, то изложенный метод приводит к результатам, аналогичным (11.3.72) для $\partial \psi / \partial n = 0$ (как это, конечно, и должно быть). Если мы направим $\mathbf{k}_i$ вдоль сферической оси, то ψ не будет зависеть от φ и

$$\psi(\mathbf{r}^s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta),$$

где A_n — произвольные параметры, подлежащие варьированию. Тогда если ϑ_s, φ_s — углы, связывающие $\mathbf{k}_s$ с $\mathbf{k}_i$, то

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_s) P_n^m(\cos \vartheta) \cos [m(\varphi - \varphi_s)].$$

Подобно этому разложения плоских волн, умноженные на $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$, соответственно равны

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} &= k \sum_{n=0}^{\infty} i^n [n P_{n-1}(\cos \vartheta) + (n+1) P_{n+1}(\cos \vartheta)] j_n(ka), \\ (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} &= k \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n j_n(ka) \sum_m \left[n \frac{(n-m-1)!}{(n+m-1)!} P_{n-1}^m(\cos \vartheta_s) P_{n-1}^m(\cos \vartheta) - \right. \\ &\quad \left. - (n+1) \frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!} P_{n+1}^m(\cos \vartheta_s) P_{n+1}^m(\cos \vartheta) \right] \cos [m(\varphi - \varphi_s)]. \end{aligned}$$

Комбинируя все эти формулы и производя интегрирование в соотношении (11.4.61), мы получаем

$$-[f] = \frac{N^2}{ikM}, \quad N = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n j'_n(ka) P_n(\cos \vartheta_s),$$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \frac{P_n(\cos \vartheta_s)}{2n+1} j'_n(ka) h'_n(ka),$$

где

$$j'_n(ka) = \frac{1}{k} \frac{d}{da} j_n(ka) = \frac{n}{2n+1} j_{n-1}(ka) - \frac{n+1}{2n+1} j_{n+1}(ka) = -D'_n \sin \vartheta'_n,$$

$$h'_n(ka) = \frac{1}{k} \frac{d}{da} h_n(ka) = iD'_n e^{i\vartheta'_n}.$$

Приравнивая нулю частные производные от $[f]$ по всем A_n , мы получаем бесконечную систему уравнений

$$A_n = (-1)^n \frac{2n+1}{h'_n(ka)} \frac{M}{N}.$$

Поскольку M и N содержат все A_n , эта система однородных уравнений на первый взгляд кажется сложной. Заметим, однако, что если уравнения решены, то $M = N^1$, так что получается простая последовательность

¹⁾ Авторы выражаются не точно. Дело в том, что вариационный принцип определяет ψ и $\tilde{\psi}$, а значит, и все A_n с точностью до множителя. Множитель зависит о амплитуды падающей волны и не влияет на величины f и Q . Так как M/N — однородная функция первой степени от A_n , то она тоже определяется с точностью до несущественного для наших целей множителя, а потому может быть принята равной единице. — Прим. перев.

соотношений

$$A_n = \frac{(-1)^n (2n+1)}{h'_n(ka)} = \frac{(-1)^n (2n+1) e^{-i\delta'_n}}{iD'_n},$$

$$f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s) = -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-i\delta'_n} \sin \delta'_n P_n(\cos \vartheta_s),$$

$$Q(\mathbf{k}_i) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sin^2 \delta'_n \quad (11.4.66)$$

[используя для Q формулу (11.4.14)]. Эти формулы аналогичны формулам (11.3.72) для условий Неймана.

Таким образом, вариационный принцип при разложении по сферическим гармоникам приводит к тому же точному решению, что и вычисления § 11.3. Конечно, в этом нет ничего удивительного; оба результата должны совпадать. Но изложенный здесь метод более пригоден для определения физически интересных величин с меньшей затратой труда. Например, коль скоро найдены A_n можно непосредственно определить значения ψ на поверхности сферы (с точностью до коэффициента пропорциональности)

$$\psi(\mathbf{r}^s) = -iA \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{D_n(ka)} e^{-i\delta_n} P_n(\cos \vartheta). \quad (11.4.67)$$

Легко также видеть, что если воспользоваться функцией сравнения ψ , составленной из конечного числа сферических гармоник, то наилучшие возможные результаты для f , Q и $\psi(\mathbf{r}^s)$ должны совпасть с n -ми частичными суммами полученных ранее рядов. Но, за исключением исследования предельного случая коротких волн, о котором речь будет в дальнейшем, использование этого метода для сферической рассеивающей поверхности лишь повторяет то, что может быть сделано методом собственных функций. Вариационный метод полностью оправдывает себя, когда рассеивающая поверхность имеет более сложную форму и собственные функции или не полностью табулированы, или вовсе не могут быть получены (если поверхность не совпадает с координатной поверхностью системы координат, допускающей разделение).

Рассеяние на полосе. Хотя решение задачи рассеяния на полосе, выраженное через функции Матье, известно, вариационный метод имеет в этом случае некоторые преимущества, ибо результаты, получаемые этим методом, не будучи точными, имеют форму более компактную, чем выражение (11.2.102) и следующие. Чтобы получить хорошее приближение для рассеяния, мы воспользуемся, как мы это неоднократно делали ранее, приближенными значениями ψ на поверхности, получаемыми из рассмотрения установившегося потока, и затем применим уравнение (11.4.61).

Интегралы в формуле (11.4.61) нужно брать по обеим сторонам полосы, что сводится к интегралу по одной стороне от разности значений ψ на обеих сторонах полосы. Предположим, что полоса находится в плоскости y, z , ось ее направлена вдоль оси z , а ширина равна a (полоса занимает область $x=0, |y| < a/2$). Пусть направление распространения падающей волны лежит в плоскости x, y , образуя угол φ_i с осью x , и что требуется определить рассеянную волну в направлении, образующем угол φ_s с осью x . Из формулы (10.1.28) следует, что при обтекании полосы установившимся потоком жидкости, скорость которого составляет угол φ_i с нормалью к полосе, разность между значениями ψ в точках $(0^+, y)$

и $(0^-, y)$ (для $|y| < a/2$) равна $B \sqrt{1 - (2y/a)^2} \cos \varphi_i$. Здесь B — постоянная, которая исключается при вариационных рассмотрениях и, значит, не подлежит вычислению. Аналогичная разность для потока, направленного под углом $-\varphi_s$, равна $-B \sqrt{1 - (2y/a)^2} \cos \varphi_s$.

Подставляя принятые выражения в (11.4.61), мы получаем для одного из интегралов числителя выражение

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA &= \\ &= -kB \cos \varphi_i \cos \varphi_s \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{a}\right)^2} e^{iky \sin \varphi_i} dy = \\ &= -\frac{1}{2} \cos \varphi_i \cos \varphi_s \int_0^\pi (1 - \cos^2 u) e^{i(ka/2) \sin \varphi_i \cos u} du = \\ &= -\frac{1}{2} \pi ka B \cos \varphi_i \cos \varphi_s \left[J_0 \left(\frac{1}{2} ka \sin \varphi_i \right) + J_2 \left(\frac{1}{2} ka \sin \varphi_i \right) \right] = \\ &= -\frac{2\pi B}{\sin \varphi_i} \cos \varphi_i \cos \varphi_s J_1 \left(\frac{1}{2} ka \sin \varphi_i \right). \end{aligned}$$

Второй интеграл числителя равен

$$\frac{2\pi B}{\sin \varphi_s} \cos \varphi_i \cos \varphi_s J_1 \left(\frac{1}{2} ka \sin \varphi_s \right).$$

Чтобы вычислить интеграл в знаменателе, необходимо [подходящим образом выразить g . Это достигается при помощи интегрального представления Фурье

$$g_h(x, y | x_0, y_0) = i \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(y - y_0 + i|x - x_0| \sqrt{k^2 - \omega^2})] \frac{d\omega}{\sqrt{k^2 - \omega^2}},$$

где мнимая часть радикала положительна при $\omega > k$. Таким образом, мы имеем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} g_h \right]_{x, x_0 \rightarrow 0} = i \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \omega^2} e^{i\omega(y - y_0)} d\omega,$$

и интеграл в знаменателе можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \oint dA \oint \tilde{\psi}(\mathbf{r}^s) \psi(\mathbf{r}_0^s) \left[\frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_h(\mathbf{r}^s | \mathbf{r}_0^s) \right] dA_0 &= \\ &= -iB^2 \cos \varphi_i \cos \varphi_s \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \omega^2} d\omega \times \\ &\quad \times \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{a}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_0}{a}\right)^2} e^{i\omega(y - y_0)} dy dy_0 = \\ &= -8\pi^2 B^2 i \cos \varphi_i \cos \varphi_s \int_0^\infty \sqrt{k^2 - \omega^2} \left[J_1 \left(\frac{1}{2} a\omega \right) \right]^2 \frac{d\omega}{\omega^2} = \\ &= 8\pi^2 B^2 \cos \varphi_i \cos \varphi_s (R - iX), \end{aligned}$$

где

$$R = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} J_1^2\left(\frac{1}{2} kax\right) \frac{dx}{x^2} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 u J_1^2\left(\frac{1}{2} ka \sin u\right) du,$$

$$X = \int_1^\infty \sqrt{x^2-1} J_1^2\left(\frac{1}{2} kax\right) \frac{dx}{x^2} = \int_0^{\pi/2} \sin u \operatorname{tg} u J_1^2\left(\frac{1}{2} ka \sec u\right) du.$$

Эти интегралы можно подсчитать численно. Они конечны для всех действительных значений ka .

Соответствующие выражения для функции углового распределения f и эффективной ширины рассеяния Q могут быть представлены так:

$$f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s) \simeq \frac{-\operatorname{ctg} \varphi_i \operatorname{ctg} \varphi_s}{2(R-iX)} J_1\left(\frac{1}{2} ka \sin \varphi_i\right) J_1\left(\frac{1}{2} ka \sin \varphi_s\right),$$

$$Q(\mathbf{k}_i) \simeq \frac{2\pi}{k} \frac{X}{R^2+X^2} \operatorname{ctg}^2 \varphi_i J_1^2\left(\frac{1}{2} ka \sin \varphi_i\right). \quad (11.4.68)$$

Интенсивность рассеянной волны обращается в нуль, когда направление распространения падающей волны или направление распространения рассеянной находится в плоскости полосы (φ_i или φ_s равно $\pi/2$); если же направление распространения падающей волны составляет с полосой прямой угол ($\varphi_i = 0$), то эффективная ширина равна $\pi ka^2 X / 8(R^2 + X^2)$.

Подобные (но значительно более трудные) вычисления были произведены для случая диска (см. в библиографии работы Левина и Швингера; фактически вычисления были произведены для круглого отверстия в плоскости, но, по принципу Бабине, эти задачи равносильны).

Рассеяние коротких волн. В качестве последнего примера использования метода интегральных уравнений мы рассмотрим рассеяние плоской волны на жесткой сфере в предельном случае, когда длина волны $2\pi/k$ очень мала по сравнению с радиусом сферы a . Здесь удобнее всего воспользоваться формулой Грина для рассеянной волны ψ_s с функцией Грина для свободного пространства $g_k = (1/R)e^{ikR}$

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint \left[\psi_s(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) - g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi_s(\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0,$$

где снова $\mathbf{n}_0$ — вектор внешней нормали к поверхности рассеивателя.

Поскольку нормальная составляющая градиента полного решения ψ должна обращаться в нуль на рассеивающей поверхности, нормальная составляющая градиента ψ_s должна там совпадать с составляющей градиента падающей плоской волны ψ_i , взятой со знаком минус. Таким образом,

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint \left[\psi_s(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) + g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0, \quad (11.4.69)$$

где $\psi = \psi_i + \psi_s$ и ψ_i — плоская волна $Ce^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$.

Мы знаем, что для очень коротких волн часть поверхности, на которой произведение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i$ положительно (если поверхность всюду выпуклая) находится в «тени», в то время как та часть, для которой $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i$ отрицательно, «освещена» падающей волной. Под «тенью» мы понимаем область, где ψ_s почти полностью уничтожает ψ_i как по величине, так и по градиенту. В «освещенной» же части $\partial \psi_s / \partial n$ уничтожает $\partial \psi_i / \partial n$, а ψ_s на поверхности приблизительно равно ψ_i . Поэтому наша рассеянная волна может быть приближенно представлена в виде суммы интегралов по обеим частям

поверхности от произведений, составленных при помощи функции Грина и падающей волны

$$\begin{aligned} \psi_s(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi} \int_I \int \left[\psi_i(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) + g_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \right] dA_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[g_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \psi_i(\mathbf{r}_0^s) - \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} g_h(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^s) \right] dA_0, \quad (11.4.70) \end{aligned}$$

где значки I и S указывают, что интегрирование производится соответственно по освещенной (illuminated) и по теневой (shadow) части.

Эти два интеграла ведут себя совершенно различно. Первый представляет «отраженную волну», рассмотренную на стр. 356; второй — это «тенеобразующая» волна, подавляющая падающую волну. Если бы второй интеграл был взят по замкнутой поверхности, он в точности уничтожал бы падающую волну; поскольку интегрирование производится лишь по части поверхности, падающая волна уничтожается только позади предмета.

Так называемое *преобразование Маджи* значительно упрощает вычисление интеграла для тенеобразующей волны. Заметим, что вектор

$$\mathbf{A} = g_h \operatorname{grad}_0 \psi_i - \psi_i \operatorname{grad}_0 g_h,$$

рассматриваемый как функция $\mathbf{r}_0^s$, имеет равную нулю дивергенцию (за исключением случая, когда $\mathbf{r}$ также находится на поверхности). Действительно,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = g_h \nabla_0^2 \psi_i - \psi_i \nabla_0^2 g_h = 4\pi \psi_i(\mathbf{r}_0^s) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^s),$$

что равно нулю, пока точка $\mathbf{r}$ не лежит на поверхности. Поэтому $\mathbf{A}$ можно рассматривать как ротор некоторого вектора $\mathbf{B}$ (см. стр. 59 тома I) и, используя теорему Стокса (стр. 51 тома I), мы получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_0 = \frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (11.4.71)$$

где контурный интеграл от $\mathbf{B}$ берется вдоль линии на поверхности, отделяющей теневую часть от освещенной (назовем ее *теневой линией*). Преобразование Маджи выражает $\mathbf{B}$ через g_h и ψ_i . Это дает возможность заменить интеграл по поверхности эквивалентными линейными источниками, расположенными вдоль теневой линии.

Однако фактически нам нет надобности вычислять вектор $\mathbf{B}$; достаточно заметить тот очевидный факт, что он зависит только от функции Грина и падающей волны и не зависит от формы поверхности рассеивателя (зависит только от формы теневой линии). Таким образом, мы показали, что *тенеобразующая волна одинакова для всех поверхностей, имеющих одну и ту же теневую линию* [по крайней мере в том приближении, которое соответствует формуле (11.4.70)]. В частности, эта волна будет такой же для непрозрачной пленки, край которой совпадает с теневой линией первоначального рассеивателя.

Чтобы показать, как применяется этот прием, мы вернемся к сфере радиуса a . Эквивалентной поверхностью, производящей такую же тенеобразующую волну, будет диск радиуса a , концентрический со сферой и перпендикулярный к направлению распространения падающей волны. Таким образом, тенеобразующая волна обратна по знаку волне, излучаемой диском, колеблющимся с такой же фазой и амплитудой, что и у падающей плоской волны. Вблизи диска эта волна создает вокруг его края обычные френелевские дифракционные кольца; вдали от диска наблюдается обычная фраунгоферова картина. Если мы найдем асимптотическое

выражение для ψ_s , то мы сможем рассчитать случай диффракции Фраунгофера.

Итак, при вычислении второго интеграла в формуле (11.4.70) можно интегрировать по поверхности диска в полярных координатах φ_0, r_0 ; ψ_i равно Ce^{ikz} , а асимптотическая форма для g_k имеет вид $(e^{ikr}/r)e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0}$, где $\mathbf{k}_s$ — вектор, характеризуемый углами ϑ, φ и направленный к точке наблюдения. Для тенеобразующей волны получаем приближенное выражение

$$\begin{aligned} ikC(1 + \cos \vartheta) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^a r_0 e^{-ikr_0 \sin \vartheta \cos(\varphi_0 - \varphi)} dr_0 = \\ = \frac{1}{2} ikC(1 + \cos \vartheta) \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^a J_0(kr_0 \sin \vartheta) r_0 dr_0 = \\ = \frac{1}{2} ika^2 C \frac{1 + \cos \vartheta}{ka \sin \vartheta} J_1(ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikr}}{r}. \end{aligned}$$

Величина в квадратных скобках равна единице при $\vartheta = 0$, т. е. прямо позади диска, в центре тени; она убывает до нуля при возрастании ϑ приблизительно до значения, для которого $\sin \vartheta = 3,8/ka$ (этот угол мал, когда $|ka| \gg 1$), и для больших ϑ остается малой. Этот член существенен только непосредственно позади предмета (в чем нет ничего удивительного, поскольку он образует тень).

С первым интегралом формулы (11.4.70), представляющим отраженную волну, нельзя обращаться столь же бесцеремонно. Ввиду того что в нем вместо знака минус фигурирует знак плюс, он не может быть представлен контурным интегралом, и для коротких волн его приходится вычислять методом перевала. Это вычисление очень похоже на проведенное на стр. 500. Мы рассмотрим здесь только случай сферы. Пусть единичный вектор нормали к поверхности в точке (ϑ_0, φ_0) по-прежнему обозначается $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{k}_i = ka_z$ является волновым вектором падающей волны, а вектор $\mathbf{k}_s = ka_r$ направлен к точке наблюдения. Тогда первый интеграл (11.4.70) принимает вид

$$\frac{ia^2C}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{\pi/2}^{\pi} (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{n}_0 e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{n}_0 a} \sin \vartheta_0 \frac{e^{ikr}}{r} d\vartheta_0 = \frac{a^2C}{4\pi} \frac{\partial F}{\partial a} \frac{e^{ikr}}{r},$$

где

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{\pi/2}^{\pi} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{n}_0 a} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0.$$

Седловая точка для ϑ_0 в интеграле F — это та точка на сфере, где вектор $\mathbf{n}_0$ параллелен вектору $-(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)$, расположенному «между» $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$. Он соответствует точке на сфере, в которой первичная волна зеркально отражается в направлении $\mathbf{k}_s$. Поскольку вектор $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)$ имеет длину $2k \sin(\vartheta/2)$ и направление его определяется углами $(\pi - \vartheta)/2, \varphi + \pi$, мы принимаем единичный вектор $\mathbf{n}_s$, характеризуемый этими углами, за полярную ось для интегрирования по сфере и вместо ϑ_0, φ_0 вводим соответствующие углы u, v . Наш интеграл принимает вид

$$F = \int dv \int e^{2ika \sin(\vartheta/2) \cos u} \sin u du,$$

причем пределы интегрирования соответствуют $\pi/2 \leq \vartheta_0 \leq \pi$ и довольно сложно выражаются для переменной u .

Так как мы рассчитываем найти асимптотическое выражение для F , то мы будем интегрировать по u в комплексной плоскости и выберем контур интегрирования так, чтобы вблизи $u = \pi$ показатель экспоненты имел постоянную фазу и достигал своего максимума при $u = \pi$. Если это будет сделано, то точное выражение пределов интегрирования по u и v не будет иметь значения, за исключением случая, когда $a\pi$, очень близко к теневой линии, т. е. когда $\vartheta \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} F &\simeq -2\pi \int_{\pi}^{i\infty} e^{2ika \sin(\vartheta/2) \cos u} \sin u \, du = \\ &= 2\pi i e^{-2ika \sin(\vartheta/2)} \int_0^{\infty} e^{-2ka \sin(\vartheta/2)x} dx = \frac{\pi i e^{-2ika \sin(\vartheta/2)}}{ka \sin(\vartheta/2)}, \end{aligned}$$

так что первый интеграл в (11.4.70) приближенно равен

$$\frac{aC}{2r} \exp \left\{ ik \left[r - 2a \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta \right) \right] \right\}$$

и фаза отраженной волны отстает на величину $2ak \sin(\vartheta/2)$, как того и требует «геометрическая оптика».

В принятом приближении для значений ψ_s на сфере асимптотическое выражение для ψ_s имеет вид

$$\psi_s \simeq Cf(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \frac{r}{a} \rightarrow \infty, \quad (11.4.72)$$

где

$$f(\vartheta) \simeq \frac{1}{2} ia \left\{ ie^{-2ika \sin(\vartheta/2)} + ka \left[\frac{1 + \cos \vartheta}{ka \sin \vartheta} J_1(ka \sin \vartheta) \right] \right\}$$

при $ka \rightarrow \infty$. Амплитуда отраженной волны в этом приближении не зависит от ϑ . Тенеобразующая волна имеет острый пик в направлении $\vartheta = 0$; в других направлениях она пренебрежимо мала.

Выражение для отраженной волны непригодно при $\vartheta \rightarrow 0$ и поэтому формулу (11.4.64) применять нельзя. Чтобы найти Q , мы должны проинтегрировать $|f|^2$ по всем направлениям. Но поскольку отраженная часть f не зависит от ϑ , мы можем получить соответствующую часть эффективного поперечного сечения, умножая квадрат абсолютной величины этой части на 4π . Таким образом, для отраженной мощности при единичной интенсивности падающей волны мы получаем значение πa^2 . Интегрируя $|f|^2$ для тенеобразующей части, мы находим, что соответствующее эффективное поперечное сечение также равно πa^2 . Следовательно, полное эффективное поперечное сечение *рассеяния очень коротких волн* равно $2\pi a^2$, т. е. удвоенному геометрическому сечению сферы, как это уже было установлено на стр. 357 и 450. Половина этого сечения приходится на отраженную часть волны, а другая половина — на тенеобразующую часть.

Задачи к главе 11

11.1. Струна переменной линейной плотности $\rho = \rho_0 [1 + b(x)]$ г/см натянута между неподвижными закреплениями с натяжением T (координаты закреплений $x = 0$ и $x = l$). Применяя метод возмущений гл. 9, найти приближения первого порядка для формы струны и частот собственных колебаний.

11.2. Полубесконечная однородная струна плотности ρ с натяжением T простирается от $x=0$ до $x=\infty$. Сила трения $R(\partial y/\partial t)$ дин/см оказывает сопротивление поперечным колебаниям струны. Показать, что если в точке $x=0$ приложена поперечная сила $F_0 e^{-i\omega t}$, то смещение имеет вид

$$y = \frac{F_0}{\rho c a} e^{-(ax/c) - i\omega t}, \quad a^2 = -\omega^2 - i\omega \frac{R}{\rho}.$$

Показать, пользуясь таблицей преобразований Лапласа (приведенной в конце этой главы), что если поперечная сила, приложенная в точке $x=0$, имеет характер единичного импульса при $t=0$, то смещение струны равно

$$y = u \left(t - \frac{x}{c} \right) e^{-Rt/2\rho} J_0 \left[\frac{iR}{2\rho} \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{c} \right)^2} \right].$$

11.3. Полость, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, внутренними гранями которого служат плоскости $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=l$, является акустическим резонатором и наполнена воздухом при нормальном давлении и температуре. Полоса стенки $z=0$, заключенная между $x=x_0 - \Delta/2$ и $x=x_0 + \Delta/2$, колеблется со скоростью $v_z = U e^{-i\omega t}$; остальная часть границы неподвижна. Показать, что средний акустический импеданс на поверхности возбуждающей полосы, т. е. отношение среднего давления к скорости полосы, равен

$$Z_{\text{ср.}} = i\rho c \left\{ \frac{\Delta}{\pi \operatorname{tg}(kl)} - \frac{8a^2 k}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi n \Delta}{2a} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi n x_0}{a} \right)}{n^3 \tau_n \operatorname{th} \left(\frac{\pi n l \tau_n}{a} \right)} \right\},$$

где $k = \omega/c$, $\tau_n^2 = 1 - \left(\frac{ak}{\pi n} \right)^2$, причем предполагается, что $\omega < \pi c/a$. Найти предельное значение Z при $\omega \rightarrow 0$. Показать, что импеданс ведет себя так, как если бы полоса была упругой и была нагружена массой, и найти предельные значения эффективной массы и упругости полосы.

11.4. Прямоугольная полубесконечная труба с неподвижными стенками $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ простирается от $z=0$ до $z=-\infty$. Акустический импеданс конца $z=0$, $Z(x) = [i\omega\rho\psi/(\partial\psi/\partial z)]_{z=0}$, зависит только от x [см. рассуждения, предшествующие (11.2.14)]. Показать, что интегральное уравнение для потенциала скоростей внутри трубы, вдоль которой от $-\infty$ распространяется плоская чисто гармоническая волна, имеет вид

$$\psi(x, z) = 2A \cos(kz) + \frac{ik\rho c}{4\pi} \int_0^a \frac{\psi(x_0, 0)}{Z(x_0)} G_k(x, z|x_0, 0) dx_0,$$

где $\omega = kc$, A — амплитуда падающей волны. Функция Грина имеет вид

$$G_k = \frac{4\pi i}{ak} e^{-ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\pi}{a\kappa_n} \cos \left(\frac{\pi n x_0}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi n x}{a} \right) e^{\kappa_n z}, \quad z \leq 0,$$

где $\kappa_n^2 = (\pi n/a)^2 - k^2$ (если предполагается, что $\omega < \pi c/a$). Показать, что в первом приближении по малой величине $\eta(\xi) = \rho c/Z(a\xi)$ волновая функция при $z=0$ имеет вид

$$\psi(x, 0) \simeq 2A \left\{ 1 - \int_0^1 \eta(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ik}{\kappa_n} \cos \left(\frac{\pi n x}{a} \right) \int_0^1 \eta(\xi) \cos(\pi n \xi) d\xi \right\}.$$

Показать, что отраженная волна при $z \ll 0$ имеет форму $A(1-T)e^{-ikz}$, где T можно назвать коэффициентом поглощения (если T действителен,

то он равен доле первичной энергии, поглощенной преградой при $z=0$). Подсчитать T с точностью до малых второго порядка по η . Действителен ли T при действительном η ? Если нет, то почему?

11.5. Установить вариационный принцип для задачи 11.4. Показать, что если функция сравнения $\varphi(\xi)$ выбрана так, что величина

$$[T] = \frac{2 \left[\int_0^1 \eta(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right]^2}{\int_0^1 \eta(\xi) \varphi^2(\xi) d\xi - \frac{ika}{4\pi} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 \eta(\lambda) \varphi(\lambda) G_k(a\lambda, 0 | a\xi, 0) \eta(\xi) \varphi(\xi) d\xi}$$

стационарна, то φ пропорционально $\psi(x, 0)$ (подсчитать коэффициент пропорциональности) и стационарное значение $[T]$ равно коэффициенту поглощения из предыдущей задачи.

11.6. Импеданс преграды при $z=0$ из задач 11.4 и 11.5 равен $10\rho c$ при $0 \leq x \leq a/2$ и ∞ при $a/2 \leq x \leq a$. Вычислить приближение первого порядка для $\psi(x, 0)$ и начертить его график при $k = \pi/\sqrt{2a}$. Используя формулы задачи 11.4, вычислить T при том же значении k с точностью до величин второго порядка. Вычислить T по формуле задачи 11.5, приняв $\varphi = 1$, и сравнить полученные результаты.

11.7. Круглая мембрана радиуса a с поверхностной плотностью σ и натяжением T неподвижно закреплена вдоль своего края. Мембрана герметически закрывает одну сторону сосуда, наполненного воздухом (пусть, например, это диафрагма литавры). Скорость звука в воздухе много больше, чем скорость волн на мембране, и, значит, можно считать, что изменение давления воздуха в сосуде пропорционально среднему смещению мембраны от состояния равновесия, $p = -\rho c_a^2 \pi a^2 \bar{\eta}/V$, где ρ — плотность воздуха, c_a — скорость звука в воздухе, V — объем сосуда и $\bar{\eta}$ — среднее смещение мембраны. Доказать, что уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$\nabla^2 \eta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\rho c_a^2}{VT} \int_0^a \int_0^{2\pi} \eta r dr d\varphi,$$

где $c^2 = T/\sigma$. Доказать, что собственные частоты свободных колебаний системы мембрана — сосуд являются корнями уравнения

$$\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2 J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right) + \frac{\pi \rho c_a^2 a^4}{\sigma c^2 V} J_2\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0,$$

если колебания не зависят от φ , и уравнения $J_m(\omega a/c) = 0$, если колебания зависят от угла.

11.8. Круглая мембрана радиуса a с плотностью σ и натяжением T , закрепленная по краю, приведена в движение импульсом давления $\delta(t)$, равномерно распределенным по одной стороне. Доказать, что, пренебрегая воздействием на мембрану воздуха, можно записать последующие колебания мембраны в виде

$$\psi = \frac{2a}{\sigma c} \sum_m \frac{J_0(\pi \beta_m r/a)}{(\pi \beta_m)^2 J_1(\pi \beta_m)} \sin\left(\frac{\pi \beta_m c t}{a}\right),$$

где β_m — m -й корень уравнения $J_0(\pi \beta_m) = 0$.

11.9. Как скажется на собственных частотах колебаний круглой мембраны небольшой дополнительный груз, прикрепленный к ее центру?

11.10. Цилиндрическая волна $Ae^{-i\omega t}H_0^{(1)}(kR)$ ($kc = \omega$) испускается линией $\varphi' = 0$, $r' = b$, где $R^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi$. Эта волна рассеивается цилиндром радиуса a ($a < b$), ось которого проходит через точку $r = 0$. Показать, что если краевое условие требует, чтобы потенциал скоростей равнялся нулю при $r = a$, то на больших расстояниях волна описывается формулой

$$\psi \simeq A \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{ik(r-ct)} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\varphi) i^{-m} e^{-i\pi/4} J_m(kb) \frac{H_m^{(1)}(kb)}{H_m^{(1)}(ka)},$$

где $k = \omega/c$. Какова формула для углового распределения интенсивности?

11.11. Цилиндр радиуса a колеблется так, что радиальная скорость на поверхности равна $U \cos \varphi e^{-i\omega t}$. Вычислить потенциал скоростей окружающего цилиндра воздуха, асимптотическое выражение для интенсивности и полную излучаемую единицей длины цилиндра мощность. Показать, что полная сила реакции, действующая на цилиндр вследствие его движения в воздухе, выражается формулой

$$F = -ia\pi\rho c U \frac{C_1(ka)}{C_1'(ka)} e^{i(\delta_1 - \delta_1') - i\omega t} \simeq \begin{cases} -i\omega\pi a^2\rho U e^{-i\omega t}, & ka \ll 1, \\ \pi a^2\rho c U e^{-i\omega t}, & ka \gg 1. \end{cases}$$

11.12. Получить формулы, подобные (11.3.76), для рассеяния и поглощения звука длинным цилиндром радиуса a , покрытым таким звукопоглощающим материалом, что отношение давления к радиальной скорости при $r = a$ равно $-2\rho c$. Начертить график эффективных поперечных сечений рассеяния и поглощения как функций от ka в интервале $0 \leq ka \leq 2$. Каково угловое распределение рассеянной волны при $ka = 2$?

11.13. Вычислить постоянные разделения be_2 и be_4 и ряды Фурье для $Se_2(h, \cos \vartheta)$ и $Se_4(h, \cos \vartheta)$ с точностью до малых четвертого порядка по h при помощи метода стр. 386, а также при помощи соотношений (11.2.87), (11.2.88) и сравнить результаты.

11.14. Гибкая мембрана с поверхностной плотностью σ и натяжением T жестко закреплена вдоль эллиптической границы с большой осью $(a/2) \operatorname{ch} \mu_0$ и малой осью $(a/2) \operatorname{sh} \mu_0$. На одну сторону мембраны действует периодически меняющееся избыточное давление $P_0 e^{-i\omega t}$, амплитуда которого одинакова во всех точках мембраны. Показать, что смещение мембраны ψ в точке (μ, ϑ) (эллиптические координаты) описывается формулой

$$\psi = \frac{P_0 e^{-i\omega t}}{\sigma \omega^2} \left\{ 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\pi B_0^e(h, 2m)}{M_{2m}^e(h) J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu_0)} Se_{2m}(h, \cos \vartheta) J_{e_{2m}}(h, \operatorname{ch} \mu_0) \right\},$$

$$0 \leq \mu \leq \mu_0,$$

где $h = a\omega/2c$ и $c^2 = T/\sigma$. Используя (11.2.85) и (11.2.88), вычислить амплитуду ψ как функцию от μ для $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi/2$ при $h = 1, 2$ и начертить график. (Использовать таблицу XVI Приложения.)

11.15. Выразить, как указано на стр. 391, функцию $Se_1(h, \cos \theta)$ для больших h через производные по θ от тета-функций ϑ_2 или ϑ_4 . Исходя из этого результата, вычислить частоту собственного колебания эллиптической мембраны с большим эксцентриситетом, соответствующего Se_1 .

11.16. Поперечное сечение пустотелой трубы имеет форму эллипса с большой осью A и малой осью B . Изучить распространение вдоль трубы акустических волн типов, соответствующих функциям Se_0 , So_1 и Se_1 . Вычислить критические частоты для этих типов волн (см. стр. 413) как функций от B в интервале $0 < B < A$, считая A постоянной, и начертить в подходящем масштабе график.

11.17. Электромагнитная волна с длиной волны $2\pi/k$ падает на длинную проводящую полосу ширины $a = 4/k$. Направление распространения волны перпендикулярно оси полосы и образует угол в 30° с ее плоскостью. Вычислить угловое распределение рассеянной волны как функцию угла рассеяния для каждого направления поляризации волны и начертить график.

11.18. Вычислить активную и реактивную составляющие акустического импеданса излучения колеблющейся полосы ширины a [см. (11.2.97)] как функцию от $h = ak/2$ в интервале $0 \leq h \leq 3$ и начертить график. Значения $B_1^o(h, m)$ таковы:

$h^2 =$	1	2	3	4	5	7	9
$m=1$	1,0981	1,2051	1,3215	1,4480	1,5850	1,8929	2,2504
$m=3$	0,0103	0,0202	0,0299	0,0394	0,0486	0,0668	0,0855

11.19. Вычислить активную и реактивную составляющие электрической проводимости полосы ширины a , проводящей переменный ток [см. (11.2.99)], как функции от $h = ak/2$ в интервале $0 \leq h \leq 3$ и начертить график. Значения $B_0^o(h, m)$ таковы:

$h^2 =$	1	2	3	4	5	7	9
$m=0$	1,1393	1,3090	1,5117	1,7488	2,0219	2,6818	3,5061
$m=2$	0,0596	0,1128	1,1594	0,1998	0,2349	0,2938	0,3428
$m=4$	0,0003	0,0013	0,0029	0,0050	0,0078	0,0150	0,0243

11.20. Звуковая волна с длиной волны $2\pi/k$ и амплитудой давления P_0 падает на длинную жесткую полосу ширины a . Направление распространения волны перпендикулярно оси полосы и образует угол u с ее плоскостью. Показать, что полная сила, с которой звуковая волна воздействует на единицу длины полосы, описывается выражением

$$F = iP_0 \pi a 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_1^o(h, 2m+1) e^{i\delta_{2m+1}^o}}{M_{2m+1}^o C_{2m+1}^o} S_{0_{2m+1}}(h, \cos u).$$

Найти выражение для F , пригодное для малых значений $h = ak/2$ с точностью до малых второго порядка по h . Вычислить амплитуду и фазу F/aP для $u = 90^\circ$ при $0 \leq h \leq 3$. Использовать таблицы в конце книги и значения, приведенные в задаче 11.18.

11.21. Обе стороны бесконечной мембраны с поверхностной плотностью σ и натяжением T соприкасаются со средой бесконечной протя-

женности, характеризуемой плотностью ρ и скоростью звука c_0 . Показать, что уравнение чисто гармонических поперечных колебаний мембраны частоты $\omega/2\pi$ имеет вид

$$\nabla^2 \eta(x, y) + K_m^2 \eta(x, y) + \frac{K_m^2 \rho}{\pi \sigma} \int_0^{2\pi} du \int_0^\infty \eta(x_0, y_0) e^{iK_0 R} dR = \frac{f(x, y)}{T},$$

где $K_0^2 = (\omega/c_0)^2$, $K_m^2 = (\omega/c_m)^2 = \sigma \omega^2 / T$, $\eta(x, y)$ — поперечное смещение точки (x, y) мембраны, $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ и $f(x, y) e^{-i\omega t}$ — плотность распределения поперечной вынуждающей силы. Показать, что вдоль мембраны могут распространяться свободные плоские волны вида $e^{ik \cdot r - i\omega t}$, причем величина k волнового вектора $\mathbf{k}$ удовлетворяет уравнению

$$k^2 - K_m^2 \left[1 + \frac{2(\rho/\sigma)}{\sqrt{k^2 - K_0^2}} \right] = 0.$$

Выяснить физическое значение двух типов волн, одного с k , близким к K_0 , и второго с k , близким к K_m (если ρ/σ мало). Показать, что при $c_0 < c_m$ волны последнего типа затухают, но при $c_0 > c_m$ не затухают волны никакого типа. Каково физическое объяснение этого явления?

11.22. Мембрана задачи 11.21 приводится в движение силой $\delta(x - x_1) e^{-i\omega t}$, приложенной вдоль линии $x = x_1$. Показать, что смещения точек мембраны описываются функцией

$$\eta = \frac{-1}{4\pi^2 \sigma c_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_1)} \left[k^2 - K_m^2 - \frac{2K_m^2 \rho/\sigma}{\sqrt{k^2 - K_0^2}} \right]^{-1} dk.$$

Найти приближенные формулы для η при $c_0 \gg c_m$ и при $c_0 \ll c_m$, предполагая в обоих случаях, что $\rho/\sigma \ll 1$.

11.23. В бесконечной трубе с круглым поперечным сечением радиуса a и осью z при $z = 0$ вставлена жесткая диафрагма с круглым отверстием радиуса b . Показать, что если на диафрагму падает плоская волна $A e^{ikz}$, распространяющаяся из $-\infty$, то потенциал скоростей звуковых волн в трубе имеет вид

$$\psi(r, \varphi, z) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^b u_0(r_0) G_h^+(r, \varphi, z | r_0, \varphi_0, 0) r_0 dr_0, & z > 0, \\ 2A \cos(kz) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^b u_0(r_0) G_h^-(r, \varphi, z | r_0, \varphi_0, 0) r_0 dr_0, & z < 0. \end{cases}$$

Здесь u_0 — амплитуда скорости в круглом отверстии, G^+ — функция Грина для области $z > 0$, нормальная производная которой при $r = a$ и $z = 0$ равна нулю, а G^- — соответствующая функция Грина для области $z < 0$. Найти разложение функций G по функциям Бесселя и показать, что интегральное уравнение для u_0 имеет вид

$$2A = \int_0^b u_0(r_0) G(r | r_0) r_0 dr_0,$$

причем при $k < \pi \alpha_{01}/a$

$$G(r | r_0) = \frac{4i}{a^2 k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_0(\pi \alpha_{0n} r/a) J_0(\pi \alpha_{0n} r_0/a)}{a^2 J_0^2(\pi \alpha_{0n}) \sqrt{(\pi \alpha_{0n}/a)^2 - k^2}}.$$

Показать, что доля падающей волны, проходящая через отверстие в сторону $+\infty$, равна $|Q/\pi a^2 k|^2$, причем $\int u_0' d\varphi_0 r_0 dr_0 = AQ$. Показать, что, принимая $u_0 = AQ/2\pi b^2 \sqrt{1 - (r_0/b)^2}$, полагая $r = 0$ в G и используя соотношение

$$\int_0^{\pi/2} J_0(z \sin w) \sin w dw = j_0(z),$$

можно получить приближенное решение

$$Q = \pi a^2 k \left[i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k j_0(\pi \alpha_{0n} b/a)}{2 J_0^2(\pi \alpha_{0n}) V(\pi \alpha_{0n}/a)^2 - k^2} \right]^{-1}.$$

11.24. Показать, что для решения интегрального уравнения задачи 11.23 может быть использован вариационный принцип

$$[Q] = \frac{\left[4\pi \int_0^b \varphi(r_0) r_0 dr_0 \right]^2}{\int_0^b r_1 dr_1 \int_0^b \varphi(r_1) G(r_1 | r_0) \varphi(r_0) r_0 dr_0}.$$

Взяв функцию сравнения в виде $\varphi = 1/\sqrt{1 - (r/b)^2}$, подсчитать Q и сравнить с результатом задачи 11.23.

11.25. Прямоугольная труба бесконечной протяженности вдоль оси z имеет в направлении оси y постоянную ширину b , а ее ширина в направлении оси x при $z = 0$ увеличивается скачком от a_- до a_+ (другими словами, труба ограничена поверхностями $y = \pm b/2$, $x = \pm a_-/2$ при $z < 0$, $x = \pm a_+/2$ при $z > 0$, $a_+ > a_-$, и частью плоскости $z = 0$ между $|x| = a_-/2$ и $|x| = a_+/2$). Предполагая, что скорость в плоскости $z = 0$ ($|x| < a_-/2$, $|y| < b/2$) приближенно равна $V_0 [1 - (2x/a_-)^2]^{-1/3}$, рассчитать отраженную и проходящую волны, возникающие, когда вдоль трубы от $z = -\infty$ распространяется плоская волна.

11.26. Методом задачи 11.22 решить задачу об акустическом излучении из круглой трубы, вделанной в плоскую стену, уже рассмотренную в формуле (11.3.34) и следующих. Пусть труба имеет радиус a , ее ось совпадает с отрицательной полуосью $z < 0$, фланец $z = 0$, $r > a$ жесткий и область $z > 0$ совершенно свободна. Волна с амплитудой A распространяется из $z = -\infty$ и частично излучается из открытого конца трубы, а частично отражается обратно к $z = -\infty$. Показать, что для области $z > 0$ соответствующая функция Грина имеет вид

$$G_k^* = 2i \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^{\infty} J_m(kr) J_m(kr_0) \frac{\lambda d\lambda}{K} \begin{cases} \cos(Kz) e^{ikhz_0}, & z < z_0, \\ \cos(Kz_0) e^{ihz}, & z > z_0, \end{cases}$$

где $K = \sqrt{k^2 - \lambda^2} = i\sqrt{\lambda^2 - k^2}$. Предполагая, что z -составляющая скорости воздуха в отверстии $z = 0$ равна $v_z = U [1 - (r/a)^2]^{-1/3}$, найти U , приравняв значения ϕ при $r = 0$, вычисленные с помощью функций Грина для $z > 0$ и для $z < 0$ при $z \rightarrow 0$. Использовать формулу

$$\int_0^{\pi/2} J_0(z \sin w) \sin w \cos^{1/3} w dw = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{(2z^2)^{1/3}} J_{2/3}(z) \simeq \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}, \quad z \rightarrow 0,$$

чтобы показать, что U при $k < \pi a_{01}/a$ приближенно равно

$$U \simeq \frac{24k\Gamma(5/3)}{\Gamma(2/3)} \left\{ i + 2^{\frac{1}{3}} i a^2 k \Gamma(5/3) \int_0^\infty J_{2/3}(\lambda a) \frac{\lambda d\lambda}{(2\lambda a)^{2/3} K} + \right. \\ \left. + 2^{\frac{1}{3}} k \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{J_{2/3}(\pi a_{0n})}{(2\pi a_{0n})^{2/3} K_n J_0^2(\pi a_{0n})} \right\}^{-1},$$

где $K_n^2 = (\pi a_{0n}/a)^2 - k^2$. Выразить через U/A полную мощность, излучаемую из открытого конца трубы при падающей волне единичной интенсивности.

11.27. Сфера радиуса a и массы M совершает колебания внутри поллой сферы с внутренним радиусом $b = 2a$. В положении равновесия центры сфер совпадают. Вычислить механический импеданс воздуха, находящегося между сферами, для колеблющейся сферы. Каково будет движение внутренней сферы, если ей при $t = 0$ сообщен начальный импульс?

11.28. Акустический импеданс поверхности сферы радиуса a равен $Z = 2\rho c$ (активный и не зависящий от ω). Вычислить эффективные поперечные сечения рассеяния и поглощения [см. (11.3.76)] сферы как функции ka . Вычислить отношение полной силы, действующей на сферу, к давлению падающей волны как функцию от ka и начертить график.

11.29. Установить вариационный принцип для резонатора Гельмгольца, рассмотренного в формуле (11.3.78) и следующих.

11.30. Сравнить с точностью до величин третьего порядка малости по $h = ka/2$ результаты вычислений по формулам (11.2.103) и (11.4.68).

11.31. Диск радиуса a , так расположенный в плоскости x, y , что его центр совпадает с началом координат, рассеивает плоскую звуковую волну. Направление распространения волны лежит в плоскости x, z и составляет угол ϑ_i с осью z . Рассеянная волна измеряется на некотором расстоянии от диска в точке, направление на которую образует угол ϑ_s с осью z , причем плоскость, проходящая через это направление и ось z , образует угол φ_s с плоскостью x, y . Применяя формулу (11.4.61), в которой

$$g_k = i \sum_{m=0}^\infty \varepsilon_m \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \int_0^\infty J_m(\lambda r) J_m(\lambda r_0) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}},$$

подсчитать рассеяние. В качестве функций сравнения использовать $\varphi^+ - \varphi^- = 1 + \alpha r \sin \vartheta_i \cos \varphi_i$, $\tilde{\varphi}^+ - \tilde{\varphi}^- = 1 + \alpha r \sin \vartheta_s \cos(\varphi - \varphi_s)$. Варьируя параметр α , получить наилучшие выражения для φ и $\tilde{\varphi}$. Показать, что для получения исправленной формы функции ψ при помощи интеграла (11.4.57) лучше всего взять

$$\psi_1(\mathbf{r}) = -4\pi i C \varphi(\mathbf{r}) \frac{\oint (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \tilde{\varphi}(\mathbf{r}^s) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}^s} dA}{\oint \oint \tilde{\varphi}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}_0) \left[\frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} g_k(\mathbf{r}^s | \mathbf{r}_0^s) \right] dA dA_0}.$$

11.32. Падающая плоская волна $C e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$ рассеивается телом с показателем преломления n по отношению к окружающему пространству. Доказать, что вариационный принцип для функции углового распре-

деления $f(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_s)$ имеет вид

$$[f] = \frac{(n^2 - 1) k^2 \int \tilde{\varphi}(\mathbf{r}_0) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_0} dv_0 \int \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} dv}{\int \tilde{\varphi}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dv - (n^2 - 1) k^2 \int dv \int \tilde{\varphi}(\mathbf{r}) g_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}_0) dv_0},$$

где все интегралы берутся по объему рассеивающего тела и $g_k = e^{ikR}/R$ ($R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$). Вычислить функцию f , когда рассеивающее тело имеет форму шара радиуса a и когда в качестве функций сравнения взяты $\varphi = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$ и $\tilde{\varphi} = e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}}$. Использовать разложения g_k и $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ по сферическим гармоникам.

Цилиндрические функции Бесселя

[См. формулу (5.3.63) и таблицу из гл. 10.]

$$J_m(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^m; \quad \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left[z - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right].$$

$$N_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2}{\pi} [\ln z - 0,11593];$$

$$N_m(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^m \quad (m > 0); \quad \left\{ \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left[z - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}.$$

$$H_m(z) = J_m(z) + iN_m(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz - (i\pi/2)(m+1/2)}.$$

Амплитуды и фазовые углы ($m = 0, 1, 2, \dots$) (см. табл. XIV Приложения).

$$J_m(z) = C_m(z) \sin [\delta_m(z)], \quad \frac{dJ_m(z)}{dz} = -C'_m(z) \sin [\delta'_m(z)].$$

$$N_m(z) = -C_m(z) \cos [\delta_m(z)], \quad \frac{dN_m(z)}{dz} = C'_m(z) \cos [\delta'_m(z)].$$

$$H_m(z) = -iC_m(z) e^{i\delta_m(z)}, \quad \frac{dH_m(z)}{dz} = iC'_m(z) e^{i\delta'_m(z)}.$$

$$\operatorname{tg} [\alpha_m(z)] = \frac{-z}{J_m(z)} \left[\frac{d}{dz} J_m(z) \right], \quad \operatorname{tg} [\beta_m(z)] = \frac{-z}{N_m(z)} \left[\frac{d}{dz} N_m(z) \right].$$

$$\operatorname{tg} [\delta'_m(z)] = \operatorname{tg} [\delta_m(z)] \operatorname{tg} [\alpha_m(z)] \operatorname{ctg} [\beta_m(z)].$$

$$\operatorname{tg} [\gamma_m(z)] = \operatorname{tg} \delta_m \frac{\cos \beta_m}{\cos \alpha_m} = \operatorname{tg} \delta'_m \frac{\sin \beta_m}{\sin \alpha_m}.$$

$$\Delta(J_m, N_m) = \frac{2}{\pi z} = C_m(z) C'_m(z) \sin [\delta_m(z) - \delta'_m(z)].$$

Асимптотические значения.

$$\text{При } z \gg m \text{ и } z \gg 1 \quad C_m \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \simeq C'_m, \quad \delta_m \simeq z - \frac{1}{2} \pi \left(m - \frac{1}{2} \right),$$

$$\delta'_m \simeq z - \frac{1}{2} \pi \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad \operatorname{tg} \alpha_m \simeq z \operatorname{tg} \delta'_m, \quad \operatorname{tg} \beta_m \simeq z \operatorname{tg} \delta_m.$$

$$\text{При } z \ll 2m+1 \text{ имеем } C_0 \simeq \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi} \ln z\right)^2}, \quad C'_0 \simeq \frac{2}{\pi z},$$

$$\alpha_0 \simeq \frac{1}{2} z^2, \quad \delta'_0 \simeq \frac{1}{4} \pi z^2, \quad \operatorname{tg} \beta_0 \simeq \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \delta_0 \simeq -\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

$$C_m \simeq \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^m, \quad C'_m \simeq \frac{m!}{2\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^{m+1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\delta_m \simeq \frac{\pi m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \simeq -\delta'_m, \quad -\operatorname{tg} \alpha_m \simeq m \simeq \operatorname{tg} \beta_m.$$

При $m > 1$, $z - m = 0$, $C_m = C_m^0 \simeq 0,8946m^{-1/3} + 0,0059m^{-5/3} + \dots$,

$$C'_m = C_m^{0'} \simeq 0,8217m^{-2/3} + 0,0895m^{-4/3} + \dots,$$

$$\delta_m = \delta_m^0 \simeq \frac{1}{6} \pi - 0,0114m^{-4/3} + \dots,$$

$$\delta'_m = \delta_m^{0'} \simeq -\frac{1}{6} \pi + 0,1892m^{-2/3} + \dots,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \operatorname{tg} \alpha_m^0 \simeq -0,9185m^{2/3} + 0,2000 + \dots,$$

$$\operatorname{tg} \beta_m = \operatorname{tg} \beta_m^0 \simeq 0,9185m^{2/3} + 0,2000 + \dots.$$

При $m > 1$, $|z - m| \ll m^{1/3}$ с точностью до членов первого порядка по $z - m$ имеем

$$C_m \simeq C_m^0 - \frac{1}{2} C_m^{0'} (z - m), \quad C'_m \simeq C_m^{0'} - \frac{1}{m} C_m^{0'} (z - m),$$

$$\delta_m \simeq \delta_m^0 + 0,7954m^{-1/3} (z - m), \quad \delta'_m \simeq \delta_m^{0'},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m \simeq \operatorname{tg} \alpha_m^0 \left[1 + \frac{z - m}{m} \operatorname{tg} \alpha_m^0 \right],$$

$$\operatorname{tg} \beta_m \simeq \operatorname{tg} \beta_m^0 \left[1 + \frac{z - m}{m} \operatorname{tg} \beta_m^0 \right].$$

При $z < m$, $p = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{m}\right)^2} \gg 0,6 m^{-1/3}$ имеем

$$\operatorname{tg} \alpha_m \simeq -mp \simeq -\operatorname{tg} \beta_m,$$

$$\operatorname{tg} \delta_m \simeq \frac{1}{2} \left[\frac{1 - p}{1 + p} e^{2p} \right]^m \simeq -\operatorname{tg} \delta'_m,$$

$$C_m \simeq [\pi m p \operatorname{tg} \delta_m]^{-1/2}, \quad C'_m \simeq \sqrt{m p} [\pi z^2 \operatorname{tg} \delta_m]^{-1/2}.$$

При $z > m$, $q = \sqrt{\left(\frac{z}{m}\right)^2 - 1} \gg 0,6m^{-1/3}$ имеем

$$\delta_m \simeq m [q - \operatorname{arc} \operatorname{tg} q] + \frac{1}{4} \pi, \quad \delta'_m \simeq \delta_m - \frac{1}{2} \pi + \frac{1 + q^2}{2mq^3},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m \simeq -mq \operatorname{ctg} \delta_m, \quad \operatorname{tg} \beta_m \simeq mq \operatorname{tg} \delta_m,$$

$$C_m \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi m q}}, \quad C'_m \simeq \sqrt{\frac{2mq}{\pi z^2}}.$$

Корни. β_{mn} — n -й корень уравнения $J_m(\pi\beta) = 0$.

β_{mn}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,7655	1,7571	2,7546	3,7535	4,7527
$m=1$	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411	5,2429
$m=2$	1,6348	2,6792	3,6988	4,7097	5,7168
$m=3$	2,0308	3,1070	4,1428	5,1639	6,1781
$m=4$	2,4153	3,5221	4,5748	5,6073	6,6294

$$\beta_{m1} \simeq \frac{m}{\pi} + 0,5907m^{1/3}, \quad m \gg 1.$$

$$\beta_{mn} \simeq n + \frac{1}{2} m - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \left[(4m^2 - 1) / \left(n + \frac{1}{2} m - \frac{1}{4} \right) \right], \quad n \gg 1, \quad n > m.$$

α_{mn} — n -й корень уравнения $\frac{dJ_m(\pi\alpha)}{d\alpha} = 0$.

α_{mn}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,0000	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411
$m=1$	0,5861	1,6970	2,7140	3,7261	4,7312
$m=2$	0,9722	2,1346	3,1734	4,1923	5,2036
$m=3$	1,3373	2,5513	3,6115	4,6428	5,6624
$m=4$	1,6926	2,9547	4,0368	5,0815	6,1103

$$\alpha_{m1} \simeq \frac{m}{\pi} + 0,2574m^{1/3}, \quad m \gg 1.$$

$$\alpha_{mn} \simeq n + \frac{1}{2}m - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \left[(4m^2 - 1) \left/ \left(n + \frac{1}{2}m - \frac{3}{4} \right) \right. \right], \quad n \gg 1, \quad n > m.$$

Функции Вебера

[Параболические волновые функции. См. формулы (11.2.63) и следующие.]

$$D_m(z) = 2^{m/2} e^{-z^2/4 + i\pi m/2} U_2 \left(-\frac{1}{2}m \left| \frac{1}{2} \right| \frac{1}{2} z^2 \right) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} z^m e^{-z^2/4}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

$$D_m(z) = 2^{m/2} e^{-z^2/4} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m\right)} F\left(-\frac{1}{2}m \left| \frac{1}{2} \right| \frac{1}{2} z^2\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2z}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}m\right)} F\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \left| \frac{3}{2} \right| \frac{1}{2} z^2\right) \right],$$

где U и F — вырожденные гипергеометрические функции, определенные в таблицах гл. 5. Функции $D_m(z)$, $D_m(-z)$ и $D_{-m-1}(iz)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} D_m(z) + \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} z^2 \right] D_m(z) = 0,$$

где

$$D_m(z) = e^{-i\pi m} D_m(-z) + \frac{V\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-m)} e^{-i\pi(m+1)/2} D_{-m-1}(iz),$$

$$D_{m+1}(z) - z D_m(z) + m D_{m-1}(z) = 0,$$

$$\frac{d}{dz} D_m(z) + \frac{1}{2} z D_m(z) - m D_{m-1}(z) = 0,$$

$$\frac{d}{dz} D_m(z) - \frac{1}{2} z D_m(z) + D_{m+1}(z) = 0,$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{4}u^2} u^{m-1} D_m(u) du = 2^{-m/2} \Gamma(m) \cos\left(\frac{1}{4}m\pi\right), \quad \operatorname{Re} m > 0,$$

$$D_m(ax + by) = e^{\frac{1}{4}(bx - ay)^2} \left[\frac{a}{V a^2 + b^2} \right]^m \times \\ \times \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)n!} D_{m-n}(V a^2 + b^2 x) D_n(V a^2 + b^2 y) \left(\frac{b}{a} \right)^n.$$

Для целых m

$$D_m(z) = (-1)^m e^{\frac{1}{4}z^2} \left[\frac{d^m}{dz^m} e^{-\frac{1}{2}z^2} \right] = 2^{-\frac{1}{2}m} e^{-\frac{1}{4}z^2} H_m \left(z \sqrt{\frac{1}{2}} \right),$$

$$D_{-m}(z) = e^{\frac{1}{4}z^2} \int_z^\infty du_1 \int_{u_1}^\infty du_2 \dots \int_{u_{m-1}}^\infty du_m e^{-\frac{1}{2}u_m^2},$$

$$D_0(z) = e^{-\frac{1}{4}z^2}, \quad D_{-1}(z) = e^{\frac{1}{4}z^2} \int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Уравнение для одного из множителей при разделении переменных в уравнении Гельмгольца в параболических координатах имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [(2m+1)i + x^2]y = 0, \quad x = \lambda \sqrt{k},$$

и его решениями служат $D_m(x\sqrt{2i})$ и $D_{-m-1}(x\sqrt{-2i})$. Уравнение для второго множителя имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [-(2m+1)i + x^2]y = 0, \quad x = \mu \sqrt{k},$$

и решениями служат $D_m(x\sqrt{-2i})$ и $D_{-m-1}(x\sqrt{2i})$.

Эти решения связаны между собою следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} D_m(x\sqrt{2i}) &= \frac{\Gamma(m+1)}{V2\pi} \left[e^{\frac{1}{2}im\pi} D_{-m-1}(-x\sqrt{-2i}) + e^{-\frac{1}{2}im\pi} D_{-m-1}(x\sqrt{-2i}) \right] = \\ &= e^{-i\pi m} D_m(-x\sqrt{2i}) + \frac{V2\pi}{\Gamma(-m)} e^{-\frac{1}{2}i\pi(m+1)} D_{-m-1}(-x\sqrt{-2i}) = \\ &= e^{i\pi m} D_m(-x\sqrt{2i}) + \frac{V2\pi}{\Gamma(-m)} e^{\frac{1}{2}i\pi(m+1)} D_{-m-1}(x\sqrt{-2i}). \end{aligned}$$

$$\text{Вронскиан } \Delta [D_m(x\sqrt{2i}), D_{-m-1}(x\sqrt{-2i})] = i^{-m}/\sqrt{2i}.$$

Для внешних задач m целое и тогда

$$\begin{aligned} D_m(x\sqrt{2i}) &= (-1)^m D_m(-x\sqrt{2i}), \\ D_m(-x\sqrt{-2i}) &= (-1)^m D_m(x\sqrt{-2i}), \\ D_{-m-1}(-x\sqrt{2i}) &= -(-1)^m D_{-m-1}(x\sqrt{2i}) + \sqrt{2\pi} \left(\frac{im}{m!} \right) D_m(x\sqrt{-2i}), \\ D_{-m-1}(-x\sqrt{-2i}) &= -(-1)^m D_{-m-1}(x\sqrt{-2i}) + \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{im m!} \right) D_m(x\sqrt{2i}). \end{aligned}$$

Теоремы сложения.

$$\begin{aligned} i\pi H_0^{(1)}(\Omega) &= \frac{V8\pi}{i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} D_m(u\sqrt{-2i}) \times \\ &\quad \times D_m(v\sqrt{-2i}) \left\{ \begin{array}{l} D_m(x\sqrt{2i}) D_{-m-1}(y\sqrt{-2i}), \quad y > x, \\ D_m(y\sqrt{2i}) D_{-m-1}(x\sqrt{-2i}), \quad x > y, \end{array} \right. \\ 4\Omega^2 &= (u^2 + v^2 + x^2 + y^2)^2 - 4(uv + xy)^2 = (u^2 - v^2 - x^2 + y^2)^2 + 4(ux - vy)^2, \\ e^{i(\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi)^2} &= e^{\frac{1}{2}i(\lambda^2 + \mu^2)} \sec \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \operatorname{tg}^n \varphi}{n!} D_n(\lambda\sqrt{-2i}) D_n(\mu\sqrt{2i}). \end{aligned}$$

Для внутренних задач m комплексное, и мы применяем решения

$$\begin{aligned} H_e(a, x) &= e^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia \middle| \frac{1}{2} \middle| ix^2\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{24}(a^2 - 2)x^4 - \frac{1}{720}(a^3 - 14a)x^6 + \dots = \\ &= \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\frac{1}{2}x} \left[J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{3}{2}aJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{7}{8}a^2J_{\frac{7}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \dots \right] = \\ &= \frac{2^{\frac{5}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|} \operatorname{Re} \left[e^{\frac{1}{4}i\pi + i\sigma(a) + \frac{1}{4}ia \ln 2} D_{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}ia}(x\sqrt{2i}) \right], \end{aligned}$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right) = \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right) \right| e^{i\sigma(a)},$$

и

$$\begin{aligned} H_o(a, x) &= xe^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia \middle| \frac{3}{2} \middle| ix^2\right) = \\ &= x - \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{120}(a^2 - 6)x^5 - \frac{1}{5040}(a^3 - 26a)x^7 + \dots = \\ &= \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \sqrt{2x} \left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{5}{6}aJ_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{3}{8}a^2J_{\frac{9}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \dots \right] = \\ &= -\frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi a}}{2^{\frac{3}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|} \operatorname{Re} \left[e^{i\tau(a) + \frac{1}{4}ia \ln 2} D_{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}ia}(x\sqrt{2i}) \right], \end{aligned}$$

где

$$\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right) = \left| \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right) \right| e^{i\tau(a)}.$$

Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a + x^2)y = 0.$$

Их асимптотические разложения при действительных x и a и при $x \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} H_e(a, x) &\simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{8}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}} \cos \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a \ln x - \frac{1}{8}\pi - \sigma(a) \right], \\ H_o(a, x) &\simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{1}{8}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}} \cos \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a \ln x - \frac{3}{8}\pi - \tau(a) \right]. \end{aligned}$$

Функции Матье

(См. стр. 52) тома I и 383, а также табл. XVI, XVII Приложения.)

Эти функции являются решениями уравнения Матье

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + [b - h^2 \cos^2 \varphi]y = 0,$$

или

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (h^2 z^2 - b) y = 0$$

при $z = \cos \varphi$.

Собственные функции. Периодические по φ решения, пригодные для действительных φ .

Решения, четные относительно $\varphi = 0$; $b = be_{2m}$ или be_{2m+1} .

$$Se_{2m}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos(2n\varphi), \quad \sum_n B_{2n} = 1,$$

$$Se_{2m+1}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \cos[(2n+1)\varphi], \quad \sum_n B_{2n+1} = 1.$$

Если необходимо подчеркнуть, что это коэффициенты данных (четных) рядов, то их обозначают $B_n^e(h, m)$.

$$\int_0^{2\pi} [Se_m]^2 d\varphi = M_m^e - \text{нормирующая постоянная.}$$

$$Se_m(h, 1) = 1, \quad [dSe_m/d\varphi]_{\varphi=0} = 0, \quad Se_m(0, \cos \varphi) = \cos(m\varphi),$$

$$Se_{2m}(h, 0) = \sum_n (-1)^n B_{2n}, \quad Se'_{2m}(h, 0) = Se_{2m+1}(h, 0) = 0$$

$$\left[\frac{d}{d\varphi} Se_{2m+1}(h, \cos \varphi) \right]_{\varphi=\pi/2} = Se'_{2m+1}(h, 0) = \sum_n (-1)^{n-1} (2n+1) B_{2n+1}.$$

Решения, нечетные относительно $\varphi = 0$; $b = bo_{2m}$ или bo_{2m+1} .

$$So_{2m}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sin(2n\varphi), \quad \sum_n (2n) B_{2n} = 1,$$

$$So_{2m+1}(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin[(2n+1)\varphi], \quad \sum_n (2n+1) B_{2n+1} = 1.$$

Если необходимо подчеркнуть, что это коэффициенты данных (нечетных) рядов, то их обозначают $B_n^o(h, m)$.

$$\int_0^{2\pi} [So_m]^2 d\varphi = M_m^o - \text{нормирующая постоянная.}$$

$$So_m(h, 1) = 0, \quad \left[\frac{dSo_m}{d\varphi} \right]_{\varphi=0} = 1, \quad So_m(0, \cos \varphi) = \sin(m\varphi),$$

$$So'_{2m}(h, 0) = \sum_n (-1)^n (2n) B_{2n}, \quad So_{2m}(h, 0) = 0,$$

$$So_{2m+1}(h, 0) = \sum_n (-1)^n B_{2n+1}, \quad So'_{2m+1}(h, 0) = 0.$$

Соответствующие радиальные решения при $\mu = i\varphi$ и при значениях B и b , соответствующих угловым функциям Se , So .

Четные функции:

$$Je_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{ch} \mu) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^m B_0 \sqrt{\frac{1}{2} \pi}}{Se_{2m}(h, 0)} Se_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \frac{(-1)^m}{Se_{2m}(h, 0)} \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{sh} \mu) = \\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{2} \pi} / B_0 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_n \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) J_n \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) \simeq \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \cos \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Je_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu) = \\
&= \frac{(-1)^{m+1} h B_1}{Se'_{2m+1}(h, 0)} \sqrt{\frac{1}{8} \pi} Se_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\
&= \frac{(-1)^m \sqrt{\frac{1}{2} \pi}}{Se'_{2m+1}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{sh} \mu) = \\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{2} \pi} / B_1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) + \right. \\
&\quad \left. + J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) J_n \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) \right] \simeq \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \cos \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{3}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Значения функций и производных при $\mu = 0$:

$$\begin{aligned}
Je_{2m}(h, 1) &= \sqrt{\frac{1}{2} \pi} (-1)^m \frac{B_0}{Se_{2m}(h, 0)}, \\
Je_{2m+1}(h, 1) &= \frac{1}{2} h \sqrt{\frac{1}{2} \pi} (-1)^m \frac{B_1}{Se'_{2m+1}(h, 0)}, \quad \left[\frac{dJe_m}{d\mu} \right]_{\mu=0} = 0.
\end{aligned}$$

Нечетные функции:

$$\begin{aligned}
Jo_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \operatorname{th} \mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-m} 2n B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{ch} \mu) = \\
&= \frac{-i(-1)^m (h^2 B_2 / 4) \sqrt{\frac{1}{2} \pi}}{So'_{2m}(h, 0)} So_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\
&= \frac{(-1)^m \operatorname{cth} \mu}{So'_{2m}(h, 0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} 2n B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{sh} \mu) = \\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{2} \pi} / B_2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} \left[J_{n-1} \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) - \right. \\
&\quad \left. - J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) J_{n-1} \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) \right] \simeq \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \cos \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{o_{2m+1}}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \operatorname{th} \mu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} (2n+1) B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu) = \\
 &= \frac{-i(-1)^m B_1 h}{S_{o_{2m+1}}(h, 0)} \sqrt{\frac{\pi}{8}} S_{o_{2m+1}}(h, \operatorname{ch} \mu) = \\
 &= \frac{(-1)^m}{S_{o_{2m+1}}(h, 0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{sh} \mu) = \\
 &= \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \pi / B_1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) J_n \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) \right] \simeq \\
 &\simeq_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \cos \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{3}{2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

где штрих в Se' и So' означает дифференцирование по φ .

Значения функций и производных при $\mu=0$: $J_{o_m}(h, 1)=0$,

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{dJ_{o_{2m}}}{d\mu} \right]_{\mu=0} &= \frac{1}{4} h^2 (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B_2}{So'_{2m}(h, 0)}, \\
 \left[\frac{dJ_{o_{2m+1}}}{d\mu} \right]_{\mu=0} &= \frac{1}{2} h (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B_1}{So_{2m+1}(h, 0)}.
 \end{aligned}$$

Вторые решения для тех же значений b . Второе решение для угловых функций можно получить, подставляя $\mu=i\varphi$ в последующие формулы, если сходимость ряда это допускает.

$$\begin{aligned}
 Ne_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_{2n}(h \operatorname{ch} \mu) = \\
 &= \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \pi / B_0 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} N_n \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) J_n \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) \simeq \\
 &\simeq_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \sin \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right]. \\
 Ne_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) &= \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} N_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu) = \\
 &= \frac{1}{B_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) N_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + J_{n+1} \left(\frac{1}{2} h e^{-\mu} \right) N_n \left(\frac{1}{2} h e^{\mu} \right) \right] \simeq_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \sin \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{3}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Вронскиан $\Delta(Je_m, Ne_m) = 1$.

Производная при $\mu=0$ $\left[\frac{dNe_m}{d\mu} \right]_{\mu=0} = \frac{1}{Je_m(h, 1)}$.

Значения при $\mu = 0$:

$$Ne_{2m}(h, 1) = \frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} J_n\left(\frac{1}{2} h\right) N_n\left(\frac{1}{2} h\right) B_{2n},$$

$$Ne_{2m+1}(h, 1) = \frac{1}{B_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n\left(\frac{1}{2} h\right) N_{n+1}\left(\frac{1}{2} h\right) + \right. \\ \left. + J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h\right) N_n\left(\frac{1}{2} h\right) \right],$$

$$No_{2m}(h, \operatorname{ch} \mu) = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \operatorname{th} \mu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} 2n B_{2n} N_{2n}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ = \left(\sqrt{\frac{1}{2} \pi} / B_2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} \left[J_{n-1}\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) N_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) - \right. \\ \left. - J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) N_{n-1}\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) \right] \simeq \\ \simeq_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \sin \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$No_{2m+1}(h, \operatorname{ch} \mu) = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \operatorname{th} \mu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} (2n+1) B_{2n+1} N_{2n+1}(h \operatorname{ch} \mu) = \\ = \left(\sqrt{\frac{1}{2} \pi} / B_1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) N_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) - \right. \\ \left. - J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h e^{-\mu}\right) N_n\left(\frac{1}{2} h e^{\mu}\right) \right] \simeq \\ \simeq_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch} \mu}} \sin \left[h \operatorname{ch} \mu - \frac{1}{2} \pi \left(2m + \frac{3}{2} \right) \right].$$

Вронскиан $\Delta(Jo_m, No_m) = 1$.

Значение при $\mu = 0$: $No_m(h, 1) = -1 / \left[\frac{dJo_m}{d\mu} \right]_{\mu=0}$.

Производные при $\mu = 0$:

$$No'_{2m}(h, 1) = \left(\sqrt{\frac{1}{2} \pi} / B_2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-m} 2n B_{2n} \left[2J_n\left(\frac{1}{2} h\right) N_n\left(\frac{1}{2} h\right) - \right. \\ \left. - J_{n-1}\left(\frac{1}{2} h\right) N_{n+1}\left(\frac{1}{2} h\right) - J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h\right) N_{n-1}\left(\frac{1}{2} h\right) \right], \\ No'_{2m+1}(h, 1) = \\ = \left(\sqrt{\frac{1}{2} \pi} / B_1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left\{ -(2n+1) \left[J_n\left(\frac{1}{2} h\right) N_{n+1}\left(\frac{1}{2} h\right) + \right. \right. \\ \left. + J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h\right) N_n\left(\frac{1}{2} h\right) \right] + h \left[J_n\left(\frac{1}{2} h\right) N_n\left(\frac{1}{2} h\right) + \right. \\ \left. + J_{n+1}\left(\frac{1}{2} h\right) N_{n+1}\left(\frac{1}{2} h\right) \right] \left. \right\}.$$

Разложения в ряды [см. (11.2.93)].

$$i\pi H_0^{(1)}(kR) = 4\pi i \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{M_m^e} Se_m(h, \cos \vartheta_0) Se_m(h, \cos \vartheta) \times \right. \\ \times \left\{ \begin{aligned} &Je_m(h, \operatorname{ch} \mu_0) He_m(h, \operatorname{ch} \mu), \quad \mu > \mu_0, \\ &Je_m(h, \operatorname{ch} \mu) He_m(h, \operatorname{ch} \mu_0), \quad \mu < \mu_0, \end{aligned} \right. + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{M_m^o} So_m(h, \cos \vartheta_0) So_m(h, \cos \vartheta) \times \\ \times \left\{ \begin{aligned} &Jo_m(h, \operatorname{ch} \mu_0) Ho_m(h, \operatorname{ch} \mu), \quad \mu > \mu_0, \\ &Jo_m(h, \operatorname{ch} \mu) Ho_m(h, \operatorname{ch} \mu_0), \quad \mu < \mu_0, \end{aligned} \right\} \Big]$$

где

$$R^2 = \left(\frac{1}{2} a \right)^2 [\operatorname{ch}^2 \mu + \operatorname{ch}^2 \mu_0 - \sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0 - \\ - 2 \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 \cos \vartheta \cos \vartheta_0 - 2 \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \mu_0 \sin \vartheta \sin \vartheta_0], \quad h = \frac{1}{2} ak;$$

$$\exp[ih(\operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos u + \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin u)] =$$

$$= \sqrt{8\pi} \sum_m i^m \left[\frac{1}{M_m^e} Se_m(h, \cos u) Se_m(h, \cos \vartheta) Je_m(h, \operatorname{ch} \mu) + \right. \\ \left. + \frac{1}{M_m^o} So_m(h, \cos u) So_m(h, \cos \vartheta) Jo_m(h, \operatorname{ch} \mu) \right].$$

Амплитуды и фазовые углы [см. (11.2.100)].

$$Je_m(h, 1) = C_m^e \sin \delta_m^e, \quad Ne_m(h, 1) = -C_m^e \cos \delta_m^e, \quad He_m(h, 1) = -iC_m^e e^{i\delta_m^e},$$

$$Je'_m(h, 1) = 0, \quad Ne'_m(h, 1) = 1/Je_m(h, 1), \quad He'_m(h, 1) = i/Je_m(h, 1),$$

$$Jo_m(h, 1) = 0, \quad No_m(h, 1) = -1/Jo'_m(h, 1), \quad Ho_m(h, 1) = -i/Jo'_m(h, 1),$$

$$Jo'_m(h, 1) = -C_m^o \sin \delta_m^o, \quad No'_m(h, 1) = C_m^o \cos \delta_m^o, \quad Ho'_m(h, 1) = iC_m^o e^{i\delta_m^o},$$

где штрих означает дифференцирование по μ и

$$He_m = Je_m + iNe_m, \quad Ho_m = Jo_m + iNo_m.$$

Сферические функции Бесселя

(См. стр. 433 и следующие, а также табл. XII и XV Приложения.)

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}; \\ \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{z} \cos \left[z - \frac{1}{2} \pi (n+1) \right], \quad n - \text{целое.}$$

$$n_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{n+\frac{1}{2}}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} -\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{z^{n+1}}; \\ \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{z} \sin \left[z - \frac{1}{2} \pi (n+1) \right], \quad n_n(z) = (-1)^{n+1} j_{-n-1}(z).$$

$$i_n(z) = j_n(z) + in_n(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{z} i^{-n-1} e^{iz}, \quad h_{-n}(z) = i(-1)^{n-1} h_{n-1}(z).$$

$$j_n(z) n_{n-1}(z) - j_{n-1}(z) n_n(z) = \Delta(j_n, n_n) = \frac{1}{z^2},$$

$$j_0(z) = \frac{1}{z} \sin z, \quad n_0(z) = -\frac{1}{z} \cos z, \quad h_0(z) = -\frac{i}{z} e^{iz},$$

$$j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}, \quad n_1(z) = -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z}, \quad h_1(z) = -\frac{z+i}{z^2} e^{iz},$$

$$j_2(z) = \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right) \sin z - \frac{3}{z^2} \cos z, \quad n_2(z) = -\left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right) \cos z - \frac{3}{z^2} \sin z,$$

$$h_2(z) = -\frac{-iz^2 + 3z + 3i}{z^3} e^{iz}, \quad \dots,$$

$$j_n(z) = (-1)^n z^n \left(\frac{d}{z dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right), \quad n_n(z) = -(-1)^n z^n \left(\frac{d}{z dz}\right)^n \left(\frac{\cos z}{z}\right),$$

$$h_n(z) = -i(-1)^n \left(\frac{d}{z dz}\right)^n \left(\frac{e^{iz}}{z}\right).$$

Если $f_n(z)$ — некоторая линейная комбинация $j_n(z)$ и $n_n(z)$ с коэффициентами, не зависящими от n и z , то имеем:

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{df_n}{dz} \right) + \left[1 - \frac{n(n+1)}{z^2} \right] f_n = 0,$$

$$\frac{2n+1}{z} f_n(z) = f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z),$$

$$(2n+1) \frac{d}{dz} f_n(z) = n f_{n-1}(z) - (n+1) f_{n+1}(z),$$

$$\int z^{n+2} f_n(z) dz = z^{n+2} f_{n+1}(z),$$

$$\int z^{1-n} f_n(z) dz = -z^{1-n} f_{n-1}(z),$$

$$\int [f_n(z)]^2 z^2 dz = \frac{1}{2} z^3 [f_n^2(z) - f_{n-1}(z) f_{n+1}(z)],$$

$$\int f_n(z) g_m(z) dz = z^2 \frac{f_{n-1}(z) g_m(z) - f_n(z) g_{m-1}(z)}{(n-m)(n+m+1)} - z \frac{f_n(z) g_m(z)}{n+m+1},$$

$$\int f_n(\alpha x) g_n(\beta x) x^2 dx = \frac{x^2}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta f_n(\alpha x) g_{n-1}(\beta x) - \alpha f_{n-1}(\alpha x) g_n(\beta x)],$$

где $g_m(z)$ — другая линейная комбинация $j_m(z)$ и $n_m(z)$.

Разложения в ряды.

$$\frac{f_m(k \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta})}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta)^{m/2}} =$$

$$= \frac{1}{(krr_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2m+1) T_n^m(\cos \vartheta) j_{n+m}(kr) f_{n+m}(kr_0), \quad r_0 > r > 0.$$

Поскольку $h_0(kR) = \frac{1}{ikR} e^{ikR}$ ($R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta$), то

$$\frac{e^{ikR}}{R} = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) j_n(kr) h_n(kr_0), \quad r_0 > r > 0.$$

Устремляя r_0 к бесконечности и используя асимптотическую формулу для $h_{n+m}(kr_0)$, получаем

$$e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta) j_n(kr) =$$

$$= \frac{1}{(kr)^m} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2m+1) i^m T_n^m(\cos \vartheta) j_{n+m}(kr)$$

Определенные интегралы.

$$j_n(z) = \frac{1}{2i^n} \int_{-1}^1 e^{izt} P_n(t) dt = \int_0^1 J_n(zt) \frac{t^{n+1} dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-at} j_n(bt) t^m dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+m+1)}{2^{n+1} \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{b^n}{(a^2+b^2)^{1/2}(m+n+1)} \times \\ \times F\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+1-m}{2} \middle| \frac{2n+3}{2} \middle| \frac{b^2}{a^2+b^2}\right),$$

$$\int_0^\pi e^{iz \cos \vartheta \cos u} J_m(z \sin \vartheta \sin u) P_n^m(\cos u) \sin u du = 2i^{n-m} P_n^m(\cos \vartheta) j_n(z),$$

$$\int_0^\infty e^{-at} j_n(bt) j_n(ct) t dt = \frac{1}{2bc} Q_n\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right).$$

Другие интегралы можно получить, выражая j_n через $J_{n+\frac{1}{2}}$ и применяя затем формулы стр. 303 и следующих.

Амплитуды и фазовые углы.

$$j_n(z) = D_n \sin \delta_n, \quad n_n(z) = -D_n \cos \delta_n, \quad h_n(z) = -iD_n(z) e^{i\delta_n(z)},$$

$$\frac{dj_n}{dz} = -D'_n \sin \delta'_n, \quad \frac{dh_n}{dz} = iD'_n(z) e^{i\delta'_n(z)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = -\frac{z}{j_n} \frac{d}{dz}(j_n), \quad \operatorname{tg} \beta_n = -\frac{z}{n_n} \frac{d}{dz}(n_n),$$

$$\operatorname{tg} \delta_n = -\frac{j_n}{n_n}, \quad \operatorname{tg} \delta'_n = -\frac{j'_n}{n'_n} = \operatorname{tg} \delta_n \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\operatorname{tg} \beta_n},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \operatorname{tg} \delta_n \frac{\cos \beta_n}{\cos \alpha_n} = \operatorname{tg} \delta'_n \frac{\sin \beta_n}{\sin \alpha_n},$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz}(z j_n) = -E_n \sin \varepsilon_n, \quad \frac{1}{z} \frac{d}{dz}(z h_n) = iE_n e^{i\varepsilon_n},$$

$$D_0(z) = \frac{1}{z}, \quad \delta_0(z) = z, \quad E_0(z) = \frac{1}{z}, \quad \varepsilon_0(z) = z - \frac{1}{2}\pi,$$

$$D'_0(z) = D_1(z), \quad \delta'_0(z) = \delta_1(z), \quad \sin(\delta_n - \delta'_n) = 1/z^2 D_n D'_n.$$

Асимптотические значения.

При $z \gg n$ и $z \gg 1$: $D_n(z) \simeq \frac{1}{z} \simeq D'_n(z),$

$$\delta_n(z) \simeq z - \frac{1}{2}n\pi, \quad \delta'_n(z) \simeq z - \frac{1}{2}\pi(n+1),$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n \simeq z \operatorname{tg} \left[z - \frac{1}{2}\pi(n+1) \right], \quad \operatorname{tg} \beta_n \simeq -z \operatorname{ctg} \left[z - \frac{1}{2}\pi(n+1) \right].$$

При $z \ll |2n-1|$:

$$D_n \simeq \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{z^{n+1}}, \quad D'_n \simeq \frac{n+1}{z} D_n, \quad \delta_0 \simeq z, \quad \delta'_0 \simeq \frac{1}{3}z^3;$$

$$\delta_n \simeq \frac{z^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}, \quad \delta'_n \simeq -\frac{n}{n+1} \delta_n, \quad n > 0,$$

$$\alpha_0 \simeq \frac{1}{3} z^2; \quad \operatorname{tg} \beta_0 \simeq 1 + z^2; \quad \epsilon_{n-}' \simeq -\frac{n+1}{n} \delta_n, \quad n > 0;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n \simeq -n, \quad \operatorname{tg} \beta_n \simeq (n+1); \quad E_n \simeq \left(\frac{n}{z}\right) D_n, \quad n > 0.$$

Корни. β_{ln} — n -й корень уравнения $j_l(\pi\beta) = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000
$l=1$	1,4303	2,4590	3,4709	4,4775	5,4816
$l=2$	1,8346	2,8950	3,9226	4,9385	5,9489
$l=3$	2,2243	3,3159	4,3602	5,3870	6,4050
$l=4$	2,6046	3,7258	4,7873	5,8255	6,8518

α_{ln} — n -й корень уравнения $[dj_l(\pi x)/dx] = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	0	1,4303	2,4590	3,4709	4,4775
$l=1$	0,6626	1,8909	2,9303	3,9485	4,9591
$l=2$	1,0638	2,3205	3,3785	4,4074	5,4250
$l=3$	1,4369	2,7323	3,8111	4,8525	5,8786
$l=4$	1,7974	3,1323	4,2321	5,2869	6,3224

γ_{ln} — n -й корень уравнения $(d/d\gamma)[\pi\gamma j_l(\pi\gamma)] = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	0,5000	1,5000	2,5000	3,5000	4,5000
$l=1$	0,8734	1,9470	2,9656	3,9744	4,9796
$l=2$	1,2319	2,3692	3,4101	4,4311	5,4440
$l=3$	1,5831	2,7762	3,8400	4,8745	5,8965
$l=4$	1,9296	3,1728	4,2591	5,3076	6,3393

Сфероидальные функции

(См. стр. 466 и следующие.)

Угловые функции. Функция

$$S_{ml}(h, z) = \sum_n' d_n(h | m, l) P_{n+m}^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \sum_n' d_n T_n^m(z)$$

(штрих означает, что при четном $l-m$ в сумму входят только члены с четными n , а при нечетном $l-m$ только с нечетными n) является

решением уравнения

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dS}{dz} \right] + \left[A_{ml}(h) - h^2 z^2 - \frac{m^2}{1-z^2} \right] S = 0,$$

которое при различных допустимых значениях постоянной разделения A_{ml} ($l = m, m+1, m+2, \dots$), где $A_{ml} < A_{m, l+1}$, конечно и непрерывно в промежутке $-1 \leq z \leq 1$. Мы требуем, чтобы при $z \rightarrow 0$

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}m} S_{ml}(h, z) \simeq \frac{(l+m)!}{(l-m)! 2^m m!} = T_{l-m}^m(1),$$

так что

$$\sum_n' \frac{(n+2m)!}{n!} d_n(h|m, l) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

Функции S образуют ортогональную систему собственных функций. Нормирующая постоянная равна

$$\int_{-1}^1 |S_{ml}|^2 dz = \sum_n' [d_n(h|m, l)]^2 \frac{2}{2n+2m+1} \frac{(n+2m)!}{n!} = \Lambda_{ml}(h).$$

Значения для отдельных значений z и h :

$$S_{ml}(h, z) \simeq \frac{(l+m)!}{2^m m! (l-m)!} (1-z^2)^{\frac{1}{2}m}, \quad z \rightarrow 1.$$

$$S_{ml}(h, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+2n-1)}{2^n (n)!} d_{2n}, \quad l-m-\text{четное}.$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dz} S_{ml}(h, z) \right]_{z=0} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+2n+1)}{2^n (n)!} d_{2n+1}, \quad l-m-\text{нечетное}. \end{aligned}$$

Если $h \rightarrow 0$, то $S_{ml}(h, z) \simeq P_l^m(z)$, $A_{ml} \simeq l(l+1)$.

Радиальные функции. Решения первого рода, конечные при $z = \pm 1$.

$$\begin{aligned} j_{e_{ml}}(h, z) &= \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{z^2-1}{z^2} \right)^{m/2} \sum_n' i^{n+m-l} \frac{(n+2m)!}{n!} d_n(h|ml) j_{n+m}(hz) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, z) \simeq \frac{1}{hz} \cos \left[hz - \frac{1}{2} \pi (l+1) \right], \quad hz \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь d — те же коэффициенты, что и в разложениях функций $S_{ml}(h, z)$, и

$$\lambda_{ml}(h) = \frac{i^l}{d_0(h|ml)} \frac{2m+1}{(2h)^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} S_{ml}(h, 0) \quad \text{при } l = m, m+2, m+4, \dots,$$

$$\lambda_{ml}(h) = \frac{2i^{l-1}}{d_1(h|ml)} \frac{(2m+2)(2m+3)}{(2h)^{m+1} m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \left[\frac{d}{dz} S_{ml}(h, z) \right]_{z=0} \quad \text{при } l = m+1, m+3, \dots,$$

причем $j_m(hz)$ — сферическая функция Бесселя первого рода.

Решения второго рода:

$$\begin{aligned} ne_{ml}(h, z) &= \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{z^2-1}{z^2} \right)^{m/2} \sum_n' i^{n+m-l} \frac{(n+2m)!}{n!} d_n(h|ml) n_{n+m}(hz) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{hz} \sin \left[hz - \frac{1}{2} \pi (l+1) \right], \quad hz \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\Delta(je, ne) = je_{ml} \frac{d}{dz} ne_{ml} - ne_{ml} \frac{d}{dz} je_{ml} = \frac{1}{h(z^2-1)}.$$

Решения третьего рода:

$$he_{ml}(h, z) = je_{ml}(h, z) + ine_{ml}(h, z) \simeq \frac{i^{-l-1}}{hz} e^{ihz}, \quad hz \rightarrow \infty,$$

$$he_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) = i^l \left[j_0(u) h_0(v) - \left(\frac{4}{5} \frac{d_2}{d_0} - 1 \right) j_1(u) h_1(v) + \right. \\ \left. + \left(\frac{16}{21} \frac{d_4}{d_0} - \frac{4}{7} \frac{d_2}{d_0} + 1 \right) j_2(u) h_2(v) - \dots \right] \quad \text{при } l = 0, 2, \dots,$$

$$he_{0l}(h, \operatorname{ch} \mu) = i^{-1} \frac{12 \operatorname{ch} \mu}{h} \left[j_1(u) h_1(v) - \left(\frac{12}{7} \frac{d_3}{d_1} + 1 \right) j_2(u) h_2(v) + \right. \\ \left. + \left(\frac{80}{33} \frac{d_5}{d_1} + \frac{4}{3} \frac{d_3}{d_1} + 2 \right) j_3(u) h_3(v) - \dots \right] \quad \text{при } l = 1, 3, \dots,$$

$$he_{1l}(h, \operatorname{ch} \mu) = i^{l-1} \frac{12 \operatorname{sh} \mu}{h} \left[j_1(u) h_1(v) - \left(\frac{24}{5} \frac{d_2}{d_0} - 3 \right) j_2(u) h_2(v) + \right. \\ \left. + \left(\frac{80}{11} \frac{d_4}{d_0} - 8 \frac{d_2}{d_0} + 6 \right) j_3(u) h_3(v) - \dots \right] \quad \text{при } l = 1, 3, \dots$$

$$\text{где } u = \frac{1}{2} h e^{-\mu}, \quad v = \frac{1}{2} h e^{\mu}.$$

Теоремы сложения.

$$\frac{e^{ikR}}{R} = 2ik \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m}{\Lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) S_{ml}(h, \cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu_0) he_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu), & \mu > \mu_0, \\ je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu) he_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu_0), & \mu < \mu_0, \end{cases}$$

где

$$kR = h^2 [\operatorname{ch}^2 \mu + \operatorname{ch}^2 \mu_0 - \sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0 - \\ - 2 \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} \mu_0 \cos \vartheta \cos \vartheta_0 - 2 \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \mu_0 \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)],$$

$$e^{ik \cdot r} = 2 \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m i^l}{\Lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, \cos \vartheta_0) S_{ml}(h, \cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] je_{ml}(h, \operatorname{ch} \mu),$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = h [\operatorname{ch} \mu \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \operatorname{sh} \mu \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)].$$

Для вытянутых сфероидальных координат, в которых $\mu = 0$ является отрезком $x = y = 0$, $-a/2 \leq z \leq a/2$, для получения угловых и радиальных решений полагаем соответственно $h = ka/2$ и $z = \cos \vartheta$ или $z = \operatorname{ch} \mu$. Для сплюснутых сфероидальных координат, в которых $\rho = 0$ является круглым диском радиуса b , лежащим в плоскости x, y , с центром в начале координат, полагаем $h = ikb$ и $z = \cos \vartheta$ для угловых функций и $z = -i \operatorname{sh} \rho$ ($\mu = \rho - i\pi/2$) для радиальных функций.

Краткая таблица преобразований Лапласа

Функции $f(t)$ и $F(\omega)$ ($\omega = ip$), удовлетворяющие условиям сходимости, указанным на стр. 320, связаны между собой соотношениями

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega,$$

в которых ε действительно и положительно.

Оригинал $f(t)$	Преобразование Лапласа $F(p) \quad (p = -i\omega)$
$Af(t)$	$AF(p)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F(p/a)$
$d f/dt$	$pF(p) - f(0)$
$d^2 f/dt^2$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(t) dt$	$(1/p) F(p)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n (d^n F/dp^n)$
$(1/t) f(t)$	$\int_p^\infty F(q) dq$
$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$F_1(p) F_2(p)$
$\begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & t < a, \end{cases}$	$a^{-ap} F(p)$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$\frac{1}{V\pi t} \int_0^\infty e^{-u^2/4t} f(u) du$	$\frac{1}{V\overline{p}} F(\sqrt{p})$
$t^{\nu/2} \int_0^\infty u^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{ut}) f(u) du$	$p^{-\nu-1} F(1/p), \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2},$
$\int_0^\infty \frac{t^u f(u)}{\Gamma(u+1)} du$	$(1/p) F(\ln p)$

Если $f(t)$ — периодическая функция с периодом a , $f(t+a) = f(t)$ при $t > 0$, и $F_0(p) = \int_0^a f(t) e^{-pt} dt$, то преобразование Лапласа функции $f(t)$ имеет вид

$$\frac{F_0(p)}{1 - e^{-ap}}.$$

Преобразования Лапласа некоторых конкретных функций. Пусть функция $f(t)$ равна нулю при $t < 0$ и равна указанной ниже функции при $t \geq 0$.

$f(t)$	$F(p)$
$t^\nu, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\Gamma(\nu+1)/p^{\nu+1}$
$\sin(at)$	$a/(p^2 + a^2)$
$\cos(at)$	$p/(p^2 + a^2)$

$f(t)$	$F(p)$
$e^{-bt} \sin(at + \varphi)$	$\frac{a \cos \varphi + (p+b) \sin \varphi}{(p+b)^2 + a^2}$
$(1/t) \sin(at)$	$\arctg(a/p)$
$t^\nu \sin(at)$	$\frac{1}{2i} \frac{\Gamma(\nu+1)}{(p^2+a^2)^{\nu+1}} [(p+ia)^{\nu+1} - (p-ia)^{\nu+1}]$
$t^\nu \cos(at)$	$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu+1)}{(p^2+a^2)^{\nu+1}} [(p+ia)^{\nu+1} + (p-ia)^{\nu+1}]$
$e^{-bt} [A \operatorname{sh}(at) + B \operatorname{ch}(at)]$	$\frac{aA}{(p+b)^2 - a^2} + \frac{B(p+b)}{(p+b)^2 - a^2}$
$t^\nu e^{at}, \operatorname{Re} \nu > -1,$	$\Gamma(\nu+1)/(p-a)^{\nu+1}$
$F(\alpha \gamma t)$	$\frac{1}{p} F\left(\alpha, 1 \gamma \frac{1}{p}\right)$
(вырожденная гипергеометрическая функция)	(гипергеометрическая функция)
$\begin{cases} (t^2 - a^2)^\nu, & t > a, \\ 0, & t < a, \end{cases} \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2},$	$i \sqrt{\frac{\pi a}{2p}} \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{(ap)^\nu} e^{\frac{1}{2}\pi i(\nu+\frac{1}{2})} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}(iap)$
$\begin{cases} (2at - t^2)^{n-\frac{1}{2}}, & 0 < t < 2a, \\ 0, & t > 2a, \end{cases}$	$\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \times$
$n > 0,$	$\times 2^n (a/p)^n e^{-ap - \frac{1}{2}\pi i n} J_n(iap)$
$e^{-bt} J_\nu(at), \operatorname{Re} \nu > -1,$	$\frac{a^\nu}{V(p+b)^2 + a^2} \times$
$\begin{cases} J_0(a \sqrt{t^2 - b^2}), & t > b, \\ 0, & t < b, \end{cases}$	$\times [p+b + \sqrt{(p+b)^2 + a^2}]^{-\nu}$
$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t > a, \end{cases} = \int_{-\infty}^{t-a} \delta(t) dt$	$(1/p) e^{-ap}$
$\delta(t-a) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta} [u(t-a) - \right.$	e^{-ap}
$\left. - u(t-a-\Delta)] \right\}$	
$\frac{1}{2} [e^{b\delta}(t+a) - e^{-b\delta}(t-a)]$	$\operatorname{sh}(ap+b)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-na)$	$1/(1-e^{-ap})$
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-na)$	$1/(1+e^{-ap})$

$f(t)$	$F(p)$
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t-na)$	$1/p(1+e^{-ap})$
$2 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-a-2na)$	$1/\text{sh}(ap)$
$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-a-2na)$	$1/\text{ch}(ap)$
$\delta(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta(t-2na)$	$\text{th}(ap)$
$u(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u(t-2na)$	$(1/p) \text{th}(ap)$
$2 \sum_{n=0}^{\infty} f(t-2na-a) u(t-a-2na)$	$F(p)/\text{sh}(ap)$
$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(t-2na-a) \times$ $\times u(t-a-2na)$	$F(p)/\text{ch}(ap)$
$f(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(t-2na) u(t-2na)$	$F(p) \text{th}(ap)$
$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)b} \delta(t-a-2na)$	$1/\text{sh}(ap+b)$
$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)b} \delta(t-c-a-2na)$	$e^{-cp}/\text{sh}(ap+b)$
$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)b} [e^{d} \delta(t+c-a-2na) -$ $- e^{-d} \delta(t-c-a-2na)]$	$\text{sh}(cp+d)/\text{sh}(ap+b)$

Для $q = \sqrt{p/a^2}$ и

$$\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-w^2} dw \simeq \begin{cases} 1 - (2z/\sqrt{\pi}), & z \rightarrow 0, \\ (e^{-z^2}/z\sqrt{\pi}), & z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

$(x/2a\sqrt{\pi t^3}) e^{-x^2/4a^2t}$	e^{-qx}
$(a/\sqrt{\pi t}) e^{-x^2/4a^2t}$	$(1/q) e^{-qx}$
$\text{erfc}(x/2a\sqrt{t})$	$(1/p) e^{-qx}$
$(t + \frac{x^2}{2a^2}) \text{erfc}(\frac{x}{2a\sqrt{t}}) -$ $-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-x^2/4a^2t}$	$(1/p^2) e^{-qx}$

$f(t)$	$F(p)$
$(a/\sqrt{\pi t}) e^{-x^2/4at} -$ $- ha^2 e^{hx+a^2h^2t} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)$ $a^2 e^{hx+a^2h^2t} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)$ $(1/h) \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t}) -$ $-\frac{1}{h} e^{hx+a^2h^2t} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)$	$\frac{e^{-qx}}{q+h}$ $\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$ $\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}$

ЛИТЕРАТУРА

Работы, в которых рассматривается общая задача о решении уравнения Гельмгольца и волнового уравнения:

- Вебстер А. и Сёге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1934.
 Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
 Зоммерфельд А., Уравнения в частных производных математической физики, Издат. Иностран. лит., М., 1951.
 Купрадзэ В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
 Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, изд. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
 Морз Ф., Колебания и звук, Гостехиздат, М., 1949.
 Рэлей Дж. В., Теория звука, Гостехиздат, М., 1955.
 Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957.
 Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
 Франк П. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1937.
 Baker В. В. and Copson E. T., Mathematical Theory of Huygen's Principle, Oxford—New York, 1939.
 Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge—New York, 1932.
 Coulson C. A., Waves, a Mathematical Account of the Common Types of Wave Motion, Edinburgh, 1941.
 Hadamard J. S., Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique, Paris, 1903.
 Jeffreys H. and Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, Cambridge—New York, 1946.
 Pöckels F., Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta^2 u + k^2 u = 0$, Leipzig, 1891.
 Slater J. C. and Frank N. H., Introduction to Theoretical Physics, New York, 1933.

Работы, в которых рассматриваются специальные функции, использованные в этой главе, или же специальные методы решения волнового уравнения:

- Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, Издат. иностран. лит., М., 1949.
 Карслоу Х. и Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, Гостехиздат, М., 1948.
 Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, изд. 5, Гостехиздат, М., 1955.
 Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
 Лурье А. Н., Операционное исчисление, Гостехиздат, М., 1950.
 Мак-Нахлан Н. В., Теория и приложение функций Матье, Издат. иностран. лит., М., 1953.
 Микусинский Я., Операторное исчисление, Издат. иностран. лит., М., 1956.
 Стрэтт М. Дж. О., Функции Ламо, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков—Киев, 1935.

- Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides, *Z. angew. Math. Mech.*, 23, 47—101 (1943).
- Campbell G. A. and Foster R. M., *Fourier Integrals for Practical Application*, Bell System Techn. Monograph B-584, 1931.
- Churchill R. V., *Modern Operational Mathematics in Engineering*, New York, 1944.
- Doetsch G., *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin, 1937.
- Foldy L. L., Multiple Scattering of Waves, *Phys. Rev.*, 67, 107 (1945).
- Heins A. E. and Feshbach H., The Coupling of Two Acoustical Ducts, *J. Math. Phys.*, 26, 143 (1947).
- Lax M. and Feshbach H., On the Radiation Problem at high Frequencies, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 19, 682 (1947).
- Levine H. and Schwinger J., On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe, *Phys. Rev.*, 73, 383 (1948).
- Levine H. and Schwinger J., On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane, *Phys. Rev.*, 75, 1423 (1949).
- L'achlan N. W., *Bessel Functions for Engineers*, Oxford—New York, 1934.
- Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Hutner R. A., *Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions*, New York, 1941.

Диффузия. Волновая механика

Эта глава содержит смешанный материал: в ней наряду с рассмотрением некоторых дальнейших аспектов теории диффузии и кинетической теории дается обзор методов решения выведенного в § 2.6 простейшего уравнения Шредингера. Эти две темы логически мало связаны между собой, но их нам нужно изучить, прежде чем перейти к рассмотрению векторных полей.

Мы уже рассматривали в гл. 10 некоторые стационарные задачи диффузии, поскольку эти задачи сводятся к решению уравнений Лапласа или Пуассона. В первом параграфе этой главы мы займемся нестационарными задачами диффузии. При этом выявится различие между свойствами решений параболических (см. стр. 644 тома I) и эллиптических (или волновых) уравнений. Во многих интересных задачах кинетической теории уравнение диффузии уже не является достаточно хорошим приближением. В этих случаях нам приходится вычислять функцию распределения, определяющую вероятность нахождения частицы в заданном элементе фазового пространства. Второй параграф этой главы содержит несколько типичных примеров подсчета функций распределения.

Последний параграф главы посвящен основным решениям нерелятивистского волнового уравнения для элементарных частиц, таких, как электрон или протон. Мы не пытаемся дать в этом параграфе исчерпывающее изложение волновой механики; для этого имеются другие руководства. Мы приведем лишь ряд примеров, достаточных для того, чтобы проиллюстрировать наиболее распространенные методы вычислений: расчет уровней энергии в связанных состояниях, исследование стационарного рассеяния частиц силовым полем и несколько случаев задач, содержащих зависимости от времени.

12.1. Решения уравнения диффузии

В § 2.4 было указано на различие между решениями уравнения диффузии

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (12.1.1)$$

(где $a^2 = \kappa/\rho C$, κ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность и C — удельная теплоемкость среды) и решениями волнового уравнения. Первая производная по времени, фигурирующая в уравнении (12.1.1), приводит к необратимости процессов в противоположность процессам обратимым, на которые указывает вторая производная по времени в волновом уравнении. Например, струна длины l , которая до момента $t=0$ удерживалась в покое в положении $\psi_0(x)$, а затем была освобождена, будет совершать колебания, описываемые формулой (c — скорость распространения

колебаний вдоль струны):

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n c t}{l}\right), \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_0(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

С другой стороны, для пластины из теплопроводящего материала толщины l , в которой при $t=0$ температура распределена по закону $\psi_0(x)$ (x — расстояние от одной из граней пластины, отсчитываемое по нормали к этой грани; $x=l$ соответствует второй грани) и грани которой поддерживаются при нулевой температуре, последующее распределение температуры описывается формулой

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right], \\ A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi_0(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \end{aligned} \quad (12.1.2)$$

Множители, зависящие от пространственных координат, в членах этих рядов одинаковы; однако зависимость от времени в последнем случае характеризуется экспоненциальным множителем, в то время как в случае волновой задачи появляются тригонометрические множители. В решении волнового уравнения обращение времени не влияет на характер решения (в приведенном примере решение совершенно не изменится); в решении уравнения диффузии изменение знака времени существенно изменяет решение (в самом деле: решение становится расходящимся при отрицательных значениях времени).

Неустановившийся процесс в случае поверхностного нагрева пластины. Несколько простых примеров в дальнейшем еще больше подчеркнут различие между решениями уравнения диффузии и волнового уравнения. Предположим, что одна грань $x=0$ пластины толщины l поддерживается при нулевой температуре [поскольку к решению уравнения (12.1.1) можно прибавить постоянную, за «нулевую температуру» следует принять некоторую подходящую температуру, не зависящую от времени], а на второй грани $x=l$ поддерживается температура, изменяющаяся по закону

$$\psi_{x=l} = e^{-i\omega t}.$$

Зависимость от времени установившегося решения ψ имеет вид $e^{-i\omega t}$ (истинная температура есть действительная часть ψ), причем пространственно зависящая часть решения должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{i\omega}{a^2} \psi = 0$$

и краевым условиям: $\psi=0$ при $x=0$ и $\psi=e^{-i\omega t}$ при $x=l$. Решением этой задачи является функция

$$\psi(\omega, x) = \frac{\sin[(x/a) \sqrt{i\omega}] \sqrt{i\omega}}{\sin[(l/a) \sqrt{i\omega}] \sqrt{i\omega}} e^{-i\omega t}. \quad (12.1.3)$$

Если ψ — температура, то $-x \operatorname{grad} \psi = \mathbf{J}$ есть поток тепла через единицу площади, так что поток тепла через поверхность $x=0$ будет равен

$$\begin{aligned} J(\omega, 0) &= -\sqrt{i\rho C x \omega} \operatorname{cosec}[(l/a) \sqrt{i\omega}] e^{-i\omega t} = \\ &= -\frac{\sqrt{i\rho C x \omega}}{\sqrt{\sin^2[V(\omega/2) l/a] + \operatorname{sh}^2[V(\omega/2) l/a]}} e^{-i\omega t + \frac{1}{4} i\pi - i\alpha}, \end{aligned} \quad (12.1.4)$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} [\sqrt{(\omega/2)} l/a] \operatorname{th} [\sqrt{(\omega/2)} l/a].$$

Если $\sqrt{(\omega/2)} l/a$ очень мало, то поток тепла велик и совпадает по фазе с температурой. При малых частотах поток тепла успевает стабилизироваться, пока он проходит сквозь пластину, и распределение температуры получается умножением выражения для стационарного потока на медленно меняющийся временной множитель. Для высоких частот $[\sqrt{(\omega/2)} l/a - \text{велико}]$ поток тепла не успевает выравниваться; температура на поверхности $x=l$ изменит знак на противоположный до того, как предыдущий максимум успеет проникнуть достаточно глубоко в плиту, и, таким образом, сквозь плиту распространяется подобие «тепловой волны». Для больших $\sqrt{(\omega/2)} l/a$ амплитуда потока тепла на противоположной грани пластины равна произведению

$$2 \sqrt{\rho C \chi \omega} \exp \left[-\sqrt{(\omega/2)} l/a \right]$$

на амплитуду температуры на нагреваемой грани, а отставание по фазе равно $\sqrt{(\omega/2)} l/a - \pi/4$ радиан. Следовательно, в этом случае наблюдается передача сквозь пластину колебаний тепловой энергии, хотя и связанная с большим затуханием и значительной дисперсией (отставание фазы пропорционально l и аргумент экспоненты может быть записан в виде $i(\sqrt{(\omega/2)}/a)(l - \sqrt{2\omega} at) - i\pi/4$, так что фазовая скорость равна $a\sqrt{2\omega} = \sqrt{2\omega\chi/\rho C}$, т. е. зависит от частоты).

Теперь мы можем применить преобразование Лапласа для вычисления потока тепла через поверхность $x=0$, если поверхности $x=l$ мгновенно сообщается тепловой импульс $\phi(l) = \delta(t)$. В соответствии с (11.1.16) этот поток тепла должен быть равен

$$J_{\delta}(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} J(\omega, 0) d\omega.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, нужно подсчитать вычеты в полюсах $J(\omega, 0)$. При $\omega=0$ полюса нет. Член $\sin[(l/a)\sqrt{i\omega}]$ в знаменателе обращается в нуль при $\omega = -i(\pi na/l)^2$, где n — целое положительное число; дальнейшее исследование показывает, что других особенностей в конечной части плоскости ω нет. Чтобы найти вычеты, положим

$$\omega = -i(\pi na/l)^2 + \varepsilon,$$

откуда

$$\sin[(l/a)\sqrt{i\omega}] \simeq \frac{1}{2} i\varepsilon (-1)^n (l^2/\pi na^2)$$

и таким образом вычет в n -м полюсе равен

$$-(2\chi^2\pi^2n^2/i\rho Cl^3)(-1)^ne^{-(\pi na/l)^2t}.$$

Поскольку все эти полюсы находятся на или под действительной осью ω , поток тепла при отрицательных t оказывается равным нулю (в чем нет ничего неожиданного). Таким образом, поток тепла, исходящий из грани $x=0$, описывается функцией

$$J_{\delta}(t, 0) = \frac{2\pi^2\chi^2}{\rho Cl^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^nn^2 e^{-(\pi na/l)^2t} u(t).$$

Этот ряд сходится при $t > 0$, но при $t=0$ ведет себя плохо. Однако его можно проинтегрировать, чтобы получить поток тепла, исходящий

из грани $x=0$, если грань $x=l$ поддерживается при температуре $T(t)$ $u(t)$. При этом

$$J(t) = u(t) \frac{2\pi^2 x^2}{\rho C l^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \int_0^t T(\tau) e^{-(\pi n a/l)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (12.1.5)$$

Этот ряд удовлетворительно сходится при $t > 0$. В дальнейшем мы увидим, что делать при t , близких к нулю.

Конечно, можно было бы вычислить направленный влево поток тепла или температуру не только при $x=0$, но и для любой точки x внутри пластины. Например, распределение температуры дается функцией:

$$\begin{aligned} \psi_3(t, x) &= -\frac{2\pi a^2}{l^2} \sum_n (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) e^{-(\pi n a/l)^2 t} = \\ &= \frac{a^2}{l} \frac{d}{dx} \vartheta_3\left(\frac{\pi x}{2l} - \frac{1}{2}\pi, e^{-(\pi a/l)^2 t}\right), \end{aligned} \quad (12.1.6)$$

где функция ϑ_3 — одна из тета-функций, определенных в формуле (4.5.70). Это соотношение дает возможность использовать некоторые известные псевдопериодические свойства этих функций. Например, используя правило суммирования Пуассона [см. также формулу (11.2.90) и следующие], можно получить полезные формулы

$$\begin{aligned} \vartheta_3(u, q) &= \sqrt{\frac{-\pi}{\ln q}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{\ln q}(u - \pi n)^2\right], \\ \psi_3(t, x) &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - 2nl - l)^2}{4a^2 t}\right], \\ J_3(t, x) &= -\frac{\pi a^2}{l} \frac{d^2}{dx^2} \vartheta_3 = \frac{\pi}{a} \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - 2nl - l)^2}{4a^2 t}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (12.1.7)$$

из которых мы впоследствии выведем интересные свойства ψ и J .

Функции Грина и фиктивные источники. Полученные формулы показывают, что рассматриваемое распределение температуры соответствует последовательности функций Грина уравнения теплопроводности (для диполей, возникающих при слиянии на каждой грани источника и его изображения; математическим выражением диполя является производная) вида (7.4.10), расположенных в точках $x = l + 2nl$. Эту же последовательность функций фиктивных источников можно получить непосредственно, если с самого начала решать нашу задачу методом функции Грина. В зависимости от математического или физического аспекта исследования предыдущий экскурс можно рассматривать как окольный метод либо для получения функции Грина, либо для доказательства соответствующего разложения в ряд тета-функций.

Ряд в формулах (12.1.7) (выражающих распределение через источники и их изображения) весьма удобен для изучения распространения теплового импульса в особенности при $t \rightarrow 0$, где ряды (12.1.6) сходятся плохо. Для малых значений времени температура всюду крайне мала, за исключением непосредственной окрестности грани $x=l$. Так как здесь не учитывается конечная скорость распространения тепла, рассмотренная на стр. 800 тома I, то некоторое количество тепла начинает выходить через грань $x=0$ уже при сколь угодно малых (положительных) t . Поскольку, однако,

это количество тепла при малом t весьма мало, то вряд ли стоит усложнять решение введением в рассмотрение конечной скорости. В более общих случаях, когда поверхность $x=l$ поддерживается при температуре $T_0(t)u(t)$, в формулах

$$\begin{aligned} T(t, x) &= \int_0^t T_0(t-\tau) \phi_\delta(\tau, x) d\tau, \\ J(t, x) &= -\kappa \int_0^t T_0(t-\tau) \frac{d}{dx} \phi_\delta(\tau, x) d\tau \end{aligned} \quad (12.1.8)$$

обычно бывает удобнее использовать ряд (12.1.6), хотя, если по каким-либо соображениям это более целесообразно, можно использовать и ряды (12.1.7). Следует вновь подчеркнуть, что если T_0 есть простая функция от t (например, ступенчатая функция), то окончательный результат легче получить, видоизменяя ряды (12.1.2); только для сложных T_0 необходимо применять метод преобразования Лапласа.

Нагревание излучением. К другому краевому условию при $x=l$ мы приходим, если пластина нагревается за счет теплообмена с внешним источником. В этом случае поток тепла пропорционален разности между температурой $T_r(t)$ источника и температурой на грани пластины при $x=l$. Если температура источника изменяется по закону $e^{-i\omega t}$ по сравнению с некоторой «нулевой температурой», то краевое условие имеет вид

$$-J = \kappa h (T_r - \psi),$$

или

$$\frac{d\psi}{dx} + h\psi = h e^{-i\omega t} \quad \text{при } x=l.$$

Соответствующее решение для случая $\psi=0$ при $x=0$ равно

$$\psi(\omega, x) = \frac{ah \sin[(x/a) \sqrt{i\omega}] e^{-i\omega t}}{ha \sin[(l/a) \sqrt{i\omega}] + \sqrt{i\omega} \cos[(l/a) \sqrt{i\omega}]} \quad (12.1.9)$$

Сдвиг фаз температур, получающийся в этом случае, больше, чем в случае (12.1.3). Этот сдвиг тем больше, чем больше частота.

Чтобы получить отсюда нестационарное распределение, соответствующее зависимости T_r от времени в форме дельта-функции, мы должны прежде всего найти нули знаменателя и затем вычислить вычеты функции $\psi(\omega, x)$ от ω . Нули определяются корнями ν_n уравнения $\operatorname{tg}(\pi\nu) + \pi\nu/hl = 0$, причем имеют место следующие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned} \nu_n &\simeq n[1 - \pi/hl], & hl &\ll 1/n, \\ \nu_n &\simeq n + \frac{1}{2} + \left[hl/\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], & n &\gg 1/hl. \end{aligned}$$

Промежуточные значения ν_n должны быть вычислены как функции от hl . Полюсы подинтегральной функции расположены в $\omega = -i(\pi\nu_n a/l)^2$ и, подсчитав вычеты, мы получим окончательно

$$\phi_\delta(t, x) = -2\pi a^2 h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{h^2 l^2 + hl + \pi^2 \nu_n^2} \frac{\sin(\pi \nu_n x/l)}{\cos(\pi \nu_n)} e^{-(\pi \nu_n a/l)^2 t} u(t); \quad (12.1.10)$$

поведение этого решения похоже на (12.1.6).

Если бы толщина пластины была бесконечна, то решение, конечно, было бы проще. Если теплопроводящая среда находится в области $x > 0$, то

фундаментальное решение для случая чисто гармонического краевого режима будет иметь вид

$$\psi(\omega, x) = \exp[-(x/a)\sqrt{p+pt}], \quad p = -i\omega.$$

Теперь для вычисления распределения температуры внутри области $x > 0$ для любых разумных краевых условий при $x=0$, $t > 0$ мы можем применить метод преобразования Лапласа.

Предположим, например, что температура грани $x=0$ равна $\varphi_0(t)u(t)$. Преобразование Лапласа этой величины равно

$$\Phi_0(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \varphi_0(t) dt. \quad (12.1.11)$$

Тогда преобразованием Лапласа распределения температуры $\psi(x, t)$ в среде будет

$$\Psi(x, p) = \Phi_0(p) e^{-qx}, \quad q = \sqrt{p/a^2}.$$

Соответствующие функции $\psi(x, t)$ [для некоторых простейших форм $\Phi_0(p)$] могут быть найдены в таблицах в конце гл. 11. Если, например, температура при $x=0$ равняется нулю до момента $t=0$, а начиная с этого момента линейно возрастает как At , то преобразование Лапласа есть $\Phi_0(p) = A/p^2$, и соответствующее распределение температуры в среде будет иметь вид

$$\psi(x, t) = A \left(t + \frac{x^2}{2a^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - A \frac{x}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-x^2/4a^2t},$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-w^2} dw.$$

При распределении температуры, соответствующем случаю, когда температура грани задается дельта-функцией, $\Phi_0 = 1$ и, следовательно, согласно (11.1.16) и (12.1.8),

$$\psi(x, t) = \frac{x}{2a^2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau^3}} \varphi_0(t-\tau) e^{-x^2/4a^2\tau} d\tau. \quad (12.1.12)$$

С другой стороны, если грань $x=0$ нагревается благодаря теплообмену с внешними источниками, так что $-d\psi/dx + h\psi = h\varphi_0(t)$, то соответствующее краевое условие приводит для преобразования Лапласа к формуле

$$\Psi(x, p) = [h\Phi_0(p)/(q+h)] e^{-qx},$$

откуда можно опять-таки определить распределение температуры $\psi(x, t)$. Оба эти результата можно, конечно, получить и с помощью метода функции Грина, используя функции Грина из § 7.4.

Нестационарное внутреннее нагревание пластины. Температура $\psi(x, t)$ в пластине толщины l (между $x=0$ и $x=l$), которая нагревается внутренними источниками, распределенными с объемной плотностью $P(x, t)$ кал/сек·см³ определяется решением неоднородного уравнения

$$\partial\psi/\partial t = a^2 \nabla^2 \psi + 4\pi a^2 s(x, t), \quad (12.1.13)$$

где

$$a^2 = \kappa/\rho C \quad \text{и} \quad s = P/4\pi\kappa.$$

Простой метод вычисления ψ для почти произвольного P заключается в том, чтобы вычислить ψ для P , имеющего характер простой гармоник, и применить затем преобразование Лапласа. В соответствии с этим мы прежде всего найдем решение уравнения (12.1.13) для $s = i(x - x_0)e^{-pt}$. Оно является решением уравнения $a^2 \nabla^2 \psi + p\psi = 0$ всюду, кроме точки $x = x_0$, где имеется разрыв производной со скачком -4π . Если ψ должно быть равно нулю на обеих гранях пластины, то $\psi = G(p|x|x_0)$, где

$$G(p|x|x_0) = \frac{4\pi a}{\sqrt{p} \sin\left(\frac{l\sqrt{p}}{a}\right)} \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt{p}\right) \sin\left(\frac{l-x_0}{a}\sqrt{p}\right), & x < x_0, \\ \sin\left(\frac{x_0}{a}\sqrt{p}\right) \sin\left(\frac{l-x}{a}\sqrt{p}\right), & x > x_0, \end{cases} \quad (12.1.14)$$

и распределение температуры для $s = (1/4\pi\kappa)P(x, p)e^{-pt}$ имеет вид

$$\psi(x, p) = \frac{1}{4\pi\kappa} \int_0^l P(x_0, p) G(p|x|x_0) e^{-pt} dx_0.$$

В частном случае однородного нагревания, когда выделяющаяся в единице объема мощность равна действительной части $P_0 e^{-pt}$, где P_0 не зависит от x , распределение температуры имеет вид

$$\psi(x, p) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{(a^2/\kappa) P_0 e^{-pt}}{p \cos(l\sqrt{p}/2a)} \left[\cos\left(\frac{l-2x}{2a}\sqrt{p}\right) - \cos\left(\frac{l}{2a}\sqrt{p}\right) \right] \right\}. \quad (12.1.15)$$

Эта формула находит интересное применение в задаче о металлической полосе, нагреваемой переменным током частоты $\omega/2\pi$ и погруженной в среду (например, в жидкий гелий) с большой теплопроводностью. Поскольку в любой момент получаемое полосой количество тепла пропорционально квадрату тока, мощность источников тепла P в единице объема равна $P_0 - \operatorname{Re}(P_0 e^{-2i\omega t})$, где P_0 есть средняя плотность мощности источников тепла; колебания мощности имеют по сравнению с нагревающим током удвоенную частоту. При этом распределение температуры вдоль полосы, толщина которой l , а ширина значительно больше чем l , будет иметь вид

$$\psi = \frac{P_0}{2\kappa} x(l-x) - \operatorname{Re} \left\{ \frac{a^2 P_0 e^{-2i\omega t}}{2i\omega\kappa \cos(l\sqrt{2i\omega}/2a)} \times \left[\cos\left(\frac{l-2x}{2a}\sqrt{2i\omega}\right) - \cos\left(\frac{l}{2a}\sqrt{2i\omega}\right) \right] \right\}.$$

Поток тепла через единицу площади грани $x=0$ равен

$$-J_0 = \frac{1}{2} l P_0 \left\{ 1 - \operatorname{Re} \left[\frac{2a}{l\sqrt{2i\omega}} \operatorname{tg}\left(\frac{l\sqrt{2i\omega}}{2a}\right) e^{-2i\omega t} \right] \right\} \simeq \begin{cases} l P_0 \sin^2(\omega t), & l\sqrt{2\omega}/2a \ll 1, \\ \frac{1}{2} l P_0 \left[1 - \frac{2a}{l\sqrt{2\omega}} \cos\left(2\omega t - \frac{1}{4}\pi\right) \right], & l\sqrt{2\omega}/2a \gg 1. \end{cases} \quad (12.1.16)$$

При этом предполагается, что выделяющаяся мощность равна $2P_0 \sin^2(\omega t)$. Для низких частот поток энергии из полосы совпадает по фазе с током: он падает до нуля (приблизительно) в течение каждой половины цикла. Для высоких частот колебания потока не столь резки и не совпадают по фазе с источником тепла.

Если выделение тепла происходит неперiodически, то температура среды может быть найдена методом преобразования Лапласа. Например,

если в каждой единице объема мгновенно выделяется единичное количество тепла $\phi(t)$, то температура будет равна

$$\begin{aligned}\psi_8(x, t) &= \frac{a^2}{2\pi i x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-pt}}{p \cos(l \sqrt{p/2a})} \left[\cos\left(\frac{l-2x}{2a} \sqrt{p}\right) - \cos\left(\frac{l}{2a} \sqrt{p}\right) \right] dp = \\ &= \frac{4a^2}{\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{\pi x}{l}(2n+1)\right] \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (2n+1)^2 t\right] u(t), \\ J_8(x, t) &= -\frac{2a^2}{l} \vartheta_2\left(\frac{x}{l}, \frac{4\pi a^2 t}{l^2}\right) u(t) = \\ &= -\sqrt{\frac{x}{\pi \rho c t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left[-\frac{(x-nl)^2}{4a^2 t}\right] u(t). \quad (12.1.17)\end{aligned}$$

Здесь мы вновь использовали свойства тета-функции, указанные в таблице в конце гл. 4. Распределение температуры и поток тепла через поверхность $x=0$, если плотность распределения источников тепла по всей полосе равна $P(t)$, как и ранее, вычисляются по формулам

$$T(x, t) = \int_0^t P(t-\tau) \psi_8(x, \tau) d\tau, \quad U_0(t) = - \int_0^t P(t-\tau) J_8(0, \tau) d\tau.$$

Диффузия и поглощение частиц. Уравнение диффузии приближенно описывает диффузию частиц (например, электронов в газе или нейтронов в веществе) постольку, поскольку рассматриваемые расстояния велики по сравнению со средней длиной свободного пробега частиц и поскольку рассматриваемое время велико по сравнению со средним временем между столкновениями. При выводе уравнения (2.4.42) было указано, что постоянная диффузии a^2 равна произведению одной трети средней скорости v_a частицы на среднюю длину свободного пробега λ_a и что, кроме членов, содержащих производные по времени и по пространственным координатам, в уравнении имеются члены, учитывающие поглощение и возникновение частиц. Если скорости всех частиц в данной области достаточно мало отличаются друг от друга по величине и вместе с тем достаточно равномерно распределены по всем направлениям, т. е. если поведение частиц мало отличается от среднего поведения, то уравнение для плотности частиц ρ как функции пространственных координат и времени будет иметь вид

$$\partial \rho / \partial t = a^2 \nabla^2 \rho - \chi \rho + q, \quad (11.1.18)$$

где $a^2 = (1/3) v_a \lambda_a$ (v_a — средняя скорость и λ_a — средняя длина свободного пробега частиц), χ есть средняя частота поглощения частиц в среде, а q — среднее число частиц, возникающих в единице объема среды, как это было принято при выводе (2.4.42).

Для наших рассмотрений существенны следующие характеристики частиц и среды, через которую они проходят: средняя скорость v_a и средняя длина свободного пробега λ_a частиц; доля столкновений κ , при которых частица поглощается, а также q — скорость, с которой увеличивается число частиц, участвующих в рассматриваемом процессе — либо в результате возникновения в среде (как, например, при распаде или радиоактивности), либо в результате первичного рассеяния какого-либо однородного падающего пучка, часть частиц которого достаточно глубоко проникает в среду прежде, чем они испытывают свое первое столкновение. (Мы, естественно, считаем местом их возникновения точку, в которой они

включаются в ρ при своем первом столкновении.) Через эти физические величины, как уже было упомянуто, постоянная диффузии выражается так: $a^2 = (1/3) \lambda_a v_a$; v_a/λ_a есть частота столкновений для некоторой средней частицы, а $\chi v_a/\lambda_a$ — частота столкновений этой средней частицы, при которых происходит ее поглощение, которая должна быть равна частоте поглощения χ .

Следующий пример иллюстрирует некоторые свойства решений этого уравнения. Внезапный ливень частиц падает на поверхность $x = 0$ вещества, заполняющего полубесконечную область $x > 0$. Эти частицы можно рассматривать как возникающие в среде в том месте, где они впервые подвергаются рассеянию. Но если поверхность $x = 0$ пересекает N частиц, то $(\sqrt{\lambda_i}) e^{-x/\lambda_i} dx$ частиц будет рассеяно и включено в распределение за поверхностью на участке между x и $x + dx$. Таким образом, в случае ливня в форме дельта-функции плотность источников q будет равна $(1/\lambda_i) e^{-x/\lambda_i} \delta(t)$. Чтобы найти последующее поведение ρ , нужно решить уравнение (12.1.18) при этом q . Конечно, в действительности, вследствие конечной скорости v_i частиц падающего пучка первые столкновения в глубине среды будут иметь место позднее, чем столкновения вблизи поверхности. Следовательно, для q правильнее было бы пользоваться формулой $(1/\lambda_i) e^{-x/\lambda_i} \delta(t - x/v_i)$. Но этим эффектом можно пренебречь, если v_i велико по сравнению со средней скоростью диффундирующих частиц v_a или если изменение плотности во времени происходит медленно по сравнению с частотой столкновений v_i/λ_i . В дальнейшем мы опускаем член x/v_i в δ , хотя в случае надобности его можно учесть. Постоянная λ_i есть, конечно, средняя длина свободного пробега падающих частиц.

Если область $x < 0$ есть свободное пространство, так что все частицы, вылетающие из вещества, никогда не возвращаются обратно, то, согласно (2.4.34), ρ удовлетворяет краевому условию $\rho = \gamma (\partial \rho / \partial x)$ при $x = 0$ (где $\gamma = 0,71 \lambda_a$). Однако вначале мы займемся решением задачи со значительно более простым краевым условием $\rho = 0$ при $x = 0$. Из формулы (2.4.43) можно получить функцию Грина для рассматриваемого здесь одномерного случая и условия $\rho = 0$ при $x = 0$

$$G(t|x|x_0) = \frac{e^{-\chi t}}{2a \sqrt{\pi t}} [e^{-(x-x_0)^2/4a^2 t} - e^{-(x+x_0)^2/4a^2 t}] u(t). \quad (12.1.19)$$

Если при $t = 0$ внезапно «впрыскиваются» частицы, то для $t > 0$ плотность распределения частиц определяется выражением

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, t) &= \frac{1}{\lambda_i} \int_0^\infty e^{-x_0/\lambda_i} G(t|x|x_0) dx_0 = \\ &= \frac{1}{2\lambda_i} e^{-\chi t + (a^2 t/\lambda_i^2)} \left[e^{-x/\lambda_i} \operatorname{erfc} \left(\frac{a \sqrt{t}}{\lambda_i} - \frac{x}{2a \sqrt{t}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{x/\lambda_i} \operatorname{erfc} \left(\frac{a \sqrt{t}}{\lambda_i} + \frac{x}{2a \sqrt{t}} \right) \right] u(t), \quad (12.1.20) \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{erfc}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_w^\infty e^{-u^2} du \simeq \begin{cases} 2 + (1/w \sqrt{\pi}) e^{-w^2}, & w \rightarrow -\infty, \\ 1 - 2w/\sqrt{\pi}, & w \rightarrow 0, \\ e^{-w^2} (1/w \sqrt{\pi}) [1 - 1/2w^2], & w \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Множитель $e^{-\chi t}$ соответствует потерям из-за поглощения частиц, множитель $e^{a^2 t/\lambda_i^2}$ — возрастанию плотности вследствие притока в точку x частиц из областей, где ранее создались большие плотности.

Для t малого по сравнению с $(x/a)^2$ первый член в прямых скобках в (12.1.20) много больше второго, и все выражение сводится к $(1/\lambda_i) e^{-x/\lambda_i}$ для всех x , за исключением x , весьма близких к нулю. Для t большого сравнительно с $(\lambda_i/a)^2$ оба члена в скобках почти взаимно уничтожаются, и тогда получается

$$\varphi_s \simeq x \frac{1}{2} \frac{\lambda_i}{a^3 t^{3/2} \sqrt{\pi}} e^{-x^2/4a^2 t}, \quad t \gg \lambda_i^2/a^2.$$

При $t=0$ $\varphi_s = (1/\lambda_i) e^{-x/\lambda_i}$; с ростом t пик, близкий к $x=0$, быстро «тает» до нуля; с течением времени значение функции распределения в области, лежащей ниже поверхности, уменьшается до тех пор, пока, наконец, остается лишь невысокий максимум, расположенный внутри материала.

Если вместо мгновенного «выпрыскивания» частиц при $t=0$ задается постоянный поток, то процесс в конце концов становится стационарным, причем за каждую секунду на плоскости $x=0$ поглощается и оставляет ее столько же частиц, сколько их попадает на эту плоскость. Соответствующее уравнение

$$a^2 \frac{d^2 \rho}{dx^2} - \chi \rho = -\frac{1}{\lambda_i} e^{-x/\lambda_i} \quad (12.1.21)$$

имеет стационарное решение

$$\varphi_s(x) = \frac{\lambda_i}{a^2 - \lambda_i^2 \chi} [e^{-x\sqrt{\chi}/a} - e^{-x/\lambda_i}],$$

обращающееся в нуль при $x=0$. Для больших значений x это решение ведет себя как экспонента с показателем x/λ_i или $x\sqrt{\chi}/a$ в зависимости от того, какой показатель меньше.

Однако, как указывалось ранее, $\chi/a^2 = (\chi v_a/\lambda_a) (3/\lambda_a v_a) = 3\chi/\lambda_a^2$, где χ — доля столкновений, при которых происходит поглощение частиц, — обычно величина небольшая. Поэтому $\sqrt{\chi}/a$ обычно меньше чем $1/\lambda_i$, если только средний свободный пробег частиц падающего пучка не превышает значительно средний свободный пробег λ_a частиц, описываемых функцией распределения ρ . Поэтому глубокое проникновение частиц (поведение ρ для больших x) обычно определяется главным образом процессом поглощения и диффузии (первая экспонента), а не проникновением падающего пучка (вторая экспонента).

Неустановившееся решение, соответствующее единичному потоку частиц, возникающему при $t=0$ и затем продолжающемуся, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_s(x) - \int_0^\infty \varphi_s(x_0) G(t|x|x_0) dx_0 = \\ &= \varphi_s(x) - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 \chi - a^2} \left\{ \varphi_s(x, t) - \frac{1}{2\lambda_i} \left[e^{-x\sqrt{\chi}/a} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\chi}t - \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{x\sqrt{\chi}/a} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\chi}t + \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right] \right\}. \quad (12.1.22) \end{aligned}$$

Эти и другие решения были получены для краевого условия $\rho=0$ при $x=0$. Однако, как было уже упомянуто ранее, более точное краевое условие для плотности частиц ρ имеет вид $\rho = \gamma (\partial \rho / \partial x)$ при $x=0$, где $\gamma \approx 0,71\lambda_a$. Мы можем, однако, превратить полученные решения φ в решения для ρ , удовлетворяющие более точным краевым условиям, полагая

$$\rho - \gamma (\partial \rho / \partial x) = \varphi(x, t),$$

или

$$\rho(x, t) = - (e^{x/\gamma} / \gamma) \int_0^x e^{-u/\gamma} \varphi(u, t) du = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty e^{-w/\gamma} \varphi(x+w, t) dw. \quad (12.1.23)$$

Если ρ удовлетворяет уравнению (12.1.18), то φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \nabla^2 \varphi - \chi \varphi + q - \gamma \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Если $\varphi = 0$ при $x = 0$, то $\rho = \gamma (\partial \rho / \partial x)$ при $x = 0$.

Например, стационарное решение уравнения (12.1.21) для ρ соответствует φ , удовлетворяющему (при $\lambda_a = \lambda_i$) уравнению

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \chi \varphi = - \frac{1,71}{\lambda_i} e^{-x/\lambda_i},$$

т. е. $\varphi = 1,71 \varphi_s(x)$, где φ_s найдено выше. Выполнив интегрирование для ρ , мы получим

$$\rho_s(x) = \frac{1,71 \lambda_i}{a^2 - \lambda_i^2 \chi} \left[\frac{a e^{-x \sqrt{\chi/a}}}{a + \gamma \sqrt{\chi}} - \frac{\lambda_i e^{-x/\lambda_i}}{\lambda_i + \gamma} \right]. \quad (12.1.24)$$

Это решение удовлетворяет надлежащим краевым условиям для ρ . Другие нестационарные решения могут быть в случае надобности также вычислены при помощи (12.1.23).

Краевое условие с $\gamma = 0,71 \lambda_a$ дает, конечно, достаточно хорошее приближение только тогда, когда на расстоянии λ_a от границы нет источников. В рассмотренном случае таких источников действительно нет. В других случаях значение постоянной 1,71 в (12.1.24) должно быть несколько изменено.

Деление и диффузия. Если среда, в которой диффундируют нейтроны, частично состоит из делящегося вещества, то нейтроны не только поглощаются этой средой, но и возникают в ней. Возникающие нейтроны обладают двумя свойствами, которые существенно влияют на ход цепной реакции. Во-первых, не все эти нейтроны появляются одновременно, некоторые выделяются с заметным запаздыванием. Во-вторых, нейтроны, возникающие в процессе деления, обычно обладают энергией более высокой, чем средняя энергия нейтронов, и потому они должны быть замедлены, прежде чем смогут вызвать дальнейшие деления. Чтобы изучить, как эти свойства воздействуют на ход явления, мы их рассмотрим порознь. Сначала учтем запаздывание, а затем замедление.

Для начала пренебрежем как запаздыванием, так и замедлением и предположим, что в заданном объеме каждую секунду определенный процент нейтронов вызывает акты деления и что в результате этих актов немедленно «создается» большое количество нейтронов с той же средней энергией. В этом случае величина q в уравнении (12.1.18) прямо пропорциональна ρ ; коэффициент пропорциональности R постоянен. Единственное изменение, которое это обстоятельство вносит в полученные ранее решения уравнения, заключается в том, что вместо коэффициента поглощения χ теперь следует во всех формулах ввести $\chi - R$, что равносильно уменьшению частоты поглощения частиц. В том случае, когда скорость размножения R существенно превышает частоту поглощения χ , плотность нейтронов постепенно возрастает, и будет развиваться цепная реакция. Насколько именно R должно превышать χ , зависит от конфигурации материала, как это будет показано ниже.

Как было указано ранее, величина χ выражается через среднюю скорость v_a нейтронов и их средний свободный пробег λ_a следующим образом: $\chi = \kappa v_a / \lambda_a$, где κ есть доля столкновений, приводящих к поглощению ударяющихся нейтронов. Аналогично этому мы можем ввести долю ζ столкновений, вызывающих деление, и среднее количество ν нейтронов, «создаваемых» при одном делении; тогда

$$R = \zeta \nu v_a / \lambda_a.$$

Поэтому мы можем сделать следующее предварительное замечание: цепная реакция невозможна ни при какой конфигурации, если только не выполнено неравенство $\kappa > \chi$, т. е. для развития цепной реакции доля нейтронов деления, создаваемых при одном столкновении, должна быть больше доли поглощенных нейтронов.

Если нейтроны, создаваемые при делении, испускаются с некоторым запаздыванием, то член q не точно пропорционален $\rho(x, t)$. Если мы пренебрегаем эффектом замедления, то q выражается через значение ρ в той же точке x , но в другой, более ранний чем t момент времени τ . Предположим, что нейтроны, создаваемые при делении, испускаются в результате единого радиоактивного процесса. Тогда доля испускаемых нейтронов есть показательная функция времени $e^{-a\tau}$ (хорошее приближение даже для случая, когда имеет место несколько процессов) и уравнение, которому должно удовлетворять ρ , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) - \chi \rho(x, t) + aR \int_0^\infty e^{-a\tau} \rho(x, t - \tau) d\tau + q. \quad (12.1.25)$$

Интегральный член этого уравнения учитывает (приближенно) запаздывание, но не учитывает эффекта замедления. $1/a$ есть среднее время запаздывания испускания нейтронов. Последний член q соответствует внешним нейтронам, вводимым в рассматриваемую область извне. Заметим, что если ρ не зависит от времени, то интегральный член сводится к $R\rho(x)$. Влияние запаздывания испускания нейтронов сказывается, таким образом, только при нестационарных процессах в системе.

Решение при помощи преобразования Лапласа. Мы изложим сейчас решение этого уравнения методом преобразования Лапласа. Рассмотрим случай пластины толщины l с границами $x=0$ и $x=l$ и предположим, что в любой момент времени $\rho=0$ при $x=0$ и $x=l$. Если q зависит от времени, то разложим его в интеграл Фурье, и прежде всего решим задачу для

$$q = \delta(x - x_0) e^{-i\omega t}.$$

Выберем стационарное решение в форме

$$\varphi(x|x_0|\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) e^{-i\omega t}.$$

Подставив его в (12.1.25), умножая на $\sin(\pi n x/l)$ и интегрируя по x , получим уравнения для коэффициентов A_n

$$\frac{1}{2} l \left[-i\omega + \beta_n + \chi - \frac{aR}{\alpha - i\omega} \right] A_n = \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right),$$

где $\beta_n = (\pi n a/l)^2$, так же как χ и R , имеет размерность частоты. Решение $\varphi(x|x_0|\omega)$ в дальнейшем будет выражено через корни уравнения $\omega^2 + i\omega(\alpha + \chi + \beta_n) + \alpha(R - \beta_n - \chi) = 0$, которые запишем в виде $-i\omega_n^+$ и $-i\omega_n^-$, где

$$\omega_n^+ = \frac{1}{2} (\alpha + \chi + \beta_n) + \frac{1}{2} \sqrt{(\beta_n + \chi - \alpha)^2 + 4\alpha R} \simeq$$

$$\simeq \beta_n + \chi + \alpha R/\beta_n, \quad \beta_n \gg \chi, R, \alpha,$$

$$\omega_n^- = \frac{1}{2} (\alpha + \chi + \beta_n) - \frac{1}{2} \sqrt{(\beta_n + \chi - \alpha)^2 + 4\alpha R} \simeq$$

$$\simeq \alpha - \alpha R/\beta_n, \quad \beta_n \gg \chi, R, \alpha.$$

Полезно выразить эти корни непосредственно через физические константы, упомянутые выше:

$$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} \left\} = \frac{v_a}{2\lambda_a} \left\{ \frac{1}{3} \lambda_a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 + x + \delta \pm \sqrt{\left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi n \lambda_a}{l} \right)^2 + x - \delta \right]^2 + 4\nu\zeta\delta} \right\},$$

где x , как ранее было указано, есть вероятность поглощения при столкновении, $1/\delta$ есть среднее запаздывание испускания нейтронов, выраженное в единицах среднего времени свободного пробега ($\alpha = \delta v_a / \lambda_a$ или $1/\delta = v_a / \lambda_a \alpha$) и $\nu\zeta$ есть среднее количество нейтронов, создаваемых при одном столкновении (ν — среднее количество нейтронов, получающихся при распаде, и ζ — вероятность деления при столкновении).

Через эти величины φ выразится так:

$$\varphi(x|x_0|\omega) = \frac{2i\omega - 2\alpha}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x_0/l) \sin(\pi n x/l)}{(\omega + i\omega_n^*)(\omega + i\omega_n^-)} e^{-i\omega t},$$

и неустановившийся процесс в случае частиц, вводимых в рассматриваемую область в точке x_0 в момент $t=0$, $q = \delta(x - x_0) \delta(t)$, описывается, как и ранее, формулой

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(x|x_0|t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x|x_0|\omega) d\omega = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x_0/l) \sin(\pi n x/l)}{\sqrt{\left[\frac{1}{3} (\pi n \lambda_a/l)^2 + x - \delta \right]^2 + 4\nu\zeta\delta}} \left\{ \left[\frac{\lambda_a \omega_n^+}{v_a} - \delta \right] \exp(-\omega_n^+ t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\delta - \frac{\lambda_a \omega_n^-}{v_a} \right] \exp(-\omega_n^- t) \right\} u(t). \end{aligned} \quad (12.1.26)$$

Если плотность нейтронов, вводимых за секунду в рассматриваемую область в момент t в точке x , есть $q(x, t)$ (нейтроны вводятся извне, а не возникают в результате деления, так как процесс деления учтен в самом уравнении), то в приближении, указанном в связи с (12.1.25), плотность распределения частиц в рассматриваемой области будет иметь вид

$$\rho(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l q(x_0, \tau) \varphi_\delta(x|x_0|t-\tau) dx_0.$$

Более точными являются краевые условия, согласно которым

$$\rho = \pm 0,71\lambda (\partial\rho/\partial x)$$

на обеих гранях пластины. Эти условия можно (если $l \gg \lambda$) приближенно учесть, располагая грани истинной пластины в плоскостях $x = 0,71\lambda$ и $x = l - 0,71\lambda$ так, что длина l в (12.1.26) на $1,42\lambda$ больше толщины пластины.

При рассмотрении уравнения (12.1.26) можно обнаружить много интересного. Прежде всего если $R = 0$ ($\zeta = 0$), то вторая экспонента исчезает и решение принимает вид

$$\rho = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left\{ -\frac{iv_a}{\lambda_a} \left[x + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi n \lambda_a}{l} \right)^2 \right] \right\},$$

где x есть средняя доля столкновений, приводящих к потере нейтронов вследствие поглощения (т. е. отношение поперечного сечения поглощения к полному поперечному сечению). Отметим, что члены вида $(1/3) (\pi n \lambda_a/l)^2$ соответствуют потере частиц вследствие диффузии из пластины. Чтобы число нейтронов, участвующих в процессе, не уменьшалось, оба члена должны быть достаточно малыми; материал среды должен быть таким, чтобы основную долю всех столкновений составляли упругие столкновения: толщина пластины

должна равняться нескольким длинам свободного пробега, так чтобы потеря нейтронов при диффузии из пластины за среднее время свободного пробега $(1/3)(\pi n \lambda_a / l)^2$ также была весьма мала. Это предельное выражение для ρ при $R=0$, естественно, является решением уравнения (12.1.18).

Если теперь немного увеличить R (или $\nu\zeta$), то вторая экспонента в (12.1.26) при $t=0$ будет по величине меньше, чем первая. До тех пор пока $\nu\zeta$ мало, быстрота убывания второго члена определяется величиной $\alpha (= \delta v_a / \lambda_a)$, т. е. степенью запаздывания при испускании нейтронов. Если запаздывание мало, т. е. если α велико, то уже при значениях t , близких к нулю, вторым членом можно пренебречь. Если, однако, α мало, т. е. если нейтроны, образующиеся при делении, появляются медленно, то второй член будет затухать медленно с течением времени. Поэтому после достаточно продолжительного промежутка времени останется только этот второй член. Плотность будет определяться не постоянной диффузии a^2 , а оставшимися запаздывающими нейтронами.

Если R достаточно велико, то ω_1^- становится отрицательным, и цепная реакция оказывается неустойчивой — плотность будет неограниченно возрастать. Это происходит, когда

$$V(\beta_1 + \chi - \alpha)^2 + 4\alpha R > \alpha + \chi + \beta_1,$$

т. е. когда $R > \chi + \beta_1 = \chi + (\pi a / l)^2$, или

$$\nu\zeta > \chi + \frac{1}{3}(\pi \lambda_a / l)^2. \quad (12.1.27)$$

Это требование совершенно очевидно: для развития цепной реакции необходимо, чтобы среднее количество нейтронов, возникающих в результате деления при одном столкновении, было больше, чем среднее количество нейтронов, поглощаемых при столкновении, плюс соответствующее количество нейтронов, потерянных при диффузии из пластины. Поскольку нейтроны теряются при поглощении и при вылете за пределы пластины, постольку для осуществления цепной реакции нужно, чтобы коэффициент R превышал коэффициент поглощения χ на величину $(1/3)(\pi a / l)^2$. Чем тоньше пластина или чем больше постоянная диффузии a^2 , тем более «обогащенным» должен быть материал, чтобы могла развиваться цепная реакция. [Следует заметить, что если бы на обеих гранях пластины имелись идеальные отражатели нейтронов, то разложение решения производилось бы по косинусам, а не по синусам, в ряд входил бы член с $n=0$, и развитие цепной реакции начиналось бы при $R > \chi$ (при $\nu\zeta > \chi$); потерь при диффузии не было бы вовсе.]

Следует также отметить, что если все нейтроны возникают без запаздывания (т. е. если α бесконечно), то решение принимает вид

$$\rho = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left\{-t\left[\chi - R + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\right]\right\},$$

т. е. является решением уравнения (12.1.18) при $q = R\rho$. В этом предельном случае, если R больше критического значения, то ρ начинает сразу возрастать. С другой стороны, если δ мало (длительное запаздывание), то (12.1.26) показывает, что ρ может первоначально убывать, даже если ω_1^- отрицательно. Дело в том, что первое слагаемое в скобках есть величина, убывающая по экспоненциальному закону, которая, однако, при малых t больше второго слагаемого, если только δ достаточно мало. Плотность ρ сначала убывает, пока второе возрастающее слагаемое не достигнет требуемого значения, т. е. пока запаздывающие нейтроны не накопятся в количестве, достаточном для осуществления цепной реакции.

Замедление частиц. Чтобы учесть тот факт, что нейтроны, возникающие при делении, должны быть замедлены, для того чтобы они в свою очередь вызвали возможно больше новых делений, мы должны рассмотреть решения уравнения диффузии (2.4.54). Это уравнение выводится из следующих соображений: частицы с большими скоростями вводятся в среду, которая вызывает их замедление, причем каждое столкновение вызывает частичное уменьшение их энергии. При этом интенсивность процесса диффузии частиц из вещества наружу можно характеризовать средним количеством столкновений, испытываемых частицей с момента ее появления. Если, например, частицы, обладающие большой энергией, будут вводиться в заданной точке среды, то более медленные частицы будут обнаружены в других местах; чем медленнее частицы, тем больше будет область их распределения. Формула (2.4.54) выражает именно такое поведение; оно будет вновь рассмотрено в § 12.2.

Безразмерный параметр, называемый *возрастом* частицы

$$\tau = \frac{MQ}{mQ_m} \ln \frac{v_i}{v} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{v_i}{v}, \quad v = v_i e^{-\tau}$$

(где $mQ_m/MQ = \eta$ есть средняя относительная потеря скорости при одном столкновении), характеризует среднее число столкновений, испытанных частицей скорости v , если она была введена в среду со скоростью v_i . [Мы предполагаем для простоты изложения, что MQ/mQ_m в нашем случае не зависит от v , хотя (2.4.53) показывает, что рассмотрение может быть подобным же способом проведено, если это условие и не выполнено.] Величина, которая соответствует здесь плотности распределения,

$$\phi = n_i Q_m p^4 \rho / M = p^3 v \rho(v) \eta / \lambda,$$

есть полное число частиц, находящихся в единице объема, скорость которых больше чем v (возраст меньше τ или импульс больше чем $p = mv$) в начале данной секунды и меньше v (возраст больше чем τ) в конце той же секунды. Поэтому пространственное распределение вводимых частиц с большими скоростями соответствует начальному условию для ϕ . Как мы скоро увидим, τ пропорционально времени, когда λ постоянно ($\lambda = 1/n_i Q$).

Уравнение для определения пространственного распределения ϕ и зависимости его от *возрастного параметра* τ , согласно (2.4.54), имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{3} \lambda^2 \nabla^2 \phi - \kappa_i \phi, \quad (12.1.28)$$

где λ есть средний свободный пробег частиц с большой скоростью (предполагаемый здесь постоянным, что, однако, необязательно для того, чтобы уравнение удовлетворялось), а безразмерная постоянная κ_i равна доле частиц, поглощаемых средой при каждом столкновении. Решения этого уравнения, конечно, совершенно аналогичны полученным нами ранее; интерпретация их, однако, несколько иная. Например, если частицы «создаются» на глубине x_i внутри пластины толщины l , так что количество вводимых в секунду в единице объема частиц с начальной скоростью v_i есть $\delta(x - x_i)$, то величина ϕ для скорости v определяется формулой

$$\phi(x|x_i|\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x_i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left\{-\tau \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi n \lambda}{l}\right)^2 + \kappa_i\right]\right\},$$

а плотность распределения частиц, имеющих скорость между v и $v + dv$, определяется из соотношения $mp^2 \rho(v) dv = P(v) dv$, где

$$P(v) = \frac{\lambda}{v^2 \eta} \phi = \frac{2\lambda}{\eta l v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x_i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(\frac{v}{v_i}\right)^{[(\pi n \lambda / l)^2 + 3\kappa_i](1/3\eta)}. \quad (12.1.29)$$

Если $2\eta > (1/3)(\pi\lambda/l)^2 + \kappa_i$, то в соответствии с полученным решением должно быть бесконечно много частиц, скорость которых равна нулю; в этом случае частицы замедляются так быстро, что они не могут достаточно интенсивно диффундировать из пластины. Фактически, по различным причинам, этого никогда не случается: прежде всего условия, при которых выведено уравнение (12.1.28), не выполнены в предельном случае исчезающего v ; кроме того, η обычно достаточно мало, так что данное условие никогда не реализуется.

Деление, диффузия и замедление. Возвратимся к пластине из делящегося материала. Если плотность распределения частиц, обладающих скоростью, достаточно низкой для того, чтобы они могли вызвать деление, равна $\rho(x, t)$, то в соответствии с определением R в одну секунду в единице объема в результате деления возникает $R\rho(x, t)$ нейтронов. Эти нейтроны должны быть замедлены до того, как они смогут вызвать дальнейшее деление, и при этом замедлении некоторые из них диффундируют, поглощаются или уходят за пределы пластины. Таким образом, под ρ мы будем понимать плотность распределения только тех нейтронов, которые способны вызвать деление. Обычно сюда включаются только медленные нейтроны, т. е. нейтроны, скорость которых меньше, чем некоторая предельная скорость v_p . (Фактический критерий не так резок, но в первом приближении мы предположим, что все нейтроны, скорость которых меньше чем v_p , могут произвести деление, а нейтроны с большей скоростью — не могут и в ρ не включены.) Из проведенного выше рассмотрения процесса замедления мы заключаем, что если плотность возникающих при делении быстрых нейтронов (со средней скоростью v_i) есть $R\rho(x_i, t_i)$, то в одну секунду в точке x в распределение ρ включается количество нейтронов, равное

$$R \int_0^l \rho(x_i, t_i) \psi(x|x_i|\tau_i) dx_i = R \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l \rho(x_i, t_i) \sin\left(\frac{\pi n x_i}{l}\right) dx_i \right\} \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(\frac{v_p}{v_i}\right)^{[(\pi n \lambda/l)^2 + 3\kappa_i](1/3\eta)},$$

т. е. столько нейтронов получают скорость, меньшую чем v_p .

Средний промежуток времени, потребный для замедления нейтронов от скорости v_i до v_p , получается при использовании выражения λ/v для среднего времени свободного пробега — среднего промежутка времени между двумя столкновениями. Бесконечно малый промежуток времени dt связан с соответствующим числом столкновений $d\tau$ соотношением

$$dt = (\lambda/v) d\tau = -(\lambda/\eta v^2) dv,$$

и среднее запаздывание во времени будет равно

$$t - t_i = \frac{\lambda}{\eta} \left[\frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_i} \right], \quad \eta = \frac{mQ_m}{MQ}$$

(пока λ совершенно не зависит от v). Если $v_i \gg v_p$, то приближенное значение этого среднего запаздывания $\lambda/\eta v_p$ значительно больше, чем среднее время между столкновениями λ/v_p замедленных нейтронов, но обычно оно меньше, чем среднее запаздывание вновь возникающих нейтронов. Если мы предположим, что среднее запаздывание (которое по крайней мере так же велико, как $\lambda/\eta v_p$) есть $1/\alpha$, то приближенное выражение для числа нейтронов, входящих после их замедления в распределение $\rho(x, t)$, имеет вид

[см. (12.1.25)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha R_n \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} du \frac{2}{l} \int_0^l \rho(x_i, t-u) \sin\left(\frac{\pi n x_i}{l}\right) dx_i \right\} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad (12.1.30)$$

где

$$R_n = R (v_p/v_i)^{(1/3\eta)} [(\pi n \lambda/l)^2 + 3\kappa_i]$$

и

$$\alpha = \delta v_p/\lambda < \eta v_p/\lambda.$$

Эта величина R_n меньше R , потому что некоторые нейтроны были поглощены или диффундировали из пластины прежде, чем они успели настолько замедлиться, чтобы войти в распределение $\rho(x, t)$.

Если теперь вновь применить метод преобразования Лапласа, подставив в (12.1.25) вышеприведенное выражение на место предпоследнего члена и приняв $q = \delta(x - x_0)e^{-pt}$, то мы сможем, как и ранее, получить решение (12.1.25), положив

$$\rho = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) e^{-pt},$$

причем коэффициенты A_n определяются из соотношений

$$\left[-p + \beta_n + \chi - \frac{\alpha R_n}{\alpha - p} \right] A_n = \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right),$$

отличающегося от ранее полученного уравнения только тем, что вместо R в нем фигурирует R_n . Следовательно, мы можем целиком использовать метод, приведший к (12.1.26), заменив в окончательной формуле R на R_n (R_1 в первом члене ряда, R_2 во втором члене и т. д.).

Решение для нейтронов, мгновенно введенных при $t=0$ в точке x_0 , когда учитывается (приближенно) эффект замедления, определяется рядом (12.1.26) после подстановки R_n в n -й член (а также в ω_n^+ и ω_n^-) вместо R . Изучение поведения решения ведется так же, как и ранее. Цепная реакция может начаться только при $R_1 > \chi + \beta_1$ или

$$v > (1/\zeta) \left[\kappa_p + \frac{1}{3} (\pi \lambda/l)^2 \right] (v_i/v_p)^{(1/3\eta)} [(\pi n \lambda/l)^2 + 3\kappa_i],$$

причем $R = v\zeta v_p/\lambda$, $a^2 = (1/3) v_p \lambda$ и $\chi = \kappa v_p/\lambda$. При этом мы допускаем, что κ может быть различным для медленных ($v < v_p$) и быстрых ($v > v_p$) нейтронов. Таким образом, нейтроны, полученные в результате деления, могут потеряться двумя способами до того, как они получают возможность вызвать дальнейшее деление: некоторые нейтроны теряются вследствие поглощения или диффузии из пластины в процессе замедления (эти потери описываются множителем v_i/v_p , являющимся преобладающим множителем, если $v_i \gg v_p$), другие теряются уже будучи замедленными, так как даже тогда, когда замедление достаточно для того, чтобы вызвать деление, только малая доля из всех столкновений фактически приводит к делению. [Эти потери описываются множителем $\kappa_p/\zeta + (1/3\zeta)(\pi \lambda/l)^2$ в нашем неравенстве.] Так как v_i обычно значительно больше, чем v_p , то κ_i/η должно быть весьма малым и $l/\sqrt{\eta}$ должно быть несколько большим, чем λ ; в противном случае, чтобы цепная реакция могла начаться, потребовались бы чересчур большие значения v . Поскольку η — часть энергии, теряющаяся при каждом столкновении, —

приблизительно пропорциональна отношению масс соударяющихся нейтрона и атома-мишени, материал пластины должен содержать в большом количестве легкие атомы, причем эти атомы не должны поглощать нейтроны (ж мало). Во всяком случае, чтобы цепная реакция могла начаться при осуществимых v , толщина пластины l должна быть значительно большей, чем средний свободный пробег λ .

Общий случай, диффузионное приближение. Мы можем теперь обобщить полученные результаты и рассчитать цепную реакцию в куске однородного материала любого размера и формы. Решим уравнение Гельмгольца при краевом условии, согласно которому ρ равно нулю на поверхности, отстоящей на расстоянии, равном $0,71$ среднего свободного пробега нейтрона, от истинной границы материала (во внешнюю сторону). Найдем последовательность собственных значений k_n (соответствующих $\pi n/l$ для пластины), последовательность собственных функций $\psi_n(\mathbf{r})$ [$\sin(\pi n x/l)$ для пластины] и их нормирующие постоянные Λ_n . Для характеристики рассматриваемого процесса существенны следующие свойства материала (мы повторяем наши определения): средняя длина свободного пробега нейтронов λ (предполагаемая независимой от v), средняя скорость v_i нейтронов, возникающих при делении, средняя скорость v_p , ниже которой нейтроны могут вызвать деление, относительная потеря скорости η при каждом столкновении в процессе замедления ($\eta \simeq m/M$), доля столкновений κ , при которых нейтрон поглощается без деления (κ_i для быстрых нейтронов и κ_p для тех, у которых скорость меньше чем v_p), среднее запаздывание $1/\alpha = \lambda/v_p \delta$ ($\delta < \eta$) появления остающихся в распределении замедленных нейтронов и, наконец, частота возникновения R нейтронов при делении, вызванном нейтроном, имеющим скорость, меньшую v_p . [Эта частота равна произведению v_p/λ на долю ζ столкновений, вызывающих деление, и на среднее количество v нейтронов, полученных при каждом делении ($R = v\zeta v_p/\lambda$).]

Плотность вызывающих деление нейтронов в точке $\mathbf{r}$ в момент $t > 0$, образующихся при введении в точке $\mathbf{r}_0$ при $t=0$ одного медленного нейтрона, равна при этом

$$\rho_n(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|t) = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}_0)\psi_n(\mathbf{r})/\Lambda_n}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\lambda^2 k_n^2 + \kappa_p - \delta\right)^2 + 4v_n\zeta\delta}} \times \\ \times \left[\left(\frac{\lambda}{v_p} \omega_n^+ - \delta\right) e^{-\omega_n^+ t} + \left(\delta - \frac{\lambda}{v_p} \omega_n^-\right) e^{-\omega_n^- t} \right], \quad (12.1.31)$$

причем учтены (приблизительно) эффекты диффузии, поглощения, деления, запаздывающего испускания и замедления. При этом

$$\left. \begin{matrix} \omega_n^+ \\ \omega_n^- \end{matrix} \right\} = \frac{v_p}{2\lambda} \left[\frac{1}{3}\lambda^2 k_n^2 + \kappa_p + \delta \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\lambda^2 k_n^2 + \kappa_p - \delta\right)^2 + 4v_n\zeta\delta} \right],$$

где $\delta = \alpha\lambda/v_p$ есть отношение среднего времени между столкновениями к среднему запаздыванию нейтронов деления ($\delta < \eta$) (см. выше) и

$$v_n = v(v_p/v_i)^{(1/\eta)} \left[\frac{1}{3}\lambda^2 k_n^2 + \kappa_i \right]$$

есть среднее количество нейтронов, возникающих при делении, которые избегают поглощения или потери от диффузии из реактора и, замедлившись, присоединяются к распределению медленных нейтронов соответственно n -й парциальной волне.

Если второй показатель деления ω_1^- для самой низкой формы волны $\psi_1(k_1 < k_n, n > 1)$ окажется отрицательным, то функция распределения в конце концов достигнет значений, необходимых для развития цепной

реакции. Это будет иметь место при

$$v > (1/\xi) \left(\frac{1}{3} \lambda^2 k_1^2 + \kappa_p \right) (v_i/v_p)^{(1/\eta)} \left(\frac{1}{3} \lambda^2 k_1^2 + \kappa_i \right). \quad (12.1.32)$$

Если κ выбрано так, что ω_1^2 точно равно нулю, то установившаяся плотность ρ соответствует первой собственной функции ψ_1 , так как все остальные слагаемые ряда (12.1.31) быстро затухают со временем. Поскольку k_1 обратно пропорционально наименьшему диаметру реактора, то, для того чтобы неравенство (12.1.32) могло быть выполнено, размеры реактора должны быть значительно больше среднего свободного пробега λ .

Нагревание шара. Решение задач диффузии для конфигураций, отличных от пластины с параллельными гранями, осуществляется уже знакомым нам способом. Мы рассмотрим здесь только один случай — шар радиуса R . Рассмотрим, например, теплопроводящий шар, медленно вращающийся перед источником тепла (Земля и Солнце). В этом случае краевое условие состоит в задании потока энергии, поглощаемого поверхностью. Если ось вращения совпадает с осью z ($z = r \cos \vartheta$), а излучение исходит из точки, находящейся на большом расстоянии в положительном направлении оси x ($x = r \sin \vartheta \cos \varphi$), то поток тепла через граничную поверхность будет равен $I_0 \sin \vartheta \cos \varphi$. Однако если оси координат жестко связаны с шаром, вращающимся вокруг оси z с угловой скоростью ω , то поток тепла через поверхность $r = R$ равен $I_0 \sin \vartheta \cos (\omega t - \varphi)$. Распределение температуры внутри шара дается решением уравнения (12.1.1), при условии, что произведение κ на радиальную составляющую градиента решения при $r = R$ равно заданному потоку тепла. Это решение есть действительная часть функции

$$\psi(r, \omega) = \frac{I_0}{\sqrt{i\kappa\rho C\omega}} \frac{j_1(\sqrt{i\omega} r/a)}{j_1'(\sqrt{i\omega} R/a)} \sin \vartheta e^{i(\varphi - \omega t)}, \quad (12.1.33)$$

где j_1 — сферическая функция Бесселя, j_1' — ее производная и C — удельная теплоемкость материала ($a^2 = \kappa/\rho C$). При этом, очевидно, предполагается, что тепло, поглощенное на нагреваемой стороне шара, вновь излучается другой стороной. Всякий избыток поглощения или отдачи тепла должен быть связан с наличием в решении непериодического члена, о чем будет еще речь ниже.

Если ω мало по сравнению с $a^2/R^2 = \kappa/\rho CR^2$, то при $r \leq R$ аргумент j_1 мал, а для таких значений аргумента $j_1(z) \simeq (1/3)z$ и $j_1'(z) \simeq 1/3$. Следовательно, для $\omega R^2 \ll a^2$

$$\operatorname{Re}[\psi(r, \omega)] \simeq (I_0/\kappa) r \sin \vartheta \cos (\varphi - \omega t) = (I_0/\kappa) [x \cos \omega t + y \sin \omega t].$$

При этом градиент температуры постоянен вдоль радиуса шара и направлен в сторону источника. С другой стороны, если угловая скорость ω велика по сравнению с a^2/R^2 , то $j_1(z) \simeq -(1/z) \cos z \simeq -(1/2z) e^{-iz}$ для $z = \sqrt{i\omega}(r/a)$, и r , близкого к R , а $j_1'(z) \simeq (i/2z) e^{-iz}$. Следовательно, если $\sqrt{\omega}R \gg a$ и $R - r \ll R$, то распределение температуры определяется как

$$\operatorname{Re}[\psi(r, \omega)] = \frac{I}{\sqrt{\kappa\rho C\omega}} e^{-\sqrt{\frac{1}{2}\omega}(R-r)/a} \cos \left[\omega t - \sqrt{\frac{\rho C\omega}{2\kappa}}(R-r) - \varphi - \frac{1}{4}\pi \right].$$

Это выражение можно интерпретировать как волну, распространяющуюся с фазовой скоростью $\sqrt{2\kappa\omega/\rho C}$ и с длиной волны $\sqrt{8\pi^2\kappa/\rho C\omega}$. Эта волна быстро затухает по мере удаления от поверхности: ее амплитуда уменьшается в $e^{-2\pi}$ раз при смещении на каждую длину волны. Фронт волны вращается вместе с шаром, отставая от него по фазе на 45° .

Если, с другой стороны, весь шар облучается равномерно, т. е. поток энергии пропорционален разности между температурой окружающей среды и температурой поверхности шара, то можно воспользоваться сферически симметричным решением уравнения (12.1.1). Если краевое условие имеет вид $\partial\phi/\partial r = h(e^{-i\omega t} - \phi)$ при $r = R$, то температура внутри шара равна действительной части функции

$$\phi(r, \omega) = \frac{R^2 h}{r} \frac{\sin(\sqrt{i\omega} r/a) / \sin(\sqrt{i\omega} R/a)}{(\sqrt{i\omega} R/a) \operatorname{ctg}(\sqrt{i\omega} R/a) - 1 + Rh} e^{-i\omega t}. \quad (12.1.34)$$

Если облучение начинается, с момента $t = 0$ так, что до этого момента шар имел нулевую температуру, а после этого момента обогреватель имеет температуру, равную единице, то последующая температура шара в точке r в момент t будет выражаться формулой

$$T = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r, \omega) \frac{d\omega}{\omega}, \quad t > 0.$$

Этот интеграл можно, как обычно, вычислять при помощи вычетов.

Наконец, если каким-нибудь образом сферическая поверхность $r = r_0$ нагревается периодически, так что плотность поглощенной энергии равна $\delta(r - r_0) e^{-i\omega t}$, то соответствующая функция Грина

$$\varphi(r|r_0|\omega) = \frac{ar_0}{xr} \frac{e^{-i\omega t}/\sqrt{i\omega}}{\sin(\sqrt{i\omega} R/a)} \begin{cases} \sin\left(\frac{\sqrt{i\omega}}{a} r\right) \sin\left[\frac{\sqrt{i\omega}}{a} (R - r_0)\right], & r < r_0, \\ \sin\left(\frac{\sqrt{i\omega}}{a} r_0\right) \sin\left[\frac{\sqrt{i\omega}}{a} (R - r)\right], & r > r_0, \end{cases} \quad (12.1.35)$$

может быть использована для вычисления распределения температуры при переменном внутреннем нагреве и нулевом граничном условии. Методами, которые мы считаем теперь уже известными, мы вычисляем нестационарную температуру, обусловленную мгновенным поглощением энергии $\delta(r - r_0) \delta(t)$ поверхностью $r = r_0$ при $t = 0$:

$$\varphi_\delta(r|r_0|t) = \frac{2r_0 a^2}{xrR} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n r}{a}\right) e^{-(\pi n a/R)^2 t}, \quad t > 0. \quad (12.1.36)$$

Тогда температура в точке r в момент t , вызванная поглощением энергии с плотностью $P(r, t)u(t)$, при нулевых начальных и граничных условиях равна

$$T(r, t) = \int_0^t d\tau \int_0^R P(r_0, \tau) \varphi_\delta(r|r_0|t - \tau) dr_0.$$

Отсюда можно, например, получить распределение температуры внутри Земли при нагревании радиоактивными источниками, распределенными любым образом по радиусу и во времени.

12.2. Функции распределения для задач диффузии

Во многих случаях приближение, описываемое уравнением диффузии, бывает недостаточным; по этой причине мы постараемся проанализировать атомистические детали процесса диффузии глубже, чем это было возможно сделать в предыдущем параграфе. Для этого мы должны вернуться к

рассмотрению функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, описывающей плотность частиц в элементе фазового пространства, соответствующем положению $\mathbf{r}$, импульсу $\mathbf{p}$ и времени t , т. е. поля в шестимерном (не считая времени) фазовом пространстве. Общие свойства этой функции были рассмотрены в § 2.4. Мы исследуем сейчас некоторые методы, с успехом применяемые для вычисления функции f , и укажем решения нескольких типичных и практически интересных задач.

Сосредоточим внимание в первую очередь на одномерных задачах, соответствующих задаче о «пластине» из предыдущего параграфа. Многие важные примеры мало отличаются от такой схемы, причем, ограничиваясь

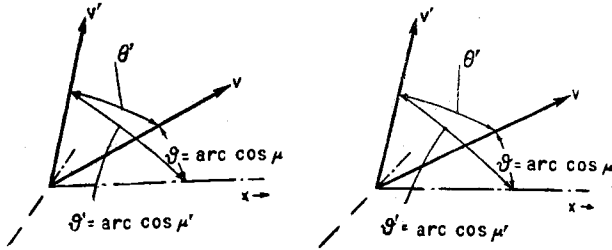


Рис. 12.1. Углы и векторы скоростей, входящие в уравнение переноса.

ею, мы избегаем чрезмерного количества индексов и алгебраических трудностей, которые могли бы только заслонить суть дела. Мы не будем также учитывать обмен энергией при столкновениях и влияние на частицы электрических, магнитных и тому подобных сил. Таким образом, для начала мы можем считать, что все частицы имеют одинаковую (по абсолютной величине) скорость, а в результате столкновений меняется только направление их движения.

При всех этих ограничениях получающаяся функция распределения зависит только от одной координаты x , времени t и угла ϑ между направлением движения частицы и осью x и не зависит ни от каких других возможных переменных. Другими словами, величина $f(x, \mu, t) dx d\mu$ есть число частиц, находящихся в момент времени t внутри призматической пластинки с площадью поперечного сечения, равной единице, расположенной между плоскостями x и $x + dx$, и движущихся в направлении, образующем с осью x угол ϑ , косинус которого заключен между μ и $\mu + d\mu$. В соответствии с (2.4.16) и (2.4.35) и рис. 12.1 уравнение для f будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, \mu, t) + \mu v \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mu, t) = \\ = -n_i Q_i v f(x, \mu, t) + n_i v \iint \sigma(\theta') f(x, \mu', t) d\Omega' + S(x, \mu, t), \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

где n_i есть среднее число атомов-мишеней (или молекул, или ядер) в 1 см^3 , S — средняя плотность частиц, возникающих в одну секунду в 1 см^3 с направлениями движения, заключенными между μ и $\mu + d\mu$, v — средняя скорость частиц и $\mu = \cos \vartheta$. Величина σ описывает угловое распределение упруго рассеиваемых частиц, так что

$$Q_e = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

есть поперечное сечение упругого рассеяния на атомах-мишенях частиц, имеющих скорость v . Величина $Q_i = Q_e/v$ есть полное поперечное сечение,

включая возможное поперечное сечение поглощения, так что $\kappa \leq 1$ есть средняя доля оставшихся частиц, а $1 - \kappa$ — доля частиц, поглощенных при столкновениях. Коэффициент κ иногда называют *коэффициентом альбедо*, так как он определяет отражательную способность (называемую альбедо) слоя материала.

Мы можем теперь принять среднюю длину свободного пробега $1/n_i Q_i$ [см. уравнение (2.4.12)] за единицу длины, а среднее время свободного пробега $1/n_i Q_i v$ — за единицу времени и выразить длину и время в этих единицах. Положив $\xi = n_i Q_i x$ и $\tau = n_i Q_i v t$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(\xi, \mu, \tau) + \mu \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \mu, \tau) + f(\xi, \mu, \tau) = \kappa \int \int \alpha(\theta') f(\xi, \mu', \tau) d\Omega' + s(\xi, \mu, \tau), \quad (12.2.2)$$

где $s = S/n_i Q_i v$, а $\alpha(\theta') = \sigma(\theta')/Q_e$ — фактор углового распределения, нормированный к единице так, что

$$2\pi \int_0^\pi \alpha(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 1.$$

Определим теперь вид функции f , получающейся при различных предположениях относительно α и вида функций источника s для различных краевых условий.

Однородное пространственное распределение. Для начала предположим, что границы рассматриваемой области настолько удалены, что их влиянием можно пренебречь и что функция источника s не зависит от x (однородное пространственное распределение источников). Тогда f также не зависит от x . Если, кроме того, характер возникновения частиц изотропен, так что s не зависит от μ , то f не будет зависеть и от μ , и задача станет тривиальной. Уравнение переноса (12.2.2) принимает вид

$$\frac{df}{d\tau} + (1 - \kappa) f = s(\tau).$$

Его решением является

$$f(\tau) = e^{(\kappa-1)\tau} \left[f(0) + \int_0^\tau e^{(1-\kappa)y} s(y) dy \right], \quad (12.2.3)$$

где начало отсчета τ выбрано так, что $s(\tau) = 0$ при $\tau \leq 0$.

Характер решения существенно зависит от величины $1 - \kappa$, т. е. от доли частиц, поглощаемых при столкновениях. Если эта величина больше нуля, то f остается ограниченным при всех значениях τ (если только s не возрастает до бесконечности). До тех пор пока некоторые частицы поглощаются, будет существовать конечное значение f , достаточно большое для того, чтобы количество частиц, поглощаемых за единицу времени, $(1 - \kappa)f$, могло бы уравновесить s — количество частиц, вводимых за единицу времени. Если, с другой стороны, ни одна частица не поглощается (коэффициент альбедо $\kappa = 1$), то

$$f(\tau) = f(0) + \int_0^\tau s(y) dy,$$

и, поскольку s неотрицательно, f стремится к бесконечности. Частицы не поглощаются, и все вводимые частицы остаются в среде бесконечно долго. Если непрерывно вводятся все новые частицы, то плотность неограниченно возрастает.

Если s не изотропно по отношению к направлениям вводимых частиц, то следует принять во внимание угловую зависимость частиц, рассеянных при столкновении (зависимость α от ϑ). Наиболее естественный метод решения таких задач состоит в разложении функции распределения в ряд по сферическим гармоникам. Если, например, функция источника симметрична относительно некоторой оси, которую можно принять за ось x , то эта ось будет также осью симметрии для распределения f . Следовательно, мы можем положить

$$f(\mu, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\tau) P_n(\mu), \quad s(\mu, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\tau) P_n(\mu),$$

где $\mu = \cos \vartheta$ (см. рис. 12.1). В этих формулах коэффициенты $S_n(\tau)$ известны, а функции $F_n(\tau)$ подлежат определению. Функция рассеяния α также может быть разложена по сферическим гармоникам угла ϑ' , образованного векторами $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}$ (см. рис. 12.1):

$$\begin{aligned} \alpha(\vartheta') &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n P_n(\cos \vartheta') = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta') P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi')], \\ A_n &= 2\pi \int_{-1}^1 \alpha(\arccos \mu) P_n(\mu) d\mu. \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

Чтобы удовлетворить нормировочному условию $2\pi \int \alpha d\mu = 1$, следует принять A_0 равным единице.

Подстановка всех этих рядов в уравнение (12.2.2) (если можно пренебречь членом с $\partial/\partial \xi$) приводит к последовательности уравнений

$$\begin{aligned} (d/d\tau)F_0 + (1-\kappa)F_0 &= S_0(\tau), \\ (d/d\tau)F_n + (1-\kappa A_n)F_n &= S_n(\tau), \quad n > 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть решены аналогично уравнению (12.2.3). Например, для случая, когда и f и s равны нулю при $\tau \leq 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} f(\mu, \tau) &= e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y \sum_{n=0}^{\infty} e^{\kappa A_n(\tau-y)} S_n(y) P_n(\mu) dy = \\ &= e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y s(\mu, y) dy + e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y \sum_{n=0}^{\infty} [e^{\kappa A_n(\tau-y)} - 1] S_n(y) P_n(\mu) dy. \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

Если κ мало по сравнению с единицей (т. е. если при столкновениях большинство частиц поглощается), то вторая форма решения является более удобной, ибо в этом случае второй член в ней мал и

$$f(\mu, \tau) \simeq e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y s(\mu, y) dy + \kappa e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^y \sum_{n=0}^{\infty} (\tau-y) A_n S_n(y) P_n(\mu) dy, \quad A_0 = 1.$$

Тем самым в том случае, когда только немногие частицы рассеиваются упруго, функция распределения f в любой момент времени есть своего рода усредненная по величине и направлению функция источника s . Усреднение проведено по времени предшествующего свободного пробега (единичный интервал τ) и еще добавляется поправочный член, зависящий

от углового распределения упругого рассеяния (т. е. от A_n). Таким образом, среднее время свободного пробега играет роль времени релаксации для функции распределения.

Если коэффициент альбеда κ не очень мал, но функция углового распределения $\alpha(\theta')$ не сильно зависит от угла рассеяния θ' , то все A_n , за исключением первого, будут малы, и хорошим приближением для функции распределения служит выражение

$$f(\mu, \tau) \simeq e^{(\kappa-1)\tau} \int_0^\tau e^{(1-\kappa)y} S_0(y) dy + e^{-\tau} \int_0^\tau e^y [s(\mu, y) - S_0(y)] dy,$$

где $S_0(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s(\mu, \tau) d\mu$ есть среднее значение s по всем углам в момент времени τ . Время релаксации для составляющей, зависящей от угла, совпадает со средним временем свободного пробега. В этом случае составляющая, зависящая от угла, приходит в равновесие с распределением источника значительно быстрее, чем изотропная часть.

Если $s(\mu, \tau)$ имеет некоторую асимптотическую форму, которая, начиная с $\tau = T$, не зависит от τ , то функция распределения достигает установившегося состояния по прошествии времени, несколько более длительного, чем $T + (1-\kappa)^{-1}$. Это установившееся распределение может быть представлено в виде

$$f(\mu, \tau) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(T)}{1-\kappa A_n} P_n(\mu), \quad \tau - T - \frac{1}{1-\kappa} \gg 1,$$

$$f(\mu, \tau) \simeq s(\mu, T) + \kappa \sum_{n=0}^{\infty} A_n S_n(T) P_n(\mu), \quad \kappa \ll 1,$$

$$f(\mu, \tau) \simeq \frac{\kappa}{1-\kappa} S_0(T) + s(\mu, T), \quad A_n \ll 1, \quad n > 0.$$

Вторая формула показывает, что если большинство частиц при столкновениях поглощаются, то асимптотическая форма для f почти та же, что для распределения вводимых частиц s . С другой стороны, если поглощение мало ($1-\kappa \ll 1$), то третья формула показывает, что когда рассеяние почти изотропно, то и установившееся распределение почти изотропно. Заметим, что если поглощения вовсе нет ($\kappa = 1$), то не может быть установившегося состояния, так как, по мере того как вводятся частицы, количество их неограниченно возрастает.

Приближения для рассеяния вперед. В следующем параграфе [см. (12.3.60) и след.] будет показано, что при больших скоростях угловое распределение заряженных частиц, рассеянных атомами, приблизительно пропорционально $[1 + (1/2)(v/u)^2 \sin^2(\vartheta/2)]^{-2}$, где v есть скорость падающей частицы, ϑ — угол ее упругого рассеяния и u — постоянная, определяемая свойствами частицы и атома-мишени. Когда v много больше чем u , почти все рассеяние сосредоточено в направлении «вперед», т. е. в телесном угле $\vartheta < (1/2)\pi$. В таких случаях полезно сконцентрировать внимание на области, близкой к $\vartheta = 0$, и, следовательно, производить вычисления в плоскости, касательной к единичной сфере при $\vartheta = 0$. Другими словами, вместо интегрирования по ϑ' и φ' можно интегрировать по ρ' и φ' , где $\rho' = 2\lg(\vartheta'/2)$. Ошибка такого представления будет велика в области $\rho' > 2$, но если боковое рассеяние и рассеяние назад незначительны, то общая ошибка будет незначительной. Критерием применимости

указанного приближения служит следующее условие: при $\rho > 2$ ($\vartheta > \pi/2$) значения f должны быть пренебрежимо малы по сравнению со значениями f при $\rho \ll 2$ (при ϑ , близких к нулю).

Когда это условие выполнено, можно ввести в касательной плоскости прямоугольные координаты $\beta = \rho \cos \varphi$ и $\eta = \rho \sin \varphi$ и разложить соответствующие функции по полиномам Эрмита от β и η . Так, например, очень хорошим приближением для фактора углового распределения рассеяния при больших скоростях может служить

$$\alpha(\vartheta) \simeq \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(v/u)^2 \vartheta^2} \simeq \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(x^2 + y^2)},$$

где $x = (2v/u) \operatorname{tg}(\vartheta/2) \cos \varphi$ и $y = (2v/u) \operatorname{tg}(\vartheta/2) \sin \varphi$. Элемент площади на касательной плоскости, соответствующий $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ на единичной сфере, приближенно равен $(u/v)^2 dx dy$, так что интеграл от произведения α на $(u/v)^2 dx dy$ по касательной плоскости будет равен единице.

Чтобы провести интегрирование в (12.2.2), выразим координаты ϑ , φ и ϑ' , φ' через прямоугольные координаты x , y и x' , y' ; тогда относительные координаты, соответствующие θ' , будут $x - x'$ и $y - y'$. Представим далее f и s через полиномы Эрмита

$$f = \sum_{m,n} e^{-(x^2 + y^2)} F_{mn}(\tau, \xi) H_{2m}(x) H_{2n}(y),$$

$$s = \sum_{m,n} e^{-(x^2 + y^2)} S_{mn}(\tau, \xi) H_{2m}(x) H_{2n}(y).$$

Мы использовали только четные полиномы, ибо и f и s предполагаются симметричными относительно начала (по той же причине $F_{mn} = F_{nm}$ и $S_{mn} = S_{nm}$).

Если теперь мы сможем выразить функцию $\alpha(\theta')$ под знаком интеграла через полиномы Эрмита от x' , то получим соотношения, связывающие коэффициенты F_{mn} с коэффициентами S_{mn} . Функция $\alpha(\theta')$, выраженная через координаты x' , y' начального и x , y конечного направления скорости частицы, имеет вид

$$\alpha(\theta') = (v^2/\pi u^2) e^{-(x-x')^2 - (y-y')^2}.$$

Необходимые соотношения вытекают из рассмотрения производящей функции полиномов Эрмита

$$e^{-x^2 + 2xx' - x'^2} = e^{-x^2} \sum_m \frac{(x')^m}{m!} H_m(x) = e^{-x^2} \sum_{m,s} \frac{1}{2^m s! (m-2s)!} H_{m-2s}(x') H_m(x).$$

Подставим в интеграл это соотношение и аналогичное соотношение для y , y' . После интегрирования по x' , y' в вышеуказанной сумме останутся только члены с четными значениями m . Приравнявая коэффициенты при многочленах Эрмита с одинаковыми индексами в обеих частях равенства, мы получим в конце концов (приближенные) уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F_{mn} + \frac{\partial}{\partial \xi} F_{mn} + (1 - \chi) F_{mn} \simeq \chi \sum_{s,t} \frac{F_{m-s, n-t}}{2^{2s+2t} s! t!} + S_{mn}, \quad (12.2.6)$$

где суммирование производится по всем s , меньшим чем $m+1$, и по всем t , меньшим чем $n+1$, за исключением члена с $s = t = 0$, который перенесен в левую часть уравнения.

Мы предположили, что v достаточно велико по сравнению с u , так что $\mu = \cos \vartheta \simeq 1 - (1/2)(u/v)^2(x^2 + y^2)$ может считаться приближенно равным

единице в той части плоскости x, y , где F заметно отличны от нуля. Таким образом, для распределений, при которых рассеяние происходит лишь на малые углы, расстояние внутри пластины ξ и время τ равнозначны друг другу [уравнение (12.2.6) симметрично относительно ξ и τ].

В качестве примера рассмотрим установившийся пучок частиц, падающих на грань $\xi=0$ пластины, проникающих в нее и рассеивающихся при проникновении. В этом случае f зависит только от ξ , x и y и не зависит от τ . Чтобы не вводить сложных краевых условий, можно считать, что частицы вступают в распределение лишь после первого столкновения. Если в падающем пучке имеется I_0 частиц в секунду на единицу площади (в единицах квадрата среднего свободного пробега), движущихся в направлении ξ (по нормали к грани пластины), то интенсивность неотклоненных частиц на расстоянии ξ свободных пробегов от поверхности равна $I_0 e^{-\xi}$. Распределение частиц сразу же после первого рассеяния (в соответствии с нашей договоренностью это «возникающие» частицы) будет равно

$$s(\xi, x, y) = I_0 e^{-\xi} \alpha(\vartheta) = (v^2/\pi u^2) e^{-\xi - x^2 - y^2}$$

или

$$S_{mn}(\xi) = (v^2/\pi u^2) \delta_{m0} \delta_{n0} e^{-\xi}.$$

Выражение для F_{00} тогда имеет вид

$$F_{00} = \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(1-x)\xi} \int_0^\xi e^{-xy} dy.$$

Эта величина линейно возрастает от нуля при $\xi=0$, проходит через максимум и затем убывает до нуля пропорционально экспоненте $e^{-(1-x)\xi}$, которая убывает медленно, если коэффициент захвата $1-x$ мал.

Можно вычислить также и другие члены ряда для f . Приведем несколько следующих членов:

$$F_{01} = F_{10} = \frac{v^2}{\pi u^2} \frac{1}{4} x e^{-(1-x)\xi} \int_0^\xi dy_1 \int_0^{y_1} e^{-xy_2} dy_2,$$

$$F_{11} = \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(1-x)\xi} \int_0^\xi dy_1 \int_0^{y_1} \left[\frac{1}{16} x e^{-xy_2} + \frac{1}{8} x^2 \int_0^{y_2} e^{-xy_3} dy_3 \right] dy_2 = 2F_{02} = 2F_{20},$$

$$F_{21} = F_{12} = 3 \frac{v^2}{\pi u^2} e^{-(1-x)\xi} \times$$

$$\times \int_0^\xi dy_1 \int_0^{y_1} \left[\frac{x}{384} e^{-xy_2} + \int_0^{y_2} \left(\frac{3x^2}{128} e^{-xy_3} + \frac{x^3}{32} \int_0^{y_3} e^{-xy_4} dy_4 \right) dy_3 \right] dy_2 = 3F_{03} = 3F_{30} \text{ и т. д.}$$

Все F_{mn} с одинаковым значением $m+n$ пропорциональны друг другу (это соответствует требованию, чтобы f была функцией только от $x^2 + y^2$, а не от x^2 или y^2 в отдельности). Все эти F_{mn} , за исключением F_{00} , при малых ξ возрастают пропорционально ξ^2 , а при больших ξ пропорциональны $\xi^{m+n} e^{-(1-x)\xi}$.

Если поглощения нет ($x=1$), то эти ряды расходятся, ибо каждый член неограниченно возрастает вместе с возрастанием ξ . В этом случае для каждой частицы после некоторого числа столкновений вероятность движения под большими углами ϑ станет большой, и первоначальное предположение, согласно которому большинство частиц движутся почти параллельно оси z (чем оправдывается рассматриваемое приближение), не выполняется. Если же, однако, имеется заметное поглощение ($x < 1$), то

ряды не расходятся, так как большинство частиц поглощаются ранее, чем они успевают в результате рассеяния заметно отклониться от направления оси ξ . (Сравнить с задачами 12.14—12.16.)

Тот же способ решения может быть применен и в случае нестационарного процесса, когда при $t=0$ в пластину вводятся частицы, первоначально двигавшиеся параллельно оси ξ в положительном направлении. Распределение расплывается и среднее отклонение от направления ξ неограниченно возрастает, если $\kappa=1$ (поглощения нет), но остается ограниченным, если $\kappa < 1$. Однако мы затратили уже достаточно времени на рассмотрение слишком схематизированных задач; теперь следует перейти к более общим функциям распределения.

Общие рассматривания, стационарные случаи. Стационарное уравнение для функции распределения в случае, когда f зависит только от одной пространственной координаты и когда внутри области нет источников, получается из (12.2.2) и имеет вид

$$\mu (\partial/\partial \xi) f(\xi, \mu, \varphi) + f(\xi, \mu, \varphi) = R(\xi, \mu, \varphi). \quad (12.2.7)$$

Расстояние ξ измеряется в единицах среднего свободного пробега $1/n_l Q_l$, $\vartheta = \arccos \mu$ есть угол между вектором скорости и осью x (т. е. осью ξ), а φ — угол между плоскостью v , x и плоскостью x , y . Функция

$$R(\xi, \mu, \varphi) = \kappa \int \int \alpha(\theta') f(\xi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu'$$

есть число частиц, включающихся в распределение при (ξ, μ, φ) за среднее время свободного пробега вследствие столкновений, и может быть названа *восстанавливающей функцией столкновений*. Постоянная $\kappa = Q_s/Q_l$ есть коэффициент альбеда, а α — фактор углового распределения упруго рассеянных частиц, нормированный так, чтобы

$$2\pi \int_0^\pi \alpha(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 1.$$

Через θ' обозначен угол между направлениями скорости до (соответствующей ϑ' , φ') и после столкновения (соответствующей ϑ , φ):

$$\cos \theta' = \cos \vartheta' \cos \vartheta + \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi').$$

Когда α выражен через сферические гармоники [аналогично (12.2.4)]:

$$\alpha(\theta') = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n P_n(\cos \theta'),$$

то для обеспечения нормировки α коэффициент A_0 должен быть равен единице. Для изотропного рассеяния все A_n равны нулю, за исключением $A_0=1$.

Интеграл от f , распространенный на все направления, $\rho(\xi) = \int \int f(\xi, \mu, \varphi) d\varphi d\mu$, дает плотность частиц на расстоянии ξ от границы. Средний поток частиц в направлении ξ в любой точке пропорционален

$$J(\xi) = \int \int \mu f(\xi, \mu, \varphi) d\varphi d\mu.$$

Интегрируя равенство (12.2.7) по μ и φ , мы получим [используя (12.2.4) и интегрируя сначала по μ , φ]

$$\begin{aligned} (d/d\xi) J(\xi) &= -\rho(\xi) + \kappa \int \int d\mu d\varphi \int \int \alpha(\theta') f(\xi, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' = \\ &= -(1 - \kappa A_0) \rho(\xi) = -(1 - \kappa) \rho(\xi), \end{aligned} \quad (12.2.8)$$

т. е. уравнение непрерывности для частиц. Если $1 - \kappa = 0$, то частицы не поглощаются, и поток J не зависит от ξ . Если частицы поглощаются ($\kappa < 1$), то (при отсутствии источников) поток J убывает с возрастанием ξ .

Другим интегральным инвариантом движения частиц является второй момент распределения

$$K(\xi) = \int \int \mu^2 f(\xi, \mu, \varphi) d\varphi d\mu.$$

Если средний поток J аналогичен дипольному моменту распределения, то K аналогичен квадрупольному моменту. Если все частицы движутся под прямыми углами к оси x , то K равно нулю; если все они движутся параллельно оси x (безразлично в положительном или отрицательном направлении), то K достигает своей максимальной величины для данного ρ .

Уравнение для K можно получить, умножая (12.2.7) на μ и интегрируя:

$$(d/d\xi) K(\xi) = -J(\xi) + \kappa \int \int \mu d\mu d\varphi \int \int \alpha(\theta') f(\xi, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi'.$$

Разложив $\alpha(\theta')$ в ряд по сферическим гармоникам [см. (12.2.4)] и интегрируя сначала по μ и φ , приводим интеграл к виду

$$\kappa A_1 \int \int \mu' f(\xi, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' = \kappa A_1 J(\xi),$$

так что уравнение для второго момента распределения примет форму

$$(d/d\xi) K(\xi) = -(1 - \kappa A_1) J(\xi). \quad (12.2.9)$$

Если нужно, то можно продолжить эти рассуждения и построить последовательность уравнений для высших моментов, причем каждый следующий момент будет выражен через предшествующий момент, коэффициент альбеда κ и коэффициент в разложении углового распределения $\alpha(\theta)$. Обычно, хотя и не всегда, коэффициенты A_n меньше единицы, так что ни один из высших моментов не оказывается независимым от ξ .

Можно представить себе метод решения, основанный на следующей процедуре. Разложим f по сферическим гармоникам:

$$f(\xi, \vartheta, \varphi) = \sum_{m,n} [F_{mn} \cos(m\varphi) + F_{mn}^0 \sin(m\varphi)] P_n^m(\cos \vartheta),$$

$$\rho(\xi) = 4\pi F_{00}, \quad J(\xi) = \frac{4}{3} \pi F_{01}, \quad K(\xi) = \frac{4}{3} \pi F_{00} + \frac{8}{15} \pi F_{02} \text{ и т. д.}$$

Подставив эти ряды в уравнение (12.2.7), используя разложение (12.2.4) и соотношение

$$\mu P_n^m(\mu) = \frac{n-m+1}{2n+1} P_{n+1}^m(\mu) + \frac{n+m}{2n+1} P_{n-1}^m(\mu),$$

мы в конце концов придем к системе совместных уравнений для коэффициентов $F_{mn}(\xi)$

$$\frac{d}{d\xi} F_{m,n+1} + \frac{2n+3}{n+m+1} (1 - \kappa A_n) F_{mn} + \frac{2n+3}{2n-1} \frac{n-m}{n+m+1} \frac{d}{d\xi} F_{m,n-1} = 0 \quad (12.2.10)$$

и к аналогичной системе для коэффициентов F_{mn}^0 .

Можно попытаться найти f , вычисляя последовательно F_{mn} . К сожалению, однако, обычно бывает не легко выразить через F_{mn} краевые условия на граничной поверхности. Пусть, например, пластина полубесконечна и представляет собой среду, заполняющую все полупространство $\xi > 0$. Предположим, что на поверхность $\xi = 0$ падает поток частиц, движущихся в положительном ξ -направлении. Распределение f при $\xi = 0$ имеет следующую

щую сложную форму: для $\mu > 0$ оно описывается выражением $I_0 \delta(1 - \mu)$ (представляющим распределение падающих частиц), но при $\mu < 0$ оно не равно нулю и неизвестно (в него входят частицы, претерпевшие в среде одно или больше столкновений и выброшенные из нее). Фактически во многих задачах желательно изучить именно поведение $f(0, \mu, \varphi)$ для $\mu < 0$, так как оно дает угловое распределение частиц, диффузно отраженных от поверхности среды. Тем не менее указанные выше решения полезны при описании предельного случая в области, находящейся на большом расстоянии от границ (см. также задачи 12.8—12.13).

Предполагая, что зависимость F_{mn} от ξ выражается показательными функциями $e^{-k\xi}$, мы сведем систему (12.2.10) к системе совместных алгебраических уравнений, из которых можно в принципе определить допустимые значения k и соответствующие значения F_{mn} .

Однако из рекуррентных формул для F_{mn} замкнутое выражение для k получить достаточно сложно, так что этот метод решения в дальнейшем не будет рассматриваться.

Заметим, что подстановка выражения $f = e^{-k\xi} g(\mu)$ в интегро-дифференциальное уравнение (12.2.7) приводит к некоторым возможным решениям в случае изотропного рассеяния ($\alpha = 1/4\pi$), так как в этом случае $R(\xi, \mu, \varphi)$ не зависит от μ и

$$(1 - \mu k) g(\mu) = G, \quad R(\xi, \mu, \varphi) = e^{-k\xi} G.$$

Подстановка $g = G/(1 - \mu k)$ в интеграл для R дает

$$G = \frac{\kappa G}{4\pi} \iint \frac{d\mu' d\varphi'}{1 - k\mu'}, \quad 1 = \frac{1}{2} \kappa \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{1 - k\mu'} = \frac{\kappa}{k} \operatorname{Ar} \operatorname{th} k,$$

и для k получается уравнение

$$\frac{\operatorname{th}(k/\kappa)}{k/\kappa} = \kappa, \quad \kappa = \frac{k}{\operatorname{Ar} \operatorname{th} k}. \quad (12.2.11)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (4.4.4), которое было изучено для всех комплексных значений k/κ . На рисунках в гл. 4 можно увидеть общие свойства корней k и характер их зависимости от κ . Так, например, при $\kappa = 1$ k равно нулю, или $\pm 4,493 i$, или $\pm 7,725 i$, или $\pm 10,904 i$ и т. д.; при $\kappa = 0,5$ k равно $\pm 0,9575$, или $\pm 2,138 i$, или $\pm 3,798 i$, или $\pm 5,406 i$, но при $\kappa = 0$ k равно единице. Следовательно, решением (12.2.7) для изотропного рассеяния при $\kappa = 0,5$ должно быть

$$f(\xi, \mu) = \frac{C_1 e^{-0,96\xi}}{1 - 0,96\mu} + \frac{C_2 e^{+0,96\xi}}{1 + 0,96\mu} + B_1 \frac{\cos(2,14\xi) + 2,14\mu \sin(2,14\xi)}{1 + (2,14\mu)^2} + \dots,$$

если только это выражение удовлетворяет краевым условиям при $\xi = 0$.

Для $\kappa = 1$ (отсутствие поглощения) возможно другое простое решение, даже если α зависит от θ . Подставив в уравнение (12.2.7) $f = G(\mu - k\xi)$, можно показать, что k должно быть равно $1 - A_1$. Выразив G через полный поток J (который не зависит от ξ , если $\kappa = 1$), мы получим

$$f = (3/4\pi) J [\mu - (1 - A_1) \xi]. \quad (12.2.12)$$

Это выражение также есть решение, которое не удовлетворяет обычным краевым условиям. Мы, однако, увидим на стр. 576, что оно пригодно как асимптотическая форма решения.

Интегральные соотношения между переменными. Можно, конечно, получить формальное решение уравнения (12.2.7), рассматривая R как известную

функцию от ξ , μ и φ и обращаясь с этим уравнением, как с неоднородным уравнением по ξ . В решение входит в качестве слагаемого решение однородного уравнения $I_0(\mu, \varphi) e^{-\xi/\mu}$. Эта часть при $\mu > 0$ представляет те падающие частицы, которые поступают в среду извне через левую грань, а при $\mu < 0$ — через правую грань. Так, например, для пластины, расположенной между плоскостями $\xi = 0$ и $\xi = a$, формальным решением уравнения (12.2.7) является

$$\begin{aligned} f(\xi, \mu, \varphi) &= f(0, \mu, \varphi) e^{-\xi/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^{\xi} R(\eta, \mu, \varphi) e^{-(\xi-\eta)/\mu} d\eta, \\ f(\xi, -\mu, \varphi) &= f(a, -\mu, \varphi) e^{(\xi-a)/\mu} + \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_{\xi}^a R(\eta, -\mu, \varphi) e^{(\xi-\eta)/\mu} d\eta, \quad 0 < \mu \leq 1. \end{aligned} \quad (12.2.13)$$

Это решение пришлось, конечно, разбить на две части, соответствующие частицам с положительной и отрицательной ξ -компонентой скорости. Это необходимо потому, что мы можем задавать на поверхности только распределение входящих, но никак не выходящих частиц. Здесь, например, мы задаем $f(0, \mu, \varphi)$ и стремимся найти $f(0, -\mu, \varphi)$.

Пара выражений (12.2.13), однако, не дает решения, поскольку само R зависит от f . Эти соотношения дают интегральные уравнения для f , из которых можно получить более простое интегральное уравнение для средней плотности ρ . Для изотропного рассеяния ($\alpha = 1/4\pi$), например, R равно $\rho/4\pi$, так что f можно определить из соотношений

$$f(\xi, \mu, \varphi) = \begin{cases} f(0, \mu, \varphi) e^{-\xi/\mu} + \frac{\mu}{4\pi\mu} \int_0^{\xi} \rho(\eta) e^{(\eta-\xi)/\mu} d\eta, & 0 < \mu \leq 1, \\ f(a, \mu, \varphi) e^{(a-\xi)/\mu} - \frac{\mu}{4\pi\mu} \int_{\xi}^a \rho(\eta) e^{(\eta-\xi)/\mu} d\eta, & -1 \leq \mu < 0, \end{cases}$$

которые подобны (2.4.19). Как упоминалось в § 2.4, первый член в верхнем выражении описывает остаток первоначального пучка, который проник под углом $\arcsos \mu$ через поверхность $\xi = 0$ и без столкновений прошел ξ/μ средних свободных пробегов. Второй интегральный член описывает приток в функцию распределения тех частиц, которые имели свое последнее столкновение на некоторой глубине η [поскольку они движутся вправо ($\mu > 0$), η должно быть меньше чем ξ] и достигли глубины ξ без дальнейших столкновений.

Наконец, зная, что функция распределения f может быть вычислена (по крайней мере для изотропного рассеяния), если известна плотность, мы можем составить интегральное уравнение для ρ . Это было уже сделано в § 2.4 [см. (2.4.20)]. Чтобы получить искомое уравнение нужно только проинтегрировать равенства (12.2.13) по μ . Поскольку $\rho(\xi) = \iint f(\xi, \mu, \varphi) d\mu d\varphi$,

$$\rho(\xi) = \Phi(\xi) + \frac{1}{2} \times \int_0^a \rho(\eta) E_1(|\eta - \xi|) d\eta, \quad (12.2.14)$$

где

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{dy}{y^n}$$

и

$$\Phi(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\infty} \left[f\left(0, \frac{1}{y}, \varphi\right) e^{-\xi y} + f\left(a, -\frac{1}{y}, \varphi\right) e^{-(a-\xi)y} \right] dy.$$

Это уравнение Фредгольма второго рода (см. гл. 8); если $\Phi = 0$, оно однородно, а если $a \rightarrow \infty$, то получающееся уравнение (2.4.20) называется *уравнением Милна*. Мы рассмотрим это уравнение несколькими страницами ниже, а сейчас рассмотрим различные способы решения уравнения (12.2.7).

Большая часть задач диффузии [типа, описываемого уравнением (12.2.7)], которые мы будем рассматривать, сводится к двум общим случаям. Один случай — это случай очень толстой пластины ($a \rightarrow \infty$), в которую частицы или вводятся с дальней стороны или образуются в пластине на некотором расстоянии от поверхности $\xi = 0$, так что в области $\xi < 0$ нет других частиц, кроме вышедших из пластины. К этому случаю сводится диффузия света, возникающего внутри звезды, достигающего ее поверхности и излучаемого вовне; в эту схему укладывается также задача о нейтронах, проникающих сквозь защитный слой; эти нейтроны приходят с внутренней стороны слоя, причем некоторые из них достигают внешней поверхности и выходят через нее наружу. Фактически к этой схеме приближенно сводится любая задача о материале со свободной поверхностью, содержащем диффундирующие частицы, если только поверхность материала близка к плоскости и плотность частиц зависит главным образом от глубины под поверхностью (по крайней мере на участке, сравнимом с длиной нескольких средних свободных пробегов) и если на эту поверхность извне не падают никакие частицы. Такие задачи могут быть названы *задачами о диффузной эмиссии*.

В этом случае мы принимаем $a \rightarrow \infty$, и, поскольку частиц, падающих на поверхность $\xi = 0$, нет, функция $f(0, \mu, \varphi)$ ($\mu > 0$) в (12.2.13) равна нулю. Весь процесс симметричен относительно оси ξ , так что f и R не зависят от φ . В этих задачах нас обычно мало интересует поглощение частиц внутри материала; главным образом мы желаем выяснить угловое распределение частиц, покидающих поверхность $\xi = 0$. Поэтому мы полагаем $\kappa = 1$ и выражение (12.2.13) принимает вид

$$f(\xi, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^{\xi} R(\eta, \mu) e^{-(\xi-\eta)/\mu} d\eta, & 0 < \mu \leq 1, \\ -\frac{1}{\mu} \int_{\xi}^{\infty} R(\eta, \mu) e^{-(\xi-\eta)/\mu} d\eta, & 0 > \mu \geq -1. \end{cases} \quad (12.2.15)$$

Если рассеяние изотропно [$R(\eta, \mu) = \rho(\eta)/4\pi$], то функция распределения f просто связана с плотностью $\rho(\xi)$, и интегральное уравнение для ρ превращается в стандартное уравнение Милна

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \rho(\eta) E_1(|\xi - \eta|) d\eta. \quad (12.2.16)$$

Краевое условие для f имеет вид $f(0, \mu) = 0$ при $0 < \mu \leq 1$. Подлежит вычислению величина $f(0, \mu)$ при $0 > \mu \geq -1$, дающая угловое распределение излучения во внешней области.

Другой случай, представляющий интерес, — это случай достаточно толстой или достаточно сильно поглощающей пластины, когда можно пренебречь частицами, выходящими с другой стороны (или теми, которые воз-

никают в глубине пластины) и можно ограничиться рассмотрением поведения частиц, падающих на поверхность $\xi = 0$. Рассмотрим однородный пучок, падающий на поверхность $\xi = 0$ по направлению, определяемому углами φ_0 , $\arcs \cos \mu_0$, так что

$$f(0, \mu, \varphi) = I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad 0 < \mu \leq 1.$$

Требуется найти угловое распределение $f(0, \mu, \varphi)$ ($0 > \mu \geq -1$) частиц, диффузно отраженных от пластины. Такие задачи могут быть названы *задачами о диффузном отражении*.

В этом случае, поскольку падающий пучок зависит от φ , диффузно отраженное излучение, вообще говоря, зависит от φ и от μ . Но при изотропном рассеянии частица после первого столкновения «забывает» первоначальное направление своего движения. Таким образом, функцию распределения можно расчитать на еще не отклоненную часть падающего пучка $I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\xi/\mu_0}$ и не зависящий от φ остаток распределения $f_d(\xi, \mu)$, учитывающий частицы, претерпевшие хотя бы одно столкновение. В этом случае формула (12.2.13) для f_d принимает вид

$$f_d(\xi, \mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{4\pi\mu} \int_0^{\xi} \rho(\eta) e^{(\eta-\xi)/\mu} d\eta, & 0 < \mu \leq 1, \\ \frac{-\mu}{4\pi\mu} \int_{\xi}^{\infty} \rho(\eta) e^{(\eta-\xi)/\mu} d\eta, & 0 > \mu \geq -1, \end{cases} \quad (12.2.17)$$

причем зависимость от φ в функции f сохраняется лишь в части, соответствующей падающим частицам, не претерпевшим еще ни одного столкновения.

Найденное угловое распределение диффузно отраженных частиц дает возможность получить еще одно интегральное соотношение, которое окажется полезным в дальнейшем. Предположим, что диффузно отраженное распределение для пучка, падающего под углом $\arcs \cos \mu_0$ к оси ξ , имеет вид $(I_0/\mu) S(\mu, \mu_0) = f(0, -\mu)$. Функция $S(\mu, \mu_0)$ есть ξ -компонента интенсивности отраженного под углом $\arcs \cos(-\mu)$ пучка при единичной интенсивности направленного под углом $\arcs \cos \mu_0$ падающего пучка; она определена только для $\mu, \mu_0 \geq 0$. Если мы имеем дело с изотропным рассеянием, то S не зависит от $\varphi - \varphi_0$, иначе мы должны были бы писать $S(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0)$. Нетрудно показать, что $S(\mu, \mu_0) = S(\mu_0, \mu)$.

Функция $S(\mu, \mu_0)$, очевидно, дает все, что нужно для решения задачи о диффузном отражении. Выведем интегральное соотношение, содержащее S . Для этого заметим, что на глубине ξ под поверхностью частицы, движущиеся вглубь пластины, можно рассматривать как «падающие» на плоскость $\xi = \text{const}$, проникающие сквозь нее и вновь диффузно отражаемые обратно. На глубине ξ такими частицами оказываются, во-первых, те из падающих частиц, которые еще ни разу не испытали соударения, $I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\xi/\mu_0}$, и, во-вторых, частицы, входящие в остаток распределения, $f_d(\xi, \mu)$, при $\mu > 0$. Для каждого направления движения рассматриваемых частиц мы получаем распределение $S(\mu, \mu_0)/\mu$ рассеянных частиц, возвращающихся к $\xi = 0$ из части пластины справа от плоскости $\xi = \text{const}$. Поэтому для изотропного рассеяния мы можем вычислить распределение частиц, движущихся наружу, через функцию рассеяния S и функцию распределения частиц, движущихся вглубь пластины,

$$f(\xi, -\mu) = \frac{1}{\mu} I_0 e^{-\xi/\mu_0} S(\mu, \mu_0) + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') f_d(\xi, \mu') d\mu'. \quad (12.2.18)$$

Это интегральное соотношение окажется весьма полезным в дальнейшем.

Подобно этому, для случая диффузной эмиссии единственное обстоятельство, вызывающее различие между величиной $f(\xi, -\mu)$ и внешним излучением $f(0, -\mu)$, состоит в том, что влево от плоскости ξ имеется участок, где возникают частицы, движущиеся внутрь пластины. Они отражаются обратно в соответствии с функцией S :

$$f(\xi, -\mu) = f(0, -\mu) + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') f(\xi, \mu') d\mu'. \quad (12.2.19)$$

Это замечание также окажется полезным.

Расчет диффузного рассеяния. Функция $S(\mu, \mu_0)$, определяющая ξ -компоненту интенсивности диффузно отраженного под углом $\arccos(-\mu)$ излучения, вызванного падающим под углом $\arccos \mu_0$ единичным пучком, представляет собой своего рода функцию Грина для функции распределения. Через эту функцию могут быть выражены решения задачи о диффузной эмиссии и диффужном отражении. Однако для получения окончательного результата приходится преодолеть немало трудностей, заключающихся в уже написанных уравнениях.

Прежде всего продифференцируем (12.2.18) по ξ и положим $\xi = 0$:

$$\mu f'(0, -\mu) = -\frac{1}{\mu_0} I_0 S(\mu, \mu_0) + 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') f_d(0, \mu') d\mu',$$

где $f'(\xi, \mu) = \partial f(\xi, \mu) / \partial \xi$. Теперь можно вновь использовать уравнение (12.2.7) (для изотропного рассеяния):

$$\mu f'_d(0, \mu) = -f_d(0, \mu) + R(0), \quad \mu f'(0, -\mu) = f(0, \mu) - R(0).$$

Но величина $R(0)$ есть общее количество всех частиц, рассеянных во всех направлениях атомами-мишенями, находящимися вблизи поверхности $\xi = 0$. Тем самым количество падающих и диффундирующих частиц, рассеянных при $\xi = 0$, будет равно

$$R(0) = \frac{\kappa}{4\pi} I_0 \left[1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu'', \mu_0) \frac{d\mu''}{\mu''} \right] = \frac{\kappa \rho(0)}{4\pi}.$$

Используем также тот факт, что $f(0, -\mu) = (I_0/\mu) S(\mu, \mu_0)$ и $f_d(0, \mu) = 0$ ($\mu > 0$), и соотношение симметрии $S(\mu', \mu_0) = S(\mu_0, \mu')$. Тогда из уравнения для $\mu f'(0, -\mu)$ мы получим для функции рассеяния S уравнение простого вида

$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \right) S(\mu, \mu_0) = \frac{\kappa}{4\pi} \left[1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu'', \mu_0) \frac{d\mu''}{\mu''} \right] \left[1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \right]$$

или

$$S(\mu, \mu_0) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\mu \mu_0}{\mu + \mu_0} H(\mu_0) H(\mu), \quad (12.2.20)$$

где

$$H(\mu) = 1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'}.$$

Функция H есть стандартное угловое распределение, через которое можно выразить функцию рассеяния S . Для определения H мы с по-

мощью (12.2.20) составим для нее интегральное уравнение

$$H(\mu) = 1 + \frac{1}{2} \kappa \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (12.2.21)$$

Нетрудно показать, что $H(\mu)$ нормирована так, что

$$\int_0^1 H(\mu) d\mu = \frac{2}{\kappa} (1 - \sqrt{1 - \kappa}), \quad (12.2.22)$$

и что функция H удовлетворяет также интегральному уравнению

$$\frac{1}{H(\mu)} = \sqrt{1 - \kappa} + \frac{1}{2} \kappa \int_0^1 H(\mu') \frac{\mu' d\mu'}{\mu + \mu'}. \quad (12.2.23)$$

Для последнего уравнения можно получить достаточно точное решение методом последовательных приближений. Результаты можно проверить, используя (12.2.22). Несколько значений H для различных значений κ и μ приведены в нижеследующей таблице. В дополнение к таблице заметим, что $H(\mu) = 1$ при $\kappa = 0$ и $H(0) = 1$.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ $H(\mu)$

$\mu =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\kappa = 0,2$	1,0389	1,0555	1,0659	1,0732	1,0786
$\kappa = 0,4$	1,0858	1,1252	1,1509	1,1694	1,1834
$\kappa = 0,6$	1,1452	1,2186	1,2689	1,3063	1,3354
$\kappa = 0,8$	1,2286	1,3611	1,4590	1,5358	1,5982
$\kappa = 1,0$	1,4503	1,8293	2,1941	2,5527	2,9078

С помощью функции $H(\mu)$ можно найти угловое распределение частиц на поверхности $\xi = 0$ для падающего пучка, направленного под углом $\arcs \cos \mu_0$ к оси ξ ,

$$f(0, \mu) = \begin{cases} I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), & 0 < \mu \leq 1, \\ (I_0/4\pi) [\kappa \mu_0 / (\mu_0 - \mu)] H(\mu_0) H(-\mu), & 0 > \mu \geq -1. \end{cases} \quad (12.2.24)$$

Заметим, что влияние коэффициента альбеда κ сказывается на величине полного отражения и непосредственно и косвенно через изменение углового распределения диффузного отражения; чем ближе κ к нулю, тем равномернее распределение.

Решение для более общего распределения падающих частиц можно получить, интегрируя приведенное выражение по μ_0 . Если это распределение не аксиально-симметрично, так что количество частиц (все они имеют одинаковую по величине скорость), косинус угла падения которых лежит между μ_0 и $\mu_0 + d\mu_0$, равно $2\pi f_0(\mu_0) d\mu_0$, то угловое распределение на поверхности $\xi = 0$ будет иметь вид

$$f(0, \mu) = \begin{cases} f_0(\mu), & 0 < \mu \leq 1, \\ \frac{1}{2} \kappa H(-\mu) \int_0^1 \frac{\mu_0 f_0(\mu_0) H(\mu_0)}{\mu_0 - \mu} d\mu_0, & 0 > \mu \geq -1. \end{cases} \quad (12.2.25)$$

После того как угловое распределение при $\xi = 0$ получено, функцию распределения при $\xi > 0$ можно найти, непосредственно решая уравнение (12.2.7). Например, функцию f можно разложить по сферическим гармоникам, как указано в (12.2.10). Зависимость коэффициентов от ξ можно легко найти, поскольку известны их значения при $\xi = 0$. Кроме этого, можно, как это будет показано ниже, произвести преобразование Лапласа функции распределения.

Расчет диффузной эмиссии. Если поглощения нет ($\kappa = 1$) и если нет частиц, падающих на поверхность $\xi = 0$, то частицы из полубесконечной пластины постепенно диффундируют вовне через поверхность $\xi = 0$. Так как при $\kappa = 1$ полный поток J всюду одинаков [см. (12.2.8)], то естественно предположить, что он всюду отрицателен, поскольку поток, выходящий через поверхность $\xi = 0$, отрицателен. Соотношение между угловым распределением испускаемых частиц $f(0, -\mu)$ и функцией рассеяния $S(\mu, \mu_0)$ определяется формулой (12.2.19); из этого соотношения можно определить $f(0, -\mu)$ через функцию H .

Как и ранее, продифференцируем (12.2.19) и положим $\xi = 0$:

$$\mu f'(0, -\mu) = 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') f'(0, \mu') d\mu',$$

но $\mu' f'(0, \mu') = R(0)$ и $\mu f'(0, -\mu) = f(0, -\mu) - R(0)$, причем для изотропного рассеяния при отсутствии поглощения $R(\xi) = \rho(\xi)/4\pi$. Следовательно,

$$f(0, -\mu) = \frac{1}{4\pi} \rho(0) \left[1 + 2\pi \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \right] = \frac{1}{4\pi} \rho(0) H(\mu), \quad (12.2.26)$$

и мы получили распределение испускаемых частиц, выраженное через ту же функцию $H(\mu)$, что и в случае диффузного отражения.

При отсутствии поглощения асимптотическая зависимость f от ξ , μ и полный поток описываются формулой (12.2.12). Если J отрицателен и рассеяние изотропно, можно утверждать, что

$$f(\xi, \mu) = -\frac{3}{4\pi} (\xi - \mu) J + f_1(\xi, \mu),$$

где $f_1 \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Можно также получить соотношение между f_1 и функцией рассеяния $S(\mu, \mu')$. Поскольку $(3/4\pi)(\mu - \xi)J$ есть точное решение уравнения (12.2.7), рассеяние поправочного члена f_1 должно давать в точности f_1 ; другими словами,

$$f(\xi, -\mu) = -\frac{3}{4\pi} (\xi - \mu) J + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') f_1(\xi, \mu') d\mu', \quad 0 < \mu \leq 1.$$

С другой стороны, так как $f(0, \mu') = 0$ для $\mu > 0$, то мы должны иметь $f_1(0, \mu') = (3/4\pi)\mu'$. В конце концов получим

$$f(0, -\mu) = -\frac{3}{4\pi} J \left[\mu + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') \mu' d\mu' \right]. \quad (12.2.27)$$

Эта формула представляет распределение излучения через J и функцию рассеяния S .

Умножая (12.2.26) на $2\pi\mu$ и интегрируя по μ от -1 до 0 ($f=0$ при $\mu > 0$), а также умножая (12.2.27) на 2π и опять интегрируя по μ , получим

$$-J = \frac{1}{4} \rho(0) \left[1 + 4\pi \int_0^1 d\mu \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{\mu'}{\mu} d\mu' \right],$$

$$\rho(0) = -\frac{3}{4} J \left[1 + 4\pi \int_0^1 d\mu \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{\mu'}{\mu} d\mu' \right].$$

Отсюда следует интересное соотношение между средним потоком и плотностью частиц на поверхности $\xi=0$ для консервативного случая ($\kappa=1$) и изотропного рассеяния:

$$\rho(0) = -\sqrt{3}J. \quad (12.2.28)$$

В этом случае диффузная эмиссия выражается в виде

$$f(0, -\mu) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} J H(\mu), \quad (12.2.29)$$

где J — отрицательная величина.

Такой же метод может быть применен и в том случае, когда постоянная κ отлична от единицы. В этом случае [см. (12.2.11)] асимптотическое представление функции распределения имеет вид $Ge^{k\xi}/(1+\mu k)$, где k — положительный, действительный корень уравнения $k = \text{th}(k/\kappa)$. Так как никакие дополнительные частицы не вступают в среду через поверхность $\xi=0$ (фактически они только выходят через эту поверхность) и так как имеется поглощение ($\kappa < 1$), то и функция распределения $f(\xi, \mu)$ и плотность $\rho(\xi)$ должны экспоненциально возрастать с возрастанием ξ для того, чтобы, несмотря на поглощение, все еще оставалось достаточно частиц, уходящих через поверхность $\xi=0$. Поэтому мы полагаем

$$f(\xi, \mu) = \frac{Ge^{k\xi}}{1+\mu k} + f_1(\xi, \mu), \quad f_1 \underset{\xi \rightarrow \infty}{\simeq} 0.$$

Тогда

$$f(\xi, -\mu) = \frac{Ge^{k\xi}}{1-\mu k} + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 S(\mu, \mu') f_1(\xi, \mu) d\mu$$

или, поскольку $f_1(0, \mu') = -G/(1+\mu'k)$,

$$f(0, -\mu) = G \left\{ \frac{1}{1-k\mu} - \frac{2\pi}{\mu} \int_0^1 \frac{S(\mu, \mu')}{1+k\mu'} d\mu' \right\} =$$

$$= G \left\{ \frac{1}{1-k\mu} - \frac{1}{2} \kappa H(\mu) \int_0^1 \frac{\mu' H(\mu') d\mu'}{(\mu+\mu')(1+k\mu')} \right\}.$$

После дальнейших преобразований мы приходим в конце концов к выводу, что для случая $\kappa < 1$ в отсутствии падающего на поверхность $\xi=0$ пучка диффузное излучение, испускаемое поверхностью $\xi=0$, равно

$$f(0, -\mu) = \frac{G}{H(1/k)} \frac{H(\mu)}{1-k\mu}. \quad (12.2.30)$$

При решении более сложных задач, как, например, задач о проникновении через пластину конечной толщины, или при изучении влияния изотропного рассеяния при диффузном отражении или эмиссии приходится включать в рассмотрение значительно большее число деталей. Однако и эти задачи можно решить методами, сходными с уже рассмотренными,

но выкладки окажутся более утомительными. С ними можно ознакомиться по книгам или статьям, посвященным этой теме.

Решение методом преобразования Лапласа. Другим способом можно прийти к решению задачи о диффузной эмиссии, применяя преобразование Лапласа. Эта возможность становится очевидной из анализа выражения (12.2.15), связывающего функцию распределения (для случая изотропного рассеяния и отсутствия поглощения и падающего пучка) с плотностью частиц $\rho(\xi)$, а также интегрального уравнения (12.2.16) для ρ . Ядро $E_1(|\xi - \eta|)$ интегрального уравнения для ρ [E_1 определено в (12.2.14)] есть функция от $|\xi - \eta|$; в § 8.4 мы видели, что подобные ядра особенно удобны для применения метода преобразования Лапласа или Фурье. Другие преимущества этого метода выяснятся в ходе решения.

Преобразования Лапласа функции распределения и плотности частиц определяются так:

$$F(p, \mu) = \int_0^{\infty} f(\xi, \mu) e^{-p\xi} d\xi, \quad \text{Re } p > 0, \quad (12.2.31)$$

$$P(p) = \int_0^{\infty} \rho(\xi) e^{-p\xi} d\xi = 2\pi \int_{-1}^1 F(p, \mu) d\mu.$$

Отметим также одно полезное обстоятельство: преобразование Лапласа для плотности связано с угловым распределением испускаемого излучения. Из формул (12.2.15), выражающих f через ρ (для изотропного рассеяния без поглощения $R = \rho/4\pi$), следует, что распределение испускаемого излучения имеет вид

$$f(0, -\mu) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{\infty} \rho(\eta) e^{-\eta/\mu} d\eta = \frac{1}{4\pi\mu} P\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (12.2.32)$$

Это одна из дополнительных «прибылей», приносимых методом преобразования Лапласа; если мы ищем только угловое распределение испускаемого излучения, то нет необходимости производить обратное преобразование и находить ρ по P ; можно использовать само P . Это обстоятельство косвенно связано с тем, что, как мы заметили ранее, $f(0, -\mu)$ значительно легче вычислить, чем $f(\xi, \mu)$. Мы могли бы при желании остановиться на этом, ибо величину $f(0, -\mu)$ мы нашли еще раньше [см. (12.2.29)], и теперь могли бы, используя (12.2.32) при помощи обратного преобразования, получить $\rho(\xi)$, а отсюда и $f(\xi, \mu)$.

Однако этот метод приносит и другие «прибыли», и поэтому мы продолжим наше рассмотрение. Например, преобразование Лапласа уравнения переноса для данного случая

$$\mu f'(\xi, \mu) + f(\xi, \mu) = \rho(\xi)/4\pi$$

дает

$$F(p, \mu) = \frac{1}{1 + p\mu} \left[\frac{1}{4\pi} P(p) + \mu f(0, \mu) \right]. \quad (12.2.33)$$

Мы получаем простое алгебраическое соотношение между преобразованиями Лапласа f и ρ и функции распределения на поверхности. Умножая на $2\pi d\mu$ и интегрируя по μ , мы наконец получаем уравнение для преобразования Лапласа плотности

$$P(p) \left[1 - \frac{1}{p} \text{Arth } p \right] = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\mu f(0, \mu)}{1 + p\mu} d\mu. \quad (12.2.34)$$

Теперь еще попробуем «поднять самого себя за волосы», используя метод Винера — Хопфа. Этот метод был уже рассмотрен в § 8.4 в связи с той же задачей. Чтобы не разрывать нити рассуждения, мы воспроизведем здесь основные результаты. В (12.2.34) входят три функции: $P(p)$, $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ и

$$j(p) = 2\pi \int_{-1}^0 \frac{\mu f(0, \mu)}{1 + p\mu} d\mu.$$

Функция $P(p)$ должна быть аналитической во всей области $\operatorname{Re} p > 0$, ибо ее обратное преобразование равно нулю при $\xi < 0$. Функция $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ оказывается аналитической в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 1$. Функция $j(p)$ аналитична во всей области $\operatorname{Re} p < 1$, ибо $\mu f(0, \mu)$ ограничена в области $0 > \mu \geq -1$ и равна нулю при $\mu > 0$. (Если бы j не было равно нулю при $\mu > 0$, то область интегрирования не могла бы быть сведена к интервалу $0 > \mu \geq -1$, интеграл имел бы полюсы в области $\operatorname{Re} p < 1$ и рассматриваемый метод был бы неприменим.) Но если нет падающего на поверхность $\xi = 0$ излучения, т. е. если $f(0, \mu)$ равно нулю при $\mu > 0$, то $j(p)$ аналитична во всей области $\operatorname{Re} p < 1$ и при $p \rightarrow \infty$ стремится к нулю как $1/p$.

Если теперь мы сможем представить $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ в виде отношения двух функций, одна из которых аналитична в области $\operatorname{Re} p > 0$, а другая в области $\operatorname{Re} p < 1$, то можно будет, умножив исходное выражение на некоторую функцию, получить равенство, одна часть которого аналитична в области $\operatorname{Re} p > 0$, а другая в области $\operatorname{Re} p < 1$. Они равны между собою в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$ и при аналитическом продолжении оказываются равными всюду, а тем самым представляют функцию, аналитическую всюду (и потому равную постоянной).

Как в § 8.4, возьмем логарифм величины $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ и попытаемся представить его в виде разности двух функций, аналитических в соответствующих областях. Но мы не можем использовать непосредственно $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$, так как это выражение обращается в нуль при $p = 0$ (как p^2) и логарифм при этом имеет особенность. Если мы возьмем $(1/p^2) [1 - (1/p) \operatorname{Arth} p]$, то логарифм будет бесконечно возрастать при $p \rightarrow \infty$, но если положим

$$\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p} \operatorname{Arth} p\right) = \frac{\tau_+(p)}{\tau_-(p)},$$

то логарифмы обеих частей равенства будут аналитичны в полосе $1 > \operatorname{Re} p > -1$ и будут стремиться к нулю при $|p| \rightarrow \infty$. Чтобы найти функции $\tau_{\pm}$, удовлетворяющие этому равенству и аналитические в нужных областях, мы воспользуемся интегральной формулой Коши (4.2.8), выбрав контур интегрирования вдоль границы полосы, внутри которой $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p$ аналитична:

$$\ln \left[\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p} \operatorname{Arth} p\right) \right] = \ln \tau_+(p) - \ln \tau_-(p), \quad (12.2.35)$$

$$\ln \tau_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left(1 - \frac{1}{s} \operatorname{Arth} s\right) \right] \frac{ds}{s-p}, \quad 1 > \beta > 0,$$

$$\ln \tau_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left(1 - \frac{1}{s} \operatorname{Arth} s\right) \right] \frac{ds}{s-p}.$$

Первый интеграл (который дает τ_+) аналитичен при $\operatorname{Re} p < \beta$, а второй (который дает τ_-) аналитичен при $\operatorname{Re} p > -\beta$. Следовательно, преобра-

зовав (12.2.34) к виду

$$P(p) \frac{p^2}{(p+1)\tau_-(p)} = \frac{p-1}{\tau_+(p)} 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\mu f(0, \mu)}{1+\mu^2} d\mu,$$

мы видим, что левая часть равенства аналитична в области $\operatorname{Re} p > 0$, а правая часть аналитична в области $\operatorname{Re} p < \beta$. Более того, поскольку при большом p τ_+ стремится к постоянной, деленной на p , величина справа (а следовательно, и величина слева) при $p \rightarrow \infty$ стремится к постоянной.

Так как обе части при аналитическом продолжении аналитичны всюду и ограничены на бесконечности, то они всюду равны постоянной C . Поэтому

$$P(p) = (C/p^2)(p+1)\tau_-(p). \quad (12.2.36)$$

Чтобы вычислить значение постоянной C , мы найдем предельное значение обеих частей при $p \rightarrow 0$. При $p=0$ функция $j(p)$ из (12.2.34) равна J , т. е. постоянному полному потоку частиц, движущихся в отрицательном направлении к поверхности $\xi=0$ и сквозь нее. Когда $p \rightarrow 0$, функция $1 - (1/p) \operatorname{Arth} p \rightarrow -p^2/3$; следовательно (q_∞ — постоянная),

$$P(p) \simeq -3J \left[\frac{1}{p^2} + \frac{q_\infty}{p} + \dots \right], \quad p \rightarrow 0. \quad (12.2.37)$$

Заметим, что отсюда можно получить асимптотическую формулу для преобразования P , т. е. для плотности ρ : $\rho \simeq -3J(q_\infty + \xi + \dots)$ при $\xi \rightarrow \infty$, что соответствует асимптотической форме (12.2.12).

Возвращаясь к (12.2.35), при помощи некоторой деформации контура можно показать, что $\tau_- \rightarrow \sqrt{3}$ при $p \rightarrow 0$. В результате находим, что $C = -\sqrt{3}J$, где J — полный поток в направлении положительных ξ (и поэтому в нашей задаче величина отрицательная), и что

$$P(p) = -\sqrt{3}J \frac{p+1}{p^2} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{s^2} \right) \left(1 - \frac{1}{s} \operatorname{Arth} s \right) \right] \frac{ds}{s-p} \right\} \quad (12.2.38)$$

(для $1 > \beta > 0$) с асимптотическим поведением, указанным в (12.2.37). Появляющаяся здесь постоянную q_∞ можно вычислить, разлагая интеграл в (12.2.38) по степеням p ; при этом найдем

$$q_\infty = 0,7104461 \dots \quad (12.2.39)$$

Сопоставление формул (12.2.9), (12.2.32) и (12.2.37) показывает, что $K = 2\pi \int \mu^2 f d\mu = -J(q_\infty + \xi)$.

Сравнивая (12.2.38) с (12.2.32) и (12.2.29), мы видим, что

$$H(\mu) = (1+\mu) \exp \left\{ \frac{\mu}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{s^2} \right) \left(1 - \frac{1}{s} \operatorname{Arth} s \right) \right] \frac{ds}{\mu s - 1} \right\}, \quad (12.2.40)$$

что дает возможность вычислить и диффузное отражение и диффузную эмиссию. Заметим, что эта формула пригодна только для $x=1$, в то время как прежнее выражение для H было пригодно при $0 < x < 1$. Угловое распределение частиц, испускаемых из поверхности, можно найти либо вычисляя интеграл в (12.2.40), либо решая интегральное уравнение (12.2.23).

Результат получится, конечно, один и тот же. После этого можно будет, если это окажется необходимым, вычислить плотность частиц как функцию от ξ и далее, используя (12.2.15), найти функцию распределения для любого значения ξ .

Вычисление плотности вариационным методом. Функция плотности

$$\rho(\xi) = 2\pi \int_{-1}^1 f(\xi, \mu) d\mu$$

может быть найдена из (12.2.38) с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} P(p) e^{p\xi} dp, \quad (12.2.41)$$

хотя соответствующие выкладки весьма утомительны. Результаты были воспроизведены на рис. 2.20, где было рассмотрено соотношение между точным решением и приближением, полученным из уравнения диффузии. Было отмечено, что в толще пластины на глубине, многим большей чем средний свободный пробег, плотность почти точно равна своему асимптотическому выражению

$$\rho(\xi) \simeq -3J(0,710446 + \xi + \dots), \quad \xi \gg 1 \quad (12.2.42)$$

[см. (2.4.31) и (2.4.34)]. Из (12.2.15) видно, что асимптотическое представление функции распределения имеет вид

$$f(\xi, \mu) \simeq -\frac{3}{4\pi} J(0,710446 + \xi - \mu + \dots), \quad \xi \gg 1. \quad (12.2.43)$$

В этой области f можно с большой точностью считать сферически симметричной функцией ($\xi \gg \mu$), так что диффузионное приближение (см. § 2.4) оказывается удовлетворительным. Однако вблизи поверхности ($\xi < 1$) это диффузионное приближение для точных вычислений уже недостаточно, хотя, как показано на фиг. 2.21, «приближение 2/3» в (2.4.31) довольно удовлетворительно.

Функция, определяющая плотность, может быть также найдена вариационным методом. Подлежащее решению интегральное уравнение имеет вид

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho(\eta) E_1(|\xi - \eta|) d\eta$$

[см. (12.2.16)]. Но из асимптотической формулы для ρ мы можем установить, что

$$\rho(\xi) = -3J[\xi + q(\xi)], \quad (12.2.44)$$

где

$$\begin{aligned} q(\xi) &\underset{\xi \rightarrow \infty}{\simeq} q_\infty = -\frac{K(0)}{J} = -\frac{2\pi}{J} \int_{-1}^0 f(0, \mu) \mu^2 d\mu = \\ &= \frac{1}{2J} \int_0^\infty d\eta \int_{-1}^0 \rho(\eta) e^{\eta/\mu} d\mu = -\frac{1}{2J} \int_0^\infty \rho(\eta) E_3(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Последнее следует из (12.2.15) и определения E_n :

$$E_n(\eta) = \int_1^\infty e^{-\eta y} \frac{dy}{y^n}.$$

Выражая ρ через $q(\xi)$, мы наконец получим

$$q(\xi) \simeq q_\infty = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4} + \int_0^\infty q(\eta) E_3(\eta) d\eta \right], \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (12.2.45)$$

С другой стороны, подставляя в обе части интегрального уравнения вместо ρ его выражение через q (и интегрируя вновь по частям в некоторых слагаемых), мы получаем интегральное уравнение для q

$$q(\xi) = \frac{1}{2} E_3(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^\infty q(\eta) E_1(|\xi - \eta|) d\eta. \quad (12.2.46)$$

Чтобы получить вариационный принцип, положим

$$D = \frac{\int_0^\infty q^*(\xi) \left[q^*(\xi) - \frac{1}{2} \int_0^\infty q^*(\eta) E_1(|\xi - \eta|) d\eta \right] d\xi}{\left[\int_0^\infty [q^*(\eta) E_3(\eta) d\eta]^2 \right]}. \quad (12.2.47)$$

Можно показать (см. гл. 9), что минимальное значение D достигается при $q^*(\xi) = q(\xi)$ и что это минимальное значение равно [см. (12.2.45)]

$$D_{\min} = 1 / \left(\frac{4}{3} q_\infty - \frac{1}{2} \right).$$

Следовательно, выбрав в качестве q^* подходящую функцию (стремящуюся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$), зависящую от параметров, и варьируя эти параметры так, чтобы минимизировать D , мы получим одновременно и наилучшую форму для q и значение q_∞ . Это значение можно сравнить с точным значением из (12.2.39) и проверить, таким образом, степень совпадения.

Например, если в качестве q взять постоянную $q = \alpha$, то D окажется равным $9/4$ и, таким образом, $q_\infty = \alpha = 17/24 = 0,7083$, что отличается от точного значения меньше чем на 1%. С другой стороны, полагая

$$q^*(\xi) = q_\infty [1 - A E_2(\xi) + B E_3(\xi)], \quad (12.2.48)$$

мы получим для минимального значения $D = 2,235831$, причем $A = 0,3428949$ и $B = 0,3158704$. Получающееся при этом значение q_∞ будет равно $0,7104457$, что совпадает с точным значением до шестого десятичного знака, так что соответствующее по (12.2.44) выражение для ρ оказывается весьма близким к точному. При желании можно отсюда получить также $H(\mu)$ и $f(\xi, \mu)$.

Этими вычислениями мы заканчиваем рассмотрение классической задачи Милна о диффузии частиц (или света) через рассеивающую среду, когда рассеяние изотропно и когда частицы при каждом столкновении не теряют энергии. Это последнее ограничение оказывается самым существенным. В самом деле, мы многократно указывали, каким образом можно было бы распространить проведенные вычисления на случай анизотропного рассеяния и как можно было бы включить в рассмотрение аннигиляцию и возникновение частиц в среде. Мы могли бы провести вычисления и для других пространственных случаев, отличных от рассмотренного одномерного. Например, уравнение переноса для излучения, распространяющегося

от источника сферически симметрично по всем направлениям, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(r, \mu, \tau) + \mu \frac{\partial}{\partial r} f(r, \mu, \tau) + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} f(r, \mu, \tau) + f(r, \mu, \tau) =$$

$$= \kappa \int \int \alpha(\theta') f(r, \mu', \tau) d\Omega' + s(r, \mu, \tau), \quad (12.2.49)$$

где угол между направлением движения и радиусом-вектором, соответствующим r , равен $\arccos \mu$. Сравнение с (12.2.2) показывает, что трехмерная формулировка задачи приводит к появлению в уравнении члена с $\partial f / \partial \mu$. Решение делается более затруднительным, но оно может быть проведено приближенно (если нужно, то вариационным методом).

Но если нужно учесть и тот факт, что при столкновениях частицы не только меняют направление своего движения, но и замедляются, то приходится вводить в задачу новое качество, существенно меняющее ее характер. Если атомы-мишени много тяжелее, чем диффундирующие частицы (в обычных задачах это имеет место для электронов и не имеет места для нейтронов), то эти частицы претерпевают много столкновений прежде, чем их скорость значительно уменьшается, другими словами, длина замедления значительно больше, чем длина свободного пробега. И пока мы имеем дело с областью, отстоящей от границы на расстоянии, меньшем длины замедления, можно пользоваться приведенными в этом разделе решениями, ибо частицы, находящиеся в наружном слое, не успевают, до того как они покинут среду, заметно изменить свою скорость. Для тяжелых атомов этот наружный слой достаточно толст, а иногда он охватывает всю среду; но для легких атомов этот слой тонок и при вычислении функции распределения глубоко под поверхностью приходится учитывать потери энергии.

Потери энергии при столкновениях. Влияние потерь энергии при столкновениях было изучено в § 2.4; мы рассмотрим сейчас лишь несколько примеров, чтобы показать как некоторые методы, о которых уже шла речь в предыдущих главах, дают возможность получить решения новых задач. Мы ограничимся случаем, когда столкновения упруги, т. е. потерянная частицами энергия превращается в кинетическую энергию атомов-мишеней, и когда рассеяние частиц атомом-мишенью (в системе координат, движущейся вместе с центром масс частицы и атома) изотропное.

В большинстве случаев имеется некоторая максимальная энергия частиц; это либо энергия частиц, падающих на материал, либо начальная энергия частиц, возникающих в материале. Обычно бывает удобно выражать кинетическую энергию частиц E (и, таким образом, их скорость) через эту начальную энергию E_0 . Наиболее удобным оказывается логарифмический параметр $u = \ln(E_0/E)$. Энергетический параметр u меняется при этом от нуля (максимум энергии $E = E_0$) до бесконечности (минимум энергии $E = 0$). Функция распределения f оказывается, таким образом, функцией положения, задаваемого вектором $\mathbf{r}$, кинетической энергии, задаваемой параметром u , направления скорости частицы, задаваемого единичным вектором $\mathbf{a}_u$, и времени. Величина u пропорциональна «возрастной» переменной, встречавшейся в (2.4.54) и (12.1.28).

Функция рассеяния α есть функция угла между первичным направлением частицы $\mathbf{a}'_u$ и ее конечным направлением $\mathbf{a}_u$. Так как частица теряет энергию, то начальная и конечная энергии различны, и так как атом-мишень после столкновения движется, то угловое распределение рассеянных частиц в координатах, неподвижных относительно большинства атомов, не будет равномерным, даже если рассеяние изотропно в системе центра масс. Более того, имеется определенная зависимость между углом рассеяния θ' и отношением начальной кинетической энергии E' к

конечной энергии частицы E . Если Θ есть угол рассеяния в системе центра масс и если отношение массы атома-мишени к массе частицы равно M , то зависимость между θ' , Θ и начальными и конечными значениями энергетического параметра u' и u имеет вид

$$\begin{aligned}(M+1)e^{-w/2}\cos\theta' &= (M\cos\Theta+1), \\ \cos\Theta &= 1 - [(M+1)^2/2M](1-e^{-w}), \\ \cos\theta' &= \frac{1}{2}(M-1)e^{w/2} - \frac{1}{2}(M+1)e^{-w/2},\end{aligned}\quad (12.2.50)$$

где $w = u - u'$. Заметим еще, что наибольшая потеря энергии возможна при $\theta' = \pi$, когда $w_\pi = 2\ln[(M+1)/(M-1)]$, за исключением случая $M=1$ (мишени имеют такую же массу, как и частицы), когда $w_\pi = \infty$ и $\theta'_{\max} = \pi/2$.

Интеграл R для полного числа частиц, рассеянных в заданную область фазового пространства, есть интеграл по u' и по элементарному углу $d\Omega'$. Но вследствие соотношения между углом и энергией в функцию рассеяния α в качестве множителя входит дельта-функция (для рассеяния, изотропного в системе центра масс), т. е.

$$\alpha(\theta', w) = \begin{cases} \frac{(M+1)^2}{8\pi M} e^{-w} \delta\left[\cos\theta' - \frac{1}{2}(M-1)e^{w/2} + \frac{1}{2}(M+1)e^{-w/2}\right], & w \leq w_\pi, \\ 0, & w > w_\pi. \end{cases}$$

При этом α нормирована так, что

$$\int du' \int \int \alpha(\theta', u - u') d\Omega' = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_0^{w_\pi} e^{-w} dw = 1.$$

Средняя потеря энергии при каждом столкновении (в логарифмической шкале) и средний косинус угла отклонения будут равны

$$\begin{aligned}w_{\text{ср.}} &= [\ln(E_0/E)]_{\text{ср.}} = 1 - \frac{(M-1)^2}{2M} \ln\left(\frac{M+1}{M-1}\right), \\ (\cos\theta')_{\text{ср.}} &= \int du' \int \int \cos\theta' \alpha(\theta', u - u') d\Omega' = \frac{2}{3M}.\end{aligned}\quad (12.2.51)$$

Прежде чем написать вместо (12.2.1) новое уравнение переноса, сделаем для упрощения еще одну замену. Мы не можем более полагать $n_i Q_i x = \xi$, ибо число столкновений $n_i Q_i$ на единицу расстояния, проходящего частицей со скоростью v , меняется вместе с v , а v нельзя более считать постоянной. Можно, однако, добиться некоторого упрощения заменой зависимого переменного на

$$\psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) = n_i Q_i v f(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u),$$

где $\psi du d\Omega$ есть число столкновений за секунду в единице объема, испытанных частицами, находящимися в энергетическом интервале du , направление скорости которых заключено в телесном угле $d\Omega$. Обозначим еще через $\lambda(u) = 1/n_i Q_i$ длину среднего свободного пробега для частиц с энергией, соответствующей $u = \ln(v^2/v^2)$, а отношение поперечного сечения рассеяния без захвата Q_s к полному поперечному сечению Q_i обозначим через $\kappa(u)$ и будем называть коэффициентом альбеда для энергии, соответствующей u .

После всех этих замен уравнение переноса принимает вид

$$\frac{\lambda(u)}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) + \lambda(u) \mathbf{a}_u \cdot \text{grad} \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) + \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) = \\ = \int_0^u \kappa(u') du' \int \alpha(\theta', u - u') \psi(\mathbf{r}, u', \mathbf{a}'_u) d\Omega' + S(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u), \quad (12.2.52)$$

где S (как и прежде) означает количество частиц, возникающих за секунду в единице объема, энергия которых лежит в интервале, соответствующем значению u , а направление движения задается вектором $\mathbf{a}_u$.

Однородное пространственное распределение. Во многих случаях внутри среды, в которой происходит диффузия, где воздействие границ не сказывается (характер этого воздействия был только что подробно рассмотрен), ψ и S более или менее не зависят от $\mathbf{r}$. В этом случае можно отбросить усложняющий уравнение член с $\text{grad} \psi$ и, кроме того, исключить из рассмотрения направление движения частиц, проинтегрировав (12.2.52) по всем направлениям. Даже если ψ и зависит от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}_u$, но среда, в которой происходит диффузия, простирается настолько далеко, что за секунду теряется лишь пренебрежимо малая доля всех частиц, выходящих из среды, то можно проинтегрировать уравнение (12.2.52) по пространству и всем направлениям $\mathbf{a}_u$. В результате мы получим $\left(\eta = \int \dots \int \psi dV d\Omega \right)$

$$\frac{\lambda(u)}{v} \frac{\partial}{\partial t} \eta(u, t) + \eta(u, t) = q(u, t) + \int_0^u \kappa(u') \alpha(u - u') \eta(u', t) du', \quad (12.2.53)$$

где ηdu есть среднее количество столкновений, испытанных за единицу времени частицами из энергетического интервала, заданного величиной du ; qdu — общее количество частиц из того же интервала, возникающих за секунду, и

$$\alpha(u - u') = \begin{cases} \int \int \alpha(\theta', \omega) d\Omega' = \frac{(M+1)^2}{4M} e^{u'-u}, & u - u' \leq \omega_\pi, \\ 0, & u - u' > \omega_\pi, \end{cases} \quad (12.2.54)$$

есть соответствующая функция рассеяния.

Рассмотрим прежде всего установившееся состояние, когда q , а значит, и η не зависят от времени. Достаточно решить задачу для случая, когда в среду ежесекундно вводится единичное количество частиц одинаковой энергии E_0 , так что $q = \delta(u)$. Используя это решение, мы сможем справиться и с другими случаями. Опуская зависимость от времени, мы сводим уравнение (12.2.53) к простому интегральному уравнению Вольтерра, которое может быть превращено в дифференциальное уравнение, если только ω_π меньше чем $2 \ln[(M+1)/(M-1)]$.

Если, например, $M = 1$ (нейтроны в водороде), то $\omega_\pi \rightarrow \infty$, и дифференциальное уравнение для $\eta(u)$ имеет вид

$$\frac{d\eta}{du} = -[1 - \kappa(u)]\eta.$$

Решение, не учитывающее частиц, не испытавших ни одного столкновения после своего возникновения, имеет вид

$$\eta(u) = \eta(0) \exp \left\{ - \int_0^u [1 - \kappa(y)] dy \right\}, \quad u > 0 \quad (12.2.55)$$

[его следует сравнить с (2.4.55)].

Множитель $1 - \kappa(u)$ есть доля столкновений, которые приводят к поглощению частиц. При отсутствии поглощения κ для всех значений u равно единице, а $\eta(u) = 1$ при $u > 0$. В этом случае функция распределения f пропорциональна $1/vn_i Q_i$. Это означает, что число частиц возрастает при переходе к все более медленным частицам (если только $n_i Q_i$ не стремится к $\Delta v^{-\gamma}$ с $\gamma \geq 1$). Чтобы при отсутствии поглощения было достигнуто устойчивое состояние, источник должен действовать достаточно продолжительное время и, таким образом, должно накопиться достаточно большое количество медленных частиц.

Случай $M = 1$ оказывается более простым, чем случай $M > 1$, потому что при $M = 1$ в результате одного столкновения частицы с энергией E_0 с атомом-мишенью могут возникать частицы с любой энергией от E_0 до 0. Если $M > 1$, то существует определенная энергия

$$E_{\min} = E_0 e^{-w\pi} = E_0 [(M-1)/(M+1)]^2,$$

такая, что более низкие энергии не могут быть достигнуты в результате одного столкновения частицы, имеющей энергию E_0 . Как и можно было ожидать, функция η имеет разрыв при соответствующем значении u , который усложняет весь процесс.

Так как ядро уравнения (12.2.53) при отсутствии захвата [$\kappa(u') = 1$] является функцией от $u - u'$, можно попытаться использовать преобразование Лапласа. Интегральный член в (12.2.53) может быть преобразован при помощи теоремы о свертке: преобразование Лапласа функции

$$\int_0^u \eta(u') a(u - u') du' \text{ есть } H(p) A(p),$$

где H и A — преобразования Лапласа для $\eta(u)$ и $a(u)$. Преобразованием Лапласа для a является

$$A(p) = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_0^{w\pi} e^{-u(p+1)} du = \frac{(M+1)^2}{4M(p+1)} \left[1 - \left(\frac{M-1}{M+1} \right)^{2(p+1)} \right]. \quad (12.2.56)$$

Следовательно, преобразование Лапласа уравнения

$$\eta(u) = \int_0^u a(u - u') \eta(u') du' + q(u)$$

имеет вид

$$H(p) = H(p) A(p) + Q(p),$$

где $Q(p)$ — преобразование $q(u)$; если $q(u) = \delta(u)$, то $Q(p) = 1$.

Таким образом, преобразованием Лапласа для $\eta(u)$ в случае установившегося процесса без поглощения, когда функция источника $q(u) = \delta(u)$, является

$$H(p) = \frac{4M(p+1)}{(M+1)^2 \{ [4M(p+1)/(M+1)^2] - 1 + [(M-1)/(M+1)]^{2(p+1)} \}}. \quad (12.2.57)$$

Обратным преобразованием отсюда можно получить среднее количество столкновений в секунду η как функцию от u при отсутствии захвата:

$$\eta(u) = \frac{4M}{2\pi i (M+1)^2} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{(p+1) e^{pu} dp}{[4M(p+1)/(M+1)^2] - 1 + [(M-1)/(M+1)]^{2(p+1)}}, \quad (12.2.58)$$

где $\beta > 0$. Большая часть полюсов подинтегрального выражения располо-

жена слева от мнимой оси p , но один полюс находится в точке $p=0$, и вычет в этом полюсе равен $[(M+1)^2/4M\omega_{\text{ср.}}]$, где величина $\omega_{\text{ср.}}$, определенная в (12.2.51), есть средняя потеря энергии при одном столкновении. Поэтому для больших u (частицы с малой энергией) асимптотическая форма для функции столкновений η имеет вид

$$\eta \simeq 1/\omega_{\text{ср.}}, \quad u \rightarrow \infty, \quad (12.2.59)$$

для стационарного процесса без захвата. Этот результат является обобщением (12.2.55) для $\kappa=1$.

Решение при малых значениях u можно получить, прибавляя к (12.2.59) сумму вычетов во всех других полюсах подинтегрального выражения из (12.2.58). Соответствующие результаты изложены во многих статьях, посвященных настоящему вопросу, и повторять их здесь нет никакой надобности. Точно так же, нет смысла рассматривать здесь более сложный случай, когда имеет место захват [$\kappa(u) < 1$].

Задачи с временной зависимостью без захвата также могут быть решены методом преобразования Лапласа, хотя в самом общем случае сделать это не так просто. В случае, если $M=1$ (атомы-мишени имеют ту же массу, что и частицы), уравнение (12.2.53) упрощается и принимает вид

$$\frac{\lambda(u)}{v} \frac{\partial}{\partial t} \eta(u, t) + \eta(u, t) = \int_0^u e^{u'-u} \eta(u', t) du' + \delta(u) \delta(t). \quad (12.2.60)$$

Производя преобразование Лапласа по времени, мы получаем

$$\left[1 + \frac{s\lambda(u)}{v}\right] H(u, s) = \int_0^u e^{u'-u} Z(u', s) du' + \frac{e^{-u}}{1 - \frac{s\lambda_0}{v_0}},$$

где

$$H(u, s) = \int_0^\infty \eta(u, t) e^{-st} dt = \frac{\delta(u)}{1 + \frac{s\lambda_0}{v_0}} + Z(u, s).$$

Дифференцируя равенство по u , мы приходим к дифференциальному уравнению, решая которое относительно Z , в конце концов получим преобразование Лапласа функции η :

$$H(u, s) = \frac{\delta(u)}{1 + s\lambda_0/v_0} + \frac{\exp\left\{-s \int_0^u du' / [s + v' / \lambda(u')]\right\}}{[1 + s\lambda_0/v_0][1 + s\lambda(u)/v]}. \quad (12.2.61)$$

Если предварительно выяснить характер зависимости от u среднего свободного пробега $\lambda(u)$, то, произведя обратное преобразование, можно будет найти η . Если, например, $\lambda(u)$ пропорционально скорости v , то обращение осуществляется просто. С другой стороны, если λ постоянная, то уравнение (12.2.53) можно решить и для случая $M > 1$. См. по этому поводу задачи 12.12 и 12.16.

Возрастная теория. Если нельзя пренебречь изменением в пространстве функции распределения f , а поэтому и функции частоты столкновений $\psi = n_i Q_i v f$, то следует вернуться к уравнению (12.2.52). Как указывалось в § 2.4 и 12.1, при большом M , когда при столкновениях теряется лишь незначительная часть энергии и когда достигнуто устойчивое состояние, приближение возрастной теории оказывается применимым, за исключением случая, когда плотность частиц заметно меняется на протяжении одного среднего свободного пробега (и когда приходится прибегать к методу,

изложенному в начале этого параграфа). Мы уже нашли [см. (2.4.56) и (12.1.29)] некоторые решения для такого приближения; здесь мы только еще раз выведем основное уравнение, для того чтобы установить связь между ранее полученными результатами и материалом, рассмотренным в настоящем параграфе.

Если предположить, что ψ мало меняется в пространстве, то естественно считать, что оно почти одинаково для разных направлений (почти не зависит от $\mathbf{a}_u$) и что его малая асимметрия направлена в сторону наибольшего изменения ψ в пространстве. Другими словами, можно предположить, что

$$\psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) \simeq \frac{1}{4\pi} [\psi_0(\mathbf{r}, u) + g(u) \mathbf{a}_u \cdot \text{grad } \psi_0(\mathbf{r}, u)], \quad (12.2.62)$$

где

$$\psi_0(\mathbf{r}, u) = \int \int \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) d\Omega,$$

а $g(u)$ предполагается малым. Если теперь подставить это выражение в уравнение (12.2.52) (опуская зависимость от времени) и взяв среднее по всем направлениям $\mathbf{a}_u$ (что сводится к интегрированию по Ω), то получим уравнение [см. рассуждение, предшествующее (2.4.41)]

$$\frac{1}{3} \lambda(u) g(u) \nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}, u) + \psi_0(\mathbf{r}, u) = \int_0^u a(u-u') \psi_0(\mathbf{r}, u') \kappa(u') du' + S_0(\mathbf{r}, u), \quad (12.2.63)$$

где $S_0(\mathbf{r}, u) = \int \int S(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) d\Omega$ есть «нулевой момент» функции источника, а $a(u-u')$ — функция, определенная формулой (12.2.54).

В случае большого M величина ω_π мала и область u' , в которой подинтегральное выражение заметно отличается от нуля, мала. Если с изменением u величина ψ_0 меняется постепенно и относительно медленно, то $\psi_0(\mathbf{r}, u - \omega_\pi)$ не будет заметно отличаться от $\psi_0(\mathbf{r}, u)$ и $\psi_0(\mathbf{r}, u')$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\kappa(u') \psi_0(\mathbf{r}, u') = \kappa(u) \psi_0(\mathbf{r}, u) + (u' - u) (\partial/\partial u) [\kappa(u) \psi_0(\mathbf{r}, u)] + \dots$$

Подставляя это в (12.2.63) и используя соотношения

$$\int_{u-\omega_\pi}^u a(u-u') du' = 1, \\ \int_{u-\omega_\pi}^u (u-u') a(u-u') du' = \omega_{\text{ср.}} = 1 - \frac{(M-1)^2}{2M} \ln \left(\frac{M+1}{M-1} \right),$$

мы получим наконец (для $u > \omega_\pi$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \lambda(u) g(u) \nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}, u) = \\ & = -\omega_{\text{ср.}} \kappa(u) \frac{\partial}{\partial u} \psi_0(\mathbf{r}, u) - [1 - \kappa(u)] \psi_0(\mathbf{r}, u) + S_0(\mathbf{r}, u), \end{aligned}$$

где $g(u)$ еще подлежит определению.

Чтобы найти $g(u)$ и оценить точность, с которой (12.2.62) определяет ψ , умножим (12.2.52) на косинус угла ϑ между $\mathbf{a}_u$ и $\text{grad } \psi_0$ и про-

интегрируем по всем направлениям $\mathbf{a}_u$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \lambda(u) \operatorname{grad} \psi_0 + \frac{1}{3} g(u) \operatorname{grad} \psi_0 - S_1(\mathbf{r}, u) = \\ & = \frac{1}{3} \kappa(u) g(u) \operatorname{grad} \psi_0 \iint \cos \vartheta d\Omega \int_{u-w_\pi}^u du' \iint \cos \vartheta' \alpha(\theta', u-u') d\Omega' + \dots = \\ & = \frac{2}{9M} \kappa(u) g(u) \operatorname{grad} \psi_0 + \dots, \end{aligned}$$

где $S_1(\mathbf{r}, u) = \int \cos \vartheta S(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) d\Omega$ есть первый момент распределения источников. Отсюда, ограничиваясь принятой нами степенью точности, в случае, когда можно пренебречь величиной S_1 , получим

$$g(u) = -\lambda(u) [1 - (2/3 M) \kappa(u)],$$

откуда окончательно «возрастное» уравнение приобретает вид

$$\nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}, T) - (\partial/\partial T) \psi_0(\mathbf{r}, T) - \varepsilon(T) \psi_0(\mathbf{r}, T) = -\sigma(\mathbf{r}, T), \quad (12.2.64)$$

где «возраст» частиц

$$T = \frac{1}{3} \int_0^u \frac{\lambda^2(u') du'}{w_{\text{ср.}} \kappa(u') [1 - (2/3 M) \kappa(u')]} \quad (12.2.65)$$

я

$$\varepsilon = \frac{3(1-\kappa)[1 - (2\kappa/3M)]}{\lambda^2}, \quad \sigma = \frac{3[1 - (2\kappa/3M)]}{\lambda^2} S_0.$$

«Возраст» T имеет размерность площади и пропорционален квадрату среднего расстояния, пройденного частицей за время, в течение которого она достигает энергии $E = E_0 e^{-u}$. Напомним, что функция распределения равна $f(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u) = [\lambda(u)/v] \psi(\mathbf{r}, u, \mathbf{a}_u)$ и что ψ определяется через ψ_0 формулой (12.2.62).

Эта приближенная формула для f и соответствующее уравнение для ψ_0 пригодно, если $\lambda |\operatorname{grad} \psi_0|$ значительно меньше, чем ψ_0 . Это приближение не является достаточно хорошим для частиц, энергии которых близки к E_0 (когда u меньше чем w_π); оно непригодно, если $\lambda(u)$ или $\kappa(u)$ заметно меняются, когда u близко к w_π .

Сравнение с уравнением (2.4.54) показывает, что выбранная здесь шкала для возраста T частиц отличается от выбранной ранее шкалы. Этим было достигнуто упрощение формы уравнения. Новая переменная T , грубо говоря, пропорциональна произведению квадрата среднего свободного пробега λ на старую переменную τ , которая обозначала среднее количество столкновений, требующееся для уменьшения первоначальной энергии частицы E_0 до энергии $E = E_0 e^{-u}$. Прежняя переменная τ имела преимущество большей физической наглядности; новая переменная T облегчает решение уравнения, когда $\lambda(u)$ меняется вместе с u . Сравнение с уравнением (12.1.28) обнаруживает то же обстоятельство, с тем дополнительным отличием, что новое $\kappa(u)$ есть доля частиц, не поглощенных при столкновении, в то время как старое κ обозначало долю поглощенных частиц.

Поскольку в этом параграфе мы показали, как получить решение, когда уравнение диффузии не может быть использовано, и поскольку в § 2.4 и 12.1 уже были рассмотрены примеры методов решения задач «возрастной» разновидности уравнения диффузии, мы не станем разбирать дальнейшие детали этой теории.

Сейчас подходящий момент, чтобы закончить этот параграф. Мы показали, как решается задача диффузии в двух важных случаях, когда обыкновенное уравнение диффузии и уравнение в возрастной форме ока-

зываются неадекватными. Вблизи границ диффузионной среды мы оказались в состоянии исправить обычное диффузионное приближение как в отношении углового распределения частиц, испускаемых с поверхности в свободное пространство, так и в отношении распределения плотности частиц на глубине под поверхностью, не превосходящей среднего свободного пробега, если только на этом участке можно пренебречь эффектом замедления частиц. Внутри среды мы оказались в состоянии получить улучшение результатов вычислений, основанных на простой «возрастной» теории, для случаев, где значительная доля энергии теряется при столкновениях (легкие атомы-мишени), если только можно пренебречь пространственным изменением плотности частиц и если доля $1 - \alpha$ частиц, поглощаемых при столкновениях, мала. В других случаях обычная теория диффузии или «возрастная» теория, рассмотренные в § 12.1, оказываются адекватными.

Теперь мы переходим к изучению уравнения совершенно другого типа.

12.3. Решение уравнения Шредингера

Движение частицы массы M в поле с потенциалом $V(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ — ее положение и импульс, определяется уравнением Шредингера

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (12.3.1)$$

где $\mathcal{H}$ — оператор Гамильтона. Он может быть представлен в виде суммы кинетической и потенциальной энергий частицы

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2M} + V(\mathbf{r}, \mathbf{p}).$$

Уравнение (12.3.1), конечно, не учитывает релятивистских и спиновых эффектов. В § 2.6 мы достаточно подробно выяснили происхождение и физическую интерпретацию уравнения Шредингера [см. (2.6.38)] и потому ограничимся здесь кратким обзором соответствующих фактов.

Определения. Рассмотрим сначала уравнения, которым удовлетворяет Ψ . Следует напомнить, что для превращения (12.3.1) в дифференциальное уравнение, необходимо либо $\mathbf{r}$, либо $\mathbf{p}$ представить как дифференциальный оператор. В последнем случае

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla,$$

так что уравнение (12.3.1) может быть представлено в виде

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V \left[\mathbf{r}, \frac{\hbar}{i} \nabla \right] \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

или

$$[-\nabla^2 + U] \Psi = \frac{i}{\alpha^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где

$$U = \frac{2M}{\hbar^2} V, \quad \alpha^2 = \frac{\hbar}{2M}.$$

В этих уравнениях волновая функция Ψ есть функция от $\mathbf{r}$ и t .

Полностью эквивалентное этому уравнение Шредингера в импульсном представлении можно получить, заменяя $\mathbf{r}$ оператором

$$\mathbf{r} = -\frac{\hbar}{i} \nabla_p,$$

где x -компонентой ∇_p служит $\partial/\partial p_x$. Обозначив соответствующую волновую функцию $\Phi(\mathbf{p}, t)$, т. е. заменив Ψ через Φ в (12.3.1), получаем уравнение Шредингера в импульсном представлении

$$\left\{ \frac{p^2}{2M} + V \left[-\frac{\hbar}{i} \nabla_p, \mathbf{p} \right] \right\} \Phi(\mathbf{p}, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Функции Φ и Ψ являются взаимными преобразованиями Фурье

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar} \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{v}.$$

Обратимся теперь к физической интерпретации волновой функции Ψ . (Чтобы получить интерпретацию для Φ , требуется только видоизменить приводимое ниже рассуждение, проведя его в терминах пространства импульсов.) Ключом для понимания смысла Ψ служит основное положение, согласно которому $|\Psi|^2 d\mathbf{v}$ есть *относительная вероятность найти частицу в элементе объема $d\mathbf{v}$ в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t* . Это положение дает возможность вычислить среднее значение любой динамической величины F . (Напомним, что в квантовой механике эти величины не обязательно имеют определенные значения.) Среднее значение $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ есть

$$F_{\text{ср.}}(t) = \frac{\iiint \bar{\Psi}(\mathbf{r}) F \left[\mathbf{r}, \frac{\hbar}{i} \nabla \right] \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{v}}{\iiint |\Psi|^2 d\mathbf{v}}. \quad (12.3.2)$$

Если рассматриваемая система состоит из многих одинаковых не взаимодействующих частиц¹⁾, то $|\Psi|^2$ представляет плотность частиц в точке $\mathbf{r}$. Соответственно этой плотности определяется плотность тока $\mathbf{J}$, удовлетворяющая уравнению непрерывности

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Исходя из этого и из уравнения Шредингера, для $\mathbf{J}$ получаем

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2M} [\bar{\Psi} \text{grad } \Psi - \Psi \text{grad } \bar{\Psi}], \quad \mathbf{J} = 2\alpha^2 \text{Im} [\bar{\Psi} \text{grad } \Psi]. \quad (12.3.3)$$

В этом параграфе мы будем преимущественно интересоваться состояниями, в которых энергия имеет определенное значение E ; оно является собственным значением уравнения

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением Шредингера, мы видим, что временная зависимость Ψ для таких состояний определяется из соотношения

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi; \quad |\Psi|^2 \text{ не зависит от } t.$$

Поэтому состояния с определенными значениями энергии *стационарны*. Решение для $\Psi(t)$ имеет вид

$$\Psi(t) = e^{-iEt/\hbar} \phi, \quad \phi = \Psi(0).$$

Функция ϕ удовлетворяет также уравнению $\mathcal{H}\phi = E\phi$ или, подробнее,

$$\nabla^2 \phi + [\varepsilon - U] \phi = 0, \quad (12.3.4)$$

где

$$\varepsilon = \frac{2M}{\hbar^2} E, \quad U = \frac{2M}{\hbar^2} V.$$

¹⁾ Мы предполагаем, что принцип Паули не играет здесь большой роли.

В качестве примера рассмотрим плоскую волну

$$\Psi = e^{i(p \cdot r - Et)/\hbar},$$

Плотность $|\Psi|^2 = 1$, и это означает, что относительная вероятность найти частицу в элементе объема dv не зависит от ее положения, т. е. она одинакова повсюду. Плотность тока $\mathbf{J} = \mathbf{p}/M$, т. е. совпадает со скоростью частицы. Для плоской волны импульс имеет определенное значение и равен $\mathbf{p}$, поскольку

$$\mathbf{p}\psi = \mathbf{p}\phi.$$

Эта определенность $\mathbf{p}$ сопутствует, как мы убедились выше, полной неопределенности положения, как оно и должно быть в силу соотношения неопределенности.

С другой стороны, волновая функция $e^{-\beta r}$ ($\beta = \text{const}$), описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, приводит к току, равному нулю, так как она действительна в этом состоянии; импульс не будет иметь определенного значения. Волновая функция в импульсном представлении для этого состояния имеет вид

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \iiint e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} e^{-\beta r} dv.$$

Этот интеграл можно легко вычислить:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\sin(pr/\hbar)}{pr/\hbar} e^{-\beta r} r^2 dr = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{\beta}{\left[\beta^2 + \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2\right]^2}.$$

Величина $|\Phi(\mathbf{p})|^2 dp_x dp_y dp_z$ представляет собой относительную вероятность обнаружить электрон с импульсом, заключенным между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$.

В этом параграфе мы на нескольких примерах покажем методы решения уравнений (12.3.1) и (12.3.4). В дальнейшем имеется в виду главным образом разъяснить методы решения, и потому мы, например, вовсе не будем пытаться провести связный разбор строения атома. Многие методы мы продемонстрируем на одномерных примерах; однако будут также рассмотрены некоторые задачи, многомерные по своей природе.

Гармонический осциллятор. Одной из простейших и наиболее часто встречающихся динамических задач является задача о частице в поле упругой силы, соответствующей одномерной потенциальной функции $\frac{1}{2}Kx^2$. В классической физике такая частица может либо находиться в покое при нулевой энергии в положении равновесия $x=0$, либо совершать простое гармоническое колебание с частотой $\omega/2\pi = \sqrt{K/4\pi^2 M}$ и амплитудой $\sqrt{2E/K}$, где E — ее энергия. Поскольку вероятность присутствия классической частицы обратно пропорциональна ее скорости, эта вероятность равна

$$P = \begin{cases} \frac{1/\pi}{\sqrt{(2E/K) - x^2}}, & x^2 < \frac{2E}{K} \\ 0, & x^2 > \frac{2E}{K}. \end{cases}$$

Интересно сравнить эту величину с соответствующей $|\Psi|^2$.

В волновой механике волновая функция Ψ для стационарного состояния должна иметь показательную зависимость от времени, $\Psi = \phi(x) e^{-iEt/\hbar} = \phi(x) e^{-i\epsilon a^2 t}$, где E — стационарная энергия частицы и $\epsilon = (2M/\hbar^2) E$. В этом состоянии любое измерение энергии частицы даст значение E .

В рассматриваемой задаче уравнение для пространственного множителя ψ имеет вид [см. (2.6.28)]

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\varepsilon - \beta^2 x^2) \psi = 0, \quad (12.3.5)$$

где $\beta = M\omega/\hbar$ и $\omega^2 = K/M$. Это уравнение имеет нерегулярную особую точку на бесконечности. Замена независимой переменной на $z = \beta x^2$ показывает, что ψ может быть выражена через вырожденную гипергеометрическую функцию от z . Точнее, ψ должна быть пропорциональна функции Вебера

$$D_n(x\sqrt{2\beta}) = 2^{n/2} e^{-\beta x^2/2 + i\pi n} U_2\left(-\frac{1}{2}n \middle| \frac{1}{2} \middle| \beta x^2\right), \quad \text{Re } x > 0,$$

определенной в (11.2.63), со свойствами, приведенными в таблице в конце гл. 11. В нашем случае $n = (\varepsilon/2\beta) - 1/2 = (E/\hbar\omega) - 1/2$.

Функция D_n выбрана так, что она исчезает при $x \rightarrow +\infty$, но она, вообще говоря, не обязана исчезать при $x \rightarrow -\infty$. Используя соотношение между $D_n(x)$, $D_n(-x)$ и $D_{-n-1}(ix)$, мы находим, что

$$D_n(x\sqrt{2\beta}) \simeq \begin{cases} (x\sqrt{2\beta})^n e^{-\beta x^2/2}, & x \rightarrow +\infty, \\ \frac{V_{2\pi}}{\Gamma(-n)} \frac{e^{\beta x^2/2}}{(-x\sqrt{2\beta})^{n+1}}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

если только n не нуль или не целое положительное число. В последнем случае $D_n(z) = (-1)^n D_n(-z)$. Волновая функция, интегрируемая вместе с квадратом, получается, следовательно, только если $n = 0, 1, 2, \dots$, что ограничивает допустимые значения энергии частицы дискретным рядом значений

$$\varepsilon_n = 2\beta n + \beta, \quad \text{или} \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (12.3.6)$$

Чтобы состояние, описываемое функцией Ψ , было стационарным при определенном значении энергии, пространственный множитель ψ должен быть стоячей волной. Это требование ограничивает допустимые значения энергии точно так же, как обычно ограничиваются значения частоты свободных колебаний струны. Недопустимо, чтобы частица обладала нулевой энергией [это связано с соотношением неопределенности (2.6.2), так как невозможно, чтобы частица с точно нулевым импульсом достоверно находилась в точке $x = 0$]. Допустимые энергетические уровни распределены равномерно с интервалом $\hbar\omega$. Этот результат следует сравнить с (2.6.31), где гармонический осциллятор был рассчитан операторным методом.

Когда n — целое число, функции Вебера становятся пропорциональными полиномам Эрмита, рассмотренным в таблице в конце гл. 6. Используя интегральные соотношения для вычисления нормирующих множителей, убеждаемся, что допустимая волновая функция, соответствующая энергии $\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$, есть n -я нормированная собственная функция

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{V_{2^n n!}} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\beta x^2} H_n(x\sqrt{\beta}), \quad (12.3.7)$$

где

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}, \quad \beta = \frac{M\omega}{\hbar},$$

есть полином n -й степени от z , содержащий либо только четные степени z (если n четное), либо только нечетные степени (если n нечетное), причем

знаки последовательных коэффициентов чередуются. Отсюда следует, что все n корней уравнения $H_n(z) = 0$ действительны и симметрично расположены относительно $z = 0$.

Среднее поведение гармонического осциллятора может быть изучено путем вычисления среднего от смещения и от квадрата смещения. Из (12.3.2) и рекуррентной формулы, приведенной в таблице в конце гл. 6, видно, что

$$\begin{aligned} x \sqrt{\beta} \varphi_n(x) &= \sqrt{\frac{1}{2}n} \varphi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)} \varphi_{n+1}(x), \\ \beta x^2 \varphi_n(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{n(n-1)} \varphi_{n-2}(x) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi_n(x) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{(n+1)(n+2)} \varphi_{n+2}(x). \end{aligned}$$

Из первого из этих соотношений и взаимной ортогональности φ_n следует, что среднее смещение частицы в n -м состоянии равно нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_n^2(x) dx = 0.$$

Таким образом, колебания симметричны относительно положения равновесия $x = 0$. Среднее значение квадрата смещения

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_n^2(x) dx = \frac{n + \frac{1}{2}}{\beta} = \frac{E_n}{K}$$

составляет половину квадрата максимального смещения классической частицы, имеющей энергию $E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$. Поэтому, покуда речь идет о поведении в среднем, квантовый осциллятор соответствует классическому осциллятору с той только разницей, что для него допустимы только дискретные значения энергии E_n .

В качестве упражнения на применение метода перевала и для сравнения с классическими результатами найдем асимптотическое выражение для φ при больших n . Полагая, $A_n^2 = \beta/2^n n! \sqrt{\pi}$ и используя (5.3.53), мы получаем

$$\varphi_n = A_n 2^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}z^2} \oint e^{z^2 t - \left(\frac{1}{2}n + 1\right) \ln t + \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) \ln(1-t)} dt,$$

где контур, показанный на рис. 5.12, проходит от $-\infty$, обходит точку $t = 0$ в положительном направлении и идет обратно к $-\infty$. Седловая точка для экспоненты в интеграле находится там, где производная от

$$f(t) = z^2 t - \left(\frac{1}{2}n + 1\right) \ln t + \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) \ln(1-t)$$

равна нулю, т. е. совпадает с корнем уравнения

$$f'(t) = z^2 - \frac{\frac{1}{2}n + 1 - \frac{3}{2}t}{t(1-t)} = 0.$$

Когда, приблизительно, $z^2 < 2n + 1$, две седловые точки расположены симметрично над и под действительной осью t ; получающийся интеграл имеет множителем косинус. Когда $z^2 > 2n + 1$, корни находятся на действительной оси t и контур должен пройти только через один из них, ближайший к $t = 0$.

Действуя, как в § 4.6, мы в конце концов получим для $n \gg 1$

$$\varphi_n \simeq \begin{cases} \frac{\beta^{1/4} \sqrt{2/\pi}}{(2n - z^2)^{1/4}} \cos \left[\frac{1}{2} z \sqrt{2n - z^2} - \frac{1}{2} \pi n + n \arcsin \left(\frac{z}{\sqrt{2n}} \right) \right], & z^2 < 2n, \\ \sqrt{n!} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{1/4} z^n e^{-\frac{1}{2} z^2}, & z^2 > 2n, \end{cases}$$

где $z^2 = \beta x^2$ и $\beta = M\omega/\hbar$.

Квадрат модуля первого выражения может быть записан в более простой форме:

$$|\varphi_n|^2 \simeq \frac{2/\pi}{\sqrt{a_n^2 - x^2}} \cos^2 \left[\frac{1}{2} \beta x \sqrt{a_n^2 - x^2} + \frac{1}{2} \beta a_n^2 \arcsin \left(\frac{x}{a_n} \right) - \frac{1}{2} \pi n \right], \quad x < a_n,$$

где $a_n^2 = (2n + 1)/\beta = 2E_n/M\omega^2 = 2E_n/K$ и $K = M\omega^2$. Среднее значение¹⁾ $|\varphi_n|^2$ при $n \gg 1$ в большей части классически допустимой области изменения x равно поэтому (среднее значение квадрата косинуса есть $1/2$) классической вероятности P , вычисленной в начале этого пункта.

Таким образом, различие между квантовой и классической механикой заключается, с одной стороны, в спектре допустимых энергий и, с другой стороны, в плотности вероятности нахождения частицы. В квантовой механике допускаются только значения энергии $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$,

в то время как в классическом случае допускаются все положительные значения. Когда $\hbar\omega$ мало по сравнению с рассматриваемыми значениями энергии, эта разница не столь значительна, но когда $\hbar\omega$ не мало, различие становится заметным. В квантовой механике вероятность обнаружения частицы $|\Psi_n|^2$ (в состоянии с энергией E_n) имеет вблизи начала координат серию узлов, отстоящих друг от друга на расстояние примерно $2\pi/\beta a_n$. Для малых значений n $|\Psi_n|^2$ значительно отличается от классического P , вычисленного в начале этого пункта; для больших значений n среднее от $|\Psi_n|^2$, взятое по интервалу в несколько длин волн, стремится к P для $x < a_n$. Если энергия не известна точно, так что Ψ получается суперпозицией состояний для соседних энергий, то узлы различных состояний не будут совпадать и выражение для $|\Psi|^2$ будет полностью совпадать с P для больших сравнительно с $\hbar\omega$ значений E . Однако независимо от того, велико ли $\hbar\omega$ по сравнению с E или мало, $|\Psi|^2$ не стремится к бесконечности при $x = a_n$ (как это имеет место для P) и не равно нулю при $x > a_n$ (P при этом равно нулю). В квантовой механике имеется отличная от нуля (хотя обычно малая) вероятность того, что частица будет обнаружена в области, где потенциальная энергия больше, чем полная энергия. Это обстоятельство следует из волновых свойств функции Ψ .

Короткодействующие силы. Другим простым примером потенциальной функции, полезным при изучении ядерных сил, служит предельный случай сил притяжения, действующих только на очень коротком отрезке оси x . Соответствующая потенциальная энергия равна нулю почти на всей оси x , но вблизи нуля она имеет глубокую узкую впадину, обычно называемую «потенциальной ямой». В предельном случае V равно $-V_0\delta(x)$, и соответствующее уравнение Шредингера для состояния с определенной энергией имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [\epsilon + 2a\delta(x)]\psi = 0 \quad (12.318)$$

¹⁾ Речь идет об усреднении по малому интервалу оси. x — Прим. перев.

где $\alpha = MV_0/\hbar^2$, $\varepsilon = 2ME/\hbar^2$. Интегрируя это уравнение на малом интервале x вблизи нуля, мы видим, что при $x=0$ производная ψ должна иметь разрыв со скачком, равным $-2\alpha\psi(0)$:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{-0} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{+0} = 2\alpha\psi(0).$$

При таком потенциале существует только одно «связанное» состояние (с отрицательной энергией), а именно:

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} e^{-\alpha|x|}, \quad \varepsilon = -\alpha^2, \quad E = \frac{MV_0^2}{2\hbar^2}.$$

Функция $\psi_0(x)$ имеет максимум при $x=0$ и становится исчезающе малой при больших $|x|$.

Состояния с положительной энергией соответствуют свободным частицам, движущимся с постоянной скоростью v всюду, кроме узкой области, близкой к $x=0$, где действует сила. Мы используем волновые функции свободной частицы $e^{\pm ikx}$ ($\varepsilon = k^2$, $k = Mv/\hbar$) и сопрягаем их при $x=0$ так, чтобы обеспечить требуемый разрыв производной. Например, одним из возможных решений будет функция

$$\psi = \begin{cases} e^{ikx} - \frac{\alpha}{\alpha + ik} e^{-ikx}, & x < 0, \\ \frac{ik}{\alpha + ik} e^{ikx}, & x > 0. \end{cases}$$

Формула (12.3.3) показывает, что эта функция описывает поток частиц, которые движутся из $-\infty$ и, столкнувшись с потенциальной ямой при $x=0$, частично отражаются обратно к $-\infty$, а частично продолжают движение к $+\infty$. Приведенные ранее рассуждения показывают, что квадраты коэффициентов различных членов найденной функции соответствуют отношению R плотности отраженного потока к начальной плотности и отношению T плотности потока продолжающих движение частиц к начальной плотности. Таким образом,

$$R = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + k^2}, \quad T = 1 - R = \frac{k^2}{\alpha^2 + k^2}.$$

Чем глубже яма, тем больше отражение; чем больше скорость частиц ($k = Mv/\hbar$), тем меньше отражение. Дальнейшее рассмотрение физических выводов, проистекающих из этих формул, мы оставим до разбора формул (12.3.29) и (12.3.31).

Влияние возмущения. В квантовой механике часто встречается следующая задача. К системе в определенном стационарном состоянии прилагается при $t=0$ дополнительная возмущающая сила; требуется найти последующее поведение системы. Одна из простейших задач этого типа допускает точное решение для гармонического осциллятора, и это решение послужит нам образцом для других более сложных задач. Предположим, что при $t_s < 0$ система, описываемая (12.3.5), находилась в n -м состоянии с энергией $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ и волновой функцией $\varphi_n e^{-i\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)t}$, где φ_n определяется (12.3.7); при $t=0$ включается возмущающий потенциал $+Fxi(t)$. Следовательно, после $t=0$ уравнение для пространственной части волновой функции будет иметь вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\varepsilon - \beta^2 x^2 - \frac{2M}{\hbar^2} Fx\right] \psi = 0,$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\varepsilon + \left(\frac{F}{\omega\hbar}\right)^2 - \beta^2(x+b)^2\right] \psi = 0,$$

где $b = F/M\omega^2 = F/K$ есть смещение положения равновесия, вызванное возмущающей силой F .

Новое решение, которое всюду ограничено, является, конечно, линейной комбинацией смещенных собственных функций:

$$\Psi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \varphi_m(x+b) \exp \left[-i\omega \left(m + \frac{1}{2} \right) t + \frac{i}{\hbar} E_b t \right], \quad (12.3.9)$$

где $E_b = F^2/2M\omega^2 = \frac{1}{2}(F^2/K)$ — снижение минимума потенциальной энергии, вызванное возмущающей силой. Чтобы получить полное решение, нам следует найти ту линейную комбинацию $\varphi_m(x+b)$, которая равна $\varphi_n(x)$ при $t=0$.

Чтобы получить этот результат, мы используем соотношение, вытекающее из формул, приведенных в конце гл. 6,

$$\begin{aligned} \varphi_n(x-b) &= \sum_{m=0}^n \varphi_m(x) e^{\gamma^2/4} \frac{(-\gamma/\sqrt{2})^{n-m}}{(n-m)!} \sqrt{\frac{n!}{m!}} F\left(n+1 \mid n-m+1 \mid -\frac{1}{2}\gamma^2\right) + \\ &+ \sum_{m=n+1}^{\infty} \varphi_m(x) e^{\gamma^2/4} \frac{(\gamma/\sqrt{2})^{m-n}}{(m-n)!} \sqrt{\frac{m!}{n!}} F\left(m+1 \mid m-n+1 \mid -\frac{1}{2}\gamma^2\right), \end{aligned} \quad (12.3.10)$$

где $\gamma^2 = \beta b^2 = M\omega F^2/\hbar K^2$. Из этого соотношения мы получим окончательное решение

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} \varphi_n(x) e^{-i\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) t}, & t < 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n \varphi_m(x+b) e^{-i\omega \left(m + \frac{1}{2}\right) t + \frac{i}{\hbar} E_b t}, & t > 0, \end{cases} \quad (12.3.11)$$

где $E_b = \frac{1}{2}(F^2/K) = \frac{1}{2}M\omega^2 b^2 = \frac{1}{2}\omega\hbar\gamma^2$ и где

$$A_m^n = \begin{cases} e^{\gamma^2/4} \frac{(-\gamma/\sqrt{2})^{n-m}}{(n-m)!} \sqrt{\frac{n!}{m!}} F\left(n+1 \mid n-m+1 \mid -\frac{1}{2}\gamma^2\right), & m \leq n, \\ e^{\gamma^2/4} \frac{(\gamma/\sqrt{2})^{m-n}}{(m-n)!} \sqrt{\frac{m!}{n!}} F\left(m+1 \mid m-n+1 \mid -\frac{1}{2}\gamma^2\right), & m \geq n. \end{cases}$$

Если возмущающая сила мала по сравнению с $K\sqrt{\beta}$, то γ есть малая величина и в первом приближении по γ решение имеет вид

$$\Psi \simeq \begin{cases} \varphi_n(x) e^{-i\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) t}, & t < 0, \\ \left\{ \varphi_n(x+b) + \gamma \left[\sqrt{\frac{1}{2}(n+1)} \varphi_{n+1}(x+b) e^{-i\omega t} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{1}{2}n} \varphi_{n-1}(x+b) e^{i\omega t} \right] \right\} e^{-i\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) t + (i/\hbar) E_b t}, & t > 0. \end{cases}$$

Плотность частиц в этом приближении равна

$$|\Psi|^2 \simeq \begin{cases} [\varphi_n(x)]^2, & t < 0, \\ [\varphi_n(x+b)]^2 + 2\gamma \left[\sqrt{\frac{1}{2}(n+1)} \varphi_n \varphi_{n+1} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{1}{2}n} \varphi_n \varphi_{n-1} \right] \cos(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (12.3.12)$$

Следовательно, плотность частиц до момента $t=0$ была стационарна и характеризовалась собственной функцией φ_n ; после включения при $t=0$ возмущающей силы состояние становится комбинацией различных собственных функций и плотность осциллирует с течением времени. Так как для собственных функций, определенных в (12.3.7), справедливо соотношение

$$\frac{1}{\beta} \frac{d}{dx} \varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}(n+1)} \varphi_{n+1}(x) + \sqrt{\frac{1}{2}n} \varphi_{n-1}(x),$$

то приближенно выражение для плотности частиц после момента времени $t=0$ может быть преобразовано к виду

$$|\Psi|^2 \simeq [\varphi_n(x+b)]^2 - 2b \left[\varphi_n(x+b) \cdot \frac{d}{dx} \varphi_n(x+b) \right] \cos(\omega t) \simeq \\ \simeq [\varphi_n(x+b - b \cos \omega t)]^2, \quad t > 0.$$

Это показывает, что возмущение нарушает симметричное относительно $x=0$ распределение $(\varphi_n)^2$ и создает новое распределение, симметричное в среднем относительно нового положения равновесия $x=-b$, но имеющее небольшую антисимметрическую осциллирующую часть. При $t=0$ центр распределения все еще находится в точке $x=0$, но через промежуток времени $t=\pi/\omega$ он переместится в точку $x=-2b$, в момент времени $t=2\pi/\omega$ центр снова будет находиться в $x=0$ и т. д.; центр распределения колеблется с частотой $\omega/2\pi$ и амплитудой b . Это колебание, очевидно, совпадает с тем колебанием, которое совершала бы классическая частица под воздействием подобной возмущающей силы, так что, по крайней мере в этом простом случае, мы имеем отдаленное сходство между поведением плотности вероятности $|\Psi|^2$ и соответствующей классической частицы.

Приближенные формулы для возмущения общего вида. Для расчета стационарных состояний систем, которые только незначительно отличаются от гармонического осциллятора, или для расчета поведения гармонического осциллятора, возмущенного какой-либо небольшой дополнительной силой, можно применять методы, рассмотренные в гл. 9. Предположим, что возмущающий потенциал есть $V'(x)$, так что уравнение Шредингера для стационарного состояния [соответствующее (12.3.5)] будет иметь вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\varepsilon - \beta^2 x^2) \psi = \frac{2M}{\hbar^2} V'(x) \psi, \quad (12.3.13)$$

где $\varepsilon = 2ME/\hbar^2$. Методом гл. 9 это уравнение можно преобразовать в интегральное уравнение для ψ и ε :

$$\psi(x) = \frac{2M}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(x|x_0) V'(x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (12.3.14)$$

Ядро G — это функция Грина для гармонического осциллятора, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + (\varepsilon - \beta^2 x^2) G = \delta(x - x_0),$$

где $\varepsilon = 2ME/\hbar^2$ и $\beta = M\omega/\hbar$, и краевому условию: G стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

В данном случае удобнее всего выразить функцию Грина в виде ряда по собственным функциям

$$G_\varepsilon(x|x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \bar{\varphi}_n(x_0)}{\varepsilon - \varepsilon_n}, \quad (12.3.15)$$

где φ_n — собственные функции для невозмущенного гармонического осциллятора, приведенные в (12.3.7), а ε_n — соответствующие значения величины $2ME/\hbar^2$, т. е. $\varepsilon_n = 2\beta \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Подставляя это разложение в (12.3.14), мы получаем

$$\psi(x) = \frac{2M}{\hbar^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)}{\varepsilon - \varepsilon_m} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_0) V'(x_0) \psi(x_0) dx_0.$$

Мы ищем решение, которое при стремлении V' к нулю приближается к какой-нибудь собственной функции, например к φ_n . Поэтому мы прежде всего нормируем ψ так, чтобы коэффициент при φ_n был равен единице. Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi_n(x) + \sum_{m \neq n} \frac{\varphi_m(x)}{E - E_m} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_m(x_0) V'(x_0) \psi(x_0) dx_0, \\ E &= E_n + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_n(x_0) V'(x_0) \psi(x_0) dx_0, \end{aligned} \quad (12.3.16)$$

где $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Эту пару точных уравнений можно решить так, как решают в большинстве случаев интегральные уравнения, т. е. последовательными итерациями. Подставим сначала в правую часть равенства (12.3.16) $\psi = \varphi_n$ и вычислим следующее приближение, которое затем вновь подставим в правую часть, и т. д. Соответствующее значение энергии можно тогда определить, подставляя ψ , полученное из первого уравнения, во второе (см. в § 9.1 дальнейшие детали).

Первым приближением будет $\varepsilon = \varepsilon_n + (2M/\hbar^2) V'_{nn}$ так что

$$E^1 = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + V'_{nn}, \quad \psi^1 = \varphi_n(x) + \sum_{m \neq n} \frac{V'_{mn}}{E - E_m} \varphi_m(x), \quad (12.3.17)$$

где числа

$$V'_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_m(x_0) V'(x_0) \varphi_n(x_0) dx_0$$

называют *матричными элементами* V' по отношению к невозмущенным состояниям m и n . В выражение для ψ^1 вместо E можно подставить E^1 . Второе приближение будет тогда получено подстановкой ψ^1 в правую часть уравнения (12.3.16):

$$\begin{aligned} E^2 &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + V'_{nn} + \sum_{m \neq n} \frac{V'_{nm} V'_{mn}}{E - E_m}, \\ \psi^2 &= \varphi_n(x) + \sum_{m \neq n} \frac{V'_{mn}}{E - E_m} \varphi_m(x) + \sum_{\substack{m \neq n \\ p \neq n}} \frac{V'_{mp} V'_{pn}}{(E - E_p)(E - E_m)} \varphi_m(x). \end{aligned}$$

Чтобы вычислить энергию с точностью до членов второго порядка, в сумму первой формулы нужно подставить вместо E величину E_n . В выражении

для ψ^2 в первой сумме E должно быть заменено величиной E^1 , но во второй сумме для получения второго приближения достаточно взять вместо E величину E_n . Теперь можно написать полное разложение

$$\begin{aligned}
 E &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + V'_{nn} + \sum_{m \neq n} \frac{V'_{nm} V'_{mn}}{E - E_m} + \sum_{\substack{m \neq n \\ p \neq n}} \frac{V'_{nm} V'_{mp} V'_{pn}}{(E - E_p)(E - E_m)} + \\
 &\quad + \sum_{\substack{m \neq n \\ p \neq n \\ q \neq n}} \frac{V'_{nm} V'_{mp} V'_{pq} V'_{qn}}{(E - E_p)(E - E_q)(E - E_m)} + \dots, \\
 \psi &= \varphi_n(x) + \sum_{m \neq n} \frac{V'_{mn}}{E - E_m} \varphi_m(x) + \sum_{\substack{m \neq n \\ p \neq n}} \frac{V'_{mp} V'_{pn}}{(E - E_p)(E - E_m)} \varphi_m(x) + \\
 &\quad + \sum_{\substack{m \neq n \\ p \neq n \\ q \neq n}} \frac{V'_{mq} V'_{qp} V'_{pn}}{(E - E_q)(E - E_p)(E - E_m)} \varphi_m + \dots.
 \end{aligned} \tag{12.3.18}$$

Для получения приближения заданного порядка (скажем ν -го) в последовательных суммах выражения для E (12.3.18) E должно быть заменено значениями $E^{\nu-2}$, $E^{\nu-3}$, ... и т. д., а в последовательных суммах выражения для ψ — значениями $E^{\nu-1}$, $E^{\nu-2}$, ... Например,

$$\begin{aligned}
 E^2 &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + V'_{nn} + \sum_{m \neq n} \frac{V'_{nm} V'_{mn}}{\hbar\omega (n - m)}, \\
 \psi^2 &= \varphi_n(x) + \sum_{m \neq n} \frac{V'_{mn}}{\hbar\omega (n - m) + V'_{nn}} \varphi_m(x) + \sum_{\substack{m \neq n \\ p \neq n}} \frac{V'_{mp} V'_{pn}}{[\hbar\omega (n - p)] [\hbar\omega (n - m)]} \varphi_m(x).
 \end{aligned}$$

Условия, при которых эти ряды сходятся, были рассмотрены в гл. 9. Другие формулы теории возмущений, полезные, когда эти ряды плохо сходятся, также указаны в гл. 9.

Для иллюстрации метода возмущений мы вычислим энергию и волновые функции линейного возмущения Fx , для которого точное решение приведено в (12.3.11). Из соотношения

$$x \sqrt{\beta} \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)} \varphi_{n+1}(x) + \sqrt{\frac{1}{2}n} \varphi_{n-1}(x)$$

получаются следующие выражения для матричных элементов V'_{sn} :

$$V'_{sn} = F \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)}, & s = n+1, \\ \sqrt{\frac{1}{2}n}, & s = n-1, \\ 0, & s - \text{любое другое.} \end{cases}$$

Следовательно, согласно (12.3.18), во втором приближении возмущенные энергии выражаются формулой

$$E \simeq \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{F^2 \hbar}{2M\omega} \left(\frac{n - n - 1}{\hbar\omega} \right) = E_n - E_b.$$

Возмущенная волновая функция в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned}\psi &\simeq \varphi_n(x) - \gamma \left[\sqrt{\frac{1}{2}(n+1)} \varphi_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{1}{2}n} \varphi_{n-1}(x) \right] \simeq \\ &\simeq \varphi_n(x) + b \frac{d}{dx} \varphi_n(x) \approx \varphi_n(x+b),\end{aligned}$$

что совпадает с решением (12.3.9).

Волновые функции в импульсном представлении. В § 2.6 [см. рассуждение после (2.6.28)] было показано, что если оператор энергии $\mathcal{H}$ для стационарного состояния выражен через импульс p и положение частицы q , то уравнение для пространственно-зависящей волновой функции ψ получается заменой p в H на $-\hbar i(\partial/\partial q)$ и воздействием оператора $\mathcal{H}$ на ψ . Для гармонического осциллятора такая волновая функция приведена в (12.3.7). Уравнение для волновой функции в импульсном представлении, квадрат модуля которой представляет вероятность того, что частица имеет соответствующий импульс, получается заменой x в $\mathcal{H}$ на $\hbar i(\partial/\partial p)$ и применением полученного оператора к волновой функции. В случае гармонического осциллятора после отделения временного множителя $e^{-iEt/\hbar}$ для волновой функции получается уравнение

$$\left[\frac{d^2 \chi}{dp^2} + \left[\frac{2E}{M\hbar^2 \omega^2} - \frac{p^2}{M^2 \omega^2 \hbar^2} \right] \chi \right] = 0. \quad (12.3.19)$$

Это уравнение имеет ту же форму, что (12.3.5), и оно должно иметь решения такого же типа. Допустимые значения энергии, для которых χ конечно при всех значениях p , будут

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

так же, как и в (12.3.6) (как оно, конечно, и должно быть, поскольку речь идет о тех же стационарных состояниях, представленных только не через положение частицы, а через ее импульс). Соответствующие волновые функции в импульсном представлении имеют вид

$$\chi_n(p) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi M \omega \hbar} \right)^{1/4} e^{-p^2/2M\hbar\omega} H_n \left(\frac{p}{\sqrt{M\omega\hbar}} \right). \quad (12.3.20)$$

Эти функции вновь должны быть нормированы к единице, поскольку интеграл от χ^2 по всем значениям p соответствует достоверности того, что импульс частицы находится в области $-\infty < p < \infty$.

Средний импульс равен нулю, и, используя рекуррентные соотношения для полиномов Эрмита H_n , можно показать, что среднее значение квадрата импульса частицы в n -м состоянии равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^2 \chi_n^2(p) dp = \hbar \omega M \left(n + \frac{1}{2} \right) = M E_n,$$

т. е. среднему значению квадрата импульса классической частицы, имеющей энергию E_n .

Волновые функции в импульсном представлении полезны для исследования поведения импульса квантового осциллятора или, например, для вычисления возмущения, вызванного членами, зависящими от p . Согласно (2.6.24), волновые функции в координатном и импульсном представлениях тесно связаны между собой, будучи преобразованиями Фурье друг друга:

$$\chi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \varphi_n(x) dx. \quad (12.3.21)$$

Это равенство легко проверить, обратившись к интегральному представ-

лению функций Вебера (с другой стороны, оно само немедленно приводит к интересному интегральному уравнению, которому удовлетворяют полиномы Эрмита).

Связанные и свободные состояния. Если потенциальная энергия имеет минимум, но стремится асимптотически к конечному значению при $x \rightarrow +\infty$ или $-\infty$, то некоторые допустимые значения энергии будут дискретны — они соответствуют состояниям, в которых частица связана в потенциальной долине. Для области значений энергии, более высоких, чем асимптотическое значение потенциала, допустимы все энергии, поскольку

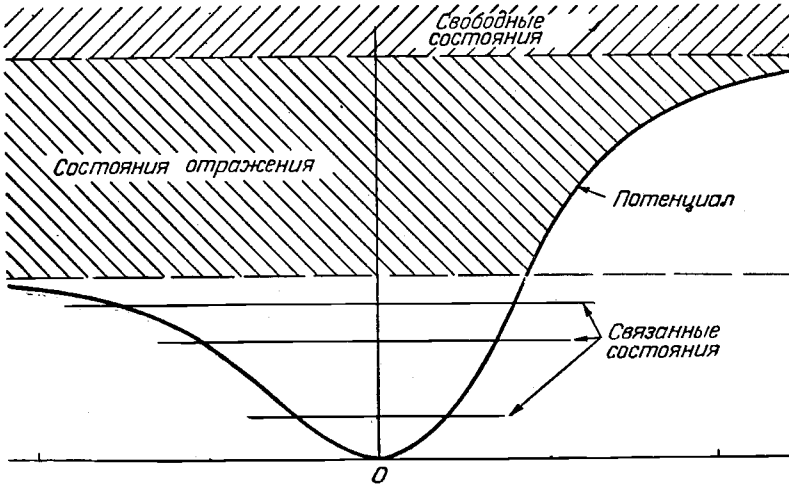


Рис. 12.2. Потенциальная энергия для одномерного случая и уровни энергии связанных состояний, состояний отражения и свободных состояний.

частица при этом свободна и может перемещаться бесконечно далеко. В качестве примера мы вычислим волновые функции и допустимые энергии для частицы массы m в потенциальном поле

$$V(x) = V_0 \operatorname{ch}^2 \mu \left\{ \operatorname{th} \left(\frac{x - \mu d}{d} \right) + \operatorname{th} \mu \right\}^2,$$

показанном на рис. 12.2. Если V_0 положительно, то этот потенциал положителен и достигает наименьшего значения ($V=0$) при $x=0$. При положительном x потенциал возрастает с возрастанием x и асимптотически стремится к $V_0 e^{2\mu}$ при $x \rightarrow +\infty$; если же x отрицательно и возрастает по абсолютной величине, то V также возрастает, асимптотически стремясь к $V_0 e^{-2\mu}$ при $x \rightarrow -\infty$.

Классическая частица не может иметь отрицательной энергии; для энергий, лежащих между нулем и $V_0 e^{-2\mu}$ ($\mu > 0$), частица совершает колебания в потенциальной долине, для энергий, лежащих между $V_0 e^{-2\mu}$ и $V_0 e^{2\mu}$, частица, приходящая из $-\infty$, отражается от потенциального барьера, находящегося правее минимума, и уходит обратно к $-\infty$; при энергиях больших чем $V_0 e^{2\mu}$ частица может двигаться от $-\infty$ до $+\infty$ или от $+\infty$ до $-\infty$.

Чтобы найти соответствующее квантово-механическое поведение частицы, выразим расстояние в единицах d , а энергию в единицах $\hbar^2/2md^2$. Для состояния с энергией E уравнение для пространственного множителя ($\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$) будет иметь вид

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left[\epsilon - v \operatorname{ch} 2\mu - v \operatorname{sh} 2\mu \operatorname{th} z + v \frac{\operatorname{ch}^2 \mu}{\operatorname{ch}^2 z} \right] \psi = 0, \quad (12.3.22)$$

где

$$z = (x - \mu d)/d, \quad \varepsilon = (2md^2/\hbar^2) E, \quad v = (2md^2/\hbar^2) V_0.$$

Довольно неожиданным представляется тот факт, что это уравнение оказывается связанным с гипергеометрическим уравнением. Положим сначала

$$\psi = e^{-az} \operatorname{ch}^{-b} z F(z).$$

Тогда, если параметры a и b определяются соотношениями

$$a^2 + b^2 = -\varepsilon + v \operatorname{ch} 2\mu, \quad 2ab = v \operatorname{sh} 2\mu,$$

или

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \sqrt{ve^{2\mu} - \varepsilon} - \frac{1}{2} \sqrt{ve^{-2\mu} - \varepsilon} = \frac{1}{2} x_+ - \frac{1}{2} x_-, \\ b &= \frac{1}{2} \sqrt{ve^{2\mu} - \varepsilon} + \frac{1}{2} \sqrt{ve^{-2\mu} - \varepsilon} = \frac{1}{2} x_+ + \frac{1}{2} x_-. \end{aligned} \quad (12.3.23)$$

(x_+^2 — это разность между энергией частицы и потенциальной энергией при $x = +\infty$, а x_-^2 — такая же разность при $x = -\infty$), то уравнение для F принимает вид

$$F'' - 2[a + b \operatorname{th} z] F' + \{[v \operatorname{ch}^2 \mu - b(b+1)]/\operatorname{ch}^2 z\} F = 0,$$

что сводится к гипергеометрическому уравнению заменой независимой переменной $u = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{th}(z)] = e^{-z}/(e^z + e^{-z})$:

$$u(1-u) \frac{d^2 F}{du^2} + [a + b + 1 - 2(b+1)u] \frac{dF}{du} + [v \operatorname{ch}^2 \mu - b(b+1)] F = 0.$$

Сравнение с (5.2.42) показывает, что решением, конечным при $u = 0$ ($x \rightarrow +\infty$), является гипергеометрическая функция

$$F = F\left(b + \frac{1}{2} - \sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}, \quad b + \frac{1}{2} + \sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} \mid a + b + 1 \mid u\right).$$

Поскольку при $\varepsilon < ve^{2\mu}$ величина $a + b$ действительна, функция ψ для таких энергий исчезает при $x \rightarrow \infty$. Вторым решением служит произведение u^{-a-b} на другое F , что приводит к ψ , которое при $x \rightarrow \infty$ ведет себя как $e^{(a+b)z}$ и стремится к бесконечности, если $\varepsilon < ve^{2\mu}$. Следовательно, до тех пор пока ε (т. е. энергия частицы в единицах $\hbar^2/2md^2$) меньше чем $ve^{2\mu}$ (асимптотическое значение потенциальной энергии при $z \rightarrow \infty$) — это второе решение следует отбросить, чтобы было выполнено условие интегрируемости с квадратом.

Поэтому решением уравнения Шредингера, конечным при $x \rightarrow \infty$, будет

$$\psi = \frac{Ne^{-az}}{(e^z + e^{-z})^b} \times \quad (12.3.24)$$

$$\times F\left(b + \frac{1}{2} - \sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}, \quad b + \frac{1}{2} + \sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} \mid a + b + 1 \mid \frac{e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right),$$

где $z = x/d - \mu$, a и b определяются по формуле (12.3.23) и N — нормирующий множитель.

Согласно (5.2.49), предельное поведение этого решения при $z \rightarrow -\infty$ будет следующим:

$$\psi \simeq \frac{\Gamma(a+b+1) \Gamma(b-a) e^{(a-b)z}}{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}\right) \Gamma\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}\right)} + \\ + \frac{\Gamma(a+b+1) \Gamma(a-b) e^{(b-a)z}}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}-\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}\right) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}+\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}\right)}$$

Если в последнем выражении один из членов не обращается в нуль, то оно будет стремиться к бесконечности независимо от того, будет ли $a > b$ или $b > a$. В силу симметрии членов, содержащих a и b , а также симметрии определений a и b [см. уравнение (12.3.23)], мы получим всевозможные случаи, выбрав $b > a$; при $a > b$ получим простое повторение результатов. Для того чтобы при $b > a$ ψ было конечным при $z \rightarrow -\infty$, нужно, чтобы аргумент одной из гамма-функций, стоящих в знаменателе первого члена, был целым отрицательным числом и чтобы, таким образом, первый член был равен нулю. Это означает, что при $z < v e^{-2\mu}$ допустимы только те энергии, для которых

$$b = b_n = \sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad a = a_n = \frac{\frac{1}{2} v \operatorname{sh} 2\mu}{\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)}, \quad (12.3.24')$$

где n — нуль или целое положительное число, такое, что $b_n > a_n$. Другими словами, n должно быть меньше чем

$$\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} v \operatorname{sh} 2\mu}.$$

Отметим, что дискретные связанные уровни не могут существовать, если $\sqrt{\frac{1}{2} v \operatorname{sh} 2\mu}$ больше чем $\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$; иначе говоря, если не выполняется неравенство

$$v > e^{2\mu} \operatorname{th} \mu, \quad \mu > 0,$$

то связанных уровней нет вовсе. Если потенциальная энергия становится слишком асимметричной (μ слишком велико), то минимум уже не сможет «поддерживать» связанное состояние. Однако внутри этих границ для v и μ возможны одно или несколько состояний, волновые функции которых исчезают и при $x = +\infty$ и при $x = -\infty$ и которые соответствуют классическим связанным состояниям, где частица колеблется с конечной амплитудой около положения минимума потенциала, совершая периодическое (но не чисто гармоническое) движение. В классическом случае частота колебания зависит от амплитуды движения и равна $\sqrt{V_0/2\pi^2 m d^2 \operatorname{ch}^2 \mu}$ для малых амплитуд, но для больших амплитуд эта частота уменьшается. В волновой механике признаком того, что движение не будет чисто гармоническим, является отличие друг от друга промежутков между допустимыми уровнями энергии, тогда как в случае простого параболического потенциала эти промежутки были одинаковы.

Существование связанных состояний. Мы уже видели, что внутри определенных границ для величин μ и v допустимые уровни энергии при

$\varepsilon < v e^{-2\mu}$ являются дискретными величинами

$$\varepsilon_n = v \operatorname{ch} 2\mu - \left[\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 - \frac{(1/4) v^2 \operatorname{sh}^2 2\mu}{\left[\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2}, \quad (12.3.25)$$

где

$$n = 0, 1, 2, \dots < \left[\sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} v \operatorname{sh} 2\mu} \right].$$

Соответствующие волновые функции имеют вид

$$\phi_n = \frac{N e^{-a_n z}}{(e^z + e^{-z})^{b_n}} F \left(-n, 2 \sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}} - n \mid a_n + b_n + 1 \mid \frac{e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \right), \quad (12.3.26)$$

где величины a_n и b_n определены равенствами (12.3.24').

При малых значениях v существует только один связанный уровень. Например, при $\mu = 0$ (потенциальная долина, симметричная относительно $x = 0$) и при $v \ll \frac{1}{4}$ существует только одно связанное состояние для $n = 0$. Допустимая энергия с точностью до величин второго порядка относительно малой величины v равна:

$$\varepsilon \simeq v - v^2, \quad E \simeq V_0 - \frac{2md^2}{\hbar^2} V_0^2.$$

Этот уровень только немного ниже асимптотического значения V_0 потенциальной энергии, и соответствующее состояние является «едва связанным».

Вообще, можно показать, что в случае, когда V равно нулю для всех значений x от $-\infty$ до $+\infty$, кроме малого промежутка, где имеется очень неглубокая «долина», всегда существует по крайней мере один связанный уровень. В случае когда E меньше нуля, но больше минимума V в этой долине, в области, где $E > V$, волновая функция будет изогнута вниз, и мы можем добиться того, что она будет опускаться к оси в обоих концах промежутка изменения x , где $E > V$. В области, где $V = 0$, E будет меньше чем V , и решение ведет себя там как e^{-ax} при $x \rightarrow \infty$ и как e^{ax} при $x \rightarrow -\infty$ с тем, чтобы ϕ было конечным: $\alpha^2 = -(2mE/\hbar^2)$ ($E < 0$). Как бы ни были «мелки» значения V и как бы низко ни проходила соответствующая кривая графика ψ в этой области, всегда можно сделать α достаточно малым [взяв $-E$ малым, т. е. взяв «едва связанное» состояние], для того чтобы две экспоненты, дающие решения для больших значений x , соединялись достаточно гладко.

Таким образом, как бы мелка ни была потенциальная долина, в этом случае существует всегда по крайней мере один связанный уровень. Этот вывод, однако, перестает быть правильным, если асимптотическое значение V при $x \rightarrow \infty$ отличается от асимптотического значения при $x \rightarrow -\infty$. В этом случае мы не можем подправить E таким образом, чтобы разность производных показательных членов, представляющих ϕ при больших значениях $|x|$, была достаточно малой. Эти общие выводы иллюстрируются в настоящем примере, где мы видели, что при $\mu = 0$ и $V(+\infty) = V(-\infty)$ всегда существует один связанный уровень, как бы мало ни было v ; в то же время при $\mu \neq 0$ и $V(+\infty) \neq V(-\infty)$ не существует связанного уровня, если v меньше, чем $e^{2\mu} \operatorname{th} \mu$.

Нужно попутно отметить, что эти выводы сохраняют силу только для одномерных задач. В случае двух или трех измерений, когда V равно нулю всюду, кроме малой области вблизи начала, где V имеет численно небольшой минимум, можно сделать эту область настолько малой или

выбрать минимум численно настолько малым (или и то и другое вместе), что не будет существовать ни одного связанного уровня¹⁾.

С другой стороны, при больших значениях $v \text{ch}^2 \mu$ существует несколько связанных уровней. Вблизи минимума потенциала, находящегося в точке $x = 0$, потенциальная энергия имеет параболический характер:

$$V(x) \simeq \left(\frac{x}{d}\right)^2 V_0 \text{ch}^{-2} \mu + \dots, \quad x \ll d,$$

так что классическая частота малых колебаний около положения равновесия равна $\omega/2\pi$, где $\omega = \sqrt{2V_0/md^2 \text{ch}^2 \mu}$. Следовательно, постоянная v связана с ω соотношением

$$v = \frac{m^2 d^4}{\hbar^2} \omega^2 \text{ch}^2 \mu.$$

Если $v \text{ch}^2 \mu$ значительно превышает $\frac{1}{4}$, правая часть уравнения (12.3.25) для энергии может быть разложена в ряд при малых значениях n , что дает нам

$$E_n \simeq \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar^2}{2md^2} \left(1 + \frac{3}{2} \text{th}^2 \mu\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

для нижних уровней. Таким образом, несколько первых связанных уровней соответствуют формуле (12.3.6) для гармонического осциллятора с поправочным членом, соответствующим отклонению рассматриваемой потенциальной энергии от простой параболической формы.

Отражение и прохождение. Если энергия ε больше чем $v e^{-2\mu}$, но меньше чем $v e^{2\mu}$, то оба решения конечны при $x \rightarrow -\infty$, но только одно из них конечно при $x \rightarrow +\infty$. Функция, данная в равенстве (12.3.24), конечна всюду для всякой энергии в промежутке $v e^{-2\mu} < \varepsilon < v e^{2\mu}$. В этом промежутке величина $\kappa_+ = \sqrt{v e^{2\mu} - \varepsilon}$ будет действительной, а величина $\sqrt{v e^{-2\mu} - \varepsilon} = -ik_-$ мнимой; k_-^2 дает асимптотическое значение кинетической энергии частицы в единицах $\hbar^2/2md^2$ при $x \rightarrow -\infty$. Точное выражение волновой функции при $v e^{2\mu} > \varepsilon > v e^{-2\mu}$ имеет тогда вид

$$\psi = \frac{N e^{-\frac{1}{2}(\kappa_+ + ik_-)z}}{(e^z + e^{-z})^{\frac{1}{2}\kappa_+ - \frac{1}{2}ik_-}} F\left(b + \frac{1}{2} - \gamma, b + \frac{1}{2} + \gamma | \kappa_+ + 1 | \frac{e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right), \quad (12.3.27)$$

где

$$b = \frac{1}{2} \kappa_+ - \frac{1}{2} ik_- \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{v \text{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}.$$

Воспользовавшись уравнением (5.2.49), мы найдем асимптотическое поведение функции ψ при $x \rightarrow -\infty$:

$$\psi \simeq N \Gamma(\kappa_+ + 1) \left\{ \frac{\Gamma(-ik_-) e^{ik_- z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \kappa_+ + \frac{1}{2} - \gamma - \frac{1}{2} ik_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} \kappa_+ + \frac{1}{2} + \gamma - \frac{1}{2} ik_-\right)} + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(ik_-) e^{-ik_- z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \kappa_+ + \frac{1}{2} - \gamma + \frac{1}{2} ik_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} \kappa_+ + \frac{1}{2} + \gamma + \frac{1}{2} ik_-\right)} \right\}.$$

Первый член соответствует стационарному потоку частиц с импульсом $p_- = \sqrt{2m(E - V_0 e^{-2\mu})}$, движущихся в положительном направлении. Как показывает равенство (12.3.3), этот поток с точки зрения волновой

¹⁾ Для двумерного случая это последнее утверждение не справедливо. См. Ландау Л., Лифшиц Е., Квантовая механика, ч. I, ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 183—186. — Прим. ред.

механики изображается чисто гармонической волной

$$\exp\left(\frac{ip_-x}{\hbar}\right) = \exp[i(z+\mu)\sqrt{\varepsilon - ve^{-2\mu}}] = \exp[ik_-(z+\mu)];$$

квадрат модуля коэффициента при этой показательной функции пропорционален плотности потока частиц в положительном направлении. Вторым членом, очевидно, соответствует волне (а следовательно, и потоку частиц), движущейся в отрицательном направлении. Так как коэффициент при втором члене является комплексным числом, сопряженным коэффициенту при первом члене, оба потока равны по величине, и результирующий поток равен нулю. Как и в случае классических частиц, поток, распространяющийся вправо, не может достигнуть $+\infty$, так как потенциальная энергия $V_0 e^{2\mu}$ там больше, чем энергия частицы, так что все частицы отражаются обратно к $-\infty$.

Если энергия ε больше чем $ve^{2\mu}$ (в единицах $\hbar^2/2md^2$), то величина $\sqrt{ve^{2\mu} - \varepsilon} = -ik_+$ будет также мнимой и все решения уравнения (12.3.22) конечны и при $x = \infty$, и при $x = -\infty$. Решение (12.3.24) в этом промежутке ($\varepsilon > ve^{2\mu}$),

$$\begin{aligned} \phi &= Ne^{\frac{1}{2}i(k_+ - k_-)z} (e^z + e^{-z})^{\frac{1}{2}i(k_+ + k_-)} \times \\ &\times F\left(-\frac{1}{2}ik_+ - \frac{1}{2}ik_- + \frac{1}{2} - \gamma, -\frac{1}{2}ik_+ - \frac{1}{2}ik_- + \frac{1}{2} + \gamma \mid 1 - ik_+ \mid \frac{e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right) \simeq \\ &\simeq Ne^{ik_+z}, \quad z \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (12.3.28)$$

$$\begin{aligned} \phi &\simeq N\Gamma(1 - ik_+) \left\{ \frac{\Gamma(-ik_-) e^{ik_-z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma - \frac{1}{2}ik_+ - \frac{1}{2}ik_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma - \frac{1}{2}ik_+ - \frac{1}{2}ik_-\right)} + \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(ik_-) e^{-ik_-z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma - \frac{1}{2}ik_+ + \frac{1}{2}ik_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma - \frac{1}{2}ik_+ + \frac{1}{2}ik_-\right)} \right\}, \quad z \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где $\gamma = \sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}$ и $k_- = \sqrt{\varepsilon - ve^{-2\mu}}$, представляет поток частиц, одни из которых движутся вправо, а другие — влево при $z \rightarrow -\infty$; но при $z \rightarrow +\infty$ частицы движутся только вправо. Это не согласуется с классической механикой, так как в классической механике все частицы, движущиеся из $-\infty$ с энергией, большей потенциальной энергии в любой точке промежутка $-\infty < x < +\infty$, будут продолжать двигаться только вправо. Однако это согласуется с движением волны в среде, коэффициент преломления которой пропорционален $E - V$; если коэффициент преломления меняется с изменением x в промежутке $-\infty < x < +\infty$, то часть волны, движущейся из $-\infty$ вправо, отразится назад к $-\infty$ и только часть волны будет проходить к $+\infty$.

Сравнительные амплитуды проходящей и отраженной волн получаются с помощью формулы $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$. Например, квадрат модуля коэффициента при e^{ik_-z} содержит множитель $\Gamma(1 - ik_+) \Gamma(1 + ik_+) = \pi k_+ / \operatorname{sh} \pi k_+$, а также и множитель $\Gamma(ik_-) \Gamma(-ik_-) = \pi/k_- \operatorname{sh} \pi k_-$. Поступая аналогично с гамма-функциями в знаменателе и помня, что плотность тока пропорциональна произведению величины k на квадрат амплитуды экспоненты, мы найдем, что падающий поток (движущийся вправо из $x = -\infty$), отраженный поток (влево к $x = -\infty$) и проходящий поток (вправо к $x = +\infty$) соответственно пропорциональны величинам I_i, I_r

и I_t , где:

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{2} k_+ |N|^2 \frac{\operatorname{ch}[\pi(k_+ + k_-)] + \cos(2\pi\gamma)}{\operatorname{sh}(\pi k_+) \operatorname{sh}(\pi k_-)}, \\ I_r &= \frac{1}{2} k_+ |N|^2 \frac{\operatorname{ch}[\pi(k_- - k_+)] + \cos(2\pi\gamma)}{\operatorname{sh}(\pi k_+) \operatorname{sh}(\pi k_-)}, \\ I_t &= k_+ |N|^2. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $I_i - I_r = I_t$, как и должно быть, для того чтобы удовлетворялось уравнение непрерывности.

Поэтому, если из точки $x = -\infty$ выходит поток, плотность которого равна 1, то отраженный поток R и проходящий поток T имеют плотности

$$\begin{aligned} R &= \frac{\operatorname{ch}[\pi(k_- - k_+)] + \cos(2\pi\gamma)}{\operatorname{ch}[\pi(k_+ + k_-)] + \cos(2\pi\gamma)}, \\ T &= \frac{2\operatorname{sh}(\pi k_+) \operatorname{sh}(\pi k_-)}{\operatorname{ch}[\pi(k_+ + k_-)] + \cos(2\pi\gamma)} = 1 - R, \end{aligned} \quad (12.3.29)$$

где

$$\gamma = \sqrt{v \operatorname{ch}^2 \mu + \frac{1}{4}}, \quad k_+ = \sqrt{\varepsilon - v e^{2\mu}} \quad \text{и} \quad k_- = \sqrt{\varepsilon - v e^{-2\mu}}.$$

Когда энергия ε приближается к асимптотическому значению $v e^{2\mu}$, k_+ стремится к нулю, T стремится к нулю, а R стремится к единице. Когда v приближается к нулю, так что потенциал становится независимым от x , R стремится к нулю, а T стремится к единице (для положительного ε).

Другое интересное явление лучше всего показать, рассматривая симметричный случай $\mu = 0$. Здесь допустимые связанные уровни имеют вид:

$$\varepsilon_n = v - \left[\sqrt{v + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2, \quad n = 0, 1, \dots < \sqrt{v + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2},$$

и «коэффициент отражения» от потенциальной долины падающей частицы с энергией $\varepsilon > 0$ равен

$$R = \frac{1 + \cos \left(2\pi \sqrt{v + \frac{1}{4}} \right)}{\operatorname{ch}(2\pi \sqrt{\varepsilon - v}) + \cos \left(2\pi \sqrt{v + \frac{1}{4}} \right)} = 1 - T.$$

Заметим, что этот коэффициент меняется периодически с изменением $\sqrt{v + \frac{1}{4}}$, достигая своего максимума, когда $\sqrt{v + \frac{1}{4}}$ является целым числом, и обращаясь в нуль при $\sqrt{v + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, N + \frac{1}{2}$. В этом последнем случае отдельные волны, отраженные от различных частей потенциальной долины, интерферируя, разрушают отраженную волну и приводят к полному прохождению. Это полностью аналогично действию пленки, толщина которой равна четверти длины волны; такая пленка, нанесенная на поверхность линзы, уменьшает до минимума свет, отражаемый от этой поверхности.

Но, как и во всех квантовых явлениях, здесь мы имеем лишь частичное объяснение явления. Если $\sqrt{v + \frac{1}{4}}$ несколько больше чем $N + \frac{1}{2}$, то существует связанный уровень ε_N , несколько более низкий чем высшая точка склона долины, и при уменьшении v до значений, несколько меньших чем $\left(N + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$, этот верхний связанный уровень «выталкивается» в континуум свободных уровней, лежащих выше $\varepsilon = v$. Если v

приближенно равно $\left(N + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, то оказывается, что волновая функция (при ϵ , несколько большем чем v) в потенциальной долине имеет значения, во много раз большие чем при $|x| = \infty$; в то же время при $v \approx N^2 - \frac{1}{4}$ амплитуда этой функции в долине мало отличается от ее амплитуды при $|x| \rightarrow \infty$. Медленно движущаяся частица, подходя к долине, входит в нее с энергией, очень близкой к энергии связанного состояния; даже в случае, когда она находится в свободном состоянии, она пребывает в долине сравнительно долгое время и, очевидно, «забывает» отразиться. В случае когда v несколько меньше чем $\left(N + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ и связанный уровень «выталкивается», кажется, что существует «виртуальный уровень», который задерживает приходящие медленные частицы на некоторое время и лишь некоторые из них отбрасывает назад к $-\infty$.

Это влияние «виртуальных уровней» на отражающую способность потенциальной ямы встречается также и в задачах двух и трех измерений.

Мы рассмотрели поведение волновой функции для потенциала, фигурирующего в уравнении (12.3.22), при всех значениях энергии. Мы видели, что не существует допустимых состояний энергии, меньших чем минимум потенциальной энергии, что согласуется с классической динамикой. Для энергий, лежащих между минимумом потенциала и наинизшим асимптотическим значением V_- , допустимые состояния являются связанными, волновая функция обращается в нуль при $x = \pm\infty$, что согласуется с классическими результатами; но в этом промежутке допустима только дискретная совокупность значений энергии, что не согласуется с классическим случаем, где допустимы все значения энергии, превышающие минимум. Для частиц с энергией, большей чем V_- , но меньшей чем асимптотическое значение V_+ потенциала при $x = +\infty$, допустимы все значения энергии; волновая функция равна нулю при $x = +\infty$, но простирается до $-\infty$, где она соответствует падающей волне (распространяющейся вдоль оси x) и отраженной волне равной амплитуды, что находится в соответствии с классическим описанием потока частиц, отражающихся от склона потенциальной долины. Наконец, для частиц с энергиями, превышающими V_+ , допустимы все энергии в согласии с классическим случаем, но здесь встречается отражение волны от склонов долины, что противоречит поведению классической частицы, для которой при такой большой энергии отражение невозможно. Волновыми функциями такого рода являются функции, указанные в равенстве (12.3.28) и соответствующие пучку, падающему из $-\infty$, пучку, проходящему к $+\infty$, и пучку, отраженному назад к $-\infty$, или, наоборот, соответствующие пучку, падающему из $+\infty$, пучку, проходящему к $-\infty$, и пучку, отраженному назад к $+\infty$. Обе эти волновые функции конечны во всем промежутке $-\infty < x < +\infty$, но не стремятся к нулю в его обеих граничных точках.

Проникновение через потенциальный барьер. Ту же самую потенциальную энергию можно «перевернуть», переменяя знаки V_0 и μ ; тогда получим поле с асимптотическим значением $-ve^{2\mu}$ (в единицах $\hbar^2/2md^2$) при $x \rightarrow -\infty$, имеющее значение нуль при $x = 0$ и асимптотическое значение $-ve^{-2\mu}$ при $x \rightarrow \infty$. В классической теории частицы, имеющие энергию, большую чем вершина барьера ($\epsilon > 0$), все будут проходить над барьером, двигаясь от $-\infty$ к $+\infty$, а частицы,двигающиеся от $-\infty$ к $+\infty$ с энергией, меньшей чем это высшее значение, все будут отражаться назад к $-\infty$. Основываясь на наших прежних рассуждениях, мы можем ожидать, что в квантовой механике при $\epsilon > 0$ произойдет частичное отра-

жение. Интересно посмотреть, происходит ли прохождение через потенциальный барьер частиц с отрицательной энергией.

Уравнение, определяющее волновую функцию в случае, когда потенциальная энергия имеет вид $-v \operatorname{ch}^2 \mu (\operatorname{th} z - \operatorname{th} \mu)^2$ и при $z = x/d + \mu$, принимает форму

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + [\epsilon + v \operatorname{ch} 2\mu - v \operatorname{sh} 2\mu \operatorname{th} z - v \operatorname{ch}^2 \mu \operatorname{ch}^{-2} z] \psi = 0,$$

что можно сравнить с (12.3.22). Методами, подобными рассмотренным ранее, мы получаем при $\epsilon > -ve^{-2\mu}$ решение, которое представляет пучок, проходящий к $+\infty$, а также падающий пучок и пучок, отраженный к $-\infty$:

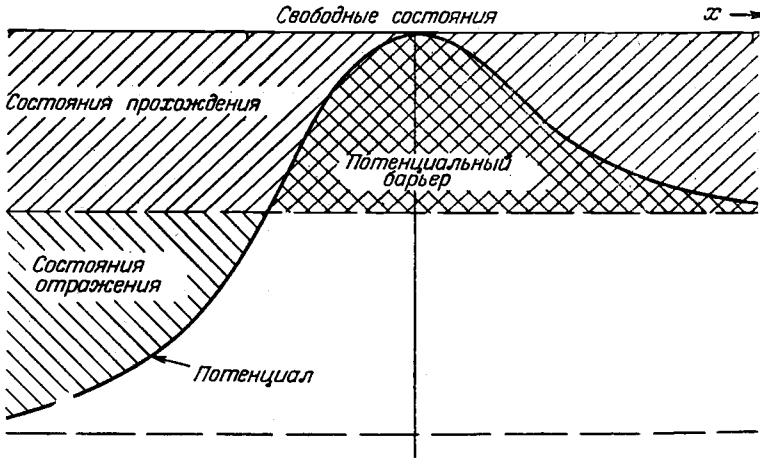


Рис. 12.3. Потенциальная функция, допускающая прохождение волн через потенциальный барьер.

$$\begin{aligned} \psi &= N e^{\frac{1}{2} i (k_+ + k_-) z} (e^z + e^{-z})^{\frac{1}{2} i (k_+ - k_-) z} \times \\ &\times F\left(\frac{1}{2} + i \frac{k_- - k_+ + \beta}{2}, \frac{1}{2} + i \frac{k_- - k_+ - \beta}{2} \mid 1 - i k_+ \mid \frac{e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right) \simeq N e^{i k_+ z}, \quad z \rightarrow \infty, \\ \psi &\simeq \frac{N \Gamma(1 - i k_+) \Gamma(-i k_-) e^{i k_- z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i \frac{k_+ + k_- + \beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i \frac{k_+ + k_- - \beta}{2}\right)} + \\ &+ \frac{N \Gamma(1 - i k_+) \Gamma(i k_-) e^{-i k_- z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i \frac{k_- - k_+ + \beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i \frac{k_- - k_+ - \beta}{2}\right)}, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (12.3.30) \end{aligned}$$

где

$$\beta = \sqrt{4v \operatorname{ch}^2 \mu - 1}, \quad k_+ = \sqrt{\epsilon + v e^{-2\mu}}, \quad k_- = \sqrt{\epsilon + v e^{2\mu}}.$$

Величина k_+^2 является кинетической энергией частицы, когда она находится в $x = +\infty$, k_-^2 является ее кинетической энергией в $x = -\infty$. Обе эти величины положительны (k_+ и k_- действительны), если только ϵ больше чем $-ve^{-2\mu}$. Это решение всюду конечно, если только k_+ и k_- действительны.

Оперируя с гамма-функциями так же, как и раньше, мы видим, что в случае, когда решение нормировано и представляет падающий поток частиц, движущихся из $-\infty$, причем интенсивность потока равна единице, поток T , проходящий к $+\infty$, и поток R , отраженный

назад к $-\infty$, для всех значений ε , для которых k_+ и k_- действительны, имеют вид:

$$T = \frac{2 \operatorname{sh}(\pi k_+) \operatorname{sh}(\pi k_-)}{\operatorname{ch}[\pi(k_- + k_+)] + \operatorname{ch}(\pi \beta)}, \quad (12.3.31)$$

$$R = \frac{\operatorname{ch}[\pi(k_- - k_+)] + \operatorname{ch}(\pi \beta)}{\operatorname{ch}[\pi(k_- + k_+)] + \operatorname{ch}(\pi \beta)} = 1 - T.$$

Эти выражения указывают на то, что при каждом значении ε , большем чем $-\nu e^{-2\mu}$, некоторая часть потока проходит к $+\infty$, а некоторая часть отражается к $-\infty$. Это не согласуется с результатами классической механики, где при $\varepsilon > 0$ не будет отражения, а при $\varepsilon < 0$ (в случае, когда частица «проникает» через потенциальный барьер при $x=0$, направляясь

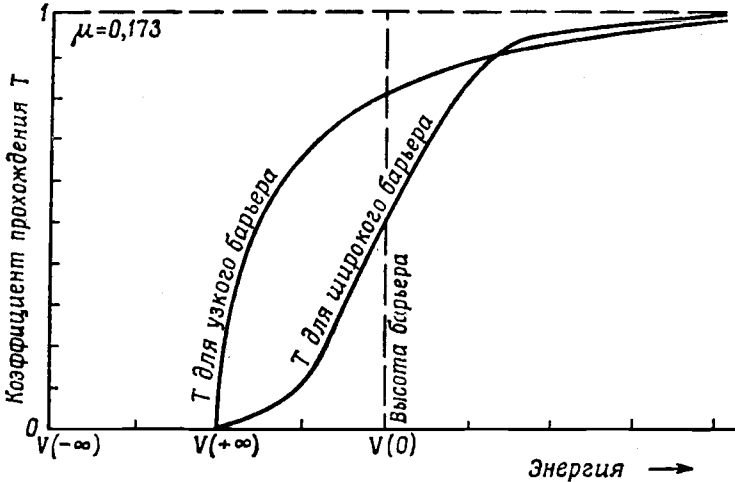


Рис. 12.4. Прохождение частиц через потенциальный барьер, изображенный на рис. 12.3.

к $x = \infty$), не будет прохождения. В предельных случаях результаты квантовой механики приближаются к классическим: при $\varepsilon \gg \nu$ k_+ и k_- велики и приблизительно равны друг другу; в этом случае T близко к единице, а R близко к нулю. С другой стороны, если ν и (или) μ велики, а ε отрицательно (меньше, чем высшая точка барьера), то k_+ , хотя и действительно, но значительно меньше чем k_- или β ; в этом случае T мало, а R близко к единице. Чем выше и «шире» потенциальный барьер, тем меньше частиц проходит через него. Тем не менее наши результаты показывают, что потенциальный барьер конечной высоты и ширины не препятствует небольшой части ударяющихся об него частиц проникать через него и появляться с другой его стороны. Это поведение существенно, например, для объяснения явления радиоактивности. График коэффициента прохождения T как функции от энергии частицы ε дан на рис. 12.4 и указывает общие результаты.

При $\varepsilon < -\nu e^{-2\mu}$ величина k_+ мнимая, и мы можем ее обозначить через $i\kappa_+$. В этом случае ϕ обращается в нуль при $x = +\infty$, и коэффициенты падающей и отраженной к $x = -\infty$ волн имеют одну и ту же величину, что указывает на полное отражение. Потенциальный барьер для этих значений энергии простирается до $+\infty$, так что отражение будет полным. Наконец, при $\varepsilon < -\nu e^{2\mu}$ нельзя найти всюду конечные решения, так что такие энергии не являются допустимыми.

Центральные силовые поля, момент количества движения. Если частица массы M находится в потенциальном поле $V(r)$, являющемся

центрально-симметричным относительно некоторой точки (которая может быть принята за начало), соответствующее уравнение Шредингера при постоянной энергии E имеет вид:

$$\nabla^2 \psi + [\varepsilon - v(r)] \psi = 0,$$

где $\varepsilon = 2ME/\hbar^2$ и $v = 2MV/\hbar^2$; в этом уравнении переменные разделяются, если перейти к сферическим координатам r, ϑ, φ . Множитель, зависящий от углов, является обычной сферической гармоникой:

$$\psi = \frac{1}{r} X_l^m(\vartheta, \varphi) R(r), \quad X_l^m = e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta), \quad (12.3.32)$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

где собственные функции P_l^m приведены в таблице, помещенной в конце гл. 10. Уравнение для радиального множителя имеет вид

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[\varepsilon - \frac{l(l+1)}{r^2} - v(r) \right] R = 0, \quad (12.3.33)$$

где, для того чтобы ψ всюду было конечным, R должно стремиться к нулю при $r \rightarrow 0$ и должно оставаться конечным при $r \rightarrow \infty$.

Мы видим, что энергия не зависит от квантового числа m , так как это число не содержится в уравнении для R и ε . Это вырождение соответствует симметрии потенциального поля, а различные комбинации волновых функций при различных значениях m определяют различные ориентации волны относительно полярной оси [см., например, рассуждения по поводу формулы (10.3.36)]. В классическом случае эта симметрия приводит, очевидно, к постоянству момента количества движения частицы относительно силового центра и к постоянству направления момента количества движения. Это постоянство может быть переведено и на язык квантовой механики.

Момент количества движения $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ частицы относительно начала соответствует оператору [см. равенства, предшествующие (1.6.42), и (2.6.17), а также стр. 432]

$$\mathcal{M} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times \text{grad} = \frac{\hbar}{i} \left[\mathbf{a}_\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\mathbf{a}_\vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \left[\mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial \varphi} - \mathbf{a}_x \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cos \varphi \text{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{a}_y \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \sin \varphi \text{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Компонента вдоль полярной оси $\mathcal{M}_z = (\hbar/i) (\partial/\partial \varphi)$ является компонентой, для которой ψ служит собственной функцией, так как

$$\mathcal{M}_z X_l^m = m \hbar X_l^m,$$

если множитель функции ψ , зависящий от φ , имеет вид $e^{im\varphi}$. Волновая функция не является собственной функцией для $\mathcal{M}_x$ или для $\mathcal{M}_y$, так как ни один из этих операторов, действуя на ψ , не приводит к произведению ψ на постоянную. Как мы видели в (1.6.43) и как можно доказать с помощью свойств сферических гармоник,

$$(\mathcal{M}_x + i\mathcal{M}_y) X_l^m = \hbar X_l^{m+1}, \quad (\mathcal{M}_x - i\mathcal{M}_y) X_l^m = \hbar (l+m)(l-m+1) X_l^{m-1}, \quad (12.3.34)$$

так что операторы $\mathcal{M}_x + i\mathcal{M}_y$ и $\mathcal{M}_x - i\mathcal{M}_y$ повышают или понижают квантовое число m и своим действием изменяют волновую функцию.

Наконец, для оператора, соответствующего квадрату момента коли-

чества движения, ψ является собственной функцией:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_x^2 + \mathcal{M}_y^2 + \mathcal{M}_z^2) X_l^m &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] X_l^m = \\ &= \left[\mathcal{M}_z^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{M}_x + i\mathcal{M}_y)(\mathcal{M}_x - i\mathcal{M}_y) + \frac{1}{2} (\mathcal{M}_x - i\mathcal{M}_y)(\mathcal{M}_x + i\mathcal{M}_y) \right] X_l^m = \\ &= \hbar^2 l(l+1) X_l^m. \end{aligned}$$

Таким образом, можно сказать, что, перейдя к сферическим координатам и выразив в них волновую функцию, а также считая, что зависимость от углов имеет вид X_l^m , мы тем самым удовлетворяем требованию, чтобы волновые функции были собственными функциями квадрата момента количества движения и составляющей момента количества движения вдоль полярной оси, помимо того, что они являются собственными функциями оператора полной энергии. Мы могли бы, конечно, воспользоваться и другими комбинациями сферических гармоник, такими, например, как $Y_{ml}^e = \cos(m\varphi) P_l^m$ или $Y_{ml}^o = \sin(m\varphi) P_l^m$, но эти комбинации не являются собственными функциями компоненты оператора $\mathcal{M}$ по оси z , а поэтому мы предпочитаем комплексные функции X_l^m .

Центральные силовые поля, радиальное уравнение. Так как очень многие задачи квантовой механики связаны с центральными силовыми полями или с полями, очень мало отличающимися от центральных, то полезно рассмотреть некоторые случаи, в которых можно найти точные решения, чтобы потом использовать их как основу для вычисления возмущений в других задачах. Один из случаев, когда можно найти точное решение, соответствует гармоническому осциллятору $V = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2$, где $\omega/2\pi$ — классическая частота колебаний. Соответствующее уравнение для R показывает, что R пропорционально вырожденной гипергеометрической функции от r^2 , которая стремится к бесконечности при $r \rightarrow \infty$, если только ни один из индексов не равен целому отрицательному числу; в последнем случае решением является один из *полиномов Лагерра*, таблица которых дана в конце гл. 6,

$$R(r) = N_l l+1 e^{-\frac{1}{2}\beta r^2} L_k^{l+\frac{1}{2}}(\beta r^2), \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

где β , как и раньше, равно $M\omega/\hbar$, а полином Лагерра $L_n^a(z)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} L_n^a + \left(\frac{a+1}{z} - 1 \right) \frac{d}{dz} L_n^a + \frac{n}{z} L_n^a &= 0, \quad (12.3.35) \\ L_n^a(z) &= \frac{[\Gamma(n+a+1)]^2}{n! \Gamma(a+1)} F(-n | a+1 | z) \simeq \frac{\Gamma(n+a+1)}{n!} (-z)^n, \quad z \rightarrow \infty, \\ \int_0^\infty z^a e^{-z} L_m^a(z) L_n^a(z) dz &= \delta_{mn} \frac{[\Gamma(n+a+1)]^3}{n!}, \\ \int_0^\infty z^{a+1} e^{-z} L_m^a(z) L_n^a(z) dz &= \delta_{mn} [\Gamma(n+a+1)]^3 \frac{2n+a+1}{n!}. \end{aligned}$$

Только для значений $n=0, 1, 2, \dots$ вырожденный гипергеометрический ряд имеет конечное число членов, а R остается конечным при $r \rightarrow \infty$. Это ограничивает допустимые значения энергии $E = (\hbar^2/2M)\epsilon$ только следующими дискретными уровнями:

$$E_n = \hbar\omega \left(2k + l + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 2k + l + 1 = 1, 2, 3, \dots \quad (12.3.36)$$

Расстояния между этими уровнями равны $\hbar\omega$, как и в случае линейного гармонического осциллятора, описываемого формулой (12.3.6); но в данном случае наинизший уровень на $\frac{3}{2}\hbar\omega$ больше минимума потенциала, тогда как в одномерном случае наинизший уровень только на $\frac{1}{2}\hbar\omega$ выше минимума (для двумерного гармонического осциллятора этот уровень будет на $\hbar\omega$ больше минимума).

Соответствующей нормированной собственной функцией в случае потенциала гармонического осциллятора является

$$\psi_{mln}(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\beta^3 \frac{2l+1}{4\pi(2n+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}l - \frac{1}{2} \right)! \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}l + 1\right) \right]^3} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta) \times \\ \times (\beta r^2)^{\frac{1}{2}l} e^{-\frac{1}{2}\beta r^2} L_{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}}(\beta r^2), \quad (12.3.37)$$

$$l = n-1, n-3, n-5, \dots, 1 \text{ или } 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, l, \quad \beta = \frac{M\omega}{\hbar},$$

или функция, ей комплексно сопряженная. Мы видим, что каждый уровень вырожден; здесь m для каждого значения l принимает $2l+1$ различных значений, каждое из которых соответствует одному и тому же значению энергии. Кроме того, для данного значения n несколько состояний, соответствующих различным допустимым значениям l (которые будут все нечетными, если n четно, и четными, если n нечетно), имеют одну и ту же энергию. Если n нечетно, то существуют $n/2 + 1/2$ таких различных значений l , если n четно, то их будет $n/2$. Следовательно, число состояний, имеющих энергию $\hbar\omega(n+1/2)$, равно 1 при $n=1$, 3 при $n=2$, 6 при $n=3$, 10 при $n=4$ и т. д., вообще кратность вырождения равна $n(n+1)/2$.

Кулоновский потенциал. Другим потенциалом, для которого может быть найдено точное решение, является кулоновский потенциал $V = -\eta^2/r$. Как указано в (5.2.55) и в предыдущих уравнениях, уравнение для радиального множителя в случае этого потенциала имеет вид

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[-x^2 + \frac{2M\eta^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \quad x^2 = -\varepsilon.$$

С другой стороны, уравнение для функции $z^b e^{-z/2} F(-c | a+1 | z) = f(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{a+1-2b}{z} \frac{df}{dz} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{2c+a+1}{2z} + \frac{b(b-a)}{z^2} \right] f = 0. \quad (12.3.38)$$

Мы можем перейти от одного уравнения к другому, положив $z = 2xr$, $a = 2l+1$, $b = l+1$ и $x = M\eta^2/[\hbar^2(c+l+1)]$. Следовательно, решение радиального уравнения, конечное при $r=0$, имеет вид

$$R = N (2xr)^{l+1} e^{-xr} F\left(l+1 - \frac{M\eta^2}{\hbar^2 x} \mid 2l+2 \mid 2xr\right) \simeq \\ \simeq N (2l+1)! \left\{ \frac{\exp\left[xr - \frac{M\eta^2}{\hbar^2 x} \ln(2xr)\right]}{\Gamma\left(l+1 - \frac{M\eta^2}{\hbar^2 x}\right)} - \right. \\ \left. - (-1)^l \frac{\exp\left[-xr + \frac{M\eta^2}{\hbar^2 x} \ln(2xr) + i\pi\right]}{\Gamma\left(l+1 + \frac{M\eta^2}{\hbar^2 x}\right)} \right\}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Эта функция конечна при $r \rightarrow \infty$ для всех положительных значений энергии частицы ($\kappa = ik$, $k^2 = \varepsilon$), но для отрицательных значений энергии (κ действительно) она конечна лишь в случае равенства нулю первого члена, т. е. в случае, когда $M\eta^2/\hbar^2\kappa$ является целым числом, равным $l+1$ или большим. Другими словами, допустимые отрицательные значения энергии определяются равенствами

$$\varepsilon_n = -\left(\frac{M\eta_1^2}{\hbar^2 n}\right)^2, \quad E_n = -\frac{M\eta_1^4}{2n^2\hbar^2}, \quad n = l+1, \quad l+2, \dots \quad (12.3.39)$$

Эти значения являются, очевидно, связанными уровнями атома водорода, дающими бальмеровские серии для разностей энергий. Нормированная волновая функция, соответствующая квантовым числам n , l , m , в случае кулоновского потенциала равна

$$\psi_{mln}(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\left(\frac{2M\eta_1^2}{\hbar^2 n}\right)^3 \frac{2l+1}{8\pi n} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} \times \\ \times e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta) \left(\frac{2M\eta_1^2}{\hbar^2 n} r\right)^l e^{-(M\eta_1^2/\hbar^2 n)r} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2M\eta_1^2}{\hbar^2 n} r\right) \quad (12.3.40)$$

или равна функции, комплексно сопряженной с данной.

Эта система является сильно вырожденной: все состояния для одного и того же значения n имеют одну и ту же энергию. Так как m может принимать здесь $2l+1$ различных значений для каждого значения l и так как здесь допустимы все значения l от нуля до $n-1$ для каждого значения n , то существуют n^2 различных состояний, имеющих допустимую энергию E_n . Состояние при $l=0$ называется *s-состоянием* (1s-состоянием при $n=1$, 2s-состоянием при $n=2$ и т. д.), три состояния (для данного n) при $l=1$ называются *p-состояниями*, пять состояний при $l=2$ называются *d-состояниями* и т. д.; последовательность, обычно употребляемая в атомных задачах, имеет вид *s, p, d, f, g, h, ...* с числом, стоящим впереди буквы и указывающим значение n . Как было сказано раньше, значение m указывает только ориентацию момента количества движения в пространстве и представляет интерес в случае, когда на электрон воздействует как электрическое поле ядра, так и однородное магнитное поле.

Если E положительна, волновая функция, конечная всюду, имеет для данных значений m и l вид

$$\phi(k, l, m | r, \vartheta, \varphi) = \frac{e^{\pi M\eta_1^2/2\hbar^2 k}}{(2l+1)!} \left| \Gamma\left(l+1 + \frac{iM\eta_1^2}{\hbar^2 k}\right) \right| (2kr)^l e^{-ikr} \times \\ \times e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta) F\left(l+1 + \frac{iM\eta_1^2}{\hbar^2 k} \middle| 2l+2 \middle| 2ikr\right) \simeq \\ \simeq e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta) \frac{1}{kr} \sin \left[kr + \frac{M\eta_1^2}{\hbar^2 k} \ln(2kr) - \frac{1}{2} \pi l - \mathcal{Q}_{hl} \right], \quad kr \rightarrow \infty, \quad (12.3.41)$$

где $k^2 = \varepsilon = 2ME/\hbar^2$ и

$$\Gamma\left(l+1 + \frac{iM\eta_1^2}{\hbar^2 k}\right) = \left| \Gamma\left(l+1 + \frac{iM\eta_1^2}{\hbar^2 k}\right) \right| e^{i\mathcal{Q}_{hl}}, \\ \left| \Gamma\left(l+1 + \frac{iM\eta_1^2}{\hbar^2 k}\right) \right|^2 = \left[l^2 + \left(\frac{M\eta_1^2}{\hbar^2 k}\right)^2 \right] \left[(l-1)^2 + \left(\frac{M\eta_1^2}{\hbar^2 k}\right)^2 \right] \dots \\ \dots \left[1 + \left(\frac{M\eta_1^2}{\hbar^2 k}\right)^2 \right] \frac{\pi M\eta_1^2}{\hbar^2 k} / \text{sh}\left(\frac{\pi M\eta_1^2}{\hbar^2 k}\right).$$

Из наличия логарифмического члена в аргументе синуса в асимптотическом выражении ϕ , очевидно, вытекает, что кулоновский потенциал η^2/r продолжает оказывать влияние на частицу даже при очень больших значениях r . Даже на очень больших расстояниях длина волны не становится в точности равной $2\pi/k$.

Сила, обратно пропорциональная кубу расстояния¹⁾. В классической динамике в случаях сил, обратно пропорциональных кубу или пятой степени расстояния ($V = A/r^2$ или $V = A/r^4$), также имеются решения, выражаемые в элементарных функциях. Это оказывается неверным в квантовой механике. Например, радиальное уравнение в случае силы притяжения, обратно пропорциональной кубу расстояния, имеет вид

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[\varepsilon + \frac{\gamma^2 - l(l+1)}{r^2} \right] R = 0,$$

где $l(l+1)$ должно быть меньше силовой константы γ^2 для того, чтобы частица, имеющая момент количества движения, соответствующий квантовому числу l , была связанной. Легко видеть, что случаи $l > 0$ сводятся к случаю $l = 0$, если вместо γ^2 взять $\gamma^2 - l(l+1)$; поэтому мы ограничимся изучением только случая $l = 0$. Решением уравнения для возможного связанного состояния ($\varepsilon = -\kappa^2$)

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[-\kappa^2 + \frac{\gamma^2}{r^2} \right] R = 0,$$

конечным при $r \rightarrow \infty$, является сферическая функция Ганкеля мнимого аргумента комплексного порядка

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} R = h_{ip-\frac{1}{2}}(ixr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2ixr}} \left[\frac{e^{\pi p}}{\operatorname{sh}(\pi p)} J_{ip}(ixr) - \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi p)} J_{-ip}(ixr) \right] \simeq \\ &\simeq \begin{cases} \frac{1}{ixr} e^{-\kappa r - \frac{1}{2} i\pi (ip + \frac{1}{2})}, & \kappa r \rightarrow \infty, \\ \sqrt{\frac{2i\pi}{\kappa r}} \frac{e^{\frac{1}{2} \pi p}}{|\Gamma(1+ip)| \operatorname{sh}(\pi p)} \sin \left[p \ln \left(\frac{1}{2} \kappa r \right) - \Phi_p \right], & \kappa r \rightarrow 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где $p = \sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{4}}$ и $\Gamma(1+ip) = |\Gamma(1+ip)| e^{i\Phi_p}$. Заметим, что при $r \rightarrow 0$, если p действительно ($\gamma > 1/2$), эта функция не стремится ни к нулю, ни к бесконечности, но колеблется с постоянно возрастающей частотой как синус логарифма r .

Если интенсивность потенциала невелика ($\gamma < 1/2$), хотя вызываемые им силы и являются силами притяжения (γ действительно), то p — мнимое число и порядок функций Бесселя действителен. Если это имеет место, то ни для какой отрицательной энергии нельзя найти волновую функцию, которая была бы конечной одновременно и при $r = 0$ и при $r = \infty$. Приведенная выше функция Ганкеля (при действительном ip) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, но становится бесконечной при $r = 0$; функция Бесселя $J_{ip}(ixr)$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$ и к бесконечности при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, для незначительных сил притяжения, обратно пропорциональных кубу расстояния, не существует связанных уровней, хотя и существуют конечные волновые функции для положительных энергий. Функция Ганкеля, хотя и стремится к бесконечности, но интегрируема вместе со своим квадратом в окрестности $r = 0$; если поэтому граничные условия требуют интегрируемости, а не конечности, то допустимы все отрицательные энергии.

При $\gamma > 1/2$ порядок функций Бесселя, ip , будет мнимым и выписанная функция будет конечной для всех значений r , какое бы отрицательное значение для энергии мы ни выбрали. Этот результат кажется совершенно неожиданным. Возможно, что особенность силового поля достаточно велика для того, чтобы разрушить дискретность связанных состояний. Другая точка зрения сводится к тому, что условиями для стационарных

¹⁾ См. также § 35 цитированной на стр. 606 книги Л. Ландау и Е. Лифшица. — Прим. ред.

состояний не обязательно должны быть конечность (или интегрируемость). Исследуем интеграл от произведения двух функций, приведенных выше и соответствующих двум различным значениям x . Для этого умножим уравнение для одной из них на другую; вычтя из полученного обратную комбинацию и интегрируя по r , получим [как в (6.3.16) и последующих равенствах]

$$\begin{aligned} (x_1^2 - x_2^2) \int_0^\infty R_1 R_2 dr &= \left[R_2 \frac{dR_1}{dr} - R_1 \frac{dR_2}{dr} \right]_0^\infty = \\ &= \frac{2i\pi p}{V x_1 x_2} \frac{e^{\pi p}}{|\Gamma(1+ip)|^2 \operatorname{sh}^2(\pi p)} \sin \left[p \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, две функции ортогональны только тогда, когда $p \ln(x_2/x_1)$ является целочисленным кратным (положительным или отрицательным) числа π .

Таким образом, выполнение требования, чтобы волновые функции для связанных состояний при $\gamma > 1/2$ образовывали ортогональную систему, вызывает квантование энергии. Но это не обычное квантование, так как оно определяет не сами уровни, а только связь одних уровней с другими. Если энергия $E_0 = -x_0^2$ является допустимой, то волновые функции для бесконечной совокупности энергий $E_n = -x_n^2$ связанных состояний будут все взаимно ортогональны:

$$E_n = -x_0^2 e^{2\pi n/p}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Если эти состояния соответствуют «допустимым» связанным уровням, то они простираются до $-\infty$ и имеют точку накопления при нулевой энергии.

Для положительных энергий (x мнимое) все решения конечны при $\gamma > 1/2$, так что на фазовый угол для радиального решения при $r \rightarrow \infty$ не налагается никаких ограничений и, следовательно, рассеяние может иметь место *только в том случае*, если мы потребуем, чтобы решения были взаимно ортогональны, что определяет их фазу при $r=0$ и соответственно при $r \rightarrow \infty$.

Центральные поля с «концентрацией», большей чем $1/r^2$ вблизи начала, также могут быть формально изучены, но трудности, встретившиеся нам в случае сил, обратно пропорциональных кубу расстояния, и нами уже рассмотренные, здесь возникают в значительно больших размерах. Радиальное уравнение имеет иррегулярную особую точку как при $r=0$, так и при $r \rightarrow \infty$, так что асимптотические ряды должны применяться в обоих концах промежутка изменения r . Как и в случае $1/r^2$, оба решения при малых r интегрируемы, но колеблются со все возрастающей частотой при $r \rightarrow 0$. Решения для больших значений r имеют асимптотические выражения e^{-xr} и e^{+xr} , так что одно из них конечно (или интегрируемо) на всем промежутке изменения r для всех значений x . Квантование связанных состояний происходит только тогда, когда применяется фазовое условие для ортогональности, рассмотренное выше.

Однако такие потенциальные поля, если и встречаются в физике, представляют очень малый интерес. Мы переходим теперь к другим, более полезным вопросам.

Кулоновское поле в параболических координатах. Обе разрешимые задачи с центральными силами приводят к вырожденным связанным уровням, когда несколько состояний имеют одну и ту же допустимую энергию. Соответствующее свойство решения заключается в том, что в уравнении Шредингера переменные разделяются в нескольких различных системах координат. В уравнении, соответствующем потенциалу гармонического осциллятора $V = M\omega^2 r^2/2 = M\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)/2$, переменные могут быть

разделены в прямоугольных координатах x, y, z и в круговых цилиндрических координатах ρ, θ, z , а также и в сферических координатах r, ϑ, φ . В уравнении, соответствующем кулоновскому потенциалу $V = -\eta^2/r$, переменные могут быть разделены в параболических и в вытянутых сфероидальных координатах, так же как и в сферических координатах. Решения в этих различных координатах соответствуют одной и той же совокупности допустимых энергий; действительно, новые решения должны быть линейными комбинациями сферических решений для вырожденных состояний, соответствующих данному уровню.

Чтобы иллюстрировать эти положения, рассмотрим задачу с кулоновским потенциалом в параболических координатах (см. стр. 277), определенных равенствами

$$x = \sqrt{\lambda\mu} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\lambda\mu} \sin \varphi, \quad z = \frac{\lambda - \mu}{2}, \quad r = \frac{\lambda + \mu}{2},$$

$$h_\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda} + 1}, \quad h_\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} + 1}, \quad h_\varphi = \sqrt{\lambda\mu}, \quad \lambda, \mu \geq 0.$$

В этих координатах переменные в уравнении Шредингера (при постоянной энергии E) разделяются следующим образом:

$$\psi = L(\lambda) M(\mu) C(\varphi), \quad C'' + m^2 C = 0,$$

$$L'' + \frac{1}{\lambda} L' + \left(-\frac{1}{4} x^2 + \frac{x\sigma}{\lambda} - \frac{m^2}{4\lambda^2} \right) L = 0,$$

$$M'' + \frac{1}{\mu} M' + \left(-\frac{1}{4} x^2 + \frac{x\tau}{\mu} - \frac{m^2}{4\mu^2} \right) M = 0,$$

где

$$x^2 = -\epsilon = -2ME/\hbar^2 \quad \text{и} \quad \sigma + \tau = M\eta^2/\hbar^2 x$$

являются константами разделения. Сравнение с уравнением (12.3.38) показывает, что решение, конечное при $\lambda = 0$, имеет вид

$$L = (x\lambda)^{m/2} e^{-x\lambda/2} F\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2} - \sigma \mid m + 1 \mid x\lambda\right).$$

Подобное же выражение, но с заменой λ на μ и σ на τ , получаем для множителя M . Множитель C является, очевидно, тригонометрической функцией или мнимой экспонентой; m должно быть целым числом, для того чтобы C была периодической функцией φ .

Как и раньше, при действительном x (отрицательном E) ψ будет конечной в бесконечности только тогда, когда $(m/2) + (1/2) - \sigma$ и $(m/2) + (1/2) - \tau$ равны нулю или отрицательным целым числам, т. е.

$$\sigma = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} + s, \quad \tau = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} + t, \quad s, t = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sigma + \tau = n = s + t + m + 1 = 1, 2, 3, \dots = M\eta^2/\hbar^2 x,$$

что совпадает с (12.3.39) для допустимых значений энергии связанных состояний (как это и должно быть). Выразив вырожденные гипергеометрические функции через соответствующие связанным состояниям полиномы Лагерра $L_s^m(x\lambda)$ и $L_t^m(x\mu)$, мы будем в состоянии подсчитать нормирующий множитель. Для этого придется интегрировать произведение $|\psi|^2$ на элемент объема $(1/4)(\lambda + \mu)d\lambda d\mu d\varphi$; для достижения окончательного результата потребуется несколько больше вычислений, чем прежде. Окончательно для связанного состояния n, s, t получим нормированную волновую функцию

$$\psi_{msn}(\lambda, \mu, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left(\frac{M\eta^2}{\hbar^2 n} \right)^3 \frac{s! (n-s-m-1)!}{n [(s+m)! (n-s-1)!]^2}} e^{im\varphi} \times$$

$$\times \left[\frac{M\eta^2}{\hbar^2 n} \sqrt{\lambda\mu} \right]^m e^{-(M\eta^2/2\hbar^2 n)(\lambda + \mu)} L_s^m \left(\frac{M\eta^2 \lambda}{\hbar^2 n} \right) L_{n-s-m-1}^m \left(\frac{M\eta^2 \mu}{\hbar^2 n} \right). \quad (12.3.42)$$

Сравнивая эту систему волновых функций с системой функций для того же потенциала в сферических координатах, данных равенствами (12.3.40), мы видим, что

$$\begin{aligned}\psi_{001}(r, \vartheta, \varphi) &= \psi_{001}(\lambda, \mu, \varphi), \\ \psi_{002}(r, \vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{1}{2}} [\psi_{002}(\lambda, \mu, \varphi) + \psi_{012}(\lambda, \mu, \varphi)], \\ \psi_{012}(r, \vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{1}{2}} [\psi_{002}(\lambda, \mu, \varphi) - \psi_{012}(\lambda, \mu, \varphi)], \\ \psi_{112}(r, \vartheta, \varphi) &= \psi_{102}(\lambda, \mu, \varphi) \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Вообще любая из сферических функций при данных m и n равна линейной комбинации параболических функций при тех же самых значениях m и n , но различных значениях s . Конечно, и каждая параболическая функция может быть составлена из сферических функций для тех же самых m и n , но различных значений l .

Формула Резерфорда. Решения в параболических координатах могут быть также использованы для представления решений в случае положительных энергий, когда $\kappa = ik$, $k^2 = \varepsilon = (Mv/\hbar)^2$, где M — масса частицы, а v — ее скорость при $r \rightarrow \infty$. Имеем

$$\psi = Ne^{im\varphi} (\lambda\mu)^{m/2} e^{-ik(\lambda+\mu)/2} \times \\ \times F\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \sigma \mid m+1 \mid ik\lambda\right) F\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \tau \mid m+1 \mid ik\mu\right),$$

где $\sigma + \tau = -iM\eta^2/\hbar^2 k$. Величину σ можно выбрать так, чтобы полученное решение при $m=0$ соответствовало плоской волне, распространяющейся слева вдоль оси z , «натыкающейся» на кулоновское поле, сосредоточенное вблизи начала, и частично рассеивающейся по всем направлениям от начала. Волна, распространяющаяся слева, должна в своем выражении содержать множитель $e^{ikz} = e^{ik(\lambda-\mu)/2}$, так что нужно потребовать, чтобы

$$F\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \sigma \mid 1 \mid ik\lambda\right)$$

было равно $e^{ik\lambda}$. Чтобы достигнуть этого, мы используем решение с $m=0$ (решение, симметричное относительно оси z). Нужно также положить $\sigma = -1/2$, так как $F(1 \mid 1 \mid ik\lambda) = e^{ik\lambda}$. Тогда $1/2 - \tau = iM\eta^2/\hbar^2 k = i\eta^2/\hbar v$ и решение в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned}\psi &= \Gamma\left(1 - \frac{i\eta^2}{\hbar v}\right) e^{(\pi\eta^2/2\hbar v)} e^{\frac{1}{2}ik(\lambda-\mu)} F\left(\frac{i\eta^2}{\hbar v} \mid 1 \mid ik\mu\right) \simeq \\ &\simeq e^{ikz - i(\eta^2/\hbar v)\ln[k(r-z)]} + \left[\frac{\eta^2 e^{i(\eta^2/\hbar v)\ln(1-\cos\vartheta) - 2i\vartheta}}{2Mv^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) r} \right] e^{ikr + i(\eta^2/\hbar v)\ln(kr)}, \quad (12.3.43)\end{aligned}$$

где

$$k = Mv/\hbar, \quad \Gamma[1 + (i\eta^2/\hbar v)] = |\Gamma[1 + (i\eta^2/\hbar v)]| e^{i\vartheta}$$

и $\vartheta = \arccos(z/r)$ — угол рассеяния. Эта асимптотическая форма пригодна при $r-z \gg \hbar/Mv$. Постоянная η^2 — интенсивность кулоновского поля — положительна для поля притяжения и отрицательна в случае поля отталкивания. (В последнем случае нет связанных состояний, а встречаются только свободные состояния с положительной энергией.)

Мы видим, что достаточно далеко от положительной оси z (линии, идущей через центр поля в направлении падающего пучка) волновая функция распадается на две части: первый член определяет падающую волну, распространяющуюся (вообще говоря) в направлении оси z , хотя и с некоторым

искажением (логарифмический член в показателе), вызванным тем, что кулоновское поле «искривляет» плоскую волну даже на очень большом расстоянии; второй член соответствует радиально расходящейся «рассеянной» волне, амплитуда которой зависит от угла рассеяния ϑ благодаря наличию фактора $(\eta^2/2Mv^2r) \cos \vartheta$. Квадрат этой амплитуды дает *интенсивность* рассеяния для угла ϑ ; эта величина соответствует *формуле Резерфорда* для рассеяния, классическому выражению для рассеяния в случае кулоновского поля. Рассеяние тем больше, чем меньше угол рассеяния ϑ , чем меньше скорость v падающей частицы и чем больше потенциальный параметр η .

Если $r = z$ (т. е. вдоль положительной оси z), координата μ равна нулю и

$$\psi \simeq \sqrt{\frac{(\pi\eta^2/\hbar v) e^{\pi\eta^2/\hbar v}}{\operatorname{sh}(\pi\eta^2/\hbar v)}} e^{i\hbar z - i\delta}, \quad \vartheta \rightarrow 0, \quad z \rightarrow r.$$

Заметим, что в случае, когда кулоновская сила невелика, или когда скорость частицы велика ($\pi\eta^2/\hbar v$ мало), амплитуда волны вблизи центра силы приближенно равна амплитуде падающей волны (единице). Для полей притяжения (η^2 положительно), когда кулоновская сила велика или скорость частицы мала, амплитуда волны вблизи начала равна произведению $\sqrt{2\pi\eta^2/\hbar v}$ на амплитуду падающей волны. С другой стороны, для полей отталкивания (η^2 отрицательно), если $-\pi\eta^2/\hbar v$ велико, амплитуда вблизи начала равна произведению малой величины $e^{\pi\eta^2/\hbar v} \sqrt{-2\pi\eta^2/\hbar v}$ на амплитуду падающей волны. Иначе говоря, быстрые частицы находятся с одинаковой вероятностью как вблизи начала, так и где угодно в другом месте; медленные частицы стремятся сосредоточиться вблизи начала, если действуют силы притяжения, и, наоборот, стремятся избегать начала при силах отталкивания; результат вполне естественный.

Другие разрешимые системы центральных сил. Уравнение (12.3.33) для множителя волновой функции, зависящего от r , не разрешимо в известных функциях для случая потенциала, зависящего от степени r , за исключением случаев, когда показатель равен 2 [см. (12.3.37)] или -1 [см. (12.3.40)]. Решение можно также получить при $V = \beta r$, но это не имеет особого интереса. Решение также может быть получено для силы отталкивания, обратно пропорциональной кубу расстояния ($V = +\gamma^2/r^2$), но, как было указано на стр. 616, решение для силы притяжения, обратно пропорциональной кубу расстояния, не является удовлетворительным.

Центральные поля с потенциалом, пропорциональным более высокой положительной степени r , чем 2, имеют такие неправильности в особой точке в бесконечности, которые нельзя исследовать с помощью гипергеометрической функции; поля со степенями r , меньшими чем -2 , содержат дополнительные неправильности в особой точке $r = 0$, которые не изучены полностью (такие поля к тому же не представляют большого практического интереса).

Точные решения в случае $l = 0$ могут быть иногда получены и для потенциалов, имеющих более сложный вид, чем простые степени r . Достигнутые результаты были получены заменой независимого переменного r другим переменным z , являющимся функцией r ; при этом преобразованное уравнение для R может оказаться простым. Например, уравнение для R в случае экспоненциального потенциала притяжения $V = -Be^{-\tau/d}$

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + [-x^2 + b^2 e^{-\tau/d}] R = 0, \quad \varepsilon = -x^2, \quad b^2 = \frac{2MB}{\hbar^2},$$

преобразуется в уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR}{dz} + \left(1 - \frac{4d^2 x^2}{z^2}\right) R = 0,$$

если положить $z = 2bde^{-r/2d}$. Следовательно, функция от r , стремящаяся к нулю при $r \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow 0$), имеет вид $J_{2dx}(2bde^{-r/2d})$. Чтобы заставить ту же функцию стремиться к нулю при $r \rightarrow 0$, нужно подобрать x , а следовательно, и порядок функции J так, чтобы

$$J_{2dx}(2bd) = 0.$$

Наибольшее значение x , для которого это имеет место, даст наименьшую допустимую энергию $-x^2$, так что оно может быть обозначено через $x_1(d, b)$ и т. д. Если $2bd$ велико сравнительно с единицей, можно воспользоваться асимптотическим выражением для первого нуля функции Бесселя высокого порядка, приведенным на стр. 523. Тогда получаем

$$2bd \simeq 2dx + 1,8558(2dx)^{1/3},$$

или

$$x_1(d, b) \simeq b - 1,8558 \left(\frac{b}{4d^2}\right)^{1/3}, \quad (12.3.44)$$

или

$$E_1 \simeq -B + 3,7116 \left(\frac{\hbar^2 B^2}{8d^2 M}\right)^{1/3}, \quad 2bd \gg 1.$$

Наинизший уровень, когда потенциальная яма глубока, будет таким образом расположен выше дна ямы ($E = -B$) на величину, которая изменяется обратно пропорционально «протяженности» d потенциальной ямы в степени две трети.

Это решение пригодно только для состояний с моментом количества движения, равным нулю ($l = 0$); при $l > 0$ входит «член центробежной силы» $-l(l+1)/r^2$ и, так как он не может быть преобразован в простую степень переменного z , полученное уравнение не имеет решений, выражаемых через известные функции. Если d или b достаточно мало, то член $-2/r^2$ может быть больше, чем $b^2 e^{-r/d}$ для всех значений r ; в этом случае при $l > 0$ для рассматриваемого потенциала нет связанных состояний.

Чтобы найти другие разрешимые при $l = 0$ случаи, можно взять известные многочлены, являющиеся собственными функциями, и преобразовать их уравнения, стремясь получить члены, соответствующие членам уравнения (12.3.33): член, содержащий вторую производную, и член, содержащий R , множитель при котором является суммой постоянной величины (допустимая энергия), зависящей от квантового числа, и переменного слагаемого (потенциальная энергия), не зависящего от квантового числа. Если мы найдем такой случай, волновая функция будет нам уже известна.

Например, если $R = Nz^{(a+1)/2} e^{-z/2} L_n^a(z)/\sqrt{z'}$, где $z = z(r)$ и $z' = dz/dr$, то уравнение для R , рассматриваемого как функция от r , имеет вид

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[-\frac{1}{4}(z')^2 + \left(n + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z'}{z}\right)^2 - \frac{a^2 - 1}{4} \left(\frac{z'}{z}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{z''}{z'}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{z'''}{z'} \right] R = 0. \quad (12.3.45)$$

При $z = br^\mu$ уравнение принимает вид

$$R'' + \left[-\frac{1}{4}\mu^2 b^2 r^{2\mu-2} + \left(n + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right) \mu^2 b r^{\mu-2} - \frac{a^2 \mu^2 - 1}{4r^2} \right] R = 0$$

и имеет постоянный член в скобках только при $\mu = 1$ или $\mu = 2$ [эти случаи уже были рассмотрены раньше, см. равенства (12.3.37) и (12.3.40)].

С другой стороны, при $z = be^{-r/d}$ уравнение для R , выраженное через r ,

$$R'' + \left[-\frac{b^2}{4d^2} e^{-2r/d} + \left(n + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{b}{d^2} e^{-r/d} - \frac{a^2}{4d^2} \right] R = 0$$

имеет в скобках постоянный член, который может быть отождествлен с энергией. На первый взгляд кажется, что один из членов, соответствующих потенциальной энергии, зависит от квантового числа n , но мы скоро увидим, что a можно подобрать так, чтобы $(n + a/2 + 1/2)$ не зависело ни от n , ни от a .

Таким образом, уравнение (12.3.33) при потенциальной энергии

$$V = De^{2(r_0-r)/d} - 2De^{(r_0-r)/d}, \quad v = \frac{2MV}{\hbar^2},$$

будет соответствовать уравнению, написанному выше, если b положить равным

$$\frac{d}{\hbar} \sqrt{8MD} e^{r_0/d},$$

а a считать равным

$$\frac{d}{\hbar} \sqrt{8MD} - 2(n + 1/2).$$

Записанная потенциальная энергия имеет минимум, равный $-D$, при $r = r_0$, и такую вторую производную, что классическая частота (или скорее угловая скорость $\omega = 2\pi\nu$) малых колебаний около этого минимума будет равна $\omega = \sqrt{2D/d^2 M}$. Эта потенциальная энергия стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, а при достаточно больших D и r_0 она становится очень большой и положительной при $r = 0$. Функция R подобрана так, что она принимает значение нуль при $z = 0$ ($r = +\infty$) и при $z = \infty$ ($r = -\infty$), в то время как радиальный множитель волновой функции должен стремиться к нулю при $r \rightarrow 0$, $z_0 = (d/\hbar) \sqrt{8MD} e^{r_0/d}$. Во всяком случае, если z_0 велико, функция R при $z = z_0$ очень мала благодаря наличию показательного множителя $e^{-z_0/2}$, так что достаточно произвести незначительное изменение энергии ε , для того чтобы при $z = z_0$ R стало равным нулю; последнее важнее, чем обращение в нуль при $z = \infty$; это малое изменение энергии вызовет незначительное изменение значений R при $z \ll z_0$, где R велико. Следовательно, если только $e^{r_0/d}$ значительно больше единицы, допустимые энергии связанных состояний и волновые функции имеют приближенные выражения:

$$\begin{aligned} E_n &\approx -D + \frac{\hbar}{d} \sqrt{\frac{2D}{M}} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2Md^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 = \\ &= -D + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2\omega^2}{4D} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2, \\ \psi_n &\approx Nz^{\alpha-n} e^{-z/2+r/2d} L_n^{2\alpha-2n-1}(z), \end{aligned}$$

где $\omega = \sqrt{2D/d^2 M}$, $z = 2ae^{(r_0-r)/d}$, $\alpha = (d/\hbar) \sqrt{2MD}$. Мы видим, что n может быть равно нулю или целому положительному числу, меньшему чем $\alpha - \frac{1}{2}$.

Для получения нормирующего множителя (интеграла от ψ_n^2) в пределах нашего приближения ($e^{r_0/d}$ велико) можно интегрировать от $z = 0$ до $z = \infty$.

Еще одна потенциальная функция, для которой возможно точное решение при $l = 0$, имеет вид

$$V(r) = V_0 \operatorname{th}^2 \left(\frac{r}{d} \right),$$

что представляет собой симметричный случай потенциала, рассмотренного на стр. 602 и следующих. Решения для этого потенциала, обращающиеся в нуль при $x = \pm \infty$, были даны в (12.3.26). В данном случае, однако,

мы должны иметь $\psi = 0$ при $r = 0$. Это налагает ограничения на допустимые состояния и требует, чтобы квантовое число было нечетным, так как в этом случае волновые функции антисимметричны относительно начала; поскольку потенциал симметричен, волновые функции через одну должны обращаться в нуль при $r = 0$. Следовательно, волновые функции и допустимые уровни энергии имеют вид

$$R_{00n}(r) = N (\operatorname{ch} z)^{-\gamma+2n+\frac{3}{2}} F \left(-2n-1, 2\gamma-2n-1 \mid \gamma-2n-\frac{1}{2} \mid \frac{e^{-z}}{e^z+e^{-z}} \right) = \\ = N' (\operatorname{ch} z)^{-\gamma+2n+\frac{3}{2}} T_{2n+1}^{\gamma-2n-\frac{3}{2}} (\operatorname{th} z),$$

$$\varepsilon_n = 2\gamma \left(2n + \frac{3}{2} \right) - (2n+1)(2n+2) - \frac{1}{2}, \quad \gamma = \sqrt{v + \frac{1}{4}}, \quad z = \frac{r}{d},$$

$$E_n = \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{\hbar}{d} \sqrt{V_0 + \frac{\hbar^2}{8Md^2} \left(2n + \frac{3}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2Md^2} \left[(2n+1)(2n+2) + \frac{1}{2} \right]};$$

здесь мы оставили только нечетные уровни из семейства (12.3.25) (взяв $2n+1$ вместо n), так как только нечетные собственные функции обращаются в нуль при $r = 0$. Для более общего потенциала в уравнении (12.3.22) также может быть найдено точное решение для радиальной координаты, если мы подберем нашу энергию так, чтобы решение, стремящееся к нулю при $r \rightarrow \infty$, обращалось также в нуль и при $r = 0$ (вместо $r \rightarrow -\infty$).

Это приблизительно указывает, как далеко мы можем идти в получении точных решений задач с центральными силами с помощью известных функций. Другие решения и допустимые энергии для других потенциальных полей могут быть получены приближенными методами, разобранными в гл. 9. Метод факторизации [см. уравнение (6.3.18) и таблицы в конце гл. 6] не позволяет найти другие случаи, хотя и может упростить вычисление R .

Возмущения вырожденных систем. Приемы вычисления энергий и собственных функций в случаях, когда потенциалы незначительно отличаются от тех, для которых известно точное решение, совпадают с приемами, данными в формуле (12.3.15) и следующих. Здесь, однако, появляется дополнительное осложнение, вызванное пространственной симметрией решений задачи с центральными силами. Как мы уже видели, эта симметрия влечет за собой вырождение, при котором несколько состояний имеют одну и ту же допустимую энергию. Следовательно, когда мы составляем возмущенную волновую функцию, считая ее равной невозмущенной функции φ_n , сложенной с поправочной суммой, содержащей функции φ_m при m , отличном от n , мы сталкиваемся с дополнительной проблемой: какую из нескольких функций φ , имеющих данную невозмущенную энергию, взять за φ_n ? Естественно в качестве невозмущенной волновой функции взять линейную комбинацию всех функций φ для рассматриваемой нами энергии, а потом предоставить возмущению подобрать подходящую комбинацию.

Чтобы показать, как это делается, рассмотрим случай уравнения Шредингера

$$\mathcal{H}\psi = \left[V - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \right] \psi = E\psi.$$

Если теперь потенциальная энергия V может быть заменена суммой потенциала V_0 , для которого существуют точные решения, и возмущающего потенциала V_1 , малого по сравнению с V_0 , то можно применить метод

итераций. Полагаем

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V_1,$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \left[V_0 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \right],$$

причем уравнение

$$\mathcal{H}_0 \chi_{mn} = E_n^0 \chi_{mn}$$

может быть точно решено относительно допустимых энергий E_n^0 и собственных функций χ_{mn} невозмущенной системы. В наших обозначениях мы приняли во внимание возможность вырождения, для чего применили два индекса у χ и только один у E^0 . Совокупность χ_{mn} при различных возможных значениях m (одном или нескольких) соответствует одной и той же энергии E_n^0 . Функция Грина для невозмущенной системы является решением уравнения

$$(E - \mathcal{H}_0) G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и имеет вид

$$G_E(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \sum_{m, n} \frac{\bar{\chi}_{mn}(\mathbf{r}_0) \chi_{mn}(\mathbf{r})}{E - E_n^0}, \quad m = 1, 2, \dots, M_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Интегральное уравнение, соответствующее уравнению $(\mathcal{H}_0 + V_1)\psi = E\psi$, имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{m, n} \frac{\chi_{mn}(\mathbf{r})}{E - E_n^0} \iiint \bar{\chi}_{mn}(\mathbf{r}_0) V_1(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0. \quad (12.3.46)$$

До сих пор это рассуждение в основном совпадало с рассуждением на стр. 599. Однако теперь мы предположим, что ψ не обязательно стремится к какому-либо одному χ_{mn} при стремлении V_1 к нулю; ψ может стремиться к некоторой линейной комбинации всех χ_{mn} , соответствующих определенной энергии E_n^0 . Полагаем

$$\psi = \sum_r C_r \chi_{rn} + \sum_{s, p \neq n} A_{sp} \chi_{sp}.$$

Подставляя это в выражение (12.3.46), получаем сначала для коэффициентов C_m соотношения

$$(E - E_n^0) C_m = \sum_r C_r u_{mn, rn} + \sum_{s, p \neq n} A_{sp} u_{mn, sp},$$

где

$$u_{mn, sp} = \iiint \bar{\chi}_{mn} V_1 \chi_{sp} dv.$$

Здесь в соответствии с первым равенством (12.3.16) первая сумма должна свестись к одному члену. Другими словами, коэффициенты C_m линейной комбинации нужно выбрать так, чтобы

$$\sum_r C_r u_{mn, rn} = E_n^1 C_m.$$

Для того чтобы это могло иметь место, нужно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при C_m , был равен нулю:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (u_{1n, 1n} - E_n^1) & u_{1n, 2n} & \dots & u_{1n, M_n n} \\ u_{2n, 1n} & (u_{2n, 2n} - E_n^1) & \dots & u_{2n, M_n n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{M_n n, 1n} & u_{M_n n, 2n} & \dots & (u_{M_n n, M_n n} - E_n^1) \end{vmatrix} = 0; \quad (12.3.47)$$

это дает уравнение степени M_n для E_n^1 с коэффициентами, зависящими от элементов матрицы $u_{rn, mn}$. Таким образом получаем M_n корней, которые можно упорядочить; обозначим их через $E_{\sigma n}^1$ (некоторые из этих корней могут оказаться равными; возмущение, конечно, может и не снять все вырождение). Корню $E_{\sigma n}^1$ соответствуют коэффициенты $C_{\sigma m}$ (которые могут быть нормированы так, чтобы $\sum_m |C_{\sigma m}|^2 = 1$) и линейные комбинации волновых функций

$$\varphi_{\sigma n} = \sum_m C_{\sigma m} \chi_{mn}, \quad \int \int \int |\varphi_{\sigma n}|^2 dv = 1.$$

Для каждого допустимого значения E_n^0 существует M_n таких линейных комбинаций φ , являющихся решениями невозмущенного уравнения $\mathcal{H}_0 \varphi_{\sigma n} = E_n^0 \varphi_{\sigma n}$ при одном и том же значении E_n^0 . Эти комбинации ортогональны друг другу (см. стр. 65 тома I) и нормированы. Таким образом, они являются такими же подходящими волновыми функциями для невозмущенного волнового уравнения, как и функции χ . На самом же деле, для рассматриваемой задачи они удобнее, чем функции χ , так как, пользуясь ими, получаем при данном n для V_1 диагональную матрицу (что следует из самого способа их построения)

$$\int \int \int \bar{\varphi}_{\tau n} V_1 \varphi_{\sigma n} dv = \delta_{\sigma \tau} E_{\sigma n}^1,$$

хотя матричные элементы для других значений n

$$\int \int \int \bar{\varphi}_{\sigma p} V_1 \varphi_{\tau n} dv = u_{\sigma p, \tau n}, \quad p \neq n,$$

могут быть отличны от нуля даже при $\sigma \neq \tau$.

Если мы теперь начнем вычисление возмущений, отправляясь от собственных функций φ , «приспособленных» к возмущению V_1 , то рассуждения будут протекать почти так же легко, как и в случае невырожденных состояний. Так как возмущение не «перемешивает» функции φ , мы должны иметь только одну из них для данного E_n в качестве основного члена в выражении

$$\psi = \varphi_{\sigma n} + \sum_{\tau, p \neq n} A_{\tau p} \varphi_{\tau p}.$$

Подставляя невозмущенную совокупность $\varphi_{\sigma n}$ вместо χ_{mn} в выражение (12.3.46), мы можем теперь получить систему уравнений, аналогичных (12.3.16); из этих уравнений можно найти последовательные приближения решения

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\mathbf{r}) &= 0, \quad \psi^0(\mathbf{r}) = \varphi_{\sigma n}(\mathbf{r}), \\ \psi^{\nu}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\sigma n}(\mathbf{r}) + \sum_{\tau, m \neq n} \frac{\int \int \int \bar{\varphi}_{\tau m} V_1 \psi^{\nu-1} dv_0}{E_n^0 - E_m^0 + \int \int \int \bar{\varphi}_{\tau n} V_1 \psi^{\nu-2} dv_0}, \\ E^{\nu} &= E_n^0 + \int \int \int \bar{\varphi}_{\sigma n}(\mathbf{r}_0) V_1(\mathbf{r}_0) \psi^{\nu-1}(\mathbf{r}_0) dv_0, \end{aligned} \quad (12.3.48)$$

с помощью которых можно вычислить допустимые энергии и волновые функции для возмущенного состояния способом, совершенно аналогичным содержащемуся в равенствах (12.3.17) и (12.3.18). Функции ψ^{ν} и энергии E^{ν} приближаются к истинным решениям при $\nu \rightarrow \infty$ в пределах радиуса сходимости, найденного в § 9.1.

Резюмируем: чтобы подсчитать влияние возмущения V_1 на вырожденную систему, мы сначала находим ту определенную систему собственных

функций φ_{nl} , для которой матрица, соответствующая V_1 , является диагональной для всех состояний, имеющих одну и ту же невозмущенную энергию E_n^0 . С помощью этой «заранее подобранной» системы функций вычисление влияния возмущения V_1 на систему может быть выполнено так же, как если бы система была невырожденной.

Эффект Штарка. В качестве примера вычислений такого рода считаем влияние однородного поля (например, однородного электрического поля, если частица заряжена) на различные системы с центральными силами. Возмущающий потенциал имеет вид

$$Fz = Fr \cos \vartheta = \frac{1}{2} F (\lambda - \mu).$$

Если волновая функция распадается на множители в сферических координатах (волновые функции являются собственными функциями для компоненты z и для квадрата момента количества движения, так же как и для энергии), то множители, зависящие от углов, являются сферическими гармониками, как указано в равенстве (12.3.32). И для гармонического осциллятора и для случая кулоновского потенциала энергия не зависит ни от l , ни от m , так что эти состояния будут вырожденными. Чтобы выяснить, будут ли сферические состояния, характеризуемые квантовыми числами l и m , подходящими для возмущения, вызванного однородным полем, нужно только посмотреть, будет ли матрица, составленная для Fz , диагональной по квантовым числам m и l . Но эти квантовые числа «включают» интегрирование множителей X_{ml} , зависящих от углов, так что мы можем провести это исследование прежде, чем решим вопрос о том, какая радиальная функция должна рассматриваться в качестве невозмущенного состояния.

Так как возмущающий потенциал $V_1 = Fr \cos \vartheta$ не зависит от угла φ , мы можем быть уверены, что матрица с элементами U будет диагональной относительно квантового числа m . Другими словами,

$$\begin{aligned} U_{m'l'n', m'l'n'} &= NN' \int_0^{2\pi} e^{im\varphi - im'\varphi} d\varphi \int_0^\pi \cos \vartheta P_l^m P_{l'}^{m'} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty r R_{ln} R_{l'n'} r^2 dr = \\ &= 2\pi \delta_{mm'} NN' \int_0^\pi \cos \vartheta P_l^m P_{l'}^{m'} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty r R_{ln} R_{l'n'} r^2 dr. \end{aligned}$$

Прежде всего отметим, что выражение для V_1 содержало бы φ , если бы полярная ось в сферических координатах не была направлена вдоль возмущающей силы; поэтому U не была бы диагональной по m . Благодаря нашему выбору ориентации мы диагонализировали часть матрицы.

Однако матрица не будет диагональной по квантовому числу l , так как интеграл по ϑ равен нулю при $m = m'$, $l = l'$ (дополнительный множитель $\cos \vartheta$ делает подинтегральную функцию антисимметричной относительно $\vartheta = \pi/2$). Так как

$$\cos \vartheta P_l^m (\cos \vartheta) = \frac{l-m+1}{2l+1} P_{l+1}^m (\cos \vartheta) + \frac{l+m}{2l+1} P_{l-1}^m (\cos \vartheta),$$

то отличными от нуля будут только те элементы U , для которых $l' = l \pm 1$. Бесполезно идти дальше в этом направлении; мы уточнили ориентацию системы сферических координат требованием, чтобы матрица U была диагональной по m ; чтобы сделать ее диагональной по l , нужно выбрать волновые функции и квантовые числа в соответствии с другой системой координат.

Для изучения возмущения однородным полем трехмерного гармонического осциллятора удобна система прямоугольных координат x, y, z . Волновая функция, распавшаяся на три множителя вида, указанного в (12.3.7),

$$\varphi_{ksn}(x, y, z) = \frac{(\beta/\pi)^{3/4}}{\sqrt{2^n k! s! (n-s-k-1)!}} e^{-\frac{1}{2}\beta r^2} \times \\ \times H_k(x\sqrt{\beta}) H_s(y\sqrt{\beta}) H_{n-k-s-1}(z\sqrt{\beta}),$$

дает решение уравнения Шредингера для центральной силы с потенциалом $V_0 = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)$ и является линейной комбинацией решений, данных в равенстве (12.3.37), для различных m и l , но при одном и том же n . Энергия для всех этих вырожденных состояний равна, конечно, $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Тем не менее приведенные выше решения φ более удобны для возмущения однородной силой, так как матричные элементы Fz диагональны относительно обоих индексов k и s в силу ортогональности полиномов H_k и H_s . В действительности, как мы знаем из равенства (12.3.9), возмущенная волновая функция имеет вид $\varphi_{ksn}(x, y, z+b)$, где $b = F/M\omega^2$ (множители, зависящие от x и y , вовсе не подвергаются возмущению) и возмущенные уровни энергии даются равенством

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{F^2}{2M\omega^2}.$$

Волновые функции кулоновского поля не могут быть разделены на множители в прямоугольных координатах, но в параболических координатах они соответствуют функциям, определенным равенствами (12.3.42). Возмущение $\frac{1}{2} F(\lambda - \mu)$ не зависит от φ (если мы выберем параболическую ось параллельно возмущающей силе), так что U диагональна относительно m . Остаток интеграла содержит

$$\int_0^\infty \int (\lambda\mu)^m e^{-\gamma(\lambda+\mu)} L_s^m(\gamma\lambda) L_{s'}^m(\gamma\lambda) L_{n-s-m-1}^m(\gamma\mu) L_{n-s'-m-1}^m(\gamma\mu) (\lambda^2 - \mu^2) d\lambda d\mu,$$

что равно нулю, если s' не равно s (хотя, если мы выпишем интеграл для n' и n , то увидим, что не все члены $U_{n's'm', nsm}$ вне диагонали равны нулю; если $n' \neq n$, то члены, для которых $n' + s' \neq n + s$, не обращаются в нуль). Следовательно, параболические волновые функции могут быть использованы для этого возмущения. Для параболического состояния с квантовыми числами n, s и m в случае системы, имеющей потенциальную энергию $(-\eta^2/r) + Fz$, поправка первого порядка для подсчета энергии имеет вид (см. стр. 728 тома I)

$$E \simeq -\frac{M\eta^4}{2n^2\hbar^2} - \frac{3}{2} F \frac{\hbar^2}{M\eta^2} n(n-2s-m-1). \quad (12.3.49)$$

Нужно заметить, что если однородное поле простирается до бесконечности, то существует некоторое большое по абсолютной величине отрицательное значение z , для которого потенциальная энергия равна E ; при больших значениях абсолютной величины z частица может свободно двигаться к $-\infty$. Как мы видели на стр. 611, в волновой механике частица может в конце концов преодолеть потенциальный барьер, хотя при высоком или широком барьере для этого потребуется очень много времени; однородное поле вызывает появление барьера, через который частица может просачиваться из области, близкой к началу координат, в область, близкую к $z = -\infty$. Здесь, строго говоря, допустимы все со-

стояния с отрицательной энергией и квантованные состояния вблизи начала не являются истинно стационарными, так как частица может в конце концов оказаться вне влияния силового центра. Тем не менее если F сравнительно мало, потенциальный барьер будет очень широким; требуется чрезвычайно много времени для того, чтобы частица могла просочиться; состояния с энергиями, приведенными в равенстве (12.3.49), будут в сущности стационарными состояниями.

Собственные функции в импульсном представлении. Иногда, например при изучении рассеяния атомами рентгеновских лучей, более существенно подсчитать плотность вероятности в пространстве импульсов, чем в пространстве конфигураций. Как показано в § 2.6, волновая функция в импульсном представлении является решением соответствующего уравнения Шредингера, получающегося из уравнения для обычных собственных функций заменой x через $i\hbar (\partial/\partial p_x)$ и $-i\hbar (\partial/\partial x)$ через p_x . Но прежде чем решать новое уравнение, мы можем воспользоваться тем фактом, что эти две волновые функции являются преобразованиями Фурье одна для другой. Волновая функция в импульсном представлении χ , квадрат которой дает плотность вероятности для импульсов, удовлетворяющая уравнению

$$-\frac{1}{2M} |\mathbf{p}|^2 \chi + V(i\hbar \text{grad}_p) \chi = E\chi \quad (12.3.50)$$

где $i\hbar \text{grad}_p$ должно быть подставлено вместо $\mathbf{r}$ в потенциальную функцию V связана с собственной функцией в координатном представлении ψ , удовлетворяющей обычному уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + V(r) \psi = E\psi,$$

соотношениями (N — число измерений)

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p}) &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right]^N \iiint e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ \psi(\mathbf{r}) &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right]^N \iiint e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar} \chi(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (12.3.51)$$

Эта интегральная связь имеет место также для более общих, зависящих от времени волновых функций Ψ и Ξ , но члены $E\psi$ и $E\chi$ в соответствующих уравнениях должны быть заменены через $i\hbar (\partial\Psi/\partial t)$ и $i\hbar (\partial\Xi/\partial t)$.

Простым примером является одномерный гармонический осциллятор. Волновое уравнение для χ дано в (12.3.19) и решения, являющиеся собственными функциями, как видно из равенств (12.3.20), имеют вид

$$\chi_n(p) = \frac{i^{-n}}{\sqrt{2^n n! \hbar \sqrt{\pi\beta}}} e^{-\frac{1}{2}(p^2/\hbar^2\beta)} H_n\left(\frac{p}{\hbar \sqrt{\beta}}\right),$$

что следует сравнить с выражением (12.3.7). Чтобы показать, что это решение удовлетворяет соотношениям (12.3.51), мы воспользуемся производящей функцией для полиномов Эрмита, приведенной в таблице в конце гл. 6:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta\hbar}} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sqrt{\frac{2^n}{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi z} \varphi_n(z) dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar} \sqrt{\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2tz - \frac{1}{2}z^2 - i\varphi z} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hbar \sqrt{\pi\beta}}} e^{t^2 - 2it\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sqrt{\frac{2^n}{n!}} \chi_n(\varphi), \end{aligned} \quad (12.3.52)$$

где $z = x \sqrt{\beta}$ и $\rho = p/\hbar \sqrt{\beta}$. Приравнявая коэффициенты при t^n , мы видим что φ_n и χ_n удовлетворяют соотношениям (12.3.51) и (12.3.24).

Мы, конечно, можем построить волновую функцию для трехмерного гармонического осциллятора с потенциальной функцией $\frac{1}{2} M \omega^2 r^2$. Подставив $p/\hbar \sqrt{\beta}$ в выражение (12.3.37) и сделав необходимые изменения ϕ в нормирующем множителе, получим

$$\chi_{mln}(p, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{8\pi\hbar^3\beta^3} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}\right)!}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}l + 1\right)\right]^3}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta) \times \\ \times (p^2/\beta\hbar^2)^{\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}p^2/\beta\hbar^2} L_{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}}^{l + \frac{1}{2}}(p^2/\beta\hbar^2), \quad (12.3.53)$$

что является (за исключением степени l , которая может быть опущена) преобразованием Фурье функции ψ_{mln} , определенной равенством (12.3.37). Если n — целое положительное число, если $(n-l)$ — целое положительное нечетное число и если m равно нулю или целому числу, не превышающему l , то χ или комплексно сопряженная с ней функция определяет стационарное состояние, соответствующее допустимой энергии $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Таким образом, мы разбили на множители нашу волновую функцию в сферических импульсных координатах p (модуль $\mathbf{p}$), θ (угол между $\mathbf{p}$ и осью z) и ϕ (угол между плоскостью z, p и плоскостью x, z).

Вычисление интеграла (12.3.51) в случае кулоновского потенциала притяжения — (γ^2/r) для собственной функции в импульсном представлении, соответствующей координатной функции, приведенной в равенстве (12.3.40), не очень просто. Показатель экспоненты, стоящей под знаком интеграла Фурье, $i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar$, в сферических пространственных и импульсных координатах принимает вид

$$i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} = i \frac{pr}{\hbar} [\sin\vartheta \sin\theta \cos(\varphi - \phi) + \cos\vartheta \cos\theta].$$

Часть интеграла, соответствующая координате φ , может быть вычислена с помощью интегрального представления функций Бесселя. Имеем

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(pr/\hbar) \sin\theta \sin\vartheta \cos(\varphi - \phi) + im\varphi} d\varphi = 2\pi i^m e^{im\phi} J_m\left(\frac{pr}{\hbar} \sin\vartheta \sin\theta\right).$$

Следующий интеграл по переменному ϑ также может быть выражен через функции Бесселя

$$\int_0^\pi e^{-i(pr/\hbar) \cos\vartheta \cos\theta} J_m\left(\frac{pr}{\hbar} \sin\vartheta \sin\theta\right) P_l^m(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = \\ = -(-i)^{l+m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{pr}} P_l^m(\cos\theta) J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{pr}{\hbar}\right).$$

Интеграл в первом из равенств (12.3.51) принимает вид

$$\chi = -(-i)^l \sqrt{\frac{\hbar^2 n^2}{8M^2 \gamma^4} \frac{2l+1}{4\pi n p} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta) \times \\ \times \int_0^\infty u^{l+\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}u} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u\omega\right) L_{n-l-1}^{2l+1}(u) du,$$

где $u = 2M\gamma^2 r / \hbar^2 n$ и $w = \hbar n p / M\gamma^2$. Пользуясь интегральным соотношением между полиномами Лагерра и Гегенбауэра, приведенным в таблице в конце гл. 6, мы имеем окончательно (пренебрегая множителями типа i^l),

$$\chi_{nlm}(p, \theta, \phi) = \sqrt{\left(\frac{2\hbar n}{M\gamma^2}\right)^3 \frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{n(n-l-1)!}{(n+l)!}} \times \\ \times e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (1-z^2)^{\frac{1}{2}l} T_{n-l-1}^{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (12.3.54)$$

где $z = [(\hbar n p / M\gamma^2)^2 - 1] / [(\hbar n p / M\gamma^2)^2 + 1]$. Переменное z изменяется от -1 до $+1$, когда p меняется от нуля до бесконечности. Допустимые энергии для связанных состояний совпадают с приведенными в (12.3.39)¹⁾.

Волновые функции в импульсном представлении для некоторых низших состояний имеют вид

$$\chi_{100} = \sqrt{\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2\hbar}{M\gamma^2}\right)^3} \left[\left(\frac{\hbar p}{M\gamma^2}\right)^2 + 1 \right]^{-2}, \\ \chi_{210} = \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \left(\frac{4\hbar}{M\gamma^2}\right)^3} \left(\frac{2\hbar p}{M\gamma^2}\right) \left[\left(\frac{2\hbar p}{M\gamma^2}\right)^2 + 1 \right]^{-3} \cos \theta, \\ \chi_{200} = \sqrt{\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{4\hbar}{M\gamma^2}\right)^3} \left[\left(\frac{2\hbar p}{M\gamma^2}\right)^2 - 1 \right] \left[\left(\frac{2\hbar p}{M\gamma^2}\right)^2 + 1 \right]^{-3};$$

эти функции убывают при больших значениях p . Вторая из них имеет узел в плоскости x, y , а третья имеет сферический узел при $p = M\gamma^2 / 2\hbar$.

С помощью этих волновых функций можно найти средний квадрат импульса частицы, когда система находится в состоянии, характеризуемом квантовыми числами n, l, m . Этот средний квадрат равен

$$\iint \int [\chi_{nlm}]^2 p^2 dv_p = \left(\frac{M\gamma^2}{\hbar n}\right)^2;$$

он будет наибольшим для наинизшего связанного состояния ($n = 1$), убывает при возрастании n и не зависит от квантовых чисел l и m .

Момент количества движения частицы может быть подсчитан методом, аналогичным методу, примененному для получения уравнений (12.3.34):

$$\mathcal{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar \mathbf{p} \times \text{grad}_p = -i\hbar \left[\mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial \phi} - \mathbf{a}_x \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{a}_y \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right].$$

Как и раньше, мы находим, что χ_{mln} является собственной функцией для $\mathcal{M}_z$ с собственным значением $m\hbar$ (или $-m\hbar$ для комплексно сопряженной функции), а также и собственной функцией для $|\mathcal{M}|^2$ с собственным значением $\hbar^2 l(l+1)$.

Рассеяние в центральном поле. В теории несвязанных состояний с положительной энергией представляет интерес изучение частицы, движущейся по некоторому направлению, наталкивающейся на центральное поле и рассеиваемой им. На очень больших расстояниях волновая функция падающей частицы представляет собой плоскую волну (распространяющуюся в положительном направлении оси z , например, вида $e^{ipz/\hbar}$), соответствующую известному начальному импульсу p в направлении оси z . Рас-

¹⁾ Чрезвычайно изящный метод нахождения волновых функций в импульсном представлении для атома водорода был дан В. Фоком [Fock V., Z. f. Phys., 98, 145 (1935)]. — Прим. ред.

сеянная волна на большом расстоянии является радиально расходящейся волной $e^{i\sqrt{r}}/\sqrt{r}$ с амплитудой, зависящей от угла рассеяния ϑ . Если падающая плоская волна имеет единичную амплитуду и представляет собой поток частиц с единичной плотностью тока, то квадрат амплитуды рассеянной волны представляет собой плотность потока, рассеянного под соответствующим углом; интеграл этого квадрата по всем значениям угла есть полный рассеянный поток, приходящийся на единичную плотность падающего потока. Этот интеграл имеет размерность площади; он представляет собой эффективную площадь силового поля при рассеянии частиц и называется эффективным сечением упругого рассеяния падающих частиц в данном поле.

Мы изучали рассеяние волн в § 9.3, а в гл. 11 рассмотрели несколько примеров; здесь приемы изучения остаются прежними. Решаем радиальное уравнение (12.3.33) при положительной энергии $\varepsilon = k^2$ и берем решение R_l , равное нулю при $r=0$, которое мало отличается от $(1/k) \sin(kr - \eta_l - \pi l/2)$ для значений r , достаточно больших для того, чтобы величиной $v(r)$ можно было бы пренебречь (мы предполагаем, что v стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$). Распределение по углам рассеянной волны и полное эффективное сечение рассеяния выражаются тогда через фазовые углы η_l , как показано в (11.3.72). (Мы здесь пишем η_l вместо δ_l , употреблявшегося там.)

Не все потенциальные поля могут быть рассчитаны этим простым способом. Например, равенство (12.3.41) показывает, что для кулоновского поля фазовые углы не приближаются к асимптотическому значению, но благодаря наличию в асимптотическом выражении логарифмического члена продолжают изменяться, как бы велико ни было r . Кулоновское поле не приближается к нулю достаточно быстро для того, чтобы радиальные функции могли принять такую же простую форму как $(1/k) \sin(kr - \eta_l - \pi l/2)$ при $r \rightarrow \infty$. Конечно, мы смогли вычислить рассеяние кулоновским полем при помощи параболических координат, и результат показывает, почему нужно осторожно обращаться с рядами: эффективное сечение бесконечно, кулоновское поле влияет на движение частиц даже на бесконечности.

Однако для потенциальных полей, стремящихся к нулю быстрее чем $1/r$, фазовый угол в решении имеет некоторое предельное значение, с помощью которого и может быть рассчитано рассеяние, как указано в уравнениях (9.3.18) и (11.3.72). Как пример подобных вычислений, рассчитаем рассеяние электронов с энергией $E = \hbar^2 k^2 / 2M$, вызванное полем

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{a} - \frac{Ze^2}{r}, & r < a, \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

которое соответствует заряженному ядру с зарядом Ze , помещенному в начале координат и окруженному нейтрализующей сферической оболочкой при $r=a$. Внутри этой сферы множитель, полученный при решении уравнения

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \left[-K^2 + \frac{2MZe^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0, \quad K^2 = \frac{2MZe^2}{\hbar^2 a} - \frac{2ME}{\hbar^2},$$

имеет вид

$$\frac{1}{r} R_l(r) = N (2Kr)^l e^{-Kr} F\left(l+1 - \frac{MZe^2}{\hbar^2 K} \middle| 2l+2 \middle| 2Kr\right), \quad r < a.$$

Для этих внутренних функций большую роль играет отношение градиента функции R_l/r к ее значению при $r=a$. Пользуясь свойствами вы-

рожденных гипергеометрических функций (см. стр. 626 тома I), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi_l &= \left[\frac{r}{R_l/r} \frac{(dR_l/r)}{dr} \right]_{r=a} = \\ &= \frac{MZe^2}{\hbar^2 K} - 1 - Ka + \left(l + 1 - \frac{MZe^2}{\hbar^2 K} \right) \frac{F\left(l+2 - \frac{MZe^2}{\hbar^2 K} \mid 2l+2 \mid 2Ka\right)}{F\left(l+1 - \frac{MZe^2}{\hbar^2 K} \mid 2l+2 \mid 2Ka\right)}. \end{aligned}$$

Вне сферы $r=a$ мы пользуемся комбинацией $\cos \eta_l j_l(kr) + \sin \eta_l n_l(kr)$, где η_l подобрано так, чтобы отношение производной этой комбинации к ее значению при $r=a$ было равно аналогичному отношению для внутренних функций. Пользуясь фазовыми углами, определенными в конце гл. 11, имеем¹⁾

$$\operatorname{tg} \Phi_l = ka \frac{j'_l \cos \eta_l + n'_l \sin \eta_l}{j_l \cos \eta_l + n_l \sin \eta_l}$$

или

$$\operatorname{tg} \eta_l = \operatorname{tg} \delta_l \frac{\operatorname{tg} \Phi_l + \operatorname{tg} \alpha_l}{\operatorname{tg} \Phi_l + \operatorname{tg} \beta_l} = \operatorname{tg} \gamma_l \frac{\sin(\Phi_l + \alpha_l)}{\sin(\Phi_l + \beta_l)},$$

где углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ зависят от ka , причем $k^2 = \varepsilon = 2ME/\hbar^2$.

Мы пользуемся комбинацией внешних и внутренних функций для различных значений l так, чтобы падающая волна при больших r соответствовала плоской волне [см. уравнение (9.3.15)]

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \vartheta) j_l(kr).$$

Следовательно, при $r > a$ падающая волна, сложенная с рассеянной волной, имеет вид

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \vartheta) e^{-i\eta_l} [\cos \eta_l j_l(kr) + \sin \eta_l n_l(kr)],$$

как и в уравнении (11.3.71). Рассеянная волна, интенсивность рассеяния и эффективное сечение рассеяния при $kr \gg 1$ имеют тогда вид

$$\begin{aligned} \phi_s &\simeq -\frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-i\eta_l} \sin \eta_l P_l(\cos \vartheta), \\ S &= \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{l, n} (2l+1)(2n+1) \cos(\eta_l - \eta_n) \sin \eta_l \sin \eta_n \times \\ &\quad \times P_l(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (12.3.55)$$

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l.$$

Можно отметить, что здесь связь между полным эффективным сечением Q и асимптотической амплитудой рассеянной волны аналогична уравнению (11.4.64), и о ней упоминалось на стр. 69. Так как равенства (12.3.55) имеют место для любого центрального поля разумного вида,

¹⁾ Определение фазы η_l , примененное здесь, соответствует асимптотическому поведению величины $R_l = \sin(kr - l\pi/2 - \eta_l)$. В квантовой механике, где потенциалы обычно соответствуют притяжению и где волны чаще «притягиваются», чем «отгоняются», как это бывает при наличии препятствия в акустике, более принято это π сдвиг фаз обозначать через $-\eta_l$.

где фазовые углы η_l определяются этим полем, то разложение фактора углового распределения (амплитуды рассеяния) $f(\vartheta)$, определенного соотношением

$$\psi \simeq e^{ikr \cos \vartheta} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vartheta), \quad r \rightarrow \infty,$$

по фазовым углам η_l

$$f(\vartheta) = -\frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-i\eta_l} \sin \eta_l P_l(\cos \vartheta), \quad (12.3.56)$$

а также предельное соотношение между f и Q , полученное с помощью сравнения двух рядов,

$$Q = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} [f(0)], \quad (12.3.56)$$

будут верны и в общем случае. В частности, последнее соотношение будет иметь место как в том случае, когда f и Q заданы в виде рядов сферических функций, так и при задании их в конечном виде.

В главе 9 на стр. 69 было показано, что равенство (12.3.56') выражает собой не что иное, как закон сохранения числа падающих частиц. Интенсивность первоначального пучка позади рассеивающего центра ($\vartheta=0$) должна быть уменьшена на величину, соответствующую полному числу рассеянных частиц. Рассеянная волна при $\vartheta=0$ является как раз тенеобразующей волной (см. стр. 357), поэтому полное эффективное сечение должно быть пропорционально той части $f(0)$, которая не совпадает по фазе с падающей волной.

Эффект Рамзауера и другие резонансные эффекты. В рассмотренном здесь примере фазовые углы зависят от двух безразмерных параметров: $ka = (a/\hbar) \sqrt{2ME} = Mva/\hbar$, пропорционального скорости падающей частицы, и $\beta = \sqrt{MaZe^2/2\hbar^2}$, который является мерой «интенсивности» поля притяжения и пропорционален квадратному корню из «зарядного фактора» Z и из радиуса a поверхности, вне которой $V=0$. Оказывается, что при $k=0$ все фазовые углы η_l при малом β равны нулю, затем при возрастании β скачком изменяются до $-\pi$, -2π и т. д. При $k > 0$ углы $-\eta_l$ также возрастают вместе с β , но без разрывов, как показано на рис. 12.5. Разрывность при $k=0$ объясняется поведением связанных уровней для потенциала V . При очень малых значениях β связанных уровней нет; первый связанный уровень (при $l=0$), расположенный очень близко от края потенциальной ямы, появляется при значении β , чуть большем значения, при котором η_0 сразу перескакивает от 0 к $-\pi$ при $k=0$; для данного l каждый новый уровень появляется при значении β , чуть большем того значения, при котором η_l совершает подобный скачок.

Поведение фазовых углов, рассматриваемых как функции от ka при различных значениях β , показано на рис. 12.6. При малых значениях ka угол $-\eta_0$ изменяется в зависимости от ka линейно; для других значений l при $ka \ll 1$ имеем $-\eta_l(ka) \simeq n\pi + \mu_l(ka)^{l+1}$, где постоянная μ_l стремится к $\pm \infty$, когда β приближается к одному из значений, соответствующих точкам разрыва $\eta_l(0)$. Следовательно, в выражении Q остается постоянным при $ka \rightarrow 0$ только член с $l=0$, все остальные члены стремятся к нулю, за исключением тех случаев, когда β имеет значение, при котором $\mu_l \rightarrow \infty$: в этом последнем случае эффективное сечение стремится к бесконечности, когда k приближается к нулю. С другой стороны, для значений β , немного меньших указанных (иначе говоря, когда уровень немного «вытеснен»), $|\sin \eta_l|$ при убывании ka сначала растет, а потом уменьшается, и эффектив-

ное сечение также сначала растет, а потом при $ka \rightarrow 0$ становится очень малым (см. кривые при $\beta = 1,75$ на рис. 12.6).

Рассмотрим эти утверждения в более общей форме, когда при $r = a$ отношение производной к значению функции для внутренней функции R_l/r равно отношению производной j_l' к значению j_l ; тогда $\operatorname{tg} \Phi_l$ равен $-\operatorname{tg} \alpha_l$

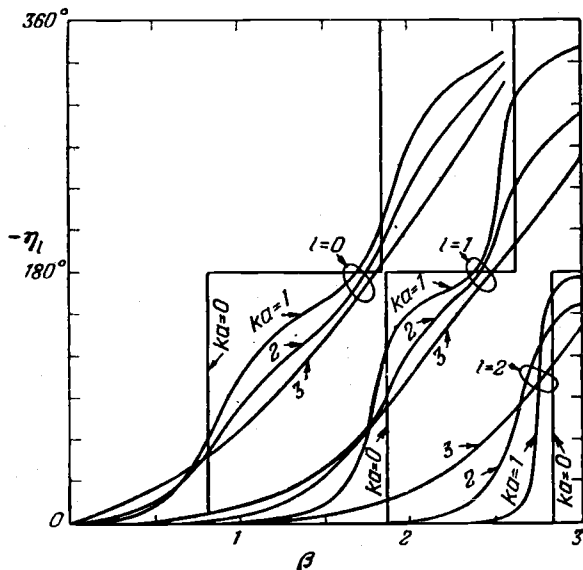


Рис. 12.5. Фазовые углы η_l для рассеяния экранированным кулоновским полем как функции параметра β , характеризующего интенсивность поля при различных значениях скоростного параметра ka .

и $\eta_l = 0$. Это было бы приблизительно верно для энергий, соответствующих допустимому связанному состоянию, если бы кулоновское поле не обрывалось при $r = a$, а простиралось бы до бесконечности. Если это происходит при малом ε (т. е. если «виртуальный уровень» немного больше нуля), полное эффективное сечение убывает до очень малых значений при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это явление в случае рассеяния электронов на атомах называется *эффектом Рамзауера*.

Максимумы (называемые *резонансными пиками*) эффективного сечения могут достигаться, когда $\eta_l = \pi/2$, что имеет место, как только $\Phi_l = -\beta_l$. При максимумах *парциальное эффективное сечение*

$$Q_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \eta_l \underset{\eta_l \rightarrow \pi/2}{\simeq} \frac{4\pi}{k^2} (2l+1)$$

является наибольшим возможным эффективным сечением. Предположим, что этот максимум достигается при $\varepsilon = \varepsilon_r$. В окрестности этого пика

$$\operatorname{ctg} \eta_l \approx \operatorname{ctg} \delta_l \frac{(\varepsilon - \varepsilon_r) \sec^2 \beta_l}{\operatorname{tg} \alpha_l - \operatorname{tg} \beta_l} \left(\frac{d\Phi_l}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_r},$$

где углы α_l и β_l для функций Бесселя даны на стр. 533.

Пользуясь выражением вронскиана

$$j_l' n_l - n_l' j_l = \frac{1}{ka},$$

получаем

$$\operatorname{tg} \dot{\alpha}_l (\operatorname{tg} \alpha_l - \operatorname{tg} \beta_l) = \frac{1}{n_l^2 (ka)}$$

и

$$\operatorname{ctg} \eta_l \simeq n_l^2 (\varepsilon - \varepsilon_r) \sec^2 \beta_l \left(\frac{d\Phi_l}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_r}.$$

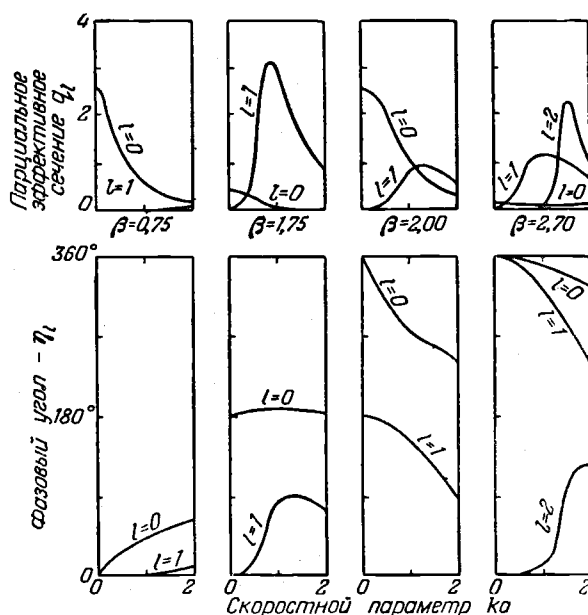


Рис. 12.6. Фазовые углы $-\eta_l$ и парциальные эффективные сечения $q_l = (2l+1) \sin^2 (\eta_l) / k^2 a^2$ как функции от ka для различных значений l и β , иллюстрирующие влияние «виртуальных уровней».

Парциальное эффективное сечение принимает теперь вид типичной резонансной кривой:

$$Q_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \eta_l} \simeq \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{4 \cos^4 \beta_l / [n_l^4 (d\Phi_l/d\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_r}]}{(\varepsilon - \varepsilon_r)^2 + \cos^4 \beta_l / [n_l^4 (d\Phi_l/d\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_r}^2]};$$

ширина Γ резонанса равна

$$\Gamma = \frac{2 \cos^2 \beta_l}{n_l^2 (d\Phi_l/d\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_r}}.$$

Резонанс будет особенно узким и очень заметным при малых энергиях, так как тогда $n_l(ka)$ особенно велико. Это заключение, конечно, обусловлено чувствительностью величины $(d\Phi_l/d\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_r}$ к изменениям энергии и имеет силу только в том случае, когда эта производная не стремится быстро к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку Φ_l описывает состояние во внутренней области $r \leq a$, Φ_l будет нечувствительным к изменениям ε при малых ε только в том случае, когда потенциальная энергия во внутренней области значительно превышает ε (это имеет место только в случае, когда кинетическая энергия велика при $r < a$, $\varepsilon \rightarrow 0$). Это условие не встречается в рассматриваемой задаче, но играет роль при рассеянии медленных нейтронов ядрами и проявляется в явлениях резонансного рассеяния. Заметим,

что, когда l возрастает при постоянном ka , ширина быстро убывает и резонанс становится более резким; в то же время для постоянного l при возрастании энергии ширина возрастает, так что в конечном итоге сильная флуктуация в Q , которая приводит к резонансу, исчезает при достаточно большой энергии. Некоторые из этих явлений видны на рис. 12.6, они более заметны при расчетах ядерного рассеяния.

Приближенные вычисления в случае медленных бомбардирующих частиц. Если энергия бомбардирующей частицы очень мала (т. е. если $ka \ll 1$), то $\eta_l \rightarrow 0$ при $l > 0$ и большая часть рассеянной волны соответствует значению $l=0$, т. е. сферически симметричной части. Это имеет место для медленных нейтронов (с энергией, меньшей чем несколько тысяч электрон-вольт), а также для очень медленных электронов (с энергией меньшей чем один электрон-вольт при рассеянии на атомах). В этой области энергий мы должны рассматривать радиальную функцию только при $l=0$:

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + [k^2 - v(r)] R_0 = 0, \quad R_0 \simeq \begin{cases} 0, & r \rightarrow 0, \\ \frac{1}{k} \sin(kr - \eta_l), & r \rightarrow \infty; \end{cases}$$

с этим уравнением проще иметь дело, чем с уравнениями при $l > 0$. (В обоих случаях мы пренебрегаем влиянием обмена, усложняющим вычисления; но этим влиянием можно пренебречь для тяжелых атомов и ядер.)

Например, мы можем найти точные решения в нескольких случаях потенциальных функций, для которых при наличии члена $l(l+1)/r^2$ решение не может быть найдено. В случае, рассмотренном, например, на стр. 620 для потенциала $V = -Be^{-r/d}$ при $l=0$ и для положительной энергии $E = (\hbar^2/2M)k^2$, решение является линейной комбинацией

$$R_0 = N \left[\frac{J_{2ikd}(2bde^{-r/2d})}{J_{2ikd}(2bd)} - \frac{J_{-2ikd}(2bde^{-r/2d})}{J_{-2ikd}(2bd)} \right], \quad b^2 = \frac{2MB}{\hbar^2},$$

и стремится к 0 при $r \rightarrow 0$, как и должно быть. Постоянная N подбирается так, чтобы R_0 имело нужное асимптотическое поведение. Но

$$J_{2ikd}(2bde^{-r/2d}) \simeq \frac{1}{\Gamma(1+2ikd)} e^{2ikd \ln(bd) - ikr}, \quad r \rightarrow \infty,$$

а так как

$$\Gamma(1+2ikd) = \sqrt{2\pi kd / \text{sh}(2\pi kd)} e^{i\varphi(2kd)}$$

и

$$J_{2ikd}(2bd) = |J| e^{i\Phi(kd, bd)},$$

то N можно записать в виде

$$\frac{i}{2k} \sqrt{|J|^2 \frac{2\pi kd}{\text{sh}(2\pi kd)}}$$

и асимптотическая форма R_0 имеет вид

$$R_0 \simeq \frac{1}{k} \sin[kr - 2kd \ln(bd) + \Omega + \Phi], \quad r \rightarrow \infty,$$

что определяет фазовый угол η_0 . Для достаточно малых значений энергии только тот член, в котором $l=0$, заметно отличается от функции Бесселя $j_l(kr)$ невозмущенной плоской волны, интенсивность рассеяния

$$S \simeq \frac{1}{k^2 r^2} \sin^2[\Omega + \Phi - 2kd \ln(bd)]$$

не зависит от угла и эффективное сечение рассеяния

$$Q \simeq \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 [\Omega + \Phi - 2kd \ln(bd)]$$

равно точно $4\pi r^2 S$.

Если энергия достаточно мала, так что $kd \ll 1$, то и гамма-функция и функция Бесселя могут быть упрощены. Например, так как

$$\left[\frac{d}{dz} \Gamma(z) \right]_{z=1} = -\gamma = -0,5772$$

и

$$\left[\frac{d}{dv} J_\nu(a) \right]_{\nu=0} = \frac{1}{2} \pi N_0(a),$$

то

$$\begin{aligned} \Gamma(1 + 2ikd) &\simeq 1 - 1,1544 ikd, & \Omega &\simeq -1,1544 kd, \\ J_{2ikd}(2bd) &\simeq J_0(2bd) + \pi ikd N_0(2bd), & \Phi &\simeq -\pi kd \operatorname{ctg} [\delta_0(2bd)], \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg} [\delta_0(x)] = -[J_0(x)/N_0(x)]$. Следовательно, фазовый угол, соответствующий значению $l=0$, в предельном случае малых энергий равен

$$\eta_0 \simeq kd \{ \ln(b^2 d^2) + \pi \operatorname{ctg} [\delta_0(2bd)] + 1,1544 \},$$

а полное эффективное сечение принимает вид

$$Q \simeq 4\pi d^2 \{ 1,1544 + \ln(b^2 d^2) + \pi \operatorname{ctg} [\delta_0(2bd)] \}^2. \quad (12.3.57)$$

Наконец, если $2bd$ много меньше единицы (потенциальная яма мелка или узка или и то и другое вместе), то $\operatorname{ctg} \delta_0 \simeq -\frac{2}{\pi} [\ln(bd) + \gamma - (bd)^2]$. Фазовый угол η_0 тогда равен

$$\eta_0 \simeq -2kd (bd)^2, \quad 2bd \ll 1$$

и

$$Q \simeq 16\pi d^2 (bd)^4, \quad 2bd \ll 1.$$

Этот результат, очевидно, согласуется со значением η_0 , полученным с помощью теории возмущений, когда влияние взаимодействия предполагается малым. Полученный с помощью теории возмущений результат называется *борновским приближением* и рассматривается непосредственно ниже.

Приближение Борна. При достаточно слабых полях или при достаточно больших скоростях частиц все рассеивающее поле можно представлять себе как возмущение, видоизменяющее падающую плоскую волну, рассматривая правую часть уравнения

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = \frac{2M}{\hbar^2} V(r) \psi, \quad k = \sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}} = \frac{Mv}{\hbar},$$

как неоднородный член и «решая» его с помощью функции Грина. Если падающая волна является плоской волной с амплитудой, равной единице, e^{ikz} , то соответствующее интегральное уравнение для ψ имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} - \frac{M}{2\pi\hbar^2} \iint \frac{e^{ikR}}{R} V(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0, \quad (12.3.58)$$

где $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \Omega}$ — расстояние между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$, Ω — угол между этими векторами. Конечно, e^{ikz} можно заменить любым другим решением однородного уравнения Гельмгольца, которое, как мы знаем, будет соответствовать другим возможным падающим волнам.

Это интегральное уравнение в случае сходимости интеграла может быть решено методом последовательных приближений. Если интеграл сходится абсолютно, т. е. если $\int |V| dv$ конечен, то полученный ряд итераций может сходиться (см. стр. 72), но даже в случае расходимости несколько первых членов последовательности иногда дают чрезвычайно хорошее приближение. Подробное изучение интеграла показывает, что критерий быстроты сходимости итераций может быть выражен через длину волны де Бройля $\lambda = \hbar/Mv = 2\pi/k$ и расстояние r_c , на которое может приблизиться частица к силовому центру в поле отталкивания $|V(r)|$ (r_c есть корень уравнения $|V(r)| = E$). Первое приближение решения уравнения (12.3.58), как оказывается, будет достаточным при $\lambda \gg r_c$; оно часто будет достаточным также и тогда, когда это условие не выполняется.

Изучение значения ψ при $r=0$ часто позволяет решить вопрос о том, будут ли несколько первых приближений достаточно близки к решению. Первое приближение для ψ получается, если подставить e^{ikz} вместо ψ под знак интеграла в уравнение (12.3.58). При $r=0$ первым приближением является

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= -\frac{M}{2\pi\hbar^2} \int \int \frac{e^{ikr(1+\cos\vartheta)}}{r} V(r) r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\ &= -\frac{2M}{k\hbar^2} \int_0^\infty V(r) e^{ikr} \sin(kr) dr;\end{aligned}$$

если $\psi_1(0)$ мало сравнительно с единичной амплитудой падающей плоской волны, то $\psi_1(r)$ будет, вероятно, малым и при $r > 0$. Если теперь $V(r) \simeq A/r^\alpha$ при $r \rightarrow 0$ и $V \simeq B/r^\beta$ при $r \rightarrow \infty$, то для того, чтобы интеграл сходился для любого значения k , α должно быть меньше 2 (сила вблизи начала не может быть обратной кубу расстояния), а для того, чтобы интеграл оставался конечным и при $k \rightarrow 0$, β должно быть больше 1 на больших расстояниях сила должна убывать быстрее, чем величина, (обратная квадрату расстояния).

Если эти предельные требования удовлетворены и если $(2M/\hbar^2) \int V(r) r dr$ мало по сравнению с единицей, то первое приближение будет малым для всех значений k (и дальнейшие приближения будут соответственно меньше). Если k возрастает, интеграл по величине убывает, так как подинтегральная функция колеблется все быстрее и быстрее благодаря наличию множителя $e^{ikr} \sin(kr)$. Если V при возрастании r стремится к нулю монотонно, то $\psi_1(0)$ будет, вообще говоря, меньше интеграла по r в пределах от 0 до первого корня функции $\sin kr$:

$$|\psi_1(0)| \leq \frac{2M}{\hbar^2} \int_0^{\pi/k} V(r) r dr.$$

Если $V(r) \simeq A/r$ при $r \rightarrow 0$ и $V \leq A/r^\beta$ ($\beta > 1$) при $r \rightarrow \infty$, то $\psi_1(0) \leq 2\pi MA/\hbar^2 = 2\pi A/v\hbar$. Но расстояние наибольшего приближения r_c , упомянутое выше на этой странице, приближенно определяется приравниванием кинетической энергии $\frac{1}{2} Mv^2$ значению $|V|$ при $r=r_c$. Для высоких энергий $|V| \simeq A/r$, так что $r_c \simeq 2A/Mv^2$, или $A \simeq Mv^2 r_c/2$; поэтому признак того, что $\psi_1(0)$ мало, заключается в том, чтобы $\pi Mv r_c/\hbar = 2\pi^2 r_c/\lambda$ было мало; здесь $\lambda = 2\pi\hbar/Mv$ — длина волны де Бройля падающей частицы. Таким образом, в этом примере мы пришли к нашему требованию, что итерации приближений сходятся при $r_c < \lambda/2\pi$ и что первое при-

ближение будет достаточным, когда r_c значительно меньше чем $\lambda/2\pi$ (см. рассуждение на стр. 90).

Если первое приближение достаточно, нам не потребуется вычислять ψ вблизи центра сил. Для подсчета рассеяния нужна только асимптотическая форма ψ . Если r много больше чем r_0 , то

$$\frac{e^{ikR}}{R} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ikr_0 \cos \Omega}, \quad r \gg r_0.$$

Если $\mathbf{k}_s$ — вектор величины k , направленный параллельно $\mathbf{r}$ — направлению движения рассматриваемой нами части рассеянного пучка, то $kr_0 \cos \Omega = \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0$. Также и падающая плоская волна может быть записана в виде $e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$, где $\mathbf{k}_i$ — вектор, характеризующий падающий пучок. Тогда асимптотическая форма первого приближения для ψ имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \frac{Me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r} \iint e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}_0} V(r_0) dv_0. \quad (12.3.58')$$

Эта формула известна как *приближение Борна*. В области ее применимости она замечательно проста и полезна. Она устанавливает, что рассеянная волна на очень большом расстоянии от рассеивателя имеет амплитуду, равную произведению $\sqrt{2\pi M/\hbar^2} r$ на *преобразование Фурье рассеивающего потенциала* V относительно разности векторов $\mathbf{K} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s$. Так как величина и $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$ равна $k = Mv/\hbar$, то величина вектора $\mathbf{K}$ равна $\mu = 2k \sin(\vartheta/2)$, где ϑ — *угол рассеяния*, угол между $\mathbf{k}_s$ и $\mathbf{k}_i$. Мы также видим, что $\mathbf{K}$ есть произведение $1/\hbar$ на импульс, сообщаемый частицей центру сил в течение процесса рассеяния.

Так как $V(r)$ сферически симметричен, то можно проинтегрировать по углам, что дает

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &\simeq e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mu), \quad \mu = \frac{2Mv}{\hbar} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \\ f(\mu) &\simeq -\frac{2M}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r_0) \frac{\sin(\mu r_0)}{\mu r_0} r_0^2 dr_0. \end{aligned} \quad (12.3.59)$$

Функция f является относительной амплитудой той части пучка, которая рассеивается на угол ϑ . Интеграл от ее квадрата по всем углам равен полному эффективному сечению Q . Заметим, что в этом приближении функция f (а также и $|f|^2 = S$ — функция углового распределения) зависит от скорости бомбардирующей частицы v и от угла рассеяния ϑ только через величину $\mu = (2Mv/\hbar) \sin(\vartheta/2)$. Как указано выше, эта формула для f пригодна для достаточно больших $\mathbf{K}$. Например, для потенциала, рассмотренного на стр. 631, мы найдем, что выводы, полученные из (12.3.59), очень мало отличаются от точного решения, полученного на стр. 632, если только μ несколько больше чем $2Ze^2/M\hbar^2$.

Во многих случаях потенциальное поле, вызывающее рассеяние, порождено атомным ядром с зарядом Ze , окруженным сферически-симметричным распределением электронов $\rho(r)$ в количестве, достаточном для того, чтобы сделать атом нейтральным. В этом случае потенциальная функция имеет вид

$$V(r) = -\frac{4\pi}{r} \int_r^\infty \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r dr', \quad 4\pi \int_0^\infty \rho(r') r'^2 dr' = Ze^2.$$

Подставляя это в выражение для амплитуды рассеяния и интегрируя

по частям, получим

$$f(\mu) \simeq \frac{2MZe^2}{\mu^2 \hbar^2} [F(0) - F(\mu)], \quad F(\mu) = \frac{4\pi}{Ze^2} \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(\mu r)}{\mu r} r^2 dr, \quad (12.3.60)$$

где $F(0) = 1$ согласно определению заряда электронов для нейтрального атома. Функция $F(\mu)$ называется *структурным фактором* распределения зарядов¹⁾.

Если μ достаточно велико, так что $1/\mu$ мало сравнительно с «радиусом» атома (значением r , внутри которого находится около трех четвертей заряда электронов), то $F(\mu)$ мало сравнительно с $F(0) = 1$. В этой области амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\mu) \simeq f_R(\mu) = \frac{2MZe^2}{\hbar^2 \mu^2} = \frac{Ze^2}{2Mv^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)}, \quad F(\mu) \ll 1;$$

квадрат этой величины есть, согласно формуле Резерфорда, угловое распределение рассеяния заряженных частиц кулоновским полем ядра с зарядом Ze . В этом первом приближении, если только бомбардирующие частицы достаточно быстры (v велико) и проходят достаточно близко для того, чтобы быть рассеянными на значительный угол (ϑ достаточно велико), частицы практически не реагируют на распределение заряда электронов ρ , а рассеиваются преимущественно центральным ядром.

С другой стороны, если произведение μ на «радиус» атома мало сравнительно с единицей (для медленных бомбардирующих частиц или для скользящих столкновений), мы можем $\sin(\mu r)/\mu r$ под знаком интеграла для $F(\mu)$ разложить в ряд, что дает

$$F(\mu) \simeq 1 - \mu^2 \frac{2\pi}{3Ze^2} \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr, \quad \mu \rightarrow 0,$$

и предельные значения функции $f(\mu)$ и эффективного сечения рассеяния (Q (приблизительно равного $4\pi |f|^2$ при малом μ) принимают вид

$$f(\mu) \simeq \frac{1}{3} Z \frac{r_a^2}{a_0}, \quad Q \simeq \frac{4\pi}{9} \frac{Z^2 r_a^2}{a_0^2},$$

где

$$r_a^2 = \frac{4\pi}{Ze^2} \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr$$

есть средний квадрат расстояния электронов от ядра и где $a_0 = \hbar^2/Me^2 = 0,532 \cdot 10^{-8}$ см есть «радиус первой боровской орбиты» для атома водорода. Предельное эффективное сечение для очень медленных бомбардирующих частиц таким образом пропорционально квадрату заряда ядра и четвертой степени «среднего квадратичного радиуса атома» r_a , если приближение Борна пригодно в этом предельном случае. Заметим, что в этом приближении рассеяние будет одним и тем же как для полей отталкивания, так и для равных по величине, но противоположных по знаку полей притяжения.

Величина $1 - F(\mu) = f(\mu)/f_R(\mu)$ является, следовательно, отношением истинной амплитуды рассеяния к резерфордовской амплитуде при одном и том же угле рассеяния и одном и том же заряде ядра. Если применимо приближение Борна, то $1 - F$ является функцией только от

¹⁾ Функцию $ZF(\mu)$ называют обычно атомным фактором рассеяния. —Прим. ред.

$\mu = (2Mv/\hbar) \sin \vartheta/2$ и от распределения электронного заряда по радиусу. Эта величина возрастает как μ^2 при малых μ и довольно гладко возрастает, стремясь к асимптотическому значению — единице, когда μ очень велико. Эта функция может быть найдена экспериментально с помощью измерения рассеяния на данном атоме электронов (или протонов) с высокими скоростями. И так как F является преобразованием Фурье плотности заряда электронов, то мы можем получить ρ и V , пользуясь известной из эксперимента $F(\mu)$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{Ze^2}{2\pi^2 r} \int_0^\infty F(\mu) \sin(\mu r) \mu d\mu, & F(\mu) &= 1 - \frac{f(\mu)}{f_R(\mu)}, \\ V(r) &= -\frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2}{\pi M r} \int_0^\infty \sin(\mu r) [f(\mu) - f_R(\mu)] \mu d\mu, \end{aligned} \quad (12.3.61)$$

где $f(\mu)$ — амплитуда рассеянной волны, определенная в равенстве (12.3.59), а $f_R(\mu) = 2MZe^2/\hbar^2 \mu^2$ — амплитуда резерфордского рассеяния. Следовательно, зная амплитуду рассеяния f при всех значениях μ и зная Z , мы можем подсчитать и ρ и V (с точностью, присущей приближению Борна).

Приближение Борна для фазовых углов. В некоторых случаях потенциальная функция слишком велика для того, чтобы ее можно было рассматривать с помощью приближения Борна первого порядка, тем не менее только фазовый угол η_0 , соответствующий значению $l=0$, является большим членом в точном решении уравнения (12.3.56). Это часто имеет место в задачах ядерного рассеяния, когда потенциальная яма достаточно узка и глубока. В этом случае мы решаем радиальное уравнение (12.3.33) для каждого l настолько точно, насколько это возможно. Например, при $l=0$ мы могли бы начать с невозмущенной формы, соответствующей одному из потенциалов, для которых мы имеем точные решения и которые были рассмотрены на стр. 620 и следующих, тогда как при других значениях l можно использовать сферические функции Бесселя. Если $V(r)$ мало отличается от $V_0(r)$, для которого при $l=0$ можно найти точное выражение радиальной функции из уравнения

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2M}{\hbar^2} V_0(r) \right] R = 0,$$

то можно положить $V(r) = V_0(r) + V_1(r)$. Обозначим через $y_{01}(r)$ то решение этого уравнения, которое стремится к нулю при $r \rightarrow 0$ и имеет асимптотическую форму

$$y_{01}(r) \simeq \sin(kr - \Phi_0), \quad r \rightarrow \infty;$$

через $y_{02}(r)$ обозначим второе решение, независимое от первого, имеющее асимптотическую форму

$$y_{02}(r) \simeq -\cos(kr - \Phi_0), \quad r \rightarrow \infty,$$

и обычно расходящееся при $r=0$. Заметим, что определитель Вронского этих решений равен k .

Уравнение, которое мы желаем решить при $l=0$, имеет, таким образом, вид

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2M}{\hbar^2} V_0(r) \right] R_0 = \frac{2M}{\hbar^2} V_1(r) R_0.$$

Если это уравнение истолковать как неоднородное, то формула

(5.2.19) показывает, что интегральное уравнение для R_0 имеет вид

$$R_0(r) = a_0 y_{01}(r) - \int_0^r K_0(r|r_0) R_0(r_0) dr_0,$$

где

$$K_0(r|r_0) = \frac{2M}{k\hbar^2} [y_{01}(r) V_1(r_0) y_{02}(r_0) - y_{02}(r) V_1(r_0) y_{01}(r_0)].$$

Решаем это уравнение методом последовательных итераций, принимая за «нулевое» приближение $a_0 Y_{00} = a_0 y_{01}$; тогда следующее приближение имеет вид $a_0 Y_{01} = -a_0 \int K_0 Y_{00} dr_0$ и, вообще,

$$R_0(r) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m Y_{0m}(r), \quad Y_{00}(r) = y_{01}(r),$$

$$Y_{0m}(r) = \int_0^r K_0(r|r_0) Y_{0,m-1}(r_0) dr_0,$$

или

$$R_0(r) = a_0 \frac{2M}{k\hbar^2} \left[y_{01}(r) \sum_{m=0}^{\infty} F_{m1}(r) - y_{02}(r) \sum_{n=1}^{\infty} F_{n2}(r) \right],$$

$$F_{01} = \frac{k\hbar^2}{2M}, \quad F_{m1}(r) = (-1)^m \int_0^r V_1(r_0) y_{02}(r_0) Y_{0,m-1}(r_0) dr_0,$$

$$F_{n2}(r) = (-1)^n \int_0^r V_1(r_0) y_{01}(r_0) Y_{0,n-1}(r_0) dr_0.$$

Когда $r \rightarrow \infty$, $V_1(r_0)$ достаточно быстро стремится к нулю, так что все функции F стремятся асимптотически к постоянным величинам (в противном случае последовательные приближения вообще расходятся) и при $r \rightarrow \infty$

$$R_0(r) \simeq b_0 \sin(kr - \eta_0),$$

где

$$b_0 = a_0 \frac{2M}{k\hbar^2} \left\{ \left[\sum F_{m1}(\infty) \right]^2 + \left[\sum F_{n2}(\infty) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

и

$$\eta_0 = \Phi_0 - \arctg \frac{\sum F_{n2}(\infty)}{\sum F_{m1}(\infty)}.$$

Угол¹⁾ η_0 — фазовый угол, который должен быть подставлен в первый член правой части (12.3.56). Если V_1 достаточно мало по сравнению с V_0 , необходимо вычислить только $F_{12}(\infty)$; членами высшего порядка можно пренебречь; в этом случае уравнения для R_0 и η_0 принимают вид

$$R_0(r) \simeq a_0 \sin(kr - \eta_0), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$\eta_0 \simeq \Phi_0 + \arctg \left\{ \frac{2M}{k\hbar^2} \int_0^{\infty} V_1(r_0) [y_{01}(r_0)]^2 dr_0 \right\}, \quad (12.3.62)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 632.

что может быть подсчитано, если только известны Φ_0 и первое решение $y_{01}(r)$.

Члены равенства (12.3.56), соответствующие значениям $l > 0$, также могут быть вычислены аналогичным способом. Однако во многих случаях высшие фазовые углы могут быть подсчитаны с достаточной точностью, если считать возмущением всё V . Другими словами, мы полагаем $V_0 = 0$; тогда два решения радиального уравнения при $l > 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} y_{l1}(r) &= kr j_l(kr) \simeq \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right), \\ y_{l2}(r) &= kr n_l(kr) \simeq -\cos\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right). \end{aligned}$$

В этом случае способом, аналогичным тому, который привел нас к уравнениям (12.3.62), и ограничиваясь при решении интегрального уравнения для R_l последовательными приближениями первого порядка, получим

$$\begin{aligned} R_l(r) &\simeq a_l \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi - \eta_l\right) \quad r \rightarrow \infty, \\ \eta_l &\simeq \arctg \left\{ \frac{2Mk}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r_0) [j_l(kr_0)]^2 r_0^2 dr_0 \right\}. \end{aligned} \quad (12.3.63)$$

Если величина потенциальной энергии $V(r)$ при $r > r_0$ значительно меньше чем $\hbar^2 k^2 / 2M$, то для всех значений l , больших чем kr_0 , сферические функции Бесселя в интеграле для η_l могут быть заменены первыми членами их разложений в ряды:

$$j_l(kr_0) \simeq \frac{(kr_0)^l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)}.$$

Это можно сделать во всей части промежутка интегрирования, где $V(r_0)$ велико. В этом случае имеет место даже более простая формула

$$\eta_l \simeq \frac{(2M/\hbar^2) k^{2l+1}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)]^2} \int_0^{r_0} V(r_0) r_0^{2l+2} dr_0.$$

Для обычно встречающихся форм V это выражение численно очень быстро убывает при возрастании l .

Можно показать, что приближение Борна (12.3.59) и амплитуда рассеяния, полученная из формулы (12.3.63) для η_l , тождественны. Для этой цели нам потребуется разложение функции $(\sin \mu r)/\mu r$ по полиномам Лежандра от угла ϑ между $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$; это разложение можно получить, взяв мнимую часть разложения функции $e^{i\mu r}/\mu r$ (см. таблицу в конце гл. 11):

$$\frac{\sin \mu r}{\mu r} = \sum_l (2l+1) P_l(\cos \vartheta) j_l^2(kr).$$

Подставляя это в равенство (12.3.59), получаем

$$\psi_s = -\frac{2M}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \vartheta) \int_0^\infty j_l^2(kr_0) V(r_0) r_0^2 dr_0.$$

Сравним это с (12.3.55), где положим $\eta_l \ll 1$, т. е. с выражением

$$\psi_s = -\frac{e^{ikr}}{kr} \sum_l (2l+1) \eta_l P_l(\cos \vartheta).$$

При подстановке в это равенство вместо η_l его выражения из (12.3.63), полученного в предположении, что $\eta_l \ll 1$, мы найдем выражение, в точности равное результату, полученному из разложения приближения Борна по функциям Лежандра, приведенному выше.

В качестве примера рассмотрим рассеивающий потенциал

$$V(r) = -Be^{-r/d}.$$

Здесь применение приближения Борна (12.3.63) требуется только при $l > 0$, так как для $l=0$ на стр. 636 было получено точное решение:

$$\eta_0 = 2kd \ln(bd) - \Omega - \Phi, \quad b^2 = \frac{2MB}{\hbar^2},$$

$$\eta_l \simeq \begin{cases} 2kd \left\{ \ln(bd) + 0,5772 + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} [\delta_0(2bd)] \right\}, & kd \ll 1, \\ -0,2319kd, & kd \ll 1, \quad bd \ll 1. \end{cases}$$

Для того чтобы получить приближенные формулы для фазовых углов (см. стр. 533) при значениях $l > 0$, мы применяем равенства (12.3.63):

$$\begin{aligned} \eta_l &\simeq -b^2 k \int_0^\infty e^{-r/d} [J_l(kr)]^2 r^2 dr = \frac{b^2}{2k} \frac{d}{d(1/d)} Q_l \left(\frac{1+2k^2 d^2}{2k^2 d^2} \right) = \\ &= \frac{-(ld^3 b^2)}{k(1+4k^2 b^2)} \left\{ Q_{l-1} \left(1 + \frac{1}{2k^2 d^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2k^2 d^2} \right) Q_l \left(1 + \frac{1}{2k^2 d^2} \right) \right\} \simeq \\ &\simeq -b^2 d^3 (kd)^{2l+1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2l+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)}, \quad kd \ll 1. \end{aligned}$$

Последняя формула обеспечивает достаточную сходимость рядов в равенствах (12.3.55) для интенсивности рассеяния и эффективного сечения, если только $kd < 1/2$. Если kd много больше единицы, рассеяние может быть подсчитано с помощью формул приближения Борна (12.3.59). При промежуточных значениях kd точное выражение для η_0 и формулы, выражающие η_l через функции Лежандра второго рода, приводят к весьма точным рядам для S и Q . Так как применение равенства (12.3.63) ко всем η_l равносильно приближению Борна (12.3.59), эффективное сечение может быть записано в виде $Q_B + (4\pi/k^2)(\sin^2 \eta_0 - \sin^2 \eta_0^B)$, где Q_B — приближение Борна для эффективного сечения, а η_0^B дается равенством (12.3.63) при $l=0$.

Вариационный метод. Метод вариации параметров, рассмотренный в гл. 9, может быть использован для подсчета с произвольной точностью волновых функций и энергий для связанных состояний или рассеяния свободных частиц, если мы выберем пробную функцию с достаточным количеством параметров. В качестве примера применения этого метода мы выполним вариационные расчеты для центральной силы притяжения вида $V(r) = -Be^{-r/d}$, для которой мы уже произвели некоторые вычисления.

Для связанных состояний мы обычно ищем минимум энергии. Предположим, что нормированная волновая функция $\varphi(\alpha, \beta, \dots, r)$ обладает нужными общими свойствами (нормирована, конечна, симметрична относительно начала для наинизшего состояния и т. д.), и в пределах, допускаемых общими требованиями, подробности ее формы определены параметрами $\alpha, \beta, \dots$. Подсчитаем интеграл

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta, \dots) &= \iiint \left[(\operatorname{grad} \varphi)^2 + \frac{2M}{\hbar^2} V \varphi^2 \right] dv = \\ &= \iiint \left[-\varphi \nabla^2 \varphi + \frac{2M}{\hbar^2} V \varphi^2 \right] dv, \quad (12.3.64) \end{aligned}$$

являющийся функцией параметров $\alpha, \beta, \dots$. Минимальное значение J дает тогда наилучшее возможное при выбранной форме φ значение произведения $2M/\hbar^2$ на допустимую энергию связанного состояния ($2ME/\hbar^2 = \varepsilon$). Это наилучшее значение всегда больше точного значения. Так как форма функции φ становится более гибкой при прибавлении новых вариационных параметров, то приближенное значение энергии, полученное вариационным методом, приближается к точному, рассмотренному выше. Таким образом, значения параметров, для которых J достигает минимума, делают φ настолько близкой к точному решению ψ уравнения Шредингера

$$\nabla^2 \psi + \left[\varepsilon - \frac{2M}{\hbar^2} V \right] \psi = 0,$$

насколько это возможно в пределах выбранной формы функции φ .

Ряд соображений оказывает влияние на выбор формы φ . Довольно важным фактором является симметрия; если V — поле центральной силы, φ для наинизшего состояния должна быть симметрична относительно начала, функции φ для более высоких состояний должны быть к ней ортогональны и т. д. Эта функция должна также иметь асимптотическое поведение, очень близкое к поведению ψ ; если V при $r > r_v$ настолько мало по сравнению с $|E| = |\hbar^2 \varepsilon / 2M|$, что им можно пренебречь, то $\psi \simeq A \exp(-\sqrt{-\varepsilon} r)$ при $r > r_v$. Наконец (и это не наименее важно), φ должна быть выбрана по форме такой, чтобы необходимые вычисления не вызывали слишком больших трудностей.

Простейшей формой волновой функции основного состояния является простая экспонента

$$\varphi(\alpha, r) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha r}, \quad \int \int \int \varphi^2 dv = 1.$$

В этом случае мы жертвуем нужным нам асимптотическим поведением ради простоты формы. Если $V = -Be^{-r/d}$, то интеграл, минимум которого мы ищем, имеет вид

$$J(\alpha) = \alpha^2 - \frac{b^2 \alpha^3}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \delta\right)^3}, \quad b^2 = \frac{2MB}{\hbar^2}, \quad \delta = \frac{1}{d}.$$

Решение уравнения $dJ/d\alpha = 0$ приводится тогда к разысканию действительных положительных корней уравнения четвертой степени

$$\left(\alpha + \frac{1}{2} \delta\right)^4 = \frac{3}{4} b^2 \delta \alpha,$$

которое может быть решено графически, алгебраически или приближенными методами. Например, если $b \gg \delta$ (глубокая и широкая потенциальная яма), то

$$\alpha \simeq \left(\frac{3}{4} b^2 \delta\right)^{1/3} - \frac{2}{3} \delta, \quad J \simeq -b^2 + 3 \left(\frac{3}{4} b^2 \delta\right)^{2/3},$$

или

$$E \simeq -B + 3,931 \left(\frac{\hbar^2 B}{8d^2 M}\right)^{1/3},$$

что можно сравнить с приближением к точному решению, данному равенством (12.3.44). Энергия, подсчитанная вариационным методом при использовании этой пробной функции, дает слишком высокое значение энергии наинизшего состояния, превышающее примерно на 5% расстояние уровня от дна ямы $-B$.

Другая форма функции φ , несколько более гибкая, имеет вид

$$\varphi(\alpha, \beta; r) = \sqrt{\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2\pi(\beta-\alpha)^2}} \frac{1}{r} [e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}],$$

где, не нарушая общности, можно предположить, что $\beta > \alpha$. Соответствующий интеграл

$$J(\alpha, \beta) = \alpha\beta - \frac{4b^2\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(2\alpha+\delta)(\alpha+\beta+\delta)(2\beta+\delta)}$$

должен достигать минимума, конечно, относительно обеих величин α и β ; приравняв нулю частные производные J по α и по β и решив полученную систему уравнений относительно α и β , мы найдем допустимую энергию, подставив найденные значения снова в J . Это требует решения системы уравнений

$$(2\alpha+\delta)^2(\alpha+\beta+\delta)^2(2\beta+\delta)^2 = 4b^2\delta(2\alpha+\delta)[3\beta^2+2\beta(\alpha+\delta)+\alpha(\alpha+\delta)] = \\ = 4b^2\delta(2\beta+\delta)[3\alpha^2+2\alpha(\beta+\delta)+\beta(\beta+\delta)];$$

выписанная система может быть решена численно; более трудно алгебраическое решение.

Другая возможность заключается в варьировании только параметра β , используя параметр α для обеспечения надлежащего асимптотического поведения. Другими словами, мы требуем, чтобы α было равно $\sqrt{-\varepsilon}$ или в первом приближении корню квадратному из взятого со знаком минус минимального значения интеграла J . Таким образом, мы для определения α и β снова получаем два совместных уравнения. Первое получается из требования, чтобы J достигал минимума относительно β ($\partial J/\partial\beta = 0$)

$$(2\alpha+\delta)(\alpha+\beta+\delta)^2(2\beta+\delta)^2 = 4b^2\delta[3\beta^2+2\beta(\alpha+\delta)+\alpha(\alpha+\delta)],$$

второе — из требования, чтобы J был равен $-\alpha^2$ при условии, что удовлетворяется первое уравнение,

$$(2\alpha+\delta)(\alpha+\beta+\delta)(2\beta+\delta) = 4b^2\beta.$$

Эту систему совместных уравнений иногда проще решить, чем первую; она дает результаты, близкие к точным. Кроме того, закончив вычисление α и β , мы будем иметь лучшее значение для J , в точности равное $-\alpha^2$.

Решение имеет вид $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\delta(\alpha+\delta)}$. Соответствующее соотношение между энергией связи и глубиной, если вспомнить, что $\delta = 1/d$, имеет вид

$$(2bd)^2 = (2xd+1)[1+\sqrt{2(1+ad)}]^2, \quad \alpha = \sqrt{-\varepsilon}.$$

Сравнивая это с точным соотношением $J_{2ad}(2bd) = 0$, находим, что полученное равенство дает превосходные результаты при $ad < 1$, так как ошибка при $ad = 4$ составляет 3%, а при $ad = 0$ — только 2/3%. Для больших значений ad предпочтительнее выражение (12.3.44).

Как можно улучшить этот результат? Можно, конечно, прибавить дополнительные члены вида $(1/r)[e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}]$, а также можно, например, воспользоваться выражением

$$\frac{1}{r}\{[e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}] + C[e^{-\alpha r} - e^{-\gamma r}]\},$$

где C и γ так же, как и β , являются варьируемыми параметрами. Однако эта процедура быстро становится очень громоздкой; прибавление нескольких членов такого рода требует решения вековых уравнений для различных групп значений нелинейных параметров β , γ и других, входящих в дополнительные члены. Другой способ, вариационно-итерационный метод, излагаемый ниже, более экономичен и имеет дополнительное преимущество, состоящее в том, что, кроме верхних границ, даваемых обычно вариационным методом, он дает также и нижнюю границу для $(bd)^2$.

Вариационно-итерационный метод. Мы вернемся к методу, описанному в гл. 9, стр. 133, приспособив обозначения к уравнению Шредингера для связанного состояния в поле центрального потенциала притяжения. Пусть при $l=0$, $\psi = R/r$, где R удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + [-\kappa^2 + b^2 u(r)] R = 0, \quad \kappa^2 = -\varepsilon.$$

Первым шагом является превращение этого уравнения в интегральное уравнение с помощью функции Грина:

$$\frac{d^2}{dr^2} G_\kappa(r|r') - \kappa^2 G_\kappa(r|r') = -\delta(r-r'),$$

$$G_\kappa = \frac{1}{\kappa} \begin{cases} \text{sh}(\kappa r) e^{-\kappa r'}, & r < r', \\ \text{sh}(\kappa r') e^{-\kappa r}, & r > r'. \end{cases}$$

Интегральное уравнение, которому удовлетворяет R , имеет вид

$$R(r) = b^2 \int_0^\infty G_\kappa(r|r') u(r') R(r') dr'.$$

Мы можем рассматривать это уравнение как задачу о собственных значениях с собственным значением, равным b^2 . Нужно напомнить, что b^2 есть глубина потенциальной ямы, тогда как κ^2 пропорционально энергии. Таким образом, определение b^2 , которым мы теперь и займемся, соответствует нахождению интенсивности потенциала при данной форме его u , которая определит уровень с заданной энергией. Эта схема вполне соответствует положению в ядерной физике, когда энергия известна из эксперимента и желательно найти соответствующую потенциальную энергию. Конечно, если вычисление, определяющее b^2 , может быть выполнено аналитически, то получаем соотношение между b^2 и κ^2 , из которого можно выразить κ^2 через b^2 .

Мы теперь можем изложить итерационную часть метода. Пусть R_0 — начальное, предположительное значение R , которое может быть получено разными способами (например, вариационным методом, отправляясь от простой пробной функции). Тогда первая итерация R_1 дается равенством

$$R_1(r) = \int_0^\infty G_\kappa(r|r') u(r') R_0(r') dr'$$

и вообще

$$R_n(r) = \int_0^\infty G_\kappa(r|r') u(r') R_{n-1}(r') dr'.$$

Заметим, что собственное значение b^2 не должно входить в эти рекуррентные соотношения, так как здесь играет роль только форма волновых функций, а не их нормировка. Эти волновые функции R_n должны быть теперь подставлены в вариационные выражения (12.3.65), а также в выражение, которое может быть получено прямо из интегрального уравнения, определяющего R [см. уравнение (9.4.42)]. Здесь выражение J , подлежащее варьированию, имеет вид

$$J = \frac{\int_0^\infty [u(r) R^2(r)] dr}{\int_0^\infty dr \int_0^\infty [R(r) u(r) G_\kappa(r|r') u(r') R(r')] dr'} \quad (12.3.65)$$

Приближения для собственного значения b^2 будем обозначать через $(b^2)^{(n)}$, где n может быть либо целым, либо полуцелым числом; $(b^2)^{(0)}$ получается с помощью подстановки R_0/r в выражение вариационного принципа (12.3.64)¹⁾. Дальнейшие приближения даются равенствами:

$$\begin{aligned}(b^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)} &= \frac{(0, 0)}{(0, 1)}, \\(b^2)^{(1)} &= \frac{(0, 1)}{(1, 1)}, \\&\dots \dots \dots \\(b^2)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{(n, n)}{(n, n+1)}, \\(b^2)^{(n+1)} &= \frac{(n, n+1)}{(n+1, n+1)},\end{aligned}$$

где элемент (p, q) определяется следующим образом:

$$(p, q) = \int_0^\infty R_p u R_q dr.$$

Можно показать (см. гл. 9, стр. 134), что

$$(b^2)^{(0)} \geq (b^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \geq (b^2)^{(1)} \geq \dots \geq (b^2)^{(n)} \geq (b^2)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \geq b^2,$$

так что последовательные приближения для b^2 образуют монотонную последовательность, приближающуюся к b^2 сверху.

Из рассуждений гл. 9, стр. 139 мы можем получить также нижнюю границу для b^2 :

$$b^2 \geq (b^2)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left[1 - \frac{(b^2)^{(n)} - (b^2)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{b_1^2 - (b^2)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}} \right].$$

Здесь b_1^2 — второе собственное значение интегрального уравнения для R . Это соответствует глубине потенциала, для которой $-x^2$ является не наименьшим, а вторым собственным значением. Нет необходимости точно знать b_1^2 ; подстановка в предыдущее неравенство вместо b_1^2 его нижней грани не нарушает неравенства.

Такая нижняя грань может быть получена из разложения [см. (9.4.113)]:

$$S = \int_0^\infty dr \int_0^\infty [u(r) G_x(r|r') G_x(r'|r) u(r)] dr' = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{b_n^4},$$

где b_0^2 — первое собственное значение, рассмотренное выше, b_1^2 — следующее

и т. д. Мы видим, что $\frac{1}{b_1^4} = S - \frac{1}{b_0^4} - \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{b_n^4}$, или $\frac{1}{b_1^4} < S - \frac{1}{b_0^4}$,

или

$$\frac{1}{b_1^4} < \left\{ S - \left[\frac{1}{(b^2)^{(n+1/2)}} \right]^2 \right\},$$

¹⁾ Выражение для $(b^2)^{(0)}$ имеет вид $(b^2)^{(0)} = \left\{ x^2 \int_0^\infty R_0^2 dr + \int_0^\infty \left(\frac{dR_0}{dr} \right)^2 dr \right\} / (0,0)$.

так как $(b^2)^{(n+\frac{1}{2})} > b_0^2$. Таким образом, мы имеем нижнюю грань для b_1^2 , которая может быть получена с помощью непосредственного интегрирования выражения для S и применения приближенного значения b^2 для наименьшего собственного значения. Подставляя выражение для G_x , данное выше, в равенство, определяющее S , получим

$$S = \frac{2}{\kappa^2} \int_0^\infty u(r) \operatorname{sh}(\kappa r) dr \int_r^\infty u(r') e^{-2\kappa r'} dr',$$

что может быть без труда вычислено для любой данной формы потенциала $u(r)$.

Как пример мы снова рассмотрим экспоненциальный потенциал $u = e^{-\delta r}$, воспользовавшись пробной функцией $\varphi(\alpha, \beta; r)$, определенной на стр. 645, и полагая, как и раньше, $\alpha^2 = -\varepsilon = \kappa^2$. Следовательно, эта функция при $\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \delta(\alpha + \delta)}$ и есть начальная функция R_0 ; для получения итераций мы применяем G_x , где x заменено через α . Таким образом,

$$R_1 = \frac{2}{\delta(\delta + 2\alpha)} [e^{-\alpha r} - e^{-(\alpha + \delta)r}] - \frac{2}{(\delta + \beta)^2 - \alpha^2} [e^{-\alpha r} - e^{-(\beta + \delta)r}].$$

Отсюда можно определить $(b^2)^{(\frac{1}{2})}$:

$$(b^2)^{(\frac{1}{2})} d^2 = \frac{4[(\alpha + \beta)d + 2][(\alpha + \beta)d + 1][3d + 1][\alpha d + 1][2\alpha d + 1]}{(2\beta d + 1)[10\alpha^2 d^2 + 14\alpha d + 5 + (7\alpha d + 5)(\beta - \alpha)d + (\beta - \alpha)^2 d^2]},$$

тогда как

$$S = \frac{d^4}{2(1 + \alpha d)(1 + 2\alpha d)^2}.$$

Можно также определить $(b^2)^{(1)}$. При $\alpha d = 0$, $(b^2)^{(0)} d^2 = 1,4571$, $(b^2)^{(\frac{1}{2})} d^2 = 1,4466$. Точное значение равно четверти квадрата первого корня функции Бесселя, т. е. равно 1,4458. Мы видим, что в результате итерации ошибка уменьшилась с 2/3% до 1/20%. Значение $(b^2)^{(1)}$ (которое может быть вычислено, так как R_1 найдено) будет еще ближе к точному результату. Значение $(b^2)^{(\frac{1}{2})}$, приведенное выше, является верхней гранью для b^2 . Чтобы получить нижнюю грань, мы сначала заметим, что $b_1^2 d^2 > 6,78$, так что

$$b^2 d^2 > 1,4466 \left[1 - \frac{0,0105}{5,33} \right].$$

Следовательно, $1,4466 > b^2 d^2 > 1,4437$; точное значение равно 1,4458. Мы видим, что точное значение $(bd)^2$ определено с ошибкой, меньшей 0,3%. Как правило, нижняя грань не так близка к истинному значению $(bd)^2$, как верхняя.

Нет необходимости в том, чтобы отпавляться от такой хорошей пробной начальной функции, как данная выше. Конечно, придется сделать больше итераций, чтобы достигнуть точности, полученной выше после одной итерации. Однако во многих случаях, в частности когда требуется численный результат, бывает выгоднее не производить сложные вариационные операции, а применить несколько раз процесс итерации.

Высшие связанные состояния (если они существуют) могут быть рассчитаны с помощью пробных функций, ортогональных к функции φ , полученной для наименьшего состояния. Например, приближенное наименьшее состояние с моментом количества движения, равным $\hbar$, может быть получено при помощи

$$\varphi(\gamma; r) = N \cos \vartheta r e^{-\gamma r}$$

или

$$\varphi(\alpha, \gamma; r) = N' \cos \vartheta (e^{-\alpha r} - e^{-\gamma r}),$$

где N и N' — нормирующие множители, такие, что $\int \int \varphi^2 dv = 1$.

Вариационные принципы для задач рассеяния. Рассеяние частиц силовым полем может быть также изучено вариационным методом. Здесь мы находим стационарные значения $k \operatorname{ctg} \eta_l$ с фазовыми углами η_l (см. стр. 631) вместо того, чтобы разыскивать минимум энергии. Для различных форм вариационного принципа, рассмотренных ниже, характерно, что вид волновой функции важен только в той области, где силовое поле отлично от нуля.

Мы ограничимся рассмотрением медленных бомбардирующих частиц, когда только те функции, для которых $l=0$, сильно отличаются от соответствующих функций Бесселя, так что для расчета рассеяния требуется только фазовый угол η_0 при $l=0$. Радиальное уравнение, которое требуется решить, имеет вид ($\psi = R/r$)

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + [k^2 - U(r)]R = 0, \quad k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}, \quad U(r) = \frac{2MV(r)}{\hbar^2}.$$

Мы знаем, что при больших значениях r $R \simeq S \equiv C \sin(kr - \eta_0)/\sin \eta_0$ (C — произвольная постоянная), так что S удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + k^2 S = 0.$$

Вариационные принципы выражаются через R и S или через $S - R = \omega$. Функция ω заметно отличается от нуля только в области, где $U \neq 0$, как видно из уравнения, которому она удовлетворяет,

$$\frac{d^2 \omega}{dr^2} + [k^2 - U] \omega + U S = 0.$$

Следуя результатам гл. 9, мы можем получить два вариационных принципа, совершенно аналогичных тому, который записан с помощью выражения (12.3.65). В первом требуется найти стационарное значение выражения

$$[K] = \int_0^\infty \left[\left(\frac{dS}{dr} \right)^2 - \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 - U(r) R^2 + k^2 (S^2 - R^2) \right] dr. \quad (12.3.66)$$

Если S нормировано так, что $S(0) = 1$ (т. е. $C = -1$), то $K = [k \operatorname{ctg} \eta_0]$ (по поводу смысла скобок см. стр. 106).

Этот вариационный принцип может быть применен для установления зависимости $k \operatorname{ctg} \eta_0$ от k^2 . Пусть точное решение при $k^2 = k_0^2$ равно R_0 , а его соответствующее асимптотическое выражение равно S_0 . Они могут быть подставлены как варьируемые волновые функции в (12.3.66). Тогда

$$\left[\frac{d(k \operatorname{ctg} \eta_0)}{d(k^2)} \right]_{k=k_0} = \int_0^\infty (S_0^2 - R_0^2) dr,$$

что дает непосредственно производную выражения $k \operatorname{ctg} \eta_0$, рассматриваемого как функция от k^2 , т. е. от энергии, при $k^2 = k_0^2$.

Также ясно, что эта производная зависит только от поведения R_0 в области, где U велико (где R_0 не совпадает со своим асимптотическим значением S_0). Если в этой области $|U| \gg k^2$, т. е. величина потенциальной энергии много больше чем k^2 , изменение волновой функции при изменении k^2 будет малым, и можно ожидать, что приведенное выше

выражение для производной будет точным для некоторого промежутка значений k_0 . Или, другими словами, при малых значениях k^2 , т. е. для частиц малых энергий, функция $k \operatorname{ctg} \eta_0$ будет линейной функцией от k^2 . Эта линейная зависимость сохраняет силу до тех пор, пока $k^2 \ll |U|$, т. е. $E \ll |V|$.

Так как данная выше производная не зависит от асимптотических значений R_0 , которые компенсирует S_0 , мы можем подставить очень грубое приближение для R_0 и все же получить достаточно хорошие результаты. Например, в случае показательного потенциала, рассмотренного в предыдущем пункте, было найдено, что $R_0 = e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}$ и, следовательно¹⁾, $S_0 = e^{-\alpha r}$, $\beta d = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \alpha d)}$, было очень хорошей волновой функцией [еще лучшая дается выражением R_1 на стр. 649)]. Если $\hbar^2 \alpha^2 / 2M$ — энергия связи системы — много меньше чем V , то значение интеграла для $d(k \operatorname{ctg} \eta_0) / d(k^2)$ не слишком меняется при переходе от энергии $-\hbar^2 \alpha^2 / 2M$ к энергии $+E$, так что мы можем подставить эту волновую функцию вместо R_0 в интеграл, даже несмотря на то, что ее поведение при $r \rightarrow \infty$ далеко от правильного. Тогда

$$\frac{d(k \operatorname{ctg} \eta_0)}{d(k^2)} \simeq d \left[\frac{3\beta d - \alpha d}{2\beta d (\alpha d + \beta d)} \right].$$

Однако нам требуется знать больше, чем только значение производной, нам нужно знать значение самой функции при $k = k_0$. Для нахождения его мы можем подставить в (12.3.66) пробную функцию R с одним или несколькими параметрами и соответствующее S и варьировать параметры, чтобы определить лучшее возможное u и соответствующее $k \operatorname{ctg} \eta_0$. Однако вариационный принцип (12.3.66) не является наиболее удобным для этой цели, так как S явно зависит от неизвестного сдвига фаз η . Если мы требуем, чтобы η было выбрано как точный сдвиг фаз, и не хотим его истолковывать как параметр, подлежащий варьированию, то применяем второй вариационный принцип [см. уравнение (9.4.57)], в котором не участвует S . Выражение, подлежащее варьированию с целью получения стационарного значения, имеет вид

$$L = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

где

$$A = \int_0^\infty \frac{U \sin^2(kr)}{k^2} dr,$$

$$B = 1 + \int_0^\infty \frac{U \sin(2kr)}{k} dr - 2 \int_0^\infty \frac{U \sin(kr)}{k} \omega dr,$$

$$C = \int_0^\infty \left[\left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 - (k^2 - U)\omega^2 \right] dr - 2 \int_0^\infty U \omega \cos(kr) dr + \int_0^\infty U \cos^2(kr) dr,$$

где по-прежнему $\omega = S - R$. Если положить $\omega(0)$ равным 1, то L для точного выражения ω дает как раз $k \operatorname{ctg} \eta_0$. Мы снова подчеркнем тот факт, что ω , будучи разностью между R и его асимптотическим выражением S , будет отличаться от нуля только в области, где U не слишком мало по сравнению с k^2 .

Из этого вариационного принципа может быть получено приближение Борна (12.3.63), если взять $\omega = \cos(kr)$ в качестве пробной функции. Этот выбор соответствует предположению, что R пропорционально $\sin(kr)$, что

¹⁾ Предполагается, что $\beta > \alpha$ (см. стр. 645, 646). -- Прим. ред.

дает неискаженную падающую плоскую волну. Тогда $C=0$, $B=1$ и $L=1/A$ или

$$\operatorname{tg} \eta_0 \simeq \frac{1}{k} \int_0^{\infty} U \sin^2(kr) dr,$$

что при малом η_0 является приближением Борна.

Вторым употребительным видом приближенного выражения для R является тот, который мы применяли при вычислении производной. Снова мы говорим, что при $U \gg k^2$ изменение энергии от $+\hbar^2 k^2/2M$ до $-\hbar^2 d^2/2M$ сильно не отражается на изменении ω , так что мы можем в L положить $\omega = e^{-\beta r}$ и таким образом получить постоянное значение $[k \operatorname{ctg} \eta_0]$; производная как функция от k^2 была рассмотрена раньше. Так как мы имеем дело с малыми значениями k , мы положим $k=0$ и найдем $k \operatorname{ctg} \eta_0$ для этого значения. A , B и $B^2 - 4AC$ будут иметь значения:

$$A = -2b^2 d^3,$$

$$B = 1 - \frac{2(b^2 d^2)(\beta d)(2 + \beta d)}{(\beta d + 1)^2},$$

$$B^2 - 4AC = 1 + 4b^2 d^2 (\beta d) - \frac{8(b^4 d^4)(\beta^4 d^4)(2 + \beta d)}{(1 + \beta d)^4 (1 + 2\beta d)}.$$

Мы можем, если пожелаем, исключить $b^2 d^2$, воспользовавшись результатом, полученным на стр. 646 для $(2bd)^2$, который может быть представлен в виде

$$(2bd)^2 = (2\beta d - 1)(2\beta d + 1)^3,$$

так что окончательное выражение для $k \operatorname{ctg} \eta_0$ при $k=0$ зависит только от комбинации βd (и, следовательно, от ad), если пренебречь множителем пропорциональности для d .

Если значение энергии лежит между областями применимости приближения Борна и приближения, приведенного выше (которое может быть названо приближением сильного поля), то нужно практически проделать все вычисления, связанные с процессом варьирования. В случае медленных бомбардирующих частиц употребительной пробной функцией является $\omega = e^{-\gamma r}$, где γ — параметр варьирования.

Вариационно-итерационный метод для задач рассеяния. Как и в случае связанных состояний, мы можем для решения задач рассеяния составить интегральное уравнение. К интегральному уравнению может быть применен метод итераций; оно допускает также применение вариационного принципа для $k \operatorname{ctg} \eta_l$.

Мы снова ограничиваемся случаем $l=0$. Интегральное уравнение, записанное в форме, наиболее удобной для итераций, имеет вид

$$R = \int_0^{\infty} \Gamma_k(r|r_0) U(r_0) R(r_0) dr_0,$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_k(r|r_0) &= k \operatorname{ctg} \eta_0 \frac{\sin(kr) \sin(kr_0)}{k^2} - \frac{1}{k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin(kr) \cos(kr_0); \quad r < r_0, \\ \cos(kr) \sin(kr_0), \quad r > r_0, \end{array} \right\} = \\ &= k \operatorname{ctg} \eta_0 \frac{\sin(kr) \sin(kr_0)}{k^2} + G_k(r|r_0). \end{aligned}$$

Схема итераций дается рекуррентным соотношением между n -й и $(n+1)$ -й итерациями

$$R_{n+1} = \int_0^{\infty} \Gamma_k(r|r_0) U(r_0) R_n(r_0) dr_0.$$

Вычисление R_{n+1} требует подстановки приближенного значения $k \operatorname{ctg} \eta_0$, которое может быть получено с помощью вариационного принципа, указанного ниже; наилучшее возможное при данной форме R решение получается при стационарном значении J — выражения, подлежащего варьированию. Если мы в выражение J подставим точные волновые функции, оно сделается равным $k \operatorname{ctg} \eta_0$, так что мы имеем дело с вариационным принципом для $k \operatorname{ctg} \eta_0$. $[J]$ равно

$$[J] = \frac{\int_0^\infty R^2 U \, dr - \int_0^\infty \int_0^\infty R(r) U(r) G_k(r|r_0) U(r_0) R(r_0) \, dr \, dr_0}{\left[\frac{1}{k} \int_0^\infty U R \sin(kr) \, dr \right]^2}. \quad (12.3.67)$$

Итерационная схема комбинируется с вариационным принципом посредством подстановки R_n в выражение (12.3.67), что дает n -е приближение для $k \operatorname{ctg} \eta_0$, которое мы обозначим через $J^{(n)}$

$$J^{(n)} = J^{(n-1)} + \frac{\int_0^\infty R_n U [R_n - R_{n+1}] \, dr}{\left[\frac{1}{k} \int_0^\infty U R_n \sin(kr) \, dr \right]^2}.$$

Нужно отметить, что теория сходимости процесса итерации для задач этого типа не разработана так полно, как в случае процессов итерации для задачи связанного состояния, рассмотренной раньше. Удачные применения этой схемы, данной Швингером, можно найти в литературе, причем оказывается, что метод дает прекрасные результаты в случаях, когда $U \gg k^2$, т. е. при малых энергиях, единственных случаях, в которых метод широко применялся.

В заключение заметим, что введя в выражение (12.3.67) пробную функцию $R = \sin(kr)$, получим несколько улучшенное приближение Борна

$$k \operatorname{ctg} \eta_0 \simeq k \operatorname{ctg} \eta_0^{(B)} - \operatorname{ctg}^2 \eta_0^{(B)} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(kr) U(r) G_k(r|r_0) U(r_0) \sin(kr_0) \, dr \, dr_0$$

или

$$k \operatorname{ctg} \eta_0 \simeq k \operatorname{ctg} \eta_0^{(B)} + 2 \frac{\operatorname{ctg}^2 \eta_0^{(B)}}{k} \int_0^\infty U \sin^2(kr) \, dr \int_r^\infty U \sin(kr_0) \cos(kr_0) \, dr_0,$$

где $\eta_0^{(B)}$ — борновское приближение для фазового сдвига, данное в равенстве (12.3.63).

Вариационный принцип для амплитуды рассеяния. С помощью трехмерной функции Грина может быть получен вариационный принцип, аналогичный выведенному из (11.4.57), в применении к амплитуде рассеяния $f(\theta)$ дающий то же самое, что и выражение (12.3.67) дает для фазовых углов. Мы преобразуем уравнение Шредингера

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = U(r) \psi, \quad k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}, \quad U = \frac{2MV}{\hbar^2},$$

в интегральное уравнение для ψ

$$\psi(\mathbf{r}) = C e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ikR}}{R} U(r_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0,$$

где $\mathbf{k}_i$ — вектор длины k , проведенный в направлении падающего пучка частиц. Асимптотическое поведение ψ тогда имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq C e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + C f(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty,$$

$$f(\vartheta) = -\frac{1}{4\pi C} \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} U(r_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0,$$

где $f(\vartheta)$ — амплитуда рассеяния, $|f(\vartheta)|^2$ — дифференциальное эффективное сечение (см. стр. 65), его интеграл по всем направлениям есть полное эффективное сечение Q для упругого рассеяния, вызванного потенциальным полем $V(r)$. Мы умножили и разделили на C — амплитуду падающего пучка — для того, чтобы наши результаты отнести к единице интенсивности падающего пучка.

Вектор $\mathbf{k}_s$ имеет длину k и направлен к наблюдателю, образуя угол ϑ с вектором $\mathbf{k}_i$. Подставим теперь в интегральное уравнение вместо C его выражение через $f(\vartheta)$, что позволит сделать уравнение однородным:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}}{4\pi f(\vartheta)} \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} U(r_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ikR}}{R} U(r_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0.$$

Чтобы получить вариационный принцип для $f(\vartheta)$, мы поступаем так, как было указано в параграфах 9.4 и 11.4, т. е. умножаем на $\tilde{\psi}(\mathbf{r}) U(r)$, где $\tilde{\psi}$ — решение для падающей волны, распространяющейся в направлении $-\mathbf{k}_s$ и рассеиваемой в направлении $-\mathbf{k}_i$ (сопряженный случай, где источник и наблюдатель поменялись местами), и интегрируем по dv . Окончательное выражение для вариационного принципа имеет вид

$$[f(\vartheta)] = \frac{-\int e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} U(r) \tilde{\psi}(\mathbf{r}) dv \int e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0} U(r_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv_0}{4\pi \int \tilde{\psi}(\mathbf{r}) U(r) \psi(\mathbf{r}) dv + \iint \tilde{\psi}(\mathbf{r}) U(r) (e^{ikR}/R) U(r_0) \psi(\mathbf{r}_0) dv dv_0}. \quad (12.3.68)$$

Величина $[f]$ становится стационарной, если использованы точные выражения для ψ и $\tilde{\psi}$, и тогда $[f(\vartheta)]$ равно $f(\vartheta)$; значения параметров в выбранной нами форме функции ψ (и соответственно $\tilde{\psi}$), дающие минимум для J , соответствуют наилучшему выбору ψ и $\tilde{\psi}$ среди всех выражений выбранного типа, а соответствующее минимальное значение $[f]$ является наилучшим выражением для $f(\vartheta)$, возможным при использованных видах функций ψ и $\tilde{\psi}$. Найденный «наилучший вид» функции ψ может быть подставлен в правую часть интегрального уравнения для ψ с тем, чтобы с помощью последовательных итераций найти еще лучший вид, подстановка которого в (12.3.68) позволит улучшить выражение для f . Связь между этой процедурой и процедурой, рассмотренной в предыдущем пункте, очевидна; формулировка здесь в принципе проще, однако осуществление ее обычно более трудно, так как здесь мы имеем дело с трехмерными интегралами вместо одномерных.

Если выбранной для ψ формой является плоская волна (что дает неплохое приближение при больших значениях k), полученное выражение для $[f]$ тесно связано с приближением Борна для упругого рассеяния, данным в равенствах (12.3.58) и (12.3.59). Трехмерное преобразование Фурье потенциальной функции имеет вид

$$u(\mathbf{K}) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} U(r) dv,$$

а преобразование Фурье функции Грина $e^{ikR}/4\pi R$ имеет вид

$$g_k(\mathbf{K}|\mathbf{r}_0) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} dv = (2\pi)^{-3/2} \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_0}}{K^2 - k^2}$$

[см. (11.3.6)]. Если теперь мы подставим в (12.3.68) пробные функции $\phi \simeq e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}}$ и $\tilde{\phi} \simeq e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}}$ и воспользуемся теоремой о свертке (4.8.25) в двойном интеграле, то окончательно получим

$$f(\vartheta) \simeq - \sqrt{\frac{1}{2}\pi} \frac{[u(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)]^2}{u(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) + \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int \frac{u(\mathbf{k}_i - \mathbf{K}) u(\mathbf{K} - \mathbf{k}_s)}{K^2 - k^2} dv_K},$$

где интегрирование распространено на весь трехмерный объем « K -пространства».

Если пренебречь интегралом, получим приближение Борна

$$f_B(\vartheta) = - \sqrt{\frac{1}{2}\pi} u(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) = - \frac{1}{4\pi} \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)\cdot\mathbf{r}} U(r) dv.$$

Приближения Борна высших порядков (см. § 9.3) получаются, если разложить знаменатель в выражении (12.3.68) и воспользоваться итерациями для последовательного получения лучших приближений для ϕ . Однако легко видеть, что в случае, когда вышеприведенный интеграл по K -пространству не является малым сравнительно с $u(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)$, ряд Борна не будет очень хорошо сходиться и в этом случае будет целесообразнее использовать данную выше формулу, не разлагая знаменатель.

Чтобы видеть, как протекают вычисления, рассмотрим потенциал $U(r) = -\gamma e^{-\lambda r}/r$ или $V(r) = -\eta^2 e^{-\lambda r}/r$ ($\eta^2 = \hbar^2 \gamma / 2M$), мало отличающийся от кулоновского вблизи центра сил, но убывающий значительно быстрее кулоновского потенциала при больших значениях r . Если бы этот потенциал относился к электрону с зарядом $-e$, он соответствовал бы полю точечного заряда η^2/e , помещенного в точке $r=0$ и окруженного распределением зарядов с плотностью $-\eta^2 \lambda^2 e^{-\lambda r}/4\pi e r$ и с общим зарядом $-\eta^2/e$, которое полностью уничтожает влияние центрального заряда при больших значениях r (этот потенциал предложил Юкава в качестве возможного потенциала взаимодействия нуклонов). Преобразование Фурье этого потенциала имеет вид

$$u(\mathbf{K}) = \frac{-\gamma}{\sqrt{\frac{\pi}{2}(K^2 + \lambda^2)}},$$

так что приближение Борна дает выражение

$$f(\vartheta) \simeq f_B(\vartheta) = \frac{\gamma}{|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s|^2 + \lambda^2} = \frac{2M\eta^2}{\hbar^2 \left[\lambda^2 + 4k^2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right]},$$

которое следует сравнить с формулой Резерфорда на стр. 620 ($k = Mv/\hbar$, $\eta^2 = Ze^2$).

Интегральная свертка, соответствующая двойному интегралу в знаменателе (12.3.68), может быть вычислена методом, изложенным в § 9.3 [см. (9.3.55)]:

$$\frac{\gamma^2}{\sqrt{2\pi^5}} \int \frac{dv_K}{(K^2 - k^2) [|\mathbf{K} - \mathbf{k}_i|^2 + \lambda^2] [|\mathbf{K} - \mathbf{k}_s|^2 + \lambda^2]} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma^2 H(\vartheta),$$

$$\begin{aligned}
 H(\vartheta) = & \frac{1}{2k \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) \sqrt{\lambda^4 + 4k^2 \left[\lambda^2 + k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\right]}} \times \\
 & \times \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\lambda k \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)}{\sqrt{\lambda^4 + 4k^2 \left[\lambda^2 + k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\right]}} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} i \ln \frac{\sqrt{\lambda^4 + 4k^2 \left[\lambda^2 + k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\right]} + 2k^2 \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)}{\sqrt{\lambda^4 + 4k^2 \left[\lambda^2 + k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\right]} - 2k^2 \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Мнимая часть H получается вследствие того, что мы должны идти вокруг полюсов подинтегральной функции при $K = \pm k$ выше полюса в точке $-k$ и ниже полюса в точке $+k$, что соответствует требованию, чтобы преобразование Фурье функции $e^{ikR}/4\pi R$ изображало расходящуюся волну [см. анализ уравнения (7.2.31)]. Выражение для амплитуды рассеяния $f(\vartheta)$ в предположении, что пробные функции для ψ и $\tilde{\psi}$ в (12.3.68) соответствуют плоским волнам, имеет тогда вид

$$\begin{aligned}
 f(\vartheta) \simeq & \frac{\left\{ \gamma / \left[\lambda^2 + 4k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) \right] \right\}^2}{\left\{ \gamma / \left[\lambda^2 + 4k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) \right] \right\} - \gamma^2 H(\vartheta)} = \\
 & = f_B(\vartheta) \left\{ \frac{1}{1 - \gamma \left[\lambda^2 + 4k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) \right] H(\vartheta)} \right\},
 \end{aligned}$$

что отличается от приближения Борна f_B множителем, стоящим в скобках. Если γ мало, этот множитель вносит лишь малую поправку; если γ велико, изменение может быть заметным. Вообще измененная амплитуда рассеяния ближе подходит к точному решению, чем простое приближение Борна.

Предельные значения поправочного члена для малых значений переменных имеют вид

$$\left[\lambda^2 + 4k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) \right] H(\vartheta) \simeq \begin{cases} \frac{\lambda}{2k^2} + \frac{i}{k} \ln \left[\frac{2k}{\lambda} \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) \right], & \lambda \ll k, \\ \frac{1}{2(\lambda - 2ik)}, & \lambda \gg k \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right), \end{cases}$$

что приводит к нескольким интересным следствиям. Прежде всего отметим, что в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ приближение Борна $f_B \simeq \left[\lambda / 4k^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) \right]$ является точным, поскольку речь идет о модуле f [см., например, (12.3.43)]. В этом предельном случае поправочный множитель в фигурных скобках будет мнимым; в самом деле он связан со вторым членом разложения экспоненты с i в показателе, содержащейся в точном выражении для f , приведенном в равенстве (12.3.43). Здесь поправочный член H изменяет только фазу f настолько, насколько это вообще может сделать аддитивный поправочный член, но не модуль функции f .

Можно было бы попытаться рассчитать полное эффективное сечение, соответствующее f , с помощью равенства (12.3.56'). Это равенство справедливо для точного решения, но полностью непригодно для приближения Борна, так как f_B действительно. Тем не менее в настоящем случае можно проинтегрировать $|f_B|^2$ по всем углам рассеяния, чтобы полу-

чить «борновское поперечное сечение»

$$Q_B = 2\pi \int_0^\pi |f_B|^2 \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{4\pi\gamma^2}{\lambda^2(\lambda^2 + 4k^2)}.$$

Здесь, однако, мнимая часть H не равна нулю, так что в следующих приближениях применение (12.3.56') приводит к результату, отличному от нуля:

$$Q = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} [f(0)] \simeq \frac{4\pi}{k} f_B(0) \operatorname{Im} \frac{1}{1 - \gamma^2 H_{\lambda}(0)} = \frac{4\pi\gamma^2}{\lambda^2 \left[\left(\lambda - \frac{\gamma}{2} \right)^2 + 4k^2 \right]},$$

который достаточно близок к борновскому поперечному сечению, особенно, если γ меньше чем λ . Таким образом, действительно, выражение второго порядка для $f(\vartheta)$ может быть использовано для получения выражения первого порядка для Q , что согласуется с рассуждением на стр. 73. Выражение второго порядка для Q может быть получено с помощью интегрирования по всем углам выражения $f(\vartheta)$ предыдущей страницы, содержащего поправку с H (однако это интегрирование нелегко выполнить).

Возвращаясь к первоначальному интегральному уравнению для ψ , мы можем теперь с помощью итераций получить уточненное выражение ψ :

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \int \frac{e^{i\mathbf{k}R - \lambda r_0}}{4\pi R r_0} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_0} dv_0 = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int \frac{e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} dv_K}{(K^2 - k^2) [|\mathbf{K} - \mathbf{k}_i|^2 + \lambda^2]}.$$

Каждое из этих выражений может быть вычислено с помощью разложения по сферическим гармоникам.

Две частицы, одномерный случай. Задача о взаимодействии двух одинаковых частиц с фиксированным потенциальным полем, а также между самими частицами в основном эквивалентна классической задаче трех тел. Фиксированное потенциальное поле, действующее одинаково на обе частицы, можно рассматривать как поле третьего тела, настолько тяжелого, что центр тяжести системы совпадает с его положением (в начале координат). Классическая задача трех тел не разрешима по существу, частично из-за возможных столкновений частиц. Задача квантовой механики также по существу не разрешима и в значительной степени по тем же причинам.

Чтобы видеть возникающие здесь трудности и желая избежать излишних математических осложнений, мы рассмотрим чрезвычайно простой случай двух одномерных частиц, находящихся под действием очень простого потенциального поля. Смещение частицы 1 относительно центра силового поля обозначим через x , а смещение частицы 2 — через y . В начале предположим, что потенциальное поле, действующее на каждую частицу, представляет собой очень глубокую и очень узкую потенциальную яму в начале координат — дельта-функцию, подобную рассмотренной на стр. 595. В этом случае поле действует на каждую частицу, так что уравнение для общей волновой функции двух частиц для стационарного состояния с энергией $\hbar^2 \varepsilon / 2M$, если пренебречь полем, действующим между частицами, имеет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon + 2a\delta(x) + 2a\delta(y) \right] \psi = 0.$$

Постоянная M есть масса каждой частицы, а постоянная $a = MV_0/\hbar^2$ — параметр потенциальной функции, V_0 — «интенсивность» ямы, описываемой дельта-функцией.

Наиболее важный факт, на который указывает это уравнение, состоит в том, что волновая функция для системы двух частиц зависит от двух переменных и что уравнение и система могут быть изображены нагляднее в плоскости, как показывает рис. 12.7. Потенциальный центр порождает глубокие, узкие долины, расположенные вдоль осей x и y ; в других точках потенциал равен нулю. С другой

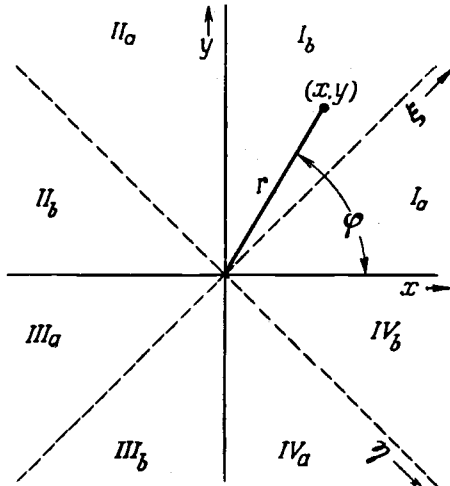


Рис. 12.7. Координаты и обозначения квадрантов для системы двух одномерных частиц.

стороны, это уравнение показывает, что ψ является решением двумерного уравнения Гельмгольца при $\epsilon = k^2$ всюду, кроме точек, расположенных на осях координат. Вдоль $x=0$ и $y=0$ находятся полупрозрачные зеркала, вызывающие разрывы в наклоне волны, причем разрыв, нормальный к зеркалу, равен произведению $-2a$ на величину волны у зеркала. Если две частицы свободны и обе начинают движение от $+\infty$ соответственно со скоростями v_1 и v_2 , то волновая функция будет состоять из падающей плоской волны

$$\psi_i = e^{-ik_1x - ik_2y}, \quad k_1 = \frac{Mv_1}{\hbar}, \quad k_2 = \frac{Mv_2}{\hbar},$$

сложенной со всеми отражениями этой волны от «зеркал», расположенных вдоль осей x и y .

Отражения изменяются с изменением угла падения; например, для волны ψ_i , ударяющейся о зеркало $x=0$, падающая, отраженная и прошедшая сквозь зеркало волны имеют вид

$$\psi = \begin{cases} e^{-ik(x \cos u + y \sin u)} - \frac{a}{a + ik \cos u} e^{ik(x \cos u - y \sin u)}, & x > 0, \\ \frac{ik \cos u}{a + ik \cos u} e^{-ik(x \cos u + y \sin u)}, & x < 0, \end{cases}$$

где $k^2 = k_1^2 + k_2^2 = \epsilon$, $k_1 = k \cos u$, $k_2 = k \sin u$. Падающая волна образует с осью y угол падения $u = \arctg(k_2/k_1)$. Амплитуды отраженной и прошедшей через зеркало волн зависят от этого угла падения. Падающая волна ψ_i отражается от обоих зеркал, и волна, получившаяся в результате объединения отраженной, прошедшей через зеркало и падающей волн, принимает вид (для каждого из квадрантов, указанных на рис. 12.7)

$$\psi = \begin{cases} e^{-ikr \cos(\varphi - u)} + \frac{a^2 e^{ikr \cos(\varphi - u)}}{(a + ik \cos u)(a + ik \sin u)} - \frac{a e^{ikr \cos(\varphi + u)}}{(a + ik \cos u)} - \frac{a e^{-ikr \cos(\varphi + u)}}{a + ik \sin u}, & \text{I квадрант;} \\ \frac{ik \cos u e^{-ikr \cos(\varphi - u)}}{(a + ik \cos u)} - \frac{iak \cos u e^{-ikr \cos(\varphi + u)}}{(a + ik \cos u)(a + ik \sin u)}, & \text{II квадрант;} \\ -\frac{k^2 \sin u \cos u e^{-ikr \cos(\varphi - u)}}{(a + ik \cos u)(a + ik \sin u)}, & \text{III квадрант;} \\ \frac{ik \sin u e^{-ikr \cos(\varphi - u)}}{(a + ik \sin u)} - \frac{iak \sin u e^{ikr \cos(\varphi + u)}}{(a + ik \cos u)(a + ik \sin u)}, & \text{IV квадрант;} \end{cases} \quad (12.3.69)$$

здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \arctg(y/x)$ — полярные координаты в плоскости x, y . Две частицы, приходящие справа, частично отражаются потенциальными долинами, а частично проходят через них. Каждая частица сохраняет свою

кинетическую энергию, но имеет возможность изменить направление своего движения на противоположное. Относительные интенсивности отраженного и прошедшего пучков даются квадратами величин коэффициентов.

Функция Грина. Функция Грина для этой системы может быть получена из (11.2.22). Умножим ϕ на $e^{ik(x_0 \cos u + y_0 \sin u)}$ и проинтегрируем по u от $-i\infty$ до $+i\infty$. Так как условия сопряжения (являющиеся однородными) удовлетворяются для каждого значения u , то весь интеграл также будет удовлетворять этим условиям. Первый член в I квадранте будет равен $\pi i H_0^{(1)}(kR)$, где $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$; он определяет волну, излучаемую точечным источником, находящимся в точке (x_0, y_0) первого квадранта. Третий член соответствует волне, которая кажется приходящей из зеркально отраженной точки $(-x_0, y_0)$; она не является симметричной, так как содержит в себе все функции Ганкеля высших порядков. С помощью производящей функции для тригонометрических функций, данной в таблице в конце гл. 10, мы можем получить разложение

$$\frac{a}{a + ik \cos u} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + k^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{-n} \left[\frac{\sqrt{a^2 + k^2} - a}{k} \right]^n \cos(nu),$$

и, следовательно, третий член в выражении для первого квадранта принимает вид

$$-\frac{\pi i a}{\sqrt{a^2 + k^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[\frac{\sqrt{a^2 + k^2} - a}{k} \right]^m H_m^{(1)}(kR_2) \cos(m\varphi_2),$$

$$x + x_0 = R_2 \cos \varphi_2, \quad y - y_0 = R_2 \sin \varphi_2,$$

и определяет волну, отраженную от «зеркала» $x = 0$, которая кажется приходящей из изображения точки во втором квадранте; эта волна содержит угловые зависимости, необходимые для того, чтобы можно было удовлетворить условиям сопряжения при $x = 0$ и $y = 0$. Все другие интегралы подобным же образом могут быть разложены на зависящие от угла волны, исходящие из источника или из одного из трех его изображений. Количество необходимых членов зависит от квадранта, в котором определяется ϕ ; например, в III квадранте нужна только волна, исходящая из самого источника (x_0, y_0) , но ее угловая зависимость не является равномерной; она искажается благодаря прохождению через «зеркала».

Функция Грина символически изображена на рис. 12.8. Здесь представлена симметричная волна, выходящая из источника (x_0, y_0) (волновые фронты изображены сплошными линиями), а также отраженные волны и волны, прошедшие через зеркала, амплитуды которых зависят от угла (вол-

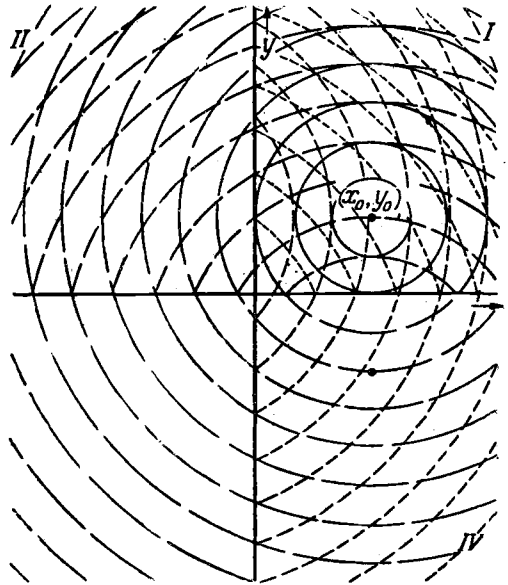


Рис. 12.8. Набросок волновых фронтов для функции Грина при источнике в (x_0, y_0) . Волновые фронты, изображенные в I квадранте сплошными линиями, имеют одинаковую амплитуду. Амплитуды волновых фронтов, изображенных пунктиром, меняются с изменением угла.

новые фронты изображены пунктирными линиями). Выражение, описанное здесь и полученное интегрированием равенства (12.3.69) по u , пригодно почти всюду в плоскости x, y . Например, если источник (x_0, y_0) находится в другом квадранте, мы просто поворачиваем чертеж и заново перенумеровываем квадранты. Однако введенное нами выражение не будет пригодным, когда источник лежит точно на оси x или на оси y . На первый взгляд кажется, что из соображений симметрии должна существовать симметричная волна, выходящая из источника [в точке $(x_0, 0)$, например], и отраженная волна, идущая из его изображения $(-x_0, 0)$. Но такая волна не удовлетворяет требованию разрыва наклона на оси x ; она *слишком* симметрична.

Мы при этом забываем, что наша задача, если ее рассматривать с точки зрения отражения волны, является одной из задач, в которых возникают поверхностные волны; если эту задачу рассматривать с точки зрения частиц, она имеет связанные состояния. Для того чтобы увидеть, что здесь происходит, нужно рассмотреть эти поверхностные волны.

Только связанные состояния системы (без учета взаимодействия частиц) могут быть легко выражены через простые показательные функции, как это было сделано для уравнения (12.3.8). Имеем

$$\psi = \begin{cases} Ne^{-\alpha x - \alpha y} = Ne^{-\alpha \xi}, & \text{I квадрант;} \\ Ne^{\alpha x - \alpha y} = Ne^{\alpha \eta}, & \text{II квадрант;} \\ Ne^{\alpha x + \alpha y} = Ne^{\alpha \xi}, & \text{III квадрант;} \\ Ne^{-\alpha x + \alpha y} = Ne^{-\alpha \eta}, & \text{IV квадрант;} \end{cases} \quad (12.3.70)$$

здесь $x = (1/\sqrt{2})(\xi + \eta)$, $y = (1/\sqrt{2})(\xi - \eta)$ и $\alpha = \sqrt{2}a$. Волновая функция напоминает «крышу пагоды», достигая высшей точки при $r = 0$ и опускаясь вниз по всем направлениям, причем склон становится все более пологим при больших r . Горизонталями¹⁾ для ψ (можно продолжить сравнение и назвать их «линиями черепицы») являются квадраты со сторонами, параллельными осям ξ и η ; крыша имеет гребни вдоль осей x и y , где расположены потенциальные долины. Допустимая энергия системы, очевидно, равна

$$E = -\frac{MV_0^2}{\hbar^2}, \quad \varepsilon = -2a^2.$$

Кстати, волновая функция этого связанного состояния, если перейти к полярным координатам r и φ , может быть выражена через полуцилиндрические функции, определенные в таблице в конце этой главы. Мы видим, что ряд

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m \cos(4m\varphi) J_{4m}^{(4)}(i\sqrt{2}ar) \quad (12.3.71)$$

выражает ψ для всех значений φ от 0 до 2π и что здесь приняты во внимание разрывы градиента ψ при $\varphi = 0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$. В самом деле, пользуясь свойствами функций $J_{4m}^{(4)}(z)$, мы можем показать непосредственно, что

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \\ &= -\frac{4a}{\pi r} e^{-ar} \sum_m \varepsilon_m \cos(4m\varphi) + 2a^2 \psi = \\ &= -\frac{2a}{r} \left[\delta(\varphi) + \delta\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right) + \delta(\varphi - \pi) + \delta\left(\varphi - \frac{3}{2}\pi\right) \right] \psi + 2a^2 \psi = \\ &= -2a [\delta(x) + \delta(y)] \psi + 2a^2 \psi, \end{aligned}$$

1) То есть линиями $\psi = \text{const.}$ — Прим. ред.

и, таким образом, доказать, что ряд (12.3.71) является решением уравнения с потенциалами в виде дельта-функций.

Поверхностные волны. Имеются также состояния, частично связанные и частично свободные, как, например, в случае, когда частица 2 находится в связанном состоянии, а частица 1 движется справа со скоростью v_1 . Волновая функция тогда имеет вид

$$\psi = \begin{cases} e^{-a|y| - ik_a x} - \frac{a}{a + ik_a} e^{-a|y| + ik_a x}, & x > 0, \\ \frac{ik_a}{a + ik_a} e^{-a|y| - ik_a x}, & x < 0, \end{cases} \quad (12.3.72)$$

где $k_a = Mv_1/\hbar$ и $\varepsilon = k_a^2 - a^2$. Хотя частица 1 может отразиться от долины при $x = 0$, но при отсутствии взаимодействия между частицами они не могут обмениваться местами. Чтобы получить частицу 1 в связанном состоянии, нужно и начинать со связанной частицей 1 и свободной частицей 2.

Это и есть поверхностные волны, упомянутые выше, которые становятся заметными в функции Грина, если только источник помещается на одной из осей координат. В самом деле, подробное исследование природы этой функции Грина (в детали которого здесь нет надобности входить; мы не пытаемся просчитать эту задачу, а хотим только осмотреть все возможные случаи, чтобы понять их общие особенности, которые, как мы надеемся, помогут в понимании подобных особенностей в других задачах с несколькими частицами) показывает, что мы здесь имеем дело с расходящейся круговой волной, зависящей от угла и стремящейся к нулю вдоль оси (являющейся пределом первичной волны и соответствующего ей отражения в случае слияния источника и изображения), и ее отражением, зависящим от угла и идущим из точки $(-x_0, 0)$; кроме того, здесь имеется также поверхностная волна вида, указанного в равенстве (12.3.72), распространяющаяся от источника и отраженная от $x = 0$. Если источник расположен на оси x , требуется, чтобы обе эти волны вдоль оси x удовлетворяли некоторым условиям. Отметим, что длина волны у поверхностной волны равна $2\pi/k_a$, т. е. меньше длины волны свободных волн $2\pi/k$, так как $k_a^2 = k^2 + a^2$, если $\varepsilon = k^2$.

Поведение этих волн становится ясным, если воспользоваться представлением функции Грина в виде ряда и интеграла от произведений собственных функций однородного уравнения, составленных для источника и наблюдателя [см. (7.2.39), (7.2.41) и (7.2.42)]. В данном случае функция Грина состоит из двойного интеграла от выражений для свободных волн, взятого по всем значениям волновых чисел k_1 и k_2 , сложенного с отдельными интегралами от поверхностных волн, распространенными на все значения соответствующих величин k ; к сумме добавляется еще член, соответствующий связанному состоянию. Если источник или наблюдатель помещаются далеко от оси x или от оси y , то членами, соответствующими поверхностным волнам и связанному состоянию, можно пренебречь; вблизи осей становятся существенными члены, соответствующие поверхностным волнам; вблизи начала координат важен член, зависящий от связанного состояния.

Следовательно, если имеем некоторое распределение источников на плоскости, решение неоднородного уравнения будет содержать интеграл от обычной функции Грина, распространенный на всю область распределения источников, и интеграл от той части функции Грина, которая соответствует поверхностным волнам; последний интеграл распространяется на всю совокупность источников, лежащих на осях координат.

Влияние взаимодействия между частицами. Посмотрим теперь, как будет обстоять дело, если мы примем во внимание взаимодействие между

двумя частицами. Предположим, что это взаимодействие описывается короткодействующей силой отталкивания с потенциалом в виде дельта-функции от $x - y$, имеющей разрыв вдоль оси ξ , являющейся биссектрисой угла между осями x и y рис. 12.7. Здесь волновая функция, вместо того чтобы иметь гребень вдоль осей x и y , как это было для поля притяжения, имеет «желоб», причем разрыв нормальной производной положителен. Добавление этого потенциала взаимодействия сразу значительно усложняет задачу. Прежде всего несколько искажается симметрия системы; здесь имеется потенциальный гребень или «зеркало» вдоль оси ξ , но его нет вдоль оси η . Это зеркало вызывает обмен энергиями между частицами; если мы посылаем теперь волну, в которой частица 1 имеет скорость $v_1 = \hbar k_1/M$, а частица 2 — скорость $v_2 = \hbar k_2/M$, то для части отраженной волны x и y обменяются ролями и, таким образом, частица 1 будет двигаться со скоростью v_2 , а частица 2 — со скоростью v_1 .

Даже в случае, когда обе частицы свободны, дополнительное зеркало вызывает в начале координат осложнения, которые нельзя обойти, пользуясь простой суммой плоских волн. Можно, например, попытаться рассмотреть случай, когда частица 1 движется справа со скоростью v_1 (волновое число k_1), а частица 2 — слева с меньшей скоростью v_2 (волновое число $-k_2$). Направление распространения падающей волны составляет с осью x угол, меньший $\pi/4$, и эта волна приходит из бесконечности в IV квадрант. Часть этой волны отразится от оси x (частица 2 отразится от начала координат), а часть — от оси y (частица 1 отразится от начала координат), но некоторая часть пройдет через эти «зеркала» и натолкнется на новое зеркало вдоль оси ξ , от которого и отразится. Это соответствует отражению частицы 1 от частицы 2 и обмену кинетическими энергиями; направление отраженной волны будет теперь $\pi/2$ — и в соответствии с тем, что частица 1 имеет волновое число k_2 , а частица 2 — волновое число $-k_1$.

До сих пор все ясно; но если мы будем в том же духе продолжать, добавляя в каждой части плоскости различные волны, отраженные от каждого зеркала, а также и прошедшие через эти зеркала, и требуя, чтобы разрывы производных по нормали к $x=0$ или к $y=0$ были равны $-2a\phi$, как и раньше, а разрывы производных по нормали к $\eta=0$ были равны $+2b\phi$, то мы найдем, что нельзя сделать задачу «замкнутой», что мы имеем либо недостаточно составляющих волн, либо слишком много условий сопряжения. Если $b=0$, некоторые из этих дополнительных условий исчезают, и задачу можно решить с помощью комбинаций плоских волн, но это случай, рассмотренный выше, когда нет взаимодействия между частицами. Как только мы примем во внимание взаимодействие, конечная сумма плоских волн окажется недостаточной для того, чтобы удовлетворить всем условиям сопряжения, а также и требованию периодичности относительно полярного угла ϕ (т. е. требованию, чтобы волна во II квадранте, полученная при переходе из IV квадранта через I квадрант, должна быть такой же, как и при переходе через III квадрант).

Очевидно, что начало координат, где сходятся все зеркала, само по себе дает некоторое количество отражений и посылает волну, содержащую в себе как поверхностные, так и «свободные» волны. Новое зеркало при $\eta=0$ не дает поверхностных волн вдоль него самого: этому препятствует знак b , но присутствие этого зеркала превращает часть волны в поверхностные волны. На «языке частиц» сила взаимодействия вызывает возможный обмен энергией между частицами; в частности, если обе частицы вначале были свободны, то одна частица может отдать энергию и перейти в связанное состояние, а другая частица уйдет с остальной энергией.

Некоторые из этих фактов становятся более ясными, если заменить дифференциальное уравнение движения пары частиц

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + [\varepsilon + 2a\delta(x) + 2a\delta(y)]\psi = 2b\delta(x-y)\psi \quad (12.3.73)$$

интегральным уравнением

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{-b}{2\pi} \int \delta(x_0 - y_0) \psi(x_0, y_0) G_k(x, y | x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \\ &= -\frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, x_0) G_k(x, y | x_0, x_0) dx_0, \end{aligned} \quad (12.3.74)$$

где G_k — функция Грина для источника в точке (x_0, y_0) , полученная интегрированием выражения (12.3.69) по u при $\varepsilon = k^2$. Это уравнение выражает решение ψ в точке (x, y) через значения его вдоль оси ξ ($x=y$), где расположен «гребень» возмущающего потенциала. Решение образовано с помощью умноженного на $-b/2\pi$ значения ψ в каждой точке оси ξ , являющейся источником, порождающим волны в остальной части пространства. Если в это уравнение подставить точное выражение ψ для точек, лежащих вдоль оси ξ , то получим точное решение ψ ; но даже в случае, когда ψ на оси ξ точно неизвестно, приближенное выражение, будучи подставлено под знак интеграла, дает очень хорошее приближение для ψ в остальной части плоскости.

Интегральное уравнение для $\psi(x, y)$ вдоль оси ξ получается, если положить $y = x = \xi/\sqrt{2}$. Если $\varphi_0(\xi) = \psi(\xi/\sqrt{2}, \xi/\sqrt{2})$ есть значение ψ в точке $(\xi, 0)$ оси ξ и если $G_k(\xi | \xi_0) = G_k(\xi/\sqrt{2}, \xi/\sqrt{2} | \xi_0/\sqrt{2}, \xi_0/\sqrt{2})$ есть значение функции Грина в точке $(\xi, 0)$ для единичного источника, находящегося в точке $(\xi_0, 0)$, то интегральное уравнение принимает вид

$$\varphi_0(\xi) = -\frac{b}{V 8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi_0) G_k(\xi | \xi_0) d\xi_0. \quad (12.3.75)$$

Решив это уравнение, мы можем решение для φ_0 подставить в уравнение (12.3.74), чтобы получить общее решение ψ для энергии $\varepsilon = k^2$.

Ядро $G_k(\xi | \xi_0)$ при действительном k является комбинацией расходящихся волн, если $\xi > \xi_0$; оно представляет собой комбинацию волн обоих направлений при $0 < \xi < \xi_0$ и комбинацию волн, идущих к $\xi \rightarrow -\infty$, если $\xi < 0$; кроме того, при $\xi_0 = 0$ это ядро является сингулярной функцией, интегрирование которой по ξ_0 дает значение φ_0 при $\xi = 0$, умноженное на функцию, соответствующую поверхностным волнам — комбинацию действительной и мнимой экспоненциальных функций. Мы не собираемся подсчитывать φ_0 или даже $G_k(\xi | \xi_0)$. Из общих свойств функции Грина $G_k(x, y | x_0, y_0)$, которые мы уже обрисовали, а также из вида уравнения (12.3.74) можно видеть без вычислений, какого типа будет функция $\psi(x, y)$.

Рассмотрим прежде всего случай двух свободных частиц. Точное решение уравнения (12.3.73), как мы видели, не может быть выражено с помощью падающей плоской волны и отраженных плоских волн. Тем не менее значения ψ вдоль оси ξ не слишком отличаются от значений вдоль оси ξ функции ψ , определенной равенствами (12.3.69) (решение без учета взаимодействия). Если эти значения подставить в уравнение (12.3.74), то результат интегрирования даст достаточно хорошее приближение к решению уравнения (12.3.73).

Интегрирование по большей части промежутка изменения ξ_0 ($= x_0/\sqrt{2}$) соответствует дополнительным отражениям плоской волны, определенной

в (12.3.69), от добавочного «зеркала» вдоль оси ξ . Однако в дополнение к этим отраженным волнам имеется еще член, зависящий от сингулярной части G , который порождает поверхностные волны, распространяющиеся от начала координат вдоль обеих осей x и y , плюс известное количество круговых волн, расходящихся по радиусам из начала координат; амплитуда этих волн пропорциональна значению функции ψ в начале координат.

Смысл результатов. Сформулируем теперь этот результат на языке частиц. Мы рассматриваем движение двух частиц из бесконечности — одной со скоростью v_1 , другой со скоростью v_2 . Здесь могут представиться следующие возможности: во-первых, обе частицы могут пройти через потенциальную долину в начале координат с их первоначальными скоростями (волна, прошедшая сквозь «зеркала»); во-вторых, одна частица может отразиться от начала координат и, возвращаясь оттуда, двигаться с первоначальной скоростью, в то время как другая проходит через начало координат с ее первоначальной скоростью (волны, отраженные от «зеркала», расположенного вдоль оси x или вдоль оси y); наконец, обе частицы могут отразиться от начала координат, но сохранить при этом их первоначальные скорости (волна, отраженная от обоих «зеркал», расположенных по осям x и y). Таковы возможности, если не учитывать влияния взаимодействия частиц, т. е. «зеркала», расположенного вдоль оси ξ .

При наличии взаимодействия между частицами здесь дополнительно могут представиться следующие возможности: во-первых, обе частицы, покидая линию $x = y$ в любом направлении, могут обменяться своими скоростями (плоские волны, отраженные от «зеркала», расположенного вдоль оси ξ); во-вторых, в начале координат, где действуют одновременно все три потенциала, одна частица может перейти в связанное состояние, а другая — уйти из начала в том или другом направлении со скоростью, соответствующей энергии, полученной там (поверхностные волны); наконец, может случиться (со сравнительно малой вероятностью), что в начале координат одна частица отдает часть своей кинетической энергии другой частице и обе они уходят со скоростями, отличными от их начальных скоростей, но такими, что сумма их кинетических энергий равна первоначальной сумме (круговые волны, расходящиеся по радиусам из начала координат). Все возможности, указанные в последнем предложении, получаются благодаря наличию взаимодействия между частицами, которое приводит к задаче, в которой разделение невозможно, и порождает разнообразные усложнения (и возможности) в случае систем, состоящих из нескольких частиц.

Если взаимодействие было бы притяжением, вместо предполагавшегося здесь отталкивания, то возникла бы еще одна дополнительная расходящаяся поверхностная волна вдоль оси ξ , соответствующая частицам, которые покидают начало координат, будучи связанными друг с другом; оставшаяся энергия будет их общей кинетической энергией.

Прежде чем перейти к задачам, более тесно связанным с действительностью, выскажем еще одно последнее соображение; мы должны указать, как сила взаимодействия изменяет волновую функцию для случая, когда обе частицы связаны. Мы могли бы рассчитать это из уравнения (12.3.74), воспользовавшись функцией Грина, составленной из убывающих по экспоненциальному закону функций Ганкеля мнимого аргумента, но здесь будет достаточно показать, придерживаясь нашего картинного изложения, как изменяется функция, имевшая форму «крыши пагоды», рассмотренная на стр. 660. Если сила взаимодействия является силой отталкивания, то энергия связи частиц уменьшается и ψ на больших расстояниях будет стремиться к нулю медленнее, чем ϕ , определенное в (12.3.70). По-видимому, «гребни крыши» вдоль осей x и y спускаются вниз от вер-

шины в начале координат по экспоненциальному закону с показателем, меньшим чем a в (12.3.70). «Угол крыши» на этих гребнях должен быть таким же, как и раньше, так как он определяется потенциальными долинами, расположенными вдоль осей x и y .

Однако в дополнение к гребням при отталкивающей силе взаимодействия на крыше появляется V-образный «желоб» вдоль оси ξ . Мы можем получить его, заставив крышу в квадрантах II и IV немного «выпучиться», так что горизонталь функции ψ («линии черепицы») становятся кривыми, обращенными вогнутостью к началу координат. В квадрантах I и III крыша тогда опускается вниз более круто вдали от гребней, идущих вдоль осей x и y с небольшим дополнительным уменьшением кривизны, дающим возможность двум частям соединиться вдоль оси ξ с образованием V-образного «желоба». Если отталкивающее взаимодействие очень велико, желоб нельзя сделать V-образным с нужной крутизной, не «сморщив» крышу где-либо в другом месте; это равносильно утверждению, что при очень большой силе отталкивающего взаимодействия не может быть связанного состояния, одна частица или обе должны быть свободны. Если сила взаимодействия является силой притяжения, то вдоль оси ξ появляется новый «гребень», и крыша должна немного «осесть» между гребнями (вместо того, чтобы выпучиться) для того, чтобы это компенсировать. Оседание или выпучивание дополнительно указывают на то, что простые показательные функции не достаточны для представления решения; таким образом, решение существенно не разделимо.

Связанные гармонические осцилляторы. Только связанные гармонические осцилляторы представляют собой допускающий разделение переменных случай взаимодействующих частиц; этот случай не демонстрирует многих результатов, выведенных в предшествующем пункте, так как здесь нет свободных состояний. Если частота колебаний каждой частицы самой по себе в силовом поле равна $\omega/2\pi$ и если две частицы притягивают друг друга с силой $C(x-y)$, то уравнение Шредингера, аналогичное уравнению (12.3.5) для системы, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + [\epsilon - \beta^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 (x-y)^2] \psi = 0,$$

где $\epsilon = 2ME/\hbar^2$, $\beta = M\omega/\hbar = (1/\hbar)\sqrt{KM}$ и $\gamma = (1/\hbar)\sqrt{CM}$. Это уравнение удобнее выразить в нормальных координатах ξ , η , где

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta),$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y).$$

Уравнение тогда приобретает форму, допускающую разделение переменных,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + [\epsilon - \beta^2 \xi^2 - \beta_+^2 \eta^2] \psi = 0, \quad (12.3.76)$$

где

$$\beta_+^2 = \beta^2 + \gamma^2 = \frac{M}{\hbar^2}(K + C) = \left(\frac{M\omega_+}{\hbar}\right)^2, \quad \omega_+^2 = \omega^2 + \frac{C}{M}.$$

Решение, согласно формуле (12.3.7), имеет вид

$$\psi_{mn}(\xi, \eta) = \frac{(\beta\beta_+)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi 2^{m+n} m! n!}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 \xi^2 - \frac{1}{2}\beta_+^2 \eta^2} H_m(\xi\sqrt{\beta}) H_n(\eta\sqrt{\beta_+}) \quad (12.3.77)$$

с соответствующими энергиями

$$E_{mn} = \hbar\omega \left(m + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Заметим, что мы не можем сказать, что частица 1 имеет определенную энергию и частица 2 имеет некоторую определенную энергию, как мы могли бы это сделать, если бы константа взаимодействия C была равна нулю. Здесь квантовые числа m и n оба относятся к обеим частицам.

Все уровни поднимаются при взаимодействии на величину, равную разности между $\hbar\omega_+(n+1/2)$ и $\hbar\omega(n+1/2)$ (последняя величина являлась бы значением уровня, если бы здесь не было взаимного притяжения). Наименее измененными состояниями являются те, в которых $n=0$, что соответствует малой амплитуде движения в направлении оси η ; частицы при своих колебаниях движутся более или менее вместе. Взаимодействие уничтожает вырождение уровней. При $C=0$ n -й уровень имеет $(n+1)$ -кратное вырождение; при малом, но не равном нулю C , уровни больше не налагаются друг на друга, но распределяются равномерно между наимизшим из них $\hbar\omega(n+1/2) + \hbar\omega_+/2$ и наивысшим $\hbar\omega/2 + \hbar\omega_+(n+1/2)$.

Заметим (это будет иметь значение в дальнейшем), что состояния могут различаться по их симметрии относительно перестановки частиц. Состояния с *четными* значениями n не изменяются, когда x и y меняются местами (η меняет знак), в то время как при *нечетном* целочисленном n от перестановки x и y функция ψ меняет знак. Говорят, что первые состояния имеют *четную симметрию*, вторые — *нечетную симметрию*. Заметим также, что взаимодействие не оказывает влияния на функцию или энергии для координаты ξ .

Поля центральных сил, несколько частиц, момент количества движения. Поведение нескольких одинаковых частиц в поле центральных сил при наличии сил взаимодействия между частицами является наиболее интересной проблемой этого рода, так как решение этой проблемы обрисовывает нам с очень хорошим приближением положение дел в атоме со многими электронами и с полезным (хотя и не очень точным) приближением положение дел в ядре со многими частицами. Уравнение Шредингера без учета потенциалов взаимодействия имеет вид

$$\left[\sum_{n=1}^N \nabla^2 + \varepsilon - \sum_{n=1}^N v(r_n) \right] \psi = 0. \quad (12.3.78)$$

Если нет взаимодействия, то можно указать определенную энергию для каждой частицы, причем полная энергия системы равна сумме энергий отдельных частиц, а волновая функция равна произведению функций ψ для отдельных частиц.

Последнее, однако, не обязательно; если мы обменяем между собой энергии и функции ψ какой-либо пары частиц, полная энергия остается прежней; система имеет $(N!)$ -кратное вырождение, связанное с обменом состояниями между частицами. Но, как и в случае любого вырожденного состояния (см. стр. 623), мы не обязаны выбирать именно эти факторизованные функции в качестве собственных функций; собственной функцией будет также любая линейная комбинация $N!$ функций для одного и того же значения ε ; эти комбинации желательнее выбрать так, чтобы они были «подходящими» для сил взаимодействия, которые в конечном итоге будут приложены. Если мы принимаем во внимание взаимодействие, мы, конечно, не можем сказать, что частица с номером n имеет определенную энергию; все, что здесь можно сказать, это то, что система как целое имеет энергию ε . (Заметим, хотя входить в детали вопроса мы здесь не можем, что

для некоторых частиц принцип Паули значительно уменьшает это вырождение добавлением требования, чтобы ψ меняло знак при перестановке частиц.)

Те же замечания можно сделать относительно моментов количества движения. Факторизованные решения уравнения (12.3.78) соответствуют тому, что каждая частица имеет определенный полный момент количества движения, отмеченный квантовым числом l_i (см. стр. 612), и определенную составляющую этого момента вдоль полярной оси, соответствующую квантовому числу m_i . Однако в действительности, если принять во внимание взаимодействие, отдельные частицы не имеют определенных моментов количества движения; в этом случае можно сказать только, что N частиц, рассматриваемые как целое, имеют суммарный момент количества движения,

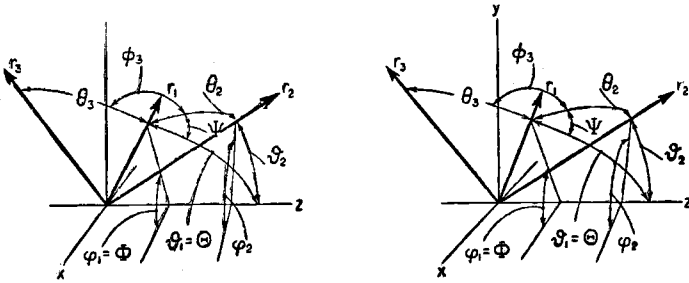


Рис. 12.9. Углы, встречающиеся при вычислении суммарного момента количества движения системы.

заданный квантовым числом l , и что составляющая вдоль полярной оси этого момента равна $\hbar m$. Интересно найти, какие комбинации факторизованных функций ψ соответствуют данным l и m или, что равносильно (см. стр. 627), в каких системах координат мы можем отделить оператор суммарного момента количества движения.

Одна из возможных систем координат, правда, не такая симметричная, как хотелось бы, но в данный момент удовлетворяющая нас, определяется следующим образом. Направление радиуса-вектора $\mathbf{r}_1$ одной из частиц принимается за новое направление полярной оси. Это направление определяется углом $\Theta = \vartheta_1$ между $\mathbf{r}_1$ и прежней полярной осью z и углом $\Phi = \varphi_1$ между плоскостью $(\mathbf{r}_1, z)$ и плоскостью (x, z) (см. рис. 12.9). Направление радиусов-векторов $\mathbf{r}_n$ остальных частиц определяется относительно радиуса-вектора $\mathbf{r}_1$ и плоскости $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ($\mathbf{r}_2$ — радиус-вектор второй выбранной нами частицы); угол между плоскостью $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и плоскостью $(\mathbf{r}_1, z)$, обозначаемый через Ψ , определяет вместе с углами Θ и Φ общую ориентацию новой системы в пространстве. Три угла Θ , Φ и Ψ являются эйлеровыми углами системы [см. (1.3.8)].

Ориентация радиуса-вектора $\mathbf{r}_n$ определяется углом θ_n между $\mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}_1$ и углом ϕ_n между плоскостью $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ и плоскостью $(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_1)$. Соотношения между этими углами и обычными сферическими углами ϑ_n , φ_n , определяющими ориентацию $\mathbf{r}_n$ относительно оси z и плоскости (x, z) , имеют вид

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \Theta, \quad \varphi_1 = \Phi, \\ \cos \vartheta_2 &= \cos \Theta \cos \theta_2 + \sin \Theta \sin \theta_2 \cos \Psi, \\ \sin \vartheta_2 \sin (\varphi_2 - \Phi) &= \sin \theta_2 \sin \Psi, \\ &\dots\dots\dots \\ \cos \vartheta_n &= \cos \Theta \cos \theta_n + \sin \Theta \sin \theta_n \cos (\Psi + \phi_n), \\ \sin \vartheta_n \sin (\varphi_n - \Phi) &= \sin \theta_n \sin (\Psi + \phi_n), \quad n > 2. \end{aligned} \tag{12.3.79}$$

После довольно сложных вычислений все координаты r_n , ϑ_n , φ_n могут быть

выражены через новые координаты $r_1, r_2, \dots, r_N, \Phi, \Theta, \Psi, \theta_2, \theta_3, \phi_3, \dots, \theta_N, \phi_N$ и волновое уравнение (12.3.78) может быть преобразовано к этим координатам. К сожалению, новые координаты не будут взаимно ортогональными, так что полученное уравнение будет несколько громоздким. Однако является существенным, что часть его, содержащая углы Эйлера Θ, Φ, Ψ , отделяется и может быть решена сама по себе.

Однако более простой путь получения уравнения для множителя волновой функции, зависящего от углов Эйлера, состоит в том, чтобы выразить компоненты суммарного момента количества движения в виде операторов относительно новых координат (см. стр. 612). Окончательно получим

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_x &= \frac{\hbar}{i} \left[-\cos \Phi \operatorname{ctg} \Theta \frac{\partial}{\partial \Phi} - \sin \Phi \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{\cos \Phi}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Psi} \right], \\ \mathcal{M}_y &= \frac{\hbar}{i} \left[-\sin \Phi \operatorname{ctg} \Theta \frac{\partial}{\partial \Phi} + \cos \Phi \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Psi} \right], \\ \mathcal{M}_z &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \Phi}.\end{aligned}$$

Уравнение для собственных значений B и собственных функций Υ оператора $\mathcal{M}^2/\hbar^2$ имеет тогда вид

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \Theta) \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \Psi^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \Theta}{\sin \Theta} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \Phi \partial \Psi} + \operatorname{ctg} \Theta \frac{\partial \Upsilon}{\partial \Theta} + B \Upsilon = 0. \quad (12.3.80)$$

Углы Φ и Ψ циклические и множители, соответствующие им, являются тригонометрическими функциями целочисленных кратных Φ и Ψ . Как принято в квантовой механике, мы предпочитаем ввести комплексную экспоненту и положим

$$\Upsilon = e^{im\Phi + ik\Psi} H(\Theta),$$

где m, k — любые целые, положительные или отрицательные числа. Уравнение, остающееся для H , может быть переведено в гипергеометрическое уравнение, если положить

$$H = \sin^d \left(\frac{\Theta}{2} \right) \cos^s \left(\frac{\Theta}{2} \right) F(\Theta),$$

где d — абсолютная величина разности квантовых чисел $|m - k|$, а s — абсолютная величина суммы $|m + k|$. Тогда, если положить $z = (1/2)(1 - \cos \Theta) = \sin^2(\Theta/2)$, уравнение для F принимает вид

$$z(1-z) \frac{d^2 F}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dF}{dz} - abF = 0,$$

где

$$\begin{aligned}c &= 1 + d, \quad a + b = 1 + d + s, \\ ab &= (d+s)(d+s+2) - B, \\ d &= |m - k|, \quad s = |m + k|.\end{aligned}$$

Это — обычное гипергеометрическое уравнение. Решение, конечное при $\Theta = 0$, дается рядом $F(a, b|1+d|z)$; второе решение тогда бесконечно. Однако этот ряд обращается в бесконечность при $\Theta = \pi$ ($z = 1$), если ни одно из чисел a или b не равно целому отрицательному числу $-\nu$; следовательно, конечными решениями уравнения (12.3.80) являются только

$$\Upsilon = e^{im\Phi + ik\Psi} \sin^d \left(\frac{\Theta}{2} \right) \cos^s \left(\frac{\Theta}{2} \right) F \left[-\nu, 1 + d + s + \nu | 1 + d | \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right]$$

при соответствующих значениях B — собственных значениях оператора $\mathcal{M}^2/\hbar^2$

$$B = \left(\nu + \frac{d+s}{2} \right) \left(\nu + \frac{d+s}{2} + 1 \right) = l(l+1),$$

$$l = \nu + \frac{1}{2}(d+s) = 0, 1, 2, \dots,$$

что доказывает, что квадрат суммарного момента количества движения всех частиц в случае центральной силы (с учетом взаимодействий, если они имеются) равен $\hbar^2 l(l+1)$, а проекция его на ось z равна $\hbar m$. Величина $(d+s)/2$ является большим из целых чисел $|m|$ и $|k|$.

Чтобы свойства этих собственных функций сделать более ясными, выразим их через число l . Сначала мы предположим, что m положительно: при отрицательных значениях m мы можем рассматривать функцию, комплексно сопряженную полученной. Тогда при данных m и l будем иметь $2l+1$ различных собственных функций, так как k может принимать значения от $+l$ до $-l$. Если $|k| \leq m$, функции имеют форму

$$\Upsilon_{lmk} = e^{im\Phi + ik\Psi} \sin^m(\Theta) \operatorname{ctg}^k\left(\frac{\Theta}{2}\right) F\left[m-l, l+m+1 \mid m-k+1 \mid \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)\right].$$

При $l \geq k > m$ они принимают вид

$$\Upsilon_{lmk} = e^{im\Phi + ik\Psi} \sin^k(\Theta) \operatorname{ctg}^m\left(\frac{\Theta}{2}\right) F\left[k-l, l+k+1 \mid k-m+1 \mid \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)\right], \quad (12.3.81)$$

в то время как при $-l \leq k < -m$ имеем

$$\Upsilon_{lmk} = e^{im\Phi + ik\Psi} \sin^{-k}(\Theta) \operatorname{tg}^m\left(\frac{\Theta}{2}\right) F\left[-k-l, l-k+1 \mid m-k+1 \mid \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)\right].$$

Для получения полного решения уравнения (12.3.78) нужно составить линейную комбинацию произведений этих функций от Φ , Θ и Ψ на функции от $r_1, r_2, \dots, r_N, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_N, \phi_3, \phi_4, \dots, \phi_N$. Если даже добавить в уравнение (12.3.78) потенциалы взаимодействия, чтобы получить полное уравнение Шредингера для системы, эти взаимодействия будут зависеть только от значений r_n и от углов относительного положения $\theta_2, \dots, \phi_N$, но не от Φ, Θ, Ψ , так что множители Υ остаются прежними, хотя другие множители изменяются под влиянием взаимодействий. Тем не менее множители Υ не являются вполне правильными множителями, входящими в окончательное решение, если «включается» взаимодействие.

Правильными множителями, входящими в это решение, будут линейные комбинации функций Υ , классифицированных относительно 1) их поведения при инверсии системы координат и 2) их симметричности или антисимметричности при перестановке какой-либо пары частиц. Так как потенциалы взаимодействия инвариантны относительно инверсии и симметричны при перестановке какой-либо пары частиц, окончательная волновая функция ψ всегда может быть выражена через собственные функции, которые будут четными или нечетными относительно инверсии и симметричными или антисимметричными относительно перестановки частиц¹⁾.

¹⁾ Утверждение авторов, что собственная функция обязательно будет симметричной или антисимметричной относительно перестановки частиц, справедливо только для систем из двух одинаковых частиц. В случае большего числа одинаковых частиц возможные типы симметрии волновой функции не исчерпываются симметрией или антисимметрией. Возможные типы симметрии описываются так называемыми схемами Юнга. Принцип Паули, требующий антисимметрии, полной (включающей и спинные переменные) волновой функции системы, ограничивает типы симметрии координатной части волновой функции (допуская только схемы Юнга не более чем с двумя столбцами). — *Прим. ред.*

Инверсия и четность. Операция *инверсии* определяется как замена всех координат каждой частицы противоположными им по знаку величинами, т. е.

$$\mathbf{r}_i \rightarrow -\mathbf{r}_i.$$

Операция инверсии равносильна переходу от обычной правой системы координат к левой системе. Взаимодействия, которые зависят только от расстояний между частицами, будут, конечно, инвариантными при таком преобразовании, так что, если $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$ является решением уравнения Шредингера, то $\psi(-\mathbf{r}_1, -\mathbf{r}_2, \dots)$ будет также решением с той же энергией и с теми же квантовыми числами момента количества движения. Так как существует только одно такое решение, то обе функции ψ должны быть пропорциональны друг другу:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = \alpha \psi(-\mathbf{r}_1, -\mathbf{r}_2, \dots).$$

Применяя операцию инверсии к обеим частям этого равенства, найдем: $\alpha^2 = 1$, так что $\alpha = \pm 1$. Если

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = -\psi(-\mathbf{r}_1, -\mathbf{r}_2, \dots),$$

то говорят, что волновая функция является *нечетной*, в то время как в случае сохранения знака при инверсии функция является *четной*.

Волновая функция ψ состоит из суммы произведений функций Υ и функций от расстояний между частицами. Таким образом, выбор правильных линейных комбинаций функций Υ фиксирует четность. Для определения их следует отметить поведение углов Эйлера при инверсии

$$\Theta \rightarrow \pi - \Theta, \quad \Phi \rightarrow \pi + \Phi, \quad \Psi \rightarrow \pi - \Psi.$$

Примеры подходящих линейных комбинаций в случае, когда $l = 1$, будут даны ниже.

Симметризация для систем, состоящих из двух частиц. Процесс симметризации обычно довольно утомителен. Как он протекает, можно иллюстрировать рассмотрением случая двух частиц. Здесь обмен частиц 1 и 2 заменяет Θ через ϑ_2 и Φ через φ_2 , где r_2 , ϑ_2 и φ_2 — координаты частицы 2 в сферической системе координат. Решение уравнения

$$[\nabla_1^2 + \nabla_2^2 + \varepsilon - v(r_1) - v(r_2) - w(r_{12})] \psi = 0$$

должно быть выражено как линейная комбинация произведений функций Υ и функций f от r_1 , r_2 и $\vartheta_2 = \vartheta_{12}$. Так как $r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \vartheta_{12}$, мы видим, что полная потенциальная энергия совершенно не зависит от Φ , Θ и Ψ . Мы должны найти дифференциальное уравнение для множителей f , для каждой надлежащей комбинации функций Υ .

Наиболее легкий способ достигнуть этого состоит в том, чтобы рассмотреть, что происходит, когда w стремится к нулю, и сравнить результаты с формой функций Υ . В этом случае решение должно быть линейной комбинацией произведений одночастичных волновых функций, имеющих общую форму

$$u = e^{im_1\varphi_1 + im_2\varphi_2} P_{l_1}^{m_1}(\cos \vartheta_1) P_{l_2}^{m_2}(\cos \vartheta_2) R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_2}(r_2),$$

т. е. выражений типа, рассмотренного на стр. 666 и следующих. Рассмотрим сначала случай $l = 0$ (суммарный момент количества движения равен нулю). Здесь функция Υ является постоянной и не зависит от Φ , Θ и Ψ , так что полное решение, которое является линейной комбинацией функций u при $w = 0$, должно быть функцией только от $\vartheta_2 = \vartheta_{12}$, r_1 и r_2 .

Такая функция имеет вид

$$\begin{aligned}\psi^0 &= f_{l_1 n_1 n_2}^0(\vartheta_2, r_1, r_2) = P_{l_1}(\cos \vartheta_{12}) R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_1}(r_2) = \\ &= \left\{ \sum_{m_1=0}^{l_1} \varepsilon_{m_1} \cos[m_1(\varphi_1 - \varphi_2)] \frac{(l_1 - m_1)!}{(l_1 + m_1)!} P_{l_1}^{m_1}(\cos \vartheta_1) P_{l_1}^{m_1}(\cos \vartheta_2) \right\} R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_1}(r_2), \\ &\omega = 0, \quad (12.3.82)\end{aligned}$$

и соответствует двум частицам, имеющим равные, но направленные в противоположные стороны моменты ($l_2 = l_1$; $m_2 = -m_1$), так что суммарный момент количества движения равен нулю. Конечно, мы могли бы воспользоваться комбинацией таких функций для различных значений l_1 , но различные значения l_1 соответствуют различным энергиям даже в случае отсутствия взаимодействия.

Следовательно, только функция, приведенная в равенстве (12.3.82) для данной невозмущенной энергии $\varepsilon_{n_1 l_1 n_2 l_1}$, имеет суммарный момент количества движения, равный нулю; это имеет место только для тех невозмущенных энергий, для которых $l_2 = l_1$. Отправляясь от формы функции f^0 , мы видим, что дифференциальное уравнение для f в случае, когда $l = m = 0$ (Υ постоянно, $\phi = f^0$), имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial f^0}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left(r_2^2 \frac{\partial f^0}{\partial r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \frac{1}{\sin \vartheta_{12}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_{12}} \left(\sin \vartheta_{12} \frac{\partial f^0}{\partial \vartheta_{12}} \right) + \\ + [\varepsilon - v(r_1) - v(r_2) - \omega(r_{12})] f^0 = 0; \quad (12.3.83)\end{aligned}$$

это уравнение остается в силе даже в случае, когда ω не равно нулю. Конечно, при $\omega \neq 0$ f^0 не будет больше пропорциональной $P_{l_1}(\cos \vartheta_{12})$; зависимость от ϑ_{12} является более сложной, так как $\omega(r_{12})$ зависит от ϑ_{12} . У нас ψ^0 оказывается симметричной по отношению к перестановке частиц 1 и 2 для всех состояний; она не зависит от угла $\varphi_2 - \varphi_1$, изменение которого на противоположный меняет местами частицы пары.

Обращаясь теперь к случаю $l = 1$, мы имеем девять возможностей для Υ_{1mk} :

	$k = 1$	$k = 0$	$k = -1$
$m = 1$	$e^{i\Phi + i\Psi} (1 + \cos \Theta)$	$e^{i\Phi} \sin \Theta$	$e^{i\Phi - i\Psi} (1 - \cos \Theta)$,
$m = 0$	$e^{i\Psi} \sin \Theta$	$\cos \Theta$	$e^{-i\Psi} \sin \Theta$,
$m = -1$	$e^{-i\Phi + i\Psi} (1 - \cos \Theta)$	$e^{-i\Phi} \sin \Theta$	$e^{-i\Phi - i\Psi} (1 + \cos \Theta)$.

Вместо того чтобы классифицировать решения по значениям k , мы будем различать их в соответствии с их четностью и абсолютной величиной k . Такими решениями будут:

	$ k = 1$, четные	$ k = 1$, нечетные	$k = 0$, нечетные
$m = 1$	$e^{i\Phi} [\cos \Psi + i \sin \Psi \cos \Theta]$	$e^{i\Phi} [i \sin \Psi +$ $+ \cos \Psi \cos \Theta]$	$e^{i\Phi} \sin \Theta$
$m = 0$	$\sin \Psi \sin \Theta$	$\cos \Psi \sin \Theta$	$\cos \Theta$
$m = -1$	$e^{-i\Phi} [\cos \Psi - i \sin \Psi \cos \Theta]$	$e^{-i\Phi} [i \sin \Psi -$ $- \cos \Psi \cos \Theta]$	$e^{-i\Phi} \sin \Theta$.

Для данного m окончательное выражение для симметричных и антисимметричных волновых функций может содержать линейные комбинации волновых функций только одинаковой четности. Заметим также, что, так как мы имеем девять независимых состояний, мы должны после симмет-

ризации иметь точно девять независимых волновых функций. Возвращаясь к векторному описанию, мы можем сказать, что эти девять состояний (или их линейные комбинации) соответствуют моментам количества движения двух электронов, которые ориентированы друг относительно друга так, что для суммы векторов $l=1$. Это может произойти в трех случаях: отдельные значения l равны и не антипараллельны; $l_1=l_2+1$ и два вектора антипараллельны; наконец, $l_1=l_2-1$ и два вектора антипараллельны. Для каждого из этих трех случаев имеем три ориентации суммарного момента количества движения относительно оси z .

Начиная с тройки, соответствующей случаю $m=0$, мы сначала берем четную волновую функцию $\sin \Psi \sin \Theta$. Мы смотрим, можно ли найти решение вида $\psi = \sin \Psi \sin \Theta f(\vartheta_2, r_1, r_2)$, которое может быть разложено (при $\omega=0$) на множители типа u . Соответствующая комбинация имеет вид

$$\begin{aligned}\psi^0 &= \sin \Psi \sin \Theta P_{l_1}^1(\cos \vartheta_2) R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_1}(r_2) = \\ &= \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) T_{l_1-1}^1(\cos \vartheta_2) R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_1}(r_2).\end{aligned}$$

Но, согласно формуле сложения полиномов Гегенбауэра, имеем

$$\begin{aligned}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) T_{l_1-1}^1(\cos \vartheta_2) &= 2 \sum_{m_1=1}^{l_1} \frac{m_1 (l_1 - m_1)!}{(l_1 + m_1)!} [\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2]^{m_1-1} \times \\ &\times T_{l_1-m_1}^{m_1}(\cos \vartheta_1) T_{l_1-m_1}^{m_1}(\cos \vartheta_2) \sin[m_1(\varphi_2 - \varphi_1)].\end{aligned}$$

Следовательно, подходящая комбинация для $\omega=0$ имеет вид

$$\begin{aligned}\sin \Psi \sin \Theta f^0 &= \sin \Psi \sin \Theta P_{l_1}^1(\cos \vartheta_{12}) R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_1}(r_2) = \\ &= 2 \sum_{m_1=1}^{l_1} \frac{m_1 (l_1 - m_1)!}{(l_1 + m_1)!} P_{l_1}^{m_1}(\cos \vartheta_1) P_{l_1}^{m_1}(\cos \vartheta_2) \sin[m_1(\varphi_2 - \varphi_1)] R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_1}(r_2)\end{aligned}$$

и соответствующее уравнение для $f(\vartheta_{12}, r_1, r_2)$ (даже при $\omega \neq 0$) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial f}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left(r_2^2 \frac{\partial f}{\partial r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \left[\frac{1}{\sin \vartheta_{12}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_{12}} \left(\sin \vartheta_{12} \frac{\partial f}{\partial \vartheta_{12}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{f}{\sin^2 \vartheta_{12}} \right] + [\varepsilon - v(r_1) - v_2(r_2) - \omega(r_{12})] f = 0, \quad (12.3.84)\end{aligned}$$

что отличается от уравнения (12.3.83) при $l=0$ членом, содержащим $\sin^2 \vartheta_{12}$. Эти функции соответствуют случаю, когда обе частицы имеют одно и то же l , с суммой векторов, равной единице, и с нулевой составляющей вдоль оси z . Так как функция меняет знак при перемене знака $\varphi_2 - \varphi_1$, то она антисимметрична относительно перестановки частиц.

Другая пара функций при $m=0$ более сложна, почему мы особо рассмотрим функцию, соответствующую перестановке частиц $\tilde{f} = f(\vartheta_{12}, r_2, r_1)$. Чтобы сократить уже достаточно длинное рассуждение, мы указываем результаты без подробных доказательств. Составляем комбинацию, являющуюся нечетной:

$$\psi = \cos \Theta [f(\vartheta_{12}, r_1, r_2) + \cos \vartheta_{12} f(\vartheta_{12}, r_2, r_1)] + \sin \Theta \cos \Psi \sin \vartheta_{12} f(\vartheta_{12}, r_2, r_1).$$

В случае когда $\omega=0$, можно положить $f^0(\vartheta_{12}, r_1, r_2) = P_{l_1}(\cos \vartheta_{12}) R_1(r_1) R_2(r_2)$; в этом случае после небольших преобразований получаем

$$\begin{aligned}\psi^0 &= \cos \vartheta_1 P_{l_2}(\cos \vartheta_{12}) R_1(r_1) R_2(r_2) + \cos \vartheta_2 P_{l_2}(\cos \vartheta_{12}) R_2(r_1) R_1(r_2) = \\ &= F(1, 2) + F(2, 1),\end{aligned}$$

где

$$F(1, 2) = \sum_{m_1=0}^{l_2} \frac{\varepsilon_{m_1}}{(2l_2+1)} \cos[m_1(\varphi_1 - \varphi_2)] P_{l_2}^{m_1}(\cos \vartheta_2) \times \\ \times \left[\frac{(l_2 - m_1 + 1)!}{(l_2 + m_1)!} P_{l_2+1}^{m_1}(\cos \vartheta_1) + \frac{(l_2 - m_1)!}{(l_2 + m_1 - 1)!} P_{l_2-1}^{m_1}(\cos \vartheta_1) \right] R_1(r_1) R_2(r_2),$$

а $F(2, 1)$ получается отсюда заменой ϑ_1, φ_1 и r_1 через ϑ_2, φ_2 и r_2 . Это, очевидно, является комбинацией состояний с антипараллельными моментами количества движения частиц, где одна или другая частица имеет l на единицу больше или на единицу меньше, чем другая; требования симметрии перемешивают обе возможности. Очевидно также, что эти функции не изменяются при перестановке частиц. Уравнение для $f(\vartheta_{12}, r_1, r_2)$ в этом случае содержит член с обращенной функцией $\tilde{f} = f(\vartheta_{12}, r_2, r_1)$:

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial f}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left(r_2^2 \frac{\partial f}{\partial r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \frac{1}{\sin \vartheta_{12}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_{12}} \left(\sin \vartheta_{12} \frac{\partial f}{\partial \vartheta_{12}} \right) + \\ + \frac{2}{r_1^2} \left(\operatorname{ctg} \vartheta_{12} \frac{\partial f}{\partial \vartheta_{12}} - f \right) - \frac{2}{r_2^2 \sin \vartheta_{12}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \vartheta_{12}} + [\varepsilon - v(r_1) - v(r_2) - \omega] f = 0. \quad (12.3.85)$$

Третья комбинация, антисимметричная относительно перестановки частиц и снова нечетная, имеет вид

$$\psi = \cos \Theta [f - \cos \vartheta_{12} \tilde{f}] - \sin \Theta \cos \Psi \sin \vartheta_{12} \tilde{f}$$

и при $\omega = 0$ сводится к

$$\cos \vartheta_1 P_{l_2}(\cos \vartheta_{12}) R_1(r_1) R_2(r_2) - \cos \vartheta_2 P_{l_2}(\cos \vartheta_{12}) R_2(r_1) R_1(r_2).$$

Уравнение для f (при $\omega \neq 0$) имеет теперь вид

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial f}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left(r_2^2 \frac{\partial f}{\partial r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \frac{1}{\sin \vartheta_{12}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_{12}} \left(\sin \vartheta_{12} \frac{\partial f}{\partial \vartheta_{12}} \right) + \\ + \frac{2}{r_1^2} \left(\operatorname{ctg} \vartheta_{12} \frac{\partial f}{\partial \vartheta_{12}} - f \right) + \frac{2}{r_2^2 \sin \vartheta_{12}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \vartheta_{12}} + [\varepsilon - v(r_1) - v(r_2) - \omega] f = 0, \quad (12.3.86)$$

что снова соответствует состоянию, в котором одна частица имеет момент, на единицу больший или на единицу меньший чем другая; проекция суммарного момента количества движения на ось z равна нулю. Уравнение для f отличается от уравнения (12.3.85) только знаком перед членом, содержащим $\partial \tilde{f} / \partial \vartheta_{12}$.

Остальные шесть состояний могут быть скомбинированы подобным же образом; ниже мы выписываем сводку результатов

$$\begin{aligned} \psi_{11s} &= e^{i\Phi} [f_{11s} \sin \Theta + \tilde{f}_{11s} (\sin \Theta \cos \vartheta_{12} + i \sin \Psi \sin \vartheta_{12} + \cos \Theta \cos \Psi \sin \vartheta_{12})] = \\ &= e^{i\varphi_1} \sin \vartheta_1 f_{11s} + e^{i\varphi_2} \sin \vartheta_2 \tilde{f}_{11s}, \\ \psi_{11a} &= e^{i\varphi_1} \sin \vartheta_1 f_{11a} - e^{i\varphi_2} \sin \vartheta_2 \tilde{f}_{11a}, \\ \psi_{110} &= e^{i\Phi} (\cos \Psi - i \cos \Theta \sin \Psi) f_{110} = \\ &= - (e^{i\varphi_1} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - e^{i\varphi_2} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2) \operatorname{cosec} \vartheta_{12} f_{110}, \\ \psi_{10s} &= f_{10s} \cos \Theta + \tilde{f}_{10s} (\cos \Theta \cos \vartheta_{12} + \sin \Theta \sin \vartheta_{12} \cos \Psi) = \cos \vartheta_1 f_{10s} + \cos \vartheta_2 \tilde{f}_{10s}, \\ \psi_{10a} &= \cos \vartheta_1 f_{10a} - \cos \vartheta_2 \tilde{f}_{10a}, \\ \psi_{100} &= \sin \Psi \sin \Theta f_{100}, \\ \psi_{1, -1s} &= \bar{\psi}_{11s}, \quad \psi_{1, -1a} = \bar{\psi}_{11a}, \quad \psi_{1, -10} = \bar{\psi}_{110}; \end{aligned} \quad (12.3.87)$$

первый индекс у ψ дает значение суммарного момента количества движения l , второй—его компоненту m вдоль оси z , а последний—свойства симметрии ψ . Множители f с последним индексом 0 являются решениями уравнения (12.3.84), а с индексом a —удовлетворяют уравнению (12.3.86); соответствующие функции ψ антисимметричны относительно перестановки частиц. Множители f с последним индексом s удовлетворяют уравнению (12.3.85), а соответствующие ψ симметричны относительно перестановки частиц. Однако эти функции видоизменяются, если частицы имеют спины, которые также взаимодействуют.

Исследование при $l > 1$ остается в основном тем же, но становится несколько более утомительным. При $l = 2$ имеем 25 различных функций, соответствующих случаю, когда сумма векторов моментов количества движения одной частицы равна 2 с пятью различными ориентациями суммарного момента относительно оси z . Такая результирующая может получиться, если частица 2 имеет l_2 , лежащее между $l_1 - 2$ и $l_1 + 2$, что и дает 5×5 состояний. Истинные решения являются различными их линейными комбинациями, а уравнения для соответствующих $f(\delta_{12}, r_1, r_2)$ все неразделимы, если взаимодействие $w(r_{12}) \neq 0$. Соответствующее исследование для более чем двух частиц будет утомительнее.

Связанные, свободные и «поверхностные» состояния. Во многих случаях, представляющих интерес, члены, содержащие потенциальную энергию $v(r_n)$ и $w(r_{mn})$, стремятся к нулю при больших значениях радиального аргумента. Положение подобно рассмотренному на стр. 657 и следующих, но только пространство конфигураций, соответствующее функциям ψ , будет $3N$ -мерным. Для положительных энергий допустимы все значения, и большая часть состояний соответствует тому, что все частицы являются свободными, движутся из бесконечности, отражаются от потенциальной «ямы» вблизи начала координат и удаляются обратно к бесконечности. Возможные состояния соответствуют «плоской» волне $\exp(\sum i k_n \cdot r_n)$ для падающей части при энергии $\epsilon = \sum k_n^2$. Если члены взаимодействия w равны нулю, каждая частица подвергается действию только своего собственного потенциала $v(r_n)$, что отвечает отражению плоской волны от каждой из $3N - 3$ гиперповерхностей, соответствующих тому, что каждая из частиц по очереди проходит через начало. Эти гиперповерхности занимают место «зеркал» в прежнем примере.

В дополнение к «наклонным» волнам, когда каждая частица свободна, здесь встречаются «поверхностные» волны, соответствующие случаям, когда одна или несколько частиц находятся в связанном состоянии; эти волны сосредоточены вблизи того или другого гиперповерхностного «зеркала» из числа упомянутых в предыдущем абзаце. Энергия ϵ этих поверхностных волн может быть положительной, а также и отрицательной, когда энергия связи связанных частиц (являющаяся отрицательной) численно больше суммы кинетических энергий свободных частиц. Следовательно, для части отрицательной области энергия имеет непрерывные допустимые значения. Эти состояния поверхностных волн всегда вырождены, так как связанной может быть какая-либо одна частица, а остальные свободны. Однако до тех пор, пока мы пренебрегаем взаимодействиями, эти состояния «не перемешиваются»; если одна из частиц вначале была связанной, она остается связанной. Наконец, существуют строго дискретные уровни энергии, соответствующие состояниям, в которых все частицы связаны. [Иногда этих состояний нет, как, например, для кулоновского поля Ze^2/r с несколько большим количеством электронов, чем значение Z для поля.] Эти связанные состояния имеют волновые функции, которые велики только вблизи начала координат; значения энергии этих состояний отрицательны, хотя некоторые из этих дискретных уровней (для нескольких частиц в высших связанных состоя-

ниях) могут быть выше возможных непрерывных уровней для некоторых из поверхностных волн. До тех пор пока нет взаимодействий, ни одно из этих состояний не «смешивается» с другими.

Введение членов, содержащих взаимодействие ψ , добавляет дополнительные «зеркала», расположенные вдоль тех гиперповерхностей, которые соответствуют двум частицам, совпадающим по своему положению. Как и в случае простой задачи, рассмотренной раньше, эти дополнительные члены сразу «перемешивают» предыдущие состояния. Такое «перемешивание» может произойти либо благодаря новым отражениям от этих дополнительных зеркал (одна частица обменивается состоянием с другой), либо благодаря возможности перехода «наклонных» волн в «поверхностные» (одна частица переходит в связанное состояние, отдавая излишнюю энергию другой частице) или наоборот, либо, наконец, благодаря возникновению дополнительных «гиперсферических расходящихся» волн, идущих от $3N$ -мерного

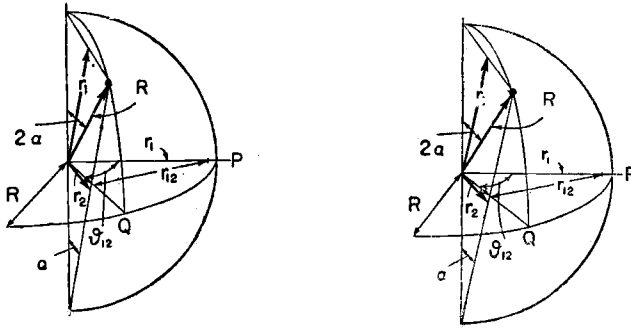


Рис. 12.10. Геометрическое построение, связывающее R и α с r_1 , r_2 и ϑ_{12} .

начала координат [все частицы перераспределяют свои кинетические энергии, приобретая новые волновые числа k'_n , подчиненные только условию $\sum (k'_n)^2 = \sum (k_n)^2 = \varepsilon$].

Это характерное поведение может быть иллюстрировано с помощью модели из двух частиц, рассмотренной в двух предыдущих пунктах. Часть функции ψ , зависящая от углов Эйлера, может быть отделена, так как она определяет ориентацию системы в пространстве, а не относительную ориентацию двух радиус-векторов. Этот множитель γ является линейной комбинацией функций, определенных в (12.3.82). Множитель f , зависящий от длин радиус-векторов r_1 и r_2 и угла между ними ϑ_{12} , изменяется, когда «включаются» силы, действующие между частицами. Отметим, что если пренебречь членом взаимодействия ψ , то этот множитель превращается в произведение сферической функции от $\cos \vartheta_{12}$ и радиальных функций от r_1 и r_2 .

Волновую функцию можно описать несколько лучше, если перейти к гиперсферическим координатам R и α , таким, что $r_1 = R \cos \alpha$, $r_2 = R \sin \alpha$. Множитель f будет тогда функцией от R , 2α и ϑ_{12} . Геометрическая связь символически изображена на рис. 12.10, где 2α изменяется от 0 до π , как и ϑ_{12} , так что нам достаточно только четырех октантов. Построение, нужное для получения r_1 и r_2 , показано на рисунке: если один из них расположен на линии OP , а другой на OQ , то расстояние между их концами равно r_{12} . В этой геометрической схеме связанные состояния имеют множители f , остающиеся малыми везде, кроме точек, близких к началу координат; «поверхностные» волны сосредоточены вблизи полярных осей $2\alpha = 0$, $2\alpha = \pi$; силы взаимодействия велики вблизи линии $2\alpha = \pi/2$, $\vartheta_{12} = 0$ (линия OP). Однако геометрическая схема только символична, так как масштабные множители для этих координат не соответствуют действительным масштабным множителям.

Функция Грина для системы двух частиц. Для того чтобы продолжить изучение поведения системы двух частиц в центральном силовом поле при наличии взаимодействия, необходимо найти функцию Грина для двух частиц при отсутствии центрального поля и взаимодействия. Для этой цели нужно решить шестимерное неоднородное уравнение Гельмгольца

$$[\nabla_1^2 + \nabla_2^2 + k^2]G = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2').$$

Наиболее «физической» системой координат для выражения G будет система $\Phi, \Theta, \Psi, \vartheta_{12}, \alpha$ и R , содержащая углы Эйлера, рассмотренные несколькими страницами раньше. Но эти координаты не ортогональны; лучше сначала разложить G в ортогональных координатах, а после разложения, если нужно, изменить полученные ряды.

Наиболее употребительной ортогональной системой, не слишком отличающейся от системы с углами Эйлера, а также не слишком отличающейся от системы, применяемой в случае, когда частицы рассматриваются отдельно, будет *гиперсферическая система для двух частиц*, определенная следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \alpha \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, & x_2 &= r \sin \alpha \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, \\y_1 &= r \cos \alpha \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, & y_2 &= r \sin \alpha \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2, \\z_1 &= r \cos \alpha \cos \vartheta_1, & z_2 &= r \sin \alpha \cos \vartheta_2, \\h_r &= 1, & h_\alpha &= r, & h_{\vartheta_1} &= r \cos \alpha, & h_{\varphi_1} &= r \cos \alpha \sin \vartheta_1, \\h_{\vartheta_2} &= r \sin \alpha, & h_{\varphi_2} &= r \sin \alpha \sin \vartheta_2, & r_1 &= r \cos \alpha, & r_2 &= r \sin \alpha, \\r_{12} &= r \sqrt{1 - \sin 2\alpha [\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)]}.\end{aligned}$$

(12.3.88)

Элемент объема в этих координатах имеет вид

$$r^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\varphi_1 d\varphi_2 d\alpha dr,$$

площадь поверхности гиперсферы радиуса r равна $\pi^3 r^5$, а уравнение Гельмгольца преобразуется к виду

$$\begin{aligned}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2 + k^2)\psi &\doteq \frac{1}{r^5} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^5 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) + \\&+ \frac{1}{r^2 \cos^2 \alpha} \left[\frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left(\sin \vartheta_1 \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1^2} \right] + \\&+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha} \left[\frac{1}{\sin \vartheta_2} \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \left(\sin \vartheta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta_2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_2^2} \right] + k^2 \psi = 0.\end{aligned}\quad (12.3.89)$$

Зависимость функции ψ от величин φ и ϑ хорошо известна; соответствующие множители являются сферическими функциями с квантовыми числами l_1, m_1, l_2, m_2 , и результаты операций в квадратных скобках равны соответственно $l_1(l_1+1)\psi$ и $l_2(l_2+1)\psi$. Уравнение для множителя, зависящего от α , имеет вид

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) - \left[\frac{l_1(l_1+1)}{\cos^2 \alpha} + \frac{l_2(l_2+1)}{\sin^2 \alpha} \right] A = -BA,$$

что может быть преобразовано в уравнение для гипергеометрической функции от $\sin^2 \alpha$. Решение, конечное при $\alpha = 0$, а также соответствующее значение постоянной разделения B имеют вид

$$A = \cos^{l_1} \alpha \sin^{l_2} \alpha F \left(-n, l_1 + l_2 + n + 2 \left| l_2 + \frac{3}{2} \right| \sin^2 \alpha \right), \quad (12.3.90)$$

$$B = (l_1 + l_2 + 2n)(l_1 + l_2 + 2n + 4),$$

где n должно быть равно нулю или положительному целому числу, так

как A должно быть конечным при $\alpha = \pi/2$; в этом случае F является конечным полиномом (полиномом Якоби) с $n+1$ членами.

Окончательное уравнение для радиального множителя функции ψ имеет вид

$$\frac{1}{r^5} \frac{d}{dr} \left(r^5 \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{(l_1 + l_2 + 2n + 2)^2 - 4}{r^2} \right] R = 0$$

и его решения выражаются через функции Бесселя $r^{-2} J_{l_1 + l_2 + 2n + 2}(kr)$ или $r^{-2} N_{l_1 + l_2 + 2n + 2}(kr)$. Следовательно, полное решение уравнения (12.3.89), конечное при $r = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\cos}{\sin} (m_1 \varphi_1) P_{l_1}^{m_1} (\cos \vartheta_1) \frac{\cos}{\sin} (m_2 \varphi_2) P_{l_2}^{m_2} (\cos \vartheta_2) \cos^{l_1} \alpha \sin^{l_2} \alpha \times \\ & \times F \left(-n, l_1 + l_2 + n + 2 \middle| l_2 + \frac{3}{2} \middle| \sin^2 \alpha \right) \frac{1}{r^2} J_{l_1 + l_2 + 2n + 2}(kr). \end{aligned}$$

Для расходящихся волн мы пользуемся функцией Ганкеля $H_{l_1 + l_2 + 2n + 2}^{(1)}(kr)$ вместо функции J ; в этом случае ψ , очевидно, бесконечна при $r = 0$.

Функция Грина может быть выражена через шестимерное расстояние R между источником и наблюдателем, определенное равенством

$$\begin{aligned} R^2 = & (r)^2 + (r')^2 - \\ & - 2rr' \cos \alpha \cos \alpha' [\cos \vartheta_1 \cos \vartheta'_1 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta'_1 \cos (\varphi_1 - \varphi'_1)] - \\ & - 2rr' \sin \alpha \sin \alpha' [\cos \vartheta_2 \cos \vartheta'_2 + \sin \vartheta_2 \sin \vartheta'_2 \cos (\varphi_2 - \varphi'_2)]. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{ik^2}{16\pi^2 R^2} H_2^{(1)}(kR) \simeq \begin{cases} \frac{1}{4\pi^3 R^4}, & kR \ll 1, \\ \frac{1}{2} ik^4 \frac{e^{ikR}}{(2\pi ikR)^{5/2}}, & kR \gg 1. \end{cases} \quad (12.3.94)$$

Нас интересует также выражение G в координатах наблюдателя $r, \alpha, \dots, \varphi_2$ и координатах источника $r', \alpha', \dots, \varphi'_2$ относительно произвольного начала и произвольной полярной оси. Это выражение может быть получено методом, намеченным в гл. 7. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = & \frac{i}{16\pi (rr')^2} \times \\ & \times \sum_{l_1 l_2 n} (2l_1 + 1)(2l_2 + 1) \frac{(l_1 + l_2 + 2n + 2)(l_1 + l_2 + n + 1)! \Gamma\left(l_2 + n + \frac{3}{2}\right)}{n! \left[\Gamma\left(l_2 + \frac{3}{2}\right) \right]^2 \Gamma\left(l_1 + n + \frac{3}{2}\right)} \times \\ & \times \cos^{l_1} \alpha \sin^{l_2} \alpha F \left(-n, l_1 + l_2 + n + 2 \middle| l_2 + \frac{3}{2} \middle| \sin^2 \alpha \right) \times \\ & \times \cos^{l_1} \alpha' \sin^{l_2} \alpha' F \left(-n, l_1 + l_2 + n + 2 \middle| l_2 + \frac{3}{2} \middle| \sin^2 \alpha' \right) \times \\ & \times \left\{ \sum_{m_1 m_2} \varepsilon_{m_1} \varepsilon_{m_2} \frac{(l_1 - m_1)! (l_2 - m_2)!}{(l_1 + m_1)! (l_2 + m_2)!} \cos [m_1 (\varphi_1 - \varphi'_1)] \cos [m_2 (\varphi_2 - \varphi'_2)] \times \right. \\ & \times P_{l_1}^{m_1} (\cos \vartheta_1) P_{l_1}^{m_1} (\cos \vartheta'_1) P_{l_2}^{m_2} (\cos \vartheta_2) P_{l_2}^{m_2} (\cos \vartheta'_2) \left. \right\} \times \\ & \times \begin{cases} J_{l_1 + l_2 + 2n + 2}(kr) H_{l_1 + l_2 + 2n + 2}(kr'), & r < r', \\ J_{l_1 + l_2 + 2n + 2}(kr') H_{l_1 + l_2 + 2n + 2}(kr), & r > r'. \end{cases} \quad (12.3.92) \end{aligned}$$

Отсюда можно получить выражение для «плоской волны»; пусть, например, частица 1 движется вдоль оси z_1 из $-\infty$ с волновым числом

$k_1 = Mv_1/\hbar = k \cos \beta$, а частица 2 — с волновым числом $k_2 = Mv_2/\hbar = k \sin \beta$ в направлении θ в плоскости x_3, z_3 . Поместим источник в точке $r' \rightarrow \infty$, $\alpha' = \beta$, $\vartheta_1' = -\pi$, $\vartheta_2' = -\theta$, $\varphi_2' = \pi$ и сравним выражения (12.3.91) и (12.3.92):

$$\begin{aligned} & \exp [ikr \cos \beta \cos \alpha \cos \vartheta_1 + ikr \sin \beta \sin \alpha (\cos \theta \cos \vartheta_2 + \sin \theta \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2)] = \\ & = \frac{\pi}{k^2 r^2} \sum_{l_1 l_2 n} (-1)^n i^{l_1+l_2} (2l_1+1) (2l_2+1) \times \\ & \times \frac{(l_1+l_2+2n+2) (l_1+l_2+n+1)! \Gamma(l_2+n+\frac{3}{2})}{n! \left[\Gamma(l_2+\frac{3}{2}) \right]^2 \Gamma(l_1+n+\frac{3}{2})} \times \\ & \times \cos^{l_1} \alpha' \sin^{l_2} \alpha' F\left(-n, l_1+l_2+n+2 \left| l_2+\frac{3}{2} \right| \sin^2 \beta\right) \cos^{l_1} \alpha \sin^{l_2} \alpha \times \\ & \times F\left(-n, l_1+l_2+n+2 \left| l_2+\frac{3}{2} \right| \sin^2 \alpha\right) P_{l_1}(\cos \vartheta_1) J_{l_1+l_2+2n+2}(kr) \times \\ & \times \left\{ \sum_{m_2=0}^{l_2} \varepsilon_{m_2} \frac{(l_2-m_2)!}{(l_2+m_2)!} P_{l_2}^{m_2}(\cos \theta) P_{l_2}^{m_2}(\cos \vartheta_2) \cos(m_2 \varphi_2) \right\}. \quad (12.3.93) \end{aligned}$$

Пользуясь функциями Грина в каком-либо интегральном уравнении, мы часто имеем дело только с решениями данной симметрии или данной ориентации; в таких случаях следует пользоваться только той частью G , которая имеет сама соответствующую симметрию или ориентацию. Так как все собственные функции в формуле (12.3.92) принадлежат ортогональной системе, другие члены входить не должны. Это свойство рядов полезно в частности, когда мы имеем дело с функциями данного суммарного момента количества движения; мы можем тогда отобрать только часть ряда, соответствующую данным l и m и пользоваться ею одною.

Например, из равенства (12.3.82) видно, что функция, для которой суммарный момент количества движения равен нулю, имеет форму $P_{l_1}(\cos \vartheta_{12}) R_1(r_1) R_2(r_2)$. Поэтому часть G , для которой $l=0$, соответствует той части суммы при $l_2=l_1$, $m_2=m_1$, которая симметрична относительно $(\varphi_1 - \varphi_2)$:

$$\begin{aligned} G_{l=0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \frac{i}{8\pi (rr')^2} \sum_{n l_1} (2l_1+1) \frac{(l_1+n+1) (2l_1+n+1)!}{n! \left[\Gamma(l_1+\frac{3}{2}) \right]^2} \times \\ & \times (\sin \alpha' \cos \alpha')^{l_1} F\left(-n, 2l_1+n+2 \left| l_1+\frac{3}{2} \right| \sin^2 \alpha'\right) (\sin \alpha \cos \alpha)^{l_1} \times \\ & \times F\left(-n, 2l_1+n+2 \left| l_1+\frac{3}{2} \right| \sin^2 \alpha\right) P_{l_1}(\cos \vartheta_{12}') P_{l_1}(\cos \vartheta_{12}) \times \\ & \times \begin{cases} J_{2l_1+2n+2}(kr) H_{2l_1+2n+2}(kr'), & r < r', \\ J_{2l_1+2n+2}(kr') H_{2l_1+2n+2}(kr), & r > r'; \end{cases} \end{aligned}$$

здесь частная сумма не зависит от углов Эйлера Φ , Θ и Ψ . Заметим, что

$$F\left(-n, n+2l+2 \left| l+\frac{3}{2} \right| \sin^2 \alpha\right) = \frac{2^{l+\frac{1}{2}} n! \Gamma(l+\frac{3}{2})}{(n+2l+1)!} T_n^{l+\frac{1}{2}}(\cos 2\alpha).$$

Подобные частные суммы можно составить для других значений l и m , воспользовавшись, например, комбинациями (12.3.87). Каждая из этих частных сумм является комбинацией функций от Φ , Θ , Ψ , умноженных на функции от α , α' , ϑ_{12} , ϑ_{12}' , r и r' . В некоторых случаях мы должны пользоваться функциями для переставленных частиц. Это достигается перестановкой ϑ_1, φ_1 с ϑ_2, φ_2 и заменой α на $\pi/2 - \alpha$, что переставляет r_1 и r_2 .

В таких случаях мы можем воспользоваться соотношением

$$F\left(-n, l_1 + l_2 + n + 2 \left| l_2 + \frac{3}{2} \right| \sin^2 \alpha\right) = \\ = (-1)^{l_1 + l_2 + n} \frac{\Gamma\left(l_2 + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(l_1 + \frac{3}{2}\right)} F\left(-n, l_1 + l_2 + n + 2 \left| l_1 - \frac{3}{2} \right| \cos^2 \alpha\right),$$

чтобы найти правильную комбинацию.

Иногда применяется также несколько иное представление функции Грина, а именно представление с помощью интеграла Фурье. Методами, уже хорошо нам знакомыми, находим

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{64\pi^6} \int \dots \int \frac{e^{i\zeta_1(x_1-x'_1) + \dots + i\zeta_2(z_2-z'_2)}}{\xi_1^2 + \dots + \xi_2^2 - k^2} d\xi_1 \dots d\xi_2, \quad (12.3.94)$$

где шестикратное интегрирование производится по составляющим $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ волновых векторов по прямоугольным осям. Этот интеграл, если необходимо, можно преобразовать к гипербесферическим координатам с помощью равенств (12.3.88); в этом случае обычно удобно преобразовать также и пространство волновых векторов к гипербесферическим координатам с «радиусом» k и пятью углами.

Связанные состояния. Для связанных состояний мы должны найти и допустимую энергию и соответствующую волновую функцию. Для расчета энергии можно воспользоваться вариационным методом. Мы можем тогда улучшить форму волновой функции, воспользовавшись результатами вариационных расчетов в интегральном уравнении для ψ , применяя функцию Грина (см. гл. 9). Интеграл, минимум которого мы ищем, для двух частиц имеет вид

$$H = \int \dots \int \bar{\varphi} [-\nabla_1^2 - \nabla_2^2 + v(r_1) + v(r_2) + w(r_{12})] \varphi dv_1 dv_2.$$

Минимальное значение H для нормированной волновой функции φ равно допустимому значению энергии.

В качестве простого примера можно рассмотреть атом с зарядом ядра, равным Ze , имеющий два связанных электрона в их наинизших состояниях. В этом случае $v(r) = -Ze^2/r$ и $w(r_{12}) = q^2/r_{12}$, где $q^2 = 2Me^2/\hbar^2$, e — заряд электрона. Очень простая волновая функция для этого состояния имеет вид

$$\varphi = \frac{\mu^3}{\pi} e^{-\mu(r_1+r_2)}.$$

Эта функция уже нормирована. Так как φ симметрична, часть интеграла, соответствующая кинетической энергии, равна

$$T = -2 \int \dots \int \bar{\varphi} \nabla_1^2 \varphi dv_1 dv_2 = 2\mu^2.$$

Среднее потенциала ядра равно

$$V = -2Zq^2 \int \dots \int \frac{1}{r_1} \varphi^2 dv_1 dv_2 = -2\mu Zq^2.$$

Интеграл для потенциала взаимодействия получается с помощью разложения $1/r_{12}$ в ряд по сферическим функциям

$$\frac{1}{r_{12}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta_{12}) \begin{cases} \frac{r_1^n}{r_2^{n+1}}, & r_2 > r_1, \\ \frac{r_2^n}{r_1^{n+1}}, & r_1 > r_2. \end{cases}$$

Поскольку волновая функция не зависит от ϑ_{12} , в интеграле играет роль

только первый член этого ряда, так что имеем

$$W = q^2 \int \dots \int \varphi^2 \frac{1}{r_{12}} dv_1 dv_2 = \\ = 16\mu^6 q^2 \int_0^\infty e^{-2\mu r_1} r_1^2 dr_1 \left[\frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} e^{-2\mu r_2} r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^\infty e^{-2\mu r_2} r_2 dr_2 \right] = \frac{5}{8} \mu q^2.$$

Следовательно, $H = 2\mu^2 - 2\mu q^2(Z - 5/16)$; наилучшее значение μ является корнем уравнения $dH/d\mu = 0$ и оно равно $\mu = (1/2)q^2(Z - 5/16)$; наилучшее значение энергии наимизшего связанного состояния, которое может быть получено при этой простой форме пробной функции, равно

$$\varepsilon \simeq -\frac{1}{2} \left(Z - \frac{5}{16} \right)^2 q^4, \text{ или } E \simeq - \left(Z - \frac{5}{16} \right)^2 \frac{Me^4}{\hbar^2}. \quad (12.3.95)$$

Это действительно дает достаточно хорошее приближенное значение энергии, несмотря на явную недостаточность пробной функции. Измеренные значения энергии для наимизших состояний системы с двумя электронами при $Z = 2, 3, 4, 5, 6$ (He, Li⁺, Be⁺⁺, B⁺⁺⁺, C⁺⁺⁺⁺) в единицах $-Me^4/\hbar^2$ равны

$$-2\varepsilon_{\text{экср.}} = 5,807; 14,560; 27,313; 44,065; 64,813,$$

в то время, как соответствующие значения из выражения (12.3.95) равны $-2\varepsilon = 5,695; 14,445; 27,195; 43,945; 64,695;$

почти постоянная разность дает ошибку меньше двух процентов для $Z = 2$ и меньше 0,2% для $Z = 6$. В действительности чрезвычайно хорошим выражением для ε было бы $-(1/2)(Z - 5/16)^2 - 0,120$.

Мы можем теперь подставить это приближенное выражение для ψ в правую часть интегрального уравнения, образованного с помощью функции Грина, полученной в предыдущем пункте,

$$\psi(\mathbf{r}) = - \int \dots \int [v(r'_1) + v(r'_2) + w(r'_{12})] \psi(\mathbf{r}') G_{V^-}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dv'_1 dv'_2,$$

где $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ — шестимерные векторы в пространстве конфигураций двух частиц. Выбираем k^2 в функции Грина в соответствии с энергией связанного состояния ε (отрицательной, так что k мнимое), предполагая, что энергию мы определили достаточно точно [как, например, в равенстве (12.3.95)]. Подставляя приближенное выражение ψ в интеграл и выполняя интегрирование, получим улучшенное выражение для ψ .

Пробная волновая функция является функцией только от r и α [см. равенства (12.3.88)] и не зависит от $\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1$ и φ_2 . Так как функции v также зависят только от r и α , то первые два члена интеграла содержат только тот член ряда (12.3.92), в котором $l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 0$. Так как

$$w(r_{12}) = \frac{q^2}{r_{12}} = \frac{q^2}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \vartheta_{12}) \begin{cases} \sec \alpha \operatorname{tg}^l \alpha, & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4} \pi, \\ \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{ctg}^l \alpha, & \frac{1}{4} \pi \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \pi, \end{cases}$$

то третий член интеграла будет содержать только те члены, у которых $l_1 = l_2, m_1 = m_2 = 0$, т. е. члены, выписанные для $G_{l=0}$.

Члены интеграла, не зависящие от ϑ_{12} , получить очень легко. Часть функции G , нужная здесь, имеет вид

$$G_0 = \frac{i}{8\pi^2 (rr')^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin [2(n+1)\alpha] \sin [2(n+1)\alpha']}{\sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha' \cos \alpha'} \times \\ \begin{cases} J_{2n+2}(i\sqrt{2}\mu r') H_{2n+2}(i\sqrt{2}\mu r), & r > r', \\ H_{2n+2}(i\sqrt{2}\mu r') J_{2n+2}(i\sqrt{2}\mu r), & r < r', \end{cases}$$

где мы полагаем $k^2 = \epsilon = -2\mu^2 = -(1/2)q^4(Z - 5/16)^2$, как и в равенстве (12.3.95). Функция $v(r'_1) + v(r'_2)$ принимает вид $-(q^2 Z/r')(\sec \alpha' + \sec \alpha')$ и приближенная волновая функция равна

$$\frac{\mu^3}{\pi} e^{-\mu r' (\sin \alpha' + \cos \alpha')} = \frac{\mu^3}{\pi} e^{-V \sqrt{2} \mu r' \cos \beta},$$

где $\beta = \alpha' - \pi/4$. Первый член ряда для $\omega(r_{12})$, также не зависящий от ϑ_{12} , равен $\left(\frac{q^2}{r}\right)_{\text{cosec}}^{\text{sec}} \alpha$, где секанс берется при $0 < \alpha < \pi/4$, а косеканс — при $\pi/4 < \alpha < \pi/2$.

Сопоставляя все эти множители и пользуясь полуцилиндрическими функциями, определенными в конце этой главы, мы получаем выражение для той части функции ψ , которая не зависит от ϑ_{12} (т. е. используется только первый член ω):

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^3 q^2}{2\pi r^2} \sum_n \frac{\sin [2(n+1)\alpha]}{\sin 2\alpha} \int_0^\infty \{ \} (r')^2 dr' \times \\ & \times V \sqrt{2} \left\{ Z \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \left[2(n+1)\beta + \frac{n\pi}{2} \right] \cos \beta e^{-V \sqrt{2} \mu r \cos \beta} d\beta - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{\pi/4} \cos \left[2(n+1)\beta + \frac{n\pi}{2} \right] (\cos \beta + \sin \beta) e^{-V \sqrt{2} \mu r \cos \beta} d\beta \right\} = \\ & = \frac{q^3}{2r^2} \sum_m (-1)^m \frac{\sin [2(2m+1)\alpha]}{\sin 2\alpha} \left\{ H_{4n+2}(iz) \times \right. \\ & \quad \times \int_0^z J_{4n+2}(iz') \left[\left(Z - \frac{1}{2} \right) \frac{d}{dz'} J_{4n+2}^{(4)}(iz') - \frac{1}{2} \frac{d}{dz'} E_{4n+2}^{(4)}(iz') \right] (z')^2 dz' + \\ & \quad + J_{4n+2}(iz) \int_z^\infty H_{4n+2}(iz') \left[\left(Z - \frac{1}{2} \right) \frac{d}{dz'} J_{4n+2}^{(4)}(iz') - \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{d}{dz'} E_{4n+2}^{(4)}(iz') \right] (z')^2 dz' \right\}, \end{aligned}$$

где $\{ \}$ в первом интеграле заменяет комбинации H_{2n+2} и J_{2n+2} , входящие в G , и где $z = \sqrt{2} \mu r$, $z' = \sqrt{2} \mu r'$. Эта часть интеграла аналогична ряду (12.3.71); она не зависит от угла ϑ_{12} ; следовательно, она немногим лучше пробной функции, с которой мы начали.

Однако несколько следующих членов разложения ω дают некоторое улучшение. Интегралы подобны тем, которые выписаны для первого члена, а интегралы по r могут быть в случае необходимости выписаны явно, если воспользоваться интегральными представлениями функции Бесселя.

Вариационные методы. Во многих случаях, однако, чтобы улучшить выражение волновой функции, удобнее пользоваться вариационными методами. Если желают иметь волновую функцию для наинизшего состояния, в которой было бы принято во внимание взаимодействие между частицами, можно испытать функцию, принимающую малые значения при малом r_{12} , но не зависящую от r_{12} , когда r_{12} велико, такую, например, как

$$\varphi(\mu, \lambda) = e^{-\mu(r_1+r_2)} [1 - \lambda e^{-\mu r_{12}}]$$

с двумя параметрами μ и λ . Эта функция не нормирована, так что интеграл для H нужно будет разделить на интеграл от квадрата φ .

Даже не прибегая к подробным расчетам, можно получить некоторые общие свойства интегралов, подлежащих варьированию. Например, заметив, что μ является масштабным множителем, можно видеть, что

$$\begin{aligned}\int \dots \int \varphi^2 dv_1 dv_2 &= \mu^{-6} N(\lambda), \\ \int \dots \int \varphi (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) \varphi dv_1 dv_2 &= -2\mu^{-4} T(\lambda), \\ \int \dots \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \varphi^2 dv_1 dv_2 &= 2\mu^{-5} V(\lambda), \\ \int \dots \int \frac{1}{r_{12}} \varphi^2 dv_1 dv_2 &= \mu^{-5} W(\lambda),\end{aligned}$$

где величины N , T , V и W не зависят от μ . Мы можем теперь формально искать минимум энергии

$$H = 2\mu^2 \frac{T}{N} - 2\mu Z q^2 \frac{V}{N} + \mu q^2 \frac{W}{N}$$

относительно μ . При $\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0$

$$\mu = \frac{1}{2} q^2 \left(Z \frac{V}{T} - \frac{1}{2} \frac{W}{T} \right), \quad \epsilon(\lambda) = -\frac{1}{2} q^4 \frac{T}{N} \left(Z \frac{V}{T} - \frac{1}{2} \frac{W}{T} \right)^2, \quad (12.3.96)$$

что является очевидным обобщением выражения (12.3.95). Наилучшее значение λ и соответствующее наилучшее выражение энергии получаются при достижении функцией $\epsilon(\lambda)$ минимума. (Нужно, однако, заметить, что такое простое выполнение варьирования возможно только в том случае, когда все потенциальные энергии являются кулоновскими потенциалами, т. е. обратно пропорциональны расстояниям.)

Для расчета только что определенных интегралов более удобными координатами являются координаты Хиллерааса $u = r_{12}$, $s = r_1 + r_2$, $t = r_1 - r_2$. Обычный элемент объема

$$dv_1 dv_2 = d\varphi_1 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 r_1^2 dr_1 d\varphi_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 r_2^2 dr_2$$

может быть видоизменен, если направление вектора $\mathbf{r}_2$ отнести к вектору $\mathbf{r}_1$ (см. рис. 12.9):

$$dv_1 dv_2 = d\varphi_1 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\psi \sin \vartheta_{12} d\vartheta_{12} r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2.$$

Если подинтегральные функции зависят только от r_1 , r_2 и r_{12} , интегрирование по углам φ_1 , ϑ_1 и ψ может быть выполнено и дает множитель $8\pi^2$, так что весь интеграл будет равен

$$\int \dots \int F(r_1, r_2, r_{12}) dv_1 dv_2 = \int \int \int F dv,$$

где

$$dv = 8\pi^2 \sin \vartheta_{12} d\vartheta_{12} r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2.$$

Так как

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \vartheta_{12}, \quad \text{то} \quad r_1 r_2 \sin \vartheta_{12} d\vartheta_{12} = r_{12} dr_{12},$$

а следовательно

$$dv = 8\pi^2 r_{12} r_1 r_2 dr_{12} dr_1 dr_2 = \pi^2 u (s^2 - t^2) du ds dt,$$

где $u = r_{12}$, $s = r_1 + r_2$, $t = r_1 - r_2$ и $-u \leq t \leq u$, $0 \leq u \leq s < \infty$.

Если подинтегральное выражение F симметрично относительно t , то весь интеграл может быть записан следующим образом:

$$\int \dots \int F dv_1 dv_2 = 2\pi^2 \int_0^\infty ds \int_0^s u du \int_0^u (s^2 - t^2) F dt,$$

и, если положить $\sigma = \mu s$, $\tau = \mu t$ и $\eta = \mu u$, интегралы от потенциалов для пробной функции $e^{-\sigma}(1 - \lambda e^{-\eta})$ будут равны

$$W(\lambda) = 2\pi^2 \int_0^\infty e^{-2\sigma} d\sigma \int_0^\sigma (1 - 2\lambda e^{-\eta} + \lambda^2 e^{-2\eta}) d\eta \int_0^\eta (\sigma^2 - \tau^2) d\tau,$$

$$V(\lambda) = 4\pi^2 \int_0^\infty \sigma e^{-2\sigma} d\sigma \int_0^\sigma \eta (1 - 2\lambda e^{-\eta} + \lambda^2 e^{-2\eta}) d\eta \int_0^\eta d\tau.$$

Интеграл кинетической энергии более сложен. Мы предпочитаем перейти от интеграла, содержащего лапласианы, к интегралу от квадратов градиентов φ . Применяя формулы

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial r_1} \frac{x_1}{r_1} + \frac{\partial f}{\partial r_{12}} \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad \frac{\partial f}{\partial r_1} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \text{ и т. д.,}$$

можно убедиться в том, что

$$(\nabla_1 \varphi)^2 + (\nabla_2 \varphi)^2 = 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \\ + \frac{4}{u(s^2 - t^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \left[s(u^2 - t^2) \frac{\partial \varphi}{\partial s} + t(s^2 - u^2) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right],$$

если φ зависит только от r_1 , r_2 и r_{12} . Таким образом, для выбранной пробной функции

$$T = -\frac{1}{2} \mu^4 \int \dots \int \varphi (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) \varphi dv_1 dv_2 = \\ = \frac{1}{2} \mu^4 \int \dots \int [(\nabla_1 \varphi)^2 + (\nabla_2 \varphi)^2] dv_1 dv_2 = \\ = 2\pi^2 \int_0^\infty e^{-2\sigma} d\sigma \int_0^\sigma \eta d\eta \int_0^\eta (\sigma^2 - \tau^2) \left[(1 - \lambda e^{-\eta})^2 + \right. \\ \left. + \lambda^2 e^{-2\eta} + \frac{2\lambda\tau}{\eta} \frac{\eta^2 - \tau^2}{\sigma^2 - \tau^2} (1 - \lambda e^{-\eta}) e^{-\eta} \right] d\tau.$$

Подставив эти интегралы в (12.3.96), можно получить более точное значение z . Применяя несколько более гибкую пробную функцию, зависящую от большего числа параметров, можно подойти как угодно близко к истинному результату.

Рассеяние электронов на атоме водорода. Как пример другого использования многомерной функции Грина укажем процесс расчета результатов столкновения между электроном и атомом водорода ($Z=1$, один связанный электрон, один свободный; мы пренебрегаем спином электрона и эффектом симметрии, как мы это делали до сих пор). Интегральное уравнение системы имеет вид

$$\phi(\mathbf{r}) = q^2 \int \dots \int \left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} - \frac{1}{r_{12}'} \right) \phi(\mathbf{r}') G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}') dv_1' dv_2',$$

где для функции Грина мы применяем ее представление через интеграл Фурье (12.3.94) и где, как и раньше, $q^2 = 2Me^2/\hbar^2$.

Исзуемое состояние является состоянием, в котором частица 1, первоначально свободная, движется к началу координат с кинетической энергией k_1^2 , а частица 2 связана в наинизшем состоянии с энергией $-q^4/4$. Часть соответствующей волновой функции дает «поверхностную» волну (см. стр. 661), близко примыкающую к гиперповерхности $r_2 = 0$. Однако здесь имеются и «отраженные» волны, вызванные потенциалом взаимодей-

ствия; некоторые из них будут также поверхностными волнами, что соответствует тому, что та или другая частица осталась в связанном состоянии, но, если $k_1^2 - q^4/4$ положительно, здесь будет также некоторое количество «свободных» волн, соответствующих случаю, когда обе частицы покидают притягивающий центр.

Первое приближение к решению интегрального уравнения может быть получено, если вместо ψ под знак интеграла подставить «поверхностную» волну, соответствующую первоначальному состоянию. [Это эквивалентно приближению Борна для одной частицы, см. равенство (12.3.58) и следующие.] Полагаем

$$\psi^i \approx e^{ik_1 z_1} \frac{q^3}{V 8\pi} e^{-q^2 r_2/2} = e^{ik_1 z_1} \varphi_{001}(r_2)$$

[здесь φ_{001} является наинизшей из собственных функций ψ_{mln} , данных в равенстве (12.3.40)] и применяем интегральное уравнение для подсчета следующего приближения. Непосредственно выясняется один полезный факт: если бы в квадратных скобках в интегральном уравнении стоял единственный член $1/r_2$, то ψ^i было бы точным решением интегрального уравнения. Следовательно, интеграл от произведения $\psi^i G$ на q^2/r_2 должен быть равен ψ^i и

$$\psi \simeq \psi^i + q^2 \int \dots \int \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) e^{ik_1 z_1'} \varphi_{001}(r'_2) G_h(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dv'_1 dv'_2, \quad (12.3.97)$$

где $k^2 = k_1^2 - q^4/4$. Функция Грина G имеет амплитуду, отличную от нуля, если r_1 велико или r_2 велико, что соответствует тому факту, что или частица 1 или частица 2 может удаляться от начала координат после столкновения. Чтобы подробнее видеть, что здесь происходит, мы должны преобразовать это уравнение в более наглядные формы. Например, мы можем интересоваться поведением частицы 1, когда она отскакивает от центра сил, оставляя частицу 2 в связанном состоянии (не обязательно в наинизшем). В этом случае удобно разложить интеграл в ряд по собственным функциям для частицы 2, умноженным на функции от r_1 ,

$$\psi \simeq \psi^i + \sum_{nlm} \varphi_{mln}(r_2) f_{mln}(r_1), \quad (12.3.98)$$

$$f_{mln}(r_1) = q^2 \int \int \int \bar{\varphi}_{mln}(r_2) dv_2 \int \dots \int \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) \times \\ \times e^{ik_1 z_1'} \varphi_{001}(r'_2) G_h(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dv'_1 dv'_2.$$

Функции f_{mln} определяют, таким образом, поведение частицы 1 в том случае, когда частица 2 остается в состоянии mln . В этой сумме, конечно, встречаются и волновые функции свободных состояний частицы 2, так как здесь содержится полный комплект функций φ , но в силу сохранения энергии для некоторых из них частица 1 не будет свободной. Это, однако, не должно нас смущать; мы представили разложение в этой форме специально для того, чтобы рассчитать поведение частицы 1, когда частица 2 остается связанной, поэтому мы должны сосредоточиться на коэффициентах при наинизших членах ряда, а для выяснения других фактов придется воспользоваться другими типами разложений.

Подставляя в равенство для f выражение G через интеграл Фурье, получим

$$f_{mln}(r_1) = \frac{q^2}{64\pi^6} \int \dots \int \frac{e^{i\xi_1(x_1-x'_1) + \dots + i\xi_2(z_2-z'_2)} -}{\xi_1^2 + \dots + \xi_2^2 - k_1^2 + \frac{1}{4} q^4} \varphi_{mln}(r_2) \varphi_{001}(r'_2) \times \\ \times e^{ik_1 z_1'} \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) dv_2 dv'_1 dv'_2 d\xi_1 \dots d\xi_2.$$

Интегрирование по dv_2 может быть легко выполнено. В результате получаем преобразование Фурье функции $\bar{\varphi}_{mln}$, т. е. функцию $\bar{\chi}_{mln}$, определенную равенством (12.3.54). Это — функция от компонент ξ_2, η_2, ζ_2 волнового вектора $\mathbf{x}_2$ с полюсами в точках $\mathbf{x}_2 = \pm i(q^2/2n)$, соответствующих энергий $\varepsilon = -(q^4/4n^2)$ для n -го связанного состояния частицы 2.

Интегрирование по ξ_2, η_2, ζ_2 не так просто. Если бы не было знаменателя $\xi_1^2 + \dots + \xi_2^2 - k_1^2 + q^4/4$, мы получили бы в итоге опять $\bar{\varphi}_{mln}(\mathbf{r}'_2)$, умноженное на $8\pi^3$, так как интегрирование по dv_2 , а также по $d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2$ привело бы просто к интегральной теореме Фурье. С другой стороны, интеграл по пространству $\mathbf{x}_2$ может быть приведен к контурным интегралам вокруг полюсов функции χ и множителя $(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 - k_1^2 + q^4/4)^{-1}$. Вычеты относительно полюсов функции χ пропорциональны функции φ_{mln} — преобразованию Фурье функции χ . Вычеты относительно полюсов другого множителя соответствуют искажению волновой функции частицы 2, вызванному присутствием частицы 1, и они становятся малыми при достаточно больших значениях r_1 . Здесь мы пренебрегаем этими членами.

Упругое и неупругое рассеяние. Рассматривая вычеты относительно полюсов функции χ и пользуясь (11.2.5), имеем

$$\begin{aligned} f_{mln}(\mathbf{r}_1) &\simeq \frac{q^2}{8\pi^3} \int \dots \int \frac{e^{i\xi_1(x_1-x'_1)+i\eta_1(y_1-y'_1)+i\zeta_1(z_1-z'_1)}}{\xi_1^2+\eta_1^2+\xi_2^2-k_1^2+\frac{1}{4}q^4[1-(1/n^2)]} e^{ik_1z'_1} \times \\ &\quad \times \bar{\varphi}_{mln}(\mathbf{r}'_2) \varphi_{001}(\mathbf{r}'_2) \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_{12}} \right) dv'_1 dv'_2 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 \simeq \\ &\simeq q^2 \int \dots \int \frac{e^{ik_1R_1}}{4\pi R_1} \bar{\varphi}_{mln}(\mathbf{r}'_2) \varphi_{001}(\mathbf{r}'_2) \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_{12}} \right) e^{ik_1z'_1} dv'_1 dv'_2 \simeq \\ &\simeq \frac{q^2}{4\pi r_1} e^{ik_1r_1} \int \dots \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}'_1} \bar{\varphi}_{mln}(\mathbf{r}'_2) \varphi_{001}(\mathbf{r}'_2) \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_{12}} \right) dv'_1 dv'_2, \quad r_1 \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\mathbf{k}_i = k_1 \mathbf{a}_z$ — вектор, равный произведению $M/\hbar$ на скорость падающей частицы 1, а $\mathbf{k}_n$ пропорционален скорости частицы 1, если после соударения атом оказывается в состоянии n . Направление $\mathbf{k}_n$ образует с осью z_1 угол рассеяния ϑ_1 , а величина k_n выражается через k_1 и энергии начального и конечного связанных состояний — $q^4/4$ и — $q^4/4n^2$ с помощью равенства

$$k_n^2 = k_1^2 - \frac{1}{4}q^4 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Заметим, что вектор $\mathbf{k}_1$, соответствующий случаю, когда состояние атома не изменяется (упругое рассеяние), имеет ту же величину k_1 , что и вектор $\mathbf{k}_i$, но иное направление. Отметим также, что для всех состояний, кроме начального, интеграл, содержащий $1/r'_1$, равен нулю из-за ортогональности собственных функций φ .

Интегрирование по dv'_2 приводит к функции от $\mathbf{r}'_1$, которая представляет собою разность поля ядра и поля плотности заряда $|\varphi_{001}|^2$ (для нижнего f) или поля «обменной плотности заряда» $\varphi_{mln} \varphi_{001}$ для f_{mln} . Следовательно, можно сказать, что вероятность того, что частица 1 упруго рассеяна системой, состоящей из частицы 2 и ядра, равна преобразованию Фурье потенциального поля системы для частицы 1, составленного для волнового вектора $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_i)$, соответствующего изменению импульса частицы 1, вызванному столкновением. Аналогично вероятность неупругого рассеяния, при котором частица 2 оказывается в состоянии mln , равна преобразованию Фурье потенциала частицы 1, порожденного обменной плотностью заряда $\varphi_{mln} \varphi_{001}$, для волнового вектора $(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_i)$, пропорционального изме-

нению импульса, произошедшему в результате неупругого столкновения. Величину этого волнового вектора можно обозначить через μ_n , где

$$\mu_n^2 = |\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_i|^2 = k_1^2 + k_n^2 - 2k_1 k_n \cos \vartheta_1 \simeq \left(2k_1 \sin \frac{\vartheta_1}{2}\right)^2, \quad k_1^2 \gg \frac{q^4}{4}, \quad \vartheta_1 \gg 1 - \frac{k_n}{k_1}.$$

Для того чтобы рассчитать упругое и неупругое рассеяние частицы 1, можно воспользоваться аппаратом приближения Борна [см. равенства (12.3.59) и (12.3.60)]. Для упругого рассеяния потенциал, вызывающий рассеяние, является разностью между потенциалом ядра и потенциалом плотности заряда $\rho(r) = |\varphi_{001}(r)|^2$; для неупругого рассеяния (для состояния mln) потенциал является потенциалом обменной плотности заряда $\varphi_{mln}\varphi_{001}$ [здесь равенства (12.3.59) и (12.3.60) должны быть видоизменены, так как ρ , а следовательно, и V не являются сферически симметричными].

Если k_1^2 очень велико по сравнению с величиной энергии связи $q^4/4$, мы можем получить несколько упрощенную формулу, интегрируя сначала по dv'_1 и пользуясь равенством

$$\frac{1}{4\pi} \iint e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_1} \frac{1}{r'_{12}} dv'_1 = \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_2},$$

полученным с помощью преобразования Фурье. Имеем

$$f_{mln} \simeq \frac{q^2}{\mu^2 r_1} e^{i\mu r_1} \iiint (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_2}) \bar{\varphi}_{mln}(\mathbf{r}'_2) \varphi_{001}(\mathbf{r}'_2) dv'_2, \quad k_1 \rightarrow \infty,$$

где $\mu = |\mathbf{k}| \simeq 2k_1 \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta_1\right)$, что пригодно всегда, если угол рассеяния ϑ_1 не слишком мал. Так как при $k_1 \gg q^2/4$ импульс частиц, рассеянных неупруго, немногим меньше импульса упруго-рассеянных частиц, то мы здесь интересуемся *полным* рассеянным потоком для частицы 1, учитывая упругое и неупругое рассеяние. Выражение для него мы можем получить, суммируя квадраты абсолютных величин всех членов ряда (12.3.98):

$$S(\vartheta_1) \simeq r_1^2 \sum_{nlm} |f_{mln}|^2,$$

где S — полный рассеянный поток для частицы 1 на единицу телесного угла для угла рассеяния ϑ_1 и на единицу плотности падающего потока.

Из полноты системы собственных функций следует, что для суммы, распространенной на все возможные состояния, имеет место равенство

$$\sum_{mln} \left| \iiint \bar{\varphi}_{mln} G \varphi_{001} dv \right|^2 = \iiint \bar{\varphi}_{001} |G|^2 \varphi_{001} dv,$$

которое называется *правилом матричных сумм*. Следовательно,

$$S(\vartheta_1) \simeq 2 \frac{q^4}{\mu^4} \iiint \bar{\varphi}_{001} (1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_2)) \varphi_{001} dv \simeq 2 \frac{q^4}{\mu^4} [F(0) - F(\mu)],$$

где F — *структурный фактор* для состояния 001, определенный в (12.3.60). Сравнивая равенство (12.3.60) с только что выведенным, мы видим, что поток упруго-рассеянных частиц равен $(q^4/\mu^4) [F(0) - F(\mu)]^2$, в то время как полный рассеянный поток (упругий и неупругий) равен $2(q^4/\mu^4) [F(0) - F(\mu)]$, если импульс падающей частицы достаточно велик (если атом-мишень имеет более одной частицы, то последняя формула несколько видоизменяется).

Обмен частиц. Рассмотрев различные возможности для случая отскокивания частицы 1 от атома, мы должны рассмотреть теперь вероятность того, что частицы обмениваются местами; частица 2 удаляется, а частица 1

остается. (Это соответствует отражению от оси ξ в простом примере стр. 657.) Здесь более удобны разложения по собственным функциям частицы 1. Вместо равенства (12.3.98) мы пишем

$$\psi \simeq \psi^i + \sum_{mln} \varphi_{mln}(\mathbf{r}_1) g_{mln}(\mathbf{r}_2), \quad (12.3.99)$$

$$g_{mln} = q^2 \int \int \bar{\varphi}_{mln}(\mathbf{r}_1) dv_1 \int \dots \int \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_{12}} \right) e^{ik_{1z}'} \varphi_{001}(\mathbf{r}'_2) G_n(\mathbf{r} | \mathbf{r}') dv'_1 dv'_2.$$

Этот ряд полностью дублирует ряд (12.3.98), и мы подвергаемся опасности некоторых повторений, если будем учитывать все функции g так же, как и все функции f . Однако, если мы рассматриваем только те функции f , для которых $\varphi_{mln}(\mathbf{r}_1)$ представляет связанное состояние, то первая совокупность соответствует связанной частице 2, а вторая — связанной частице 1 и дублирования не будет. (Здесь могут быть, *кроме того*, некоторые состояния, в которых ни одна частица не будет связанной; мы их рассмотрим позже.)

Применяя к этому интегралу те же приближенные приемы, которые мы применяли для функций f_{mln} , найдем, что

$$g_{mln}(\mathbf{r}_1) \simeq \frac{q^2}{4\pi r_2} e^{ik_n r_2} \int \dots \int e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_2} \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_{12}} \right) \times \\ \times \bar{\varphi}_{mln}(\mathbf{r}'_1) \varphi_{001}(\mathbf{r}'_2) dv'_1 dv'_2, \quad r_2 \rightarrow \infty;$$

это соотношение может быть использовано в различных частных случаях, подобно аналогичным соотношениям для функций f .

Если кинетическая энергия k_1^2 падающей частицы меньше энергии связи $q^4/4$ первоначального состояния, то обе частицы не могут быть одновременно свободными, и если измеряются только те частицы, которые покидают атом, то для большого r_1 или r_2 (r велико) можно написать

$$\psi \simeq \psi^i + \sum \varphi_{mln}(\mathbf{r}_2) f_{mln}(\mathbf{r}_1) + \sum \varphi_{mln}(\mathbf{r}_1) g_{mln}(\mathbf{r}_2).$$

Обе суммы распространены только на те состояния, для которых $k_n^2 = k_1^2 - (1/4)q^4(1 - 1/n^2)$ положительно. Мы пренебрегаем здесь возможными состояниями, в которых обе частицы связаны (отрицательный ион). Эти состояния входят в интеграл для ψ , но исчезают, когда r становится большим.

Наконец, если k_1^2 больше чем $q^4/4$, то обе частицы могут быть свободными. Чтобы рассчитать вероятность этого, вернемся к равенству (12.3.97) и исследуем поведение интеграла при больших значениях r , когда α отлочно от 0 и $\pi/2$ (оба r_1 и r_2 велики). Чтобы провести это исследование, легче всего воспользоваться функцией Грина в форме (12.3.91). При большом r и малом r' можно написать

$$R \simeq r^2 - r'_1 \cos \alpha \cos \theta_1 - r'_2 \sin \alpha \cos \theta_2, \\ \cos \theta_j = \cos \vartheta_j \cos \vartheta'_j + \sin \vartheta_j \sin \vartheta'_j \cos(\varphi_j - \varphi'_j).$$

Если мы обозначим волновой вектор частицы 1 через $\mathbf{K}_1$ и волновой вектор частицы 2 через $\mathbf{K}_2$ и предположим, что их величины равны соответственно $k \cos \alpha$ и $k \sin \alpha$ ($k^2 = k_1^2 - q^4/4$), а направлены они соответственно под углами ϑ_1 и ϑ_2 к оси z (под углами θ_1 и θ_2 соответственно к направлениям $\mathbf{r}'_1$ и $\mathbf{r}'_2$), то

$$G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \simeq \frac{1}{2} \frac{ik^4}{(2\pi ikr)^{5/2}} e^{ikr - i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r}'_1 - i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}'_2},$$

и для части волновой функции при больших значениях r_1 и r_2 можно написать

$$\psi \simeq \psi^i + r^{-5/2} e^{ikr} \Omega(k, \alpha, \vartheta_1, \vartheta_2), \quad (12.3.100)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= V \frac{k^3 q^4}{27 \pi^6 i^3} \int \dots \int \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_{12}} \right) e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{r}'_1 - i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}'_2} \varphi_{001}(\mathbf{r}'_2) dv'_1 dv'_2 = \\ &= \left(\frac{k}{2\pi i} \right)^{3/2} \frac{q^2}{\sqrt{2}} \iiint [1 - e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{r}'_2}] e^{-i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}'_2} \varphi'_{001}(\mathbf{r}'_2) dv'_2, \end{aligned}$$

где

$$v = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{K}_1| = \sqrt{k_1^2 + k^2 \cos^2 \alpha - 2k_1 k \cos \alpha \cos \vartheta_1}$$

и

$$|\mathbf{K}_1| = k \cos \alpha, \quad |\mathbf{K}_2| = k \sin \alpha, \quad k^2 = k_1^2 - \frac{1}{4} q^4.$$

Эта часть волновой функции выражена в гиперсферических координатах и для получения полной интенсивности $|\Omega|^2$ следует проинтегрировать, умножив на элемент поверхности $r^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2$. Эта функция дает амплитуду волны в направлениях, определяемых углами ϑ_1 и ϑ_2 , для энергии, определенной углом α . Если k_1^2 меньше чем $q^4/4$, то k мнимое, и волнового движения этого типа не будет.

Окончательный результат совершенно аналогичен результату для случая двух измерений, рассмотренному на стр. 664. Посылается поверхностная волна ψ^i и появляется некоторое количество поверхностных волн с амплитудами $|f_{mln}|$, примыкающих к поверхности $r_2 = 0$ (частица 2 связана); кроме того, существуют другие поверхностные волны с амплитудами $|g_{mln}|$, примыкающие к поверхности $r_1 = 0$ (частица 1 связана); и, наконец, если k_1^2 достаточно велико, существует свободная волна (обе частицы свободны) с непрерывным распределением избытка энергии между двумя частицами (угол α) с соответствующей амплитудой $|\Omega|$. (Заметим, что эта амплитуда равна нулю при $\alpha = 0$ или $\pi/2$; волны в этих направлениях являются поверхностными волнами, скорее с волновым числом k_n , чем с волновым числом k .) Собирая члены, мы видим, что часть ψ , остающаяся конечной при большом r (r_1 или r_2 или оба они велики), имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &\simeq e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_1} \varphi_{001}(\mathbf{r}_2) + \sum_{mln} \varphi_{mln}(\mathbf{r}_2) f_{mln}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \sum_{mln} \varphi_{mln}(\mathbf{r}_1) g_{mln}(\mathbf{r}_2) + r^{-5/2} e^{ikr} \Omega(k, \alpha, \vartheta_1, \vartheta_2), \quad (12.3.101) \end{aligned}$$

где суммирование по mln распространяется на все связанные состояния, для которых $k_1^2 - (1/4)q^4(1 - 1/n^2)$ положительно, и где член, содержащий Ω , входит только тогда, когда $k_1^2 > q^4/4$ (в последнем случае в суммы входят все связанные состояния).

Эта формула является, конечно, только приближенной. Точное решение должно иметь асимптотически тот же вид, что и данное, но значения функций f , g и Ω должны быть несколько иными. Область применимости приближения может быть определена тем же способом, который разобран на стр. 638. Вообще формулы пригодны для высоких кинетических энергий падающих частиц и становятся менее точными для медленных падающих частиц. Здесь нет удовлетворительного решения для неупругих столкновений (и обмена) при очень малых скоростях падающих частиц (например, при энергиях, чуть-чуть больших энергии возбуждения).

Закключение. Мы заканчиваем параграф, посвященный волновой механике. Здесь не могли быть упомянуты важные вопросы, связанные со спином частиц или с принципом запрета Паули, а также и другой существенный материал. Эти вопросы рассматриваются во многих других книгах, специально посвященных квантовой теории; наша же книга имеет дело прежде всего с аналитическими приемами решения задач теории поля, а не с физическим истолкованием уравнений. Мы уже касались большинства приемов, используемых в квантовой механике: определения связанных и свободных состояний, применения теории возмущений, вариационных методов и применения интегральных уравнений в связи с приближением Борна. Были рассмотрены трудности, возникающие в проблеме нескольких частиц, в объеме достаточном для того, чтобы показать сложность этой проблемы; были указаны некоторые приемы, применяемые для преодоления этих трудностей. Дальнейшее рассмотрение этих вопросов завело бы нас слишком далеко от нашей основной задачи. Мы должны перейти к нашему последнему важному вопросу, к вычислению чисто векторных полей.

Задачи к главе 12

12.1. Проволока радиуса R помещена в среду, температура которой колеблется по закону $T = T_0 + \Delta T e^{-i\omega t}$. Сопротивление материала проволоки при температуре, близкой к T_0 , равно $\rho = \rho_0 + \rho_1(T - T_0)$. Вычислить сопротивление единицы длины проволоки как функцию времени. Вычислить сопротивление как функцию времени, если температура при $r = R$ равна $T_0 + \Delta T u(t)$.

12.2. Найти ряд, выражающий поток тепла, идущий внутрь параллелепипеда задачи 10.1, как функцию времени, если нагреватель включается при $t = 0$ и его температура равна $T_0 u(t)$.

12.3. Если ускоренный ион ударяется о металлическую поверхность, то он отдает свою кинетическую энергию eV_0 малой области поверхности металла. Температура металла в точке (x, y, z) по прошествии времени t после столкновения дается приближенно функцией Грина

$$T = \frac{A}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2(x^2 + y^2 + z^2)}{4t}\right) u(t) u(x),$$

где a — постоянная диффузии металла, $x = y = z = 0$ в точке удара иона, область $x \geq 0$ заполнена металлом, область $x \leq 0$ является свободным пространством, а A подобрана так, чтобы интеграл от дополнительной тепловой энергии ρCT , распространенный по металлу, был равен eV_0 . Скорость улетучивания металла с его поверхности $x = 0$ в зависимости от температуры на его поверхности T_s равна

$$J_e = B \exp\left(-\frac{E_0}{kT_s}\right),$$

где E_0 — средняя энергия, необходимая для выбивания атома металла с поверхности. Подсчитать полное количество металла, улетучившегося с поверхности (разбрызганного с нее), вследствие удара одного иона, выразив это количество как функцию от B , E_0 , V_0 и тепловых свойств металла.

12.4. В жидком гелии II связь между потоком тепла $\mathbf{J}$ калорий в секунду на квадратный сантиметр и относительной температурой τ состоит не в том, что $\mathbf{J}$ пропорционален градиенту τ , а в том, что производная $\partial \mathbf{J} / \partial t$

пропорциональна градиенту τ

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\rho_2 C_2 c_2^2 \text{grad } \tau,$$

где действительная температура равна $T_0 + \tau$, $\rho_2 C_2$ — удельная теплоемкость гелия на кубический сантиметр и c_2 — величина, имеющая размерность скорости. Показать, что температура подчиняется точному волновому уравнению, причем c_2 является скоростью волны (и называется скоростью второго звука или скоростью тепловых волн). Пластинка из проводящего материала с обычными тепловыми и электрическими свойствами толщины l погружена в ванну, наполненную жидким гелием II; ванна берется достаточно большой, так что можно предполагать, что она простирается безгранично. Показать, что граничные условия на обеих поверхностях пластинки (взять их при $x = \pm l/2$) сводятся к тому, чтобы соотношение между потоком тепла J внутрь гелия и относительной температурой τ имело вид $J = \rho_2 C_2 c_2^2 \tau$ для тех частей J и τ , которые изменяются с течением времени. Предположим, что электропроводность пластинки есть σ , ее плотность ρ удельная теплоемкость C и теплопроводность κ и что через каждую часть пластинки проходит электрический ток плотности $I \cos(\omega t/2)$. Показать, что распределение температуры в пластинке ($x < l/2$) и в гелии ($x > l/2$) определяется действительными частями следующих выражений:

$$T = \begin{cases} T_0 + \frac{I^2 R}{4\sigma\kappa} \left(\frac{1}{4} l^2 - x^2 \right) + \\ + \frac{I^2 R}{2\sigma\gamma^2 \kappa^2} \frac{\cos(\gamma x) - \cos(\gamma l/2) + (\gamma\kappa/\rho_2 C_2 c_2) \sin(\gamma l/2)}{\cos(\gamma l/2) - \gamma(\kappa/\rho_2 C_2 c_2) \sin(\gamma l/2)} e^{-i\omega t}, & x < \frac{1}{2} l, \\ - \frac{I^2 R}{2\sigma\gamma^2 \kappa^2} \left[1 - \frac{\rho_2 C_2 c_2}{\gamma\kappa} \text{ctg} \left(\frac{\gamma l}{2} \right) \right]^{-1} e^{i(\omega/c_2)(x-ct)}, & x > \frac{1}{2} l, \end{cases}$$

где $\gamma^2 = i\omega\rho C/\kappa$, а R — термический эквивалент работы, выраженный в кал/дж.

12.5. Экран для защиты от нейтронов, расположенный между плоскостями $x=0$ и $x=l$, состоит из материала, в котором средний свободный пробег нейтронов равен λ_a ($\ll l$); доля, выражаемая числом χ , всех столкновений в этом материале приводит к поглощению нейтронов. При $t=0$ «ливень» нейтронов плотности $\delta(t)$ падает на поверхность $x=l$. Показать, что приближенные выражения плотности нейтронов внутри пластинки ($0 \leq x \leq l$, $0 < t$) имеют вид (воспользоваться приближенными граничными условиями $\rho=0$ при $x=0$; l)

$$\begin{aligned} \rho_\delta(x, t) &= \frac{e^{-\chi t}}{2aV\pi^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(2n+1)l-x] \exp \left\{ \frac{-1}{4a^2 t} [x - (2n+1)l]^2 \right\} = \\ &= -\frac{2\pi a^2}{l^2} \sum_{m=l}^{\infty} (-1)^m \sin \left(\frac{\pi m x}{l} \right) \exp \left\{ - \left[\chi + \left(\frac{\pi m a}{l} \right)^2 \right] t \right\}, \end{aligned}$$

где $a^2 = \lambda_a v_a/3$ и $\chi = \kappa v_a/\lambda_a$. Вывести выражения для потока нейтронов внутрь пластинки при $x=l$ и из пластинки при $x=0$; рассмотреть зависимость этих выражений от l/λ_a , χ и t . Каковы соответствующие выражения в случае, когда $\rho(l) = u(t)$?

12.6. Пучок интенсивности I электронов в секунду с начальной скоростью v_i вводится в полый цилиндрический сосуд, ограниченный поверхностями $z=0$; $z=l$; $r=a$. Пучок вводится через малое отверстие в начале координат и на-

правлен вдоль оси цилиндра. Средний свободный пробег электрона в газе внутри сосуда равен λ ($\ll l$), а доля кинетической энергии, теряемая при столкновении с атомом газа, равна η . Предположим что здесь нет неупругих столкновений и что все электроны, ударяющиеся о стенки сосуда, выбывают из распределения. Показать, что в этом случае стационарная плотность заряда электронов внутри сосуда равна

$$\rho = \frac{6eI\lambda^2}{l^2 a^2 v_i} \sum_{m,n} \frac{m}{J_1^2(\pi\beta_{0n})} \frac{J_0(\pi\beta_{0n}r/a) \sin(\pi m z/l)}{\left[1 + \left(\frac{\pi m \lambda}{l}\right)^2\right] \left[\left(\frac{\pi m \lambda}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi \lambda \beta_{0n}}{a}\right)^2 - \frac{3}{\eta}\right]},$$

если только $3/\eta$ меньше чем $(\pi\lambda/l)^2 + (\pi\lambda\beta_{01}/a)^2$. [Числа β_{0n} являются корнями уравнения $J_0(\pi\beta) = 0$.]

12.7. Рассчитать начальное поведение однородного сферического реактора, воспользовавшись формулой (12.1.31) и выбирая подходящие значения содержащихся там постоянных. Взять эффективный радиус сферы a равным десятикратному среднему свободному пробегу λ ; предположить, что $\delta = 1/10$ и $x_i = x_p = 1/5$; пусть $\eta = 1/3$ и $v_i/v_p = 10$, и подобрать v_ζ так, чтобы ω_1^- для наинизшего члена было равно нулю. Построить график плотности нейтронов в точке $r=0$, рассматривая эту плотность как функцию от tv_p/λ , если при $t=0$ в начале координат находился единственный нейтрон. Построить также график потока нейтронов через поверхность во внешнее пространство, рассматривая этот поток как функцию от tv_p/λ .

12.8. Неограниченно простирающаяся среда состоит из атомов, которые рассеивают проникающие частицы равномерно во всех направлениях [т. е. в (12.2.2) $\alpha = 1/4\pi$] с ничтожно малой потерей энергии при столкновениях. Найти с помощью преобразования Фурье функцию распределения для стационарного состояния $f(\mathbf{r}, \mathbf{a}_v)$ [$\mathbf{a}_v$ — единичный вектор, имеющий направление скорости $\mathbf{v}$ частицы, и $\mathbf{r}$ — вектор положения в единицах расстояния, использованных в (12.2.2)], порожденного распределением источников частиц $s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_v) = (1/4\pi) s(\mathbf{r})$ (каждый элементарный источник испускает новые частицы одинаково во всех направлениях). Положить

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{a}_v) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{a}_v) d\mathbf{v} \text{ и } S(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} s(\mathbf{r}) d\mathbf{v}$$

и показать, что (12.2.2) принимает вид (для стационарного состояния)

$$(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_v + 1) F(\mathbf{k}, \mathbf{a}_v) = \frac{1}{4\pi} \left[S(\mathbf{k}) + \int F(\mathbf{k}, \mathbf{a}_v') d\Omega' \right].$$

Использовать (6.3.44) для получения разложения функции F по сферическим гармоникам от $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_v$ ($\mathbf{a}_k$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$, так что $\mathbf{k} = k\mathbf{a}_k$)

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{a}_v) = \frac{(i/4\pi) S(\mathbf{k})}{k - i\chi Q_0(i/k)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_v) Q_n\left(\frac{i}{k}\right).$$

12.9. Составить функцию распределения в условиях задачи 12.8 в случае точечного источника частиц в начале координат, $S = (2\pi)^{-3/2}$. Вычислить обращение интеграла Фурье для f с помощью разложения показательной функции $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ под знаком интеграла в ряд по сферическим гармоникам от $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_r$ и, воспользовавшись формулой $iQ_0(i/k) = \arctg k$, получить

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{a}_v) = \frac{i}{16\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n P_n(\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_n(i/k) h_n(kr)}{k - \chi \arctg k} k^2 dk.$$

Показать, что это выражение может быть формально вычислено как контурный интеграл вокруг полюса $k = i\sigma$, где σ — положительный корень уравнения $\sigma = \text{th}(\sigma/\chi)$, что дает

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{a}_v) = \frac{\sigma^2}{8\pi^3} \frac{1 - \sigma^2}{1 - \chi - \sigma^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n P_n(\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_v) Q_n\left(\frac{1}{\sigma}\right) h_n(i\sigma r).$$

Исследовать сходимость этого ряда для малых χ и для малых $1 - \chi$.

12.10. Выразить функцию стационарного распределения как функцию от ξ и μ [см. (12.2.2)], если источником является постоянный поток плотности I_0 , направленный вдоль оси ξ из начала $\xi = 0$, в случае, когда функция рассеяния $\alpha(\theta')$ имеет резко выраженный передний максимум $\alpha(\theta' \ll \frac{1}{2}\pi) \gg \alpha(\theta' > \frac{1}{2}\pi)$. Показать, что в этом случае приемлемым приближением к функции распределения при малом $1 - \mu$ является решение видоизмененного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \mu) + f(\xi, \mu) - \frac{1}{2}\chi \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n P_n(\mu) \int_{-1}^1 P_n(\lambda) f(\xi, \lambda) d\lambda;$$

числа A_n определены в (12.2.4). Показать, что решением этого уравнения, удовлетворяющим соответствующему граничному условию, а именно условию $f(0, \mu) = (I_0/2\pi) \delta(1 - \mu)$, является

$$f(\xi, \mu) = \frac{I_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) \exp[(\chi A_n - 1)\xi].$$

Рассмотреть подробно решение в случае, когда $\alpha(\theta) = [(N+1)/4\pi] \cos^{2N}(\frac{1}{2}\theta)$, где $N \gg 1$. Что происходит при $N \rightarrow \infty$? Почему?

12.11. Предположим, что при каждом столкновении падающая частица (например, нейтрон) поглощается ядром-мишенью, а затем снова испускается одинаково во всех направлениях, но с уменьшенной кинетической энергией; часть частиц, испускаемых с энергией, лежащей между E и $E + dE$, выражается числом $\alpha(E/E')^\alpha (dE/E)$, где E' — кинетическая энергия бомбардирующей частицы ($E' \geq E$). Составить уравнение, аналогичное (12.2.2), для функции распределения $f(\xi, \mu, \varepsilon)$, указывающей количество частиц, находящихся в единичном объеме, расположенном на расстоянии ξ средних свободных пробегов от поверхности рассеивающей среды, движущихся в направлении, образующем угол $\vartheta = \arccos \mu$ с осью ξ , и имеющих кинетическую энергию, определяемую параметром $\varepsilon = \ln(E_0/E)$. Показать, что для распределения, не зависящего от ξ , уравнение для f имеет вид

$$f(\mu, \varepsilon) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^\varepsilon e^{\alpha(\varepsilon' - \varepsilon)} R(\varepsilon') d\varepsilon' + s(\mu) \delta(\varepsilon),$$

где $R(\varepsilon) = 2\pi \int f d\mu$, а s — функция источников, дающих частицы с начальной энергией E_0 . С помощью преобразования Лапласа относительно ε показать, что

$$f(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{2} \alpha \varepsilon \int_{-1}^1 s(\mu) d\mu + s(\mu) \delta(\varepsilon).$$

Каково общее решение, если функция источников имеет вид $s(\mu, \varepsilon) (\varepsilon \geq 0)$?

12.12. Предположим, что доля частиц, испускаемых с энергиями, лежащими в промежутке между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ [$\varepsilon = \ln(E_0/E)$] в условиях задачи 12.11, есть $\omega(\varepsilon)$ ($\varepsilon \geq 0$), причем $\int_0^\infty \omega(\varepsilon) d\varepsilon \leq 1$. Показать, что уравнение для преобразования Лапласа $f \rightarrow \varphi$ ($\varepsilon \rightarrow \eta$) и решение для преобразования $R \rightarrow \rho$ имеют вид

$$\varphi(\mu, \eta) = \frac{1}{4\pi} \omega(\eta) \rho(\eta) + s(\mu), \quad \omega(\eta) = \int_0^\infty \omega(\varepsilon) e^{-\eta\varepsilon} d\varepsilon,$$

$$\rho(\eta) = \frac{\sigma}{1 - \omega(\eta)}, \quad \sigma = 2\pi \int_{-1}^1 s(\mu) d\mu.$$

Показать, что при $\omega = \chi \delta(\varepsilon) + \alpha \chi' u(\varepsilon - \varepsilon_0) e^{-\alpha(\varepsilon - \varepsilon_0)}$ ($\chi + \chi' \leq 1$) имеем

$$f(\mu, \varepsilon) = \frac{\sigma}{4\pi(1-\chi)} \left\{ \chi \delta(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi' \alpha}{1-\chi} \right)^n \frac{(\varepsilon - n\varepsilon_0)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha(\varepsilon - n\varepsilon_0)} u(\varepsilon - n\varepsilon_0) \right\} +$$

$$+ s(\mu) \delta(\varepsilon).$$

Рассмотреть физическое значение ступенчатых функций u в ответе.

12.13. Применить обратное преобразование Лапласа относительно ξ к (12.2.2) в случае полубесконечной среды ($x \geq 0$) при равномерном рассеянии частиц, пренебрегая потерей энергии при столкновениях. Показать, что при $s(\xi, \mu) = (I/2\pi) \delta(\xi) \delta(1-\mu)$ (что соответствует пучку, падающему нормально к поверхности $\xi=0$) уравнение для преобразования Лапласа функции f ($f \rightarrow F$, $\xi \rightarrow p$) имеет вид

$$(1 + \mu p) F(p, \mu) = \frac{x}{4\pi} G(p) + \frac{I}{2\pi} \delta(1-\mu), \quad G(p) = 2\pi \int_{-1}^1 F d\mu.$$

С помощью интегрирования относительно μ и перестановки членов показать, что

$$G(p) = \frac{Ip}{(p+1)(p-x \operatorname{Ar th} p)}, \quad G(p) = \int_0^\infty R(\xi) e^{-p\xi} d\xi.$$

Рассмотреть вычисление $R(\xi) = 2\pi \int f d\mu$ и вывести отсюда f .

12.14. Предположим, что угол рассеяния имеет преимущественно малое значение, так что можно пренебречь рассеянием назад. Тогда под знаком интеграла в (12.2.2) функцию $f(\mu')$ можно разложить в ряд Тейлора, полагая $\mu' \simeq \mu \left(1 - \frac{1}{2} \theta'^2 \right) + \theta' \sqrt{1 - \mu^2} \cos \beta$, если $d\Omega' \simeq \theta' d\theta' d\beta$. Показать, что с точностью до членов второго порядка относительно ϑ (12.2.2) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + (1-x)f - \frac{\Delta^2 x}{2\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) \simeq s(\vartheta, \xi),$$

где $\mu = \cos \vartheta \simeq 1 - \frac{1}{2} \vartheta^2$ и $\Delta^2 = 2\pi \int_0^\pi \alpha(\theta') (\theta')^3 d\theta' \ll 1$ (постоянная Δ может быть названа средним углом рассеяния). Показать, что если пучок $s(\vartheta)$ падает на плоскость $x=0$, то решение этого приближенного уравне-

ния имеет вид

$$f(\vartheta, \xi) \simeq \int_0^\infty J_0(\lambda \vartheta) \exp \left[- \left(1 - \kappa + \frac{1}{2} \Delta^2 \kappa \lambda^2 \right) \xi \right] \lambda d\lambda \int_0^\infty s(\theta) J_0(\lambda \theta) \theta d\theta = \\ = \frac{e^{(\kappa-1)\xi}}{\Delta^2 \kappa \xi} \int_0^\infty I_0 \left(\frac{\vartheta \theta}{\kappa \Delta^2 \xi} \right) \exp \left(\frac{-\vartheta^2 - \theta^2}{2\kappa \Delta^2 \xi} \right) s(\theta) \theta d\theta.$$

12.15. Скомбинировать прием, предложенный в задаче 12.14, с первой частью задачи 12.12. Предположить, что $\Delta = \Delta_0 (1 - e^{-\gamma \varepsilon})$, но что $\omega(\varepsilon)$ не зависит от ϑ . Рассчитать $f(\vartheta, \xi, \varepsilon)$.

12.16. Предположим, что частица, рассеянная под углом θ' , теряет часть своей кинетической энергии, выражаемую числом $(2m/M)(1 - \cos \theta')$ [см. (2.4.45)]. Воспользовавшись приближениями, рассмотренными в задаче 12.14 для рассеяния под малыми углами, показать, что уравнение для f имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + (1 - \kappa) f - \kappa \Delta^2 \frac{m}{M} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{\kappa \Delta^2}{2\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = s(\vartheta, \xi) \delta(\varepsilon),$$

где $\varepsilon = \ln(E_0/E)$, а Δ^2 определено в задаче 12.14. Показать, что при $s(\vartheta, \xi) = e^{-\xi} \delta(1 - \mu)$ (падающий нормально пучок, ослабленный благодаря проникновению) функция распределения имеет вид

$$f \simeq \frac{1}{\kappa \Delta^2 \varepsilon} \exp \left(-\xi + \frac{M\varepsilon}{m\Delta^2} - \frac{m\vartheta^2}{2M\varepsilon} \right) \left[1 - u \left(\varepsilon - \frac{\kappa \Delta^2 m}{M} \xi \right) \right].$$

(Указание: применить преобразование Лапласа для ξ и ε и преобразование Ганкеля для ϑ .)

12.17. Потенциальная энергия частицы с массой M равна ∞ при $x < 0$, равна $U_0 \hbar^2 / 2M$ (постоянна) при $a < x < b$ и нулю при всех прочих значениях x . Показать, что решение уравнения Шредингера для энергии $k^2 \hbar^2 / 2M$ имеет вид

$$\psi(k, x) = \begin{cases} \frac{1}{A} \sin(kx), & 0 < x < a, \\ \frac{1}{A} \left[\sin(ka) \operatorname{ch} \kappa(x-a) + \frac{k}{\kappa} \cos(ka) \operatorname{sh} [\kappa(x-a)] \right], & a < x < b, \\ \sin[k(x-b) + \Omega], & b < x, \end{cases}$$

где

$$A^2 = \operatorname{cosec}^2 \varphi \{ \sin^2(ka + \varphi) e^{2\kappa(b-a)} + \sin^2(ka - \varphi) e^{-2\kappa(b-a)} - \\ - 2 \cos(2\varphi) \sin(ka + \varphi) \sin(ka - \varphi) \}, \\ \sin \varphi = k / \sqrt{U_0}, \quad \kappa = \sqrt{U_0} \cos \varphi$$

и

$$\Omega = \arctg \left\{ \frac{\sin(ka + \varphi) e^{\kappa(b-a)} + \sin(ka - \varphi) e^{-\kappa(b-a)}}{\sin(ka + \varphi) e^{\kappa(b-a)} - \sin(ka - \varphi) e^{-\kappa(b-a)}} \operatorname{tg} \varphi \right\}.$$

Показать, что при $k^2 < U_0$ и большом $\kappa(b-a)$ ψ в интервале $0 < x < a$ может оказаться большой только в узкой полосе значений энергии. Найти эти «виртуальные уровни энергии» и выяснить их физический смысл.

12.18. Показать, что для задачи 12.17 последующее решение уравнения Шредингера с временной зависимостью, соответствующее начальному

значению ψ , равному $\psi_0(x)$, дает

$$\Psi(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ik^2\tau} \psi(k, x) dk \int_0^{\infty} \psi_0(\xi) \psi(k, \xi) d\xi,$$

где $\tau = \hbar t/2M$ пропорционально времени. Предположим, что первоначально частица достоверно находится внутри «долинной области» $0 < x < a$, так что, например, $\psi = \sqrt{2/a} \sin(\pi n x/a) u(a-x)$, $x > 0$. Показать, что если $(\pi n/a)^2 \ll U_0$ и $\exp[\sqrt{U_0}(b-a)] \gg 1$, то хорошее приближение для Ψ в «долине» определяется формулой

$$\sqrt{2a} \frac{(n\pi)^2}{\pi a^2 U_0} \exp[-2\sqrt{U_0}(b-a)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(k_n + \lambda)x]}{\lambda^2 + \delta_n^2} \exp[-ik_n^2\tau - 2ik_n\lambda\tau] d\lambda,$$

$$0 < x < a, \quad \tau > 0,$$

где

$$k_n = \frac{n\pi}{a} - \frac{n\pi}{a^2 \sqrt{U_0}}$$

и

$$\delta_n = \frac{(2\pi n)^2}{a^3 U_0} \exp[-2\sqrt{U_0}(b-a)].$$

Показать, что это выражение приближенно равно

$$\sqrt{2/a} \sin(k_n x) \exp\left\{-\left[ik_n^2 + \frac{(2\pi n)^3}{a^3 U_0} \exp[-2\sqrt{U_0}(b-a)]\right]\tau\right\},$$

$$0 < x < a, \quad \tau > 0.$$

Каков физический смысл действительной части показательной функции?

12.19. Одномерная потенциальная энергия частицы с массой M равна $-(U_0 \hbar^2/2M)$ при $-a < x < a$ и нулю при $|x| > a$. Каковы энергии связанных состояний и волновые функции? Сколько связанных состояний имеется при очень малом U_0 ? Трехмерная потенциальная энергия той же частицы равна $-(U_0 \hbar^2/2M)$ для радиуса $r < a$ и нулю для $r > a$. Каковы энергии связанных состояний и волновые функции? Сколько связанных состояний имеется при очень малом U_0 ?

12.20. Система до момента $t=0$ имеет оператор Гамильтона $\mathcal{H}_0$ и находится в стационарном состоянии, характеризуемом решением φ_n уравнения $\mathcal{H}_0 \varphi_n = E_n \varphi_n$. При $t=0$ внезапно прилагается возмущающая энергия $\mathcal{H}_1$. Формально, применяя преобразование Лапласа, показать, что последующее после $t=0$ решение уравнения Шредингера с временной зависимостью будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{\exp(-iEt/\hbar)}{E - \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_1} \varphi_n dE = \\ &= \exp\left[-\frac{i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1)t}{\hbar}\right] \varphi_n = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \mathcal{P}_n) \mathcal{H}_1^n}{[E - \mathcal{H}_0 - \mathcal{P}_n \mathcal{H}_1]^{n+1}} \varphi_n dE, \end{aligned}$$

где оператор $\mathcal{F}_n$ определен в рассуждениях, предшествовавших (9.1.43). Исходя из последней формулы, получить разложение $\Psi(t)$ в ряд по собственным функциям φ_m , аналогичный рядам теории возмущений (9.1.12). Перегруппировкой членов получить ряды, аналогичные рядам Финберга и Фредгольма из § 9.1.

12.21. Показать, что уравнение Шредингера для атома водорода ($V = -e^2/r$) допускает разделение переменных в вытянутых сфероидальных координатах с ядром, помещенным в одном из фокусов. Подсчитать энергии и волновые функции для четырех наименьших связанных состояний.

12.22. Рассчитать амплитуду рассеяния для рассеяния в потенциальном поле $U = A \exp(-a^2 r^2)$. Применить вариационный принцип (12.3.68), используя в качестве пробной функции падающую волну $\exp(ikz)$. (Указание: двойное интегрирование в знаменателе провести не в импульсном, или K -пространстве, а в координатном пространстве.) В какой области изменения k полученный результат будет отличаться от борновского приближения меньше чем на 10%?

12.23. Частица массы M находится в потенциальном поле

$$V = \frac{1}{2} M \omega^2 x^2 + \frac{b^2}{x^2}.$$

Показать, что допустимые энергии даются равенством

$$W_n = 2\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\alpha^2 = 2Mb^2/\hbar^2 + \frac{1}{4}$, а соответствующие волновые функции имеют вид

$$\psi_n = N_n e^{-\frac{1}{2} z^2} z^{\alpha + \frac{1}{2}} L_{n+\alpha}^{\alpha}(z^2),$$

где $z = x\sqrt{M\omega/\hbar}$. Выразить нормирующий множитель N_n через n , α , M , ω и $\hbar$.

12.24. Частица массы M движется в центральном поле

$$V = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{b(b+1)}{r^2} \sec^2 \vartheta - \frac{Ze^2}{r}.$$

Показать, что допустимые энергии связанных состояний имеют вид

$$W_n = -\frac{Me^4 Z^2}{\hbar^2 \sigma^2}, \quad \sigma = b+1, b+2, \dots, b+n, \dots,$$

и соответствующие волновые функции определяются равенством

$$\psi = N e^{im\varphi} \cos^{b+1} \vartheta \sin^m \vartheta \times$$

$$\times F\left(m-l+1, \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}m + b + 1 \middle| b + \frac{3}{2} \middle| \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) x^{l+b} e^{-\frac{1}{2}x} L_{\sigma+l+b}^{2l+2b+1}(x).$$

Каково должно быть значение l , чтобы ψ было конечно?

12.25. Гармонический осциллятор возмущается потенциалом bx^2 , причем b мало по сравнению с $M\omega^2/2$. Рассчитать возмущение уровней энергии с точностью до членов второго порядка относительно b .

12.26. На частицу действует центральная сила с потенциалом

$$-\frac{\hbar^2 b^2}{2M} e^{-r/d}.$$

Найти наименьшую допустимую энергию как функцию от $1/bd$ для $0 < 1/bd < 2$, используя таблицы функций Бесселя (см. стр. 620, 621). Найти эту энергию также вариационным методом, используя в качестве пробной функции волновую функцию $N e^{-ar}$. Сравнить результаты.

12.27. Подсчитать фазовый угол рассеяния η_0 для потенциального поля задачи 12.26 при $bd = 1/2$ как функцию от kd для $0 < kd < 1$ (см. стр. 637). Подсчитать η_0 также на основе борновского приближения и вариационным методом (см. стр. 641 и 650). Сравнить результаты.

12.28. Получить функцию Грина стр. 659 для точечного источника, расположенного на оси x . Что произойдет, если источник будет находиться в начале координат?

12.29. Воспроизвести детали вывода (12.3.85).

12.30. Подсчитать следующее приближение для волновой функции основного состояния гелия. Использовать для этого в равенстве стр. 680 вариационную волновую функцию со стр. 679 и функцию Грина (12.3.94).

12.31. До момента $t=0$ система характеризуется оператором Гамильтона $\mathcal{H}_0$ и имеет двукратно вырожденное основное состояние: $\mathcal{H}_0 \varphi_1 = E \varphi_1$ и $\mathcal{H}_0 \varphi_2 = E \varphi_2$ (причем φ_1 ортогонально к φ_2). После момента $t=0$ в гамильтониане имеется дополнительный член $\mathcal{H}_1$ со свойствами

$$\mathcal{H}_1 \varphi_1 = \hbar (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2), \quad \mathcal{H}_1 \varphi_2 = \hbar (\beta \varphi_1 - \alpha \varphi_2).$$

Показать, что если до момента $t=0$ система находилась в состоянии 1, то при $t > 0$ волновая функция будет иметь вид

$$\Psi = \left\{ \left[\cos(\gamma t) - \frac{i\alpha}{\gamma} \sin(\gamma t) \right] \varphi_1 - \frac{i\beta}{\gamma} \sin(\gamma t) \varphi_2 \right\} e^{-iEt/\hbar},$$

где $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Выяснить физический смысл этого результата.

12.32. Даны две системы, одна из которых имеет два дискретных уровня энергии:

$$\mathcal{H}_1 \varphi_n = E_n \varphi_n \quad (n=0,1, \quad E_0=0, \quad E_1=E),$$

а другая один дискретный уровень (при нулевой энергии) и континуум уровней (излученные частицы):

$$\mathcal{H}_2 \chi_0 = 0, \quad \mathcal{H}_2 \chi_k = \varepsilon(k) \chi_k, \quad \chi_k = e^{ik \cdot r_2}.$$

Начиная с момента $t=0$, обе эти системы связаны энергетическим членом $\mathcal{H}_{12}$, имеющим свойства

$$\mathcal{H}_{12} \varphi_0 \chi_k = M(k) \varphi_1 \chi_0 e^{ik \cdot r_0}, \quad \mathcal{H}_{12} \varphi_1 \chi_0 = \int \overline{M}(k) \varphi_0 \chi_k e^{-ik \cdot r_0} dv_k,$$

где dv_k — элемент объема трехмерного « k -пространства» и где r_0 можно считать равным радиус-вектору центра тяжести системы 1. Полагая

$$\Psi = a_0(t) \varphi_1 \chi_0 e^{-iEt/\hbar} + \int a_k(t) \varphi_0 \chi_k e^{-i\varepsilon(k)t/\hbar} dv_k$$

в зависящем от времени уравнении Шредингера и решая полученные урав-

нения относительно a_k , показать, что если ε зависит только от модуля k и если M мало по сравнению с E , то

$$a_0 \simeq e^{-\gamma t}, \quad a_k \simeq \overline{M}(k) e^{-ik \cdot r_0} \frac{e^{-\gamma t + i(\varepsilon - E)t/\hbar} - 1}{E - \varepsilon(k) - i\hbar\gamma},$$

где $\gamma = \pi |M(k_1)|^2 k_1^3 / \hbar \varepsilon'(k_1)$, k_1 — корень уравнения $\varepsilon(k) = E$ и ε' — производная от ε по k . Показать далее, что волновая функция при $t > 0$ будет иметь вид

$$\Psi \simeq \varphi_1 \chi_0 e^{-\gamma t - iEt/\hbar} + \frac{4\pi \overline{M}(k_1)}{r_2'} \varphi_0 e^{ik_1 r_2' - iEt/\hbar} u \left[t - \frac{\hbar r_2'}{\varepsilon'(k_1)} \right] \exp \left\{ -\gamma \left[t - \frac{\hbar r_2'}{\varepsilon'(k_1)} \right] \right\},$$

где $r_2' = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0|$. Предполагая, что φ представляет атом или ядро и что χ_0 , χ_k представляют частицы (фотоны, позитроны и т. д.) в их «скрытом» или эмитированном состоянии соответственно, выяснить физическое значение этого результата.

Полиномы Якоби

Полиномы $F(-n, n+a|c|z)$ называются *полиномами Якоби* n -го порядка для параметров a и c ($n=0, 1, 2, \dots$; $c \neq 0, 1, 2, \dots, n-1$). Эти полиномы ортогональны между собой в интервале $0 \leq z \leq 1$ с весовой функцией $z^{c-1}(1-z)^{a-c}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^{c-1} (1-z)^{a-c} F(-m, m+a|c|z) F(-n, n+a|c|z) dz = \\ = \delta_{mn} \frac{n! [\Gamma(c)]^2 \Gamma(n+a-c+1)}{(a+2n) \Gamma(a+n) \Gamma(c+n)}, \quad \operatorname{Re} c > 0, \quad \operatorname{Re}(a-c) > -1. \end{aligned}$$

Общие соотношения.

$$F(-n, n+a|c|z) = \frac{z^{1-c} (1-z)^{c-a}}{c(c+1) \dots (c+n-1)} \frac{d^n}{dz^n} [z^{c+n-1} (1-z)^{a+n-c}],$$

$$\frac{d}{dz} F(-n, n+a|c|z) = -\frac{n(n+a)}{c} F(-n+1, n+a+1|c+1|z),$$

$$\begin{aligned} z F(-n, n+a|c|z) = \frac{c-1}{2n+a} [F(-n, n+a-1|c-1|z) - \\ - F(-n-1, n+a|c-1|z)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(-n, n+a|c|z) &= \frac{(a+n)(c+n)}{c(2n+a)} F(-n, n+a+1|c+1|z) - \\ &\quad - \frac{n(n+a+c)}{c(2n+a)} F(-n+1, n+a|c+1|z) = \\ &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a)}{\Gamma(n+c) \Gamma(c-a-n)} F(-n, n+a|a-c+1|1-z) = \\ &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(2n+a)}{\Gamma(n+a) \Gamma(n+c)} (-z)^n F(-n, 1-c-n|1-2n-a|\frac{1}{z}) = \\ &= \frac{\Gamma(c) z^{1-c}}{\Gamma(n+a) \Gamma(c-n-a)} \int_0^z (z-t)^{c-n-a-1} t^{n+a-1} (1-t)^n dt. \end{aligned}$$

Специальные случаи.

$$F(-n, n+2\beta+1 | \beta+1 | z) = \frac{2^\beta n! \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+2\beta+1)} T_n^\beta(1-2z),$$

$$F(-n, n | \frac{1}{2} | z) = \cos(2n \arcsin \sqrt{z}),$$

$$F(-n, n+2 | \frac{3}{2} | z) = \frac{\sin[2(n+1) \arcsin \sqrt{z}]}{2(n+1) \sqrt{z(1-z)}},$$

$$F(0, a | c | z) = 1, \quad F(-1, a+1 | c | z) = 1 - \frac{a+1}{c} z,$$

$$F(-2, a+2 | c | z) = 1 - \frac{2(a+2)}{c} z + \frac{(a+2)(a+3)}{c(c+1)} z^2, \dots,$$

$$F(-n, n+a | c | z) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{n! \Gamma(c) \Gamma(a+n+s)}{(n-s)! s! \Gamma(a+n) \Gamma(c+s)} z^s,$$

$$z^m = \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{(a+2n) m! \Gamma(a+n) \Gamma(c+m)}{n! (m-n)! \Gamma(a+n+m+1) \Gamma(c)} F(-n, n+a | c | z),$$

$$\begin{aligned} F(-n, n+2m | m + \frac{1}{2} | \sin^2 \alpha) = \\ = \frac{(n+1) \dots (n+m) (n+m) \dots (n+2m-1)}{(-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots (m - \frac{1}{2})} \left[\frac{1}{\sin 2\alpha} \frac{d}{d\alpha} \right]^m \cos[2(n+m)\alpha], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(-n, n+l_1+l_2+2 | l_2 + \frac{3}{2} | \sin^2 \alpha) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m (-1)^m \times \\ \times \left\{ \sum_{s=m}^n \frac{(-1)^s n! (2s)! (n+l_1+l_2+s+1)! \Gamma(l_2 + \frac{3}{2})}{2^{2s} s! (n-s)! (s+m)! (s-m)! (n+l_1+l_2+1)! \Gamma(s+l_2 + \frac{3}{2})} \right\} \cos(2m\alpha). \end{aligned}$$

Полуцилиндрические функции

$$J_m^{(2)}(z) = \frac{2}{\pi i^m} \int_0^{\pi/2} e^{iz \cos u} \cos(mu) du, \quad m=0, 1, 2, 3, \dots;$$

$$\begin{aligned} J_m^{(2)}(z) = J_m(z) - \left\{ \begin{aligned} &\frac{2i}{\pi} \left[\frac{z}{m^2-1} + \frac{z^3}{(m^2-1)(m^2-9)} + \dots \right], & m=0, 2, 4, \dots, \\ &\frac{2i}{\pi} \left[1 + \frac{z^2}{m^2-4} + \frac{z^4}{(m^2-4)(m^2-16)} + \dots \right], & m=1, 3, 5, \dots, \end{aligned} \right\} \simeq \\ \simeq H_m^{(1)}(z) + \begin{cases} \frac{2i}{\pi z}, & m=0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2mi}{\pi z^2}, & m=1, 3, 5, \dots, \end{cases} \quad z \gg m; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dJ_m^{(2)}}{dz} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2} \right) J_m^{(2)} = \begin{cases} \frac{2i}{\pi z}, & m=0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2mi}{\pi z^2}, & m=1, 3, 5, \dots; \end{cases}$$

$$e^{iz \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos(2n\varphi) J_{2n}^{(2)}(z);$$

$$\frac{d}{dz} J_0^{(2)}(z) = -J_1^{(2)}(z); \quad \frac{d}{dz} J_m^{(2)}(z) = \frac{1}{2} J_{m-1}^{(2)}(z) - \frac{1}{2} J_{m+1}^{(2)}(z), \quad m=1, 2, \dots$$

$$\frac{m}{z} J_m^{(2)}(z) = \frac{1}{2} J_{m-1}^{(2)}(z) + \frac{1}{2} J_{m+1}^{(2)}(z) + \begin{cases} 0, & m=2, 4, 6, \dots, \\ \frac{2i}{\pi z}, & m=1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Аналогично для $n > 2$ можно определить $J_m^{(n)}(z)$ так, что в интервале $-\pi/n \leq \varphi \leq \pi/n$ будет справедливо равенство

$$e^{iz \cos \varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{nm} \cos(nm\varphi) J_{nm}^{(n)}(z).$$

Значения суммы ряда повторяются n раз на интервале φ длины 2π . Другими словами,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{nm} \cos(nm\varphi) J_{nm}^{(n)}(z) = \begin{cases} e^{iz \cos \varphi}, & -\frac{\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}, \\ e^{iz \cos(\varphi - 2\pi/n)}, & \frac{\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{n}, \\ \dots \end{cases}$$

Эти функции имеют следующие общие свойства:

$$\begin{aligned} J_m^{(n)}(z) &= \frac{n}{\pi i^m} \int_0^{\pi/n} e^{iz \cos u} \cos(mu) du = \frac{n}{2\pi i^m} \int_{-\pi/n}^{\pi/n} e^{iz \cos u + i m u} du = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{n i^{s-m}}{\pi s!} z^s \int_0^{\pi/n} \cos^s u \cos(mu) du, \quad m=0, 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

$$J_m^{(n)}(z) \simeq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz - \frac{1}{2} i \pi \left(m + \frac{1}{2} \right)} + \frac{n \cos(m\pi/n)}{\pi i^{m-1} \sin(\pi/n)} \frac{1}{z} e^{iz \cos(\pi/n)}, \quad z \rightarrow \infty;$$

$$\frac{d}{dz} J_0^{(n)}(z) = -J_1^{(n)}(z); \quad \frac{d}{dz} J_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2} J_{m-1}^{(n)}(z) - \frac{1}{2} J_{m+1}^{(n)}(z), \quad m > 0;$$

$$\frac{m}{z} J_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2} J_{m-1}^{(n)}(z) + \frac{1}{2} J_{m+1}^{(n)}(z) - \frac{n i^{-m}}{\pi z} e^{iz \cos(\pi/n)} \sin\left(\frac{m\pi}{n}\right);$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dJ_m^{(n)}}{dz} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2} \right) J_m^{(n)}(z) &= \\ &= \frac{n}{\pi i^m} \left[\frac{i}{z} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{n}\right) - \frac{m}{z^2} \sin\left(\frac{m\pi}{n}\right) \right] e^{iz \cos(\pi/n)}. \end{aligned}$$

С указанными функциями тесно связана функция

$$E_m^{(n)}(z) = \frac{n}{\pi i^m} \int_0^{\pi/n} e^{iz \cos u} \sin(mu) du \simeq \frac{in}{\pi i^m z} (e^{iz \cos(\pi/n)} - e^{iz}), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$\frac{d}{dz} E_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2} E_{m-1}^{(n)}(z) - \frac{1}{2} E_{m+1}^{(n)}(z);$$

$$\frac{m}{2} E_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2} E_{m-1}^{(n)}(z) + \frac{1}{2} E_{m+1}^{(n)}(z) + \frac{n i^{-m}}{\pi z} \left[\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right) - 1 \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи, в которых рассматриваются вопросы диффузии тепла и различных частиц:

- Снеддон И., Преобразования Фурье, Издат. иностр. лит., М., 1955.
Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, М., 1937.
Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.
Bethe H. A., Nuclear Physics, Sec. 59, Diffusion of Neutrons, Rev. Modern Phys., 9, 130 (1937).
Carslaw H. S., Jaeger J. C., Conduction of Heat in Solids, Oxford, New York, 1947.
Morse P. M., Allis W. P., Lamar E. S., Velocity Distributions for Elastically Colliding Electrons, Phys. Rev., 48, 412 (1935).

Вопросы, связанные с функциями распределения и их применениями:

- Лоренц Г. А., Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, Гостехиздат, М., 1953.
Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, Издат. иностр. лит., М., 1953.
Fermi E., Sul Moto dei Neutroni nelle Sostanze Idrogenate, Ricerca sci., 7, 13 (1936).
Hopf E., Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, New York, 1934.
Marshak R. E., Theory of the Slowing Down of Neutrons, Rev. Modern Phys., 19, 185 (1947).
Placzek G., Seidel W., Mark C., Le Caine J., Milne's Problem for Diffusing Neutrons, Phys. Rev., 72, 550—566 (1947).
Spencer L. V., Fano U., Penetration and Diffusion of X-Rays, Nat. Bur. Standards, J. Research, 46, 446 (1951).

Книги и статьи по волновой механике, затрагивающие вопросы, рассматриваемые в § 12.3:

- Бете Г. А., Квантовая механика простейших систем, Гостехиздат, М., 1935.
Ландау Л. и Лифшиц Е., Квантовая механика, ч. I., ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
Мотт Н., Мессии И., Теория атомных столкновений, Издат. иностр. лит., М., 1951.
Шифф Л., Квантовая механика, Издат. иностр. лит., М., 1957.
Blatt J. M., Jackson J. D., On the Interpretation of Neutron-proton Scattering Data by the Schwinger Variational Method, Phys. Rev., 76, 18 (1949).
Bohm D., Quantum Theory, Prentice-Hall, New York, 1951.
Breit G., Separation of Angles in the Two-electron Problem, Phys. Rev., 35, 569 (1930).
Condon E. U., Morse P. M., Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1929.
Feshbach H., Peaslee D. C., Weisskopf V. F., Scattering and Absorption of Particles by Atomic Nuclei, Phys. Rev., 71, 145 (1947).
Hylleraas E. A., New Calculation of the Energy of Helium in the Ground State, Z. Physik, 54, 347 (1929).
Kemble E. C., Fundamental Principles of Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1937.
Kramers H. A., Die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1938.
Mott N. F., Sneddon I. N., Quantum Mechanics and Its Applications, Oxford, New York, 1948.
Schwinger J., On the Charge Independence of Nuclear Force, Appendix, Phys. Rev., 78, 138 (1950).

Векторные поля

В трех предыдущих главах подробно рассматривались скалярные поля; при этом физическое явление в каждой точке пространства описывалось значением только одной числовой величины. Конечно, в большинстве случаев эта величина была вектором (например, напряженность электрического поля или скорость жидкости). Однако положение было таково, что этот вектор можно было непосредственно получить как градиент скалярного поля. Обычно подобное упрощение достигалось за счет значительной идеализации задачи; например, приходилось считать электрические заряды неподвижными, пренебрегать вязкостью текущей жидкости и т. д. Но сравнительное удобство применения скалярных полей настолько велико, что ими пользуются всегда, когда только возможно.

Естественно, что вычисление векторного поля, которое нельзя выразить как градиент некоторого скаляра, является более трудоемкой задачей, чем вычисление скалярного поля, поскольку в каждой точке пространства вместо одной числовой величины надо вычислить три. Эти три величины можно определить различным образом в зависимости от выбранного способа задания вектора. Конечно, наиболее очевидным способом является задание в каждой точке декартовых составляющих вектора; в этом случае приходится определять три скалярных поля, удовлетворяющих граничным условиям. Другим способом является задание компонент векторного поля вдоль направлений координатных линий криволинейной системы координат, соответствующей изучаемой задаче. Это также сводит задачу к вычислению трех скалярных полей, величин этих трех компонент.

Однако обычно более согласованной с физикой явления бывает процедура построения векторного поля по трем скалярным полям при помощи более общих векторных операций. Как мы видели в гл. 1 [см. формулу (1.5.15)], любое векторное поле можно представить в виде суммы градиента скалярного потенциала и ротора векторного потенциала. Поэтому одной из скалярных величин, определяющих поле, может быть скалярный потенциал; две других величины должны единственным образом определить векторный потенциал. Для определения векторного потенциала в каждой точке достаточно задать лишь две величины, а не три, так как дополнительное условие равенства нулю дивергенции векторного потенциала сокращает до двух число независимых величин, необходимых для полного определения векторного потенциала.

Преимущества последнего метода будут ясны при рассмотрении способов удовлетворения граничным условиям для векторных полей. «Основными» граничными условиями для скалярных полей являются однородные условия Дирихле (равенство нулю поля на границе области) или однородные условия Неймана (равенство нулю нормальной составляющей градиента поля на границе области). В векторном случае нужно каким-либо образом задать на границе области значения всех трех основных

скалярных функций, указанных в предыдущем абзаце, или их нормальных производных. При неудачном выборе скалярных функций, задающих векторное поле, задача составления граничных условий становится исключительно сложной; при удачном выборе эта задача оказывается сравнительно простой.

В гл. 2 и 3 изучены различные векторные поля, которые нельзя выразить через градиент одной скалярной функции (например, электромагнитное поле, скорость вязкой жидкости или смещение упругого тела). Рассмотрение этих полей показывает, что «естественные» граничные условия заключаются в задании значений нормальных или тангенциальных компонент (или их производных) векторного поля на границе области. Если F_n и F_t — соответствующие компоненты, то одним из возможных граничных условий является $F_n = 0$, другим $F_t = 0$ и т. д. Конечно, F_t является двумерным вектором, получающимся проектированием вектора $\mathbf{F}$ на граничную поверхность; в случае неоднородного граничного условия необходимо задать и величину и направление этой проекции. Если $\mathbf{n}$ — единственный вектор нормали к граничной поверхности, то тангенциальная проекция содержится в $\mathbf{n} \times \mathbf{F}$, так что граничное условие Дирихле заключается в задании скалярной величины $F_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}$ и двумерного вектора $\mathbf{n} \times \mathbf{F}$.

В других случаях физически интересным может быть ротор векторного потенциала $\mathbf{F}$; в этих случаях мы имеем обобщение граничного условия Неймана, заключающееся в задании величин $\mathbf{n} \cdot (\text{rot } \mathbf{F})$ и $\mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{F})$.

Чтобы показать, как важно правильно выбрать три скалярные функции, задающие векторное поле, рассмотрим удовлетворение граничных условий на поверхности сферы. Если в качестве скалярных функций выбрать декартовы компоненты вектора F_x, F_y, F_z , то уравнения для этих функций будут весьма схожи с уравнениями для обычных скалярных полей. Например, если вектор $\mathbf{F}$ удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = 0$, то уравнения для всех трех декартовых компонент вектора $\mathbf{F}$ будут скалярными уравнениями Гельмгольца, методы решения которых были изучены в гл. 11. Однако подчинение найденных решений граничным условиям будет затруднено, так как вектор выражен декартовыми компонентами, которые сложным образом связаны со сферической граничной поверхностью. Если даже найти F_x, F_y, F_z как решения уравнения Гельмгольца в сферической системе координат r, ϑ, φ , то для удовлетворения, скажем, условия, требующего, чтобы вектор $\mathbf{F}$ был касателен к поверхности сферы во всех ее точках, придется составить выражения, в которых все три полученных решения «переплетаются» сложным образом. Эту задачу в принципе можно разрешить, но при этом мы встретимся с трудностями того же порядка, что и рассмотренные в начале гл. 5, которые привели нас к задаче отыскания решения скалярного уравнения, разделяющегося в системе координат, соответствующей границе области. Таким образом, мы приходим к необходимости выражения компонент нашего векторного поля в виде скалярных полей, достаточно просто связанных с граничной поверхностью.

Решение, которое сразу приходит на ум, заключается в том, чтобы выразить наш вектор через его компоненты в системе координат, соответствующей границе. В рассматриваемом примере естественно выбрать за три скалярные функции, через которые выражается наш вектор, $F_r, F_\vartheta, F_\varphi$ — величины компонент вектора в сферической системе координат. Но здесь мы сталкиваемся с другой трудностью, которую легко усмотреть, обращаясь к выражению $\nabla^2 \mathbf{F}$ через $F_r, F_\vartheta, F_\varphi$, данному в конце гл. 1. Мы видим, что соответствующие векторному уравнению Гельмгольца скалярные уравнения не распадаются на три уравнения, содержащие

каждое соответственно только F_r , F_θ и F_ϕ . Приходится иметь дело с системой трех однородных уравнений, каждое из которых содержит *все три функции*. Разрешить их не невозможно; однако в общем случае это сопряжено с решением дифференциального уравнения шестого порядка, чего конечно, нужно постараться избежать. Это затруднение возникает для всех криволинейных координатных систем. Если даже в уравнении скалярного поля в данной системе координат переменные разделяются, то в уравнениях для соответствующих компонент вектора $\mathbf{F}$ переменные могут уже не разделяться, и даже если они разделяются и в этих уравнениях, то компоненты так «перемешаны», что каждая входит во все три уравнения.

Однако не нужно слепо подходить к задаче, не пользуясь наводящими соображениями, подсказываемыми ее физическими аналогиями. Во всех случаях, рассмотренных в гл. 2, мы имели веские основания для разделения векторного поля на две части: одна получается как градиент скалярного потенциала, другая — как ротор векторного потенциала. Первое из этих полей обычно называется *продольной* компонентой, поскольку градиент определяет направление наиболее быстрого изменения скалярного потенциала. (Например, градиент потенциала указывает направление распространения плоской волны.) Второе называется *поперечной* (или *сolenoidalной*) компонентой, поскольку направление ротора вектора обычно является поперечным по отношению к направлению его наиболее быстрого изменения. (Например, оно перпендикулярно направлению распространения плоской волны.) Во многих случаях эти компоненты несколько различаются в своем поведении; скорость поперечных волн в упругой среде, например, отличается от скорости продольных. Но и в других случаях, если даже обе компоненты удовлетворяют одному и тому же уравнению (как в случае электромагнитного поля), нет препятствий для такого разделения.

Разделение на продольную и поперечную компоненты $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t$ имеет ряд преимуществ. Во-первых, продольная компонента, как было отмечено, является градиентом скалярного поля, и следовательно, для ее нахождения можно пользоваться методами трех предыдущих глав. Например, известно, как получить решение методом разделения переменных и удовлетворить граничным условиям для скалярного потенциала. Поэтому наше внимание в этой главе будет сосредоточено на поперечной компоненте, получающейся в виде ротора векторного потенциала. Эта компонента всегда может быть получена из пары скалярных полей. Обычно векторное поле определяется через три скалярных величины, но требование *сolenoidalности*, т. е. равенства нулю дивергенции поля, накладывает одно линейное соотношение на эти три скалярных функции, которое сводит число независимых скаляров к двум.

В первом параграфе этой главы будет показано, как разделение векторного поля на продольную и поперечную части дает возможность упростить способы удовлетворения граничным условиям. Будут исследованы ограничения, накладываемые на различные координатные системы, при которых поперечное решение связано с координатными поверхностями так же, как и разделяющийся скалярный потенциал. (Другими словами, будет обобщено понятие *разделимости* для того, чтобы включить в него поперечные векторные поля и их уравнения.) Затем будет дано резюме результатов 6 и 7 глав для того, чтобы рассмотреть основные свойства поперечных векторных собственных функций и векторных функций Грина, а также их использование при удовлетворении граничным условиям. В § 13.2 и 13.3 будут разобраны решения векторных уравнений Лапласа, Гельмгольца и волнового уравнения для различных координатных систем и граничных условий.

13.1. Векторные граничные условия, собственные функции и функции Грина

Нашей первой задачей в этом параграфе будет проверка некоторых утверждений, высказанных во введении. Уравнением, на котором мы проиллюстрируем наши результаты, будет векторное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{F}) - \text{rot}(\text{rot } \mathbf{F}) + k^2 \mathbf{F} = 0. \quad (13.1.1)$$

Это уравнение при $k=0$ переходит в векторное уравнение Лапласа, а решения векторного волнового уравнения получаются из решений уравнения (13.1.1) применением преобразования Лапласа, как это показано в § 11.1. Соответствующее неоднородное уравнение получим, добавляя слагаемые в правой части (13.1.1).

Как было отмечено в § 1.5 [см. уравнение (1.5.15)], векторное решение $\mathbf{F}$ всегда можно разделить на продольную и поперечную части:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t, \quad \mathbf{F}_l = \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{F}_t = \text{rot } \mathbf{A}, \\ \text{rot } \mathbf{F}_l &= 0, \quad \text{div } \mathbf{F}_t = 0, \end{aligned} \quad (13.1.2)$$

где φ — скалярный потенциал и $\mathbf{A}$ — векторный потенциал. Продольная часть (или, скорее, соответствующий скалярный потенциал) была рассмотрена в предыдущих главах, и нет необходимости в подробном ее рассмотрении; такое рассмотрение будет производиться, лишь если это потребуется для полноты изложения.

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ также имеет продольную и поперечную части, но его продольная часть не имеет физического смысла, так как при вычислении $\text{rot } \mathbf{A}$ для получения вектора $\mathbf{F}$ продольная часть дает нуль. Поэтому мы обычно принимаем, что дивергенция векторного потенциала $\mathbf{A}$ равна нулю. Будет сделано лишь несколько исключений, в частности, в случае векторного уравнения Лапласа.

Высказанное утверждение требует дополнительных пояснений в случае электромагнитного поля, так как оно связано с выбором калибровки потенциалов электромагнитного поля, не являющейся релятивистски инвариантной, как это было в т. I на стр. 206. Уравнения для определенных такой калибровкой электромагнитных потенциалов имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}, \\ \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J} - \frac{\epsilon\mu}{c} \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13.1.3)$$

В некоторых случаях рекомендуется к выбранному таким образом векторному потенциалу добавить произвольный градиент, подбирая его так, чтобы $\text{div } \mathbf{A}$ была равна некоторой произвольно заданной функции U , а не нулю. Тогда уравнениями для преобразованных потенциалов $\mathbf{A}_u$ и φ_u будут

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_u &= -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} - \frac{1}{c\epsilon} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \nabla^2 \mathbf{A}_u - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_u}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J} + \text{grad } U + \frac{\epsilon\mu}{c} \text{grad } \frac{\partial \varphi_u}{\partial t}. \end{aligned}$$

При этом, для того чтобы электрическое и магнитное поля не изменились при данном преобразовании потенциалов, необходимо, чтобы

$$\mathbf{A}_u = \mathbf{A} - \text{grad } \chi, \quad \varphi_u = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \text{где } \nabla^2 \chi = -U.$$

В частности, если мы хотим так выбрать потенциалы A и φ , чтобы они являлись компонентами четырехмерного вектора, то надо положить $\operatorname{div} A = -(\varepsilon\mu/c)(\partial\varphi/\partial t)$, т. е. $A_r = A - \operatorname{grad} \chi_r$; $\varphi_r = \varphi + (1/c)(\partial\chi_r/\partial t)$, где $\nabla^2 \chi_r = (\varepsilon\mu/c)(\partial\varphi_r/\partial t)$, а A_r и φ_r должны удовлетворять уравнениям (2.5.15). Поэтому можно вычислить A и φ из уравнений (13.1.3), а затем перейти при помощи указанного выше преобразования к новой системе потенциалов. Другая система потенциалов, иногда удобная, дается уравнениями (3.4.20).

Поперечное поле в криволинейных координатах. Предположим, что заданной граничной поверхности соответствуют криволинейные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_3 . Например, пусть рассматривается поверхность $\xi_1 = C$. Пусть продольная часть поля равна $\operatorname{grad} \varphi$. Если, скажем, уравнение Гельмгольца в этих координатах разделяется, то к продольной части поля можно применять граничные условия таким же образом, как это делалось в предыдущих главах. Как было указано несколькими страницами раньше, поперечная часть зависит от двух скалярных функций. Удобно выбрать эти скалярные функции и способ определения через них поперечного поля так, чтобы часть поля, определяемая при помощи одной функции, была касательной к поверхности $\xi_1 = C$, а другая часть — нормальной к ней.

Вектор, нормальный к поверхности ξ_1 , записывается в виде $a_1 f$, где f — некоторая подлежащая определению скалярная функция от ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Однако этот вектор не всегда дает поперечное поле, так как его дивергенция $(1/h_1 h_2 h_3) [\partial(h_2 h_3 f)/\partial \xi_1]$ далеко не всегда равна нулю, даже если f не зависит от ξ_1 .

Вектор

$$M = \operatorname{rot}(a_1 f) = \frac{a_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 f) - \frac{a_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 f)$$

касателен к поверхности $\xi_1 = C$, и поскольку дивергенция M равна нулю, его можно взять в качестве решения, если только f выбрана так, чтобы M удовлетворял заданному уравнению. Если таковым является векторное уравнение Гельмгольца, т. е.

$$-\nabla^2 M = -\operatorname{grad} \operatorname{div} M + \operatorname{rot} \operatorname{rot} M = \operatorname{rot} \operatorname{rot} M = k^2 M$$

(поскольку $\operatorname{div} M = 0$), то остается лишь удовлетворить требованию, чтобы $\operatorname{rot} M = \operatorname{rot} \operatorname{rot}(a_1 f)$ равнялся $k^2 a_1 f$ плюс градиент некоторого скаляра. В этом случае уравнение будет удовлетворено. Но

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M = & -\frac{a_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} h_1 f \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} h_1 f \right) \right] + \\ & + \frac{a_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} h_1 f \right) + \frac{a_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} h_1 f \right). \end{aligned}$$

Это выражение, конечно, не очень похоже на $k^2 a_1 f + \operatorname{grad} u$, но при более внимательном рассмотрении становится ясно, что коэффициенты при a_2 и a_3 могут быть представлены как соответствующие компоненты градиента в том и только в том случае, если функции $h_3/h_1 h_2$ и $h_2/h_1 h_3$ обе не зависят от ξ_1 , т. е. если и h_1 и h_2/h_3 не зависят от ξ_1 . Действительно, в этом случае можно изменить порядок дифференцирования, а также преобразовать первый член так, чтобы окончательно получить

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M = & \frac{1}{h_1^2} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} h_1 f \right) - a_1 \left\{ \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} h_1 f \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} h_1 f \right) + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} h_1 f \right) \right\}. \end{aligned}$$

Ротор первого члена равен нулю лишь тогда, когда h_1 не зависит ни от ξ_2 , ни от ξ_3 ; другими словами, h_1 должно быть постоянной и, следовательно, может быть положено равной единице. Тогда два последних члена соответствуют двум последним слагаемым в выражении для $\nabla^2 f$, так как при $h_1 = 1$ h_3/h_2 равно $h_1 h_2 h_3/h_2^2 = g_2(\xi_1, \xi_3) f_2(\xi_2)$ и h_2/h_3 равно $h_1 h_2 h_3/h_3^2 = g_3(\xi_1, \xi_2) f_3(\xi_3)$, где функции g_n и f_n те же, что и на стр. 484 в т. I. Выражение в фигурных скобках отлично от $\nabla^2 f$ лишь из-за первого слагаемого. Однако его можно так преобразовать, чтобы это выражение было равно $\omega(\xi_1) \nabla^2 \psi$, где $f = \omega(\xi_1) \psi$. Это возможно, если первое слагаемое, которое можно записать как $\partial^2(\omega\psi)/\partial\xi_1^2$ равно $(\omega/f_1)[\partial(f_1\partial\psi/\partial\xi_1)/\partial\xi_1]$, где $h_2 h_3 = g_1(\xi_2, \xi_3) f_1(\xi_1)$. Этим путем окончательно получим

$$2 \frac{d\omega}{d\xi_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} + \psi \frac{d^2\omega}{d\xi_1^2} = \frac{\omega}{f_1} \cdot \frac{df_1}{d\xi_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\xi_1},$$

что должно иметь место для любой функции ψ .

Это уравнение удовлетворяется при любой функции ψ , если $d^2\omega/d\xi_1^2 = 0$ и если $2\ln\omega = \ln f_1$. Первое уравнение удовлетворяется, если ω равно 1 или ξ_1 , а второе — если f_1 равно 1 или соответственно ξ_1^2 . При выполнении этих условий окончательно получим

$$\text{rot } M = \text{grad} \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} \omega\psi \right) - a_1 \omega \nabla^2 \psi,$$

и если ψ является решением скалярного уравнения Гельмгольца, $\nabla^2 \psi = -k^2 \psi$, то

$$\text{rot } M = \text{grad} \left(\frac{\partial f}{\partial\xi_1} \right) + k^2 a_1 f, \quad f = \omega\psi,$$

следовательно,

$$\text{rot}(\text{rot } M) = k^2 M.$$

Таким образом, дивергенция вектора $M = \text{rot}(a_1 \omega\psi)$ равна нулю, и этот вектор является решением векторного уравнения Гельмгольца.

Просматривая приведенную в конце гл. 5 таблицу различных систем координат, в которых переменные разделяются, мы видим, что из одиннадцати таких координатных систем лишь в шести один из коэффициентов Ламе равен единице, а отношение двух других не зависит от соответствующей этому коэффициенту координаты. Это: прямоугольные координаты, в которых за ξ_1 можно выбрать x , y или z , три цилиндрические системы координат, в которых за ξ_1 надо выбрать координату z , и, наконец, сферическая и коническая системы координат, в которых роль координаты ξ_1 играет радиус. В первых четырех случаях функция f_1 равна 1, поэтому и $\omega = 1$; в двух последних случаях $f_1 = r^2$ и, следовательно, $\omega = r$.

Мы показали тем самым, что в шести из одиннадцати координатных систем, в которых разделяются переменные в скалярном уравнении Гельмгольца, можно получить решение векторного уравнения Гельмгольца, поперечная часть которого касательна к одной из координатных поверхностей. Общий вид этого решения есть

$$M = \text{rot}[a_1 \omega(\xi_1) \psi] = \text{grad}(\omega\psi) \times a_1, \quad (13.1.4)$$

где ψ — решение скалярного уравнения Гельмгольца, $\xi_1 = z$ и $\omega = 1$ для цилиндрических координат (включая и декартовы), а для сферических и конических $\xi_1 = r$ и $\omega = r$.

Этим получено одно из двух скалярных полей, определяющих поперечную часть общего решения, и показано, как из этого скалярного поля получается соответствующая часть поперечного поля. Остается построить

второе скалярное поле, определяющее остальную часть поперечного поля, входящего в общее решение, именно, часть, нормальную к координатной поверхности $\xi_1 = \text{const}$, или, проще говоря, часть, ротор которой касателен к этой координатной поверхности.

Как мы видели, вектор $\mathbf{a}_1 f$, вообще говоря, не является поперечным решением (для многих координатных систем он даже не удовлетворяет уравнению). Однако

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \text{rot rot} [\mathbf{a}_1 w(\xi_1) \chi] = k \mathbf{a}_1 w \chi + \frac{1}{k} \text{grad} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} w \chi \right), \quad (13.1.5)$$

где χ — решение скалярного уравнения Гельмгольца [а w — то же, что и в (13.1.4)], является поперечным решением векторного уравнения Гельмгольца в указанных выше шести системах координат. При этом вектор

$$\text{rot } \mathbf{N} = k \text{grad} (w \chi) \times \mathbf{a}_1$$

касателен к поверхностям ξ_1 . Вектор $\mathbf{N}$ не совпадает с вектором $\mathbf{M}$ даже при $\chi = \psi$. В самом деле, при $\chi = \psi$ вектор $\mathbf{N}$ часто ортогонален $\mathbf{M}$.

Таким образом, мы ввели три решения *скалярного* уравнения Гельмгольца, функции φ , ψ и χ , и построили из них решения векторного уравнения Гельмгольца, из которых можно линейно скомбинировать наиболее общее его решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{M} = \text{rot} (\mathbf{a}_1 w \psi) = \text{grad} (w \psi) \times \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{N} &= \frac{1}{k} \text{rot rot} (\mathbf{a}_1 w \chi) = k \mathbf{a}_1 w \chi + \frac{1}{k} \text{grad} \left[\frac{\partial (w \chi)}{\partial \xi_1} \right]. \end{aligned} \quad (13.1.6)$$

Форма этих решений допускает достаточно простое применение граничных условий. Первый из этих векторов представляет продольную часть, два других — поперечную часть решения. Вектор $\mathbf{N}$ записан с множителем $1/k$, чтобы размерность φ , $w \chi$ и $w \psi$ была одинаковой.

Для остальных пяти координатных систем можно получить решения, выбирая в качестве прямоугольных компонент вектора три решения скалярного уравнения Гельмгольца. Однако при этом удовлетворение граничным условиям представляет почти неразрешимую задачу. Итак, мы уточнили определение разделимости векторного решения, понимая под этим возможность разложения решения на компоненты вдоль векторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, определенных формулами (13.1.6), причем входящие в них скалярные функции разделены на множители, зависящие каждый лишь от одной переменной, согласно изложенному в § 5.1. Поэтому в смысле данного определения лишь шесть координатных систем допускают разделение решения векторного уравнения Гельмгольца. Для остальных векторных уравнений разделение в этом смысле связано с еще большими ограничениями. Например, уравнение задач статической теории упругости разделяется лишь в сферических и полярных координатах; даже в прямоугольных координатах удовлетворить граничным условиям нелегко.

Векторные теоремы Грина. Чтобы показать связь между решениями и граничными условиями и получить векторные функции Грина для продольных и поперечных векторных полей, необходимо вывести векторный аналог теоремы Грина (7.2.2). Эта теорема устанавливает связь между поведением скалярных полей на граничной поверхности и их общим поведением внутри области, подсказывает нам характер граничных условий, необходимых для определения поля внутри области, а также служит основой в методе решения краевых задач при помощи функции Грина. Эта теорема основана, конечно, на теореме Гаусса (1.4.7), связывающей дивергенцию векторного поля с полным потоком вектора.

Формула Грина связывает две скалярные функции. Теперь мы установим соотношение между двумя векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, причем в качестве одного из них мы возьмем затем функцию Грина, а в качестве другого — искомое решение. Вместо одной величины, как это было в скалярном случае, на граничной поверхности теперь надо задать две: одну — связанную с ротором, а другую — с дивергенцией вектора. Запишем сначала теорему Гаусса для двух векторов, образованных из $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} \iiint \operatorname{div}(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{F}) dv &= \oint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{F} dA, \\ \iiint \operatorname{div}[\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] dv &= \oint [\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] \cdot \mathbf{n} dA = \\ &= \oint [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} dA = \oint \mathbf{E} \cdot [\operatorname{rot} \mathbf{F} \times \mathbf{n}] dA, \end{aligned}$$

где для простоты выкладок положено, что аксиальный вектор $d\mathbf{A}$ совпадает с единичным вектором $\mathbf{n}$ внешней нормали к поверхности и что его величина равна элементу dA площади поверхности.

Пользуясь таблицей векторных операций, приведенной в конце гл. 1, мы видим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{F}) &= \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F}) + (\operatorname{div} \mathbf{F}) \cdot (\operatorname{div} \mathbf{E}), \\ \operatorname{div}[\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] &= (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{F}) - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}). \end{aligned}$$

Меняя местами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ и вычитая получаемые соотношения из исходных, окончательно получим аналог теоремы Грина для векторов:

$$\begin{aligned} \iiint \{\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}\} dv &= \oint \{(\operatorname{div} \mathbf{F}) \mathbf{E} - (\operatorname{div} \mathbf{E}) \mathbf{F}\} \cdot \mathbf{n} dA - \\ - \iiint [\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}] dv &= \oint \{[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} + [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}] \cdot \mathbf{F}\} dA, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \iiint \{\mathbf{E} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla^2 \mathbf{E}\} dv &= \\ &= \oint \{\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{F} + \mathbf{E}(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{F}(\operatorname{div} \mathbf{E})\} \cdot \mathbf{n} dA = \\ &= \oint \{(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{F} - \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{E} \cdot [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] + \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}])\} dA, \quad (13.1.7) \end{aligned}$$

где, конечно, $\nabla^2 \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F}$. Наконец, будем считать вектор $\mathbf{E}$ искомым векторным полем, которое надо определить через граничные условия, а вектор $\mathbf{F}$ функцией Грина.

Из (13.1.7) мы видим, что граничные условия задачи распадаются на граничные условия для поперечного и продольного полей. Если на границе дивергенция решения равна нулю, то мы можем пользоваться поперечной функцией Грина и всюду внутри области решение представляется поперечным полем (с немногими особыми исключениями, которые будут отмечены ниже). Аналогично, если ротор решения обращается в нуль на границе, то можно пользоваться продольной функцией Грина и решение всюду внутри области является продольным; в этом случае можно вернуться к скалярному потенциалу — первое из соотношений (13.1.7) эквивалентно соотношению (7.2.2).

Из полученных уравнений легко усмотреть типы граничных условий, которым можно подчинить векторные поля. Во-первых, возможно задание двух величин $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ и $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$, то есть задание на границе нормальной

и тангенциальной компонент самого поля; для этих граничных условий применяется функция Грина F , обращающаяся в нуль на границе. Например, если искомым вектор представляет смещение в упругой среде, то эти условия употребляются при задании смещений точек граничной поверхности среды. В случае векторного электромагнитного потенциала [с добавочным условием, например, (3.4.20)] нормальная компонента A определяется интегралом по времени от поверхностного заряда на граничной поверхности, а тангенциальная компонента A определяется поверхностным током.

Во-вторых, возможна другая группа граничных условий, которая в некотором смысле соответствует заданию нормальной производной в скалярном случае и состоит в задании величины $\operatorname{div} \mathbf{E}$ и $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}$. При применении этих граничных условий надо пользоваться функцией Грина, дивергенция и ротор которой равны нулю на границе. В случае упругого тела эти граничные условия для вектора $\mathbf{E}$ соответствуют заданию давления и касательного (тангенциального) напряжения на границе. В аналогичном случае для электромагнитного векторного потенциала задаются напряженности электрического и магнитного поля на граничной поверхности ($\operatorname{rot} A$ пропорционален $\mathbf{H}$).

Кроме того, если физическая постановка задачи (или в граничных условиях, или в самом уравнении) указывает, что поле всюду в рассматриваемой области является либо чисто продольным, либо чисто поперечным, то можно использовать это обстоятельство, выбирая соответствующую функцию Грина. При этом граничные условия упрощаются. Например, если поле всюду поперечное, то на границе достаточно задать лишь проекцию $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$ или проекцию $[\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}]$. Функцию Грина выбираем так, чтобы ее дивергенция была равна нулю и, кроме того, чтобы на границе касательная компонента либо самой функции Грина, либо ее ротора обращалась в нуль. С другой стороны, если поле всюду продольное, то на границе достаточно задать лишь нормальную компоненту $\mathbf{E}$ или ее дивергенцию, а для соответствующей продольной функции Грина потребовать выполнения на границе аналогичных нулевых условий.

Аффинорная функция Грина. В последней части гл. 7 было отмечено, что функция Грина, вообще говоря, является ядром интегрального оператора, который преобразует в решение граничные условия и (или) плотность распределения внешних источников. В случае скалярного решения это ядро также может быть скалярным. Если же граничные условия и функция распределения внешних источников являются векторными, то это ядро должно быть векторным оператором, аффинором типа, рассмотренного в § 1.6. Можно сказать, что это является естественным распространением теоретико-функциональной точки зрения на собственные функции и функции Грина, развитой в гл. 6 и 7. Там было указано, что граничные условия можно рассматривать как вектор в абстрактном векторном пространстве, определяемом единичными векторами $\mathbf{e}(x^3)$, а функция Грина является векторным оператором, преобразующим граничные значения в решение. До тех пор пока граничные условия и функции внешних источников являются скалярными, G представляет собой оператор в векторном пространстве, но скаляр в «реальном» пространстве. Если граничные условия и плотность источников являются векторами в обычном смысле, то функция Грина должна быть векторным оператором не только в функциональном, но и в реальном пространстве. Она преобразует векторные граничные условия и плотность внешних источников в векторное решение. Другими словами, функция Грина для векторного случая является *аффинорной* (тензорной) функцией положения источника и наблюдателя.

Эта аффинорная функция Грина $\mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ имеет общие свойства, аналогичные перечисленным в т. I на стр. 746—747 свойствам скалярной функции Грина: 1) она должна обладать свойством симметрии; 2) при ее помощи можно получить решение как для неоднородных граничных условий, так и для неоднородного уравнения; 3) полученное с ее помощью решение граничной задачи имеет особенности вне рассматриваемой области. Для уравнения Гельмгольца эта функция должна удовлетворять неоднородному аффинорному уравнению

$$\nabla^2 \mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + k^2 \mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -4\pi \mathfrak{Z} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (13.1.8)$$

где $\mathfrak{Z}$ — идемпоттор, аффинорный аналог единицы ($\mathfrak{Z} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}$ для любого $\mathbf{F}$). Оператор ∇^2 применяется к $\mathfrak{G}$ по $\mathbf{r}$ (оператор ∇_0^2 применяется к $\mathfrak{G}$ по $\mathbf{r}_0$) ко всем ее девяти компонентам. Девять декартовых компонент аффинора $\nabla^2 \mathfrak{G}$ являются результатом действия оператора Лапласа на соответствующие девять декартовых компонент $\mathfrak{G}$. Выраженная в компонентах криволинейной системы координат, эта функция имеет более сложный вид, однако соответствующее выражение можно получить методом § 1.5. Ниже будут приведены некоторые примеры.

Методами, аналогичными рассмотренным в т. I на стр. 749, можно показать, что аффинор $\mathfrak{G}$ удовлетворяет соотношению взаимности

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \mathfrak{G}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}).$$

Можно также показать, что $\mathfrak{G}$ является симметричным аффинором, другими словами, что $\mathfrak{G} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathfrak{G}$ для любого $\mathbf{F}$.

Введенную аффинорную функцию Грина можно использовать для определения решения неоднородного векторного уравнения, например уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{Q}(\mathbf{r}), \quad (13.1.9)$$

удовлетворяющего заданным условиям на граничной поверхности S . Так же, как и раньше, умножим уравнение (13.1.8) слева на $\mathbf{F}$, а (13.1.9) справа на $\mathfrak{G}$ и вычтем первое из второго. Проинтегрировав результат по области внутри S , получим *векторное* уравнение

$$\iiint \{\nabla^2 \mathbf{F} \cdot \mathfrak{G} - \mathbf{F} \cdot \nabla^2 \mathfrak{G}\} dv = 4\pi \iiint \{\mathbf{F} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \mathbf{Q} \cdot \mathfrak{G}\} dv.$$

Так как $\mathfrak{G}$ является симметричным аффинором, то $\mathbf{F}$ и $\mathfrak{G}$ в этом выражении можно поменять местами.

В силу уравнения (13.1.7), меняя местами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$, получим, что внутри области, ограниченной поверхностью S , и на самой поверхности

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = & \iiint \mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) dv_0 + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint \{(\nabla_0 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0^s)) (\mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \cdot \mathbf{n}) - (\nabla_0 \cdot \mathfrak{G})(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0^s) \cdot \mathbf{n}) - \\ & - \mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \cdot [\mathbf{n} \times [\nabla_0 \times \mathbf{F}]] - [\nabla_0 \times \mathfrak{G}] \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0^s)]\} dA_0, \end{aligned} \quad (13.1.10)$$

где различные векторные операции над векторами и аффинорами, входящими в подинтегральную функцию в поверхностном интеграле, производятся по правилам, разобранным в гл. 1. Для некоторых случаев эти операции вскоре будут подробно рассмотрены. Член $(\nabla_0 \cdot \mathbf{F})$ является скаляром, в то время как $(\mathfrak{G} \cdot \mathbf{n})$ — вектор; член $(\nabla_0 \cdot \mathfrak{G})$ является вектором, а $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})$ — скаляром; член $[\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F}]$ — вектор, а $\mathfrak{G}$ — аффинор; член $[\mathbf{n} \times \mathbf{F}]$ — вектор, а $[\nabla \times \mathfrak{G}]$ — аффинор, так что полное выражение в фигурных скобках представляет собой вектор. Объемный интеграл берется по всему объему, ограниченному поверхностью S , а поверхностный интеграл — по всей по-

верхности S (по координатам $\mathbf{r}_0$). Это выражение эквивалентно формуле (7.2.7) и является исходным для различных методов получения векторных решений с помощью функции Грина.

Например, если краевая задача состоит в задании на граничной поверхности как касательной, так и нормальной составляющих $\mathbf{F}$ (F_t и F_n), то надо выбрать аффинорную функцию Грина, обращающуюся в нуль на границе области ($\mathcal{G}$ равно нулю, когда $\mathbf{r}$ лежит на S , а $\mathbf{r}_0$ не лежит на S , или наоборот). Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) dv_0 - \frac{1}{4\pi} \oint \{(\nabla_0 \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)) F_n(\mathbf{r}_0^s) + [\nabla_0 \times \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}_t(\mathbf{r}_0^s)]\} dA_0, \quad (13.1.11)$$

где $\mathcal{G}(\mathbf{r}^s|\mathbf{r}_0) = \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) = 0$. В это выражение нормальная к поверхности компонента вектора $\mathbf{F}$ входит отдельно от касательных компонент, которые образуют касательный вектор $\mathbf{F}_t$ ($\mathbf{F}_t$ есть касательный вектор, который получается проектированием вектора $\mathbf{F}$ на плоскость, касательную к поверхности; $\mathbf{n} \times \mathbf{F} = \mathbf{n} \times \mathbf{F}_t$ является касательным вектором, который получается из вектора $\mathbf{F}_t$ поворотом на $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{n}$ как оси по часовой стрелке, если смотреть в направлении вектора $\mathbf{n}$). Если $\mathbf{F}$ окажется поперечным решением (что может иметь место лишь при $\operatorname{div} \mathbf{Q} = 0$), то аффинор $\mathcal{G}$ можно выбрать поперечным (т. е. $\nabla \cdot \mathcal{G} = -\nabla_0 \cdot \mathcal{G} = 0$) и на граничной поверхности достаточно задать лишь касательную составляющую вектора $\mathbf{F}$, не задавая его нормальной составляющей. Это и не удивительно, так как требование равенства $\operatorname{div} \mathbf{F}$ нулю накладывает условие на три скалярные функции, определяющие вектор $\mathbf{F}$, поэтому для определения этих трех функций достаточно двух граничных условий для касательных компонент $\mathbf{F}$. Наоборот, если $\mathbf{F}$ является продольным, то и аффинор $\mathcal{G}$ можно выбрать продольным ($\nabla \times \mathcal{G} = -\nabla_0 \times \mathcal{G} = 0$) и для определения вектора $\mathbf{F}$ на граничной поверхности достаточно задать лишь его нормальную компоненту.

С другой стороны, если в граничном условии на поверхности задаются дивергенция и касательная компонента ротора $\mathbf{F}$, то аффинор $\mathcal{G}$ надо выбрать так, чтобы на S были равны нулю его дивергенция и касательная составляющая ротора. Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) dv_0 + \frac{1}{4\pi} \oint \{[\mathcal{G} \cdot \mathbf{n}] (\operatorname{div}_0 \mathbf{F}) - \mathcal{G} \cdot [\mathbf{n} \times \operatorname{rot}_0 \mathbf{F}]\} dA_0, \quad (13.1.12)$$

где $\operatorname{div} [\mathcal{G}(\mathbf{r}^s|\mathbf{r}_0)] = \operatorname{div}_0 [\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] = 0$ и соответственно $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} [\mathcal{G}(\mathbf{r}^s|\mathbf{r}_0)] = \mathbf{n} \times \operatorname{rot}_0 [\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] = 0$. В этом случае дивергенция $\mathbf{F}$ входит отдельно от касательной компоненты его ротора. Если вектор $\mathbf{F}$ поперечный (т. е. вектор $\mathbf{Q}$ поперечный, а $\operatorname{div} \mathbf{F}$ равна нулю на S), то в граничных условиях должны быть заданы лишь две касательные компоненты ротора $\mathbf{F}$.

Общие неоднородные граничные условия для векторных решений состоят в задании значений линейной комбинации нормальной компоненты $\mathbf{F}$ и его дивергенции

$$[\operatorname{div} \mathbf{F} + \alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})] |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^s} = H(\mathbf{r}^s)$$

и линейной комбинации касательных компонент самого вектора и его ротора

$$[\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] + \beta [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^s} = \mathbf{K}(\mathbf{r}^s) \times \mathbf{n},$$

где α и β могут быть функциями от $\mathbf{r}^s$. Этот случай соответствует формуле (7.2.11). При этом следует выбрать функцию $\mathcal{G}$, удовлетворяющую гранич-

ным условиям

$$\nabla \cdot \mathcal{G} + \alpha (\mathbf{n} \cdot \mathcal{G}) = 0 \text{ и } \mathbf{n} \times [\nabla \times \mathcal{G} - \beta \mathcal{G}] = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) dv_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \oint \{H(\mathbf{r}_0^s)(\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \cdot \mathbf{n}) + \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s) \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{K}(\mathbf{r}_0^s)]\} dA_0, \quad (13.1.13)$$

что является векторным аналогом формулы (7.2.12).

Векторные собственные функции. Прежде чем перейти к вычислению аффинорных функций Грина для различных случаев, полезно сделать некоторые замечания о собственных функциях векторного уравнения Гельмгольца (как примера векторного уравнения). Разобранном выше методом их можно получать из собственных функций соответствующего скалярного уравнения. Проще всего искать их либо в виде

$$\mathbf{F} = iU + jV + kW,$$

либо в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} + \mathbf{M} + \mathbf{N},$$

где

$$\mathbf{L} = \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{M} = \text{rot}(\mathbf{a}_1 \omega \phi), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \text{rot rot}(\mathbf{a}_1 \omega \chi), \quad (13.1.14)$$

а U, V, W или φ, ϕ, χ — собственные функции скалярных уравнений вида $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$ и т. д. Задача заключается в выборе k и соответствующих функций U, V, W или φ, ϕ и χ таким образом, чтобы удовлетворялись все заданные граничные условия.

Это делается сравнительно просто, если граничным условиям можно удовлетворить, используя лишь одну из функций, например U или ϕ , без использования функций V, W или φ, χ . Если такое упрощение невозможно, то определение допустимых значений k достаточно сложно. Нетрудно показать, что указанное упрощение возможно лишь при определенной геометрии границы области и что такое ограничение равносильно дополнительным требованиям на координатную систему, которые накладывались введенным ранее понятием разделимости векторного решения. Ниже будут даны практические примеры использования указанных положений.

Обычными однородными граничными условиями для векторной собственной функции являются или условия Дирихле $\mathbf{F} = 0$, или условия Неймана $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F} = 0$ и $\text{div } \mathbf{F} = 0$. Можно также требовать, чтобы на границе вектор $\mathbf{F}$ являлся поперечным ($\text{div } \mathbf{F} = 0$ на границе) и в то же время удовлетворял условиям Дирихле; в этом случае правильным граничным условием является $\mathbf{n} \times \mathbf{F} = 0$ (задание и F_n переопределяет задачу в случае дополнительного требования на границе $\text{div } \mathbf{F} = 0$). Оказывается, что требование равенства $\text{div } \mathbf{F}$ нулю на границе обычно эквивалентно требованию поперечности $\mathbf{F}$ внутри области. Действительно, взяв дивергенцию от $\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = 0$, легко видеть, что скалярная функция $\text{div } \mathbf{F}$ является решением скалярного уравнения Гельмгольца. Лишь для дискретного множества значений k существуют отличные от нуля решения скалярного уравнения $\nabla^2 f + k^2 f = 0$, обращающиеся в нуль на границе замкнутой области. Поэтому, если только собственные значения векторного уравнения Гельмгольца не совпадают с собственными значениями скалярного уравнения при граничном условии $f = 0$, то из условия $\text{div } \mathbf{F} = 0$ на границе вытекает, что $\text{div } \mathbf{F} = 0$ тождественно внутри всей области, т. е. вектор $\mathbf{F}$ поперечный.

Разберем теперь несколько примеров простых векторных собственных функций; это поможет почувствовать связанные с ними усложнения и сможет научиться их преодолевать. Простейший случай — прямоугольная область со сторонами l_x, l_y, l_z , в одном из углов которой находится начало координат. Если заданы условия Дирихле, то собственные функции можно записать в виде

$$\mathbf{F} = (\mathbf{i}, \mathbf{j} \text{ или } \mathbf{k}) \left[\sin\left(\frac{\pi n_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi n_z z}{l_z}\right) \right], \quad (13.1.15)$$

$$k^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2 \right];$$

$$n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots; \mathbf{F} = 0 \text{ на границе.}$$

Таким образом, для каждой тройки значений n_x, n_y, n_z имеются три взаимно ортогональные векторные функции. Ни один из этих векторов не является ни продольным, ни поперечным, причем из каждой тройки полученных решений нельзя составить такие комбинации, которые давали бы продольную и две поперечные собственные функции. Как было указано ранее, решения, удовлетворяющие граничным условиям, задающим на границе все три компоненты решения, вообще говоря, не являются ни продольными, ни поперечными (т.е. ни их дивергенция, ни ротор не равны нулю). Отметим то очевидное обстоятельство, что система (13.1.15) является полной системой векторных собственных функций, при помощи которой внутри области может быть представлено любое кусочно-гладкое векторное поле.

Ослабим теперь слегка наши требования, оставив лишь условие равенства нулю на границе касательных компонент $\mathbf{F}$. Этому условию, конечно, удовлетворяет система (13.1.15), а также любая линейная комбинация этих векторов вида $\mathbf{F} = \mathbf{U}$, или $\mathbf{V}$, или $\mathbf{W}$, где

$$\mathbf{U} = \mathbf{i} \cos\left(\frac{n_x \pi}{l_x} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} \cdot y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} \cdot z\right),$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{j} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{l_y} \cdot y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} \cdot z\right), \quad (13.1.16)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{k} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} \cdot y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{l_z} \cdot z\right),$$

которые соответствуют тем же собственным значениям k , что и система (13.1.15). Система векторов (13.1.16) также является полной системой собственных функций: (Соответствующая каждой компоненте система скалярных собственных функций является полной для данной области.) Следовательно, двух систем (13.1.15) и (13.1.16) слишком много; нужно еще одно граничное условие для выбора наших собственных функций. Таким условием может быть требование равенства нулю нормальной компоненты $\mathbf{F}$ на границе, которому удовлетворяет лишь система (13.1.15). Другим условием может быть требование равенства нулю на границе $\operatorname{div} \mathbf{F}$; в этом случае мы используем лишь систему (13.1.16). Однако эта система не является поперечной, так как для рассматриваемой области собственные значения скалярного уравнения для $\operatorname{div} \mathbf{F}$ при нулевых условиях на границе совпадают с собственными значениями векторного уравнения. В действительности в каждый из векторов системы (13.1.16) оказалась непременно включенной некоторая продольная часть.

Однако в рассматриваемом случае с граничными условиями равенства нулю на границе касательной составляющей $\mathbf{F}$ и дивергенции $\mathbf{F}$ можно составить из системы (13.1.16) такие тройки линейных комбинаций, что один вектор окажется продольным, а два других поперечными, с равными

нулю дивергенциями во всей области, чего нельзя сделать в случае системы (13.1.15). Такими комбинациями будут

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{n_x \pi}{l_x} \mathbf{U} + \frac{n_y \pi}{l_y} \mathbf{V} + \frac{n_z \pi}{l_z} \mathbf{W} = \text{grad} \left[\sin \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \sin \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \sin \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right) \right], \\ \mathbf{M} &= -\frac{n_z \pi}{l_z} \mathbf{V} + \frac{n_y \pi}{l_y} \mathbf{W} = \text{rot} \left[\mathbf{i} \sin \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \cos \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \cos \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right) \right] = \\ &= -\mathbf{i} \times \text{grad} \left[\sin \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \cos \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \cos \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right) \right], \\ \mathbf{N} &= \frac{\pi^2}{k} \left[\left(\frac{n_y}{l_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z} \right)^2 \right] \mathbf{U} - \frac{\pi^2}{k} \left(\frac{n_x n_y}{l_x l_y} \right) \mathbf{V} - \frac{\pi^2}{k} \left(\frac{n_x n_z}{l_x l_z} \right) \mathbf{W} = \\ &= \frac{1}{k} \text{rot rot} \left[\mathbf{i} \cos \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \sin \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \sin \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right) \right], \quad (13.1.17) \\ \text{div } \mathbf{F} &= 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{F} = 0 \text{ на границе,} \end{aligned}$$

где $\mathbf{L}$ — продольный вектор, а $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — поперечные.

Отметим некоторые интересные моменты в полученном результате. Во-первых, функции φ , ψ , χ , через которые $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ выражаются согласно (13.1.14), являются различными и удовлетворяют различным граничным условиям. На границе равны нулю φ , нормальная компонента $i\psi$ и касательная компонента $i\chi$. Каждая из них определяет полную систему скалярных собственных функций, соответствующих одним и тем же собственным значениям. Наконец, для заданной тройки чисел n_x , n_y , n_z векторы $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ взаимно ортогональны. Оказывается, что это свойство векторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, определенных формулами (13.1.14), выполняется почти всегда при «разумных» граничных условиях.

Рассмотрим теперь другую граничную задачу. Найдем решения, у которых касательные составляющие ротора равны нулю на границе. Нетрудно указать три таких решения, имеющих вид $i\mathbf{U}$, $j\mathbf{V}$, $k\mathbf{W}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{i} \sin \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \cdot \cos \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \cdot \cos \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{j} \cos \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \cdot \sin \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \cdot \cos \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right), \\ \mathbf{w} &= \mathbf{k} \cos \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \cdot \cos \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \cdot \sin \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right). \end{aligned} \quad (13.1.18)$$

Кроме того, ротор функции $\mathbf{L}$ (13.1.17) (или вообще градиента любого решения скалярного уравнения Гельмгольца) равен нулю на границе, так что мы получаем больше, чем требуется. Но этого и следовало ожидать, так как полным граничным условием Неймана является требование равенства нулю не только касательной составляющей ротора, но и дивергенции. Комбинирование различных компонент дает искомую систему в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{grad} \left[\sin \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \sin \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \sin \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right) \right], \\ \mathbf{M} &= \frac{n_z \pi}{l_z} \mathbf{v} - \frac{n_y \pi}{l_y} \mathbf{w} = \text{rot} \left[\mathbf{i} \cos \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \sin \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \sin \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right) \right], \\ \mathbf{N} &= \frac{\pi^2}{k} \left[\left(\frac{n_y}{l_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z} \right)^2 \right] \mathbf{u} - \frac{\pi^2}{k} \frac{n_x n_y}{l_x l_y} \mathbf{v} - \frac{\pi^2}{k} \frac{n_x n_z}{l_x l_z} \mathbf{w} = \\ &= \frac{1}{k} \text{rot rot} \left[\mathbf{i} \sin \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \cos \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \cos \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right) \right], \\ \text{div } \mathbf{F} &= 0 \text{ и } [\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F}] = 0 \text{ на границе.} \end{aligned} \quad (13.1.19)$$

Как и раньше, $\mathbf{L}$ — продольный, а $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — поперечные векторы. Опять соответствующие φ , ψ и χ являются различными скалярными функциями, причем каждая определяет полную систему собственных функций.

Наконец, построим тройную последовательность собственных векторов с равными нулю на границе нормальной компонентой и касательной компонентой ротора (четвертая возможная комбинация однородных граничных условий). Такой системой как раз является система (13.1.18). Из троек этих векторов можно составить один продольный и два поперечных вектора, взяв

$$\mathbf{L} = \frac{n_x \pi}{l_x} \mathbf{u} + \frac{n_y \pi}{l_y} \mathbf{v} + \frac{n_z \pi}{l_z} \mathbf{w} = -\text{grad} \left[\cos \left(\frac{n_x \pi}{l_x} x \right) \cos \left(\frac{n_y \pi}{l_y} y \right) \cos \left(\frac{n_z \pi}{l_z} z \right) \right], \quad (13.1.20)$$

$\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — такими же, как в (13.1.19),

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F} = 0 \quad \text{на границе.}$$

Таким образом, построены системы векторных собственных функций для любой из четырех возможных комбинаций однородных граничных условий. Нетрудно видеть, как удовлетворить и более общим граничным условиям, использованным в формуле (13.1.13).

Другие системы собственных функций в различных координатах будут рассмотрены ниже. Проведенных рассмотрений все же достаточно, чтобы разобраться в сути дела. Если граничное условие заключается в равенстве нулю вектора $\mathbf{F}$, то наиболее простым решением является разложение $\mathbf{F}$ на его прямоугольные компоненты U , V и W , которые являются решениями скалярных уравнений с однородными граничными условиями Дирихле. Естественно, собственные значения для U , V и W совпадают, так что любое собственное колебание имеет три степени свободы в соответствии с трехкратным вырождением, имеющим место в этом случае.

Если граничное условие является одним из остальных трех однородных граничных условий или какой-либо их комбинацией, то обычно лучше всего разложить $\mathbf{F}$ на продольный собственный вектор $\mathbf{L}$ и два поперечных собственных вектора $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Они также являются взаимно ортогональными. Для простого уравнения Гельмгольца в случае прямоугольных границ собственные значения для всех трех систем собственных векторов одни и те же, что опять соответствует трехкратному вырождению. В некоторых других случаях это не имеет места и допустимые частоты для волн различного типа оказываются различными.

Примером может служить уравнение колебаний изотропной упругой среды

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{F} - \mu \text{rot rot } \mathbf{F} + \rho \omega^2 \mathbf{F} = 0.$$

Если граничное условие таково, что перемещение можно разложить на продольную и поперечную части [так же, как в формулах (13.1.17), (13.1.19) и (13.1.20)], то уравнение разделяется и собственные функции определяются указанными выражениями, хотя собственные частоты продольных колебаний отличаются от частот поперечных колебаний множителем $\sqrt{\mu/(\lambda + 2\mu)}$, что легко видно из приведенного выше уравнения. С другой стороны, для граничного условия $\mathbf{F} = 0$, при котором решение нельзя разложить на продольную и поперечную части, уравнение не разделяется даже в прямоугольных координатах. Трудность при этом граничном условии состоит в том, что продольная волна при отражении дает и поперечные волны и наоборот. Так как эти колебания распространяются с различной скоростью, то нелегко составить комбинацию, дающую периодическое движение, и этого нельзя достичь, пользуясь только несколькими произведениями синусов и косинусов.

Однако если граничные условия допускают разделение, то каждому собственному вектору $\mathbf{F}_n(\mathbf{r})$ можно приписать четыре числа, обозначенных здесь условно через n . Первое из этих чисел показывает, какой из трех систем $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ (или, если это более удобно, $i\mathbf{U}$, $j\mathbf{V}$, $k\mathbf{W}$) принадлежит вектор; три остальных являются номерами производящих скалярных собственных функций φ , ψ или χ (или U , V и W). Можно показать, что $\mathbf{F}_n$ для всех возможных значений n образуют полную ортогональную систему функций, т. е.

$$\iiint \bar{\mathbf{F}}_n \cdot \mathbf{F}_m dv = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \Lambda_n & \text{при } m = n, \end{cases} \quad (13.1.21)$$

где интегрирование производится по всей области внутри границы. Поэтому кусочно-гладкая векторная функция $\mathbf{E}$, удовлетворяющая тем же граничным условиям, может быть представлена в этой области рядом

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{F}_n; \quad a_n = \frac{1}{\Lambda_n} \iiint \bar{\mathbf{F}}_n \cdot \mathbf{E} dv. \quad (13.1.22)$$

Способ доказательства этого утверждения полностью аналогичен примененному в § 6.3 для скалярных собственных функций. В гл. 3 было показано, что все рассматриваемые нами векторные уравнения являются уравнениями Лагранжа—Эйлера, соответствующими такому распределению плотности лагранжиана в данной области, что каждое из решений $\mathbf{F}_n$ доставляет стационарное значению интегралу от плотности лагранжиана по полному объему данной области. Отсюда нетрудно доказать ортогональность и полноту этой системы функций методом, намеченным в § 6.3.

Функция Грина для векторного уравнения Гельмгольца. Продолжая наше рассмотрение аналогично проведенному ранее рассмотрению для скалярных собственных функций, нетрудно показать, что аффинорную функцию Грина можно разложить по собственным векторам замкнутой области. Функция Грина уравнения Гельмгольца должна удовлетворять уравнению (13.1.8). Используя операцию аффинорного умножения двух векторов [см. (1.6.7)], легко убедиться, что

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\mathbf{F}}_n(\mathbf{r}) \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_0)}{\Lambda_n (k_n^2 - k^2)}, \quad (13.1.23)$$

где $\mathbf{F}_n$ — собственная функция уравнения $\nabla^2 \mathbf{F}_n + k_n^2 \mathbf{F}_n = 0$, удовлетворяющая тем же однородным граничным условиям, что и $\mathcal{G}$, k_n^2 — соответствующее собственное значение. Если $\mathbf{F}_n$ — комплексный вектор, то в разложение входит и сопряженный ему вектор, так что $\mathcal{G}$ является эрмитовым аффинором. Также очевидно, что $\mathcal{G}$ — симметричный аффинор и обладает симметрией в отношении $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$. Аффинорное произведение двух векторов $\bar{\mathbf{F}}_n$ и $\mathbf{F}_n$ (а не скалярное или векторное произведение) дает в результате аффинор [см. формулу (1.6.7)].

Отметим, что аффинор $\mathcal{G}$, рассматриваемый как функция от k , имеет полюсы во всех собственных значениях k_n , причем вычет в n -м полюсе равен $-2\pi \bar{\mathbf{F}}_n(\mathbf{r}) \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_0) / \Lambda_n k_n$. Это соответствует бесконечной амплитуде колебаний при резонансной частоте вынуждающей силы (если отсутствует затухание). Заметим, что в этом случае $\mathcal{G}$ можно сделать поперечным аффинором, опуская при суммировании продольные собственные векторы $\mathbf{L}$. Сумма одних только $\mathbf{L}$ дает продольную функцию Грина.

Для внешних граничных задач, когда область определения решения неограничена, спектр собственных значений непрерывен. Соответствующую функцию Грина можно получить, заменяя ряд (13.1.23) на интеграл и выбирая путь интегрирования так, чтобы получить расходящиеся волны, как это сделано в формуле (7.2.42). Можно также ряд разбить на ряды по «угловым координатам», умноженным на разрывные функции «радиальной» координаты, как было сделано для скалярного случая в формулах (7.2.51) и (7.2.63). Это будет проведено позже для некоторых координатных систем.

Функцию Грина для неограниченной области, так же как и в скалярном случае, можно получить в замкнутой форме. Однако здесь имеет место новое положение, когда для того, чтобы получить векторное решение задачи, надо найти аффинорное решение неоднородного уравнения для функции Грина. При этом надо быть осторожным в употреблении нашего векторно-аффинорного символизма, в частности по отношению к δ -функции. Однако, поскольку в случае неограниченной области мы ищем лишь простейшее радиальное аффинорное решение, будем смело действовать, выражая результаты в прямоугольных компонентах для того, чтобы наш символизм выглядел как можно проще. Для сокращения, где это возможно, написания формул сделаем (только для этого раздела) следующую замену:

$$x = x_1; y = x_2; z = x_3; \mathbf{i} = \mathbf{e}_1; \mathbf{j} = \mathbf{e}_2; \mathbf{k} = \mathbf{e}_3.$$

Оказывается, что вычисления для векторного уравнения Гельмгольца проводятся проще, чем для векторного уравнения Лапласа, поэтому начнем с первого.

Аффинорная функция Грина для уравнения Гельмгольца должна удовлетворять уравнению

$$\sum_{n, m=1}^3 \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G_{mn} + k^2 G_{mn} \right\} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \sum_{n=1}^3 \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n, \quad (13.1.24)$$

где ¹⁾ $\mathcal{G} = \sum_{m, n} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n G_{mn}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k)$; $\omega = kc$, G_{mn} — компоненты $\mathcal{G}$ вдоль прямоугольных осей. Это дает девять скалярных уравнений для девяти компонент, и, обращаясь к уравнению (7.2.17), мы находим, что решение (13.1.24) в неограниченной области, ведущее себя на бесконечности как расходящаяся волна, должно иметь вид

$$\mathcal{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) = \sum_{n=1}^3 \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ikR}}{R} \mathfrak{J}. \quad (13.1.25)$$

Соответствующей функцией для двух измерений (если она нужна) является

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^2 \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n i\pi H_0(kR).$$

Для одного измерения соответствующая функция будет скалярной; векторы и аффиноры не отличаются от скаляров в случае одного измерения.

Если все встречающиеся уравнения были бы просто уравнениями Гельмгольца, то к сказанному нужно было бы добавить немного. Осталось бы только дать еще выражение $\mathcal{G}$ в различных системах координат.

¹⁾ Напомним, что здесь $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$ означает аффинорное произведение векторов; например, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. — Прим. перев.

Однако большинство векторных решений значительно сложнее. Во многих физических приложениях дивергенция результирующего векторного поля равна нулю: например, для поля скоростей вязкой несжимаемой жидкости, а также для электромагнитного векторного потенциала при калибровке $\varphi = 0$ в случае отсутствия свободных зарядов ρ . Уравнение простых гармонических колебаний упругой изотропной среды имеет вид

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{s} + \rho \omega^2 \mathbf{s} = 0, \quad (13.1.26)$$

откуда следует, что скорость распространения продольных волн отличается от скорости распространения поперечных, как было отмечено в гл. 2. В этом случае опять надо разделить продольную и поперечную части $\mathbf{s}$, искать их независимо друг от друга, а затем взять их линейную комбинацию с коэффициентами, зависящими от λ и μ . В этих более сложных случаях необходимо разделить аффинорную функцию Грина, определяемую формулой (13.1.25), на продольную и поперечную части.

Продольные и поперечные аффинорные функции Грина. Задача заключается в определении одного аффинорного поля, ротор которого равен нулю, и другого, с равной нулю дивергенцией, — таких, что их сумма дает аффинор, удовлетворяющий уравнению (13.1.24). По-видимому, задачу можно решить прямо «в лоб», но, как это часто бывает, легче угадать решение, а затем проверить, что это действительно есть решение. Конечно, такой способ не доказывает единственности найденного решения, но в гл. 1 уже была доказана единственность разделения вектора на продольную и поперечную части.

Естественно ожидать, что продольная часть окажется градиентом некоторой функции, зависящей от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$. Требуемая условиями взаимности симметрия функции Грина означает, что если эта функция является градиентом по координатам $\mathbf{r}$, то она должна быть градиентом и по координатам $\mathbf{r}_0$ (иногда $\mathbf{r}_0$ мы будем заменять на $\mathbf{r}'$). Таким образом, простейшей формой этой функции является

$$\mathfrak{L}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) = \frac{1}{k^2} \sum \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x'_n} g(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) = \frac{1}{k^2} \nabla g(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) \nabla', \quad (13.1.27)$$

где $g(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k)$ — обычная скалярная функция Грина e^{ikR}/R для неограниченного пространства, а $R^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2$. Легко видеть, что $\partial g / \partial x_m = -\partial g / \partial x'_m$. Множитель $1/k^2$ введен для того, чтобы размерность у $\mathfrak{L}$ была той же, что и у g , например, длиной в степени -1 .

Как показывает символическая запись $\nabla g \nabla'$ этой функции, и $\operatorname{rot} \mathfrak{L}$ и $\operatorname{rot}' \mathfrak{L}$ равны нулю; отсюда видно, что произведение аффинора $\mathfrak{L}$ на любой вектор дает продольный вектор. Для построения решения надо некоторую векторную функцию $\mathbf{F}$ от $\mathbf{r}'$ умножить на аффинорную функцию Грина и затем проинтегрировать полученное выражение по $\mathbf{r}'$. Умножив $\mathbf{F}$ на аффинор $\nabla g \nabla'$, найдем, что надо взять интеграл от вектора

$$F_x(\mathbf{r}') \operatorname{grad} \frac{\partial g}{\partial x'} + F_y(\mathbf{r}') \operatorname{grad} \frac{\partial g}{\partial y'} + F_z(\mathbf{r}') \operatorname{grad} \frac{\partial g}{\partial z'}$$

по $\mathbf{r}'$. Ротор полученного выражения по координатам без штрихов равен нулю при любой зависимости компонент F_x , F_y и F_z от $\mathbf{r}'$.

Перейдем к построению поперечной части аффинорной функции Грина для свободного пространства. Естественно предположить, что аффинор, соответствующий поперечным волнам, связан с ротором некоторой векторной функции от скалярной функции Грина g . Требование симметрии под- сказывает выбор простейшей функции такого вида, которую мы символи-

чески записываем в форме $\nabla \times (\mathfrak{S}g) \times \nabla'$. Положим поэтому

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) &= -\frac{1}{k^2} \nabla \times [\mathfrak{S}g(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k)] \times \nabla' = \\ &= \frac{1}{k^2} \nabla \times \left[\mathbf{i} \frac{\partial g}{\partial z'} \mathbf{j} - \mathbf{i} \frac{\partial g}{\partial y'} \mathbf{k} - \mathbf{j} \frac{\partial g}{\partial z'} \mathbf{i} + \mathbf{j} \frac{\partial g}{\partial x'} \mathbf{k} + \mathbf{k} \frac{\partial g}{\partial y'} \mathbf{i} - \mathbf{k} \frac{\partial g}{\partial x'} \mathbf{j} \right] = \\ &= \frac{1}{k^2} \left\{ \mathbf{ii} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial z'} \right] - \mathbf{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x'} - \mathbf{ik} \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x'} + \dots \right\}. \quad (13.1.28)\end{aligned}$$

Поскольку $\partial g/\partial x' = -\partial g/\partial x$ и т. д., первый член в последнем выражении может быть переписан в виде

$$-\mathbf{ii} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right] \frac{1}{k^2} = -\frac{\mathbf{ii}}{k^2} \left[\nabla^2 g - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'} \right],$$

а второй член заменен на $-(\mathbf{ij}/k^2)(\partial^2 g/\partial x \partial y')$ и т. д. Следовательно,

$$\mathfrak{I}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) = -\frac{\mathfrak{S}}{k^2} \nabla^2 g - \frac{1}{k^2} \sum_{m,n} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \frac{\partial^2 g}{\partial x_m \partial x'_n}.$$

Но $\nabla^2 g = -k^2 g - 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, так что окончательно

$$\mathfrak{S}g(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) = \mathfrak{S} \frac{e^{ikR}}{R} = \mathfrak{S}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) + \mathfrak{I}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) - \frac{4\pi}{k^2} \mathfrak{S} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (13.1.29)$$

Однако это разложение аффинорной функции Грина для свободного пространства не является наиболее удобным, так как в полученное выражение входит δ -функция, имеющая как продольную, так и поперечную части. Хотя мы получили разложение функции $\mathfrak{S}e^{ikR}/R$ на продольную и поперечную части всюду, за исключением точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, в этой точке все же остается δ -функция. Из выражения (13.1.23) следует, что $\mathfrak{S}e^{ikR}/R$ можно разложить в сходящийся ряд по собственным функциям бесконечной области, в то время как разложение δ -функции

$$\mathfrak{S} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{F}_n(\mathbf{r}) F_n(\mathbf{r}')}{\Lambda_n}$$

дается очень плохо сходящимся рядом; следовательно, разложения для $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{I}$ также будут плохо сходящимися. Очевидно, надо объединить «продольную часть» δ -функции с $\mathfrak{S}$, а «поперечную часть» с $\mathfrak{I}$, тогда функция $\mathfrak{S}g(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k)$ выразится просто как сумма продольного и поперечного аффиноров.

Получить явное выражение для продольной и поперечной частей сингулярного аффинора $\mathfrak{S} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ не просто, но легко можно определить их интегральные свойства и найти разложения по собственным векторам. Определим аффинорную функцию $\mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ как функцию, которая после умножения на любой вектор $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ и интегрирования по $\mathbf{r}'$ дает именно продольную часть $\mathfrak{S}(\mathbf{r})$. Аналогично определим $\mathfrak{D}_t(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$: интегрируя по $\mathbf{r}'$ произведение $\mathfrak{D}_t(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ на вектор $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$, получим поперечную часть $\mathfrak{I}(\mathbf{r})$. Если для заданной области получены системы продольных собственных векторов $\mathbf{L}_n(\mathbf{r})$ [см. формулу (13.1.14)] и поперечных собственных векторов $\mathbf{M}_n(\mathbf{r})$ и $\mathbf{N}_n(\mathbf{r})$ данного уравнения, то

$$\mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_n \frac{1}{\Lambda_n} \bar{\mathbf{L}}_n(\mathbf{r}) \mathbf{L}_n(\mathbf{r}') \quad (13.1.30)$$

и

$$\mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_n \left[\frac{1}{\Lambda'_n} \bar{M}_n(\mathbf{r}) M_n(\mathbf{r}') + \frac{1}{\Lambda''_n} \bar{N}_n(\mathbf{r}) N_n(\mathbf{r}') \right],$$

где n означает тройку индексов, принадлежащих скалярным собственным функциям φ_n , ψ_n и χ_n , а нормирующие коэффициенты для L_n , M_n и N_n различаются при помощи одного и двух штрихов у Λ_n .

Мы можем поэтому определить две функции Грина, продольную $\mathfrak{G}_l$ и поперечную $\mathfrak{G}_t$, для неограниченного пространства так, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) &= \frac{1}{k^2} [\nabla g(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) \nabla' - 4\pi \mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}')], \\ \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) &= \frac{1}{k^2} [-\nabla \times \mathfrak{J}g(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) \times \nabla' - 4\pi \mathfrak{D}_t(\mathbf{r} - \mathbf{r}')], \\ \mathfrak{J}g(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) &= \mathfrak{G}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) + \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k), \\ \mathfrak{J}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mathfrak{D}_t(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (13.1.34)$$

где $g(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) = e^{ikR}/R$ — функция Грина трехмерного скалярного уравнения Гельмгольца для неограниченного пространства. Всюду, за исключением точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, $\mathfrak{G}_l$ совпадает с $\mathfrak{L}$, а $\mathfrak{G}_t$ с $\mathfrak{X}$, так что они могут быть подсчитаны в замкнутой форме. Например, для $g = e^{ikR}/R$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \left[\mathfrak{J} \frac{1 - ikR}{k^2 R^2} - \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \frac{3 - ikR - k^2 R^2}{k^2 R^2} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ \mathfrak{X} - \frac{4\pi}{k^2} \mathfrak{J}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \left[-\mathfrak{J} \frac{1 - ikR - k^2 R^2}{k^2 R^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \frac{3 - ikR - k^2 R^2}{k^2 R^2} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \quad (13.1.32)$$

Однако разложения по собственным функциям для $\mathfrak{G}_l$ и $\mathfrak{G}_t$ сходятся лучше по сравнению с разложениями для $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{X}$, так как сингулярность при $R=0$ у функций $\mathfrak{G}$ значительно более простая, чем у $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{X}$. Например, разложение по собственным векторам L_n , M_n и N_n для неограниченной области будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) &= 4\pi \sum_n \frac{\bar{L}_n(\mathbf{r}) L_n(\mathbf{r}')}{\Lambda_n(k_n^2 - k^2)}, \\ \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) &= 4\pi \sum_n \left\{ \frac{\bar{M}_n(\mathbf{r}) M_n(\mathbf{r}')}{\Lambda'_n(k_n^2 - k^2)} + \frac{\bar{N}_n(\mathbf{r}) N_n(\mathbf{r}')}{\Lambda''_n(k_n^2 - k^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (13.1.33)$$

Итак, функция Грина окончательно разложена на продольную и поперечную части, для которых получены достаточно хорошо сходящиеся разложения. Как будет показано ниже, можно получить подобные разложения и в случае внешних краевых задач в виде, аналогичном формулам (7.2.51) и (7.2.63).

Для того чтобы с помощью теоремы Грина можно было находить продольные и поперечные решения граничных задач, важно знать неоднородные уравнения, которым удовлетворяют продольные и поперечные функции Грина. Поскольку $\text{rot } \mathfrak{G}_l = 0$, имеем

$$\begin{aligned} (\text{grad div} + k^2) \mathfrak{G}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) &= \frac{1}{k^2} \sum_{m,n} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x'_n} (\nabla^2 + k^2) g - \\ &- \frac{4\pi}{k^2} \text{grad div} [\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] - 4\pi \mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi \mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \end{aligned}$$

вычитая этот результат из уравнения (13.1.24) для $\mathcal{G}$, получим

$$(-\operatorname{rot} \operatorname{rot} + k^2) \mathcal{G}_i(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) = -4\pi \mathcal{D}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (13.1.34)$$

так как $\operatorname{div} \mathcal{G}_i = 0$.

Следовательно, решение $\mathbf{F}_i$ уравнения

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F}_i + k^2 \mathbf{F}_i = -4\pi \mathbf{Q}_i,$$

где $\mathbf{Q}_i$ — продольное поле, также будет продольным. Из формулы (13.1.7) следует, что это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = & \iiint \mathcal{G}_i(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) \cdot \mathbf{Q}_i(\mathbf{r}') dv' + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint [(\operatorname{div}' \mathbf{F})(\mathcal{G}_i \cdot \mathbf{n}) - (\operatorname{div}' \mathcal{G}_i)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})] dA'. \end{aligned} \quad (13.1.35)$$

Наоборот, решение $\mathbf{F}_i$ уравнения

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F}_i + k^2 \mathbf{F}_i = -4\pi \mathbf{Q}_i,$$

где $\operatorname{div} \mathbf{Q}_i = 0$, является поперечным вектором. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = & \iiint \mathcal{G}_i(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) \cdot \mathbf{Q}_i(\mathbf{r}') dv' - \\ & - \frac{1}{4\pi} \oint [\mathcal{G}_i \cdot [\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{F}] + (\operatorname{rot}' \mathcal{G}_i) \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}]] dA'. \end{aligned} \quad (13.1.36)$$

Обе эти формулы справедливы как внутри, так и на границе S .

Если в уравнении

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{Q}$$

$\mathbf{Q}$ не является поперечным вектором, то $\mathbf{F}$ также не является полностью поперечным. В качестве функции Грина возьмем

$$\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_i - \frac{4\pi}{k^2} \mathcal{D}_i = \Im g(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k) - \Im(\mathbf{r} | \mathbf{r}' | k).$$

В этом случае легко показать, что поперечная часть функции $\mathbf{F}$ выражается формулой (13.1.36), в которой $\mathcal{G}_i$ надо заменить на $\mathcal{G}_c$ и использовать лишь поперечную часть $\mathbf{Q}_i$ вектора $\mathbf{Q}$. Продольной частью $\mathbf{F}$ будет просто

$$\mathbf{F}_i = -\frac{4\pi}{k^2} \mathbf{Q}_i, \quad (13.1.37)$$

где $\mathbf{Q}_i$ — продольная часть $\mathbf{Q}$. Это можно проверить непосредственной подстановкой в уравнение для $\mathbf{F}$. В этом случае формула, выражающая $\mathbf{F}_i$ через $\mathcal{G}_c$, верна внутри области, но не имеет места на границе, так как в поверхностный интеграл войдет дополнительно δ -функция.

Аффинорные функции Грина для упругих колебаний. Уравнение упругих колебаний изотропной среды можно записать в виде

$$c_l^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - c_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} + \omega^2 \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{Q}, \quad (13.1.38)$$

где $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — скорость распространения продольных, а $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения поперечных волн, ρ — плотность среды; $\mathbf{Q} = \mathbf{f}/\rho$, где $\mathbf{f}$ — плотность объемных сил, и $\omega/2\pi$ — частота вынужденных колебаний.

Функция Грина для этого случая имеет вид

$$\mathcal{G}_e(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|\omega) = \frac{1}{c_l^2} \mathcal{G}_l\left(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|\frac{\omega}{c_l}\right) + \frac{1}{c_t^2} \mathcal{G}_t\left(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|\frac{\omega}{c_t}\right), \quad (13.1.39)$$

где $\mathcal{G}_l$ и $\mathcal{G}_t$ — аффиноры, определенные формулами (13.1.31). Отметим, что для двух частей аффинорной функции Грина исходные скалярные функции Грина g различны, что соответствует различным скоростям распространения двух типов волн. Они совпадают при $R \rightarrow 0$ и оказываются в разных фазах для больших R . Решение уравнения (13.1.38) в таком случае можно представить в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = & \iint \mathcal{G}_e(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|\omega) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}') dv' + \\ & + \frac{1}{4\pi} c_l^2 \oint [(\mathcal{G}_e \cdot \mathbf{n})(\operatorname{div}' \mathbf{F}) - (\operatorname{div}' \mathcal{G}_e)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})] dA' - \\ & - \frac{1}{4\pi} c_t^2 \oint [\mathcal{G}_e \cdot (\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{F}) + (\operatorname{rot}' \mathcal{G}_e) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{F})] dA', \end{aligned} \quad (13.1.40)$$

где $\operatorname{div} \mathcal{G}_e = (1/c_l^2) \operatorname{div} \mathcal{G}_l$ и $\operatorname{rot} \mathcal{G}_e = (1/c_t^2) \operatorname{rot} \mathcal{G}_t$ взяты для значений $\mathbf{r}'$ на границе S .

Подчеркнем еще раз, что для определения решений неоднородного уравнения Гельмгольца нет необходимости в сложных построениях этого раздела; для этого достаточно простой аффинорной функции Грина, например, определенной формулой (13.1.25). Если поле источников $\mathbf{Q}$ является поперечным, то решение [выражаемое формулами (13.1.10), (13.1.11), (13.1.12) или (13.1.13)] автоматически окажется поперечным; для продольного поля $\mathbf{Q}$ решение соответственно будет продольным. Лишь при решении уравнения

$$a \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - b \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{Q}$$

для $a \neq b$ приходится разлагать функцию Грина на продольную и поперечную части, как было сделано в настоящем разделе.

Наконец, полезно отметить поведение аффиноров $\mathcal{G}_l$ и $\mathcal{G}_t$ для больших и малых, но отличных от нуля, значений kR . Это будет показано на примере векторного поля, получающегося применением каждого из операторов $\mathcal{G}$ к единичному вектору $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$ (результаты применения операторов к векторам $\mathbf{j}$ или $\mathbf{k}$ полностью аналогичны, поскольку аффиноры являются сферически симметричными относительно $R=0$). Для сравнения приведены результаты для простого аффинора $\mathcal{G} = \mathfrak{G}g$. При $kR \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \cdot \mathbf{i} & \rightarrow \mathbf{i} \frac{e^{ikR}}{R}; & \mathcal{G}_l \cdot \mathbf{i} & \rightarrow a_R \cos \vartheta \frac{e^{ikR}}{R}, \\ \mathcal{G}_t \cdot \mathbf{i} & \rightarrow (\mathbf{i} - a_R \cos \vartheta) \frac{e^{ikR}}{R} = a_\vartheta \sin \vartheta \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \quad (13.1.41)$$

где a_R — единичный вектор, направленный из точки источника $\mathbf{r}'$ к точке наблюдения $\mathbf{r}$, ϑ — угол между a_R и осью x ($\cos \vartheta = \mathbf{i} \cdot a_R$), а a_ϑ — единичный вектор, перпендикулярный a_R , компланарный с $\mathbf{i}$ и a_R и составляющий острый угол с осью x . Из этих формул следует, что $\mathcal{G} = \mathcal{G}_l + \mathcal{G}_t$, а также видно, почему $\mathcal{G}_l$ названа продольной, а $\mathcal{G}_t$ — поперечной функцией.

Для $1 \gg kR > 0$ имеем

$$\mathcal{G} \cdot \mathbf{i} \simeq \mathbf{i} \cdot \frac{1}{R},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_i \cdot \mathbf{i} &\simeq -\mathcal{G}_i \cdot \mathbf{i} \simeq (a_\theta \sin \vartheta - 2a_R \cos \vartheta) \frac{1}{k^2 R^3} = \\ &= -[2iP_2(\cos \vartheta) + P_2^1(\cos \vartheta)(\mathbf{j} \cos \varphi + \mathbf{k} \sin \varphi)] \frac{1}{k^2 R^3}, \end{aligned}$$

где φ — угол между плоскостью $(\mathbf{i}, a_R)$ и плоскостью (x, y) . Отметим, что для этого интервала значений kR величины $\mathcal{G}_i$ и $\mathcal{G}_l$ значительно больше $\mathcal{G}$, но противоположны по знаку, так что они почти полностью компенсируют друг друга, оставляя лишь $\mathcal{G}$. Из первого выражения для $\mathcal{G}_i \cdot \mathbf{i}$ следует, что для a_R , совпадающего с осью x , вектор $\mathcal{G}_i \cdot \mathbf{i}$ составляет с осью x тупой угол, в то время как для a_R , перпендикулярного оси x , этот вектор составляет острый угол с осью x . Для промежуточных направлений рассматриваемый вектор всегда лежит в плоскости $(\mathbf{i}, a_R)$ и составляет угол $\pi + \arctg \cotg((1/3) \cos \vartheta + \cotg \vartheta)$ с осью x . Из второго выражения для $\mathcal{G}_i \cdot \mathbf{i}$ следует, что, проинтегрировав эти весьма большие значения величины поля для малых kR по всем направлениям, мы получим нуль (надо помножить на $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ и интегрировать по ϑ и φ при постоянном значении kR). Движение среды в окрестности $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ аналогично «дымовому кольцу» или вихревому кольцу с осью кольца, совпадающей с осью x (или направлением любого другого постоянного вектора, на который действуют операторы $\mathcal{G}$).

Решения векторного уравнения Лапласа. В пределе при $k \rightarrow 0$ некоторые части решений расходятся или обращаются в нуль. Если это допускается граничными условиями, то выражение $iU + jV + kW$ и в этом случае определяет искомые решения. При этом решение векторного уравнения сводится к решению трех скалярных уравнений типа, рассмотренного в гл. 10. Но при попытке разложить решение на систему продольных и две системы поперечных полей [определяемых формулами (13.1.6)] возникают затруднения. Эти затруднения связаны с продольным решением, хотя на первый взгляд кажется, что все дело во втором поперечном решении N , содержащем множитель $1/k$. Чтобы получить конечный результат при $k \rightarrow 0$, умножим N на k . Однако легко видеть, что kN при $k \rightarrow 0$ стремится к *продольному* вектору, так как это выражение переходит в $\text{grad} [\partial(\omega\chi)/\partial\xi_1]$, где χ — решение уравнения Лапласа.

Дальнейшее исследование показывает, что в пределе при $k \rightarrow 0$ система решений N оказывается линейной комбинацией системы решений L , определенных в (13.1.6). Эти функции уже не являются независимыми, и тем самым потеряна одна из искомым систем решений в разложении общего решения на продольное и два поперечных. Обращаясь к L , нетрудно видеть, что в пределе при $k \rightarrow 0$ система L (а следовательно, и N , так как эти системы эквивалентны) либо является *и* продольной *и* поперечной, либо не является *ни* продольной, *ни* поперечной, в зависимости от точки зрения. Действительно, в пределе φ является решением скалярного уравнения Лапласа, так что $\text{div}(\text{grad } \varphi) = \text{div } L = 0$; *и* $\text{div } L$ *и* $\text{rot } L$ равны нулю (аналогично и для N).

Итак, получены две системы решений, N (или L) и M , у одной из которых, M , дивергенция равна нулю, а ротор отличен от нуля, а у другой, N , *и* дивергенция *и* ротор равны нулю. Этого достаточно, если рассматриваются только поперечные решения, например, для определения векторных потенциалов. В окончательном ответе при вычислении ротора векторного потенциала будет использоваться лишь система M . Однако система N может понадобиться для удовлетворения граничным условиям.

Особые трудности возникают при определении чисто продольных решений векторного уравнения Лапласа, т. е. векторного поля $\mathbf{F}$, удовлетворяющего уравнению $\text{grad div } \mathbf{F} = 0$, у которого ротор равен нулю, а дивергенция отлична от нуля. Если ротор вектора $\mathbf{F}$ равен нулю, то его можно представить в виде градиента некоторого скаляра χ , и $\text{grad div grad } \chi = \text{grad } \nabla^2 \chi = 0$. Следовательно, если выбрать в качестве χ решение уравнения $\nabla^2 \chi = 0$, то дивергенция вектора $\mathbf{F} = \text{grad } \chi$ будет равна нулю; можно взять в качестве χ решение уравнения $\nabla^2 \chi = \text{const}$, но при таком выборе χ мы не получим полной системы продольных полей.

Однако векторное поле $\mathbf{a}_1 \chi$, где χ — решение уравнения $\nabla^2 \chi = 0$, а $\mathbf{a}_1$ — единичный вектор вдоль оси x , y или z , является решением векторного уравнения Лапласа, дивергенция которого, вообще говоря, отлична от нуля. Но это поле не является продольным, так как его ротор, вообще говоря, отличен от нуля. Можно попытаться выделить из $\mathbf{a}_1 \chi$ продольную часть при помощи соотношения (1.5.16):

$$\mathbf{F}_l = \text{grad} \left\{ \iiint \frac{\partial \chi / \partial \xi_1}{R} dv' \right\}.$$

Исследование различных возможных решений χ скалярного уравнения Лапласа показывает, что если интеграл в фигурных скобках отличен от постоянной, то он расходится. Поэтому не существует чисто продольных решений векторного уравнения Лапласа, дивергенция которых отлична от нуля. При рассмотрении решений с отличной от нуля дивергенцией надо использовать либо систему $iU + jV + kW$, либо смешанную систему $\mathbf{a}_1 \chi + \mathbf{M} + \mathbf{N}$.

Задача оказывается еще более сложной в случае статического смещения изотропной упругой среды, так как при этом выражение $\mathbf{a}_1 \chi$ обычно не является решением соответствующего уравнения. Кроме того, поперечные части решения, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, в задачах статической теории упругости оказываются несущественными по сравнению с продольной частью; они описывают неизбежное скручивание среды, необходимое, чтобы удовлетворить граничным условиям для смещений. Продольная же часть играет главную роль по отношению к внутренним напряжениям и массовым силам, таким, как сила тяжести.

Уравнение, которое нужно решить, имеет вид

$$\nabla \cdot \mathfrak{X} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{s} - \mu \text{rot rot } \mathbf{s} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{s} + \mu \nabla^2 \mathbf{s} = -\mathbf{F},$$

где $\mathbf{s}$ — смещение среды, $\mathfrak{X}$ — аффинор напряжений, $\mathbf{F}$ — массовая сила. В уравнении отсутствует член $k^2 \mathbf{s}$, и дивергенция $\mathfrak{X}$, если она отлична от нуля, будет продольным вектором, так как в случаях, представляющих практический интерес, вектор $\mathbf{F}$, являющийся градиентом потенциальной энергии ($\mathbf{F} = -\text{grad } V$), оказывается продольным. Следовательно, часть дивергенции $\mathfrak{X}$, определяемая поперечной компонентой вектора $\mathbf{s}$, в точности равна нулю, а тем самым поперечная составляющая $\mathbf{s}$ не участвует в уравновешивании массовых сил. Независимо от вида $\mathbf{F}$ (до тех пор пока $\mathbf{F}$ является консервативным полем) rot rot от частей смещения $\mathbf{s}$, определяемых векторами $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, должен равняться нулю.

Однако требуемое уравнение для продольной части $\mathbf{s}$ можно получить из приведенного выше уравнения. Положив $\mathbf{s} = \mathbf{L} = \text{grad } \varphi$, получим

$$(\lambda + \mu) \text{grad} (\nabla^2 \varphi) + \mu \nabla^2 (\text{grad } \varphi) = (\lambda + 2\mu) \text{grad} (\nabla^2 \varphi) = \text{grad } V, \quad (13.1.42)$$

и чтобы быть уверенным, что в это выражение не вошли поперечные решения, возьмем дивергенцию полученного выражения. Это даст

$$\nabla^4 \varphi = \text{div grad} (\text{div grad } \varphi) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \nabla^2 V. \quad (13.1.43)$$

Если потенциал массовых сил удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция φ должна быть решением *бигармонического уравнения* $\nabla^4 \varphi = 0$. Отсюда получим продольную часть смещения. Конечно, надо так выбрать решение уравнения (13.1.43), чтобы выполнялось и уравнение (13.1.42), а затем достаточно добавить поперечное решение для удовлетворения граничным условиям.

Во многих случаях определение смещения не является настолько полезным, чтобы отыскивать его первым. Из-за наличия сравнительно несущественных частей M и N решение оказывается загроможденным ненужными подробностями. Кроме того, в практических задачах на границе области часто задаются напряжения, а не смещения. Поэтому в статическом случае часто рекомендуется считать основным полем поле напряжений, а не смещений. В силу симметрии аффинора напряжений его можно выразить через симметричные дифференциальные операции над скалярной *функцией напряжений* Ω :

$$\mathfrak{T} = \nabla \Omega \nabla, \quad \nabla^4 \Omega = \nabla^2 V,$$

где Ω выбрана так, что $\nabla \cdot \mathfrak{T} = \text{grad}(\nabla^2 \Omega) = \text{grad} V$. (Три соотношения для трех компонент этого выражения часто называются *уравнениями совместности*.) Таким образом, функция напряжений Ω удовлетворяет тому же уравнению, что и φ . Скалярная функция Ω связана со смещением s уравнением

$$\nabla \Omega \nabla = \lambda \mathfrak{J} \text{div } s + \mu (\nabla s + s \nabla).$$

Если Ω известна, то s можно определить, интегрируя это уравнение.

При использовании метода функции Грина для определения решения возникают те же затруднения, что и раньше. Пока не надо разделять продольную и поперечную части решения, задача решается несложно. Можно пользоваться формулой (13.1.10), где аффинорная функция Грина для неограниченного пространства имеет вид

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \mathfrak{J}/R. \quad (13.1.44)$$

При этом не появляется никаких расходимостей. Затруднения возникают, если нужно разделить влияние продольной и поперечной частей, что, например, важно в случае равновесия упругого твердого тела. Уравнения для $\mathfrak{G}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \text{grad div } \mathfrak{G} &= -\frac{\mathfrak{J}}{R^3} + 3\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^5}, \\ \text{rot rot } \mathfrak{G} &= 4\pi \mathfrak{J} \delta + \text{grad div } \mathfrak{G}, \end{aligned}$$

так что $\mathfrak{G}$ не является решением статического уравнения упругости

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathfrak{G}_e - \mu \text{rot rot } \mathfrak{G}_e = -4\pi \mathfrak{J} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (13.1.45)$$

Хотя не всегда можно разложить векторное решение уравнения Лапласа на конечные продольную и поперечную части, оказывается, что это можно сделать для аффинора $\mathfrak{G}$. Применим формулу

$$\nabla \times \mathfrak{J}f(R) \times \nabla' = -\mathfrak{J} \nabla^2 f - \nabla f \nabla'$$

и выберем f так, чтобы $\nabla^2 f = 1/R$. Для неограниченного пространства надо взять $f(R) = R/2$. Поэтому положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{2} \nabla R \nabla' = -\mathfrak{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') - \frac{1}{2} \nabla \times \mathfrak{J}R \times \nabla' = -\frac{1}{2} \mathfrak{G} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^3}, \\ \text{grad div } \mathfrak{E} &= -\text{grad div } \mathfrak{G}. \end{aligned} \quad (13.1.46)$$

Решение уравнения (13.1.45) можно получить в виде линейной комбинации $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$. Подставляя эту комбинацию в уравнение (13.1.45) и используя для определения коэффициентов соотношение (13.1.46), найдем, что в неограниченном пространстве

$$\mathcal{G}_e(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{\mu} \mathcal{G} + \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \mathcal{E} = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\mathcal{J}}{R} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^3}, \quad (13.1.47)$$

и решение уравнения

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = -4\pi \mathbf{Q}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = & \iiint \mathcal{G}_e(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}') dv' + \\ & + \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi} \oint [(\operatorname{div}' \mathbf{F})(\mathcal{G}_e \cdot \mathbf{n}) - (\operatorname{div}' \mathcal{G}_e)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})] dA' - \\ & - \frac{\mu}{4\pi} \oint [\mathcal{G}_e \cdot (\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{F}) + (\operatorname{rot}' \mathcal{G}_e) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{F})] dA' \quad (13.1.48) \end{aligned}$$

внутри и на граничной поверхности, по которой берутся два последних интеграла.

Для ограниченных областей функцию $\mathcal{G}_e$ следует преобразовать, прибавив решение однородного уравнения, аналитическое внутри граничной поверхности. При этом получим соответствующую аффинорную функцию Грина, удовлетворяющую одному из четырех однородных граничных условий, рассмотренных в этом разделе ранее. Аналогичный метод для скалярного случая был разобран в гл. 7; ниже он будет еще раз проиллюстрирован на примерах. Как мы увидим ниже, в некоторых случаях выгоднее определять напряжения, а не смещения.

Последним интересным случаем является решение неоднородного уравнения

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 4\pi \mathbf{Q}, \quad (13.1.49)$$

где $\mathbf{Q}$ — поперечный вектор. Это, например, имеет место в случае электромагнитного поля при отсутствии свободных зарядов q и неизменной во времени плотности тока $\mathbf{J}$ (для того, чтобы выполнялось $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$). Положим $\mathbf{Q} = \mathbf{J}/c$; $\mathbf{F} = \mathbf{A}$ — векторный потенциал, напряженность магнитного поля $\mathbf{H} = (1/\mu) \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Тогда $\mathbf{A}$ связан с $\mathbf{J}$ соотношением (13.1.49).

Так как представляют интерес лишь поперечные части векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ и в особенности $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, то можно непосредственно искать вектор $\operatorname{rot} \mathbf{F}$. Это исключит неприятную продольную часть и упростит вычисления. В качестве функции Грина возьмем $\mathcal{E}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \operatorname{rot} \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$, а не саму функцию $\mathcal{G}$. Эта функция обладает большей частью свойств функции Грина, однако меняет знак при замене $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}'$. Она должна удовлетворять уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{E} = 4\pi \operatorname{rot} [\mathcal{J} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]. \quad (13.1.50)$$

Комбинируя это уравнение с (13.1.49), получаем

$$\begin{aligned} \iiint \{(\operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \mathcal{E}) \cdot \mathbf{F} - \mathcal{E} \cdot (\operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \mathbf{F})\} dv' = \\ = 4\pi \iiint \{\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}' [\mathcal{J} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] - \mathcal{E} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}')\} dv' = \\ = - \oint \{\mathcal{E} \cdot [\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{F}] + (\operatorname{rot}' \mathcal{E}) \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}]\} dA'. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \iiint \operatorname{div}' [\mathbf{F} \times \mathfrak{F}] dv' &= \oint [\mathbf{F} \times \mathbf{n}] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dA' = \\ &= \iiint \{\delta \mathfrak{F} \cdot (\operatorname{rot}' \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}' (\mathfrak{F} \delta)\} dv', \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} - \iiint \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}' (\mathfrak{F} \delta) dv' &= - \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \\ &+ \begin{cases} 0 & \text{для } \mathbf{r} \text{ внутри } S, \\ [\mathbf{F} \times \mathbf{n}] & \text{для } \mathbf{r} \text{ на } S, \end{cases} \end{aligned}$$

так что окончательно

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \iiint \mathfrak{G} \cdot \mathbf{Q} dv' - \\ &- \frac{1}{4\pi} \oint [\mathfrak{G} \cdot (\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{F}) + (\operatorname{rot}' \mathfrak{G}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{F})] dA' \quad \text{для } \mathbf{r} \text{ внутри } S. \quad (13.1.51) \end{aligned}$$

Однако так как $\mathfrak{G}$ является ротором аффинорной функции Грина $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей уравнению $\nabla^2 \mathfrak{G} = -4\pi \mathfrak{F} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, то можно проинтегрировать уравнение (13.1.51), чтобы получить выражение векторного потенциала через обычную аффинорную функцию Грина.

В результат может войти произвольное продольное поле, но это не существенно при вычислении ротора $\mathbf{F}$, определяющего напряженность магнитного поля (или поля скоростей в задаче о течении несжимаемой вязкой жидкости). Итак, формула

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \iiint \mathfrak{G} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}') dv' - \\ &- \frac{1}{4\pi} \oint \{\mathfrak{G} \cdot [\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{F}] + (\operatorname{rot}' \mathfrak{G}) \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}]\} dA' \quad (13.1.52) \end{aligned}$$

дает выражение для вычисления векторного потенциала, причем нас интересует только его ротор.

Функции Грина волнового уравнения. Решение волнового уравнения можно искать либо непосредственно методом, которым получены выражения (7.3.5) и (7.3.8), либо при помощи преобразования Лапласа. Например, чтобы из решения уравнения Гельмгольца для заданной частоты $\omega = ip$ получить решение для мгновенного импульса, приложенного в момент $t = t_0$, надо решение уравнения Гельмгольца умножить на $e^{-i\omega(t-t_0)} (d\omega/2\pi)$ и проинтегрировать результат по ω от $-\infty + i\varepsilon$ до $+\infty + i\varepsilon$. С другой стороны, можно в таблице преобразований Лапласа, приведенной в конце гл. 11, найти функцию $f(t)$, которая, будучи умножена на e^{-pt} и проинтегрирована по t от 0 до ∞ , дает нужное решение уравнения Гельмгольца как функцию от $p = -i\omega$.

Будем искать аффинорную функцию Грина для единичного импульса, приложенного в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Для бесконечного пространства этот аффинор удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \mathfrak{G} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{G} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0) \mathfrak{F}.$$

Так как правая часть этого уравнения представляет преобразование Лапласа для функции $-4\pi \mathfrak{F} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, то искомым аффинор является преобразованием Лапласа определяемой выражением (13.1.25) аффинорной функ-

ции Грина уравнения Гельмгольца для неограниченного пространства:

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \mathfrak{F} \frac{1}{R} \delta \left[t - t_0 - \frac{R}{c} \right]. \quad (13.1.53)$$

Если область определения решения ограничена и функция Грина уравнения Гельмгольца имеет вид $\mathcal{G}_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | ip/c) + \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — некоторый аналитический внутри области аффино́р, добавляемый для того, чтобы удовлетворялись граничные условия, то соответствующая функция Грина, зависящая от времени, определяется формулой

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \mathcal{G}_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) + \mathfrak{F}_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0),$$

где

$$\int_0^\infty e^{-pt} \mathfrak{F}_0(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, 0) dt = \mathfrak{F} \left(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | \frac{ip}{c} \right),$$

т. е. $\mathfrak{F}$ — преобразование Лапласа для $\mathfrak{F}_0$.

Этих функций достаточно, чтобы получить формулы, соответствующие формулам (13.1.10) и (13.1.12). Выражение, аналогичное (7.3.5), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = & \int_0^{t+} dt_0 \iiint \mathcal{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0, t_0) dv_0 + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t+} dt_0 \oint \{ (\operatorname{div}_0 \mathbf{F})(\mathcal{G} \cdot \mathbf{n}) - (\operatorname{div}_0 \mathcal{G})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) - \\ & - \mathcal{G} \cdot [\mathbf{n} \times \operatorname{rot}_0 \mathbf{F}] - (\operatorname{rot}_0 \mathcal{G}) \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \} dA_0 - \\ & - \frac{1}{c^2} \iiint \left[\left(\frac{\partial}{\partial t_0} \mathcal{G} \right) \cdot \mathbf{F} - \mathcal{G} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{F} \right) \right]_{t_0=0} dv_0; \end{aligned} \quad (13.1.54)$$

последний интеграл берется от начальных значений $\mathbf{F}$ и скорости их изменений в начальный момент.

Если рассматриваются продольные или поперечные колебания, то надо воспользоваться преобразованием Лапласа функций Грина, определенных выражениями (13.1.34):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_l(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0 | c) = & - \frac{\mathfrak{F}}{R} \left[\left(\frac{c}{R} \right)^2 v(z) + \frac{c}{R} u(z) \right] + \\ & + \frac{RR}{R^3} \left[3 \left(\frac{c}{R} \right)^2 v(z) + \frac{c}{R} u(z) + \delta(z) \right] - 4\pi \mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) v(z); \\ \mathcal{G}_t(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0 | c) = & \frac{\mathfrak{F}}{R} \left[\left(\frac{c}{R} \right)^2 v(z) + \frac{c}{R} u(z) + \delta(z) \right] - \\ & - \frac{RR}{R^3} \left[3 \left(\frac{c}{R} \right)^2 v(z) + \frac{c}{R} u(z) + \delta(z) \right] + 4\pi \mathfrak{D}_t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) v(z). \end{aligned} \quad (13.1.55)$$

где $z = t - t_0 - (R/c)$, а $u(z)$ и $v(z)$ являются последовательными интегралами от δ -функции:

$$u(z) = \int_{-\infty}^z \delta(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ 1 & \text{при } z > 0, \end{cases} \quad v(z) = \int_{-\infty}^z u(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ z & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

На больших расстояниях замечен только импульс, продольные и поперечные колебания взаимно ортогональны, их сумма равна $(\mathfrak{F}/R) \delta(z)$. На малых расстояниях ($R \ll ct$) заметно, как, начиная с момента $t = 0$, постепенно возникает вихревое кольцо, описанное выше на стр. 724; его временная зависимость выражается функцией $v[t - t_0 - R/c]$.

Используя эти импульсные продольную и поперечную волны, можно распространить формулы (13.1.35), (13.1.36) и (13.1.40) на случай временной зависимости, интегрируя объемные и поверхностные интегралы в этих формулах по t_0 от 0 до $t + \varepsilon$ и добавляя дополнительный объемный интеграл от начальных значений функции F и ее производной по времени, аналогичный последнему члену в формуле (13.1.54). Например, аффинор смещений изотропной упругой среды является комбинацией продольного аффинора со скоростью распространения волн $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и поперечного аффинора со скоростью распространения волн $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$; эта комбинация подобна выражению (13.1.39). Приложения многих из этих формул будут даны в последующих параграфах.

13.2. Статические и стационарные решения

Статические и стационарные векторные поля приходится рассматривать в трех случаях, представляющих физический интерес: магнитных полей, обусловленных постоянным током, статических деформаций упругой среды и стационарного потока вязкой жидкости. Для каждого из этих трех случаев решение и граничные условия несколько различаются. Другие физически интересные случаи, как, например, статическое электрическое поле или поток идеальной жидкости, можно получить из скалярного поля методом, рассмотренным в гл. 10; поэтому здесь их рассматривать излишне. Основное внимание в этой главе будет сосредоточено на векторных полях, которые нельзя выразить через одну скалярную функцию.

В случае магнитного поля $\mathbf{H}$ будем искать векторный потенциал $\mathbf{A}$, связанный с $\mathbf{H}$ соотношением $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. При наличии тока $\mathbf{J}$ имеет место уравнение

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J}. \quad (13.2.1)$$

Магнитная проницаемость μ обычно равна единице, за исключением ферромагнитных материалов. В первом приближении можно принять, что магнитная проницаемость железа бесконечно велика; в этом случае вектор $\mathbf{H}$ должен быть нормален к поверхности железного образца. Поэтому нормальная компонента $\mathbf{A}$ равна нулю на этой поверхности, так же как и нормальная составляющая градиента касательной компоненты $\mathbf{A}$.

Поскольку для статического случая $\text{div } \mathbf{J} = 0$, мы можем считать, что $\mathbf{A}$ является решением векторного уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J}. \quad (13.2.2)$$

При этом обычно $\mathbf{A}$ полезно считать имеющим и продольную часть, что облегчает вычисления. Наличие продольной части $\mathbf{A}$ не влияет на распределение магнитного поля, которое зависит только от поперечной части $\mathbf{A}$.

Смещение s изотропной упругой среды под действием объемной силы $4\pi F$ *дин/см³* определяется уравнением

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } s - \mu \text{rot rot } s = (\lambda + \mu) \text{grad div } s + \mu \nabla^2 s = -4\pi F. \quad (13.2.3)$$

Как было отмечено выше, точно удовлетворить граничным условиям, разделяя переменные в уравнении, можно лишь в случае полярных (плоских) и сферических координат; в других системах координат были получены лишь приближенные решения. Здесь также удобно, хотя и не всегда, разложить поле на продольную и поперечную части. Граничные условия задают либо смещения, либо напряжения на границе. Если граничная поверхность нормальна оси z , то вектор напряжения $\mathbf{T}$ зависит от степени изменения s

у границы по закону

$$\mathbf{T} = \mathfrak{T} \cdot \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k} \operatorname{div} \mathbf{s} + \mu \operatorname{grad} s_z + \mu \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} : \quad (13.2.4)$$

Применение этих граничных условий будет рассмотрено несколько позднее. Как было показано [соотношение (13.1.42)], решение $\mathbf{s}$ может быть представлено в виде $\mathbf{s} = \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{M} + \mathbf{N}$, где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — поперечные решения векторного уравнения Лапласа, а φ — скалярное решение уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$, удовлетворяющее условиям совместности.

Наконец, соотношение между давлением и скоростью в стационарном потоке несжимаемой жидкости имеет вид [см. формулу (2.3.14)]

$$\operatorname{grad} P + \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v};$$

здесь $\mathbf{v}$ — скорость потока, ρ — плотность, η — коэффициент вязкости, P — «динамическое давление», входящее в уравнение Бернулли

$$P = p + \frac{1}{2} \rho v^2 + V,$$

где p — истинное давление, а V — потенциал объемных сил, например силы тяжести. (Сила, действующая на единицу объема, равна градиенту потенциала с обратным знаком.) Граничные условия обычно заключаются в равенстве нулю скорости на границе, и, конечно, предполагается, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ во всей области решения.

Приведенное уравнение не является линейным, и поэтому метод этой главы непосредственно к нему не применим. Однако при малых $\mathbf{v}$, пренебрегая нелинейным членом $\rho \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$, мы получим линейное уравнение

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v} = -4\pi \mathbf{Q}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (13.2.5)$$

где $\mathbf{Q} = -(1/4\pi\eta) \operatorname{grad} P$ — продольный вектор и, в первом приближении по $\mathbf{v}$, $P \simeq p + V$. С другой стороны, если скорость потока близка к постоянному вектору $\mathbf{U}$, так что $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ достаточно мало, то можно использовать другую форму уравнения стационарного потока:

$$\operatorname{grad} (p + V) + \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Если постоянный вектор $\mathbf{U}$ направлен по оси z , то с точностью до членов первого порядка относительно малой величины $\mathbf{u}$ получим

$$-\eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \operatorname{grad} (p + V) + \rho U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (13.2.6)$$

Это уравнение опять является линеаризованным.

Нашей задачей является развитие методов решения этих уравнений в различных координатных системах и для различных граничных условий.

Плоские задачи. В случае двух переменных не нужно всей сложной техники, развитой в этом параграфе; в самом деле, некоторые случаи были уже разобраны в гл. 10. Решение этих задач бывает двух типов: вектор, направленный по оси z , величина которого зависит только от x и y , и вектор, лежащий в плоскости (x, y) , направление и величина которого не зависят от z . Рассмотрим несколько простых случаев, чтобы напомнить общие методы решения и подготовиться к решению более сложных задач.

В случае магнитного поля, создаваемого током, направленным параллельно оси z , направление векторного потенциала $\mathbf{A}$ также совпадает с осью z , а его величина является решением двумерного уравнения Пуассона в переменных x и y , причем плотность тока играет роль плотности источников. Например, в случае, указанном на рис. 13.1, провод, по которому течет ток I , проходит через точку $x = a$, $y = 0$ внутри щели в массе железа.

Щель занимает область $x > 0$, $|y| < h/2$. Все, что здесь требуется, — это преобразовать двумерную функцию Грина $-2\ln R$ так, чтобы нормальная производная A_z на поверхности железа равнялась нулю. Для этого достаточно воспользоваться разложением функции Грина в ряд Фурье по y или конформным преобразованием, определяемым выражением (4.7.7).

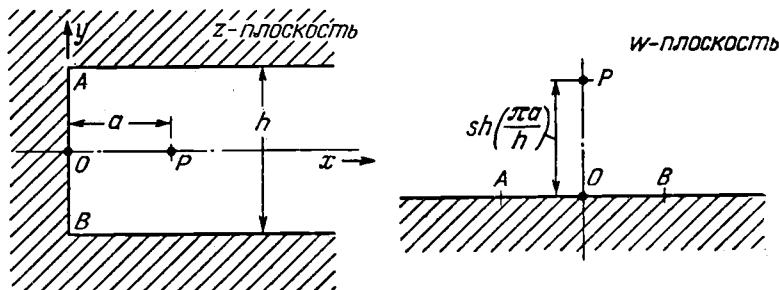


Рис. 13.1. Конформное преобразование для магнитного поля провода в щели.

Конформным преобразованием на w -плоскости будет

$$w = -\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}y\right) + i\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{h}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{h}y\right).$$

Точка $P(x=a, y=0)$ переходит в $w = i\operatorname{sh}(\pi a/h)$. Помещенный в эту точку источник при соответствующих граничных условиях на действительной оси w имеет вид

$$A_z = -2I \ln \left| \left[w - i\operatorname{sh}\left(\frac{\pi a}{h}\right) \right] \left[w + i\operatorname{sh}\left(\frac{\pi a}{h}\right) \right] \right|.$$

При обратном переходе к переменным (x, y) получим

$$A_z = -I \ln \left\{ \left[\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi a}{h}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi x}{h}\right)\cos\left(\frac{2\pi y}{h}\right) \right]^2 + \operatorname{sh}^2\left(\frac{2\pi x}{h}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi y}{h}\right) \right\} + 2I \ln 2.$$

Поэтому магнитное поле выражается формулами

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{4\pi I}{h} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \sin \eta}{(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \xi \cos \eta)^2 + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta}, \\ H_y &= -\frac{4\pi I}{h} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha \cos \eta - \operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \xi \cos \eta)^2 + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta}, \end{aligned} \quad (13.2.7)$$

где $\alpha = 2\pi a/h$, $\xi = 2\pi x/h$, $\eta = 2\pi y/h$. Это выражение, конечно, можно разложить в ряд Фурье по y . Для ξ , значительно больших, чем η ,

$$\begin{aligned} H_x &\simeq -\frac{4\pi I}{h} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \xi} \rightarrow 0, \\ H_y &\simeq +\frac{4\pi I}{h} \operatorname{th} \xi \rightarrow \frac{4\pi I}{h}, \end{aligned}$$

т. е. мы получаем однородное магнитное поле между верхней и нижней сторонами щели.

В качестве простого примера для случая вязкой жидкости рассмотрим поток в прямоугольной трубе ширины l_x и высоты l_y , ось которой параллельна оси z . Примем, что давление равномерно падает по трубе:

$$P = -Fz,$$

где F — падение давления на единицу длины вдоль трубы. Используя (13.2.5), получаем

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{F}{\eta} \mathbf{k}$$

с граничными условиями $\mathbf{v} = 0$ при $x = 0, l_x$ и $y = 0, l_y$. Очевидно, скорость потока направлена по оси z , так что амплитуда v_z должна удовлетворять уравнению Пуассона с постоянной плотностью F/η . Решение выражается рядом

$$\mathbf{v} = \frac{16F}{\pi^4 \eta} \mathbf{k} \sum_{m,n} \frac{\sin[(\pi x/l_x)(2m+1)] \sin[(\pi y/l_y)(2n+1)]}{\{(2m+1)/l_x\}^2 + \{(2n+1)/l_y\}^2 (2m+1)(2n+1)}, \quad (13.2.8)$$

а полный поток вдоль трубы равен

$$Q = \frac{64Fl_x l_y}{\pi^6 \eta} \sum_{m,n} \frac{1}{\{(2m+1)/l_x\}^2 + \{(2n+1)/l_y\}^2 (2m+1)^2 (2n+1)^2}.$$

Эта формула остается справедливой, пока безразмерное отношение $v_z \rho \sqrt{l_x l_y} / \eta$ меньше некоторой универсальной постоянной, называемой *критическим числом Рейнольдса*. Если падение давления достигает значений, при которых это отношение превосходит предельное значение, то в потоке возникают разрывы; появляется турбулентность, падение давления для данного потока значительно возрастает и распределение скоростей существенно отличается от выражения (13.2.8). Очевидно, это связано с тем, что нелинейные члены достигли значительной величины, в результате чего возник турбулентный поток. Отметим, что чем меньше η , тем меньше предельная скорость, при которой возникает турбулентность.

На стр. 735 приведен другой пример потока через щель ширины a в плоскости (x, z) . В эллиптических координатах μ и ϑ скорость, давление и вихрь $\mathbf{w} = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= a_\mu \frac{4Q}{\pi a} \frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}}, \\ p &= \frac{16\eta Q}{\pi a^2} \frac{\sin^2 \vartheta - e^{-\mu} \text{sh } \mu}{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}, \\ |\mathbf{w}| &= \frac{4Q}{\pi a^2} \frac{\sin 2\vartheta}{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}, \end{aligned} \quad (13.2.9)$$

где Q — объемный поток через единицу длины щели в направлении оси z .

Выражение, аналогичное (13.2.8), получается при решении задачи теории упругости для вертикальной прямоугольной трубы, заполненной, например, резиной, оседающей под действием силы тяжести $\rho g \mathbf{k}$. В этом случае смещение направлено по оси z и является чистой деформацией сдвига. Надо решить уравнение

$$\mu \nabla^2 s_z = -\rho g$$

с условиями обращения s_z в нуль при $x = 0, l_x$ и $y = 0, l_y$. Выражение для s то же самое, что и для $\mathbf{v}$ в (13.2.8), только F/η надо заменить на $\rho g/\mu$.

Полярные координаты. Простым примером двумерного решения в координатах r, θ, z является задача о потоке вязкой жидкости в трубе круглого поперечного сечения радиуса a . Опять падение давления обозначим через F , так что $P = -Fz$. Из (13.2.5) получим

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{F}{\eta} \mathbf{k}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\frac{F}{\eta}$$

при условии, что $\mathbf{v}$ направлена по z , а величина ее зависит лишь от r . Решение, обращающееся в нуль при $r=a$, имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \frac{F}{4\eta} (a^2 - r^2), \quad (13.2.10)$$

а полный поток, равный $\pi F a^4 / 8\eta$, выражается через падение давления, радиус и коэффициент вязкости в случае достаточно медленного потока, при котором не возникает турбулентность.

В качестве примера из теории упругости рассмотрим длинную трубу с внутренним радиусом a и внешним радиусом b с различными давлениями на внутренней и внешней сторонах. Положим $\mathbf{s} = \text{grad } \varphi$, где φ — решение уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$, зависящее лишь от r :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) \right] \right\} = 0. \quad (13.2.11)$$

Следовательно,

$$\varphi = C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 \ln r,$$

где постоянные выбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия и уравнения совместности. Очевидно, можно сразу положить $C_4 = 0$, так как $r^2 \ln r$ не обращает в нуль соответствующий член в выражении для $\text{grad}(\nabla^2 \varphi)$, которое является частью уравнения совместности $\nabla \cdot \mathfrak{E} = 0$. Тогда смещение $\mathbf{s}$ и тензор напряжений $\mathfrak{E}$ равны

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{a}_r \frac{d\varphi}{dr} = \mathbf{a}_r \left[2C_1 r + \frac{C_2}{r} \right], \\ \mathfrak{E} &= \lambda \mathfrak{J} \text{div } \mathbf{s} + \mu (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla) = \\ &= \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \left[4C_1 (\lambda + \mu) - 2\mu \frac{C_2}{r^2} \right] + \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_\theta \left[4C_1 (\lambda + \mu) + 2\mu \frac{C_2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

Если давление внутри цилиндра равно P , а вне цилиндра — нулю, то $\mathfrak{E} \cdot \mathbf{a}_r$ равно $-\mathbf{a}_r P$ при $r=a$ и нулю при $r=b$. Поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{a}_r \frac{Pa^2}{2(b^2 - a^2)} \frac{b}{(\lambda + \mu)} \left[\frac{r}{b} + \frac{(\lambda + \mu)b}{\mu r} \right], \\ \mathfrak{E} &= \frac{Pa^2}{b^2 - a^2} \left[\mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_\theta \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13.2.12)$$

Радиальное напряжение является сжимающим (отрицательным) для $a < r < b$, а касательное напряжение — закручивающим с максимальной величиной $P(b^2 + a^2)/(b^2 - a^2)$ при $r=a$. Независимо от того, насколько b больше a , это закручивающее усилие не может быть меньше, чем P . Поэтому, если P больше напряжения на разрыв, то цилиндр сломается, как бы ни была толста стенка. Заметим, что напряжение расширения $|\mathfrak{E}| = 2Pa^2/(b^2 - a^2)$ не зависит от r , а радиальное расширение внешней поверхности цилиндра равно $Pa^2 b (\lambda + 2\mu) / 2(b^2 - a^2)(\lambda + \mu)\mu$. Это выражение тем больше, чем меньше модуль сдвига μ по сравнению с модулем λ . В этом случае вектор смещения не имеет поперечной части, поскольку все движение является радиальным и вращение элементов среды отсутствует.

Круговые цилиндрические координаты. Три системы решений векторного уравнения Лапласа в круговых цилиндрических координатах опре-

деляются выражениями

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{skm}(r, \theta, z) &= \frac{1}{k} \operatorname{rot} \left[\mathbf{a}_z^{\cos} (m\theta) e^{kz} J_m(kr) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_r^{\sin} (m\theta) e^{kz} [J_{m-1}(kr) + J_{m+1}(kr)] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{a}_\theta^{\cos} (m\theta) e^{kz} [J_{m-1}(kr) - J_{m+1}(kr)]; \\
 \mathbf{N}_{skm}(r, \theta, z) &= \frac{1}{k} \operatorname{grad} \left[\frac{\cos}{\sin} (m\theta) e^{kz} J_m(kr) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_r^{\cos} (m\theta) e^{kz} [J_{m-1}(kr) - J_{m+1}(kr)] + \mathbf{a}_z^{\cos} (m\theta) e^{kz} J_m(kr) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{a}_\theta^{\sin} (m\theta) e^{kz} [J_{m-1}(kr) + J_{m+1}(kr)]; \\
 \mathbf{G}_{skm}(r, \theta, z) &= 2\mathbf{a}_z^{\cos} (m\theta) e^{kz} J_m(kr) - \mathbf{N}_{skm}(r, \theta, z).
 \end{aligned} \tag{13.2.13}$$

В последнем выражении вектора $\mathbf{G}_{skm}$ добавлен вектор $-\mathbf{N}$, благодаря чему $\iint \mathbf{N} \cdot \mathbf{G} r dr d\theta = 0$. Индекс s надо заменить на e , когда используется верхняя система тригонометрических функций, и на o , когда используется нижняя система. Дивергенции функций $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ равны нулю, так же как и ротор $\mathbf{N}$. Дивергенция и ротор $\mathbf{G}$ отличны от нуля. Дифференциальные соотношения между функциями для одноименных индексов имеют вид

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{G} &= 2k\mathbf{M}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{M} = k\mathbf{N}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{N} = 0, \\
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} &= 2k^2\mathbf{N} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{G}, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = \operatorname{div} \mathbf{N} = 0.
 \end{aligned}$$

Обращаясь к соотношению (10.3.22), легко видеть, что указанные решения можно выразить через двумерные векторные решения в плоскости,



Рис. 13.2. Углы и координаты при повороте комплексной плоскости на угол u вокруг оси z .

составляющей угол u с плоскостью z, x , проинтегрированные по u . Пользуясь рис. 13.2, определим вектор

$$\mathbf{a}_u = -\mathbf{i} \sin u + \mathbf{j} \cos u,$$

нормальный к плоскости u , и ортогональные единичные векторы

$$\mathbf{a}_v = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u, \quad \mathbf{a}_z = \mathbf{k},$$

лежащие в этой плоскости. Через эти единичные векторы наши решения

запишутся в виде

$$\begin{aligned} M_{skm} &= \frac{1}{2\pi i^{m+1}} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_u e^{kX} \cos_{\sin}(mu) du, \\ N_{skm} &= \frac{1}{2\pi i^{m+1}} \int_0^{2\pi} (i\mathbf{a}_z - \mathbf{a}_v) e^{kX} \cos_{\sin}(mu) du, \\ G_{skm} &= \frac{1}{2\pi i^{m+1}} \int_0^{2\pi} (i\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_v) e^{kX} \cos_{\sin}(mu) du, \end{aligned} \quad (13.2.14)$$

где

$$X = z + i(x \cos u + y \sin u) = z + ir \cos(\theta - u).$$

Аффинорная функция Грина для этого случая, получаемая из формулы (10.3.23), имеет вид

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{Z}}{R} = \mathfrak{Z} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\theta - \theta_0)] \int_0^{\infty} J_m(kr) J_m(kr_0) e^{-k|z - z_0|} dk.$$

Это выражение можно переписать в виде интегралов от M , N , G по k . Тогда векторный потенциал, создаваемый током I , текущим по одиночной круговой петле тонкой проволоки ($r = a$, $z = 0$, $0 < \theta < 2\pi$), определяется интегралом от $(I\mathfrak{G} \cdot \mathbf{a}_{\theta_0}) \delta(r_0 - a) \delta(z_0)$ по r_0 , θ_0 , z_0 , где

$$\mathbf{a}_{\theta_0} = \mathbf{a}_r \sin(\theta - \theta_0) + \mathbf{a}_{\theta} \cos(\theta - \theta_0).$$

Поэтому векторный потенциал, создаваемый одиночной петлей тока, равен

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 2\pi I a \mathbf{a}_{\theta} \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_1(kr) J_1(ka) dk = \\ &= I a \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} \mathbf{M}_{ek0}(r, \theta, z) [\mathbf{a}_{\theta_0} \cdot \mathbf{M}_{ek0}(a, \theta_0, 0)] d\theta_0, \quad z < 0, \end{aligned}$$

где интегрирование по полному контуру дает комбинацию только поперечных решений M (см. стр. 730). Результирующее магнитное поле имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} &= 2\pi I a \left[\mathbf{a}_r \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_1(kr) J_1(ka) k dk + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{a}_z \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(kr) J_1(ka) k dk \right]. \end{aligned} \quad (13.2.15)$$

Преобразуя контурный интеграл, получим

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_{\theta} \frac{\pi I a^2 r}{(a^2 + r^2 + z^2)^{3/2}} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \middle| 2 \middle| \frac{4a^2 r^2}{(a^2 + r^2 + z^2)^2}\right).$$

Для $(a^2 + r^2 + z^2) \gg 2ar$ гипергеометрическая функция F становится равной единице, и формулы упрощаются. Например, для r и $z \gg a$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\simeq \mathbf{a}_{\theta} \pi I a^2 \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \mathbf{H} &\simeq \frac{\pi I a^2}{(a^2 + z^2)^{5/2}} [3r z \mathbf{a}_r + (2z^2 - r^2) \mathbf{a}_z] = -\pi I a^2 \text{grad} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

что аналогично магнитному полю, создаваемому находящимся в начале координат магнитным диполем с моментом $\pi a^2 I$, ориентированным по оси z .

Сферические координаты. В сферической системе координат можно получить довольно общие решения всех трех основных векторных уравнений эллиптического типа (магнитного поля, потока вязкой жидкости, упругого смещения). Решение можно выразить через постоянные векторы ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ или их комбинации), умноженные на сферические гармоники и функции от радиуса r (r^n или r^{-n-1} для уравнения Лапласа). Но, как было показано, при этом трудно удовлетворить граничным условиям на сферической поверхности и приходится пользоваться методом, уже изложенным в этой главе. Например, для векторного уравнения Лапласа возьмем ротор от $\mathbf{r}$, умноженного на решение скалярного уравнения Лапласа $r^n Y_n^m(\vartheta, \varphi)$ (где Y — сферическая функция n -го порядка) или $r^{-n-1} Y_n^m(\vartheta, \varphi)$. Это дает поперечное решение $\mathbf{M}$. Для решений $\mathbf{N}$, ротор и дивергенция которых равны нулю, можно использовать градиент $r^n Y_n^m$ или $r^{-n-1} Y_n^m$.

Эти решения можно выразить через взаимно ортогональные векторные сферические функции $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, рассмотренные в § 13.3, таблица которых приведена в конце этой главы. Отметим, что эти три вектора при заданных значениях m , n и s (четных или нечетных) взаимно ортогональны для всех значений ϑ и φ ; их интегральные свойства указаны в таблице.

Проще всего получить развернутые выражения для $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, используя соотношения (10.3.34). Пользуясь комплексной формой сферических гармоник,

$$X_n^m(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta) = Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + i Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi), \quad (13.2.16)$$

где $m > 0$, можно упростить вспомогательные вычисления. Введем также обозначение для комплексно сопряженных величин

$$\bar{X}_n^m(\vartheta, \varphi) = e^{-im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta) = X_n^{-m}(\vartheta, \varphi).$$

Тогда формулы принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mn}^1(r, \vartheta, \varphi) &= \text{rot}[\mathbf{r} r^n X_n^m(\vartheta, \varphi)] = -\mathbf{r} \times \text{grad}[r^n X_n^m(\vartheta, \varphi)] = \\ &= r^n \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n+m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} - (n+m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] - \mathbf{k} m i X_n^m \right\}, \\ \mathbf{N}_{mn}^1(r, \vartheta, \varphi) &= \text{grad}[r^{n+1} X_{n+1}^m(\vartheta, \varphi)] = \\ &= r^n \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [-(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{k} (n+m+1) X_n^m \right\}, \quad (13.2.17) \end{aligned}$$

где для $m=0$ используется лишь действительная часть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Действительная часть $\mathbf{M}_{mn}^1$ есть $\mathbf{M}_{emn}^1$, а его мнимая часть равна $\mathbf{M}_{omn}^1$. Заметим, что для $\mathbf{M}^1$ индекс m изменяется от 0 до n , а для $\mathbf{N}^1$ — от 0 до $n+1$.

Обращаясь к таблицам в конце этой главы, мы видим, что $\mathbf{M}_{smn}^1 = \sqrt{n(n+1)} r^n \mathbf{C}_{smn}^s(\vartheta, \varphi)$, где s может быть или e (четным) или o (нечетным). Существуют также решения, стремящиеся к нулю на бесконечности, но

расходящиеся при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{smn}^2(r, \vartheta, \varphi) &= -\mathbf{r} \times \text{grad} [r^{-n-1} Y_{mn}^s(\vartheta, \varphi)] = \\ &= \sqrt{n(n+1)} r^{-n-1} \mathbf{C}_{mn}^s(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (13.2.18)$$

Соответствующие решения с нулевыми ротором и дивергенцией являются действительной и мнимой частью от

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{mn}^2(r, \vartheta, \varphi) &= \text{grad} [r^{-n} X_{n-1}^m(\vartheta, \varphi)] = \\ &= r^{-n-1} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [-(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{k} (n-m) X_n^m \right\}. \end{aligned} \quad (13.2.19)$$

Здесь опять для $\mathbf{M}^2$ индекс m изменяется от 0 до n , а для $\mathbf{N}^2$ от 0 до $n-1$; при этом n не может равняться нулю, а для $m=0$ используется лишь действительная часть соответствующих выражений.

Угловую зависимость $\mathbf{N}^1$ и $\mathbf{N}^2$ можно выразить через векторные гармоники $\mathbf{P}$ и $\mathbf{B}$, выражения которых приведены в конце главы. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{smn}^1 &= \sqrt{n+1} r^n [\sqrt{n+2} \mathbf{B}_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi) + \sqrt{n+1} \mathbf{P}_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi)], \\ \mathbf{N}_{smn}^2 &= \sqrt{n} r^{-n-1} [\sqrt{n-1} \mathbf{B}_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi) - \sqrt{n} \mathbf{P}_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi)], \end{aligned} \quad (13.2.20)$$

откуда следует их ортогональность к системам $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{M}^2$.

Нужны еще системы векторных решений, ортогональных $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{N}^1$ или $\mathbf{M}^2$ и $\mathbf{N}^2$. Их можно получить, меняя угловую зависимость $\mathbf{N}^1$ и $\mathbf{N}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{smn}^1(r, \vartheta, \varphi) &= \sqrt{n} r^n [\sqrt{n-1} \mathbf{B}_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi) - \sqrt{n} \mathbf{P}_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi)]; \\ \mathbf{G}_{mn}^1 &= r^n \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [-(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{k} (n-m) X_n^m \right\}; \end{aligned} \quad (13.2.21)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, n-1; s = e, o.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{smn}^2(r, \vartheta, \varphi) &= \sqrt{n+1} r^{-n-1} [\sqrt{n+2} \mathbf{B}_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi) + \sqrt{n+1} \mathbf{P}_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi)]; \\ \mathbf{G}_{mn}^2 &= r^{-n-1} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [-(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{k} (n+m+1) X_n^m \right\}; \end{aligned}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, n+1; s = e, o.$$

У этой системы решений ни ротор, ни дивергенция не обращаются в нуль. Дифференциальные соотношения между этими тремя функциями имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} N_{smn}^1 &= \operatorname{rot} N_{smn}^2 = 0 = \operatorname{div} N_{smn}^1 = \operatorname{div} N_{smn}^2; \\ \operatorname{div} M_{smn}^1 &= \operatorname{div} M_{smn}^2 = 0; \operatorname{rot} M_{smn}^1 = (n+1) N_{sm, n-1}^1; \\ \operatorname{rot} M_{smn}^2 &= -n N_{sm, n+1}^2; \operatorname{div} G_{smn}^1 = -n(2n+1) r^{n-1} Y_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi); \\ \operatorname{div} G_{smn}^2 &= -(n+1)(2n+1) r^{-n-2} Y_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi); \\ \operatorname{rot} G_{smn}^1 &= -(2n+1) M_{sm, n-1}^1; \operatorname{rot} G_{smn}^2 = (2n+1) M_{sm, n+1}^2. \end{aligned} \quad (13.2.22)$$

Для $m=0$ функции имеют простой вид, остаются лишь четные функции ($s=e$) и

$$\begin{aligned} M_{e0n}^1 &= M_n^1 = r^n [-i \sin \varphi + j \cos \varphi] P_n^1(\cos \vartheta) = a_\varphi r^n P_n^1; \\ M_{e0n}^2 &= M_n^2 = a_\varphi r^{-n-1} P_n^1(\cos \vartheta); \\ N_{e0n}^1 &= N_n^1 = r^n [-(i \cos \varphi + j \sin \varphi) P_n^1 + k(n+1) P_n] = \\ &= r^n [(n+1) a_r P_{n+1} - a_\vartheta P_{n+1}^1] = -r^n (a_r T_{n-1}^1 - k T_n^1); \\ N_{e0n}^2 &= N_n^2 = r^{-n-1} [-(i \cos \varphi + j \sin \varphi) P_n^1 - k n P_n] = \\ &= -r^{-n-1} [n a_r P_{n-1} + a_\vartheta P_{n-1}^1] = -r^{-n-1} (a_r T_{n-1}^1 - k T_{n-2}^1); \\ G_{e0n}^1 &= G_n^1 = -r^n [n a_r P_{n-1} + a_\vartheta P_{n-1}^1] = -r^n (a_r T_{n-1}^1 - k T_{n-2}^1); \\ G_{e0n}^2 &= G_n^2 = r^{-n-1} [(n+1) a_r P_{n+1} - a_\vartheta P_{n+1}^1] = -r^{-n-1} (a_r T_{n-1}^1 - k T_n^1). \end{aligned} \quad (13.2.23)$$

Наконец, для $n=0$ M^1 , M^2 , N^2 и G^1 равны нулю, и две системы трех элементарных решений имеют вид

$$\begin{aligned} N_{e00}^1 &= k, \quad N_{e10}^1 = i, \quad N_{o10}^1 = j, \\ G_{e00}^2 &= k/r, \quad G_{e10}^2 = i/r, \quad G_{o10}^2 = j/r. \end{aligned}$$

Используя формулы в конце главы, можно выразить обычные сферические функции, умноженные на постоянные векторы, через функции M , N и G . Например, при $m=0$

$$\begin{aligned} k r^n P_n(\cos \vartheta) &= \frac{1}{2n+1} [N_n^1 - G_n^1]; \quad k \frac{P_n}{r^{n+1}} = \frac{-1}{2n+1} [N_n^2 - G_n^2]; \\ i r^n P_n &= \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} [(2n+1) M_{o1n}^1 + n N_{e1n}^1 + (n+1) G_{e1n}^1]; \\ i \frac{P_n}{r^{n+1}} &= \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} [(2n+1) M_{o1n}^2 + (n+1) N_{e1n}^2 + n G_{e1n}^2]; \\ j r^n P_n &= \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} [-(2n+1) M_{e1n}^1 + n N_{o1n}^1 + (n+1) G_{o1n}^1]; \\ j \frac{P_n}{r^{n+1}} &= \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} [-(2n+1) M_{e1n}^2 + (n+1) N_{o1n}^2 + n G_{o1n}^2]. \end{aligned} \quad (13.2.24)$$

Аффинорная функция Грина для векторного уравнения Лапласа. Аффинорная функция Грина, являющаяся решением уравнения

$$\nabla^2 \mathfrak{G} = -\frac{4\pi}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r-r_0) \delta(\vartheta-\vartheta_0) \delta(\varphi-\varphi_0) \mathfrak{I}, \quad (13.2.25)$$

разлагается в ряд по функциям M , N и G . Угловые функции

$$\begin{aligned} D_{mn}^1(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{n(n+1)} C_{mn}^e(\vartheta, \varphi), \quad D_{mn}^2 = \sqrt{n(n+1)} C_{mn}^o, \\ D_{mn}^3 &= \sqrt{n+1} [\sqrt{n+2} B_{m, n+1}^e + \sqrt{n+1} P_{m, n+1}^e], \\ D_{mn}^4 &= \sqrt{n+1} [\sqrt{n+2} B_{m, n+1}^o + \sqrt{n+1} P_{m, n+1}^o], \\ D_{mn}^5 &= \sqrt{n} [\sqrt{n-1} B_{m, n-1}^e - \sqrt{n} P_{m, n-1}^e], \\ D_{mn}^6 &= \sqrt{n} [\sqrt{n-1} B_{m, n-1}^o - \sqrt{n} P_{m, n-1}^o] \end{aligned} \quad (13.2.26)$$

образуют полную ортогональную систему векторных функций, зависящих от углов ϑ и φ . По ним можно разложить аффинор $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} = \sum_{\sigma\mu\nu} F_{\mu\nu}^\sigma(r; r_0, \vartheta_0, \varphi_0) D_{\mu\nu}^\sigma(\vartheta, \varphi), \quad (13.2.27)$$

где функции F определяются методом, изложенным при получении выражения (7.2.63). Применение векторного оператора Лапласа дает

$$\nabla^2 \mathfrak{G} = \sum_{\sigma\mu\nu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} F_{\mu\nu}^\sigma \right) - \frac{\mu(\mu+1)}{r^2} F_{\mu\nu}^\sigma \right] D_{\mu\nu}^\sigma(\vartheta, \varphi).$$

Подставляя это выражение в (13.2.25), умножая обе части на $D_{mn}^1(\vartheta, \varphi) \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ и интегрируя по ϑ и φ , получаем уравнение для F_{mn}^1

$$\begin{aligned} n(n+1) \frac{4\pi/\varepsilon_m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} F_{mn}^1 \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} F_{mn}^1 \right] = \\ = -\frac{4\pi}{r^2} D_{mn}^1 \delta(r - r_0). \end{aligned}$$

Решение этого уравнения, конечное при $r=0$ и $r=\infty$, имеет вид

$$F_{mn}^1 = \frac{\varepsilon_m}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} D_{mn}^1(\vartheta_0, \varphi_0) \begin{cases} r^n/r_0^{n+1} & \text{при } r < r_0, \\ r_0^n/r^{n+1} & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Аналогично получаются решения для F при других значениях индекса s . Например, умножив на $D_{mn}^3(\vartheta, \varphi)$ и проинтегрировав по ϑ и φ , получим

$$F_{mn}^3 = \frac{\varepsilon_m}{(n+1)(2n+1)} \frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!} D_{mn}^3 \begin{cases} r^n/r_0^{n+1} & \text{при } r < r_0, \\ r_0^n/r^{n+1} & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Наконец, учитывая соотношение между функциями D и функциями M , N и G , получим разложение аффинорной функции Грина

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{Z}}{R} = \sum_{smn} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} M_{smn}^1(r, \vartheta, \varphi) M_{smn}^2(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \frac{n-m+1}{n+m+1} N_{smn}^1(r, \vartheta, \varphi) G_{smn}^2(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{n(2n+1)} \frac{n+m}{n-m} G_{smn}^1(r, \vartheta, \varphi) N_{smn}^2(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) \right\}, \quad (13.2.28) \end{aligned}$$

где $s=e, o$, $m=0, 1, 2, \dots, n$, $n=0, 1, 2, \dots$ и $r < r_0$. Для $r > r_0$ надо поменять местами r, ϑ, φ и $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$.

Это разложение имеет несколько интересных свойств. Оно, конечно, удовлетворяет требованию взаимности $\mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \mathfrak{G}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r})$. В нем автоматически отделяются поперечные части, M^1, M^2 , от остальных. Но здесь также проявляется и любопытное переплетение функций N и G ; естественно было ожидать, что два последних члена будут $N^1 N^2$ и $G^1 G^2$.

но это не так. Это последнее свойство тесно связано с особым поведением функции Грина уравнения Лапласа по сравнению с функцией Грина векторного уравнения Гельмгольца (т. е. при $k \rightarrow 0$), что было рассмотрено на стр. 724. Функции M и N являются пределами соответствующих решений для $k \neq 0$, а функция G не является. В результате наличия произведений вида $N^1 G^2$ и т. д. поперечная по r часть $\mathcal{G}$ не является поперечной по r_0 , что, по-видимому, связано с отмеченным выше особым поведением функции Грина.

Решения в случае магнитного поля. Использование аффинорной функции Грина (13.2.28) для магнитного поля, создаваемого распределением токов, показывает, что при стационарном распределении токов с равной нулю дивергенцией векторный потенциал A является поперечным, что было отмечено на стр. 727. Первым, наиболее простым примером является поле, возникающее при вращении равномерно заряженной сферы радиуса a вокруг оси z с угловой скоростью ω . Полный заряд сферы равен Q . Тогда поверхностная плотность тока равна

$$\mathbf{J} = \frac{\omega Q}{4\pi a} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta = \frac{\omega Q}{4\pi a} \mathbf{a}_\varphi P_1^1(\cos \vartheta)$$

и созданный ею векторный потенциал (для $\mu = 1$) есть

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{n(n+1)} \frac{\omega Q a}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi \mathcal{G} \cdot \mathbf{C}_{01}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 = \\ &= \frac{\omega Q a}{3c} \begin{cases} (1/a^2) M_1^1 & \text{при } r < a, \\ a M_1^2 & \text{при } r > a, \end{cases} = \frac{\omega Q}{3c} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta \begin{cases} r/a & \text{при } r < a, \\ a^2/r^2 & \text{при } r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.2.29)$$

Магнитное поле получается отсюда при помощи (13.2.22):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{\omega Q}{3c} \begin{cases} (2/a) N_0^1 & \text{при } r < a, \\ -a^2 N_2^2 & \text{при } r > a, \end{cases} = \\ &= \frac{\omega Q}{3c} \begin{cases} (2/a) \mathbf{k} & \text{при } r < a, \\ (a^2/r^3) (3\mathbf{a}_r \cos \vartheta - 2\mathbf{k}) & \text{при } r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.2.30)$$

Это поле однородно внутри сферы и имеет характер поля диполя вне сферы.

Другим, несколько более сложным примером является поле лежащей в плоскости xy петли тока с $r = a$, $\vartheta = \pi/2$. Сила текущего по петле тока равна J . В этом случае плотность тока есть

$$\mathbf{J} = \frac{J}{a} \delta(r-a) \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{a}_\varphi,$$

а векторный потенциал при $\mu = 1$ равен

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi J}{c} \mathbf{a}_\varphi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} P_{2n+1}^1(\cos \vartheta) \begin{cases} (a/r)^{2n+2} & \text{при } r > a, \\ (r/a)^{2n+1} & \text{при } r < a, \end{cases} = \\ &= \frac{\pi J}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} \begin{cases} a^{2n+2} M_{2n+1}^2 & \text{при } r > a, \\ a^{-2n-1} M_{2n+1}^1 & \text{при } r < a, \end{cases} \end{aligned}$$

и магнитное поле

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\pi J}{ac} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} \times \\ &\times \begin{cases} (2n+2) (r/a)^{2n} [\mathbf{k} T_{2n}^1 - \mathbf{a}_r T_{2n-1}^1] & \text{при } r < a, \\ (2n+1) (a/r)^{2n+3} [\mathbf{a}_r T_{2n+1}^1 - \mathbf{k} T_{2n}^1] & \text{при } r > a, \end{cases} \end{aligned} \quad (13.2.31)$$

где T_{2n}^1 — многочлен Гегенбауера от $\cos \vartheta$, определенный в таблице в конце гл. 6. Эти ряды сходятся всюду, за исключением $r = a$.

Если внутри петли помещен железный шар радиуса $b < a$, концентрический с петлей, то поле изменяется так, что нормальная производная касательной составляющей A становится равной нулю при $r = b$. Поскольку все векторы M являются касательными, достаточно добавить лишь поле, исчезающее на бесконечности и имеющее нормальную составляющую градиента, обратную по величине соответствующему выражению для A при $r = b$. Это дает

$$A = \frac{\pi J}{c} a_\varphi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} P_{2n+1}^1(\cos \vartheta) \times$$

$$\times \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{b^2}{ar}\right)^{2n+2} \frac{a}{b} & \text{при } r < a, \\ \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+2} \left[1 + \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{b}{a}\right)^{4n+3}\right] & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Соответствующее выражение получается и для H . Железный шар увеличивает значение n -го члена в выражении (13.2.31) для $r > a$ в

$$1 + \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{b}{a}\right)^{4n+3}$$

раз. На больших расстояниях от петли поле переходит в поле диполя

$$H \simeq \frac{\pi J}{ac} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^3\right] [3a_r \cos \vartheta - k] \text{ при } r \gg a.$$

Таким образом, железный шар увеличил напряженность поля в $1 + (b/a)^3/2$ раз.

Поток вязкой жидкости, обтекающий сферу. Расчет потока вязкой несжимаемой жидкости у сферической границы также можно провести с помощью аффинорной функции Грина. До тех пор, пока отсутствует градиент давления, соотношения (13.2.5) означают, что уравнение для v является однородным. Поле скоростей получается как комбинация решений с нулевой дивергенцией M_{smn}^1 , M_{smn}^2 , N_{smn}^1 и N_{smn}^2 , удовлетворяющая граничным условиям. Например, для поля между двумя концентрическими сферами радиусов a и b ($a < b$), из которых внутренняя неподвижная, а внешняя вращается с угловой скоростью ω вокруг оси z , выберем линейную комбинацию M_1^1 и M_1^2 , соответствующую нулевой скорости при $r = a$ и скорости $a_\varphi b \omega \sin \vartheta$ при $r = b$. Получим

$$v = \frac{b^3 \omega}{b^3 - a^3} [M_1^1 - a^3 M_1^2] = \frac{b^3 \omega (r^3 - a^3)}{r^2 (b^3 - a^3)} a_\varphi \sin \vartheta. \quad (13.2.32)$$

Из выражения (2.3.40), используя формулы для векторных операторов в конце гл. 1, получим, что аффинор напряжений в потоке при нулевом давлении имеет вид

$$\mathfrak{T} = \eta (\nabla v + v \nabla) = \frac{3\eta b^3 \omega}{b^3 - a^3} \cdot \frac{a^3}{r^3} (a_r a_\varphi + a_\varphi a_r) \sin \vartheta.$$

Окончательно вращающий момент для внутренней сферы равен

$$T = 2\pi a^3 \int_0^\pi |\mathfrak{T} \cdot a_\varphi| \sin^2 \vartheta d\vartheta = 8\pi \frac{\eta a^3 b^3 \omega}{b^3 - a^3}.$$

С другой стороны, когда движение жидкости вызывает перепад давлений в потоке, уравнение для скорости оказывается неоднородным (13.2.5). Ротор вектора $\mathbf{Q} = -(1/4\pi\eta)\text{grad } P$ равен нулю, а для несжимаемой жидкости дивергенция $\mathbf{Q}$ также равна нулю; следовательно, этот вектор является линейной комбинацией решений N. В качестве примера такого решения возьмем распределение давления в виде $p_n = A_n r^{-n} P_{n-1}(\cos \vartheta)$. При этом вне сферы радиуса $r = a$

$$\text{grad } p_n = A_n N_n^2(r, \vartheta, \varphi) = A_n r^{-n-1} [k T_{n-2}^1(\cos \vartheta) - a_r T_{n-1}^2(\cos \vartheta)].$$

Тогда распределение скоростей дается решением неоднородного уравнения (13.2.5), к которому достаточно добавить решение однородного уравнения, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Частное решение для такого распределения давления имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= -\frac{1}{4\pi\eta} \iiint \mathbf{Q} \cdot \text{grad } p_n dv = \\ &= -\frac{A_n}{4\pi\eta n(2n+1)} D_{0n}^3(\vartheta, \varphi) \iint [D_{0n}^3(\vartheta_0, \varphi_0)]^2 \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \times \\ &\quad \times \left\{ r^{-n-1} \int_a^r r dr + r^n \int_r^\infty r^{-2n} dr \right\} = \\ &= \frac{A_n}{\eta(2n-1)(2n+1)} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) a^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right) r^2 \right] N_n^2(r, \vartheta, \varphi) = \\ &= \frac{A_n}{2\eta} \left[\frac{a^{2n-n-1}}{2n+1} - \frac{r^{-n+1}}{2n-1} \right] \sqrt{n} [\sqrt{n-1} B_{0,n-1} - \sqrt{n} P_{0,n-1}]. \end{aligned}$$

Однако дивергенция этого выражения отлична от нуля; как можно показать, используя таблицу в конце этой главы, она равна $[nA_n/r^n \eta(2n-1)] P_{n-1}(\cos \vartheta)$. Поэтому надо добавить решение однородного уравнения, чтобы дивергенция полного решения была равна нулю. Согласно (13.2.22), единственным решением, имеющим требуемое выражение дивергенции, является функция G_{n-2}^2 ; поэтому функция

$$[nA_n/\eta(n-1)(2n-1)(2n-3)] G_{n-2}^2$$

имеет дивергенцию, противоположную $\mathbf{v}_i$. Следовательно, скорость потока вне сферы будет равна

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{A_n}{2\eta} \left\{ \left[\frac{a^2}{2n+1} - \frac{r^2}{2n-1} \right] N_n^2(r, \vartheta, \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n}{(n-1)(2n-1)(2n-3)} G_{n-2}^2(r, \vartheta, \varphi) \right\} + C(r, \vartheta, \varphi), \end{aligned}$$

где C является комбинацией решений M и N, удовлетворяющей граничным условиям.

Если граничные условия заключаются в равенстве $\mathbf{v}$ нулю при $r = a$ и $B_{n-2} N_{n-2}^1(r, \vartheta, \varphi)$ при r , больших по сравнению с a , то A_n выбирается так, чтобы при $r = a$ член G^2 взаимно уничтожался с N^1 . При этом для удовлетворения условия $\mathbf{v} = 0$ при $r = a$ можно добавить член, содержащий N^2 . Окончательный результат имеет вид

$$\mathbf{v} = B_n \left\{ N_n^1 - a^{2n+1} G_n^2 + \frac{1}{2} a^{2n+1} \frac{(n+1)(2n+1)}{n+2} (r^2 - a^2) N_{n+2}^2 \right\}, \quad (13.2.33)$$

где произведена замена n на $n+2$. Давление равно

$$-\eta [B_n/(n+2)] (n+1)(2n+1)(2n+3) (a^{2n+1}/r^{n+2}) P_{n+1}(\cos \vartheta).$$

Если поведение $\mathbf{v}$ для $r \gg a$ дается рядом $\sum_n B_n \mathbf{N}_n^1$, то решение $\mathbf{v}$, удовлетворяющее граничному условию $\mathbf{v} = 0$ при $r = a$, выражается рядом, составленным из решений (13.2.33).

Наибольший интерес представляет случай стационарного потока, обтекающего неподвижную сферу радиуса a , когда вектор скорости для $r \gg a$ равен $\mathbf{k}U = U\mathbf{N}_0^1$, так что $n=0$ и $B_0=U$. Тогда выражение для скорости, верное для малых значений U , при которых выполняется уравнение (13.2.5), имеет вид

$$\mathbf{v} = U \left[\mathbf{N}_0^1 - a\mathbf{G}_0^2 + \frac{1}{4}a(r^2 - a^2)\mathbf{N}_2^2 \right] = \\ = U \left[\mathbf{k} \left(1 - \frac{a}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{a}{r} \right) (2\mathbf{a}_r \cos \vartheta + \mathbf{a}_\vartheta \sin \vartheta) \right], \quad (13.2.34)$$

и избыточное давление равно

$$p = -\frac{3}{2} \frac{U\eta a}{r^2} \cos \vartheta.$$

Аффинор напряжений, согласно (2.3.10), имеет вид

$$\mathfrak{T} = \frac{3}{2} \frac{U\eta a}{r^2} \mathfrak{T} \cos \vartheta + \eta (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) = \\ = \frac{3}{2} U\eta \frac{a^3}{r^4} \mathfrak{T} \cos \vartheta + \frac{9}{2} U\eta \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \left(\frac{a}{r^2} - \frac{a^3}{r^4} \right) \cos \vartheta - \frac{3}{2} U\eta (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\vartheta + \mathbf{a}_\vartheta \mathbf{a}_r) \frac{a^3}{r^4} \sin \vartheta.$$

Ввиду симметрии сила, действующая на сферу ($r=a$), направлена по оси z и по величине равна

$$F = a^2 \int \int \mathbf{k} \cdot \mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_r \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{3}{2} aU\eta \int \int \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 6\pi aU\eta, \quad (13.2.35)$$

что является выражением *закона Стокса* для силы сопротивления сферы, медленно движущейся в вязкой жидкости.

Заметим, что компонента по оси z лобового сопротивления одна и та же для любого элемента поверхности сферы. В рассматриваемом приближении лобовое сопротивление пропорционально относительной скорости сферы по отношению к жидкости, а также радиусу сферы. Отметим, наконец, что результаты (13.2.34) и (13.2.35) относятся к случаю стационарных условий, когда относительное движение продолжалось достаточно долго. Искажение поля скоростей захватывает значительную область вокруг сферы, главным образом из-за наличия члена $\mathbf{k}(aU/r)$. Если относительное движение начинается при $t=0$, требуется определенный промежуток времени для установления стационарного режима.

Упругое деформирование сферы. Однородное уравнение статического деформирования сферы

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{s} - \mu \text{rot rot } \mathbf{s} = 0$$

имеет в качестве двух систем поперечных решений системы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, уже определенные выражениями (13.2.17)–(13.2.20). При этом продольная система $\mathbf{G}$, определенная выражением (13.2.21), не является решением, и надо искать новую комбинацию полиномов от r и угловых функций $\mathbf{B}$ и $\mathbf{P}$, удовлетворяющую данному уравнению.

Этого можно достичь, используя уравнения, приведенные в конце главы. Например, чтобы найти решение, аналогичное G_{mn} , положим

$$E_{mn}^1 = A r^n B_{m, n-1} + B r^n P_{m, n-1}$$

и применим к этому выражению дифференциальные операторы

$$\text{grad div } \mathbf{E} = [(n+2)B - \sqrt{n(n-1)}A] N_{m, n-2}^1,$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} [\sqrt{n(n-1)}B - (n+1)A] N_{m, n-2}^1,$$

откуда можно определить соотношение между A и B , при котором удовлетворяется уравнение упругости. Таким же образом составим комбинацию E_{mn}^2 из $r^{-n-1}B_{m, n+1}$ и $r^{-n-1}P_{m, n+1}$. Итак,

$$E_{smn}^1 = r^n \left[\sqrt{n(n-1)} B_{m, n-1}^s + \frac{\lambda(n+2) + \mu(n+4)}{\lambda(n-1) + \mu(n-3)} n P_{m, n-1}^s \right],$$

$$E_{smn}^2 = r^{-n-1} \left[\sqrt{(n+1)(n+2)} B_{m, n+1}^s - \frac{\lambda(n+2) + \mu(n+4)}{\lambda(n-1) + \mu(n-3)} (n+1) P_{m, n+1}^s \right]. \quad (13.2.36)$$

Эти выражения переходят в функции G^1 и G^2 из (13.2.21) при $\lambda = -\mu$ (в этом случае и уравнение упругости переходит в векторное уравнение Лапласа). Однако при $\lambda \neq -\mu$ функции, определяющие угловую зависимость E , не ортогональны соответствующим частям M и N . Это осложняет представление аффинорной функции Грина в форме, аналогичной (13.2.28); более удобной оказывается другая форма.

Кроме того, нужно иметь выражение для напряжения на поверхности сферы $(\mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a}$. Для этого надо подсчитать радиальное напряжение

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r \left[\lambda \text{div } \mathbf{s} + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r} \right] + \mu \mathbf{a}_\vartheta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\vartheta}{r} \right) \right] + \\ + \mu \mathbf{a}_\varphi \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\varphi}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (13.2.37)$$

для каждой из функций M, N, E при $r=a$. Из формул, приведенных в конце главы, можно получить для аксиально-симметричного случая $m=0$ следующие полезные формулы:

$$\text{Для } s = r^n C_{0n} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = \mu(n-1) r^{n-1} C_{0n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Для } s = r^n B_{0, n+1} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = -\lambda \sqrt{(n+1)(n+2)} r^{n-1} P_{0, n+1} + \\ + \mu(n-1) r^{n-1} B_{0, n+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Для } s = r^n B_{0, n-1} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = -\lambda \sqrt{n(n-1)} r^{n-1} P_{0, n-1} + \\ + \mu(n-1) r^{n-1} B_{0, n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Для } s = r^n P_{0, n+1} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = [\lambda(n+2) + 2\mu n] r^{n-1} P_{0, n+1} + \\ + \mu \sqrt{(n+1)(n+2)} r^{n-1} B_{0, n+1}. \end{aligned} \quad (13.2.38)$$

$$\begin{aligned} \text{Для } s = r^n P_{0, n-1} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = [\lambda(n+2) + 2\mu n] r^{n-1} P_{0, n-1} + \\ + \mu \sqrt{n(n-1)} r^{n-1} B_{0, n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Для } s = M_n^1 : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = \mu(n-1) \frac{1}{r} M_n^1.$$

$$\text{Для } s = N_n^1 : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = 2\mu n \frac{1}{r} N_n^1.$$

Если задано смещение поверхности упругой сферы, то используются системы решений, являющихся взаимно ортогональными функциями углов ϑ и φ при $r=a$. Две из трех необходимых систем имеют вид

$$M_{mn}^1 = \sqrt{n(n+1)} r^n C_{mn}(\vartheta, \varphi),$$

$$N_{mn}^1 = \sqrt{(n+1)(n+2)} r^n B_{m, n+1}(\vartheta, \varphi) + (n+1) r^n P_{m, n+1}(\vartheta, \varphi).$$

Третья система получается как комбинация E_{mn} и $N_{m, n-2}$, ортогональная к N при $r=a$. Такая комбинация при $r=a$ должна иметь вид

$$\sqrt{n(n-1)} a^n B_{m, n-1} - n a^n P_{m, n-1},$$

т. е.

$$H_{mn}^1 = \frac{1}{\lambda(4n-1) + \mu(8n-3)} \{ n(2n+1)(\lambda + \mu) a^2 N_{m, n-2}^1 - (2n-1)[\lambda(n-1) + \mu(n-3)] E_{mn}^1 \}. \quad (13.2.39)$$

Через эти три системы можно выразить решение, соответствующее любым смещениям граничной поверхности. Пусть, например, часть поверхности сферы уплощается. Смещение поверхности в этом случае

$$s_{r=a} = \begin{cases} -ak(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) & \text{при } 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0, \\ 0 & \text{при } \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi. \end{cases} \quad (13.2.40)$$

Но, как указано в (13.2.24), можно составить функцию

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} [N_n^1 - H_n^1] &= \frac{1}{2n+1} [\sqrt{(n+1)(n+2)} B_{n+1} + (n+1) P_{n+1}] + \\ &+ \frac{(r^n/2n+1) \sqrt{n(n-1)}}{\lambda(4n-1) + \mu(8n-3)} \left\{ (2n-1)[\lambda(n-1) + \mu(n-3)] - \right. \\ &- n(2n+1)(\lambda + \mu) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left. \right\} B_{n-1} + \\ &+ \frac{nr^n/(2n+1)}{\lambda(4n-1) + \mu(8n-3)} \left\{ (2n-1)[\lambda(n+2) + \mu(n+4)] - \right. \\ &- n(2n+1)(n-1)(\lambda + \mu) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left. \right\} P_{n-1} \xrightarrow{r \rightarrow a} k a^n P_n(\cos \vartheta), \quad (13.2.41) \end{aligned}$$

а из таблицы в конце гл. 10 следует, что

$$\begin{aligned} F(\vartheta) &= \begin{cases} -a(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) & \text{при } 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \\ 0 & \text{при } \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases} = \\ &= -\frac{1}{2} a \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{P_{n+2}(\cos \vartheta_0)}{2n+3} - \frac{2(2n+1)}{(2n+3)(2n-1)} P_n(\cos \vartheta_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_{n-2}(\cos \vartheta_0)}{2n-1} \right] P_n(\cos \vartheta), \end{aligned}$$

где положено $P_{-1} = 1$, $P_{-2}(\cos \vartheta) = P_1(\cos \vartheta)$. Из этих двух выражений легко составить функцию смещений, удовлетворяющую граничным усло-

виям (13.2.40) и ограниченную всюду внутри сферы:

$$s = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a^{1-n} \left[\frac{P_{n+2}(\cos \vartheta_0)}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2P_n(\cos \vartheta_0)}{(2n+3)(2n-1)} + \right. \\ \left. + \frac{P_{n-2}(\cos \vartheta_0)}{(2n+1)(2n-1)} \right] [N_n^1(r, \vartheta, \varphi) - H_n^1(r, \vartheta, \varphi)]; \quad (13.2.42)$$

$$s = -\frac{1}{2} a \left\{ \left[\frac{2}{3} - \cos \vartheta_0 + \frac{1}{3} P_2(\cos \vartheta_0) \right] \mathbf{k} + \right. \\ + \left[1 - \frac{6}{5} \cos \vartheta_0 + \frac{1}{5} P_3(\cos \vartheta_0) \right] \frac{r}{a} \mathbf{k} P_1(\cos \vartheta) + \\ + \left[\frac{1}{3} - \frac{10}{21} P_2(\cos \vartheta_0) + \frac{1}{7} P_4(\cos \vartheta_0) \right] \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) - \right. \\ \left. \left. - \frac{2(\lambda + \mu)}{7\lambda + 13\mu} \frac{(a^2 - r^2)}{a^2} \right] \mathbf{k} + \dots \right\}.$$

Это и есть искомое решение. Так как члены для $n > 2$ не параллельны оси z , то смещение s не направлено по $\mathbf{k}$.

Используя (13.2.42), можно подсчитать напряжения в сфере

$$\mathfrak{T} = - \left[1 - \frac{6}{5} P_1(\cos \vartheta_0) + \frac{1}{5} P_3(\cos \vartheta_0) \right] \left[\frac{1}{2} \lambda \mathfrak{T} + \mu \mathbf{k} \mathbf{k} \right] - \\ - \frac{1}{a} \left[\frac{1}{3} - \frac{10}{21} P_2(\cos \vartheta_0) + \frac{1}{7} P_4(\cos \vartheta_0) \right] \left\{ 3\lambda z \frac{3\lambda + 5\mu}{7\lambda + 13\mu} \mathfrak{T} + \right. \\ + 6\mu z \frac{3\lambda + 5\mu}{7\lambda + 13\mu} \mathbf{k} \mathbf{k} - \frac{3}{2} \mu \frac{\lambda + 3\mu}{7\lambda + 13\mu} [x(\mathbf{i} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{i}) + y(\mathbf{j} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{j})] \left. \right\} - \dots \quad (13.2.43)$$

Этот ряд сходится абсолютно при $r < a$.

Задание на поверхности вектора напряжения. В некоторых случаях на поверхности сферы задается вектор напряжения, а не смещение, однако искомой величиной по-прежнему остается смещение. Пусть, например, вектор напряжения при $r = a$ имеет вид

$$(\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a} = \begin{cases} a a_\varphi \sin \vartheta & \text{при } 0 \leq \vartheta < \vartheta_0, \\ 0 & \text{при } \vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0, \\ -a a_\varphi \sin \vartheta & \text{при } \pi - \vartheta_0 < \vartheta \leq \pi, \end{cases}$$

что соответствует закручиванию областей у полюсов сферы (до широты $\vartheta = \vartheta_0$) в противоположных направлениях при помощи прикрепленных к ним жестких стержней, к которым приложен вращающий момент T . Постоянная a связана с T соотношением

$$T = \frac{2}{3} \pi a^3 \lambda (1 - \cos \vartheta_0)^2 (2 + \cos \vartheta_0).$$

В этом случае используются только решения $M_n^1(r, \vartheta, \varphi) = a_z r^n P_n^1(\cos \vartheta)$ и притом лишь для четных индексов $n > 0$, так как ищется решение, меняющее знак при замене ϑ на $\pi - \vartheta$. Поэтому положим

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n M_{2n+2}^1, \quad \mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_r = a_\varphi \mu \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n r^{2n+1} P_{2n+2}^1(\cos \vartheta),$$

где P_{2n+2} — присоединенная функция Лежандра, рассмотренная в гл. 10. Для определения постоянных A_n умножим обе части выражения для

$(\mathfrak{L} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a}$ на $P_{2m+2}^1 \sin \vartheta d\vartheta$ и проинтегрируем по ϑ :

$$\begin{aligned} \mu (2n+1) A_n a^{2n+1} \int_{-1}^1 [P_{2n+2}^1(x)]^2 dx &= \\ &= 2\mu \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{4n+5} A_n a^{2n+1} = \\ &= 2a \int_{\cos \vartheta_0}^1 \sqrt{1-x^2} P_{2n+2}^1(x) dx = \\ &= \frac{2a}{(2n+1)(2n+4)} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0); \\ A_n &= \frac{(3T/2\pi\mu) a^{-2n-4}}{(1-\cos \vartheta_0)^2 (2+\cos \vartheta_0)} \cdot \frac{(4n+5)(2n)!}{(2n+1)(2n+4)!} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0). \end{aligned}$$

Следовательно, смещение s части сферы в точке (r, ϑ, φ) равно

$$\begin{aligned} s &= a_\varphi \frac{3T/2\pi\mu a^2}{(1-\cos \vartheta_0)^2 (2+\cos \vartheta_0)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+5)(2n)!}{(2n+1)(2n+4)!} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0) \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+2} P_{2n+2}^1(\cos \vartheta) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\vartheta_0 \rightarrow 0} a_\varphi \frac{T}{4\pi\mu a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+2} P_{2n+2}^1(\cos \vartheta), \quad (13.2.44) \end{aligned}$$

что означает значительное скручивание в области приложения вращающего момента и уменьшение скручивания при удалении от точек приложения нагрузки. При помощи таблиц в конце гл. 10 получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5}{2n+1} x^{2n+2} P_{2n+2}^1(z) = 3x \sqrt{1-x^2} \int_0^x \frac{1-x^2}{x} \left[\frac{1}{(1+x^2-2xz)^{5/2}} - \frac{1}{(1+x^2+2xz)^{5/2}} \right] dx,$$

откуда можно получить явное аналитическое выражение для s при $\vartheta_0 \rightarrow 0$.

Можно рассмотреть много других примеров, относящихся к упругой сфере, но при этом не выявятся новые принципы. К функции Грина можно также прийти предельным переходом в решениях задач об упругих колебаниях, но это будет рассмотрено в следующем параграфе.

13.3. Векторные волновые поля

Как было показано в § 13.1, решения векторного уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ не имеют таких особенностей, как разобранные в § 13.2 решения векторного уравнения Лапласа, соответствующего $k=0$. Многие волновые решения полностью аналогичны скалярным волновым решениям, рассмотренным в гл. 11. Мы попытаемся выявить их общность, но главным образом будем подчеркивать различающие их свойства.

В основном мы будем рассматривать только электромагнитные поля, упругую среду и движение вязкой жидкости, хотя в природе встречаются векторные поля и другого типа. Уравнения этих полей и граничные условия для них уже были приведены в гл. 2 и повторены в § 13.1. По мере необходимости мы будем их приводить снова.

Единственное дополнительное замечание, которое здесь уместно сделать, касается временной зависимости в уравнении для потока вязкой жидкости. При достаточно малой скорости потока (см. стр. 159 в т. I и стр. 731 в настоящем томе) уравнение (2.3.14) переходит в

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \text{grad } P, \quad (13.3.1)$$

где $\text{div } \mathbf{v} = 0$ и $P = p + V$. Это не неоднородное волновое уравнение, а векторное уравнение диффузии, поэтому его решения не имеют волнового характера. Однако решения этого уравнения рассматриваются здесь из-за их векторных свойств, а также и потому, что, отделяя временную зависимость (в виде экспоненциального множителя), мы получим векторное уравнение Гельмгольца для зависящей от пространственных координат части решения. Это уравнение аналогично уравнениям для электромагнитных и упругих колебаний. Таким образом, общие методы решения заставляют рассматривать это уравнение в данном параграфе, а не где-либо в другой части книги.

Отражение плоской волны от плоскости. В вакууме плоская электромагнитная волна частоты $\omega/2\pi = kc/2\pi$, распространяющаяся в направлении, параллельном единичному вектору $\mathbf{a}_i = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$, задается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{c}{i\omega} E_0 \mathbf{a}_e e^{ik(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - ct)}, \quad \varphi = 0, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = E_0 \mathbf{a}_e e^{ik(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - ct)}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{a}_i \times \mathbf{E} = E_0 \mathbf{a}_h e^{ik(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - ct)}, \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

где¹⁾ $\mathbf{a}_i$,

$$\mathbf{a}_e = -\mathbf{a}_x \sin \theta \sin \phi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \phi + \mathbf{a}_z \cos \phi = \mathbf{a}_h \times \mathbf{a}_i$$

и

$$\mathbf{a}_h = \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_x \sin \theta \cos \phi - \mathbf{a}_y \cos \theta \cos \phi + \mathbf{a}_z \sin \phi$$

образуют правую тройку ортонормированных векторов, составляющих углы Эйлера θ и ϕ с осями x , y и z . Если отражающая плоскость совпадает с плоскостью (y, z) , то угол θ является углом падения и (поскольку направление поляризации волны определяется вектором $\mathbf{H}$) угол ϕ измеряет угол между направлением поляризации $\mathbf{a}_h$ и плоскостью (x, y) , которая называется *плоскостью падения*. Это показано на рис. 13.3.

Если граничная поверхность при $x=0$ является практически идеальным проводником, то необходимо, чтобы $\mathbf{E} \times \mathbf{a}_x = 0$ при $x=0$, и поэтому $\mathbf{A} \times \mathbf{a}_x = 0$. Поскольку $\text{div } \mathbf{A}$ также равна нулю, этого граничного условия для обеих компонент касательной составляющей $\mathbf{A}$ достаточно для полного определения решения. К падающей волне надо добавить отраженную с направлением распространения $\mathbf{a}'_i = -\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$ и с таким углом χ между направлением поляризации и плоскостью падения (и отражения), чтобы касательные составляющие электрического поля падающей и отраженной волны взаимно уничтожались. Для идеального проводника при $x=0$ это имеет место при $\chi = \phi$, и полное поле определяется выражением

¹⁾ В этом параграфе опять употребляются $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ вместо $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, чтобы не спутать их с $i = \sqrt{-1}$ и $k = \omega/c$.

(для $x < 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 [\mathbf{a}_e e^{ikh \cos \theta} - \mathbf{a}'_e e^{-ikh \cos \theta}] e^{iky \sin \theta - i\omega t} = \\ &= 2E_0 [-\mathbf{a}_x \sin \theta \sin \psi \cos(kx \cos \theta) + \\ &+ (\mathbf{a}_y \cos \theta \sin \psi + \mathbf{a}_z \cos \psi) i \sin(kx \cos \theta)] e^{iky \sin \theta - i\omega t}, \quad (13.3.3) \\ \mathbf{H} &= 2E_0 [\mathbf{a}_x \sin \theta \cos \psi i \sin(kx \cos \theta) - \\ &- (\mathbf{a}_y \cos \theta \cos \psi - \mathbf{a}_z \sin \psi) \cos(kx \cos \theta)] e^{iky \sin \theta - i\omega t}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_x \sin \theta \sin \psi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \psi + \mathbf{a}_z \cos \psi \text{ и } \mathbf{a}'_e = \mathbf{a}'_i \times \mathbf{a}'_e.$$

Вектор $\mathbf{H}$ всюду ортогонален к $\mathbf{E}$.

Отложим рассмотрение более сложных граничных условий для электромагнитного поля, пока не рассмотрено простое отражение упругих волн.



Рис. 13.3. Векторы, используемые при описании отражения поперечной волны от плоскости (y, z).

В случае упругих колебаний имеют место как продольные волны (сжатия), так и поперечные волны (сдвига)

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_c &= S_c \mathbf{a}_i e^{ik_c \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad \mathbf{s}_s = S_s \mathbf{a}_i e^{ik_s \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \\ k_c &= \omega/c_c, \quad k_s = \omega/c_s, \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

где две различные скорости распространения волн c_c и c_s определяются формулами (2.2.2) и (2.2.3). Соответствующие аффиноры напряжений выражаются формулами (2.2.14) и (2.2.16):

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_c &= ik_c [\lambda \mathfrak{S} + 2\mu \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i] S_c e^{ik_c \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \\ \mathfrak{T}_s &= ik_s \mu [\mathbf{a}_i \mathbf{a}_h + \mathbf{a}_h \mathbf{a}_i] S_s e^{ik_s \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}. \end{aligned}$$

Если среда занимает полупространство $x < 0$ и граница $x = 0$ свободна, то граничное условие имеет вид $\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_x = 0$. Чтобы ему удовлетворить, надо добавить отраженную волну; при этом даже для чисто продольной падающей волны в отраженную волну будет входить поперечная часть, если только угол падения отличен от нуля. Например, для падающей волны сжатия полное поле имеет вид

$$\mathbf{s} = S_i \mathbf{a}_i e^{ik_c \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + S' \mathbf{a}'_i e^{ik_c \mathbf{a}'_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + S'' \mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z e^{ik_s \mathbf{a}''_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}.$$

Здесь направления распространения отраженных поперечной и продольной волн не совпадают, так как $k_c \neq k_s$ и должно выполняться условие $k_c \sin \theta = k_s \sin \theta'$ для того, чтобы при $x = 0$ зависимость всех волн от y была одинакова. Здесь также положено $\psi' = 0$, поскольку задача является симметричной. Поэтому $\mathbf{a}''_i = \mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z$, где $\mathbf{a}''_i = -\mathbf{a}_x \cos \theta' + \mathbf{a}_y \sin \theta'$. Вектор напряжения на плоскости $x = 0$ равен тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_x)_0 &= i \{ k_c [\lambda \mathbf{a}_x + 2\mu \mathbf{a}_i \cos \theta] S_i + k_c [\lambda \mathbf{a}_x - 2\mu \mathbf{a}'_i \cos \theta] S' + \\ &+ k_s \mu [\mathbf{a}''_i \sin \theta' - [\mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z] \cos \theta'] S'' \} e^{iky \sin \theta - i\omega t}. \end{aligned}$$

Соответствующим выбором S' и S'' это выражение надо обратить в нуль. Отсюда вытекает, что $\sin \theta' = c_s/c_c \sin \theta$ и

$$S' = -S_i \frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta - \mu \sin 2\theta \cdot \operatorname{tg} 2\theta'}{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta + \mu \sin 2\theta \cdot \operatorname{tg} 2\theta'},$$

$$S'' = 2S_i \frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta}{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta + \mu \sin 2\theta \cdot \operatorname{tg} 2\theta'} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta'}$$

для амплитуд отраженных волн сжатия и сдвига. Угол θ' отраженной волны сдвига меньше $\pi/4$ для $0 \leq \theta \leq \pi/2$, так как $(c_s/c_c)^2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$, что всегда меньше $1/2$. Следовательно, $\operatorname{tg} (2\theta')$ никогда не достигает бесконечности. Для нормального падения $S'' = 0$ и отраженная волна является волной чистого сжатия.

Граничный импеданс. Если материал отражающей плоскости не является идеально отражающим, то составление граничных условий оказывается более трудной задачей. Чтобы придать им возможно более удобную форму, используем идею импеданса, развитую в гл. 3.

Начиная с электромагнитного поля, отметим, что поскольку потенциалы выбраны так, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, для определения поля достаточно задать лишь два граничных условия. В качестве таковых выберем соотношение между касательными составляющими $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, так как эти компоненты непрерывны при переходе через границу, в то время как нормальные составляющие поля терпят разрыв. При этом из непрерывности касательных составляющих поля автоматически следует и удовлетворение граничных условий для нормальных составляющих, поскольку по обе стороны границы определены дивергенции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Можно еще больше сузить требования, если вспомнить, что для монохроматической волны в каждой точке пространства можно задать аффино́р, определяющий «отношение» между $\mathbf{sH}$ и $-4\pi\mathbf{E}$, как это следует из выражения (3.4.23). Это «отношение» было названо аффино́ром импеданса волны в данной точке. При этом рассматривается двумерный аффино́р, преобразующий тангенциальные составляющие $\mathbf{H}$ в тангенциальные компоненты $\mathbf{E}$, а не полный вектор $\mathbf{H}$ в вектор $\mathbf{E}$. Это не обычный трехмерный аффино́р, поскольку он не инвариантен относительно преобразования поворота осей координат в трехмерном пространстве, но в пространстве двух измерений на граничной поверхности этот аффино́р ведет себя обычным образом (а это все, что в данном случае требуется).

Определим аффино́р $\mathcal{Z}_i$, *нормальный импеданс* рассматриваемой граничной поверхности, при помощи соотношения

$$4\pi[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathcal{Z}_i \cdot [\mathbf{H} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})], \quad (13.3.5)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности [$\mathbf{n} = \mathbf{a}_x$ в примере (13.3.3)], а выражение в квадратных скобках в правой части дает касательную составляющую вектора $\mathbf{H}$. Двумерный аффино́р $\mathcal{Z}_i$ выражается через аффино́р импеданса трехмерного поля $\mathcal{Z}$, определяемый выражением (3.4.23), сложным образом. Но как вскоре будет показано, это можно сделать для каждого конкретного случая.

Определив компоненты нормального импеданса $\mathcal{Z}_i$ с внутренней стороны поверхности ($x = +\delta$), надо так выбрать отношение касательных составляющих $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с наружной стороны поверхности ($x = -\delta$), чтобы $\mathcal{Z}_i$ был непрерывным при переходе через поверхность. Если определение поля внутри поверхности не представляет интереса, то *единственным искомым граничным условием* и является это требование непрерывности аффино́ра нормального импеданса.

Чтобы лучше почувствовать излагаемый метод, выведем выражение аффино́ра нормального импеданса с внутренней стороны граничной плоско-

сти $x=0$ для плоской волны, распространяющейся от этой плоскости (x возрастает). Это соответствует появлению преломленной волны, когда падающая волна приходит с внешней стороны поверхности ($x < 0$). Пусть θ' — угол между направлением преломления и нормалью к поверхности i . Позже будет установлена связь между углом θ' и углом падения θ . Характеристики среды — диэлектрическая постоянная ε , магнитная проницаемость μ и проводимость σ — пусть имеют произвольные значения. Уравнение (2.5.19) и последующие мы используем как уравнения движения для A . Комплексную постоянную n , где

$$n^2 = \mu\varepsilon + \frac{4\pi i\mu\sigma}{\omega},$$

назовем *коэффициентом преломления* среды. Выбирая различные значения амплитуд для случая, когда магнитный вектор параллелен плоскости падения (x, y), и случая, когда $\mathbf{H}$ нормален к ней, получим для $x > 0$

$$A = \frac{1}{ik} [E'_\perp (-a_x \sin \theta' \sin \psi' + a_y \cos \theta' \sin \psi') + \\ + E'_\parallel a_z \cos \psi'] e^{ikn(x \cos \theta' + y \sin \theta') - i\omega t}$$

и

$$4\pi a_x \times \mathbf{E} = 4\pi (-a_y E'_\parallel + a_z E'_\perp \cos \theta') e^{ikn(x \cos \theta' + y \sin \theta') - i\omega t}, \\ c[\mathbf{H} - a_x (a_x \cdot \mathbf{H})] = \frac{cn}{\mu} (-a_y E'_\parallel \cos \theta' + a_z E'_\perp) e^{ikn(x \cos \theta' + y \sin \theta') - i\omega t}, \\ k = \omega/c.$$

Эти векторы не параллельны, но аффино́р нормального импеданса имеет достаточно простой вид

$$3i = \frac{4\pi\mu}{cn} [a_y a_y \sec \theta' + a_z a_z \cos \theta'], \quad x > 0, \quad (13.3.6)$$

который не зависит от значений $E'_\parallel$ и $E'_\perp$ и остается постоянным на всей площади поверхности, освещенной падающей волной. Остается лишь так подобрать значения падающей и отраженной волн, чтобы соответствующее значение 3 с внешней стороны поверхности ($x < 0$) было равно этому аффино́ру при $x = 0$.

Отметим, что лишь плоская волна дает такой простой импеданс. Между прочим, отметим также, что если коэффициент преломления n велик (или из-за большого $\mu\varepsilon$, или из-за большого $\mu\sigma/\omega$), то аффино́р нормального импеданса поверхности мал.

Поле плоской волны единичной амплитуды с углом падения θ и углом поляризации ψ и отраженной волной с неизвестными амплитудами $R_\parallel$ и $R_\perp$, соответствующих поляризаций, для $x < 0$ дается выражением

$$A = \frac{1}{ik} \{ [-a_x \sin \theta \sin \psi + a_y \cos \theta \sin \psi + a_z \cos \psi] e^{ikx \cos \theta} + \\ + [R_\perp (a_x \sin \theta + a_y \cos \theta) + R_\parallel a_z] e^{-ikx \cos \theta} \} e^{iky \sin \theta - i\omega t},$$

и при $x = 0$

$$4\pi a_x \times \mathbf{E} = 4\pi [-a_y (\cos \psi + R_\parallel) + a_z \cos \theta (\sin \psi + R_\perp)] e^{iky \sin \theta - i\omega t}, \\ c[\mathbf{H} - a_x (a_x \cdot \mathbf{H})] = c [-a_y \cos \theta (\cos \psi - R_\parallel) + a_z (\sin \psi - R_\perp)] e^{iky \sin \theta - i\omega t},$$

так что импеданс при $x = 0$ равен

$$3i = \frac{4\pi}{c} \left[a_y a_y \sec \theta \frac{\cos \psi + R_\parallel}{\cos \psi - R_\parallel} + a_z a_z \cos \theta \frac{\sin \psi + R_\perp}{\sin \psi - R_\perp} \right].$$

Заметим, что этот импеданс для падающей и отраженной волн зависит от x (формула для $x \neq 0$ получается умножением каждого из R в формуле для $\mathfrak{Z}_t^-$ для $x=0$ на $e^{-2ikx \cos \theta}$), в то время как импеданс для единичной плоской волны не зависит ни от x , ни от y , ни от z .

Сначала надо связать угол преломления θ' с углом падения (и отражения) θ . Это можно сделать, заметив, что касательные составляющие полей непрерывны при переходе через границу и поэтому зависимость от y (а также z и t) одинакова с обеих сторон границы. Зависимость от t исключена, от z зависимости нет, а зависимость от y будет требуемой, если угол падения θ и угол преломления θ' удовлетворяют закону Снеллиуса

$$n \sin \theta' = \sin \theta, \quad \cos \theta' = \sqrt{1 - (1/n)^2 \sin^2 \theta}.$$

Далее, для того чтобы $\mathfrak{Z}_t^-$ при $x=0$ равнялось $\mathfrak{Z}_t^+$, надо выбрать отраженную амплитуду в виде

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= -\cos \psi \left[\frac{1 - (\mu/n) (\cos \theta / \cos \theta')}{1 + (\mu/n) (\cos \theta / \cos \theta')} \right], \\ R_{\perp} &= -\sin \psi \left[\frac{1 - (\mu/n) (\cos \theta' / \cos \theta)}{1 + (\mu/n) (\cos \theta' / \cos \theta)} \right], \end{aligned} \quad (13.3.7)$$

что дает отраженные амплитуды для обеих поляризаций. Отметим, что при этом способе решения для определения величин R не нужно значение преломленной амплитуды, а нужна лишь величина импеданса. Эти формулы дают хорошо известные выражения для интенсивности при отражении поляризованных лучей.

Если n велико из-за большого значения $\epsilon\mu$ или $\mu\sigma/\omega$, то угол преломления θ' всегда мал. Так как проводимость σ большинства металлов порядка 10^{17} CGSE, то величина $\mu\sigma/\omega$ велика даже при частотах порядка тысяч мегагерц и значения $\cos \theta'$ и $\sec \theta'$ в (13.3.6) отличаются от единицы меньше, чем на 0,01%. Поэтому аффинор нормального импеданса для металлической поверхности, перпендикулярной оси x , равен $\mathfrak{Z}_t \simeq (4\pi\mu/cn)(a_y a_y + a_z a_z)$. Используя приближенную формулу

$$n \simeq \sqrt{2\pi\mu\sigma/\omega} (1 + i), \quad \mu\sigma \gg \omega,$$

и обобщая форму аффинора для единичной нормали $\mathbf{n}$ к произвольно ориентированной поверхности, получим окончательно для аффинора нормального импеданса металлической поверхности

$$\mathfrak{Z}_t \simeq -\frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} [\mathbf{n} \times \mathfrak{F} \times \mathbf{n}] e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad (13.3.8)$$

где $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности (составляющая острый угол с направлением падения). В дальнейшем это выражение будет существенно использовано.

Оно особенно полезно в том случае, когда можно разложить наше решение на векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, определенные в § 13.1, из которых один касателен к поверхности, а другой имеет касательный к поверхности ротор. Решения вида $\mathbf{M}$ соответствуют $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$, касательным к поверхности, и $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$; решения типа $\mathbf{N}$ соответствуют $\mathbf{H}$, касательным к поверхности. Для решений типа $\mathbf{M}$ можно положить $\mathbf{E} = (i\omega/c) \mathbf{A} = a_z \mathbf{E}(x, y)$, если направление x выбрано по нормали к поверхности, а направление z — по направлению $\mathbf{E}$, ортогональному a_x . Поскольку $\text{div } \mathbf{E} = 0$, в рассматриваемой точке производная $\mathbf{E}$ по z должна быть равна нулю. Из уравнений (2.5.18) для монохроматического поля в вакууме

$$\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega} \left[\mathbf{a}_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} - \mathbf{a}_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \right],$$

так что нормальный импеданс равен

$$Z_t = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \cdot \frac{E}{\partial E / \partial x} \cdot (\mathbf{a}_y \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z).$$

Сравнивая это выражение с (13.3.8), заключаем, что если векторный потенциал $\mathbf{A}$ касателен к поверхности, то граничные условия на поверхности металла дают для решений типа М следующее соотношение между граничным значением векторного потенциала и нормальной производной (по внутренней нормали) его величины:

$$A = \frac{1}{ik} \sqrt{\frac{\mu \omega}{4\pi \sigma}} e^{-i\pi/4} \frac{\partial A}{\partial n}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (13.3.9)$$

Величины μ и σ берутся, конечно, для среды вне граничной поверхности ($x > 0$). Соответствующее отношение для решений типа N ($\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$ касателен) имеет вид

$$H = \frac{1}{ik} \sqrt{\frac{4\pi \sigma}{\mu \omega}} e^{i\pi/4} \frac{\partial H}{\partial n}.$$

Когда σ очень велико (как для металлов), A очень мало по сравнению с $\partial A / \partial n$, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$ параллельны поверхности, а $\partial \mathbf{H} / \partial n$ должно быть очень мало по сравнению с $\mathbf{H}$, если $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ параллельно поверхности.

Отражение упругих волн. В случае электромагнитного поля считается, что условие нулевой дивергенции ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) выполняется не только на границе, но и во всем пространстве. Поэтому надо задать лишь два граничных условия. Были выбраны касательные составляющие поля, что позволило выразить граничное условие через двумерный аффинор Z_t . Требования, накладываемые на упругое смещение, не полностью аналогичны, поэтому на граничной поверхности $x = 0$ надо задать три граничных условия. Часть условий выражается через импеданс вида, приведенного на стр. 752, но это не всегда приводит к упрощениям. Столь же удобно пользоваться сопряжением смещений и напряжений на граничной поверхности.

В качестве примера рассмотрим отражение плоской упругой волны от границы раздела двух сред, одна из которых ($x < 0$) характеризуется упругими постоянными λ_- и μ_- , другая ($x > 0$) — постоянными λ_+ и μ_+ . Если направление распространения падающей слева продольной волны (чистого сжатия) параллельно вектору $\mathbf{a}_i = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$, то угол отражения волны сжатия также равен θ , а угол отражения поперечной волны сдвига равен θ' . Соответствующие углы θ_+ и θ'_+ преломленных волн во второй среде связаны требованием, чтобы зависимость всех волн от y при $x = 0$ удовлетворяла обобщенному закону Снеллиуса

$$(1/c_-) \sin \theta = (1/c_+) \sin \theta' = (1/c_+) \sin \theta_+ = (1/c_+) \sin \theta'_+;$$

$$(c_-)^2 = (\lambda_- + 2\mu_-)/\rho_-; \quad (c_+)^2 = \mu_+/\rho_+.$$

Выражения для смещений и напряжений имеют вид

$$\mathbf{s} = \begin{cases} [\mathbf{a}_i e^{ik_- \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i} + \mathbf{a}'_i C e^{ik_- \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}'_i} + [\mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z] D e^{ik_- \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}''_i}] e^{-i\omega t} & \text{при } x < 0, \\ [A \mathbf{a}_r e^{ik_+ \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_r} + B [\mathbf{a}''_r \times \mathbf{a}_z] e^{ik_+ \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}''_r}] e^{-i\omega t} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

$$\mathfrak{T} = \begin{cases} ik_- \{ (\lambda_- \mathfrak{F} + 2\mu_- \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i) e^{ik_- \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i} + C (\lambda_- \mathfrak{F} + 2\mu_- \mathbf{a}'_i \mathbf{a}'_i) e^{ik_- \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}'_i} + \\ + D \mu_- (c_-^2/c_+^2) [\mathbf{a}''_i [\mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z] + [\mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z] \mathbf{a}''_i] e^{ik_- \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}''_i} \} e^{-i\omega t} & \text{при } x < 0, \\ ik_+ \{ A (\lambda_+ \mathfrak{F} + 2\mu_+ \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r) e^{ik_+ \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_r} + \\ + B \mu_+ (c_+^2/c_+^2) [\mathbf{a}''_r [\mathbf{a}''_r \times \mathbf{a}_z] + [\mathbf{a}''_r \times \mathbf{a}_z] \mathbf{a}''_r] e^{ik_+ \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}''_r} \} e^{-i\omega t} & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (13.3.10)$$

для падающей волны сжатия единичной амплитуды, где

$$k_c^- c_c^- = \omega \text{ и т. д.; } \mathbf{a}_i' = -\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta; \mathbf{a}_i'' = -\mathbf{i} \cos \theta' + \mathbf{j} \sin \theta'; \\ \mathbf{a}_r = \mathbf{i} \cos \theta_+ + \mathbf{j} \sin \theta_+; \mathbf{a}_r'' = \mathbf{i} \cos \theta'_+ + \mathbf{j} \sin \theta'_+.$$

Приравнивая выражения для x - и y -компонент вектора $\mathbf{s}$ и компонент $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ вектора напряжения на поверхности,

$$(1 - C) \cos \theta + D \sin \theta' = A \cos \theta_+ + B \sin \theta'_+ \text{ и т. д.,}$$

получим систему четырех уравнений, которую можно разрешить относительно A, B, C, D — амплитуд двух отраженных и двух преломленных волн, порожденных падающей волной единичной амплитуды.

Волны в волноводе. Следующей по сложности конфигурации границ является внутренность волновода прямоугольного поперечного сечения ширины a (в направлении оси x) и высоты b (в направлении оси y). Приняв вначале, что волновод является бесконечным в направлении z , исследуем волну, распространяющуюся в положительном направлении z .

В случае электромагнитных колебаний, когда среда внутри волновода в отношении распространения эквивалентна вакууму, можно применить граничные условия (13.3.9) и последующие, если волновод имеет металлические стенки. Начнем со случая идеальной проводимости, при котором для касательного вектора $\mathbf{E}$ на границе $\mathbf{A}_t$ равно 0, а для касательного вектора $\mathbf{H}$ на границе $\partial H / \partial n$ равно 0. Функция M не может быть касательной ко всей боковой поверхности волновода, но может быть ортогональна оси z , касательна к одной паре стенок волновода и ортогональна к другой. Этого вполне достаточно.

Соответственно назовем решения типа M *поперечно-электрическими волнами*, положив

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \frac{1}{ik} \text{rot} [\mathbf{a}_z \psi(x, y) e^{ik_z z - i\omega t}],$$

где ψ — решение двумерного скалярного уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \psi + k_t^2 \psi = 0$ и где $c^2(k_z^2 + k_t^2) = c^2 k^2 = \omega^2$. Граничные условия для ψ таковы, что касательные составляющие $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$ обращаются в нуль на боковой поверхности. Это имеет место, если $\partial \psi / \partial n = 0$ всюду на боковой поверхности; другими словами, для *поперечно-электрических волн*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \mathbf{M}_{mn} = \frac{1}{ik} \text{rot} \left[\mathbf{a}_z \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{ik_z z - i\omega t} \right] = \\ = \left[i\mathbf{a}_x \frac{n\pi}{bk} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) - \right. \\ \left. - i\mathbf{a}_y \frac{m\pi}{ak} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right] e^{ik_z z - i\omega t}; \\ k_z^2 = k^2 - k_{mn}^2; \quad k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2; \quad k = \frac{\omega}{c}; \\ \mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{M}_{mn}) = \left\{ -k_z \left[\mathbf{a}_x \frac{m\pi}{ak} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{a}_y \frac{n\pi}{bk} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right] - \right. \\ \left. - ik\mathbf{a}_z \left[\left(\frac{m\pi}{ak} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{bk} \right)^2 \right] \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right\} e^{ik_z z - i\omega t}. \quad (13.3.11)$$

Для волн, распространяющихся в противоположном направлении оси z , нужно просто изменить знак у k_z .

Имеет место дисперсия этих волн, причем фазовая скорость $c_z = \omega/k_z$ больше c ; в самом деле, если m и n достаточно велики, то c_z мнимое и соответствующая волна затухает по z . Сравнение с выражением (11.3.18) показывает, что для электромагнитных волн граничные условия не допускают чисто продольной волны ($m, n=0$), которая в скалярном (акустическом) случае соответствует распространению плоской волны вдоль оси волновода. В чисто продольной волне касательные составляющие напряженности электрического поля не могут одновременно обращаться в нуль на всех стенках волновода, так что все волны должны содержать определенное количество всевозможных отражений от боковых стенок. Это приводит к возникновению дисперсии. Все волны имеют критическую частоту $\omega_{mn} = ck_{mn}$, ниже которой колебания затухают, а не распространяются.

Отметим также, что, хотя $\mathbf{E}$ ортогонально оси волновода, $\mathbf{H}$ имеет составляющую вдоль оси z . Это не означает, что волна не является поперечной, так как дивергенция ее равна нулю и $\mathbf{H}$ всюду ортогонально $\mathbf{E}$. Волна является суперпозицией плоских волн, распространяющихся под различными углами к оси z , поэтому нет оснований ожидать, что и $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ортогональны $\mathbf{a}_z$.

Исследование поля и распределения плотностей токов и зарядов на стенках волновода для наинизшей гармоники $m=0, n=1$ при $b > a$ (отметим, что или m , или n может быть нулем, но оба индекса одновременно в нуль не обращаются) показывает, как распространяется эта волна. Поля имеют вид [берем действительные части в (13.3.11)]:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_x \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(k_z z - \omega t),$$

$$k_z^2 = (\omega/c)^2 - (\pi/b)^2,$$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{a}_y \frac{\pi k_z}{kb} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(k_z z - \omega t) + \mathbf{a}_z \frac{\pi^2}{kb^2} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(k_z z - \omega t)$$

для $\omega > \omega_{01} = \pi c/b$. Это показано на рис. 13.4 для значений $0 \leq k_z z - \omega t \leq \pi/2$, где электрические силовые линии изображены штрихами, а магнитные — сплошными линиями.

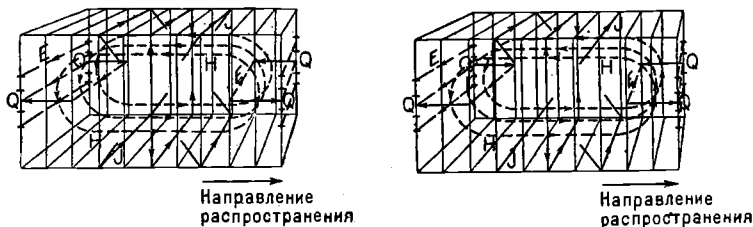


Рис. 13.4. Поля, поверхностные токи и заряды для наинизшей поперечно-электрической волны в прямоугольном волноводе.

Плотность зарядов Q на стенке $x=0$ равна $(1/4\pi)\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{E}|_{x=0}$; аналогичные выражения имеют место и на трех остальных стенках. Согласно рассуждениям, предшествовавшим выводу соотношения (3.4.24), плотность тока на стенке $x=0$ равна $(c/4\pi)[\mathbf{a}_x \times \mathbf{H}|_{x=0}]$. Поэтому при $x=0$ плотности поверхностных зарядов и токов равны

$$Q = -\frac{1}{4b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(k_z z - \omega t);$$

$$\mathbf{J} = -\mathbf{a}_z \frac{ck_z}{4bk} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(k_z z - \omega t) - \mathbf{a}_y \frac{c\pi}{4kb^2} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(k_z z - \omega t).$$

При $x = a$ знаки Q и J надо переменить на обратные. На стенках $y = 0$ и $y = b$ мы имеем $Q = 0$, а

$$J = a_x \frac{c\pi}{4kb^2} \sin(k_z z - \omega t).$$

При $k_z z - \omega t = 0$ две вертикальные стенки ($x = 0, a$) имеют максимальный заряд и напряженность электрического поля между ними имеет максимальное значение; направление тока на этих стенках совпадает с направлением распространения (осью z), так что вектор $\mathbf{H}$ вертикален. Вектор $\mathbf{S} = (c/4\pi) \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, равный $(\pi/4) a_z (k_z c/kb^2) \sin^2(\pi y/b)$, имеет максимальное значение, вдвое превосходящее его среднее значение, и направлен по оси z . Заряд равен нулю при $k_z z - \omega t = \pi/2$ (т. е. на четверть длины волны опережает нулевую фазу в пространстве, или на четверть периода по времени). При этом ток на горизонтальных стенках максимален; электрическое поле равно нулю, а магнитное направлено по оси z . Эта волна по существу представляет собой двукратное за период перемещение заряда с одной вертикальной стенки на другую, сопровождаемое токами и полями, вызываемыми потоком зарядов (также и вызывающими поток зарядов). Поперечно-электрические волны более высоких номеров соответствуют более сложным колебаниям поверхностных зарядов.

Выражения тока и электрического поля позволяют определить эквивалентный импеданс наинизшей волны. Полный ток, текущий в направлении z по стенке $x = 0$, при $z = 0$ равен

$$I = -\frac{ck_z}{2\pi k} e^{-i\omega t},$$

и средняя разность потенциалов между стенками $x = 0$ и $x = a$ равна

$$V = -2ae^{-i\omega t}.$$

Их отношение можно назвать импедансом наинизшей гармоники, а поделив на a , получим импеданс единицы ширины волновода

$$Z = \frac{4\pi k}{ck_z} = \frac{4\pi\omega}{cV\omega^2 - (\pi c/b)^2}.$$

Тем самым можно измерить импеданс aZ , возбуждая волновод током, заданным на стенках $x = 0$ и $x = a$ при $z = 0$.

Оказывается, что это значение импеданса, определенного просто как отношение падения потенциала (на единицу ширины) к полному току, совпадает с импедансом поля в направлении z , определенного выражением (3.4.28). Вектор $-c[\mathbf{a}_z \times \mathbf{H}] = -\mathbf{a}_x (\pi ck_z/kb) \sin(\pi y/b) e^{-i\omega t}$ эквивалентен току, и вектор $4\pi\mathbf{E}$ эквивалентен напряжению. Их отношение совпадает с приведенным выше. При этом по (3.4.23) импеданс волны (m, n) , определенной в (13.3.11), равен

$$Z_{mn} = \frac{4\pi k}{ck_z} = \frac{4\pi\omega}{cV\omega^2 - (\pi cm/a)^2 - (\pi cn/b)^2}. \quad (13.3.12)$$

Если $\omega > \omega_{mn}$, импеданс оказывается активным; при $\omega < \omega_{mn}$ — реактивным, соответствующим индуктивному реактансу.

Волны типа N можно выразить в виде (используя те же значения для k_{mn} и k_z , что и ранее)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \mathbf{N}_{mn} = \frac{1}{k^2} \text{rot rot} \left[\mathbf{a}_z \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{ik_z z - i\omega t} \right] = \\ = \left\{ \frac{ik_z}{k^2} \left[\frac{m\pi}{a} \mathbf{a}_x \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n\pi}{b} \mathbf{a}_y \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{k_{mn}^2}{k^2} \mathbf{a}_z \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \} e^{ik_z z - i\omega t}, \quad (13.3.13)$$

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{a}_x \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) - \right. \\ \left. - \mathbf{a}_y \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right] e^{ik_z z - i\omega t};$$

они называются *поперечно-магнитными волнами*. (Здесь также при перемене направления распространения на обратное надо изменить знак у k_z .) Наинизшая волна соответствует $n = m = 1$ (отметим, что для этого типа ни n , ни m не могут равняться нулю), как показано на рис. 13.5. Токи и заряды совершают продольные колебания, вектор $\mathbf{E}$ направлен от кольца положительных зарядов к кольцу отрицательных, а $\mathbf{H}$ образует поперечные петли в областях наибольшего поверхностного тока. Отметим,

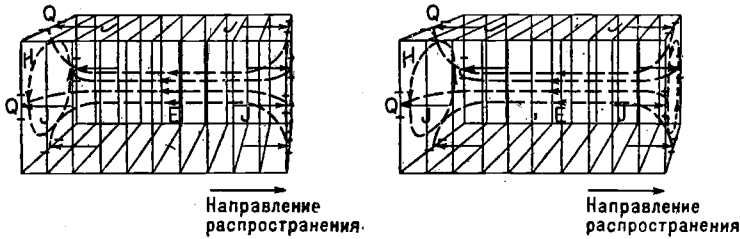


Рис. 13.5. Поля, поверхностные токи и заряды для наинизшей поперечно-магнитной волны в прямоугольном волноводе.

что ни одна из функций системы $\mathbf{M}$ не соответствует функциям системы $\mathbf{N}$. Кроме того, продольный импеданс этих волн, отношение между $4\pi\epsilon [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}]$ и $-\mathbf{H}$, в точности равен выражению (13.3.12).

Функция Грина. Для решения многих задач, связанных с практическим расчетом волноводов, нужно иметь простое выражение аффинорной функции Грина. Начнем с замечания, что системы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ можно записать в следующем простом виде:

$$\mathbf{M}_{mn} = \frac{1}{ik} \text{rot} [\mathbf{a}_z \phi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikct)] = \\ = \mathbf{B}_{mn}(x, y) \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikct),$$

$$\mathbf{N}_{mn} = \frac{1}{k^2} \text{rot rot} [\mathbf{a}_z \chi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikct)] = \\ = \mathbf{C}_{mn}(x, y) \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikct),$$

где

$$\mathbf{B}_{mn} = \frac{i}{k} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \phi_{mn}], \\ \mathbf{C}_{mn} = \frac{k_{mn}^2}{k^2} \mathbf{a}_z \chi_{mn} + i \frac{\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}}{k^2} \text{grad } \chi_{mn}$$

и где ϕ_{mn} и χ_{mn} — взаимно ортогональные скалярные собственные функции двумерного уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (k_{mn}^e)^2 \phi = 0$$

(собственное значение для χ есть k_{mn}^h , что равно k_{mn}^e в случае прямоугольного волновода, но отлично от k_{mn}^e в других случаях). Для прямоугольного

волновода

$$\psi_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \text{ и } \chi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

(на проводящей границе $\partial\psi/\partial n = \chi = 0$).

Кроме этого, имеется продольная система

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{mn} &= \frac{1}{ik} \text{grad} [\chi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - i k c t)] = \\ &= \mathbf{D}_{mn}(x, y) \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - i k c t), \\ \mathbf{D}_{mn} &= \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} \mathbf{a}_z \chi_{mn} - \frac{i}{k} \text{grad} \chi_{mn}, \end{aligned}$$

ортогональная системам $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Заметим, что пространственные части $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$ содержат различные линейные комбинации двух членов $\mathbf{a}_z \chi_{mn}$ и $\text{grad} \chi_{mn}$. Конечно, если не нужно разлагать решение на продольную и поперечную части, можно использовать $\mathbf{a}_z \chi_{mn}$ и $(1/ik) \text{grad} \chi_{mn}$, ортогональные системе $\mathbf{M}_{mn}$ и друг другу.

Предположим теперь, что надо решить уравнение

$$\nabla^2 \mathcal{G} + k^2 \mathcal{G} = -4\pi \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) e^{-i k c t} \mathfrak{F}$$

при соответствующих граничных условиях на стенках волновода и на бесконечности. Вначале можно принять, что полное разложение (включая и продольную часть) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) &= \sum_{mn} \{ [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}] \mathbf{F}_{mn}(\mathbf{r}_0, z) + \mathbf{a}_z \chi_{mn} \mathbf{G}_{mn}(\mathbf{r}_0, z) + \\ &+ \text{grad} \chi_{mn} \mathbf{H}_{mn}(\mathbf{r}_0, z) \} e^{-i k c t}. \end{aligned}$$

Подставив это разложение в уравнение для $\mathcal{G}$, умножив поочередно на $\{\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}\}$, $\mathbf{a}_z \chi_{mn}$ и $\text{grad} \chi_{mn}$ и проинтегрировав по x и y , получим выражение для $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$. Положим $\iint \chi_{mn}^2 dx dy = \Lambda_{mn}^h$ (для прямоугольного волновода эта величина равна $ab/\varepsilon_m \varepsilon_n$) и, согласно теореме Грина, получим

$$\begin{aligned} \iint |\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}|^2 dx dy &= \iint (\text{grad} \psi_{mn}) \cdot (\text{grad} \psi_{mn}) dx dy = \\ &= \oint \psi_{mn} \text{grad}_n \psi_{mn} dA - \iint \psi_{mn} \nabla^2 \psi_{mn} dx dy = k_{mn}^2 \Lambda_{mn}^e, \end{aligned}$$

где $\Lambda_{mn}^e = \iint \psi_{mn}^2 dx dy$ (для прямоугольного волновода это тоже $ab/\varepsilon_m \varepsilon_n$).

Например, мы найдем, что

$$\mathbf{F}_{mn} = \frac{4\pi}{k_{mn}^2 \Lambda_{mn}^e} [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}(x_0, y_0)] f_{mn}(z, z_0) e^{-i k c t},$$

где f удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + (k^2 - k_{mn}^2) f = -\delta(z - z_0)$$

и соответствующим граничным условиям. В рассматриваемом случае, когда волны распространяются в обе стороны от источника, получим

$$f_{mn} = \frac{-1}{2i \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}} \exp(i |z - z_0| \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}).$$

Аналогично

$$\mathbf{G}_{mn} = \frac{4\pi}{\Lambda_{mn}^h} \mathbf{a}_z \chi_{mn}(x_0, y_0) g_{mn}(z, z_0) e^{-i k c t},$$

где для уходящих волн g то же самое, что и f . (Если труба ограничена при заданной паре значений z , то g отличается от f , так как $\mathbf{G}$ направлено вдоль трубы, а $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$ — поперек.)

В конечном счете получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r} | k) = & 4\pi \sum_{m,n} \left\{ \frac{\mathbf{a}_z \mathbf{a}_z}{\Lambda_{mn}^h} \chi_{mn}(x_0, y_0) \chi_{mn}(x, y) g_{mn} + \right. \\ & + \frac{1}{k_{mn}^2 \Lambda_{mn}^e} [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}(x_0, y_0)] [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}(x, y)] f_{mn} + \\ & \left. + \frac{1}{k_{mn}^2 \Lambda_{mn}^h} [\text{grad} \chi_{mn}(x_0, y_0)] [\text{grad} \chi_{mn}(x, y)] f_{mn} \right\} e^{-ikct}. \quad (13.3.14) \end{aligned}$$

Эта функция Грина содержит и продольную и поперечную части, которые можно использовать для определения поперечных решений, как указано на стр. 723. Однако если желательно, чтобы $\mathfrak{G}$ содержала только поперечную часть, то надо перейти к векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ и опустить члены $\mathbf{D}$. Для разложения по $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ умножим обе части, например, на $\bar{\mathbf{B}}_{mn}$ и проинтегрируем по x и y , что определит соответствующие коэффициенты нового разложения. Окончательно можно записать

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) = & 4\pi \sum_{m,n} \left\{ \frac{(k/k_{mn}^e)^2}{\Lambda_{mn}^e} \bar{\mathbf{B}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{B}_{mn}(x, y) f_{mn} + \right. \\ & + \frac{(k/k_{mn}^h)^2}{\Lambda_{mn}^h} \left[\left(\frac{k_{mn}^h}{k} \right)^2 \mathbf{a}_z \chi_{mn}(x_0, y_0) g_{mn} - \right. \\ & - \frac{i}{k^2} \sqrt{k^2 - (k_{mn}^h)^2} \text{grad}_0 \chi_{mn}(x_0, y_0) f_{mn} \left. \right] \mathbf{C}_{mn}(x, y) + \\ & + \frac{1}{\Lambda_{mn}^h} \left[\frac{1}{k} \sqrt{k^2 - (k_{mn}^h)^2} \mathbf{a}_z \chi_{mn}(x_0, y_0) g_{mn} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{k} \text{grad}_0 \chi_{mn}(x_0, y_0) f_{mn} \right] \mathbf{D}_{mn}(x, y) \right\} e^{-ikct}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что это разложение удобно лишь при $f_{mn} = g_{mn}$.

Переходя к частному случаю бесконечного прямоугольного волновода, для которого

$$\begin{aligned} g_{mn} = f_{mn} = & \frac{i}{2\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}} \exp(i|z - z_0| \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}), \\ (k_{mn}^e)^2 = (k_{mn}^h)^2 = & k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2, \quad \Lambda_{mn}^e = \Lambda_{mn}^h = ab/\varepsilon_m \varepsilon_n, \end{aligned}$$

и выписывая лишь поперечную часть, получим окончательно

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) = & \frac{2\pi i k}{ab} \left\{ \sum_{k_{mn} < k} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}^2 \tau_{mn}} [\bar{\mathbf{B}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{B}_{mn}(x, y) + \right. \\ & + \bar{\mathbf{C}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{C}_{mn}(x, y)] e^{ik\tau_{mn}|z - z_0|} - \\ & - ik \sum_{k_{mn} > k} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}^2 \kappa_{mn}} [\bar{\mathbf{B}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{B}_{mn}(x, y) + \\ & \left. + \bar{\mathbf{C}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{C}_{mn}(x, y)] e^{-\kappa_{mn}|z - z_0|} \right\} e^{-ikct}, \quad (13.3.15) \end{aligned}$$

где $\tau_{mn}^2 = 1 - (k_{mn}/k)^2$ и $\kappa_{mn}^2 = k_{mn}^2 - k^2$ и где векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются коэффициентами при $\exp(ik_z z - i\omega t)$ в выражениях для $\mathbf{A}$ в формулах (13.3.11)

и (13.3.13) соответственно. Первый ряд в этом выражении содержит все члены, определяющие волны, распространяющиеся вдоль волновода; второй содержит все волны, быстро затухающие, поскольку они возбуждаются с частотой ниже критической. Как будет показано ниже, первый ряд дает активную часть волнового импеданса, второй ряд — реактивную. Так как $\mathcal{G}_i$ является симметричным аффинором, то можно поменять местами $\bar{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{B}$ и т. д. Для других граничных условий на концах волновода обычно лучше пользоваться выражением (13.3.14).

Возбуждение волновода током. Чтобы отчетливо представить себе, как используется эта функция Грина для решения практических задач, подсчитаем поле, возникающее в бесконечном прямоугольном волноводе с внутренними размерами a по оси x и b по оси y , возбуждаемом прямолинейным током I , направленным по прямой $z=0$, $y=b/2$. Так как ищется только поперечная часть поля, то воспользуемся равенством (13.1.52), где вместо $\mathcal{G}$, содержащей и продольную часть, взято $\mathcal{G}_i$. В рассматриваемом случае ($\mu=\varepsilon=1$) неоднородный вектор $\mathbf{Q}$ равен $\mathbf{Q}=(1/c)\mathbf{a}_x I \delta(y-b/2)\delta(z)$, где опущен временной множитель $e^{-i\omega t}$, поскольку решается уравнение Гельмгольца для пространственной части полного решения.

Единственной сложной частью вычислений является интегрирование по x_0 и y_0 различных векторных функций $\bar{\mathbf{B}}_{mn}(x_0, y_0)$ и $\bar{\mathbf{C}}_{mn}(x_0, y_0)$, умноженных на $\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^b \bar{\mathbf{B}}_{mn} \cdot \mathbf{Q} dy &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } m > 0 \text{ или } n = 2, 4, 6, \dots, \\ -i \frac{n\pi}{bkc} I (-1)^{(n-1)/2}, & \text{если } m = 0, n = 1, 3, 5, \dots; \end{cases} \\ \int_0^a dx \int_0^b \bar{\mathbf{C}}_{mn} \cdot \mathbf{Q} dy &= 0 \quad \text{для всех допустимых значений } m \text{ и } n. \end{aligned}$$

Однако если предположить, что ток течет по бесконечно тонкому проводу, то электрическое поле на проводе должно быть бесконечным (во всяком случае часть его, вызывающая реактанс). Будем считать, что ток течет по полоске ширины Δ , помещенной в центре волновода. Это соответствует «размазыванию» δ -функции по y . Отличие в интегралах при этом будет заключаться лишь в том, что интегралы от $\mathbf{B}$ для $m=0$ и $n=1, 3, 5, \dots$ дадут $-i(2I/\Delta kc)(-1)^{(n-1)/2} \sin(n\pi\Delta/2b)$, сводясь к $-i(n\pi I/bkc)(-1)^{(n-1)/2}$ для малых n . Для достаточно больших n эти интегралы отличаются от последнего выражения, причем так, что ряд сходится.

Теперь можно подсчитать интеграл от $\mathcal{G}_i \cdot \mathbf{Q}$ [поверхностный интеграл в выражении (13.1.52) равен нулю в силу граничных условий]. При частоте возбуждения, большей критической ($n=1$), но меньшей следующей ($n=3$), для $z > 0$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= i\mathbf{a}_x \frac{8\pi I}{abc} \frac{\sin(\pi y/b)}{\sqrt{k^2 - (\pi/b)^2}} \exp \left[i \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} z \right] + \\ &+ \mathbf{a}_x \frac{16I}{ac} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{\sin[\pi(2n+1)y/b]}{\sqrt{(\pi/b)^2(2n+1)^2 - k^2}} \sin \left[\frac{\pi\Delta}{2b} (2n+1) \right] \times \\ &\times \exp \left[-z \sqrt{\left[\frac{\pi}{b} (2n+1) \right]^2 - k^2} \right], \end{aligned}$$

где влияние конечной ширины Δ полосы включено в сумму ($n > 0$), но не в первый член. Напряженность электрического поля при $y = b/2$, $z = 0$ в центре провода тогда равна

$$E \simeq -a_x \frac{8\pi I \omega / abc}{\sqrt{\omega^2 - (\pi c/b)^2}} + a_x i \omega \frac{16Ib}{\pi a \Delta c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [(\pi \Delta / 2b)(2n+1)]}{(2n+1) \sqrt{(2n+1)^2 - (kb/\pi)^2}}.$$

Второй ряд сходится плохо, поэтому рекомендуется добавить и вычесть близкий к данному ряд, который можно просуммировать. При помощи аналитического продолжения (взяв вначале комплексное ζ в первой четверти, а затем переходя к малым вещественным значениям ζ) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n+1)\zeta}{(2n+1)^2} &= -\sin \zeta + \operatorname{Re} \left[\int_0^{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\eta(2n+1)} \frac{d\eta}{2n+1} \right] = \\ &= -\sin \zeta - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\zeta} \ln \left(\frac{1-e^{i\eta}}{1+e^{i\eta}} \right) d\eta \right] \simeq \frac{1}{2} \zeta \ln \left(\frac{2e^2}{\zeta} \right), \quad \zeta \ll 1. \end{aligned}$$

Поэтому падение потенциала вдоль провода — напряжение, которое надо приложить к проводу, чтобы создать ток, возбуждающий поле, — равно

$$V = -aE_x \simeq \frac{8\pi I \omega / bc}{\sqrt{\omega^2 - (\pi c/b)^2}} - i \omega \frac{4I}{c^2} \left[\ln \left(\frac{4b}{\pi e^2 \Delta} \right) + 2 \Sigma \right], \quad (13.3.16)$$

где

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2 - (kb/\pi)^2}} - \frac{1}{2n+1} \right] \simeq 0,0266 \left(\frac{\omega b}{\pi c} \right)^2, \quad kb \ll 3\pi,$$

является малым поправочным членом в окончательной формуле, дающей логарифмическое приближение ряда.

Отношение V/I представляет входной импеданс провода в волноводе для волн, уходящих в обе стороны в бесконечность, частота которых лежит между ω_{01} и ω_{03} . Если один или оба конца волновода закрыты, так что возникают отраженные волны, то первый член в (13.3.16) существенно изменяется, но реактивный член меняется очень слабо, если только провод не очень близок к концу волновода, так как волны, определяющие этот член, не распространяются далеко от провода. Первый член, деленный на I , конечно, определяет активное сопротивление, а второй член — реактанс, являющийся индуктивным, пока выражение в скобках положительно (т. е. если Δ достаточно мало). Вблизи $\omega = \omega_{01} = \pi c/b$ активное сопротивление велико и стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow \omega_{01}$. Для ω , меньших ω_{01} , импеданс является чисто реактивным и действительные волны, распространяющиеся по волноводу, отсутствуют. Отметим также, что активная часть V/I равна импедансу Z_{01} , умноженному на $2/b$, приведенному в (13.3.12) для гармоника (0,1). По первому активному члену R импеданса можно подсчитать энергию, излучаемую проводом, $P = \frac{1}{2} R I^2$.

Потери в стенках волновода. На неидеально проводящих стенках волновода касательная составляющая напряженности электрического поля не полностью обращается в нуль. При этом продольное волновое число k становится комплексным, что соответствует затуханию волн из-за поглощения энергии в стенках. Согласно (13.3.5) и (13.3.8), вектор $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ равен

касательной составляющей вектора $\mathbf{H}$, умноженной на $-\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma} e^{-i\pi/4}$ (малая величина). Поскольку множители $m\pi/a$ и $n\pi/b$ в $\mathbf{M}_{mn}$ и $\mathbf{N}_{mn}$ выбраны так, что $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ обращается в нуль на границе, их надо теперь так преобразовать, чтобы $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ было малой величиной, но не нулем. Это можно достичь, например, для системы $\mathbf{M}$, заменяя $m\pi x/a$ на $(\pi x/a)[m - (2\varphi_{mx}/\pi)] + \varphi_{mx} = \Omega_{mx}$, где φ_{mx} мало по сравнению с $\pi/2$. В этом случае множитель $\sin(m\pi x/a)$ в x -компоненте $\mathbf{M}_{mn}$ переходит в $\sin \varphi_{mx}$ при $x=0$ и $(-1)^{m-1} \sin \varphi_{mx}$ при $x=a$. (Мы молчаливо предположили, что проводимость всех стенок одна и та же, так что граничные условия на обеих параллельных стенках одинаковы.)

Тогда в случае поперечно-электрической волны касательная составляющая электрического вектора на стенке $x=0$ равна

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{x=0} = -a_z \frac{\pi}{a} \left[m - \frac{2\varphi_{mx}}{\pi} \right] \sin \varphi_{mx} \cos \Omega_{ny}$$

(где учтено, что $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль, в этом случае равная $-\mathbf{a}_x$). Однако в решении типа $\mathbf{M}_{mn}$ касательная составляющая магнитного поля имеет не только компоненту по x , но и компоненту по y , тем самым только поперечно-электрическая волна не удовлетворяет новым граничным условиям. Нужно добавить слабое поле типа $\mathbf{N}_{mn}$. Поэтому положим $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{mn} + \alpha_{mn} \mathbf{N}_{mn}$ и определим α , φ_{mx} и φ_{ny} , удовлетворяя граничным условиям на стенках волновода $x=0$ и $y=0$. Например, на стенке $x=0$

$$\begin{aligned} -\mathbf{a}_x \times \mathbf{E} &\simeq -a_z \left[\frac{m\pi}{a} - \alpha \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k} \right] \varphi_{mx} \cos \Omega_{ny} + \mathbf{a}_y \alpha \frac{ik_{mn}^2}{k} \varphi_{mx} \sin \Omega_{ny} = \\ &= -iZ \mathbf{H}_t = -a_z \frac{k_{mn}^2}{k} Z \cos \Omega_{ny} + \mathbf{a}_y i \left[\frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k} + \alpha \frac{m\pi}{a} \right] Z \sin \Omega_{ny}, \end{aligned}$$

где $Z = \sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma} e^{\pi i/4}$ и где принято, что φ и Z настолько малы, что можно пренебречь членами φ^2 , φZ и т. д.

Аналогичная система уравнений имеет место и для стенки $y=0$. При помощи этих уравнений можно определить поправочные коэффициенты φ_{mx} , φ_{ny} и α . При этом поля для малых Z не сильно отличаются от полей для $Z=0$, за исключением того, что имеется небольшая остаточная касательная составляющая поля $\mathbf{E}$ на боковой поверхности, пропорциональная $\mathbf{H}$. Это происходит из-за того, что нули функций $\sin \Omega_{mx}$ и т. д. не лежат точно на стенках волновода. Единственная область, где имеется заметное отличие от выражений для $Z=0$, это область у границ для поля $\mathbf{E}$. Закончив вычисления, мы найдем, что функции φ пропорциональны малой величине $Z = \sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma} (1+i)$ и что постоянная распространения k_z теперь имеет вид

$$\begin{aligned} k_z &= \left[k^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(m - \frac{2}{\pi} \varphi_{mx} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left(n - \frac{2}{\pi} \varphi_{ny} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq \\ &\simeq \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} + i \text{const} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}, \end{aligned}$$

где const определяется из решения уравнений для φ . При этом множитель у $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, зависящий от Z , имеет вид $e^{ik_z^0 z + \kappa z}$, где $(k_z^0)^2 = k^2 - k_{mn}^2$ и κ — малая величина, характеризующая затухание волны из-за потерь энергии в стенках и пропорциональная $\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}$.

Для определения κ в первом приближении можно предложить и более простой метод вместо утомительного решения уравнений для α и φ . Он основан на использовании уравнений (13.3.5), (13.3.8) и том обстоятель-

стве, что при потере энергии в стенках поток энергии вдоль волновода должен затухать. Полный поток энергии вдоль волновода, очевидно, определяется средним по времени значением интеграла от $S = c [\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}]/4\pi$ по поперечному сечению трубы. При потерях энергии в стенках и $\bar{\mathbf{E}}$ и $\mathbf{H}$ должны содержать множители вида $e^{-\alpha z}$, определяющие затухание, так что $S_{\text{ср.}} = S_0 e^{-2\alpha z}$ и потери энергии за секунду в стенках на единице длины волновода равны

$$2\alpha \iint S_{\text{ср.}} dA.$$

С точностью до первого порядка относительно малой величины $\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}$ потери энергии можно подсчитать следующим образом. Предположим, что значения $\mathbf{H}$ у стенки не меняются существенно при малых потерях энергии в стенках (приведенная выше формула для $-iZ\mathbf{H}_t$ подтверждает это), и тем самым можно пользоваться выражением для $\mathbf{H}$, полученным для идеальной проводимости, например выражениями (13.3.11) и (13.3.13). Поверхностный ток, порождающий (или порождаемый) $\mathbf{H}_t$ в таком случае на основании рассуждений, предшествовавших (3.4.23), равен $-c[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]/4\pi$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности, а $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля на поверхности. Если касательная составляющая электрического поля на поверхности или равна нулю, или находится не в фазе с $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$, то потери энергии в стенках отсутствуют, но если $-c[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \bar{\mathbf{E}}/4\pi$ имеет действительную часть, то эта действительная часть, проинтегрированная по периметру поперечного сечения волновода, должна быть равна потере энергии. Поскольку

$$-(c/4\pi)[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{n} (c/4\pi)[\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}],$$

легко видеть, что данное выражение соответствует составляющей потока энергии, направленной в стенку волновода. Поэтому

$$2\alpha \iint S_{\text{ср.}} dA = \text{Re} \oint ds \left[\frac{c}{4\pi} \mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \right] = \frac{c}{4\pi} \text{Re} \oint ds ([\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{H}_t),$$

где интеграл $\oint ds$ берется по периметру поперечного сечения, а интеграл $\iint dA$ — по полной площади поперечного сечения. При подсчете $S_{\text{ср.}}$ и поля $\mathbf{H}_t$ можно пользоваться полями для идеальной проводимости, но при определении $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ нужно брать поле для конечной проводимости. Однако выражения (13.3.5) и (13.3.8) позволяют выразить это поле через $\mathbf{H}_t$. На границе имеет место равенство $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma} e^{-i\pi/4} \mathbf{H}_t$, и, следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \frac{\oint ds |\mathbf{H}_t|^2}{|\text{Re} \iint dA \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H})|}. \quad (13.3.17)$$

Это соотношение точное, если поля строго удовлетворяют граничным условиям, и приближенное с точностью до членов первого порядка по $\sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma}$, если поля удовлетворяют идеальным граничным условиям.

С помощью этого соотношения подсчитаем теперь затухание электромагнитной волны, распространяющейся в волноводе произвольного поперечного сечения. К специальному случаю прямоугольного поперечного сечения мы вернемся позже. Как было показано ранее, поперечно-электрические волны можно получить из скалярных решений $\phi_{mn}(x, y)$

уравнения $\nabla^2 \phi_{mn} + k_{emn}^2 \phi_{mn} = 0$ при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \mathbf{M}_{mn} = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} [\mathbf{a}_z \phi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} - ikct)] = \\ &= -\frac{1}{ik} [\mathbf{a}_z \times \operatorname{grad} \phi_{mn}] \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} - ikct), \end{aligned} \quad (13.3.18)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik} [\mathbf{a}_z k_{emn}^2 \phi_{mn} + i \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} \operatorname{grad} \phi_{mn}] \exp[iz \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} - ikct],$$

где в случае идеальной проводимости $\partial \phi_{mn} / \partial n = 0$ на границе. Действительная часть произведения $\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}$ равна

$$-\frac{1}{k} \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} [\mathbf{a}_z \times \operatorname{grad} \phi_{mn}] \times \operatorname{grad} \phi_{mn} = \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} \mathbf{a}_z |\operatorname{grad} \phi_{mn}|^2$$

и направлена, как и следовало ожидать, по оси волновода. Используя теорему Грина и граничное условие $\partial \phi / \partial n = 0$, подсчитаем поверхностный интеграл

$$\operatorname{Re} \left[\iint dA \cdot [\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}] \right] = k_{emn}^2 \sqrt{1 - \frac{k_{emn}^2}{k^2}} \Lambda_{mn}^e,$$

где $\Lambda_{mn}^e = \iint |\phi_{mn}|^2 dA$ — нормирующий множитель для скалярных собственных функций ϕ_{mn} .

Квадрат касательной составляющей $\mathbf{H}$ на границе равен

$$|\mathbf{H}_t|^2 = \frac{k_{emn}^4}{k^2} |\phi_{mn}|^2 + \left[1 - \frac{k_{emn}^2}{k^2} \right] \left| \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial s} \right|^2,$$

где $\partial \phi / \partial s$ — касательная составляющая градиента ϕ на границе. Поэтому коэффициент затухания для поперечно-электрической волны с номером (m, n) равен

$$\chi_{emn} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu \omega}{4\pi\tau}} \frac{k_{emn}^2 \oint |\phi_{mn}|^2 ds + \left[\left(\frac{k}{k_{emn}} \right)^2 - 1 \right] \oint \left| \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial s} \right|^2 ds}{k \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} \Lambda_{mn}^e}. \quad (13.3.19)$$

Если частота возбуждения ниже критической для этой волны ($k < k_{emn}$), то $\sqrt{k^2 - k_{emn}^2} = i \sqrt{k_{emn}^2 - k^2}$; χ_{emn} является чисто мнимым и эта формула не имеет места. Однако гармоники с частотой ниже критической вообще не распространяются по волноводу, результат их поглощения в стенках незаметен, если только поглощение невелико.

Поэтому можно считать, что более правильная формула для $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получается при умножении выражения (13.3.18) на $e^{-z_{emn}^2}$, что в первом приближении воспроизводит затухание. Для поперечно-электрической волны с номером (m, n) энергия, переносимая вдоль трубы, равна

$$S_{mn}^e = \frac{c}{4\pi} k_{emn}^2 \sqrt{\left(1 - \frac{k_{emn}^2}{k^2} \right)^2} \Lambda_{mn}^e e^{-2z_{emn}^2}, \quad (13.3.20)$$

пока k больше чем k_{emn} .

В случае поперечно-магнитной волны используется другое скалярное решение $\chi_{mn}(x, y)$ двумерного уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \chi_{mn} + k_{hmn}^2 \chi_{mn} = 0$,

обращающееся в нуль на границе. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \mathbf{N}_{mn} = \frac{1}{k^2} \text{rot rot} [\mathbf{a}_z \chi_{mn} \exp i(z \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2} - kct)] = \\ &= \frac{1}{k^2} [\mathbf{a}_z k_{hmn}^2 \chi_{mn} + i \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2} \text{grad } \chi_{mn}] \exp i(z \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2} - kct), \\ \mathbf{H} &= -[\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] \exp i(z \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2} - kct). \end{aligned}$$

Теми же методами, что и в предыдущих случаях, найдем коэффициент затухания и энергию, переносимую поперечно-магнитной волной:

$$\begin{aligned} x_{hmn} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} \frac{\oint \left| \frac{\partial \chi_{mn}}{\partial n} \right|^2 ds}{k_{hmn} \sqrt{1 - (k_{hmn}/k)^2} \Lambda_{mn}^h}, \\ S_{mn}^h &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{k_{hmn}}{k} \right)^2} \Lambda_{mn}^h e^{-2x_{hmn}z}, \end{aligned} \quad (13.3.21)$$

где Λ_{mn}^h — нормирующий множитель для χ_{mn} , $\partial \chi_{mn} / \partial n$ — нормальная компонента градиента χ_{mn} на границе. Обе эти формулы справедливы лишь при $k > k_{hmn}$. Отметим, что для обеих волн затухание особенно велико при частотах, близких к критической, затем падает до минимума, а потом, при очень больших частотах, опять возрастает пропорционально квадратному корню из частоты. Это возрастание происходит из-за наличия множителя $\sqrt{\omega}$ в выражении для импеданса проводящей поверхности. Если σ само изменяется с частотой, то коэффициент затухания при больших частотах зависит от частоты, как $\sqrt{\omega/\sigma}$.

Применяя эти формулы к волнам в прямоугольном волноводе, определенным в (13.3.11) и (13.3.13), где

$$\psi_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad \chi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

для поперечно-электрической волны получим

$$x_{emn} = \frac{\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}}{k \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}} \left\{ \frac{\varepsilon_m}{a} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi k}{bk_{mn}} \right)^2 \right] + \frac{\varepsilon_n}{b} \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi k}{ak_{mn}} \right)^2 \right] \right\},$$

а для поперечно-магнитной волны

$$x_{hmn} = \frac{2\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}}{k \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{m\pi k}{ak_{mn}} \right)^2 + \frac{1}{b} \left(\frac{n\pi k}{bk_{mn}} \right)^2 \right\},$$

где

$$k_{emn}^2 = k_{hmn}^2 = k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2.$$

Отражение волн от конца волновода. Расчет отражения электромагнитных волн от преграды в конце волновода легче всего провести, используя понятие импеданса. Пусть преграда находится в плоскости $z=0$, так что падающая волна распространяется слева направо (из $z < 0$), а отраженная — справа налево. Потребуем, чтобы отношение $\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}$ к $\mathbf{H} - \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H})$ оставалось непрерывным при переходе через преграду. Если это отношение постоянно вдоль сечения трубы $z=0$, то волна данной симметрии (заданы значения m и n) отражается с сохранением симметрии; если же это отношение в поперечном сечении изменяется, то симметрия отраженной волны отличается от падающей.

Предположим сначала, что среда справа от преграды характеризуется диэлектрической постоянной ε и (или) магнитной проницаемостью μ , отлич-

ными от единицы, и (или) проводимостью, отличной от нуля. Тогда импеданс, вообще говоря, зависит от типа распространяющейся волны. Когда волна данного типа (заданные m и n) падает на плоскость $z=0$, часть волны, проходящая через преграду, должна зависеть от x и y , так же как и падающая волна (чтобы удовлетворить условиям при $z=0$), хотя ее зависимость от z может быть и другой. В среде ($z > 0$) векторный потенциал удовлетворяет уравнению $\text{rot rot } \mathbf{A} = k^2 \eta^2 \mathbf{A}$, где $\eta^2 = \mu \varepsilon + 4\pi i \mu \sigma / \omega$ и $k = \omega / c$. Поэтому выражения для различных гармоник, распространяющихся в среде направо, такие же, как и в (13.3.18) и (13.3.21), за исключением того, что корень $\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}$ всюду надо заменить на $\sqrt{k^2 \eta^2 - k_{mn}^2}$ и выражение для $\mathbf{H}$ поделить на μ .

Выражения для $\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}$, $\mathbf{H}_t$ и их отношение ζ в случае поперечно-электрической волны имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E} &= \text{grad } \phi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{emn}^2} - i k c t), \\ \mathbf{H}_t &= \frac{1}{\mu k} \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{emn}^2} \text{grad } \phi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{emn}^2} - i k c t), \\ \zeta_{emn} &= \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 - (k_{emn}/k)^2}}, \end{aligned} \quad (13.3.22)$$

и соответствующие выражения для поперечно-магнитных волн записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{k} \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{hmn}^2} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] \exp(iz \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{hmn}^2} - i k c t), \\ \mathbf{H}_t &= -\frac{1}{\mu} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] \exp(iz \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{hmn}^2} - i k c t), \\ \zeta_{hmn} &= \mu \sqrt{\eta^2 - \left(\frac{k_{hmn}}{k}\right)^2}. \end{aligned} \quad (13.3.23)$$

В открытой части волновода ($z < 0$) имеется падающая волна единичной амплитуды, заданная одной из функций $\mathbf{M}$ или $\mathbf{N}$, определенных в (13.3.18) или (13.3.21), и отраженная волна амплитуды R , также зависящая от (x, y) (за исключением того, что у $\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}$ всюду надо изменить знак). Выражения для $\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}$ и $\mathbf{H}_t$ при $z=0$ и для их отношения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}]_0 &= (1 + R) \text{grad } \phi_{mn} e^{-i k c t}, \\ (\mathbf{H}_t)_0 &= \sqrt{1 - \left(\frac{k_{emn}}{k}\right)^2} (1 - R) \text{grad } \phi_{mn} \cdot e^{-i k c t}, \\ \zeta &= \frac{1 + R}{1 - R} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_{emn}}{k}\right)^2}} \end{aligned}$$

для поперечно-электрических волн,

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}]_0 &= -(1 - R) \sqrt{1 - \left(\frac{k_{hmn}}{k}\right)^2} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] e^{-i k c t}, \\ (\mathbf{H}_t)_0 &= -(1 + R) [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] e^{-i k c t}, \\ \zeta &= \frac{1 - R}{1 + R} \sqrt{1 - \left(\frac{k_{hmn}}{k}\right)^2} \end{aligned}$$

для поперечно-магнитных волн. Отраженная амплитуда R для различных волн может быть получена из требования, чтобы ζ в этих послед-

них соотношениях равнялось соответствующему ζ в (13.3.22) и (13.3.23). В результате получим

$$R_{emn} = -\frac{\sqrt{\eta^2 - (k_{emn}/k)^2} - \mu \sqrt{1 - (k_{emn}/k)^2}}{\sqrt{\eta^2 - (k_{emn}/k)^2} + \mu \sqrt{1 - (k_{emn}/k)^2}}$$

для поперечно-электрических волн,

$$R_{hmn} = -\frac{\mu \sqrt{\eta^2 - (k_{hmn}/k)^2} - \sqrt{1 - (k_{hmn}/k)^2}}{\mu \sqrt{\eta^2 - (k_{hmn}/k)^2} + \sqrt{1 - (k_{hmn}/k)^2}} \quad (13.3.24)$$

для поперечно-магнитных волн, где $\eta^2 = \mu\varepsilon + 4\pi i\mu\sigma/\omega$ и μ , ε и σ соответствуют области $z > 0$. При $\mu = 1$ и $\eta = 1$ все R равны, конечно, нулю, так как в этом случае при $z = 0$ нет неоднородности, отражающей волны. При очень большом η величина R приблизительно равна единице; имеет место почти полное отражение. При η , несколько большем единицы, и k , весьма близком к его критическому значению k_{mn} , также имеет место значительное отражение. Конечно, формулы теряют силу при $k < k_{mn}$, поскольку колебания не распространяются при частоте ниже критической.

Влияние изменения размеров волновода. Тот же метод импеданса можно использовать для расчета отражения волн от сужения в волноводе. Пусть, например, при $z < 0$ имеется прямоугольный волновод с размерами поперечного сечения a и b , тогда как для $z > 0$ высота b_+ меньше b , ширина a остается той же, причем сопряжение симметричное. Если слева падает низшая гармоника M_{01}^- (по-прежнему считаем $b > a$), то волна, распространяющаяся по узкой части волновода ($z > 0$), представляет собой совокупность нескольких гармоник типа M_{0n}^+ , но если сужение незначительно, доминирующее значение будет иметь наинизшая гармоника для узкой трубы M_{01}^+ , характеризуемая импедансным отношением $\zeta_{e01}^* = 1/\sqrt{1 - (\pi/b_+k)^2}$ в поперечном сечении узкой части волновода.

Поэтому в первом приближении импедансное отношение при $z = 0$ для широкой части волновода ($z < 0$) равно

$$\zeta \approx \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq y < \frac{b}{2} - \frac{b_+}{2}, \\ 1/\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{b_+k}\right)^2} & \text{при } \frac{b}{2} - \frac{b_+}{2} < y < \frac{b}{2} + \frac{b_+}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{b}{2} + \frac{b_+}{2} < y \leq b, \end{cases}$$

где $b > b_+$ и $b > a$. Это соотношение, конечно, имеет место, когда падающая волна является наинизшей гармоникой и когда разность $b - b_+$ значительно меньше, чем b (т. е. когда сужение незначительно).

Даже когда падающая волна представляется наинизшей гармоникой, отраженная от стыка волна состоит не из одной гармоники, она содержит и некоторое число гармоник M_{0n} . Это необходимо для удовлетворения граничным условиям (не нужно включать гармоники M_{mn} для m , отличных от нуля, так как электрическое поле всюду направлено по оси x). Колебания в широкой части волновода ($z < 0$) определяются при этом выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \frac{1}{ik} \mathbf{E} = & -\frac{1}{ik} \left\{ \mathbf{a}_z \times \text{grad} \left[\cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] \exp \left[iz \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} - ikct \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathbf{a}_z \times \text{grad} \left[\cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right] \exp \left[-iz \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} - ikct \right] \right\}, \end{aligned}$$

где амплитуды B_n отраженных волн подсчитываются из условия сопряжения импедансов.

Коэффициенты B_n можно подсчитать, если известна зависимость H_t от x и y при $z=0$. В первом приближении можно принять, что наличие стыка меньше влияет на H_t , чем на E , и взять приближенное выражение для H_t в виде H_t падающей волны и наинизшей отраженной гармоники

$$H_t \simeq -a_y \frac{\pi}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kb}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) (1 - B_1) e^{-ikct}.$$

Следовательно, граничное условие для определения B_m имеет вид

$$\begin{aligned} a_z \times E &= -a_y \left\{ (1 + B_1) \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi y}{b} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} e^{-ikct} = \\ &= \zeta H_t \simeq \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq y < \frac{b}{2} - \frac{b_+}{2}, \\ a_y \frac{\pi}{b} \sqrt{\frac{1 - (\pi/kb)^2}{1 - (\pi/kb_+)^2}} \sin \frac{\pi y}{b} (1 - B_1) e^{-ikct} & \text{для открытой области,} \\ 0 & \text{для } \frac{b}{2} + \frac{b_+}{2} < y \leq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Умножая обе части на $\sin(\pi m y/b)$ и интегрируя по y , получаем значения B_m . Оказывается, что $B_{2n} = 0$ и

$$\begin{aligned} B_1 &\simeq -\frac{\tau_1 S_+ - \tau_+}{\tau_1 S_+ + \tau_+}, \\ B_{2n+1} &\simeq \frac{2\tau_1/\pi n}{\tau_+ + \tau_1 S_+} \cdot \left\{ \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b_+}{b} + \frac{1}{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi b_+}{b} \right\}; \\ \tau_1 &= \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kb}\right)^2}, \quad \tau_+ = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kb_+}\right)^2}, \\ S_+ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi b_+}{b}. \end{aligned}$$

Если b_+ близко к b , так что изменение высоты мало, то τ_+ близко к τ_1 , S_+ почти равно единице и амплитуда наинизшей отраженной гармоники мала. Если k меньше π/b_+ (k должно быть больше π/b , чтобы волны распространялись в широкой части волновода), то энергия в узкую часть волновода не передается, вся энергия отражается (τ_+ в этом случае мнимое).

Этот расчет можно усовершенствовать, подсчитывая по найденной волне поле в узкой части волновода, а по нему вычисляя новое, несколько более точное значение магнитного поля в области стыка. Отсюда можно опять определить ζH_t и получить лучшее выражение для E и т. д. При этом оказывается, что B_1 имеет небольшую мнимую часть, указывающую на наличие определенной реактивной части в полном импедансе стыка.

Если при $z=0$ меняются горизонтальные, а не вертикальные размеры трубы волновода, так что фланец появляется на сторонах, несущих свободные заряды, а не на сторонах, параллельных электрическому полю, то искажение электрического поля несколько больше, чем в предыдущем случае. При этом уже нельзя предполагать, что колебания в узкой части трубы почти полностью определяются наинизшей гармоникой. Свободные заряды стремятся сконцентрироваться в углах, и электрическое поле уже зависит от x и возрастает у фланца при $x = a/2 - a_+/2$ и $a/2 + a_+/2$. Исследование статического поля у такого фланца (см. § 10.2) показывает,

что касательное электрическое поле при $z=0$ имеет общую форму

$$E_t = ikA_t \simeq ika_x A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \left\{ 1 + 2 \left[\frac{(a/a_+)^2 - 1}{1 - (2\xi/a_+)^2} \right]^{1/3} \right\} e^{-ikct},$$

$$-a_+/2 < \xi < a_+/2, \quad (13.3.25)$$

где $\xi = x - a/2$. Чем больше фланец, тем больше a/a_+ и все более выраженной становится особенность при $\xi = \pm a_+/2$. Это соответствует колебаниям в узкой части волновода ($z > 0$), имеющим вид

$$A = \frac{E}{ik} = \sum_{m=1}^{\infty} (B_m^+ M_{2m,1}^+ + C_m^+ N_{2m,1}^+) + B_0 M_{01},$$

где функции M^+ , N^+ соответствуют области $z > 0$ (с $x - a/2 + a_+/2$ вместо x и a_+ вместо a в формулах (13.3.11) и (13.3.13).

Коэффициенты B^+ и C^+ вычисляются приравниванием E_t при $z=0$ соответствующему ряду. Например, умножая обе части на $\bar{M}_{2m,1}^+$ и интегрируя по поперечному сечению узкой трубы, мы получим (см. стр. 420)

$$B_m^+ = -i(-1)^m \frac{\pi k \varepsilon_m}{b(k_{2m,1}^+)^2} A_0 \left[\frac{\pi \Gamma(2/3)}{(\pi m/2)^{1/6}} J_{1/6}(\pi m) \right] \left[\left(\frac{a}{a_+} \right)^2 - 1 \right]^{1/3}, \quad m > 0,$$

где $(k_{2m,1}^+)^2 = (2\pi m/a_+)^2 + (\pi/b)^2$ и где использовано разложение

$$\frac{1}{[1 - (2\xi/a_+)^2]^{1/3}} = \frac{a_+}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} \frac{\pi \Gamma(2/3)}{(\pi m a_+/2a)^{1/6}} J_{1/6}\left(\frac{\pi m a_+}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi m \xi}{a}\right)$$

в области $-a_+/2 < \xi < a_+/2$. Отметим, что коэффициент в скобках при $m=0$ равен $\sqrt{\pi \Gamma(2/3)}/\Gamma(7/6)$. Коэффициенты C для поперечно-магнитных волн можно подсчитать тем же способом, умножая на поперечную часть $N_{2m,1}$ обе части исходного соотношения и затем интегрируя результат.

Подсчитаем затем значение H_t при $z=0$, чтобы получить значение импеданса в сечении стыка ($z=0$). При $\xi=0$ и $z>0$ имеем

$$H_t = a_y i A_0 \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \times$$

$$\times \left[1 + \Omega \frac{\sqrt{\pi \Gamma(2/3)}}{2\Gamma(7/6)} \right] \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp \left[iz \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} - ikct \right] +$$

$$+ a_y \Omega A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^2 - (\pi/b)^2}{\sqrt{(2\pi m/a_+)^2 + (\pi/b)^2 - k^2}} \frac{\sqrt{\pi \Gamma(2/3)}}{(\pi m/2)^{1/6}} J_{1/6}(\pi m) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp \left[-z \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{a_+}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 - k^2} - ikct \right],$$

где $\Omega = 2[(a/a_+)^2 - 1]^{1/3}$ и где принято, что $(\pi/b)^2 < k^2 < (\pi/b)^2 + (2\pi/a)^2$. При $a < b$ ряд упрощается, так как он приблизительно равен

$$a_y B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{\sqrt{\pi \Gamma(2/3)}}{(\pi m/2)^{1/6}} J_{1/6}(\pi m) \right] \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-(2\pi m z/a_+)} e^{-ikct} =$$

$$= a_y B_0 \int_0^{\pi} \sin^{1/3} \theta d\theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-i\pi m \cos \theta - (2\pi m z/a_+)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-ikct} =$$

$$= -a_y B_0 \left[\int_0^{\pi} \sin^{1/3} \theta d\theta \ln(1 - e^{-i\pi \cos \theta - 2\pi z/a_+}) \right] \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-ikct},$$

где $B_0 = (a_+/2\pi) [k^2 - (\pi/b)^2] \Omega A_0$. Теперь положим $z=0$ (аналитическое продолжение) и покажем, что интеграл в скобках равен

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^{1/3} \theta d\theta \ln \left[2i \sin \left(\frac{1}{2} \pi \cos \theta \right) \right] &\simeq \\ &\simeq \ln 4 \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} \theta d\theta + 2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \ln \left[\sin \left(\frac{1}{2} \pi \cos \theta \right) \right] = \\ &= \sqrt{\pi} \ln 2 \cdot \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \varphi) d\varphi = \\ &= \ln 2 \cdot \left[\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)} - 2 \right] = 0,40696, \end{aligned}$$

так что для данного приближения адмитанс $1/\zeta = \mathbf{H}_t / [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}]$ в центре трубы равен

$$\frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{bk} \right)^2} \left\{ 1 + \frac{\Omega}{1 + \Omega} \left[0,2936 + 0,06477i (a_+ k) \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{bk} \right)^2} \right] \right\}.$$

Следующим шагом добьемся, чтобы касательное электрическое поле для $z < 0$ удовлетворяло условиям при $z=0$. Имеется падающая волна типа M_{01} и целая последовательность отраженных волн типов $M_{2m,1}^-$ и $N_{2m,1}^-$, где M^- и N^- получены по формулам (13.3.11) и (13.3.13), в которых k_z заменено на $-k_z$. Легко видеть, что на границе поведение касательной составляющей выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{M}_{01} + \left[B \frac{a_+}{a} - 1 + 1,2936 B \Omega \frac{a_+}{a} \right] \mathbf{M}_{01} + \\ + B \frac{\pi^2 a_+}{b^2 a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\Omega \sqrt{\pi} \Gamma(2/3)}{(\pi m a_+ / 2a)^{1/6}} J_{1/6} \left(\frac{m \pi a_+}{a} \right) + \frac{2a}{m \pi a_+} \sin \left(\frac{m \pi a_+}{a} \right) \right] \times \\ \times \frac{(-1)^m}{k_{2m,1}^2} \left[\mathbf{M}_{2m,1}^- + \frac{2mb/a}{\sqrt{k^2 - k_{2m,1}^2}} \mathbf{N}_{2m,1}^- \right] \end{aligned}$$

определяется формулой (13.3.25) (с $A_0 = iB\pi/bk$ при $z=0$) для $a/2 - a_+/2 < x < a/2 + a_+/2$. Касательные составляющие $\mathbf{A}$ на фланцах $0 < x < a/2 - a_+/2$ и $a/2 + a_+/2 < x < a$ равны нулю. Чтобы найти значение B , подсчитаем $\mathbf{H}_t$ при $z=0$ и приравняем его адмитансу в центре трубы. Утомительные алгебраические вычисления в конечном счете дают значение отраженной амплитуды

$$R = -1 + B \frac{a_+}{a} + 1,2936 B \Omega \frac{a_+}{a}$$

наинизшей гармоники в виде

$$R = - \frac{(a - a_+) (1 + 1,2936 \Omega) + i (k a a_+ \Omega G / \pi) \sqrt{1 - (\pi/kb)^2}}{(a + a_+) (1 + 1,2936 \Omega) + i (k a a_+ \Omega G / \pi) \sqrt{1 - (\pi/kb)^2}}, \quad (13.3.26)$$

где

$$G = \left[1,5872 + \frac{1 + \Omega}{\Omega} \ln \left(\frac{a_+}{a} \right) \right] \ln 2$$

и

$$\Omega = 2 \left[\left(\frac{a}{a_+} \right)^2 - 1 \right]^{1/3}.$$

Конечно, при $a_+ = a$ отражение отсутствует. Если ширина a_+ узкой части волновода очень мала, R близко к -1 .

Отражение от штыря в волноводе. В качестве другого примера рассмотрим отражение от непостоянного по поперечному сечению препятствия. Пусть в прямоугольном волноводе с $b > a$ на металлический штырь ширины Δ с центральной линией $y = b/2$, $z = 0$ (см. стр. 761) падает волна наинизшего типа M_{01} . Частота возбуждения заключена между низшей критической ω_{01} и следующей за ней критической частотой. Падающая волна имеет вид

$$A_0 = \frac{1}{ik} E_0 = ia_x \frac{\pi}{bk} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp\left[iz \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} - ikct\right],$$

и результирующее электрическое поле в центре штыря было бы равно

$$E_0 = -a_x \frac{\pi}{b} e^{-ikct},$$

если имелась бы только падающая волна. В идеально проводящем штыре наведется ток, создающий напряжение, компенсирующее напряжение в падающей волне на поверхности штыря. Если сопротивление единицы длины штыря равно R , то наведенный ток таков, что произведение $R \cdot I$ равно разности между падающим и наведенным полями.

Согласно (13.3.16), электрическое поле в центре штыря, создаваемое током I , равно

$$E_i = -a_x \frac{8\pi I}{abc} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}} - i\omega \frac{b}{2\pi c} \left[\ln\left(\frac{4b}{\pi e^2 \Delta}\right) + 2 \sum \right] \right\}.$$

Поскольку $IR = E_0 + E_i$, мы получаем соотношение, определяющее I и E_i :

$$I = \frac{-(ac/8) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}}{1 + (abc/8\pi) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2} (R - i\omega L)},$$

где $L = (4/ac^2) [\ln(4b/\pi e^2 \Delta) + 2 \sum]$ — эффективная индуктивность провода. Этот наведенный ток создает волну [определяемую первым членом в (13.3.15)], частично компенсирующую падающую волну в области ($z > 0$) за штырем, и порождает местное искажение поля [определяемое вторым членом в (13.3.15)], которое не распространяется по трубе. На достаточно больших расстояниях от штыря, так что можно пренебречь местным искажением, поле имеет вид

$$A = \begin{cases} \frac{(R - i\omega L) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}}{(8\pi/abc) + (R - i\omega L) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}} A_0 & \text{при } z \gg b, \\ A_0 - \frac{A_0 \exp[-2iz \sqrt{k^2 - (\pi/b)^2}]}{1 + (abc/8\pi) (R - i\omega L) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}} & \text{при } z \ll -b, \end{cases} \quad (13.3.27)$$

где

$$A_0 = (i\pi/bk) a_x \sin(\pi y/b) \exp[iz \sqrt{k^2 - (\pi/b)^2} - ikct] -$$

падающая волна. В области $z < 0$, кроме этого, имеется отраженная волна, находящаяся несколько не в фазе с падающей волной (если только L не равно нулю). Штырь действует так, как будто его импеданс равен $R - i\omega L$. Взаимодействие штыря с волной в волноводе определяется константой связи $8\pi/abc$.

Можно привести много других конкретных расчетов для определения полей и коэффициентов отражения в волноводах различной формы и конфигурации. Читатель, интересующийся другими примерами, может найти их в специальной литературе по этому вопросу.

Упругие волны в брус. Волны, распространяющиеся по брусу из упругого материала постоянного поперечного сечения (в плоскости x, y), имеют в основном тот же вид, что и волны, определенные на стр. 759, и электромагнитные волны в волноводе. Имеется продольная волна, соответствующая скорости распространения $c_c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ в неограниченном пространстве,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{mn} &= \frac{1}{ik_c} \text{grad} [\varphi_{mn}(x, y) e^{ikz}] e^{-i\omega t} = \\ &= \left[\frac{1}{ik_c} \text{grad} \varphi_{mn} + \frac{k}{k_c} \mathbf{a}_z \varphi_{mn} \right] e^{ikz - i\omega t}, \end{aligned} \quad (13.3.28)$$

где $k_c^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu)$ и φ_{mn} — решение скалярного уравнения $\nabla^2 \varphi_{mn} + \alpha_{1mn}^2 \varphi_{mn} = 0$ (и $k^2 = k_c^2 - \alpha_{1mn}^2$), удовлетворяющее соответствующим граничным условиям на контуре поперечного сечения.

Отметим, что скорость распространения волн вдоль бруса ω/k , вообще говоря, не равна $c_c = \omega/k_c$. Обычно в силу граничных условий φ_{mn} отлично от постоянной, следовательно, α_{1mn} отлично от нуля, и тем самым скорость вдоль стержня отлична от c_c . Лишь в том случае, когда из граничных условий следует, что смещение s касательно к границе, φ может быть постоянной. При этом колебания являются чисто продольными. В большинстве же случаев граничные условия не удовлетворяются только продольной волной; надо добавить еще и поперечную волну. Так же, как и в случае отражения от плоскости (рассмотренного на стр. 750—751), волна сжатия, отражаясь от боковой поверхности бруса, при своем распространении порождает и волну сдвига и наоборот.

Две поперечные волны имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mn} &= \frac{1}{ik_s} \text{rot} [\mathbf{a}_z \psi_{mn}(x, y) e^{ikz}] e^{-i\omega t} = \\ &= - \frac{1}{ik_s} [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}] e^{ikz - i\omega t}, \\ \mathbf{N}_{mn} &= \frac{1}{k_s^2} \text{rot rot} [\mathbf{a}_z \chi_{mn}(x, y) e^{ikz}] e^{-i\omega t} = \\ &= \left[\frac{ik}{k_s^2} \text{grad} \chi_{mn} + \frac{\alpha_{3mn}^2}{k_s^2} \mathbf{a}_z \chi_{mn} \right] e^{ikz - i\omega t}, \end{aligned} \quad (13.3.29)$$

где $k_s^2 = \rho\omega^2/\mu$, а χ, ψ — решения уравнений

$$\nabla^2 \chi_{mn} + \alpha_{3mn}^2 \chi_{mn} = 0 \quad (k^2 = k_s^2 - \alpha_{3mn}^2)$$

и

$$\nabla^2 \psi_{mn} + \alpha_{2mn}^2 \psi_{mn} = 0 \quad (k^2 = k_s^2 - \alpha_{2mn}^2),$$

удовлетворяющие заданным граничным условиям на контуре поперечного сечения. Волны типа **М** являются волнами кручения, вызывающими движение, ортогональное оси z . Волны типа **Н** в комбинации с волнами типа **Л** дают волны растяжения вдоль стержня.

Пусть выбраны две ортогональные криволинейные координаты ξ_1 и ξ_2 вместо x и y , такие, что $\xi_1 = X$ является границей поперечного сечения, а ξ_1, ξ_2, z образуют правую цилиндрическую координатную систему (например, круговые или эллиптические цилиндрические координаты). В этих координатах с единичными векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_z$ и коэффициентами Ламе

h_1 , h_2 и 1 три типа волн имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left[-\frac{i\mathbf{a}_1}{k_s h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + \frac{i\mathbf{a}_2}{k_s h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] e^{ikz-i\omega t}, \\ \mathbf{N} &= \left[\frac{ika_1}{k_s^2 h_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} + \frac{ika_2}{k_s^2 h_2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} + \frac{k_s^2 - k^2}{k_s^2} \mathbf{a}_z \chi \right] e^{ikz-i\omega t}, \\ \mathbf{L} &= \left[-\frac{i\mathbf{a}_1}{k_c h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} - \frac{i\mathbf{a}_2}{k_c h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} + \frac{k}{k_c} \mathbf{a}_z \varphi \right] e^{ikz-i\omega t}. \end{aligned} \quad (13.3.30)$$

Если граничное условие заключается в задании смещений, то этого вполне достаточно для определения k для заданной волны. Часто удается выбрать ψ так, что граничные условия удовлетворяются чистой волной кручения. Например, в круговых цилиндрических координатах r , φ , z для $s=0$ при $r=a$ (как будет, скажем, для резинового заполнения жесткого полого цилиндра) можно положить $\psi = J_0(ar)$ независимо от φ ($=\xi_2$) и затем выбрать α так, что $dJ_0/dr=0$ при $r=a$. С другой стороны, обычно нельзя удовлетворить таким граничным условиям двумя другими типами волн, если только не используется комбинация $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$. Так как k одно и то же для $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$, то при использовании их как составляющих одной волны мы получим соотношение между α_{1mn} и α_{3mn} , которое вместе с граничными условиями служит для определения k .

Однако в большинстве интересных случаев граничные условия заключаются в задании граничного напряжения $\mathfrak{F} \cdot \mathbf{a}_1$ при $\xi_1 = X$, где $\mathfrak{F}$ — аффинор напряжений $\lambda \mathfrak{F} \operatorname{div} \mathbf{s} + \mu (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla)$. Следовательно, нужны выражения аффинора напряжений для волн всех типов. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \text{для } \mathbf{M} \quad \mathfrak{F} &= \left\{ -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{2i\mu}{k_s} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] + \right. \\ &+ \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \frac{2i\mu}{k_s} \left[\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right) - \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right] + \\ &+ (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) \frac{i\mu}{k_s} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right) - \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right) \right] + \\ &+ (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_z + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_1) \frac{\mu k}{k_s h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} - (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_z + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_2) \frac{\mu k}{k_s h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \left. \right\} e^{ikz-i\omega t}, \\ \text{для } \mathbf{N} \quad \mathfrak{F} &= \left\{ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{2ik\mu}{k_s^2} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} \right] + \right. \\ &+ \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \frac{2ik\mu}{k_s^2} \left[\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} \right] + \\ &+ \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z 2ik\mu \left(1 - \frac{k^2}{k_s^2} \right) \chi + \\ &+ (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) \frac{ik\mu}{k_s^2} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} \right) \right] + \\ &+ \mu \frac{k_s^2 - 2k^2}{k_s^2} [\mathbf{a}_z (\operatorname{grad} \chi) + (\operatorname{grad} \chi) \mathbf{a}_z] \left. \right\} e^{ikz-i\omega t}, \\ \text{для } \mathbf{L} \quad \mathfrak{F} &= \left\{ -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{2i\mu}{k_c} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right] - \right. \\ &- \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \frac{2i\mu}{k_c} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right] + \\ &+ \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z \frac{2i\mu k^2}{k_c} \varphi + \mathfrak{F} i \lambda k_c \varphi - \\ &- (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) \frac{i\mu}{k_c} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right) \right] + \\ &+ 2\mu \frac{k}{k_c} [\mathbf{a}_z \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \varphi \mathbf{a}_z] \left. \right\} e^{ikz-i\omega t}. \end{aligned} \quad (13.3.31)$$

Для большинства цилиндрических координат из этих соотношений можно получить немного, становится лишь ясной сложность удовлетворения граничным условиям. Можно рассчитать некоторые типы колебаний в случае круговых цилиндрических координат. Например, для симметричной относительно оси волны имеем

$$\varphi = J_0(r \sqrt{k_c^2 - k^2}), \quad \phi \quad \text{или} \quad \chi = J_0(r \sqrt{k_s^2 - k^2}).$$

Для волны кручения напряжение на границе стержня ($r = a$) равно

$$(\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a} = \mathbf{a}_\varphi \frac{i\mu}{k_s} (k_s^2 - k^2) J_2(a \sqrt{k_s^2 - k^2}) e^{ikz - i\omega t}, \quad (13.3.32)$$

и для того, чтобы эта граница была свободной (напряжение на ней равно нулю), $a \sqrt{k_s^2 - k^2}$ должно быть одним из корней $\pi \beta_{2n}$ уравнения $J_2(\pi \beta_{2n}) = 0$. Другими словами, продольное волновое число k является следующей функцией от ω и n :

$$k = \left[\frac{\rho \omega^2}{\mu} - \left(\frac{\pi \beta_{2n}}{a} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad n\text{-я волна кручения}, \quad (13.3.33)$$

пока ω больше критического значения $(\pi \beta_{2n}/a) \sqrt{\mu/\rho}$.

Конечно, наинизшая гармоника является предельной при $\beta \rightarrow 0$, причем $\phi \rightarrow -r^2/2$ и $\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_r = 0$ для всех r , хотя $\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_z$ не равно нулю. В этом случае k как раз равно k_s ; скорость распространения этой волны в точности равна скорости распространения волны сдвига в неограниченном пространстве.

С другой стороны, наинизшей волной удлинения является комбинация L и N. Для волн типа N при $\chi = J_0(r \sqrt{k_s^2 - k^2})$ вектор напряжения на поверхности $r = a$ равен

$$\left\{ -\mathbf{a}_r \frac{ik\mu}{k_s^2} (k_s^2 - k^2) [J_0(\beta_s) - J_2(\beta_s)] + \mathbf{a}_z \frac{\mu}{k_s^2} (2k^2 - k_s^2) \sqrt{k_s^2 - k^2} J_1(\beta_s) \right\} e^{ikz - i\omega t},$$

где $\beta_s = a \sqrt{k_s^2 - k^2}$, в то время как для L при $\varphi = J_0(r \sqrt{k_c^2 - k^2})$ он равен

$$\left\{ \mathbf{a}_r \frac{i\mu}{k_c} (k_c^2 - k^2) [J_0(\beta_c) - J_2(\beta_c)] + \mathbf{a}_r i \lambda k_c J_0(\beta_c) - \mathbf{a}_z \frac{2\mu k}{k_c} \sqrt{k_c^2 - k^2} J_1(\beta_c) \right\} e^{ikz - i\omega t},$$

где $\beta_c = a \sqrt{k_c^2 - k^2}$. Нужная комбинация, исключаяющая z-составляющую вектора напряжения при $r = a$, имеет вид

$$\frac{ak_c}{2\mu k} \frac{\mathbf{L}}{\beta_c J_1(\beta_c)} + \frac{ak_s^2}{\mu (2k^2 - k_s^2)} \frac{\mathbf{N}}{\beta_s J_1(\beta_s)} = \mathbf{a}_z \left[\frac{a}{2\mu} \frac{J_0(\beta_c r/a)}{\beta_c J_1(\beta_c)} - \frac{a (k^2 - k_s^2)}{\mu (2k^2 - k_s^2)} \frac{J_0(\beta_s r/a)}{\beta_s J_1(\beta_s)} \right] + i \mathbf{a}_r \left[\frac{1}{2\mu k} \frac{J_1(\beta_c r/a)}{J_1(\beta_c)} - \frac{k}{\mu (2k^2 - k_s^2)} \frac{J_1(\beta_s r/a)}{J_1(\beta_s)} \right]. \quad (13.3.34)$$

Для бруса с диаметром, значительно меньшим длины волны $2\pi c_s/\omega$, или для частот, намного меньших c_s , деленной на диаметр бруса (эти две фразы эквивалентны), уравнение, соответствующее требованию обращения в нуль r -компоненты поверхностного напряжения, из которого определяются допустимые значения k , значительно упрощается. В этом случае ak_s и ak_c значительно меньше единицы. Для наинизшей гармоники ak также мало, так что β_c настолько мало, что можно пренебречь его степенями выше первой. Например, $J_1(\beta) \simeq \beta/2$ и $J_0(\beta) - J_2(\beta) \simeq 1$ и т. д.

Тогда в первом приближении выражение вектора напряжения на поверхности $r = a$ для комбинации, определяемой формулой (13.3.34), имеет вид

$$\mathbf{a}_r \frac{i}{2ak} \left[1 + \frac{\lambda k_c^2}{\mu (k_c^2 - k^2)} - \frac{k^2}{2k^2 - k_s^2} \right].$$

Этот вектор, конечно, имеет только r -компоненту, так как соответствующая комбинация была получена исключением напряжений по z . Чтобы это выражение равнялось нулю в первом порядке по β_c и β_s , должно иметь место соотношение

$$\mu(2k^2 - k_s^2)(k_c^2 - k^2) + \lambda k_c^2(2k^2 - k_s^2) - 2\mu k^2(k_c^2 - k^2) = 0,$$

или

$$k^2 = \frac{(\lambda + \mu) k_s^2 k_c^2}{2\lambda k_c^2 + \mu k_s^2} = \rho \omega^2 \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \rho \omega^2 a^2 \ll \mu. \quad (13.3.35)$$

Отношение $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ называется *модулем Юнга*. Оно играет роль модуля, когда упругий материал вытягивается в одном направлении и не нагружается в направлениях, нормальных к вытягиванию, так что материал несколько сокращается в нормальных направлениях. Отношение напряжения к деформации в этом случае оказывается равным модулю Юнга. Из проведенного расчета следует, что для бруса, диаметр которого мал по сравнению с длиной волны, можно пренебречь поперечным ускорением по сравнению с продольным движением и рассматривать волну как чистую волну растяжений со скоростью распространения

$$c_y = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(\lambda + \mu)}},$$

не зависящей от частоты (пока диаметр бруса мал по сравнению с длиной волны). Для более высоких частот или больших поперечных сечений приближение, конечно, не справедливо.

В первом приближении вектор смещения для этой наинизшей гармоники равен

$$\mathbf{s} \simeq -\frac{(3\lambda + 2\mu)^2}{a\mu k_s^2 \lambda^2} \left[\mathbf{a}_z - i\mathbf{a}_r \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} kr \right] e^{ikz - i\omega t},$$

откуда, отделяя действительную часть и умножая ее на произвольную постоянную, получим

$$\mathbf{s} \simeq A \left[\mathbf{a}_z \cos(kz - \omega t) + \mathbf{a}_r \frac{\lambda/2}{\lambda + \mu} kr \sin(kz - \omega t) \right].$$

Отсюда следует, что в тех поперечных сечениях балки (для тех значений $kz - \omega t$), где z -компонента смещения наибольшая, r -компонента будет наименьшей, и наоборот. Однако наибольшее *удлинение* в направлении z имеет место в плоскости, определяемой соотношением $kz - \omega t = (2n - 1/2)\pi$, которая является местом наибольшего *сокращения* по r . В этих областях сокращение в направлении r (минус градиент s_r по r) равно удлинению по z (градиенту s_z по z), умноженному на $\lambda/2(\lambda + \mu)$. Отношение $\lambda/2(\lambda + \mu)$ называется *коэффициентом Пуассона*. Заметим, что это соотношение имеет смысл лишь для колебаний вдоль бруса, диаметр которого значительно меньше длины волны.

Для высшей гармоники симметричной волны, распространяющейся по тонкому брусу ($k_s a \ll 1$), β_s и β_c не могут быть малыми по сравнению с единицей, и следовательно, k должно быть мнимым. Используя соотношение (13.3.34), исключая z -компоненту поверхностного напряжения, а затем выбирая значение k/i так, чтобы r -компонента равнялась нулю, получим довольно сложное уравнение, содержащее функции Бесселя J_0 , J_1 и J_2 от $a\sqrt{k_s^2 - k^2}$ и $a\sqrt{k_c^2 - k^2}$. Его решения здесь рассматриваться не будут.

Не будем мы рассматривать также и *поперечные колебания* бруса, при которых направление вектора $\mathbf{s}$ близко к осям x или y , возвращающая сила возникает при изгибании бруса и скорость распространения $c_t = \omega/k$ намного меньше c_s .

Вынужденные крутильные колебания бруса. Мы несколько продолжим рассмотрение крутильных колебаний цилиндрического бруса. Пусть вращающий момент $T e^{-i\omega t}$ приложен к кольцу ширины Δ между $z = -\Delta/2$ и $z = \Delta/2$, по боковой поверхности бруса радиуса a , простирающегося в бесконечность в обе стороны вдоль оси z . Тогда вектор напряжения при $r = a$ равен

$$(\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a} = \mathbf{P}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < -\frac{\Delta}{2}, \\ a_\varphi \frac{T}{2\pi a^2 \Delta} e^{-i\omega t} & \text{при } -\frac{\Delta}{2} < z < \frac{\Delta}{2}, \\ 0 & \text{при } z > \frac{\Delta}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, чтобы напряжение, определяемое формулой (13.3.32), удовлетворяло этому разрывному условию, надо использовать разложение в интеграл Фурье по k .

Интеграл Фурье этого вынуждающего усилия имеет вид

$$\mathbf{P}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} dk \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi) e^{-ik\xi} d\xi = -a_\varphi \frac{T e^{-i\omega t}}{2\pi^2 a^2 \Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\Delta/2)}{k} e^{ikz} dk. \quad (13.3.36)$$

Чтобы интеграл от выражения вида (13.3.32) сводился к данному, функцию ψe^{ikz} надо заменить интегралом Фурье. Поле смещений, согласно (13.3.30), получим в виде

$$\mathbf{s} = -\frac{a_\varphi T e^{-i\omega t}}{2\pi^2 \mu a^2 \Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\Delta/2)}{k \sqrt{k_s^2 - k^2}} \frac{J_1(r \sqrt{k_s^2 - k^2})}{J_2(a \sqrt{k_s^2 - k^2})} e^{ikz} dk. \quad (13.3.37)$$

Все особенности подинтегральной функции являются простыми полюсами. Два из них, $\pm k_s$, лежат на действительной оси. Остальные — на мнимой оси при $\pm i \sqrt{(\pi\beta_{2n}/a)^2 - k_s^2}$, где $\pi\beta_{2n}$ является n -м корнем уравнения $J_2(\pi\beta_{2n}) = 0$. (Это означает, что $k_s < \pi\beta_{21}/a$, т. е. полюсы для нескольких первых корней J_2 лежат на действительной оси.) Для больших комплексных k главной частью подинтегральной функции будет множитель $\sin(k\Delta/2) e^{ikz}$, отношение J_1/J_2 стремится к конечной постоянной при k , стремящемся к бесконечности в любом направлении, за исключением мнимой оси.

Пусть $a < \pi\beta_{21}/k_s$, так что из всех волн кручения незатухающей является лишь наинизшая гармоника, отмеченная в связи с уравнением (13.3.32) (для $k = k_s$). Вычисляя интеграл для значений z , много больших $\Delta/2$, найдем, что заметное влияние оказывают лишь полюсы $\pm k_s$. Для этих значений z замкнем контур интегрирования дугой полуокружности очень большого радиуса в *верхней* полуплоскости, чтобы все полюсы попали внутрь. Чтобы определить, какой из двух полюсов на действительной оси должен попасть внутрь контура, вспомним, что направо для $z > \Delta/2$ должна быть уходящая волна. Поэтому контур интегрирования должен проходить *над* всеми полюсами, лежащими на отрицательной части действительной оси k , и *под* всеми полюсами на положительной части действительной оси k ; тем самым полюс $k = +k_s$ должен быть заключен внутри контура интегрирования (см. рассуждения на стр. 762 в томе I).

Поскольку $J_1(z) \rightarrow z/2$ и $J_2(z) \rightarrow z^2/8$, вычет в этом полюсе таков, что

$$\mathbf{s} \rightarrow a_\varphi \frac{iT}{\pi \mu a^3 k_s} \frac{\sin(k_s \Delta/2)}{k_s \Delta/2} \frac{r}{a} e^{ik_s z - i\omega t} \quad (13.3.38)$$

где $k_s = \omega \sqrt{\rho/\mu}$ и где z достаточно велико ($z \gg a/\pi\beta_{21}$), чтобы вычетами в полюсах на мнимой оси можно было пренебречь.

Эти вычеты определяют высшие гармоники крутильных колебаний, которые, как мы приняли, при данной частоте все затухают, а не распространяются, и их влияние заметно лишь у кольца, к которому приложено внешнее воздействие. Следовательно, энергия, подаваемая в это кольцо, излучается в виде простых волн кручения, распространяющихся в обе стороны (поскольку выражение для больших отрицательных z отличается от выражения для положительных z лишь знаком перед z в экспоненте). Амплитуда этих волн на некотором расстоянии от кольца равна амплитуде T вращающего момента, умноженной на $1/\pi a^3 \omega \sqrt{\rho/\mu}$, при условии, что ширина Δ кольца значительно меньше длины волны.

Чтобы подсчитать импеданс возбуждения, надо вычислить s при $z = \Delta/2$. Для этого надо найти вычеты для других полюсов при $z > \Delta/2$, а затем получить значение при $z = \Delta/2$ при помощи аналитического продолжения. Положение n -го полюса на мнимой оси определяется из равенства $a \sqrt{k_s^2 - k^2} = \pi\beta_{2n}$, где $\pi\beta_{2n}$ — n -й корень уравнения $J_2(\pi\beta) = 0$. Положим $k = iK_n + \varepsilon$, где $K_n^2 = (\pi\beta_{2n}/a)^2 - k_s^2$; в этом случае $\sqrt{k_s^2 - k^2} = \pi\beta_{2n}/a - i\varepsilon(aK_n/\pi\beta_{2n})$ для достаточно малых ε . Пользуясь выражениями для производных функций Бесселя, применим разложение в ряд Тейлора для определения зависимости J_2 от ε :

$$J_2(a \sqrt{k_s^2 - k^2}) \simeq -ia\varepsilon \frac{aK_n}{\pi\beta_{2n}} J_1(\pi\beta_{2n}),$$

откуда следует порядок полюса при $k = iK_n$.

Собирая все множители и вычисляя вычеты, окончательно получим полное выражение для вектора смещения

$$s = a_\varphi \frac{iTe^{-i\omega t}}{\pi a^3 \omega \sqrt{\rho/\mu}} \left\{ \frac{r}{a} \frac{\sin(k_s \Delta/2)}{k_s \Delta/2} e^{ik_s z} - \right. \\ \left. - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_s}{K_n^2 \Delta} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} K_n \Delta \right) e^{-K_n z} \frac{J_1(\pi\beta_{2n} r/a)}{J_1(\pi\beta_{2n})} \right\}, \quad z > \frac{\Delta}{2}.$$

Ряд надо преобразовать, чтобы с ним можно было оперировать. Интересны значения s при $r = a$ и $z = \Delta/2$; в этом случае функции Бесселя выпадают. При ak_s , достаточно малых, K_n очень близко к $\pi\beta_{2n}/a$. Далее, в первую очередь представляет интерес *крутильный адмитанс* бруса при кольцевом возбуждении, отношение между угловым смещением s/a кольца и вращающим моментом T . Когда $ak_s \ll 1$, этот адмитанс равен

$$Y_t \simeq \frac{1}{\pi a^4 \sqrt{\rho/\mu}} \left\{ \frac{\sin(k_s \Delta/2)}{k_s \Delta/2} e^{ik_s \Delta/2} - \right. \\ \left. - \frac{i\omega a^2}{2\Delta} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \sum_n \frac{1}{(\pi\beta_{2n})^2} [1 - e^{-(\pi\beta_{2n} \Delta/2)}] \right\}. \quad (13.3.39)$$

Если Δ/a не мало, но $k_s \Delta$ мало, то величина в скобках в первом члене стремится к единице, а экспоненциальная часть ряда быстро сходится; имеет значение лишь первый член. Различными способами можно показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(\pi\beta_{2n})^2 = 1/4$. Поэтому для $k_s \Delta \ll 1$, но при $\Delta \sim a$ крутильный адмитанс равен

$$Y_t \simeq \frac{1}{\pi a^4 \sqrt{\rho/\mu}} - i\omega \frac{1}{24\pi a^2 \mu \Delta} [1 - 0,455e^{-0,44\Delta/a} - \dots], \quad (13.3.40)$$

что соответствует активному сопротивлению $\pi a^4 \sqrt{\rho \mu}$, включенному параллельно «упругости», приблизительно равной $24\pi a^2 \mu \Delta$.

Однако более интересен тот случай, когда Δ мало по сравнению с a , так что $k_s \Delta$ тем более мало. Используем соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi \beta_{2n})^2} [1 - e^{-(\pi \beta_{2n} \Delta/a)}] = \int_0^{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi \beta_{2n} a} e^{-\pi \beta_{2n} x/a} dx.$$

Но $\beta_{2n} \simeq n + 3/4$, так что ряд под знаком интеграла приближенно равен

$$\frac{1}{\pi a} e^{-3\pi x/4a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3/4} e^{-\pi n x/a} \text{ или } \frac{1}{\pi a} e^{\pi x/4a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m-1/4} e^{-\pi m x/a}.$$

Для достаточно малых Δ/a среднее значение для этих рядов стремится к

$$-\frac{g}{a\pi} + \sum \frac{1}{\pi a n} e^{-\pi n x/a} \simeq -\frac{1}{a\pi} - \frac{1}{\pi a} \ln\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad x \ll a,$$

где постоянная g близка к единице. Выполняя интегрирование, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi \beta_{2n})^2} [1 - e^{-\pi \beta_{2n} \Delta/a}] \simeq \frac{\Delta}{\pi a} \cdot \ln\left(\frac{a}{\pi \Delta}\right).$$

Поэтому для $\Delta \ll a \ll 1/k_s$ адмитанс оказывается приблизительно равным

$$Y \simeq \frac{1}{\pi a^4 \sqrt{\rho \mu}} - i\omega \frac{1}{2\pi^2 a^3 \mu} \ln\left(\frac{a}{\pi \Delta}\right) \quad (13.3.41)$$

и соответствует активному сопротивлению $\pi a^4 \sqrt{\rho \mu}$, включенному параллельно «упругости» $2\pi^2 a^3 \mu / \ln(a/\pi \Delta)$.

Эти два предельных приближения иллюстрируют природу взаимодействия возбуждающего кольца и бруса. Когда второй член в Y мал по сравнению с первым или из-за большого Δ , или из-за малой ω , связь с брусом хорошая и колебания возбуждающего кольца происходят с амплитудой, лишь немногим большей, чем амплитуда крутильных волн, распространяющихся от кольца [как показано в (13.3.38)], так как в этом случае высшие гармоники почти не возбуждаются.

С другой стороны, при несколько большей частоте или меньшей ширине кольца Δ высшие гармоники возбуждаются заметным образом, вторым членом в Y уже нельзя пренебречь и связь между кольцом и брусом менее эффективна. Высшие гармоники соответствуют движению кольца, которое не вызывает волнового движения, что тем самым уменьшает эффективную связь между кольцом и волной. Эти высшие гармоники соответствуют скручиванию бруса, не постоянному по r . Если представить себе брус состоящим из концентрических цилиндрических оболочек, то низшая крутильная гармоника соответствует повороту всех оболочек на один и тот же угол при любом заданном значении z , в то время как высшие гармоники соответствуют закручиванию оболочек друг относительно друга, каждая оболочка поворачивается на свой угол. Наличие второго члена в Y отражает тот факт, что кольцо и внешние оболочки бруса, ближайшие к кольцу, поворачиваются на больший угол, чем внутренние оболочки при $r < a$.

Это же влияние высших гармоник объясняет и то, что кольцо ширины Δ , приваренное к брусу и удерживаемое неподвижно, не полностью гасит крутильные колебания. Оно демпфирует часть волн, которые несут внешние оболочки, но внутренний сердечник бруса, не будучи жестко связан с неподвижным кольцом, пропускает часть волн за кольцо. Предположим, например, что идущая слева волна

$$s_i = a_{\varphi} A \frac{r}{a} e^{i k_s z - i \omega t}$$

падает на неподвижное кольцо ширины Δ , приваренное к брусу при $z = 0$. Кольцо должно вызвать действие на поверхность бруса противоположного вращающего момента. Этот момент в отсутствии падающей волны вызовет движение, равное и противоположное производимому падающей волной в месте нахождения кольца. При этом возникнут расходящиеся от кольца волны. Если связь хорошая (вторым членом в Y можно пренебречь), то амплитуды этих волн близки к амплитуде падающей волны, так что при $z > 0$ две волны взаимно уничтожаются (нет проходящей волны), а при $z < 0$ имеет место полное отражение. Если связь плохая, но присутствуют некоторые высшие гармоники, что уменьшает связь между сердечником бруса и его поверхностью, то амплитуда отраженной волны равна не A , а

$$\frac{A}{[1 - i\omega(a/2\pi)\sqrt{\rho/\mu}\ln(a/\Delta\pi)]}, \quad \Delta \ll a \ll 1/k_s,$$

что близко к A , а амплитуда проходящей волны равна величине

$$\frac{A}{1 + (2\pi i/\omega a)\sqrt{\mu/\rho}[1/\ln(a/\Delta\pi)]}, \quad (13.3.42)$$

которая обычно очень мала, но не равна нулю. Если Δ немногим меньше a , то это последнее выражение ближе к

$$\frac{A}{1 + (24i\Delta/\omega a^2)\sqrt{\mu/\rho}}.$$

Поскольку $\sqrt{\mu/\rho}$ порядка 10^5 единиц CGS, из полученных результатов следует, что волна кручения, проходящая за демпфирующее кольцо, весьма мала, если только произведение ωa не больше, чем 1.000.000 см/сек.

Нестационарный вязкий поток в трубе. Если в трубе, содержащей вязкую несжимаемую жидкость, падение давления является периодической функцией времени, $-\text{grad } P = \mathbf{a}_z F_0 e^{-i\omega t}$, то поток также периодический. Пока скорости не превосходят скорости, соответствующей критическому числу Рейнольдса, поток параллелен оси трубы, оси z . Изменение потока в поперечном сечении трубы можно выразить через систему скалярных двумерных собственных функций $\psi_{nm}(x, y)$, решений уравнения $\nabla^2 \psi_{nm} + k_{nm}^2 \psi_{nm} = 0$, обращающихся в нуль на контуре a поперечного сечения трубы:

$$\mathbf{v}_\omega = \mathbf{a}_z \sum_{n,m} A_{nm} \psi_{nm}(x, y) e^{-i\omega t},$$

где значения коэффициентов A можно определить из требования, чтобы $\mathbf{v}$ удовлетворяло уравнению (13.3.1):

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{a}_z \cdot \frac{F_0}{\eta} e^{-i\omega t}.$$

Подставляя ряд в это уравнение, умножая обе части на $\bar{\psi}_{nm}$ и интегрируя по поперечному сечению, получаем

$$\mathbf{v}_\omega = -i\mathbf{a}_z e^{-i\omega t} \frac{F_0}{\rho} \sum_{n,m} \frac{I_{nm} \psi_{nm}(x, y)}{\omega + i(\eta k_{nm}^2/\rho)}, \quad (13.3.43)$$

где

$$I_{nm} = \iint \bar{\psi}_{nm} dx dy / \iint |\psi_{nm}|^2 dx dy.$$

Таким образом, движение не полностью находится в фазе с падением давления, отставание по фазе гармоники (n, m) равно $\arctg(\omega\rho/\eta k_{nm}^2)$.

Подсчитав $\mathbf{v}_\omega$, можно определить поток для любого неустановившегося падения давления, используя преобразование Лапласа. Например, для паде-

ния давления, внезапно приложенного в момент $t = 0$,

$$a_z F_0 u(t) = -\frac{a_z F_0}{2\pi i} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{\omega},$$

где $u(t) = 0$ ($t < 0$), $u(t) = 1$ ($t > 0$), получим решение

$$v_u = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} v_\omega \frac{d\omega}{\omega} = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ a_z \frac{F_0}{\eta} \sum_{n, m} \frac{I_{nm}}{k_{nm}^2} \phi_{nm}(x, -\eta k_{nm}^2 t^{1/2}) & \text{для } t > 0. \end{cases} \quad (13.3.44)$$

Скорость равна нулю при $t < 0$, высшие гармоники первыми возбуждаются полностью, и, наконец, при $t \gg \rho/\eta k_{01}^2$ (где k_{01} — наименьшее собственное значение) движение представляет собой установившийся поток, рассмотренный в § 13.2.

Электромагнитные резонаторы. Если оба конца прямоугольного волновода закрыты, так что образуется прямоугольный параллелепипед со сторонами l_x , l_y и l_z , то внутри этой области могут существовать стоячие электромагнитные волны. Двумя основными типами стоячих волн, удовлетворяющих граничному условию $E_t = 0$ на поверхности и имеющих равную нулю дивергенцию внутри области, являются

$$\begin{aligned} M_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k_m} \operatorname{rot} \left[a_z \cos\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) \right] = \\ &= -a_x \frac{\pi m_y}{l_y k_m} \cos\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) + \\ &+ a_y \frac{\pi m_x}{l_x k_m} \sin\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right), \end{aligned} \quad (13.3.45)$$

$$k_m^2 = (\pi m_x/l_x)^2 + (\pi m_y/l_y)^2 + (\pi m_z/l_z)^2 = (\omega_m/c)^2, \quad m = (m_x, m_y, m_z),$$

$$\begin{aligned} N_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k_m^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left[a_z \sin\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) \right] = \\ &= a_z \frac{1}{k_m^2} \left[\left(\frac{\pi m_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m_y}{l_y}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) - \\ &- a_x \frac{\pi m_z}{l_z k_m^2} \frac{\pi m_x}{l_x} \cos\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) - \\ &- a_y \frac{\pi m_z}{l_z k_m^2} \frac{\pi m_y}{l_y} \sin\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right), \end{aligned}$$

где для M_m $m_z > 0$, а m_x и m_y не могут одновременно обращаться в нуль; для N_m m_z может равняться нулю, а m_x и m_y оба должны быть отличны от нуля.

Функции обоих типов удовлетворяют одному и тому же уравнению: $\operatorname{rot} \operatorname{rot} M_m = k_m^2 M_m$ и $\operatorname{rot} \operatorname{rot} N_m = k_m^2 N_m$. Они не полностью симметричны, а «оказывают предпочтение» оси z , поскольку они образованы умножением на a_z скалярных решений уравнения Гельмгольца. Однако эти функции составляют полную систему векторных собственных функций данной области, и их удобно использовать, когда граничные условия выделяют зависимость от z . Другая полностью эквивалентная система получается умножением a_x на скалярные волновые решения, а третья — умножением a_y на другие функции. Однако будет показано, что любая из функций двух последних систем является простой линейной комбинацией функций системы (13.3.28), так что достаточно лишь одной системы из трех; какую из трех выбрать, зависит от граничных условий.

Отметим, что решения для прямоугольных областей являются вырожденными в том смысле, что M_m и N_m соответствуют одни и те же собственные частоты $\omega_m/2\pi$ (это, вообще говоря, не имеет места для областей другой формы). Функции этих систем, конечно, взаимно ортогональны. Нормирующие константы равны

$$\begin{aligned} \int_0^{l_x} dx \int_0^{l_y} dy \int_0^l |M_m|^2 dz &= \int_0^{l_x} dx \int_0^{l_y} dy \int_0^{l_z} |N_m|^2 dz = \\ &= \frac{l_x l_y l_z}{\varepsilon_{m_x} \varepsilon_{m_y} \varepsilon_{m_z} k_m^2} \left[\left(\frac{\pi m_x}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi m_y}{l_y} \right)^2 \right] = \left[1 - \left(\frac{\pi m_z}{l_z k_m} \right)^2 \right] \Lambda_m. \end{aligned}$$

Как и для других собственных решений в ограниченных областях, функция Грина при вынуждающей частоте $\omega/2\pi = kc/2\pi$ может быть записана в двух видах. Во-первых, в виде симметричной суммы

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k) = \sum_m \frac{4\pi k_m^2 / \Lambda_m}{(k_m^2 - k^2) [k_m^2 - (\pi m_z / l_z)^2]} [M_m(\mathbf{r}_0) M_m(\mathbf{r}) + N_m(\mathbf{r}_0) N_m(\mathbf{r})]. \quad (13.3.46)$$

Эта формула удобна для расчета многих задач о вынужденных колебаниях. Другой вид получается из формулы (13.3.14) для полной аффинорной функции Грина для волновода. В рассматриваемом случае функция f отличается от функции g , так как введено дополнительное граничное условие равенства нулю E_t при $z=0$ и $z=l_z$. Имеем

$$f_{mn} = \frac{1}{K_{mn} \sin(K_{mn} l_z)} \begin{cases} \sin(K_{mn} z) \sin[K_{mn}(l_z - z_0)] & \text{при } z < z_0, \\ \sin(K_{mn} z_0) \sin[K_{mn}(l_z - z)] & \text{при } z > z_0 \end{cases}$$

и

$$g_{mn} = \frac{-1}{K_{mn} \sin(K_{mn} l_z)} \begin{cases} \cos(K_{mn} z) \cos[K_{mn}(l_z - z_0)] & \text{при } z < z_0, \\ \cos(K_{mn} z_0) \cos[K_{mn}(l_z - z)] & \text{при } z > z_0, \end{cases}$$

где $K_{mn}^2 = k^2 - k_{mn}^2$. (При $k_{mn} > k$ K_{mn} будет положительным и мнимым.) В этом случае полная аффинорная функция Грина имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = 4\pi \sum_{m,n} \frac{1}{k_{mn}^2 \Lambda_{mn}} \{ [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \phi_{mn}(\mathbf{r}_0)] [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \phi_{mn}(\mathbf{r})] f_{mn} + \\ + k_{mn}^2 \mathbf{a}_z \chi_{mn}(\mathbf{r}_0) \mathbf{a}_z \chi_{mn}(\mathbf{r}) g_{mn} + \text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}_0) \text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}) f_{mn} \}. \quad (13.3.47) \end{aligned}$$

Это выражение эквивалентно ряду (13.3.46) плюс продольная часть. Этот ряд также «выделяет» ось z ; эквивалентный ряд можно получить циклической перестановкой x, y и z в приведенной формуле.

Потери энергии в стенках, Q полости. В случае резонаторов, так же как и в случае бесконечных волноводов, конечная проводимость стенок вызывает потери энергии. В случае резонаторов это сказывается в затухании колебаний не по координатам вдоль трубы, а во времени. Обычной количественной характеристикой затухания колебаний является « Q системы»¹⁾ — число периодов, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e^π раз (для простого контура $Q = \omega L/R$). Другими словами, экспоненциальный множитель определяющий затухание амплитуды, равен $e^{-\omega t/2Q}$, а множитель, определяющий затухание средней плотности энергии волны, равен $e^{-\omega t/Q}$. Чем больше Q , тем меньше потери энергии и острее резонансная кривая вблизи резонансной частоты.

¹⁾ «Добротность системы». — Прим. ред.

Обращаясь к выводу формулы (13.3.17), мы видим, что уравнение для Q получается приравнением ω/Q отношению потерь энергии в стенках к полной энергии поля, интегралу от $(E^2 + H^2)/8\pi$ по объему всей области. Поэтому в обозначениях формулы (13.3.17) мы имеем

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi\omega}{\mu c^2}} \frac{\iiint_V (|E|^2 + |H|^2) dv}{\iint_S |H_t|^2 dA}. \quad (13.3.48)$$

Поскольку величина Q безразмерна, величина $\sqrt{\mu c^2/8\pi\omega}$ имеет размерность длины; это — среднее расстояние, на которое поле проникает внутрь проводящей поверхности. Оно называется *глубиной скин-слоя* проводника.

Для цилиндрической полости, ограниченной при $z=0$ и $z=l_z$, с поперечным сечением, соответствующим любой из разделяющих цилиндрических систем координат, стоячие волны типа **М** имеют вид

$$\mathbf{M}_m = -\frac{1}{k_m} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \phi_m(x, y)] \sin(\pi m_z z / l_z) = \frac{\mathbf{E}}{ik_m},$$

где ϕ — решение уравнения $\nabla_{xy}^2 \phi_m + \left[k_m^2 - \left(\frac{m_z \pi}{l_z} \right)^2 \right] \phi_m = 0$, нормальная

производная которого на границе равна нулю. Соответствующее поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{k_m} \left\{ \mathbf{a}_z \left[k_m^2 - \left(\frac{\pi m_z}{l_z} \right)^2 \right] \phi_m \sin \left(\frac{\pi m_z z}{l_z} \right) + \frac{\pi m_z}{l_z} \text{grad } \phi_m \cos \left(\frac{\pi m_z z}{l_z} \right) \right\}$$

и

$$\iiint_V E^2 dv = \iiint_V H^2 dv = \frac{1}{2} l_z \left[k_m^2 - \left(\frac{\pi m_z}{l_z} \right)^2 \right] \Lambda_m,$$

где

$$\Lambda_m = \iint |\phi_m|^2 dx dy,$$

так что числитель в формуле (13.3.48) как раз вдвое больше этого выражения.

Касательная составляющая $\mathbf{H}_t$ на части границы полости, параллельной оси z , имеет z -компоненту $(1/k_m) [k_m^2 - (m_z \pi / l_z)^2] \phi_m \sin(m_z \pi z / l_z)$, где ϕ_m берется на границе, и ортогональную ей компоненту $(m_z \pi / k_m l_z) (\partial \phi_m / \partial s) \times \times \cos(m_z \pi z / l_z)$, где $\partial \phi_m / \partial s$ — касательная составляющая $\text{grad } \phi_m$ на границе. Касательная составляющая $\mathbf{H}$ на граничных плоскостях $z=0$ и $z=l_z$ равна $(m_z \pi / k_m l_z) \text{grad } \phi_m$ и $(-1)^{m_z} (m_z \pi / k_m l_z) \text{grad } \phi_m$ соответственно. Поэтому интеграл от $|\mathbf{H}_t|^2$ по поверхности полости в случае волны типа **М** равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l_z \left\{ \frac{1}{k_m^2} \left[k_m^2 - \left(\frac{m_z \pi}{l_z} \right)^2 \right]^2 \oint |\phi_m|^2 ds + \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \oint \left| \frac{\partial \phi_m}{\partial s} \right|^2 ds \right\} + \\ + \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \left[k_m^2 - \left(\frac{m_z \pi}{l_z} \right)^2 \right] \Lambda_m, \end{aligned}$$

где интегрирование производится по периметру поперечного сечения. Следовательно, значение Q для m -й поперечно-электрической гармоник равно

$$\begin{aligned} Q_{em} = \Lambda_m \sqrt{\frac{8\pi\omega}{\mu c^2}} \left\{ \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \Lambda_m + \left[1 - \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \right] \oint |\phi_m|^2 ds + \right. \\ \left. + \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \right]^{-1} \oint \left| \frac{\partial \phi_m}{\partial s} \right|^2 ds \right\}^{-1}. \quad (13.3.49) \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления дают значение Q для m -й поперечно-магнитной гармоники

$$N_m = \frac{1}{k_m^2} \left\{ \mathbf{a}_z \left[k_m^2 - \left(\frac{m_z \pi}{l_z} \right)^2 \right] \chi_m \cos \left(\frac{m_z \pi}{l_z} z \right) - \right. \\ \left. - \frac{m_z \pi}{l_z} \operatorname{grad} \chi_m \sin \left(\frac{m_z \pi}{l_z} z \right) \right\} = \frac{E}{ik_m},$$

магнитное поле которой

$$\mathbf{H} = -[\mathbf{a}_z \times \operatorname{grad} \chi_m] \cos \left(\frac{\pi m_z}{l_z} z \right),$$

где χ_m — решение двумерного уравнения Гельмгольца, обращающееся в нуль на контуре поперечного сечения. В результате вычислений получим

$$Q_{hm} = \frac{(1/2) l_z \sqrt{8\pi\omega\sigma/\mu c^2}}{1 + (l_z/2k_m \Lambda_m) [1 - (\pi m_z/k_m l_z)^2]^{-1} \oint |\partial \chi_m / \partial n|^2 ds}. \quad (13.3.50)$$

Несколько ниже будет рассчитана чувствительность резонатора к внешнему возбуждению. При использовании функции Грина в форме (13.3.46) различные члены имеют резонансные знаменатели $k_m^2 - k^2$, обращающиеся в нуль при частоте возбуждения $\omega/2\pi$, совпадающей с резонансной частотой $\omega_m/2\pi = k_m c/2\pi$ (в приближении, предполагающем идеальную проводимость стенок). Проведенные вычисления Q показывают, что при большой, но конечной проводимости стенок эти резонансные знаменатели переходят в

$$\begin{aligned} k_m^2 [1 - (i/2Q_{em})]^2 - k^2 & \quad \text{в случае волн } \mathbf{M}_m, \\ k_m^2 [1 - (i/2Q_{hm})]^2 - k^2 & \quad \text{в случае волн } \mathbf{N}_m, \end{aligned} \quad (13.3.51)$$

с точностью до первого порядка относительно малой величины $\sqrt{\mu c^2/8\pi\omega\sigma}$. Величина, обратная этим множителям, не обращается в бесконечность при $k \rightarrow k_m$, а достигает максимальных значений iQ_{em}/k_m^2 или iQ_{hm}/k_m^2 при $k = k_m \sqrt{1 - (1/2Q_{em})^2}$ или $k = k_m \sqrt{1 - (1/2Q_{hm})^2}$ соответственно.

Другое выражение функции Грина также содержит резонансные множители, которые вблизи резонанса приблизительно равны $A/(k_m^2 - k^2)$. Чтобы учесть влияние конечной проводимости стенок в первом приближении по $1/Q$, эти множители также надо заменить на $A/[k_m^2 [1 - i/2Q_m]^2 - k^2]$.

Возбуждение резонатора током. В качестве первого примера вынужденных колебаний электромагнитного резонатора рассмотрим возбуждение прямоугольной полости со сторонами l_x, l_y, l_z [стоячие волны в которой определяются по формуле (13.3.45)] при помощи тока $\mathbf{a}_x I e^{-i\omega t}$, который течет по проводу шириной Δ_y , параллельному оси x и отстоящему на Δ_z от центра стенки $z=0$. (Другими словами, провод лежит между прямыми $z=\Delta_z$, $y=l_y/2 - \Delta_y/2$ и $z=\Delta_z$, $y=l_y/2 + \Delta_y/2$.) Такой ток не может возбудить колебание типа N, поскольку ни одна из волн N не имеет постоянной компоненты по оси x , тогда как волны M при $m_x=0$ обладают таким свойством. Поэтому, используя функцию Грина из (13.3.46), достаточно взять лишь волны типа M, для которых $m_x=0$, а m_y нечетно. (Чтобы упростить обозначения, мы в этом пункте положим $m_y=2m+1$ и $m_z=n$.)

Тогда выражение для вынужденных колебаний в резонаторе можно получить из выражения (13.1.52), где Q равно $\mathbf{a}_x \delta(z - \Delta_z) I e^{-i\omega t}/c \Delta_y$ для $l_y/2 - \Delta_y/2 < y < l_y/2 + \Delta_y/2$ и нулю для других значений y . При этом все поверхностные интегралы равны нулю, поскольку мы начали с предпо-

жения, что стенки резонатора идеально проводящие. Выражение для векторного потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} A = \sum_{m,n} \frac{16\pi k_{mn}^2/l_x l_y l_z}{(k_{mn}^2 - k^2) [\pi(2m+1)/l_y]^2} M_{mn}(\mathbf{r}) \times \\ \times \frac{I}{c\Delta_y} \int_0^{l_x} dx_0 \int_{l_y/2-\Delta_y/2}^{l_y/2+\Delta_y/2} dy_0 \int_0^{l_z} \delta(z_0 - \Delta_z) M_{mn}(\mathbf{r}_0) dz_0 \cdot \mathbf{a} = \\ = \frac{16\pi I a_x}{c l_y l_z} \sum_{m,n} (-1)^m \frac{\sin(\pi n \Delta_z/l_z)}{k_{mn}^2 - k^2} \frac{2l_y}{\pi(2m+1)\Delta_y} \times \\ \times \sin\left[\frac{\pi(2m+1)\Delta_y}{2l_y}\right] \sin\left[\frac{\pi(2m+1)y}{l_y}\right] \sin\left[\frac{\pi n z}{l_z}\right] e^{-i\omega t}, \quad (13.3.52) \end{aligned}$$

где

$$k_{mn}^2 = [\pi(2m+1)/l_y]^2 + [\pi n/l_z]^2.$$

Вблизи резонанса, когда всеми членами, за исключением резонирующего, можно пренебречь, этот ряд представляет удобную форму решения. Например, для ω , близкой к ck_{mn} , напряжение $l_x E$, противоположное току в проводе, равно

$$V = \frac{16\pi I l_x}{l_y l_z} \left(\frac{\pi n \Delta_z}{l_z}\right)^2 \frac{i\omega}{\omega^2 - c^2 k_{mn}^2 [1 - (i/2Q_{emn})]^2}, \quad (13.3.53)$$

где в знаменатель включен член с Q и где принято, что $\Delta_z \ll l_z/n$ и $\Delta_y \ll l_y/(2m+1)$. Вблизи этой резонансной частоты возбуждающий ток эквивалентен току в цепи параллельно соединенных активного сопротивления R_{mn} , индуктивности L_{mn} и емкости C_{mn} , где

$$\begin{aligned} C_{mn} = \frac{l_y l_z}{16\pi l_x} \left(\frac{l_z}{\pi n \Delta_z}\right)^2, \quad L_{mn} = \frac{16\pi l_x}{c^2 k_{mn}^2 l_y l_z} \left(\frac{\pi n \Delta_z}{l_z}\right)^2, \\ R_{mn} = \frac{16\pi l_x Q_{emn}}{c k_{mn} l_y l_z} \left(\frac{\pi n \Delta_z}{l_z}\right)^2. \end{aligned}$$

Однако для вычисления реактивного напряжения при частоте, далекой от резонанса, лучше использовать другую форму функции Грина, а именно данную в (13.3.47). Здесь опять лишь члены в $\mathbf{a}_z \times \text{grad} \phi_{mn}$ отличны от нуля, причем только те, у которых $m=0$ и n нечетно. При $k < 2\pi/l_y$, когда (при $n > 0$) $\sqrt{[\pi(2n+1)/l_y]^2 - k^2} \simeq \pi(2n+1)/l_y$, можно из суммы выделить первый член, содержащий резонансный знаменатель (для низких частот). Остальные члены воспроизводят концентрацию поля у провода и стремятся уменьшить связь между током и полем в резонаторе. Интегрирование функции Грина дает

$$\begin{aligned} A \simeq \mathbf{a}_x \frac{8\pi I \Delta_z}{c l_y} \left\{ \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right) \cos\left[z \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l_y}\right)^2}\right] - \right. \\ \left. - \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right) \frac{\sin[z \sqrt{k^2 - (\pi/l_y)^2}]}{\text{tg}[l_z \sqrt{k^2 - (\pi/l_y)^2}]} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sh}[\pi(2n+1)\Delta_z/l_z]}{[\pi(2n+1)\Delta_z/l_z]} \frac{\sin[\pi(2n+1)\Delta_y/2l_y]}{[\pi(2n+1)\Delta_y/2l_y]} \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{sh}[\pi(2n+1)(l_z - z)/l_y] \sin[\pi(2n+1)y/l_y]}{\text{sh}[\pi(2n+1)l_z/l_y]} \right\}. \quad (13.3.54) \end{aligned}$$

Это выражение не похоже на формулу (13.3.52), однако оно эквивалентно ей. Резонансным является член, содержащий тангенс. Величина k ограничена, но и при этом член, содержащий тангенс, обращается в бесконечность при $\sqrt{k^2 - (\pi/l_y)^2} = \pi/l_z$, т. е. при $k^2 = k_{01}^2$ в обозначениях, принятых в (13.3.52). Разложение по k вблизи k_{01} показывает, что этот член аналогичен первому члену в формуле (13.3.52).

Обратная электродвижущая сила в проводе для этих значений k равна

$$V \simeq \frac{8\pi l_x \Delta_z}{l_y} \left\{ i\omega - i\omega \Delta_z \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l_y}\right)^2} \operatorname{ctg} \left[l_z \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l_y}\right)^2} \right] + \right. \\ \left. + i\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [\pi (2n+1) \Delta_y / 2l_y]}{[\pi (2n+1) \Delta_y / 2l_y]} \frac{[1 - e^{-2\pi (2n+1) \Delta_z / l_z}]}{[2\pi (2n+1) \Delta_z / l_z]} \right\} e^{-i\omega t},$$

где принято, что Δ_y и Δ_z малы по сравнению с l_y/π и l_z/π соответственно, но l_z/l_y достаточно велико, так что

$$\frac{\operatorname{sh} [(2n+1) \pi (l_z - z)/l_y]}{\operatorname{sh} [(2n+1) \pi l_z/l_y]} \simeq e^{-(2n+1) \pi z/l_y}.$$

При $\Delta_y \gg 0,1l_y$ и $\Delta_z \gg 0,1l_z$ ряд достаточно быстро сходится и можно ограничиться несколькими первыми членами. Но если все Δ малы, то нужно взять большое число членов и приближенный результат можно получить интегрированием. Мы видим, что

$$\sum_{n=\alpha}^{\infty} \frac{\sin [\pi (2n+1) \Delta_y / 2l_y]}{(2n+1)^2} e^{-2\pi (2n+1) \Delta_z / l_z} \simeq \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin (\pi x \Delta_y / l_y)}{x^2} e^{-4\pi x \Delta_z / l_z} dx = \\ = \operatorname{Im} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{x^2} \exp \left[\left(\frac{i\pi \Delta_y}{l_y} - \frac{4\pi \Delta_z}{l_z} \right) x \right] dx = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\alpha} \exp \left[\left(\frac{i\pi \Delta_y}{l_y} - \frac{4\pi \Delta_z}{l_z} \right) \alpha \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{i\pi \Delta_y}{l_y} - \frac{4\pi \Delta_z}{l_z} \right) \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{x} \exp \left[\left(\frac{i\pi \Delta_y}{l_y} - \frac{4\pi \Delta_z}{l_z} \right) x \right] dx \right\}.$$

Поэтому, беря разность этого выражения и выражения с $\Delta_z = 0$ и затем устремляя α к нулю, получаем

$$V \simeq i\omega (8\pi l_x \Delta_z / l_y) \left\{ 1 - \Delta_z \sqrt{k^2 - (\pi/l_y)^2} \operatorname{ctg} [l_z \sqrt{k^2 - (\pi/l_y)^2}] + \right. \\ \left. + \frac{l_z}{8\pi \Delta_z} \ln \left[1 - \frac{4l_y \Delta_z}{l_z \Delta_y} \right] - \frac{l_y}{\pi \Delta_y} \operatorname{arctg} \left[\frac{4l_y \Delta_z}{l_z \Delta_y} \right] \right\}. \quad (13.3.55)$$

Таким образом, для тех значений ω , для которых

$$0 < k < \frac{3}{2} \pi \sqrt{\left(\frac{1}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_z}\right)^2},$$

получено явное выражение для V и импеданса V/I , которое является приемлемым в этой области частот, но не вблизи резонанса. Поскольку сумма в (13.3.54) берется по одному индексу, вычисление ее проще, чем вычисление двойного ряда (13.3.52).

Возбуждение при помощи волновода. Пусть резонатор связан с генератором при помощи волновода, соединенного с резонатором на входе $z = 0$, причем волновод и резонатор имеют параллельные и прямоугольные поперечные сечения. Предположим, что поперечные размеры волновода

a и b значительно меньше, чем поперечные размеры l_x и l_y резонатора, и что центр поперечного сечения волновода в плоскости стыка $z=0$ имеет координаты $x=x_1$ и $y=y_1$. Начало координат x, y, z для резонатора находится в одном из его углов. Внутри волновода удобно ввести координаты $\xi = x - x_1$, $\eta = y - y_1$ и z (считая центр поперечного сечения стыка за начало координат).

Если волновод возбуждается так, что распространяется лишь наименьшая поперечно-электрическая гармоника ($\mathbf{E}$ вдоль $\mathbf{a}_x$ при $b > a$), то касательная составляющая электрического поля в плоскости поперечного сечения стыка приблизительно равна (см. рассмотрения на стр. 768)

$$\mathbf{E}_t \simeq ik\mathbf{A}_t = \mathbf{a}_x \frac{E_0 \cos(\pi\eta/b)}{[1 - (2\xi/a)^2]} e^{-i\omega t}, \quad 0 < |\xi| < \frac{1}{2}a, \quad 0 < |\eta| < \frac{1}{2}b, \\ \pi/b < k < \pi/a. \quad (13.3.56)$$

Для подсчета поля внутри резонатора используем функцию Грина в форме (13.3.47) и (13.1.10).

При этом в формуле (13.1.10) $\mathbf{Q}$ надо считать равным нулю, так как в полости резонатора нет ни токов, ни зарядов. Аналогично $\text{div } \mathbf{F}$ всюду равна нулю, так что первый член в поверхностном интеграле обращается в нуль. Нетрудно показать, что для функции Грина $\mathcal{G}$, определяемой формулой (13.3.47), $\text{div}_0 \mathcal{G}$ равна нулю в плоскости $z=0$, а на боковой поверхности нормальна к ней (и поэтому ортогональна к $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F}$). Следовательно, второй и третий члены в поверхностном интеграле тоже обращаются в нуль и

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi ik} \iint (\text{rot}_0 \mathcal{G}) \cdot [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t] dx_0 dy_0.$$

Но для прямоугольной полости ($\Lambda_{mn} = l_x l_y / \varepsilon_m \varepsilon_n$) $\text{rot } \mathcal{G}$ по координатам x_0 при $z_0 = 0$ равен

$$(\text{rot}_0 \mathcal{G})_{z_0=0} = 4\pi \sum_{m,n} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}^2 l_x l_y} \left\{ [-\mathbf{a}_z \times \text{grad } \psi_{mn}] \text{grad}_0 (\psi_{mn}^0) \frac{\sin [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn} l_z)} + \right. \\ \left. + [\mathbf{a}_z \times \text{grad}_0 \chi_{mn}^0] \frac{K_{mn}^2}{k_{mn}} \mathbf{a}_z \chi_{mn} \frac{\cos [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn} l_z)} + \right. \\ \left. + [\mathbf{a}_z \times \text{grad}_0 \chi_{mn}^0] \text{grad } \chi_{mn} \frac{\sin [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn} l_z)} \right\},$$

где индекс 0 означает, что функция зависит от координат x_0, y_0 . Так как

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t = \mathbf{a}_y E_t, \quad \psi_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi}{l_x} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l_y} y\right) \text{ и } \chi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l_y} y\right),$$

то для поля внутри резонатора получим выражение

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} \sum_{m,n} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}^2 l_x l_y} \left\{ \frac{\pi n}{l_y} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \psi_{mn}] \frac{\sin [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn} l_z)} + \right. \\ \left. + \frac{\pi m}{K_{mn}} \left[\frac{k_{mn}^2}{K_{mn}} \mathbf{a}_z \chi_{mn} \frac{\cos [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn} l_z)} + \text{grad } \chi_{mn} \frac{\sin [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn} l_z)} \right] \right\} \times \\ \times \iint E_t \cos\left(\frac{\pi m x_0}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y_0}{l_y}\right) e^{-i\omega t} dx_0 dy_0.$$

Интеграл в этом выражении переходит в

$$\frac{2ab}{\pi} E_0 \frac{\sin(\pi n y_1 / l_y) \cos(\pi n b / 2 l_y)}{1 - (nb / l_y)^2} \cos\left(\frac{\pi m x_1}{l_x}\right) B_m\left(\frac{a}{l_x}\right),$$

где (см. стр. 420)

$$B_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)}, \quad B_m \left(\frac{a}{l_{x1}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{(\pi m a / 4 l_x)^{1/6}} J_{1/6} \left(\frac{\pi m a}{2 l_x} \right), \quad m > 0.$$

Окончательно y -компонента $\mathbf{H}$ в центре стыка ($x = x_1$, $y = y_1$, $z = 0$) равна

$$\begin{aligned} H_y^+ &= \frac{4iabE_0}{\pi l_x l_y} \sum_{m,n} \frac{\varepsilon_m B_m \cos(\pi n b / 2 l_y)}{\sqrt{1 - (\pi m / k l_x)^2 - (\pi n / k l_y)^2}} \frac{1 - (\pi n / k l_y)^2}{1 - (n b / l_y)^2} \times \\ &\times \cos^2 \left(\frac{\pi m x_1}{l_x} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi n y_1}{l_y} \right) \operatorname{ctg} \left[l_z \sqrt{k^2 - \left(\frac{m \pi}{l_y} \right)^2 - \left(\frac{n \pi}{l_y} \right)^2} \right] e^{-i \omega t} = \\ &= -(4 \pi E_0 / c) Y_r, \end{aligned} \quad (13.3.57)$$

где Y_r — проводимость резонатора по отношению к волноводу. Член с номером (m, n) в этом выражении стремится к бесконечности при $k^2 \rightarrow (m \pi / l_x)^2 + (n \pi / l_y)^2 + (s \pi / l_z)^2$ ($s = 0, 1, \dots$) (за исключением членов, соответствующих $m = s = 0$, $n > 0$, $k \rightarrow n \pi / l_y$). Этим, конечно, определяются резонансные частоты резонатора.

Поле волновода состоит из падающей на стык волны с индексами $m = 0$ и $n = 1$ и последовательности отраженных волн с индексами $n = 1$ и любым четным m . При этом тангенциальная составляющая поля при $z = 0$ соответствует выражению, определенному формулой (13.3.56),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r \times \operatorname{grad} \cos \left(\frac{\pi \eta}{b} \right) \left\{ e^{i K_{01} z} - \left[1 + \frac{E_0 b}{i \pi k} B_0 \right] e^{-i K_{01} z} \right\} e^{-i \omega t} - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 E_0 B_{2m}(1)}{i k k_{2m,1}^2} \left\{ \frac{\pi}{b} \mathbf{a}_z \times \operatorname{grad} \psi_{2m,1}^- - \frac{2 \pi m}{a} \operatorname{grad} \chi_{2m,1}^- - \right. \\ &\left. - i \frac{2 \pi m k_{2m,1}^2}{a K_{2m,1}} \mathbf{a}_z \chi_{2m,1}^- \right\} e^{-i K_{2m,1} z - i \omega t}, \end{aligned} \quad (13.3.58)$$

где $k_{2m,1}^2 = (2m \pi / a)^2 + (\pi / b)^2$, $\psi_{2m,1}^- = \cos(2m \pi \xi / a) \sin(\pi \eta / b)$ и $\chi_{2m,1}^- = \sin(2m \pi \xi / a) \cos(\pi \eta / b)$, а постоянные B — те же, что и раньше, с 1 вместо a / l_x . Компонента поля $\mathbf{H}$ по оси y при $\xi = \eta = z = 0$ в этом случае равна

$$\begin{aligned} H_y^- &= - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} \left[2i \frac{\pi}{b} + \frac{E_0}{k} B_0 \right] - \\ &- 2 \frac{E_0}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}(1)}{\sqrt{k^2 - k_{2m,1}^2}} \left[k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \simeq \\ &\simeq - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} \left[2i \frac{\pi}{b} + \frac{E_0}{k} B_0 \right] - \\ &- i E_0 \frac{a}{2 \pi k} \left[k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] (B_0 - 1) \ln 4. \end{aligned} \quad (13.3.59)$$

Приближенное значение E_0 напряженности электрического поля в центре стыка получается приравниванием H_y^- и H_y^+ , поскольку обе эти величины определяют напряженность магнитного поля в центре стыка при единичной амплитуде падающей из волновода волны. Формула (13.3.58) означает, что амплитуда отраженной волны равна

$$- \left[1 + E_0 \frac{b B_0}{i \pi k} \right] = R_{e01} = \frac{Y_{e01} + (1/B_0)(Y_r + Y_0)}{Y_{e01} - (1/B_0)(Y_r + Y_0)}, \quad (13.3.60)$$

где

$$Y_{e01} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kb}\right)^2}, \quad B_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) / \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right],$$

$$Y_0 = -i\omega \frac{a}{8\pi^2} \left[1 - \left(\frac{\pi}{kb}\right)^2 \right] (B_0 - 1) \ln 4,$$

а Y_r определяется формулой (13.3.57). Это выражение надо сравнить с формулой (13.3.24) для отражения поперечно-электрической волны от конца трубы. Величина Y_{e01} является проводимостью волны с номером (0,1) в волноводе, Y_0 — проводимость самого стыка и Y_r — проводимость резонатора. Формула для R означает, что волновод заканчивается параллельно соединенными проводимостями Y_r и Y_0 , связанными с волноводом константой связи $1/B_0$.

Отметим, что поскольку и Y_0 и Y_r являются чисто реактивными (H_y^*/E_0 чисто мнимое), в то время как Y_{e01} — действительное при k , больших π/b , амплитуда R отраженной волны равна единице для частот возбуждения выше критической. Это неудивительно, так как в выражении для Y_r еще не учтено поглощение энергии. Тем самым вся падающая на резонатор энергия должна отражаться обратно в волновод. При $Y_r = -Y_0$ отражение происходит без изменения фазы; при $Y_r = \infty$ отраженная волна смещена по фазе на 180° .

Электрическая напряженность в центре стыка при единичной амплитуде падающей волны (E в падающей волне $= 1$ в центре волновода) равна

$$\frac{bE_0}{ik} = -\frac{2Y_{e01}}{B_0Y_{e01} - Y_0 - Y_r}.$$

Это выражение никогда не может обращаться в бесконечность, так как Y_{e01} действительно, а Y_0 и Y_r — чисто мнимые, но может равняться нулю при бесконечной проводимости резонатора Y_r , что имеет место при совпадении частоты падающей волны с одной из резонансных частот полости резонатора. В этом случае стык ведет себя так, как будто он закрыт идеально проводящим экраном.

Резонансные частоты полости клистрона. Для расчета клистронов известный интерес представляет рассмотрение полости, получающейся при вращении вокруг центральной линии фигуры, изображенной на рис. 13.6. В этом случае наинизшей гармоникой является поперечно-магнитная волна, при которой свободные заряды располагаются на сторонах щели Δ , ток колеблется вдоль цилиндра радиуса b , а магнитные силовые линии окружают внутренний цилиндр. Для подсчета этой гармоники и ее резонансной частоты надо рассчитать поле в области внутри щели ($r < b$, $z < \Delta$) и в области вне щели ($b < r < a$, $z < l_z$), а затем осуществить сопряжение этих полей по кольцевой поверхности ($r = b$, $z < \Delta$). Условие сопряжения и определит допустимые частоты.

Для Δ , малых по сравнению с b , поле при $r = b$ имеет почти полностью статическую структуру у «угла» $r = b$, $z = \Delta$

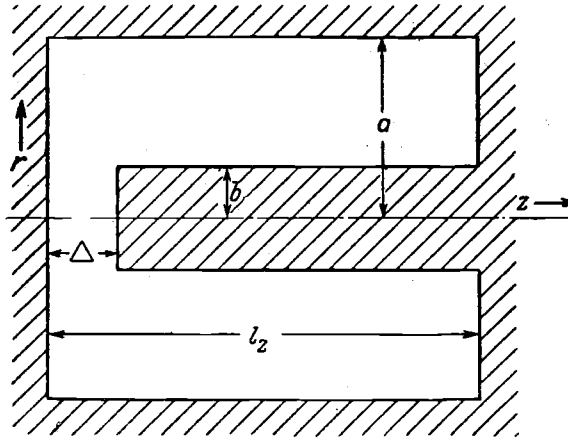
$$E_z \simeq \{E_0/[1 - (z/\Delta)^2]^{1/3}\} e^{-i\omega t}, \quad r = b, \quad 0 < z < \Delta. \quad (13.3.61)$$

Для поперечно-магнитного поля в качестве векторного потенциала используется функция $N = (1/k^2) \text{rot rot}(\mathbf{a}_z \chi) e^{-ik_z z}$, где χ удовлетворяет граничному условию равенства нулю нормальной производной на плоских границах, ортогональных z , и обращается в нуль на цилиндрических границах, нормальных r (и, конечно, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \chi + k^2 \chi = 0$).

В области внутри щели ($r \leq b$, $0 \leq z \leq \Delta$) надо использовать лишь функции Бесселя 1-го рода, ограниченные при $r = 0$. В рассматриваемом случае интерес представляют лишь аксиально симметричные гармоники,

для которых χ не зависит от полярного угла φ . Следовательно, χ является комбинацией функций

$$\cos(\pi m z / \Delta) J_0(K_m r), \quad \text{где } K_m^2 = k^2 - (\pi m / \Delta)^2.$$



Р и с. 13.6. Осевое поперечное сечение электромагнитного резонатора.

При Δ , значительно меньших, чем b или π/k , мы для $m > 0$ получим $K_m \simeq i\pi m / \Delta$ и

$$J_0(i\pi m r / \Delta) \simeq \sqrt{\Delta / 2\pi^2 m r} e^{\pi m r / \Delta}.$$

Поэтому при $0 < z < \Delta$, $0 < r < b$ имеем

$$\chi \simeq A_0 J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{m\pi z}{\Delta}\right) J_0\left(\frac{im\pi r}{\Delta}\right)$$

и

107

$$\begin{aligned} A \simeq & \left\{ a_z A_0 J_0(kr) - a_z \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^{3/2} A_m \cos\left(\frac{m\pi z}{\Delta}\right) e^{\pi m r / \Delta} - \right. \\ & \left. - i a_r \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^{3/2} A_m \sin\left(\frac{m\pi z}{\Delta}\right) e^{\pi m r / \Delta} \right\} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Чтобы $E_z = ikA_z$ равнялось выражению (13.3.61) при $r = b$, должны иметь место равенства

$$A_0 = \frac{E_0 B_0}{ik J_0(kb)}, \quad A_m = 2ik \sqrt{2\pi r} E_0 B_{2m}(1) \left(\frac{\Delta}{\pi m}\right)^{3/2} e^{-\pi m b / \Delta},$$

где

$$B_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)}$$

и

$$B_m(u) = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} \varphi \cos\left(\frac{m\pi u \cos \varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{(m\pi u/4)^{1/6}} J_{1/6}\left(\frac{m\pi u}{2}\right).$$

Магнитное поле внутри щели равно

$$\mathbf{H} = \left\{ a_{\varphi} A_0 k J_1(kr) + ia_{\varphi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\Delta} A_m J_1\left(\frac{im\pi r}{\Delta}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\Delta}\right) \right\} e^{-i\omega t},$$

а при $z=0$, $r=b$ φ -компонента равна

$$\begin{aligned} H_{\varphi}^{-} &\simeq -iE_0 \left\{ B_0 \frac{J_1(kb)}{J_0(kb)} + 2k \int_0^{\pi/2} dx \sin^{1/3} x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta}{\pi m} \cos(m\pi \cos \varphi) \right\} e^{-i\omega t} \simeq \\ &\simeq -iE_0 \left\{ B_0 \frac{J_1(kb)}{J_0(kb)} - 2k \frac{\Delta}{\pi} (B_0 - 1) \ln 2 \right\} e^{-i\omega t} \text{ при } r=b, z=0, \end{aligned}$$

что должно совпадать со значением $\dot{H}_0$, полученным при расчете колебаний во внешней полости.

Выражение для χ во внешней области имеет вид

$$\chi = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos\left(\frac{m\pi}{l_z} z\right) [N_0(k_m a) J_0(k_m r) - N_0(k_m r) J_0(k_m a)],$$

где $k_m^2 = k^2 - (\pi m/l_z)^2$. Это выражение автоматически обращается в нуль при $r=a$; значения C надо выбрать так, чтобы χ равнялось нулю при $r=b$, за исключением области $0 < z < \Delta$. Компонента E по направлению z при $r=b$ равна

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} \left[\frac{i}{k} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (a_z \chi) \right]_z &= ik \sum_{m=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{m\pi}{kl_z} \right)^2 \right] C_m \cos\left(\frac{m\pi}{l_z} z\right) \times \\ &\times [N_0(k_m a) J_0(k_m b) - N_0(k_m b) J_0(k_m a)] e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

что должно равняться выражению (13.3.61) при $0 \leq z < \Delta$ и обращаться в нуль при $\Delta < z \leq l_z$. Это имеет место, если

$$C_m = \frac{\varepsilon_m \Delta}{ikl_z} \frac{E_0 B_{2m}(\Delta/l_z) / [1 - (m\pi/kl_z)^2]}{N_0(k_m a) J_0(k_m b) - N_0(k_m b) J_0(k_m a)},$$

где величины $B_m(\omega)$ определены на стр. 420 и 790. Аналогично величина H_{φ} при $r=b$, $z=0$ равна

$$H_{\varphi} \simeq -\frac{ik\Delta E_0}{l_z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m B_{2m}(\Delta/l_z)}{k_m} \left[\frac{N_0(k_m a) J_1(k_m b) - N_1(k_m b) J_0(k_m a)}{N_0(k_m a) J_0(k_m b) - N_0(k_m b) J_0(k_m a)} \right];$$

соответствующим выбором $k_m = \sqrt{k^2 - (\pi m/l_z)^2}$, а следовательно, k , ее нужно сделать равной величине H_{φ}^{-} , определенной ранее.

Первый член в H_{φ}^{-} не содержит множителя Δ , и если размеры щели Δ малы по сравнению с a , b и l_z , то этот первый член значительно больше второго. Следовательно, чтобы H_{φ}^{+} равнялось H_{φ}^{-} , по крайней мере один член ряда для H_{φ}^{+} должен быть достаточно большим. Это может иметь место, когда величина $N_0(k_m a) J_0(k_m b) - N_0(k_m b) J_0(k_m a)$ очень мала. Приравнявая это выражение нулю, получим корни

$$k_m = \frac{\pi \gamma_n}{a-b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.3.62)$$

При этом в области $a > b > 0,1a$, полагая $\gamma_n = n$, мы сделаем ошибку, не превышающую 3%. Следовательно, можно принять, что допустимые

резонансные частоты (для поперечно-магнитных гармоник) получаются при $k = k_{sn} + \delta_{sn}$, где

$$k_{sn}^2 = \left(\frac{\pi s}{l_z}\right)^2 + \left(\frac{\pi \gamma_n}{a-b}\right)^2 \simeq \left(\frac{\pi s}{l_z}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{a-b}\right)^2.$$

Для $\delta \ll k_{sn}$ члены ряда H_φ^+ , содержащие функции Бесселя и Неймана, при $m = s$ значительно больше остальных и приблизительно равны

$$\frac{\pi \gamma_n / k_{sn} (a-b)}{\delta_{sn} (b + a G_{sn})}, \text{ где } G_{sn} = \frac{J_0(k_s b) N_1(k_s a) - J_1(k_s a) N_0(k_s b)}{J_1(k_s b) N_0(k_s a) - J_0(k_s a) N_1(k_s b)}$$

и где k_s определяется по формуле (13.3.62). Окончательно, приравнявая H_φ^+ и H_φ^- , получим, что резонансные частоты приблизительно равны $kc/2\pi$, где

$$k \simeq \frac{m\pi}{l_z} + \frac{\Delta B_{2m} (\Delta/l_z) J_0(m\pi b/l_z)}{b l_z B_0 \ln(a/b) J_1(m\pi b/l_z)}, \quad n=0, \quad m > 0.$$

Для наименьшей гармоники k само мало и в выражении для H_φ^- можно воспользоваться разложением J_0 и J_1 в ряд. Это приводит к соотношению

$$k \simeq \sqrt{2\Delta/l_z b^2 \ln(a/b)}, \quad m=n=0, \quad (13.3.63)$$

где резонансные частоты опять равны $kc/2\pi$. Если щель закрыта ($\Delta \rightarrow 0$), этот резонанс не имеет места и резонанс появляется при более высоких частотах, соответствующих кольцевой полости между цилиндрами $r = b$ и $r = a$ ($k = k_{mn}$). Можно считать, что наименьшая гармоника соответствует резонансу в контуре из последовательно соединенных индуктивности и емкости, причем емкость $b^2/4\Delta$ соответствует емкости щели, а индуктивность $(2l_z/c^2) \ln(a/b)$ — индуктивности кольцевой полости, так что

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{2\Delta}{l_z b^2 \ln(a/b)}}$$

в соответствии с формулой (13.3.63).

Здесь можно было бы рассмотреть также численные примеры расчета стоячих упругих волн в различных цилиндрических телах, однако те примеры, которые доводятся до конца, являются тривиальными, а в примерах, представляющих практический интерес, обычно невозможно дать точное решение из-за общей сложности граничных условий в случае колебаний упругой среды.

Рассеяние на цилиндре. Вместо этого будем рассматривать задачи, связанные с колебаниями вне цилиндра. Многие из этих задач можно решить незначительным обобщением скалярных формул. Например, задача рассеяния круговым цилиндром плоской электромагнитной волны, падающей нормально к оси цилиндра, может быть сведена к двум скалярным задачам для двух различных поляризаций волны. В случае электрической напряженности, параллельной оси цилиндра (оси z), используется очевидное разложение в цилиндрических координатах r, φ, z

$$a_z e^{ikh} = a_z \sum_{m=0}^{\infty} s_m i^m \cos(m\varphi) J_m(kr); \quad (13.3.64)$$

при этом для другой поляризации имеем

$$a_y e^{ikh} = \frac{i}{k} \operatorname{rot} (a_z e^{ikh}) = \frac{1}{ik} \sum_{m=0}^{\infty} s_m i^m a_z \times \operatorname{grad} [\cos(m\varphi) J_m(kr)].$$

При идеально проводящей боковой поверхности цилиндра граничным условием для первого случая ($\mathbf{E}$ вдоль z) является обращение в нуль амплитуды при $r = a$. В этом случае решение, согласно формуле (11.2.28), имеет вид

$$A_{||} = \frac{a_z}{ik} \left\{ e^{ikh} - i \sum_m \varepsilon_m l^m e^{-i\delta_m} \sin \delta_m H_m(kr) \cos m\varphi \right\} e^{-i\omega t}.$$

Углы δ определены на стр. 522.

С другой стороны, для второй поляризации ($\mathbf{E}$ нормально $\mathbf{a}_z$) при идеальной проводимости боковой поверхности цилиндра касательная составляющая $\mathbf{a}_z \times \text{grad } \psi$ равняется нулю при $r = a$, если обращается в нуль нормальная производная скалярной функции ψ (через которую выражается решение). Поэтому

$$A_{\perp} = -\frac{1}{k^2} \mathbf{a}_z \times \text{grad} \left\{ e^{ikh} - i \sum_m \varepsilon_m l^m e^{-i\delta'_m} \sin \delta'_m H_m(kr) \cos m\varphi \right\} e^{-i\omega t},$$

где углы δ' также определены на стр. 522. Следовательно, волны различной поляризации рассеиваются по-разному, что связано с разницей между фазовыми углами δ и δ' .

Если цилиндр обладает конечной проводимостью σ (обычно большой), некоторое количество энергии теряется на поверхности цилиндра. При этом можно говорить об эффективной ширине поглощения и эффективной ширине рассеяния, аналогично случаю, разобранному на стр. 455. Для параллельной поляризации касательная составляющая магнитного поля при $r = a$ равна

$$H_{||\varphi} = \frac{2i}{\pi ka} \sum_m \varepsilon_m l^m \cos m\varphi \left[\frac{e^{-i\delta_m}}{C_m(ka)} \right] e^{-i\omega t}.$$

Согласно выводу формулы (13.3.17), конечность проводимости не изменяет в первом приближении это магнитное поле, однако электрическое поле на поверхности имеет z -компоненту, равную $\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma} e^{-\pi i/4} H_{||\varphi}$, а не нулю. Таким образом, энергия, поглощенная единицей длины цилиндра, равна

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \int_0^{2\pi} |H_{||\varphi}|^2 a d\varphi = \frac{2c}{\pi^2 k^2 a} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \sum_m \frac{\varepsilon_m}{C_m^2(ka)}.$$

Падающая волна имеет интенсивность $(c/4\pi) \text{Re} [\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}] = (c/4\pi) \mathbf{a}_x$, и отношение потери энергии к падающей интенсивности, *эффективная ширина поглощения цилиндра*, для электромагнитной волны равно

$$Q_a = \frac{8\tau_s}{\pi ka} \sum_m \frac{\varepsilon_m}{C_m^2(ka)},$$

где $\tau_s = \sqrt{\mu c^2/8\pi\sigma\omega}$ — *эффективная глубина скин-слоя* поверхности цилиндра.

Обращаясь к формуле (11.3.76), легко видеть, что влияние конечной проводимости цилиндра сказывается в образовании комплексного фазового угла $\delta_m - i\kappa_m$, где

$$\kappa_m \simeq \frac{2\tau_s}{\pi a C_m^2(ka)}.$$

а $\delta_m = \delta_m(ka)$ определено на стр. 522. Таблица для δ_m приведена в конце книги. При этом коэффициент отражения R_m равен $e^{-2\kappa_m - 2i\delta_m}$, а эффективная ширина рассеяния, эффективная ширина поглощения и полная эффек-

тивная ширина цилиндра для электромагнитных волн равны

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{2}{k} \sum \varepsilon_m e^{-2x_m} [\operatorname{ch}(2x_m) - \cos(2\delta_m)], \\ Q_a &= \frac{2}{k} \sum \varepsilon_m e^{-2x_m} \operatorname{sh}(2x_m), \\ Q_t &= \frac{2}{k} \sum \varepsilon_m [1 - e^{-2x_m} \cos(2\delta_m)] = Q_a + Q_s, \end{aligned} \quad (13.3.65)$$

для случая поляризации электрического вектора, параллельного оси цилиндра.

Несложные вычисления показывают, что для поляризации, при которой магнитное поле параллельно оси цилиндра, коэффициент поглощения равен

$$x'_m \simeq \frac{2\tau_s}{\pi a [C'_m(ka)]^2},$$

а три типа эффективных ширин для этой поляризации определяются формулами, аналогичными формулам (13.3.65), за исключением того, что вместо x_m , δ_m и C_m надо подставить x'_m , δ'_m и C'_m . Рассеянные волны на больших расстояниях от цилиндра имеют вид

$$\begin{aligned} A_{||s} &\simeq -\frac{a_z}{ik} \sqrt{\frac{2i}{\pi kr}} e^{ikr-i\omega t} \sum_m \varepsilon_m \cos m\varphi (1 - e^{-2x_m-2i\delta_m}), \\ A_{\perp s} &\simeq -\frac{a_\varphi}{ik} \sqrt{\frac{2i}{\pi kr}} e^{ikr-i\omega t} \sum_m \varepsilon_m \cos m\varphi (1 - e^{-2x'_m-2i\delta'_m}), \end{aligned} \quad (13.3.66)$$

откуда можно получить интенсивность рассеянной волны.

Сферические волны. Весьма важной системой разделяющихся решений являются решения в сферических координатах r , ϑ , φ . Основные скалярные функции, из которых строятся векторные функции, в этом случае представляют собой произведения $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$ (или $e^{\pm im\varphi}$), сферических гармоник $P_n^m(\cos \vartheta)$ и сферических функций Бесселя $j_n(kr)$ или $n_n(kr)$. Векторные функции, конечно, получаются применением к этим функциям операции градиента для продольных решений и операций rot и $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ для поперечных решений. Обращение к формулам (13.1.4) и (13.1.5) показывает, что операция rot применяется к вектору $\mathbf{r}$, умноженному на скалярное решение. Полученные векторы проще всего выразить через векторные гармонические функции, введенные в (13.2.18), (13.2.20) и последующих формулах. Таблицы этих функций приведены в конце главы.

Векторные решения имеют также поучительные интегральные представления. Как и в гл. 11, наши решения можно выразить в форме интеграла от плоской волны $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ по всем возможным направлениям $\mathbf{k}$. (Здесь положено

$$\mathbf{r} = r(a_x \sin \vartheta \cos \varphi + a_y \sin \vartheta \sin \varphi + a_z \cos \vartheta)$$

и

$$\mathbf{k} = k(a_x \sin u \cos v + a_y \sin u \sin v + a_z \cos u),$$

а $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, умноженное на $\sin u \, du \, dv$ и амплитудный множитель, интегрируется по v от 0 до 2π и по u от 0 до π .) В рассматриваемом случае амплитудные множители — это векторные функции u и v , и, что весьма удачно, эти множители оказываются векторными гармоническими функциями, таблицы которых приведены в конце главы.

К сожалению, чтобы различать функции, соответствующие различным решениям, приходится прибегать к большому числу нижних и верхних индексов. Нижние индексы m и n обозначают порядок производящей сферической гармоник; нижние индексы e или o указывают на использование $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$ в сферической гармонике. (Этого можно избежать, применяя $e^{im\varphi}$; только в этом случае нужен специальный символ для обозначения комплексно сопряженной величины.) Наконец, нужен символ, который бы отличал функции, регулярные в начале координат, от имеющих там полюс, а также символ, отличающий функции, соответствующие лишь расходящимся волнам.

Три системы решений первого рода, конечных при $r=0$, имеют при этом вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{emn}^1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k} \text{grad} [Y_{emn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr)] = \\ &= \mathbf{P}_{mn}^\sigma(\vartheta, \varphi) \frac{1}{k} \frac{d}{dr} [j_n(kr)] + \sqrt{n(n+1)} \mathbf{B}_{mn}^\sigma(\vartheta, \varphi) \frac{1}{kr} [j_n(kr)] = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left\{ n j_{n-1}(kr) \left[\mathbf{P}_{mn}^\sigma + \sqrt{\frac{n+1}{n}} \mathbf{B}_{mn}^\sigma \right] - \right. \\ &\quad \left. - (n+1) j_{n+1}(kr) \left[\mathbf{P}_{mn}^\sigma - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \mathbf{B}_{mn}^\sigma \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \sin u e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{P}_{mn}^\sigma(u, v) du; \end{aligned} \quad (13.3.67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{emn}^1(\mathbf{r}) &= \text{rot} [\mathbf{r} Y_{emn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr)] = \\ &= \sqrt{n(n+1)} \mathbf{C}_{mn}^\sigma(\vartheta, \varphi) j_n(kr) = \frac{1}{k} \text{rot} [\mathbf{N}_{emn}^1(\mathbf{r})] = \\ &= \frac{\sqrt{n(n+1)}}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{C}_{mn}^\sigma(u, v) \sin u du; \end{aligned} \quad (13.3.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{emn}^1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k} \text{rot} [\mathbf{M}_{emn}^1(\mathbf{r})] = \\ &= n(n+1) \mathbf{P}_{mn}^\sigma(\vartheta, \varphi) \frac{1}{kr} j_n(kr) + \sqrt{n(n+1)} \mathbf{B}_{mn}^\sigma(\vartheta, \varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [r j_n(kr)] = \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1} \left\{ j_{n-1}(kr) \left[\mathbf{P}_{mn}^\sigma + \sqrt{\frac{n+1}{n}} \mathbf{B}_{mn}^\sigma \right] + \right. \\ &\quad \left. + j_{n+1}(kr) \left[\mathbf{P}_{mn}^\sigma - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \mathbf{B}_{mn}^\sigma \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{4\pi i^n} \sqrt{n(n+1)} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{B}_{mn}^\sigma(u, v) \sin u du. \end{aligned} \quad (13.3.69)$$

Эти определения надо сравнить с формулой (11.3.47). Индекс n принимает значения от 0 до ∞ ; m изменяется от 0 до n ; σ — или e , или o (четное или нечетное). Можно, конечно, применять комплексную форму

$$\mathbf{L}_{emn}^1 = \mathbf{L}_{emn}^1 + i \mathbf{L}_{omn}^1 = \frac{1}{k} \text{grad} [X_n^m(\vartheta, \varphi) j_n(kr)].$$

Имеются также функции второго рода $\mathbf{L}_{emn}^2$ и т. д., которые получаются при использовании обращающихся в бесконечность при $r=0$ сфе-

рических функций Неймана $n_n(kr)$ вместо $j_n(kr)$. Контур интегрирования по u в интегральных представлениях в этом случае преобразуется аналогично тому, как это сделано в формуле (11.3.48). Кроме этого, имеются и функции третьего рода M_{mn}^3 и т. д., получающиеся при использовании сферических функций Ганкеля $h_n(kr) = j_n(kr) + in_n(kr)$ вместо $j_n(kr)$. Эти решения описывают расходящиеся волны.

Из интегральных представлений ясно видно, что L является продольной волной, так как направление $P_{mn}^s(u, v)$ совпадает с направлением волнового вектора k для любой волны, по которому производится интегрирование. Две другие волны являются поперечными, потому что B и C нормальны k . Поскольку угловые функции P , B и C взаимно ортогональны, можно использовать интегральные представления для получения разложения в ряд плоской векторной волны. Например, аффинор $\mathfrak{Z}e^{ik \cdot r}$ является функцией углов u, v вектора k и углов ϑ, φ вектора r . Разлагая его по функциям, зависящим от u, v , и используя полную систему P, B, C , получим

$$\mathfrak{Z}e^{ik \cdot r} = \sum_{\sigma, m, n} \varepsilon_m i^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ -iP_{mn}^s(u, v) L_{mn}^1(r) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} [C_{mn}^s(u, v) M_{mn}^1(r) - iB_{mn}^s(u, v) N_{mn}^1(r)] \right\}.$$

При $u=0$ (k направлен по z) все функции P, C и B обращаются в нуль, за исключением случая $m=0$ для P и $m=1$ для C и B . Поэтому имеем (см. стр. 737)

$$\mathfrak{Z}e^{ikhz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n}{n(n+1)} \{ a_x [M_{01n}^1(r) - iN_{e1n}^1(r)] + \\ + a_y [M_{e1n}^1(r) + iN_{o1n}^1(r)] - in(n+1) a_z L_{e0n}^1(r) \}, \quad (13.3.70)$$

откуда умножением слева на постоянный вектор можно получить разложение любой плоской волны. Легко видеть, что продольная волна $a_z e^{ikhz}$ выражается исключительно через L , в то время как и $a_x e^{ikhz}$ и $a_y e^{ikhz}$ представляются обоими поперечными решениями M и N .

Излучение диполей и мультиполей. Для несколько более детального исследования свойств этих сравнительно сложно выглядящих векторных решений рассчитаем электромагнитную волну, излучаемую сферой, на которой задано (способом, который нас здесь не интересует) простое распределение осциллирующих поверхностных токов. Для подсчета излучения, вызываемого распределением токов, обычно используется весь аппарат, связанный с функцией Грина. Однако в случае только поверхностных токов можно использовать применявшееся неоднократно соотношение между поверхностным током J_s и напряженностью магнитного поля H_s у поверхности

$$J_s = \frac{c}{4\pi} [n \times H_s],$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности. В рассматриваемом случае поверхность является сферой $r=a$ и нормаль n совпадает с $-a_r$ (рассматриваются колебания вне сферы), так что

$$J_s = -\frac{c}{4\pi} [a_r \times H_{r=a}].$$

Сравнивая магнитное поле расходящейся волны и поверхностный ток, можно подсчитать излучение, обусловленное током.

Предположим на момент, что рассматривается обратная задача определения распределения тока по поверхности сферы, вызывающего данное поле излучения. При этом не будет продольных волн, поэтому не надо рассматривать волны типа L. Не будет также и волн типов M и N при $n = 0$. Простейшая волна типа M имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M}_{01}^3 = \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta h_1(kr) e^{-i\omega t} = \frac{\mathbf{E}}{ik}, \\ \mathbf{H} &= k\mathbf{N}_{01}^3 = \left\{ 2ka_r \cos \vartheta \cdot \frac{1}{kr} \cdot h_1(kr) - ka_\vartheta \sin \vartheta \cdot \frac{1}{kr} \cdot \frac{d}{dr} [rh_1(kr)] \right\} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (13.3.71)$$

а соответствующий ток на поверхности сферы равен

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{01} &= -\mathbf{a}_\varphi \frac{\omega}{12\pi} \sin \vartheta [2h_0(ka) - h_2(ka)] e^{-i\omega t} = \\ &= -i\omega \mathbf{a}_\varphi \frac{\sin \vartheta}{4\pi} \left[\frac{1 - (ka)^2 - ika}{(ka)^3} \right] e^{ika - i\omega t}. \end{aligned}$$

Ток такого рода колеблется параллельно экватору сферы, как будто сама сфера вращается вокруг оси z сначала по часовой стрелке, а затем против. Естественно ожидать, что при этом свободные заряды нигде не будут накапливаться. Это предположение подтверждается тем, что электрическое поле нигде не имеет нормальной (радиальной) компоненты. Такой замкнутый ток без свободных зарядов образует то, что называется *магнитным диполем*, а волна $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{01}^3$ называется *излучением магнитного диполя*. Петля переменного тока образует осциллирующий магнитный диполь, который, можно сказать, порождает эту волну.

Рассматривая обратную задачу, видим, что если ток равен $\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta e^{-i\omega t}$, то электрическое поле на поверхности имеет вид

$$\mathbf{E}_{r=a} = -i\omega \left[\frac{4\pi a}{c^2} \frac{1 - ika}{1 - (ka)^2 - ika} \right] (-\mathbf{J} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta e^{-i\omega t}).$$

Величина в квадратных скобках (или, вернее, ее предельное значение при $ka \ll 1$) является эффективной индуктивностью единицы длины экватора сферы при распределении тока, соответствующем магнитному диполю. При возрастании частоты, когда величиной ka уже нельзя пренебречь, импеданс единицы длины экватора (величина в скобках, умноженная на $-i\omega$) уже не является чисто реактивным. Действительно, для $ka \gg 1$ импеданс уже чисто активный, равный $4\pi/c$, т. е. сопротивлению излучения вакуума.

Взяв первую волну типа N, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{E}}{ik} = \mathbf{N}_{01}^3 = \left\{ 2a_r \frac{\cos \vartheta}{kr} h_1(kr) - \mathbf{a}_\vartheta \frac{\sin \vartheta}{kr} \frac{d}{dr} [rh_1(kr)] \right\} e^{-i\omega t}; \\ \mathbf{H} &= k\mathbf{M}_{01}^3, \quad \mathbf{J}_{01} = \mathbf{a}_\vartheta \frac{ck}{4\pi} \sin \vartheta \left[\frac{i + ka}{(ka)^2} \right] e^{ika - i\omega t}. \end{aligned} \quad (13.3.72)$$

В этом случае ток колеблется от полюса к полюсу, попеременно накапливая положительные и отрицательные заряды на полюсах. Это легко видеть, подсчитывая поверхностные заряды по радиальной составляющей электрического поля $Q = (1/4\pi) (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{E})$. Имеем

$$Q = \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{1 - ika}{(ka)^2} \cos \vartheta e^{ika - i\omega t},$$

что на 90° смещено по фазе по сравнению с током и имеет максимум на полюсах (множитель $\cos \vartheta$), а не на экваторе (множитель $\sin \vartheta$ в выражении для $\mathbf{J}$). Это простое колебание зарядов от полюса к полюсу полностью эквивалентно распределению зарядов и токов, возникающему при колебании заряженной сферы (нейтрализованной отрицательным точечным зарядом в центре сферы) вдоль оси z . Оба способа описывают то, что называется колеблющимся *электрическим диполем* (см. стр. 447).

Отношение поверхностного тока к касательной составляющей напряженности электрического поля является адмитансом единицы длины периметра электрического диполя:

$$Y_{e01} = -i\omega \left[\frac{a}{4\pi} \frac{1-ika}{1-(ka)^2-ika} \right].$$

Величина в скобках при $ka \ll 1$ представляет собой емкость — эффективную емкость двух полюсов сферы для тока, образующего диполь электрического типа. При больших значениях ka адмитанс является действительным и стремится к величине, обратной $4\pi/c$ (сопротивлению излучения свободного пространства).

Поэтому поле излучения, вообще говоря, бывает двух различных типов, соответствующих двум различным типам распределения по поверхности сферы тока возбуждения. При одном типе магнитное поле всюду ортогонально $\mathbf{r}$ и имеются свободные заряды и ток на поверхности сферы, определяемые формулами

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}_{emn}^3(\mathbf{r});$$

$$\mathbf{E}_t = -ik \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \mathbf{B}_{mn}^2(\vartheta, \varphi) [nh_{n+1}(ka) - (n+1)h_{n-1}(ka)] e^{-i\omega t};$$

$$Q = \frac{n(n+1)}{4\pi(2n+1)} Y_{emn}(\vartheta, \varphi) [h_{n+1}(ka) + h_{n-1}(ka)] e^{-i\omega t};$$

$$\mathbf{J} = \frac{ck}{4\pi} \sqrt{n(n+1)} \mathbf{B}_{mn}^2(\vartheta, \varphi) h_n(ka) e^{-i\omega t}; \quad (13.3.73)$$

$$Y = -\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{E}_t} = \frac{c}{4\pi} \frac{-i(2n+1)h_n}{nh_{n+1} - (n+1)h_{n-1}} \rightarrow \begin{cases} -i\omega \frac{a}{4\pi} & \text{при } ka \ll 1, \\ \frac{c}{4\pi} & \text{при } ka \gg 1. \end{cases}$$

Такое распределение токов и зарядов для случая (m, n) соответствует электрическому мультиполю порядка 2^n . Его импеданс $1/Y$ равен импедансу вакуума $4\pi/c$ для высоких частот, а для очень низких частот является емкостным реактансом, соответствующим емкости $a/4\pi n$ CGSE.

Случай $n=2$ называется *электрическим квадруполем*. Распределение тока при $m=0$, $n=2$ имеет вид

$$\mathbf{J} = i \frac{3c}{8\pi a} \mathbf{a}_\vartheta \sin 2\vartheta \frac{3-(ka)^2-3ika}{(ka)^2} e^{ika-i\omega t}$$

и соответствует попеременному движению зарядов от экватора к обоим полюсам, а затем от полюсов к экватору. При этом заряды одного знака накапливаются на полюсах, а заряды другого знака — на экваторе; знаки зарядов меняются через полпериода. Излучение такого типа возбуждается деформирующейся заряженной сферой, которая принимает форму то вытянутого, то сплюсненного сфероида; расстояние между полюсами сокращается и экватор увеличивается, а через полпериода — наоборот.

В излучении другого типа электрическое поле нормально $\mathbf{r}$, и поэтому на поверхности сферы нет свободных зарядов, а есть лишь поверхностный ток:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M}_{mn}^3, \quad \mathbf{E}_t = ik \sqrt{n(n+1)} C_{mn}^s(\vartheta, \varphi) h_n(kr) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{J} &= \frac{ck}{4\pi} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} C_{mn}^s(\vartheta, \varphi) [nh_{n+1}(ka) - (n+1)h_{n-1}(ka)] e^{-i\omega t}; \\ Z &= -\frac{E_t}{J} = \frac{4\pi}{c} \frac{-i(2n+1)h_n}{nh_{n+1} - (n+1)h_{n-1}} \rightarrow \begin{cases} -i\omega \frac{4\pi a}{nc^2} & \text{при } ka \ll 1, \\ \frac{4\pi}{c} & \text{при } ka \gg 1. \end{cases} \quad (13.3.74) \end{aligned}$$

Такое распределение токов при фиксированных (m, n) соответствует магнитному мультиполю порядка 2^n . Его импеданс Z при высоких частотах равен импедансу вакуума, а при низких частотах является реактивным, соответствующим индуктивности $4\pi a / nc^2$ CGSM.

Магнитный квадруполь при $m = 0$ имеет распределение тока ($m = 0, n = 2$)

$$\mathbf{J} = \frac{3ck}{10\pi} \mathbf{a}_\varphi \sin 2\vartheta [nh_{n+1}(ka) - (n+1)h_{n-1}(ka)],$$

что соответствует току, текущему параллельно экватору в течение одной половины периода по часовой стрелке в северном и против часовой стрелки в южном полушарии и в обратных направлениях в течение другой половины периода. Мультиполи высших порядков, конечно, представляют более сложную картину распределения токов и зарядов для электрических мультиполей и одних токов для магнитных мультиполей.

Поскольку функции $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ на поверхности сферы образуют полную ортогональную систему, можно получить решение для излучения произвольно заданного на поверхности сферы распределения тока или для произвольного распределения напряженности электрического поля. Получающееся при этом разложение решения в ряд автоматически дает разложение полного поля излучения на члены, соответствующие системе мультиполей, эквивалентной действительному распределению тока. (См. также рассуждения на стр. 260 и последующих, относящихся к аналогичному разложению статического распределения зарядов.) Как будет показано ниже, простой способ расчета излучения от колеблющейся совокупности зарядов и токов на некотором расстоянии от этой совокупности заключается в представлении этих вибраторов эквивалентными электрическими и магнитными диполями, парой квадруполов и т. д., таким же образом, как и при разложении статической совокупности зарядов, данном в формулах (10.3.42) и (10.3.43). Поле излучения при этом естественным образом оказывается выраженным через функции $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$.

Стоячие волны в сферической полости. Функции $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ можно использовать и для расчета стоячих электромагнитных волн *внутри* сферической полости. В случае идеально проводящей сферы радиуса a стоячие волны, образованные векторным потенциалом $\mathbf{A}$, и допустимые частоты определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mln}^s(\mathbf{r}) &= \sqrt{l(l+1)} C_{ml}^s(\vartheta, \varphi) j_l\left(\frac{\pi\beta_{ln}r}{a}\right), \\ \gamma_{hln} &= \frac{c\beta_{ln}}{2a}, \\ \mathbf{N}_{mln}^s(\mathbf{r}) &= l(l+1) \frac{a}{\pi\gamma_{ln}r} j_l\left(\frac{\pi\gamma_{ln}r}{a}\right) \mathbf{P}_{ml}^s(\vartheta, \varphi) + \\ &+ \sqrt{l(l+1)} \frac{a}{\pi\gamma_{ln}r} \frac{d}{dr} \left[r j_l\left(\frac{\pi\gamma_{ln}r}{a}\right) \right] \mathbf{B}_{ml}^s(\vartheta, \varphi), \quad (13.3.75) \\ \gamma_{eln} &= \frac{c\gamma_{ln}}{2a}, \end{aligned}$$

где β_{ln} — n -й корень уравнения $j_l(\pi\beta) = 0$, а γ_{ln} — n -й корень уравнения $d[\pi\gamma j_l(\pi\gamma)]/d\gamma = 0$. В обоих случаях k (а тем самым γ) выбрано так, что касательные составляющие $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$ равны нулю при $r = a$.

Нормирующие постоянные для этих собственных функций не такие сложные, как может показаться. Для магнитного случая интеграл от квадрата $\mathbf{M}$ равен

$$\begin{aligned}\Lambda_{mln}^h &= \frac{2\pi a^3}{\epsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} [j_l^2(\pi\beta_{ln}) - j_{l-1}(\pi\beta_{ln}) j_{l+1}(\pi\beta_{ln})] = \\ &= \frac{2\pi a^3}{\epsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} j_{l+1}^2(\pi\beta_{ln}).\end{aligned}\quad (13.3.76)$$

Так как $j_l(\pi\beta_{ln}) = 0$, то $j_{l+1}(\pi\beta_{ln}) = -j_{l-1}(\pi\beta_{ln})$. Проинтегрировать квадрат функции $\mathbf{N}$ несколько сложнее, но, используя уравнение для сферических функций Бесселя в форме

$$l(l+1)j_l(kr) - \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} j_l(kr) \right] = k^2 r^2 j_l(kr),$$

легко получить простой результат

$$\Lambda_{mln}^e = \left(\frac{a}{\pi\gamma_{ln}} \right)^2 \frac{4\pi}{\epsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_0^a \left\{ l(l+1)j_l^2 + \left[\frac{d}{dr} r j_l \right]^2 \right\} dr.$$

Интегрируя по частям второй член в скобках, получаем

$$\left[r j_l \frac{d}{dr} (r j_l) \right]_0^a - \int_0^a r j_l \frac{d^2}{dr^2} (r j_l) dr = - \int_0^a j_l \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} j_l \right] dr,$$

поскольку при $ka = \pi\gamma_{ln}$ имеем $d(rj_l)/dr = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Lambda_{mln}^e &= \frac{2\pi a^3}{\epsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} [j_l^2(\pi\gamma_{ln}) - j_{l-1}(\pi\gamma_{ln}) j_{l+1}(\pi\gamma_{ln})] = \\ &= \frac{2\pi a^3}{\epsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \left[1 - \frac{l(l+1)}{(\pi\gamma_{ln})^2} \right] j_l^2(\pi\gamma_{ln}).\end{aligned}\quad (13.3.77)$$

Можно также показать, что интеграл от E^2 по внутренней области равен интегралу от H^2 и равен $k^2 \Lambda_{mln}$, где $k = \pi\beta_{ln}/a$ для волн типа $\mathbf{M}$ и $k = \pi\gamma_{ln}/a$ для волн типа $\mathbf{N}$.

Если проводимость внутренней поверхности сферы является большой, но конечной, то потери энергии можно выразить через безразмерную характеристику Q , определенную по формуле (13.3.48). Используя выражения для Λ^e и Λ^h и соответствующие выражения $\mathbf{N}_l$ для волн типа $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, получим величину Q для различных стоячих волн:

$$\begin{aligned}Q_{ln}^e &= \frac{a}{2\tau_s} \left[1 - \frac{l(l+1)}{(\pi\gamma_{ln})^2} \right] \text{ для волн типа } \mathbf{N}_{mln}, \\ Q_{ln}^h &= \frac{a}{2\tau_s} \text{ для волн типа } \mathbf{M}_{mln}, \quad \tau_s = \sqrt{\mu c^2 / 8\pi\omega\sigma}.\end{aligned}$$

Это чрезвычайно простой результат.

Функция Грина внутри сферы с почти идеально проводящей поверхностью при частоте возбуждения $kc/2\pi$ в таком случае имеет вид

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k) = 4\pi \sum_{\sigma, m, l, n} \left\{ \frac{N_{mln}^{\sigma}(\mathbf{r}_0) N_{mln}^{\sigma}(\mathbf{r})}{(\Lambda_{mln}^e)^2 \left[\left(\frac{\pi \gamma_{ln}}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{i}{2Q_{ln}^e} \right)^2 - k^2 \right]} + \right. \\ \left. + \frac{M_{mln}^{\sigma}(\mathbf{r}_0) M_{mln}^{\sigma}(\mathbf{r})}{(\Lambda_{mln}^h)^2 \left[\left(\frac{\pi \beta_{ln}}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{i}{2Q_{ln}^h} \right)^2 - k^2 \right]} \right\}, \quad (13.3.78')$$

что позволяет рассчитать многие задачи возбуждения колебаний различными внешними силами.

Колебания упругого шара. Колебания упругого шара также можно выразить через функции L , M и N , определенные по формулам (13.3.67) — (13.3.69). Значение k для продольной функции L равно $k_c = \omega \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$, что соответствует волне чистого сжатия; для обеих поперечных волн k равно $k_s = \omega \sqrt{\rho/\mu}$, что соответствует волнам сдвига. Чтобы подсчитать частоты и форму свободных колебаний, надо сначала вычислить вектор напряжения $\mathbf{T}_r = \lambda \mathbf{a}_r \operatorname{div} \mathbf{s} + \mu \mathbf{a}_r (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla)$ на поверхности $r = a$. Он равен

$$\begin{aligned} \text{для } L_{\sigma ml}^1: \mathbf{T}_r &= \frac{1}{k_c} \mathbf{P}_{ml}^{\sigma} \left[-\lambda k_c^2 j_l(k_c a) + 2\mu \frac{d^2}{da^2} j_l(k_c a) \right] + \\ &+ \frac{1}{k_c} \sqrt{l(l+1)} \mathbf{B}_{ml}^{\sigma} \left[\frac{2\mu}{a} \frac{d}{da} j_l(k_c a) - \frac{\mu}{a^2} j_l(k_c a) \right]; \\ \text{для } M_{\sigma ml}^1: \mathbf{T}_r &= \mu \sqrt{l(l+1)} \mathbf{C}_{ml}^{\sigma} \left[\frac{d}{da} j_l(k_s a) - \frac{1}{a} j_l(k_s a) \right]; \\ \text{для } N_{\sigma ml}^1: \mathbf{T}_r &= 2\mu l(l+1) \frac{1}{k_s} \mathbf{P}_{ml}^{\sigma} \frac{d}{da} \left[\frac{j_l(k_s a)}{a} \right] + \\ &+ \frac{\mu}{k_s} \sqrt{l(l+1)} \mathbf{B}_{ml}^{\sigma} \left[\frac{d^2}{da^2} j_l(k a) + \frac{l^2 + l - 2}{a^2} j_l(k a) \right]. \end{aligned} \quad (13.3.78)$$

Если внешняя поверхность шара ($r = a$) свободна, то значения k берутся такими, чтобы $\mathbf{T}$ обращалось в нуль. Простейший тип волн дает система волн кручения $\mathbf{s} = M_{\sigma mn}^1(\mathbf{r})$, где $k = k_s = \omega \sqrt{\rho/\mu}$. Допустимые значения k_s и, следовательно, собственные частоты $(1/2\pi) k_s \sqrt{\mu/\rho}$ определяются из условия $j_l'(k_s a) = (1/k_s a) j_l(k_s a)$, где штрих означает дифференцирование по полному аргументу. Собственные колебания оказываются вырожденными, не зависящими от m , так что для определения частот свободных колебаний достаточно рассмотреть только случай $m = 0$. Применяя формулы для dj_l/dz и j_l/z , приведенные в конце гл. 11, легко видеть, что уравнение для k_s переходит в

$$(l-1) j_{l-1}(k_s a) = (l+2) j_{l+1}(k_s a).$$

Имеется наименьшая гармоника для $k_s = 0$, соответствующая

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_{\varphi} r \sin \vartheta,$$

представляющая свободное вращение вокруг оси z . (Гармоника C_{11}^e для $k_s = 0$ представляет вращение вокруг оси x ; C_{11}^e — вращение вокруг оси y .) Конечно, надо учесть эти гармоники при рассмотрении свободных движений упругого шара, хотя они и не представляют упругих колебаний.

Колебательные гармоники с простейшей угловой зависимостью получаются при $l=1$ ($C_{ml}=0$ при $l=0$), и для этих гармоник уравнение для k_s имеет вид $j_2(k_s a)=0$, откуда

$$k_s = \frac{\pi \beta_{2n}}{a}, \quad \text{резонансная частота} = \frac{\beta_{2n}}{2a} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad l=1,$$

где β_{2n} — корни, приведенные на стр. 534. Смещение точки (r, ϑ, φ) шара для наинизшей из этих гармоник имеет вид

$$s = a_\varphi \sin \vartheta j_1 \left(\frac{\pi \beta_{21} r}{a} \right) e^{-i (\pi \beta_{21}/a) c_s t}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

внутренняя часть шара вращается вокруг оси z в одну сторону, а внешняя часть — в противоположную сторону.

Гармоники для $l=2$ имеют другую последовательность собственных частот, наименьшее допустимое значение k_s , как показывает исследование уравнения для k_s , несколько меньше $\pi \beta_{11}/a$. Соответствующее выражение для смещения имеет вид

$$s = \frac{3}{2} a_\varphi \sin (2\vartheta) j_2 \left(\frac{\pi \delta_{31} r}{a} \right) e^{-i (\pi \delta_{31}/a) c_s t},$$

где δ_{31} — наинизший корень $j_1(\pi \delta) = 3j_3(\pi \delta)$, несколько меньший β_{11} . Для этой гармоники северное полушарие вращается в одном направлении вокруг оси z , а южное полушарие — в противоположном направлении. Через полпериода направления вращений меняются на противоположные.

Гармониками чистого сжатия являются лишь полностью симметричные гармоники типа **L**, для которых $m=l=0$. Чтобы поверхность $r=a$ была свободной, необходимо

$$\lambda j_0(k_c a) = 2\mu j_0''(k_c a) = \mu j_2(k_c a) - \mu j_0(k_c a),$$

или

$$k_c = \frac{\pi \varepsilon_{0n}}{a}, \quad \text{где} \quad j_0(\pi \varepsilon_{0n}) = \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} j_2(\pi \varepsilon_{0n}).$$

Соответствующие смещения равны

$$s = -a_r j_1 \left(\frac{\pi \varepsilon_{0n} r}{a} \right) e^{-i (\pi \varepsilon_{0n}/a) c_c t}, \quad c_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}};$$

это — гармоники, соответствующие чисто радиальным колебаниям.

Никакие другие гармоники не представляют чистого сжатия; при $l > 0$ граничному условию $T_r = 0$ удовлетворяет лишь комбинация **L** и **N**. Чтобы получить ее, положим

$$s = L_{ml}^1(\mathbf{r})_{k=k_c} + A N_{ml}^1(\mathbf{r})_{k=k_s}$$

и выберем A и ω так, чтобы $T_r = 0$. Это приводит к паре однородных уравнений относительно $j_l(k_c a)$, $j_l(k_s a)$ и их производных, а также λ , μ и A , которые можно разрешить в любом конкретном случае, но общее решение которых нельзя выписать в явном виде. Для гармоник, соответствующих $m=0$, $l=1$, колебания представляют собой изменение формы сферы из вытянутого сфероида в сплюснутый за период колебаний.

Функция Грина для свободного пространства. Возвращаясь к случаю электромагнитных колебаний и сравнивая формулы (13.3.77'), (13.3.67), (13.3.69) и (11.3.53), мы видим, что поперечную аффинорную функцию Грина сферической полости можно выразить через скалярную функцию Грина той же полости. Для этого к данной функции надо применить

векторные операторы как по $\mathbf{r}$, так и по $\mathbf{r}_0$. Для части М формулы (13.3.77') мы исходим из скалярной функции Грина, обращающейся в нуль при $r=a$. Эту функцию можно представить в виде суммы сферических гармоник различных порядков:

$$G^0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l^0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k), \quad g_l^0 = \sum_{m,n} \frac{4\pi\psi_{mln}(\mathbf{r}_0)\psi_{mln}(\mathbf{r})}{\Lambda_{mln}^2(k_{ln}^2 - k^2)},$$

где $k_{ln} = \pi^2_{ln}/a$, $\psi_{mln} = Y_{ml}j_l$ и где Λ_{mln} равно нормирующему множителю, входящему в (13.3.77'), умноженному на $1/l(l+1)$. Поэтому часть М формулы (13.3.77') можно символически записать (опуская малые члены в Q , что соответствует идеальной проводимости сферы) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \text{rot}_0 \text{rot} [\mathbf{r}_0 \mathbf{r} g_l^0].$$

Аналогично часть N аффинорной функции Грина запишем в виде

$$\frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} (\text{rot}_0 \text{rot}_0) (\text{rot} \text{rot}) [\mathbf{r}_0 \mathbf{r} g_l^1],$$

где g_l^1 есть l -й член ряда для скалярной функции Грина, для которой нормальная производная $\mathbf{r}g$ обращается в нуль при $r=a$. В операторном выражении продольной части используются операторы $\text{grad}_0 \cdot \text{grad}$ и следует опустить множитель $1/l(l+1)$.

При рассмотрении аффинорной функции Грина для неограниченного пространства разница между g^0 и g^1 исчезает, но операторные обозначения сохраняют свой смысл. Согласно (11.3.44),

$$\frac{e^{ikR}}{R} = ik \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{m,\sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \psi_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) \psi_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}), \quad r > r_0,$$

где

$$\psi_{\sigma ml}^1 = Y_{ml}^{\sigma}(\vartheta, \varphi) j_l(kr), \quad \psi_{\sigma ml}^3 = Y_{ml}^{\sigma}(\vartheta, \varphi) h_l(kr).$$

Применяя операторы, как было намечено выше, можно немедленно получить аффинорную функцию Грина для неограниченного пространства:

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k) = \mathfrak{J} \frac{e^{ikR}}{k} = ik \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \sum_{m,\sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \{ \mathbf{M}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) \mathbf{M}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) \mathbf{N}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}) + l(l+1) \mathbf{L}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) \mathbf{L}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}) \}, \quad (13.3.79)$$

где m изменяется от 0 до l , σ есть или e или o , а векторные функции определены по формулам (13.3.67)–(13.3.69), функции с верхним индексом 3 соответствуют расходящимся волнам и принято, что $r > r_0$. При $r < r_0$ в приведенном ряде надо поменять местами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$. Этот ряд можно получить и обычным способом вычисления функции Грина, но, поскольку уже имелась в распоряжении скалярная форма, желательно было показать, как операторный символизм позволяет перейти от скалярной формы к аффинорной. При этом была включена и продольная часть, хотя она в электромагнитном случае при вычислении полей обычно исчезает.

Излучение переменного тока. Задача определения электромагнитного поля излучения, создаваемого в неограниченном пространстве заданным

внутри сферы радиуса a распределением осциллирующих токов, включает в себя многие важные случаи, начиная от излучения атома и кончая возбуждением радиоволн. Вначале примем, что колебания являются монохроматическими с частотой $\nu = \omega/2\pi = kc/2\pi$. В дальнейшем, используя метод преобразования Лапласа, можно будет рассчитать излучение неустановившегося движения зарядов. Поэтому примем, что распределение зарядов и токов задается функциями $\rho(r, \vartheta, \varphi)e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{J}(r, \vartheta, \varphi)e^{-i\omega t}$, где ρ и $\mathbf{J}$ равны нулю при $r > a$. Эти две величины не полностью независимы, поскольку продольная часть $\mathbf{J}$ связана с ρ уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_l = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\omega \rho.$$

Исследуемая задача хороша тем, что здесь еще раз можно рассмотреть следствия выбора калибровки потенциалов и соответствующие соотношения между продольной и поперечной функциями Грина. При такой калибровке потенциалов, когда используются и векторный и скалярный потенциалы, уравнение для $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

В этом случае используется полная аффинорная функция Грина. Для неограниченного пространства потенциалы определяются выражениями

$$\mathbf{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \iiint \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0, \quad \varphi = \iiint \frac{e^{ikR}}{R} \rho(\mathbf{r}_0) dv_0 \cdot e^{-i\omega t}.$$

Векторный потенциал имеет продольную часть (выражающуюся рядом по функциям L_{ml}^3), которая исчезает при подсчете поля. Для определения $\mathbf{H}$ надо взять $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, что, конечно, уничтожает продольную часть $\mathbf{A}$; для определения $\mathbf{E}$ используется комбинация $-\operatorname{grad} \varphi + ik\mathbf{A}$, и соответствующая часть от φ взаимно уничтожается с продольной частью $ik\mathbf{A}$ в области $r > a$. Чтобы проверить это последнее утверждение, возьмем дивергенцию от $-\operatorname{grad} \varphi + ik\mathbf{A}$. Она должна обратиться в нуль, если отсутствует продольная часть данного выражения. Имеем

$$\begin{aligned} ik \operatorname{div} \mathbf{A} &= i\omega e^{-i\omega t} \iiint \left[\operatorname{grad} \frac{e^{ikR}}{R} \right] \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0 = \\ &= -i\omega e^{-i\omega t} \iiint \left[\operatorname{grad}_0 \frac{e^{ikR}}{R} \right] \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0. \end{aligned}$$

Но

$$\left[\operatorname{grad}_0 \frac{e^{ikR}}{R} \right] \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) = \operatorname{div}_0 \left[\frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) \right] - \frac{e^{ikR}}{R} \operatorname{div}_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_0),$$

и интеграл от первого члена по неограниченному пространству равен поверхностному интегралу по бесконечной сфере. Последний равен нулю. Тем самым остается лишь интеграл от второго члена:

$$\begin{aligned} ik \operatorname{div} \mathbf{A} &= i\omega \iiint \frac{e^{ikR}}{R} \operatorname{div}_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0 \cdot e^{-i\omega t} = \\ &= -\omega^2 \iiint \frac{e^{ikR}}{R} \rho(\mathbf{r}_0) dv_0 \cdot e^{-i\omega t} = \\ &= -\omega^2 \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + 4\pi \rho = \nabla^2 \varphi \quad \text{при } r > a. \end{aligned}$$

Здесь использованы уравнения непрерывности для ρ и уравнение для φ . При $r > a$ отсюда следует, что $\operatorname{grad} \varphi$ равен продольной части $\mathbf{A}_l$ векторного потенциала, умноженной на ik . Поэтому $\mathbf{E}$ определяется лишь поперечной частью $\mathbf{A}$, за исключением случая $r < a$.

Если, с другой стороны, калибровка потенциалов такова, что $\varphi = 0$, то векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

которое отличается от предыдущего отсутствием члена $\text{grad div } \mathbf{A}$ в $\nabla^2 \mathbf{A}$. Как следует из рассуждений, предшествовавших формуле (13.1.37), решение этого уравнения представляется через поперечную аффинорную функцию Грина

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \iiint \mathcal{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0 e^{-i\omega t} - \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{J}_l(\mathbf{r}), \quad (13.3.80)$$

где $\mathbf{J}_l$ — продольная часть тока (часть, порождающая свободные заряды). Это выражение при $r > a$ является как раз поперечной частью векторного потенциала при предыдущей калибровке потенциалов. В рассматриваемом случае $\mathbf{E}$ равно $ik\mathbf{A}$, что опять при $r > a$ совпадает с поперечной частью предыдущего $\mathbf{A}$, умноженной на ik . В предыдущем случае продольная часть оказалась несущественной при подсчете $\mathbf{E}$ в свободной от зарядов области $r > a$, поскольку продольная часть $ik\mathbf{A}$ взаимно уничтожалась с членом $-\text{grad } \varphi$. В рассматриваемом случае при подсчете $\mathbf{E}$ также можно избавиться от продольной части, применяя поперечную функцию Грина. Благодаря этому $\mathbf{A}$ вообще не имеет продольной части. Последний способ, видимо, более эффективен, если можно получить явное выражение для $\mathcal{G}_t$.

В случае разложения функции Грина в сферических координатах, приведенного в формуле (13.3.79), легко получить поперечную функцию Грина; достаточно просто опустить члены с $\mathbf{L}$. Поэтому полное выражение для векторного потенциала при такой калибровке потенциалов, когда $\varphi = 0$, для $r > a$ равно

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \{m_{ml}^{\sigma} \mathbf{M}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}) + n_{ml}^{\sigma} \mathbf{N}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r})\} e^{-i\omega t}, \quad (13.3.81)$$

где постоянные

$$m_{ml}^{\sigma} = \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{M}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) dv_0, \quad n_{ml}^{\sigma} = \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) dv_0$$

можно назвать (m, l) -компонентами распределения тока.

При $ka \ll l$ (когда длина волны λ значительно больше произведения $1/l$ на радиус области, вне которой $\mathbf{J} = 0$) достаточно взять лишь первый член в разложении сферической функции Бесселя, входящей в $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{N}^1$:

$$j_l(kr) \simeq \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (kr)^l,$$

так, что, например,

$$n_{ml}^{\sigma} \simeq \frac{2^l (l+1)! k^{l-1}}{(2l+1)!} \iiint \{lr^{l-1} Y_{lm}^{\sigma} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J} + r^l \mathbf{J} \cdot \text{grad } Y_{lm}^{\sigma}\} dv.$$

Но

$$r^l \mathbf{J} \cdot \text{grad } Y = \text{div}(r^l Y \mathbf{J}) - lr^{l-1} Y \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J} - r^l Y \text{div } \mathbf{J}.$$

Интеграл от первого члена является поверхностным интегралом, равным нулю. Второй член взаимно уничтожается с первым членом в подинтегральном выражении для n_{ml}^{σ} , а третий член в силу уравнения непрерывности, связывающего $\mathbf{J}$ и ρ , равен $i\omega r^l Y \rho$, так что

$$n_{ml}^{\sigma} = -ik^l c \frac{2^l (l+1)!}{(2l+1)!} p_{ml}^{\sigma},$$

где

$$P_{ml}^s = \frac{i(2l+1)!}{ck^4 2^l (l+1)!} \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{N}_{cm}^l dv \simeq \iiint \rho(\mathbf{r}) Y_{ml}^s(\vartheta, \varphi) r^l dv, \quad ka \ll l. \quad (13.3.82)$$

Постоянные p для заданного значения l называются *параметрами электрического мультиполя* порядка l , создаваемого данным распределением заряда. В пределе при длине волны, значительно большей a , они представляют комбинации моментов мультиполей для статического поля, рассмотренных в формуле (10.3.42) и последующих. Для более коротких длин волн постоянные p отличаются от этих предельных значений, но их все же можно называть параметрами мультиполей.

Из формулы (10.3.36) и задачи 10.29 для $ka \ll l$ имеем

$$\begin{aligned} p_{01} &= \iiint z \rho dv = D_z^e, \quad p_{11}^e = D_x^e, \quad p_{11}^o = D_y^e, \\ p_{02} &= Q_{zz}^e - \frac{1}{2} Q_{xx}^e - \frac{1}{2} Q_{yy}^e, \quad p_{12}^e = 3Q_{xz}^e, \quad p_{12}^o = 3Q_{yz}^e, \\ p_{22}^e &= 3Q_{xx}^e - 3Q_{yy}^e, \quad p_{22}^o = 6Q_{xy}^e, \end{aligned} \quad (13.3.83)$$

где вектор $\mathbf{D}^e$ является *электрическим дипольным моментом* $\iiint \mathbf{r} \rho dv$ для данного распределения зарядов, а $\mathbf{Q}^e$ — *аффинор электрического квадрупольного момента* $\iiint (\mathbf{r}\mathbf{r}) \rho dv$. То обстоятельство, что для описания поля необходимо лишь пять квадрупольных параметров p_{m2} , в то время как аффинор квадрупольного поля имеет шесть независимых компонент, объяснено на стр. 261.

Чтобы найти выражение параметров более высоких мультиполей через компоненты моментов мультиполей высших порядков, применим формулу (10.3.34):

$$\begin{aligned} r^l X_{ml} &= r^l [Y_{ml}^e + iY_{ml}^o] = e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta) r^l = \\ &= \frac{(l+m)!}{2\pi i^m l!} \int_0^{2\pi} \left[z + \frac{i}{2}(x-iy)e^{iu} + \frac{i}{2}(x+iy)e^{-iu} \right]^l e^{imu} du = \\ &= \frac{(l+m)!}{2^m} \sum_s \frac{(-1)^s}{4^s s! (m+s)! (l-m-2s)!} z^{l-m-2s} (x^2+y^2)^s (x+iy)^m, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} P_{ml} &= p_{ml}^e + ip_{ml}^o = \\ &= \frac{(l+m)!}{2^m (l-m)! m!} \iiint (x+iy)^m \left\{ z^{l-m} - \frac{(l-m)(l-m-1)}{4(m+1)} z^{l-m-2} (x^2+y^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{8(2!)(m+1)(m+2)} z^{l-m-4} (x^2+y^2)^2 - \dots \right\} dv. \end{aligned}$$

Для постоянных m_{ml}^s при $ka \ll l+1$ имеем

$$m_{ml}^s \simeq \frac{-2^l l! k^l}{(2l+1)!} \iiint \mathbf{r}^l \mathbf{J} \cdot [\mathbf{r} \times \text{grad } Y_{ml}] dv = \frac{2^l l! k^l}{(2l+1)!} \iiint \mathbf{r}^l [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] \cdot \text{grad } Y_{ml} dv,$$

где $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ — вектор циркуляции тока, порождающий магнитные мультиполи. Свойства этих магнитных мультиполей можно проанализировать совершенно таким же образом, как и свойства электрических мультиполей. Положим

$$m_{ml}^s = \frac{2^l l! k^l}{(2l+1)!} h_{ml}^s,$$

где константы

$$h_{ml}^s = \frac{(2l+1)!}{2^l l! k^l} \iiint j_l(kr) [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] \cdot \text{grad } Y_{ml} dv \simeq \\ \simeq \frac{1}{l} \iiint \text{grad } (r^l Y_{ml}) \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dv, \quad ka \ll l, \quad (13.3.84)$$

можно назвать *параметрами магнитных мультиполей* для заданного распределения токов и зарядов. Они являются комбинациями *моментов магнитных мультиполей*, определенных по аналогии с моментами электрических мультиполей. Например, при $ka \ll l$

$$h_{01} = \iiint \text{grad } z \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dv = D_z^h, \\ h_{11}^e = D_x^h, \quad h_{11}^o = D_y^h, \quad \mathbf{D}^h = \iiint [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dv, \\ h_{02} = Q_{zz}^h - \frac{1}{2} Q_{xx}^h - \frac{1}{2} Q_{yy}^h, \quad h_{12}^e = 3Q_{xz}^h, \quad h_{12}^o = 3Q_{yz}^h, \\ h_{22}^e = 3Q_{xx}^h - 3Q_{yy}^h, \quad h_{22}^o = 6Q_{xy}^h; \quad (13.3.85)$$

здесь $\mathbf{D}^h$ — вектор *магнитного дипольного момента* $\iiint [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dv$, а Q — компоненты симметричного *аффинора* $\mathfrak{D}^h$ — *магнитного квадрупольного момента* $\frac{1}{2} \iiint \{ \mathbf{r} [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] + [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] \mathbf{r} \} dv$. Соотношение между h и моментами магнитных мультиполей высших порядков можно получить из соотношения между X_{ml} и полиномами от x, y и z , имеющими место для случая электрических мультиполей.

Собирая все эти члены, получим для электрических и магнитных полей, излучаемых заданным распределением колеблющихся зарядов и токов, при $r > a$

$$\mathbf{E} = ik^2 e^{-i\omega t} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l (l-1)!}{(2l)!} k^l \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left\{ p_{ml}^\sigma \mathbf{N}_{ml}^3(\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + \frac{i}{c} \frac{l}{l+1} h_{ml}^\sigma \mathbf{M}_{ml}^3(\mathbf{r}) \right\} \underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} \\ \underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} ik \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l (l-1)!}{(2l)!} (-ik)^l \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ \times \sqrt{l(l+1)} \left\{ p_{ml}^\sigma \mathbf{B}_{ml}^\sigma(\vartheta, \varphi) + \frac{l}{l+1} \frac{h_{ml}^\sigma}{c} \mathbf{C}_{ml}^\sigma(\vartheta, \varphi) \right\} \\ \mathbf{H} = ik^2 e^{-i\omega t} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l (l-1)!}{(2l)!} k^l \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{c} \frac{l}{l+1} h_{ml}^\sigma \mathbf{N}_{ml}^3(\mathbf{r}) - ip_{ml}^\sigma \mathbf{M}_{ml}^3(\mathbf{r}) \right\} \underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} \\ \underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} ik \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l (l-1)!}{(2l)!} (-ik)^l \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ \times \sqrt{l(l+1)} \left\{ \frac{l}{l+1} \frac{h_{ml}^\sigma}{c} \mathbf{B}_{ml}^\sigma(\vartheta, \varphi) - p_{ml}^\sigma \mathbf{C}_{ml}^\sigma(\vartheta, \varphi) \right\}. \quad (13.3.86)$$

Действительная часть от $(c/4\pi) [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ представляет интенсивность излучения, а интеграл от этого выражения по поверхности сферы радиуса, значительно большего, чем a ,

$$W = k^2 c \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^{2l} (l-1)! (l+1)!}{(2l)! (2l+1)!} k^{2l} \sum_{m, \sigma} \epsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left[(p_{ml}^{\sigma})^2 + \frac{l^2}{(l+1)^2} \left(\frac{h_{ml}^{\sigma}}{c} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{k^2}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \sum_{m, \sigma} \epsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} [(n_{ml}^{\sigma})^2 + (m_{ml}^{\sigma})^2] \quad (13.3.87)$$

является полной мощностью, излучаемой совокупностью зарядов и токов. Поскольку величины p и h при $ka \ll l$ не зависят от k , будучи равными статическим параметрам, легко видеть, что излучение l -го эквивалентного мультиполя при низких частотах пропорционально частоте в степени $2(l+1)$. Далее, поскольку, как можно показать, $|p_{ml}^{\sigma}|$ меньше $a^l Q$, где Q — некоторая постоянная, имеющая размерность заряда, не зависящая от m и l , и поскольку $|h_{ml}^{\sigma}|$ меньше $a^{l+1} I$, где постоянная I имеет размерность тока, то ряд сходится достаточно хорошо, пока $ka = \omega a/c$ значительно меньше единицы. Член электрического диполя для p_{m1}^{σ} обычно является наибольшим; следующие члены, меньшие на порядок $(ka)^2$, представляют электрический квадруполь и магнитный диполь и т. д. Существенно отметить, однако, что этот общий порядок величин имеет место, лишь когда продольная часть тока — того же порядка, что и поперечная. Например это может и не иметь места для атомного ядра, в котором поперечная часть тока часто является преобладающей.

Излучение полуволновой антенны. В качестве примера излучения объекта тех же размеров, что и длина волны, подсчитаем компоненты поля и полную энергию излучения прямого провода длины $2a$, который используется как полуволновая антенна в свободном пространстве. Поместив начало координат в центре провода и направив ось z по проводу, в первом приближении получим

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_z I_0 \delta(x) \delta(y) \cos(kz) e^{-ikt} \quad (|z| < a).$$

Для резонанса должно быть $k = \pi/2a$, т. е. частота $\nu = c/4a$. Мы скажем, что это верно лишь в первом приближении, поскольку нет уверенности, что действительное распределение тока в резонирующей антенне определяется именно этим выражением; для точного решения задачи надо рассмотреть свободные колебания системы, состоящей из тока в антенне и поля излучения. Приведенное распределение тока имеет место для свободных колебаний в проводе, не связанных с полем излучения. Естественно предположить, что взаимодействие с полем излучения не приводит к значительному изменению распределения тока.

Исследование получающихся при этом интегралов m_{ml}^{σ} и n_{ml}^{σ} показывает, что все m равны нулю (следовательно, поля эквивалентных магнитных мультиполей отсутствуют) и что n отличны от нуля лишь при $m=0$ и $l=2n+1$, т. е. l нечетном. Имеем

$$n_{0, 2n+1} = -(2n+1)(2n+2) \frac{2aI_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} n_0(z) j_{2n+1}(z) dz = aI_0 j_{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} \right),$$

$$n_{01} = \frac{4aI_0}{\pi^2}, \quad n_{03} = \frac{48aI_0}{\pi^5} (10 - \pi^2), \dots,$$

так что ряд, определяющий поле, имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{3iI_0}{\pi c} \left\{ \mathbf{N}_{01}^3(\mathbf{r}) + \frac{14}{3\pi^3} (10 - \pi^2) \mathbf{N}_{03}^3(\mathbf{r}) + \dots \right\} e^{-i(\pi c/2a)t}.$$

Амплитуда эффективного диполя равна $12a^2 I_0 / \pi^3 c$, амплитуда квадруполь равна нулю, а амплитуды мультиполей высших порядков достаточно малы, чтобы ими пренебречь при подсчете энергии излучения, хотя четвертый член оказывает заметное влияние на угловое распределение поля излучения. Мощность, излучаемая диполем, равна $6I_0^2 / \pi^2 c$, что приблизительно равно мощности излучения полуволновой антенны.

В приближении до четвертого порядка поле на больших расстояниях от антенны ($r \gg a$) имеет вид

$$\mathbf{E} \simeq -i \frac{3I_0}{\pi c r} e^{i(\pi/2a)(r-ct)} \mathbf{a}_\vartheta \sin \vartheta \left[1 - \frac{7}{\pi^3} (10 - \pi^2) (5 \cos^2 \vartheta - 1) \right],$$

$$\mathbf{H} \simeq -i \frac{3I_0}{\pi c r} e^{i(\pi/2a)(r-ct)} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta \left[1 - \frac{7}{\pi^3} (10 - \pi^2) (5 \cos^2 \vartheta - 1) \right];$$

поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно ортогональны и ортогональны радиус-вектору. Поля достигают наибольших значений в плоскости, нормальной оси ($\vartheta = \pi/2$), и равны нулю вдоль оси антенны ($\vartheta = 0$).

Излучение петли тока. Представляет интерес также и излучение в случае постоянного тока, текущего по петле радиуса a вокруг оси z . Ток в этом случае равен

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_\varphi I_0 \delta(r-a) \frac{1}{r} \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) e^{-iht},$$

так что параметры n_{mi} все равны нулю, а магнитные параметры m_{mi} равны нулю, за исключением тех случаев, когда $m=0$, l нечетно. Используя формулу (13.3.81), получаем

$$m_{0, 2n+1} = 2\pi a I_0 j_{2n+1}(ka) \frac{(-1)^n (2n+2)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!},$$

где использовано выражение для $P_n^1(0)$, приведенное в конце гл. 10. При малых ka , т. е. при периметре петли, малом по сравнению с длиной волны, величины нескольких первых эффективных магнитных мультиполей равны

$$h_{01} \simeq \pi a^2 I_0, \quad h_{03} \simeq -\frac{1}{4} \pi a^4 I_0, \quad h_{05} \simeq \frac{1}{8} \pi a^6 I_0, \dots$$

Тогда векторный потенциал равен (для $r > a$)

$$\mathbf{A} = \frac{2\pi i k I_0}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \times \\ \times \mathbf{a}_\varphi P_{2n+1}^1(\cos \vartheta) j_{2n+1}(ka) h_{2n+1}(kr) e^{-i\omega t}, \quad (13.3.88)$$

и поле на больших расстояниях от петли имеет вид

$$\mathbf{E} \simeq \frac{2\pi I_0}{c r} \mathbf{a}_\varphi e^{ik(r-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} j_{2n+1}(ka) P_{2n+1}^1(\cos \vartheta), \\ \mathbf{H} \simeq -\frac{2\pi I_0}{c r} \mathbf{a}_\vartheta e^{ik(r-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} j_{2n+1}(ka) P_{2n+1}^1(\cos \vartheta),$$

а полная энергия, излучаемая петлей, определяется выражением

$$W = \frac{2\pi^2 I_0^2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3)(2n)!(2n+2)!}{4^{2n+1} [n! (n+1)!]^2} [j_{2n+1}(ka)]^2. \quad (13.3.89)$$

При $ka < 1$ можно использовать разложение функции j_{2n+1} в ряд, и, сохраняя первые два члена, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}_\varphi F, \quad \mathbf{H} = -\mathbf{a}_\theta F, \\ F &\simeq \frac{\pi k I_0 a}{cr} e^{ih(r-ct)} \sin \vartheta \left[1 + \frac{1}{40} (ka)^2 (5 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots \right], \\ ka &< 1, \quad r \gg a. \end{aligned}$$

Угловая зависимость полей во многом такая же, как в случае линейной антенны, за исключением того, что электрическое и магнитное поля поменялись ролями, силовые линии $\mathbf{E}$ представляют замкнутые кривые вокруг оси z , а $\mathbf{H}$ расположено в аксиальной плоскости. Для этих длинных волн полная энергия излучения почти полностью определяется магнитным диполем $\pi^2 k^2 I_0^2 a^2 / 3c$. Эта величина отличается от соответствующего выражения для линейной антенны при том же значении I_0 множителем $(ka)^2$. Таким образом, антенна в форме петли оказывается менее эффективным излучателем, чем линейная антенна тех же общих размеров и при том же токе возбуждения. (Дело в том, что при низких частотах необходимо большее напряжение возбуждения, чтобы создать заданный ток в линейной антенне по сравнению с петлевой.)

Рассеяние на сфере. Наконец, можно подсчитать рассеяние плоской электромагнитной волны на идеально проводящей сфере радиуса a . Если электрический вектор в плоской волне направлен по оси x , то, умножая формулу (13.3.70) на $\mathbf{a}_x$, получаем

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_x e^{ihz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n}{n(n+1)} [\mathbf{M}_{01n}^1(\mathbf{r}) - i \mathbf{N}_{e1n}^1(\mathbf{r})]. \quad (13.3.90)$$

К этому выражению надо добавить такую комбинацию расходящихся волн $\mathbf{M}_{01n}^3$ и $\mathbf{N}_{e1n}^3$, чтобы $\mathbf{A}_t$ обратилось в нуль при $r=a$. Отраженная волна и ее асимптотическое выражение при $kr \gg 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) i^{n-1}}{n(n+1)} [e^{-i\delta_n} \sin \delta_n \mathbf{M}_{01n}^3(\mathbf{r}) - i e^{-i\varepsilon_n} \sin \varepsilon_n \mathbf{N}_{e1n}^3(\mathbf{r})] \simeq \\ &\simeq - \frac{e^{ih(r-ct)}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} [e^{-i\delta_n} \sin \delta_n \mathbf{C}_{1n}^0(\vartheta, \varphi) + e^{-i\varepsilon_n} \sin \varepsilon_n \mathbf{B}_{1n}^e(\vartheta, \varphi)], \end{aligned} \quad (13.3.91)$$

где углы δ_n и ε_n определяются из соотношений

$$\begin{aligned} j_n(ka) &= D_n \sin \delta_n, \quad h_n(ka) = -i D_n e^{i\delta_n}, \\ \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z j_n(z) \right]_{z=ka} &= -E_n \sin \varepsilon_n, \quad \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z h_n(z) \right]_{z=ka} = i E_n e^{i\varepsilon_n}. \end{aligned}$$

Величины δ рассмотрены в конце гл. 10, их таблицы даны в конце книги.

Асимптотическое выражение ряда показывает, как $\mathbf{A}$ (а следовательно, и $\mathbf{E}$) зависит от угла рассеяния. Поле оказывается полностью поперечным при $kr \gg 1$ и $r \gg a$. Из-за разницы между δ_n и ε_n амплитуда рассеянной волны в плоскости электрического вектора падающей волны ($\varphi = 0, \pi$) отличается от соответствующего значения в ортогональной плоскости ($\varphi = \pm \pi/2$). При $\varphi = 0, \pi$ электрический вектор лежит в плоскости $\varphi = 0, \pi$ ($\mathbf{A}_s$ пропорционально $\mathbf{a}_\vartheta$); при $\varphi = \pm \pi/2$ $\mathbf{E}$ опять-таки параллелен плоскости (x, z) ($\mathbf{A}_s$ пропорционален $\mathbf{a}_\theta$). Для промежуточных углов φ электрический вектор рассеянной волны не всюду параллелен плоскости (x, y) , но всегда ортогонален радиус-вектору $\mathbf{r}$.

Полное поперечное сечение рассеяния электромагнитной волны идеально проводящей сферой радиуса a , т. е. отношение рассеянной мощности к интенсивности падающей волны, равно квадрату $|A_s|$, проинтегрированному по сфере большого радиуса r :

$$Q_s = 2\pi a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{k^2 a^2} (\sin^2 \delta_n + \sin^2 \varepsilon_n). \quad (13.3.92)$$

Разница между этим выражением и определенным формулой (11.3.72) выражением для рассеяния на сфере скалярной волны определяется влиянием поляризации векторной волны. Векторная волна, падающая на поверхность сферы, разделяется на две части: поперечно-электрическая часть (волны типа М) рассеивается с фазовым углом δ_n , а поперечно-магнитная часть (волны типа N) рассеивается с фазовым углом ε_n . Полное поперечное сечение определяется как среднее из двух различных поперечных сечений, соответствующих этим волнам.

Угловое распределение интенсивности рассеянной волны при единичной интенсивности падающей волны, конечно, определяется величиной $|A_s|^2$ для больших значений r .

Для длинных волн, когда $ka \ll 1$, углы δ_n и ε_n быстро стремятся к нулю при увеличении n , и в выражении (13.3.91) нужно оставить лишь член с $n=1$. Рассеянная волна и поперечное сечение рассеяния при падающей волне

$$E = a_x E_0 e^{ik(z-ct)}$$

($E = ikA$) для $ka \ll 1$ ($\lambda \gg 2\pi a$) равны

$$A_s \simeq E_0 k^2 a^3 \left[N_{e11}^3 - \frac{1}{2} i M_{o11}^3 \right] e^{-ikhct},$$

$$E_s \simeq E_0 \frac{a}{r} e^{ik(r-ct)} \frac{1}{2} k^2 a^2 [a_\theta (2 \cos \vartheta - 1) \cos \varphi + a_\varphi (\cos \vartheta - 2) \sin \varphi], \quad r \gg a,$$

$$Q_s \simeq \frac{10}{3} \pi a^2 (ka)^4 = \frac{160}{3\lambda^4} \pi^5 a^6 \quad (13.3.93)$$

в случае идеально проводящей сферы радиуса a . Этот предельный случай называется *рэлеевским рассеянием* по имени первого его исследователя. Интенсивность рассеяния изменяется как четвертая степень частоты падающей волны.

Можно сделать несколько представляющих интерес замечаний относительно этих предельных формул для больших длин волн. Во-первых, сравнение с (13.3.81) и (13.3.84) показывает, что рассеянную волну можно считать порожденной индуцированными электрическим и магнитным диполями:

$$D^e = a_x E_0 a^3, \quad D^h = -a_x E_0 a^3 c.$$

На рис. 13.7 изображена мгновенная картина расположения электрических силовых линий на сфере радиуса, значительно большего длины волны. Комбинация электрического и магнитного диполей дает поле типа наклоненного диполя с полюсами при $\cos \vartheta = 1/2$, $\varphi = 0, \pi$. В рассматриваемом приближении в этих направлениях интенсивность рассеянного поля равна нулю. В других направлениях поляризация рассеянного электрического вектора идет по силовым линиям, показанным на чертеже. В этом приближении больше энергии рассеивается назад ($\vartheta = \pi$), чем вперед ($\vartheta = 0$). Конечно, эти результаты имеют место лишь для идеально проводящей сферы. В случае диэлектрической сферы результаты совершенно другие, хотя во многих случаях поперечное сечение рассеяния при низких частотах изменяется, как четвертая степень частоты.

Поглощение энергии сферой. Для определения потери энергии из-за поверхностных токов на сфере надо подсчитать поверхностные токи, обусловленные касательной составляющей магнитного поля, как было сделано

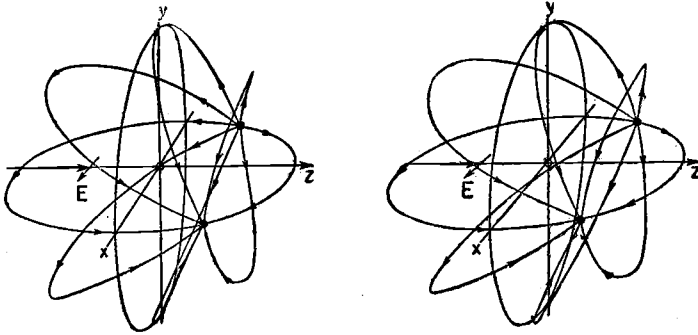


Рис. 13.7. Электрические силовые линии электромагнитной волны, рассеянной проводящей сферой, на большом расстоянии от сферы $\lambda \gg a$ (рэлеевское рассеяние).

на стр. 793. Одновременно легко подсчитать и электрические заряды, индуцированные на поверхности. По формуле (13.3.91) подсчитывается нормальная составляющая электрического поля на поверхности сферы при $r = a$ для падающей волны $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_0 e^{ik(z-ct)}$ (здесь учтены и падающее поле и рассеянное поле):

$$(E_r)_{r=a} = -\frac{iE_0}{ka} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) i^n D_n e^{-i\epsilon_n} \sin(\delta_n - \epsilon_n) \cos \varphi P_n^1(\cos \vartheta) e^{-i\omega t} \simeq \\ \simeq 3E_0 \cos \varphi \sin \vartheta e^{-ikct}, \quad ka \ll 1, \quad (13.3.94)$$

где коэффициенты D_n определены формулой, следующей за (13.3.91). В области длинных волн плотность поверхностного заряда $E_r/4\pi$ соответствует электрическому диполю $\mathbf{D}^e = \mathbf{a}_x E_0 a^3$, как было отмечено выше. Касательное магнитное поле при $r = a$ равно

$$(\mathbf{H}_t)_{r=a} = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n}{\sqrt{n(n+1)}} [D_n e^{-i\epsilon_n} \sin(\delta_n - \epsilon_n) C_{1n}^e(\vartheta, \varphi) + \\ + iE_n e^{-i\delta_n} \sin(\delta_n - \epsilon_n) B_{1n}^o(\vartheta, \varphi)] e^{-i\omega t} \simeq \\ \simeq \frac{3}{2} ka E_0 [\mathbf{a}_\vartheta \sin \varphi (1 + i \cos \vartheta) + \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi (\cos \vartheta + i)] e^{-ikct}. \quad (13.3.95)$$

Как было уже отмечено, для длинных волн поверхностный ток с $\mathbf{H}_t^2/4\pi$ отвечает и электрическому и магнитному диполям. Согласно рассуждениям на стр. 764, потери энергии на поверхности равны

$$(c/4\pi) \sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma} \int \int |\mathbf{H}_t|^2 dA$$

в первом приближении по малому параметру $\sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma}$. Поскольку интенсивность падающей волны равна $(c/4\pi) E_0^2$, отношение поглощенной мощности

к интенсивности падающей волны, поперечное сечение поглощения, равно

$$Q_a = 2\pi a^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (D_n^2 + E_n^2) \sin^2(\delta_n - \varepsilon_n) \simeq \\ \simeq 2\pi a^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}; \quad ka \ll 1. \quad (13.3.96)$$

Чтобы привести это в соответствие с формулой (13.3.65), введем коэффициенты отражения для электрической и магнитной волн порядка n

$$R_n^e = e^{-2(\tau_n + i\varepsilon_n)}, \quad R_n^h = e^{-2(\chi_n + i\delta_n)},$$

где

$$\chi_n = \frac{1}{2} k^2 a^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} D_n^2 \sin^2(\delta_n - \varepsilon_n), \\ \tau_n = \frac{1}{2} k^2 a^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} E_n^2 \sin^2(\delta_n - \varepsilon_n).$$

Таким образом, поперечные сечения рассеяния и поглощения и полное поперечное сечение определяются выражениями

$$Q_s = \frac{\pi}{2k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [|1 - R_n^e|^2 + |1 - R_n^h|^2], \\ Q_a = \frac{\pi}{2k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [2 - |R_n^e|^2 - |R_n^h|^2], \\ Q_e = \frac{\pi}{2k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [4 - R_n^e - \overline{R_n^e} - R_n^h - \overline{R_n^h}],$$

аналогичными формуле (11.3.76), за исключением того, что в рассматриваемом случае имеются волны двух типов, поперечно-электрические и поперечно-магнитные. Поперечное сечение является средним из поперечных сечений для каждого типа волн.

Искажение поля малыми объектами. На любом объекте, диэлектрическом или проводящем, падающим электрическим полем индуцируются электрические и магнитные мультиполи. Если размеры объекта достаточно малы по сравнению с длиной волны падающего поля, то индуцированное поле можно с удовлетворительной степенью точности выразить лишь через электрический и магнитный диполи. Эти диполи обычно можно рассчитать в терминах падающего электрического и магнитного полей.

Например, электрическое поле на объекте, размеры которого значительно меньше длины волны, может быть задано в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega t}$, где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор центра тяжести тела. Это поле порождает электрический диполь. Последний с хорошей степенью точности аппроксимируется произведением $e^{-i\omega t}$ на электрический диполь, индуцируемый на данном объекте статическим электрическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$. Диполь, индуцированный статическим полем, всегда можно записать в виде

$$\mathbf{D}^e = \mathfrak{D}_e \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0),$$

где $\mathfrak{D}_e$ — аффинор, определенный формой и электрическими свойствами объекта дифракции. Например, если объектом дифракции является проводящая сфера радиуса a , то $\mathfrak{D}_e = a^3 \mathfrak{J}$; если это тонкая проволока (длина

которой l мала по сравнению с λ , а диаметр 2ρ значительно меньше длины), направленная по $\mathbf{a}_d$, то

$$\mathfrak{D}_e = \frac{l^3}{16 \ln(l/\rho)} \mathbf{a}_d \mathbf{a}_d.$$

Аналогично магнитное поле на объекте диффракции, равное $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega t}$, индуцирует магнитный диполь, противодействующий изменению $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D}^h = -\mathfrak{D}_h \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_0),$$

где $\mathfrak{D}_h$ также является симметричным аффинором, зависящим от характеристик тела. Соответствующий аффинор для проводящей сферы радиуса a равен $ca^3\mathfrak{J}$; для других случаев аффинор может быть более направленным. (Для кольца или диска с осью по $\mathbf{a}_d$ он равен $cl^3\mathbf{a}_d\mathbf{a}_d$, где l — характерный размер диска или кольца.)

Переставляя члены формулы (13.3.93), легко видеть, что поле, рассеянное на малом объекте, с индуцированными диполями $\mathbf{D}^e e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{D}^h e^{-i\omega t}$ равно

$$\mathbf{A}_s = ik \frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \left\{ \mathbf{a}_r \times [\mathbf{a}_r \times \mathbf{D}^e] - \frac{1}{2c} [\mathbf{a}_r \times \mathbf{D}^h] \right\}; \quad kr \ll 1.$$

Поэтому, если падающее электрическое и магнитное поля на объекте имеют вид $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, то векторный потенциал рассеянного поля на расстоянии нескольких длин волн от объекта диффракции в первом приближении по k , умноженному на наибольший размер объекта, равен

$$\mathbf{A}_s = ik \frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \left\{ \mathbf{a}_r \times [\mathbf{a}_r \times (\mathfrak{D}_e \cdot \mathbf{E}_0)] + \frac{1}{2c} [\mathbf{a}_r \times (\mathfrak{D}_h \cdot \mathbf{H}_0)] \right\}. \quad (13.3.97)$$

Другим способом выражения индуцированного поля является определение простого выражения эквивалентного тока, индуцированного в теле падающим полем. Рассматривая определения параметров m и n и определения эквивалентных диполей [формулы (13.3.82) и (13.3.84)], мы видим, что рассеянное поле, порождаемое диполями $\mathbf{D}^e$ и $\mathbf{D}^h$, такое же, как и порождаемое током

$$\mathbf{J} = -i\omega \mathbf{D}^e \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) - \mathbf{D}^h \times \text{grad}_0 [\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})].$$

Здесь мы считаем, что объект помещен в $\mathbf{r}_0$. Другими словами, вне тела в точке $\mathbf{r}$ рассеянное поле согласно формуле (13.3.80) равно

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \{ ikc \mathbf{D}^e \cdot \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) + \mathbf{D}^h \cdot \text{rot}_0 \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) \} e^{-i\omega t}, \quad (13.3.98)$$

где диполи индуцированы падающим полем. Это уравнение имеет место для падающего поля любого вида, порождающего любые диполи.

Применим это соотношение к задаче диффракции на малом объекте, помещенном в точке $\mathbf{r}_0(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ внутри полый проводящей сферы внутреннего радиуса a . Не ограничивая общности, можно поместить объект диффракции на оси z ($\vartheta_0 = 0$). При этом очень много членов в выражении функции Грина в формуле (13.3.79) обратится в нуль. Поскольку используется поперечная функция Грина, можно, конечно, опустить члены $\mathbf{L}$. Единственными не обращающимися в нуль на оси z при $\vartheta \rightarrow 0$ функциями $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ являются

$$\mathbf{N}_{e0l}^1 \rightarrow l(l+1) \frac{1}{kr_0} j_l(kr_0) \mathbf{a}_z;$$

$$\mathbf{N}_{e1l}^1 \rightarrow \frac{1}{2} l(l+1) \frac{1}{kr_0} \cdot \frac{d}{dr_0} [r_0 j_l(kr_0)] \mathbf{a}_x;$$

$$\mathbf{N}_{o1l}^1 \rightarrow \frac{1}{2} l(l+1) \frac{1}{kr_0} \cdot \frac{d}{dr_0} [r_0 j_l(kr_0)] \mathbf{a}_y;$$

$$M_{e1l}^1 \rightarrow -\frac{1}{2} l(l+1) j_l(kr_0) a_y;$$

$$M_{o1l}^1 \rightarrow \frac{1}{2} l(l+1) j_l(kr_0) a_x.$$

Поэтому поле, рассеянное индуцированными диполями при $r=r_0$, $\vartheta=0$, равно

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s(\mathbf{r}) = & -\frac{ik}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \left\{ ikc \left[\frac{j_l(kr_0)}{kr_0} l(l+1) D_z^e N_{e0l}^3(\mathbf{r}) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{kr_0} \frac{d}{dr_0} (r_0 j_l) D_x^e N_{e1l}^3(\mathbf{r}) + \dots - j_l(kr_0) D_y^e M_{e1l}^3(\mathbf{r}) \left. \right] + \\ & + k \left[\frac{j_l(kr_0)}{kr_0} l(l+1) D_z^h M_{o1l}^3(\mathbf{r}) + \dots - j_l(kr_0) D_y^h N_{o1l}^3(\mathbf{r}) \right] \left. \right\} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

Но это выражение не определяет поля внутри сферы по двум причинам: 1) касательная составляющая этого поля при $r=a$ отлична от нуля и 2) не указано, какое падающее поле вызывает индуцированные диполи. Оба эти затруднения можно одновременно устранить следующим приемом.

Прежде всего к полю $\mathbf{A}_s$ надо добавить поле, регулярное всюду внутри $r=a$, отраженное от внутренней поверхности сферы и такое, чтобы касательная составляющая полного поля при $r=a$ равнялась нулю. Например, к первому члену $\mathbf{A}_s$ надо добавить член

$$-\frac{ik}{c} (2l+1) ikc \frac{j_l(kr_0)}{kr_0} D_z^e [-ie^{i\vartheta_l} \operatorname{cosec} \varepsilon_l] N_{e0l}^1(\mathbf{r}),$$

где, как и выше,

$$iE_l e^{i\vartheta_l} = \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z h_l(z) \right]_{z=ka}.$$

Из членов $\mathbf{M}$ вычитается аналогичное отраженное поле, за исключением того, что используется фазовый угол δ_l , определенный соотношением

$$-iD_l e^{i\delta_l} = h_l(ka).$$

Далее, заметим, что эту отраженную волну можно рассматривать как падающую волну, индуцирующую диполи в отсутствии всяких других возбуждающих полей. Для резонанса внутри сферы поле должно возбудить индуцированный диполь, который в свою очередь возбуждает поле. Отраженная электрическая волна при $r=r_0$, $\vartheta=0$ равна

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r(\mathbf{r}_0) = & \frac{ik^2}{c} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left\{ ikc \left[l(l+1) \left(\frac{j_l}{kr_0} \right)^2 \frac{e^{i\varepsilon_l}}{\sin \varepsilon_l} D_z^e \mathbf{a}_z + \dots + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} (j_l)^2 \frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} D_y^e \mathbf{a}_y \left. \right] + \frac{1}{2} k j_l \frac{1}{kr_0} \frac{d}{dr_0} (r_0 j_l) \left[-\frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} D_x^h \mathbf{a}_y + \dots - \frac{e^{i\varepsilon_l}}{\sin \varepsilon_l} D_y^h \mathbf{a}_x \right] \right\}. \end{aligned}$$

Отраженная магнитная волна имеет аналогичный вид, за исключением того, что δ и ε надо поменять местами, так же как $\mathbf{D}^e$ и $\mathbf{D}^h$. По этим полям можно рассчитать индуцированные диполи и, приравнявая обе части, определить резонансные частоты сферической полости, содержащей малое включение в точке $\mathbf{r}_0$ внутри полости.

Чтобы провести вычисление, надо определить компоненты аффиноров диполей $\mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_h$, введенных раньше. Чтобы продемонстрировать процесс вычисления, примем, что включение представляет собой проводящую сферу радиуса b , значительно меньшего a . В этом случае $\mathcal{D}_e = b^3 \mathfrak{J}$ и $\mathcal{D}_h = cb^3 \mathfrak{J}$.

Теперь можно приравнять компоненты $\mathbf{D}^e$ и $\mathbf{D}^h$. Например, приравнивая компоненты для D_z^e , получим

$$D_z^e = \left\{ -k^3 b^3 \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)(l+1) \left[\frac{j_l(kr_0)}{kr_0} \right]^2 \frac{e^{i\varepsilon_l}}{\sin \varepsilon_l} \right\} D_z^e.$$

Это уравнение служит для определения тех гармоник, для которых $\mathbf{D}^h$ равно нулю, а $\mathbf{D}^e$ направлено по z .

Поскольку $k^3 b^3$ очень мало, один из членов ряда должен быть достаточно большим, что может иметь место лишь при ε_l , близком к $n\pi$ ($n=1, 2, \dots$), другими словами, при $(1/ka)(d/da)[aj_l(ka)]$, очень близком к нулю (но отличном от нуля). Как указано в гл. 11, $ka = \pi\gamma_{ln}$ при $\varepsilon_l = n\pi$, так что можно положить $ka = \pi\gamma_{ln} + e_{ln}$, где e_{ln} мало. Разлагая малые величины, в первом приближении получим, что при

$$ka = \pi\gamma_{ln} + e_{ln}, \quad e^{i\varepsilon_n} \simeq (-1)^n$$

имеет место соотношение

$$\sin \varepsilon_l \simeq -\frac{e_{ln}}{E_l(\pi\gamma_{ln})} \left[\frac{l(l+1)}{(\pi\gamma_{ln})^2} - 1 \right] j_l(\pi\gamma_{ln}).$$

Следовательно, допустимые частоты колебаний в сфере, при которых возбуждается лишь z -компонента электрического диполя, равны $\omega/2\pi$, где

$$\omega = \frac{\pi c \gamma_{ln}}{a} + \frac{c e_{ln}}{a},$$

$$e_{ln} \simeq (-1)^n \frac{(\pi\gamma_{ln})^3 b^3}{a r_0^2} \frac{(2l+1)l(l+1)E_l(\pi\gamma_{ln})}{l(l+1) - (\pi\gamma_{ln})^2} \frac{j_l^2(\pi\gamma_{ln}r_0/a)}{j_l(\pi\gamma_{ln})}$$

и стоячая волна имеет общий вид $N_{e0l}^1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ всюду, кроме непосредственной близости диполя.

Частоты, при которых возбуждается z -компонента магнитного диполя, определяются выражением

$$\omega = \frac{\pi c \beta_{ln}}{a} + \frac{c g_{ln}}{a},$$

$$g_{ln} \simeq (-1)^n (2l+1)l(l+1) \frac{\pi \beta_{ln} b^3}{a r_0^2} D_l(\pi \beta_{ln}) \left[\frac{j_l^2(\pi \beta_{ln} r_0/a)}{j_{l+1}(\pi \beta_{ln})} \right],$$

где $j_l(\pi \beta_{ln}) = 0$. Стоячая волна приближенно равна $M_{e0l}^1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, всюду, за исключением окрестности диполя.

Другие гармоники содержат одновременно и электрические и магнитные диполи. Связывающие их уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} D_x^e + iD_y^e &= -\frac{1}{2}k^3 b^3 \sum (2l+1) \left\{ \left[q_l^2 \frac{e^{i\varepsilon_l}}{\sin \varepsilon_l} + j_l^2 \frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} \right] (D_x^e + iD_y^e) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} j_l q_l \left[\frac{e^{i\varepsilon_l}}{\sin \varepsilon_l} - \frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} \right] (D_x^h + iD_y^h) \right\}, \\ D_x^h + iD_y^h &= -\frac{1}{2}k^3 b^3 \sum (2l+1) \left\{ \left[q_l^2 \frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} + j_l^2 \frac{e^{i\varepsilon_l}}{\sin \varepsilon_l} \right] (D_x^h + iD_y^h) - \right. \\ &\quad \left. - c j_l q_l \left[\frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} - \frac{e^{i\varepsilon_l}}{\sin \varepsilon_l} \right] (D_x^e + iD_y^e) \right\}, \end{aligned}$$

где $j_l = j_l(kr_0)$ и $q_l(kr_0) = (1/kr_0)(d/dr_0)[r_0 j_l(kr_0)]$. Их можно разрешить, полагая δ_l и ε_l близкими к $n\pi$ и беря комбинацию электрических и магнит-

ных диполей. Например, если

$$D_x^h + iD_y^h = -c \left[\frac{1}{2} (\pi\beta_{ln})^3 \left(\frac{b}{a} \right)^3 (2l+1) (-1)^n j_l^2 \left(\frac{\pi\beta_{ln}r_0}{a} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})} \right]^{1/2} (D_x^e - iD_y^e),$$

то δ_l близко к $n\pi$, допустимые частоты в точности равны

$$\omega = \frac{\pi c \beta_{ln}}{a}$$

и стоячая волна приближенно равна $M_{el}^1(\mathbf{r}) + iM_{ol}^1(\mathbf{r})$ всюду, кроме малой окрестности объекта. С другой стороны, другая система допустимых частот имеет вид

$$\omega = \frac{\pi c \beta_{ln}}{a} + \frac{cd_{ln}}{a},$$

где

$$d_{ln} \simeq \frac{1}{2} (-1)^n (2l+1) \left(\pi\beta_{ln} \frac{b}{a} \right)^3 \left[\frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})} \right] \left[j_l^2(z) + \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z j_l \right)^2 \right]_{z=\pi\beta_{ln}r_0/a},$$

что соответствует

$$D_x^h + iD_y^h \simeq c \left[\frac{1}{2} (-1)^n (2l+1) \left(\pi\beta_{ln} \frac{b}{a} \right)^3 \frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z j_l \right)^2_{z=\pi\beta_{ln}r_0/a} \right]^{1/2} (D_x^e + iD_y^e).$$

Форма волны опять приблизительно равна $M_{el}^1 + iM_{ol}^1$. Наконец, имеется подобная пара систем собственных функций и частот вблизи $ka = \pi\gamma_{ln}$ ($z_l \simeq n\pi$), включающая комбинации $D_x^e + iD_y^e$ и $D_x^h + iD_y^h$. Эти функции соответствуют стоячим волнам, приближенно равным $N_{el}^1 + iN_{ol}^1$. [Можно, конечно, получить стоячую волну определенной поляризации N_{el}^1 или M_{ol}^1 и т. д. вместо волн круговой поляризации $(N_e + iN_o)$, $(M_e + iM_o)$].

Таким образом, наличие малой сферы частично снимает вырождение системы собственных функций полый сферы. При отсутствии включения каждому значению l отвечают две различные системы частот $\omega = \pi c \beta_{ln}/a$ и $\omega = \pi c \gamma_{ln}/a$, соответствующие $2(2l+1)$ различным системам собственных функций M_{ml}^1 и N_{ml}^1 . При наличии малой сферы каждому значению l отвечает лишь пять различных систем собственных частот.

Резюме. Мы пришли к концу нашего рассмотрения векторных решений уравнения Лапласа и волнового уравнения. Без сомнения, можно разобрать много еще более поучительных примеров, и многие методы, изученные ранее в применении к скалярным полям, могут быть видоизменены для применения к векторным полям. Но нам кажется, что нет большой необходимости в подробном обсуждении оставшихся возможностей и что уже разобранные примеры дают достаточно для того, чтобы читатель сам при необходимости проделал переход от скалярной задачи к векторной. Поэтому мы заканчиваем этот раздел, как должны кончаться все книги, точкой.

Задачи к главе 13

13.1. Показать, что функция $M_{mn} = \text{rot} [a_2 S_{mn}(h, \eta) h e_{mn}(h, \xi)]$ касательна к сфероиду $\xi = \text{const}$ лишь при $m=0$ и что ротор функции $N_{mn} = \text{rot} M_{mn}$ касателен к этому сфероиду только при $m=0$ [функции S и $h e$

определены в (11.3.83) и (11.3.91)]. Используя функцию N_{01} , рассмотреть излучение электрического диполя, рассматриваемого как предельный случай вытянутого сфероида. Распределение тока и угловую зависимость асимптотического излучения от ϑ взять в виде $\vartheta = \arccos \eta$ при $h = 0, 1/4, 1/2$. Воспользоваться разложениями, приведенными на стр. 468 и 473.

13.2. Уравнения Прока, аналогичные уравнениям Клейна — Гордона и Дирака, для частиц со спином единица устанавливают между векторным потенциалом $\mathbf{A}$ и скалярным потенциалом φ соотношения

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \kappa^2 \mathbf{A} + (k - V)^2 \mathbf{A} = (k - V) \operatorname{grad} \varphi, \\ \nabla^2 \varphi - \kappa^2 \varphi = \operatorname{div} [(k - V) \mathbf{A}],$$

где V — потенциальная энергия частицы, k — ее полная энергия в соответствующих единицах; κ пропорционально массе покоя. Рассмотреть разделение этой системы уравнений при $V = 0$, при $V = V(z)$ и при $V = V(r)$. Показать, что для решений типа $\mathbf{M}$ [см. (13.1.4)] φ можно положить равным нулю. Получить уравнение для скалярной функции φ . Рассмотреть также решения типа $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$.

13.3. Написать системы собственных векторных функций, соответствующих формулам (13.1.15), (13.1.17), (13.1.19) и (13.1.20), для областей внутри кругового цилиндра (ограниченного поверхностями $r = a$, $z = 0$, $z = b$) и внутри сферы ($r = a$).

13.4. Векторная функция источника

$$\mathbf{Q} = \mathbf{a}_z Q_0 \left[1 - \frac{1}{a^2} (x^2 + y^2 + z^2) \right] e^{-ikct}, \quad r < a,$$

равная нулю при $r > a$, излучает в свободном пространстве. Используя формулы (13.1.31), (13.1.32) и (13.1.39), вычислить решения уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi \mathbf{Q}}{c^2}, \\ -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi \mathbf{Q}}{c^2},$$

$$c_e^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - c_i^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{Q}$$

при $r \gg a$ и при $ak \ll 1$. Чем отличаются решения при r , немного большем a ? При r , меньшем a ? (В каждом случае принять $ka \ll 1$.)

13.5. Несжимаемая жидкость с вязкостью η находится в состоянии покоя в круглой трубе с внутренним радиусом a . Начиная с момента $t = 0$, вдоль трубы поддерживается постоянное падение давления F . Используя преобразования Лапласа, показать, что скорость жидкости в момент t в точке r, φ, z (цилиндрические координаты) равна

$$v = k \frac{2Fa^2}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\pi \beta_{0n} r/a)}{(\pi \beta_{0n})^3 J_0(\pi \beta_{0n})} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\pi \beta_{0n}}{a} \right)^2 t \right] \right\}.$$

Сравнить со стационарным решением (13.2.10).

13.6. Упругий диск толщины h и радиуса a закреплен во втулке на неподвижной оси радиуса b . По диску радиально от оси течет ток I , который на внешнем периметре снимается щетками, не оказывающими никакого механического воздействия на диск. Диск закручивается под действием постоянного магнитного поля B , параллельного оси диска.

Показать, что смещение точки диска, находящейся на расстоянии r от оси, равно

$$s = \frac{2IB}{\mu c} \left[a \left(\frac{r}{b} - 1 \right) - r \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right] a_\varphi.$$

Определить напряжение как функцию от r . Найти усилие во втулке.

13.7. Показать, что $-\text{rot rot} [a_\varphi \psi(\xi_1, \xi_2)] = a_\varphi [\nabla^2 \psi - (1/r^2) \psi]$, где ξ_1, ξ_2, φ — криволинейные координаты вращения, определенные соотношениями $x = r(\xi_1, \xi_2) \cos \varphi$, $y = r(\xi_1, \xi_2) \sin \varphi$, $z = z(\xi_1, \xi_2)$. Затем показать, что решение векторного уравнения $-\text{rot rot } \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = 0$ имеет вид $\mathbf{F} = a_\varphi \psi_n(\xi_1, \xi_2)$, где $\psi_n(\xi_1, \xi_2) \cos \varphi$ — решение скалярного уравнения Гельмгольца. Используя этот результат, получить «крутильную часть» функции Грина в вытянутых сфероидальных координатах ξ, η, φ [см. (10.3.53)], т. е. показать, что решение уравнения

$$\text{rot rot } \mathbf{G}_\varphi(\xi, \eta | \xi_0, \eta_0) = \frac{32\pi}{a^3(\xi^2 - \eta^2)} \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0) a_\varphi$$

имеет вид

$$\mathbf{G}_\varphi = a_\varphi \frac{4\pi}{ia} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} P_n^1(\eta) P_n^1(\eta_0) \begin{cases} P_n^1(\xi) Q_n^1(\xi_0) & \text{при } \xi_0 > \xi, \\ P_n^1(\xi_0) Q_n^1(\xi) & \text{при } \xi_0 < \xi. \end{cases}$$

Получить соответствующее выражение для сплюснутых сфероидальных координат.

13.8. Используя результаты задачи 13.7, решить следующие задачи:

а) Сплюснутый сфероид, равномерно заряженный по поверхности $\xi = \xi_0$, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти создающееся при этом магнитное поле.

б) На проводящем сплюснутом сфероиде заряд распределен так, что поверхность $\xi = \xi_0$ является эквипотенциальной. Какое магнитное поле возникает при вращении сфероида?

в) Наружная поверхность $\xi = \xi_0$ вытянутого сфероида прикреплена у концов $1 \geq \eta \geq 1 - \eta_0$ и $-1 \leq \eta \leq -1 + \eta_0$ к двум жестким коаксиальным стержням. Какое нужно приложить усилие, чтобы повернуть один стержень на угол α по отношению к другому? Найти смещение различных частей сфероида.

13.9. На свободную (напряжение на поверхности равно нулю) плоскую поверхность падает плоская поперечная волна (волна сдвига). Найти углы отражения и амплитуды отраженных продольной и поперечной волн как функции угла падения для двух поляризаций: s в плоскости падения; s ортогонально плоскости падения. Рассмотреть случай, когда угол падения настолько велик, что угол отражения продольной волны комплексный.

13.10. Показать, что ряд (13.3.14) определяет аффинорную функцию Грина для цилиндрического волновода, удовлетворяющую граничным условиям $\mathbf{n} \times \mathbf{G} = 0$ на боковой поверхности волновода и при $z = 0$, если функции f_n и g_n имеют вид

$$f_n = \frac{1}{\gamma} \begin{cases} \sin \gamma z \cdot e^{i\gamma z_0} & \text{при } z_0 > z, \\ \sin \gamma z_0 \cdot e^{i\gamma z} & \text{при } z_0 < z, \end{cases} \quad \gamma = \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} = i \sqrt{k_{mn}^2 - k^2},$$

$$g_n = \frac{i}{\gamma} \begin{cases} \cos \gamma z \cdot e^{i\gamma z_0} & \text{при } z_0 > z, \\ \cos \gamma_0 z \cdot e^{i\gamma z} & \text{при } z_0 < z. \end{cases}$$

Полученное выражение представляет аффинорную функцию Грина для области волновода $z > 0$, поэтому его можно обозначить через $\mathcal{G}^+$. Какой вид имеют функции f_n и g_n для $\mathcal{G}^-$? Используя эти функции Грина, решить следующую задачу. Из $-\infty$ по волноводу распространяется наинизшая гармоника; в сечении $z=0$ стоит диафрагма, частично отражающая и частично пропускающая волну. Показать, что уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \oint_0 \text{rot}_0 [\mathcal{G}^+(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] \cdot [\mathbf{a}_z \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_0^s)] dS_0 & \text{для } z > 0, \\ \mathbf{B}_{01} \sin[z \sqrt{k^2 - k_{01}^2}] - \frac{1}{4\pi} \oint_0 \text{rot}_0 \mathcal{G}^- \cdot [\mathbf{a}_z \times \mathbf{A}] dS_0 & \text{для } z < 0, \end{cases}$$

где интеграл берется по площади отверстия в диафрагме $z=0$. Каково асимптотическое выражение амплитуды прошедшей волны, если k больше k_{01} , но меньше k_{10} ? Для касательной компоненты $\mathbf{A}$ в отверстии диафрагмы получить интегральное уравнение

$$\sqrt{1 - \left(\frac{k_{01}}{k}\right)^2} \text{grad } \psi_{01}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_0 \mathcal{F}(xy|x_0y_0) \cdot [\mathbf{a}_z \times \mathbf{A}(x_0y_0)] dx_0 dy_0,$$

$z, z_0 = 0,$

где $\mathcal{F} = \text{rot rot}_0 \mathcal{G}^0$. Найти вариационный принцип, из которого получаются наилучшие значения $\mathbf{A}$ и амплитуды прошедшей волны.

13.11. Используя вариационный принцип задачи 13.10, рассчитать прохождение волны через щель ширины Δ , параллельную оси x в центре диафрагмы, помещенной в сечении $z=0$ прямоугольного волновода со сторонами a и b ($b > a$). В качестве функции сравнения для $\mathbf{A}$ в отверстии использовать $A_0 \mathbf{a}_x \sqrt{1 - [2(y - b/2)/\Delta]^2}$.

13.12. Рассчитать излучение провода, помещенного по диаметру поперечного сечения круглого волновода, если по нему течет ток $Ie^{-i\omega t}$. Получить формулу, аналогичную (11.3.16), для возбуждающего напряжения в проводе.

13.13. Рассчитать и построить график коэффициента затухания κ (в соответствующих единицах) из (11.3.17) как функции от ω или k (в соответствующих единицах) для трех низших гармоник прямоугольного волновода ($b = 1,5a$). Для трех низших гармоник круглого волновода.

13.14. Рассмотреть типы волн, распространяющихся внутри волновода эллиптического поперечного сечения. Найти выражения гармоник типа M и N и затухание трех низших гармоник.

13.15. Для передачи колебаний высокой частоты используется коаксиальная линия, образованная двумя концентрическими круговыми цилиндрами. Показать, что наинизшая гармоника в этом волновде имеет критическую частоту, равную нулю (см. стр. 756). Чему равна постоянная затухания для этой волны?

13.16. Рассмотреть парциальные волны, распространяющиеся в «эллиптической концентрической линии» (провод внутри эллиптического цилиндра). Выписать выражения трех низших гармоник, их критические частоты и постоянные затухания.

13.17. Графическим или численным методом найти значение k для наименьшей волны удлинения в круглом бруске [см. (13.3.34)] при $k_s a = 2$ и $k_c a = 1$. Построить амплитуды r и z компонент s как функции от r/a .

13.18. Рассчитать волны кручения и удлинения в упругой среде, заполняющей внутренность жесткой круглой трубы с внутренним радиусом a .

13.19. Сфера радиуса a , первоначально находившаяся в состоянии покоя в неограниченном пространстве, заполненном вязкой жидкостью, в момент $t=0$ внезапно приводится во вращение вокруг оси z с угловой скоростью ω . Показать, что установившееся движение жидкости (для $t \rightarrow \infty$) имеет вид

$$v = a_\varphi \omega a \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin \vartheta, \quad r > a.$$

При помощи преобразования Лапласа рассчитать неустановившееся движение.

13.20. Выписать выражения для стоячих волн типа М и N внутри электромагнитного резонатора, имеющего форму цилиндрической коробки с внутренним радиусом a и расстоянием между крышками b . Найти выражение Q резонатора для этих волн, если проводимость металлических стенок резонатора равна c . Написать аффинорную функцию Грина для этого резонатора в форме, аналогичной (13.3.46) и (13.3.47).

13.21. Прямоугольный электромагнитный резонатор возбуждается U-образной петлей тока $Ie^{-i\omega t}$. (Стороны петли лежат на прямых $x = l_x/2 - \Delta/2$, $y = l_y/2$, $0 \leq z \leq \Delta$; $y = l_y/2$, $z = \Delta$, $l_x/2 - \Delta/2 \leq x \leq l_x/2 + \Delta/2$; $x = l_x/2 + \Delta/2$, $y = l_y/2$, $0 \leq z \leq \Delta$.) Найти возбужденное поле. Какие гармоники отсутствуют? Найти резонансные частоты.

13.22. Стоячие волны $F_n(\mathbf{r}) (=M_n, N_n)$ внутри электромагнитного резонатора являются решениями уравнения

$$\text{rot rot } \mathbf{F}_n = k_n^2 \mathbf{F}_n.$$

Внутри резонатора помещен маленький проводящий объект с боковой поверхностью S_0 . Показать, что интегральное выражение для возмущенной волны, ближайшей по форме к $\mathbf{F}_m$, имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_m(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \oint \mathcal{G}_m(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}_0) dS_0$$

для $\mathbf{r}$ на S_0 и вне S_0 внутри резонатора. Аффинор $\mathcal{G}_m$ определен в (13.3.46), где надо опустить член $\bar{\mathbf{F}}_m(\mathbf{r}) \mathbf{F}_m(\mathbf{r}_0)$; вектор $\mathbf{K}$ представляет поверхностный ток $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A}$, индуцированный на S_0 возмущенной стоячей волной $\mathbf{A}$. Показать, что вариационный принцип, из которого можно определить наилучшую форму $\mathbf{K}$ (тем самым $\mathbf{A}$ получается из интегрального выражения), записывается в виде

$$J = \frac{\left[\oint \mathbf{U}(\mathbf{r}^s) \cdot \mathbf{F}_m(\mathbf{r}^s) dS \right]^2}{\oint \oint \mathbf{U}(\mathbf{r}^s) \cdot \mathcal{G}_m(\mathbf{r}^s|\mathbf{r}_0^s) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}_0^s) dS dS_0}, \quad \delta J = 0,$$

где «наилучшая» форма $\mathbf{U}$ пропорциональна истинному поверхностному току $\mathbf{K}$, а стационарное значение J равно $\oint \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}_m dS$. Показать, что это «наилучшее» значение J приблизительно равно разности $k^2 - k_n^2$ между

истинным собственным значением k^2 и k_n^2 , деленной на интеграл от $\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_n$ по объему резонатора.

13.23. В прямоугольном резонаторе ($l_z > l_y > l_x$) наименьшая гармоника электромагнитных колебаний имеет вид

$$M_{011}(x, y, z) = -a_x \frac{\pi}{l_y k_{011}} \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l_z}\right).$$

В точке (x_1, y_1, z_1) внутри резонатора помещена маленькая проводящая сфера радиуса a ($a \ll l_x$). Используя вариационный принцип предыдущей задачи, рассчитать частоту возмущенных колебаний для наименьшей гармоники. В качестве функции сравнения использовать $U = a_\vartheta \sin \vartheta$, где r, ϑ, φ — сферические координаты с началом в центре сферы и полярной осью, параллельной оси x . Приближенно найти изменение $\mathbf{A}$, вызванное сферой, используя интегральное выражение для $\mathbf{A}$.

13.24. Атом водорода, волновая функция ψ_{mln} которого имеет вид (12.3.40), переходит из состояния $m=0, l=1, n=2$ в состояние $m=l=0, n=1$, излучая электромагнитную волну. При этом эквивалентные осциллирующие заряд и ток даются выражениями

$$\rho = \bar{\psi}_{001} \psi_{012} \exp\left[-i(E_2 - E_1) \frac{t}{\hbar}\right];$$

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{M} \operatorname{Im}(\psi_{001} \operatorname{grad} \psi_{012}) \exp\left[-i(E_2 - E_1) \frac{t}{\hbar}\right].$$

Используя формулы (13.3.83) и (13.3.87), подсчитать эффективный дипольный момент перехода и полную мощность излучения. (Можно принять, что средний радиус атома значительно меньше длины волны, так что можно пользоваться (13.3.83).) Рассчитать квадрупольный момент для перехода из состояния $m=0, l=2, n=3$ в состояние $m=0, l=0, n=1$ и соответствующую мощность излучения. Меньше или больше эта мощность, чем мощность излучения при переходе $012 \rightarrow 001$? При каком переходе появляется магнитный диполь?

13.25. Найти комбинацию $\mathbf{L}_{01}^1$ и $\mathbf{N}_{01}^1$ [см. (13.3.78)], для которой вектор напряжения на поверхности сферы ($r=a$) равен нулю (т. е. найти аксиально симметричную волну сжатия в свободной сфере). Каковы допустимые частоты трех низших гармоник? Как меняется форма сферы и какой вид имеют внутренние смещения на этих трех гармониках?

13.26. Жесткая сфера массы M и радиуса a колеблется в неограниченной упругой среде по закону $a_z D e^{-i\omega t}$. Показать, что пока длина возбуждаемых упругих волн велика по сравнению с $2\pi a$, смещение упругой среды в точке r, ϑ, φ ($r > a$) равно

$$s \simeq -\frac{3iDe^{-i\omega t}}{2(k_s a)^2 + (k_c a)^2} [(k_c a)^3 \mathbf{L}_{01}^3 + (k_s a)^3 \mathbf{N}_{01}^3] \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{3De^{-i\omega t}}{2(k_s a)^2 + (k_c a)^2} \frac{a}{r} [\mathbf{a}_r (k_c a)^2 e^{ik_c r} \cos \vartheta - \mathbf{a}_\vartheta (k_s a)^2 e^{ik_s r} \sin \vartheta], r \rightarrow \infty,$$

где в $\mathbf{L}$ [см. (13.3.67)] $k = k_c = \omega \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$, а в $\mathbf{N}$ [см. (13.3.69)] $k = k_s = \omega \sqrt{\rho/\mu}$. Показать, что сила, перемещающая сферу на расстояние $a_z z$ со скоростью $\mathbf{a}_z \dot{z}$ и ускорением $\mathbf{a}_z \ddot{z}$, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_z \left\{ M \ddot{z} + 4\pi a z \frac{3\mu(\lambda + 2\mu)}{2\lambda + 5\mu} \right\},$$

пока все частоты, входящие в разложение Фурье z , малы по сравнению с $(1/2\pi a)\sqrt{\mu/\rho}$.

13.27. Плоская поперечная волна

$$\mathbf{s} = s_0 \mathbf{a}_x \exp(ik_s z - i\omega t)$$

падает на сферу радиуса a , рассмотренную в предыдущей задаче. Показать, что сила давления падающей волны равна $(4/3)\pi k_s^2 a^3 s_0 \mathbf{a}_x$. Используя полученные в задаче 13.26 результаты, подсчитать амплитуду колебаний сферы и асимптотическое выражение рассеянной волны при $k_s a \ll 1$. Показать, что плоская продольная волна

$$\mathbf{s} = s_0 \mathbf{a}_z \exp(ik_c z - i\omega t)$$

действует на сферу с силой $(4\pi/3)(\lambda + 2\mu)k_c^2 a^3 s_0 \mathbf{a}_z$. Рассчитать соответствующую амплитуду колебаний и асимптотическое выражение рассеянной волны. Вызывает ли поперечная падающая волна рассеянную продольную волну и наоборот? Почему?

13.28. На диэлектрическую сферу с коэффициентом преломления $n > 1$ падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся по направлению z . Вектор $\mathbf{E}$ направлен по оси x . Выписать ряды, определяющие рассеянную волну. Рассчитать рассеянное поле и поперечное сечение рассеяния при радиусе сферы, малом по сравнению с длиной волны.

13.29. Результаты предыдущей задачи для различных поляризаций падающей плоской волны можно записать в аффинорной форме

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}) = \mathfrak{F}_i \exp(ik_i \cdot \mathbf{r}) + \mathfrak{A}_s(\mathbf{r}) \rightarrow \mathfrak{F}_i \exp(ik_i \cdot \mathbf{r}) + \frac{e^{ikr}}{r} \mathfrak{F}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i), \quad r \rightarrow \infty,$$

где $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F} - \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_i$ — единичный вектор, направленный по $\mathbf{k}_i$ ($\mathbf{k}_i = k \mathbf{a}_i$). Полное поле для падающей волны $\mathbf{a}_e A_0 \exp(ik \cdot \mathbf{r})$ при этом можно получить, умножая обе части уравнения на $\mathbf{a}_e A_0$ (где $\mathbf{a}_e$ — единичный вектор, ортогональный $\mathbf{a}_i$). $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{a}_e A_0$ дает $\mathbf{A}$, а $\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_e A_0$ — рассеянную волну. Аффинор $\mathfrak{F}$ в асимптотическом выражении является обобщением функции углового распределения f формулы (11.4.58), направление и амплитуда рассеянной волны при больших r определяются выражением $\mathfrak{F} \cdot \mathbf{a}_e A_0$. С другой стороны, $\mathbf{a}_s$ является единичным вектором в направлении рассеяния $\mathbf{k}_s = \mathbf{a}_s k$. Показать, что для диэлектрического объекта рассеяния с коэффициентом преломления n (отличным от единицы лишь внутри области, заключенной в сфере радиуса a) интегральное уравнение для $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}) = \mathfrak{F}_i \exp(ik_i \cdot \mathbf{r}) + \frac{k^2}{4\pi} \int \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \cdot \mathfrak{A}(\mathbf{r}_0) U(\mathbf{r}_0) dv_0,$$

где $U = n^2 - 1$ отлично от нуля лишь внутри объекта рассеяния, а $\mathfrak{G}_t$ — поперечная функция Грина для электромагнитного поля. Показать, что

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \frac{k^2}{4\pi} \int U(\mathbf{r}_0) \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{A}(\mathbf{r}_0) \exp(-ik_s \cdot \mathbf{r}_0) dv_0,$$

где $\mathfrak{F}_s = \mathfrak{F} - \mathbf{a}_s \mathbf{a}_s$. Показать, что вариационный принцип для $\tilde{\mathfrak{F}}$ можно записать в виде

$$\frac{4\pi}{k^2} [\tilde{\mathfrak{F}}] = \frac{\int U(\mathbf{r}_0) \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{B}(\mathbf{r}_0) e^{-ik_s \cdot \mathbf{r}_0} dv_0 \int |\tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{F}_i| U(\mathbf{r}) e^{ik_i \cdot \mathbf{r}} dv}{\int |\tilde{\mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{B}| U dv - \frac{k^2}{4\pi} \int \int U(\mathbf{r}) |\tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{G}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{B}(\mathbf{r}_0)| U(\mathbf{r}_0) dv dv_0}, \quad \partial |\tilde{\mathfrak{F}}| = 0,$$

где $|\tilde{\mathfrak{B}}|$ — след аффинора $\mathfrak{B}$ (см. стр. 65 в т. I), $\mathfrak{B}$ — функция сравнения для $\mathfrak{A}$,

а $\tilde{\mathfrak{B}}$ — функция сравнения для $\tilde{\mathfrak{A}}$, сопряженной к $\mathfrak{A}$ (см. стр. 506).

13.30. Вариационным методом предыдущей задачи рассчитать аффинор рассеяния $\mathfrak{F}(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i)$ для сферы радиуса a с коэффициентом преломления n . В качестве функций сравнения использовать $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}_i \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$; $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{F}_s \exp(-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r})$. (Обе эти функции поперечные, поэтому для упрощения вычислений в знаменателе в интеграле можно писать $\mathfrak{G}$ вместо $\mathfrak{G}_i$.) Подсчитать рассеянные поля $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, а также Q для $\lambda \gg 2\pi a$ и сравнить их с соответствующими выражениями для рассеяния на проводящей сфере.

Таблица сферических векторных гармоник

Решения векторных уравнений Лапласа и Гельмгольца в сферических координатах r, ϑ, φ представляются произведениями амплитудных функций радиуса на одну из следующих трех систем векторных функций углов ϑ и φ : $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$ или $\mathbf{C}$. Эти функции выражаются через скалярные сферические гармоники

$$X_n^m(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta);$$

$$= [\cos m\varphi + i \sin m\varphi] \sin^m \vartheta T_{n-m}^m(\cos \vartheta), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Действительную часть векторной функции обозначим индексом e (для четных по φ), а мнимую часть индексом o (для нечетных по φ), т. е.

$$\mathbf{P}_{mn} = \mathbf{P}_{mn}^e + i\mathbf{P}_{mn}^o.$$

Эти функции следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{mn}(\vartheta, \varphi) &= \mathbf{a}_r X_n^m(\vartheta, \varphi) = \\ &= \frac{1}{2n+1} [r^{1-n} \text{grad}(r^n X_n^m) - r^{n+2} \text{grad}(r^{-n-1} X_n^m)] = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [(1 - \delta_{0m})(n+m)(n+m-1) X_{n-1}^{m-1} - (1 + \delta_{0m}) X_{n-1}^{m+1} - \right. \\ &\quad - (1 - \delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2) X_{n+1}^{m-1} + (1 + \delta_{0m}) X_{n+1}^{m+1}] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 - \delta_{jm})(n+m)(n+m-1) i X_{n-1}^{m-1} + (1 + \delta_{jm}) i X_{n-1}^{m+1} - \\ &\quad - (1 - \delta_{jm})(n-m+1)(n-m+2) i X_{n+1}^{m-1} - (1 + \delta_{jm}) i X_{n+1}^{m+1}] + \\ &\quad \left. + \mathbf{k} [(n+m) X_{n-1}^m + (n-m+1) X_{n+1}^m] \right\}, \end{aligned}$$

где $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$ и 1 при $m = n$;

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{mn}(\vartheta, \varphi) &= \frac{r}{V n(n+1)} \text{grad} [X_n^m(\vartheta, \varphi)] = \mathbf{a}_r \times \mathbf{C}_{mn} = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left[\sqrt{\frac{n+1}{n}} r^{1-n} \text{grad}(r^n X_n^m) + \sqrt{\frac{n}{n+1}} r^{n+2} \text{grad}(r^{-n-1} X_n^m) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1) \sin \vartheta} \left\{ \mathbf{a}_\vartheta \left[\frac{n-m+1}{n+1} X_{n+1}^m - \frac{n+m}{n} X_{n-1}^m \right] + \mathbf{a}_\varphi \frac{m(2n+1)}{n(n+1)} i X_n^m \right\} = \\ &= \frac{1}{2n+1} \mathbf{i} \left\{ \sqrt{\frac{n+1}{n}} [(1 - \delta_{0m})(n+m)(n+m-1) X_{n-1}^{m-1} - (1 + \delta_{0m}) X_{n-1}^{m+1} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{n}{n+1}} [(1 - \delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2) X_{n+1}^{m-1} - (1 + \delta_{0m}) X_{n+1}^{m+1}] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2n+1} \mathbf{j} \left\{ \sqrt{\frac{n+1}{n}} [(1 - \delta_{0m})(n+m)(n+m-1) iX_{n-1}^{m-1} + (1 + \delta_{0m}) iX_{n-1}^{m+1}] + \right. \\
& + \left. \sqrt{\frac{n}{n+1}} [(1 - \delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2) iX_{n+1}^{m-1} + (1 + \delta_{0m}) iX_{n+1}^{m+1}] \right\} + \\
& + \frac{\mathbf{k}}{2n+1} \left\{ \sqrt{\frac{n+1}{n}} (n+m) X_{n-1}^m - \sqrt{\frac{n}{n+1}} (n-m+1) X_{n+1}^m \right\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{mn}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \operatorname{rot} [\mathbf{r} X_n^m(\vartheta, \varphi)] = -\mathbf{a}_r \times \mathbf{B}_{mn} = \\
&= \frac{\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1) \sin \vartheta} \left\{ \mathbf{a}_\vartheta \frac{m(2n+1)}{n(n+1)} iX_n^m - \mathbf{a}_\varphi \left[\frac{n-m+1}{n+1} X_{n+1}^m - \frac{n+m}{n} X_{n-1}^m \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [(1 - \delta_{0m})(n+m)(n-m+1) iX_n^{m-1} + (1 + \delta_{0m}) iX_n^{m+1}] - \right. \\
&- \left. \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 - \delta_{0m})(n+m)(n-m+1) X_n^{m-1} - (1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1}] - \mathbf{k} m iX_n^m \right\} ;
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{mn}^s \cdot \mathbf{B}_{mn}^s = \mathbf{P}_{mn}^s \cdot \mathbf{C}_{mn}^s = \mathbf{B}_{mn}^s \cdot \mathbf{C}_{mn}^s = 0, \quad s = e, o.$$

Заметим, что $\mathbf{P}_{0n} = \mathbf{P}_{0n}^e$. Поэтому в случае $m=0$ достаточно взять лишь действительные части коэффициентов при $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Частные случаи:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{00} &= \mathbf{a}_r; \quad \mathbf{P}_{01} = \mathbf{a}_r \cos \vartheta; \quad \mathbf{P}_{11} = \mathbf{a}_r e^{i\varphi} \sin \vartheta; \\
\mathbf{B}_{00} &= 0; \quad \mathbf{B}_{01} = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \mathbf{a}_\vartheta \sin \vartheta; \quad \mathbf{B}_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{i\varphi} (\mathbf{a}_\vartheta \cos \vartheta + i \mathbf{a}_\varphi); \\
\mathbf{C}_{00} &= 0; \quad \mathbf{C}_{01} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta; \quad \mathbf{C}_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{i\varphi} (i \mathbf{a}_\vartheta - \mathbf{a}_\varphi \cos \vartheta).
\end{aligned}$$

Зональные векторные гармоники ($m=0$, $n > 0$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{0n}(\vartheta, \varphi) &= \mathbf{a}_r P_n(\cos \vartheta) = \\
&= \frac{1}{2n+1} \{ [\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi] [P_{n+1}^1(\cos \vartheta) - P_{n-1}^1(\cos \vartheta)] + \\
&\quad + \mathbf{k} \{ (n+1) P_{n+1}(\cos \vartheta) + n P_{n-1}(\cos \vartheta) \} \} \simeq \mathbf{k}, \quad \vartheta \rightarrow 0; \\
\mathbf{B}_{0n}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \mathbf{a}_\vartheta P_n^1(\cos \vartheta) = \\
&= -\frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi}{\sqrt{n(n+1)}} [n P_{n+1}^1(\cos \vartheta) + (n+1) P_{n-1}^1(\cos \vartheta)] + \right. \\
&\quad + \left. \mathbf{k} \sqrt{n(n+1)} [P_{n+1}(\cos \vartheta) - P_{n-1}(\cos \vartheta)] \right\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{0n}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} a_{\varphi} P_n^1(\cos \vartheta) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} (-i \sin \varphi + j \cos \varphi) P_n^1(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Интегральные и дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \int \int \mathbf{P}_{mn}^s \cdot \mathbf{B}_{\mu\nu}^{\sigma} d\Omega &= \int \int \mathbf{P}_{mn}^s \cdot \mathbf{C}_{\mu\nu}^{\sigma} d\Omega = \int \int \mathbf{B}_{mn}^s \cdot \mathbf{C}_{\mu\nu}^{\sigma} d\Omega = 0; \\ \int \int \mathbf{P}_{mn}^s \cdot \mathbf{P}_{\mu\nu}^{\sigma} d\Omega &= \int \int \mathbf{B}_{mn}^s \cdot \mathbf{B}_{\mu\nu}^{\sigma} d\Omega = \\ &= \int \int \mathbf{C}_{mn}^s \cdot \mathbf{C}_{\mu\nu}^{\sigma} d\Omega = \frac{4\pi/\varepsilon_m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{s\sigma} \delta_{m\mu} \delta_{n\nu}, \end{aligned}$$

где $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, а пределы интегрирования

$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$(s, \sigma = e, o; \nu, n = 1, 2, 3, \dots; \mu, m = 0, 1, \dots, \nu, n);$$

$$\operatorname{div} [r^{n+1} \mathbf{P}_{mn}(\vartheta, \varphi)] = (n+3) r^n X_n^m(\vartheta, \varphi);$$

$$\operatorname{div} (r^{n-1} \mathbf{P}_{mn}) = (n+1) r^{n-2} X_n^m; \quad \operatorname{div} (r^{-n} \mathbf{P}_{mn}) = -(n-2) r^{-n-1} X_n^m;$$

$$\operatorname{div} (r^{-n-2} \mathbf{P}_{mn}) = -n r^{-n-3} X_n^m;$$

$$\operatorname{div} (r^{n+1} \mathbf{B}_{mn}) = -\sqrt{n(n+1)} r^n X_n^m;$$

$$\operatorname{div} (r^{n-1} \mathbf{B}_{mn}) = -\sqrt{n(n+1)} r^{n-2} X_n^m;$$

$$\operatorname{div} (r^{-n} \mathbf{B}_{mn}) = -\sqrt{n(n+1)} r^{-n-1} X_n^m;$$

$$\operatorname{div} (r^{-n-2} \mathbf{B}_{mn}) = -\sqrt{n(n+1)} r^{-n-3} X_n^m;$$

$$\operatorname{div} (r^{n+1} \mathbf{C}_{mn}) = \operatorname{div} (r^{n-1} \mathbf{C}_{mn}) = \operatorname{div} (r^{-n} \mathbf{C}_{mn}) = \operatorname{div} (r^{-n-2} \mathbf{C}_{mn}) = 0;$$

$$\operatorname{rot} (r^{n+1} \mathbf{P}_{mn}) = \sqrt{n(n+1)} r^n \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^{n-1} \mathbf{P}_{mn}) = \sqrt{n(n+1)} r^{n-2} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^{-n} \mathbf{P}_{mn}) = \sqrt{n(n+1)} r^{-n-1} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^{-n-2} \mathbf{P}_{mn}) = \sqrt{n(n+1)} r^{-n-3} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^{n+1} \mathbf{B}_{mn}) = -(n+2) r^n \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^{n-1} \mathbf{B}_{mn}) = -n r^{n-2} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^{-n} \mathbf{B}_{mn}) = (n-1) r^{-n-1} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^{-n-2} \mathbf{B}_{mn}) = (n+1) r^{-n-3} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^n \mathbf{C}_{mn}) = (n+1) r^{n-1} \mathbf{B}_{mn} + \sqrt{n(n+1)} r^{n-1} \mathbf{P}_{mn};$$

$$\operatorname{rot} (r^{-n-1} \mathbf{C}_{mn}) = -n r^{-n-2} \mathbf{B}_{mn} + \sqrt{n(n+1)} r^{-n-2} \mathbf{P}_{mn}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Книги по электромагнитной теории:

- Абрагам М. и Беккер Р., Теория электричества, М.—Л., 1936.
Борн М., Оптика, Харьков—Киев, 1937.
Зоммерфельд А., Электродинамика, Издательство, М., 1958.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
Слэтер Дж. К., Передача ультракоротких волн, М.—Л., 1946.
Страттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.
Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, М.—Л., 1937.
Hansen W. W. A New Type of Expansion in Radiation Problems, Phys. Rev., 47, 139 (1935).
Jeans J. H., Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, New York, 1925.
Livens G. H., The Theory of Electricity, New York, 1918.
Mason M. and Weaver W., The Electromagnetic Field, Chicago, 1929.
Shelkunoff S. A., Electromagnetic Waves, New York, 1943.
Silver S. editor, Microwave Antenna Theory and Design, New York, 1949.

Книги по теории упругости:

- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
Ляв А., Математическая теория упругости, М.—Л., 1935.
Тимошенко С. П., Теория упругости, М.—Л., 1934.
Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, New York, 1946.

Книги по гидродинамике вязкой жидкости:

- Ламб Г., Гидродинамика, М.—Л., 1947.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
Milne-Thomson L. M., Theoretical Hydrodynamics, London, 1938.

Приложение

К нашему изложению методов вычисления потенциальных, волновых и диффузионных полей, скалярных и векторных, остается теперь добавить только некоторые данные справочного характера.

Не удивительно, если учесть большое количество рассмотренных величин, что мы вынуждены были применять некоторые символы в различных значениях. Для обозначения величин, упоминаемых только в одном параграфе, мы старались пользоваться символами, которые представляются нам наиболее употребительными; однако в отношении величин, с которыми приходится иметь дело на протяжении всей книги, мы старались быть последовательными в наших обозначениях. Повторения обозначений неизбежны, но мы старались, чтобы они не могли привести к недоразумениям. Чтобы еще уменьшить возможность недоразумений, мы перечисляем в Указателе обозначений все те символы, которые используются в нескольких параграфах, приводя их определение, либо, если это удобнее, отсылая к формуле или странице, где этот символ впервые определяется. В некоторых случаях наша символика не согласуется с принятой в других источниках (либо же имеется несколько различных символов). Все эти различия указаны в Указателе обозначений; там же объясняется, где применены другие обозначения, или же другие обозначения сравниваются с нашими.

Конечной целью всех вычислений, описанных в этой книге, является получение численных значений, предназначенных для проверки или предсказания результатов измерений. Следовательно, представляется целесообразным включить в книгу численные таблицы, позволяющие превратить выведенные формулы в числа. Конечно, мы вынуждены были произвести отбор; чтобы иметь таблицы всех упомянутых функций, пришлось бы добавить еще один такой или примерно такой том. Выбранные функции встречаются у нас чаще всего и почти без исключений являются решениями дифференциальных уравнений различных типов, рассмотренных в гл. 5; почти все эти функции являются решениями какого-либо из разделенных уравнений в частных производных математической физики. Тригонометрические и гиперболические функции имеют особенность в бесконечности; они появляются как угловые множители во всех вращательных системах координат и как z -множители во всех цилиндрических системах. Функции Лежандра имеют особенности в ± 1 и ∞ ; они появляются как угловые множители в сферической системе координат и для уравнения Лапласа как множители в сфероидальной, бисферической и тороидальной системах. Функции Бесселя, имеющие особенности в нуле и бесконечности, используются в сферической системе и в круговых цилиндрических координатах. Функции Матье используются для получения решений в эллиптических цилиндрических координатах. Мы не включили таблицу функций Вебера и таблицы сфероидальных волновых функций, а также отказались от табулирования решений уравнения Шредингера. Мы не считаем, что труд, который необходимо затратить

для табулирования этих функций, а также функций, зависящих от большого числа параметров и требующих для своего эффективного использования громоздких таблиц, будет в достаточной мере вознагражден их значением для основного предмета этой книги.

Указатель обозначений

Вообще говоря, латинские или греческие светлые буквы используются для обозначения скалярных величин (действительных или комплексных), полужирный прямой шрифт используется для обозначения векторов в обычном или в абстрактном пространстве, готический шрифт — для обозначения линейных векторных операторов (аффиноров или абстрактных векторных операторов), рукописные буквы — для обозначения дифференциальных операторов и, наконец, еврейские буквы — для обозначения аффинорных операторов (тетрадики).

Черта над символом обозначает комплексную сопряженность; $\bar{f} = u - iv$, если $f = u + iv$; $\bar{A}$ — это вектор, комплексно сопряженный вектору A , т. е. имеющий компоненты $\bar{A}_n$, комплексно сопряженные компонентам A_n вектора A . Оператору $\mathfrak{A}$ соответствует оператор $\bar{\mathfrak{A}}$, компоненты матрицы которого комплексно сопряжены компонентам оператора $\mathfrak{A}$. Сопряженный оператор $\tilde{\mathfrak{A}}$ для оператора $\mathfrak{A}$ имеет матрицу, которая получается из матрицы (действительного) оператора $\mathfrak{A}$ посредством поворота на 180° относительно главной диагонали (т. е. $\tilde{A}_{mn} = A_{nm}$); эрмитовски сопряженный оператор $\mathfrak{A}^*$ для оператора $\mathfrak{A}$ определяется равенством $\mathfrak{A}^* = \tilde{\bar{\mathfrak{A}}}$ (т. е. $A_{mn}^* = \bar{A}_{nm}$) (см. стр. 717, 718 и 814 тома I). Сопряженный оператор $\tilde{\mathfrak{A}}$ для дифференциального оператора $\mathfrak{A}$ определен формулами (5.2.11) и (7.5.4). Символ $||$, вообще говоря, означает «абсолютную величину» или «модуль» или «длину вектора»; $|A| = A$ — это корень квадратный из суммы произведений соответственных компонент векторов A и $\bar{A}$; $|f|$ — это корень квадратный из суммы квадратов действительной и мнимой частей комплексного числа $f = u + iv$; $|\mathfrak{A}|$ — это след оператора $\mathfrak{A}$, равный сумме диагональных элементов (действительной) матрицы оператора $\mathfrak{A}$ (см., однако, стр. 24).

Символ $\oint$ обозначает интегрирование по замкнутому контуру или по замкнутой поверхности; $\oint f dz$ — это интеграл по замкнутому контуру в комплексной плоскости; $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ — это интеграл циркуляции (см. стр. 29 тома I); $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ — это интеграл потока сквозь замкнутую поверхность (см. стр. 27 тома I).

Перечень, приводимый ниже, включает символы, используемые более чем в одном разделе. Указывается обычное значение или значения символа, а также формула или страница, где этот символ определяется. Перечислим, наконец, несколько книг, в которых либо имеются другие формулы, содержащие использованные нами символы, либо применены другие символы для обозначения односторонних величин, либо же применены символы, которые стоит сравнить с нашими. Здесь же поясним сокращения, принятые в Указателе.

УВ — Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, Гостехиздат, М. — Л., ч. I, 1933; ч. II, 1934.

ЯЭ — Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, М. — Л., 1949.

BS — NBS Computation Laboratory, Tables Relating to Mathieu Functions, New York, 1951.

MO — Magnus W. and Oberhettinger F., Special Functions of Mathematical Physics, New York, 1949.

a — Постоянная диффузии [(2.4.3)].

$\mathbf{a}$ — Единичный вектор в обычном пространстве ($\mathbf{a}_r$ — единичный вектор направления r и т. д.).

$\mathbf{A}$ — Векторный потенциал [стр. 197 тома I; (13.2.1)].

$d\mathbf{A}$ — Векторный элемент поверхности, направленный наружу, если поверхность замкнутая [стр. 27 тома I].

$B(p, q) = \Gamma(p) \Gamma(q) / \Gamma(p+q)$ — Бета-функция [(4.5.54)].

$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ — Магнитная индукция [(2.5.3)].

$\mathbf{B}_{mn}(\vartheta, \varphi)$ — Векторная сферическая гармоника второго рода [стр. 824, 825].

c — Скорость света [(1.7.1)] или скорость волнового движения вообще [(2.1.9)].

$\text{cn}(z, k)$ — Эллиптическая функция [(4.5.75)].

$\cos z$ — Косинус [стр. 300].

$\text{ch } z$ — Гиперболический косинус [стр. 301].

C_m, C'_m — Амплитуды функции Ганкеля и ее производной [стр. 522].

$C_{mn}(\vartheta, \varphi)$ — Векторная сферическая гармоника третьего рода [стр. 825].

$\text{dn}(z, k)$ — Эллиптическая функция [(4.5.75)].

$D_m(z)$ — Функция Вебера [(11.2.63) и стр. 524].

D_m, D'_m — Амплитуды сферической функции Ганкеля и ее производной [стр. 533].

$\mathbf{D}$ — Электрическая индукция [(2.5.1)].

$\mathfrak{D}$ — Аффинор деформации [(1.6.20)].

$e = 2,71828 \dots$ — Основание натуральных логарифмов.

e — Электрический заряд элементарной частицы (для электрона $e = 4,80 \cdot 10^{-10}$ абс. эл. ст. ед.).

E — Энергия.

$E_m^{(n)}(z)$ — Полуцилиндрическая функция [стр. 699].

$\text{Ei}(z)$ — Интегральная показательная функция [стр. 441 тома I].

$E_n(x)$ — Обобщенная интегральная показательная функция [(12.2.14)].

$\mathbf{e}$ — Единичный вектор в абстрактном векторном пространстве [(1.6.31)].

$\mathbf{E}$ — Электрическая напряженность [(2.5.1)].

- f — Функции распределения [стр. 171 тома I и (12.2.1)].
- $f_n(\xi_n)$ — Множитель, появляющийся при разделении переменных в случае оператора Лапласа [(5.1.32)].
- $f(\vartheta)$ — Фактор углового распределения (амплитуда рассеяния) [(9.3.2), (11.4.58) и стр. 633].
- $F(a|c|z)$ — Вырожденная гипергеометрическая функция [(5.2.59) и (5.3.47)]. Она равна
- $$z^{-c/2} e^{z/2} M_{c/2-a, (c-1)/2}(z),$$
- где функция $M_{km}(z)$ определена в УВ, гл. 16.
- $F(a, b|c|z)$ — Гипергеометрический ряд [(5.2.44) и (5.3.14)].
- $\mathbf{F}$ — Сила.
- $\mathbf{\tilde{F}}$ — 4-аффинор электромагнитного поля [(2.5.20)].

- $g_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ — Функция Грина для свободного пространства [(7.2.18)].
- $g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|t)$ — Импульсная функция, преобразование Лапласа функции Грина [(7.3.8) и (11.1.15)].
- $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ — Функция Грина общего вида.
- $G(a|c|z)$ — Вырожденная гипергеометрическая функция второго рода [(5.3.59)].
- $\mathbf{G}_n$ — Третье поле собственных векторов (не поперечное и не продольное) для векторного уравнения Лапласа (13.2.13) (см. $\mathbf{L}_n$ и $\mathbf{M}_n$).
- $\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ — Аффинорная функция Грина для векторных решений [(13.1.8)].
- $\mathcal{G}$ — Дифференциальный оператор, появляющийся при факторизации [стр. 678, 679 тома I].

- h_n — Коэффициент Ламе для криволинейных координат [(1.3.4)].
- $h = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ — Постоянная Планка, деленная на 2π .
- $h_n(z) = \sqrt{\pi/2z} H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ — Сферическая функция Ганкеля [(11.3.42)].
- H — Плотность функции Гамильтона [(3.2.7)].
- $H_m(z)$ — Функция Ганкеля [(5.3.69)]; $H_m^{(1)} = J_m + iN_m$, $H_m^{(2)} = J_m - iN_m$. Если верхний индекс отсутствует, то подразумевается функция $H_m^{(1)} = J_m + iN_m$.
- $H_m(x)$ — Полином Эрмита [стр. 729 тома I].
- $\mathbf{H}$ — Магнитная напряженность [(2.5.8) и (13.2.1)].
- $\mathfrak{H}$ — Гамильтониан — оператор [(2.6.27)].
- $\mathcal{H}$ — Гамильтониан — дифференциальный оператор [(12.3.1)].

- $i = \sqrt{-1} = -j$ — См. формулу [(4.1.1)].
- i, j, k — Единичные кватернионы (стр. 78 тома I).
- $\text{Im } f = v$, если $f = u + iv$. — Мнимая часть комплексного числа f .
- $J_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$ — Гиперболическая функция Бесселя (стр. 303).
- $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — Единичные векторы соответственно вдоль осей x, y, z [(1.2.1)].
- $\mathfrak{I}$ — Идемпотент. Единичный аффинор [(стр. 63 тома I)].

$j = -i$ — См. стр. 127 тома I.

$j_n(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{n+1/2}(x)$ — Сферическая функция Бесселя [(5.3.67) и (11.3.42)].

$j e_m(h, z)$ — Сфероидальная радиальная функция [(5.3.96), (11.3.91)].

$J_n(x)$ — Функция Бесселя первого рода [(5.3.63)].

$J_n^{(m)}(z)$ — Полуцилиндрическая функция [(стр. 699, 700)].

$J e_m(h, z), J o_m(h, z)$ — Радиальные функции Матье [(5.3.90)]. Относительно соотношений и других обозначений см. BS, стр. XXXVIII.

J — Плотность тока или вектор плотности потока массы [(2.4.1) и (13.2.1)].

$k = 2\pi/\lambda$ — Волновое число.

$K_n(z) = (1/2) \pi i e^{\pi i n/2} H_n^{(1)}(iz)$ — Гиперболическая функция Бесселя [(стр. 303)].

$K(x|t)$ — Ядро интегрального представления общего вида [(5.3.1)] или интегрального уравнения [(8.1.16)].

k — Волновой вектор, величина его равна $2\pi/\lambda$, а направлен он по нормали к фронту волны [(9.4.69)].

l — $\begin{cases} \text{Длина.} \\ \text{Квантовое число для орбитального момента} \end{cases}$ [(12.3.33)].

$\ln z$ — Натуральный логарифм z .

$L = T - V$ — Плотность функции Лагранжа [(3.1.1)].

$L_n^a(x)$ — Полином Лагерра [стр. 728 тома I и (12.3.35)].

$L_n = \text{grad } \varphi_n$ — Продольное поле собственных векторов [(13.1.14)].

$\mathcal{L}$ — Дифференциальный оператор Лагранжа или функция Лагранжа системы [(3.1.1)].

m — $\begin{cases} \text{Масса частицы.} \\ \text{Квантовое число для } z\text{-компоненты орбитального момента} \end{cases}$ [(стр. 612)].

M — $\begin{cases} \text{Масса частицы [(12.3.1)].} \\ \text{Число Маха [(2.3.23)].} \end{cases}$

M_m^e, M_m^o — Нормирующие множители для функции Матье [(стр. 384)].

M — Плотность момента количества движения [(стр. 305 тома I)].

$M_n = \text{rot}(\mathbf{a}_1 \omega \psi_n)$ — Первое поперечное поле собственных векторов [(13.1.14)].

$\mathfrak{M}$ — Оператор момента количества движения [(1.6.42)].

$\mathfrak{M}_i(K) = \mathcal{L}_i(K)$ — Дифференциальный оператор, связанный с оператором $\mathcal{L}_z(K)$ при интегральных преобразованиях [(5.3.7)].

n — $\begin{cases} \text{Целое число.} \\ \text{Радиальное квантовое число [(12.3.36) и (12.3.39)].} \end{cases}$

$n_m(x) = \sqrt{\pi/2x} N_{m+1/2}(x)$ — Сферическая функция Неймана [(5.3.67), (11.3.42)].

$N_m(z)$ — Функция Неймана [(5.3.75)]. Она равна функции $Y_m(z)$, используемой УВ, гл. 17.

$Ne_m(h, z), No_m(h, z)$ — Радиальные функции Матье второго рода [(5.3.91)]. Относительно соотношений и других обозначений см. BS, стр. XXXVIII.

$N_n = (1/k) \operatorname{rot} \operatorname{rot} (a_1 \omega \chi)$ — Второе поперечное поле собственных векторов [(13.1.14)].

n — Единичный вектор нормали к поверхности [стр. 22 тома I].

p — Давление [(2.3.10)].

p_n — Обобщенный импульс, сопряженный координате q_n [(2.6.3)].

$P(u, v)$ — Присоединенная билинейная форма [(5.2.12)].

$P_n^m(z)$ — Функция Лежандра первого рода [(5.2.47) и (5.3.36)]. Эта функция отличается только множителем $(-1)^m$ от той, которая определена у МО, стр. 60.

$P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{matrix} \right. w$ — Символ Римана [(5.2.37)].

p — Вектор импульса.

P — Векторное поле плотности импульса [(3.4.5)].

$P_{mn}(\vartheta, \varphi)$ — Векторная сферическая гармоника первого рода [стр. 824].

$p, \mathfrak{P}$ — Оператор импульса [(1.6.42) и (1.6.32)].

$\mathfrak{P}$ — { Оператор дифференцирования [(6.3.67)].
Главное значение интеграла [(4.2.9)].

q — Плотность источников.

q_n — Координата, сопряженная обобщенному импульсу p_n [(2.6.3)].

Q — { Величина заряда [(2.5.25)].
Полный поток жидкости в $см^3/сек$ [стр. 177].
Эффективное сечение рассеяния [(2.4.12), (11.3.72) и (11.4.62)].

$Q_n^m(z)$ — Функция Лежандра второго рода [стр. 308]. Она отличается только множителем $(-1)^m$ от определенной у УВ, стр. 109, II, и от функции $\mathfrak{Q}_n^m$, определенной у МО, стр. 60.

q — Оператор положения [стр. 227 тома I].

$\mathfrak{Q}$ — Оператор интегрирования [(6.3.67)].

r — Радиус, расстояние от начала координат.

R — { Коэффициент отражения [(9.3.10)].
Сопротивление (резистанс).
Расстояние от точки (x, y, z) до точки (x_0, y_0, z_0) .

$\operatorname{Re} f = u$, если $f = u + iv$. — Действительная часть комплексного числа f .

$\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r = ix + jy + kz$ — Радиус-вектор.

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ — Вектор расстояния точки (x, y, z) от точки (x_0, y_0, z_0) [(7.2.13)].

$\mathfrak{R}$ — Оператор вращения [(1.6.24)].

- $\sin z$ — Синус z [стр. 301].
 $\operatorname{sh} z$ — Гиперболический синус z [стр. 301].
 $\operatorname{sn}(z, k)$ — Эллиптическая функция [(4.5.75)].
 ds — Элемент длины дуги кривой.
 S — { Площадь поперечного сечения.
 { Определитель Штекеля [(5.1.25)].
 dS — Элемент площади поверхности.
 $Se_m(h, z), So_m(h, z)$ — Периодические функции Матье [(5.2.73)].
 Пропорциональны функциям se_m и se_m из УВ, но нормированы иначе; относительно коэффициента пропорциональности см. BS, стр. XXXVIII.
 $S_{ml}(h, z)$ — Сфероидальная функция [(5.3.95)].
 s — Вектор смещения в упругом теле [(1.6.20) и (13.2.3)].
 ds — Элемент кривой при криволинейном интегрировании в пространстве.
 S — Вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) [(2.2.20) и (3.3.15)].
 $\mathfrak{S}$ — Аффинор деформации [(1.6.21)].
 $\mathcal{S}$ — Функция Матье общего вида [(5.2.72)].
 t — Время.
 $\operatorname{tn}(z, k)$ — Эллиптическая функция [стр. 462 тома I].
 T — { Коэффициент прохождения.
 { Натяжение [(2.1.1)].
 { Кинетическая энергия [(3.2.1)].
 $T(\mathbf{k}_s | \mathbf{k}_i) = -4\pi f(\vartheta)$ — Фактор углового распределения при рассеянии волн [(9.3.44) и (12.3.56)].
 $T_n^m(z)$ — Функция Гегенбауэра [(5.2.52) и (5.3.35)]. Она равна $(2^m/\sqrt{\pi}) \Gamma(m+1/2) C_n^{m+1/2}(z)$, где C_n^v — полином Гегенбауэра; см. УВ, стр. 127, II, и МО, стр. 76.
 $\mathfrak{T}$ — { Аффинор напряжений [стр. 74, 75 тома I и (13.2.4)].
 { Оператор кинетической энергии.
 u, v, w — Компоненты скорости.
 $u(x) = 0$ при $x < 0$ и $u(x) = 1$ при $x > 0$. Функция единичного скачка [(2.1.6)].
 $U(a | c | z)$ — Функция Уиттекера; вырожденная гипергеометрическая функция третьего рода [(5.3.52)].
 С функциями $W_{k, m}(z)$ из УВ, стр. 139, II, связана соотношениями

$$W_{k, m}(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} e^{i\pi(k-m-1/2)} U_2\left(m-k+\frac{1}{2} | 2m+1 | z\right),$$

$$W_{-k, m}(-z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} U_1\left(m-k+\frac{1}{2} | 2m+1 | z\right).$$
 $\mathfrak{U}$ — { Часть аффинора напряжений-энергии, соответствующая напряжениям [(3.4.6)].
 { Скорость изменения деформации [стр. 156 тома I].
 v — Скорость.
 dV — Элемент объема.

- V — { Разность потенциалов, напряжение [стр. 213 тома I].
 Потенциальная энергия [(3.2.2)].
 $V_n^m(z)$ — Функция Гегенбауэра второго рода [(5.3.41)].
 $\mathbf{v}$ — Вектор скорости.
 $\omega = \xi_1 + i\xi_2$ — Обобщенные двумерные координаты [(5.1.5)].
 W — Энергия [(2.1.11)]. Плотность энергии.
 $\mathbf{w} = (1/2) \operatorname{rot} \mathbf{v}$ — Вихревой вектор [(2.3.3) и (13.2.9)].
 $\mathfrak{W}$ — Аффинор напряжений-энергии [(3.3.7)].
- x, y, z — Ортогональные координаты.
 X — Реактивное сопротивление (реактанс) [(4.2.20)].
 $\mathfrak{x}$ — Квантовомеханический оператор положения [(1.6.32)].
 $Y = 1/Z$ — Полная проводимость (адмитанс) [(3.3.16)].
 $\mathfrak{Y} = (3)^{-1}$ — Аффинор адмитанса [(3.4.24)].
- $z = x + iy$ — Комплексное число
 z — Акустический импеданс [(11.1.35)].
 $Z = R + iX$ — Импеданс.
 $\mathfrak{Z}$ — Аффинор импеданса [(3.4.24)].
- α — Угол в преобразовании Лоренца [(1.7.2)].
 α, β, γ — Направляющие косинусы.
 α — Оператор Дирака [(2.6.53)].
 γ — { Второй коэффициент вязкости [(2.3.10)].
 Отношение удельных теплоемкостей [(2.3.22)].
 $\Gamma(x)$ — Гамма-функция [(4.5.29)].
- δ — Символ вариации [(3.1.2)].
 δ_m — Фазовый угол функции Ганкеля [(стр. 522 и 533)].
 $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$ и $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$.
 Символ Кронекера [(1.3.1)].
 $\delta(x)$ — Дельта-функция Дирака [(2.1.4), (2.6.23) и (6.3.58)].
 ∂ — Символ частного дифференцирования.
 Δ — Определитель.
 $\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ — Вронскиан решений y_1 и y_2 [(5.2.2)].
- ε — Диэлектрическая постоянная [(2.5.1)].
 $\varepsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\varepsilon_m = 2$ при $m > 0$. Множитель Неймана [(10.1.13)].
- η — Коэффициент вязкости [(2.3.10) и (13.2.5)].
- θ, ϑ — Угол в сферической системе координат.
 $\vartheta_n(u, q)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) — Тета-функции [(4.5.68)].
- $\lambda = c/v$ — Длина волны.
 λ — Модуль упругости [(1.6.28) и (13.2.3)].
 λ_n — Собственное значение интегрального оператора [(8.2.24)].
 Λ — Нормирующая постоянная.

μ — { Магнитная проницаемость [(2.5.5) и (13.2.1)].
 Модуль сдвига [(1.6.28) и (13.2.3)].

$\nu = \omega/2\pi = c/\lambda$ — Частота [(2.1.10)].

ξ — Криволинейная координата [(1.3.4)].

$\pi = 3,14159 \dots$ — Отношение длины окружности
к диаметру.

$\prod$ — Символ произведения:

$$\prod_{n=0}^N f_n = f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_{N-1} \cdot f_N.$$

ρ — Плотность [(2.4.6) и (2.5.1)].

$\hat{\rho}$ — Оператор Дирака [(2.6.53)].

σ — { Проводимость [(2.5.19)].
 Действительная часть переменной k пре-
 образования Фурье [стр. 436 тома I].

$\hat{\sigma}$ — Спиновый оператор [(1.7.17)].

$\sum$ — Символ суммирования:

$$\sum_{n=0}^N f_n = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} + f_N.$$

τ — { Собственное время [(1.7.1)].

Мнимая часть переменной k преобразования
 Фурье [(4.8.18) и (8.5.13)].

Γ — Угловой множитель для волновой функции
двух частиц [(12.3.81)].

Φ, ϕ — Угол.

Φ, ϕ — { Угол в сферической системе координат.

Фазовый угол (аргумент) комплексного числа.

φ_n — Собственная функция для невозмущенного
состояния [(9.1.2)].

Φ_{mn} — Элемент определителя Штекеля [(5.1.25)].

ψ — Скалярное поле, волновая функция.

$\psi_m(z)$ — Полигамма-функция [(4.5.46)].

ψ_n — Собственная функция [(6.3.16)].

$\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$ — Зависящая от времени волновая функция
[стр. 591].

$\omega = 2\pi\nu$ — Угловая частота [(2.1.10)].

$\boldsymbol{\omega}$ — Вектор вращения [(1.4.4)].

∇ — Оператор градиента, читается «набла»
[(1.4.1)].

∇^2 — Оператор Лапласа [(1.1.4)].

$\square$ — Четырехмерный градиент.

$\square^2$ — Даламбертиан — оператор [(1.7.6)].

$\times$ — Векторное умножение [(1.2.3)].

$\cdot$ — Скалярное умножение векторов [(1.2.2)].
 Также знак обычного умножения.

$\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ — Символы Кристоффеля [(1.5.4)].

$[\lambda]$ — Функция одного или нескольких варьируемых параметров, стационарным значением которой является собственное значение λ [(9.4.6) и (11.4.6)].

$[n, m]$ — Матрица, элементами которой служат интегралы $\int \varphi_n \mathcal{M} \varphi_m dv$, где φ_n и φ_m — n -е и m -е приближения точного решения ψ [(9.4.96)].

$|A|$ — Абсолютная величина (модуль) комплексного числа.

$|A_{nm}|$ — Определитель с элементами A_{nm} .

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} [\Gamma(n+1)/m! \Gamma(n-m+1)] & \text{при } n > 0, \\ [(-1)^m \Gamma(m-n)/m! \Gamma(-n)] & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Биномиальные коэффициенты разложения

$$(1+x)^n = \sum_m \binom{n}{m} x^m.$$

$\overset{\lambda}{\mathbb{T}}$ (читается «гимель») — Тетрадики общего вида [(1.6.29) и стр. 77 тома I].

$\mathfrak{T}$ — (читается «иод») — Единичный тетрадик [стр. 76 тома I].

$\mathfrak{Y}$ — (читается «аин») — Диагонализующий тетрадик [стр. 76 тома I].

Таблицы

Таблица I. Тригонометрические и гиперболические функции
(см. стр. 300, 301).

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	e^x	e^{-x}
0,0	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,1987	0,9801	0,2027	0,2013	1,0201	0,1974	1,2214	0,8187
0,4	0,3894	0,9211	0,4228	0,4108	1,0811	0,3799	1,4918	0,6703
0,6	0,5646	0,8253	0,6841	0,6367	1,1855	0,5370	1,8221	0,5488
0,8	0,7174	0,6967	1,0296	0,8881	1,3374	0,6640	2,2255	0,4493
1,0	0,8415	0,5403	1,5574	1,1752	1,5431	0,7616	2,7183	0,3679
1,2	0,9320	0,3624	2,5722	1,5095	1,8106	0,8337	3,3201	0,3012
1,4	0,9854	+0,1700	+5,7979	1,9043	2,1509	0,8854	4,0552	0,2466
1,6	0,9996	-0,0292	-34,233	2,3756	2,5775	0,9217	4,9530	0,2019
1,8	0,9738	-0,2272	-4,2863	2,9422	3,1075	0,9468	6,0496	0,1653
2,0	0,9093	-0,4161	-2,1850	3,6269	3,7622	0,9640	7,3891	0,1353
2,2	0,8085	-0,5885	-1,3738	4,4571	4,5679	0,9757	9,0250	0,1108
2,4	0,6755	-0,7374	-0,9160	5,4662	5,5569	0,9837	11,023	0,0907
2,6	0,5155	-0,8569	-0,6016	6,6947	6,7690	0,9890	13,464	0,0742
2,8	0,3350	-0,9422	-0,3555	8,1919	8,2527	0,9926	16,445	0,0608
3,0	+0,1411	-0,9900	-0,1425	10,018	10,068	0,9951	20,086	0,0498
3,2	-0,0584	-0,9983	+0,0585	12,246	12,287	0,9967	24,533	0,0407
3,4	-0,2555	-0,9668	0,2643	14,965	14,999	0,9978	29,964	0,0331
3,6	-0,4425	-0,8968	0,4935	18,285	18,313	0,9985	36,598	0,0273
3,8	-0,6119	-0,7910	0,7736	22,339	22,362	0,9990	44,701	0,0223
4,0	-0,7568	-0,6536	1,1578	27,290	27,308	0,9993	54,598	0,0183
4,2	-0,8716	-0,4903	1,7778	33,335	33,351	0,9996	66,686	0,0150
4,4	-0,9516	-0,3073	3,0963	40,719	40,732	0,9997	81,451	0,0123
4,6	-0,9937	-0,1122	+8,8602	49,737	49,747	0,9998	99,484	0,0100
4,8	-0,9962	+0,0875	-11,385	60,751	60,759	0,9999	121,51	0,0082
5,0	-0,9589	0,2837	-3,3805	74,203	74,210	0,9999	148,41	0,0067
5,2	-0,8835	0,4685	-1,8856	90,633	90,639	0,9999	181,27	0,0055
5,4	-0,7728	0,6347	-1,2175	110,70	110,71	1,0000	221,41	0,0045
5,6	-0,6313	0,7756	-0,8139	135,21	135,22	1,0000	270,43	0,0037
5,8	-0,4646	0,8855	-0,5247	165,15	165,15	1,0000	330,30	0,0030
6,0	-0,2794	0,9602	-0,2910	201,71	201,71	1,0000	403,43	0,0025
6,2	-0,0831	0,9965	-0,0834	246,37	246,37	1,0000	492,75	0,0020
6,4	+0,1165	0,9932	+0,1173	300,92	300,92	1,0000	601,85	0,0016
6,6	0,3115	0,9502	0,3279	367,55	367,55	1,0000	735,10	0,0013
6,8	0,4941	0,8694	0,5683	448,92	448,92	1,0000	897,85	0,0011
7,0	0,6570	0,7539	0,8714	548,32	548,32	1,0000	1096,6	0,0009
7,2	0,7937	0,6084	1,3046	669,72	669,72	1,0000	1339,4	0,0007
7,4	0,8987	0,4385	2,0493	817,99	817,99	1,0000	1636,0	0,0006
7,6	0,9679	0,2513	3,8523	999,10	999,10	1,0000	1998,2	0,0005
7,8	0,9985	+0,0540	+18,507	1220,3	1220,3	1,0000	2440,6	0,0004
8,0	0,9894	-0,1455	-6,7997	1490,5	1490,5	1,0000	2981,0	0,0003

Таблица II. Тригонометрические и гиперболические функции
(см. стр. 300, 301).

x	$\sin \pi x$	$\cos \pi x$	$\operatorname{tg} \pi x$	$\operatorname{sh} \pi x$	$\operatorname{ch} \pi x$	$\operatorname{th} \pi x$	$e^{\pi x}$	$e^{-\pi x}$
0,00	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
0,05	0,1564	0,9877	0,1584	0,1577	1,0124	0,1558	1,1701	0,8546
0,10	0,3090	0,9511	0,3249	0,3194	1,0498	0,3042	1,3691	0,7304
0,15	0,4540	0,8910	0,5095	0,4889	1,1131	0,4392	1,6019	0,6242
0,20	0,5878	0,8090	0,7265	0,6705	1,2040	0,5569	1,8745	0,5335
0,25	0,7071	0,7071	1,0000	0,8687	1,3246	0,6558	2,1933	0,4559
0,30	0,8090	0,5878	1,3764	1,0883	1,4780	0,7363	2,5663	0,3897
0,35	0,8910	0,4540	1,9626	1,3349	1,6679	0,8003	3,0028	0,3330
0,40	0,9511	0,3090	3,0777	1,6145	1,8991	0,8502	3,5136	0,2846
0,45	0,9877	+0,1564	6,3137	1,9340	2,1772	0,8883	4,1111	0,2432
0,50	1,0000	0,0000	∞	2,3013	2,5092	0,9171	4,8105	0,2079
0,55	0,9877	-0,1564	-6,3137	2,7255	2,9032	0,9388	5,6287	0,1777
0,60	0,9511	-0,3090	-3,0777	3,2171	3,3689	0,9549	6,5861	0,1518
0,65	0,8910	-0,4540	-1,9626	3,7883	3,9180	0,9669	7,7062	0,1298
0,70	0,8090	-0,5878	-1,3764	4,4531	4,5640	0,9757	9,0170	0,1109
0,75	0,7071	-0,7071	-1,0000	5,2280	5,3228	0,9822	10,551	0,09478
0,80	0,5878	-0,8090	-0,7265	6,1321	6,2131	0,9870	12,345	0,08100
0,85	0,4540	-0,8910	-0,5095	7,1879	7,2572	0,9905	14,445	0,06922
0,90	0,3090	-0,9511	-0,3249	8,4214	8,4806	0,9930	16,902	0,05916
0,95	+0,1564	-0,9877	-0,1584	9,9632	9,8137	0,9949	19,777	0,05056
1,00	0,0000	-1,0000	0,0000	11,549	11,592	0,9962	23,141	0,04321
1,05	-0,1564	-0,9877	0,1584	13,520	13,557	0,9973	27,077	0,03693
1,10	-0,3090	-0,9511	0,3249	15,845	15,857	0,9980	31,682	0,03156
1,15	-0,4540	-0,8910	0,5095	18,522	18,549	0,9985	37,070	0,02697
1,20	-0,5878	-0,8090	0,7265	21,677	21,700	0,9989	43,376	0,02305
1,25	-0,7071	-0,7071	1,0000	25,367	25,387	0,9992	50,753	0,01970
1,30	-0,8090	-0,5878	1,3764	29,685	29,702	0,9994	59,387	0,01683
1,35	-0,8910	-0,4540	1,9626	34,737	34,751	0,9996	69,488	0,01438
1,40	-0,9511	-0,3090	3,0777	40,647	40,660	0,9997	81,307	0,01230
1,45	-0,9877	-0,1564	6,3137	47,563	47,573	0,9998	95,137	0,01051
1,50	-1,0000	0,0000	∞	55,654	55,663	0,9998	111,32	0,00898
1,55	-0,9877	+0,1564	-6,3137	65,122	65,130	1,9999	130,25	0,00767
1,60	-0,9511	0,3090	-3,0777	76,200	76,206	0,9999	152,41	0,00656
1,65	-0,8910	0,4540	-1,9626	89,161	89,167	0,9999	178,33	0,00561
1,70	-0,8090	0,5878	-1,3764	104,32	104,33	1,0000	208,66	0,00479
1,75	-0,7071	0,7071	-1,0000	122,07	122,08	1,0000	244,15	0,00409
1,80	-0,5878	0,8090	-0,7265	142,84	142,84	1,0000	285,68	0,00350
1,85	-0,4540	0,8910	-0,5095	167,13	167,13	1,0000	334,27	0,00299
1,90	-0,3090	0,9511	-0,3249	195,56	195,56	1,0000	391,12	0,00256
1,95	-0,1564	0,9877	-0,1584	228,82	228,82	1,0000	457,65	0,00219
2,00	0,0000	1,0000	0,0000	267,75	267,75	1,0000	535,49	0,00187

Таблица III. Гиперболический тангенс комплексного аргумента

$$\operatorname{th} [\pi (\alpha - i\beta)] = \theta - i\chi = |\zeta| e^{-i\varphi}$$

α	$\operatorname{th} \pi \alpha$	θ	χ	$ \zeta $	φ	θ	χ	$ \zeta $	φ
		$\beta=0,00$				$\beta=0,05$			
0,0000	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0—90°	0,0000	0,1584	0,1584	90,00°
0,0159	0,05	0,0500	0,0000	0,0500	0,00	0,0512	0,1580	0,1660	72,03
0,0319	0,10	0,1000	0,0000	0,1000	0,00	0,1025	0,1567	0,1872	56,82
0,0481	0,15	0,1500	0,0000	0,1500	0,00	0,1537	0,1547	0,2180	45,20
0,0645	0,20	0,2000	0,0000	0,2000	0,00	0,2048	0,1519	0,2549	36,56
0,0813	0,25	0,2500	0,0000	0,2500	0,00	0,2558	0,1482	0,2956	30,09
0,0985	0,30	0,3000	0,0000	0,3000	0,00	0,3068	0,1438	0,3388	25,12
0,1163	0,35	0,3500	0,0000	0,3500	0,00	0,3577	0,1386	0,3836	21,18
0,1349	0,40	0,4000	0,0000	0,4000	0,00	0,4084	0,1325	0,4293	17,98
0,1543	0,45	0,4500	0,0000	0,4500	0,00	0,4589	0,1256	0,4758	15,32
0,1748	0,50	0,5000	0,0000	0,5000	0,00	0,5093	0,1181	0,5228	13,05
0,1968	0,55	0,5500	0,0000	0,5500	0,00	0,5596	0,1096	0,5702	11,08
0,2207	0,60	0,6000	0,0000	0,6000	0,00	0,6095	0,1005	0,6177	9,36
0,2468	0,65	0,6500	0,0000	0,6500	0,00	0,6593	0,0905	0,6654	7,82
0,2761	0,70	0,7000	0,0000	0,7000	0,00	0,7088	0,0798	0,7133	6,43
0,3097	0,75	0,7500	0,0000	0,7500	0,00	0,7581	0,0683	0,7612	5,15
0,3497	0,80	0,8000	0,0000	0,8000	0,00	0,8070	0,0561	0,8090	3,97
0,3999	0,85	0,8500	0,0000	0,8500	0,00	0,8558	0,0432	0,8569	2,88
0,4686	0,90	0,9000	0,0000	0,9000	0,00	0,9041	0,0295	0,9047	1,87
0,5831	0,95	0,9500	0,0000	0,9500	0,00	0,9523	0,0151	0,9524	0,91
α	$\operatorname{th} \pi \alpha$	$\beta=0,10$				$\beta=0,15$			
		θ	χ	$ \zeta $	φ	θ	χ	$ \zeta $	φ
0,0000	0,00	0,0000	0,3249	0,3249	90,00°	0,0000	0,5095	0,5095	90,00°
0,0159	0,05	0,0553	0,3240	0,3286	80,32	0,0629	0,5079	0,5118	82,93
0,0319	0,10	0,1104	0,3213	0,3398	71,03	0,1256	0,5031	0,5186	75,98
0,0481	0,15	0,1655	0,3169	0,3575	62,43	0,1878	0,4951	0,5296	69,22
0,0645	0,20	0,2202	0,3106	0,3808	54,67	0,2493	0,4841	0,5445	62,75
0,0813	0,25	0,2746	0,3027	0,4087	47,78	0,3099	0,4700	0,5629	56,61
0,0985	0,30	0,3286	0,2929	0,4402	41,72	0,3692	0,4531	0,5845	50,82
0,1163	0,35	0,3820	0,2815	0,4745	36,39	0,4273	0,4333	0,6085	45,40
0,1349	0,40	0,4349	0,2684	0,5110	31,68	0,4838	0,4110	0,6347	40,35
0,1533	0,45	0,4871	0,2537	0,5492	27,51	0,5385	0,3860	0,6626	35,63
0,1748	0,50	0,5386	0,2374	0,5886	23,79	0,5914	0,3589	0,6917	31,25
0,1968	0,55	0,5893	0,2196	0,6289	20,44	0,6423	0,3295	0,7219	27,16
0,2207	0,60	0,6390	0,2003	0,6697	17,41	0,6911	0,2982	0,7527	23,34
0,2468	0,65	0,6880	0,1796	0,7110	14,63	0,7378	0,2652	0,7840	19,76
0,2761	0,70	0,7358	0,1576	0,7525	12,08	0,7822	0,2305	0,8155	16,43
0,3097	0,75	0,7827	0,1342	0,7941	9,73	0,8243	0,1945	0,8469	13,28
0,3497	0,80	0,8285	0,1096	0,8357	7,54	0,8642	0,1573	0,8783	10,32
0,3999	0,85	0,8731	0,0838	0,8771	5,48	0,9015	0,1191	0,9094	7,52
0,4686	0,90	0,9166	0,0569	0,9184	3,56	0,9367	0,0800	0,9401	4,88
0,5831	0,95	0,9589	0,0289	0,9594	1,73	0,9695	0,0403	0,9704	2,38

Таблица III. Гиперболический тангенс комплексного аргумента
(продолжение)

α	$\operatorname{th} \pi \alpha$	θ	χ	$ \xi $	φ	θ	χ	$ \xi $	φ
		$\beta=0,20$				$\beta=0,25$			
0,0000	0,00	0,0000	0,7265	0,7265	90,00°	0,0000	1,0000	1,0000	90,00°
0,0159	0,05	0,0763	0,7238	0,7278	83,98	0,0998	0,9950	1,0000	84,28
0,0319	0,10	0,1520	0,7155	0,7315	78,01	0,1980	0,9802	1,0000	78,58
0,0481	0,15	0,2265	0,7019	0,7375	72,12	0,2934	0,9560	1,0000	72,93
0,0645	0,20	0,2993	0,6831	0,7458	66,34	0,3846	0,9230	1,0000	67,38
0,0813	0,25	0,3698	0,6593	0,7560	60,72	0,4706	0,8824	1,0000	61,93
0,0985	0,30	0,4376	0,6312	0,7680	55,27	0,5504	0,8348	1,0000	56,60
0,1163	0,35	0,5023	0,5989	0,7816	50,01	0,6236	0,7818	1,0000	51,42
0,1349	0,40	0,5635	0,5627	0,7964	44,96	0,6896	0,7241	1,0000	46,40
0,1543	0,45	0,6212	0,5235	0,8123	40,12	0,7484	0,6632	1,0000	41,55
0,1748	0,50	0,6749	0,4814	0,8290	35,50	0,8000	0,6000	1,0000	36,87
0,1968	0,55	0,7247	0,4370	0,8462	31,09	0,8446	0,5355	1,0000	32,38
0,2207	0,60	0,7703	0,3907	0,8637	26,89	0,8824	0,4706	1,0000	28,07
0,2468	0,65	0,8120	0,3430	0,8815	22,91	0,9139	0,4060	1,0000	23,95
0,2761	0,70	0,8497	0,2943	0,8992	19,11	0,9395	0,3423	1,0000	20,02
0,3097	0,75	0,8835	0,2451	0,9169	15,51	0,9600	0,2800	1,0000	16,27
0,3497	0,80	0,9136	0,1955	0,9343	12,08	0,9757	0,2195	1,0000	12,68
0,3999	0,85	0,9401	0,1459	0,9514	8,82	0,9869	0,1611	1,0000	9,27
0,4686	0,90	0,9632	0,0967	0,9681	5,73	0,9945	0,1050	1,0000	6,03
0,5831	0,95	0,9831	0,0480	0,9843	2,79	0,9986	0,0512	1,0000	2,93
α	$\operatorname{th} \pi \alpha$	$\beta=0,30$				$\beta=0,35$			
		θ	χ	$ \xi $	φ	θ	χ	$ \xi $	φ
0,0000	0,00	0,0000	1,3764	1,3764	90,00°	0,0000	1,9626	1,9626	90,00°
0,0159	0,05	0,1440	1,3664	1,3740	83,98	0,2403	1,9391	1,9539	82,93
0,0319	0,10	0,2841	1,3373	1,3671	78,01	0,4672	1,8708	1,9283	75,98
0,0481	0,15	0,4164	1,2904	1,3559	72,12	0,6697	1,7653	1,8882	69,22
0,0645	0,20	0,5382	1,2282	1,3410	66,34	0,8408	1,6326	1,8365	62,75
0,0813	0,25	0,6470	1,1537	1,3228	60,72	0,9776	1,4829	1,7762	56,61
0,0985	0,30	0,7419	1,0701	1,3021	55,27	1,0809	1,3261	1,7109	50,82
0,1163	0,35	0,8223	0,9803	1,2794	50,01	1,1538	1,1701	1,6432	45,40
0,1349	0,40	0,8885	0,8873	1,2556	44,96	1,2007	1,0200	1,5755	40,35
0,1543	0,45	0,9413	0,7933	1,2311	40,12	0,2267	0,8793	1,5092	35,63
0,1748	0,50	0,9820	0,7005	1,2063	35,50	1,2359	0,7500	1,4457	31,25
0,1968	0,55	1,0120	0,6102	1,1819	31,09	1,2324	0,6323	1,3852	27,16
0,2207	0,60	1,0326	0,5237	1,1578	26,89	1,2198	0,5263	1,3284	23,34
0,2468	0,65	1,0449	0,4415	1,1344	22,91	1,2002	0,4313	1,2755	19,76
0,2761	0,70	1,0507	0,3640	1,1121	19,11	1,1762	0,3467	1,2262	16,43
0,3097	0,75	1,0509	0,2916	1,0906	15,51	1,1493	0,2713	1,1808	13,28
0,3497	0,80	1,0465	0,2240	1,0703	12,08	1,1202	0,2039	1,1386	10,32
0,3999	0,85	1,0387	0,1612	1,0511	8,82	1,0902	0,1440	1,0996	7,52
0,4686	0,90	1,0278	0,1032	1,0330	5,73	1,0599	0,0905	1,0637	4,88
0,5831	0,95	1,0148	0,0494	1,0160	2,79	1,0296	0,0428	1,0305	2,38

Таблица III. Гиперболический тангенс комплексного аргумента
(продолжение)

α	$\operatorname{th} \pi \alpha$	θ	χ	$ \zeta $	φ	θ	χ	$ \zeta $	φ
		$\beta=0,40$				$\beta=0,45$			
0,0000	0,00	0,0000	3,0777	3,0777	90,00°	0,0000	6,3138	6,3138	90,00°
0,0159	0,05	0,5115	2,9990	3,0423	80,32	1,8580	5,7272	6,0211	72,03
0,0319	0,10	0,9565	2,7833	2,9431	71,03	2,9217	4,4691	5,3394	56,82
0,0481	0,15	1,2948	2,4799	2,7976	62,43	3,2313	3,2535	4,5855	45,20
0,0645	0,20	1,5189	2,1427	2,6265	54,67	3,1500	2,3362	3,9217	36,56
0,0813	0,25	1,6444	1,8124	2,4473	47,78	2,9260	1,6953	3,3816	30,09
0,0985	0,30	1,6960	1,5119	2,2720	41,72	2,6722	1,2524	2,9514	25,12
0,1163	0,35	1,6966	1,2501	2,1074	36,39	2,4310	0,9417	2,6070	21,18
0,1349	0,40	1,6652	1,0277	1,9569	31,68	2,2154	0,7188	2,3291	17,98
0,1543	0,45	1,6149	0,8411	1,8208	27,51	2,0269	0,5550	2,1015	15,32
0,1748	0,50	1,5547	0,6853	1,6989	23,79	1,8633	0,4319	1,9126	13,05
0,1968	0,55	1,4901	0,5554	1,5901	20,44	1,7210	0,3371	1,7538	11,08
0,2207	0,60	1,4247	0,4466	1,4932	17,41	1,5972	0,2632	1,6187	9,36
0,2468	0,65	1,3609	0,3553	1,4065	14,63	1,4887	0,2044	1,5026	7,82
0,2761	0,70	1,2994	0,2781	1,3289	12,08	1,3931	0,1568	1,4019	6,43
0,3097	0,75	1,2412	0,2129	1,2593	9,73	1,3083	0,1180	1,3137	5,15
0,3497	0,80	1,1862	0,1569	1,1966	7,54	1,2331	0,0857	1,2361	3,97
0,3999	0,85	1,1349	0,1090	1,1401	5,48	1,1655	0,0587	1,1670	2,88
0,4686	0,90	1,0867	0,0674	1,0888	3,56	1,1047	0,0360	1,1053	1,87
0,5831	0,95	1,0418	0,0314	1,0423	1,73	1,0499	0,0167	1,0500	0,91
		$\beta=0,475$				$\beta=0,50$			
0,0000	0,00	0,0000	12,706	12,706	90,00°	∞	0,0000	∞	0—90°
0,0159	0,05	5,787	9,030	10,725	57,35	20,000	0,0000	20,000	0,00
0,0319	0,10	6,213	4,811	7,859	37,75	10,000	0,0000	10,000	0,00
0,0481	0,15	5,260	2,682	5,905	27,01	6,6667	0,0000	6,6667	0,00
0,0645	0,20	4,356	1,636	4,653	20,58	5,0000	0,0000	5,0000	0,00
0,0813	0,25	3,662	1,075	3,817	16,35	4,0000	0,0000	4,0000	0,00
0,0985	0,30	3,138	0,7445	3,225	13,35	3,3333	0,0000	3,3333	0,00
0,1163	0,35	2,736	0,5367	2,789	11,10	2,8571	0,0000	2,8571	0,00
0,1349	0,40	2,422	0,3979	2,454	9,33	2,5000	0,0000	2,5000	0,00
0,1543	0,45	2,170	0,3008	2,190	7,90	2,2222	0,0000	2,2222	0,00
0,1748	0,50	1,9638	0,2304	1,9773	6,70	2,0000	0,0000	2,0000	0,00
0,1968	0,55	1,7927	0,1778	1,8014	5,67	1,8182	0,0000	1,8182	0,00
0,2207	0,60	1,6486	0,1375	1,6543	4,76	1,6667	0,0000	1,6667	0,00
0,2468	0,65	1,5257	0,1060	1,5293	3,97	1,5385	0,0000	1,5385	0,00
0,2761	0,70	1,4194	0,0809	1,4217	3,27	1,4286	0,0000	1,4286	0,00
0,3097	0,75	1,3269	0,0605	1,3284	2,61	1,3333	0,0000	1,3333	0,00
0,3497	0,80	1,2458	0,0438	1,2465	2,02	1,2500	0,0000	1,2500	0,00
0,3999	0,85	1,1737	0,0300	1,1741	1,46	1,1765	0,0000	1,1765	0,00
0,4686	0,90	1,1095	0,0183	1,1097	0,94	1,1111	0,0000	1,1111	0,00
0,5831	0,95	1,0518	0,0085	1,0519	0,46	1,0526	0,0000	1,0526	0,00

Таблица IV. Обратная гиперболическая функция $\operatorname{Arth} \xi$

(см. стр. 129 тома I)

$$\operatorname{Arth} \xi = \operatorname{Arth} (\theta - i\chi) = \pi(\alpha - i\beta)$$

θ	α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
	$\chi=0$		$\chi=0,2$		$\chi=0,4$		$\chi=0,6$		$\chi=0,8$	
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0628	0,0000	0,1211	0,0000	0,1720	0,0000	0,2148
0,2	0,0645	0,0000	0,0619	0,0653	0,0552	0,1250	0,0468	0,1762	0,0386	0,2186
0,4	0,1349	0,0000	0,1281	0,0738	0,1118	0,1379	0,0931	0,1894	0,0760	0,2302
0,6	0,2206	0,0000	0,2041	0,0936	0,1703	0,1640	0,1373	0,2135	0,1103	0,2500
0,8	0,3497	0,0000	0,2955	0,1426	0,2255	0,2110	0,1749	0,2500	0,1386	0,2776
1,0	∞	0—0,5	0,3672	0,2659	0,2503	0,2814	0,1985	0,2964	0,1576	0,3106
1,2	0,3816	0,5000	0,3271	0,3894	0,2562	0,3524	0,2041	0,3436	0,1661	0,3445
1,4	0,2852	0,5000	0,2681	0,4394	0,2322	0,4013	0,1962	0,3826	0,1655	0,3750
1,6	0,2334	0,5000	0,2255	0,4610	0,2060	0,4307	0,1823	0,4111	0,1593	0,3999
1,8	0,1994	0,5000	0,1950	0,4723	0,1832	0,4488	0,1674	0,4312	0,1505	0,4198
2,0	0,1748	0,5000	0,1721	0,4792	0,1644	0,4605	0,1536	0,4454	0,1409	0,4341
2,2	0,1561	0,5000	0,1542	0,4837	0,1490	0,4686	0,1411	0,4557	0,1317	0,4454
2,4	0,1412	0,5000	0,1399	0,4868	0,1361	0,4743	0,1302	0,4634	0,1230	0,4541
2,6	0,1291	0,5000	0,1281	0,4890	0,1252	0,4786	0,1208	0,4692	0,1151	0,4610
2,8	0,1188	0,5000	0,1181	0,4908	0,1159	0,4819	0,1124	0,4737	0,1079	0,4665
3,0	0,1103	0,5000	0,1097	0,4921	0,1080	0,4845	0,1052	0,4773	0,1016	0,4709
3,2	0,1029	0,5000	0,1025	0,4931	0,1010	0,4865	0,0988	0,4802	0,0959	0,4744
3,4	0,0965	0,5000	0,0961	0,4940	0,0950	0,4881	0,0931	0,4826	0,0907	0,4774
3,6	0,0908	0,5000	0,0905	0,4947	0,0895	0,4895	0,0880	0,4845	0,0860	0,4799
3,8	0,0858	0,5000	0,0855	0,4953	0,0847	0,4906	0,0834	0,4862	0,0817	0,4820
4,0	0,0813	0,5000	0,0812	0,4958	0,0804	0,4916	0,0793	0,4876	0,0778	0,4838

	$\chi=1,0$		$\chi=1,2$		$\chi=1,4$		$\chi=1,6$		$\chi=2,0$	
0,0	0,0000	0,2500	0,0000	0,2789	0,0000	0,3026	0,0000	0,3222	0,0000	0,3524
0,2	0,0316	0,2532	0,0259	0,2814	0,0213	0,3046	0,0178	0,3238	0,0127	0,3534
0,4	0,0619	0,2627	0,0506	0,2890	0,0417	0,3106	0,0348	0,3285	0,0249	0,3564
0,6	0,0892	0,2783	0,0729	0,3012	0,0602	0,3201	0,0503	0,3360	0,0362	0,3612
0,8	0,1118	0,2993	0,0916	0,3173	0,0760	0,3326	0,0639	0,3459	0,0464	0,3675
1,0	0,1281	0,3238	0,1058	0,3360	0,0885	0,3472	0,0749	0,3574	0,0552	0,3750
1,2	0,1373	0,3493	0,1150	0,3558	0,0974	0,3628	0,0832	0,3699	0,0623	0,3833
1,4	0,1403	0,3734	0,1197	0,3750	0,1028	0,3783	0,0890	0,3826	0,0679	0,3920
1,6	0,1386	0,3944	0,1207	0,3926	0,1054	0,3930	0,0924	0,3949	0,0719	0,4008
1,8	0,1341	0,4120	0,1190	0,4080	0,1056	0,4064	0,0938	0,4064	0,0745	0,4093
2,0	0,1281	0,4262	0,1157	0,4211	0,1042	0,4182	0,0937	0,4169	0,0760	0,4174
2,2	0,1216	0,4376	0,1114	0,4321	0,1017	0,4284	0,0926	0,4262	0,0766	0,4249
2,4	0,1150	0,4468	0,1067	0,4412	0,0985	0,4372	0,0906	0,4344	0,0764	0,4318
2,6	0,1087	0,4542	0,1019	0,4488	0,0950	0,4446	0,0883	0,4416	0,0756	0,4381
2,8	0,1027	0,4602	0,0973	0,4551	0,0913	0,4510	0,0855	0,4478	0,0743	0,4437
3,0	0,0974	0,4652	0,0927	0,4604	0,0878	0,4564	0,0828	0,4531	0,0729	0,4488
3,2	0,0924	0,4693	0,0884	0,4648	0,0843	0,4610	0,0799	0,4579	0,0712	0,4533
3,4	0,0877	0,4727	0,0844	0,4686	0,0808	0,4650	0,0771	0,4619	0,0695	0,4573
3,6	0,0835	0,4756	0,0807	0,4718	0,0776	0,4650	0,0743	0,4655	0,0676	0,4609
3,8	0,0796	0,4781	0,0773	0,4746	0,0745	0,4714	0,0717	0,4686	0,0657	0,4641
4,0	0,0760	0,4802	0,0739	0,4769	0,0716	0,4740	0,0691	0,4713	0,0639	0,4670

Таблица V. Натуральный логарифм и обратные гиперболические функции

x	$\ln x$	$\operatorname{Ar sh} x$	$\operatorname{Ar ch} x$	x	$\ln x$	$\operatorname{Ar sh} x$	$\operatorname{Ar ch} x$
0,0	$-\infty$	0,0000		4,0	1,3863	2,0947	2,0634
0,1	-2,3026	0,0998		4,2	1,4351	2,1421	2,1137
0,2	-1,6094	0,1987		4,4	1,4816	2,1874	2,1616
0,3	-1,2040	0,2957		4,6	1,5261	2,2308	2,2072
0,4	-0,9163	0,3900		4,8	1,5686	2,2724	2,2507
0,5	-0,6931	0,4812		5,0	1,6094	2,3124	2,2924
0,6	-0,5108	0,5688		5,2	1,6487	2,3509	2,3324
0,7	-0,3567	0,6527		5,4	1,6864	2,3880	2,3709
0,8	-0,2231	0,7327		5,6	1,7228	2,4238	2,4078
0,9	-0,1054	0,8089		5,8	1,7579	2,4584	2,4435
1,0	0,0000	0,8814	0,0000	6,0	1,7918	2,4918	2,4779
1,1	0,0953	0,9503	0,4436	6,2	1,8245	2,5241	2,5111
1,2	0,1823	1,0160	0,6224	6,4	1,8563	2,5555	2,5433
1,3	0,2624	1,0785	0,7564	6,6	1,8871	2,5859	2,5744
1,4	0,3365	1,1380	0,8670	6,8	1,9169	2,6154	2,6046
1,5	0,4055	1,1948	0,9624	7,0	1,9459	2,6441	2,6339
1,6	0,4700	1,2490	1,0470	7,2	1,9741	2,6720	2,6624
1,7	0,5306	1,3008	1,1232	7,4	2,0015	2,6992	2,6900
1,8	0,5878	1,3504	1,1929	7,6	2,0281	2,7256	2,7169
1,9	0,6419	1,3980	1,2572	7,8	2,0541	2,7514	2,7431
2,0	0,6931	1,4436	1,3170	8,0	2,0794	2,7765	2,7687
2,1	0,7419	1,4875	1,3729	8,2	2,1041	2,8010	2,7935
2,2	0,7885	1,5297	1,4254	8,4	2,1282	2,8249	2,8178
2,3	0,8329	1,5703	1,4750	8,6	2,1518	2,8483	2,8415
2,4	0,8755	1,6094	1,5221	8,8	2,1748	2,8711	2,8647
2,5	0,9163	1,6472	1,5668	9,0	2,1972	2,8934	2,8873
2,6	0,9555	1,6837	1,6094	9,2	2,2192	2,9153	2,9094
2,7	0,9933	1,7191	1,6502	9,4	2,2407	2,9367	2,9310
2,8	1,0296	1,7532	1,6892	9,6	2,2618	2,9576	2,9522
2,9	1,0647	1,7863	1,7267	9,8	2,2824	2,9781	2,9729
3,0	1,0986	1,8184	1,7627	10,0	2,3026	2,9982	2,9932
3,1	1,1314	1,8496	1,7975	10,2	2,3224	3,0179	3,0131
3,2	1,1632	1,8799	1,8309	10,4	2,3418	3,0373	3,0326
3,3	1,1939	1,9093	1,8633	10,6	2,3609	3,0562	3,0518
3,4	1,2238	1,9379	1,8946	10,8	2,3795	3,0748	3,0705
3,5	1,2528	1,9657	1,9248	11,0	2,3979	3,0931	3,0890
3,6	1,2809	1,9928	1,9542	11,2	2,4159	3,1110	3,1071
3,7	1,3083	2,0193	1,9827	11,4	2,4336	3,1287	3,1248
3,8	1,3350	2,0450	2,0104	11,6	2,4510	3,1460	3,1423
3,9	1,3610	2,0702	2,0373	11,8	2,4681	3,1630	3,1594
4,0	1,3863	2,0947	2,0634	12,0	2,4849	3,1798	3,1763

Таблица VI. Сферические гармоники (см. стр. 726 тома I и стр. 306)

$$P_0^0(x) = 1,0000; \quad P_1^0(x) = x.$$

x	$P_1^1(x)$	$P_2^0(x)$	$P_2^1(x)$	$P_2^2(x)$	$P_3^0(x)$	$P_3^1(x)$	$P_3^2(x)$	$P_3^3(x)$
1,00	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,95	0,3122	0,8538	0,8899	0,2925	0,7184	1,6452	1,3894	0,4567
0,90	0,4359	0,7150	1,1769	0,5700	0,4725	1,9942	2,5650	1,2423
0,85	0,5268	0,5838	1,3433	0,8325	0,2603	2,0643	3,5381	2,1927
0,80	0,6000	0,4600	1,4400	1,0800	0,0800	1,9800	4,3200	3,2400
0,75	0,6614	0,3438	1,4882	1,3125	-0,0703	1,7983	4,9219	4,3407
0,70	0,7141	0,2350	1,4997	1,5300	-0,1925	1,5533	5,3550	5,4632
0,65	0,7599	0,1338	1,4819	1,7325	-0,2884	1,2681	5,6306	6,5829
0,60	0,8000	+0,0400	1,4400	1,9200	-0,3600	0,9600	5,7600	7,6800
0,55	0,8352	-0,0462	1,3780	2,0925	-0,4091	0,6420	5,7544	8,7379
0,50	0,8660	-0,1250	1,2990	2,2500	-0,4375	0,3248	5,6250	9,7428
0,45	0,8930	-0,1962	1,2056	2,3925	-0,4472	+0,0167	5,3831	10,683
0,40	0,9165	-0,2600	1,0998	2,5200	-0,4400	-0,2750	5,0400	11,548
0,35	0,9367	-0,3162	0,9836	2,6325	-0,4178	-0,5445	4,6069	12,330
0,30	0,9539	-0,3650	0,8585	2,7300	-0,3825	-0,7870	4,0950	13,021
0,25	0,9682	-0,4062	0,7262	2,8125	-0,3359	-0,9985	3,5156	13,616
0,20	0,9798	-0,4400	0,5879	2,8800	-0,2800	-1,1758	2,8800	14,109
0,15	0,9887	-0,4662	0,4449	2,9325	-0,2166	-1,3162	2,1994	14,497
0,10	0,9950	-0,4850	0,2985	2,9700	-0,1475	-1,4179	1,4850	14,776
0,05	0,9987	-0,4962	0,1498	2,9925	-0,0747	-1,4794	0,7481	14,944
0,00	1,0000	-0,5000	0,0000	3,0000	0,0000	-1,5000	0,0000	15,000

Таблица VII. Функции Лежандра для больших значений аргумента

(см. стр. 268 и 306, 308)

x	$P_0^0(x)$	$P_1^0(x)$	$iP_1^1(x)$	$P_2^0(x)$	$iP_2^1(x)$	$-P_2^2(x)$
1,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000
1,2	1,0000	1,2000	0,6633	1,6600	2,3880	1,3200
1,4	1,0000	1,4000	0,9798	2,4400	4,1151	2,8800
1,6	1,0000	1,6000	1,2490	3,3400	5,9952	4,6800
1,8	1,0000	1,8000	1,4967	4,3600	8,0820	6,7200
2,0	1,0000	2,0000	1,7321	5,5000	10,392	9,0000
2,2	1,0000	2,2000	1,9596	6,7600	12,933	11,520
2,4	1,0000	2,4000	2,1817	8,1400	15,708	14,280
2,6	1,0000	2,6000	2,4000	9,6400	18,720	17,280
2,8	1,0000	2,8000	2,6153	11,260	21,969	20,520
3,0	1,0000	3,0000	2,8284	13,000	25,456	24,000
3,5	1,0000	3,5000	3,3541	17,875	35,218	33,750
4,0	1,0000	4,0000	3,8730	23,500	46,476	45,000
4,5	1,0000	4,5000	4,3875	29,875	59,231	57,750
5,0	1,0000	5,0000	4,8990	37,000	73,485	72,000
5,5	1,0000	5,5000	5,4083	44,875	89,237	87,750
6,0	1,0000	6,0000	5,9161	53,500	106,49	105,00
6,5	1,0000	6,5000	6,4226	62,875	125,24	123,75
7,0	1,0000	7,0000	6,9282	73,000	145,49	144,00
7,5	1,0000	7,5000	7,4330	83,875	167,24	165,75
8,0	1,0000	8,0000	7,9372	95,500	190,49	189,00

x	$Q_0^0(x)$	$Q_1^0(x)$	$Q_1^1(x)$	$Q_2^0(x)$	$Q_2^1(x)$	$Q_2^2(x)$
1,1	1,5223	0,6745	1,7028	0,3518	1,2549	8,1352
1,2	1,1990	0,4387	1,0138	0,19025	0,6345	3,4372
1,4	0,8959	0,2542	0,5511	0,08595	0,2733	1,2968
1,6	0,7332	0,17307	0,3653	0,04878	0,15215	0,6825
1,8	0,6264	0,12749	0,2652	0,03102	0,09574	0,4164
2,0	0,5493	0,09861	0,2033	0,02118	0,06495	0,2771
2,2	0,4904	0,07891	0,16167	0,01520	0,04640	0,19541
2,4	0,4437	0,06476	0,13210	0,01132	0,03446	0,14375
2,6	0,4055	0,05421	0,11022	0,00868	0,02636	0,10922
2,8	0,3736	0,04610	0,09350	0,00682	0,02066	0,08513
3,0	0,3466	0,03972	0,08040	0,00546	0,01651	0,06777
3,5	0,2939	0,02863	0,05775	0,00334	0,01009	0,04112
4,0	0,2554	0,02165	0,04359	0,00220	0,00663	0,02691
4,5	0,2260	0,01697	0,03411	0,00153	0,00460	0,01860
5,0	0,2027	0,01366	0,02744	0,00110	0,00332	0,01341
5,5	0,1839	0,01124	0,02256	0,00082	0,00248	0,00999
6,0	0,1682	0,00942	0,01889	0,00063	0,00190	0,00765
6,5	0,1551	0,00800	0,01605	0,00050	0,00149	0,00599
7,0	0,1438	0,00689	0,01380	0,00040	0,00119	0,00478
7,5	0,1341	0,00599	0,01200	0,00032	0,00096	0,00387
8,0	0,1257	0,00526	0,01053	0,00026	0,00079	0,00318

Таблица VIII. Функции Лежандра чисто мнимого аргумента
(см. стр. 273 и 309)

x	$P_0^0(ix)$	$-iP_1^0(ix)$	$P_1^1(ix)$	$-P_2^0(ix)$	$-iP_2^1(ix)$	$P_2^2(ix)$
0,0	1,0000	0,0000	1,0000	0,5000	0,0000	3,0000
0,2	1,0000	0,2000	1,0198	0,5600	0,6119	3,1200
0,4	1,0000	0,4000	1,0770	0,7400	1,2924	3,4800
0,6	1,0000	0,6000	1,1662	1,0400	2,0991	4,0800
0,8	1,0000	0,8000	1,2806	1,4600	3,0735	4,9200
1,0	1,0000	1,0000	1,4142	2,0000	4,2426	6,0000
1,2	1,0000	1,2000	1,5621	2,6600	5,6234	7,3200
1,4	1,0000	1,4000	1,7205	3,4400	7,2260	8,8800
1,6	1,0000	1,6000	1,8868	4,3400	9,0566	10,680
1,8	1,0000	1,8000	2,0591	5,3600	11,119	12,720
2,0	1,0000	2,0000	2,2361	6,5000	13,416	15,000
2,5	1,0000	2,5000	2,6926	9,8750	20,194	21,750
3,0	1,0000	3,0000	3,1623	14,000	28,461	30,000
3,5	1,0000	3,5000	3,6401	18,875	38,221	39,750
4,0	1,0000	4,0000	4,1231	24,500	49,477	51,000
4,5	1,0000	4,5000	4,6098	30,875	62,232	63,750
5,0	1,0000	5,0000	5,0990	38,000	76,485	78,000
5,5	1,0000	5,5000	5,5902	45,875	92,238	93,750
6,0	1,0000	6,0000	6,0828	54,500	109,49	111,00
6,5	1,0000	6,5000	6,5765	63,875	128,24	129,75
7,0	1,0000	7,0000	7,0711	74,000	148,49	150,00
7,5	1,0000	7,5000	7,5664	84,875	170,24	171,75

x	$iQ_0^0(ix)$	$-Q_1^0(ix)$	$-Q_1^1(ix)$	$-iQ_2^0(ix)$	$-iQ_2^1(ix)$	$-iQ_2^2(ix)$
0,0	1,5708	1,0000	1,5708	0,7854	2,0000	4,7124
0,2	1,3734	0,7253	1,2045	0,4691	1,2385	3,3004
0,4	1,1903	0,5239	0,9106	0,2808	0,7642	2,2526
0,6	1,0304	0,3818	0,6871	0,17159	0,4782	1,5216
0,8	0,8961	0,2832	0,5228	0,10824	0,3070	1,0330
1,0	0,7854	0,2146	0,4036	0,07079	0,20337	0,7124
1,2	0,6947	0,1663	0,3170	0,04800	0,13919	0,5019
1,4	0,6202	0,13165	0,2534	0,03366	0,09826	0,3619
1,6	0,5586	0,10624	0,2060	0,02432	0,07137	0,2670
1,8	0,5071	0,08722	0,1700	0,01805	0,05316	0,2012
2,0	0,4636	0,07270	0,14232	0,01371	0,04050	0,15471
2,5	0,3805	0,04873	0,09607	0,00750	0,02227	0,08636
3,0	0,3218	0,03475	0,06878	0,00451	0,01342	0,05251
3,5	0,2783	0,02595	0,05150	0,00291	0,00867	0,03411
4,0	0,2450	0,02009	0,03993	0,00198	0,00591	0,02332
4,5	0,2187	0,01599	0,03183	0,00140	0,00420	0,01662
5,0	0,19740	0,01302	0,02594	0,00103	0,00309	0,01224
5,5	0,17985	0,01081	0,02154	0,00078	0,00233	0,00927
6,0	0,16515	0,00911	0,01816	0,00060	0,00180	0,00718
6,5	0,15265	0,00778	0,01552	0,00047	0,00143	0,00567
7,0	0,14190	0,00672	0,01341	0,00038	0,00114	0,00456
7,5	1,13255	0,00586	0,01171	0,00031	0,00093	0,00372

Таблица IX. Функции Лежандра порядков $1/2$, $-1/2$ и $3/2$
(см. стр. 283 и 309, 310)

x	$P^0_{\frac{1}{2}}(x)$	$-iP^1_{\frac{1}{2}}(x)$	$-P^2_{\frac{1}{2}}(x)$	$P^0_{\frac{1}{2}}(x)$	$iP^1_{\frac{1}{2}}(x)$	$P^0_{\frac{3}{2}}(x)$
1,0	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
1,2	0,9763	0,07447	0,02536	1,0728	0,2344	1,3910
1,4	0,9549	0,09968	0,04613	1,1416	0,3283	1,8126
1,6	0,9355	0,11603	0,06340	1,2070	0,3986	2,2630
1,8	0,9177	0,12778	0,07794	1,2694	0,4567	2,7406
2,0	0,9013	0,1367	0,0903	1,3291	0,5072	3,2439
2,2	0,8861	0,1436	0,1009	1,3866	0,5523	3,7719
2,4	0,8719	0,1491	0,1101	1,4419	0,5933	4,3236
2,6	0,8587	0,1536	0,1181	1,4954	0,6311	4,8979
2,8	0,8463	0,1572	0,1251	1,5472	0,6664	5,4941
3,0	0,8346	0,1602	0,1313	1,5974	0,6996	6,1113
3,5	0,8082	0,1657	0,1438	1,7169	0,7753	7,7427
4,0	0,7850	0,1692	0,1533	1,8290	0,8432	9,4930
4,5	0,7643	0,1715	0,1606	1,9349	0,9052	11,355
5,0	0,7457	0,1728	0,1663	2,0356	0,9627	13,322
5,5	0,7289	0,1736	0,1708	2,1316	1,0165	15,389
6,0	0,7136	0,1739	0,1744	2,2237	1,0673	17,552
6,5	0,6995	0,1739	0,1772	2,3122	1,1156	19,806
7,0	0,6864	0,1737	0,1795	2,3975	1,1616	22,148
7,5	0,6743	0,1734	0,1813	2,4799	1,2058	24,575
8,0	0,6631	0,1729	0,1828	2,5598	1,2482	27,083

x	$Q^0_{\frac{1}{2}}(x)$	$Q^1_{\frac{1}{2}}(x)$	$Q^2_{\frac{1}{2}}(x)$	$Q^0_{\frac{1}{2}}(x)$	$Q^1_{\frac{1}{2}}(x)$	$Q^0_{\frac{3}{2}}(x)$
1,1	2,8612	2,3661	10,644	0,9788	1,9471	0,4818
1,2	2,5010	1,7349	5,6518	0,6996	1,2524	0,2856
1,4	2,1366	1,2918	3,1575	0,4598	0,7618	0,14609
1,6	1,9229	1,0943	2,3230	0,3430	0,5501	0,09080
1,8	1,7723	0,9748	1,9018	0,2720	0,4285	0,06214
2,0	1,6566	0,8918	1,6454	0,2240	0,3489	0,04516
2,2	1,5634	0,8293	1,4712	0,18932	0,29263	0,03422
2,4	1,4856	0,7798	1,3441	0,16312	0,25076	0,02676
2,6	1,4193	0,7391	1,2465	0,14266	0,21842	0,02143
2,8	1,3617	0,7048	1,1687	0,12628	0,19274	0,01751
3,0	1,3110	0,6753	1,1048	0,11289	0,17189	0,01454
3,5	1,2064	0,6163	0,9846	0,08824	0,13380	0,00966
4,0	1,1242	0,5713	0,8990	0,07154	0,10819	0,00682
4,5	1,0572	0,5353	0,8339	0,05957	0,08993	0,00503
5,0	1,0011	0,5057	0,7820	0,05063	0,07634	0,00384
5,5	0,9532	0,4806	0,7393	0,04374	0,06588	0,00301
6,0	0,9117	0,4591	0,7033	0,03829	0,05764	0,00241
6,5	0,87524	0,44025	0,67231	0,03389	0,05099	0,00197
7,0	0,84288	0,42362	0,64530	0,03028	0,04553	0,00163
7,5	0,81389	0,40877	0,62144	0,02727	0,04099	0,00137
8,0	0,78772	0,39542	0,60015	0,02473	0,03716	0,00116

Таблица X. Функции Бесселя для цилиндрических координат
(см. стр. 302 и 522)

x	$J_0(x)$	$N_0(x)$	$J_1(x)$	$N_1(x)$		$N_2(x)$
0,0	1,0000	$-\infty$	0,0000	$-\infty$	0,0000	$-\infty$
0,1	0,9975	-1,5342	0,0499	-6,4590	0,0012	-127,64
0,2	0,9900	-1,0811	0,0995	-3,3238	0,0050	-32,157
0,4	0,9604	-0,6060	0,1960	-1,7809	0,0197	-8,2983
0,6	0,9120	-0,3085	0,2867	-1,2604	0,0437	-3,8928
0,8	0,8463	-0,0868	0,3688	-0,9781	0,0758	-2,3586
1,0	0,7652	+0,0883	0,4401	-0,7812	0,1149	-1,6507
1,2	0,6711	0,2281	0,4983	-0,6211	0,1593	-1,2633
1,4	0,5669	0,3379	0,5419	-0,4791	0,2074	-1,0224
1,6	0,4554	0,4204	0,5699	-0,3476	0,2570	-0,8549
1,8	0,3400	0,4774	0,5815	-0,2237	0,3061	-0,7259
2,0	0,2239	0,5104	0,5767	-0,1070	0,3528	-0,6174
2,2	0,1104	0,5208	0,5560	+0,0015	0,3951	-0,5194
2,4	+0,0025	0,5104	0,5202	0,1005	0,4310	-0,4267
2,6	-0,0968	0,4813	0,4708	0,1884	0,4590	-0,3364
2,8	-0,1850	0,4359	0,4097	0,2635	0,4777	-0,2477
3,0	-0,2601	0,3768	0,3391	0,3247	0,4861	-0,1604
3,2	-0,3202	0,3071	0,2613	0,3707	0,4835	-0,0754
3,4	-0,3643	0,2296	0,1792	0,4010	0,4697	+0,0063
3,6	-0,3918	0,1477	0,0955	0,4154	0,4448	0,0831
3,8	-0,4026	+0,0645	+0,0128	0,4141	0,4093	0,1535
4,0	-0,3971	-0,0169	-0,0660	0,3979	0,3641	0,2159
4,2	-0,3766	-0,0938	-0,1386	0,3680	0,3105	0,2690
4,4	-0,3423	-0,1633	-0,2028	0,3260	0,2501	0,3115
4,6	-0,2961	-0,2235	-0,2566	0,2737	0,1846	0,3425
4,8	-0,2404	-0,2723	-0,2985	0,2136	0,1161	0,3613
5,0	-0,1776	-0,3085	-0,3276	0,1479	+0,0466	0,3677
5,2	-0,1103	-0,3312	-0,3432	0,0792	-0,0217	0,3617
5,4	-0,0412	-0,3402	-0,3453	+0,0101	-0,0867	0,3439
5,6	+0,0270	-0,3354	-0,3343	-0,0568	-0,1464	0,3152
5,8	0,0917	-0,3177	-0,3110	-0,1192	-0,1989	0,2766
6,0	0,1507	-0,2882	-0,2767	-0,1750	-0,2429	0,2299
6,2	0,2017	-0,2483	-0,2329	-0,2223	-0,2769	0,1766
6,4	0,2433	-0,2000	-0,1816	-0,2596	-0,3001	0,1188
6,6	0,2740	-0,1452	-0,1250	-0,2858	-0,3119	+0,0586
6,8	0,2931	-0,0864	-0,0652	-0,3002	-0,3123	-0,0019
7,0	0,3001	-0,0259	-0,0047	-0,3027	-0,3014	-0,0605
7,2	0,2951	+0,0339	+0,0543	-0,2934	-0,2800	-0,1154
7,4	0,2786	0,0907	0,1096	-0,2731	-0,2490	-0,1645
7,6	0,2516	0,1424	0,1592	-0,2428	-0,2097	-0,2063
7,8	0,2154	0,1872	0,2014	-0,2039	-0,1638	-0,2395
8,0	0,1716	0,2235	0,2346	-0,1581	-0,1130	-0,2630

Таблица XI. Гиперболические функции Бесселя

(см. стр. 303)

$$I_m(z) = i^{-m} J_m(iz).$$

z	$I_0(z)$	$I_1(z)$	$I_2(z)$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000
0,1	1,0025	0,0501	0,0012
0,2	1,0100	0,1005	0,0050
0,4	1,0404	0,2040	0,0203
0,6	1,0921	0,3137	0,0464
0,8	1,1665	0,4329	0,0843
1,0	1,2661	0,5652	0,1358
1,2	1,3937	0,7147	0,2026
1,4	1,5534	0,8861	0,2876
1,6	1,7500	1,0848	0,3940
1,8	1,9895	1,3172	0,5260
2,0	2,2796	1,5906	0,6890
2,2	2,6292	1,9141	0,8891
2,4	3,0492	2,2981	1,1342
2,6	3,5532	2,7554	1,4338
2,8	4,1574	3,3011	1,7994
3,0	4,8808	3,9534	2,2452
3,2	5,7472	4,7343	2,7884
3,4	6,7848	5,6701	3,4495
3,6	8,0278	6,7926	4,2540
3,8	9,5169	8,1405	5,2325
4,0	11,302	9,7594	6,4222
4,2	13,443	11,705	7,8683
4,4	16,010	14,046	9,6259
4,6	19,093	16,863	11,761
4,8	22,794	20,253	14,355
5,0	27,240	24,335	17,505
5,2	32,584	29,254	21,332
5,4	39,010	35,181	25,978
5,6	46,738	42,327	31,621
5,8	56,039	50,945	38,470
6,0	67,235	61,341	46,788
6,2	80,717	73,888	56,884
6,4	96,963	89,025	69,141
6,6	116,54	107,31	84,021
6,8	140,14	129,38	102,08
7,0	168,59	156,04	124,01
7,2	202,92	188,25	150,63
7,4	244,34	227,17	182,94
7,6	294,33	274,22	222,17
7,8	354,68	331,10	269,79
8,0	427,57	399,87	327,60

Таблица XIII. Функции Бесселя для сферических координат
(см. стр. 582 тома I и стр. 531)

$$j_n(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{n+\frac{1}{2}}(x); \quad n_n(x) = \sqrt{\pi/2x} N_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

x	$j_0(x)$	$n_0(x)$	$j_1(x)$	$n_1(x)$	$j_2(x)$	$n_2(x)$
0,0	1,0000	$-\infty$	0,0000	$-\infty$	0,0000	$-\infty$
0,1	0,9983	-9,9500	0,0333	-100,50	0,0007	-3005,0
0,2	0,9933	-4,9003	0,0664	-25,495	0,0027	-377,52
0,4	0,9735	-2,3027	0,1312	-6,7302	0,0105	-48,174
0,6	0,9411	-1,3756	0,1929	-3,2337	0,0234	-14,793
0,8	0,8967	-0,8709	0,2500	-1,9853	0,0408	-6,5740
1,0	0,8415	-0,5403	0,3012	-1,3818	0,0620	-3,6050
1,2	0,7767	-0,3020	0,3453	-1,0283	0,0865	-2,2689
1,4	0,7039	-0,1214	0,3814	-0,7906	0,1133	-1,5728
1,6	0,6247	+0,0183	0,4087	-0,6133	0,1416	-1,1682
1,8	0,5410	0,1262	0,4268	-1,4709	0,1703	-0,9111
2,0	0,4546	0,2081	0,4354	-0,3506	0,1985	-0,7340
2,2	0,3675	0,2675	0,4346	-0,2459	0,2251	-0,6028
2,4	0,2814	0,3072	0,4245	-0,1534	0,2492	-0,4990
2,6	0,1983	0,3296	0,4058	-0,0715	0,2700	-0,4121
2,8	0,1196	0,3365	0,3792	+0,0005	0,2867	-0,3359
3,0	+0,0470	0,3300	0,3457	0,0630	0,2986	-0,2670
3,2	-0,0182	0,3120	0,3063	0,1157	0,3054	-0,2035
3,4	-0,0752	0,2844	0,2623	0,1588	0,3066	-0,1442
3,6	-0,1229	0,2491	0,2150	0,1921	0,3021	-0,0890
3,8	-0,1610	0,2082	0,1658	0,2158	0,2919	-0,0378
4,0	-0,1892	0,1634	0,1161	0,2300	0,2763	+0,0091
4,2	-0,2075	0,1167	0,0673	0,2353	0,2556	0,0514
4,4	-0,2163	0,0699	+0,0207	0,2321	0,2304	0,0884
4,6	-0,2160	+0,0244	-0,0226	0,2213	0,2013	0,1200
4,8	-0,2075	-0,0182	-0,0615	0,2037	0,1691	0,1456
5,0	-0,1918	-0,0567	-0,0951	0,1804	0,1347	0,1650
5,2	-0,1699	-0,0901	-0,1228	0,1526	0,0991	0,1781
5,4	-0,1431	-0,1175	-0,1440	0,1213	0,0631	0,1850
5,6	-0,1127	-0,1385	-0,1586	0,0880	+0,0278	0,1856
5,8	-0,0801	-0,1527	-0,1665	0,0538	-0,0060	0,1805
6,0	-0,0466	-0,1600	-0,1678	+0,0199	-0,0373	0,1700
6,2	-0,0134	-0,1607	-0,1629	-0,0124	-0,0654	0,1547
6,4	+0,0182	-0,1552	-0,1523	-0,0425	-0,0896	0,1353
6,6	0,0472	-0,1440	-0,1368	-0,0690	-0,1094	0,1126
6,8	0,0727	-0,1278	-0,1172	-0,0915	-0,1243	0,0875
7,0	0,0939	-0,1077	-0,0943	-0,1092	-0,1343	0,0609
7,2	0,1102	-0,0845	-0,0692	-0,1220	-0,1391	0,0337
7,4	0,1215	-0,0593	-0,0429	-0,1294	-0,1388	+0,0068
7,6	0,1274	-0,0331	-0,0163	-0,1317	-0,1338	-0,0189
7,8	0,1280	-0,0069	+0,0095	-0,1289	-0,1244	-0,0427
8,0	0,1237	+0,0182	0,0336	-0,1214	-0,1111	-0,0637

Таблица XIII. Функции Лежандра для сферических координат
(см. стр. 726 тома I и стр. 306)

ϑ	$P_{-1}=P_0$	$P_1(\cos \vartheta)$	$P_2(\cos \vartheta)$	$P_3(\cos \vartheta)$	$P_4(\cos \vartheta)$
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	1,0000	0,9962	0,9886	0,9773	0,9623
10	1,0000	0,9848	0,9548	0,9106	0,8532
15	1,0000	0,9659	0,8995	0,8042	0,6847
20	1,0000	0,9397	0,8245	0,6649	0,4750
25	1,0000	0,9063	0,7321	0,5016	0,2465
30	1,0000	0,8660	0,6250	0,3248	0,0234
35	1,0000	0,8192	0,5065	0,1454	-0,1714
40	1,0000	0,7660	0,3802	-0,0252	-0,3190
45	1,0000	0,7071	0,2500	-0,1768	-0,4063
50	1,0000	0,6428	0,1198	-0,3002	-0,4275
55	1,0000	0,5736	-0,0065	-0,3886	-0,3852
60	1,0000	0,5000	-0,1250	-0,4375	-0,2891
65	1,0000	0,4226	-0,2321	-0,4452	-0,1552
70	1,0000	0,3420	-0,3245	-0,4130	-0,0038
75	1,0000	0,2588	-0,3995	-0,3449	+0,1434
80	1,0000	0,1736	-0,4548	-0,2474	0,2659
85	1,0000	0,0872	-0,4886	-0,1291	0,3468
90	1,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	0,3750

ϑ	$P_5(\cos \vartheta)$	$P_6(\cos \vartheta)$	$P_7(\cos \vartheta)$	$P_8(\cos \vartheta)$	$P_9(\cos \vartheta)$
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0,9437	0,9216	0,8962	0,8675	0,8358
10	0,7840	0,7045	0,6164	0,5218	0,4228
15	0,5471	0,3983	0,2455	0,0962	-0,0428
20	0,2715	0,0719	-0,1072	-0,2518	-0,3517
25	0,0009	-0,2040	-0,3441	-0,4062	-0,3896
30	-0,2233	-0,3740	-0,4102	-0,3388	-0,1896
35	-0,3691	-0,4114	-0,3096	-0,1154	+0,0965
40	-0,4197	-0,3236	-0,1006	+0,1386	0,2900
45	-0,3757	-0,1484	+0,1271	0,2983	0,2855
50	-0,2545	+0,0564	0,2854	0,2947	0,1041
55	-0,0868	0,2297	0,3191	0,1422	-0,1296
60	+0,0898	0,3232	0,2231	-0,0736	-0,2679
65	0,2381	0,3138	0,0422	-0,2411	-0,2300
70	0,3281	0,2089	-0,1485	-0,2780	-0,0476
75	0,3427	0,0431	-0,2731	-0,1702	+0,1595
80	0,2810	-0,1321	-0,2835	+0,0233	0,2596
85	0,1577	-0,2638	-0,1778	0,2017	0,1913
90	0,0000	-0,3125	0,0000	0,2734	0,0000

Таблица XIV. Амплитуды и фазы цилиндрических функций Бесселя
(см. стр. 522)

При $m > 0 \quad x \rightarrow 0$

$$C'_m \simeq (1/2) C_{m+1} \simeq 0,1592m! (2/x)^{m+1},$$

$$\delta_m \simeq -\delta'_m \simeq \frac{180m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \text{ градусов},$$

$$C_0 \simeq \sqrt{1 + (2/\pi)^2 (\ln x)^2}, \quad C'_0 \simeq 0,6366/x,$$

$$\delta_0 \simeq -90/\ln x, \quad \delta'_0 \simeq 45x^2 \text{ градусов}.$$

При $x \rightarrow \infty$

$$C_m \simeq C'_m \simeq \sqrt{2/\pi x},$$

$$\delta_m \simeq x - \frac{1}{4} \pi (2m - 1), \quad \delta'_m \simeq x - \frac{1}{4} \pi (2m + 1) \text{ радиан}.$$

x	$C_0(x)$	$\delta_0(x)$	$C'_0(x)$	$\delta'_0(x)$	$C_1(x)$	$\delta_1(x)$	$C'_1(x)$	$\delta'_1(x)$
0,0	∞	00,00°	∞	00,00°	∞	00,00°	∞	00,00°
0,1	1,8300	33,03	6,4591	0,44	6,4591	0,44	63,057	-0,45
0,2	1,4659	42,48	3,3253	1,71	3,3253	1,71	15,546	1,82
0,3	1,2679	50,45	2,2979	3,70	2,2979	3,70	6,8535	4,04
0,4	1,1356	57,75	1,7916	6,28	1,7916	6,28	3,8748	6,97
0,5	1,0384	64,65	1,4913	9,35	1,4913	9,35	2,5393	-10,30
0,6	0,9628	71,31	1,2926	12,82	1,2926	12,82	1,8440	13,62
0,7	0,9016	77,79	1,1513	16,60	1,1513	16,60	1,4451	16,53
0,8	0,8507	84,14	1,0454	20,66	1,0454	20,66	1,1994	18,73
0,9	0,8075	90,40	0,9629	24,94	0,9629	24,94	1,0388	20,07
1,0	0,7703	96,58	0,8966	29,39	0,8966	29,39	0,9283	-20,50
1,2	0,7088	108,77	0,7963	38,74	0,7963	38,74	0,7884	18,94
1,4	0,6599	120,80	0,7234	48,52	0,7234	48,52	0,7035	14,80
1,6	0,6198	132,71	0,6675	58,62	0,6675	58,62	0,6453	8,84
1,8	0,5861	144,54	0,6230	68,96	0,6230	68,96	0,6019	-1,61
2,0	0,5573	156,31	0,5866	79,49	0,5866	79,49	0,5676	+6,52
2,2	0,5323	168,04	0,5560	90,15	0,5560	90,15	0,5392	15,31
2,4	0,5104	179,72	0,5298	100,93	0,5298	100,93	0,5152	24,57
2,6	0,4910	191,37	0,5071	111,81	0,5071	111,81	0,4944	34,20
2,8	0,4736	203,00	0,4872	122,75	0,4872	122,75	0,4760	44,11
3,0	0,4579	214,61	0,4694	133,76	0,4694	133,76	0,4597	54,24
3,2	0,4436	226,20	0,4536	144,82	0,4536	144,82	0,4450	64,55
3,4	0,4306	237,78	0,4392	155,92	0,4392	155,92	0,4317	75,01
3,6	0,4187	249,34	0,4262	167,06	0,4262	167,06	0,4195	85,58
3,8	0,4077	260,90	0,4143	178,23	0,4143	178,23	0,4084	96,25
4,0	0,3975	272,44	0,4034	189,42	0,4034	189,42	0,3980	107,01
4,2	0,3881	283,98	0,3933	200,64	0,3933	200,64	0,3885	117,83
4,4	0,2792	295,51	0,3839	211,88	0,3839	211,88	0,3796	128,72
4,6	0,3710	307,04	0,3752	223,14	0,3752	223,14	0,3713	139,65
4,8	0,3633	318,56	0,3670	234,42	0,3670	234,42	0,3635	150,64
5,0	0,3560	330,07	0,3594	245,71	0,3594	245,71	0,3562	161,66

Таблица XIV. Амплитуды и фазы цилиндрических функций Бесселя
(продолжение)

x	$C_2(x)$	$\delta_2(x)$	$C'_2(x)$	$\delta'_2(x)$	$C_3(x)$	$\delta_3(x)$	$C'_3(x)$	$\delta'_3(x)$
0,1	127,65	00,00°	2 546,4	00,00°	5 099,3	00,00°	152 852	00,00°
0,2	32,157	0,01	318,25	-0,01	639,82	0,00	9 565,1	0,00
0,4	8,2984	0,14	39,711	0,14	81,203	0,00	600,72	0,00
0,6	3,8930	0,64	11,716	0,69	24,692	0,01	119,57	-0,01
0,8	2,3598	1,84	4,9215	2,09	10,815	0,05	38,196	0,06
1,0	1,6547	3,98	2,5289	-4,77	5,8216	0,19	15,814	-0,20
1,2	1,2733	7,19	1,5025	8,91	3,5901	0,52	7,7118	0,57
1,4	1,0432	11,46	1,0117	14,06	2,4425	1,18	4,2116	1,35
1,6	0,8927	16,73	0,7627	19,03	1,7911	2,32	2,5037	2,77
1,8	0,7879	22,87	0,6309	22,49	1,3931	4,07	1,5963	5,08
2,0	0,7111	29,75	0,5573	-23,69	1,1351	6,52	1,0860	-8,44
2,2	0,6526	37,26	0,5130	22,56	0,9597	9,74	0,7898	12,71
2,4	0,6065	45,29	0,4836	19,45	0,8354	13,72	0,6158	17,32
2,6	0,5691	53,76	0,4624	14,75	0,7441	18,43	0,5136	21,41
2,8	0,5381	62,59	0,4457	8,84	0,6749	23,83	0,4535	24,15
3,0	0,5119	71,74	0,4319	-1,99	0,6209	29,85	0,4175	-25,09
3,2	0,4894	81,14	0,4198	+5,59	0,5778	36,42	0,3952	24,19
3,4	0,4698	90,77	0,4090	13,73	0,5426	43,49	0,3804	21,64
3,6	0,4525	100,58	0,3992	22,33	0,5132	50,98	0,3698	17,71
3,8	0,4371	110,55	0,3901	31,29	0,4884	58,86	0,3617	12,66
4,0	0,4233	120,67	0,3816	40,55	0,4671	67,06	0,3549	-6,72
4,2	0,4108	130,90	0,3737	50,06	0,4486	75,56	0,3489	-0,04
4,4	0,3995	141,24	0,3662	59,77	0,4322	84,32	0,3434	+7,22
4,6	0,3891	151,68	0,3592	69,66	0,4178	93,30	0,3383	14,97
4,8	0,3795	162,19	0,3525	79,70	0,4048	102,49	0,3334	23,13
5,0	0,3706	172,78	0,3462	89,87	0,3931	111,85	0,3287	31,62

x	$C_8(x)$	$\delta_8(x)$	$C'_8(x)$	$\delta'_8(x)$	$C_9(x)$	$\delta_9(x)$	$C'_9(x)$	$\delta'_9(x)$
1,6	10 485	00,00°	51 209	00,00°	103 635	00,00°	572 462	00,00°
1,8	4 188,9	0,00	18 068	0,00	36 685	0,00	179 235	0,00
2,0	1 853,9	0,00	7 144,1	0,00	14 560	0,00	63 665	0,00
2,2	891,96	0,00	3 099,0	0,00	6 342,5	0,00	25 055	0,00
2,4	460,04	0,00	1 451,6	0,00	2 985,1	0,00	10 734	0,00
2,6	251,68	0,00	725,56	0,00	1 500,0	0,00	4 940,5	0,00
2,8	144,86	0,00	383,37	0,00	797,25	0,00	2 417,7	0,00
3,0	87,150	0,00	212,56	0,00	444,96	0,00	1 247,7	0,00
3,2	54,522	0,00	122,93	0,00	259,24	0,00	674,59	0,00
3,4	35,320	0,00	73,802	0,00	156,91	0,00	380,03	0,00
3,6	23,612	0,00	45,804	0,00	98,275	0,00	222,08	0,00
3,8	16,243	0,01	29,287	-0,01	63,483	0,00	134,11	0,00
4,0	11,471	0,02	19,236	-0,02	42,178	0,00	83,430	0,00
4,2	8,3005	0,04	12,946	0,04	28,756	0,00	53,319	0,00
4,4	6,1442	0,07	8,9067	0,08	20,078	0,01	34,924	-0,01
4,6	4,6463	0,13	6,2524	0,14	14,333	0,01	23,396	0,01
4,8	3,5855	0,22	4,4705	0,25	10,446	0,02	16,001	0,02
5,0	2,8209	0,37	3,2506	-0,42	7,7639	0,04	11,154	-0,04

Таблица XIV. Амплитуды и фазы цилиндрических функций Бесселя
(продолжение)

x	$C_4(x)$	$\delta_4(x)$	$C'_4(x)$	$\delta'_4(x)$	$C_5(x)$	$\delta_5(x)$	$C'_5(x)$	$\delta'_5(x)$
0,4	1 209,7	00,00°	1 2016	00,00°	24 114	00,00°	300 210	00,00°
0,6	243,02	0,00	1 595,5	0,00	3 215,6	0,00	26 554	0,00
0,8	78,751	0,00	382,94	0,00	776,70	0,00	4 775,6	0,00
1,0	33,278	0,00	127,29	0,00	260,41	0,00	1 268,8	0,00
1,2	16,686	0,02	52,031	-0,02	107,65	0,00	431,86	0,00
1,4	9,4432	0,05	24,539	0,06	51,519	0,00	174,55	0,00
1,6	5,8564	0,15	12,851	0,16	27,492	0,01	80,057	-0,01
1,8	3,9060	0,34	7,2904	0,37	15,970	0,02	40,455	0,02
2,0	2,7662	0,70	4,4045	-0,79	9,9360	0,04	22,074	-0,04
2,2	2,0609	1,32	2,8012	1,55	6,5462	0,10	12,817	0,10
2,4	1,6037	2,30	1,8612	2,80	4,5296	0,21	7,8343	0,22
2,6	1,2954	3,72	1,2872	4,73	3,2717	0,41	4,9989	0,45
2,8	1,0805	5,67	0,9265	7,46	2,4550	0,75	3,3086	0,86
3,0	0,9261	8,20	0,6965	-11,01	1,9064	1,29	2,2607	-1,53
3,2	0,8122	11,34	0,5496	15,13	1,5270	2,11	1,5896	2,59
3,4	0,7260	15,11	0,4566	19,29	1,2576	3,27	1,1486	4,18
3,6	0,6593	19,47	0,3987	22,81	1,0619	4,84	0,8534	6,41
3,8	0,6065	24,42	0,3631	25,11	0,9167	6,88	0,6539	9,35
4,0	0,5640	29,90	0,3412	-25,90	0,8067	9,42	0,5190	-12,92
4,2	0,5291	35,87	0,3275	25,14	0,7219	12,49	0,4287	16,83
4,4	0,5000	42,29	0,3187	22,95	0,6553	16,09	0,3693	20,62
4,6	0,4753	49,12	0,3126	19,54	0,6022	20,21	0,3312	23,74
4,8	0,4542	56,32	0,3081	15,10	0,5590	24,83	0,3071	25,76
5,0	0,4359	63,84	0,3044	-9,81	0,5235	29,92	0,2921	-26,44
x	$C_6(x)$	$\delta_6(x)$	$C'_6(x)$	$\delta'_6(x)$	$C_7(x)$	$\delta_7(x)$	$C'_7(x)$	$\delta'_7(x)$
1,0	2 570,8	00,00°	15 164	00,00°	30 589	00,00°	211 552	00,00°
1,2	880,41	0,00	4 294,4	0,00	8 696,4	0,00	49 849	0,00
1,4	358,55	0,00	1 485,4	0,00	3 021,8	0,00	14 750	0,00
1,6	165,97	0,00	594,89	0,00	1 217,3	0,00	5 159,6	0,00
1,8	84,816	0,00	266,75	0,00	549,47	0,00	2 052,0	0,00
2,0	46,914	0,00	130,81	0,00	271,55	0,00	903,50	0,00
2,2	27,695	0,00	68,986	0,00	144,52	0,00	432,13	0,01
2,4	17,271	0,01	38,648	-0,01	81,825	0,00	221,39	0,00
2,6	11,290	0,03	22,783	0,03	48,837	0,00	120,20	0,00
2,8	7,6918	0,06	14,028	0,06	30,510	0,00	68,583	0,00
3,0	5,4365	0,12	8,9670	-0,13	19,840	0,01	40,857	-0,01
3,2	3,9723	0,23	5,9221	0,25	13,370	0,02	25,275	0,02
3,4	2,9921	0,42	4,0245	0,47	9,3044	0,03	16,164	0,04
3,6	2,3179	0,72	2,8051	0,83	6,6677	0,07	10,647	0,07
3,8	1,8431	1,19	2,0001	1,41	4,9090	0,13	7,2002	0,15
4,0	1,5015	1,87	1,4564	-2,30	3,7063	0,23	4,9853	-0,26
4,2	1,2510	2,83	1,0822	3,60	2,8650	0,40	3,5256	0,46
4,4	1,0640	4,11	0,8211	5,42	2,2647	0,67	2,5417	0,77
4,6	0,9220	5,77	0,6374	7,85	1,8284	1,06	1,8649	1,26
4,8	0,8127	7,85	0,5081	10,88	1,5059	1,63	1,3911	2,00
5,0	0,7272	10,38	0,4177	-14,40	1,2640	2,42	1,0543	-3,06

Таблица XV. Амплитуды и фазы сферических функций Бесселя
(см. стр. 444 и 533)

При $x \rightarrow 0$

$$D_m \simeq \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{x^{m+1}}, \quad D'_m \simeq \frac{m+1}{x} D_m,$$
$$\delta_m \simeq \frac{57,30x^{2m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2m-1)} \text{ градусов, } \delta'_m \simeq -\frac{m}{m+1} \delta_m,$$
$$D_0=1/x, \delta_0=57,296x \text{ градусов, } \delta'_0 \simeq 19098x^3.$$

При $x \rightarrow \infty$

$$D_m \simeq D'_m \simeq 1/x,$$
$$\delta_m \simeq x - (1/2)m\pi, \quad \delta'_m \simeq x - (1/2)(m+1)\pi \text{ радиан.}$$

x	$D_0(x)$	$\delta_0(x)$	$D'_0(x)$	$\delta'_0(x)$	$D_1(x)$	$\delta_1(x)$	$D'_1(x)$	$\delta'_1(x)$
0,1	10,000	05,73°	100,50	00,02°	100,50	00,02°	2000,0	-00,01°
0,2	5,0000	11,46	25,495	0,15	25,495	0,15	250,05	0,08
0,3	3,3333	17,19	11,600	0,49	11,600	0,49	74,149	0,25
0,4	2,5000	22,92	6,7315	1,12	6,7315	1,12	31,350	0,58
0,5	2,0000	28,65	4,4721	2,08	4,4721	2,08	16,125	-1,10
0,6	1,6667	34,38	3,2394	3,41	3,2394	3,41	9,4081	1,82
0,7	1,4285	40,11	2,4911	5,10	2,4911	5,11	6,0034	2,73
0,8	1,2500	45,84	2,0010	7,18	2,0010	7,18	4,1014	3,80
0,9	1,1111	51,57	1,6609	9,58	1,6609	9,58	2,9599	4,96
1,0	1,0000	57,30	1,4142	12,30	1,4142	12,30	2,2361	-6,14
1,2	0,8333	68,75	1,0848	18,56	1,0848	18,56	1,4262	8,11
1,4	0,7143	80,21	0,8778	25,75	0,8778	25,75	1,0205	8,97
1,6	0,6250	91,67	0,7370	33,68	0,7370	33,68	0,7931	8,25
1,8	0,5556	103,13	0,6355	42,19	0,6355	42,19	0,6529	5,87
2,0	0,5000	114,59	0,5590	51,16	0,5590	51,16	0,5590	-1,97
2,2	0,4545	126,05	0,4993	60,49	0,4993	60,49	0,4918	+3,21
2,4	0,4167	137,51	0,4514	70,13	0,4514	70,13	0,4411	9,44
2,6	0,3846	148,97	0,4121	80,01	0,4121	80,01	0,4011	16,50
2,8	0,3571	160,43	0,3792	90,08	0,3792	90,08	0,3686	24,23
3,0	0,3333	171,89	0,3514	100,32	0,3514	100,32	0,3415	32,49
3,2	0,3125	183,35	0,3274	110,70	0,3274	110,70	0,3184	41,18
3,4	0,2941	194,81	0,3066	121,20	0,3066	121,20	0,2985	50,23
3,6	0,2778	206,25	0,2883	131,79	0,2883	131,79	0,2811	59,57
3,8	0,2632	217,72	0,2721	142,47	0,2721	142,47	0,2657	69,15
4,0	0,2500	229,18	0,2577	153,22	0,2577	153,22	0,2519	78,92
4,2	0,2081	240,64	0,2448	164,03	0,2448	164,03	0,2396	88,88
4,4	0,2273	252,10	0,2331	174,91	0,2331	174,91	0,2285	98,97
4,6	0,2174	263,56	0,2225	185,83	0,2225	185,83	0,2184	109,20
4,8	0,2083	275,02	0,2128	196,78	0,2128	196,78	0,2091	119,55
5,0	0,2000	286,48	0,2040	207,79	0,2040	207,79	0,2006	129,98

Таблица XV. Амплитуды и фазы сферических функций Бесселя
(продолжение)

x	$D_2(x)$	$\delta_2(x)$	$D_2'(x)$	$\delta_2'(x)$	$D_3(x)$	$\delta_3(x)$	$D_3'(x)$	$\delta_3'(x)$
0,1	3 005,0	00,00°	90 050	00,00°	150 150	00,00°	6 003 000	00,00°
0,2	377,53	0,00	5637,4	0,00	9 412,6	0,00	187 875	0,00
0,4	48,174	0,01	354,57	-0,01	595,44	0,00	5 906,2	0,00
0,6	14,793	0,09	70,730	0,06	120,04	0,00	785,47	0,00
0,8	6,5741	0,36	22,667	0,25	39,102	0,01	188,94	-0,01
1,0	3,6056	0,99	9,4340	-0,70	16,643	0,03	62,968	-0,02
1,2	2,2705	2,18	4,6457	1,39	8,4253	0,10	25,816	0,08
1,4	1,5768	4,12	2,5833	3,07	4,8265	0,28	12,217	0,22
1,6	1,1768	6,91	1,5836	5,19	3,0376	0,64	6,4256	0,51
1,8	0,9268	10,59	1,0572	7,77	2,0603	1,29	3,6669	1,05
2,0	0,7603	15,13	0,7629	-10,40	1,4856	2,34	2,2361	-1,97
2,2	0,6434	20,47	0,5901	12,49	1,1268	3,92	1,4436	3,38
2,4	0,5578	26,54	0,4837	13,51	0,8913	6,10	0,9823	5,34
2,6	0,4927	33,23	0,4148	13,14	0,7298	8,94	0,7036	7,80
2,8	0,4416	40,48	0,3676	11,31	0,6149	12,46	0,5308	10,54
3,0	0,4006	48,20	0,3333	-8,11	0,5303	16,66	0,4214	-13,16
3,2	0,3669	56,32	0,3071	-3,73	0,4661	21,52	0,3508	15,17
3,4	0,3388	64,80	0,2862	+1,65	0,4161	26,95	0,3042	16,17
3,6	0,3149	73,59	0,2688	7,86	0,3762	32,94	0,2723	15,94
3,8	0,2943	82,62	0,2540	14,75	0,3437	39,43	0,2496	14,41
4,0	0,2764	91,89	0,2411	22,20	0,3168	46,36	0,2326	-11,67
4,2	0,2607	101,36	0,2296	30,12	0,2941	53,68	0,2193	7,84
4,4	0,2468	111,00	0,2194	38,44	0,2747	61,36	0,2084	-3,08
4,6	0,2343	120,79	0,2101	47,08	0,2579	69,36	0,1992	+2,47
4,8	0,2231	130,72	0,2016	56,00	0,2433	77,63	0,1912	8,70
5,0	0,2130	140,77	0,1939	65,16	0,2303	86,16	0,1840	15,48

x	$D_8(x)$	$\delta_8(x)$	$D_8'(x)$	$\delta_8'(x)$	$D_9(x)$	$\delta_9(x)$	$D_9'(x)$	$\delta_9'(x)$
2,0	4 530,1	00,00°	19 768	00,00°	37 889	00,00°	184 915	00,00
2,2	1 977,1	0,00	7 790,5	0,00	14 980	0,00	66 113	0,00
2,4	932,47	0,00	3 342,8	0,00	6 451,1	0,00	25 947	0,00
2,6	469,63	0,00	1 541,1	0,00	2 986,2	0,00	11 016	0,00
2,8	250,25	0,00	755,58	0,00	1 470,6	0,00	5 001,8	0,00
3,0	140,06	0,00	390,70	0,00	764,20	0,00	2 407,3	0,00
3,2	81,850	0,00	211,68	0,00	416,31	0,00	1 219,1	0,00
3,4	49,707	0,00	119,52	0,00	236,48	0,00	645,82	0,00
3,6	31,246	0,00	70,012	0,00	139,45	0,00	356,11	0,00
3,8	20,265	0,00	42,388	0,00	85,051	0,00	203,55	0,00
4,0	13,523	0,01	26,440	-0,00	53,485	0,00	120,19	0,00
4,2	9,2642	0,01	16,944	-0,01	34,591	0,00	73,094	0,00
4,4	6,5027	0,02	11,131	0,02	22,954	0,00	45,665	0,00
4,6	4,6692	0,04	7,4788	0,04	15,599	0,00	29,242	0,00
4,8	3,4251	0,07	5,1305	0,07	10,839	0,01	19,156	0,00
5,0	2,5638	0,13	3,5874	-0,12	7,6895	0,01	12,815	-0,01

Таблица XV. Амплитуды и фазы сферических функций Бесселя
(продолжение)

x	$D_4(x)$	$\delta_4(x)$	$D'_4(x)$	$\delta'_4(x)$	$D_5(x)$	$\delta_5(x)$	$D'_5(x)$	$\delta'_5(x)$
0,6	1 385,7	00,00°	11 427	00,00°	20 665	00,00°	205 264	00,00°
0,8	335,57	0,00	2 058,2	0,00	3 736,1	00,0	27 685	0,00
1,0	112,90	0,00	547,85	0,00	999,44	0,00	5 883,7	0,00
1,2	46,879	0,00	186,90	0,00	343,17	0,00	1 668,9	0,00
1,4	22,559	0,01	75,742	-0,01	140,20	0,00	578,29	0,00
1,6	12,121	0,03	34,839	0,02	65,140	0,00	232,16	0,00
1,8	7,0994	0,08	17,661	0,06	33,437	0,00	104,36	0,00
2,0	4,4613	0,18	9,6689	-0,15	18,591	0,01	51,313	-0,01
2,2	2,9741	0,38	5,6351	0,32	11,042	0,02	27,141	0,02
2,4	2,0859	0,74	3,4594	0,64	6,9354	0,05	15,253	0,04
2,6	1,5294	1,32	2,2198	1,18	4,5716	0,11	9,0209	0,10
2,8	1,1660	2,22	1,4811	2,02	3,1446	0,22	5,5733	0,20
3,0	0,9201	3,50	1,0242	-3,27	2,2471	0,42	3,5758	-0,37
3,2	0,7483	5,25	0,7334	5,00	1,6622	0,74	2,3714	0,68
3,4	0,6248	7,51	0,5443	7,23	1,2690	1,25	1,6198	1,16
3,6	0,5336	10,33	0,4195	9,83	0,9972	1,99	1,1367	1,91
3,8	0,4646	13,72	0,3364	12,58	0,8045	3,05	0,8183	2,99
4,0	0,4112	17,68	0,2807	-15,10	0,6648	4,47	0,6043	-4,48
4,2	0,3690	22,19	0,2432	17,00	0,5613	6,30	0,4583	6,43
4,4	0,3350	27,22	0,2174	17,95	0,4831	8,60	0,3577	8,79
4,6	0,3071	32,73	0,1994	17,79	0,4228	11,38	0,2881	11,45
4,8	0,2838	38,69	0,1863	16,47	0,3755	14,66	0,2399	14,15
5,0	0,2642	45,06	0,1764	-14,04	0,3378	18,43	0,2065	-16,56

x	$D_6(x)$	$\delta_6(x)$	$D'_6(x)$	$\delta'_6(x)$	$D_7(x)$	$\delta_7(x)$	$D'_7(x)$	$\delta'_7(x)$
1,0	10 881	00,00°	75 167	00,00°	140 453	00,00°	1 112 740	00,00°
1,2	3 098,8	0,00	17 733	0,00	33 227	0,00	218 416	0,00
1,4	1 079,0	0,00	5 254,7	0,00	9 879,0	0,00	55 372	0,00
1,6	435,72	0,00	1 841,1	0,00	3 475,1	0,00	16 940	0,00
1,8	197,24	0,00	733,60	0,00	1 391,1	0,00	5 985,2	0,00
2,0	97,792	0,00	323,68	0,00	617,05	0,00	2 370,4	0,00
2,2	52,238	0,00	155,17	0,00	297,64	0,00	1 030,1	0,00
2,4	29,702	0,00	79,694	0,00	153,95	0,00	483,46	0,00
2,6	17,812	0,01	43,385	-0,01	84,491	0,00	242,16	0,00
2,8	11,189	0,01	24,827	0,01	48,802	0,00	128,25	0,00
3,0	7,3207	0,03	14,835	-0,03	29,476	0,00	71,282	0,00
3,2	4,9682	0,06	9,2059	0,06	18,521	0,00	41,335	0,00
3,4	3,4852	0,13	5,9066	0,11	12,057	0,01	24,884	-0,01
3,6	2,5202	0,23	3,9037	0,21	8,1040	0,02	15,489	0,02
3,8	1,8743	0,41	2,6493	0,38	5,6086	0,04	9,9334	0,03
4,0	1,4311	0,70	1,8415	-0,66	3,9878	0,07	6,5446	-0,06
4,2	1,1198	1,13	1,3083	1,09	2,9075	0,13	4,4184	0,12
4,4	0,8967	1,75	0,9486	1,73	2,1704	0,23	3,0499	0,22
4,6	0,7336	2,62	0,7015	2,65	1,6567	0,39	2,1483	0,37
4,8	0,6124	3,78	0,5290	3,92	2,2916	0,64	1,5417	0,61
5,0	0,5206	5,29	0,4072	-5,58	1,0276	1,00	1,1256	-0,98

Таблица XVI. Периодические функции Матье
(см. стр. 383, 384 и стр. 526)

	$x=0^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$Se_0(h, \cos x)$										
$h^2=0$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	1,0000	1,0080	1,0313	1,0674	1,1126	1,1617	1,2089	1,2480	1,2739	1,2829
2	1,0000	1,0170	1,0666	1,1448	1,2445	1,3550	1,4633	1,5549	1,6162	1,6379
3	1,0000	1,0268	1,1057	1,2319	1,3956	1,5812	1,7667	1,9262	2,0344	2,0728
4	1,0000	1,0373	1,1481	1,3279	1,5657	1,8408	2,1212	2,3663	2,5345	2,5946
5	1,0000	1,0485	1,1935	1,4323	1,7542	2,1340	2,5286	2,8789	3,1221	3,2094
6	1,0000	1,0601	1,2415	1,5445	1,9604	2,4610	2,9906	3,4679	3,8029	3,9238
7	1,0000	1,0721	1,2917	1,6638	2,1840	2,8222	3,5092	4,1376	4,5831	4,7447
8	1,0000	1,0845	1,3439	1,7899	2,4248	3,2183	4,0870	4,8927	5,4696	5,6799
9	1,0000	1,0972	1,3979	1,9226	2,6828	3,6501	4,7268	5,7387	6,4701	6,7379
$Se_1(h, \cos x)$										
$h^2=0$	1,0000	0,9848	0,9397	0,8660	0,7660	0,6428	0,5000	0,3420	0,1736	0,0000
1	1,0000	0,9886	0,9539	0,8943	0,8076	0,6927	0,5499	0,3825	0,1963	0,0000
2	1,0000	0,9927	0,9693	0,9250	0,8535	0,7486	0,6066	0,4289	0,2225	0,0000
3	1,0000	0,9971	0,9858	0,9585	0,9042	0,8112	0,6711	0,4822	0,2527	0,0000
4	1,0000	1,0018	1,0037	0,9951	0,9603	0,8815	0,7443	0,5434	0,2877	0,0000
5	1,0000	1,0069	1,0230	1,0351	1,0224	0,9604	0,8275	0,6138	0,3282	0,0000
6	1,0000	1,0123	1,0438	1,0786	1,0910	1,0489	0,9220	0,6944	0,3748	0,0000
7	1,0000	1,0180	1,0662	1,1261	1,1668	1,1479	1,0292	0,7867	0,4286	0,0000
8	1,0000	1,0242	1,0902	1,1777	1,2503	1,2584	1,1502	0,8921	0,4904	0,0000
9	1,0000	1,0307	1,1160	1,2335	1,3419	1,3815	1,2866	1,0119	0,5610	0,0000
$Se_2(h, \cos x)$										
$h^2=0$	1,0000	0,9397	0,7660	0,5000	0,1736	-0,1736	-0,5000	-0,7660	-0,9397	-1,0000
1	1,0000	0,9467	0,7917	0,5496	0,2451	-0,0882	-0,4103	-0,6794	-0,8582	-0,9208
2	1,0000	0,9530	0,8147	0,5944	0,3098	-0,0110	-0,3298	-0,6026	-0,7869	-0,8522
3	1,0000	0,9586	0,8355	0,6348	0,3681	+0,0581	-0,2589	-0,5366	-0,7275	-0,7956
4	1,0000	0,9638	0,8544	0,6716	0,4209	0,1200	-0,1968	-0,4810	-0,6797	-0,7512
5	1,0000	0,9686	0,8720	0,7057	0,4696	0,1764	-0,1420	-0,4345	-0,6424	-0,7178
6	1,0000	0,9731	0,8885	0,7379	0,5154	0,2285	-0,0929	-0,3955	-0,6142	-0,6942
7	1,0000	0,9774	0,9044	0,7689	0,5593	0,2779	-0,0481	-0,3627	-0,5937	-0,6790
8	1,0000	0,9816	0,9200	0,7992	0,6023	0,3256	-0,0062	-0,3346	-0,5798	-0,6710
9	1,0000	0,9857	0,9355	0,8294	0,6450	0,3727	+0,0338	-0,3103	-0,5715	-0,6695
$Se_3(h, \cos x)$										
$h^2=0$	1,0000	0,8660	0,5000	0,0000	-0,5000	-0,8660	-1,0000	-0,8660	-0,5000	0,0000
1	1,0000	0,8732	0,5242	+0,0407	-0,4530	-0,8261	-0,9753	-0,8562	-0,4981	0,0000
2	1,0000	0,8802	0,5481	0,0815	-0,4052	-0,7842	-0,9484	-0,8443	-0,4952	0,0000
3	1,0000	0,8871	0,5717	0,1221	-0,3566	-0,7410	-0,9195	-0,8307	-0,4912	0,0000
4	1,0000	0,8938	0,5949	0,1625	-0,3078	-0,6965	-0,8891	-0,8155	-0,4863	0,0000
5	1,0000	0,9004	0,6176	0,2023	-0,2590	-0,6513	-0,8572	-0,7991	-0,4807	0,0000
6	1,0000	0,9067	0,6398	0,2415	-0,2104	-0,6057	-0,8245	-0,7820	-0,4747	0,0000
7	1,0000	0,9128	0,6612	0,2798	-0,1625	-0,5602	-0,7916	-0,7643	-0,4683	0,0000
8	1,0000	0,9187	0,6820	0,3171	-0,1154	-0,5151	-0,7587	-0,7467	-0,4620	0,0000
9	1,0000	0,9244	0,7020	0,3533	-0,0694	-0,4709	-0,7263	-0,7295	-0,4558	0,0000
$Se_4(h, \cos x)$										
$h^2=0$	1,0000	0,7660	0,1736	-0,5000	-0,9397	-0,9397	-0,5000	0,1736	0,7660	1,0000
1	1,0000	0,7730	0,1944	-0,4727	-0,9214	-0,9410	-0,5181	0,1504	0,7465	0,9835
2	1,0000	0,7798	0,2153	-0,4448	-0,9019	-0,9407	-0,5349	0,1279	0,7274	0,9671
3	1,0000	0,7867	0,2361	-0,4165	-0,8813	-0,9390	-0,5505	0,1061	0,7085	0,9510
4	1,0000	0,7935	0,2570	-0,3876	-0,8595	-0,9358	-0,5648	0,0851	0,6900	0,9350
5	1,0000	0,8002	0,2779	-0,3584	-0,8367	-0,9311	-0,5778	0,0648	0,6716	0,9190
6	1,0000	0,8069	0,2988	-0,3287	-0,8127	-0,9249	-0,5895	0,0451	0,6535	0,9031
7	1,0000	0,8136	0,3197	-0,2986	-0,7877	-0,9173	-0,6000	0,0262	0,6356	0,8872
8	1,0000	0,8201	0,3405	-0,2681	-0,7617	-0,9083	-0,6093	+0,0080	0,6179	0,8714
9	1,0000	0,8267	0,3613	-0,2374	-0,7348	-0,8979	-0,6173	-0,0096	0,6004	0,8555

Таблица XVI. Периодические функции Матье
(продолжение)

	$x=0^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$So_1(h, \cos x)$										
$h^2=0$	0,0000	0,1736	0,3420	0,5000	0,6428	0,7660	0,8660	0,9397	0,9848	1,0000
1	0,0000	0,1743	0,3471	0,5159	0,6769	0,8242	0,9507	1,0484	1,1104	1,1317
2	0,0000	0,1750	0,3523	0,5325	0,7129	0,8864	1,0424	1,1675	1,2490	1,2773
3	0,0000	0,1757	0,3577	0,5498	0,7507	0,9528	1,1415	1,2976	1,4013	1,4378
4	0,0000	0,1764	0,3632	0,5676	0,7905	1,0235	1,2484	1,4393	1,5684	1,6141
5	0,0000	0,1771	0,3688	0,5861	0,8321	1,0985	1,3634	1,5933	1,7511	1,8075
6	0,0000	0,1778	0,3745	0,6051	0,8757	1,1782	1,4869	1,7602	1,9505	2,0188
7	0,0000	0,1785	0,3804	0,6248	0,9213	1,2625	1,6192	1,9409	2,1675	2,2494
8	0,0000	0,1793	0,3864	0,6451	0,9688	1,3517	1,7609	2,1360	2,4033	2,5005
9	0,0000	0,1800	0,3925	0,6660	1,0184	1,4460	1,9122	2,3464	2,6590	2,7733
$So_2(h, \cos x)$										
$h^2=0$	0,0000	0,1710	0,3214	0,4330	0,4924	0,4924	0,4330	0,3214	0,1710	0,0000
1	0,0000	0,1714	0,3246	0,4422	0,5098	0,5172	0,4610	0,3460	0,1854	0,0000
2	0,0000	0,1719	0,3278	0,4517	0,5279	0,5434	0,4910	0,3725	0,2010	0,0000
3	0,0000	0,1723	0,3312	0,4616	0,5470	0,5712	0,5230	0,4010	0,2179	0,0000
4	0,0000	0,1728	0,3346	0,4718	0,5669	0,6006	0,5572	0,4318	0,2362	0,0000
5	0,0000	0,1733	0,3382	0,4824	0,5877	0,6316	0,5937	0,4648	0,2560	0,0000
6	0,0000	0,1738	0,3418	0,4934	0,6095	0,6644	0,6326	0,5004	0,2774	0,0000
7	0,0000	0,1743	0,3455	0,5047	0,6322	0,6990	0,6741	0,5386	0,3005	0,0000
8	0,0000	0,1748	0,3494	0,5164	0,6560	0,7356	0,7183	0,5796	0,3254	0,0000
9	0,0000	0,1753	0,3533	0,5285	0,6807	0,7741	0,7654	0,6236	0,3523	0,0000
$So_3(h, \cos x)$										
$h^2=0$	0,0000	0,1667	0,2887	0,3333	0,2887	0,1667	0,0000	-0,1667	-0,2887	-0,3333
1	0,0000	0,1671	0,2916	0,3411	0,3017	0,1822	+0,0135	-0,1587	-0,2866	-0,3337
2	0,0000	0,1675	0,2945	0,3489	0,3147	0,1977	0,0270	-0,1511	-0,2852	-0,3349
3	0,0000	0,1679	0,2974	0,3567	0,3277	0,2134	0,0404	-0,1438	-0,2844	-0,3369
4	0,0000	0,1683	0,3003	0,3644	0,3409	0,2292	0,0540	-0,1368	-0,2843	-0,3398
5	0,0000	0,1687	0,3032	0,3722	0,3542	0,2452	0,0676	-0,1300	-0,2848	-0,3434
6	0,0000	0,1691	0,3060	0,3801	0,3676	0,2615	0,0814	-0,1233	-0,2859	-0,3479
7	0,0000	0,1695	0,3089	0,3881	0,3813	0,2781	0,0955	-0,1168	-0,2876	-0,3532
8	0,0000	0,1699	0,3118	0,3961	0,3953	0,2951	0,1098	-0,1104	-0,2900	-0,3593
9	0,0000	0,1704	0,3148	0,4042	0,4095	0,3126	0,1246	-0,1040	-0,2929	-0,3662
$So_4(h, \cos x)$										
$h^2=0$	0,0000	0,1607	0,2462	0,2165	0,0855	-0,0855	-0,2165	-0,2462	-0,1607	0,0000
1	0,0000	0,1611	0,2489	0,2228	0,0941	-0,0783	-0,2137	-0,2476	-0,1630	0,0000
2	0,0000	0,1615	0,2516	0,2292	0,1028	-0,0709	-0,2108	-0,2490	-0,1653	0,0000
3	0,0000	0,1619	0,2542	0,2355	0,1116	-0,0634	-0,2079	-0,2504	-0,1677	0,0000
4	0,0000	0,1623	0,2569	0,2419	0,1205	-0,0558	-0,2048	-0,2517	-0,1701	0,0000
5	0,0000	0,1627	0,2596	0,2483	0,1294	-0,0480	-0,2016	-0,2532	-0,1726	0,0000
6	0,0000	0,1631	0,2622	0,2547	0,1385	-0,0401	-0,1983	-0,2546	-0,1751	0,0000
7	0,0000	0,1635	0,2649	0,2612	0,1476	-0,0320	-0,1950	-0,2561	-0,1778	0,0000
8	0,0000	0,1639	0,2675	0,2676	0,1569	-0,0238	-0,1915	-0,2576	-0,1805	0,0000
9	0,0000	0,1643	0,2701	0,2741	0,1662	-0,0155	-0,1881	-0,2593	-0,1834	0,0000

Таблица XVII. Нормирующие постоянные для периодических функций Матье и предельные значения радиальных функций Матье

(см. стр. 530 тома I и стр. 527, 528)

h^2	$M_0^e(h)$	$Je_0(h, 1)$	$C_0^e(h)$	$\delta_0^e(h)$	$M_1^e(h)$	$Je_1(h, 1)$	$C_1^e(h)$	$\delta_1^e(h)$
0	6,2832	1,2533	∞	00,00	3,1416	0,0000	∞	00,00°
1	8,2179	1,1130	1,2544	62,53	3,3555	0,5705	2,0043	16,54
2	11,086	1,0017	1,0497	72,60	3,6100	0,7345	1,5528	28,23
3	15,262	0,9140	0,9331	78,39	3,9146	0,8192	1,3429	37,59
4	21,214	0,8448	0,8530	82,04	4,2815	0,8619	1,2106	45,40
5	29,521	0,7896	0,7933	84,43	4,7254	0,8791	1,1152	52,03
6	40,896	0,7450	0,7468	86,03	5,2646	0,8798	1,0407	57,71
7	56,211	0,7084	0,7093	87,13	5,9216	0,8698	0,9798	62,59
8	76,524	0,6779	0,6784	87,89	6,7233	0,8532	0,9283	66,79
9	103,12	0,6522	0,6524	88,44	7,7022	0,8325	0,8838	70,38

h^2	$M_2^e(h)$	$Je_2(h, 1)$	$C_2^e(h)$	$\delta_2^e(h)$	$M_3^e(h)$	$Je_3(h, 1)$	$C_3^e(h)$	$\delta_3^e(h)$
0	3,1416	0,0000	∞	00,00°	3,1416	0,0000	∞	00,00°
1	2,9205	0,08116	6,7431	0,69	3,0431	0,00663	51,926	0,01
2	2,7755	0,1660	3,6093	2,64	2,9451	0,01906	18,717	0,06
3	2,6945	0,2510	2,5874	5,57	2,8495	0,03557	10,418	0,20
4	2,6639	0,3333	2,0862	9,19	2,7582	0,05560	6,9408	0,46
5	2,6720	0,4102	1,7892	13,26	2,6729	0,07882	5,1101	0,88
6	2,7101	0,4802	1,5921	17,55	2,5953	0,1049	4,0117	1,50
7	2,7725	0,5423	1,4508	21,95	2,5266	0,1337	3,2943	2,33
8	2,8559	0,5961	1,3435	26,34	2,4679	0,1648	2,7970	3,38
9	2,9585	0,6418	1,2585	30,66	2,4197	0,1978	2,4364	4,66

h^2	$M_4^e(h)$	$Je_4(h, 1)$	$C_4^e(h)$	$\delta_4^e(h)$
0	3,1416	0,0000	∞	00,00°
1	3,0893	0,00041	618,07	0,00
2	3,0369	0,00166	155,94	0,00
3	2,9845	0,00377	69,992	0,00
4	2,9319	0,00675	39,786	0,01
5	2,8793	0,01064	25,751	0,02
6	2,8266	0,01544	18,099	0,05
7	2,7740	0,02120	13,470	0,09
8	2,7216	0,02793	10,457	0,15
9	2,6696	0,03564	8,3864	0,24

Таблица XVII. Нормирующие постоянные для периодических функций Матье и предельные значения радиальных функций Матье (продолжение)

h^2	$M_1^0(h)$	$Jo_1'(h, 1)$	$C_1^0(h)$	$\delta_1^0(h)$	$M_2^0(h)$	$Jo_2'(h, 1)$	$C_2^0(h)$	$\delta_2^0(h)$
0	3,1416	0,0000	∞	00,00°	0,7854	0,0000	∞	00,00°
1	3,7914	0,6081	1,1995	—30,46	0,8547	0,1503	12,096	—0,70
2	4,5780	0,8361	0,9903	—57,60	0,9322	0,2887	5,6559	—2,93
3	5,5267	0,9977	1,0493	—71,95	1,0190	0,4162	3,5103	—6,81
4	6,6672	1,1243	1,1448	—79,15	1,1164	0,5338	2,4623	—12,52
5	8,0336	1,2288	1,2378	—83,06	1,2255	0,6424	1,8727	—20,06
6	9,6652	1,3177	1,3221	—85,35	1,3480	0,7428	1,5281	—29,08
7	11,608	1,3952	1,3974	—86,78	1,4854	0,8357	1,3336	—38,80
8	13,913	1,4639	1,4651	—87,71	1,6395	0,9218	1,2360	—48,23
9	16,641	1,5255	1,5262	—88,33	1,8125	1,0018	1,2003	—56,58

h^2	$M_3^0(h)$	$Jo_3'(h, 1)$	$C_3^0(h)$	$\delta_3^0(h)$	$M_4^0(h)$	$Jo_4'(h, 1)$	$C_4^0(h)$	$\delta_4^0(h)$
0	0,3491	0,0000	∞	00,00°	0,1963	0,0000	∞	00,00°
1	0,3607	0,01926	150,76	—0,01	0,1997	0,00162	2430,8	—0,00
2	0,3739	0,05349	52,391	—0,06	0,2033	0,00641	602,64	—0,00
3	0,3887	0,09635	27,983	—0,20	0,2072	0,01429	265,59	—0,00
4	0,4050	0,1452	17,800	—0,47	0,2113	0,02514	148,12	—0,01
5	0,4231	0,1985	12,448	—0,91	0,2158	0,03885	93,974	—0,02
6	0,4429	0,2548	9,2346	—1,58	0,2205	0,05530	64,675	—0,05
7	0,4645	0,3134	7,1324	—2,52	0,2256	0,07436	47,075	—0,09
8	0,4882	0,3734	5,6718	—3,77	0,2310	0,09588	35,693	—0,15
9	0,5139	0,4342	4,6125	—5,40	0,2368	0,1197	27,916	—0,25

$$M_m^e(h) = \int_0^{2\pi} [Se_m(h, \cos x)]^2 dx, \quad Je_m(h, 1) + iNe_m(h, 1) = -C_m^e i e^{i\delta_m^e},$$

$$Je_m'(h, 1) = [(d/dx) Je_m(h, \cos x)]_{x=0} = 0, \quad Ne_m'(h, 1) = [1/Je_m(h, 1)],$$

$$M_m^o(h) = \int_0^{2\pi} [So_m(h, \cos x)]^2 dx, \quad Jo_m'(h, 1) + iNo_m'(h, 1) = iC_m^o e^{i\delta_m^o},$$

$$Jo_m(h, 1) = 0, \quad Jo_m'(h, 1) = [(d/dx) Jo_m(h, \cos x)]_{x=0} = -[1/No_m(h, 1)].$$

При $h \rightarrow 0$

$$C_0^e \simeq -\sqrt{\frac{1}{2}} \pi \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \ln^2(0,4453h) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \delta_0^e \simeq \frac{-90}{\ln(0,4453h)} \text{ градусов.}$$

При $m > 0$ и $h \rightarrow 0$

$$M_m^e \simeq (2\pi/\varepsilon_m), \quad Je_m(h, 1) \simeq \sqrt{\frac{1}{2}} \pi (\varepsilon_m h^m / 4^m m!),$$

$$C_0^e \simeq -Ne_m(h, 1) \simeq \frac{4^m (m-1)!}{\sqrt{2\pi} h^m}, \quad \delta_m^e \simeq \frac{360h^{2m}}{4^{2m} m! (m-1)!} \text{ градусов.}$$

$$M_m^o \simeq (\pi/m^2), \quad Jo_m'(h, 1) \simeq \sqrt{2\pi} [h^m / 4^m (m-1)!],$$

$$C_m^o \simeq No_m'(h, 1) \simeq \frac{4^m m!}{\sqrt{2\pi} h^m}, \quad \delta_m^o \simeq \frac{-360h^{2m}}{4^{2m} m! (m-1)!} \text{ градусов.}$$

ЛИТЕРАТУРА

Таблицы функций, рассматриваемых в этой книге, в которых эти функции представлены с большей полнотой или с большим числом значащих цифр, чем в настоящем Приложении:

Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, изд. 3, М., 1959.

Mathematical Tables, vol. I, British Association for the Advancement of Science, London, 1931 (также последующие тома).

Полезны следующие таблицы часто встречающихся функций.

Функции Бесселя:

Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. 2, Издат. иностр. лит., М., 1949.

Cambi E., Bessel Functions, New York, 1948.

Harvard University Computation Laboratory, Tables of Bessel Functions, Cambridge, Mass., 1947 (только функции первого рода).

NBS Mathematical Tables Project, Tables of Spherical Bessel Functions, of J_0 and J_1 , N_0 and N_1 for Complex Argument, New York, 1947—1950.

Показательная функция:

NBS Mathematical Tables Project, Tables of e^x , New York, 1939.

Гиперболические и тригонометрические функции:

NBS Mathematical Tables Project, Tables of Circular and Hyperbolic Sines and Cosines, New York, 1940.

NBS Mathematical Tables Project, Tables of Tangents and Cotangents, New York, 1943.

Функции Лежандра:

Tallquist H. J., Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen $P_n(\cos \theta)$, Acta Soc. Sci. Fennicae, ser. A, tom II, No 11, 1938.

NBS Mathematical Tables Project, Tables of Associated Legendre Functions, New York, 1945.

Функции Матье:

NBS Mathematical Tables Project, Tables Relating to Mathieu Functions, New York, 1951.

Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J. and Hutner R. A., Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions, New York, 1941.

Натуральный логарифм:

NBS Mathematical Tables Project, Tables of Natural Logarithms, 4 vols., New York, 1941.

Относительно других таблиц смотри выпуски журнала «Mathematical Tables and other Aids to Computation», а также справочники:

Лебедев А. В. и Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, изд. АН СССР, М., 1956;

Fletcher A., Miller J. C. P. and Rosenhead L., An Index of Mathematical Tables, London, 1946.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Этот указатель относится к обоим томам. К номерам страниц второго тома условно прибавлена 1000.

А

Абсолютная величина комплексного числа 332.

Абстрактное векторное пространство 80—95; и интегральные уравнения 838; и квантовая теория 82, 223—254; итерационно-пертурбационная формула 1022; комплексное а. в. п. 84; неравенство Бесселя 85; неравенство Шварца 85; операторы 85, 86; операторы вращения 93; преобразование операторов 88—90; собственные векторы 81, 716; собственные значения 81, 716; собственные функции 666; спинорные операторы 91; теория возмущений 1022; унитарные операторы 87; функции Грина 735—827; эрмитовы операторы 86.

Адмитанс, или полная проводимость 274, 287, 1314, 1316; акустический а. 296; аффинор а. 274, 317; граничный а. 1342; диссипативной системы а. 285; и проводимость, или кондуктанс 287; и реактивная проводимость, или сусептанс 287; и резонанс 274; излучения диполя а. 1798; крутильный а. 1778; отклоняющий а. границы 1345.

Аксиальные векторы 21, 39, 50, 54.

Активное сопротивление, или резистанс 287; и реактивное сопротивление, или реактанс 353; излучения а. с. 831, 1370, 1398, 1400.

Акустический адмитанс 296.

Акустический импеданс 296, 1328, 1329, 1343; для колеблющегося диска 1476; для колеблющейся полосы 1398.

Акустический контур 1333, 1334.

Альбедо 1563; при диффузном отражении 1575.

Ампера закон 199.

Амплитуда комплексного числа 332.

Амплитуда рассеяния 1064, 1069, 1070, 1160; вариационный принцип 1127, 1130, 1161, 1650, 1652; и полное эффективное сечение 1069, см. также фактор углового распределения; интегральное уравнение 1076.

Амплитуда скорости 128.

Аналитические функции 337—385; аналитическое продолжение 357, 367; действительная и мнимая части 350; и импеданс 352; и электростатика 334, 335; интегральная формула Коши 347; обратная функция 342; особые точки 339; производные 354, 355; ряд Лорана 357, 358; ряд Тейлора 355; теорема Коши 344; условия Коши—Римана 334.

Аналитическое продолжение 357, 368; для гамма-функции 372; для гипергеометрической функции 376, 514, 546, 554; естественная граница 368; и область существования 368; и точки ветвления 370; метод Эйлера 373, 375, 457; основные теоремы 369; приемы 370; принцип Шварца 372.

Антенна полуволновая, излучение 1808.

Антиэрмитов оператор 842, 849.

Асимптотическая формула для собственных значений и собственных функций 687; в случае уравнения Бесселя 689, 690.

Асимптотический ряд 410—418, 457, 358; для вырожденной гипергеометрической функции 521, 522, 569, 570, 572, 573; для гамма-функции 418; для интегральной показательной функции 411; для кулоновской волновой функции 592, 593; для функций Бесселя 583 (для *ф. Б. высших порядков* 587—591); единственность 413; и метод перевала 414; и явление Стокса 413, 571, 573.

Асимптотическое поведение преобразования Фурье 437.

Атом экранированный, рассеяние на нем 1631; борновское приближение 1639; структурный фактор, или атомный фактор рассеяния 1640; эффект Рамзауэра 1633, 1634.

Аффинор 60—77; адмитанса а. 274, 317; главные оси 64; деформации а. 72; и тензор 60, 61; импеданса а. 273, 309, 316, 317, 1751; как векторный оператор 61; кососимметри-

ческий 66; напряжений а. 74; расщепления а. 1823; симметрический а. 64 (собственные значения 65); теорема Гаусса 71; теорема Стокса 71.

Аффинорная функция Грина 1710; для диполей 1813, 1814.

Аффинорный оператор 76.

Б

Бабины принцип 1404.

Безвихревые поля 29.

Безвихревые течения 150.

Бернулли уравнение 158.

Бесконечное произведение для гамма-функции 399; для целых функций 363, 364.

Бесселя неравенство 85.

Бесселя уравнение 518, 521, 579, 580; функция Грина 821.

Бесселя функции 538, 579—591; асимптотическое поведение 583, 590, 591; высших порядков Б. ф. 587—591; и интеграл Фурье—Бесселя 711; и полиномы Гегенбауера 582; и уравнение Лапласа 1243, 1277; и функции Ганкеля 583; 584; и функции Матье 594; интегральное представление 580, 581, 583, 584; интегральное уравнение 835; ортогонализация 710; производящая функция 581; рекуррентные формулы 580; сферические Б. ф. 582, 583, 1433, 1444 (и сфероидальные функции 602; интегральное представление 583; рекуррентные формулы 582; таблицы значений 1851, 1856—1858; таблицы корней 1534; формулы и таблицы 1531—1534); таблицы значений 1849—1851, 1853—1858; таблицы корней 1523, 1524; фазы и амплитуды 1522; чисто мнимого аргумента Б. ф. 1243, 1277, 1303 (таблицы 1850); явление Стокса 690.

Бета-функция 401.

Бигармоническое уравнение 1726; и функция напряжений 1726; пример 1734.

Биортогональные ряды 861; и полиномы Неймана 864.

Биортогональные функции 818, 823.

Биполярные координаты 1171; два цилиндра в однородном поле 1201; и метод изображений 1171; потенциал вне двух цилиндров 1199; уравнение Лапласа в б. к. 1199; функция Грина в б. к. 1202, 1203.

Бисферические координаты 495, 621, 622; потенциал между плоскостью и сферой 1280; собственные функции 1281; уравнение Лапласа в б. к. 495, 1279; функция Грина в б. к. 1281, 1282.

Борна приближения 1072, 1160, 1673; высших порядков Б. п. 1075, 1641; для потенциала Юкавы 1081; для прохождения через потенциальный барьер 1079; для рассеяния на атомах 1639; для рассеяния на атомах водорода 1684; для фазовых углов 1641; для экспоненциального потенциала 1644; сходимость 1073.

В

Вариационно-итерационный метод 1029—1035, 1133—1141, 1143—1147, 1158; в квантовой механике 1647 (для рассеяния 1652; для экспоненциального потенциала 1649); для круглой мембраны 1143; для неортогональных функций 1039, 1040; для уравнения Шредингера, см. Шредингера уравнение; и метод минимизированных итераций 1149; и уравнение Матье 1033; и экстраполяционный метод 1138; неравенства для собственных значений 1134, 1145; нижние границы для собственных значений 1139, 1147; сходимость 1031, 1135.

Вариационные методы в задаче двух частиц 1679; в электростатике 1105; для волн в трубах 1479 (коэффициент прохождения 1125, 1480); для звуковых волн 1504 (диффракция на отверстии в плоскости 1483; рассеяние на полосе 1509); для излучения 1131; для неоднородных уравнений 1108, 1109; для рассеяния 1120, 1126 (амплитуда рассеяния 1127, 1131, 1161; в квантовой механике 1120—1127, 1131, 1161, 1163, 1644, 1650, 1652; в случае экспоненциального потенциала 1651; коэффициент прохождения 1125, 1151; фазовые углы 1120—1125, 1153, 1650; электромагнитных волн р. 1823); для собственных значений 1104—1152 (в случае высших с. з. 1147; в случае наименьшего с. з. 685; и граничные возмущения 1127—1130, 1158; и связанные состояния 1112, 1114; и связанные состояния атома гелия 1679; и связанные состояния для экспоненциального потенциала 1644; и теория возмущений 1116; интегральных уравнений с. з. 843, 845, 920, 1117; метод Рэлея—Ритца 1115; с. з. с линейными параметрами 1113, 1116; с. з. с нелинейными параметрами 1114; с. з. уравнения Гельмгольца 1110; с. з. электромагнитного резонатора 1821; с. з. эрмитовых операторов 1107); для уравнения Гельмгольца, см. Гельмгольца уравнение; для уравнения Лапласа 1105; для уравнения Шредингера, см. Шредингера уравнение; для функций распределения 1581.

Вариационные параметры 1105, 1113—1116; и вековой определитель 1116; линейные в. п. 1113; нелинейные в. п. 1114.

Вариационный принцип 264—328; для векторного поля 303; для интегральных уравнений 843, 845, 920, 1117; для колеблющейся струны 288, 325; для упругой среды 306, 309; для уравнения Гельмгольца 292, 1110; для уравнения Дирака 318; для уравнения диффузии 298; для уравнения Клейна—Гордона 301; для уравнения Лапласа 293;

- для уравнения Шредингера 299, 326; для уравнения Штурма—Лиувилля 684; для функций распределения 1581; для электромагнитного поля 310; и уравнения связи 267; сводка результатов 324—328.
- Вариация интеграла Лагранжа** 265, 324; и плотность функции Лагранжа 265; и уравнения Эйлера 266.
- Вебера функции** 1378; и гармонический осциллятор 1593; и интегралы Френеля 1380; и полиномы Эрмита 1380; таблица свойств 1524.
- Вейерштрасса эллиптические функции** 406.
- Вековой определитель** 65, 1016, 1037; вариационный метод 116; для возмущений граничных условий 1042, 1046; для возмущений формы границы 1054; для объемных возмущений 1016, 1037.
- Векторная теорема Грина** 1708.
- Векторное волновое уравнение** 200, 1705—1724, 1728—1730, 1748—1817; аффинор импеданса 1751; граничные условия 1702, 1703, 1709, 1750, 1751; интегральное представление решений 146; функция Грина 1728; см. также Векторное уравнение Гельмгольца, Упругие волны, Электромагнитные волны.
- Векторное пространство комплексное** 84; см. также Абстрактное векторное пространство.
- Векторное уравнение Гельмгольца** 1705—1724, 1748—1817; аффинорная функция Грина 1710, 1717, 1802 (*продольная и поперечная а. ф. Г.* 1719); в прямоугольных координатах 1713, 1714, 1781; в сферических координатах 1794—1817; в сфероидальных координатах 1819; в цилиндрических координатах 1758, 1759; вариационный принцип 1821, 1823; волны в волноводах 1755—1772; излучение 1400, 1796, 1803—1810; неоднородное в. у. Г. 1711; отражение плоской волны 1749; разделимость 1706; рассеяние 1792—1794, 1810—1814, 1823; собственные функции 1713; электромагнитные резонаторы 1781—1792, 1799—1801, 1814.
- Векторное уравнение диффузии** 160, 1749; и нестационарное течение вязкой жидкости 1780.
- Векторное уравнение Лапласа** 1724; аффинорная функция Грина 1736; в полярных координатах 1733; в сферических координатах 1737; и бигармоническое уравнение 1726; плоские задачи 1731; поля токов 1730; течение несжимаемой вязкой жидкости 1731; функция Грина, см. Грина функция.
- Векторное уравнение Пуассона** 1730; течение несжимаемой вязкой жидкости 1731.
- Векторные гармоники** зональные, таблица 1825; сферические в. г., таблица 1824.
- Векторные поля**, вариационный принцип 303; интенсивность 305; плотность импульса 305; плотность момента количества движения 305; сводка результатов 324—326; тензор напряжений-энергии 304 (*симметризация* 321); уравнения Эйлера 303.
- Векторные собственные функции**, см. Собственные функции векторные.
- Векторный оператор как аффинор** 61.
- Векторный потенциал** 59; в теории упругости 142, 145; для движения жидкости 160; для магнитного поля 198, 1705, 1730, 1736, 1741; для электромагнитного поля 200, 1705.
- Векторы** 19; аксиальные в. 21, 39, 50, 54; векторное произведение 21; и комплексные числа 332; ковариантные в. 39, 52; контравариантные в. 39, 52; преобразование в. 38; скалярное произведение 20; смешанное тройное произведение 22; 4-векторные потенциалы 203, 310; 4-векторы 98 (*и спиноры* 103; 4-в. импульса 99; 4-в. тока 203).
- Венцеля—Крамерса—Бриллюэна—Джеффриса (WKBJ) метод** 1090—1104; для ограниченных систем 1096; для прохождения через потенциальный барьер 1097; для радиальных уравнений 1090; для функций Матве 1388; и интегральные уравнения 1092; и классические точки поворота 1091 (*близко расположенные т. п.* 1101; *изолированные т. п.* 1093); обобщение Имаи 1155; формулы связи 1093—1096.
- Вероятность в квантовой теории** 83, 84, 224.
- Весомая идеализированная струна** 130—133.
- Ветвления линии** 377.
- Ветвления точки** 370, 377; и аналитическое продолжение 370; и интегралы 388; и римановы поверхности 379; многозначных функций в. т. 370, 377.
- Взаимности принцип** в абстрактном векторном пространстве 816; для векторного волнового уравнения 1710, 1711; для разностного уравнения 653; для рассеяния 1127; для скалярного волнового уравнения 773; для уравнения Гельмгольца 746, 749; для уравнения диффузии 793; для уравнения Клейна—Гордона 790; для уравнения Лапласа 742; и причинность 793; обобщенный в. п. 806, 807, 823.
- Взаимные функции** 846.
- Винера—Хопфа метод** 906; для неоднородного уравнения 917; и задача Милна 179, 913, 1578, 1579; излучение из конца трубы 1490; отражение в облицованной трубе 1484; примеры применения 908—917; факторизация 907, 915.
- Виртуальные уровни** 1074, 1609, 1634; и сходимость метода возмущений для рассеяния 1073.
- Вихревая линия** 30, 1218.
- Вихревой вектор** 49, 150, 1175—1178.
- Вихрь** 48, 57; в ортогональных координатах 50; в тензорных обозначениях 57.
- Внутреннее нестационарное нагревание пластины** 1547.
- Водорода атом** 259, 592, 1615, 1683.
- Возбуждение волновода током** 1761; входной импеданс 1762.

- Возбуждение резонатора** при помощи волновода 1786; в. р. током 1784.
- Возмущения в граничных условиях** 1041—1053; вековой определитель 1042, 1047; приближенные условия Дирихле 1044—1048; приближенные условия Неймана 1041—1044; пример 1048, 1343, резюме 1047, 1048; таблица 1158.
- Возмущения объемные** 1005—1040.
- Возмущения поверхностные** 1005, 1040—1063.
- Возмущения формы границы** 1053—1063; вековой определитель 1054; примеры 1062, 1363, 1367, 1407, 1414, 1418, 1439, 1455; резонансные частоты 1054, 1410; сходимость 1056; таблица 1158; условия Дирихле 1060, 1061; условия Неймана 1053—1055.
- Возраст** 192, 1556, 1589; возрастная теория 1587; возрастная функция Грина 194; возрастное уравнение 192, 1556, 1589.
- Волновая функция сопряженная** 1125, 1127, 1131.
- Волнового импульса плотность** 292; см. также Плотность импульса поля.
- Волноводы** (электромагнитные волны в них) 1755—1772; влияние изменения размеров сечения 1768; возбуждение резонатора 1786; возбуждение в. током 1761; дисперсия волн 1756; затухание волн 1762—1766; отражение волн от конца в. 1766; отражение волн от штыря в в. 1772; поперечно-магнитные волны 1758; поперечно-электрические волны 1755; функция Грина 1758; эффективный импеданс 1757, 1766.
- Волновое напряжение** 292.
- Волновое уравнение** 100; для звуковых волн 159; для линии передачи 212; для струны 123, 135, 137; для упругих волн 140; для электромагнитных волн 200.
- Волновое уравнение векторное**, см. Векторное волновое уравнение.
- Волновое уравнение скалярное** 1312—1541; в параболических координатах 1373; в полярных координатах 1348; в прямоугольных координатах 1341, 1406; в сферических координатах 1430; в сфероидальных координатах 1466, 1475; в эллиптических координатах 1382; вариационный принцип 292, 294; запаздывающий потенциал 201, 778, 808; и гиперболические уравнения 638; импеданс 295; разностное уравнение 647, 654; решение начальной задачи 781—784; условия Дирихле 639, 656; условия Коши 637, 655; функция Грина 772—792; см. также Гельмгольца уравнение, Мембрана, Струна.
- Волновое число** 218.
- Волновой вектор** 1404.
- Волновой импеданс** 127, 139, 214, 296.
- Волны в пространстве нескольких измерений** 640; в трехмерном пространстве 143; изменение формы в. 143, 640, 781—784; см. также Звуковые волны, Плоские волны, Продольные волны, Упругие волны, Электромагнитные волны.
- Волны кручения в шаре** 1801; вдоль стержня 1775.
- Волны сжатия в жидкости** 294, 325, 326; акустический адмитанс 296; волновое уравнение 159; плоские в. 297; плотность импульса 295; плотность функции Лагранжа 294; тензор напряжений-энергии 294, 295, 297; см. также Продольные волны.
- Волны скорость**, см. Скорость волны.
- Волны ударные** 165.
- Волны фронт** 143.
- Вольтерра интегральные уравнения** 837, 838, 851, 900, 919, 922, 923; и преобразование Лапласа 900.
- Вращения координаты и разделимость** 605.
- Вращения оператор** 42, 43; в квантовой механике 93; в спинорной форме 106; для спиноров 104; как кватернион 79.
- Время в квантовой механике** 238—245; как параметр 238, 239; соотношение неопределенности 238; собственное в. 95.
- Вронского определитель** 496; для вырожденных гипергеометрических функций 574; для радиальных функций Маттье 599, 600, 1529, 1530; для сферических функций Бесселя 1450; для сфероидальных функций 1535; для тороидальных гармоник 1311; для функций Бесселя 1522; для функций Вебера 1525; для функций Лежандра 562, 1309; оценка 766.
- Всестороннего сжатия модуль** 76.
- Входной импеданс** 273.
- Вынужденное движение и преобразование Фурье** 130, 1314; струны в. д. 129; упруго подкрепленной струны в. д. 138.
- Вынужденные крутильные колебания бруса** 1777.
- Вырождение** 83, 674, 1443, 1623; и вариационный принцип 686; и эффект Штарка 1626.
- Вырожденная гипергеометрическая функция** 519—524, 566—580; асимптотическое поведение 520, 569—573; в. г. ф. второго рода 576 (и функции третьего рода 574; интегральное представление 575, 577; ряд 578); и кулоновская волновая функция 592; и полиномы Лагерра 728; и полиномы Эрмита 730; и функции Бесселя 579; интегральное представление 567, 569; ряд 520; явление Стокса 571, 573.
- Вытянутые сфероидальные координаты** 487, 617; и векторное волновое уравнение 1817, 1818; и скалярное волновое уравнение 1466—1475 (разложение плоской волны 1471; решение 1466; функция Грина 1471); и уравнение Лапласа 1266—1273 (интегральное представление решений 1270; потенциал вытянутого полусфероид, помещенного

на заземленной плоскости 1269; потенциал вытянутого сфероида 1268; потенциал сфероида, помещенного внутрь сферы 1271; сфероид в однородном поле 1267; функция Грина 1272; и уравнение Шредингера для электрона в двухатомной молекуле 604; разделение переменных 487.

Вычетов теория 386—395, 457.

Вязкой жидкости течение двумерное 1175; и условия Коши—Римана 1176; между двумя цилиндрами 1212, 1219, 1220; между наклоненными плоскостями 1178; между параллельными плоскостями 1176; через щель 1187, 1733.

Вязкой жидкости течение трехмерное 1731; в круглой трубе 1773 (*нестационарное т.* 1780); в трубе прямоугольного сечения 1732; за сферой 1744; и закон Стокса 1744.

Вязкость 156—160; и векторное уравнение диффузии 160; и волновое уравнение 157, 158; и трение расширения 156; и число Рейнольдса 1733; коэффициент в. 156, 157.

Г

Гамильтона канонические уравнения 271; для полей 304; для струны 290, 291; для уравнения Шредингера 300, 301; для электромагнитного поля 312; и импеданс 271, 272.

Гамильтона принцип 269; и уравнения Лагранжа 269.

Гамильтона функция 270; зависящая от времени Г. ф. 242—245; и канонические уравнения 271; и квантовая механика 233—236, 241, 242, 1590; и энергия 270.

Гамильтона—Якоби уравнение 279; и переменные угловая и действия 281; и уравнение Шредингера 1104.

Гамма-функция 372, 396—401; аналитическое продолжение 372; бесконечное произведение 399; и бета-функция 401; интегральное представление 372; контурные интегралы 397; особые точки 396, 397; производные 399; рекуррентные соотношения 396; таблица свойств 461, 462; формула Стирлинга 400, 418; формула удвоения 401.

Ганкеля преобразование 873, 891, 921.

Ганкеля функция второго рода 584; асимптотические формулы 584, 590, 591; и функция Бесселя первого рода 585; интегральное представление 584.

Ганкеля функция первого рода 583, 584; асимптотические формулы 583, 590, 591; и функции Бесселя первого рода 585; и функции Грина 762, 763, 766, 767; интегральное представление 583; сферическая Г. ф. п. р. 582.

Гармоники зональные 1248, 1307, 1431; зональные векторные г. 1825; секториальные г. 1248; сферические г. 1248, 1431 (*векторные с. г.* 1824; *Гобсона с. г.* 1268; *комплексные с. г.* 1431; *Феррера с. г.* 1268); тессеральные г. 1248, 1431; тороидальные г. 1283, 1309; эллипсоидальные г. 1287.

Гармонические осцилляторы квантовые связанные 1665.

Гармонический осциллятор квантовый одномерный 236—238, 1592—1595; возмущения 1600; импульсное представление 1601; собственные функции 238; факторизация уравнения 678; энергетические уровни 237.

Гармонический осциллятор квантовый трехмерный 1613; в однородном поле 1627; импульсное представление 1628.

Гармонический осциллятор классический двумерный 279.

Гаусса теорема 46; для аффиноров 70, 71.

Гегенбауера полиномы 726.

Гегенбауера функции 516—518, 563—566; граничное условие конечности 664, 665; и второе решение уравнения 565; и гипергеометрическая функция 563, 564, 727; и интегральные уравнения 867; и полиномы Чебышева 566; и присоединенные полиномы Лежандра 564; и сфероидальные функции 541, 601; и факторизация оператора Штурма—Лиувилля 680, 682; и функции Бесселя 582; и функции Матье 594; производящая функция 564, 726; собственные значения 682; таблица свойств 726, 727; формула сложения 727; функция плотности 726.

Гейзенберга уравнение движения 90.

Гелий жидкий 1689.

Гелия атом 1679.

Гельмгольца векторное уравнение, см. Векторное уравнение Гельмгольца.

Гельмгольца резонатор, рассеяние на нем 1454.

Гельмгольца скалярное уравнение 125, 292, 1339—1541; вариационный принцип 1110—1112, 1128, 1130, 1131; для струны 125; плотность функции Лагранжа 292; разделимость 470—492, 604, 605; таблица разделяющих координат 612—622; функция Грина, см. Грина функция.

Геометрическая оптика и коротковолновое приближение 1104.

Геометрия систем координат 478.

Гиббса явление 693.

Гильберта преобразования 352, 874.

Гиперболическая система координат и уравнение Лапласа 1199.

Гиперболические уравнения 635; краевые условия Дирихле 638, 639, 655, 656; краевые условия Коши 637, 655; краевые условия Неймана 638, 639, 655, 656; нормальная форма 636; разностное уравнение 648, 654; решение 638, 639.

Гиперболические функции 1301.

- Гипергеометрическая функция** 511—516, 551—557; аналитическое продолжение 514, 546, 554; вырожденные формы 519, см. также Вырожденная гипергеометрическая функция; дифференциальное уравнение 511; интегральные представления 545, 551, 552, 554—556, 624—627; интегральные представления второго решения 555; обобщенная г. ф. 449; преобразование Эйлера 551; таблица свойств 622—628; уравнение связи 515, 546, 554, 555; формула удвоения 516.
- Гипергеометрический ряд** 367, 511, 512; поведение на границе круга сходимости 367; представление полиномов Гегенбауера 516, 563, 727; представление полиномов Чебышева 513; представление полиномов Якоби 724; представление функций Лежандра 513, 514, 517, 557, 560, 564; представление функций этими рядами 513; преобразование Эйлера 376.
- Главное значение Коши несобственного интеграла** 348, 448.
- Главные напряжения** 75.
- Главные оси аффинора** 64.
- Главные удлинения** 72.
- Градиент** 40, 52, 115.
- Граница естественная и область существования** 368.
- Границы возмущения** 1053—1063, 1159; вариационный принцип 1129; вековой определитель 1054; для амплитуды рассеяния 1070; для условий Дирихле 1060; для условий Неймана 1053—1060; и интегральное уравнение для рассеяния 1070; нижние границы для собственных значений 1139, 1142; приближение Кирхгофа 1073; сходимость 1056, 1061.
- Граничные условия**, см. Краевые условия.
- Граничный адмитанс** 1344, 1345.
- Граничный импеданс** 1345; для векторных волн 1751; для отражения от стенок трубы 1484; для рассеяния на сфере 1455; металлической поверхности г. и. 1753.
- Грина оператор** 815, 843; разложение по собственным функциям 817, 819.
- Грина теорема** 745; векторная Г. т. 1708; обобщение 805.
- Грина функция** 735—827; в абстрактном векторном пространстве 812—819; для бесконечной области 762; для векторного волнового уравнения 1728; для векторного уравнения Гельмгольца 1711, 1717 (в сферических координатах 1803; для волноводов 1758; для неограниченной области 1718; для резонатора 1782; для упругих колебаний 1722; и неоднородные задачи 1712; поперечная Г. ф. 1719; продольная Г. ф. 1719; разложение по собственным функциям 1717); для векторного уравнения Лапласа 1727 (в полярных координатах 1736; в сферических координатах 1739); для границы 653, 661, 741—743, 749; для неоднородного интегрального уравнения 920; для разностного уравнения 652 (для границы 653, 661; и случайные блуждания 654; принцип взаимности 653); для скалярного волнового уравнения 772—792 (граничные условия 772, 773; для бесконечной области 774—785; метод изображений 785; начальные условия 772, 773; принцип взаимности 773; разложение по собственным функциям 786; таблица свойств 825, 826); для скалярного уравнения Гельмгольца 745—772, 820, 821 (в параболических координатах 1380; в полярных координатах 765, 767, 1348; в прямоугольных координатах 762, 1343, 1344, 1406; в сферических координатах 820, 1434, 1437; в сфероидальных координатах 1471; в цилиндрических координатах 821, 1482; в эллиптических координатах 1395; граничные условия 751; для задачи о диафрагме в трубе 1478; для колеблющейся струны 125, 771, 1323, 1326; для круга 1350; для параллельных плоскостей 755; для переменного адмитанса границы 1345; и неоднородная задача 747—749; и преобразование Лапласа 1322, 1323; и преобразование Фурье 1340, 1510; и разложение плоской волны 767; метод изображений 753—757; разложение по собственным функциям 760—772, 825; таблица свойств 824, 825); для скалярного уравнения Лапласа 741, 742 (в биполярных координатах 1202; в вытянутых сфероидальных координатах 1272; в декартовых координатах 1167, 1171, 1240; в круговых цилиндрических координатах 1247; в параболических координатах 1197, 1279; в полярных координатах 1179; в сложенных сфероидальных координатах 1277; в сферических координатах 1256; в тороидальных координатах 1285; в эллиптических координатах 1192; для бесконечной области 762; для неподвижной струны 123; для параллелепипеда 1242; и интегральная формула Пуассона 755; метод изображений 753—757); для телеграфного уравнения 801; для уравнения диффузии 752, 793—804, 1545, 1550, 1554 (возрастное у. д. 194; для бесконечной области 795, 796; для неравномерного рассеяния 186; метод изображений 798; разложение по собственным функциям 799; решение неоднородной задачи 795; таблица свойств 826, 827); для уравнения Клейна—Гордона 138, 790; для уравнения Лапласа 741, 824, 1167, 1171, 1179; для уравнения Штурма—Лиувилля 770; зависимость от собственных значений 760, 761, 770, 771; и интегральные уравнения 869, 881; и неоднородные задачи 747; и неэрмитовы операторы 818; и оператор Грина 815; и плоские волны 766, 767; и производящие функции 745; и эрмитовы операторы 817; интегральное представление 392, 761; интегральное уравнение 823, 845; принцип взаимности 653, 742, 746, 774, 790, 793, 801, 807, 816, 823; природа особенностей 750, 751; разложение по собственным функциям 760—772, 823, 824; разрывы 743, 744, 747; таблица свойств 826, 827.
- Гюйгенса принцип** 784.

Д

- Давление 156, 172, 1175.
 Даламбера оператор 100, 202.
 Даламбера признак сходимости 365.
 Даламбера решение волнового уравнения 781.
 Двойкопериодические функции 404.
 Двух частиц задача в квантовой механике 1657—1689; и четность 1670; обмен частиц 1686; одномерный случай 1657—1666 (*и связанные гармонические осцилляторы 1665; и частично связанные состояния 1661; функция Грина 1659*); рассеяние 1683; рассеяние неупругое 1685; симметризация волновой функции 1670; трехмерный случай 1666—1689 (*и момент количества движения 1666—1669; координаты Хиллерааса 1682; связанные, свободные и поверхностные состояния 1674, 1679; функция Грина 1676*).
 Действительная и мнимая части аналитической функции 351; и импеданс 352; и метод изображений 350; и преобразование Гильберта 352.
 Действия интеграл 278; и уравнение Гамильтона—Якоби 279.
 Действия переменная 281; и момент количества движения 281; и угловая переменная 281.
 Декартовы координаты в пространстве 1240; и уравнение Лапласа 1167; конформное преобразование к полярным координатам 1211; потенциал между двумя плоскостями 1167; поток тепла внутри призмы 1169; функция Грина 1167; 1171, 1240, 1242; см. также Прямоугольные координаты.
 Деление и диффузия 1552—1560.
 Дельта-функция Дирака, см. Дирака дельта-функция.
 Деформация 71, 72; для волн в упругой среде 147; однородная д. 73; связь с напряжением 75.
 Деформирование контура интегрирования 346.
 Диагональные матрицы 722.
 Диагональные ядра 880, 881, 890.
 Диафрагма в трубе круглого сечения, аппроксимация 1480; вариационный метод 1479; звуковые волны 1477; интегральное уравнение 1479; коэффициент прохождения 1478.
 Диафрагма в трубе прямоугольного сечения 1414.
 Дивергенция 43; тензорное обозначение 57.
 Динамика, см. Классическая динамика.
 Диполи 1258; излучение д. 1445; магнитные д. 1797 (*и индуцированные токи 1814; излучение м. д. 1797, 1807, 1808; индуцированные м. д. 1814*); электрические д. 1798 (*и индуцированные токи 1814; излучение э. д. 1798, 1806, 1808; индуцированные э. д. 1813*).
 Дирака дельта-функция 122, 232, 754; в обобщенных координатах 769; в полярных координатах 765; и нормировка собственных функций 709; производная д. ф. 775, 777; разложение по собственным функциям 668, 677.
 Дирака уравнение 250—254, 318, 319; и преобразование Лоренца 252; и спинорные операторы 250; и уравнение Лагранжа—Эйлера 319; интенсивность поля 319; плотность заряда и тока 251, 319; плотность функции Лагранжа 318; плотность энергии 319; полный момент количества движения 253; решение типа плоской волны 254; таблица 328; тензор напряжений-энергии 319.
 Дирихле краевые условия 471, 633, 659, 748, 809; вариационный принцип 1111, 1128; и гиперболические уравнения 638, 640, 656; и граничные возмущения 1044, 1060; и эллиптические уравнения 648, 654; метод изображений 753; функции Грина 747, 748.
 Диск, рассеяние на нем 1483.
 Диск колеблющийся, акустический импеданс 1476; излучение 1475.
 Дисперсия и уравнение Клейна—Гордона 138, 139; д. электромагнитных волн в волноводах 1756.
 Диссипативные системы 284—288; вариационный принцип 285; и уравнение диффузии 298; импеданс 285—288.
 Дифференциальное поперечное сечение рассеяния 1065, 1654.
 Дифференциальные уравнения с частными производными теоретической физики 119—263.
 Диффракция, методы теории возмущений 1072—1104; на крае экрана 1362, 1381 (*интегральное уравнение 832*); на отверстии в плоскости 1482; на щели 1403; Фраунгофера д. 820; Френеля д. 1362.
 Диффузии уравнение 136, 168—195, 1542—1561; вариационный принцип 298, 299; векторное д. у. 160, 1749; для неізотропного рассеяния 185, 186; для частиц 1549—1560; и возрастное уравнение 1556; и параболические уравнения 170; метод изображений 798, 1545; неоднородное д. у. 795; плотность функции Лагранжа 298; принцип взаимности 793; функция Грина, см. Грина функция.
 Диффузия 168—195, 1542—1561; действие внешних сил 190; и возрастной параметр 1556; и деление 1552—1560; и конформное отображение 1207; и уравнение непрерывности 169; и функция распределения 170; нейтронов д. 169, 1552—1560, 1568—1590; постоянная д. 170; света д. 177.
 Диффузная эмиссия 1572; и преобразование Лапласа 1578.
 Диффузное отражение 1573.

Диэлектрик, граничные условия на поверхности 210.

Диэлектрическая постоянная 196.

Длинноволновое приближение 1083, 1084; для излучения 1352, 1805; для рассеяния 1357, 1402, 1450, 1792, 1811; для уравнения Шредингера 1086, 1635 (и *длина рассеяния* 1085, 1087; и *эффективный радиус взаимодействия* 1090); сходимость 1089.

Добротность электромагнитного резонатора 1783, 1784, 1800.

Дозвуковой поток 162.

Е

Единичная ступенчатая функция 122, 778; интегральное представление 392.

Единичного сдвига оператор 131.

Единичный аффинор, или идемфактор 63.

Емкость в триоде 1221; вариационный принцип 1106; е. вытянутого полусфероида, помещенного на заземленной плоскости 1269; е. вытянутого сфероида 1267; е. двух цилиндров 1200; е. пары длинных полос 1231; е. пары эксцентричных сфер 1255; е. переменного конденсатора 1232; е. проволоки вблизи заземленной плоскости 1173; е. проволоки внутри эллиптического цилиндра 1192; е. проволоки между двумя заземленными плоскостями 1226; е. системы сетка—плоскость 1223; е. сферы вблизи заземленной плоскости 1281; е. эллипсоида 1288, 1289; эквивалентная е. для звуковых волн в трубах 1334.

Естественная граница функции 368.

З

Зависимость операторов от времени 88, 240, 241.

Зависящая от времени функция Гамильтона 242.

Зависящее от времени уравнение Шредингера 242.

Замедление частиц 192, 1556—1559, 1583—1590.

Закрепление струны нежесткое 1324; подвижное з. с. 1338.

Запаздывающий потенциал 201, 778, 808.

Заряд, поле движущегося з. 206, 778, 779; сила, действующая на з. 199; функция Лагранжа для з. 282.

Затухание в волноводах 1762, 1763; в трубах 1413.

Звуковые волны в трубах 1328—1336; 1411—1430; вариационный принцип 1125, 1479; затухание 1413; и конформное отображение 1418; излучение из конца трубы 1424, 1490—1498; интегральное уравнение 1479; т. изогнутая 1418; т. облицованная 1484; т. переменного поперечного сечения 1331; т. с диафрагмой 1414, 1477; т. с мембраной 1422; т. с упругими стенками 1428.

Зональные векторные гармоники, таблица свойств 1825.

Зональные гармоники 1248; таблица значений 1845; таблица свойств 1307.

И

Идемфактор, или единичный аффинор 63.

Излучение звуковое диполя 1445; из открытого конца трубы 1424, 1490; импеданс и. 831; колеблющегося диска 1475; колеблющейся полосы 1396; кругового цилиндра 1351; поршня, являющегося частью сферы 1447; реактивное сопротивление и. 1370, 1398, 1400; системы источников 1446; случай длинных волн 1352, 1444; случай коротких волн 1353, 1445, 1497, 1498; сопротивление и. 1370, 1398, 1400; сферы 1444.

Излучение электромагнитное мультиполей 1796, 1805, 1808; петли тока 1809; полуволновой антенны 1808; тока, текущего по полосе 1399; токов 1803.

Изменение формы волны 143, 640, 641, 781—784.

Измерение в квантовой механике 223; и вероятность 224; и операторы 224.

Изображений метод 753—757; для концентрических цилиндров 1227, 1228; для параллельных плоскостей 755—757, 1226; для прямоугольной призмы 1228; для сферы 1258, 1297, 1298; для уравнения диффузии 793, 1545, 1550; для условий Дирихле 753; для условий Неймана 754; для цилиндра 1220; и аналитические функции 350, 351; и биполярные координаты 1171; и интегральная формула Пуассона 353, 755; и краевые условия 639; и параболические координаты 1198; и полярные координаты 1179; и функция Грина 753—757, 785; и эллиптические функции 1226.

Изотропная упругая среда 306, 327.

Изотропное рассеяние, интегральное уравнение 1571.

Импеданс акустический 296, 1328, 1329, 1345 (для резонатора Гельмгольца 1457); аффинор и. 273, 317 (для векторных волн 1751; для упругой среды 308, 309); волновой и. 128, 139; входной и. 273 (для волновода 1762); главные значения и. 273; граничный и. 1344, 1751, 1753 (для облицованной трубы 1484; для рассеяния на сфере 1454); и аналитические функции 352; и канонические уравнения 272, 273; и реактанс 287; и резистанс 287; и резонансные частоты 274; излучения и. 831; излучения диполей и. 1798; механический и. 128, 129; переносный и. 273; поля и. 1369; поперечный механический и. 129 (и. м. и. стенок трубы 1429); среды и. 149; точки приложения силы и. 130; характеристический и. 214 (для диссипативных систем 285—288); эквивалентный и. для

- волн в трубе 1333; эффективный и. 1417 (для клистрона 1792; для колеблющейся сферы 1446; для колена трубы 1421; для мембраны в трубе 1424; для отверстия в резонатор Гельмгольца 1457; для поперечно-магнитной волны 1757, 1758, 1767; для поперечно-электрической волны 1757, 1758, 1767; для преграды в прямоугольной трубе 1417; для сферического поршня 1448, 1449).
- Импульс** 270; волновой и. 292 (для звуковой волны 297; для колеблющейся струны 292; для уравнения Шредингера 301); и функция Гамильтона 271; плотность и., см. Плотность импульса; оператор и. 82, 224 (и координатный оператор 233); сопряженный и. 222; средний и. 172; 4-вектор и. 99.
- Импульсная функция** 1318; для волн в трубе 1330; для волн внутри круговой области 1350; для струны с жестким закреплением 1326; для струны в упругой среде 1323; и функция Грина 1322.
- Инвариантность** 16, 44, 53, 54, 61, 97; в классической механике 277, 278; калибровочная и. 201, 204—206; Лоренца и. 97.
- Инверсия и четность** 1670.
- Инверсия относительно окружности** 427, 428; относительно сферы 1297, 1298.
- Индукция магнитная** 197; электрическая 196.
- Инерции коэффициент и эффективная масса** 1276.
- Интеграл потока вектора** 27, 43.
- Интеграл циркуляции** 29.
- Интегралы**, вычисление при помощи вычетов 386; и. от функций, имеющих точки ветвления 388, 447; криволинейные и. 28; поверхностные и. 26.
- Интегральная показательная функция** 411; обобщенная и. п. ф. 1571, 1572.
- Интегральные представления** 542—604; вырожденной гипергеометрической функции 567, 627; гипергеометрической функции 545, 552, 554—556, 624, 625; решений векторного уравнения 1795; решений волнового уравнения 146 (в сферических координатах 1435; в сфероидальных координатах 1469); решений дифференциальных уравнений 542—604 (и преобразование Эйлера 549; и сопряженный оператор 548; и степенные ряды 543; и функциональные ряды 541; модуляционный множитель 547; таблица 624, 625, 627; ядро 546—549); решений уравнения Лапласа 246 (в вытянутых сфероидальных координатах 1270; в круговых цилиндрических координатах 1246; в параболических координатах 1278; в сплюснутых сфероидальных координатах 1276; в сферических координатах 1253; и функции Лежандра 1257); сферических функций Бесселя 582; сфероидальных функций 1469; функций Бесселя 580, 581; функций Ганкеля 583, 584; функций Лежандра 557—560; функций Матье 593.
- Интегральные уравнения** 828—923; в абстрактном векторном пространстве 838, 839; вариационный принцип 843, 844, 1117; Вольтерра и. у. 837, 851, 900; для амплитуды рассеяния 1076; для излучения 1501; для излучения из круглой трубы 1490; для распространения волн в трубах 1479, 1484; для рассеяния 1068, 1071 (Борна приближение 1072; граничные возмущения 1070; ряд Фредгольма 1077); для уравнения Шредингера 1070; и преобразование Лапласа 873, 900; и преобразование Меллина 871, 873, 904; и преобразование Фурье 871, 888—919; метод Винера—Хопфа 906—919; Милна и. у. 179, 913—917, 1572, 1577—1581; общие свойства 838—855; проблемы моментов и. у. 876; собственных функций и. у. 834; сопряженные и. у. 848, 850; таблица свойств 919—923; Фредгольма и. у. второго рода 836, 879—888; Фредгольма и. у. первого рода 837, 856—879; функций Матье и. у. 593; функций распределения и. у. 1571, 1572 (для диффузной эмиссии и отражения 177—179, 1574, 1576; и уравнение Милна 179, 913—917, 1572, 1577); эллипсоидальных гармоник и. у. 1289.
- Интегрирование в комплексной плоскости** 342; и теория вычетов 386; теорема Коши 344; теорема Морера 347; формула Коши 348.
- Интегрирующий множитель и сопряженные уравнения** 498.
- Интенсивность звуковой волны** 1352.
- Интенсивность поля** 305; для жидкости 295, 297, 326; для струны 125, 126, 291, 325; для упругой среды 149, 306, 309, 327; для уравнения Дирака 319, 328; для уравнения диффузии 326; для уравнения Клейна—Гордона 302, 327 для уравнения Шредингера 301, 326; таблицы 325—328; электромагнитного поля и., см. Пойнтинга вектор.
- Иррегулярная особая точка** 505, 507; уравнения с и. о. т. 507, 518, 523; см. также Особые точки дифференциальных уравнений.
- Источник** 27; мощность и. 27; несжимаемой жидкости и. 154; подвижный и. 206, 778.
- Итерация** 1133.
- Итерационно-пертурбационный метод** 1006—1015; в абстрактном векторном пространстве 1022; для неортогональных функций 1037; для рассеяния, см. Борна приближение; для уравнения Матье 1013; и вариационный метод 1116; модифицированный и.-п. м. 1036; сходимость 1011, 1023, 1029; таблица 1156.
- Итерированные ядра** 846, 847.

K

- Кавитация** 158.
- Калибровочная инвариантность** 201.
- Калибровочное преобразование** 204—206.

- Канонические формы дифференциальных уравнений**, таблица 622—628.
Канонического импульса плотность 311, 326, 327.
Каноническое преобразование 89, 274; и интеграл действия 277; и сопряженные переменные 275.
Квадруполи электрические 1258; излучение к. э. 1798, 1806, 1808.
Квантовая механика 215—254; вероятность в к. м. 83, 84, 224; время в к. м. 238, 239, 242; и абстрактное векторное пространство 82, 223 и сл.; и классическая механика 215, 279; измерение в к. м. 223, 224; инвариантность относительно преобразования Лоренца 246; момент количества движения 1611, 1668; наблюдаемые величины в к. м. 82, 83; независимые переменные 225; операторы 82, 224; операторы вращения 93; постоянная Планка 217; правила коммутации 229; принцип соответствия 241; пространство импульсов, см. Пространство импульсов; свободные состояния 1602, 1674; система двух частиц, см. Двух частиц задача; системы нескольких частиц 1666—1689; скобки Пуассона 222; соотношение неопределенности 83, 90; 220; соотношения де Бройля 218; средние значения 224, 1591; уравнение Шредингера 233; уравнение Шредингера, зависящее от времени 242; функции преобразования 228; центральные поля, см. Центральные поля в квантовой механике; экспоненциальный потенциал, см. Экспоненциальный потенциал в квантовой механике.
Кватернионы 77, 92, 106; верзор 79; обратный к. 93; оператор вращения 79; тензор 79.
Кинетическая энергия жидкости 293; струны к. э. 125; полная к. э. 172.
Кинетический потенциал 269.
Кирхгофа приближение 1072, 1073; сходимость 1073.
Классификация дифференциальных уравнений 505.
Классификация функций комплексного переменного 360.
Классическая динамика 268—288; диссипативные системы 284; для релятивистских частиц 284; и квантовая механика 215, 216, 279; канонические преобразования 274; принцип Гамильтона 269; скобки Пуассона 277; сопряженные переменные 275; угловые переменные и переменные действия 281; уравнение Гамильтона—Якоби 279; уравнения Лагранжа 269; функция Лагранжа 269.
Классические точки поворота 1091, 1093, 1101.
Клейна—Гордона уравнение 137, 301, 1323; и диспергирующая среда 139; и квантовая механика 247; и уравнение Прока 214, 215; импульсная функция 1323; плотность импульса поля 302; плотность тока и заряда 302; плотность функции Лагранжа 301; плотность энергии 302; принцип взаимности 790; функция Грина 138, 790—792, 1323.
Клистрон 1789; резонансные частоты 1792; эффективный импеданс 1792.
Ковариантная производная 55.
Ковариантный вектор 39, 52.
Ковариантный тензор 53, 61.
Когерентное рассеяние 1460.
Колесания, см. Векторное волновое уравнение, Векторное уравнение Гельмгольца, Волновое уравнение, Гельмгольца уравнение, Мембрана, Струна.
Коммутационные правила в квантовой механике 229; и наблюдаемые величины 82; и принцип соответствия 241.
Комплексно сопряженная величина 77, 332.
Комплексного переменного функции, см. Функции комплексного переменного.
Комплексное векторное пространство 84; см. также Абстрактное векторное пространство.
Комплексные числа 332; и векторы 332, 333; как операторы 77.
Конгруэнтные точки для джокопериодических функций 404.
Конденсатор с параллельными пластинами 1230; переменный к. 1232.
Кондуктанс, или активная проводимость 287.
Конические координаты 616.
Константы движения, классические и квантовые 241.
Контактные преобразования 275.
Контравариантный вектор 39, 52.
Контравариантный тензор 53, 61.
Контур в методе перевала 415; гладкий к. 343; деформация к. 346.
Контурные интегралы 342; и электростатика 335.
Конформное отображение 339, 419—428, 1732; и волны в трубах 1418; и разделение переменных 474; и уравнение Лапласа 1166; 1204; и электростатика 419; метод инверсии 427; многоугольника к. о. 420; формула Шварца—Кристоффеля 420, 1229.
Концентрации точка и геометрия систем координат 479; и конформное отображение 474.
Координат преобразование 16, 34.
Координатные системы разделяющие 470—495, 604—606; таблица 612—622.
Координатный оператор 227; и оператор импульса 229, 233; собственные векторы 227.
Координаты в связи с волновым уравнением параболические 1373; полярные 1348; прямоугольные 1343; сферические 1430; сфероидальные 1466, 1475; эллиптические 1382.
Координаты в связи с уравнением Лапласа биполярные 1199; декартовы 1167; круговые цилиндрические 1243; параболические 1197; полярные 1174; эллиптические 1185

- Коротковолновое приближение** для излучения 1353, 1436, 1437, 1445, 1497, 1498; для рассеяния 1090, 1100, 1103, 1357, 1450, 1511; для уравнения Шредингера 1090—1104; и геометрическая оптика 1104; и преобразование Маджи 1512; см. также Венцеля—Крамерса—Бриллюэна—Джеффриса метод.
- Короткодействующие силы** 1595.
- Косинус-преобразование Фурье** 431.
- Кососимметрический аффинор** 66.
- Коши задача** 471, 633; и гиперболические уравнения 637, 655; и параболические уравнения 657; и характеристики 634; и эллиптические уравнения 643, 654.
- Коши интегральная формула** 347, 348; и производные аналитической функции 355.
- Коши—Римана условия** 338, 1176; и конформное отображение 340; и особенности аналитических функций 339; и течение жидкости 153; и электростатика 334.
- Коши теорема** 344; и деформирование контура 346; и многосвязные области 345; и формула Коши 347; и электростатика 335; следствия 346.
- Краевые условия** 631—658; вариационные принципы 1110; Дирихле к. у., см. Дирихле краевые условия; для векторных полей 1703, 1709, 1751; для гиперболического уравнения 637, 639, 640, 655; для параболического уравнения 644; 645, 657; для поперечно-магнитных волн 1757, 1758; для поперечно-электрических волн 1755; для рассеяния 1064; для течения жидкости 154; для функций Грина 741, 751, 752, 772; для эллиптического уравнения 642, 643, 648, 650, 654; и константы разделения 481; и поверхностные заряды 738; и разделимость 1705; и собственные функции 652, 661, 662; и типы уравнений 631, 657, 658; конечности к. у. 663, 664; Коши к. у., см. Коши задача; Неймана к. у., см. Неймана краевые условия; неоднородные к. у. 634; непрерывности к. у. 663; однородные к. у. 633, 736 (и собственные функции 663); периодичности к. у. 663; сопряженные к. у. 808; типы к. у. 632 (и собственные функции 661).
- Краевых условий возмущения** 1041—1053, 1158; вариационный принцип 1128; вековой определитель 1042, 1046; пример 1048.
- Край экрана, диффракция Френеля** на к. э. 1362, 1382.
- Кривизна координатных линий** 35, 54.
- Криволинейные интегралы** 28; см. также Интегрирование в комплексной плоскости.
- Криволинейные координаты** 31—40; и поперечное поле 1706; и упругие волны 1773; и упругие напряжения 1774; таблица свойств 116; см. также Ортогональные координаты.
- Кристоффеля символы** 54.
- Критическая частота** 1413.
- Кroneкера символ** 33.
- Круг сходимости** 356.
- Круглая труба, излучение из конца** 1490; мембрана внутри к. т. 1422.
- Круговой цилиндр, волны внутри к. ц.** 1350; излучение к. ц. 1351.
- Круговые цилиндрические координаты и векторное волновое уравнение** 1734 (*аффинорная функция Грина* 1736; *векторные собственные функции* 1735; *поле петли тока* 1736; *упругие волны в брус* 1775); и волновое уравнение 1422 (*мембрана в трубе* 1422; *рассеяние на цилиндре со щелью* 1363, 1367; *упругая труба* 1328); и уравнение Лапласа 1243 (*и функции Бесселя* 1243; *поток жидкости в цилиндре* 1245; *поток тепла в цилиндре* 1243; *функция Грина* 1247); разделение переменных 487 (*таблица* 614).
- Крутильные колебания бруса вынужденные** 1777.
- Крутильный адмитанс** 1777.
- Кулоновские волновые функции** 518, 521, 592, 1615; асимптотическое поведение 593, 1615; в импульсном представлении 1628; второе решение 593; и вырожденная гипергеометрическая функция 592; и параболические координаты 1617; и энергетические уровни атома водорода 592, 1615; формула Резерфорда 1619; эффект Штарка 1626.
- Л**
- Лагерра полиномы** 728; и интегральные уравнения 867; и кулоновский потенциал 1615, 1618; и метод факторизации 733; и трехмерный осциллятор 1613; интегральное уравнение 835; присоединенные Л. п. 728; таблица 728.
- Лагранжа множители** 267.
- Лагранжа функции плотность** 265, 303; для векторных полей 303; для волнового уравнения 290, 294, 326; для струны 289, 325; для течения жидкости 293, 326; для упругой изотропной среды 306, 327; для упругой неізотропной среды 308, 327; для уравнения Дирака 318, 328; для уравнения диффузии 298, 326; для уравнения Клейна—Гордона 301, 326; для уравнения Лапласа 293; для уравнения Шредингера 299; для уравнения Эйлера 289, 324; для электромагнитного поля 311, 328; инвариантность 321; таблица 324—328.
- Лагранжа функция** 221, 269; для диссипативных систем 286; для заряженной частицы 281; для релятивистской частицы 284; и количество движения 270; и принцип Гамильтона 269; и сопряженные переменные 221, 222; и уравнения движения Лагранжа 269.
- Лагранжа—Эйлера уравнение** 265—268, 303, 324.
- Ламе коэффициенты** 34, 478; и точки концентрации 479.

- Лапе уравнение** 606; и уравнение Лапласа 1286; и эллипсоидальные гармоники 1287.
- Лапласа оператор** 17; в криволинейных координатах 116, 117, 320; для векторов 58, 116, 117.
- Лапласа преобразование** 443; и вынужденные колебания 1319; и диффузия 1553—1559; и интегральные представления 549, 568, 594; и интегральные уравнения 873, 921; и неортогональные собственные функции 1327; и уравнение Вольтерра 900; и функции распределения 1578; таблица 1536; таблица свойств 460; теорема о свертке 444, 460; формула обращения 443.
- Лапласа уравнение** 18, 1167—1311; в биполярных координатах 1199; в бисферических координатах 495; 1279; в вытянутых сфероидальных координатах 1266; в гиперболических координатах 1199; в двух измерениях 1166—1237; в декартовых координатах 660, 1166, 1240; в круговых цилиндрических координатах 1243; в параболических координатах 1197, 1277; в полярных координатах 1174; в сплюснутых сфероидальных координатах 1273; в сферических координатах, см. Сферические координаты; в тороидальных координатах 495, 1282; в трех измерениях 1237—1289; в эллипсоидальных координатах 1285; в эллиптических координатах 1185; вариационный принцип 1106; векторное Л. у., см. Векторное уравнение Лапласа; граничные условия Дирихле 654; граничные условия Неймана 654; и комплексные переменные 1204; 1237; и конформное отображение 1166, 1205, 1228—1237; и функции Бесселя 1243; плотность функции Лагранжа 293; принцип максимума 18, 654; разделимость в двух измерениях 474; разделимость в трех измерениях 491, 492; разностное уравнение 647; течение несжимаемой жидкости 153; функция Грина, см. Грина функция.
- Лежандра полиномы** 518, 695, 697; и ортогонализация 724; и полиномы Гегенбауера 726; интегральное уравнение 835; нормировка 698; полнота 538; производные 564; производящая функция 560, 695; разложение сфероидальных функций 539, 1467; рекуррентные формулы 696, 726; таблица значений 697; таблица формул 727, 1306—1308; формулы 696, 697.
- Лежандра уравнение** 557; определитель Вронского 562; решение второго рода 514, 560; решение первого рода 514, 559.
- Лежандра функции** 514; асимптотическое поведение 559; и гармоники 1248; и мультиполи 1258; и уравнение Лапласа 1247, 1248; интегральное представление 559, 560, 1257; как гипергеометрические функции 559; мнимого аргумента Л. ф. 1273, 1309; обобщенные Л. ф. 517; определитель Вронского 562; таблицы значений 1845—1847, 1852; таблицы формул 1306—1311; теорема сложения 1257.
- Лежандра функции второго рода** 514, 610; асимптотическое поведение 561; и гипергеометрическая функция 561; и полиномы Лежандра 699; интегральное представление 560; определитель Вронского 562; производящая функция 699; рекуррентные соотношения 563; таблица значений 1846—1848; таблица формул 1308, 1309.
- Лежандра функции присоединенные** 517, 564; для полиномов 564; и второе решение 565; и гипергеометрическая функция 564; граничные условия конечности 665; и полиномы Чебышева 566; и собственные значения 682; и сферические гармоники Гобсона 1268; и сферические гармоники Феррера 1268; и тессеральные гармоники 517; и уравнение Лапласа 1247, 1248, 1267, 1273, 1280; и функции Гегенбауера 726; нормировка 727; полуделого порядка Л. ф. п. 1283; производные 564; рекуррентные формулы 684, 726; таблица значений 727; таблица формул 1306—1311; теорема сложения 727; формула связи 565; функция плотности 726.
- Линейные дифференциальные уравнения** 468.
- Линейные источники**, поля, создаваемые ими 1218; двумерная система л. и. 1224; л. и. на окружности 1220; одномерная система л. и. 1222.
- Линии ветвления**, см. Ветвления линий.
- Линии передачи** 211; характеристический импеданс 214.
- Линии тока** 22.
- Лиувилля теорема** 360.
- Лиувилля уравнение**, см. Штурма—Лиувилля уравнение.
- Лорана ряд** 357; и изолированные особые точки 359; и мультиполи 359.
- Лоренца преобразование** 96—101; для магнитных полей 204; для спиноров 103; для электрических полей 204; и движение релятивистской частицы 284; и калибровочное преобразование 204; и уравнение Дирака 252; и уравнение Клейна—Гордона 247; и 4-вектор тока 202; и четырехмерный векторный потенциал 202; и электромагнитное поле 202.
- Лоренц-инвариантность** 97; в квантовой механике 246, 247; для электромагнитного поля 202; и уравнение Клейна—Гордона 247; оператора Даламбера Л.-и. 202; плотности функции Лагранжа Л.-и. 321.

М

Магнитная индукция 197.

Магнитная проницаемость 197.

Магнитное поле 197; векторный потенциал 198; вращающегося заряженного шара м. п. 1741; и векторное уравнение Лапласа 1730, 1731; и токи 197, 198, 1736, 1741; магнитная индукция и проницаемость 197; преобразование Лоренца 204.

- Магнитные диполи индуцированные 1813; излучение м. д. 1797, 1807.
Магнитные мультиполи, излучение 1799, 1807, 1808.
Магнитные силовые линии 1172.
Магнитный потенциал 1172, 1188, 1189, 1193, 1195; вне двух цилиндров 1203; и конформное отображение 1207; м. п. линейных источников 1218, 1220, 1224; м. п. провода в прорези 1214; м. п. токов 1249.
Магнитостатика, см. Магнитное поле, Магнитный потенциал.
Маджи преобразование 1512.
Максвелла уравнения 199.
Малый объект внутри проводящей сферы, рассеяние на нем 1814.
Масса эффективная для диафрагмы в круглой трубе 1276; для диафрагмы в трубе прямоугольного сечения 1417.
Массы поток 168.
Матрицы и операторы 716; диагональные м. 722.
Матричные элементы 1599.
Матричных сумм правило 1686.
Матье функции 523—535, 593—601, 1383—1395; и волновое уравнение 1383—1404; и непрерывные дроби 525, 532; и определитель Хилла 527; и ряды Фурье 524; и функции Эрмита 1391; и эллиптические интегралы 1389; и эллиптические функции 1392; интегральное уравнение 593, 594; нечетные М. ф. 530—532; нормировка 531; определитель Вронского 534; периодические М. ф. 530, 538, 539; приближения 1386—1393 (вариационно-итерационное п. 1033; *WKBJ* п. 1388; итерационно-пертурбационное п. 1013; Финберга п. 1021; Фредгольма п. 1028); радиальные второго рода М. ф. 533, 595, 599, 1385, 1386 (асимптотическое поведение 1386; значения и производные 599, 600; определитель Вронского 600; приближения 1388; разложение в произведение 599; разложение по функциям Неймана 595; таблица формул 1526—1531); радиальные первого рода М. ф. 595, 599, 1385 (асимптотическое поведение 1385; значения и производные 599, 600; и волновое уравнение 1385; приближения 1388; разложение в произведение 599; разложение по функциям Бесселя 595; таблица формул 1526—1531); радиальные третьего рода М. ф. 601; разложение в произведение 598; рекурсивные формулы 524; собственные значения 524; таблица значений 1859—1862; таблица формул 628, 1526—1531; четные М. ф. 530, 531.
Маха линии 163; и ударные волны 165.
Маха угол 163, 166.
Маха число 162.
Медленные частицы, рассеяние 1636.
Меллина преобразование 444; и интегральные представления 549; и интегральные уравнения 873, 905, 921; и преобразование Фурье 445; таблица 460; теорема о свертке 446, 460.
Мембрана в круглой трубе, прохождение звуковых волн 1422.
Мембраны колебания, вариационно-итерационный метод 1143; вариационный принцип 325, 1112; нестационарные м. к. 788; прямоугольной м. к. 701; треугольной м. к. 701; эллиптической м. к. 703.
Мероморфные функции 361, 456; 457; разложение на элементарные дроби 362.
Механика, см. Квантовая механика, Классическая механика.
Механический импеданс 129.
Милна уравнение 179, 183, 913, 1571, 1572; вариационный метод 1581; метод Винера—Хопфа 913—917, 1578—1581.
Минимакс 415.
Минимизированных итераций метод 1149; трехчленная рекуррентная формула 1150.
Мировая линия 96.
Многозначные функции 376—385; аналитическое продолжение 370; линии ветвления 377; точки ветвления 370, 377.
Многосвязные области 343; теорема Коши 345.
Многоугольника отображение 420; ограниченного дугами окружностей м. о. 427; см. также Шварца—Кристоффеля формула.
Модуль всестороннего сжатия 76.
Модуль сжатия 160.
Модуль эллиптической функции 409.
Модуляционный множитель для гипергеометрического уравнения 551; для интегрального представления 547; для преобразования Эйлера 551; при разделении переменных 492.
Момент инерции 62.
Момент количества движения 281; в квантовой механике 1612; для нескольких частиц 1668; оператор м. к. д. 91; плотность м. к. д. 305, 306, 325; плотность м. к. д. для электромагнитного поля 314; полный м. к. д. для уравнения Дирака 253.
Моментов проблема 876.
Моменты функции распределения 1569.
Мощность источника 27.
Мультиполи 1258—1264; излучение м. 1798, 1799, 1805—1808.

Н

- Набла-оператор 18, 40—53; таблица 115, 116.
 Наблюдаемые величины в квантовой механике 83.
 Навье—Стокса уравнение 158.
 Нагревание излучением 1546.
 Направляющие косинусы 32.
 Напряжений функция 1726; уравнения совместности 1726.
 Напряжений-энергии тензор 100, 291, 304, 324; для векторного поля 304; для звуковых волн 297, 325; для струны 291; для упругой среды 306, 309; для уравнения Дирака 319; для уравнения Клейна—Гордона 302; для уравнения Шредингера 300; и волновой импульс 292; и интенсивность поля 305; и плотность импульса поля 305; и теоремы сохранения 291; симметризация 321.
 Напряжения 74; в жидкостях 155; в колеблющемся шаре 1745, 1747; волновые н. 292; выражения для н. в круговых цилиндрических координатах 1735; выражения для н. в сферических координатах 1742, 1743; выражения для н. в цилиндрических координатах 1744; главные н. 75; для упругих волн 147, 1750; и бигармоническое уравнение 1725, 1726; н. на поверхности цилиндра 1775; н. на поверхности шара 1745, 1747; 1801; растягивающие н. 75; связь с деформацией 75; срезающие н. 75.
 Начальная задача для скалярного волнового уравнения 781—784 (*двумерная н. з.* 782; *решение Даламбера* 781; *решение Пуассона* 784); для телеграфного уравнения 803, 804.
 Не положительно определенные операторы 840, 847—852; вариационно-итерационный метод 1144—1149.
 Независимые решения дифференциальных уравнений 496.
 Неизотропная упругая среда 77, 308, 327.
 Неймана крайние условия 471, 657, 809; вариационный принцип 1110, 1111, 1128; для гиперболического уравнения 638—640; для параболического уравнения 657; для эллиптического уравнения 650, 654; и граничные возмущения 1041, 1060; метод изображений 754; функция Грина 748, 749.
 Неймана множитель 691.
 Неймана полиномы 864.
 Неймана ряды 864.
 Неймана функции 585—591; асимптотическая формула 586 (*для Н. ф. высших порядков* 590); и вырожденная гипергеометрическая функция 585; и радиальная функция Матвея второго рода 595, 1385; 1386; и функции Ганкеля 585; разложение в ряд 587, 1303; сферические Н. ф. 582, 1433 (*асимптотическое поведение* 1433; и *радиальные сферические функции* 1470; *ряды* 1433; *таблица значений* 1851; *таблица свойств* 1531—1534); таблица значений 1849; таблица свойств 1302—1306, 1522—1524; см. также Бесселя функции, Ганкеля функции.
 Нейтронов диффузия 169, 1552—1560, 1568—1590; замедление н. 1552, 1556; запаздывание н. 1552; постоянная диффузии 170; см. также Возрастная теория, Милна уравнение.
 Некогерентное излучение 1460, 1461.
 Неоднородное векторное уравнение Гельмгольца 1711.
 Неоднородные дифференциальные уравнения с частными производными 736; решение 747—749, 774, 795.
 Неоднородные интегральные уравнения Фредгольма 887, 920; и преобразование Лапласа 900; и преобразование Меллина 905; и преобразование Фурье 892—894; метод Винера—Хопфа 917, 918.
 Неоднородные крайние условия 633, 634.
 Неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения 469; вариационный принцип 1108, 1109; решение 500.
 Неопределенности соотношение в квантовой теории 83, 90, 220; для гармонического осциллятора 238; для сопряженных переменных 222, 223; для энергии и времени 238, 239.
 Неопределенные ядра 836, 847.
 Неортогональные собственные функции 1325, 1343; метод возмущений 1036—1040.
 Непрерывное распределение собственных значений 780—711; для уравнения Шредингера 712—714.
 Непрерывности уравнение 101; для потока жидкости 151; для тензора напряжений-энергии 295, 304; для уравнения Шредингера 1591; для функции распределения 172; для частиц 1568, 1569; и диффузия 169.
 Непрерывные дроби 525.
 Неравенства вариационно-итерационного метода 1134, 1135; Бесселя н. 85; Шварца н. 85.
 Несжимаемой вязкой жидкости течение 158.
 Несжимаемой жидкости течение 150, 151; источники и стоки 151, 159; уравнение Бернулли 158; уравнение Лапласа 153.
 Несущая кривая 632.
 Неупругое рассеяние 1685.
 Неустойчивые малые колебания мембраны 788.
 Неустойчивый процесс нагревания пластины 1543, 1547.

Неэрмитовы операторы 818.

Нормальная форма гиперболического уравнения 636; н. ф. параболического уравнения 644; н. ф. эллиптического уравнения 642.

Нормальные формы колебаний идеализированной весомой струны 133.

Нормальные координаты 80.

Нормальный акустической импеданс 296.

Нормировка 677; вычисление нормирующего множителя 1055; н. полиномов Гегенбауера 727; н. полиномов Лагерра 728; н. полиномов Лежандра 698; н. полиномов Эрмита 730; н. при непрерывном спектре собственных значений 231, 709; н. собственных векторов 228; н. собственных функций 677, 709; н. функций Матье 531, 1384 (таблица 1861, 1862).

Нули эллиптических функций 405; н. функций Бесселя 1523, 1524, 1534.

О

Область многосвязная 343; о. односвязная 343.

Облицованная труба, распространение волн в ней 1484.

Обменная плотность зарядов 1685.

Обменное рассеяние 1686.

Обратная функция 341.

Обратно пропорциональные кубу расстояния силы в квантовой механике 1616.

Обратный оператор, единственность 1108.

Обращение рядов 389.

Обращения формула Лапласа 443; о. ф. Фурье 429.

Объема элемент 37.

Объемного расширения коэффициент 72, 73.

Объемные возмущения 1005; см. также Вариационные методы, Пертурбационные методы.

Обыкновенная точка дифференциального уравнения 501.

Обыкновенные дифференциальные уравнения 468—630; Бесселя о. д. у. 518, 521, 579, 580; в случае кулоновского поля 518, 521, 592, 1614; вырожденной гипергеометрической функции о. д. у. 519, 567; Гегенбауера о. д. у. 516, 563, 726; гипергеометрическое о. д. у. 511, 552, 626; и интегральные уравнения 874; интегральные представления решений 542—604; классификация 505; Лежандра о. д. у. 513, 557; линейные о. д. у. 468; Матье о. д. у. 523; независимые решения 496; неоднородные о. д. у. 500; обыкновенные точки 501; однородные о. д. у. 468; определитель Вронского 496; определяющее уравнение 503; особые точки 489, 503; Папперица о. д. у. 509; рекурсивные формулы 509, 535; сопряженные о. д. у. 498, 806; стандартные формы 505, 622—629; сферических функций Бесселя о. д. у. 582, 1444; таблица 622—629; функциональные ряды 537—542.

Однозначные функции 370.

Однородное поле, вытянутый сфероид в о. п. 1267; два цилиндра в о. п. 1201; две сферы в о. п. 1281; круговой цилиндр в о. п. 1175; сплюснутый сфероид в о. п. 1244; сфера в о. п. 1249, 1250; эллиптический цилиндр в о. п. 1189.

Однородные дифференциальные уравнения 468.

Однородные интегральные уравнения 836, 838, 879, 887; Вольтерра о. и. у. 851; и преобразование Меллина 905; и преобразование Фурье 894; 906; Фредгольма о. и. у. 836.

Однородные краевые условия 633; и собственные функции 663.

Операторное уравнение для собственных значений 82, 667, 718—722, 1022.

Операторные вариационные принципы 1106—1110.

Операторы 80—83, 85—92, 714—722, 812—819; антиэрмитовы о. 842, 849; аффинорные о. 61; в квантовой механике 82—84, 85—92; вращения о. 93 (в кватернионной форме 79; в спинорной форме 106); Грина о. 815, 817, 819, 843; для уравнения Дирака 249, 250; единичного сдвига о. 131; зависимость о. от времени 88, 240; и измерение в квантовой механике 223, 224; и матрицы 716; импульса о. 83, 224, 231, 1590, 1592; интегральные о. 804; интегрирования о. 714; комплексно сопряженные о. 814; коммутирующие о. 83; координатные о. 83, 227; момента количества движения о. 91; не положительно определенные о. 1144; неэрмитовы о. 818; обратный о. 1108; положения о. 83; положительно определенные о. 719; правила перестановочности 229; преобразования о. 88; проекционные о. 113, 1022; самосопряженные о. 805, 1110; след о. 844, 847, 1026, 1139; сопряженные о. 499, 548, 805, 809, 811, 814; спиновые о. 91, 106; среднее значение о. 224; унитарные о. 87; функции от о. 225, 719; эрмитовы о. 86, 717, 814; эрмитово сопряженные о. 717, 814, 1107.

Опережающий потенциал 201, 808.

Определенное ядро 840, 841, 919; преобразование к о. я. 841.

Определяющее уравнение для дифференциального уравнения 503.

Ортогонализация 858—864; метод Шмидта 725, 858—860.

Ортогональность собственных функций 668, 675, 702; случай непрерывного спектра 709.

Ортогональные координаты 32—38; выражение для градиента 41; выражение для дивергенции 45; выражение для производной по направлению 42; выражение для элемента

- объема 37; и тензоры 52—60; коэффициенты Ламе 34; таблица разделяющих координат 612—622; таблица свойств 116, 117.
- Ортогональные полиномы** 725—731; Гегенбауера о.п. 726; и факторизация 678, 731; Лагерра о.п., см. Лагерра полиномы; Лежандра о.п. 1306, 1311; ортогонализация 725, 858—864; производящие функции 695; тессеральные о.п. 517; Чебышева о.п. 724, 726; Эрмита о.п. 729; Якоби о.п., см. Якоби полиномы.
- Ортонормированные собственные функции** 677.
- Основной параллелограмм для двоякопериодической функции** 404.
- Особенности полей** 30.
- Особые точки дифференциального уравнения** 489; иррегулярные о.т. 503; определяющее уравнение 503; регулярные о.т. 503; слияние о.т. 489; случай двух регулярных о.т. 506, 623; случай двух регулярных о.т. и одной иррегулярной 523; случай одной регулярной о.т. 506, 622; случай одной регулярной о.т. и одной иррегулярной 518—522, 626 (*вырожденное гипергеометрическое уравнение* 519; *кулоновская волновая функция* 519, 521; *уравнение Бесселя* 521); случай трех регулярных о.т. 508—518, 623 (*гипергеометрическая функция* 511; *стандартная форма* 509; *уравнение Папперица* 509); таблица формул 622—629.
- Особые точки функций комплексного переменного** 339, 456; и классификация функций 360; и конформное отображение 341; и обратная функция 342; и точки ветвления 378; изолированные о.т. 359; полюсы 359; существенно особые точки 359, 456.
- Осциллятор**, см. Гармонический осциллятор.
- Осцилляционные теоремы для задачи Штурма—Лиувилля** 670, 673.
- Отверстие в плоскости, диффракция на нем** 1482; течение жидкости через о. 1275, 1276.
- Отклоняющий адитанс границы** 1345.
- Относительность**, см. Лоренца преобразование.
- Отражение, вариационный принцип** 1125, 1479; диффузное о. 1573; для уравнения Шредингера 1071, 1074, 1092, 1606, 1611; звуковых волн в трубе о. 1414 (*случай круглой трубы с диафрагмой* 1477; *случай облицованной трубы* 1484; *случай о. от конца трубы* 1490, 1491; *случай прямоугольной трубы с диафрагмой* 1414; *случай трубы с коленом* 1418); упругих волн о. 1750, 1754; электромагнитных волн о. от конца волновода 1766; электромагнитных волн о. от плоскости 1749, 1750; электромагнитных волн о. от полюсы 1400; электромагнитных волн о. от штыря в волноводе 1772.
- Отражения коэффициент** 129, 1066, 1071, 1454; WKBJ-приближение 1099; приближение Борна 1079; ряд Фредгольма 1080.

II

- Падения плоскость** 1749.
- Папперица уравнение** 509.
- Параболические координаты** 476, 488, 615, 617; и волновое уравнение 1373—1382 (*диффракция на крае экрана* 1381; *и функции Вебера* 1378; *разделение переменных* 476, 477, 488; *разложение плоской волны* 1381; *собственные функции для внутренних задач* 1375; *функция Грина* 1380); и двумерное уравнение Лапласа 1197 (*функция Грина* 1197, 1198); и кулоновский потенциал 1618; и трехмерное уравнение Лапласа 1277 (*интегральное представление решений* 1278; *и функции Бесселя мнимого аргумента* 1277; *функция Грина* 1279).
- Параболические уравнения** 170, 644; краевые условия 657, 658; нормальная форма 644; разностное уравнение 656, 722.
- Параболические цилиндрические координаты** 521; см. также Параболические координаты.
- Параболические координаты**, разделение переменных 488, 620, 621.
- Парсевала формула** 432.
- Паули спиновый оператор** 106.
- Перевала метод** 414, 453; для гамма-функции 418; для функций Бесселя 587; и коротковолновое приближение 1501.
- Передачи импульса эффективное сечение** 184, 189.
- Переменные квантовые независимые** 225; правила перестановочности 229, 230; сопряженные к.п. 221; среднее значение 224, 230.
- Переменные сопряженные** 275.
- Перенос, вызванный силовым полем** 190.
- Переноса уравнение** 183, 829, 1562, 1563, 1585, 1587; см. также Диффузия, Распределения функции.
- Переносный импеданс** 273.
- Переходные процессы** 1314—1323; для звуковых волн в трубах 1412, 1413; для колеблющейся струны 130; и интеграл Фурье 130, 1314.
- Периодические краевые условия и собственные функции** 663.
- Периодические функции** 402—410; таблица 462—466.
- Пертурбационные методы в абстрактном векторном пространстве** 1022; вариационно-итерационный м. 1029—1035 (*и уравнение Матве* 1033); вековой определитель 1016; WKBJ-метод, см. Венцеля—Крамерса—Бриллюэна—Джеффриса метод; для неортогональных функций 1036; для рассеяния 1063—1104 (*WKBJ-метод* 1090—1104; *длинноволновое приближение* 1083—1089; *коротковолновое приближение* 1090—1104,

- 1498—1504, 1511—1514; метод Фредгольма 1077; приближение Кирхгофа 1073; приближение Борна 1072—1075, 1637; примеры 1074, 1079, 1081, 1639); итерационный м. 1006—1015 (для вырожденных систем 1623; и гармонический осциллятор 1598; и уравнение Маттье 1013; матричные элементы 1699; модифицированный и.м. 1035, 1036; сходимость 1011, 1023, 1029); Финберга м. 1015—1022 (и уравнение Маттье 1020; сходимость 1019); Фредгольма м. 1022—1029 (и уравнение Маттье 1028; модифицированный Ф.м. 1035, 1036); таблица формул 1155—1157.
- Петля тока, излучение 1809.
- Планка постоянная 217; и соотношение неопределенности 220.
- Плоские волны 143; в параболических координатах 1381; в полярных координатах 767, 1354; в сферических координатах 1434; в сфероидальных координатах 1471; в упругой среде 307, 1750 (отражение от плоскости 4, 1754; тензор напряжений-энергии 308); в эллиптических координатах 1395; для уравнения Дирака 254; для уравнения Шредингера для двух частиц 1678; звуковые п.в. 297 (тензор напряжений-энергии 297); и интегральные представления 767; и функции Грина 767; электромагнитные п.в. 317, 1748 (в сферических координатах 1796; импеданс 318; отражение от плоскости 1749; тензор напряжений-энергии 318).
- Плоскость падения 1749.
- Плотности функции для полиномов Гегенбауера 726; для полиномов Лагерра 728; для полиномов Чебышева 726; для полиномов Эрмита 729; для присоединенных функций Лежандра 726; для собственных функций 677, 725.
- Плотность заряда в квантовой механике 246, 326, 1591; для уравнения Дирака 251; для уравнения Клейна—Гордона 302; на поверхности 211; обменная п. з. 1685.
- Плотность импульса поля 305; для жидкости 297, 326; для струны 290, 325; для упругой среды 307, 308, 327; для уравнения Дирака 319, 328; для уравнения диффузии 326; для уравнения Клейна—Гордона 302, 327; для уравнения Шредингера 301, 326; для электромагнитного поля 314, 328; таблицы 325—328.
- Плотность скорости для уравнения Дирака 251.
- Плотность собственных значений 705—707; для уравнения Шредингера 711, 712; при непрерывном распределении 709.
- Плотность тока 197; для уравнения Дирака 251, 319; для уравнения Клейна—Гордона 302; для уравнения Шредингера 245, 326, 1591; и магнитное поле 197; как 4-вектор 202; продольная составляющая п. т. 205.
- Плотность функции Гамильтона 290; для изотропной упругой среды 327; для неизотропной упругой среды 309, 327; для сжимаемой жидкости 297, 326; для струны 290, 325; для уравнения Клейна—Гордона 302, 327; для уравнения Прока 215; для электромагнитного поля 312, 328; таблицы 324—328.
- Плотность функции Лагранжа, см. Лагранжа функции плотность.
- Плотность частиц 1568.
- Плотность энергии 290; для векторного поля 304; для звука 297; для струны 125, 126, 290; для упругой среды 148, 306, 309; для уравнения Дирака 319; для уравнения диффузии 326; для уравнения Клейна—Гордона 302; для уравнения Шредингера 300, 326; для электромагнитного поля 311, 312.
- Поверхности римановы 379; п. уровня 16; эквипотенциальные п. 25.
- Поверхностная плотность заряда 211.
- Поверхностное нагревание пластины 1543.
- Поверхностные возмущения 1005, 1040—1063; см. также Возмущения граничных условий.
- Поверхностные волны для уравнения Шредингера системы двух частиц 1660, 1673, 1674.
- Поверхностные заряды и граничные условия 738, 748, 749.
- Поверхностные интегралы 26.
- Поворот элементарный 42.
- Поглощения эффективная ширина 1793; п. эффективное сечение 177, 1454, 1813.
- Подъемная сила 1215—1218; и аналитические функции 1215; и циркуляция вокруг кругового цилиндра 1215; при обтекании полосы 1217; при обтекании эллиптического цилиндра 1216.
- Пойнтинга вектор 209, 314.
- Поле 13—15; аффинорное п. 69; безвихревое п. 29; вариационные принципы 288—319; векторное п. 19—31, 303—319, 1705—1827; завихренность п. 49; магнитное п. 197, 1730, 1736, 1741; общие свойства 303—306; особенности 30; скалярное п. 15—19, 288—303; электромагнитное п., см. Электромагнитное поле; электростатическое п. 195.
- Полигамма-функции 399, 400.
- Полная проводимость, или адмитанс 287; см. также Адмитанс.
- Полное эффективное сечение 177, 1454; и рассеяние вперед 1069, 1506.
- Полнота 659, 660, 675; в случае нескольких измерений 701; вариационный принцип 686; п. системы полиномов Лежандра 537, 538; п. системы собственных векторов 666, 667, 721; п. системы собственных функций 659, 660, 675; п. системы тригонометрических функций 537; п. системы функций Бесселя 538.
- Положения оператор 83.
- Положительно определенное ядро 836, 840, 919.
- Положительно определенный оператор 719.

- Полоса внутри параллелепипеда, искажение стоячих волн 1407; излучение колеблющейся п. 1396; излучение тока, текущего по п. 1399; рассеяние звука на п. 1401, 1509.
- Полудиagonalного типа ядра 882, 883; и производящие функции 883.
- Полуопределенные ядра 840, 847.
- Полуцилиндрические функции 1699.
- Полюсы 359, 456; п. гамма-функции 396; п. эллиптической функции 405, 406.
- Полярные координаты 477, 614; и векторное уравнение Лапласа 1733 (*статика упругого тела* 1734; *течение вязкой жидкости в трубах* 1733); и волновое уравнение 1348—1373 (*излучение кругового цилиндра* 1351; *колебания круглой мембраны* 1350; *рассеяние на крае экрана* 1359; *рассеяние на цилиндре* 1354; *рассеяние на цилиндре со щелью* 1363; *функция Грина* 1349); и уравнение Лапласа 1174—1185 (*внутреннее нагревание цилиндра* 1181; *поле вблизи цилиндра со щелью* 1182; *поле между концентрическими цилиндрами* 1174; *функция Грина* 1179; *цилиндры в однородном поле* 1175); разделимость 477; разложение плоской волны 767, 1354.
- Полярные ядра 836, 840, 842, 919.
- Поперечная аффинорная функция Грина 1719, 1803; разложение 1721.
- Поперечная компонента векторного поля 1704, 1705; в криволинейных координатах 1706.
- Поперечно-магнитные волны в волноводах 1758; затухание 1766; эффективный импеданс 1757, 1767, 1768.
- Поперечно-электрические волны в волноводах 1755; добротность 1783; затухание 1765; рассеяние 1756; эффективный импеданс 1757, 1767, 1768.
- Поперечные собственные функции векторные в круговых цилиндрических координатах 1735; в прямоугольных координатах 1715; в сферических координатах 1739, 1795, 1796.
- Поперечные упругие волны 141, 145, 1750; в криволинейных координатах 1773, 1774, импеданс среды 149; напряжения 147, 1750—1751; отражение п.у.в. 1750, 1751.
- Поперечные электромагнитные волны 200, 205, 1749, 1755.
- Потенциал векторный, см. Векторный потенциал; запаздывающий п. 201, 778, 808; кинетический п. 269; опережающий п. 201, 808; скалярный п., см. Скалярный потенциал; скоростей п. 150, 293; электростатический п., см. Электростатика.
- Потенциальная функция 25.
- Потенциальная энергия жидкости 293; п. э. струны 126.
- Потенциальный барьер, см. Проникновение через потенциальный барьер.
- Поток вектора 27, 44.
- Поток массы 168.
- Поток тепла 168, 169; в D-образном цилиндре 1226; в круговом цилиндре 1181; в прямоугольной призме 1169, 1240, 1241; в шаре 1560; в эллиптическом цилиндре 1194; и аналитические функции 1207, 1213; неустановившийся п.т. 1543, 1547; при распространении звука 257; постоянная диффузии 170.
- Поток частиц 1568.
- Поток энергии, см. Интенсивность поля.
- Правая система координат 20, 33.
- Преломления показатель 1752; и закон Снеллиуса 1753; и рассеяние на сфере 1452.
- Преобразования и сопряженные переменные 274; канонические п. 274; конформные п., см. Конформное отображение; операторов п. 88; прикосновения п. 275; унитарные п. 89.
- Преобразования функции в квантовой теории 228—230; для колеблющейся струны 134; уравнения 230.
- Присоединенная билинейная форма 499, 548, 604, 805, 809; для вырожденного гипергеометрического уравнения 569; для преобразования Эйлера 551; для уравнения Лапласа 557.
- Присоединенные функции Лежандра, см. Лежандра функции.
- Причинность 773, 808; и взаимность 793.
- Пробные функции, или функции сравнения 1105, 1114.
- Проводимости матричные элементы 1346.
- Проводимость (активная), или кондуктанс 287.
- Проводимость стенок волновода 1762; и добротность 1782; и затухание 1765; и рассеяние 1793, 1812.
- Проводники 202; граничные условия на поверхности п. 210, 1753; релаксационные колебания тока внутри п. 202.
- Продольная компонента векторного поля 1704, 1705.
- Продольные аффинорные функции Грина 1719; разложение 1721; уравнение 1722.
- Продольные векторные собственные функции в круговых цилиндрических координатах 1735; в прямоугольных координатах 1715; в сферических координатах 1739, 1745, 1795.
- Продольные упругие волны 141, 1750; в криволинейных координатах 1773; в шаре 1802; импеданс 149; напряжения и деформации 147, 1750; отражение 1750, 1751.
- Продольные электромагнитные волны 200, 205.
- Продольный ток 205.
- Проекционный оператор 113, 1022.

- Произведение векторов 20, 21.
 Производные аналитической функции 355; п. по направлению 41, 57.
 Производящие функции 695—699; 864; и интегральные уравнения 864—869, 883; п.ф. полиномов Гегенбауера 564, 720; п.ф. полиномов Лагерра 728; п.ф. полиномов Лежандра 560, 695—699; п.ф. полиномов Эрмита 729; п.ф., связывающие гиперболические и тригонометрические функции 1302; п.ф. функций Бесселя 581; п.ф. функций Лежандра второго рода 699.
 Прока уравнение 215, 261, 1818.
 Проникновение через потенциальный барьер 1075, 1610; WKBJ-метод 1097; приближение Борна 1079; ряд Фредгольма 1080.
 Просачивание жидкости через пористое твердое тело 169.
 Пространство импульсов в квантовой механике 231, 1076, 1590, 1601, 1628; и гармонический осциллятор 1601, 1628, 1629; и интегральная теорема Фурье 232; и координатное пространство 233; и кулоновская волновая функция 1629; и уравнение Шредингера 234, 235; функция преобразования 231.
 Прямоугольного сечения волноводы 1755; функция Грина 1758.
 Прямоугольного сечения трубы, звуковые волны в пих 1411, 1412; случай диафрагмы в трубе 1414; случай изогнутой трубы 1418; эффективный импеданс 1417.
 Прямоугольные координаты 476, 487, 614; и волновое уравнение 1341, 1406 (векторные волны 1714, 1758, 1759, 1781; искажение стоячих волн полосой 1407; разделение переменных 476, 487; функция Грина для внутренних задач 1341, 1407); см. также Декартовы координаты.
 Псевдовектор 204.
 Псевдопериодический ряд 407.
 Псевдопотенциальная функция 25.
 Пуассона интегральная формула 353, 755.
 Пуассона коэффициент 76, 1776.
 Пуассона решение начальной задачи 784.
 Пуассона скобки 221, 278; и квантовая механика 222.
 Пуассона уравнение 19, 47, 1167—1311; в электростатике 196; векторное П.у. 1730; граничные условия 654; для струны 121; разностное уравнение 648; функция Грина 741.
 Пуассона формула суммирования 442, 459.
 Пузырьки воздуха в воде, рассеяние звука на них 1462.
 Пучок частиц, диффузия 1549.
 Пьезоэлектричество 257, 323.

Р

- Радиальное уравнение Шредингера 1612; вариационно-итерационный метод 1647; вариационный метод 1114, 1115, 1644 (для фазовых углов 1120); WKBJ-метод 1099; длинноволновое приближение 1086—1090; для кулоновского потенциала 1614; для силы, обратно пропорциональной кубу расстояния 1616; для трехмерного осциллятора 1613, 1614; для экспоненциального потенциала 1620; и рассеяние 1066, 1072, 1630; интегральное уравнение 1071; разрешимые случаи 1620.
 Радиус сходимости ряда Тейлора 356; аналитическое продолжение 357.
 Разделения константы 473; и граничные условия 481; и разделимость 489, 703.
 Разделимость векторного уравнения Гельмгольца 1706; и граничные условия 470, 471; и софокусные поверхности второго порядка 484; констант разделения р. 489, 703; константы разделения 473, 703; определитель Штеккеля 484; таблица формул 612—622; трехмерного уравнения Лапласа р. 491 (координаты вращения 605; софокусные циклиды 492; таблица 612); уравнений Гельмгольца и Шредингера р. 470—495; условие Робертсона 484.
 Разделяющие координаты 470—495, 604—606; таблица 612—622.
 Разложения ядер интегральных уравнений 879; второго класса 881; конечные р. 885; первого класса 880; третьего класса 885.
 Разностные уравнения 645—658; для гиперболического уравнения 654; для параболического уравнения 656, 722, 723; для уравнения Лапласа 647; для уравнения Пуассона 648; и рекурсивные формулы 510; функция Грина, см. Грина функция.
 Рамзауэра эффект 1633.
 Распределения функции 170—195, 1561—1590; в случае потери энергии при столкновениях 191, 1588; вариационный принцип 1581; возрастная теория 192, 1587; граничные условия 181; диффузия света 177—184, 1571—1581 (приближение 180; уравнение Милна 179, 183, 1578—1581); диффузная эмиссия и отражение 1572, 1573; для рассеяния вперед 1565, 1692, 1693; и внешние силы 190; и кинетическая энергия 172; и уравнение состояния 172; моменты р.ф. 1569; неизотропное рассеяние 184; средняя длина свободного пробега 174; стационарные р.ф. 1568; уравнение для р.ф. 1562, 1563, 1571; уравнение непрерывности 172.
 Распространение тепла 170, 1543—1549, 1560, 1561; см. также Поток тепла.
 Рассеяние в центральном поле 1630 (вариационно-итерационный метод 1652; вариационный метод 1120, 1126, 1153, 1650, 1652; WKBJ-метод 1100; длинноволновое приближе-

- ние 1086, 1635; приближение Борна 1072, 1637; резонансные эффекты 1633; случай экранированного атома 1631; фазовые углы 1067, 1068, 1072, 1631; экспоненциальный потенциал 1636, 1644, 1651; эффект Рамзауэра 1633; вариационный принцип 1126, 1130, 1153, 1161, 1504, 1650, 1652; WKBJ-метод 1100; граничные условия 1064; длинноволновое приближение 1083—1090, 1636; для уравнения Шредингера 1630 (вариационно-итерационный метод 1652; вариационный метод 1120, 1126, 1130, 1153, 1161, 1650, 1652; задача двух частиц 1683; обменное р. 1686; структурный фактор 1640, 1686; упругое и неупругое р. 1685; формула Резерфорда 1619, 1640); интегральное уравнение, см. Интегральные уравнения; коротковолновое приближение 1100—1103, 1357, 1450, 1511; медленных частиц р. 1636; методы теории возмущений 1063—1104; неизотропное р. 184; приближение Борна 1072, 1075, 1642; приближение Кирхгофа 1073; р. вперед и полное эффективное сечение 1069, 1506; р. вперед, функция распределения 1565, 1566, 1692—1694; р. звука 1354 (вариационный принцип 1504; когерентное р. з. 1460; на диске 1484; на параболических границах 1377; на полосе 1401, 1509; на пузырьках воздуха в воде 1462; на резонаторе Гельмгольца 1455; на совокупности рассеивателей 1459; на сфере 1449, 1451, 1452, 1454, 1511; на цилиндре 1354, 1356, 1357; на цилиндре со щелью 1363; некогерентное р. з. 1460, 1461); р. на экранированном атоме, см. Атом; рэлеевское р. 1811; ряд Фредгольма 1077; электромагнитных волн р. 1792 (вариационный принцип 1823; на малом объекте 1814; на сфере 1810; на цилиндре 1792).
- Рассеяния амплитуда 1064, 1069, 1070, 1159, 1160; вариационный принцип 1127, 1130, 1161, 1650, 1652; интегральное уравнение 1076.
- Рассеяния аффинор 1823.
- Рассеяния длина 1085, 1087.
- Рассеяния эффективное сечение 174, 1065, 1505, 1811; дифференциальное э.с. 1065; и рассеяние вперед 1069, 1507.
- Растягивающие напряжения 75.
- Растяжение простое 73; р. с сохранением объема 73.
- Расходящиеся волны 144, 1064.
- Расширения коэффициент для аффинора 61, 65.
- Реактанс, или реактивное сопротивление 287; см. также Реактивное сопротивление.
- Реактивная проводимость, или сусептанс 287; матрица р.п. 1348.
- Реактивное сопротивление, или реактанс 287; и активное сопротивление 353; излучения р.с. 831, 1398, 1400.
- Резерфорда формула 1619, 1640.
- Резистанс, или активное сопротивление 287.
- Резольвента 845.
- Резонанса явление при рассеянии 1367, 1455, 1633.
- Резонансные частоты 274; вариационный принцип 1110; см. также Резонаторы, Собственные значения.
- Резонаторы акустические 1368; Гельмгольца р.а. 1455; параллелепипед с полосой внутри 1407; сфера 1436; сфера с колеблющейся струной внутри 1439; сфера с отверстием 1455; цилиндр со щелью 1367.
- Резонаторы электромагнитные 1781; вариационный принцип 1821; возбуждение р. при помощи волновода 1786; возбуждение р. током 1784; добротность 1782, 1800; клистрон 1789; потери энергии в р. 1782, 1800; прямоугольный параллелепипед 1781; сферическая полость 1799; сферическая полость, содержащая малый объект 1814.
- Рейнольдса число критическое 1733.
- Рекуррентные формулы для вырожденной гипергеометрической функции 626; для гамма-функции 396; для гипергеометрической функции 623; для полигамма-функций 400; для полиномов Гегенбауэра 726; для полиномов Лагерра 728; для полиномов Лежандра 696, 726, 1307; для полиномов Эрмита 729; для полиномов Якоби 1698; для полуцилиндрических функций 1700; для сферических комплексных гармоник 1612; для сферических функций Бесселя 582; для функций Бесселя 580, 1302; для функций Вебера 1524, 1525; для функций Лежандра 563, 683, 726, 1306.
- Рекурсивные формулы двучленные 511, 536; для дифференциального уравнения 510, 535; для разностного уравнения 510; трехчленные р.ф. 523, 524.
- Релаксационные колебания и проводимость 202.
- Релятивистская частица, функция Лагранжа 284.
- Релятивистская энергия 99.
- Римановы поверхности 379.
- Робертсона условие и разделимость 484.
- Рожок экспоненциальный, излучение звука 1332.
- Ротор, или вихрь 49.
- Рэлеевское рассеяние 1811.
- Рэлея—Ритца метод 1115; и вековой определитель 1116.
- Ряды 365, 675; вырожденный гипергеометрический р. 520, 522, 578; гипергеометрический р., см. Гипергеометрическая функция; и интегральные представления 543; и решение дифференциальных уравнений 501—542; обращение р. 389; р. по собственным функциям 675, 691, 693, 695; степенные р. 364; суммирование р. 390.

С

- Самосопряженные интегральные уравнения 919.
 Самосопряженные операторы 86, 805, 1110; вариационный принцип 1110; дифференциальные с.о. 869; и симметричные ядра 840.
 Свернутый тензор 53, 61.
 Свертки теорема для преобразования Лапласа 444, 460; для преобразования Меллина 446, 460; для преобразования Фурье 440, 458, 459; и ядра вида $v(x-x_0)$ 892, 900.
 Света диффузия 177.
 Сверхзвуковой поток 159, 162—168.
 Свободные состояния в квантовой механике 1602; для систем нескольких частиц 1674.
 Связанные осцилляторы 79, 80, 1665.
 Связанные состояния в квантовой механике 1602; вариационно-итерационный метод 1158; вариационный метод 1112, 1157, 1679; WKBJ-метод 1096, 1099; для двух частиц 1679; для нескольких частиц 1673; методы теории возмущений 1006—1040, 1155.
 Связи уравнение для дифференциальных уравнений 542, 543; для вырожденной гипергеометрической функции 570; для гипергеометрической функции 515, 546, 554, 555, 623; для присоединенных функций Лежандра 564; для функций Гегенбауера 565.
 Связи уравнения для интеграла Лагранжа 267.
 Связность области 343.
 Сдвиг простой 73; модуль с. 76; чистый с. 73.
 Сдвига волны, см. Поперечные волны.
 Седловая точка 415; см. также Перевала метод.
 Сетки потенциал в триоде 1221.
 Сжатая модуль 159, 160.
 Сжимаемой жидкости течение 159—168; безвихревое т. 161; дозвуковое и сверхзвуковое т. 162; и волновое уравнение 159; линейное приближение 164; линии Маха 165; ударные волны 165; число Маха 162.
 Сила, действующая на заряды и токи 199.
 Сила, действующая на тело, погруженное в поток жидкости 1209.
 Симметризация тензора напряжений-энергии 321.
 Симметричные аффиноры 64; задача о собственных значениях 65.
 Симметричные ядра 840, 843, 919; и самосопряженные операторы 840.
 Сингулярные ядра 852, 920.
 Синус-преобразование Фурье 431.
 Системы координат правые и левые 20, 33.
 Системы нескольких частиц в квантовой механике 1657—1674.
 Скаляр 53, 61.
 Скалярное волновое уравнение, см. Волновое уравнение.
 Скалярное произведение векторов 20.
 Скалярные поля 15; вариационный принцип 288—303; общие свойства 288—303; сводка результатов 325—327.
 Скалярный потенциал 59, 143, 1705; волновое уравнение 200.
 Скин-слоя глубина 1783; эффективная с.-с. г. 1793.
 Скорейшего спуска метод, см. Перевала метод.
 Скоростей потенциал 160, 293; для волнового уравнения 159; для сжимаемой жидкости 164; для уравнения Лапласа 153.
 Скорости амплитуда 128.
 Скорости плотность для уравнения Дирака 251.
 Скорость волны 124; дисперсия 138, 1756; для звуковых волн 161; для струны 124; для упругих волн 141; для уравнения Клейна—Гордона 138; для электромагнитных волн 200.
 След аффинора 61, 65; с. оператора 844, 847, 1027; с. функции Грина 921.
 Слияние особых точек 489; и вырожденное гипергеометрическое уравнение 519.
 Сложения формула для полиномов Лагерра 729; для полиномов Лежандра 727, 1257.
 Случайные блуждания и функция Грина 654.
 Смешанное тройное произведение векторов 22.
 Смешанный тензор 53, 61.
 Снедлиуса закон 1753.
 Собственная длина 98.
 Собственное время 95.
 Собственные векторы 82; вариационный принцип 719; для гармонического осциллятора 237; для координатного оператора 227; для оператора единичного сдвига 132; для оператора импульса 231; для эрмитова оператора 718, 719; и собственные функции 666, 667; и функции преобразования 228; нормировка 228; операторное уравнение 82, 667, 718; полнота 667, 721; разложение оператора Грина по с.в. 817.
 Собственные значения 82; асимптотические формулы 687; в абстрактном векторном пространстве 716; вариационно-итерационный метод 1029—1035, 1133—1141; вариационный метод 684, 1106—1120, 1147; действительные с. з. 676; для атома водорода 592; для гармонического осциллятора 237; для прямоугольной мембраны 701; для треуголь-

- ной мембраны 701; для уравнения Матье 525—527, 532; для эллиптической мембраны 703; и вырождение 674; и задача Штурма—Лиувилля 669, 678, 682, 683; и собственные векторы 666, 718; итерационно-пертурбационный метод 1006—1015, 1156; метод Финберга 1015—1022; метод Фробениуса 1022—1029; наименьшие с.з. 670, 673, 719; непрерывное распределение с.з. 708; нижние границы 1139, 1141, 1147; операторное уравнение 82, 667, 834; плотность с.з. 705; распределение с.з. 670, 671, 673; симметрического аффинора с.з. 65.
- Собственные функции** 658—722; асимптотические формулы 687; в абстрактном векторном пространстве 666; в нескольких измерениях 700; вариационный принцип 684; вырождение 83, 674, 1443, 1623; для волнового уравнения 1326—1466 (в параболических координатах 1375; в полярных координатах 1349; в прямоугольных координатах 1343, 1406; в сферических координатах 1434; в сфероидальных координатах 1466; в эллиптических координатах 1383, 1384; и преобразование Лапласа 1326); для уравнения Лапласа 1174—1287 (в биполярных координатах 1199; в бисферических координатах 1281; в вытянутых сфероидальных координатах 1269; в декартовых координатах 1167; в круговых цилиндрических координатах 1243, 1246; в параболических координатах 1197, 1277; в полярных координатах 1174; в сплюснутых сфероидальных координатах 1243, 1276; в сферических координатах 1252; в эллипсоидальных координатах 1287; в эллиптических координатах 1185); и дельта-функция Дирака 668, 677; и производящие функции 695; и ряды Фурье 658, 691, 693; и функция плотности 677, 726—731; интегральное уравнение 834; краевые условия 650, 659, 662—666; метод факторизации 677—684, 731—733; неортогональные с.ф. 1036—1040, 1325, 1344, 1345; нормировка 677, 709, 771; операторное уравнение 82, 667; ортогональность с.ф. 65, 666, 675, 702, 709; ортонормированные с.ф. 677; полнота с.ф. 659, 675—677, 686, 687; разложение функции Грина по с.ф. 760—770, 786, 799, 824, 825 (метод изображений 755, 756); ряды по с.ф. 675 (сравнение с рядами Фурье 691, 693; явление Гиббса 693); случай непрерывного распределения собственных значений 708.
- Свойственности уравнения в теории упругости** 1726.
- Совокупность рассеивателей** 1459; пузырьки воздуха как рассеиватели 1462.
- Соответствия принцип** 241.
- Соппротивление** (активное), или резистанс 287.
- Сопряженная задача** 808.
- Сопряженная функция в вариационных принципах** 1125, 1127, 1131.
- Сопряженная функция Грина** 793, 794.
- Сопряженное операторное уравнение** 806.
- Сопряженные краевые условия** 808.
- Сопряженные операторы** 499, 805, 814; с.о. дифференциальные 499, 541, 548, 603, 809; с.о. интегральные 811.
- Сопряженные переменные** 221, 275.
- Сопряженный аффинор** 61, 65.
- Сопряженный импульс** 222.
- Сосредоточенная сила для струны** 122.
- Состояния системы** 80, 82; в квантовой механике 223; связанные с.с. 1602; свободные с.с. 1602; стационарные с.с. 1591.
- Состояния уравнение** 172—174.
- Софокусные поверхности второго порядка и разделимость** 484; и эллипсоидальные координаты 484.
- Сохранения теоремы** 291, 292, 305.
- Спиновый оператор** 91, 105, 249; Паули с.о. 106; преобразование Лоренца 252.
- Спиноры** 102—108; и 4-векторы 103; преобразование Лоренца 103, 104.
- Сплюснутые сфероидальные координаты** 487, 618; и волновое уравнение 1475; и течение за сплюснутым сфероидом 1274; и течение через круглое отверстие 1275; и уравнение Лапласа 1273 (интегральное представление решений 1276; функция Грина 1276); и функции Лежандра мнимого аргумента 1273; разделение переменных 487, 618, 619.
- Сравнения функций, или пробные функции** 1105, 1114.
- Средние значения в квантовой механике** 224, 1591; и функции преобразования 230.
- Средняя длина свободного пробега** 174; и эффективное сечение рассеяния 174.
- Срезающие напряжения** 75.
- Статика упругого тела, см. Упругого тела статика.**
- Степенной ряд** 364; см. также Ряды, Тейлора ряд.
- Сток** 151.
- Стокса закон** 1744.
- Стокса теорема** 51; для аффиноров 71.
- Стокса явление** 413, 690; и вырожденная гипергеометрическая функция 571, 573, 575.
- Столкновения, возрастное уравнение** 192, 1556; потеря энергии 188; уменьшение скорости частиц 192.
- Стоячих волн отношение** 129.
- Струве функции** 1305.
- Структурный фактор** 1640, 1686.

- Струна гибкая** 119—140, 288—292, 1316—1328; колеблющаяся с.г. 123—140, 288—292; 1316—1328 (в упругой среде 137, 138, 1323; вариационный принцип 288, 325; волновое напряжение 292; волновой импульс 292; вынужденное движение 129; и ряды Фурье 134; коэффициенты отражения 129; отношение стоячих волн 129; переходная характеристика 130, 1314—1323; плотность канонического импульса 290; плотность функции Лагранжа 289; поток энергии 127, 292; скорость волны 124; с. внутри сферы 1439; с. с нежесткими закреплениями 1324, 1338; с. с подвижными закреплениями 1338; с. с трением 135, 1316, 1321; тензор напряжений-энергии 291; уравнение колебаний 124, 125, 290; функция Грина 125, 1316; энергия 125, 291, 292; эффективный импеданс 127, 128); статика 119, 123 (уравнение 121; функция Грина 123).
- Струна идеализированная весомая** 130, 131; нормальные формы колебаний 133; операторное уравнение 131; предельный случай непрерывной струны 133.
- Ступенчатая функция** 122, 392, 778.
- Сужение в волноводе** 1768.
- Суммирование рядов** 390.
- Сусептанс, или реактивная проводимость** 287.
- Существенно особые точки** 359, 456.
- Существенно сингулярные ядра** 855, 920.
- Сфера, излучение звука колеблющейся с.** 1444; колебания с. 1437; колеблющаяся струна внутри с. 1439; рассеяние звука на с., см. Рассеяние; электромагнитные волны внутри с. 1799, 1801.
- Сферические волны расходящиеся** 144, 1064; сходящиеся с.в. 144; электромагнитные с.в. 1794, 1795.
- Сферические гармоники** 1248, 1431; векторные с. г. 1824; Гобсона с. г. 1268; комплексные с. г. 1431; таблица формул 1306—1308; теорема сложения 1257; Феррера с.г. 1268.
- Сферические координаты** 487, 615; и векторное волновое уравнение 1794 (и мультиполи 1796; излучение 1796, 1803; продольные волны 1795; разложение плоской волны 1796; рассеяние 1810; резонатор 1799; функция Грина 1802); и векторное уравнение Лапласа 1737 (векторные собственные функции 1737; поле заряженной вращающейся сферы 1741; поле петли тока 1741; течение вязкой жидкости за сферой 1742; упругие деформации шара 1744—1747; функция Грина 1739); и рассеяние 1449—1459 (коротковолновое приближение 1511; на резонаторе Гельмгольца 1455; на сфере 1449, 1452, 1454); и скалярное волновое уравнение 1430—1466 (излучение поршня, являющегося частью сферы 1447; излучение сферы 1444; разложение плоской волны 1434; резонатор Гельмгольца 1455; функция Грина 1434, 1437); и скалярное уравнение Лапласа 1247—1266 (диэлектрическая сфера в однородном поле 1250; заряженная проволока внутри сферы 1258; заряженная сфера с отверстием 1264; заряженный сферический сегмент 1252; и мультиполи 1258—1264; интегральное представление решений 1253; магнитное поле петли тока 1251; поле между эксцентричными сферами 1255; потенциал сферы 1249; течение за сферой 1249, 1250; функция Грина 1256); колебания воздуха внутри сферы 1436; колебания гибкой сферы 1436; колебания струны внутри сферы 1439; упругие волны в шаре 1801.
- Сферические функции Бесселя, см.** Бесселя функции.
- Сфероидальные волновые функции** 601, 1467—1475; асимптотическое поведение 1469; и полиномы Гегенбауера 601, 1467; и сферические функции Бесселя 602, 1469; интегральные представления 1471, 1472; нормировка 1467; приближенные формулы 1468; радиальные с.в.ф. 602, 1469—1475; разложение в произведение 1472; таблица формул 1534.
- Сфероидальные координаты** 487, 617, 618; см. также Вытянутые сфероидальные координаты, Сплюснутые сфероидальные координаты.
- Сходимости круг** 355, 356; и аналитическое продолжение 357; поведение функции на границе с.к. 364.
- Сходимости радиус** 356.
- Сходимость в среднем** 433; с. вариационно-итерационного метода 1031, 1137; с. гипергеометрического ряда 367; с. длинноволнового приближения 1089; с. итерационно-пертурбационного метода 1011, 1023, 1029; с. пертурбационных рядов для возмущений границы 1056, 1061; с. пертурбационных рядов для рассеяния 1073—1075; с. формулы Финберга 1019.
- Сходящиеся волны** 144.

Т

- Тейлора ряд** 355; и аналитическое продолжение 357; радиус сходимости 356.
- Телеграфное уравнение** 800; начальная задача 804; функция Грина 801.
- Тензоры** 52—60; для электромагнитного поля 203; и аффиноры 61; как векторные операторы 57, 58; типы т. 53, 61.
- Тень** 1357, 1512.
- Тетрадики** 76.
- Течение вязкой жидкости** 156—158, 1175; напряжения 155, 156; нестационарное т.в.ж. в трубе 1780; т.в.ж. в трубе 1732, 1733; уравнение т.в.ж. 158.

- Течение жидкости** 149—168, 293—299; безвихревое т.ж. 150; вариационный принцип 293; вихревой вектор 150, 1175; граничные условия 154; дозвуковое и сверхзвуковое т.ж. 162; и аналитические функции 1206, 1213; источники и стоки 151; кинетическая энергия 293; линии Маха 165; потенциал скоростей 293; потенциальная энергия 294; силы, действующие на погруженные тела 1209; т.ж. в трубах 1241, 1245; т.ж. за двумя цилиндрами 1201; т.ж. за круговым цилиндром 1175; т.ж. за сплюснутым сфероидом 1274; т.ж. за сферой 1249; т.ж. за эллиптическим цилиндром 1180; т.ж. через отверстие 1275; т.ж. через щель 1185, 1733; ударные волны 165; уравнение Бернулли 158; уравнение Лапласа 153, 293; уравнение непрерывности 151; число Маха 164.
- Тока линии** 22.
- Тока функция** 153, 1171, 1207; и комплексное переменное 337.
- Токи**, излучение т. 1803, 1804; индуцированные диполи и т. 1814; поля, создаваемые т. 1727, 1730, 1736, 1741; силы, действующие на т. 198, 199.
- Точки ветвления**, см. Ветвления точки.
- Трение**, колеблющаяся струна с т. 135, 1316.
- Трение расширения** 156.
- Треугольная мембрана** 701, 702.
- Тригонометрические функции** 1300; таблица значений 1838.
- Триоды** 1221.
- Тороидальные гармоники** 1282, 1283, 1309; таблица значений 1848; таблица формул 1309.
- Тороидальные координаты** 495, 622; и уравнение Лапласа 1282 (*функция Грина* 1285); разделимость 495.
- Тэта-функции** 407—410; и функции Матье 1391; таблица свойств 465.

У

- Угловая переменная** 281.
- Угловая скорость** 125.
- Ударные волны** 165.
- Удвоения формула для гамма-функции** 401.
- Удлинения волны** 1775.
- Уиттекера функции** 574, 627; см. также Вырожденная гипергеометрическая функция третьего рода.
- Унитарный аффинор** 67.
- Унитарный оператор** 87.
- Упругая среда**, вариационный принцип 306; таблица 327.
- Упругие волны** 140—149; в брус 1773, 1775, 1777; векторные у.в. 145; импеданс среды 149; интенсивность 149; кручения у.в. 1775; напряжения и деформации 147; отражение 1749, 1754; плоские у.в. 307, 309, 1749; поперечные у.в. 141, 145; продольные у.в. 141; сдвига у.в. 142, 145; удлинения у.в. 1775; функция Грина 1722.
- Упругие деформации** 71—77; и напряжения 74, 75.
- Упругие константы** 77.
- Упругие стенки трубы** 1328.
- Упругого тела статика** 1725; бигармоническое уравнение 1726; деформации шара 1744 уравнения 1730, 1731; уравнения совместности 1726; функция напряжений 1726.
- Упруго-подкрепленная струна** (струна в упругой среде) 137; волновой импеданс 139; вынужденное движение 138; функция Грина 1323; см. также Клейна—Гордона уравнение.
- Усиления коэффициент** 1222.
- Условие на дивергенцию электромагнитного поля** 310.

Ф

- Фазовое пространство** 170.
- Фазовые сдвиги** 1067, 1072, 1631; вариационный принцип 1120—1125, 1153, 1650—1653; WKBJ-метод 1100; приближение Борна 1072, 1641.
- Фазовые углы**, см. Фазовые сдвиги.
- Фазовый угол комплексного числа** 332.
- Фактор углового распределения** 1064, 1069, 1070, 1160, 1352, 1793, 1810, 1811; вариационный принцип 1127, 1131, 1161, 1650, 1652; и фазовые углы 1632, 1633; интегральное уравнение 1076; см. также Амплитуда рассеяния.
- Факторизация в методе Винера—Хопфа** 907; общий метод 915; примеры 908—915, 1488, 1496.
- Факторизация оператора Штурма—Лиувилля** 677—684; и гармонический осциллятор 237, 238, 678; и полиномы Гегенбауера 680; и рекуррентные соотношения 683; таблица 731—733.
- Факторизуемые ядра** 885.
- Фарадея закон электрической индукции** 199.

- Фиктивное пространство** при рассеянии 1359.
- Финберга пертурбационная формула** 1015—1022; и **уравнение Матье** 1020; неортогональные функции 1038; сходимости 1019; таблица 1156.
- Флоке теорема** 524.
- Фотоны** 216; импульс 218; энергия 217.
- Фраунгофера диффракция** 820.
- Фредгольма пертурбационный метод** 1022—1029; модифицированный Ф.п.м. 1036; применение к уравнению Матье 1028; случай неортогональных функций 1038.
- Фредгольма ряд** для задач рассеяния 1077; для проникновения через потенциальный барьер 1080.
- Фредгольма уравнение второго рода** 879—888, 919, 922; и преобразование Ганкеля 891; и преобразование Фурье 888—919; и производящие функции 883; и функции Грина 881; классификация 880; неоднородное Ф.у.в.р. 887, 896, 917; однородное Ф.у.в.р. 894.
- Фредгольма уравнение первого рода** 837, 856—879, 919, 924; и дифференциальные уравнения 874; и интегральные преобразования 871; и проблема моментов 876; и производящие функции 864; и функции Грина 869; метод Винера—Хопфа 917; решение в виде ряда 856.
- Френеля диффракция** на крае экрана 1362.
- Френеля интегралы** 756, 1362.
- Фронт волны** 143.
- Функции комплексного переменного** 330—467; аналитические ф.к.п. 334, 337—410; асимптотические ряды 410; гамма-функция 396; двоякопериодические ф.к.п. 404; и конформное отображение 339, 419; и электростатика 334; и эллиптические уравнения 641; интегрирование 335, 344; классификация 360; особые точки 339, 456; периодические ф.к.п. 402; преобразование Фурье 435; таблица свойств 455; условия Коши—Римана 334, 339; эллиптические ф.к.п. 404.
- Функциональные ряды** 537—542; и интегральные представления 541; полнота 537; рекуррентные формулы 537, 540; рекурсивные формулы 510, 540, 541.
- Фурье—Бесселя интеграл** 711.
- Фурье интеграл** 428; и квантовая механика 232; и переходные процессы 130, 1314.
- Фурье интегральная теорема** 429, 433; и непрерывное распределение собственных значений 708.
- Фурье преобразование** 428—446; аналитические свойства 435; асимптотическое поведение 437, 438; и интегральные уравнения 872, 888—919; и переходные процессы 1314; и преобразование Лапласа 443; и преобразование Меллина 444; и ряды Фурье 429; и функция Грина 1340; интегральная теорема Фурье 429, 433; таблица 458, 459; теорема свертки 440, 458, 459, 892, 900; Ф.п. по косинусам 430; Ф.п. по синусам 429; формула обращения Фурье 429; формула Парсеваля 432; формула суммирования Пуассона 441.
- Фурье ряды** 134; и колебания струны 134; и преобразование Фурье 429; и ряды по собственным функциям 691, 693; и функции Матье 530—532, 539; и функция Грина 661; полнота 537; явление Гиббса 693.

X

- Характеристики** 635.
- Характеристический импеданс** 214.
- Хилла определитель** 527.
- Хиллерааса координаты** 1682.

Ц

- Целые функции** 361, 456; разложение в бесконечное произведение 364.
- Центральные поля** в квантовой механике, кулоновский потенциал 1614; момент импульса 1611, 1612; радиальное уравнение 1613; разрешимые случаи 1621; рассеяние 1630; сила, обратно пропорциональная кубу расстояния 1616; трехмерный осциллятор 1613; экспоненциальный потенциал 1620.
- Цепная реакция** 1552; общий случай, диффузионное приближение 1559.
- Циклиды софокусные** и разделение переменных 492.
- Цилиндр** в электростатическом поле 1175; заземленный ц. и линейный источник 1179; концентрические ц., поле между ними 1174; поле вне двух ц. 1200; рассеяние на ц. 1354, 1792; рассеяние на ц. со щелью 1363, 1367, 1368; эллиптические ц. в однородном поле 1189.
- Цилиндрические координаты**, разделение переменных 487.
- Цилиндрические функции** Бесселя, см. Бесселя функции.
- Циркуляция** 1190, 1191, 1215; ц. интеграл 29.

Ч

- Частиц диффузия** 170—195, 1549—1590; вариационный метод 1581; возрастное уравнение 193, 1556—1559, 1587—1590; действие внешней силы 190; диффузионное прибли-

жение 179, 1549—1555, 1559; диффузная эмиссия 1576; диффузное отражение 1573; диффузное рассеяние 1574; замедление частиц при столкновениях 192, 1556—1559, 1583—1590; и плотность частиц 1568; и фазовое пространство 170; изотропное рассеяние 1571—1583; интегральное уравнение 1571, 1584, 1585; мгновенный ливень частиц 1550; неизотропное рассеяние 185; однородное пространственное распределение 1563, 1585; рассеяние вперед 1565, 1691—1693; стационарный случай 1568; уравнение Милна 183, 913, 1572, 1578—1583; уравнение непрерывности 1568, 1569; функция распределения 171, 1561—1590.

Частица в электромагнитном поле 245.

Частота 125; критическая ч. 1413; резонансная ч., см. Резонансные частоты.

Чебышева функции 513, 518; и присоединенные функции Лежандра 566; и функции Гегенбауера 566, 726; таблица формул 724—727.

Четность и инверсия в квантовой механике 1670.

4-векторы, см. Векторы; 4-в. потенциал 203, 310.

III

Шар, нагревание вращающегося ш. 1560; упругие волны в ш. 1801, 1802; электромагнитное поле вращающегося заряженного ш. 1741.

Шварца—Кристоффеля преобразование 420, 421, 1229; примеры 422—426, 1229—1236.

Шварца неравенство 85.

Шварца принцип отражения 372.

Ширина эффективная 1356; поглощения ш. э. 1793; полная ш. э. 1793, 1794; рассеяния ш. э. 1793, 1794.

Шмидта метод 725, 858, 859.

Шредингера уравнение 1590—1689; в параболических координатах 611, 1617; в пространстве импульсов 231, 1076, 1590, 1628; вариационно-итерационный метод 1029—1035, 1133—1141, 1158, 1647; вариационный метод 1111, 1120—1127, 1131, 1153, 1154, 1161, 1163, 1644, 1680; WKBJ-метод 1090—1104; возмущения; зависящие от времени 242, 1596; возмущения общего вида 1106—1040, 1598; вырожденные системы 1623; длинноволновое приближение 1086; для короткодействующих сил 1595; для электрона в двухатомной молекуле 604; зависящее от времени Ш.у. 242; и геометрическая оптика 1104; и проникновение через потенциальный барьер 1097, 1609; и уравнение Гамильтона—Якоби 1104; инверсия и четность 1670; интегральное уравнение 235, 1071, 1076, 1092; момент количества движения 1612, 1668; отражение и прохождение 1074, 1079, 1092, 1606; плотность тока и заряда 1591; плотность функции Лагранжа 299; приближение Борна 1072, 1075, 1637, 1641, 1683; радиальное Ш.у., см. Радиальное уравнение Шредингера; разделимость 470, 486, 487, 613—620; рассеяние, см. Рассеяние; ряд Финберга 1015; ряд Фредгольма 1022; сводка результатов 326; система двух частиц 1657; система нескольких частиц 1657; собственные значения 711—713; стационарные состояния 1591; тензор напряжений-энергии 300; центральные силовые поля 1611—1630.

Штарка эффект 1626.

Штекеля определитель и разделимость 484; таблицы 613—622.

Штурма—Лиувилля уравнение 668—695; асимптотические формулы 687; вариационный принцип 684; нормировка собственных функций 677; ортогональность собственных функций 676; осцилляционные теоремы 670, 673; ряды по собственным функциям 675, 691; самосопряженность 669; собственные значения 670—674; факторизация 677, 731—733; функция Грина 770; функция плотности 677.

III

Щель, диффракция на щ. 1403; течение жидкости через щ. 1186, 1187, 1733.

Э

Эйлера интегральное преобразование 549—554; для гипергеометрической функции 551; для функций Лежандра 558; модуляционный множитель 551; присоединенная билинейная форма 550.

Эйлера—Маскерони постоянная 399.

Эйлера преобразование рядов 373, 457; обобщения 375; приложение к гипергеометрическому ряду 376.

Эйлера углы 38, 68.

Эйлера уравнения 265—268, 303, 324.

Эквипотенциальная поверхность 25.

Экранированный атом, см. Атом.

Экспоненциальный потенциал в квантовой механике 1620; вариационно-итерационный метод 1649; вариационный метод 1644, 1651; приближение Борна 1644; рассеяние 1636.

Экспоненциальный рожек, излучение звука 1332.

- Экстраполяционный метод в вариационно-итерационном методе 1138.
- Электрические диполи и мультиполи, излучение 1797, 1798; создаваемые колеблющимися зарядами д. и м. 1806, 1808; статические д. и м. 1258—1264.
- Электрической индукции поле 196.
- Электромагнитное излучение, см. Излучение.
- Электромагнитное поле 195—215, 310—318; аффинор адмитанса 317; вариационный принцип 310, 311; вектор Пойнтинга 209, 314; граничные условия 210; движущегося заряда э.п. 206, 778; закон магнитной индукции 199; закон электрической индукции 199; и преобразование Лоренца 202, 203; калибровка 201, 204, 315; канонические уравнения Гамильтона 312; канонический импульс 312; плотность импульса 313, 314; плотность момента количества движения 314; плотность функции Лагранжа 311; потенциалы 198, 200, 202, 310; таблица свойств 261, 328; тензор напряжений-энергии 209, 311, 321; уравнения Максвелла 199; условие на дивергенцию 310; 4-вектор плотности тока 202; энергия 209, 312.
- Электромагнитные волны 200, 201, 1748—1827; в прямоугольных координатах 1714, 1755, 1781; в сферических координатах 1795—1817; в сфероидальных координатах 1817, 1818; влияние конечной проводимости 1762, 1782; возбуждение э.в. 1761, 1797, 1807; длинноволновое приближение 1792, 1805, 1811—1817; запаздывание 200, 201; и импеданс 1751, 1757, 1768, 1798; и мультиполи 1796—1809; поперечные э.в. 200, 1755—1768; рассеяние 1792, 1810, 1813; резонаторы 1781, 1789, 1799; функция Грина 1758, 1782, 1801, 1803.
- Электромагнитные плоские волны 317, 1749; аффинор адмитанса 318; отражение от плоскости 1749; рассеяние на полосе 1401; рассеяние на сфере 1810; рассеяние на цилиндре 1792.
- Электромагнитные резонаторы, см. Резонаторы.
- Электромагнитные сферические волны 1794—1796; разложение функции Грина 1803; таблицы 1824.
- Электростатическое поле 195—197; в прямоугольном колене 1235; в триоде 1221; вариационный принцип 1106; вне вытянутого сфероида 1267; вне диска 1249; вне сферического сегмента 1252; вне сферы 1248; вне тора 1284; вне эллипсоида 1288; внутри прямоугольника 1236; для сферы с отверстием 1264; для цилиндра со щелью 1182, 1195; и функции комплексного переменного 334—337, 358, 359, 419, 1206; между двумя проводниками и эллиптическим цилиндром 1193; между двумя цилиндрами 1200; между пластинами конденсатора 1230; между плоскостями 1167, 1226; между полосой и полуплоскостью 1197; между полосой и эллиптическим цилиндром 1186; между проводниками и цилиндрами 1227; между проводом и круговым цилиндром 1179; между проводом и плоскостью 1171; между проводом и призмой 1128; между сфероидом и сферой 1270; между сферой и плоскостью 1280; между эксцентричными сферами 1255; плоское э.п. 753; э.п. между проволокой и сферой 1258; э.п., создаваемое двумерной системой линейных источников 1224; э.п., создаваемое линейными источниками 1218—1228; э.п., создаваемое одномерной системой линейных источников 1222.
- Элементарные дроби, разложение мероморфной функции на э.д. 362, 363.
- Эллипсоидальные гармоники 1287—1289; интегральное уравнение 1289.
- Эллипсоидальные координаты 485; вырожденные формы 487; и уравнение Ламе 1286; и уравнение Лапласа 1285—1289; делимость 485, 486; таблица 619.
- Эллипе, волны внутри э. 700, 1393.
- Эллиптические интегралы 408, 409; и функции Матье 1389.
- Эллиптические координаты и волновое уравнение 1382—1404 (волны внутри эллипса 1393; диффракция на щели 1403; и функции Матье 1383; излучение полосы 1396, 1399; радиальные решения 1385; делимость 478, 487; разложение плоской волны 1395; рассеяние на полосе 1401; функция Грина); и уравнение Лапласа 1185—1195 (течение за эллиптическим цилиндром 1189; течение через щель 1185; функция Грина 1192; электростатическое поле между полосой и эллиптическим цилиндром 1186; эллиптический цилиндр в однородном поле 1189).
- Эллиптические уравнения 641; и комплексные переменные 641; и условия Дирихле 648, 654; и условия Коши 643, 654; и условия Неймана 650, 654; нормальная форма 642; разностное уравнение 648.
- Эллиптические функции 404—410; и двумерная система линейных источников 1224; и метод изображений 1226; и функции Матье 1392; поле внутри прямоугольника 1236; таблица свойств 462—465.
- Эмиссия диффузная 1572, 1576, 1578.
- Энергетические уровни, вариационный принцип 1111, 1112; для кулоновского потенциала 592, 1614; для одномерного гармонического осциллятора 237, 1593; для трехмерного гармонического осциллятора 1613; см. также Собственные значения.
- Энергии потери в волноводах 1766; в резонаторах 1782; при рассеянии 1793, 1812; при столкновениях, см. Столкновения.
- Энергия и соотношение неопределенности 239; релятивистская э. 99.
- Эрмита функции 729; и гармонический осциллятор 237, 238, 1592; и интегральные уравнения 864, 865, 877; и функции Вебера 1390; и функции Матье 1383; интегральное уравнение 835; факторизация уравнения 733.

Эрмитово сопряженное уравнение 850.
Эрмитово сопряженный оператор 86, 717, 814.
Эрмитовы операторы 86, 717, 814; вариационный принцип 1107; положительно определенные э.о. 718; собственные векторы 718; собственные значения 676, 718.
Эрмитовы ядра 920.
Эффективная площадь отверстия 1483.
Эффективная ширина цилиндра 1356.
Эффективное поперечное сечение 175, 1505, 1632; дифференциальное э.п.с. 1065, 1654; передачи импульса э.п.с. 184, 189; поглощения э.п.с. 177, 1454, 1813; полное э.п.с. 177 (*и рассеяние вперед* 1069, 1506); рассеяния э.п.с. 175, 1065, 1632.
Эффективный радиус взаимодействия 1090.

Ю

Юкава потенциал, приближение Борна для рассеяния 1081, 1655.
Юнга модуль 76, 1776.

Я

Ядра интегральных представлений 546—549; вида $f(zt)$ 602; и преобразование Лапласа 549; и преобразование Эйлера 549; и решения волнового уравнения 595—599.
Ядра интегральных уравнений 836, 842, 843; взаимные функции 846; вида $v(x-x_0)$ 864—866, 889, 890, 892, 923 (*и преобразование Лапласа* 900—904; *и преобразование Фурье* 889, 892—897; *и теорема свертки* 892; *метод Винера—Хопфа* 906—919); вида $v(x+x_0)$ 898; вида $v(x/x_0)$ 904; итерированные я. 846, 847; классификация 880—887; неопределенные я. 836, 847; положительно и отрицательно определенные я. 836, 840, 841; полудиagonальные я. 881; полуопределенные я. 840, 847; полярные я. 836, 840; резольвента 845; симметричные я. 840, 843; сингулярные я. 852; существенно сингулярные я. 855; таблица типов 919—923; факторизуемые я. 885.
Якоби полиномы 724; в задаче о двух частицах 1677; нормировка 725; рекуррентная формула 725; 1699; таблица формул 1698.
Якоби эллиптические функции 406.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 9. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ	5
9.1. Теория возмущений	6
Обычная формула теории возмущений. Сходимость рядов. Многомерные задачи. Пример. Пертурбационная формула Финберга; вековой определитель. Пример. Пертурбационная формула Фредгольма. Пример. Вариационно-итерационный метод. Сходимость метода. Пример. Улучшение пертурбационных формул. Неортогональные функции.	
9.2. Поверхностные возмущения	40
Возмущения в граничных условиях, f мало. Возмущения в граничных условиях, f велико. Пример. Формулы для малого w . Длинный узкий прямоугольник. Возмущение формы границы. Вычисление интегралов. Сходимость. Улучшение сходимости. Возмущения границ для условий Дирихле. Специальный класс граничных возмущений.	
9.3. Приложение методов теории возмущений к изучению рассеяния и диффракции	63
Граничные условия для рассеяния. Поперечное сечение рассеяния. Рассеяние сферически симметричной областью. Сдвиги фаз. Интегральное уравнение для рассеяния. Интегральное уравнение для одномерных задач. Интегральное уравнение в трехмерном случае. Приближение Борна. Борновские приближения высших порядков. Ряд Фредгольма. Пример. Трехмерный пример. Длинноволновое приближение. Длинноволновое приближение для уравнения Шредингера. Сходимость. Коротковолновое приближение; WKBJ-метод. Связь с интегральным уравнением. Случай изолированных классических точек поворота. WKBJ-метод для связанных состояний. Проникновение сквозь потенциальный барьер. WKBJ-метод для радиальных уравнений. Метод WKBJ для сдвига фаз. Случай близко расположенных классических точек поворота. Коротковолновое приближение в трехмерном случае.	
9.4. Вариационные методы	104
Вариационный принцип для задачи на собственные значения. Вариационные принципы для резонансных частот и энергетических уровней. Колебания круглой мембраны. Нелинейные вариационные параметры. Метод Рэлея—Ритца. Приложения к теории возмущений. Интегральное уравнение и соответствующий вариационный принцип. Пример. Вариационный принцип для сдвигов фаз. Вариационный принцип для сдвига фазы, основанный на интегральном уравнении. Вариационный принцип для амплитуды прохождения. Вариационный принцип для трехмерных задач рассеяния. Вариационные принципы для поверхностных возмущений. Вариационный принцип, основанный на интегральном уравнении для граничных возмущений. Рассеяние поверхностями. Вариационный принцип для задач излучения. Вариационно-итерационный метод. Экстраполяционный метод. Нижние границы для λ_0 . Метод сравнения для нижних границ. Пример. Не положительно определенный оператор $\mathcal{L}$. Вариационные методы для высших собственных значений. Метод минимизированных итераций.	
Задачи к главе 9	152
Таблица приближенных методов	155
Связанные состояния. Объемные возмущения. Итерационно-пертурбационные ряды. Ряды Финберга. Формула Фредгольма. Вариационный принцип для связанных состояний. Вариационно-итерационный метод. Возмущения граничных условий. Возмущения формы границы. Пертурбационные формулы для рассеяния. Вариационные принципы для задач рассеяния. Рассеяние на сферически симметричных объектах.	
Литература	163

Глава 10. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА	165
10.1. Решения в двумерном случае	166
Декартовы координаты. Прямоугольная призма, нагреваемая с одной стороны. Функция Грина. Полярные координаты. Цилиндры, помещенные в поля. Поток вязкой жидкости. Функция Грина в полярных координатах. Внутреннее нагревание цилиндров. Потенциал вблизи цилиндра с щелью. Эллиптические координаты. Поток вязкой жидкости через щель. Эллиптические цилиндры в однородных полях. Функция Грина в эллиптических координатах. Потенциал внутри цилиндра с узкой щелью. Параболические координаты. Биполярные координаты. Два цилиндра в однородном поле. Функция Грина в биполярных координатах.	
10.2. Комплексные переменные и двумерное уравнение Лапласа	204
Поля, граничные условия и аналитические функции. Некоторые элементарные решения. Преобразование решений. Циркуляция и подъемная сила. Поля, создаваемые распределением линейных источников. Потенциалы сеток и коэффициенты усиления. Одномерные системы линейных источников. Двумерная система линейных источников. Периодические распределения изображений. Потенциал в случае призматических границ. Конденсатор с параллельными пластинами. Переменный конденсатор. Другие прямоугольные границы.	
10.3. Решения в трехмерном пространстве	237
Интегральная форма функции Грина. Решения в прямоугольных координатах. Решения в круговых цилиндрических координатах. Интегральное представление собственных функций. Функция Грина для внутреннего поля. Решения в сферических координатах. Поля заряженных дисков и витков тока. Поля заряженных сферических сегментов. Интегральное представление решений. Разложение функции Грина. Диполи, квадруполь и мультиполи. Сферическая оболочка с отверстием. Вытянутые сфероидальные координаты. Интегральные представления решений в сфероидальных координатах. Функция Грина для вытянутого сфероида. Сплюснутые сфериды. Поток через отверстие. Интегральные представления и функции Грина. Параболические координаты. Бисферические координаты. Тороидальные координаты. Эллипсоидальные координаты.	
Задачи к главе 10	290
Тригонометрические и гиперболические функции	300
Тригонометрические функции. Гиперболические функции. Производящие функции, связывающие гиперболические и тригонометрические функции.	
Функции Бесселя	302
Общие формулы, относящиеся к функциям Бесселя. Соотношения, содержащие разложения в ряды. Гиперболические функции Бесселя. Определенные интегралы, содержащие функции Бесселя.	
Функции Лежандра	306
Зональные гармоники. Функции Лежандра второго рода. Функции мнимого аргумента. Тороидальные гармоники.	
Л и т е р а т у р а	311
Глава 11. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ	312
11.1. Волновое движение, одна пространственная координата	313
Преобразование Фурье. Струна с трением. Преобразование Лапласа. Струна с трением. Струна в упругой среде. Струна с жестким закреплением. Отражение от закрепления с трением. Звуковые волны в трубе. Труба с переменным поперечным сечением. Элементы акустической цепи. Представление бегущими волнами. Подвижные закрепления.	
11.2. Волновое движение, две пространственные координаты	339
Преобразование Фурье и функция Грина. Прямоугольные координаты. Другие краевые условия. Переменный адмитанс границы. Полярные координаты. Волны внутри круговой области. Излучение кругового цилиндра. Рассеяние плоской волны на цилиндре. Рассеянная и отраженная волны. Предельные случаи коротких и длинных волн. Рассеяние плоской волны на крае экрана. Диффракция Френеля на крае экрана. Рассеяние на цилиндре со щелью. Цилиндр со щелью; условия Неймана. Волновое уравнение в параболических координатах. Собственные функции для внутренних	

задач. Волны вне параболических границ. Разложения функции Грина и плоской волны. Эллиптические координаты. Радиальные решения. Приближения для малых значений h и m . Приближения для малых h и больших m . Выражения для больших h . Волны внутри эллиптической области. Разложения функции Грина и плоской волны. Излучение колеблющейся полосы. Излучение тока, текущего по полосе. Рассеяние волн на полосе. Диффракция на щели; принцип Бабине.

11.3. Волновое движение, три пространственные координаты 404

Функция Грина для свободного пространства. Прямоугольный параллелепипед. Искажение стоячей волны полосой. Вычисление собственных значений. Распространение колебаний в трубах. Акустические волны в прямоугольной трубе. Преграда со щелью в прямоугольной трубе. Волны в трубе, изогнутой под прямым углом. Мембрана в круглой трубе. Излучение из открытого конца трубы. Распространение волн в упругих трубах. Сферические координаты. Сферические функции Бесселя. Функция Грина и разложение плоской волны. Собственные колебания внутри сферы. Колебания полой гибкой сферы. Колеблющаяся струна внутри сферы. Резонансные частоты системы. Излучение сферы. Излучение диполя. Излучение группы источников. Излучение поршня, являющегося частью сферы. Рассеяние плоской волны на сфере. Рассеяние на сфере с комплексным показателем преломления. Рассеяние на резонаторе Гельмгольца. Рассеяние на совокупности рассеивателей. Рассеивание звука на пузырьках воздуха в воде. Сфероидальные координаты. Радиальные функции. Функция Грина и другие разложения. Сплюснутые сфероидальные координаты.

11.4. Интегральные уравнения и вариационные методы 476

Диафрагма в трубе. Вариационный принцип. Вычисление коэффициента прохождения. Отверстие в бесконечной плоскости. Отражение в облицованной трубе. Преобразование Фурье интегрального уравнения. Факторизация преобразованного уравнения. Излучение из конца круглой трубы. Формулы для излученной и отраженной мощности. Преобразование Фурье интегрального уравнения. Факторизация преобразованного уравнения. Излучение колеблющегося тела. Угловое распределение излучения. Применение краевых условий. Рассеяние волн, вариационный принцип. Функция углового распределения и полное эффективное поперечное сечение рассеяния. Рассеяние на сфере. Рассеяние на полосе. Рассеяние коротких волн.

Задачи к главе 11 514

Цилиндрические функции Бесселя 522

Амплитуды и фазовые углы. Асимптотические значения. Корни.

Функции Вебера 524

Теоремы сложения.

Функции Матье 526

Собственные функции. Соответствующие радиальные решения. Вторые решения. Разложения в ряды. Амплитуды и фазовые углы.

Сферические функции Бесселя 531

Разложения в ряды. Определенные интегралы. Амплитуды и фазовые углы. Асимптотические значения. Корни.

Сфероидальные функции 534

Угловые функции. Радиальные функции. Теоремы сложения.

Краткая таблица преобразований Лапласа 536

Преобразования Лапласа некоторых конкретных функций.

Л и т е р а т у р а 540

Г л а в а 12. ДИФФУЗИЯ. ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА 542

12.1 Решения уравнения диффузии 542

Неустановившийся процесс в случае поверхностного нагревания пластины. Функции Грина и фиктивные источники. Нагревание излучением. Нестационарное внутреннее нагревание пластины. Диффузия и погло-

щение частиц. Деление и диффузия. Решение при помощи преобразования Лапласа. Замедление частиц. Деление, диффузия и замедление. Общий случай, диффузионное приближение. Нагревание шара.	
12.2. Функции распределения для задач диффузии	561
Однородное пространственное распределение. Приближения для рассеяния вперед. Общие рассуждения, стационарные случаи. Интегральные соотношения между переменными. Расчет диффузного рассеяния. Расчет диффузной эмиссии. Решение методом преобразования Лапласа. Вычисление плотности вариационным методом. Потери энергии при столкновениях. Однородное пространственное распределение. Возрастная теория.	
12.3. Решение уравнения Шредингера.	590
Определения. Гармонический осциллятор. Короткодействующие силы. Влияние возмущения. Приближенные формулы для возмущения общего вида. Волновые функции в импульсном представлении. Связанные и свободные состояния. Существование связанных состояний. Отражение и прохождение. Проникновение через потенциальный барьер. Центральные силовые поля, момент количества движения. Центральные силовые поля, радиальное уравнение. Кулоновский потенциал. Сила, обратно пропорциональная кубу расстояния. Кулоновское поле в параболических координатах. Формула Резерфорда. Другие разрешимые системы центральных сил. Возмущения вырожденных систем. Эффект Штарка. Собственные функции в импульсном представлении. Рассеяние в центральном поле. Эффект Рамзауэра и другие резонансные эффекты. Приближенные вычисления в случае медленных бомбардирующих частиц. Приближение Борна. Приближение Борна для фазовых углов. Вариационный метод. Вариационно-итерационный метод. Вариационные принципы для задач рассеяния. Вариационно-итерационный метод для задач рассеяния. Вариационный принцип для амплитуды рассеяния. Две частицы, одномерный случай. Функция Грина. Поверхностные волны. Влияние взаимодействия между частицами. Смысл результатов. Связанные гармонические осцилляторы. Поля центральных сил, несколько частиц, момент количества движения. Инверсия и четность. Симметризация для систем, состоящих из двух частиц. Связанные, свободные и «поверхностные» состояния. Функция Грина для системы двух частиц. Связанные состояния. Вариационные методы. Рассеяние электронов на атоме водорода. Упругое и неупругое рассеяние. Обмен частиц. Заключение.	
Задачи к главе 12	689
Полиномы Якоби	698
Общие соотношения. Специальные случаи.	
Полуцилиндрические функции	699
Л и т е р а т у р а	701
Глава 13. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ	702
13.1 Векторные граничные условия, собственные функции и функции Грина.	705
Поперечное поле в криволинейных координатах. Векторные теоремы Грина. Аффинорная функция Грина. Векторные собственные функции. Функция Грина для векторного уравнения Гельмгольца. Продольные и поперечные аффинорные функции Грина. Аффинорные функции Грина для упругих колебаний. Решения векторного уравнения Лапласа. Функции Грина волнового уравнения.	
13.2. Статические и стационарные решения	730
Плоские задачи. Полярные координаты. Круговые цилиндрические координаты. Сферические координаты. Аффинорная функция Грина для векторного уравнения Лапласа. Решения в случае магнитного поля. Поток вязкой жидкости, обтекающий сферу. Упругое деформирование сферы. Задание на поверхности вектора напряжения.	
13.3. Векторные волновые поля	748
Отражение плоской волны от плоскости. Граничный импеданс. Отражение упругих волн. Волны в волноводе. Функция Грина. Возбуждение волновода током. Потери в стенках волновода. Отражение волн от конца волновода. Влияние изменения размеров волновода. Отражение от штыря в волноводе. Упругие волны в бруске. Вынужденные крутильные колеба-	

ния бруса. Нестационарный вязкий поток в трубе. Электромагнитные резонаторы. Потери энергии в стенках, Q полости. Возбуждение резонатора током. Возбуждение при помощи волновода. Резонансные частоты полости клистрона. Рассеяние на цилиндре. Сферические волны. Излучение диполей и мультиполей. Стоячие волны в сферической полости. Колебания упругой сферы. Функция Грина для свободного пространства. Излучение переменного тока. Излучение полуволновой антенны. Излучение петли тока. Рассеяние на сфере. Поглощение энергии сферой. Искажение поля малыми объектами. Резюме.	
Задачи к главе 13	817
Таблица сферических векторных гармоник	824
Частные случаи. Зональные векторные гармоники. Интегральные и дифференциальные соотношения.	
Л и т е р а т у р а	827
ПРИЛОЖЕНИЕ	828
Указатель обозначений	829
Таблицы	838
I. Тригонометрические и гиперболические функции	838
II. Тригонометрические и гиперболические функции	839
III. Гиперболический тангенс комплексного аргумента	840
IV. Обратная гиперболическая функция $\operatorname{Ar} \operatorname{th} \xi$	843
V. Натуральный логарифм и обратные гиперболические функции	844
VI. Сферические гармоники	845
VII. Функции Лежандра для больших значений аргумента	846
VIII. Функции Лежандра чисто мнимого аргумента	847
IX. Функции Лежандра порядков $1/2, -1/2$ и $3/2$	848
X. Функции Бесселя для цилиндрических координат	849
XI. Гиперболические функции Бесселя	850
XII. Функции Бесселя для сферических координат	851
XIII. Функции Лежандра для сферических координат	852
XIV. Амплитуды и фазы цилиндрических функций Бесселя	853
XV. Амплитуды и фазы сферических функций Бесселя	856
XVI. Периодические функции Матье	859
XVII. Нормирующие постоянные для периодических функций Матье и предельные значения радиальных функций Матье	861
Л и т е р а т у р а	863
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	864

Ф. М. Морс и Г. Фешбах
МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Том II

Редакторы М. С. Агранович и К. Д. Соломенцев
Художник Н. А. Липин. Технический редактор Е. С. Потапенкова

Сдано в производство 7/IV 1959 г. Подписано к печати 18/I 1960 г.
Бумага $70 \times 108^{1/16}$ 28,0. бум. л. 76,7 печ. л. Уч.-изд. л. 74,1
Изд. № 1/4587 Цена 53 р. 85 к. Зак. 948

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ. Москва, Ново-Алексеевская, 52

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный пер., 9.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Страна	Напечатано	Следует читать
8	11 стр.	Сбит шрифт	$\int_0^L \varphi_p(x_0) U(x_0) \psi_n(x_0) dx_0$
9	2 стр.	Сбит шрифт	$(k^2)^{(1)} = k_n^2 + \lambda U_{nn}$
15	5 св.	$\frac{2}{16}$	$\frac{s^2}{16}$
109	6 стр.	$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}^1$	$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$
137	7 стр.	$[\lambda_0^{(n+1/2)} \lambda_0]$	$[\lambda_0^{(n+1/2)} - \lambda_0]$
248	6 св.	$m(\cos \vartheta)$	$P_n^m(\cos \vartheta)$
277	3 св.	$\overline{R}$	$\frac{1}{R}$
280	6 св.	$\cos(m\varphi)$	$\cos(m\varphi),$
290	12 св.	$8T_0^2$	$8T_0 x$
350	18 св.	$\sum_{n, n}$	$\sum_{m, n}$
472	12 стр.	$[\rho^2 + \eta^2 - \varphi - \varphi_0]^{1/4}$	$[\rho^2 + \eta^2 - 2\rho\eta \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/4}$
473	7 св.	$(2n+1)_n$	$(2n+1)j_n$
550	8 стр.	$e^{i/\lambda i}$	e^{i/λ_i}
550	9 стр.	$e^{-x/\lambda i}$	e^{-x/λ_i}
629	7 св.	$e^{im\phi}$	$e^{im\phi}$
700	3 стр.	Сбит шрифт	$e^{iz \cos u} \sin(mu) du$
781	5 св.	Сбит шрифт	$\psi_{nm}(x, y) [1 - e^{-\eta k_{nm}^2 t/\rho}]$
809	1 стр.	$\frac{2\pi^2 I_0^2}{c}$	$\frac{2\pi^2 I_0^2}{c}$