



Д. Бизам, Я. Герцег



МНОГОЦВЕТНАЯ ЛОГИКА



175 ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ



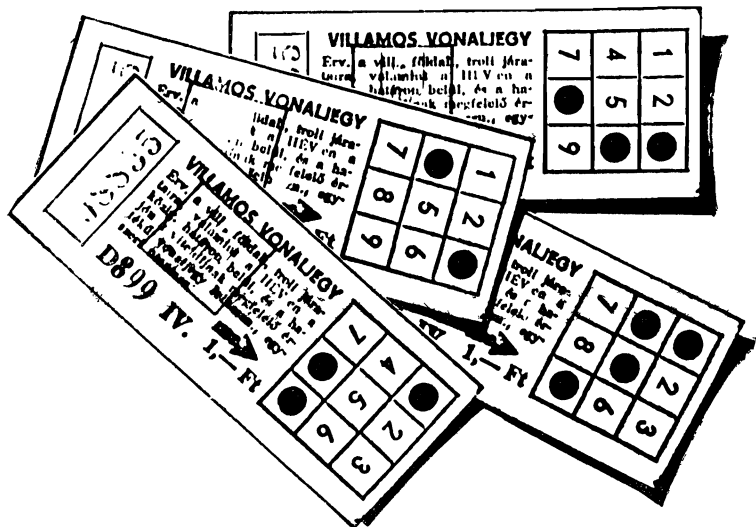
Перевод с венгерского
Ю А. ДАНИЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА

1978

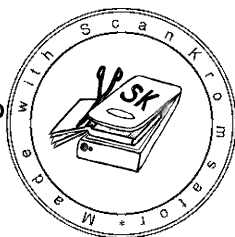




G. BIZAM, J. HERCZEG

SOKSZINŰ LOGIKA
(175 LOGIKAI FELADAT)

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ
BUDAPEST 1975



Бизам Д., Герцег Я.

Б 59 Многоцветная логика. 175 логических задач. Пер. с венг. Ю. А. Данилова. М., «Мир», 1978.

435 с. с ил.

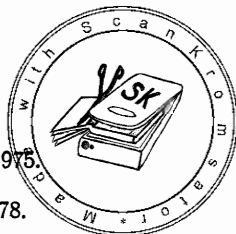
Новая книга уже известных советскому читателю венгерских математиков Д. Бизама и Я. Герцега продолжает серию книг по занимательной математике. Как и предыдущая книга этих авторов «Игра и логика» (М., «Мир», 1975), она посвящена началам математической логики и содержит 175 логических задач. Пользуясь элементарными средствами, авторы в увлекательной форме учат читателя умению последовательно мыслить.

Книга доступна самому широкому кругу читателей.

Б $\frac{20202-168}{041(01)-78}$ 168—78

51 + 16

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы



© Bízám György — Herczeg János, 1975.

© Перевод на русский язык, «Мир», 1978.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, их нужно выработать так, чтобы они вошли в плоть и в кровь и действовали с силой инстинкта. Поэтому для развития мышления действительно полезным является только его упражнение.

Д. Пойя, Г. Сёге

В отличие от шахматистов, проводящих различие между проблемистами (составителями шахматных задач: белые начинают и дают мат в заранее заданное число ходов) и композиторами (творцами шахматных этюдов, в которых число ходов особо не оговорено), математики до сих пор не придумали, как называть создателей математических задач. Между тем, существует особая категория людей, наделенных удивительным даром облекать свои научные и педагогические идеи в форму задач (достаточно вспомнить основателя школьного математического кружка при МГУ Д. О. Шклярского или «странствующего рыцаря» математики — члена Венгерской академии наук Пала Эрдёша). «Озадачивая» своего зримого или заочного собеседника, математики-проблемисты (назвать их «композиторами» трудно, хотя многие математические задачи по своему духу ближе к шахматным этюдам) побуждают его к активному овладению материалом, рождая чувство сопричастности к (большому или малому) математическому открытию. Среди проблемистов встречаются даже своего рода «воинствующие экстремисты», не признающие других способов обучения математике, кроме решения определенным образом подобранных серий задач. Сторонники более умеренного направления стремятся найти разумное сочетание задач и теоретических объяснений.

О том, сколь интересных результатов позволяет достичь такой компромиссный подход, убедительно свидетельствует предлагаемая вниманию читателя книга Дьердя Бизама и Яноша Герцгега «Многоцветная логика».

Задавшись высокой целью — привить культуру мышления не только любителям математики, но и тем, кто

не питает особой склонности к точным наукам, авторы неуклонно стремятся ее достичь. Для чтения «Многоцветной логики» необходимы не познания в математике (требования, предъявляемые к математической подготовке читателя, минимальны), а лишь готовность к сотрудничеству с авторами.

В книге почти не встречаются одиночные задачи: Д. Бизам и Я. Герцег отдают явное предпочтение упорядоченной серии перед хаотическим нагромождением задач, сколь бы интересными они ни были. Задачи, входящие в каждую серию, находятся в «зацеплении», подобно зубцам в хорошо отлаженном механизме. Последовательность задач в серии и расположение самих серий тщательно продуманы и позволяют читателю совершать восхождение от простого к сложному постепенно, без излишнего напряжения. Как правило, авторы решают одну и ту же задачу не одним, а несколькими способами, подчеркивая не только достоинства, но и ограниченность и недостатки каждого метода. Сопоставляя решения аналогичных задач, они устанавливают подчас неожиданные связи и обнаруживают особенности решения, которые остались незамеченными при решении каждой задачи в отдельности. Переменяя решения примечаниями, небольшими теоретическими отступлениями, варьируя условия задач, обобщая и специализируя, Д. Бизам и Я. Герцег как бы продолжают на страницах своей книги занятия в «Школе мышления», которые они с таким блеском и изобретательностью на протяжении многих лет ведут в венгерском научно-популярном еженедельнике *Élet és Tudomány* («Жизнь и наука»). Великолепными наглядными пособиями к их курсу служат рисунки Гезы Фекете.

В отличие от предыдущей книги Д. Бизама и Я. Герцега «Игра и логика» (русский перевод которой был выпущен издательством «Мир» в 1975 г.), носившей характер монографии, содержание «Многоцветной логики», как свидетельствует о том само название, более пестро и разнородно. Но сколь бы разнообразны ни были «цвета» отдельных глав, их сочетание не случайно и подчинено «сверхзадаче», которую авторы ни на миг не упускают из виду: научить читателя мыслить. Забота авторов об удобствах читателя не сводится к мелочной опеке и не сковывает его свободы. Они никогда не за-

бывают о том, что «решение задач — практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно только, подражая хорошим образцам и постепенно практикуясь» (Д. Пойя), и предоставляют читателю достаточный простор, позволяя ему испытать свои силы.

С выходом в свет «Многоцветной логики» занятия в «Школе мышления» не прекратились. Они продолжают-ся и поныне, а это позволяет надеяться на то, что в будущем Д. Бизам и Я. Герцег подарят нам еще не одну свою книгу.

Ю. Данилов

ПРЕДИСЛОВИЕ

В нашей предыдущей книге «Игра и логика»¹, посвященной лишь одному типу логических задач, мы стремились постепенно, переходя от простого к сложному, показать их неисчерпаемое многообразие. В конце книги мы упомянули о том, сколь обширно и многообразно царство логических задач, и выразили надежду, что нам удалось убедить читателя хотя бы в одном: по этому царству стоит прогуляться еще не раз и совершить не одну экскурсию. Теперь настала пора выполнить (разумеется, не в самом полном объеме) обещание, неявно содержащееся в этих строках.

В книге, предлагаемой на этот раз вашему вниманию, собраны фрагменты не одного, а *многих «цветов»*, отнюдь не лишенные математического содержания. Однотипные задачи мы расположили в более или менее оправданной последовательности. Каждая такая серия задач посвящена какой-нибудь одной теме и содержит задачи разного «калибра» — от довольно простых до необычайно глубоких. Не исключено, что для решения отдельных задач придется провести небольшое математическое исследование.

Вместе с тем мы считаем своим долгом предупредить тех, кто знаком с предыдущей нашей книгой, что *настоящая книга совершенно независима от первой*. Тем не менее основные принципы, которыми мы руководствовались при отборе задач, сохранились прежними.

1. В книгу включены задачи, для решения которых не требуется особых математических познаний.

2. При выборе внешней формы (формулировки) задачи мы всегда исходим из какой-нибудь обычной, знакомой или, наоборот, сказочной, шуточной или игровой,

¹ Д. Бизам, Я. Герцег, Игра и логика, М., «Мир», 1975.

но непременно понятной ситуации. Это позволяет читателю без особых трудностей незаметно для себя освоить весьма важное понятие: построить математическую модель данной ситуации, образовать математическую абстракцию первой ступени.

3. Каждая задача несет в себе определенную математическую идею. Рассуждения, используемые в решениях задач, по существу построены из тех же элементов, из которых состоят доказательства различных математических теорем. Поэтому наша книга представляет собой сборник не головоломок, а логических задач, для решения которых читатель может с успехом использовать навыки, приобретенные при решении обычных («школьных») математических задач, и применять рассуждения, систематически «работающие» в математике.

4. Решения всех задач тщательно разобраны. Многим решениям предпосланы наводящие соображения, а сами решения снабжены краткими примечаниями.

5. Мы стремились по мере возможности удовлетворить запросы различных категорий наших читателей. Поскольку в этой книге нам удалось осуществить свое намерение в гораздо большей степени, чем в предыдущей, мы считаем допустимым говорить о «многоцветной» логике. Помещенные в книге задачи не обязательно решать подряд. Читатель может прервать любую серию задач там, где сочтет нужным, и в зависимости от своего желания перейти к решению более простых или более сложных задач.

Многие из приведенных в книге задач были опубликованы на страницах венгерского научно-популярного еженедельного журнала *Élet és Tudomány* («Жизнь и наука») в разделе «Школа мышления» (прежнее название «Задачи Мишки Логара»). Основная часть приемов и методов решений также сложилась в свое время в этом разделе.

Среди задач, собранных в книге, имеются и такие, которые восходят к существовавшим ранее задачам. Известные задачи мы подвергли тщательному отбору, оставив лишь те из них, которые либо давно стали достоянием математического и школьного «фольклора», либо обладают какой-нибудь замечательной особенностью, делающей их особенно пригодными для наших целей. Но даже такие заимствованные задачи почти

всегда приводятся в расширенном или дополненном варианте. Что же касается решений, то они все без исключения принадлежат нам, что, впрочем, вполне понятно: у каждого автора имеются свои педагогические установки.

В заключение мы хотели бы поблагодарить читателей раздела «Школа мышления», а также школьников, которые своими решениями, критическими замечаниями и оригинальными, порой весьма неожиданными идеями во многом помогли нам в работе над этой книгой. Мы выражаем свою глубокую признательность редакции журнала *Élet és Tudomány*, позволившей нам накопить обширный опыт, сотрудникам издательства Műszaki Könyvkiadó и всем тем, кто принял участие в работе над книгой.

*Дьердь Бизам
Янош Герцег*

Будапешт, апрель 1974 г.

КАК ЧИТАТЬ ЭТУ КНИГУ

Эта книга, как и предыдущая, написана фрагментарно, с тем чтобы удовлетворить запросы как можно более широкого круга читателей. Найти в ней что-нибудь интересное для себя смогут и те, кто недавно пошел в школу, и те, кто успел закончить университет или другое высшее учебное заведение. Пользоваться книгой могут и те, кто стремится заполнить часы досуга, и те, кто хотел бы выработать у себя математическое мышление, и те, кто получил специальное математическое образование. Удовлетворить одновременно столь разнообразным и подчас даже противоречивым требованиям удастся далеко не всегда, поэтому читатель, к какой бы категории он ни относился, поступит весьма осмотрительно, если не станет целиком пропускать ни одну из глав книги. Дело в том, что книга, которую он держит сейчас в руках, представляет собой не одну, а несколько книг, вложенных друг в друга, как матрешки или колена складной подзорной трубы.

Приводимые ниже советы призваны помочь читателю выбрать ту из «книг», которая в наибольшей мере отвечает его вкусам, наклонностям и подготовке.

К сведению всех читателей!

○ Приступать к чтению этой книги можно с любой главы. Все главы независимы. Мы советуем читать книгу последовательно, от начала до конца, но вовсе не настаиваем на своей рекомендации.

○ Содержание книги отнюдь не исчерпывается одними лишь занимательными задачами. В ней затронуто немало серьезных тем. Поэтому мы рекомендуем читателю перелистать ее так, как перелистывают романы: одну часть прочитать подробно, другую лишь бегло просмотреть.

О Обратите внимание на шрифт, которым набраны отдельные части текста.

Таким шрифтом набраны краткие, сжатые, но точные ответы на вопросы задачи и наиболее важные места в решениях.

Таким шрифтом набраны сравнительно краткие, но полные доказательства, а также наиболее важные примечания.

[Таким образом набраны те отдельные подробности, которые без вреда для понимания общего хода доказательства можно опустить, уточнения, пояснения, обобщения или замечания, устанавливающие взаимосвязи более общего характера.]

О Довольно часто мы помещаем несколько решений одной и той же задачи. Последовательность, в которой приведены решения, не случайна, а всегда либо преследует определенную дидактическую цель, либо вызвана логикой изложения. (Например, первое решение, как правило, бывает наиболее простым и очевидным, но не всегда наиболее кратким и изящным.)

Читателям, которых интересуют лишь занимательные задачи (жаждущим заполнить свой досуг разнообразными, пестрыми по своему содержанию головоломками), мы отнюдь не рекомендуем приниматься за решение первой попавшейся им на глаза задачи. Дело в том, что некоторые задачи (они отмечены специальным знаком, изображающим сцепленные звенья цепи) связаны



между собой, и для решения одной из них необходимо знать, как решается другая задача. (Возможно, что какая-нибудь задача окажется весьма твердым орешком и механизм ее решения станет ясен лишь после того, как на других задачах будут продемонстрированы «ловушки», подстерегающие неискушенного читателя, и возможные способы их преодоления.)

Следует также сказать и о том, что в условиях одних задач мы неоднократно используем некоторые утверждения, содержащиеся в условиях предыдущих задач. Так происходит в тех случаях, когда при переходе к новой задаче возникает необходимость изменить лишь часть условий предыдущей задачи. В этом случае мы не всегда считаем нужным полностью выписывать условия новой задачи. Поэтому читателю, раскрывшему книгу

наугад, мы советуем в таких случаях потратить несколько минут на то, чтобы собрать воедино все условия заинтересовавшей его задачи.

Например, «поставщиками» условий для многих задач служат задачи 55, 86 и 168. Читателю, несомненно, придется познакомиться с правилами игры в «буквенное лото» (стр. 88) и с тем, как решать «кросснамберы» (стр. 92). Только после этого он сможет выбрать себе по вкусу либо 24 задачи из главы IX, либо 22 задачи из главы X. Прежде чем приступить к решению любой из задач 148—151, необходимо предварительно получить общее представление о географии острова Буяна и обычаях его населения (стр. 110).

В заключение мы хотим посоветовать читателю, даже если он не имеет желания систематически проработать всю книгу, воспользоваться приводимыми ниже рекомендациями. Это во многом облегчит ему решение задач.

Читателю, склонному к систематической работе над книгой (обладающему математическими способностями и желающему развить их), мы рекомендуем выбрать какую-нибудь из глав и решать (более или менее подряд) задачи из нее до тех пор, пока это будет ему интересно. Иногда бывает достаточно, казалось бы, лишь слегка изменить условия задачи, чтобы она обрела нечто новое, заслуживающее внимания. В этом случае новая задача обретает особый интерес, разумеется, если возникший вариант старой задачи допускает решение.

Тем, кто читает книгу не подряд, а выборочно, рекомендуем обратить внимание на «дорожные указатели», которыми отмечены задачи, образующие единую серию:



— начало (первая задача) серии,



— задача из серии,



— конец (последняя задача) серии.

Задачи, входящие в серию, не одинаковы: среди них всегда найдутся более трудные, а иногда и интересные, требующие для своего решения необычного поворота в рассуждениях.

Иногда среди задач, принадлежащих к одной серии, встречаются задачи, не отмеченные «стрелкой». Такие задачи, хотя они и являются «посторонними», по своему содержанию тесно связаны с соседними задачами. (Именно поэтому мы и сочли возможным «вклинить» их между задачами серии.)

Если задачи какой-нибудь главы читателю наскучат, рекомендуем пропустить ее и перейти к следующей главе или на время отложить книгу.

По-видимому, излишне напоминать о том, что *«тройка» задача — решение — примечания образует единое целое. Поэтому всякому, кто захочет ознакомиться с содержанием книги, необходимо прочитать от начала до конца все элементы «тройки» независимо от того, собирается он самостоятельно решать задачи или нет. Впрочем, читателю весьма полезно сравнить собственное решение с тем, которое приведено в нашей книге, сопоставить рассуждения, лежащие в основе обоих решений. Может случиться, что предложенное читателем решение окажется проще нашего.*

Менее терпеливый читатель может пропускать те части решений и даже условий задач, которые набраны

таким образом.

Это позволит ему без ущерба для понимания несколько сократить текст.

Читателю, более искушенному в математике, такой значок:



укажет задачу, на которую требуется обратить особое внимание.



— таким значком «более высокой степени» отмечены задачи, которые представляют (если они не встречались раньше) особое «лакомство» для любителей математики.

Самым юным читателям предназначены задачи, отмеченные знаком «игрушка»:



Наш опыт позволяет надеяться, что с этими задачами с успехом справятся дети в возрасте от 6 до 12 лет. (В крайнем случае они не дадут столь полного логического обоснования полученного решения, как их более старшие товарищи.)

Преподавателю математики нам бы хотелось дать несколько советов, которые должны облегчить ему работу с нашей книгой.

I. Начнем с небольшого *«предметного указателя» — классификации задач по их математическому содержанию*. Затронутый нами круг тем носит довольно случайный характер. Он определяется главным образом методами решения задач. Мы отнюдь не ставили себе целью дать как можно более полный перечень разделов современной математики¹.

Аналогия, сведение одной задачи к другой:

34, 35, * 36, * 50, 51, * 44, 54.

3, 4, * 5, 6, * 69, * 95, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, * 128, 129, * 143, 144, * 158, 159.

Логическая симметрия:

14, * 81, 85, * 170.

Неразрешимость:

26, * 82, 83, 84, * 109, 113, 115, 118, * 120, 129, 133, 135, * 153, 157, 158, 159.

Существование нескольких решений:

108, 114, 118, * 120, 134, 135, * 153, * 157, * 162.

Индуктивные рассуждения. Метод математической индукции:

34; контрпримеры: 24, 25.

27, 28, * 30, 31, 32, 33, * 89, 92, 94, * 174, 175.

[Рекурсивные рассуждения: 72, 80, 174 (примечание 2).]

¹ Звездочкой отмечены задачи, с которых начинается новая серия. — *Прим. перев.*

Специализация:

15, 21, 22, * 24, 25, * 27, 28, 29, 33, * 63, 64, 65, * 73, 74, 75, 78, * 85, * 88, 89.

Обобщение:

33, * 34, * 47, 48, * 53, * 54, * 56, 59, 65, 67, 68, 69, * 70, 71, 72, * 73, 76, * 79, 80, * 81, 85, * 86, 87, 88, * 91, 92, * 105, * 137, 138, * 144 (примечания), * 162 (примечание 2), * 173, 174, 175.

Некоторые основные понятия математической логики: вся глава XI (141—163).

Принцип Дирихле:

15, * 22, * вся глава V (55—69).

Функции, отношения:

48, * 55—68, * 79, 80, * 89—92, * 173.

(Эти примеры довольно своеобразны, сильно отличаются от приводимых обычно в школе и позволяют учащимся глубже «прочувствовать» понятия функции и отношения.)

Комбинаторика, разбиения, полное упорядочение:

3—6, * 15, 24, * 26—33, * 34—38, * 39, 40, * 70, 71, * 155 (II решение), 161, * 165 (II решение), * 166, * 167—168, 171, 172, 173.

Делимость, теория чисел:

27 (III решение), 29, 33 (II решение), * 46, 47 (обобщение, приведенное в решении), * 93

и кросснамберы, в особенности 120, 122, 124, 136.

Диофантовы уравнения:

39, 40 (хотя в обеих задачах алгебраический формализм не используется), * 43—48. В особенности см. примечание к решению задачи 48.

II. Следующие *рекомендации* предназначены для наших коллег — учителей как начальной, так и средней школы, которые руководят занятиями *математических кружков*. Числа со скобками, например 7), означают номер занятия. Рядом с каждым номером указаны номера задач, рекомендуемых для решения на данном за-

нятии. Однако нам хотелось бы подчеркнуть, что в наши намерения входило лишь облегчить труд учителя и мы отнюдь не собираемся навязывать коллегам свои рекомендации.

А. Для занятий *в начальной школе* с целью повышения интереса к математике мы советуем использовать следующий материал:

- 1) 95, 96, * 7, * 39, * 141.
- 2) 98, 100, * 9, * 43, * 142.
- 3) 115, * 119, 120, * 79, * 81.
- 4) 108, 109, * 11 (но лишь с семижильным кабелем), * 143, * 164.
- 5) 101, * 126, * 48, * 15.
- 6) 64, * 100, 101—105, * 49—51.
- 7) 106, 107, * 24 (закончить задачу дома), * 145, * 167, 168.
- 8) 111, * 134, * 24 (обсудить полученный ответ, используя для этого задачу 25), * 34.
- 9) 112, * 55, * 26, 27 (29 на дом), * 148, 149.
- 10) Обсуждение задачи 29, * 113, * 137, 138, * 60, 62, * 86 (на дом).
- 11) 87, 88, * 114, * 70, * 150, * 171.
- 12) 117, * 61, * 85, * 152, 153, * 165, * 173.

Б. Для занятий *в специальных начальных школах* с повышенной программой по математике мы рекомендуем следующий план занятий:

- 1) 96, 110, 116, * 55, * 141, * 164, * 3, * 15, 16.
- 2) 108, 109, * 119, 120, * 58, * 142, * 4—6, * 17, 20, 21, * 86.
- 3) 122—125, * 60, 62, * 143, 144, * 9, 10, * 24 (закончить задачу дома), * 87, 88.
- 4) 24 (обсудить ответ, пользуясь задачей 25), * 95, 100—105, * 145, * 167—169, * 34, * 49.
- 5) 106, 107, * 126, * 147—149, * 171, * 35, * 36—38, * 50—51.
- 6) 127—129, * 96, 98, * 150, * 11—13, * 26, * 43, 44, * 52—54.
- 7) 132—135, * 152, 153, * 173, * 27, 29 (на дом), * 45, 46, * 81.
- 8) обсудить задачу 29, * 113—115, 118, * 155—159, * 174, * 30, 31, * 82, * 90—92.
- 9) 137, 138, * 161—163, * 175, * 22, * 32, 33, * 48, * 93.
- 10) 117, * 61, * 160, * 165, * 172, * 47, * 85, * 94.

В. Для занятий *в средней школе* мы рекомендуем придерживаться следующего плана занятий математического кружка.

6—7-е классы

- 1) 96, 110, 116, * 7, * 15, 16, * 141.
- 2) 108, 109, * 3—6, * 17—21, * 14, * 142.
- 3) 119, 120, * 9, 10, * 23, 24, * 34 (на дом).
- 4) обсудить задачу 34, 35, * 132—135, * 25, * 81.
- 5) 137—140, * 36—38, * 82—84.
- 6) 11—13, * 86—88, * 143—144.
- 7) 95, * 100—107, * 39, * 85, * 145.
- 8) 122—125, * 43, * 90—92, * 147—149.
- 9) 44—46, * 93, 94, * 150.
- 10) 47, 48, * 127—129, * 151.

7—8-е классы

- 1) 55—57, * 113—115, 118.
- 2) 58, 59, * 152, 153.
- 3) 164, 166, * 154.
- 4) 60, 61, 62, * 155—159.
- 5) 165, * 160.
- 6) 63—66 (прочитать задачи 67—69), * 161—163.

8—9-е классы

- 1) 79, 80, * 167—169.
- 2) 117, * 136, * 73, * 170, 171.
- 3) 74, 75, * 172.
- 4) 76, 77, 78.

9—10-е классы

- 1) 22, * 70,
- 2) 26—28, * 71.
- 3) 30—33, * 72.
- 4) 89, * 173—175.

ЗАДАЧИ

Часть I

Небольшая разминка



1. ЗАБЫТЫЙ НОМЕР ТЕЛЕФОНА

Как-то раз в одной пештской¹ компании произошел такой разговор:

— Совершенно необходимо позвонить Пиште, и чем быстрее, тем лучше! — воскликнула Кати.

Однако номера телефона Пишты никто из присутствующих не помнил. Заглянули в телефонный справочник, но безуспешно: справочник вышел до того, как Пишта обрел телефон. Другим не оставалось ничего другого, как общими усилиями восстановить хотя бы отрывочные сведения о забытом номере.

— Я хорошо помню, что вторая половина в номере телефона Пишты в четыре раза больше первой, — заявила Кати.

— Шестизначные телефонные номера принято разбивать не на две, а на три части, — возразил Йошка. — Я припоминаю, что в номере Пишты две средние цифры, третья и четвертая, одинаковые.

— А мне кажется, что вторая цифра вдвое больше первой, — добавила Илонка.

Наконец очередь дошла до четвертого члена компании — Фери. Ему удалось припомнить, что в нужном номере третья цифра либо в 2 раза, либо на 2 единицы больше второй и какая-то из этих двух цифр, то ли

¹ Дунай делит Будапешт на две части — Пешт и Буду. — *Прим. перев.*

вторая, то ли третья, — двойка, но какая именно, Фери с уверенностью сказать не мог.

Вот и все, что удалось вспомнить друзьям.

Какой номер телефона у Пишты?



2. СТРАННАЯ ТАКТИКА

а. Играя в лото¹, дядюшка Янош предпочитал придерживаться довольно странной тактики: крестики на карточке он расставлял так, что получалась какая-нибудь симметричная фигура (рис. 1).

Приятель дядюшки с неодобрением относился к причудам своего друга.

— Ты осел, Янош! — не устал твердить он. — Где это видано, чтобы выигрышные номера выстраивались в симметричные фигуры? Насколько мне известно, такие номера всегда располагаются на карточке в полном беспорядке. Если хочешь выиграть, ставь крестики наугад!

Но дядюшка Янош лишь отмахивался и вопреки всем увещаниям поступал по-своему и твердил:

— Не все ли равно?

Кто прав: дядюшка Янош или его приятель?

б. Постоянные нападки приятеля в конце концов возымели свое действие: дядюшка Янош больше не расставляет крестики на карточке лото в виде симметричных фигур. Однако теперь он стал придерживаться еще более странной тактики: перед очередным розыгрышем тиража он отмечает крестиками те самые 5 номеров, на которые пал выигрыш на прошлой неделе. Новая тактика вызвала резкие возражения у жены дядюшки Яноша:

— В своем ли ты уме? — заявила эта достойная женщина. — Вот уже двадцать лет, как люди играют в лото, а случалось ли так, чтобы выигрыш дважды выпадал на одни и те же 5 номеров? Да такого никогда не бывало! Один-единственный номер еще может иногда выпасть

¹ Речь идет об игре, аналогичной нашему спортлото. — *Прим. перев.*

повторно, да и то лишь изредка! Было бы разумнее выбирать наугад один из номеров, на которые пал выигрыш на прошлой неделе, а остальные крестики расставить наугад в других клетках!

Однако и своей супруге дядюшка Янош отвечал так же, как и приятелю:

— Не все ли равно?

Кто прав: дядюшка Янош или его супруга?

[Хотя игра в лото приобрела международную известность, мы все же считаем нелишним напомнить, в чем состоит ее суть. Из целых чисел (номеров) от 1 до 90 наугад извлекают 5 чисел. Выигравшим считается тот, кто угадает (разумеется, до того, как состоится тираж лото) по крайней мере 2 из пяти выпавших номеров. Чем больше номеров угадал участник игры (он может правильно назвать 2, 3, 4 или 5 номеров), тем больше размеры причитающегося ему выигрыша.

Устроители тиражей тщательно следят за тем, чтобы шансы извлечь любой из 90 номеров были равными. Следовательно, какую бы комбинацию из пяти номеров ни выбрал любитель лото, она имеет такие же шансы стать выигрышной, как и любая другая комбинация из пяти номеров.]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Рис. 1.

3. СТАРАЯ ИГРА ПО НОВЫМ ПРАВИЛАМ



Пересмотреть традиционные правила игры в лото предложили не мы, а Пишта. По его мнению, разыгрывать тиражи следует на вечерах в клубе, а для того, чтобы сделать игру более привлекательной и расширить круг участников, правильно угадавших хотя бы часть номеров, вытягивать наугад не 5, а 85 номеров. Полный выигрыш, по замыслу Пишты, получает тот, кто правильно угадает все 85 номеров.

В каком варианте лото выиграть труднее: в предложенном Пиштой или в традиционном?

4. «МЕТКИЕ ПОПАДАНИЯ» В НОВОМ ЛОТО



Десять любителей лото заполнили по одной карточке для игры по новым правилам («по системе Пишты»): каждый зачеркнул на своей карточке по 85 номеров.

Приблизительно сколько из них сумели правильно угадать не менее 75 номеров?

5. ШАНСЫ НА ВЫИГРЫШ В НОВОМ ЛОТО



Что труднее:

а. Угадать 84 номера в новом лото или 4 номера в традиционном?

б. Угадать 83 номера в новом лото или 3 номера в традиционном?

в. Угадать 82 номера в новом лото или 2 номера в традиционном?

6. НОВЫЕ ВАРИАНТЫ ИГРЫ В ЛОТО



Пожалуйста, не поймите нас превратно: мы отнюдь не намерены предлагать вашему вниманию «абсолютно надежные», «беспроигрышные» системы игры в лото.

Речь пойдет совсем не о том. Когда стало известно о предложенной Пиштой реформе лото, многие были весьма раздосадованы тем, что эта мысль прежде не пришла им в голову, и стали наперебой предлагать свои собственные новые варианты игры. Из нашей задачи 3 «ниспровергатели» традиционного лото сумели извлечь немало поучительного для себя и ввели в свои варианты более радикальные новшества: например, Йошка предложил вытягивать наугад 25 номеров из 60, а Аннушка — 30 номеров из 55.

В каком из этих двух вариантов лото труднее выиграть?

7. СЕАНС ОДНОВРЕМЕННОЙ ИГРЫ В ШАХМАТЫ



Андраш и Бела — юные, подающие большие надежды шахматисты. Хотя они оба еще не окончили средней школы, взрослые шахматисты хорошо знают и высоко ценят их спортивные достижения.

Младший брат Андраша Фери учится в начальной школе. Он обладает недюжинными математическими способностями, но играть в шахматы начал совсем недавно и знает лишь, как ходят различные фигуры. И все же, когда Андраш и Бела рассказали ему, как гроссмейстеры без труда проводят сеансы одновременной игры против 40—50 партнеров, он тотчас воскликнул:

— Я готов хоть сейчас провести сеанс одновременной игры против двух партнеров! Не хотите ли сыграть со мной?

Андраш и его друг онемели от неожиданности. Какой-то младшеклассник, едва научившийся передвигать фигуры, осмеливается бросить дерзкий вызов им, шахматистам сильным и многоопытным! Подумать только, он собирается играть с ними одновременно на двух досках!

— Вы не ослышались, — подтвердил свое предложение Фери. — Только условимся, что я сам выберу, какими фигурами играть против вас, черными или белыми. Впрочем, пусть Бела выберет, какими фигурами он будет играть против меня, а я выберу, какими фигурами мне играть против Андраша.

Полагая, что предложение Фери не более чем шутка, Андраш и Бела согласились и расставили фигуры на двух досках. Андраш не удержался, чтобы не заметить:

— Ну, братец, если ты не проиграешь хотя бы одному из нас, придется мне съесть свою шапку!

К концу встречи над шапкой Андраша нависла серьезная угроза. Она осталась целой и невредимой лишь потому, что Фери великодушно освободил старшего брата от опрометчиво данного им обещания.

Каким образом Фери удалось не проиграть по крайней мере одну партию?

(По силе игры Фери уступал не только Андрашу, но и Беле. Разумеется, предположение о том, будто Фери мог пользоваться советами какого-нибудь четвертого лица, не упомянутого в условиях задачи, следует отбросить как совершенно необоснованное.

Цвет фигур в шахматах имеет большое значение: по существующим правилам первый ход делают белые. В сеансах одновременной игры контрольное время не устанавливается.)



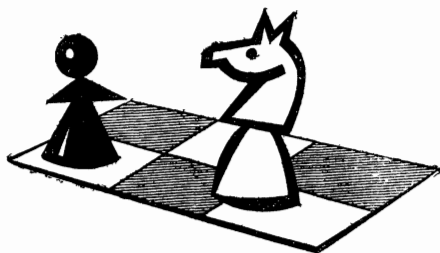
8. ШАХМАТНЫЙ МАРАФОН

Андраш и Бела (с которыми мы познакомились в предыдущей задаче) затеяли между собой крупную шахматную баталию. Результаты они записывали по особой «шестнадцатеричной системе»: 16 партий составляли «малый турнир», а 16 малых турниров (то есть $16 \cdot 16 = 256$ партий) объединялись в «большой турнир».

После упорной борьбы победу в большом турнире одержал Андраш. Малые турниры он выиграл со счетом 10:6 (в 10 турнирах ему удалось победить Белу и в 6 он потерпел поражение), а большой — со счетом 152:104. Такими результатами можно было бы по праву гордиться (ведь Бела — шахматист не из слабых, и выиграть у него не легко!), но Андраш остался недоволен.

— Принятая нами шестнадцатеричная система подсчета очков, — заявил он, — не отражает истинного соотношения сил. Ведь я не только выиграл больше малых турниров, чем Бела, но и в каждом выигранном турнире одерживал победу с более крупным счетом, чем он. Из

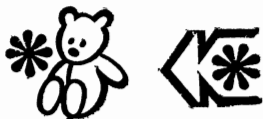
10 выигранных мной малых турниров наименьшего преимущества мне удалось достичь в том, который закончился со счетом 10:6, но мне случалось выигрывать и со счетом 14:2. Бела же из 6 выигранных им малых турниров наибольшего преимущества достиг в том, который закончился со счетом 10:6, причем это была



единственная столь крупная победа, а остальные малые турниры он выиграл со счетом 9:7 и даже $8\frac{1}{2}:7\frac{1}{2}$. Нет, что ни говорите, а шестнадцатеричная система подсчета очков далека от совершенства! Предположим, например, что и я, и Бела все свои победы в малых турнирах одержали со счетом 16:0. Тогда я выиграл бы $10 \cdot 16 = 160$ партий, а Бела — лишь $16 \cdot 6 = 96$ партий, и большой турнир закончился бы со счетом 160:96 в мою пользу. Как же могло случиться, что большой турнир я выиграл лишь со счетом 152:104? Не иначе как при подсчете очков допущена какая-то ошибка.

И Андраш принялся заново подсчитывать соотношение выигранных и проигранных партий.

Где вкралась ошибка?



9. ВЗАИМНЫЕ РАСЧЕТЫ

В бригаде Кереки, насчитывающей 17 землекопов, существует неписанный закон: всю зарплату до последнего филлера отдавать семье. Себе на мелкие расходы члены бригады оставляют лишь плату за сверхурочную работу. А поскольку сверхурочная работа подворачивается не очень часто, то утверждать, будто у землекопов карманных денег — куры не клюют, было бы неверно.

Может быть, поэтому члены бригады неукоснительно соблюдают еще один неписаный закон: по первой же просьбе давать друг другу займы небольшие суммы денег.

Когда мы пришли в дом, где жили рабочие, один из членов бригады, дядюшка Шандор, занимался приготовлением ужина. Не отрываясь от плиты, он крикнул:

— Кто одолжит мне 50 форинтов?

Тотчас откликнулись трое. Один из них протянул дядюшке Шандору купюру в 10 форинтов, а каждый из двух остальных — по 20-форинтовой купюре. Дядюшка Шандор, все так же не оборачиваясь, взял деньги, даже не взглянув на займодавцев — так он был занят, однако это не помешало ему поблагодарить товарищей.

Сгорая от любопытства, мы спросили у дядюшки Шандора:

— Кому же вы будете возвращать долг?

— Троиц из нашей бригады!

— А кому именно?

— Какое это имеет значение?

— Но ведь вы даже не знаете, кто дал вам займы?

— Не беспокойтесь, я расплачусь со всеми! Сейчас все запишу. Вот смотрите!

С этими словами дядюшка Шандор достал из кармана листок бумаги, на котором было написано:

Взял займы	Дал займы
20	40
30	15
45	80
60	

В левой графе под числом 60 дядюшка Шандор записал свой новый долг: 50. Затем с таким видом, будто он успешно завершил сложную операцию, дядюшка Шандор сложил листок, сунул его в карман и снова принялся за ужин.

Нам, с удивлением наблюдавшим за его действиями, он заметил:

— Не беспокойтесь, я записал, что взял займы 10 форинтов и 2 раза по 20 форинтов.

— Но ведь вы так и не записали, кто дал вам эти деньги.

— Верно, не записал. А зачем?

Выяснилось, что каждый член бригады точно так же, как дядюшка Шандор, вел свою «бухгалтерию». Записи делались точно и аккуратно.

— Не торопитесь с выводами, — предупредил нас дядюшка Шандор. — «Лицевые счета» у нас в бригаде ведут не все. Наш бригадир и без того обременен множеством дел, вот мы и решили освободить его от ведения «счета». По крайней мере одной заботой у него меньше! Разумеется, у него можно попросить займы и сам он берет в долг, но никаких записей при этом не делает.

Нельзя сказать, что замечание дядюшки Шандора что-нибудь для нас прояснило.

— Заметьте, — продолжал свои объяснения дядюшка Шандор, — все 17 членов бригады не берут займы на стороне. Одалживать деньги у нас принято только друг другу. Ребята из других бригад знают, что денег у нас при себе маловато, и займы не просят. Каждый год, прежде чем уйти в отпуск, все члены бригады полностью рассчитываются друг с другом.

Лишь после этого замечания дядюшки Шандора мы догадались, как они это делают.

А догадался ли читатель?

(Вряд ли нужно говорить о том, что, ссужая друг друга деньгами, члены бригады не взымают со своих должников никаких процентов.)

10. КОНФЛИКТ



Слух об образцово налаженной в бригаде Кереки взаимопомощи и простоте применяемого способа расчетов разнесся по другим бригадам. У бригады Кереки появились многочисленные последователи, в том числе бригада Шипоша. Но члены этих бригад не освободили своих бригадиров от обязанности вести «свою бухгалтерию»: во-первых, те были не так уж сильно заняты, а, во-вторых, сами рабочие еще не поднаторели в расчетах.

Разумеется, со временем они также приобрели необходимые навыки и стали поговаривать о том, что одного члена бригады можно освободить от ведения «лицевого счета». В этой связи были названы два кандидата. Работниками оба зарекомендовали себя отличными, но

орудовать инструментом им было гораздо привычнее, чем карандашом.

Один из них, не разобравшись, в чем дело, решил, что его уже освободили от ненавистой «бухгалтерии», и самовольно перестал вести свои записи. Особой беды от этого не было бы, если бы одновременно с ним и второй кандидат, не сказав никому ни слова, также не прекратил ведение своего лицевого счета, пребывая в полной уверенности, что один человек в бригаде всегда может позволить себе такую роскошь.

О том, что два члена бригады по недоразумению забросили «отчетность», остальные узнали, лишь когда захотели рассчитаться друг с другом.

Бригадир, дядюшка Андраш, обругал обоих нарушителей финансовой дисциплины:

— Нужно же быть такими разгильдяями! Ведь теперь из-за вас мы не сможем рассчитаться друг с другом, хотя у всех нас лицевые счета в полном порядке!

а. Верно ли это утверждение?

б. Как обстояло бы дело в том случае, если бы в бригаде оказалось более двух человек, самовольно переставших заниматься «бухгалтерией»?



11. ПРОКЛАДКА КАБЕЛЯ

Электрик, которого вы видите на рисунке, ломает голову над нелегкой задачей.

По дну реки проложен кабель. Под его наружной оболочкой скрыто 49 жил — 49 изолированных проводов. Вопреки установившейся практике все жилы имеют изоляцию одного цвета, поэтому определить по цвету изоляции, какой из концов проводов, торчащих из кабеля на одном берегу реки, соответствует тому или иному концу провода на другом берегу реки, не представляется возможным. (Мы говорим, что два конца «соответствуют» друг другу, если речь идет о двух концах одного и того же провода.) Электрик должен, определив концы проводов, прикрепить к ним бирки и соответствующие концы перенумеровать одинаковыми числами. Для этого в его распоряжении имеются проходящая вдоль берега реки

линия электропередачи, пробник и лодка, на которой электрик может переправляться через реку.

Сколько раз придется электрику переправиться через реку туда и обратно, чтобы решить свою задачу?



(Пробник позволяет определять, находится ли данный провод под напряжением. Если пробником прикоснуться к проводнику, находящемуся под напряжением, на его конце загорится лампочка.)

12. НЕЛЬЗЯ ЛИ БЫСТРЕЕ?



Описанный в решении предыдущей задачи способ определения «соответствующих» концов 49-жильного кабеля достаточно трудоемок, хотя электрику понадобилось всего лишь один раз переправиться на лодке с одного берега реки на другой и вернуться обратно. Но и после возвращения ему пришлось изрядно повозиться, прежде чем он смог выполнить порученное дело.

Нельзя ли как-нибудь сократить работу электрика?

13. ОБОБЩЕНИЕ



Достаточно ли электрику из задачи 12 лишь один раз переправиться с одного берега на другой и вернуться

обратно, если под оболочкой кабеля, проложенного по дну реки, скрыто не 49, а любое другое, большее или меньшее, число жил?



14. НЕПРАВИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Ученик второй гимназии Пишта безуспешно бился над домашним заданием по математике: у него почему-то никак «не сходилось» с ответом. Его младший брат Йошка, обладавший несравненно лучшими математическими способностями, с сочувствием следил за действиями Пишты, но ничем особенно не мог помочь: ведь он учился в восьмой начальной школе.

Тем не менее Пишта втайне надеялся на математические способности младшего брата. А вдруг тот что-нибудь да придумает?

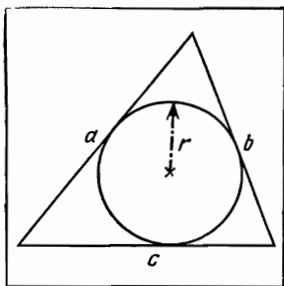


Рис. 2.

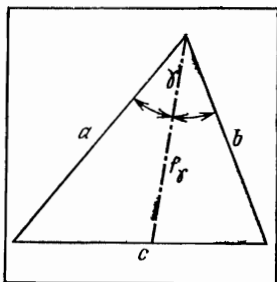


Рис. 3.

На всякий случай Пишта показал Йошке свою тетрадь:

— Видишь, здесь написаны две формулы. Я должен с их помощью вычислить некоторые величины (a , b , c — длины сторон треугольника, S — его площадь).

(1) Радиус вписанной окружности треугольника на рис. 2

$$r = \frac{2S}{a + b - c}.$$

(2) Длина биссектрисы внутреннего угла треугольника на рис. 3

$$f_{\gamma} = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Йошка внимательно посмотрел на формулы, и на его лице появилось недоверчивое выражение.

— Послушай, Пишта, — спросил он, указывая на знак квадратного корня, — что означает эта закорючка, похожая на букву V?

— Она означает, что из стоящего под ней числа нужно извлечь квадратный корень.

— А как это делается?

— Трудно тебе объяснить, — замылся Пишта. — В общем, по одному числу нужно найти другое.

— Чем больше число, тем больше квадратный корень из него?

— Да.

— Тогда обе твои формулы неправильные, — заявил Йошка, — что-то в них написано не так, как надо.

— Откуда ты знаешь? — рассердился Пишта. — Ведь ты же никогда раньше их не видел. Эти формулы учитель написал нам на доске.

— Что верно, то верно, — согласился Йошка. — Я вижу их в первый раз и понятия не имею, как они выведены. Но все же уверен, что они обе неверны. Должно быть, списывая с доски, ты допустил какие-то ошибки.

В конце концов выяснилось, что Йошка был прав: в формуле (1) Пишта перепутал один знак, а, переписывая с доски формулу (2), вместо одной буквы по рассеянности поставил другую.

Каким образом Йошка узнал, что формулы неверны?

Более того, поразмыслив, он даже сумел исправить формулу (1), задающую радиус вписанной окружности треугольника!

Часть II

Наведем порядок!

15. НЕПОЛНЫЙ КОМПЛЕКТ I



Однажды вечером маленький Пишта, ученик 2-го класса начальной школы, с виноватым видом протянул отцу дневник. Так и есть! В дневнике появилась новая

запись, сделанная учительницей. Пишта опять что-то натворил!

— Знаешь, папа, — попытался оправдаться Пишта, — учительница велела нам положить на парты по 4 кружка, подобрав их так, чтобы сумма чисел на двух первых и двух последних кружках была одинаковой (рис. 4).

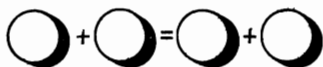


Рис. 4.

Папа Пишты знал, что в классе его сына у каждого ученика было по 100 кружков для счета. На каждом таком кружке отпечатано по одному целому числу от 1 до 100. Пользуясь кружками, ребята не раз проделывали интересные упражнения по арифметике.

— Вот я и взял кружки своего соседа, потому что свои рассыпал во время перемены, а собрать успел только 21 кружок из 100. Учительница, не разобравшись, в чем дело, потребовала дневник и записала замечание...

— Зачем тебе понадобились кружки твоего соседа? — прервал Пишту отец. — Из 21 кружка ты вполне мог выбрать 4 именно так, как сказала учительница!

— А ты в этом уверен, папа? Ведь ты же не знаешь, какие кружки у меня остались.

— Уверен, сынок! Давай-ка сюда свои кружки, и я покажу тебе, как это делается!

Основана ли на чем-нибудь уверенность отца Пишты? Не осямится ли он перед сыном?



16. СОМНЕНИЕ

Можно ли с уверенностью утверждать, что предыдущая задача имеет решение? Кое у кого на этот счет возникли сомнения.

— Да-да, — говорят они, — вполне возможно, что найдутся две пары слагаемых (чисел, стоящих на кружках для счета), дающих одну и ту же сумму. Но означает ли это, что решение задачи, которую учительница задала

Пиште, а Пишта — своему отцу, существует? Ведь не исключено, что один из кружков в двух парах с одинаковой суммой чисел общий. В этом случае различных кружков будет не 4, а всего лишь 3 и составить из них одновременно две пары невозможно!

Попробуем пояснить сказанное на примере.

Если бы у Пишты от всего комплекта осталось лишь 8 кружков для счета с числами 1, 2, 3, 4, 5, 20, 40 и 80 и требовалось бы выстроить в ряд 6 кружков так, чтобы сумма чисел на первых трех кружках совпала с суммой чисел на трех последних кружках, то, как нетрудно видеть, задача не имела бы решения. Хотя найти тройки кружков с одинаковой суммой чисел можно без особого труда (таковы, например, тройки $1 + 5 + 20$ и $2 + 4 + 20$ или $2 + 5 + 8$ и $3 + 4 + 8$), но все они имеют по одному общему кружку. Следовательно, из таких троек невозможно выстроить 6 кружков, обладающих нужным нам свойством, поскольку для этого один кружок нам пришлось бы использовать дважды.

А разве такое не может случиться, если равные суммы содержат по 2 слагаемых?

17. РАЗНОСТЬ ВМЕСТО СУММЫ



Учительница задала Пиште новую задачу. На этот раз требовалось выложить на парту 4 кружка для счета, выбрав их так, чтобы *разность* чисел на первых двух

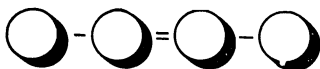


Рис. 5.

кружках совпадала с разностью чисел на двух последних (рис. 5). Наученный горьким опытом, Пишта не взял кружки для счета у соседа, а попытался решить задачу при помощи собственных оставшихся кружков.

Как, по-вашему, удалось ли ему это сделать?



18. НОВАЯ ХИТРОСТЬ

Предположим, что на 10 кружках для счета (таких, какими пользуются Пишта и его одноклассники) стоят 10 первых натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Из 10 кружков нам дали 5 (о том, какие именно кружки нам достались, ничего не известно). Можно ли выбрать 4 кружка из этих 5 так, чтобы разность чисел на двух из кружков совпадала с разностью чисел на двух других кружках?

Некто А утверждает, что это можно сделать. Действительно, воспользуемся теми же рассуждениями, которые помогли нам решить задачу 15. Наименьшая разность двух целых от 1 до 10 равна 1, наибольшая — $10 - 1 = 9$. Каким бы способом мы ни выбрали 2 кружка для счета, разность стоящих на них чисел заключена между 1 и 9. Следовательно, всего разность может принимать 9 не совпадающих между собой значений. Но из 5 кружков для счета можно составить $(5 \cdot 4) / 2 = 10$ пар. Поэтому по крайней мере для двух пар разности стоящих на них чисел будут одинаковыми.

Однако некто Б возразил:

— Вы рассуждаете неверно! Вот перед вами 5 кружков (рис. 6). Попробуйте выбрать 4 кружка так, чтобы



Рис. 6.

удовлетворить условиям задачи. Ничего у вас не получится!

Заметив растерянность А, третий участник спора, некто В, счел необходимым дать следующее пояснение:

— Рассуждение А, несомненно, ошибочно. По-моему, он не учел одно важное обстоятельство. Дело в том, что разности двух чисел могут быть не только положительными, но и отрицательными и могут принимать значения от -1 до -9 . Следовательно, разность двух чисел от 1 до 10 может принимать всего не 9, а 18 значений. Поскольку из 5 кружков для счета можно составить лишь 10 различных пар, то не исключено, что найти две пары с одинаковыми разностями стоящих на них чисел не удастся.

Кто прав:

- а. А?
- б. Б?
- в. В?

19. ПРОДОЛЖЕНИЕ ХИТРОСТИ



Прочитайте условие предыдущей задачи. (Разумеется, лучше, если читатель не только прочитает условие задачи, но и самостоятельно решит ее, а затем сопоставит свое решение с приведенным в нашей книге.)

Где ошибка в рассуждениях А?

20. ЧТО ВЫ НА ЭТО СКАЖЕТЕ?



Вернувшись домой из школы после происшествия, описанного в задаче 17, Пишта застал у себя двоюродного брата Шани, который был на 6 лет старше. Разумеется, Пишта не замедлил похвастаться, как ловко он вышел из затруднения на уроке арифметики.

— Понимаешь, — объяснил он, — у каждого из учеников нашего класса имеется по 100 кружков для счета, на которых проставлены целые числа от 1 до 100. А я свои кружки растерял, и у меня остался лишь 21 кружок. Учительница велела нам положить на парты по 4 таких кружка, чтобы разность чисел на двух первых совпадала с разностью чисел на двух последних. Хорошо, что у меня остался 21 кружок! Я смог выбрать четыре кружка, обладающие нужным свойством, и учительница не сделала мне замечания за то, что у меня не полный комплект кружков.

— Можешь считать, что тебе повезло «с запасом», братец, — заметил в ответ Шани после некоторого размышления. — Даже если бы у тебя осталось только 15 кружков, то и тогда ты мог бы решить задачу. Объяснить тебе, почему и отчего, я не буду.

И, обратившись к старшему брату Пишты Йошке, добавил:

— А вот ты силен в математике и должен понять все. Предположим, что у Пишты осталось только 15 кружков для счета. Расположим их в ряд по величине стоящих на них чисел и рассмотрим разности соседних чисел (рис. 7). Если среди них найдутся такие, значения которых повторяются, то задача Пишты имеет решение.

Если же все разности окажутся различными, то пусть d_1 — наименьшая из них. Ясно, что

$$d_1 \geq 1.$$

Следующую по величине разность обозначим d_2 . Поскольку $d_2 > d_1$, то

$$d_2 \geq 2.$$

Продолжая наши рассуждения, мы в конце концов дойдем до неравенства, которому удовлетворяет наибольшая



Рис. 7.

шая разность (чисел, стоящих на соседних кружках для счета):

$$d_{14} \geq 14.$$

Суммируя все разности от наименьшей до наибольшей, получаем неравенство

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{14} \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 14 = 105.$$

Но это невозможно. Следовательно, по крайней мере 2 разности должны быть равны и в том случае, когда от полного комплекта осталось всего 15 кружков для счета. Таким образом, Пишта, решая предложенную задачу, имел «запас» в 6 кружков.

Верны ли рассуждения Шани?

21. СПАСТИ ТО, ЧТО ЕЩЕ
МОЖНО СПАСТИ!



Йошка действительно был «силен в математике» и тотчас же указал Шани на ошибку в рассуждениях.

Шани был очень расстроен и надолго погрузился в молчание. Наконец он заметил:

— Зато 20 кружков в самом деле было бы достаточно! В этом нетрудно убедиться, перебрав одну за другой все возможные комбинации кружков.

Так ли это на самом деле?

22. НЕПОЛНЫЙ КОМПЛЕКТ II



Последнее — правильное — утверждение Шани понравилось Йошке, но не рассеяло его сомнений: Йошка считал, что и 20 кружков было слишком много. Он полагал, что задачу Пишты можно решить, располагая еще меньшим числом кружков.

Йошка до тех пор ломал голову над этим вопросом, пока ему действительно не удалось многое выяснить. Итог его упорных размышлений сводился к следующему.

На каждом из кружков для счета проставлено по одному целому числу от 1 до 100. Если из полного комплекта в 100 кружков изъято 84 кружка, то из оставшихся 16 кружков всегда можно выбрать 4 кружка так, чтобы сумма чисел, стоящих на первых двух кружках, совпадала с суммой чисел на третьем и четвертом кружках.

О своем результате вместе с доказательством Йошка сообщил Шани. Однако тот не поверил ему на слово и счел необходимым шаг за шагом проследить все доказательство (мы также могли бы подтвердить его правильность).

Воспроизведите возможный ход рассуждений Йошки.



23. ПОРАЗМЫСЛИМ ЕЩЕ!

Вместе со своими братьями, также увлекающимися математикой, Йошка задумал составить такой набор из неотрицательных (целых) чисел меньше 100, из которого нельзя было бы выбрать 4 числа так, чтобы разность каких-нибудь двух из них совпадала с разностью двух остальных чисел. Братьям очень хотелось, чтобы их набор содержал как можно больше чисел.

Из решения предыдущей задачи известно, что из 16 кружков Пишта всегда смог бы выбрать 4 кружка, обладающих всеми необходимыми свойствами, и решить предложенную учительницей задачу. Но этим интересующий братьев вопрос не исчерпывается, поскольку осталось неизвестным, всегда ли сможет Пишта решить задачу при числе кружков меньше 16.

Например, если бы Йошке удалось построить свой набор из 13 чисел, то тем самым было бы доказано, что из 13 кружков Пишта не всегда сможет выбрать 4 кружка, удовлетворяющих условиям заданной ему задачи (так же как в предыдущей задаче число кружков нельзя было бы понизить с 16 до 14).

Один из братьев Йошки, Андраш, приступил к составлению набора, взяв числа

4, 5, 12, 16, 18, ...

Однако Йошке такое начало не понравилось. Почему?

24. ПОРАЗМЫСЛИМ ЕЩЕ НЕМНОГО!



Андраш, Йошка и Шани совместными усилиями принялись усовершенствовать набор чисел, приведенный в предыдущей задаче.

— Йошка прав, — признал после решения предыдущей задачи Андраш, — набор лучше всего начать с 1.

— А затем должны идти числа 2 и 3, — предложил Йошка. — Они целые и идут подряд, одно за другим, чаще некуда!

— Осторожно! — вступил в беседу Шани. — Две разности уже совпали! Ведь $3 - 2 = 2 - 1$. Разумеется, ничего плохого в этом нет, — тотчас же пояснил он, — поскольку числа 1, 2 и 3 образуют симметричную тройку и ничто не мешает нам двигаться дальше. О том, чтобы

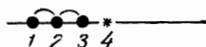


Рис. 8.

включить в наш набор число 4, не может быть и речи, поскольку это был бы уже третий шаг с разностью 1, а две совпадающие разности $4 - 3 = 2 - 1$ уже противоречат требованиям, по которым мы отбираем числа (рис. 8).

— Число 5 нам, по-видимому, подходит, — сказал Андраш. — Правда, вместе с числами 1 и 3 оно образует симметричную тройку, но беды в этом нет (рис. 9).

— Если мы включим в набор пятерку, то числа 6 и 7 нам придется пропустить, — заметил Йошка, — поскольку разности 1 и 2 нам уже встречались в симметричных тройках.

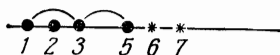


Рис. 9.

— И восьмерку придется пропустить, — необдуманно заявил Андраш, — поскольку разность 3 нам также встречалась.

— Но не в симметричной тройке чисел, — набросились на него сразу остальные братья (рис. 10).



Рис. 10.

Затем выяснилось, что дальше подряд идут 4 «плохих» числа — 9, 10, 11 и 12 (рис. 11) — и ближайшее

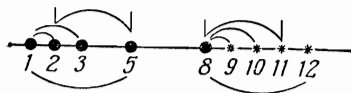


Рис. 11.

к 8 число, которое можно включить в набор, равно 13 (рис. 12).

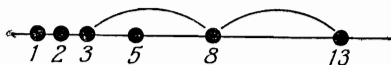


Рис. 12.

Последующие рассмотрения показали, что следом за 13 идет число 21.

Едва братья выписали готовую часть набора

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...,

как Шани воскликнул:

— Есть!

— Что есть?

— Да вы только взгляните на числа! Обнаруживается довольно любопытная закономерность!

$$3 = 1 + 2,$$

$$5 = 2 + 3,$$

$$8 = 3 + 5,$$

$$13 = 5 + 8,$$

$$21 = 8 + 13.$$

Каждое число равно сумме двух предыдущих! По-видимому, по этому правилу удобнее всего выписывать и все последующие члены набора.

А что вы думаете по поводу открытия Шани?



25. ВЕРНО ЛИ?

Полученный в решении предыдущей задачи набор чисел

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 30, 39, 53, 74, 95

можно назвать «минимальным» в том смысле, что он начинается с наименьшего натурального числа (с единицы) и каждый последующий его член также выбирается наименьшим из возможных.

Более точно определение «минимальности» можно было бы сформулировать следующим образом: наименьшее число в наборе мы полагаем равным 1, а все последующие члены всегда выбираем так, чтобы они были наименьшими из всех чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

Построенный братьями «минимальный» набор содержит 12 чисел. Доказано ли тем самым, что не существует набора, состоящего из 13 чисел, то есть что если бы у Пишты из 100 кружков для счета вместо 21 (или соот-

ветственно 16) осталось лишь 13 кружков, то он всегда смог бы выбрать из них 4 кружка, удовлетворяющих условиям заданной учительницей задачи?

26. ПИШТА СНОВА В БЕДЕ



У Пишты опять неприятности, хотя папа купил ему новый комплект кружков для счета и он снова стал обладателем всех 100 кружков.

На уроке арифметики учительница взяла 5 первых кружков (с числами 1, 2, 3, 4, 5) и сказала:

— Пусть каждый из вас разделит эти 5 кружков на 2 группы, но не как кому вздумается! Каждая группа должна содержать не менее двух кружков, а если я пойду и укажу на 2 кружка в любой из групп, то разность стоящих на них чисел не должна совпадать ни с одним из чисел, принадлежащих той же группе!

— А какие 2 кружка вы выберете? — посыпалось со всех сторон.

— Этого я вам заранее не скажу! Знайте лишь, что оба числа я всегда буду выбирать из одной и той же группы!

Ребята с увлечением принялись за дело. Пишта старался изо всех сил целых пять минут, но решить задачу так и не смог. На душе у Пишты становилось все тревожнее: ведь по арифметике у него всегда стояло «отлично»!

Велика ли в действительности опасность, угрожающая отличной оценке Пишты?

(Отрицательных чисел Пишта еще не знает. Под разностью двух чисел он всегда понимает результат вычитания из большего числа меньшего.)

27. ТЫСЯЧА ВМЕСТО ПЯТИ



Как выяснилось в решении предыдущей задачи, 5 чисел, приведенных в ее условии (1, 2, 3, 4 и 5), нельзя разделить на две группы так, чтобы разность любых

двух чисел, взятых из одной группы, не совпадала с каким-нибудь из чисел, принадлежащих той же группе.

А как будет обстоять дело, если вместо 5 взять натуральные числа от 1 до 1000: 1, 2, 3, 4, ..., 998, 999, 1000? На сколько групп следует их разделить, если требуется, чтобы в каждой группе содержалось не менее двух чисел, причем положительная разность любых двух чисел в каждой группе не должна совпадать ни с одним из чисел в той же группе?

Уже известно, что двух групп заведомо недостаточно, поскольку первые 5 чисел невозможно разделить на две группы с соблюдением всех остальных требований задачи.

Некоторые полагают, будто 1000 чисел удастся разделить на 10 частей. Верно ли это?

28. ДАЛЬШЕ НЕКУДА



Рассмотрим еще раз первое из решений предыдущей задачи. Обратите внимание на то, что в III, IV и последующих группах основная идея решения использована не полностью (это хорошо видно на рис. 67 и 68).

Каким образом, исходя из принципа, заложенного в первом решении, можно было бы производить разбиение на большее число групп и каково наибольшее N , до которого натуральные числа удастся разбить лишь на 10 групп?

29. ДЕВЯТЬ ГРУПП



Попытайтесь воспользоваться способом, изложенным в решении задачи 27, и произвести разбиение первой 1000 натуральных чисел на 9 групп.

Возможно ли это?

30. НАЧНЕМ С САМОГО НАЧАЛА!



В решении задачи 28 первые 3 группы выглядели следующим образом:

- I группа: 1, 4.
II группа: 2, 3.
III группа: 5, 6, 7, 8, 9.

Число 10 входило уже в другую группу, но *вводить новую группу вряд ли стоило*, поскольку его можно было бы, например, включить в I группу.

Будем рассматривать по порядку натуральные числа, начиная с 1, и попытаемся разбить их на 3 группы.

Когда впервые возникнет необходимость во введении новой (четвертой) группы?



31. ОДНОЙ ГРУППОЙ БОЛЬШЕ

Выяснилось (см. решение предыдущей задачи), что первые 13 натуральных чисел можно разбить на 3 груп-

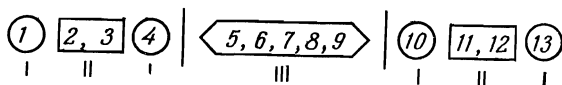


Рис. 13.

пы (такое разбиение изображено на рис. 13; числа, входящие в одну группу, либо обведены одной рамкой, либо заключены в рамки одинаковой формы).

Опираясь на этот результат, разбейте первые 40 натуральных чисел на 4 группы!

32. ОТ СТАРЫХ ГРУПП — К НОВЫМ



Одна из групп содержит n натуральных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Они упорядочены по мере возрастания $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ так, что x_1 — наименьшее, а x_n — наибольшее число в группе.

Доказать, что если число y по крайней мере в 2 раза превосходит по величине наибольшее из чисел группы (то есть удовлетворяет неравенству $y \geq 2x_n$), то все числа

$$x_1 + y, x_2 + y, \dots, x_n + y$$

и $x_1, x_2, \dots, x_n$ принадлежат одной и той же «расширенной» группе.

33. ВСЕГО ЛИШЬ 7 ГРУПП



Разбить натуральные числа от 1 до 1093 на 7 групп так, чтобы разность любых двух чисел, принадлежащих одной группе, не совпадала ни с одним из членов той же группы!

34. ЮЛИШКА ЛЮБИТ ПОПРЫГАТЬ



Маленькая Юлишка учится лишь в третьем классе начальной школы, но ей очень хочется заниматься в математическом кружке для старшеклассников. И хотя Юлишка очень умная девочка, учитель математики, который руководит занятиями кружка, все же считает, что ей полезнее бегать и прыгать со своими сверстниками. Пусть до поры резвится и играет, как другие дети.

— Ты, наверное, обратила внимание на то, что к дверям школы ведет лестница с двенадцатью (можешь проверить!) ступеньками, — сказал он как-то раз в ответ на настойчивые просьбы Юлишки допустить ее на занятия кружка. — Так вот, приходи каждое утро за четверть часа до начала уроков и поднимайся по лестнице. Я знаю, что ты любишь прыгать, и поэтому разрешаю тебе, если захочешь, перепрыгивать через одну ступеньку, то есть подниматься сразу на две ступеньки. За один раз шире все равно не шагнешь. На одни ступеньки ты при этом наступаешь, другие пропускаешь, поэтому подняться по лестнице можно по-разному в зависимости от того, на какие ступеньки ты наступишь.

Каждую ступеньку ты можешь преодолеть двумя способами: либо наступить на нее, либо перепрыгнуть. Вот когда ты поднимаешься по лестнице всеми возможными способами, я, так и быть, зачислю тебя в кружок.

— А если я уже поднялась по лестнице, можно ли мне вернуться вниз? — попыталась схитрить Юлишка. —



Ведь за 15 минут до начала уроков я успею взбежать по лестнице не один, а много раз!

— Нет, — твердо ответил учитель, — каждый день подниматься по лестнице разрешается только один раз.

Теперь Юлишка, поднимаясь по лестнице, внимательно смотрит себе под ноги: ведь каждый раз ей нужно наступать на другие ступеньки, чтобы как можно скорее попасть в математический кружок для старшеклассников.

Сколько раз ей придется подняться по лестнице, прежде чем исполнится ее заветное желание?

35. ТРАМВАЙНЫЕ БИЛЕТЫ



В будапештских трамваях нет кондуктора. Пассажиры заранее приобретают билеты (рис. 14), а войдя в вагон, пробивают в своем билете определенную

комбинацию отверстий установленным специально для этого компостером. На каждом билете имеется по 9 клеток, а компостер прокалывает 1, 2, 3 или 4 из них. Рас-

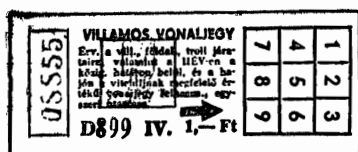


Рис. 14.

положение отверстий для каждого маршрута выбирается по-разному (рис. 15). Всего существует 255 различных комбинаций.

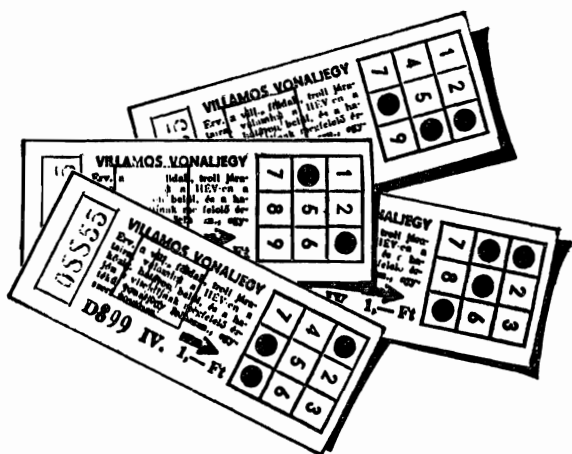


Рис. 15.

[Те, кто немного знаком с комбинаторикой, могут подсчитать сами:

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 9 + 36 + 84 + 126 = 255.]$$

Аналогичная система принята и в столице Бергенгоции городе Бергенгоцпonte. Отличается лишь способ

компостирования. На каждом билете имеется не 9, а 11 клеток (кружков), и расположены они не в виде квадрата, а вытянуты в ряд одна за другой (рис. 16). Из двух соседних клеток пробивать разрешается не более одной. Билет с двумя пробитыми соседними клетками считается недействительным. (Во избежание неприятностей конструкторы компостеров в бергенгоцпонтских трамваях приняли особые меры предосторожности,

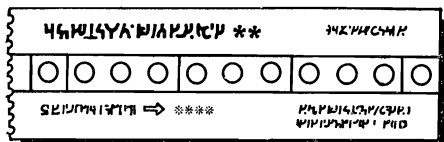


Рис. 16.

исключающие появление отверстий в двух соседних клетках.) Так же как и в Будапеште, проезд в трамвае славного города Бергенгоцпонта не считается оплаченным, если в билете не пробито ни одного отверстия.

Где отверстия, пробиваемые компостером в трамвайных билетах, образуют большее число допустимых комбинаций: в Будапеште или в Бергенгоцпонте?

36. БУСЫ



На занятиях кружка «Умелые руки» Евочка сделала себе красивые бусы (рис. 17). Учительница, проводившая занятия, попросила всех (и мальчиков, и девочек) взять по 11 бусин — 3 красные и 8 белых — и нанизать их на зеленую нитку.

— Поскольку красных бусин мало, их нужно распределить так, чтобы 2 красные бусины не оказались рядом, — сказала учительница. — Кроме того, вы должны постараться, чтобы все бусы получились разными.

Девочки сразу принялись за дело и только время от времени переговаривались между собой. Их очень интересовало, удастся ли сделать все нитки бус различными.

Трое мальчиков — Шани, Золи и Йошка, — наоборот, не горели особым желанием нанизывать бусины, считая, что это — не мужское дело. От скуки за неимением лучшего они достали книгу (ту самую, которую вы держите сейчас в руках) и, спрятав ее под партой, решили перелистать. Книга раскрылась на задаче 35. Друзья тотчас

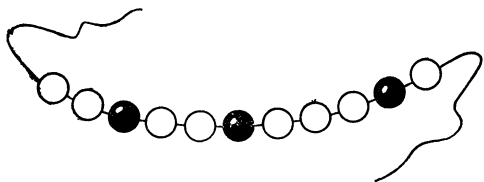


Рис. 17.

уже принялись что-то подсчитывать, шепотом спорить друг с другом и показывать торопливо проделанные выкладки.

— Шани, Золи, Йошка! Почему вы шумите и не заняты делом? — была вынуждена наконец сделать им замечание учительница.

— Именно делом мы и заняты! — с гордостью возразил Шани. — Нам удалось выяснить, что девочки могут не волноваться. Все смогут сделать себе бусы, не похожие друг на друга. Бусины на нитку можно нанизать 84 различными способами, а нас в кружке всего лишь 45 человек.

— Очень хорошо, что вы все подсчитали, — согласилась учительница, — плохо лишь, что сами не сделали бус.

— Наши бусы все равно оказались бы лишними, — попробовал защищаться Золи — По-моему, бусины на нитку можно нанизать только 42 способами. Следовательно, все бусы могут быть разными лишь в том случае, если мы вдвоем воздержимся от работы.

— К сожалению, Шани и Золи все же придется заняться изготовлением бус, — вмешался в разговор Йошка. — Поскольку бусины на нитку можно нанизать лишь 44 способами, то от участия в работе придется освободить только одного человека — меня.

Кто из ребят не ошибся в своих расчетах?

87. БРАСЛЕТ ИЗ БУС



Между тем Евочка завершила работу, за которую принялась в предыдущей задаче: нанизала на нитку 11 бусин. Внимательно проверив все бусы, она убедилась, что ни у кого нет и двух одинаковых нитей. Евочка связала концы своей нити, а узелок ловко запрятала, втянув его в одну из бусин. Получилась нитка «без конца и без начала»! Евочке ее работа очень понрави-

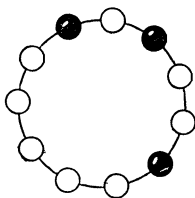


Рис. 18.

лась (рис. 18), и она показала ее руководительнице кружка:

— Посмотрите, пожалуйста, какой красивый браслет у меня получился! Пусть и все остальные сделают себе такие браслеты! Ведь все нити бус различны. Значит, и браслеты получатся разные. У каждой девочки — свой, не похожий ни на один другой!

Так ли будет на самом деле?

88. БРАСЛЕТЫ



Сколько получится различных браслетов, если все остановятся на способе, предложенном Евочкой в предыдущей задаче, и захотят из своих бус сделать браслеты?

(При сравнении браслетов во внимание принимается лишь последовательность, в которой бусины нанизаны на нитки, но не расстояние между бусинами.)

Часть III

Поговорим о деньгах



39. СОРОКА-ВОРОВКА

Как-то раз Пишта подобрал выпавшего из гнезда птенца сороки и принес домой, чтобы выкормить. Сначала все шло терпимо, но когда птенец подрос и принялся летать по квартире, начались неприятности: то и дело стали исчезать мелкие монеты. И мама, и папа подозревали, что виновник пропаж Пишта.

— Если тебе нужны деньги, — говорили они, — попроси, но не бери втихомолку!

Напрасно бедный Пишта уверял разгневанных родителей в своей невиновности — ему не верили. Как часто бывает в таких случаях, все выяснилось совершенно неожиданно. Убирая квартиру, мама обнаружила в укромном уголке 10 монет (все до единой — новенькие, блестящие). Половина из них (5 монет) была в филлерах¹, то есть достоинством менее 1 форинта, а каждая из 5 остальных монет — достоинством не менее 1 форинта. После подсчетов выяснилось, что всего в тайнике сороки-воровки было 13 форинтов 40 филлеров.

Определите, сколько монет и какого достоинства она похитила.

(При решении этой и последующих задач необходимо иметь в виду, что в Венгрии имеют хождение монеты достоинством в 10, 20 и 50 филлеров и в 1, 2, 5 и 10 форинтов.)

¹ В 1 форинте — 100 филлеров. — *Прим. перев.*

40. КРАЖИ ПРОДОЛЖАЮТСЯ



После того как вина сороки была неоспоримо доказана, Пишта весьма строго посмотрел на птицу и, укоризненно покачав головой, сказал:

— Ай-яй-яй!

К сожалению, его порицание не возымело желаемого действия: сорока по-прежнему продолжала воровать деньги. Не прошло и нескольких дней, как она украла 11 монет на сумму 15 форинтов, причем 6 монет были достоинством меньше форинта. Монет достоинством в 1 форинт среди похищенных оказалось больше, чем монет достоинством в 5 форинтов, а монет достоинством в 2 форинта — не меньше, чем монет достоинством в 10 форинтов.

Можно ли установить, сколько монет каждого достоинства похитила негодная птица?

41. ОДНО ЛИ И ТО ЖЕ?



Дядюшка Янош подошел к окошечку кассы, чтобы получить зарплату.

— Мелких денег нет, поэтому (1) *мне придется выдать причитающуюся вам сумму наименьшим числом купюр*, — сказал ему кассир.

— Что верно, то верно, — подтвердил дядюшка Янош, пересчитывая полученные деньги. — (2) *Ни одну купюру нельзя разменять другими*.

Одно ли и то же означают утверждения (1) и (2), выделенные курсивом?

42. «ЭКОНОМНАЯ» ВЫПЛАТА



В Бергенгоции принята довольно сложная денежная система. Основной денежной единицей считается 1 бергенгоцийский дукат. В обращении находятся золотые монеты достоинством в 1, 2, 8 и 10 дукатов. Монет и купюр более крупного достоинства не существует.

Гражданину Бергенгоции Эгону Бергу понадобилось взять со своего счета 25 дукатов. Не желая до отказа набивать кошелек (по крайней мере столь незначительной суммой денег), он решил, что удобнее всего обойтись минимальным числом монет, и обратился к кассиру с просьбой:

— Не откажите в любезности выплатить мне 25 дукатов монетами достоинством покрупнее. Разумеется, было бы лучше всего, если бы вы выплатили причитающуюся мне сумму монетами самого большого достоинства, какое только возможно.

Как по-вашему, может ли быть уверенность в том, что при выплате Эгону Бергу 25 дукатов «монетами самого большого достоинства, какое только возможно», число монет окажется наименьшим?

43. ДЕНЕЖНАЯ РЕФОРМА В БЕРГЕНГОЦИИ



В Бергенгоции задумали ввести новую денежную единицу — бергенгоцийский талер. В связи с предстоящей денежной реформой возник вопрос о том, монеты какого достоинства надлежит выпускать казначейству.

Испокон веков тройка и пятерка у жителей Бергенгоции считались счастливыми числами, поэтому один историк предложил чеканить монеты достоинством в 3 и 5 талеров. В обоснование своего предложения он сослался также на то, что монеты двух указанных достоинств позволяют уплачивать любую сумму, выражающуюся целым числом талеров, а если сумма достаточно велика, то к тому же «рассчитываться сполна», то есть без сдачи. Тому, кто принимает деньги, пришлось бы давать сдачу лишь в тех случаях, когда уплате подлежали бы суммы в 1, 2, 4 или 7 талеров.

Верно ли это?

44. ДРУГОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ



Помимо историка, предложившего чеканить монеты со «счастливым числом» талеров, в обсуждении предстоящей денежной реформы приняли участие и другие

граждане Бергенгоции. Один из них, признавая неоспоримые достоинства счастливых чисел 3 и 5 и удобство основанной на них системы денежных расчетов, все же счел монеты достоинством в 3 и 5 талеров слишком мелкими и предложил выпустить монеты достоинством в 5 и 8 талеров.

— В основу предлагаемого мной варианта, — сообщал он в письме, направленном в казначейство Бергенгоции, — также положены монеты двух достоинств. Вполне очевидно, что любую сумму, которую удастся выплатить монетами достоинством в 3 и 5 талеров, можно также выплатить и монетами достоинством в 5 и 8 талеров. Не менее очевидно и то, что начиная с некоторой суммы (когда размеры платежа превышают определенное число талеров) все выплаты, производимые монетами двух предлагаемых мной достоинств, можно производить без сдачи.

Верны ли (и так ли уж очевидны) утверждения автора письма?

45. СПОР ПРОДОЛЖАЕТСЯ



Спор о наиболее удобной денежной системе в Бергенгоции, начало которого описано в двух предыдущих задачах, продолжался. Среди его участников были и такие, которые считали монеты достоинством в 5 и 8 талеров также слишком мелкими и предлагали ввести монеты более крупного достоинства. Например, некоторые ратовали за то, чтобы выпускать монеты достоинством в

- (А) 8 и 13,
- (Б) 21 и 34,
- (В) 144 и 233

талера.

Сторонники каждого из трех предложений ссылались на то, что монетами двух предпочитаемых ими достоинств можно уплатить любую сумму, выражающуюся целым числом талеров, причем если сумма достаточно велика, то расчет может быть точным, без сдачи.

В каких из трех приведенных случаев это утверждение верно и в каких — нет?

46. НОВЫЕ ЧИСЛА



Три приведенных в предыдущей задаче (и множество других, о которых мы не упоминали) варианта будущей денежной системы в Бергенгоции возникли не случайно. Дело в том, что жители Бергенгоции отдают предпочтение не только тройке и пятерке, но и любым числам Фибоначчи (быть может, потому, что эти числа естественно появляются при описании различных явлений природы). Вероятно, такую же «подоплеку» имеют и новые варианты. Их авторы предлагают выпускать монеты достоинством в

(Г) 2 и 8,

(Д) 3 и 21,

(Е) 21 и 144

талера.

О каком из этих трех проектов можно сказать, что монеты двух предлагаемых им достоинств позволяют выплачивать любую сумму, равную целому числу талеров, а если сумма достаточно велика, то делать это без сдачи?

47. НЕОЖИДАННЫЙ ПОВОРОТ



Споры вокруг предстоящей денежной реформы в Бергенгоции все ширились, страсти разгорались. Многие высказывались в поддержку трех предложений из задачи 45, ссылаясь на то, что они основаны на числах, непосредственно следующих за освещенными многовековой традицией «счастливыми» числами. Наоборот, причину неудачи, постигшей авторов проектов, которые приведены в задаче 46, многие объясняли тем, что те выбрали свои числа вразброс.

Нужно ли говорить о том, что предложение о выпуске монет достоинством в 4 и 11 талеров при таких обстоятельствах прозвучало как гром среди ясного неба. Ведь ни 4, ни 11 не были «счастливыми» числами! Тем не менее автор нового проекта утверждал, что мо-

нетами достоинством в 4 и 11 талеров можно выплатить любое целое число талеров, а если подлежащая выплате сумма достаточно велика, то обойтись без сдачи.

Верно ли это утверждение?

48. НЕОЖИДАННОЕ РЕШЕНИЕ



Спор, разгоревшийся вокруг денежной реформы, утих именно в тот момент, когда страсти достигли наибольшего накала. Национальный банк Бергенгоции неожиданно объявил о выпуске новых монет достоинством в 3 и 5 талеров.

Сколькими способами можно выплатить без сдачи новыми бергенгоцийскими монетами 49 талеров?

Часть IV

Логика на весах

49. КАКАЯ ИЗ МОНЕТ ФАЛЬШИВАЯ?



Когда пожилая женщина, сидевшая в аптеке за кассой, спохватилась, было уже поздно: негодного мальчишки, подсунувшего ей фальшивую двухфоринтовую монету, и след простыл. Принимая деньги, она почувствовала, что монета подозрительно легка, но в спешке машинально бросила ее в отделение кассы, где лежали другие двухфоринтовые монеты. И вот теперь до самого закрытия никому нельзя давать сдачу двухфоринтовыми монетами.

При подсчете дневной выручки выяснилось, что в кассе набралось 81 двухфоринтовая монета. Среди них-то и нужно было найти более легкую фальшивую монету. Хорошо еще, что под руками оказались точные

равноплечие весы с двумя чашками. Это позволяло ускорить поиски, что было весьма кстати, поскольку кассиру приходилось поторапливаться: ведь деньги еще нужно было сдать на почту, да и дома накопилось немало дел.

Достаточно ли четырех взвешиваний для того, чтобы найти более легкую фальшивую монету?

(Условимся раз и навсегда, что все настоящие двухфоринтовые монеты в точности равны по весу. Это соглашение распространяется и на все остальные задачи IV части.)

50. НА ВЕСАХ С ОДНОЙ ЧАШЕЙ



Известно, что среди 64 двухфоринтовых монет имеется одна фальшивая монета, которая легче настоящих. Ее необходимо найти. Для этого можно воспользоваться весами, но не такими, на которых взвешивал монеты кассир из предыдущей задачи, а одночашечными. Правда, их можно отрегулировать так, чтобы на шкале, где стрелка показывает вес предмета, стоящего на единственной чаше, каждое деление соответствовало весу одной двухфоринтовой монеты (рис. 19).

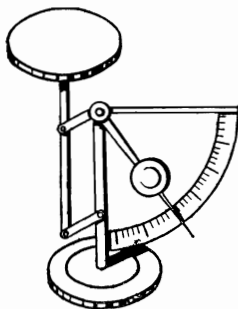


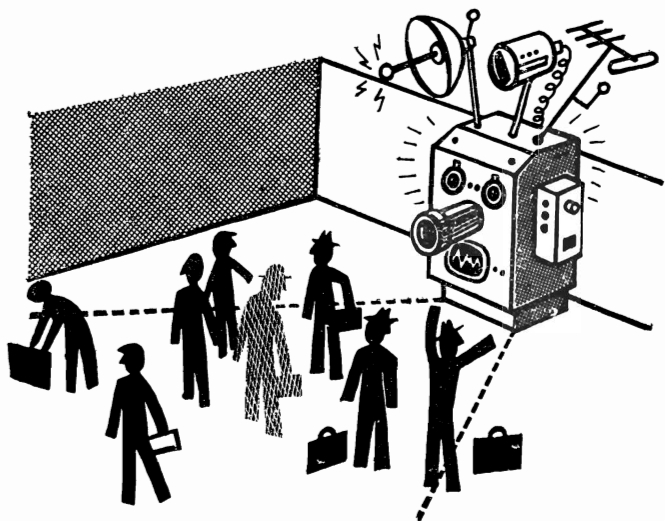
Рис. 19.

Верно ли, что шести взвешиваний на таких весах всегда достаточно для того, чтобы определить фальшивую монету?

51. ПРОИСШЕСТВИЕ В АЭРОПОРТУ



Комфортабельный лайнер авиакомпании «Биг Эйр» задержан в последний момент перед взлетом: выяснилось, что находящийся среди пассажиров вооруженный террорист намеревается угнать самолет. Всех 128 пассажиров, следующих отложенным рейсом, необходимо срочно подвергнуть личному досмотру.



В здании аэропорта для этого специально установлено контрольное устройство, позволяющее безошибочно определять, имеются ли у кого-нибудь из людей, находящихся в секторе обзора, металлические предметы. Разумеется, можно было бы обратиться по радио к пассажирам с просьбой выложить из карманов и ручной клади все металлические предметы и по очереди пройти перед контрольным устройством. Но времени для индивидуального досмотра не оставалось, и представитель авиакомпании решил провести пассажиров перед бдительным «оком» контрольного устройства не поодиночке, а группами.

Выстроив всех пассажиров в ряд перед объективом устройства, представитель авиакомпании убедился, что сведения о предполагаемом угоне самолета не лишены оснований: кто-то из пассажиров упорно не желал расстаться с каким-то металлическим предметом. Но кто именно? Ответа на этот вопрос контрольное устройство, разумеется, дать не могло. Представителю авиакомпании пришлось разбить пассажиров на группы таким образом, чтобы наименьшее число раз включать контрольное устройство.

Сколько самое большее раз придется включать контрольное устройство при наиболее удобном способе разбиения на группы, если доподлинно известно, что вооружен лишь 1 пассажир из 128?

52. ЦЕЛЫЙ ЯЩИК ФАЛЬШИВЫХ МОНЕТ



Прежде чем читатель схватится за кошелек и примется в испуге проверять, не подсунули ли ему монеты из этого ящика, нам бы хотелось успокоить его и заверить, что его «казне» ничто не угрожает: фальшивые монеты не успели поступить в обращение. Дело в том, что их изготовили не в мастерской профессиональных фальшивомонетчиков, а... на монетном дворе казначейства Бергенгоции! Один из автоматов, выпускавших пятигрошовые монеты, оказался плохо отрегулированным и, прежде чем неисправность удалось устранить, успел отчеканить 1000 монет, каждая из которых была на 1 грамм легче стандартного веса.

Необходимо срочно установить, какая из тысяч монет выпущена с браком, но сделать это отнюдь не просто. Монетный двор Бергенгоции выпускает пятигрошовые монеты сериями по 1000 штук. Каждую серию упаковывают в отдельный ящик. Сто таких ящиков составляют партию, которую на специальной автомашине с бронированным кузовом перевозят в национальный банк Бергенгоции. Когда брак был обнаружен, погрузка партии в «сейф на колесах» уже началась. В одном из 100 ящи-

ков находились пятигрошовые монеты, каждая из которых была на 1 грамм легче стандартной, но, в каком именно ящике оказалась «фальшивая» серия, никто не знал.

Что делать? Бракованные монеты ни в коем случае нельзя пускать в обращение. Взять из всех 100 ящиков по одной монете и взвесить их на аптекарских весах?

Нет, от этой мысли сразу пришлось отказаться. Дело в том, что по существующим в казначействе Бергенгоции строгим правилам в случае массового брака взвешивание разрешается производить лишь на особо точных электронных весах. За 1 раз на них можно взвешивать до 100 000 монет, а чувствительность их столь велика, что они улавливают отклонение в одну десятую грамма. Но эксплуатация столь совершенного прибора обходится недешево, и поэтому число производимых взвешиваний необходимо сводить до минимума.

Сколько взвешиваний необходимо произвести на электронных весах бергенгоцийского казначейства, чтобы определить, в каком из ящиков находятся бракованные монеты?

53. ДВА ЯЩИКА ФАЛЬШИВЫХ МОНЕТ



Как следует поступить контролерам бергенгоцийского монетного двора, если перед отправлением очередной партии пятигрошовых монет выяснится, что бракованные монеты, каждая из которых на 1 грамм легче стандартной, заполняют не 1 ящик, как в предыдущей задаче, а 2 ящика, но не известно, в каких именно ящиках находятся «фальшивые» монеты?

Утверждают, будто для решения этой задачи достаточно провести лишь 2 взвешивания: одно из них — так же, как и в решении предыдущей задачи, а другое — перенумеровав предварительно все ящики в обратном порядке (то есть сделав первым тот ящик, который был последним (100-м), вторым — ящик, который был предпоследним (99-м), и так далее.

Верно ли это утверждение?

53а. ЕЩЕ РАЗ
О ДВУХ ЯЩИКАХ
ФАЛЬШИВЫХ МОНЕТ



Как правильно ответить на вопрос, сформулированный в первом абзаце условия предыдущей задачи? Сколько потребуется взвешиваний для того, чтобы определить 2 ящика с бракованными монетами?

54. «ЮВЕЛИРНАЯ» ЗАДАЧА

Мастерская, занимающаяся изготовлением ювелирных изделий, получила срочный заказ, для выполнения которого ей понадобится израсходовать большое количество золота. Разумеется, драгоценный металл необходимо тщательно взвесить: в ювелирном деле с сырьем принято обращаться бережно.

Взвесить требуемое количество золота было бы нетрудно, поскольку каждое готовое изделие должно содержать лишь целое число граммов золота, но, к сожалению, все разновесы оказались занятыми, а раздобыть новые комплекты было неоткуда. Не оставалось ничего другого, как использовать в качестве разновесов весь наличный запас ранее изготовленных ювелирных изделий, из которых одни были весом 5 г, а другие — весом 8 г. Хорошо еще, что импровизированные гири позволяли отвешивать ровно столько граммов золота, сколько шло на изготовление каждого нового изделия, и на складе готовой продукции оказался практически неограниченный запас изделий обоих типов (весом 5 и 8 г).

а. Сколько граммов золота можно отвесить за 1 раз на равноплечих весах при помощи таких «гирь», если их класть на обе чаши весов?

б. Сколько граммов золота можно отвесить, если класть «гири» лишь на одну чашу весов?

(Подчеркнем еще раз, что отвешивать необходимо лишь целое число граммов.)

Часть V

Возьмем не глядя!

55. СКОЛЬКО ВЗЯТЬ ЧУЛОК?



Приглашаем читателя посетить вместе с нами галантерейный магазин, специализирующийся главным образом на продаже уцененных товаров с небольшим браком. На полках магазина и в подсобном помещении различного рода остатки со складов и баз нередко хранятся навалом, в «живописном порядке».



Именно так работники магазина поступили сначала и с большой партией чулок и перчаток, но вскоре выяснилось, что небрежное хранение причиняет товару значительный ущерб. С тех пор в магазине стали внимательно следить за тем, чтобы в подсобном помещении в одну и ту же коробку всегда попадали однотипные изделия. (Чулки, взятые из одной коробки, должны отличаться самое большее по цвету, а перчатки, кроме того, могут быть на правую и на левую руку.) Все коробки снабдили надписями, позволявшими судить об их содержимом.

Разумеется, продавщицы и без надписей знали, что находится в любой коробке. Обслуживание покупателей — дело довольно хлопотное, тем более что заведующий магазином не разрешал приносить чулки и перчатки из подсобного помещения в торговый зал целыми коробками. А тут еще в «подсобке» погас свет. Это неприятное обстоятельство поставило перед заведующим массу проблем и вопросов, в том числе следующих.

На одной из полок в подсобном помещении стоят несколько коробок, в каждой из которых находятся по 10 пар черных и по 10 пар белых чулок. (Разумеется, в одной коробке хранятся чулки одного размера.) Сколько чулок¹ следует взять в темноте из такой коробки для того, чтобы на свету из них заведомо можно было выбрать:

- а. 1 пару чулок?
- б. 1 пару белых чулок?
- в. 2 пары чулок?
- г. 2 пары чулок одного цвета?
- д. 2 пары чулок различного цвета?
- е. 2 пары белых чулок?
- ж. 5 пар чулок?
- з. 3 пары белых и 2 пары черных чулок?

(Каждый пункт следует рассматривать отдельно.)

56. ПОДБЕРЕМ ЧУЛКИ ПО ЦВЕТУ



В одной коробке хранятся n черных и белых чулок. Количество чулок каждого цвета неизвестно.

Сколько чулок нужно взять в темноте из коробки для того, чтобы на свету из них можно было подобрать k пар?

(И в этой и в аналогичных задачах, приводимых ниже, предполагается, что чулки, находящиеся в одной коробке, отличаются лишь цветом, а перчатки к тому же могут быть на правую и на левую руку.)

¹ Во всех задачах этого раздела речь идет о наименьшем числе чулок (или перчаток), из которых можно выбрать нужное число пар того или иного цвета. — *Прим. перев.*

57. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ЗАКАЗ



Наладить подачу электроэнергии не удавалось довольно долго. Между тем продавщицы на собственном опыте убедились в том, что разделение труда помогает им легче справляться со своими хлопотливыми обязанностями. Одной из продавщиц по имени Илонка было поручено по мере надобности подносить чулки и перчатки из подсобного помещения в торговый зал.

Илонка находилась в подсобном помещении, когда поступил очередной заказ:

— 6 пар черных чулок!

Но не успела Илонка в кромешной тьме выбрать нужное количество чулок из коробки с 10 парами белых и 10 парами черных чулок, как последовал дополнительный заказ:

— и... пар белых!

Сколько пар белых чулок потребовалось покупателям, Илонка не расслышала, но переспрашивать не стала.

— Сколько бы пар белых чулок ни заказали, — подумала она, — доставать из коробки все равно придется одно и то же число чулок.

Верно ли это?



58. ТРИ ЦВЕТА

В коробке хранятся 5 пар белых, 10 пар черных и 15 пар коричневых чулок.

Сколько чулок нужно взять из нее в темноте для того, чтобы на свету из них заведомо можно было выбрать:

- 1 пару чулок?
- 1 пару белых чулок?
- 1 пару черных чулок?
- 1 пару коричневых чулок?
- 2 пары чулок?
- 5 пар чулок?

- ж. 2 пары чулок различного цвета?
- з. 2 пары чулок одного цвета?
- и. 4 пары чулок одного цвета?
- к. 7 пар чулок одного цвета?
- л. 1 пару белых и 1 пару черных чулок?
- м. 1 пару черных и 1 пару коричневых чулок?
- н. 1 пару белых и 1 пару коричневых чулок?
- о. 1 пару белых, 1 пару черных и 1 пару коричневых чулок?
- п. 3 пары белых чулок?
- р. 3 пары черных чулок?
- с. 3 пары коричневых чулок?
- т. 2 пары белых и 1 пару коричневых чулок?
- у. 1 пару белых и 2 пары коричневых чулок?
- ф. 2 пары белых, 3 пары черных и 5 пар коричневых чулок?

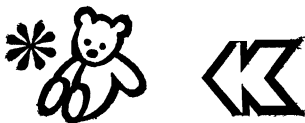
59. СКОЛЬКО ПАР,
СТОЛЬКО И ЦВЕТОВ



а. Сколько чулок нужно вынуть в темноте из коробки, о которой говорится в предыдущей задаче, для того, чтобы на свету из них заведомо можно было выбрать k пар?

б. В одной коробке находятся чулки n различных цветов. Сколько чулок нужно извлечь из нее в темноте для того, чтобы на свету из них заведомо можно было выбрать k пар?

60. ПЕРЧАТКИ ВМЕСТО
ЧУЛОК



В одной коробке хранятся 20 пар белых и 20 пар черных перчаток.

Сколько правых и сколько левых перчаток необходимо взять в темноте из этой коробки для того, чтобы на свету из них можно было выбрать:

- а. 1 пару перчаток?
- б. 1 пару белых перчаток?

- в. 2 пары перчаток?
- г. 2 пары белых перчаток?
- д. 2 пары перчаток одного цвета?
- е. 2 пары перчаток различного цвета?
- ж. 4 пары черных перчаток?
- з. 6 пар перчаток одного цвета?
- и. 5 пар перчаток?
- к. 4 пары белых и 6 пар черных перчаток?



Предполагается, что вопросы задачи не очень срочные и имеется достаточно времени для того, чтобы на ощупь отличить левые перчатки от правых.

Напоминаем, что решение считается правильным лишь в том случае, если из коробки извлечено наименьшее число перчаток, позволяющее составить нужное число пар заданного цвета.

61. А ЕСЛИ ПОДУМАТЬ?



Требуется составить 5 пар перчаток. Сколько правых и левых перчаток нужно извлечь для этого в темноте из коробки, если в ней хранятся:

- а. 20 пар белых и 9 пар черных перчаток?
- б. 20 пар белых и 10 пар черных перчаток?
- в. 20 пар белых и 11 пар черных перчаток?

62. ОТВЕЧАЙТЕ ПОБЫСТРЕЕ!



Как будет выглядеть решение задачи 60, если на ее вопросы придется отвечать быстро и отличать на ощупь левые перчатки от правых будет некогда?



63. РАЗМЫШЛЕНИЯ

Ясно, что число чулок или перчаток, извлекаемых в темноте из коробки, зависит от того, сколько пар необходимо составить из них на свету. Если число пар хотя бы одного цвета возрастет, то число чулок или перчаток которые придется извлечь в темноте из коробки, очевидно, должно быть по крайней мере таким, каким оно было до увеличения «заказа» (это относится не только к цвету, но и к любой отличительной особенности галантерейных изделий, поэтому, например, в задаче 60 извлекаемые из коробки левые и правые перчатки можно подсчитывать отдельно), то есть оно не убывает. Число извлекаемых из коробки перчаток не обязательно должно и возрастет. Например, в задаче 62 оно остается прежним: для того чтобы составить 6 пар белых и 6 пар черных перчаток, из коробки с 20 парами белых и 20 парами черных перчаток необходимо извлечь столько же перчаток, сколько их понадобится для составления 4 пар белых и 6 пар черных перчаток.

Предположим, что требуется подобрать пары чулок. Может ли случиться так, что, хотя число пар чулок по крайней мере одного цвета возрастет, для их составления потребуется столько же чулок, сколько «уходило» на подбор меньшего числа пар?



64. ДАЛЬНЕЙШИЕ РАЗМЫШЛЕНИЯ

Как показано в предыдущей задаче, увеличение числа пар перчаток или чулок *одного из двух цветов* еще не означает, будто для составления их необходимо

увеличить общее число перчаток или чулок, извлекаемых в темноте из коробки: в некоторых случаях можно обойтись тем числом перчаток или чулок, которое оказалось достаточным для составления меньшего числа пар. Более того, известен пример (см. решение II предыдущей задачи), когда число извлекаемых из коробки перчаток и чулок остается неизменным, хотя увеличивается число пар не одного, а *двух цветов*.

Может ли случиться так, что число пар всех цветов увеличится, а составить их можно будет из того же числа перчаток или чулок, что и прежде?

Сформулируем наш вопрос более подробно. Предположим, что речь идет о задаче, в которой сказано, сколько пар перчаток или чулок каждого цвета требуется составить, и решение этой задачи известно. Иначе говоря, мы знаем, сколько перчаток или чулок необходимо извлечь в темноте из коробки для того, чтобы из них заведомо можно было составить нужное число пар каждого цвета. Кроме того, нам известно, что при меньшем числе перчаток или чулок выполнить «заказ» удастся не всегда.

Может ли случиться так, что число пар всех цветов увеличится, а общее число перчаток или чулок, извлекаемых из коробки, останется неизменным? Может ли так случиться, если речь идет:

а. О чулках?

б. О перчатках, когда выполняются условия задачи 60?

в. О перчатках, когда выполняются условия задачи 62?



65. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Вернемся еще раз к коробке, о которой говорилось в задаче 58. В ней хранятся 5 пар белых, 10 пар черных и 15 пар коричневых чулок. До сих пор нас интересовало, сколько чулок нужно извлечь в темноте из коробки для того, чтобы на свету из них всегда можно было составить заданное число пар того или иного цвета. Теперь же вопрос ставится иначе: сколько пар чулок

каждого цвета удастся составить в любом случае, если в темноте извлечь из коробки то или иное число чулок?

Мы просим читателя ответить на этот вопрос в 11 случаях, когда число чулок, извлекаемых из коробки, изменяется от 50 до 60, то есть заполнить следующую таблицу:

Число чулок, извлеченных в темноте из коробки	Число пар, которые из них можно составить:		
	белых	черных	коричневых
50			
51			
52			
53			
54			
55			
56			
57			
58			
59			
60			

66. ЕЩЕ ОДИН ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ЗАКАЗ



Илонка, с которой мы познакомились в задаче 57, снова находилась в подсобном помещении и в темноте (света по-прежнему не было) извлекала из коробок перчатки и чулки в количествах, позволяющих выполнять поступающие из торгового зала заказы. Ей в руки попала коробка, содержимое которой в точности совпадало с содержимым коробки из предыдущей задачи (или, что то же самое, из задачи 58). Илонка, не глядя (поскольку в подсобном помещении было темно), взяла из коробки соответствующее число чулок и направилась было к дверям, чтобы передать их другим продавцам. Но не успела она сделать и двух шагов, как поступил дополнительный заказ: из торгового зала крикнули, что понадобилось больше пар белых и черных чулок, чем ей сообщили первоначально.

Немного подумав, Илонка не вернулась к коробке за «пополнением», а продолжала свой путь к дверям торгового зала: она подсчитала, что взятого ею количества чулок хватит и на выполнение нового заказа.

Илонка не ошиблась.

Назовите наибольшее число пар, которое могло быть в дополнительном заказе, если известно, что число чулок, взятых Илонкой из коробки, не превышало 54?



67. ОБОБЩЕНИЕ I

В коробке хранятся чулки. Известно, каких они цветов и сколько чулок каждого цвета находится в коробке. Сформулируйте правило, позволяющее заранее определить:

а. Сколько чулок необходимо взять в темноте из коробки для того, чтобы на свету из них можно было составить по крайней мере k_i пар i -го цвета?

б. Сколько пар каждого цвета заведомо удастся составить, если в темноте из коробки извлечь n чулок?



68. ОБОБЩЕНИЕ II

Возьмем снова в руки ту коробку, которая попалась нам в предыдущей задаче. В ней хранятся чулки, причем точно известно, каких они цветов и сколько имеется чулок каждого цвета. Необходимо составить заданное число пар (вообще говоря, число пар одного цвета не совпадает с числом пар любого другого цвета, а заданное число пар каждого цвета не превышает числа пар данного цвета, находящегося в коробке). Сформулировать правило, позволяющее заранее определить:

а. Сколько чулок необходимо извлечь в темноте из коробки для того, чтобы на свету из них можно было составить заданное число пар каждого цвета?

б. В каких случаях удастся выполнить дополнительный заказ (и сколько для этого чулок придется еще

извлечь из коробки), если до получения его из коробки было извлечено столько чулок каждого цвета, сколько требуется по правилу а?

69. НОВЫЕ РАЗМЫШЛЕНИЯ



В задачах 55—62 все чулки или перчатки, оказавшиеся в одной коробке, всегда были одного размера (поскольку мы условились, что чулки, хранящиеся в одной коробке, отличаются самое большее по цвету, а перчатки к тому же могут быть правыми и левыми).

Предположим, что мы решили с этим ограничением все возможные задачи на составление любого числа пар чулок и перчаток любого цвета, извлекаемых в темноте из коробки [причем задачи о перчатках рассмотрели в двух вариантах: «неторопливом» (аналогичном задаче 60) и «срочном» (аналогичном задаче 62)].

Возникнут ли новые задачи, если предположить, что в одной коробке могут находиться чулки и перчатки различных *размеров*?

(Разумеется, определить точно на ощупь размеры чулок и перчаток и рассортировать их по размерам не представляется возможным.)

Часть VI

Золотоискатели, ящерица и бергомобиль

70. СПРАВЕДЛИВЫЙ РАЗДЕЛ



Прежде всего заметим, что речь пойдет о разделе *на равные части* (такой способ раздела справедлив не всегда). Трем золотоискателям с Аляски, остановившимся в придорожной гостинице, требовалось разделить перед расставанием намытый ими золотой песок именно на 3 равные части: каждый из золотоискателей вложил в добычу золота ровно $\frac{1}{3}$ общих затрат труда и поэтому не без основания претендовал на $\frac{1}{3}$ золотого песка, считая, что такой раздел был бы вполне справедливым.

Но каким образом разделить кучу золотого песка на 3 равные части? Этому золотоискатели не знали. Весы имелись лишь на приемном пункте, но до него было несколько дней пути. (Впрочем, тем, кто добрался бы до приемного пункта, весы вряд ли понадобились бы, поскольку делить надо было бы уже не золотой песок, а доллары.) Делить золото «на глазок» никому не хотелось.

Стали совещаться, что делать.

Если бы золотоискателей было двое, поступить можно было бы довольно просто: один разделил бы золотой песок на 2 части, а другой выбрал бы себе ту из частей,



которая ему больше нравится. При таком способе раздела ни у кого из золотоискателей не могло бы возникнуть никаких претензий к своему напарнику.

Но золотоискателей было не двое, а трое, вопрос о справедливом разделе золотого песка оставался неясным, и атмосфера постепенно начала накаляться. Наконец один из золотоискателей попытался найти выход из создавшегося неприятного положения.

— Джентльмены, — обратился он к своим компаньонам, — чем, собственно говоря, так хорош справедливый раздел на двоих, когда один делит, а другой выбирает? Очевидно, тем, что *каждому участнику раздела предоставляется возможность взять себе не меньше золотого песка, чем достанется другому. Тот, кто при таком способе раздела все же получит меньше золота, чем его партнер, может винить только самого себя: если он*

делил, то ему следовало делить на равные части, а если он выбирал, то ему незачем было оставлять себе меньшую часть. Именно так нам и следует поступить с золотым песком.

— Верно говоришь, старина, — одобрил его выступление другой золотоискатель, — только я никак не возьму в толк, как же все-таки нам надо поступить, чтобы каждый мог выбрать себе долю песка, не меньшую, чем у других?

Ответа на такой вопрос по существу не последовало: рецепта справедливого раздела на троих не знал никто.

Спросить совета, как надлежит действовать, чтобы соблюсти основное условие справедливого раздела (выделенное курсивом) — предоставить каждому возможность получить не менее $\frac{1}{3}$ золотого песка (разумеется, если сам участник раздела не допустит какой-нибудь досадной оплошности) даже в том случае, если двое партнеров вступят в тайный сговор и будут всячески стремиться урезать долю третьего партнера в свою пользу, — золотоискателям было не у кого.

Разумеется, о применении при разделе золотого песка грубой силы не могло быть и речи. Кольты были отложены в сторону, и каждый из трех золотоискателей давно научился с уважением относиться к кулакам другого. К тому же затевать потасовку было небезопасно, поскольку шериф находился неподалеку: он, как всегда, коротал время за стаканом виски в соседнем питейном заведении.

Как разделить золотой песок?

(Способ раздела должен гарантировать, что каждому из золотоискателей достанется не менее $\frac{1}{3}$ песка. Если все же кому-нибудь достанется золотого песка больше, то причину несправедливости надлежит искать не в способе, которым делили песок.)

71. ИХ СТАЛО ЧЕТВЕРО



Как поступить, если (при обстоятельствах, описанных в предыдущей задаче) золотой песок требуется разделить не между тремя, а между четырьмя золотоискателями?

72. ОТ ДВУХ ДО...

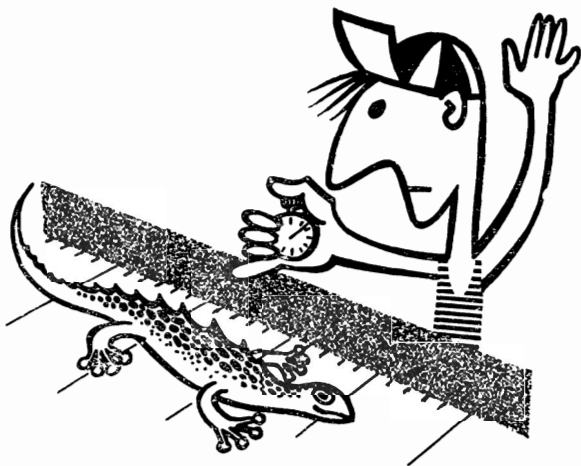


Обобщите способ «справедливого раздела», изложенный в двух предыдущих задачах, на случай произвольного числа золотоискателей.

73. ПРЫТКАЯ ЯЩЕРИЦА



Несколько наблюдателей в течение 6 мин следили за ящерицей, бежавшей по дорожке. Каждый наблюдатель следил за ящерицей ровно 1 мин и отметил, что за это время она успела пробежать ровно 1 м. До начала шестиминутного периода наблюдений и по истечении его за ящерицей никто не следил, зато в течение 6 мин, пока



велись наблюдения, ящерицу ни на миг не оставляли «без присмотра». (Считается, что каждый интервал времени включает в себя обе концевые точки: начало и конец.)

Посторонний человек, не входивший в круг лиц, которым было доверено наблюдение за ящерицей, утверждает, будто за те 6 мин, в течение которых ящерица

находилась под наблюдением, она успела преодолеть 10 м.

Возможно ли это?



74. В ЧЕТЫРЕ ГЛАЗА

Можно предложить следующее решение задачи 73. Все наблюдатели разбиты на пары. Второй наблюдатель в каждой паре принимается следить за ящерицей на 4 с позже первого (рис. 20). За те 4 с, в течение ко-

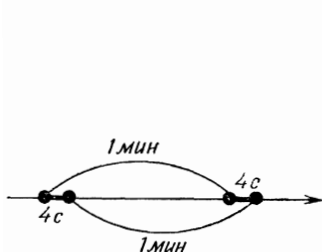


Рис. 20.

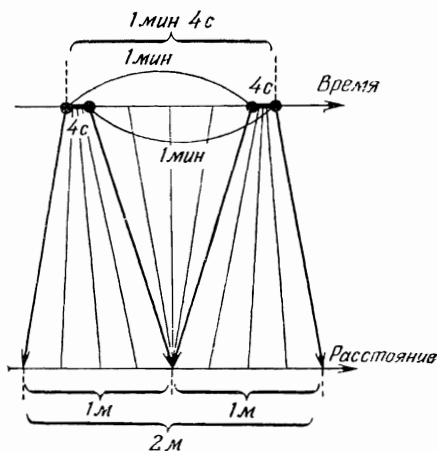


Рис. 21.

торых с ящерицы не сводит глаз первый наблюдатель, она пробегает 1 м. Затем, пока за ней смотрят «в четыре глаза» 2 наблюдателя, ящерица замирает и не движется, а за те 4 с, в течение которых за ней следит только второй наблюдатель, ящерица снова пробегает 1 м (рис. 21). Так, не нарушая ни одного из условий задачи, ящерица успевает за 1 мин 4 с преодолеть расстояние в 2 м.

Если расписание «дежурств» составлено так, что очередная пара наблюдателей приступает к своим обязанностям в тот самый миг, не раньше и не позже, когда

предыдущая пара заканчивает свое дежурство (рис. 22), то, взяв 5 пар наблюдателей, мы обнаружим, что за 5 мин 20 с ящерица преодолет 10 м и у нее еще останется «в запасе» 40 с.

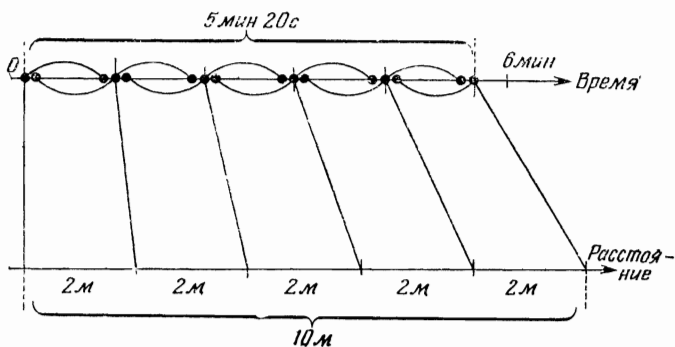


Рис. 22.

Каким образом можно использовать «лишние» 40 с? Нельзя ли распорядиться ими так, чтобы ящерица за 6 мин, в течение которых производятся наблюдения, успевала пробежать расстояние более 10 м?

75. ДО КАКИХ ПОР ПРОДОЛЖАЮТСЯ ЧУДЕСА?



Известная венгерская поговорка гласит: «Всякое чудо живет лишь три дня, а потом умирает». Но не торопитесь использовать ее как подсказку при ответе на вопрос, содержащийся в названии задачи. Нас интересует «протяженность» чуда не во времени, а в пространстве. Дело в том, что решение предыдущей задачи оставляет чувство некоторой неудовлетворенности: приведенное в условии задачи «расписание» наблюдений не позволяет ящерице полностью использовать те 6 мин, которые отведены для наблюдений. У нас возникло смутное подозрение, что при иной расстановке пар наблюдателей ящерица могла бы за то же время убежать дальше. Более того, почему наблюдателей мы должны

расставлять непременно парами? Ведь очередность наблюдений можно установить и другими способами, например как в задаче 73. Вполне вероятно, что существует не один, а много способов установить очередность наблюдений таким образом, чтобы ящерица успела убежать дальше.

Итак, может ли ящерица из задачи 73 за 6 мин пробежать более 10 м?

Относительно наблюдателей из задачи 73 сказано лишь, что их «несколько». Не уменьшая общности, можно предположить, что число наблюдателей произвольно, но *ограничено*, или, что то же, *конечно*.



76. МЕТРЫ И МИНУТЫ

Предположим, что в задаче 73 (или 75) промежуток времени, на протяжении которого наблюдатели следят за ящерицей, равен не 6, а какому-то другому (большему или меньшему) целому числу минут.

Как далеко успела бы тогда убежать ящерица?



77. БЕЗ ОСТАНОВОК

Задачу 73 нам удалось решить для случая, когда ящерица движется «перебежками»: сделав стремительный бросок, замирает неподвижно (при этом суммарная продолжительность фаз активного движения и отдыха составляла 6 мин).

Может ли ящерица в условиях задачи 73 преодолеть 10 м за 6 мин, если по пути она ни разу не остановится?

78. НЕ СТОЛЬ ПРИСТАЛЬНОЕ ВНИМАНИЕ



Во всех задачах о ящерице (73—77) до сих пор неизменно повторялось одно из условий задачи 73, а именно *каждый наблюдатель следил за ящерицей ровно*

1 мин, причем наблюдения велись непрерывно, без каких-либо пауз.

Ослабим теперь это условие: откажемся от непрерывности наблюдений. Потребуем лишь, чтобы каждый наблюдатель «отработал» свою минуту (все прочие условия остаются такими же, как и в задаче 73).

Может ли ящерица при менее жестком контроле преодолеть за 6 мин более 10 м?



79. КОЛЬЦЕВОЙ МАРШРУТ I

Говоря о достопримечательностях Бергенгоции, нельзя не упомянуть о пустыне. Поскольку ее красоты привлекают огромное количество туристов, вокруг пустыни построена кольцевая автострада, проходящая

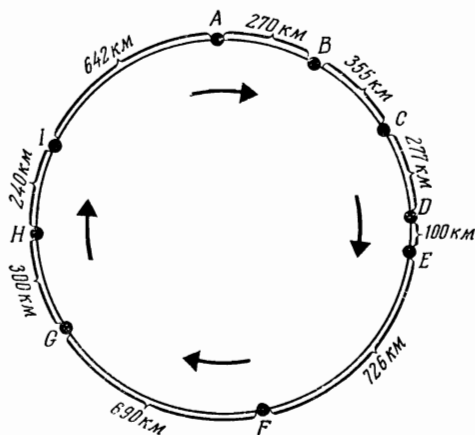


Рис. 23.

через оазисы A , B , C , D , E , F , G , H и I , которые расположены так, как показано на прилагаемой карте (рис. 23).

Эгон Берг, заядлый автотурист, решил использовать несколько неожиданно выпавших свободных дней и объехать кольцевую автостраду на своем бергомобиле новейшего образца. В бюро путешествий Эгону Бергу

сообщили, что вертолет может доставить его вместе с бергомобилем в любой из приглянувшихся ему оазисов, а затем в условленное время вернуться за ним в тот же пункт.

Все складывалось как нельзя лучше, но, разумеется, в процессе подготовки возникли кое-какие непредвиденные проблемы.

Во-первых, выяснилось, что на расположенных в оазисах заправочных станциях остались сравнительно небольшие запасы бензина: в *A* всего 11 л, в *B* — 14 л, в *C* — 11 л, в *D* — 32 л, в *E* — 1 л, в *F* — 28 л, в *G* — 20 л, в *H* — 2 л и в *I* — 25 л.



Во-вторых, заказанный Эгоном Бергом грузовой вертолет недостаточно мощен и может доставить в назначенный пункт лишь бергомобиль с совершенно пустыми баками. (О том, чтобы позаимствовать часть горючего у вертолета, не могло быть и речи, поскольку для бергомобиля требовался бензин другой марки.)

Бергомобиль Эгона Берга *расходует 4 л бензина на каждые 100 км пути.*

В какой из оазисов следует доставить Эгона Берга вместе с его бергомобилем, чтобы он смог объехать всю кольцевую автостраду, если движение по ней разрешено только в направлении, указанном стрелками?

80. КОЛЬЦЕВОЙ МАРШРУТ II



Вдоль кольцевого маршрута расположено определенное число заправочных станций («оазисов»), в емкостях которых хранится столько бензина, сколько необходимо данной автомашине, чтобы проехать по всему маршруту.

Доказать, что независимо от расположения заправочных станций вдоль маршрута и от распределения между ними запаса бензина всегда можно выбрать по крайней мере одну заправочную станцию, отправляясь от которой автомашина сумеет объехать весь маршрут.

(Бензобаки автомашины обладают достаточной емкостью, чтобы вместить весь бензин, необходимый для прохождения маршрута.)

Часть VII

Составление смесей

81. УДОБНЫЙ СПОСОБ



Заведующий лабораторией попросил лаборанта приготовить несколько децилитров $p\%$ -ного водного раствора спирта. (Заведующий лабораторией намеревался указать конкретное значение p , но, к сожалению, забыл это сделать.) Для этой цели в лаборатории имелись 2 мерных цилиндра емкостью полтора литра каждый: в первом находился 1 л чистого спирта, во втором — 1 л дистиллированной воды (рис. 24). Никакими другими сосудами или жидкостями, содержащими спирт и воду, при приготовлении раствора пользоваться не разрешалось.

Разумеется, лаборанту не составило бы особого труда сосчитать, сколько спирта и воды нужно взять, чтобы приготовить раствор, но ему очень не хотелось

заниматься выкладками. Он решил, что справится с работой скорее, если станет переливать жидкости из одного сосуда в другой, взбалтывать для большей уверенности и измерять крепость образовавшейся смеси до тех пор, пока не получится раствор нужной концентрации.

Против ожидания способ оказался довольно трудоемким: лишь после пятикратного переливания в одном сосуде оказался 1 л $p\%$ -ного раствора спирта.

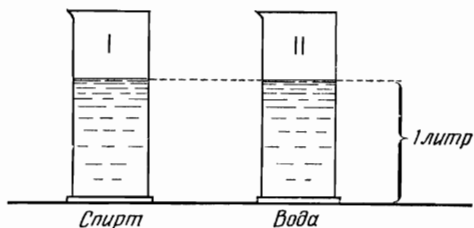


Рис. 24.

— Готово, — доложил лаборант заведующему лабораторией. — Разрешите мне сегодня уйти пораньше? У меня есть кое-какие личные дела.

— Хорошо, — согласился заведующий, — приготовьте еще 1 л $(100 - p)\%$ -ного раствора и идите.

Лаборант очень расстроился: ему так хотелось поскорее уйти, а тут еще новая задержка!

Что можно ему посоветовать?

[Условимся считать, что при смешивании спирта и воды объем получающегося раствора равен сумме сливаемых объемов, хотя в действительности это не совсем так. Кроме того, будем предполагать, что чистый спирт вообще не содержит воды (имеет крепость 100%). Это предположение также не соответствует действительности.]

82. ЧТО ДЕЛАТЬ ДАЛЬШЕ?



Все снова происходило именно так, как описано в начале предыдущей задачи (и задание было таким же, и мерные цилиндры со спиртом и водой оставались прежними). На этот раз заведующий лабораторией по-

просил лаборанта приготовить 63%-ный водный раствор спирта.

После нескольких переливаний лаборант установил, что в одном из сосудов находится 60%-ный раствор спирта.

Как ему действовать дальше?

83. ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ



В предыдущей задаче лаборант установил, что в одном из сосудов находится 60%-ный водный раствор спирта.

Как выглядело бы решение предыдущей задачи, если бы лаборант после нескольких переливаний установил, что в том из двух сосудов, в котором содержится меньше жидкости, чем в другом, находится 38%-ный водный раствор спирта?

84. ОТ НАЧАЛА ДО КОНЦА



Возьмем снова два полулитровых мерных цилиндра, в одном из которых (I) находится 1 л чистого спирта, в другом (II) — 1 л дистиллированной воды.

Каким образом в сосуде II может оказаться 60%-ный водный раствор спирта?

(Пользоваться другими сосудами или жидкостями, кроме двух названных, не разрешается.)

85. РАЗНОСТЬ ПЛОТНОСТЕЙ



В одном из двух сосудов емкостью по 3 л каждый находится 2 л жидкости плотностью 1 кг/дм³, а в другом — 2 л жидкости плотностью 1/2 кг/дм³. Из одного сосуда (назовем его первым) в другой (назовем его вторым) перелили 1 л жидкости, затем из второго сосуда в первый перелили 2 л жидкости, после чего из

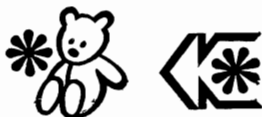
первого сосуда во второй перелили также 2 л жидкости и, наконец, из второго сосуда в первый перелили 1 л.

В каком случае разность плотностей жидкостей в двух сосудах окажется меньше: если переливание начать с сосуда, содержащего более плотную жидкость, или с сосуда, в который налита менее плотная жидкость?

(Предполагается, что смесь, получившаяся после каждого переливания, тщательно перемешивается, а также что объем смеси равен сумме объемов сливаемых жидкостей.)

Часть VIII

Розыгрыш кубка



86. РОЗЫГРЫШ КУБКА

Только что завершился розыгрыш кубка САМИ (Спортивной ассоциации математических институтов). Не обошлось и без потерь: игры проводились по олимпийской системе, и команда, проигравшая встречу, выбывала из числа претендентов на кубок. (Если встреча, как это нередко бывает, заканчивается вничью, командам дается дополнительное время. Иногда и его оказывается недостаточно для того, чтобы отдать предпочтение одной из команд. Тогда назначаются одиннадцатиметровые удары, и победительницей становится та из команд, чьи игроки сумеют забить больше голов.)

В розыгрыше кубка САМИ приняло участие 27 команд («граф» розыгрыша изображен на рис. 25). В первом и в третьем круге одна из команд (оставшаяся «лишней», без пары) перешла без встречи с какой-либо другой командой в следующий круг.

Подсчитать число состоявшихся встреч совсем нетрудно: оно совпадает с числом V-образных «вилок» на графе. Но поскольку речь идет о розыгрыше кубка

между командами математиков, то пользоваться столь примитивным способом подсчета им просто не пристало.

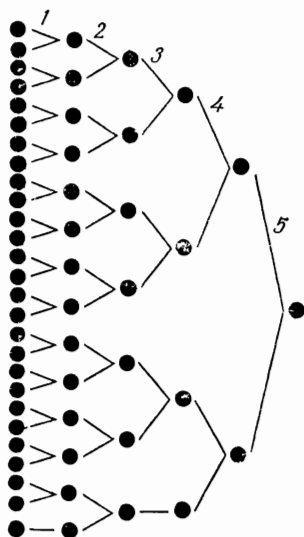


Рис. 25.

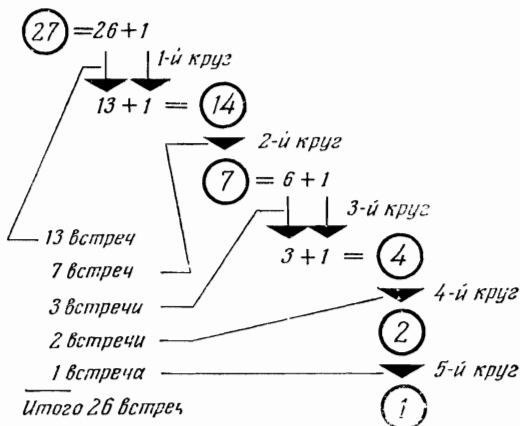


Рис. 26.

На рис. 26 изображен другой, несколько более простой способ подсчета. В первом круге из 27 команд можно составить 26 пар. Следовательно, в первом туре состоялось

13 встреч и 1 команда осталась лишней (перешла в следующий круг без игры). Во втором круге приняло участие всего 14 команд, между которыми состоялось 7 встреч. Из 7 оставшихся команд-победительниц 1 оказалась лишней и без игры перешла в четвертый круг, а между 6 остальными командами состоялись 3 встречи. В четвертом круге между 4 командами состоялись 2 встречи, в пятый круг вышли лишь 2 команды, между которыми состоялась 1 встреча. Таким образом, всего за розыгрыш кубка было проведено 26 встреч.

В турнире на приз ПЛЮСа (Праздника любителей спорта) в прошлом году выступило 166 команд, а в этом году записалось 244 команды. Эти соревнования также проводились по олимпийской системе, и в финал вышли лишь 2 команды.

Сколько встреч было проведено в турнире на приз ПЛЮСа в прошлом и сколько в этом году?

87. РОЗЫГРЫШ КУБКА II



Сколько встреч состоится в розыгрыше кубка, проводимом по олимпийской системе, если для участия в нем записались n команд? (В розыгрыше кубка принимают участие только те команды, которые предварительно подали заявки. Другие команды, помимо n записавшихся, к участию в розыгрыше кубка не допускаются.)

(Для тех, кто недостаточно хорошо осведомлен о порядке проведения соревнований по олимпийской системе, правила их подробно изложены в предыдущей задаче.)

88. РОЗЫГРЫШ КУБКА В СЛОЖНЫХ УСЛОВИЯХ



Недавно разнеслась весть о том, что в нынешнем году турнир на приз ПЛЮСа будет проводиться в более сложных условиях, чем обычно. Дело в том, что в связи с необычайной популярностью этих соревнований число команд, желающих принять участие в розыгрыше приза,

растет год от года и подыскать свободный стадион для проведения встреч удастся далеко не всегда. Поэтому при проведении игр того или иного круга могут возникать безвыходные ситуации, когда команды, не имеющие возможности провести встречу, окажутся «лишними» и без игры получают право выступать в следующем круге. Предсказать заранее, сколько окажется таких команд, невозможно.

Тем не менее нельзя ли сказать заранее, сколько встреч будет проведено за весь турнир на приз ПЛЮСа в этом году?

(Напомним, что участвовать в турнире выразили желание 214 команд.)

89. К ЧЕМУ ПРИВОДИТ НЕХВАТКА СТАДИОНОВ



При розыгрыше кубка САМИ (задача 86) в каждом круге встречались (попарно) все команды, сумевшие дойти до него. Перейти без игры в следующий круг могла лишь 1 команда и то при условии, что число команд-участниц данного круга нечетно. В турнире на приз ПЛЮСа (задача 88) из-за нехватки стадионов перейти без игры из любого круга в следующий круг могли уже не одна, а несколько команд. Тому, кто не знаком с решением задачи 87 (которое, как мы знаем, остается в силе и в том случае, когда проводятся все встречи и при нехватке стадионов), на первый взгляд может показаться странным, что число проведенных игр не зависит от того, в каких условиях, «обычных» (когда проводятся все календарные игры) или «необычных» (когда часть матчей срывается из-за отсутствия стадионов и обе команды, которые должны были встретиться между собой, без игры переходят в следующий круг), проводится турнир на приз ПЛЮСа, хотя трудно сказать, что эти способы проведения турнира ничем не отличаются. В этой связи мы хотим задать читателю 2 вопроса.

1. Предположим, что для участия в турнире, проводимом в обычных условиях (когда в каждом круге проводится максимальное число встреч), и в турнире, проводимом в необычных условиях (когда из одного круга

в другой из-за нехватки стадионов переходят сразу несколько команд), записалось одинаковое число команд.

В каком из двух турниров — «обычном» или «необычном» — для определения победителя понадобится провести больше кругов?

(Круг состоит из тех встреч, которые проводятся одновременно.)

2. Может ли случиться так, что число кругов в «необычном» турнире окажется меньше, чем в «обычном»?



90. ОДИН КРУГ

При округлении чисел их обычно заменяют ближайшим по величине целым числом. Однако во многих случаях удобнее округлять число «снизу», то есть *заменять данное число наибольшим из не превосходящих его целых чисел*. О таком способе округления принято говорить как о *взятии целой части данного числа*. Целую часть числа принято обозначать квадратными скобками: $[3,7] = 3$, $[4,2] = 4$, $[7] = 7$, $[5\frac{1}{2}] = 5$, $[0,3] = 0$ и так далее (в общем случае $[x]$ означает целую часть числа x).

Предположим, что в какой-то круг турнира, проводимого по олимпийской системе в «обычных» условиях (в следующий круг без игры переходит не более 1 команды), вышли k команд.

Пользуясь обозначением целой части числа, написать формулу, задающую число встреч, которые состоятся в этом круге.

91. ПОСЛЕ ОЧЕРЕДНОГО КРУГА



В очередной круг турнира, проводимого по олимпийской системе в «обычных» условиях (в каждый следующий круг без игры может перейти не более 1 команды), вышли k команд.

Написать формулу, задающую число команд, «уцелевших» после этого круга, то есть получивших право играть в следующем круге.

92. ИЗ КРУГА В КРУГ



Для участия в турнире, проводимом по олимпийской системе в «обычных» условиях, записались n команд.

Пользуясь формулами, приведенными в решениях двух предыдущих задач, дать точное описание хода турнира, то есть указать, сколько команд переходит из круга в круг и сколько встреч проводится в каждом круге.

93. ДВА ТОЖДЕСТВА



Доказать, что

1) для любого

$$[x] + 1 = [x + 1];$$

2) для любого целого t

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{2} \right]}{2} \right] = \left[\frac{t}{4} \right].$$

94. ОЛИМПИАДНАЯ ЗАДАЧА



На одной из московских олимпиад (1968 г.) предлагалась такая задача.

Вычислить значение следующей суммы:

$$\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{4} \right] + \left[\frac{n+3}{8} \right] + \left[\frac{n+7}{16} \right] + \left[\frac{n+15}{32} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^k} \right] + \dots,$$

где n — любое целое число.

*

Обращаем внимание читателя на заключительные замечания к решениям задач этого раздела «Огляды-ваясь назад», помещенные на стр. 290.

Часть IX

Буквенное лото



В игру, о которой мы хотим рассказать читателю, можно играть не одному, а целой компанией. Один из присутствующих выходит, остальные задумывают какое-нибудь слово, а когда тот, кто вышел, возвращается, сообщают ему, сколько букв в этом слове. Пытаясь угадать задуманное слово, он поочередно называет несколько слов той же длины (*с тем же числом букв*), а ему каждый раз говорят, сколько букв угадано правильно. Буква считается правильно угаданной, если в названном и в задуманном слове она стоит *на одном и том же месте*. Например, если задумано слово ПАРИЖ, то, назвав слово ПАРИК, «водящий» угадает 4 буквы, назвав слово ВЕТЕР — 0 букв, назвав слово ПАРОМ — 3 буквы, а назвав слово БАКЕН и ПЛАМЯ — по 1 букве. Выигрывает тот, кому при отгадывании слов с одинаковым числом букв требуется меньше попыток.

Разумеется, в этой коллективной игре большое значение имеет не только способность логически мыслить (или, если говорить более точно, владение формальной логикой), но и легкость и изобретательность, с которой участник игры подыскивает нужное слово, и даже удачливость (поскольку далеко не безразлично, с какого слова начать «реконструкцию»). Поэтому предлагаемая нами игра вполне заслуживает названия «лото», а все перечисленные выше элементы, вместе взятые, делают ее по-настоящему интересной и увлекательной. Коллективный розыгрыш буквенного лото мы предоставляем читателю, а здесь, на страницах книги, приводим лишь свои собственные попытки отгадать кем-то задуманное слово. На долю читателя остается лишь чистая логика, а в действительности и того меньше, поскольку не исключено, что задумано не слово, а некий бессмысленный набор букв (например, АВХУ) ¹.

¹ Поэтому для решения задачи 101 не обязательно владеть бергенгоцийским, а для решения задач 114—117 — венгерским языком (так же как для решения задач 95—100, 102—113 не требуется знания русского языка). — Прим. перев.

Поскольку любой игре «не противопоказано» быть интересной, мы включили в число задач и такие, которые допускают не единственное решение (задуманное слово или комбинацию букв). Какие решения считать допустимыми и сколько их будет, мы предоставляем судить читателю.

После каждого названного нами слова через двоеточие указано, сколько букв угадано правильно.

Все названные нами слова («догадки») содержат столько же букв, сколько их в задуманном слове.



95.

(1) ЖАР : 2 (2) ПАР : 2 (3) ДОМ : 1

96.

(1) БОР : 2 (2) СЫР : 2 (3) СОК : 2

97.

(1) СОМ : 2 (2) ЖИМ : 1 (3) НОС : 1

98.

(1) ВОЛ : 2 (2) МЕЛ : 2 (3) ВАЛ : 1

99.

(1) ЗОБ : 2 (2) ЛУБ : 1 (3) ЗУД : 2

100.

(1) БУК : 2 (2) СУК : 2 (3) ЛОМ : 1



101.



Члены одной туристской группы из Бергенгоции также сыграли в буквенное лото. Сохранилась следующая запись:

(1) УЛК : 2 (2) ИЛК : 2 (3) АТЗ : 1

Восстановите по ней задуманное бергенгоцийское слово.

102.



Продолжаем играть в буквенное лото на русском языке:

(1) БАЛ:2 ЛАЛ:2 (3) ЗУБ:1

103.



На днях мы сыграли в буквенное лото. К сожалению, запись игры плохо сохранилась. Часть букв стерлась, и разобрать удалось лишь следующее:

(1) *АК:2 (2) *АК:2 (3) М*:1

Знак * означает, что прочесть соответствующую букву не удалось. Единственное, что можно сказать с уверенностью: эта буква не совпадает с теми, которые удалось разобрать.

104.



(1) БАК:2 (2) ЛУГ:1 (3) РАК:2

105.



(1) ЛУК:2 (2) ТАЗ:1 (3) ЛИК:2

106.



(1) ШОВ:1 (2) ШУМ:1 (3) ТУР:1 (4) МОЛ:1
(5) ТИР:1

107.



(1) КУМ:1 (2) КУБ:1 (3) БОБ:1 (4) БЫК:1
(5) РАК:1

108.

(1) ТОР : 2 (2) ТОК : 1 (3) МИМ : 1

109.

(1) ЧУМ : 2 (2) КУБ : 2 (3) ЛУЧ : 2

Обращаемся к читателям с убедительной просьбой:
не хлопайте книгой по столу!

110.

(1) СТАН : 2 (2) БАУЛ : 2 (3) СТОЛ : 3

111.

(1) УРОД : 2 (2) ОВЦА : 2 (3) ОБОЗ : 2 (4) КРАН : 0

112.

(1) УГОЛ : 1 (2) УГАР : 1 (3) УЗОР : 3 (4) ВКУС : 1

113.

(1) РИНГ : 2 (2) ПОРТ : 2 (3) АГАТ : 2

114.

(1) AVAR : 2 (2) AKIT : 2 (3) ADOD : 2 (4) AVAS : 2
(5) OKOT : 1 (6) AVUL : 1 (7) OROM : 0

115.

(1) KEREK : 3 (2) BALTA : 3 (3) MEREM : 3

116.

(1) KAROM : 3 (2) MAROS : 3 (3) MEREM : 2
(4) BALOS : 3

117.

(1) LAKAS : 2 (2) LAKOS : 2 (3) LAJOS : 2
(4) BAJOS : 2 (5) GITAR : 1 (6) GYUFA : 2
(7) PLUSZ : 2

118. НЕСКОЛЬКО ВОПРОСОВ ПО СУЩЕСТВУ



Предположим, что мы играем в буквенное лото и нам встретилась задача:

- а) допускающая лишь одно решение,
- б) допускающая несколько решений,
- в) с противоречивыми условиями.

Что изменится, если:

I) мы выскажем одну или несколько новых догадок (то есть назовем одно или несколько слов с тем же числом букв, что и задуманное) и

II) наоборот, откажемся от одной или нескольких высказанных ранее догадок?

*

Желаем читателю приятно провести время за игрой в *буквенное лото* со своими друзьями!

Часть X

Кросснамберы¹

В каждую клетку кросснамбера необходимо вписать по 1 цифре, то есть какое-нибудь из чисел 0, 1, 2, ..., 8, 9. В любой кросснамбер входят только натуральные (то есть целые положительные) числа. Единственное исключение составляет число 0: если речь идет об однозначных числах, то они могут быть не только положительными, но и нулями. Если число содержит более одного знака, то оно не может начинаться с нуля: первая цифра такого числа должна быть отлична от нуля.

Может случиться, что о числе, стоящем в каком-нибудь вертикальном столбце или в горизонтальной строке

¹ Слово «кросснамбер» еще не успело войти в словари и энциклопедии, но уже часто встречается в научно-популярной литературе. Оно образовано подобно слову «кроссворд», которое происходит от английских cross — пересечение и word — слово, только вторая половина заменена в нем на number — число. Иными словами, кросснамбер — это числовой «кроссворд». — *Прим. перев.*

кросснамбера, в условиях задачи ничего не сказано. Это — не описка и не опечатка, а означает лишь, что данное число можно восстановить по другим числам, входящим в кросснамбер, а само оно не требует словесного определения.

Эти общие правила постоянно следует иметь в виду при решении всех приводимых ниже кросснамберов. Мы не будем повторять их в каждом отдельном случае. Наоборот, всякое отклонение от них или изменение в условиях задачи мы будем оговаривать особо.

119.



По горизонтали (рис. 27): *а.* Половина числа *а* по вертикали, записанная от конца к началу. *г.* Число, делящееся без остатка на 10 и на 17. *д.* Разность наибольшего и наименьшего трехзначных чисел.

По вертикали: *а.* Число, которое, будь оно на 400 больше, записывалось бы одинаковыми цифрами. *б.* Число, третья цифра которого равна сумме двух первых цифр. *в.* Нечетное число.

α	δ	θ
ε		
ϑ		

Рис. 27.

120. НЕСКОЛЬКО
ВОПРОСОВ



Как будет выглядеть решение предыдущего кросснамбера, если:

А. Определение числа *г* по горизонтали заменить следующим: «Число, делящееся на 10»?

Б. Определение числа *г* по горизонтали заменить следующим: «Число, делящееся на 17»?

В. Определение числа *г* по горизонтали заменить следующим: «Число, делящееся на 5»?

Г. Определение числа *г* по горизонтали заменить следующим: «Число, делящееся на 18»?

Д. Определение числа *в* по вертикали замснить следующим: «Четное число»?

(При ответе на каждый вопрос необходимо иметь в виду, что *определения всех остальных чисел остаются без изменения*. В вопросах **А — Г** определение числа *в* по вертикали, а в вопросе **Д** — определение числа *г* по горизонтали считаются такими же, как и в предыдущей задаче.)



121.

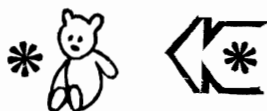
По горизонтали (рис. 28): *а*. Третья степень (куб) числа, все цифры которого одинаковы. *б*. Вторая половина числа *а* по вертикали. *в*. Число *ж* по горизонтали, записанное от конца к началу. *ж*. Вторая половина числа *к* по горизонтали. *и* Число, у которого одна цифра вдвое больше другой (но о каких двух цифрах идет речь, к сожалению, неизвестно). *к*. Площадь (в см²) квадрата со стороной *п* см, где *п* — число *в* по вертикали.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>б</i>		<i>в</i>	
<i>ж</i>	<i>з</i>	<i>и</i>	
<i>к</i>			

Рис. 28.

По вертикали: *а*. Вес (в граммах) той рыбы, которую на днях поймал дядюшка Янош. *б*. Номер

дома одного из читателей этой книги. *в*. Число, равное квадрату однозначного числа, совпадающего с его второй цифрой. *г*. Квадрат двузначного числа, обе цифры которого одинаковы. *з*. Число, которое вдвое больше своей половины. *и*. Число, которое возрастает в 10 раз, если к нему справа приписать 0.



122.

По горизонтали (рис. 29): *а*. Число, которое в 10 раз больше $\frac{1}{10}$ своей величины. *б*. Число, которое, совпадает с одним из чисел, расположенных по вертикали *в*. Число,

которое на 4 больше утроенного числа $з$ по вертикали. *ж.* Число, делящееся на 9. *и.* Число, совпадающее с пятой степенью своей второй цифры. *к.* Число, у которого каждая следующая цифра на одну и ту же величину меньше предыдущей.

По вертикали: *а.* Четное число, все цифры которого одинаковы. *б.* Число, которое в 5 раз больше числа $з$ по вертикали. *в.* Число, которое на 1 больше числа $и$ по вертикали. *г.* Число, все цифры которого одинаковы. *з.* Число форинтов в кошельке одного из венгерских читателей этой книги. *и.* Число страниц в одной очень интересной книге.

a	b	v	z
d		e	
$ж$	$з$	$и$	
$к$			

Рис 29.

123. ДРУГОЙ ВАРИАНТ



Как изменится решение предыдущей задачи (рис. 29), если определения чисел $и$ по горизонтали и $а$ по вертикали заменить следующими.

По горизонтали: *и.* Число, у которого первая цифра на 1 больше второй.

По вертикали: *а.* Число, все цифры которого одинаковы?

(Определения всех остальных чисел остаются без изменений.)

124.



По горизонтали (рис. 30): *а.* Половина числа $в$ по горизонтали. *в.* Число, все цифры которого одинаковы. *д.* Квадрат числа $г$ по вертикали. *е.* Число, две средние цифры которого одинаковы, последняя больше их, а первая цифра на 2 меньше любой из средних цифр. *з.* Квадрат целого числа. *и.* Сумма двух первых цифр числа $е$ по горизонтали.

a	b	v	z
d			
e			$ж$
$з$		$и$	

Рис. 30.

По вертикали: а. Число, которое на 2 меньше числа з по горизонтали. б. Число, делящееся на 51. в. Квадрат целого числа. г. Число, равное числу в по горизонтали. е. Число, дающее при делении на 11 остаток, равный 10. ж. Число, которое в 7 раз больше числа и по горизонтали.



125.

По горизонтали (рис. 31): а. Половина числа в по горизонтали. в. Число, все цифры которого одинаковы. д. Квадрат числа г по вертикали. е. Число, две средние цифры которого одинаковы. з. Квадрат целого числа.

а	б	в	г
д			
е			ж
з		и	

Рис. 31.

По вертикали: а. Число, которое меньше числа з по горизонтали. б. Число, делящееся на 51. г. Число, равное числу в по горизонтали. е. Число, дающее при делении на 11 остаток, равный 10. ж. Число, которое в 7 раз больше числа и по горизонтали.

126.

По горизонтали (рис. 32): а. Число, у которого разность между любой цифрой, начиная со второй, и предыдущей постоянна (и меньше, чем у числа а по вертикали). д. Сумма двух слагаемых, одно из которых равно 100, а другое — числу е по горизонтали. е. Число, которое получится, если из 100 вычесть число д по горизонтали. ж. Номер страницы, до которой Лаци успел дочитать увлекательный детектив. и. Номер другой страницы детективного романа, который читает Лаци. к. Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей, причем разность любых двух соседних цифр постоянна.

а	б	в	г
д		е	
ж	з	и	
к			

Рис. 32.

По вертикали: а. Число, у которого разность между любой цифрой, начиная со второй, и предыдущей постоянна (и меньше, чем у числа г по вертикали). б. Вто-

рая половина числа a по горизонтали. $в$. Двухзначное число. $г$. Число, у которого разность между любой цифрой, начиная со второй, и предыдущей постоянна (и меньше, чем у числа $к$ по горизонтали). $з$. Число $и$ по вертикали, если его записать от конца к началу. $и$. Число $з$ по вертикали, если его записать от конца к началу.

(Всякий раз, когда мы упоминаем о «предыдущей» цифре, и в этом, и во всех остальных кросснамберах имеется в виду следующее. Цифры во всех числах имеют естественное упорядочение: в числах, расположенных по горизонтали, — *слева направо*, в числах, расположенных по вертикали, — *сверху вниз*. Таким образом, для чисел, вписанных по горизонтали, «предыдущая» цифра означает «расположенная *слева*», а «следующая» — «расположенная *справа*». Для чисел же, вписанных по вертикали, «предыдущая» означает «цифра, расположенная над данной», а «следующая» — «цифра, расположенная *под* данной цифрой».)

127.

По горизонтали (рис. 33): $а$. Число, у которого каждая цифра меньше предыдущей, причем разность любых двух соседних цифр постоянна. $д$. Число, у которого сумма цифр совпадает с суммой цифр числа $ж$ по горизонтали. $е$. Четное число. $ж$. Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей, причем разность между любыми двумя соседними цифрами постоянна.

По вертикали: $а$. Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей. $б$. Число, у которого сумма цифр на 1 меньше, чем у числа $а$ по вертикали. $в$. Число, обладающее следующим свойством: если его записать от конца к началу, то все цифры суммы двух чисел — исходного и «обращенного» — будут одинаковыми. $г$. Набор цифр, не являющийся четырехзначным числом. Возникает при записи от конца к началу четырехзначного числа, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей.

a	b	b	$г$
d			
e			
$ж$			

Рис. 33.

будут одинаковыми. $г$. Набор цифр, не являющийся четырехзначным числом. Возникает при записи от конца к началу четырехзначного числа, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей.



128.

По горизонтали (рис. 34): а. Число, у которого каждая следующая цифра больше предыдущей. *д.* Число, у которого каждая следующая цифра больше предыдущей. *е.* Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей. *ж.* Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>д</i>			
<i>е</i>			
<i>ж</i>			

Рис. 34.

По вертикали: а. Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей. *г.* Число, у которого каждая следующая цифра, меньше предыдущей.



129.

По горизонтали (рис. 35): а. Число, у которого каждая следующая цифра больше предыдущей. *д.* Число, у которого каждая следующая цифра больше предыдущей. *е.* Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей. *ж.* Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>д</i>			
<i>е</i>			
<i>ж</i>			

Рис. 35.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>д</i>			
<i>е</i>			
<i>ж</i>			

Рис. 36.

По вертикали: а. Число, у которого каждая следующая цифра больше предыдущей. *г.* Число, у которого каждая следующая цифра больше предыдущей.

130.

По горизонтали (рис. 36): а. Число, у которого каждая следующая цифра больше предыдущей. *д.* Простое

число. *е*. Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей. *ж*. Число, сумма цифр которого четна.

По вертикали: *а*. Число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей. *б*. Число, которое больше числа *д* по горизонтали на половину числа *г* по вертикали. *в*. Число, у которого каждая предыдущая цифра меньше следующей. *г*. Сумма квадратов двух целых чисел.

131.

По горизонтали (рис. 37): *а*. Число, обладающее тем свойством, что если из любой цифры вычесть предыдущую, то ни одна разность не будет отрицательной. *д*. Число, делящееся на 9. *е*. Четное число. *ж*. Число,

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>д</i>		<i>е</i>	
<i>ж</i>		<i>з</i>	
<i>и</i>			

Рис. 37.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>д</i>		<i>е</i>	
<i>ж</i>	<i>з</i>	<i>и</i>	
<i>к</i>			

Рис. 38.

сумма цифр которого совпадает с суммой цифр числа *з* по горизонтали. *з*. Число, которое меньше числа *ж* по горизонтали. *и*. Число, обладающее тем свойством, что если из любой его цифры вычесть соседнюю, то всегда получится одна и та же разность.

По вертикали: *а*. Число, ни под одной из цифр которого не расположена большая цифра. *б*. Число, сумма цифр которого на 6 больше, чем сумма цифр числа *в* по вертикали. *г*. Число, ни одна из цифр которого не меньше предыдущей.

132.



По горизонтали (рис. 38): *а*. Число, которое на 10 больше числа *е* по горизонтали. *и*. Число, все цифры

которого одинаковы. *к*. Число, оканчивающееся на ту же цифру, что и число *ж* по горизонтали.

По вертикали: а. Куб числа *и* по горизонтали *б*. Число, которое вдвое больше числа *в* по горизонтали. *в*. Число, которое вдвое больше числа *е* по горизонтали. *г*. Число, равное числу *к* по горизонтали.

133.

По горизонтали (рис. 39): д. Четное число.

По вертикали: б. Число *д* по горизонтали, записанное от конца к началу. *г*. Куб числа *б* по вертикали.

134.

По горизонтали (рис. 40): ж. Сумма чисел *е* и *и* по горизонтали. *к*. Куб числа *и* по вертикали.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>д</i>		<i>е</i>	
<i>ж</i>	<i>з</i>	<i>и</i>	
<i>к</i>			

Рис. 39.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>д</i>		<i>е</i>	
<i>ж</i>	<i>з</i>	<i>и</i>	
<i>к</i>			

Рис. 40.

По вертикали: а. Куб числа *б* по вертикали. *б*. Число *и* по вертикали, записанное от конца к началу. *в*. Число, делящееся на число *и* по вертикали. *г*. Число, все цифры которого одинаковы.

Можно ли решить такой кросснамбер?

135. НОВЫЕ ВОПРОСЫ



С точки зрения разрешимости (см. примечание к решению предыдущей задачи) все кросснамберы подразделяются на 3 типа:

1) кросснамберы с противоречивыми условиями (число решений равно 0);

II) однозначно разрешимые кросснамберы (число решений равно 1);

III) разрешимые, но не однозначно разрешимые кросснамберы (число решений больше 1).

Предположим, что задан кросснамбер типа II, в условиях которого содержатся определения не всех строк и столбцов. Как изменится тип кросснамбера, если:

А. Вычеркнуть одно или несколько из имеющихся определений?

Б. Не вычеркнуть, а, наоборот, добавить одно или несколько определений к уже имеющимся, то есть определить те строки и столбцы, которые ранее оставались без определений?

*

Обращаем внимание читателя на несколько примеров, приведенных после решения задачи 135. Они наглядно показывают возможные переходы между кросснамберами различных типов, о которых говорится в задаче. Эти «иллюстрации» заслуживают того, чтобы их проглядеть, даже если ответы на вопросы задачи уже известны. Они позволяют понять некоторые особенности, присущие противоречивым условиям, и установить довольно простую взаимосвязь между различными типами таких условий.

136.

Для решения кросснамбера на рис. 41 необходимо знакомство с некоторыми сведениями из теории делимости чисел. Тем не менее мы считаем, что можем спокойно предлагать его вниманию читателя нашей книги.

По горизонтали: а. Число, не делящееся ни на одно другое простое число, кроме числа 3 по горизонтали. (Число 1 простым не считается!) е. Число, равное числу в по вертикали. ж. Число, делящееся на 7 и на число н по горизонтали. з. Простое число, все цифры которого одинаковы.

и. Число, делящееся на число 3 по горизонтали. н. Число, делящееся на каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. о. Число, делящееся на 1001.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>
<i>е</i>		<i>ж</i>		
<i>з</i>			<i>и</i>	
<i>к</i>	<i>л</i>	<i>м</i>	<i>н</i>	
<i>о</i>				

Рис. 41.

По вертикали: а. Число, делящееся на 9. в. Число, делящееся на 8. д. Число, делящееся на 102. и. Число, делящееся на 111. л. Число, совпадающее с двумя первыми цифрами числа о по горизонтали. м. Число, делящееся на 7.



137. ХИТРОУМНАЯ АВТОБИОГРАФИЯ

Иеромош Бундаш до сих пор играл в «ТР» — был правым крайним нападающим в команде производственного объединения «Торты и реторты». Мы говорим «был», потому что совсем недавно он подал заявление с просьбой о приеме в футбольную команду фирмы «Точные приборы», которая так и называется «Точприборы».

а	б	в	г
д		е	
ж	з	и	
к			

Рис. 42.

Но руководство клуба «Точприборы» не желало «покупать кота в мешке», даже если речь шла о приеме такого известного футболиста, как Иеромош Бундаш, и тренерскому совету потребовались убедительные доказательства того, что моральный облик знаменитого футболиста безупречен. Иеромоша Бундаша попросили представить по-

дробную автобиографию и указать причину перехода в «Точприборы».

Поразмыслив, Иеромош решил, что остроумная шутка может лишь привлечь на его сторону симпатии руководителей спортивного клуба, и изложил свою автобиографию в виде кросснамбера (рис. 42).

По горизонтали: а. Год рождения. д. Номер дома, в котором проживаю в настоящее время. е. Сколько лет мне исполнилось. ж. Нечетное число. и. Со скольких лет играл за команду «ТР». к. На сколько форинтов больше хотел бы получать ежемесячно в «Точприборах» по сравнению с тем, что мне платили в прежней команде.

По вертикали: а. Текущий год (речь идет о том годе, в мае которого Иеромош Бундаш представил кросснамбер со своими биографическими данными руководству клуба «Точприборы»). б. Число, равное числу д по го-

ризонтали. *в*. Сколько лет мне исполнится через 20 лет. *г*. Число, которое получится, если к числу *д* по горизонтали прибавить 10, результат умножить сначала на 10, а потом на первую цифру числа *б* по вертикали. *з*. Число, которое на 9 больше числа *и* по вертикали. *и*. Сколько игроков «съел» тренер старой команды за те 5 лет, которые я играл за нее.

Решите этот кросснамбер.

Заметку о нем мы обнаружили на клочке одной старой газеты. Установить, от какого она числа, не удалось. Но группа ученых из Института истории футбола после напряженных исследований выяснила, что событие, о котором сообщалось в заметке, происходило в XX веке.

138.



Перенесемся в XXX век. Знаменитому ученому Ёчи Кобуки удалось разыскать старинную книгу с логическими задачами — ту самую, которую читатель держит сейчас в руках.

— Вот это удача! — воскликнул он. — Хотелось бы только знать, когда была издана книга.

Но установить дату выхода в свет своей необыкновенной находки Ёчи Кобуки не мог: начало и конец книги были утеряны (хотя оставшаяся часть была в великолепной сохранности). Ёчи остановил свой выбор на задаче 137 (ему приходилось слышать о том, что в глубокой древности был такой знаменитый футболист, о котором упоминается в этой задаче). Условие задачи сохранилось полностью, а решения не было. Ёчи собрался с силами и приступил к решению.

Сколько решений у него получится?



139.



Как будет выглядеть решение задачи 137, если из условий вычеркнуть определение числа *б* по вертикали?

140.



Сколько решений будет допускать задача 137 — только одно или более одного, — если вычеркнуть сделанное в конце задачи примечание о том, что «событие... происходило в XX веке»?

Часть XI

Истинно и ложно

141. ФИНАЛ ЭСТАФЕТЫ

Каждый второй пассажир в трамвае с увлечением читал спортивный раздел газеты, а остальные оживленно обсуждали последние спортивные новости. Янчи не успел купить газету, и ему не оставалось ничего другого, как заглядывать в газеты, развернутые другими пассажирами, и ловить доносившиеся до него обрывки разговоров.

Главной новостью дня был состоявшийся накануне финал эстафеты 4×100 м для мужчин. В финал после упорной борьбы вышли команды 6 стран: европейские команды *A* и *B*, африканские команды *C* и *D* и 2 команды, представлявшие американский континент, *E* и *F*. Янчи охотно узнал бы, как распределились места среди участников финала, но сделать это оказалось непросто. В тот день Янчи особенно не везло: стоило ему пристроиться к кому-нибудь и попытаться заглянуть тому через плечо в газету, как счастливый обладатель последних спортивных новостей тотчас переворачивал

страницу, а доносившиеся со всех сторон реплики зна-токов и ценителей спорта были маловразумительны.

Сойдя с трамвая, Янчи смог восстановить в памяти лишь следующие крохи информации.

(1) «Команда *A* одержала победу над командой *B*».

(2) «Африканская команда получила золотые медали!»

(3) «Команда *B* одержала победу над командой *D*».

(4) «По всему было видно, что первое и второе места достанутся американским командам, и вдруг в последний момент между ними вклинилась европейская команда».

(5) «...африканская команда отстала от всех остальных участников финала».

(6) «Первыми финишировали 3 негритянских бегуна».

(7) «Команда *F* одержала победу над командой *B*».

(8) «Команда *E* одержала победу над командой *F*».

(9) «В составе европейских команд не было негритянских спортсменов».

Располагая этими отрывочными сведениями, Янчи попытался было восстановить, как распределились места между 6 командами, участвовавшими в финале эстафетного бега, но тщетно: как он ни бился, ничего не получалось. Наконец после тщательного анализа Янчи удалось выяснить, что одна из 9 перечисленных выше посылок ложна: по-видимому, он либо что-то не так слышал, либо плохо разглядел, либо неправильно вспомнил.

Все остальные послышки истинны.

Как распределились места между 6 командами, принимавшими участие в финальном забеге?

142. КРОСС

Руководство спортивных обществ решило, что для пропаганды легкой атлетики целесообразно провести кросс, желательно там, где футбол еще не успел оттеснить на задний план все остальные виды спорта.

После долгих споров выбор пал на долину реки Хайду. Лучшее место для проведения кросса трудно

было придумать: с одной стороны белели вершины Куншагских гор, с другой — вздымались покрытые хвойными лесами склоны горы Хайду.

В кроссе приняли участие по одному представителю от известных спортивных клубов: «Дожа» (лилово-белая форма), ФТЦ (зелено-белая форма), МТК (сине-белая форма), «Гонвед» (красно-белая форма) и «Вашаш» (красно-синяя форма). В каждом случае один из цветов означает цвет майки, другой — цвет трусов. Если один из цветов белый, то это всегда цвет трусов.

Задуманное предприятие имело необычайный успех. Посмотреть на соревнование съехались все окрестные жители от мала до велика. Читатель, наверное, захочет узнать, чем закончился показательный кросс и как распределились места между его участниками. К сожалению, мы сами не можем ответить на эти вопросы, поскольку добрались до места финиша слишком поздно. Соревнования к тому времени давно закончились, и мы застали там лишь кучку «тетушек» с платками на головах и длинноусых «дядюшек». В ответ на наши расспросы они сообщили следующее.

(1) *Дядюшка Андраш*. Победителя и того, кто прибежал последним, мне толком разглядеть не удалось. Помню только, что у всех остальных бегунов трусы были одного цвета.

(2) *Дядюшка Янош*. Что верно, то верно! Бегунов едва можно было различить — так много было одинаковых цветов в их формах. Помню, я еще удивился, что у первого бегуна в форме не было общих цветов с четвертым.

(3) *Тетушка Юльчи*. У первых трех бегунов трусы были, как на подбор, одного цвета!

(4) *Тетушка Кати*. Видно, такая мода! А у того бегуна, который пришел последним, была лиловая майка!

(5) *Дядюшка Шандор*. Мне помнится, что у самого первого бегуна и у последнего майки были одного цвета.

(6) *Тетушка Жофи*. В спортивной форме двух последних бегунов был красный цвет.

(7) *Дядюшка Йожи*. А я твердо помню, что у двух последних бегунов трусы были одного цвета.

(8) *Тетушка Илонка*. Третий бегун был в красной майке.

(9) *Дядюшка Фери*. Первого и последнего бегуна мне хорошенько разглядеть не удалось, но я помню, что в форме остальных спортсменов не было синего цвета.

Признаемся, что извлечь истину из этих ответов оказалось делом нелегким. К счастью, из расспросов удалось узнать, что 2 из 9 приведенных выше ответов неверны, и факты, соответствующие действительности, содержатся лишь в 7 остальных «показаниях».

Удалось также выяснить, что все бегуны преодолели дистанцию кросса за различное время.

Все сведения, собранные нами с таким трудом, позволяют читателю установить, в каком порядке представители различных спортивных клубов пересекли линию финиша.

Как распределились места среди участников кросса?

143. ТРЕНЕР В УДИВЛЕНИИ



Пять пловцов — Андраш, Бела, Чаба, Дежё и Эрнё — были членами одного спортивного клуба. Однажды в отсутствие тренера они устроили между собой соревнование. Когда же тренер, вернувшись, спросил об их результатах, то в ответ услышал следующее.

Андраш. (1) Дежё занял второе место, (2) а я оказался на третьем.

Бела. (3) Я показал самый лучший результат, (4) а Чаба занял второе место.

Чаба. (5) Я был третьим, (6) а Бела — последним.

Дежё. (7) Я занял второе место, (8) а Эрнё, плывший изо всех сил, вышел лишь на четвертое место.

Эрнё. (9) Мне удалось опередить лишь одного пловца. (10) Соревнование выиграл Андраш.

Увидев изумленное лицо тренера, ребята признались, что пошутили: сведения, сообщенные тренеру каждым из них, содержали одно истинное и одно ложное утверждение.

Тренер принялся ломать голову над тем, как же в действительности закончились соревнования.

Помогите ему!

(Все спортсмены показали разное время.)



Предположим, что в предыдущей задаче Эрнё вместо утверждения

(10) «Соревнование выиграл Андраш» высказал утверждение

(10) «*Чаба был третьим*»,

а все остальные условия задачи остались без изменения.

Как выглядело бы в этом случае решение задачи 143?

145. ЛАКОМСТВО I

Однажды Юльчи, Пишта, Эржи и Йошка остались дома одни. Мама, прежде чем уйти, строго-настрого наказала, чтобы до самого вечера, до ее возвращения, никто не смел прикасаться к тарелке с вкусным пудингом, приготовленным на ужин.

Опустим подробности (они здесь заведомо неуместны). Скажем только, что когда мама вернулась домой, то увидела в кухне на полу лишь осколки от красивой фарфоровой тарелки, среди осколков — остатки ужина, а вокруг — четырех своих питомцев, стоявших с весьма виноватым видом.

Произведенное мамой расследование показало:

Юльчи. (1) Я не опрокидывала тарелку с пудингом.

(2) Когда я вошла в кухню, там уже был Пишта.

(3) Йошка вошел в кухню после меня.

Пишта. (4) Я не опрокидывал тарелку с пудингом.

(5) Когда я вошел в кухню, там уже была Юльчи.

(6) Йошка вошел в кухню после всех.

Эржи. (7) Это не я разбила тарелку.

(8) И Юльчи и Пишта лгут.

(9) Когда я вошла в кухню, там уже находился Йошка.

Йошка. (10) Это не я опрокинул ужин на пол.

(11) Когда я в последний раз выходил из кухни, там раздался сильный грохот.

(12) Пишта вошел в кухню до меня.

Мама задала детям еще несколько вопросов и, выслушав ответы, убедилась в том, что три правдивых по-

казания дал лишь тот, кто последним вошел на кухню, а остальные дети сочли возможным ограничиться лишь двумя правдивыми утверждениями, а один раз позволили себе солгать.

Кто опрокинул на пол тарелку с пудингом?

146. ТРИ ДЕВУШКИ

Как-то на днях нам довелось ехать в пригородной электричке. В одном вагоне с нами оказались 3 хорошенькие девушки лет 16—17, судя по всему — неразлучные подружки.

На одной остановке в вагон вошли трое ребят и сели (как вы думаете, где?) напротив девушек. Как водится, ребята не упустили случая познакомиться с хорошенькими сверстницами. Те сначала только хихикали и о чем-то перешептывались между собой, но потом как бы нехотя откликнулись на настойчивые попытки завязать общую беседу. Вот что мы слышали.

Ребята. Девочки, где вы учитесь?

Поскольку мы с девушками не знакомы, то условимся обозначать их *X*, *Y* и *Z*.

(1) *X*: мы все гимназистки.

(2) *Y*: да, я учусь в гимназии.

(3) *Z*: никто из нас не учится в техническом училище.

Ребята (представив девушкам друг друга). А как вас зовут?

(4) *X*: меня зовут Ева.

(5) *Y*: у меня самое короткое имя из нас троих.

(6) *Z*: меня зовут Илонка.

Ребята. Очень приятно познакомиться. Хотелось бы, чтобы вы рассказали немного о себе.

(7) *X*: та из нас, кого зовут Анной, уже не учится в гимназии Бержени.

(8) *Y*: та из нас, кого зовут Агнеш, учится в техникуме.

(9) *Z*: все мы учимся в одном классе.

Вдоволь посмеявшись над растерянным видом ребят, девушки сжалились над ними и открыли свой секрет. Оказывается, они с самого начала уговорились между собой, что одна будет на все вопросы отвечать только правду, другая — давать заведомо неверные ответы, а третья, отвечая на любые два вопроса, должна один раз

сказать правду, а другой — солгать (первая девушка не обязательно должна быть той, которую мы обозначили X, вторая — Y и третья — Z).

— Что же вы приуныли? — спросили девушки. — Неужели так трудно узнать, как зовут каждую из нас и где мы учимся? Впрочем, так и быть, поможем вам. Сделаем еще одно признание. Когда кто-нибудь из нас произносил ложное утверждение, то отрицание этого утверждения было истинным.

Тут как раз объявили нашу остановку, и мы сошли с поезда.

Можно ли на основании приведенных выше данных установить, как зовут каждую из трех девушек и в каком учебном заведении она учится?



147. СТРАННИК В ПУСТЫНЕ

Странник шел из Багдада в Бухару. За одним селением путь раздваивался: одна дорога вела в Бухару, а другая — в пустыню. По какой из дорог ему нужно идти, знали лишь местные жители. Но о них шла молва, что одни местные жители всегда говорят только правду, а другие — только ложь, причем и те и другие славятся своей неразговорчивостью и на все вопросы отвечают лишь «да» и «нет». И все-таки странник сумел узнать, какая из двух дорог ведет в Бухару. Для этого ему понадобилось задать лишь один вопрос первому встречному жителю селения.

Что это был за вопрос?

Истории об острове Буяне (ЗАДАЧИ 148—151)

На острове Буяне, что стоит посреди моря-океана, находятся три селения: Правдычино, Кривдино и Середина-на-Половине¹. Свои названия эти населенные

¹ Для тех, кто не знаком с географией острова Буяна, сообщаем, что река Половина делит остров на 2 равные части. Селение Середина-на-Половине, как показывает само его название, раскинулось на живописных берегах Половины. — *Прим. перев.*

пункты получили не случайно. Обитатели Правдычина всегда говорят только правду. Те, кто живет в Кривдине, не вымолвят слова, чтобы не солгать. Жители Середины-на-Половине говорят попеременно то правду, то ложь, причем не как-нибудь: отрицание любого высказанного ими истинного утверждения ложно, отрицание ложного утверждения истинно. Других селений на острове Буяне нет: каждый островитянин живет в одном из трех перечисленных нами селений.

Все это необходимо иметь в виду при решении следующих четырех задач.



148. ГДЕ ГОРИТ?

Едва дежурный по пожарной части на острове Буяне углубился в перипетии увлекательного романа, как зазвонил телефон.

— Скорее приезжайте! У нас в селении пожар! — раздался в трубке взволнованный голос.

— В каком селении? — попытался уточнить дежурный.

— В Середине-на-Половине, — последовал ответ.
Как должен поступить дежурный?

149. В ХАРЧЕВНЕ

Однажды на остров Буян высадился путешественник, и трое местных жителей пригласили его посидеть за дружеской беседой в харчевне. Путешественник, осведомленный о «тройственной природе» гостеприимных островитян, прежде всего вознамерился выяснить, кто из какого селения. В ответ на его вопросы местные жители — назовем их X , Y , Z — ответили следующее.

(1) X : я живу в том же селении, что и Y .

(2) Y : я живу в том же селении, что и Y .

(3) Z : ни X , ни Y мне не «земляки».

(4) X : Z из Середины-на-Половине.

(5) Y : от селения, где живет X , до моего селения такое же расстояние, как от Середины-на-Половине до Кривдина.

(6) Z: X и Y не из одного селения.

(7) X: пока мы здесь беседовали, Z успел один раз солгать.

(8) Y: зато X все время изрекал только истину.

(9) Z: последнее утверждение как у X, так и у Y ложно.

Над этими утверждениями путешественнику пришлось изрядно поломать голову.

Предлагаем читателю последовать его примеру.

Так в каких селениях живут X, Y и Z?

150. НА РАСПУТЬЕ В ЧИСТОМ ПОЛЕ

Истории об острове Буяне и его жителях, которые мы поведали читателям, у многих вызвали большой интерес. Редакция одной из газет направила на остров Буян своего специального корреспондента с заданием ознакомиться с местными достопримечательностями и обо всем интересном написать в путевых очерках.

Корреспондент сел верхом на первого попавшегося грифа и попросил доставить его в Правдычино. До острова Буяна наш путешественник добрался благополучно, но гриф опустил не в Правдычине, а в чистом поле на перепутье трех дорог (рис. 43).

— Что это еще за фокусы! — возмутился корреспондент. — Ведь уговор был лететь до Правдычина.

Но гриф лишь взмахнул крылами и молвил человеческим голосом:

— Жаль мне тебя, да уж видно ничего не поделаешь. Через 10 минут кончается моя смена, а за это время я не успею долететь до ближайшей стоянки грифов.

И гриф улетел.

Несчастный корреспондент остался один-одинешенек на перепутье трех дорог. Разумеется, он сразу же догадался, что одна дорога ведет в Правдычино, другая в Кривдино, а третья — в Середину-на-Половине, но ка-

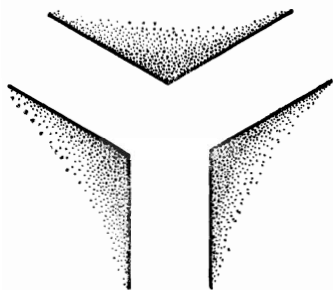


Рис. 43.

кая куда — не знал. Путевых указателей не было. (Впрочем, отсутствие указателей на дорогах острова Буяна, если учесть «тройственную природу» его жителей, вполне оправданно: любая попытка истолковать ту или иную надпись немедленно наталкивается на значительные трудности.)

К счастью, на каждой из трех дорог показалось по человеку. Путники сблизились, и каждый, дойдя до перепутья, свернул в нужную сторону. (Как все это происходило, показано на рис. 44. Дороги обозначены буквами *a*, *b*, *c*, а направления, в которых двигались путники, *A*, *B*, *C*, указаны стрелками.)

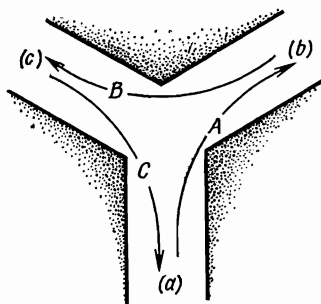


Рис. 44.

На свои вопросы спецкор получил следующие ответы.
— *Откуда путь держите?*

(1) *A*: из Правдычина.



(2) *B*: из дома.

(3) *C*: из ...

— *Далеко ли направляетесь?*

(4) *A*: домой.

(5) *В*: в селение, где живет *А*.

(6) *С*: в Правдычино.

— *Где живете?*

(7) *А*: я в Правдычине.

(8) *В*: я в Кривдине.

(9) *С*: я в ...

К сожалению, утверждения (3) и (9) (первый и последний ответы путника *С*) корреспондент не расслышал. Он был лишь уверен в том, что *С* и в (3), и в (9) назвал какое-то из трех селений, но было ли это одно и то же селение или два разных, сказать трудно.

И все-таки корреспондент, поразмыслив над ответами трех островитян, сумел узнать, куда ведет каждая из дорог. Более того, ему удалось установить, что *С* доводится земляком *В* — оба живут в одном селении, — и тем самым восстановить недослышанное в утверждениях (3) и (4).

Выясним все это и мы!

151. НОВЫЙ ВАРИАНТ

Эта задача отличается от предыдущей тем, что пешеходы *А*, *В* и *С* не идут по дорогам, а стоят — каждый у своего навеса (рис. 45). На вопросы корреспондента они сообщили следующее.

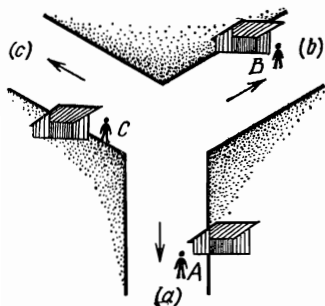


Рис. 45.

(1) *А*: каждая из трех дорог ведет в какое-нибудь селение — либо в Правдычино, либо в Кривдине, либо в Середину-на-Половине.

(2) *В*: я житель Середины-на-Половине.

(3) *А*: все дороги ведут в различные селения.

(4) *С*: я живу в том же селении, что и *В*.

(5) *А*: мы все трое живем в различных селениях.

(6) *В*: дорога, проходящая рядом с каждым навесом, ведет не в то селение, где живет человек, стоящий у навеса.

(7) *С*: дорога *a* ведет не в то селение, где я живу.

(8) *А*: дорога *a* ведет не в то селение, где я живу.

(9) *В*: за все время разговора *С* ни разу не сказал правды.

(10) *А*: последнее утверждение *В* ложно.

(11) *С*: дорога *с* ведет не в то селение, где я живу. Установите, кто где живет и куда ведет каждая дорога.



152. ЛАКОМСТВО II

На этот раз подозрение пало на троих: на Кати, Илонку и Шани. Мама обнаружила пропажу пяти шоколадок, отложенных для экскурсии, на которую дети должны были отправиться на следующий день. Все трое были подвергнуты строгому «допросу», и все трое в один голос заявили о своей невинности.

(1) *Кати*. Да я даже не притронулась ни к одной шоколадке!

(2) *Илонка*. Да я даже не притронулась ни к одной шоколадке!

(3) *Шани*. Да я даже не притронулся ни к одной шоколадке!

Столь скудные сведения могли поставить в тупик даже опытного следователя, но мама твердо знала, что виноватых следует искать не на стороне, и, настойчиво продолжая расспросы, услышала следующее.

(4) *Кати*. Илонка взяла больше шоколадок, чем Шани.

(5) *Илонка* (обращаясь к Кати). Неправда!

(6) *Шани*. Кати и Илонка взяли все шоколадки!

(7) *Кати* (обращаясь к Шани). Неправда!

В результате проведенного мамой расследования выяснилось, что каждый из детей дал столько ложных «показаний», сколько взял шоколадок.

Но сколько шоколадок взяли Кати, Илонка и Шани?



153. ВАРИАНТЫ

Решите предыдущую задачу для того случая, когда на проведенном мамой расследовании дети дали следующие 7 «показаний».

Вариант А

- (1) *Кати*. Да я даже не притронулась ни к одной шоколадке!
- (2) *Илонка*. Да я даже не притронулась ни к одной шоколадке!
- (3) *Шани*. Да я даже не притронулся ни к одной шоколадке!
- (4) *Кати*. Илонка взяла больше шоколадок, чем Шани!
- (5) *Илонка* (обращаясь к Кати). Неправда!
- (6) *Шани*. Кати взяла 3 шоколадки!
- (7) *Кати* (обращаясь к Шани). Неправда!

Вариант Б

- (1) *Кати*. Да я даже не притронулась ни к одной шоколадке!
- (2) *Илонка*. Да я даже не притронулась ни к одной шоколадке!
- (3) *Шани*. Да я даже не притронулся ни к одной шоколадке!
- (4) *Кати*. Илонка взяла больше шоколадок, чем Шани!
- (5) *Илонка* (обращаясь к Кати). Неправда!
- (6) *Шани*. Кати взяла на 1 шоколадку больше, чем Илонка!
- (7) *Кати* (обращаясь к Шани). Неправда!

Нетрудно видеть, что оба варианта отличаются лишь утверждениями (6) («показаниями» Шани). Все остальные утверждения в вариантах А и Б одинаковы и совпадают с аналогичными (имеющими те же номера) утверждениями задачи 152.



154. ЛАКОМСТВО III

Эта история приключилась с теми четырьмя «героями», с которыми мы познакомились в задаче 145. Поскольку красивая фарфоровая тарелка была разбита, на столе стояло лишь простое стеклянное блюдо, но оно было пусто: 4 яблока и 4 банана, которые мама оставила детям на ужин, исчезли!

Мама очень рассердилась и потребовала, чтобы те, кто без разрешения взял яблоки и бананы, признались. Поднялся страшный гвалт: Юльчи, Эржи, Пишта и Йошка наперебой старались перекричать друг друга.

- (1) *Юльчи*. Я не трогала яблок!
- (2) *Пишта*. Но ведь я же взял с блюда...
- (3) *Йошка*. Первой яблоко взяла Юльчи!

(4) *Пишта*. Это девчонки начали растаскивать фрукты с блюда!

(5) *Эржи* (Пиште). Помалкивал бы уж лучше! А то один раз скажешь правду, а после этого непременно два раза соврешь!

(6) *Йошка*. Ты еще споришь? Это вы, девчонки, во всем виноваты и сейчас, и в прошлый раз!

(7) *Юльчи*. Мальчишки первыми расхватили бананы!

(8) *Пишта* (обращаясь к Юльчи). Расскажи-ка лучше, как ты взяла яблоко!

(9) *Эржи*. Да Йошка один взял больше половины всех яблок!

(10) *Йошка* (обращаясь к Эржи). Неправда!

(11) *Эржи*. Пишта взял яблоко и банан!

(12) *Йошка*. Юльчи не брала бананы!

(13) *Юльчи*. Мальчишки ни разу не сказали правду!

(14) *Пишта*. Обе девчонки врут!

Согласитесь: докопаться до истины маме было не легко, но она сумела все выяснить. Оказалось, что

I) лишь один из четырех детей говорил только правду;

II) каждый из детей солгал столько раз, сколько фруктов (яблок и бананов) он взял с блюда.

Сколько яблок и сколько бананов взяли с блюда каждый из четырех маленьких «разбойников»?



155. В СПОРТИВНОМ ЛАГЕРЕ

Когда мы в последний раз были в спортивном лагере, то встретили там трех девушек-спортсменок. О них-то мы и хотим рассказать, но, поскольку девушки пожелали сохранить инкогнито, нам придется наделить их «псевдонимами» *А*, *В* и *С*. Мы знали, что одна из девушек выступает за спортивный клуб МТК, другая — за «Гонвед» и третья — за «Вашаш», но оставались в неведении относительно того, за какой клуб выступает каждая девушка, и решили выяснить это в коротком «интервью».

Но наши спутницы, очевидно, желая подшутить над нами, заявили, что могут пролить свет лишь на вопросы, относящиеся к цветам спортивных клубов. Нам не

оставалось ничего другого, как согласиться: ведь мы знали, что спортивная форма МТК сине-белая, «Гонведа» красно-белая и «Вашаша» красно-синяя.

Девушки сообщили нам следующее.

(1) А: один из цветов спортивного клуба, за который выступает В, синий.

(2) В: один из цветов спортивного клуба, за который выступает С, белый.

(3) С: один из цветов спортивного клуба, за который выступает А, синий.

(4) А: один из цветов спортивного клуба, за который выступает С, синий.

(5) В: среди цветов спортивного клуба, за который выступает А, нет красного.

(6) С: один из цветов спортивного клуба, за который выступает В, белый.

Излившаяся на нас информация была довольно сумбурной. К тому же к ней необходимо было относиться с осторожностью — слишком хитро поглядывали на нас девушки и насмешливо улыбались.

Проходивший мимо тренер предупредил нас:

— Будьте начеку! Эти чертовки любят разыгрывать новых людей. И ведут себя так, будто они родом с знаменитого острова Буяна: одна из Правдычина, другая из Кривдина и третья из Середины-на-Половине. Во всяком случае, высказываются они, как коренные жители этих трех селений.

Но расспросить тренера о том, из какого «селения» каждая спортсменка, мы не успели, поскольку он очень торопился.

Нам не оставалось ничего другого, как снова обратиться к подсмеивавшимся над нами девушками. Вот что они нам сообщили.

(7) А: С солгала вам большее число раз, чем В.

(8) В: более половины всех высказанных ранее утверждений истинны.

(9) С: более половины всех высказанных ранее утверждений ложны.

Последние утверждения девушки обронули уже на бегу, поскольку, пока мы беседовали, началась тренировка. Девушки скрылись из виду, а мы остались с утверждениями (1) — (9) и предупреждением, сделанным нам тренером.

Хорошо еще, что мы знали тренера: его правдивость была вне всяких подозрений. На утверждения (7), (8) и (9), как выяснилось позднее, также можно было положиться.

Позволяют ли приведенные выше сведения однозначно определить, за какой спортивный клуб выступает каждая из девушек?

156. «УСЕЧЕННЫЙ» ВАРИАНТ



Утверждают, будто часть утверждений, приведенных в предыдущей задаче, совершенно излишня: якобы ничего не изменится, если их вычеркнуть (и заменить по крайней мере столькими утверждениями, сколько их требуется для того, чтобы предупреждение тренера осталось в силе).

Верно ли это?

157. НЕБОЛЬШОЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ



а. Мы убедились в том, что решение усеченного варианта (задачи 156) удовлетворяет условиям исходной задачи 155.

Нельзя ли объяснить, почему так происходит, короче, чем это сделано в решении задачи 156?

б. Условие задачи 155 разрешается изменять лишь вычеркиванием той или иной части утверждений (1)—(9). Все остальные утверждения должны оставаться прежними. (Таким образом, не разрешается заменять вычеркнутые утверждения новыми, вносить любые исправления в невычеркнутые условия и использовать сведения, не содержащиеся в первоначальном варианте задачи.)

Может ли случиться, что решение задачи 155 не будет удовлетворять условиям новой («усеченной») задачи?



158. НОВЫЙ ВАРИАНТ

Заменим утверждение (7) в задаче 155 следующим:
(7) *А: В* солгала вам большее число раз, чем *С*.

Все прочие условия задачи 155 остаются без изменений.

Как будет выглядеть в этом случае решение задачи 155?



159. МИМОЛЕТНАЯ ВСТРЕЧА

Однажды нам повстречались три жителя с острова Буяна: *А*, *В* и *С*. Все трое еще издали начали махать нам руками.

— Что случилось? — крикнули мы.

А они в ответ ни слова, только знай себе машут руками. Пригляделись мы получше и видим:

(а) каждый из них пытается выразить жестами по 2 утверждения.

Когда мы встретились и попытались выяснить, что же произошло, *А* раздраженно махнул рукой.

(б) *А: В* солгал большее число раз, чем *С*.

В ответ на это *В* лишь снисходительно улыбнулся.

(в) *В*: больше половины высказанных до сих пор утверждений истинны.

*

(г) Утверждают, будто один из трех встретившихся нам островитян живет в Правдычине, другой — в Кривдине, а третий — в Середине-на-Половине.

Возможно ли это?

160. СНОВА СОРЕВНОВАНИЯ ПО БЕГУ

В соревнованиях по бегу приняли участие 4 спортсмена *А*, *В*, *С* и *Д*. Соревнования происходили на пустом стадионе, и лишь в конце их на трибунах появился единственный зритель *Н*. После соревнования его участники и зритель сообщили нам следующее.

(1) *А*: я не выиграл забег, но пришел к финишу раньше, чем *С*.

(2) *В*: я обошел *С*.

(3) *С*: *Д* пробежал дистанцию за меньшее время, чем *С*.

(4) *Д*: я не был последним.

(5) *Н*: из приведенных выше высказываний ложно лишь то, которое принадлежит победителю. Все остальные спортсмены сказали правду.

После того как были объявлены результаты соревнований, выяснилось, что по крайней мере 3 из 5 утверждений (1)—(5) истинны. (*)

а. Доказать, что спортсмен *С* не занял ни первого, ни второго места.

б. Мог ли *Н* говорить правду?



161. СУПРУЖЕСКИЕ ПАРЫ

Мы встретили их в одной компании. Нам удалось узнать, что жен звали Анна, Илонка и Эржи, а мужей—Андраш, Имре и Эгон, но кто чья жена и кто чей муж оставалось неизвестным. Сначала супруги не хотели выдавать «тайну», но потом передумали.

— Попробуйте отгадать, если сумеете,— сказали они,— но предупреждаем заранее, что дело это нелегкое.

(*) В каждой паре один из супругов будет всегда говорить только правду, а другой — только ложь.

После такого вступления мы услышали следующее.

(1) *Эгон*. В каждой супружеской паре имя жены начинается с той же буквы, что и имя мужа.

(2) *Имре*. У одного из мужей имя начинается не с той буквы, с которой начинается имя его жены.

(3) *Эржи*. Анна замужем за Андрашом.

(4) *Андраш*. Я женат на Эржи.

(5) *Илонка*. Среди приведенных выше высказываний ложных больше, чем истинных.

(6) *Анна*. Среди приведенных выше высказываний ложных больше, чем истинных.

Можно ли на основании всех этих данных определить, кто на ком женат (или кто за кем замужем)?

162. НОВОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ



Как изменится решение предыдущей задачи, если ее условия пополнить еще одним утверждением, выбрав в качестве него любое из следующих.

(7а) *Андраш*. Муж Анны говорил правду.

(7б) *Андраш*. Муж Анны лгал.

(7в) *Эгон*. Муж Анны лгал.

(7г) *Андраш*. Моя жена говорила правду.

(Решить задачу требуется во всех четырех случаях.)

163. БОЛЕЕ ПРОСТОЕ РЕШЕНИЕ



[В задаче 161 условия оказались настолько «рыхлыми», что допускали 3 решения. Во многом это связано с тем, что следствия, извлекаемые из условий задачи, оказалось невозможно выстроить в цепочку одно за другим, как это неоднократно удавалось сделать в других задачах. Кроме того, условия задачи 161 были не только «рыхлыми», но и «широко разветвленными», что мешало свести все возможные следствия в таблицу и проверить. В варианте задачи 162, условия которого отличаются от условий задачи 161 лишь одним дополнительным утверждением (7б), из трех решений осталось лишь одно. Таким образом, условия исходной задачи иногда удается так расширить за счет включения в них новых утверждений, что задача становится однозначно разрешимой. В этом нетрудно убедиться, взглянув на таблицы.]

Кроме того, появляется надежда, что в расширенном варианте задачи следствия, извлекаемые из большего числа условий, окажутся не настолько разветвленными и позволят более простым и удобным способом получить решение — с помощью гораздо более изящного метода таблиц.

Попытаемся решить заново задачу 161, заимствовав из нее утверждения (*) и (1) — (6) и дополнив их утверждением (7б) из задачи 162. Для удобства читателей мы приводим вкратце полный перечень всех утверждений, входящих в условия новой задачи.]

Действующие лица: Анна, Илонка, Эржи, Андраш, Имре, Эгон — три супружеские пары.

(*) В каждой паре один из супругов будет всегда говорить только правду, а другой — только ложь.

(1) *Эгон*. В каждой супружеской паре имя жены начинается с той же буквы, что и имя мужа.

(2) *Имре*. У одного из мужей имя начинается не с той буквы, с которой начинается имя его жены.

(3) *Эржи*. Анна замужем за Андрашом.

(4) *Андраш*. Я женат на Эржи.

(5) *Илонка*. Среди приведенных выше высказываний ложных больше, чем истинных.

(6) *Анна*. Среди приведенных выше высказываний ложных больше, чем истинных.

(7) *Андраш*. Муж Анны лгал.

Кто на ком женат (и кто за кем замужем)?

Часть XII

Чтение мыслей

164. СУПЕРМЕН И ЕГО ПОКЛОННИЦЫ

Эви и Кати — неразлучные подружки. Недавно они вместе посмотрели последний венгерский фильм и обе влюбились в исполнителя главной роли киноактера N. N., создавшего образ «идеального мужчины». Но поскольку каждой подруге исполнилось лишь 15 лет, то их несколько беспокоило, не слишком ли они молоды для героя своих грез.

Не сговариваясь между собой, девочки решили узнать возраст актера N. N. и обратились к швейцару, охранявшему вход на киностудию. Швейцар, желая подшутить над юной поклонницей, сказал Эви:

— Если тебя так интересует возраст N. N., то определи его сама! В фильме три главные роли (одну из них играл N. N.). Произведение возрастов их исполнителей равно 49321. (Как обычно, сторож округлил возраст каждого актера до целого числа.)

К сожалению, Эви не знала возраста ни одного из исполнителей главных ролей. Отец Эви сказал ей, что N. N. младше его, поскольку тот учился в одной с ним гимназии, но несколько позже. Однако и это замечание не помогло Эви определить возраст N. N.

У Кати дела обстояли не лучше. Швейцар киностудии сказал ей то же самое, что и Эви. А брат сообщил,

что N. N. старше его, поскольку они оба учились в одном институте, но N. N. закончил его в тот год, когда брат получил аттестат зрелости. Информация брата не слишком помогла Кати.

Однако когда обе подруги встретились и сообщили друг другу те скудные сведения, которые им удалось разузнать о N. N., то совместными усилиями они все же определили возраст N. N.

Сколько лет N. N.?

(Разумеется, Эви был известен возраст ее отца, а Кати знала, сколько лет исполнилось ее брату.)

165. ПАМЯТНИК ПРОШЛОГО



Четверо друзей — реставратор, архитектор, художник и историк — собрались на небольшое совещание по просьбе одного из них (реставратора).

— Вы даже представить себе не можете, — начал он свой рассказ, — какой досадный случай произошел недавно. Объездив вдоль и поперек весь Хайдушаг, наша экспедиция обнаружила старинную гостиницу, замечательный памятник архитектуры, представляющий большую научную ценность, но дата постройки этого сооружения из-за непростительной небрежности осталась неизвестной. Дело в том, что год постройки здания выражался четырехзначным числом. Каждая цифра была выбита на отдельном камне, а в более поздние времена оказалась скрытой под толстым слоем штукатурки. При расчистке начертанные на камнях цифры мы обнаружили лишь после того, как камни были вынуты и последовательность цифр нарушена. Стоило нам проявить чуть большее внимание, и мы бы теперь располагали ценными научными данными! А так известны лишь 4 цифры: 1 единица, 2 семерки и 1 восьмерка. Теперь придется основательно порыться в архивах. Работа чрезвычайно кропотливая, да к тому же неизвестно, приведет ли она к какому-нибудь результату.

(1) — Возможно, круг поисков удастся несколько сузить, — заявил художник. — Я хорошо помню, что эта гостиница изображена на одной картине пейзажиста P. R.

(I) — К сожалению, я все еще не могу назвать дату постройки гостиницы, — заметил реставратор после непродолжительного размышления.

(2) — Когда возводили часовню, стоящую ныне напротив гостиницы, самой гостиницы еще не было, — попытался помочь архитектор.

Реставратор подумал немного и радостно воскликнул:

(II) — Готово! Благодарю за помощь! Теперь я знаю, когда была построена гостиница!

(III) — А я все еще не знаю, — вступил в беседу историк.

(3) — В ней во время путешествия по Венгрии останавливался Х. У., — пояснил художник.

(IV) — Ну, тогда и я знаю, когда была построена гостиница, — успокоился историк.

Попробуем определить дату постройки и мы.

(Считаем своим долгом заверить читателя в том, что друзья в датах не ошибаются. Поручкой тому — большой профессиональный опыт реставратора.)

166. СОРЕВНОВАНИЯ ПО ПЛАВАНИЮ В БЕРГЕНГОЦИИ

Союз пловцов Бергенгоции организовал марафонский заплыв, в котором приняли участие 9 спортсменов. О них и пойдет наш рассказ. Чтобы не затруднять понапрасну читателя неудобопроизносимыми бергенгоцийскими именами, обозначим пловцов *A, B, C, D, E, F, G* и *H*. Молодой спортивный комментатор *X* получил задание побывать на соревнованиях и сразу же по окончании заплыва сообщить о результатах в редакцию «Бергенгоцийского иллюстрированного спортивного журнала».

Перспектива провести несколько часов в бассейне, пока спортсмены будут преодолевать многокилометровую дистанцию, не привлекала *X*.

— Вполне достаточно, если я появлюсь в бассейне, когда первая половина дистанции будет пройдена, — решил он и отправился на соседний стадион посмотреть футбольный матч. Игра захватила его так, что он забыл о поручении редакции. Когда *X* вернулся в бассейн, было поздно: заплыв давно окончился, и даже табло с именами участников и их результатами погасло.

Что делать? *X* прекрасно понимал, что если редакция конкурирующего «Бергенгоцийского неиллюстрированного спортивного журнала» получит сведения о заплыве раньше, чем его редакция, то «выйти сухим из воды» ему не удастся. Расспрашивать немногих оставшихся зрителей он не решился — вдруг кто-нибудь узнает о его упущении и это дойдет до главного редактора. Если бы удалось разузнать хотя бы последовательность, в какой спортсмены закончили марафонский заплыв, то еще можно было бы выкрутиться из беды: написать короткий репортаж с «красочными» подробностями, умолчав о том, за сколько прошел дистанцию тот или иной пловец, будто это не представляет интереса для широкой публики.

К счастью, из доносившихся до него обрывков разговоров *X* понял, что какие-то два спортсмена после упорной борьбы разделили между собой первые два места, а два других пловца разделили два последних места. Больше ничего установить не удалось. Для *X* осталось неизвестным даже, кто из спортсменов в каждой паре был первым и кто — вторым. Набравшись смелости, *X* решил расспросить самих пловцов и хотя бы косвенно разузнать, как распределились места между участниками заплыва.

Вот что сообщили в беседе с *X* пловцы.

(1) *A*: большинство зрителей обрадовалось, что мне удалось опередить *F* и *H*.

(2) *B*: мне удалось опередить *C* и на этот раз прийти к финишу раньше, чем *A*.

(*) («Это я и так знаю, — подумал *X*. — Важна лишь первая половина утверждения. Впрочем, не стоит отвлекаться. Послушаем, что скажут остальные пловцы».)

(3) *C*: я предпочитаю не давать интервью.

(4) *D*: обогнать *C*, как я ни старался, мне не удалось, но дистанцию я закончил сразу после него.

(5) *E*: к сожалению, я опять отстал от *G*.

(**) («Вот это действительно полезная информация», — заметил про себя довольный *X*.)

(6) *F*: безуспешно пытался догнать *H*, но тот оказался сильнее.

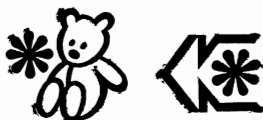
Пловцы *G* и *H* также хотели принять участие в разговоре, но, когда очередь дошла до них, давать «интервью» было уже некому. Едва замолчал *F*, как *X* со

всех ног бросился к телефону: теперь он знал, в какой последовательности пловцы пришли к финишу марафонской дистанции!

Попытаемся определить это и мы.

(Считаем своим долгом успокоить тех, кто, быть может, опасается, что кто-нибудь из пловцов решил подшутить над легкомысленным комментатором и сообщил ему неверные сведения: все приведенные выше утверждения истинны.)

167. ЛОГИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НА ТЕЛЕВИДЕНИИ



(Отборочный тур)

Участников отборочного тура логической олимпиады в телестудии разбили на группы по 4 человека в каждой. В одной группе оказались только девушки, и это навело жюри олимпиады на мысль провести операцию под условным названием «Всем сестрам по серьгам».

— Позвольте на время предложить вам вместо тех серег, которые вы обычно носите, другие, — обратился к девушкам председатель жюри и достал из кармана небольшую коробочку. — Взгляните, пожалуйста, сюда! В этой коробочке 4 пары белых и 1 пара красных серег. Каждой из вас я надену одну из этих пар серег. Таким образом, всего из коробочки я возьму 4 пары серег. Брать серьги различного цвета я не буду, так что обе серьги непременно будут одинаковыми.

Затем девушек пригласили по очереди подойти к председателю жюри, и он каждой надел по паре белых серег, а оставшуюся пару красных серег положил обратно в коробочку (все это он проделал так ловко, что ни одна из девушек не заметила, какого цвета серьги на ней и какого цвета пара серег, оставшаяся в коробочке).

Когда девушки снова сели на свои места, председатель жюри сказал:

— Пожалуйста, посмотрите друг на друга! Та из вас, кто первой догадается, какого цвета серьги на ней, будет победительницей.

Четыре девушки молча уставились друг на друга. Наступила напряженная тишина.

Но ненадолго: не прошло и нескольких секунд, как одна из девушек воскликнула:

— На мне белые серьги!

Как ей удалось это определить?

168. ЛОГИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА
НА ТЕЛЕВИДЕНИИ II



(Полуфинал)

Победителей отборочного тура олимпиады (см. задачу 167) снова разбили на группы по 4 человека в каждой, и членам женской группы снова предложили задачу о серьгах — на этот раз чуть более сложную, чем в отборочном туре. Обращаясь к девушкам, председатель жюри сказал:

— Перед вами коробочка с 8 белыми и 2 красными серьгами. Забудьте на время об элегантности! На этот раз, надевая вам серьги, я не буду следить за тем, чтобы они непременно были одного цвета. Может случиться так, что кому-нибудь из вас достанутся разные по цвету серьги.

Каждая участница полуфинального тура подходила к председателю и, получив серьги, садилась в отдельную звуконепроницаемую кабинку. Все девушки могли видеть друг друга, но слышали только голос ведущего.

— Посмотрите, пожалуйста, друг на друга, — обратился он к ним, — и попытайтесь определить, какого цвета ваши серьги. Когда вы сочтете, что знаете цвет своих серег, нажмите кнопки соответствующего цвета на пульте перед вами. Если по серьгам других участниц вы не сможете определить, какого цвета серьги в ваших ушах, нажмите, пожалуйста, кнопку с вопросительным знаком.

Девушки склонились над пультами (каждая сидела так, что другие не могли видеть, какие кнопки она нажимает) и принялись колдовать над кнопками.

— (I) Посмотрим, что у нас получилось! — сказал ведущий и повернул какой-то выключатель. Над каждой кабинкой (это хорошо было всем видно) загорелся вопросительный знак.

— Итак, никто из участниц не смог определить, какого цвета ее серьги. Ну что ж, подождем немного. А пока мы предлагаем вниманию уважаемых зрителей конкурс чтецов.

На экранах телевизоров появилось изображение сцены, на которой, сменяя друг друга, выступали чтецы.

Но вот конкурс окончился, и зрители снова увидели 4 стеклянные кабинки и девушек с серьгами.

— (II) Уважаемые телезрители! — раздался голос ведущего. — Участницы полуфинального тура нашей олимпиады имели достаточно времени, чтобы обдумать ответ на заданный им вопрос. Напоминаем, что предыдущая попытка решить задачу не принесла успеха ни одной из участниц, поскольку никто из девушек не смог определить, какого цвета серьги у нее в ушах. Новый ответ вы увидите после того, как я поверну свой выключатель — «проявитель». Итак, милые девушки, надеюсь, никто из вас не забыл нажать на соответствующие кнопки? Если цвет серег вам известен, то вы должны нажать на кнопки того же цвета. Если вы считаете, что по серьгам других участниц второго тура невозможно определить цвет ваших серег, прошу нажать кнопку с вопросительным знаком!

(*) Предупреждаем, что по решению жюри мы не прощаемся с теми участницами второго тура, которые не смогут определить цвет своих серег, поскольку, по мнению жюри, они смогут более успешно выступить в следующем, заключительном туре нашей олимпиады. Что же касается тех девушек, которые неправильно определяют цвет своих серег, то они выбывают из числа претендентов на приз и к дальнейшему участию в олимпиаде не допускаются.

— Все готовы? Внимание, включая «проявитель»!

Ведущий повернул выключатель, и все увидели, что над каждой кабинкой снова загорелся вопросительный знак.

— (III) Опять ни одна из участниц не смогла определить, какого цвета ее серьги! Попробуем поступить иначе. Я оставляю включенным переговорное устройство. Теперь участницы олимпиады могут получать и передавать любые интересующие их сведения. Итак, начали!

Почти тотчас же над одной из кабинок вспыхнули

2 лампочки: сидевшая в ней девушка сумела определить, какого цвета ее серьги.

Какого цвета серьги были у девушек и каким образом победительница второго тура сумела определить цвет своих серег?

(Следует заметить, что у всех участниц олимпиады необычайно развита способность логически мыслить.



В частности, из любых данных они извлекают все возможные следствия. Поэтому если по утверждениям участницы олимпиады на тот или иной вопрос невозможно ответить, то это означает, что имеющихся данных действительно недостаточно. Кроме того, каждой участнице олимпиады известно, что если имеющиеся данные позволяют определить цвет серег, то за нажим на кнопку с вопросительным знаком вместо кнопок, цвет которых совпадет с цветом серег, следует строгое наказание: провинившаяся девушка исключается из числа участников олимпиады.

Ни одна из участниц не нажимает кнопки наугад — например, в зависимости от того, как выпадут игральные кости.

Аналогичные замечания остаются в силе и для всех остальных задач.)

169. ЧРЕЗМЕРНОЕ МНОГОСЛОВИЕ?



Вряд ли можно спорить с тем, кто сочтет условия предыдущей задачи *довольно* длинными. Ведущий на телестудии говорил слишком много.

Например, так ли необходим абзац, отмеченный звездочкой (*)?

170. НЕБОЛЬШОЙ ИНЦИДЕНТ



Во время проведения полуфинального тура логической олимпиады в телестудии произошел следующий инцидент. В одной из групп участница олимпиады (скажем, это была Жужа) начала с того, что задала жюри вопрос:

— Скажите, пожалуйста, учтено ли при составлении задач, что все участницы должны иметь равные шансы на выигрыш?

— Разумеется, — ответил председатель жюри. — А если кто-нибудь из вас сумеет доказать обратное, то мы объявим ее победительницей независимо от того, кто первым определит цвет своих серег.

Жужа поблагодарила председателя за разъяснение, а когда девушкам сообщили правила полуфинального тура, попросила:

— Завяжите мне, пожалуйста, глаза каким-нибудь платком, чтобы я ничего не могла видеть, и снимите повязку лишь по окончании этого тура. Я буду действовать вслепую.

Жюри удовлетворило просьбу Жужи. Ей завязали глаза.

И все-таки именно Жужа стала победительницей полуфинального тура среди своей четверки.

Как это ей удалось?

171. ЛОГИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НА ТЕЛЕВИДЕНИИ III (Заключительный тур)



И на этот раз жюри предложило девушкам определить цвет своих серег, но ряды участниц олимпиады заметно поредели, и в каждой группе насчитывалось уже не по 4, а лишь по 3 человека. Девушкам показали коробочку, в которой лежали 4 (2 пары) белые и 3 (полторы пары) красные серьги. Каждой девушке председатель надел по 2 серьги, то есть всего из коробочки было взято 6 серег. Какие кому серьги достались,

девушки не видели. Им сообщили, что серьги могут быть непарными (одна серьга красная, а другая белая).

Впрочем, ни по условиям проведения, ни по самому ходу заключительный тур логической олимпиады ничем не отличался от ее полуфинального тура (задача 168).

(I) В ответ на первый вопрос ведущего все три девушки нажали кнопки с вопросительными знаками, то есть ни одна из участниц финала не смогла, глядя на серьги своих соперниц, определить, какого цвета серьги у нее в ушах.

(II) После того как участницам заключительного тура было дано на размышления дополнительное время, ведущий, повернув выключатель — «проявитель», обнаружил, что все 3 девушки снова нажали на кнопки с вопросительным знаком.

(III) Тогда ведущий оставил невыключенным переговорное устройство, и вскоре одна из участниц финала сумела определить цвет своих серег и выиграла заключительный тур олимпиады.

Какого цвета (или каких цветов) были серьги у победительницы третьего тура?

Какого цвета были серьги у остальных девушек?

Каким образом победительница смогла определить цвет своих серег?

172. Поговорим о мужчинах



Разумеется, среди участников заключительного тура логической олимпиады были не только представительницы прекрасного пола. Но на представителей сильного пола серьги не наденешь! (По крайней мере таково было единодушное мнение жюри.) Для них было решено заказать разноцветные шапки. Завоевавших право выступать в заключительном туре олимпиады мужчин разбили на группы по 3 человека. Для каждой группы приготовили набор из 5 шапок: 3 белые и 2 красные.

Правила проведения финального тура для мужчин оставались такими же, как и для женщин (задача 168).

У мужчин заключительный тур логической олимпиады протекал следующим образом.

(I) С первой попытки все участники нажали кнопки с вопросительным знаком.

(II) Со второй попытки повторилось то же самое.

(III) После того как ведущий оставил включенным переговорное устройство и каждый из участников финала получил возможность устанавливать «прямую связь» с любым другим финалистом, один из троих сумел правильно определить цвет своей шапки, и над его кабинкой вспыхнула лампочка соответствующего цвета.

Какого цвета была шапка у победителя заключительного тура?

Какого цвета были шапки у остальных участников финала?

Каким образом они могли это обнаружить?

173. ДРУГ ЗА ДРУГОМ



На заключительном туре проводимой телевидением логической олимпиады участникам предложили решить следующую задачу (на этот раз все финалисты выступали как бы в качестве членов жюри).

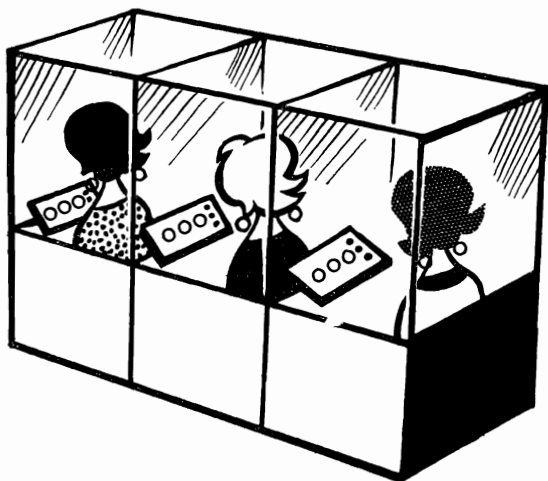
Трем девушкам показали 6 белых и 2 красные серьги, то есть всего 8 серег, и каждой из них надели по 2 серьги (на 3 девушек — 6 серег). Затем девушек попросили пройти в уже известные нам по предыдущим задачам кабинки, которые на этот раз были расположены так, что каждая девушка могла видеть только тех (или только ту), кто сидит впереди, и не видела сидящих (или сидящую) сзади.

Каждая девушка должна определить, какого цвета ее серьги.

Правила проведения и ход заключительного тура остались такими же, как и в предыдущих задачах.

У всех участниц олимпиады на обдумывание задачи уходит одинаковое время. Поэтому когда девушка нажимает на своем пульте либо кнопку с вопросительным знаком, либо две кнопки (одного цвета или различных цветов), то в кабине загораются специальные лампочки, и все участницы получают возможность сразу видеть ответы всех своих соперниц. Так происходит до тех пор,

пока не будет нажато ни одной кнопки с вопросительным знаком. Если, по мнению жюри, хотя бы одна из участниц олимпиады, получив дополнительные сведения, может определить цвет своих серег, то переговорное устройство остается включенным, и девушки по своему усмотрению могут обращаться к любой из соперниц. Победительницей считается та, которая быстрее других



сможет определить, какого цвета серьги у нее в ушах.

Как должны распределиться серьги для того, чтобы заключительный тур олимпиады выиграла девушка, сидящая

- а) в задней,
 - б) в средней,
 - в) в передней
- кабинке?



174. СНОВА ШАПКИ

Не следует забывать о том, что способность логически мыслить присуща не только женщинам, — среди участников логической олимпиады были и мужчины.

Десяти финалистам олимпиады показали 10 белых и 6 красных шапок. После того как председатель жюри

собственноручно надел каждому какую-нибудь из этих шапок, их усадили в кабинки, расположенные «в одну колонну». Каждый участник заключительного тура видит лишь впереди сидящих соперников и должен определить, какого цвета шапка у него на голове.

Правила проведения и ход заключительного тура такие же, как и в предыдущей задаче. Всем участникам последнего тура олимпиады на обдумывание задачи требуется одно и то же время. Поэтому когда они нажимают на кнопку с вопросительным знаком или на кнопку соответствующего цвета, то на пульте, находящемся в каждой кабине, загораются лампочки, которые позволяют любому финалисту олимпиады сразу видеть, как ответили на вопрос все его соперники. Единственное отличие от предыдущей задачи состоит в том, что все следующие попытки определить цвет шапки проводятся так же, как и самая первая: переговорное устройство не включается.

Победителем считается тот, кто сумеет раньше других определить цвет своей шапки. Под этим понимается следующее. Поскольку участники олимпиады лишены возможности переговариваться друг с другом, то несущественно, на сколько секунд тот или иной участник олимпиады опередил своих соперников. Важно другое: победителю для решения задачи понадобилось *по крайней мере на 1 попытку меньше*, чем остальным участникам. Если же несколько участников олимпиады сумели определить цвет своих шапок за одинаковое число попыток, то, несмотря на небольшие расхождения во времени, жюри объявляет «ничью».

В том случае, о котором идет речь, ничьей быть не могло, поскольку в трех первых попытках все 10 участников финала нажали кнопки с вопросительным знаком, а с четвертой попытки лишь один Пишта сумел правильно определить цвет своей шапки, а 9 его соперников снова нажали кнопки с вопросительным знаком.

а. Назовите номер кабины, в которой сидел Пишта? (Нумерация кабин идет сзади: передняя кабина имеет номер 10, а задняя кабина — номер 1.)

б. Что можно сказать о цвете шапок участников заключительного тура логической олимпиады?



Олимпиады такого типа, как та, о которой говорилось в предыдущих задачах, проводятся довольно часто. К сожалению, не всегда имеется возможность уделить им должное внимание, поэтому о большинстве из них известно так же мало, как и о той олимпиаде, о которой мы хотим сейчас рассказать.

Точное число участников этой олимпиады не известно. Мы знаем лишь, что их было достаточно много и что «красношапочники» оказались в меньшинстве. Никто не мог сообщить нам ни номер кабины, в которой сидел победитель, ни число попыток, за которое он сумел определить цвет своей шапки. До нас дошли лишь сведения о том, что победитель был один и его звали Йошка.

Какого цвета шапка была на Йошке?

РЕШЕНИЯ

Часть I

1. ЗАБЫТЫЙ НОМЕР ТЕЛЕФОНА

Ясно, что как первая, так и вторая «половина» шестизначного числа представляет собой трехзначные числа (рис. 46, а). Из сказанного Кати следует, что первая цифра номера телефона Пишты не может быть больше 2 (в противном случае вторая половина телефонного номера, которая в 4 раза больше первой, была бы не трех-, а четырехзначным числом).

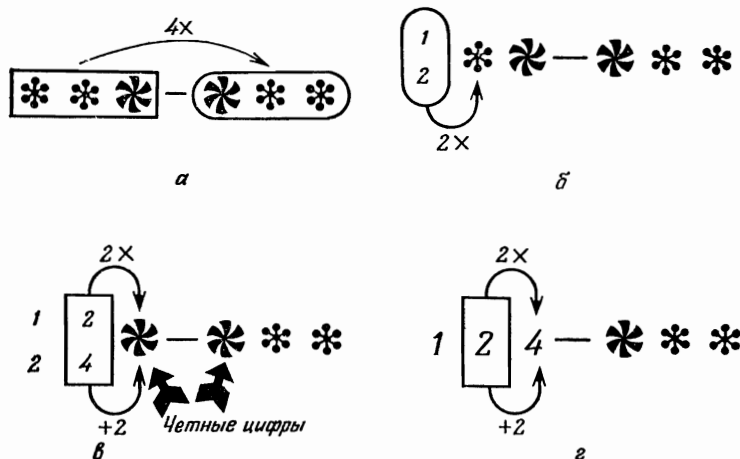


Рис. 46.

Сведения, сообщенные Илонкой, позволяют утверждать (рис. 46, б), что номер телефона Пишты может начинаться лишь с комбинации цифр 12 или 24.

Третья цифра номера телефона Пишты, как нетрудно установить, четная. Действительно, вторая цифра равна либо 2, либо 4, а третья цифра (по утверждению Фери) больше второй либо в 2 раза,

либо на 2. И в том и в другом случае она четная (рис. 46, в).

Нетрудно показать, что номер телефона Пишты не может начинаться с комбинации цифр 24. Действительно, если бы забытый номер телефона начинался с 24, то его первая половина была бы не меньше 240 и не больше 249, а вторая половина, которая в четыре раза больше первой, была бы не меньше 960 и не больше 996. Четвертой цифрой номера во всех случаях должна была бы быть девятка. Но тогда и третьей цифрой номера телефона Пишты (по утверждению Йошки) была бы 9. Как мы только что доказали, это невозможно, поскольку 9 — нечетное число.

Таким образом, номер телефона Пишты может начинаться лишь с 12, а его третья цифра равна 4, поскольку независимо от того, умножим ли мы 2 на 2 или прибавим к 2 число 2, результат получится одним и тем же: число 4 (рис. 46, г). Следовательно, первая половина номера телефона Пишты может совпадать лишь с числом 124, в силу чего вторая половина номера равна $4 \cdot 124 = 496$. Итак, номер телефона Пишты нам удалось восстановить однозначно:

124-496,

или, как предпочитает записывать номер телефонов Йошка,

12-44-96.

Найденное нами число действительно является номером телефона Пишты (если считать верными те сведения, которые удалось припомнить его друзьям), поскольку оно удовлетворяет всем условиям, упомянутым в разговоре друзьями Пишты.

*

Приведенное выше решение отнюдь не рассчитано на «экспериментальную» проверку и не нуждается в ней. Набирать номер телефона 12-44-96 нецелесообразно, поскольку нам заведомо известно, что Пишта недавно переехал на новую квартиру и у него теперь совсем другой номер телефона.

Примечание 1. В приведенном выше решении мы исходили из молчаливого предположения о том, что шестизначный телефонный номер не может начинаться с нуля. Если отбросить это ограничение (то есть считать двузначными такие числа, как 02, 07 и так далее), то задача должна иметь еще одно решение: номер телефона 000-000. (Проверку правильности нового решения мы предоставляем читателю.)

Примечание 2. Как говорилось в начале решения, мы считаем само собой разумеющимся, что шестизначное число можно рассматривать как состоящее из двух «половинок» — трехзначных чисел, образованных соответственно тремя первыми и тремя последними цифрами. Такое предположение вполне естественно, поскольку речь идет о телефонном номере, который по традиции принято записывать в виде последовательности из трех двузначных чисел. Однако если бы кто-нибудь не согласился с нами и вздумал истолковать условия в том смысле, что шестизначное число можно разделить на две части любой длины, из которых первая (содержащая 1, 2, 3, 4 или 5 знаков) в четыре раза больше второй части, дополняющей ее до шестизначного числа, то ответ задачи от этого не изменился бы.

Дело в том, что те сведения, которые сумела вспомнить Кати, имеют смысл лишь в том случае, если речь идет о разбиении шестизначного числа на два трехзначных. Одно- или двузначное число при умножении на 4 может дать не более чем трехзначное произведение (самое большое двузначное число 99 при умножении на 4 дает $4 \cdot 99 = 396$). Следовательно, весь телефонный номер оказался бы либо четырех-, либо пятизначным. Что же касается четырех- и пятизначных чисел, то при умножении на 4 они никогда не могут давать двух- или однозначные произведения.

Примечание 3. Вполне возможно, что читатель придет к тому же ответу другим путем. В этом случае ему необходимо тщательно сравнить свое решение с нашим и попытаться выяснить, правильно ли предлагаемое им решение и не содержит ли оно каких-либо пробелов. Сравнивая решения, следует обращать особое внимание на то, длинна или коротка цепочка рассуждений, ведущая от исходных данных к ответу задачи.

Разумеется, все сказанное относится не только к рассмотренной нами задаче, но и ко всем другим задачам.

2. СТРАННАЯ ТАКТИКА

В обоих случаях прав дядюшка Янош, поскольку по условиям задачи «какую бы комбинацию из 5 номеров ни выбрал любитель лото, она имеет такие же шансы стать выигрышной, как и любая другая комбинация из 5 номеров». Это означает, что 5 номеров, образующих на карточке лото симметричную фигуру, имеют такие же шансы стать выигрышными, как и 5 номеров, расположенных на карточке в полном беспорядке, а 5 номеров, выпавших на прошлой неделе, при розыгрыше очередного тиража имеют ничуть не меньшие (и не большие) шансы стать выигрышными, чем любые другие 5 номеров.

а. Как правило, 5 номеров, выпавших при розыгрыше тиража, не образуют симметричной фигуры. Это объясняется тем, что несимметричных фигур гораздо больше, чем симметричных, но отнюдь не означает, будто какая-то *вполне определенная* несимметричная фигура имеет больше шансов на выигрыш, чем какая-то *вполне определенная* симметричная фигура.

б. Аналогичным образом обстоит дело и с номерами, выпавшими при розыгрыше тиража лото на прошлой неделе. Ведь они представляют собой не что иное, как *одну-единственную* (вполне определенную) комбинацию из 5 номеров. Шансов на то, что при проведении очередного тиража лото выпадет именно эта комбинация номеров, ровно столько же (так же мало), сколько на то, что выигрышной станет любая другая комбинация из 5 номеров. Разумеется, это отнюдь не означает, будто пятерка номеров, выпавших при розыгрыше предыдущего тиража лото, при проведении очередного тиража имеет меньше шансов стать выигрышной, чем любая другая задуманная участником игры комбинация из 5 номеров.

Примечание. Разумеется, 5 номеров, выпавших при розыгрыше тиража, с большей вероятностью расположатся в беспорядке, чем образуют какую-нибудь симметричную фигуру. Ана-

логичным образом выпавшие при проведении розыгрыша очередного тиража номера с большей вероятностью будут отличаться от номеров, бывших выигрышными на прошлой неделе, чем совпадать с ними. Однако из этого отнюдь *не следует*, будто любая заданная симметричная фигура имеет меньше шансов оказаться выигрышной, чем любая заданная несимметричная фигура, и аналогичным образом будто любая заданная комбинация из 5 номеров, отличная от выпавшей при розыгрыше тиража лото на прошлой неделе, имеет меньше шансов на выигрыш, чем та, которая выпала на прошлой неделе.

3. СТАРАЯ ИГРА ПО НОВЫМ ПРАВИЛАМ

Карточка с 85 зачеркнутыми номерами в новом варианте лото, предложенном Пиштой, имеет столько же шансов на выигрыш, сколько в традиционном варианте лото имеет карточка с 5 зачеркнутыми номерами.

Действительно, способов выбрать 85 номеров из 90 существует столько же, сколько существует способов оставить «невостребованными» 5 номеров. Зачеркнуть на карточке для игры в лото 85 номеров можно ровно столькими способами, сколькими удастся оставить незачеркнутыми 5 номеров. Между новым и традиционным вариантами лото имеется лишь чисто техническое различие. В обоих случаях необходимо выбрать 5 номеров: в традиционном лото те, которые будут извлечены при проведении тиража, в новом варианте лото — те, которые останутся в тиражном барабане после окончания тиража. Таким образом, угадать выигрышную комбинацию из 85 номеров по существу означает угадать те 5 номеров, которые не будут извлечены при проведении тиража лото «по системе Пишты» (рис. 47).

4. «МЕТКИЕ ПОПАДАНИЯ» В НОВОМ ЛОТО

На вопрос задачи можно дать совершенно точный ответ: все 10 человек. Дело в том, что в предложенном Пиштой новом варианте лото каждый участник всегда угадывает не менее 80 номеров.

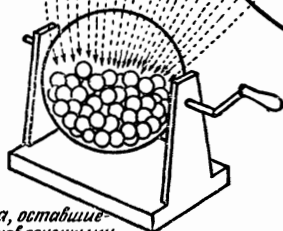
Действительно, поскольку каждый участник игры вычеркивает на своей карточке по 85 номеров, то остается лишь 5 незачеркнутых номеров. Следовательно, среди 85 номеров, вытянутых наугад при проведении очередного тиража лото, найдется не более 5 таких, на которых на карточке «не поставлен крест». Это и означает, что по крайней мере $85 - 5 = 80$ номеров заведомо угаданы верно.

5. ШАНСЫ НА ВЫИГРЫШ В НОВОМ ЛОТО

Во всех трех случаях (а, б и в) угадать номера в новом и в традиционном вариантах лото одинаково трудно, поскольку в каждом случае угадывание названного в условиях задачи числа номеров в одном варианте сводится к угадыванию соответствующего числа номеров в другом варианте.

*Заполненная карточка для игры
в традиционное лото*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

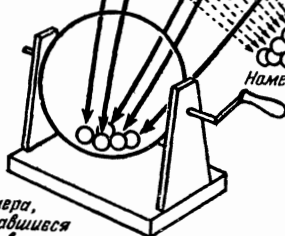


*Номера, извлеченные
при розыгрыше тиража*

*Номера, оставшиеся
неизвлеченными
после розыгрыша тиража*

*Заполненная карточка
для игры в новое лото*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90



*Номера, извлеченные
при розыгрыше
тиража*

*Номера,
оставшиеся
неизвлеченными
при розыгрыше тиража*

Рис. 47.

Действительно, если в предложенном Пиштой варианте лото правильно угаданы

84, 83, 82

номера, то это означает, что среди извлеченных при розыгрыше тиража номеров остались «невыставленными» (их не угадали) соответственно

1, 2, 3

номера, то есть среди номеров, извлеченных наугад при розыгрыше тиража, нашлось 1, 2 и 3 таких номера, на которых на карточках

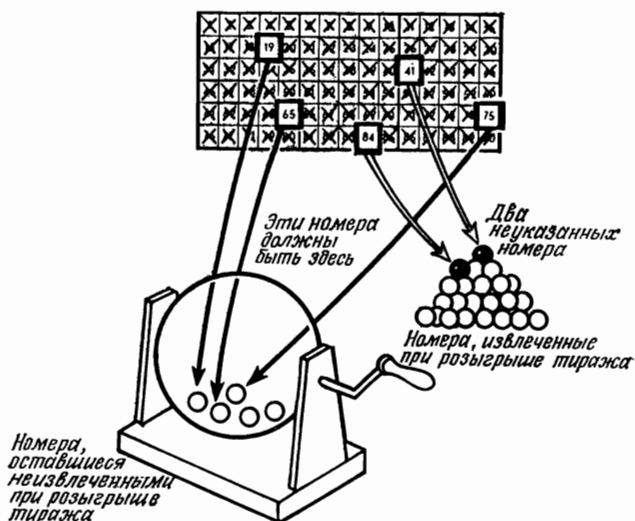


Рис. 48.

не был «поставлен крест». Следовательно, среди 5 номеров, оставшихся после проведения тиража внутри «барабана» или лотерейного колеса, находятся

5 — 1, 5 — 2, 5 — 3,

или

4, 3, 2

«угаданных» номера. По существу это то же самое, как если бы в традиционном варианте лото были угаданы

4, 3, 2

номера.

На рис. 48 изображен случай, когда из 85 номеров, на которых на карточке «поставлен крест», удалось угадать 83 номера, а из 5 незачеркнутых номеров — 3 номера.

6. НОВЫЕ ВАРИАНТЫ ИГРЫ В ЛОТО

Сравнивать два новых варианта игры в лото в том виде, как они приведены в условиях задачи, довольно трудно, поскольку один вариант определяется числами 60 и 25, а другой 55 и 30; ни одно из двух «характеристических» чисел у новых вариантов не совпадает. А нельзя ли придать новым вариантам лото такую форму, чтобы по крайней мере одно из двух чисел, задающих каждый вариант, у «новоиспеченных» систем лото было общим?

Как это можно сделать, нас учит решение задачи 3.

Если из 55 номеров Аннушки, находящихся в лотерейном «барабане», извлечь 30, то в барабане останутся $55 - 30 = 25$ номеров. Следовательно, если мы условимся рассматривать лишь те номера, которые еще не извлечены из барабана, то оба новых варианта лото сводятся к следующему: в варианте Аннушки из 55 номеров требуется извлечь 25, а в варианте Йошки те же 25 номеров требуется вытянуть из 60. Ясно, что угадать 25 номеров из 60 труднее, чем из 55. Таким образом, *в предложенном Йошкой варианте лото выиграть труднее, чем в варианте лото, предложенном Аннушкой.*

Примечание. Возможно, что последнее утверждение заставит некоторых читателей задуматься. Действительно, так ли ясно, почему угадать одно и то же количество номеров из большего их числа труднее, чем из меньшего? Подобное недоверие тем более обоснованно, что, как мы уже видели, иногда угадать большее число номеров из одного и того же их количества не труднее, чем угадать меньшее число номеров, и даже пользовались этим. Разрешить сомнение нам поможет, например, следующее рассуждение.

Предположим, что кто-нибудь, играя в вариант лото, предложенный Аннушкой, заполнил столько карточек, что при любом исходе тиража у него найдется карточка с правильно угаданными 25 выигрышными номерами (иначе говоря, этот любитель лото предусмотрел все возможные исходы розыгрыша тиража). С теми же самыми карточками он может принять участие и в розыгрыше тиража лото, проводимого по системе Йошки, но на этот раз без гарантии на выигрыш, поскольку в предложенном Йошкой варианте лото число возможных исходов тиражей больше: ведь число номеров в нем превышает 55.

7. СЕАНС ОДНОВРЕМЕННОЙ ИГРЫ В ШАХМАТЫ

Фери смог добиться успеха, выбрав в партии с Андрашем фигуры того же цвета, какой в другой партии выбрал Бела. Тогда один из партнеров Фери, например Андраш (А), играл бы против черных, а другой, Бела (Б), — против белых.

Следовательно, А играл бы белыми и в партии с Фери первый ход принадлежал бы ему. Играя белыми в партии с Белой, Фери мог бы повторить ход А. Затем, дождавшись ответного хода Б, Фери повторил бы его, играя черными против А, а дав А сделать ответный ход, повторил бы его, играя белыми против Б, и так далее. При таком способе игры обе партии полностью совпали бы:

с каким бы результатом ни закончилась партия Андраш — Фери, точно таким же будет исход партии Фери — Бела. Отсюда с необходимостью следует, что Фери либо одну из партий проиграл, а другую выиграл, либо обе партии закончил вничью.

[По существу Фери заставил Белу и Андраша играть друг против друга, а сам служил посредником. Была сыграна лишь одна-единственная партия, хотя и на двух досках.

Шахматисты иногда играют друг с другом «по переписке». Делается это так. Шахматист А, расставив фигуры на своей доске, делает ход и сообщает его в письме своему противнику шахматисту Б. Тот в свою очередь расставляет фигуры на шахматной доске, воспроизводит ход А, затем делает ответный ход, сообщает его в письме шахматисту А и так далее.

Андраш и Бела по существу вели между собой именно такую игру «по переписке», а Фери исполнял роль почтальона. Для этого Фери вовсе не нужно было владеть искусством игры в шахматы и даже знать, как ходят шахматные фигуры. Он должен был лишь обладать минимальными математическими способностями, чтобы сообразить, как, отразив очередной ход партнера относительно центра доски, воспроизвести его уже в качестве своего хода на другой шахматной доске (хотя додуматься до столь хитроумного способа проведения «сеанса одновременной игры» в шахматы с двумя заведомо превосходящими по силе противниками Фери — разумеется, при условии, что ему не приходилось слышать об этой уловке раньше, — мог, лишь проявив незаурядную математическую или, если угодно, логическую фантазию).]

8. ШАХМАТНЫЙ МАРАФОН

Ошибка кроется в рассуждениях Андраша. Счет 152:104 полностью согласуется со всеми условиями задачи.

Приведенный Андрашем пример лишь на первый взгляд изменяет соотношение очков в пользу Белы. Действительно, предположив, что все малые турниры закончились со счетом 16:0 в пользу победителя, Андраш тем самым увеличил до максимально возможного значения число выигранных им партий в 10 малых турнирах (напомним, что Андраш одержал победу в 10 малых турнирах). Число партий, выигранных Белой, при этом увеличилось лишь в 6 малых турнирах (поскольку Бела одержал победу лишь в 6 малых турнирах).

Приведенный Андрашем примерный подсчет очков изменял бы соотношение сил в пользу Белы лишь в том случае, *если бы число побед, одержанных Белой в малых турнирах, он увеличивал бы до той же величины, что и число побед, одержанных Андрашем.* Однако достигнутое Андрашем превосходство в 4 «дополнительных» (сверх 6 выигранных Белой) малых турнирах не только компенсирует «преимущество», якобы даваемое Беле предположением о том, что победитель выигрывает малый турнир со счетом 16:0, но и «забивает» его.

[Бела действительно получил бы некое преимущество при подсчете очков, если бы Андраш не увеличил разрыва между победителем и побежденным в малом турнире до максимального]

возможного, а предположил, что все малые турниры закончились с одним и тем же счетом 10:6 в пользу победителя. При таком предположении число побед, одержанных Андрашем в малых турнирах, не возросло бы, а число побед, одержанных Белой, не уменьшилось бы и Бела получил бы некоторое преимущество.

В этом случае Андраш выиграл бы $10 \cdot 10 + 6 \cdot 6 = 136$ партий, а Бела — $6 \cdot 10 + 10 \cdot 6 = 120$ партий и большой турнир закончился бы со счетом 136:120 в пользу Андраша, что лишь немногим меньше, чем в действительности.]

Счет 152:104 при тех обстоятельствах, о которых говорится в условиях задачи, получается без труда, например, если

Андраш выиграл 1 малый турнир со счетом 14:2, 1 малый турнир со счетом 13:3, 3 малых турнира со счетом 11.5 и 5 малых турниров со счетом 10:6,

а Бела выиграл 1 малый турнир со счетом 10:6, 3 малых турнира со счетом 9:7 и 2 малых турнира со счетом $8\frac{1}{2}:7\frac{1}{2}$.

9. ВЗАИМНЫЕ РАСЧЕТЫ

Поскольку члены бригады все свои «дебетно-кредитные платежи» производят только между собой (не берут займы на стороне и не дают в долг не членам своей бригады), то каждая денежная сумма, переходящая из рук в руки, вписана в «лицевые счета»

дал	взял
20	30
10	20
10	60
	40
	20

дал	взял
20	20
50	10
40	

дал	взял
10	20
70	30
30	30
	20

Рис. 49.

дважды: один раз — как данная займы, другой раз — как взятая в долг.

[Это утверждение по существу остается верным и в том случае, если какая-нибудь из сумм, внесенных в графу «дал займы» («взял займы») одного лицевого счета, составлена из более мелких сумм, записанных в графе «взял займы» («дал займы») нескольких других лицевых счетов. Действительно, разбив такую «сводную» запись на слагаемые (рис. 49), мы не изменим состояния финансов ни одной из заинтересованных сторон, но правильность приведенного выше утверждения станет при этом очевидной.

Следовательно, сумма всех денег, полученных в долг, равна сумме всех денег, данных займы. Поэтому если каждый из членов бригады уплатит в «общую кассу» все свои долги, а затем возьмет

из нее ровно столько, сколько всего взяли у него в долг другие члены бригады, то «баланс» сойдется: в кассе не останется лишних денег и не будет недостачи, а все члены бригады ко всеобщему удовольствию сумеют полностью расплатиться друг с другом.

Разумеется, нет никакой необходимости в том, чтобы один и тот же член бригады сначала уплачивал в общую кассу *все* свои долги, а затем получал из нее *всю* ту сумму, которую ему должны другие. Достаточно, если каждый член бригады «сбалансирует» свой бюджет: уплатит излишек долгов, равный превышению общей суммы его долгов над суммой, предоставленной им взаймы (если его баланс, как говорят бухгалтеры, пассивен), или возместит недостачу, равную разности между суммой, розданной им взаймы, и долгами (если его баланс активен). *Сумма всех долговых излишков должна быть равна сумме всех недостач.*

Отсюда ясно, что один из членов бригады может не записывать, какие суммы он берет в долг или дает взаймы. После того как все остальные члены бригады подсчитают свои долговые излишки и недостачи, выяснится, сколько он должен уплатить или, наоборот, сколько ему причитается из общей кассы.

Итак, способ взаимных расчетов в бригаде Кереки сводится к следующему.

Те из 17 членов бригады, кто ведет учет суммам, взятым в долг и данным взаймы, на основе своих записей определяют накопившиеся долговые излишки и недостачи. Те, у кого появились излишки долгов, уплачивают соответствующие суммы в общую кассу, а те, у кого возникла недостача, забирают причитающиеся им суммы из образовавшегося фонда. Если после этого в общей кассе остаются деньги, то они принадлежат семнадцатому члену бригады, не записывающему, сколько он взял в долг и дал взаймы. Если же в общей кассе обнаружится недостача, то семнадцатый член бригады должен внести недостающую сумму.

10. КОНФЛИКТ

а. *Утверждение дядюшки Андраша неверно.*

Действительно, те члены бригады, которые аккуратно вели свои лицевые счета, могут уплатить в общую кассу все свои долги и возместить те суммы, которые они давали взаймы. Если образуется излишек, то его необходимо передать двум «нарушителям финансовой дисциплины», предоставив им делить между собой эту сумму. Если же обнаружится недостача, то покрыть ее также должны два провинившихся члена бригады.

б. *Если бы число «разгильдяев» оказалось больше двух, то расчеты между остальными членами бригады все равно производились бы так же, как и в случае а.*

11. ПРОКЛАДКА КАБЕЛЯ

Поскольку электрику необходимо *перенумеровать* концы проводов, то сделать это, очевидно, можно, лишь разумным образом *упорядочив* эти концы. А самый простой способ упорядочить концы проводов состоит в том, чтобы соединить все 49 проводов последовательно (рис. 53).

Электрику придется лишь один раз переплыть на другой берег и вернуться обратно. Действовать при этом он может следующим образом.

Находясь на «этом» берегу, подвести к одному из концов проводов напряжение, то есть подсоединить его к линии электропередачи, обозначить этот конец номером 1, а остальные 48 концов соединить попарно (рис. 50).

Затем переправиться на противоположный берег (не забыв захватить с собой пробник) и по очереди дотронуться пробником

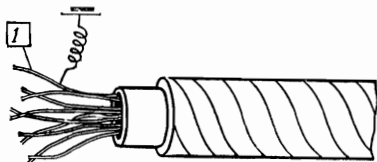


Рис. 50.

до торчащих из оболочки кабеля концов проводов. Ясно, что лампочка в пробнике загорится тогда (и только тогда), когда электрик коснется им конца 1-го провода. Следовательно, к концу того провода, с которым соединена горящая лампочка, необходимо подвесить бирку с номером 1 (рис. 51).

Соединив с концом 1-го провода конец любого другого провода и обозначив выбранный провод номером 2, электрик должен снова

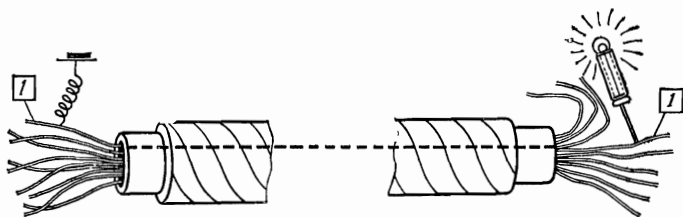


Рис. 51.

по очереди дотронуться пробником до концов остальных 47 проводов. Ясно, что лампочка пробника загорится в том (и только в том случае), если электрик коснется им конца провода, соединенного на другом берегу реки со 2-м проводом. Этот провод получит номер 3 (рис. 52).

Соединив с концом 3-го провода конец любого из «безымянных» проводов и обозначив выбранный провод номером 4, электрику необходимо снова по очереди дотронуться пробником до концов еще не перенумерованных проводов. Ясно, что лампочка пробника загорится тогда (и только тогда), когда электрик дотронется им до конца провода, соединенного на другом берегу с 4-м проводом. Этот провод получит номер 5.

Присоединив к концу 5-го провода конец любого из еще не перенумерованных проводов, электрик должен проделать заново всю процедуру и повторять ее до тех пор, пока без номера не останется лишь конец последнего — 49-го — провода. Это будет означать, что все 49 проводов соединены последовательно и получился один провод, составленный из 49 кусков (рис. 53).

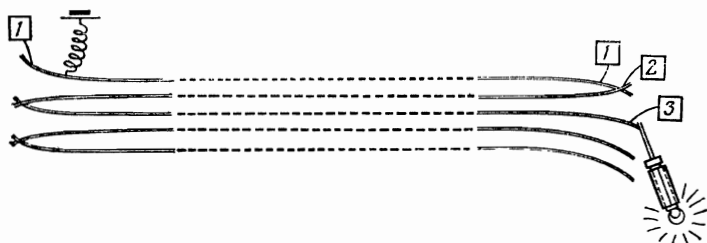


Рис. 52.

После всего этого электрику необходимо вернуться на другой берег реки и приступить к определению проводов, перенумерованных на противоположном берегу реки (ведь на «этом» берегу реки ему известен лишь 1-й провод).

Концы всех проводов, кроме 1-го, на этом берегу реки соединены попарно. В каждой такой паре (в силу принятого способа нумерации) концы имеют номера, отличающиеся на 1. Разомкнув одну пару концов, электрик разобьет весь зигзагообразный провод на

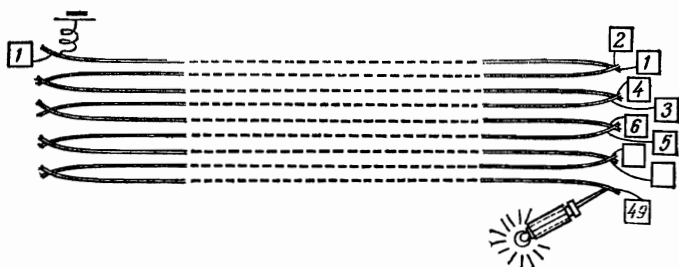


Рис. 53.

две независимые «змейки». Одна из них находится под напряжением, другая отключена от линии электропередачи. Следовательно, если прикоснуться пробником к двум освободившимся концам проводов, то лампочка пробника загорится только у одного из них. Ясно, что тот конец, при прикосновении к которому лампочка загорится, соединен с 1-м концом (поскольку тот в свою очередь присоединен к линии электропередачи), поэтому его номер меньше, а номер «мертвого» конца — на 1 больше.

Затем, держа пробник с горячей лампочкой у свободного конца, соединенного с 1-м концом, электрик должен по очереди размыкать и тотчас же вновь замыкать остальные попарные соединения концов проводов. При размыкании одних концов лампочка пробника гаснет, при размыкании других продолжает гореть. Ясно, что номера первых концов меньше, а номера последних больше, чем номер свободного конца, которого касается пробник. Следовательно, подсчитав число соединений, при размыкании которых лампочка пробника гаснет, электрик сможет установить номер «хвоста змейки», присоединенной к линии электропередачи. Например, если лампочка пробника гасла при размыкании 5 пар концов, то, чтобы добраться до «хвоста змейки», помимо 1-го конца, нужно пройти еще 5 пар концов, то есть всего 11 концов. Следовательно, «хвост змейки» имеет номер 12, а свободный конец, который был соединен с ним, — номер 13. Таким образом электрик может установить номера разомкнутой пары концов.

Затем, снова замкнув их, нужно разомкнуть какую-нибудь другую пару концов с еще не известными номерами и повторить всю описанную процедуру сначала. После того как будут установлены номера концов, соединенных во второй паре, определить номера концов, образующих третью пару, и продолжать так до тех пор, пока не будут выяснены номера всех концов до единого. (Для этого всю процедуру придется повторить 24 раза.)

12. НЕЛЬЗЯ ЛИ БЫСТРЕЕ?

Работу электрика можно существенно сократить следующим образом. Вернувшись на тот берег, где он находился сначала, электрик должен пометить концы проводов, соединенные попарно (например, оба конца, образующих одну пару, пометить римской цифрой I, оба конца, образующих какую-нибудь другую пару, — рим-

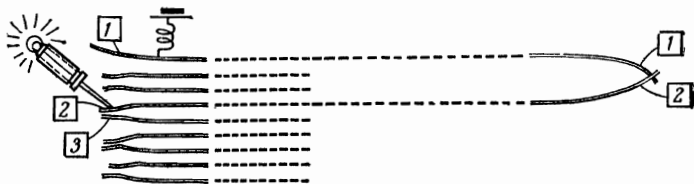


Рис. 54.

ской цифрой II и так далее), и разомкнуть их. Дотрагиваясь пробником по очереди до каждого из 48 концов в отдельности, электрик увидит, что лампочка загорится лишь в одном-единственном случае: когда пробник коснется 2-го конца (рис. 54). Таким образом электрик обнаружит 2-й конец, а парный ему (обозначенный той же римской цифрой) конец получит номер 3. Соединив затем снова концы 2 и 3, электрик должен дотронуться пробником по очереди до каждого из 46 остальных концов. Тот, при прикосновении к которому лампочка пробника загорится, имеет номер 4, а парный ему

конец — номер 5 (рис. 55). Соединив снова концы 4 и 5, электрик продолжает дотрагиваться пробником до каждого из 44 еще не перенумерованных концов и продолжает описанную выше процедуру до тех пор, пока не дойдет до 49-го конца, то есть не перенумерует

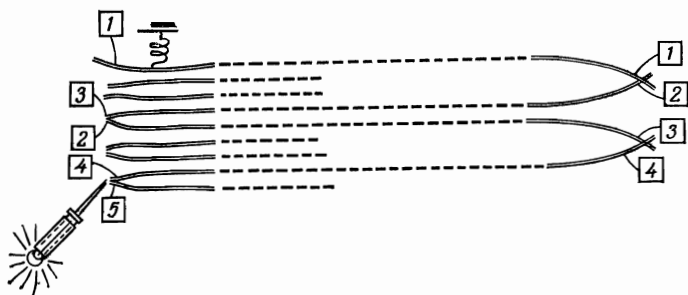


Рис. 55.

все провода, торчащие из кабеля на этом берегу реки, точно так же, как они перенумерованы на противоположном берегу реки.

13. ОБОБЩЕНИЕ

Достаточно. Действительно, если число жил в кабеле нечетно, то электрик может действовать точно так же, как в задаче 11 (и 12).

Аналогичным образом он может действовать и в том случае, если число жил в кабеле *четно*. Единственное отличие состоит в том, что после того, как электрик, не переправляясь через реку (все еще оставаясь на «этом» берегу), соединит попарно концы проводов, свободными (без пары) останутся 2 провода: кроме первого, подсоединенного к линии электропередачи, еще один провод, которому можно приписать последний номер. Переправившись на противоположный берег, электрик сможет без труда отличить его по следующему признаку: стоит лишь присоединить к нему «хвост» находящейся под напряжением «змейки», как все провода, еще не получившие номеров, останутся обесточенными, то есть при прикосновении пробника к их концам лампочка не загорится.

После того как последний провод выделен, все остальные концы электрик нумерует точно так же, как в случае нечетного числа жил.

14. НЕПРАВИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

В условиях задачи сказано, что Йошка не имеет понятия о том, как вывести формулы (1) и (2). Следовательно, нам необходимо рассмотреть только эти формулы, не вдаваясь в подробности их вывода, и из их вида заключить, что в них неверно. Таким образом, приступая к поиску решения, мы должны отправляться от вида формул (1) и (2).

(1). Рассмотрим сначала формулу (1). В переводе на «алгебраический язык» то, о чем она «говорит» нам, звучит так: чтобы вычислить радиус вписанной окружности треугольника, нужно разделить удвоенную площадь этого треугольника на величину, равную сумме двух его сторон, из которой вычли третью его сторону.

Возникает вопрос: из суммы *каких* двух сторон треугольника необходимо вычесть его третью сторону? Об этом формула (1) «умалчивает».

Более того, формула (1) не может ничем помочь нам, поскольку пояснение к ней гласит: a, b, c — стороны треугольника. Какой буквой обозначена та или иная сторона треугольника, значения не имеет.

В любом треугольнике радиус вписанной окружности «уделяет одинаковое внимание» любой из сторон: величина его не зависит от того, как выбраны обозначения сторон (например, от того, какая из сторон обозначена a).

Таким образом, формула (1) может быть правильной лишь в том случае, если в ее знаменателе стоит разность суммы любых двух сторон треугольника и его третьей стороны. Следовательно, если верна формула

$$r = \frac{2S}{a + b - c},$$

то должны быть верны и формулы

$$r = \frac{2S}{a + c - b} \quad \text{и} \quad r = \frac{2S}{b + c - a}.$$

Но для данного треугольника радиус вписанной окружности может иметь только одно значение. Поэтому все три формулы должны давать одно и то же значение r , то есть должны выполняться соотношения

$$\frac{2S}{b + c - a} = \frac{2S}{a + c - b} = \frac{2S}{a + b - c},$$

где a, b, c — длины сторон любого треугольника. Но из этих соотношений следует, что

$$1) \text{ либо } S = 0,$$

$$2) \text{ либо } b + c - a = a + c - b = a + b - c$$

(a, b, c по-прежнему означают длины сторон произвольного треугольника). Но случай 1 не может выполняться, поскольку речь идет о невырожденном треугольнике, а случай 2 — потому, что, например, при $a = 3, b = 5, c = 6$

$$b + c - a = 8,$$

$$a + c - b = 4,$$

$$a + b - c = 2$$

и все три формулы

$$\frac{2S}{b + c - a}, \quad \frac{2S}{a + c - b}, \quad \frac{2S}{a + b - c}$$

приводят к различным значениям радиуса вписанной окружности.

Таким образом, формула (1) не может быть правильной.

Из приведенных выше рассуждений следует, что формула для радиуса вписанной окружности r может быть верной лишь в том случае, если она остается неизменной при любой перестановке букв a , b , c . В алгебре о таких формулах принято говорить, что они *симметричны*¹ относительно a , b , c .

Йошка заметил, что формула (1) несимметрична: величина r , вычисляемая по формуле (1), зависит от c не так, как от a и от b (поскольку a и b входят в знаменатель со знаком «плюс», а c — со знаком «минус»).

По условию задачи в формулу (1) вкралась лишь одна ошибка. Восстановить симметрию формулы можно, лишь изменив в знаменателе знак перед c с минуса на плюс:

$$r = \frac{2S}{a + b + c}. \quad (*)$$

Таким образом, если исходить из условий задачи, то формула (1) для радиуса вписанной окружности может иметь только такой вид. [Формула (*) действительно не содержит ошибок.]

(2). Аналогичные рассуждения применимы и к формуле (2). Единственное отличие состоит в том, что биссектриса угла 2γ «распределяет поровну свое внимание» лишь между сторонами a и b (между которыми заключен угол 2γ), а с третьей стороной c связана иной зависимостью. Следовательно, формула (2), задающая биссектрису f_γ , должна быть симметрична лишь относительно сторон a и b . Это означает, что формула (2) должна оставаться неизменной при перестановке букв a и b (если вместо a написать b , а вместо b написать a). Произведя эту перестановку, мы преобразуем формулу (2) к виду

$$f_\gamma = \frac{\sqrt{bc(b+a+c)(b+a-c)}}{b+a},$$

или, если все буквы снова расположить в алфавитном порядке,

$$f_\gamma = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Сопоставив последнюю формулу с той, которую Пишта списал с доски, мы видим, что перестановка привела к единственному изменению в формуле: подкоренное выражение начинается теперь не с b , а с a . Но это означает, что перестановка букв a и b изменила значение f_γ . Следовательно, формула (2) не может быть правильной.

Здесь мы воспользовались тем, что квадратные корни из двух различных чисел также различны.

*

После исправления формула (2) примет вид

$$f_\gamma = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

¹ Понятие симметрии позволяет не только проверять правильность формул, но и существенно упрощает решение многих довольно трудных задач. См. В. Г. Болтянский и Н. Я. Виленкин. Симметрия в алгебре, изд-во «Наука», М., 1967. — *Прим. перев.*

Часть II

15. НЕПОЛНЫЙ КОМПЛЕКТ I

Что означало бы посрамление отца Пишты? А то, что какие бы два кружка он ни выбрал, сумма стоящих на них чисел ни разу не повторится. Но число способов, которыми 2 кружка можно выбрать из 21, достаточно велико. Любой из 21 кружков можно выложить на стол первым, а любой из 20 оставшихся кружков — вторым. Таким образом, всего можно выбрать $21 \cdot 20$ пар кружков, но поскольку сумма стоящих на них чисел не зависит от того, какой из двух кружков первый и какой второй (как известно, $a + b = b + a$), то пары, отличающиеся лишь последовательностью, в которой кружки были выложены на стол, дают одну и ту же сумму чисел. Это означает, что половину из $21 \cdot 20$ пар кружков можно исключить из рассмотрения. Таким образом, остается $(21 \cdot 20)/2 = 210$ не совпадающих полностью пар (отличающихся по крайней мере одним кружком). Если бы отцу Пишты не удалось найти две пары кружков с одной и той же суммой чисел, то это означало бы, что все 210 попарных сумм различны. Но наименьшая сумма равна $1 + 2 = 3$, а наибольшая — $99 + 100 = 199$. Следовательно, попарные суммы чисел, стоящих на счетных кружках, принимают какое-нибудь из значений 3, 4, 5, ..., 198, 199 и не могут принимать никаких других значений, то есть всего 197 различных значений, а это означает, что из 210 попарных сумм какие-то суммы непременно должны повторяться.

Итак, повторим кратко наши рассуждения.

Наименьшая сумма двух целых чисел от 1 до 100 равна $1 + 2 = 3$, а наибольшая $99 + 100 = 199$. Каким бы способом мы ни выбрали два кружка для счета, сумма стоящих на них чисел не меньше 3 и не больше 199 и, таким образом, принимает 197 различных значений. Но из 21 кружка для счета можно составить

$$\frac{21 \cdot 20}{2} = 21 \cdot 10 = 210$$

пар. Следовательно, среди них непременно найдутся по крайней мере две пары с одинаковой суммой чисел.

16. СОМНЕНИЕ

Вопреки сомнениям скептиков предыдущая задача заведомо имеет решение: две равные суммы двух слагаемых можно составить лишь из 4 различных кружков. Действительно, если взять любую папку кружков для счета и заменить в ней только один из кружков,

то одно из слагаемых либо возрастет, либо уменьшится, а другое сохранит свое прежнее значение. Следовательно, после такой замены сумма двух чисел не может остаться прежней.

17. РАЗНОСТЬ ВМЕСТО СУММЫ

Если Пишта действовал достаточно осмотрительно, то ему *заведомо удалось решить задачу*. Действительно, из решения задачи 15 известно, что среди 21 кружка всегда найдутся 4 таких, что *сумма* чисел на двух из них совпадает с *суммой* чисел на двух других. Если Пишта возьмет 4 таких кружка, то ему достаточно будет переставить второй и четвертый кружки, чтобы решить новую задачу, предложенную учительницей. Например, если

$$25 + 13 = 30 + 8,$$

то

$$25 - 8 = 30 - 13,$$

или в общем виде: если

$$a + b = c + d,$$

то

$$a - d = c - b.$$

18. НОВАЯ ХИТРОСТЬ

б. Б не прав: из 5 кружков для счета, изображенных на рис. 6, невозможно выбрать 4 кружка так, чтобы удовлетворить условиям задачи. (Мы обращаемся к читателям с просьбой самостоятельно перепробовать все возможные случаи. Их не слишком много!)

а. А не прав, поскольку он хотел доказать, что, какие бы 5 чисел из первых 10 натуральных чисел мы ни взяли, из них всегда можно выбрать 4 таких, которые будут удовлетворять условиям задачи. Однако такое утверждение неверно: оно опровергается приведенным Б контрпримером.

в. В также не прав, поскольку если бы разность двух чисел была отрицательна, то, изменив их порядок, мы получили бы положительную разность.

Когда А утверждает, что «из 5 кружков для счета можно составить $(5 \cdot 4)/2 = 10$ пар», то он различает пары лишь с точностью до порядка, то есть считает, например, пары 7, 3 и 3, 7 одинаковыми. Если считать, что кружки в каждой паре упорядочены, то из 5 кружков можно составить не $(5 \cdot 4)/2 = 10$, а $5 \cdot 4 = 20$ пар.

Множитель 2 появился потому, что пары чисел (или кружков для счета), отличавшиеся только порядком, А считал тождественными. (Подробнее о подсчете числа пар можно прочитать в первой части решения задачи 15.) Таким образом, если принять во внимание упорядоченность кружков в каждой паре, то число различных значений разности достигнет 18, а число пар, которые можно составить из 5 кружков, станет равным 20. Следовательно, мы опять заключаем, что найдутся по крайней мере 2 пары с одинаковыми разностями чисел.

Итак, даже если рассуждения А и ошибочны, то не в том месте, где А занимается подсчетом числа пар (по-видимому, ошибка кроется в чем-то другом).

Строго говоря, о возможности появления отрицательных разностей следовало бы упомянуть еще в решении задачи 17. Правда, если Пишта не успел познакомиться в школе с отрицательными числами, то они привели бы его в немалое смущение. Например, следуя рецепту, изложенному в решении задачи 17, Пишта мог бы взять четверку кружков

$$20 + 9 = 8 + 21$$

и получил бы

$$20 - 21 = 8 - 9.$$

Разумеется, он счел бы, что такие разности не имеют смысла. Но Пишта мог бы догадаться, что в подобных случаях достаточно переставить первый кружок со вторым, а третий — с четвертым:

$$21 - 20 = 9 - 8.$$

19. ПРОДОЛЖЕНИЕ ХИТРОСТИ

В рассуждениях А нет ошибки.

Ошибка состоит в том, что один и тот же кружок может входить в две пары кружков с одинаковыми разностями чисел. Поэтому из существования таких пар нельзя сделать вывод о существовании четырех кружков, удовлетворяющих условиям задачи.

Действительно, рассуждение, аналогичное приведенному в решении задачи 16, при переходе от сумм к разностям становится неверным: уменьшаемое одной разности может быть равно вычитаемому другой разности.

[Если потребовалось бы проверить, что в предыдущей задаче из 5 предложенных Б кружков действительно нельзя выбрать две пары кружков с одинаковыми разностями чисел, то сделать это можно было бы следующим образом. Составить одну за другой все 10 пар и рассмотреть положительные разности стоящих на них чисел:

$$\begin{array}{llll} 10 - 1 = 9 & 10 - 2 = 8 & 10 - 5 = 5 & 10 - 8 = 2 \\ 8 - 1 = 7 & 8 - 2 = 6 & 8 - 5 = 3 & \\ 5 - 1 = 4 & 5 - 2 = 3 & & \\ 2 - 1 = 1 & & & \end{array}$$

Значения двух разностей, как правильно утверждал А, совпадают, но в обе из них входит одно и то же число 5. Таким образом, составить из отобранных Б кружков для счета равенство

$$8 - 5 = 5 - 2$$

действительно невозможно, поскольку имеется лишь 1 кружок с числом 5.]

20. ЧТО ВЫ НА ЭТО СКАЖЕТЕ?

Рассуждения Шани неверны; ошибочен самый первый шаг — исходная посылка. Действительно, все рассуждения Шани основаны на предположении о том, что если значения двух разностей совпадают, то задача Пишты для 15 кружков имеет решение. Но не далее как в предыдущей задаче мы говорили о том, что в две совпадающие разности могут входить не 4, а всего лишь 3 различных числа и тогда задача Пишты, сводящаяся к отысканию 2 пар кружков, то есть 4 различных чисел, с одинаковыми разностями, становится неразрешимой. Ошибка, допущенная в самом начале, пагубно сказалась на окончательном выводе, хотя все промежуточные рассуждения Шани были верными. В качестве контрпримера до-

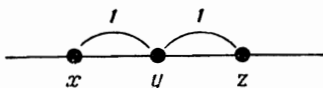


Рис. 56.

статочно рассмотреть две разности, равные 1 (рис. 56): здесь $y - x = 1$ и $z - y = 1$.

21. СПАСТИ ТО, ЧТО ЕЩЕ МОЖНО СПАСТИ!

Выясним, возможно ли, чтобы Пиште, располагающему 20 кружками для счета, не удалось решить задачу?

Если воспользоваться «методом Шани» и рассмотреть разности чисел на соседних кружках, то, как известно, совпадение двух разностей еще не гарантирует существования решения. Совпадение же

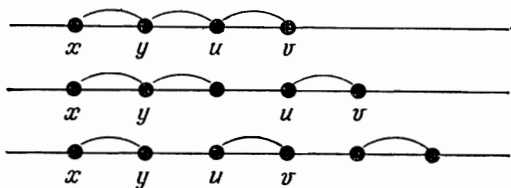


Рис. 57.

трех разностей заведомо позволяет Пиште решить задачу (рис. 57), поскольку он всегда может выбрать 4 кружка:

$$y - x = v - u.$$

Таким образом, рассуждения Шани, приведенные в предыдущей задаче, можно «модифицировать» следующим образом.

Пусть d_1 и d_2 — две наименьшие разности чисел, стоящих на соседних кружках:

$$d_1 \geq 1 \text{ и } d_2 \geq 1.$$

Обозначим d_3 и d_4 две наименьшие из оставшихся разностей. Они удовлетворяют неравенствам

$$d_3 \geq 2 \text{ и } d_4 \geq 2.$$

Продолжая «восхождение» от меньших разностей к большим, мы в конце концов придем к неравенствам

$$d_{17} \geq 9 \text{ и } d_{18} \geq 9$$

и

$$d_{19} \geq 10$$

(в случае 20 кружков для счета соседние числа образуют всего 19 разностей). Суммируя все разности от наименьшей до наибольшей, получаем

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{17} + d_{18} + d_{19} &\geq \\ &\geq 2(1 + 2 + \dots + 9) + 10 = 100. \end{aligned}$$

Но поскольку число, стоящее на первом кружке, не меньше 1, то на последнем — двадцатом — кружке должно стоять число не меньше 101, что невозможно. Полученное противоречие означает, что предположение о существовании не более двух совпадающих разностей между соседними числами неверно. Следовательно, в случае 20 кружков для счета должны совпадать по крайней мере 3 разности, а это и означает, что *Пишта заведомо сможет решить свою задачу.*

22. НЕПОЛНЫЙ КОМПЛЕКТ II

Мы уже знаем, что вместо попарных сумм, о которых говорится в условиях задачи, можно рассматривать попарные разности. Действительно, если нам удастся выбрать 4 кружка так, что сумма чисел на двух первых кружках будет совпадать с суммой чисел на двух последних:

$$a + b = c + d,$$

то, переставив кружки, мы получим две совпадающие разности:

$$a - c = d - b,$$

или

$$a - d = c - b.$$

Кружки, стоящие в правой и левой частях каждого из этих равенств, можно переставить, не нарушив при этом самих равенств:

$$c - a = b - d,$$

$$d - a = b - c.$$

Это означает, что, расположив кружки в надлежащем порядке, мы всегда можем добиться, чтобы разности были положительными.

Наоборот, если у нас имеются 4 кружка, которые можно тем или иным способом расположить так, чтобы разность чисел, стоящих на двух первых из них, совпадала с разностью чисел, стоящих на третьем и четвертом кружке:

$$x - y = u - v,$$

то, переставив кружки, мы всегда можем добиться совпадения суммы чисел, стоящих на двух первых и двух последних кружках:

$$x + v = y + u.$$

Таким образом, окончательный результат можно сформулировать так: *безразлично, станем ли мы искать такие четверки кружков, у которых сумма чисел на первых двух кружках совпадает с суммой чисел на двух последних кружках, или такие, у которых разность чисел на первых двух кружках совпадает с разностью чисел на двух последних кружках. И в том и в другом случае мы получим одни и те же четверки кружков. Это означает, что обе задачи (о нахождении 4 кружков с двумя совпадающими суммами и о нахождении 4 кружков с двумя совпадающими разностями) эквивалентны.*

Рассмотрим более подробно задачу о разностях.

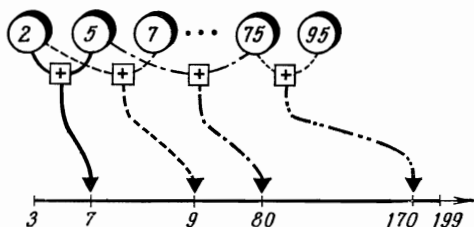


Рис. 58.

[В действительности рассматривать разности менее удобно, чем суммы.

В решении задачи 15 мы сопоставили все возможные пары кружков со всеми возможными суммами двух чисел, а в решении задачи 18, занимаясь поиском ошибки в рассуждениях А, мы сопоставили все возможные пары кружков со всеми возможными положительными разностями двух членов. Последний способ оказался удобнее, поскольку *если сравнивать суммы и разности, составленные из одних и тех же чисел, то выясняется, что суммы «разсеяны» на гораздо большей «территории», чем (положительные) разности.* Например, в рассмотренном случае наименьшая сумма была равна $1 + 2 = 3$, а наибольшая $99 + 100 = 199$. Следовательно, суммы двух слагаемых распределены по отрезку числовой оси от 3 до 199 (рис. 58). Если же мы обратимся к положительным разностям, то выясним, что наименьшая из них равна $2 - 1 = 1$, а наибольшая $100 - 1 = 99$. Таким образом, положительные разности тех же чисел «теснятся» на меньшем отрезке числовой оси (от 1 до 99), и доказать, что внутри отрезка они не могут «разбредиться врозь» (по крайней мере две из них непременно должны совпасть), гораздо легче (рис. 59). Действительно, из 16 кружков можно составить $(16 \cdot 15) / 2 = 8 \cdot 15 = 120$ пар. Сложив стоящие на каждой паре кружков числа, мы получим 120 сумм, которые вполне могут распределиться без повторений среди целых точек отрезка числовой оси от 3 до 199.

Наоборот, вычислив для каждой пары кружков разность стоящих на них чисел (вычитая всегда из большего числа меньшее), мы получим 120 положительных разностей, которые, очевидно, не могут разместиться без повторений среди целых точек отрезка числовой оси от 1 до 99. Поскольку положительные разности могут принимать не более 99 различных значе-

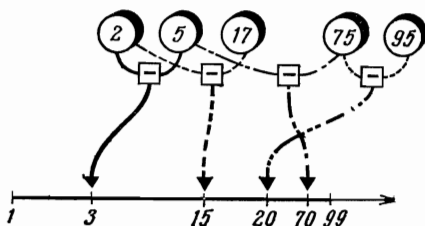


Рис. 59.

ний, то (после того как установлен порядок, в котором надлежит производить вычитание) не менее 21 из них совпадут с ранее вычисленными разностями.

Мы знаем, что А из задачи 16 рассуждал неверно. Он не учел, что для двух пар кружков, имеющих один общий элемент, две разности могут совпасть (рис. 60), и, таким обра-

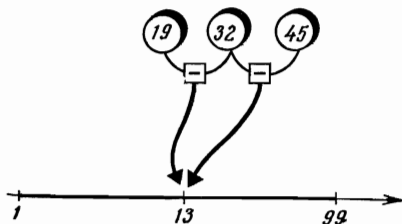


Рис. 60.

зом, существование одинаковых разностей еще не означает, что мы можем выбрать 4 кружка, удовлетворяющих условиям задачи.

Необходимо выяснить, сколько таких «симметричных троек чисел» могут встретиться. (Мы называем так тройки чисел, имеющих попарно равные разности, потому что на числовой оси наибольшее и наименьшее числа расположены симметрично относительно среднего числа.) Если число симметричных троек невелико (в том случае, который имел в виду А, оно не превышает 21), то доказательство утверждения Йошки не составляет никакого труда.

К сожалению, для 16 кружков число симметричных троек намного превышает 21, поскольку любой из «внутренних» кружков может принадлежать одновременно весьма многим симметричным тройкам (и более сложным системам).

Предположим, что нам удалось найти такой «общий центр». Но если какое-нибудь число является средним элементом двух симметричных троек чисел, то, исключив средний из 5 кружков, образующих эти тройки, мы получим 4 кружка, удовлетворяющих условиям задачи!

Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на рис. 61 (где 4 кружка, оставшихся после исключения среднего элемента двух симметричных троек, расположены так, «как надо»: в порядке возрастания «номеров»). После этого замечания доказательство утверждения Йошки напрашивается само собой.

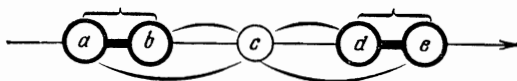


Рис. 61.

Действительно, из 16 кружков центрами (средними элементами) симметричных троек могут служить лишь 14 кружков, поскольку кружки с наименьшим и наибольшим числами, очевидно, не являются центрами симметричных троек.

По доказанному ранее положительные разности могут принимать не менее 21 повторяющегося значения. Следовательно, если из этих значений можно составить не более 14 симметричных троек, то многие повторяющиеся значения, принимаемые положительными разностями, останутся «нереализованными»: их нельзя будет составить из чисел, стоящих на четырех различных кружках. Если же число симметричных троек больше 14, то среди них непременно найдутся по крайней мере две тройки с общим центром. Тем самым существование решения будет гарантировано.

Итак, утверждение задачи доказано. Быть может, именно теперь, после завершения доказательства, уместно заняться «повторением пройденного» и кратко изложить наиболее существенные соображения, не останавливаясь на более мелких деталях математического характера.]

Из 16 кружков для счета можно составить $(16 \cdot 15)/2 = 120$ различных пар. (Две пары мы считаем различными, если каждая из них содержит хотя бы один элемент, не принадлежащий другой паре.)

Если в каждой паре из большего числа вычесть меньшее, то полученные разности смогут принять не более 99 различных значений, поскольку наименьшая из них равна 1, а наибольшая 99. Следовательно, по крайней мере 21 значение повторяется.

Часть повторяющихся значений порождена симметричными тройками чисел, то есть равенствами вида

$$z - y = y - x.$$

Если считать, что средние члены y во всех таких равенствах различны, то число симметричных троек не превосходит 14 (поскольку всего имеется 16 чисел, но в силу неравенства $x < y < z$ наибольшее и наименьшее числа не могут быть средним членом y).

Остается еще не менее 7 повторяющихся значений. Возможны 2 случая.

1. Одно из этих значений порождено симметричной тройкой чисел, не вошедшей в число уже рассмотренных нами 14 троек. Тогда ее средний член y совпадает со средним членом одной из учтенных ранее симметричных троек, то есть одновременно выполняются равенства

$$z_1 - y = y - x_1$$

и

$$z_2 - y = y - x_2.$$

Но тогда

$$2y = x_1 + z_1,$$

$$2y = x_2 + z_2,$$

откуда

$$x_1 + z_1 = x_2 + z_2.$$

II. Ни одно из оставшихся 7 повторяющихся значений не порождено симметричной тройкой чисел. Тогда совпадающим разностям соответствуют две совершенно различные (не имеющие ни одного общего элемента) пары кружков для счета. В этом случае числа, стоящие на 4 различных кружках, удовлетворяют равенству

$$p - q = r - s$$

и, следовательно,

$$p + s = r + q.$$

Итак, четверка кружков, удовлетворяющая всем условиям задачи, существует в обоих случаях. Тем самым утверждение задачи доказано.

Примечание 1. Случаи I и II, рассмотренные выше отдельно, можно объединить, если доказываемое утверждение сформулировать следующим образом.

Не все повторяющиеся значения положительных разностей порождены симметричными тройками чисел. Действительно, предположим противное. Тогда (поскольку средние члены симметричных троек могут принимать не более 14 различных значений, а значения положительных разностей повторяются не менее 21 раза) найдутся по крайней мере 2 симметричные тройки с общим средним членом. Эти две тройки содержат лишь 5 различных чисел, и разность двух первых чисел в силу симметрии совпадает с разностью двух последних. Таким образом, мы получаем повторяющееся значение разности, порожденное не симметричной тройкой, а двумя парами чисел, не имеющими ни одного общего элемента. Полученное противоречие доказывает ошибочность исходного предположения.

Такого рода рассуждения принадлежат к числу так называемых «косвенных» доказательств. В решении задачи мы предпочли действовать прямо, тем более что такая возможность имелаась.

Примечание 2. Доказательство утверждения Йошки по существу основано на том, что число пар кружков больше числа значений, принимаемых положительными разностями, которые можно составить из стоящих на кружках номеров (даже если условимся считать, что некоторое число значений (14) разности принимают по одному разу). Решение задачи следует из неравенства

$$\frac{16 \cdot 15}{2} > 99 + 14.$$

Заметим, что *если бы кружков было не 16, а — в общем случае — n , то для того, чтобы мы могли найти 4 кружка, удовлетворяющих условиям задачи, должно было бы выполняться неравенство*

$$\frac{n(n-1)}{2} > 99 + (n-2).$$

Оно эквивалентно неравенству

$$n(n-3) > 194,$$

которому удовлетворяют все $n \geq 16$, но не удовлетворяет $n = 15$ ($15 \cdot 12 = 180 < 194$). Однако это не означает, что при $n = 15$ задача не имеет решения. «Нарушение» неравенства свидетельствует лишь о том, что при 15 кружках принятый нами в решении этой задачи способ сравнения числа пар и значений положительных разностей становится неприменимым.

23. ПОРАЗМЫСЛИМ ЕЩЕ!

Йошка вознамерился построить набор, который бы состоял из чисел меньше 100 с несовпадающими попарными разностями (если не считать чисел, образующих симметричные тройки) и содержал бы как можно больше членов. Предложенное Андрашем начало набора (в принципе правильное, хотя он и начал не с 1, а с 4) можно «усовершенствовать» или по крайней мере увеличить его шанс на успех, если из каждого числа вычесть по тройке, то есть заменить числами

$$1, 2, 9, 13, 15, \dots$$

Действительно, после такого преобразования разности между любыми двумя числами сохраняют свои прежние значения, а сами числа уменьшатся на 3 и поэтому набор сможет «вместить» больше чисел, каждое из которых не превосходит 100.

24. ПОРАЗМЫСЛИМ ЕЩЕ НЕМНОГО!

Шани заблуждается. Открытое им правило позволяет построить набор

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,$$

состоящий лишь из 10 чисел. Если же мы не будем придерживаться этого правила, то сумеем построить набор

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 30, 39, 53, 74, 95,

состоящий из 12 чисел и удовлетворяющий тем не менее всем требованиям.

[Приведенный пример ошибочного умозаключения свидетельствует о том, что *к обобщениям нельзя относиться легкомысленно*. Любому правилу можно доверять лишь в том случае, если *достоверно установлено*, что оно верно.]

25. ВЕРНО ЛИ?

Нет. Действительно, построенный Андрашем, Шани и Йошкой набор чисел минимален *лишь по сравнению с предыдущими наборами* (4, 5, 12, 16, 18, ... и 1, 2, 9, 13, 15, ...). Ниоткуда не следует, что, выбрав в качестве очередного члена ряда вместо наименьшего какое-нибудь другое из допустимых чисел, мы не будем щедро вознаграждены за отход от «принципа минимальности» и не получим более «удобный» набор (содержащий больше членов и заканчивающийся меньшим числом).

[Высказанное нами подозрение достаточно обоснованно, поскольку в «минимальном» наборе всегда приходится иметь дело с наименьшими из возможных разностей и, следовательно, сначала использовать все малые значения разностей и лишь затем начать двигаться «более крупными шагами».]

Как показывает конкретный пример, «минимальный» набор в действительности не минимален. Так, приводимый ниже набор содержит не 12, а 13 членов:

1, 2, 3, 5, 8, 21, 29, 37, 46, 60, 71, 83, 93.

Тем не менее из него нельзя выбрать 4 числа так, чтобы сумма (разность) двух первых из них совпадала с суммой (разностью) двух последних чисел.

Обратите внимание и на то, что в новом наборе последнее (тринадцатое) число меньше последнего (двенадцатого) числа в «минимальном» наборе, приведенном в условиях задачи.

[На первый взгляд кажется удивительным, что набор, при составлении которого нарушено правило «каждый раз выбирать ближайшее из допустимых чисел», приводит к меньшему последнему члену, чем «минимальный» набор. Каким образом это может произойти? Дело в том, что при составлении «минимального» набора мы как плохие хозяева всякий раз заботимся лишь об удовлетворении «сиюминутных» потребностей и не заботимся о будущем. При выборе очередного члена мы следим лишь за тем, чтобы он был ближайшим к предыдущему, и совершенно не заботимся о величине более далеких членов.

К чему приводит подобная «недальновидность», видно из рис. 62. На нем приведены для сравнения два набора: «минимальный» из условий задачи (при составлении которого преследовалась лишь «тактическая» цель и очередной шаг каждый

раз выбирался «наименьшим из возможных в данную минуту») и новый набор (составленный с учетом «стратегических» соображений).

В «минимальном» наборе следующий за восьмеркой член выбран равным 13. Сделано это для того, чтобы минимизировать величину «шага» (придать ей наименьшее из возможных «в данную минуту» значений) и довести ее всего-навсего до 5 (шагнуть на 4 единицы нельзя, поскольку шаг от 1 до 5 уже равен 4). Но, шагнув на 5 единиц за восьмерку, мы одновременно шагнули на 8 единиц за пятерку, на 10 единиц

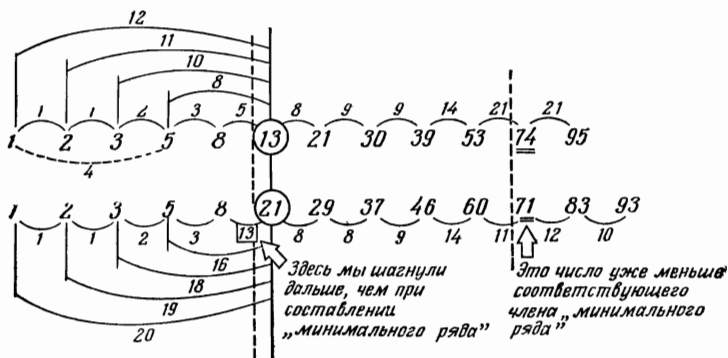


Рис. 62.

за тройку, на 11 единиц за двойку и на 12 единиц за единицу. Следовательно, «по ту сторону» от восьмерки шаги длиной в 8, 10, 11 и 12 единиц нам удастся повторить лишь симметрично, но поскольку каждое число может служить серединой не более одной симметричной тройки, то значения разностей, равные 10, 11 и 12, в дальнейшем уже не встретятся. Следовательно, нам еще предстоит шагнуть лишь на 9 единиц.

Во втором наборе, достигнув восьмерки, мы совершаем прыжок: шагаем вперед сразу на 13 единиц, но возникающие при этом разности еще больше (они равны 16, 18, 19 и 20). Следовательно, значения разностей 10, 11 и 12 остаются «про запас». В дальнейшем (при подходе к концу набора) они все идут в ход, что позволяет нам продвигаться вперед небольшими шагами.]

Обобщение полученных результатов

Завершая серию задач 15—23 и их решений, мы бы хотели привести следующее сравнительно краткое обобщение полученных ранее результатов.

Если задано не менее 16 любых натуральных (то есть целых и положительных) чисел, то из них всегда можно выбрать четыре

числа так, чтобы сумма (разность) двух из них была равна сумме (разности) двух остальных чисел.

Если задано не 16, а лишь 13 чисел, то это утверждение заведомо перестает быть верным (поскольку может представиться случай, когда из 13 чисел нельзя будет выбрать четыре числа с попарно равными суммами или разностями).

Что будет в том случае, когда задано 14 или 15 чисел, сказать заранее трудно. Возможно, что для 14 чисел удастся построить пример, опровергающий аналог приведенного выше утверждения, хотя даже для 13 чисел сделать это было отнюдь не легко. (Более того, мы опубликовали лишь «наиболее короткое» из известных до сих пор решений этой задачи для 13 чисел. Оно было найдено Чабой Андором при помощи ЭВМ.) Наоборот, почти с уверенностью можно сказать, что для 15 чисел соответствующий аналог приведенного выше общего утверждения все еще остается в силе. Вопрос этот, безусловно, разрешим, поскольку за неимением лучшего выхода можно просто-напросто перебрать все возможные наборы из 15 чисел, каждое из которых не превышает 100. Однако такой перебор требует многочасовой работы ЭВМ, и машинное доказательство утверждения обошлось бы слишком дорого. Поскольку речь идет всего лишь о занимательной (хотя и довольно поучительной) логической задаче, то вряд ли стоит расходовать на ее решение большие средства. Не заслуживает она и того, чтобы затрачивать на нее чрезмерно большие умственные усилия. Вероятно, сказанное останется в силе и в том случае, если мы откажемся от произвольно выбранного ограничения (100 «кружков для счета») и сформулируем наш вопрос в несколько более общем виде.

Пусть K — произвольно заданное натуральное число. Каким должно быть натуральное число n для того, чтобы из любых n чисел, не превосходящих K , всегда можно было выбрать четыре числа, обладающих следующим свойством: сумма (разность) двух из них равна сумме (разности) двух других?

При всем том, если кому-нибудь из читателей все же удастся достичь какого-то успеха в решении этого вопроса, остающегося пока открытым, и полученное решение окажется не слишком сложным, то мы просим сообщить об этом нам.

Примечание. Если рассматривать обобщенное утверждение (вместо числа 100 взять произвольно выбранное натуральное K), то приведенное в примечании после решения задачи 20 неравенство можно представить в виде

$$n(n-3) > 2K-6,$$

откуда для n получается следующая оценка снизу:

$$n > [1,5 + \sqrt{2K-4}]. \quad (*)$$

Квадратные скобки означают здесь целую часть стоящего в них числа (то есть наибольшее из не превосходящих его целых чисел).

Из решения задачи 20 следует, что числа n , удовлетворяющие неравенству (*), заведомо обладают требуемым свойством. По-видимому, им обладают и меньшие числа.

Заняться этой серией задач нас побудил в первую очередь Пал Гомбо. Нам доставляет удовольствие поблагодарить его за стимул в работе.

26. ПИШТА СНОВА В БЕДЕ

Оценке Пишты ничто не угрожает: предложенная учительницей задача не имеет решения.

[Проще всего в этом можно убедиться, если при разбиении чисел на 2 группы проследить за «судьбой» каждого числа в отдельности.]

Действительно, пусть A — та группа, в которую попадает при разбиении число 1. Тогда число 2 не может попасть в группу A , поскольку разность $2 - 1 = 1$ принадлежала бы той же группе. Следовательно, число 2 может попасть лишь в другую группу, которую мы обозначим B (рис. 63). Наоборот, число 4 следует

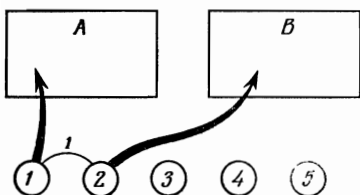


Рис. 63.

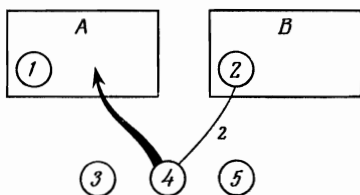


Рис. 64.

поместить только в группу A , поскольку если бы оно попало в группу B , то разность 2 чисел, четверки и двойки, принадлежала бы к той же группе, что и сами числа: $4 - 2 = 2$ (рис. 64).

Далее у нас возникла бы ситуация, изображенная на рис. 65. Нетрудно видеть, что число 3 нельзя включить в группу A , поскольку разность между числами 4 и 3 совпала бы с находящимся в этой группе числом 1. Следовательно, число 3 необходимо поместить в группу B .

Наконец, у нас осталось лишь число 5. Однако его нельзя поместить ни в группу A (поскольку $5 - 4 = 1$), ни в группу B (поскольку $5 - 3 = 2$). Следовательно, первые 5 натуральных чисел невозможно разделить так, чтобы удовлетворить условиям поставленной учительницей задачи (рис. 66).

Примечание 1. Неразрешимость задачи можно установить многими способами, например выписать все разбиения 5 чисел на 2 группы (их всего 10) и убедиться в том, что в каждой группе найдется по крайней мере одна пара чисел, разность которых принадлежит к той же самой группе.

Но затрачивать столько труда на перебор всех мыслимых разбиений отнюдь не обязательно. Доказать неразрешимость задачи можно гораздо «экономнее». Более целесообразны другие методы (одним из них мы воспользовались в приведенном выше доказательстве несуществования решения), основанные

на том, что при соблюдении условий задачи некоторые числа не могут входить в одну и ту же группу. При таком подходе всегда выясняется, что *если одни числа могут входить в обе группы* (хотя рано или поздно они должны быть включены лишь в одну из групп), *то найдется и такое число, которое не может принадлежать ни к одной из групп. Это число будет различным в зависимости от того, с каких чисел мы начнем разбиение на группы.* Например, начав с распределения по группам чисел 1, 2, 3 и 4, мы в приведенном выше доказательстве убедились, что число 5 остается «без места»: его нельзя

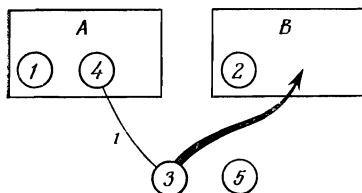


Рис. 65.

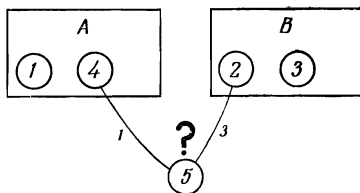


Рис. 66.

включить ни в одну, ни в другую группу. Если бы мы начали с размещения чисел 1, 2, 4 и 5, то без места осталось бы число 3. И в том и в другом случае неразрешимость задачи доказывается как бы автоматически, *сама собой*, поскольку *если бы решение задачи существовало, то из него следовали бы вполне определенные «адреса» тройки и пятерки, и, наоборот, возможность включения чисел 3 и 5 в одну из групп означала бы, что решение задачи существует.*

Примечание 2. Из того, что учительница задала детям задачу, не имеющую решения, отнюдь не следует, будто она плохой педагог. И с математической, и с дидактической точки зрения задачи, не имеющие решения, ничуть не уступают «добропорядочным» задачам, допускающим решение.

Примечание 3. Более того, задав своим ученикам неразрешимую задачу, учительница оказала бы им добрую услугу, предоставив младшеклассникам возможность поломать голову над задачей, предлагавшейся на олимпиаде для выпускников средней школы. Действительно, условия третьей задачи, предлагавшейся в 1916 г. на математической олимпиаде имени Лорана Этвёша¹ для выпускников гимназий, были таковы:

«Разобьем числа

1, 2, 3, 4, 5

любым способом на две группы. Доказать, что в одной из двух групп всегда можно найти два числа, разность которых будет совпадать с одним из чисел той же группы».

¹ Задачи этих олимпиад с 1894 по 1974 гг. см. в книге: И. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани, Венгерские математические олимпиады, М., «Мир», 1976. — *Прим. перев.*

27. ТЫСЯЧА ВМЕСТО ПЯТИ

Прежде чем необдуманно давать отрицательный ответ на вопрос задачи, попытаемся понять, что, собственно, так затруднило маленького Пишту в предыдущей задаче. Очевидно, то, что попарные разности 5 чисел (1, 2, 3, 4, 5) совпадали с числами (1, 2, 3, 4). Если бы можно было сделать так, чтобы сами числа отличались от попарных разностей между ними, то задача решалась бы без труда.

Добиться желаемой цели можно многими способами. Например, если в одну из групп включить лишь нечетные числа, то разность между любыми двумя из них заведомо не будет принадлежать к той же группе, поскольку разность любых двух нечетных чисел всегда четна.



Рис. 67.

Однако поскольку в действительности разбиение чисел на группы происходит не столь просто, то можно поступить иначе: относить числа к той или иной группе не поодиночке, а сразу по несколько чисел, идущих подряд. Исключение придется сделать лишь для начального отрезка ряда натуральных чисел: число 2 не может идти сразу же вслед за числом 1, а состоять из одного лишь числа 1 первая группа также не может, поскольку тогда нельзя было бы говорить ни о какой разности.

1 решение. Верно. Пусть I группа состоит из чисел 1 и 4. а II группа — из чисел 2 и 3. Нетрудно видеть, что обе эти группы удовлетворяют условиям задачи (не содержат разностей входящих в них чисел).

В III группу включим числа 5, 6, 7, 8. Эта группа также удовлетворяет условиям задачи, поскольку наибольшая разность равна $8 - 5 = 3$, а наименьшее из входящих в группу чисел равно 5 (рис. 67).

Аналогичным образом мы поступим и дальше, включив в IV группу следующие натуральные числа до $2 \cdot 8 = 16$: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Наибольшая разность равна $16 - 9 = 7$, а наименьшее из принадлежащих IV группе чисел равно 9 (рис. 68).

В общем случае в очередную группу можно включить все натуральные числа, которые больше последнего (наибольшего) числа предыдущей группы, но не превышают вдвое большего числа. Если в предыдущей группе наибольшее число равно k , то к следующей группе можно отнести все числа $k + 1, k + 2, k + 3, \dots, 2k$. Действительно, в такой группе наибольшее значение разности

между двумя числами равно $2k - (k + 1) = k - 1$, а наименьшее число равно $k + 1$.

При таком разбиении

в первые 2 группы (I и II) войдут числа от 1 до 4, то есть всего 2^2 чисел,

в первые 3 группы (I, II, III) войдут числа от 1 до 8, то есть всего 2^3 чисел,

в первые 4 группы (I, II, III, IV) войдут числа от 1 до 16, то есть всего 2^4 чисел,

и так далее, поскольку в каждую последующую группу входит вдвое больше чисел, чем в предыдущую, то есть $2 \cdot 2^4 = 2^5$, $2 \cdot 2^5 = 2^6, \dots$

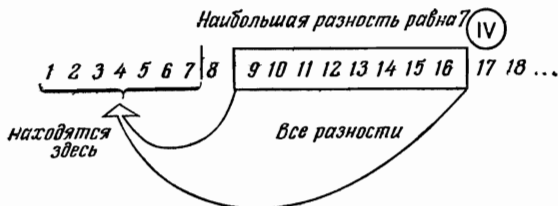


Рис. 68.

Следовательно, в первые 10 групп войдут все натуральные числа от 1 до $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$. Таким образом, натуральные числа от 1 до 1000 можно разбить на 10 групп.

II решение. Те из читателей, кто знаком с двоичной системой счисления, могут получить по существу то же решение проще. Действительно, запишем числа, принадлежащие к каждой группе, в двоичной системе.

I группа: 1, 100 (1 и 4).

II группа: 10, 11 (2 и 3).

III группа: все числа, которые больше 4, от 101 до 111 (от 5 до 7).

IV группа: все четырехзначные двоичные числа от 1000 до 1111, то есть от 8 до 15.

IX группа: все девятизначные двоичные числа.

X группа: все десятизначные двоичные числа, не превышающие десятичного числа 1000 (в двоичной системе оно имеет более «внушительный» вид: 111101000).

Какие бы два числа, принадлежащие к любой из восьми последующих групп, мы ни взяли, при вычитании из большего числа меньшего первая цифра всегда уничтожится и поэтому разность окажется в группе с меньшим номером. Как показывает непосредственная проверка, в первых двух группах также все в порядке.

III решение. Возвратимся теперь к идее, высказанной в начале I решения. Ясно, что все нечетные числа можно объединить в одну группу. А как быть с четными числами? Ведь их

разность также четна. Оказывается, что числа, делящиеся на 4, занимают среди всех четных чисел точно такое же положение, какое среди всех целых чисел занимают четные, то есть делящиеся на 2, числа: каждое второе четное число делится на 4 (кратно 4), а все четные числа, находящиеся между ними, не делятся на 4. Эти числа можно представить в виде $4n + 2$. Разность двух таких не делящихся на 4 чисел всегда делится на 4: $(4n + 2) - (4m + 2) = 4(n - m)$. Следовательно, четные числа, не делящиеся на 4, можно собрать в одну группу. Числа, делящиеся на 4, можно в свою очередь разбить на 2 группы в зависимости от того, делятся они на 8 или не делятся. Числа, делящиеся на 4, но не делящиеся на 8, можно объединить в одну группу. В следующую группу войдут числа, делящиеся на 8, но не делящиеся на 16, затем идет группа чисел, делящихся на 16, но не делящихся на 32, и так далее.]

Нетрудно видеть, что при разбиении чисел на группы можно придерживаться следующего весьма простого правила.

I группа. Выбрать единицу и каждое второе из следующих за ней чисел.

II группа. Выбрать наименьшее и каждое второе из следующих за ним чисел, не вошедших в предыдущую группу.

III группа. Повторить ту же операцию.

IV группа. Повторить ту же операцию.

Рассмотрим несколько первых из полученных по этому правилу групп.

I группа: 1, 3, 5, 7, 9, ...

Все эти числа нечетные. Разность любых двух из них четна и, следовательно, не принадлежит к той же группе, что и сами числа.

Остаются числа

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...,

то есть

1·2, 2·2, 3·2, 4·2, 5·2, 6·2, 7·2, ...

II группа: 1·2, 3·2, 5·2, 7·2, ...

Все эти числа — нечетные кратные числа 2. Разность любых двух из них равна четному кратному числа 2 и, следовательно, не принадлежит к той же группе, что и сами числа.

Остаются числа

2·2, 4·2, 6·2, 8·2, 10·2, 12·2, 14·2, ...,

то есть

1·4, 2·4, 3·4, 4·4, 5·4, 6·4, 7·4, ...

III группа: 1·4, 3·4, 5·4, 7·4, ...

Все эти числа — нечетные кратные числа 4. Разность любых двух из них равна четному кратному числа 4 и, следовательно, не принадлежит к той же группе, что и сами числа.

Аналогичным образом можно выписать и все остальные группы.

X группа: 512, а для того, чтобы в группе был хотя бы еще один элемент, в нее можно включить, например, число 1 из *I группы*.

28. ДАЛЬШЕ НЕКУДА.

До $N = 1279$.

Чтобы удостовериться в правильности разбиения (по условиям задачи разность любых двух чисел, входящих в одну группу, не должна принадлежать к той же группе), в первом из решений задачи 27 принят следующий способ проверки: разность наибольшего и наименьшего чисел любой группы (то есть максимальная разность) должна лежать «за пределами» группы, то есть быть меньше наименьшего из чисел группы (рис. 69). Следовательно, если между наибольшей разностью и наименьшим из входящих в данную группу чисел имеется «зазор» (наименьшее из чисел не не следует непосредственно за наибольшей разностью), то группу можно расширить, например так, как показано на рис. 70. Таким образом, установив состав двух первых групп (I и II), решение можно было бы продолжить следующим образом.

Включить в III группу числа 5, 6, 7, 8, 9 (рис. 71). Тогда разность между любыми двумя числами из III группы не превышала бы $9 - 5 = 4$, а наименьшее число в группе было бы равно 5.

Аналогичным образом в следующую (IV) группу можно включить все следующие числа до $10 + 9 = 2 \cdot 9 + 1 = 19$, то есть числа 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 (рис. 72). Тогда разность между любыми двумя числами IV группы не превышала бы $19 - 10 = 9$, а наименьшее число в группе было бы равно 10.

В общем случае в очередную группу можно включить подряд все натуральные числа, которые больше последнего (наибольшего) числа предыдущей группы, но на 1 меньше вдвое большего числа. Если наибольшее число предыдущей группы равно k , то в следующую группу можно включить все числа $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$, ..., $2k$, $2k + 1$. Действительно, разность любых двух чисел следующей группы не больше $2k + 1 - (k + 1) = k$, а наименьшее число в следующей группе равно $k + 1$ (рис. 70).

При таком разбиении

в первые 3 группы (I, II, III) войдут натуральные числа от 1 до 9, то есть до $10 - 1$;

в первые 4 группы (I, II, III, IV) войдут натуральные числа от 1 до 19, то есть до $2 \cdot 10 - 1$

и так далее. Нетрудно видеть, что в каждой следующей группе наибольшее число на 1 больше, чем удвоенное наибольшее число в предыдущей группе.

В первые 5 групп (I—V) войдут натуральные числа от 1 до $2 \cdot 19 + 1 = 39 = 4 \cdot 10 - 1 = 2^2 \cdot 10 - 1$;

в первые 6 групп (I—VI) — натуральные числа от 1 до $2 \cdot 39 + 1 = 79 = 9 \cdot 10 - 1 = 2^3 \cdot 10 - 1$;

В первые 7 групп (I—VII) — натуральные числа от 1 до $2 \cdot (2^3 \cdot 10 - 1) + 1 = 2 \cdot 2^3 \cdot 10 - 2 + 1 = 2^4 \cdot 10 - 1$;

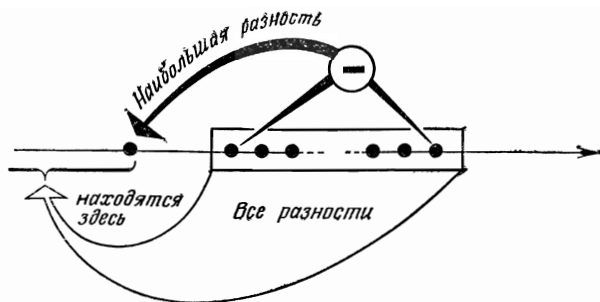


Рис. 69.

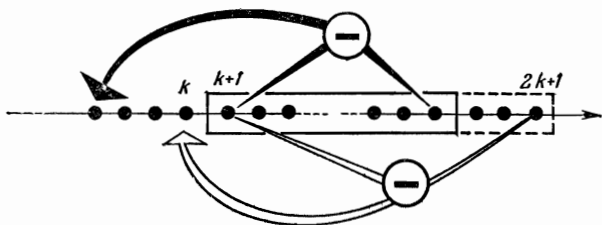


Рис. 70.

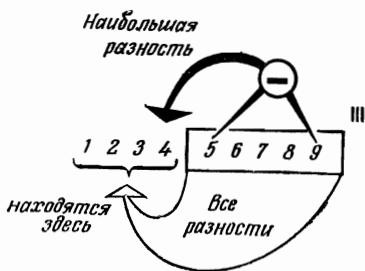


Рис. 71.

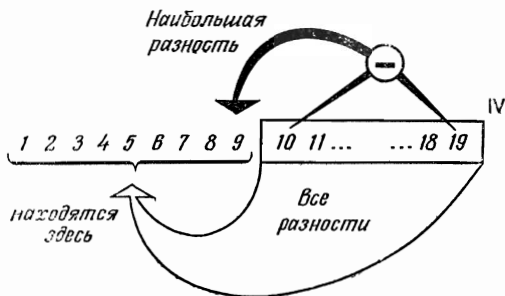


Рис. 72.

в первые 8 групп (I—VIII) — натуральные числа от 1 до $2 \cdot (2^4 \cdot 10 - 1) + 1 = 2 \cdot 2^4 \cdot 10 - 2 + 1 = 2^5 \cdot 10 - 1$;

в общем случае в первые k групп — натуральные числа от 1 до $2^{k-1} \cdot 10 - 1$.

Следовательно, в первые 10 групп (I—X) войдут натуральные числа от 1 до $2^{10-1} \cdot 10 - 1 = 2^9 \cdot 10 - 1 = 128 \cdot 10 - 1 = 1279$.

29. ДЕВЯТЬ ГРУПП

Да, возможно.

Такое разбиение выглядит следующим образом.

I группа: числа, оканчивающиеся на 1, 4, 6, 9.

II группа: числа, оканчивающиеся на 2, 3, 7, 8.

III группа: числа, оканчивающиеся на 5.

IV группа: числа, оканчивающиеся на 10, 40, 60, 90.

V группа: числа, оканчивающиеся на 20, 30, 70, 80.

VI группа: числа, оканчивающиеся на 50.

VII группа: 100, 400, 1000.

VIII группа: 200, 300.

IX группа: 500, 600, 700, 800, 900.

Проверку правильности этого разбиения мы предоставляем читателю.

[Выполнить наше своеобразное «домашнее задание» ему будет совсем не трудно, поскольку, проверяя I группу, он одновременно проверит IV группу, а проверяя II группу, установит правильность V группы. III и VI группы вообще не нуждаются ни в какой проверке: их правильность очевидна, а вместо VII, VIII и IX групп по существу использованы I, II и III группы из предыдущей задачи.]

Во время проверки необходимо следить за тем, чтобы большее число могло оканчиваться меньшей цифрой, например чтобы из числа, оканчивающегося на 1, можно было вычесть число, оканчивающееся на 4 (и получить разность, оканчивающуюся на 7). Следовательно, для любых двух последних цифр необходимо провести 2 проверки, выбрав сначала одну из них последней цифрой уменьшаемого, другую — последней цифрой вычитаемого, а затем поменяв их местами. (Например, $\dots 1 - \dots 4 = \dots 7$, $\dots 4 - \dots 1 = \dots 3$.)]

30. НАЧНЕМ С САМОГО НАЧАЛА!

Необходимость во введении четвертой группы впервые появится, когда мы дойдем до 14.

Ни одно из чисел 10, 11, 12, 13, 14 нельзя включить в III группу (хотя бы потому, что если из них вычесть по 5, то разности совпадут с числами, принадлежащими III группе). Кроме того, все эти 5 последовательных чисел невозможно одновременно включить ни в I, ни во II группу. Действительно, два последовательных числа не могут принадлежать I группе (поскольку их разность равна 1). Следовательно, по крайней мере одно из чисел 10 и 11 должно входить во II группу. Но тогда числа, отличающиеся от 10 и 11 на 2 и на 3 (12, 13 или 13, 14), не могут войти во II группу, а

поскольку разность этих чисел равна 1, то они оба не могут принадлежать и к I группе.

Далее, поскольку эти числа не превышают 14 (самое большее из них равно $11 + 3 = 14$), то не может быть и речи о включении их в III группу. Таким образом, остается единственный выход: создать новую группу.

Наоборот, до 13 мы вполне можем разбить числа на 3 группы: 10 присоединить к I группе, 11 и 12 — ко II группе, а 13 — снова к I.

31. ОДНОЙ ГРУППОЙ БОЛЬШЕ

Прежний способ разбиения порождает удивительную симметрию (рис. 73). При составлении части B мы воспользовались идеей, подробно изложенной в решении задачи 28. Части A и C устроены совершенно одинаково и переходят одна в другую при сдвиге на 9.

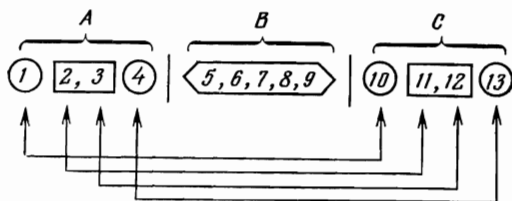


Рис. 73.

Точнее говоря, любое из чисел, принадлежащих части C, после вычитания из него 9 переходит в меньшее число, принадлежащее к той же группе, что и большее.

Попробуем и в дальнейшем при разбиении на группы воспользоваться обнаруженной нами симметрией.

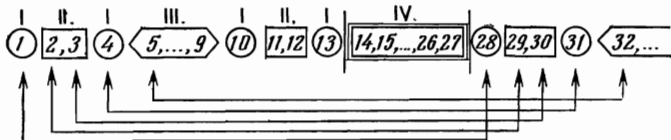


Рис. 74.

Метод, изложенный в решении задачи 28, позволяет отнести к IV группе все натуральные числа от 14 до $13 + 14 = 27$. (Следовательно, для этих чисел наибольшая разность меньше 14 — наименьшего из входящих в IV группу чисел.)

Число 28 уже не принадлежит к IV группе, но создавать из-за этого новую группу не приходится, поскольку ничто не мешает нам включить его в I группу. Число 29 можно поместить во II группу. Туда же войдет и число 30, но для числа 31 этот путь «закрыт» ($31 - 29 = 2$, а двойка уже содержится среди чисел II группы).

Зато число 31 можно беспрепятственно ввести в I группу. После этого числа 32 нельзя будет включить ни в I, ни во II, но оно легко «впишется» в III группу. Предположим (рис. 74), что натуральные числа больше 27 начали выстраиваться при разбиении на группы в такую же симметричную систему, как и натуральные числа меньше 14 (будто всю систему, образованную натуральными числами от 1 до 13, сдвинули вдоль числовой оси на 27 единиц вправо).

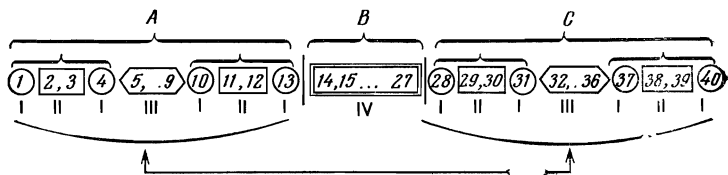


Рис. 75.

Тогда натуральные числа от 28 до 40 окажутся разбитыми на 3 группы точно таким же образом, как и натуральные числа от 1 до 13 (рис. 75), и числа, разность между которыми равна 27, будут принадлежать к одной и той же группе.

В том, что такое разбиение удовлетворяет условиям задачи, нетрудно убедиться, рассмотрев набор разностей. Впрочем, немного поразмыслив, нетрудно понять, что нет необходимости рассматривать каждую разность в отдельности, поскольку система обладает более общей симметрией. Как показывает проверка, изображенное на рис. 75 разбиение первых 40 натуральных чисел на 4 группы удовлетворяет условиям задачи.

32. ОТ СТАРЫХ ГРУПП — К НОВЫМ

В расширенной группе нетрудно выделить две части, одна из которых состоит из членов «старой» группы, а другая — из сдвинутых на y относительно чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ членов «новой» группы

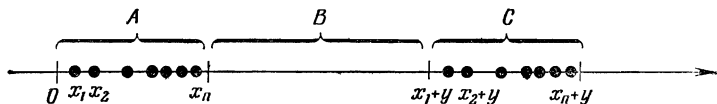


Рис. 76.

(рис. 76). Проверим, вся ли расширенная группа удовлетворяет условиям задачи, — убедимся в том, что разность любых двух ее членов не принадлежит к группе.

При вычислении разности возможны 3 следующих различных случая:

- оба члена принадлежат к «старой» группе,
- оба члена принадлежат к «новой» группе,

в) один член принадлежит к «старой», а другой — к «новой» группе.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

а) Разность двух членов старой группы не может принадлежать ни к старой, ни к новой группе, поскольку эта разность остается в множестве A чисел, которые меньше x_n (рис. 77).

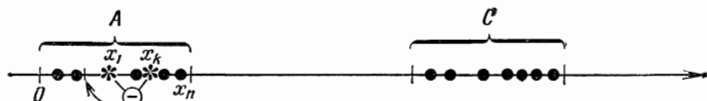


Рис. 77.

б) Разность двух членов новой группы совпадает с разностью двух соответствующих членов старой группы (рис. 78) и по доказанному в п. а не может принадлежать к расширенной группе:

$$(x_k + y) - (x_i + y) = x_k - x_i.$$

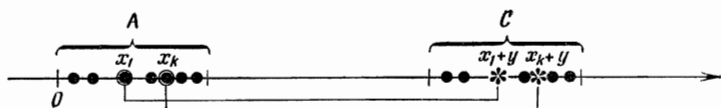


Рис. 78.

в) Если из какого-нибудь члена новой группы (например, из $x_k + y$) вычесть любой член старой группы (например, x_i), то разность можно представить в виде

$$(x_k + y) - x_i = (x_k - x_i) + y, \quad (*)$$

то есть в виде суммы числа y и разности двух членов старой группы.

Возможны 2 случая.

1. Если разность двух членов старой группы положительна, то она принадлежит множеству A :

$$0 < x_k - x_i < x_n$$

и, следовательно, заведомо не встречается среди чисел группы (рис. 79). Сдвинув это число на y , мы получим некоторое число, принадлежащее множеству C , но не являющееся членом новой группы, поскольку каждый член новой группы возникает из соответствующего члена старой группы (является, как говорят математики, его образом при сдвиге на y). Следовательно, разность чисел $x_k + y$ и x_i не принадлежит ни к старой, ни к новой группе и поэтому не входит и в расширенную группу.

2. Необходимо также рассмотреть случай, когда разность двух членов старой группы отрицательна. (При вычислении разности двух членов группы мы всегда из большего числа вычитаем меньшее. Однако может представиться случай, когда, несмотря на то что число $x_k + y$ несомненно больше числа x_i , величина x_i больше или равна величине x_k , в силу чего в выражении (*) разность

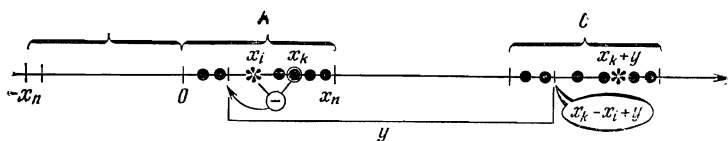


Рис. 79.

$x_k - x_i$ не положительна и, следовательно, не принадлежит множеству A .) Разность $x_k - x_i$ в этом случае удовлетворяет неравенству.

$$-x_n < x_k - x_i \leq 0$$

и поэтому принадлежит множеству A' (рис. 80). Прибавив ко всем членам неравенства по y , мы преобразуем его к виду

$$y - x_n < (x_k - x_i) + y \leq y < x_1 + y.$$

Поскольку по условиям задачи $y \geq 2x_n$, то $y - x_n \geq x_n$ и

$$x_n < (x_k + y) - x_i < x_1 + y.$$

Последнее неравенство означает, что разность одного члена новой и одного члена старой группы, хотя и не принадлежит множеству

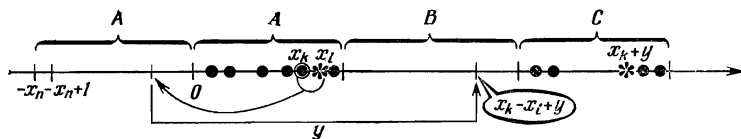


Рис. 80.

A (и, следовательно, множеству C), попадает в множество B , расположенное на числовой оси между множествами A и C (рис. 80), то есть больше любого члена старой, но меньше любого члена новой группы. Таким образом, и в этом случае разность не принадлежит к расширенной группе.

Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

33. ВСЕГО ЛИШЬ 7 ГРУПП

Разбиение на группы мы произведем не сразу, а постепенно, шаг за шагом, каждый раз включая в группы все новые и новые числа. При этом мы будем попеременно действовать двумя спосо-

а) Создавая новую группу, мы всякий раз будем включать в нее по порядку последовательные натуральные числа до тех пор, пока наибольшая разность входящих в нее чисел остается меньше наименьшего из чисел, входящих в расширенную группу (состоящую из объединения старых и новой групп). Если a — наибольшее из чисел, входивших в старые группы, и, следовательно, новая группа начинается с числа $a + 1$, то в нее войдут числа

$$a + 1, a + 2, a + 3, \dots, 2a - 1, 2a, 2a + 1$$

(всего новая группа будет содержать $a + 1$ чисел). Тогда наибольшая разность равна $2a + 1 - (a + 1) = a$, то есть числу, за которым непосредственно следует наименьшее из чисел группы $a + 1$, а число $2a + 2$ уже не может входить в новую группу. (Этот способ мы использовали в решении задачи 28.)

б) После каждого шага типа α условимся сдвигать старую группу «с одной стороны» построенной на шаге α новой группы на другую так, как мы это делали в решении задачи 32. При этом

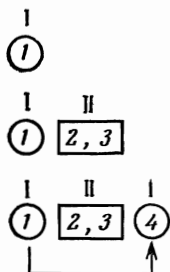


Рис. 81.

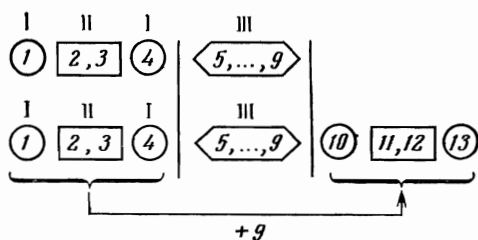


Рис. 82.

к каждому из чисел $1, 2, \dots, a$, принадлежащих к старой (существовавшей до шага α) группе, мы прибавим число $2a + 1$ и включим его в группу, имеющую тот же номер, который имела старая группа. В расширенную (в том смысле, в каком это слово понималось в решении задачи 32) группу войдут числа $2a + 2, 2a + 3, \dots, 3a + 1$. То, что разность любых двух чисел, входящих в расширенную группу, не совпадает ни с одним из членов этой группы, доказано в решении предыдущей задачи. Все ее условия выполнены, поскольку «величина сдвига» $2a + 1$ больше числа $2a$, а наибольшее число старых групп не меньше a .

Посмотрим, как выглядит наш многоступенчатый процесс на практике.

α_1 : образуем I группу. Включаем в нее число 1.

β_1 : поскольку другой группы пока нет, то сдвигать I группу «не на что».

α_2 : образуем II группу. Включаем в нее числа 2, 3.

β_2 : сдвигаем старую I группу по другую сторону от II группы. Число 4 включаем в I группу (рис. 81).

α_3 : образуем III группу. Включаем в нее числа 5, 6, 7, 8, 9 (все натуральные числа от $4 + 1$ до $2 \cdot 4 + 1$; рис. 82).

β_3 : сдвигаем старые I и II группы по другую сторону от III группы. Величина сдвига равна 9, то есть числу $2 \cdot 4 + 1$ (которое больше удвоенного наибольшего числа любой из старых групп, в силу чего условия задачи 32 выполнены; рис. 82).

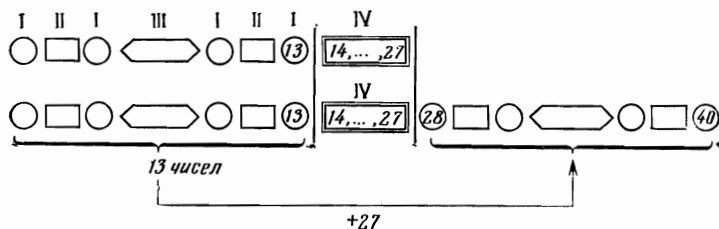


Рис. 83.

α_4 : образуем IV группу. Включаем в нее числа 14, 15, ..., 27 (все натуральные числа от $13 + 1$ до $2 \cdot 13 + 1$; рис. 83).

β_4 : сдвигаем старые I, II и III группы по другую сторону от IV группы. Величина сдвига равна 27, то есть числу $2 \cdot 13 + 1$.

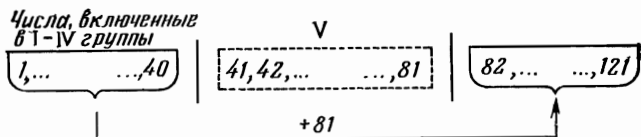


Рис. 84.

α_5 : образуем V группу. Включаем в нее числа 41, 42, ..., 81 (натуральные числа от $40 + 1$ до $2 \cdot 40 + 1$).

β_5 : сдвигаем старые I, II, III и IV группы по другую сторону от V группы на $2 \cdot 40 + 1 = 81$ (рис. 84). К каждому из натуральных чисел от 1 до 40 прибавляем по 81 и полученное число вклю-

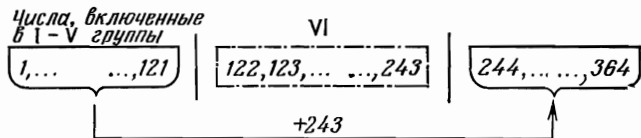


Рис. 85.

чаем в группу с тем же номером, который имела группа, содержащая исходное число.

α_6 : образуем VI группу. Включаем в нее числа 122, 123, ..., 243 (натуральные числа от $121 + 1$ до $2 \cdot 121 + 1$).

β_6 : сдвигаем старые I, ..., V группы на $2 \cdot 121 + 1 = 243$ (рис. 85).

α_7 : образуем VII группу. Включаем в нее числа 365, ..., 729 (натуральные числа от $364 + 1$ до $2 \cdot 364 + 1$).

β_7 : сдвигаем старые I, ..., VI группы на 729 (рис. 86).

Мы видим, что такой способ действительно позволяет разбить 1093 первых натуральных чисел всего лишь на 7 групп.

Примечание 1. Нетрудно установить наибольшее число, до которого этим способом начальные члены ряда натуральных чисел можно разбить на n групп.

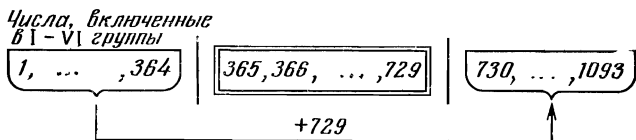


Рис. 86.

Если до образования k -й группы разбиению на группы подверглись все натуральные числа от 1 до a , то, как говорилось в начале решения, при создании новой k -й группы на шаге α_k в нее включаются числа от $a + 1$ до $2a + 1$, то есть *всего $a + 1$ чисел*. Затем следует шаг β_k , приводящий к включению в старые группы столько же членов, сколько их было до создания k -й группы, то есть к *увеличению общего числа членов на a* .

Итак, действуя этим способом, мы можем начать с разбиения на группы a первых натуральных чисел и распространить его на $3a + 1$ первых натуральных чисел, прежде чем нам понадобится ввести новую группу (рис. 87).

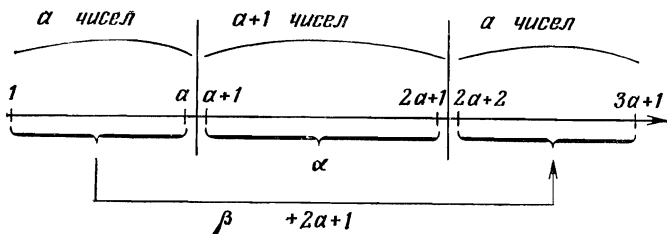


Рис. 87.

В I группу до создания II группы мы включаем только число 1.

Образовав II группу, мы можем продолжать разбиение на 2 группы до тех пор, пока не дойдем до числа $3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$ (после чего нам понадобится ввести III группу).

Образовав III группу, мы можем продолжать разбиение на 3 группы до тех пор, пока не достигнем числа $3(3 + 1) + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 13$ (после чего нам придется ввести IV группу).

Нетрудно видеть, что число 13 представимо в виде $(3^3 - 1)/2$,

а «верхние грани» разбиений на меньшее число групп представимы в аналогичном виде: $(3^2 - 1)/2$ и $(3^1 - 1)/2$.

Легко заметить общую закономерность:

изложенный выше способ позволяет продолжать разбиение натуральных чисел на n групп от 1 до $(3^n - 1)/2$.

Это правило заведомо верно при $n = 1, 2, 3$. (Более того, пользуясь приведенными в решении числами, мы можем считать, что оно проверено до $n = 7$.) Та же зависимость (между числом групп n и максимальным натуральным числом, до которого возможно разбиение на n групп) сохраняется и при любых других значениях n , поскольку если разбиение на k групп доведено до числа $3^k - 1/2$, то после образования новой группы α - и β -шаги позволяют продолжать разбиение на $k + 1$ групп до числа

$$3 \cdot \frac{3^k - 1}{2} + 1 = \frac{3 \cdot 3^k - 3}{2} + 1 = \frac{3^{k+1} - 3 + 2}{2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2},$$

соответствующего сформулированному выше правилу.

Примечание 2. В задаче 27 произведено разбиение натуральных чисел от 1 до 1000 на 10 групп. Сделано это несколькими способами, но (хотя на 10 групп можно разбить и более 1000 натуральных чисел) ни один из них не был пригоден для разбиения той же 1000 натуральных чисел на меньшее число групп. Не позволил уменьшить число групп и усовершенствованный способ, изложенный в решении задачи 28. Лишь в задаче 29 был предложен способ, позволявший понизить число групп до 9. Уже этот способ разбиения натуральных чисел был довольно хитроумным. Однако понадобилась еще одна, с точки зрения математики более глубокая идея для того, чтобы натуральные числа от 1 до 1000 оказались возможным разбить всего лишь на 7 групп.

Естественно возникает вопрос: не существует ли какого-нибудь более хитроумного (и, возможно, более сложного) способа разбиения тех же 1000 натуральных чисел на 6 групп?

Оказывается, не существует.

Действительно, мы знаем, что 5 групп заведомо мало. Можно доказать следующую теорему: *если натуральные числа от 1 до N разбиты на n групп так, что разность любых двух чисел, взятых из одной группы, не совпадает ни с одним из членов той же группы, то выполняется неравенство*

$$N < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot 3.$$

Это означает, что на 5 групп можно разбить лишь натуральные числа от 1 до N , которые меньше $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 360$.

(В более точной формулировке использованной нами теоремы числа N и n удовлетворяют неравенству $N < n!$, где e — основание натуральных логарифмов. Доказательство этой теоремы приведено в изданной на венгерском языке книге: П. Эрде́ш, Я. Шурани, Избранные главы теории чисел, Будапешт, 1960, стр. 150.)

При $n = 6$ значение N , удовлетворяющее неравенству, уже больше 1000, но из доказательства теоремы нельзя усмотреть, каким образом можно осуществить разбиение натуральных чисел от 1 до N на n групп. Теорема лишь утверждает, что n групп достаточно, но не дает никаких «рецептов» разбиения.

Примечание 3. Способ, которым в приведенном выше решении произведено разбиение на 7 групп, достаточно прост, и проверка правильности полученного разбиения не требует никаких познаний в математике. Недостаток этого решения состоит в том, что оно не позволяет строить группы независимо друг от друга. Например, невозможно заранее предсказать, какие числа войдут в III группу. Состав III группы выясняется лишь после того, как все числа распределены по группам. Чаба Киш предложил другой способ разбиения натуральных чисел на группы, позволяющий устранить этот существенный недостаток решения.

Чтобы получить разбиение на группы, удовлетворяющее условиям задачи, достаточно включить в i -ю группу те числа, которые при делении на 3^i дают остатки

$$\frac{3^{i-1} + 1}{2}, \frac{3^{i-1} + 1}{2} + 1, \frac{3^{i-1} + 1}{2} + 2, \dots, 3^{i-1}$$

(i — любое натуральное число: 1, 2, 3, ...).

В I группу войдут числа, дающие при делении на 3^1 (то есть на 3) остаток 1, то есть числа вида $3k + 1$: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

Действительно, из приведенного выше общего «рецепта» следует, что в этом случае $i = 1$, $3^{i-1} = 3^0 = 1$. Поэтому первый остаток равен $(3^0 + 1)/2 = (1 + 1)/2 = 1$, но он же одновременно является и последним допустимым остатком.

Во II группу войдут числа, дающие при делении на $3^2 = 9$ остатки 2 или 3, то есть числа вида $9k + 2$ и $9k + 3$:

$$2, 3, 11, 12, 20, 21, 29, 30 \dots$$

На этот раз $i = 2$, следовательно, первый остаток равен $(3^1 + 1)/2 = 2$.

Следующий остаток на 1 больше, то есть равен 3. Поскольку $3 = 3^1$, то этот остаток является последним.

Нетрудно видеть, что при разбиении по методу Чабы Киша включение чисел в I и II группы происходит независимо.

В III группу войдут числа, дающие при делении на $3^3 = 27$ остатки 5, 6, 7, 8 и 9, то есть числа вида $27k + r$, где $r = 5, 6, 7, 8, 9$:

$$5, 6, 7, 8, 9, 32, 33, 34, 35, 36, 59, 60, 61, 62, 63, \dots$$

Наименьший остаток равен $(3^2 + 1)/2 = (9 + 1)/2 = 5$.

Остальные идут в порядке возрастания величины (каждый следующий на 1 больше предыдущего) вплоть до остатка, равного 9.

Дойдя до построения III группы, мы обнаруживаем, казалось бы, явную ошибку: в нее входит число 7 (а также 34, 61 и вообще все числа вида $27k + 7$, дающие при делении на 3 остаток 1), ранее включенное в I группу. Однако в действительности это не ошибка: просто мы сделали больше того, что требовалось по условиям задачи. Тот, кто впервые пытается найти решение этой задачи или задач 27 и 29, бывает доволен, когда ему удается построить хоть какое-нибудь разбиение, при котором каждое из чисел принадлежит по крайней мере к одной из групп. Новый же способ позволяет достичь большего: *построить разбиение, при котором некоторые числа принадлежат не к одной, а к нескольким группам,*

Впрочем, если кто-нибудь захочет, чтобы каждое натуральное число входило лишь в одну группу, то мы охотно выполним их желание. Например, условимся помещать все числа, которые могут принадлежать нескольким группам одновременно, в группу с наименьшим номером. Однако не следует упускать из виду, что при этом группы утратят свою независимость: при составлении групп нам придется следить за их номерами и группам с меньшими номерами отдавать предпочтение перед группами с большими номерами, если только мы не захотим до неузнаваемости обезобразить сформулированное выше общее правило.

В IV группе войдут числа вида $81k + r$, где $r = 14, 15, \dots, 26, 27$:

натуральные числа от 14 до 27, от 95 до 108, от 176 до 189, $\dots$

Остальные группы мы предоставляем выписывать читателю. Впрочем, вряд ли стоит тратить на это силы. Докажем лучше следующее утверждение:

в множестве чисел, принадлежащих n первым группам, содержатся все числа, дающие при делении на 3^n остатки, которые не превышают $3^n/2$.

Среди первых идущих подряд натуральных чисел такими числами являются те, которые при делении на 3^n дают частное, равное 0 (то есть наименьшие члены каждого класса чисел, дающих при делении на 3^n одни и те же остатки):

$$1, 2, 3, \dots, \frac{3n - 1}{2}.$$

Следовательно, такой способ позволяет разбивать на n группы последовательные натуральные числа от 1 до $(3^n - 1)/2$.

Докажем это утверждение методом математической индукции.



При $n = 1, 2, 3$ правильность утверждения можно проверить, взглянув на первые числа выписанных выше групп.

Если утверждение выполняется при $n = i$, то оно верно и при $n = i + 1$. По предположению индукции в множестве чисел, принадлежащих к i первым группам, содержатся все числа, которые при делении на 3^i дают один из остатков $1, 2, \dots, (3^i - 1)/2$.

а. Среди этих чисел содержатся также все числа, которые при делении на 3^{i+1} дают какой-нибудь из остатков $1, 2, \dots, (3^i - 1)/2$.

б. Но в этом множестве находятся и числа, дающие при делении на 3^{i+1} один из остатков $3^i + 1, 3^i + 2, \dots, 3^i + (3^i - 1)/2 = (3^{i+1} - 1)/2$. Этому же множеству принадлежат и другие числа, но необходимость в них отпадает, поскольку

в. — из самого способа разбиения следует, что в $(i + 1)$ -ю группу входят именно такие числа, которые при делении на 3^{i+1} дают один из остатков $(3^i + 1)/2, (3^i + 1)/2 + 1, \dots, 3^i$. «Новые» остатки «вклиниваются» посредине между остатками, перечисленными в п. а, и теми, о которых говорилось

в п. б. Взятые вместе, все эти числа образуют полную систему остатков от деления на 3^{i+1} , не превосходящих числа $(3^i + 1)/2$. Объединяя остатки, перечисленные в п. а, б и в, получаем эту систему:

$$\underbrace{1, 2, \dots, \frac{3^i - 1}{2}}_a, \underbrace{\frac{3^i + 1}{2}, \frac{3^i + 1}{2} + 1, \dots, 3^i, 3^i + 1, \dots, \frac{3^{i+1} - 1}{2}}_b, \underbrace{\phantom{1, 2, \dots, \frac{3^i - 1}{2}}}_v.$$

(Разность между числами $(3^i + 1)/2$ и $(3^i - 1)/2$ равна 1.)

Таким образом, построенные по новому способу группы удовлетворяют условиям задачи.

Это утверждение следует из того, что при делении на 3^i разность любых двух чисел, принадлежащих к i -й группе, не может давать остаток, который бы совпал с остатком любого из чисел той же группы.

Доказательство. Если из числа, дающего больший остаток, вычесть число с меньшим остатком, то разность остатков совпадет с остатком разности этих чисел и поэтому не превзойдет числа

$$3^{i-1} - \frac{3^{i-1} + 1}{2} = \frac{3^{i-1} + 1}{2},$$

то есть окажется меньше наименьшего из остатков, даваемых при делении на 3^i членами i -й группы.

Наоборот, если из числа, дающего меньший остаток, вычесть число с большим остатком, то остаток разности будет равен 3^i плюс (отрицательная) разность остатков и поэтому будет не меньше числа

$$\begin{aligned} 3^i + \frac{3^{i-1} + 1}{2} - 3^{i-1} &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^{i-1} + 3^{i-1} + 1 - 2 \cdot 3^{i-1}}{2} = \\ &= \frac{5 \cdot 3^{i-1} + 1}{2} = 2 \cdot 3^{i-1} + \frac{3^{i-1} + 1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае остаток разности больше наибольшего из остатков, даваемых при делении на 3^i членами i -й группы.

34. ЮЛИШКА ЛЮБИТ ПОПРЫГАТЬ

[Начнем с самого начала. По лестнице с одной-единственной ступенькой Юлишка могла бы подняться лишь одним-единственным способом. Лестницу с 2 ступеньками можно преодолеть 2 способами: либо наступить на 1-ю ступеньку, либо сразу шагнуть на 2-ю ступеньку. По лестнице с 3 ступеньками можно подняться 3 способами: наступив либо на 1-ю и 3-ю, либо на 2-ю и 3-ю, либо на 1-ю, 2-ю и 3-ю ступеньки. По лестнице с 4 ступеньками можно подняться уже 5 способами: наступив либо на 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю, либо на 2-ю, 3-ю, 4-ю, либо на 1-ю, 3-ю, 4-ю, либо на 1-ю, 2-ю, 4-ю, либо на 2-ю и 4-ю ступеньки.

А сколькими способами можно преодолеть лестницу с 5

ступеньками? На этот раз удобнее не заниматься прямым подсчетом, а проследить некую закономерность: ведь с увеличением числа ступенек перебор всех возможных случаев становится все сложнее. Итак, попытаемся навести порядок. Кое-что нам уже известно: мы знаем, сколькими способами можно подняться по лестнице с любым числом ступенек от 1 до 4. Нельзя ли подъем по лестнице с 5 ступеньками свести к подъему по лестницам с меньшим числом ступенек?

Отчего же нельзя? На 5-ю ступеньку Юлишка может попасть с 2 ступенек: либо с 3-й, либо с 4-й. Следовательно, взойти на 5-ю ступеньку можно

либо поднявшись любым способом сначала на 3-ю ступеньку, а с нее на 5-ю, либо поднявшись любым способом сначала на 4-ю ступеньку, а затем шагнув на 5-ю.

Никакого другого способа взойти на 5-ю ступеньку не существует, а оба названных выше способа заведомо различны.

Следовательно, *по лестнице с 5 ступеньками Юлишка может подняться столькими способами, сколькими можно подняться по лестницам с 4 и с 3 ступеньками, то есть $5 + 3 = 8$ различными способами.*

Рассуждая аналогичным образом, нетрудно убедиться в том, что подняться по лестнице с 6 ступеньками можно столькими способами, сколько их существует для подъема по лестницам с 5 и с 4 ступеньками, то есть $8 + 5 = 13$ различными способами.

В общем случае справедливо следующее утверждение:

подняться по лестнице с n ступеньками (n — любое натуральное число начиная с 3) можно столькими способами, сколько их существует для подъема по лестницам с $n - 1$ и $n - 2$ ступеньками.

Действительно, Юлишка может либо наступить, либо не наступить на предпоследнюю ступеньку лестницы с n ступеньками. В первом случае она шагнет на последнюю ступеньку с предпоследней, во втором — со ступеньки, предшествующей предпоследней ступеньке. Следовательно, в первом случае она может подняться на n -ю ступеньку столькими способами, сколько их существует для того, чтобы взойти на $(n - 1)$ -ю ступеньку, во втором случае число различных вариантов «восхождения» совпадает с числом различных способов подъема на $(n - 2)$ -ю ступеньку.

Поскольку на лестницу с 1 ступенькой можно взойти 1 способом, а на лестницу с 2 ступеньками — 2 способами, то Юлишка может подняться

на 3-ю ступеньку $1 + 2 = 3$ способами,

на 4-ю ступеньку $2 + 3 = 5$ способами,

на 5-ю ступеньку $3 + 5 = 8$ способами,

на 6-ю ступеньку $5 + 8 = 13$ способами,

на 7-ю ступеньку $8 + 13 = 21$ способом,

на 8-ю ступеньку $13 + 21 = 34$ способами,

на 9-ю ступеньку $21 + 34 = 55$ способами,

на 10-ю ступеньку $34 + 55 = 89$ способами,

на 11-ю ступеньку $55 + 89 = 144$ способами и, следовательно,

на 12-ю ступеньку $89 + 144 = 233$ способами.

Таким образом, Юлишке предстоит *233 раза подняться по школьной лестнице*, прежде чем учитель разрешит ей заниматься в математическом кружке для старшекласников. На это ей

потребуется не менее 233 дней. За столь большой срок Юлишка усовершенствует свои познания в математике и (мы твердо надеемся) сможет занять свое место среди старшекласников.

Примечание 1. Последовательность чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ..., встречающаяся в решении задачи, обладает одной замечательной особенностью: первый член ее равен 1, второй — числу 2, а каждый последующий — сумме двух предыдущих. Члены такой последовательности называются *числами Фибоначчи*. Они играют важную роль в математике.

[Примечание 2. Вернемся еще раз к задаче 24. Начальные члены набора чисел, который три брата Андраш, Йошка и Шани построили, выбирая каждый раз «наименьшее из возможных чисел», *совпадают с числами, полученными при решении этой задачи*. Однако замеченная Шани закономерность распространяется лишь на несколько первых членов «минимального» набора, а затем перестает действовать: члены «минимального» набора становятся меньше соответствующих чисел Фибоначчи. Однако напрасно бы стала Юлишка надеяться на то, что на 8-ю ступеньку можно взобраться не 34, а меньшим числом способов, и тем самым быстрее «допрыгать» до желанной цели. Можно строго доказать, что *правило, замеченное нами «на нескольких первых ступеньках», остается верным при любом числе ступенек*. В утешение Юлишке можно лишь заметить, что столь же несомненно и другое: члены построенной нами последовательности нельзя не только уменьшить, но и неожиданно увеличить, тем самым исполнение ее желания не будет отложено на больший срок.]

35. ТРАМВАЙНЫЕ БИЛЕТЫ

Строго говоря, для того чтобы решить эту задачу, совсем не обязательно подсчитывать точное число всех возможных комбинаций отверстий в трамвайных билетах Бергенгоцпонта. Для решения задачи было бы вполне достаточно определить, где — в Бергенгоцпонте или в Будапеште — отверстия образуют больше допустимых комбинаций.

Однако при ближайшем рассмотрении довольно быстро выясняется, что сравнение двух способов компостирования трамвайных билетов не имеет под собой достаточного основания. Следовательно решить задачу можно, лишь подсчитав число возможных комбинаций отверстий в трамвайных билетах Бергенгоцпонта.

Как это сделать?

Поскольку по условиям задачи из двух соседних клеток компостер пробивает не более одной, проколотые и непроколотые клетки заведомо чередуются. Поэтому решение этой задачи можно попытаться свести к решению предыдущей задачи, в которой речь шла о чередовании ступенек, на которые наступала Юлишка, с пропущенными ею ступеньками.

Установить аналогию между двумя задачами нетрудно, если заметить, что между клетками в трамвайных билетах Бергенгоцпонта, *пробитыми компостерами*, и ступеньками, *пропу-*

щенными Юлишкой, существует соответствие: ведь по условиям задачи 34 Юлишка, поднимаясь по лестнице, не могла пропустить 2 ступеньки подряд (рис. 88).

Необходимо отметить лишь 2 различия.

1. Юлишка всегда должна была наступать на последнюю (12-ю) ступеньку, а в трамвайном билете последняя клетка не должна непременно оставаться непробитой.

2. Поднимаясь по лестнице, Юлишка может, в частности, наступать на все ступеньки подряд, то есть не пропустить ни одной из них. В трамвайном билете по крайней мере одна клетка непременно должна быть пробита компостером.

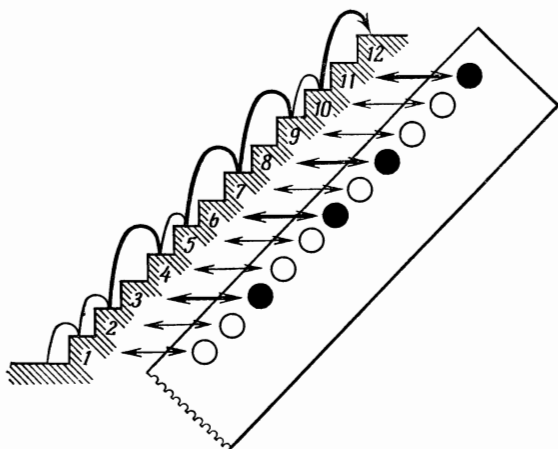


Рис. 88.

Первое различие означает, что, в то время как в 11 клетках трамвайного билета возможна любая допустимая комбинация отверстий (разумеется, мы исключаем из рассмотрения все запрещенные комбинации с двумя проколотыми подряд клетками), а 12-я (не существующая в действительности) клетка всегда остается непроколота компостером. Тем самым рассматриваемая нами задача обретает полную аналогию с предыдущей, поскольку Юлишке во всех случаях необходимо наступить на верхнюю (12-ю) ступеньку. Второе различие лишь исключает один возможный случай.

Итак, сопоставим клетки в трамвайном билете, пробитые компостером, ступенькам, которые пропустила, поднимаясь по лестнице, Юлишка. Тогда каждой допустимой (не противоречащей правилам трамвайного управления Бергенгоцпонта) комбинации отверстий в трамвайном билете соответствует один (и только один) способ подъема по школьной лестнице, согласующийся с требованием учителя. Наоборот, всякий раз, когда Юлишка поднимается по лестнице, перепрыгивая за один раз не более чем через 1 ступеньку, она тем самым указывает одну (и только одну) допустимую комби-

нацию отверстий в трамвайном билете Следовательно, соответствие между способами подъема и комбинациями отверстий взаимно однозначно. Если комбинации отверстий X соответствует способ подъема Y , то способу подъема Y соответствует комбинация отверстий X . Таким образом, отверстия в трамвайных билетах Бергенгоцпонта можно пробить столькими способами, сколькими Юлишка может подняться по лестнице с 12 ступеньками, соблюдая все условия предыдущей задачи (то есть перепрыгивая за 1 раз не более чем через 1 ступеньку), минус 1 «утраченная» возможность (соответствующая тому случаю, когда Юлишка поднимается по лестнице, наступая на все ступеньки подряд).

Итак, *отверстия пробиваемых компостером в трамвайных билетах в Бергенгоцпонте образуют 232 допустимые комбинации — меньше, чем в Будапеште.*

36. БУСЫ

Число способов, которыми можно нанизать на зеленую нитку 3 красные и 8 белых бусин, правильно определил Юшка (хотя и то, что сказал Шани, не лишено здравого смысла).

[Выясним прежде всего, каким образом у Шани могло получиться число 84. Шани явно «заимствовал» его из условия задачи 35, где, между прочим, сообщается, что при 3 отверстиях



Рис. 89.

компостер может пробить билет будапештского трамвая 84 способами. Три отверстия и 3 красные бусины действительно можно сопоставить друг другу. Но каким образом установить соответствие между 9 клетками, о которых идет речь в задаче 35, и 11 бусинами этой задачи?

Прежде чем нанизывать бусины на нитку, разумно прикинуть, как будут выглядеть бусы: если окажется, что две последовательности бус случайно совпали, то ошибку легко исправить (изменить расположение бусин в готовых бусах труднее).

Если какая-нибудь последовательность бусин чем-то не подходит (например, совпадает с другой последовательностью), то ее можно переделать, переставив на другие места красные бусины (рис. 89). Важно, чтобы в каждой из последовательностей бусин красные бусины находились на других местах (любые две последовательности должны отличаться положением по крайней мере одной красной бусины).

Сколько цепочек можно составить из 3 красных и 8 белых бусин? На скольких местах могут находиться красные бусины?]

1. Составить бусы можно следующим образом.

Прежде всего разложить в ряд на столе 8 белых бусин, а затем разместить 3 красные бусины так, чтобы всю последовательность бусин, если ее сочтут удачной, можно было нанизать на нитку.

Красные бусины можно поместить перед самой первой белой бусиной, между любыми двумя белыми бусинами и, наконец, после последней (девятой) белой бусины. Таким образом, красные бусины можно поместить в последовательности на любое из 9 мест (рис. 90), но при этом необходимо следить за тем, чтобы две красные бусины не оказались рядом.

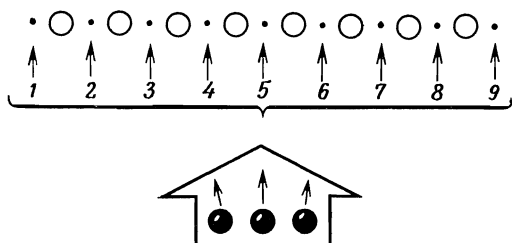


Рис. 90.

Подобранные по такому «рецепту» последовательности бус будут соответствовать всем требованиям, предъявляемым учительницей к правильно нанизанным бусам. Ясно, что он позволяет «сконструировать» любые бусы по желанию.

Последнее утверждение, если кто-нибудь усомнится в его правильности, можно доказать следующим образом. Возьмем

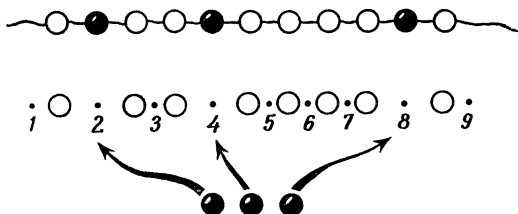


Рис. 91.

любые бусы, удовлетворяющие требуемому учительницей условию, положим их на стол, выдернем нитку и извлечем из образовавшейся последовательности бусин красные. У нас получится исходная последовательность, состоящая из 8 белых бусин, после чего нам останется лишь довершить составление новых бус по изложенному выше рецепту: «вкатить» красные бусины на прежние места и нанизать все бусины, не меняя их относительного расположения, на нитку. В результате мы получим исходные бусы, но нанизанные не как-нибудь, а по нашему рецепту (рис. 91).

Шани, по-видимому, полагал, что *распределить 3 красные бусины по 9 местам можно столькоими способами, сколько можно*

пробить компостером 3 отверстия в 9 расположенных в виде квадрата клетках билета будапештского трамвая (рис. 92). Таким образом, по мнению Шани, число возможных вариантов бус совпадает с числом всех возможных распределений трех отверстий по 9 клеткам (это число приведено в задаче 35) и равно 84.

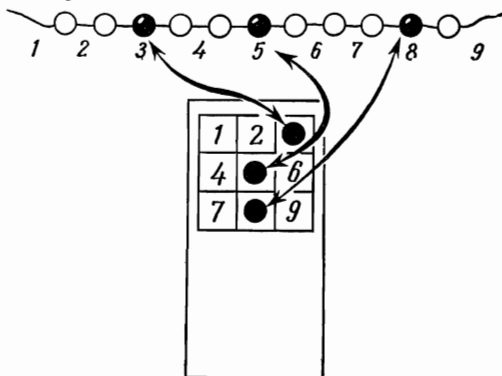


Рис. 92.

Верны ли приведенные выше рассуждения Шани?

2. Нет! Рассуждения Шани были бы верны, если бы не было все равно, какой конец нити считать правым, а какой — левым (например, если бы один конец нити был синим, а другой зеленым).

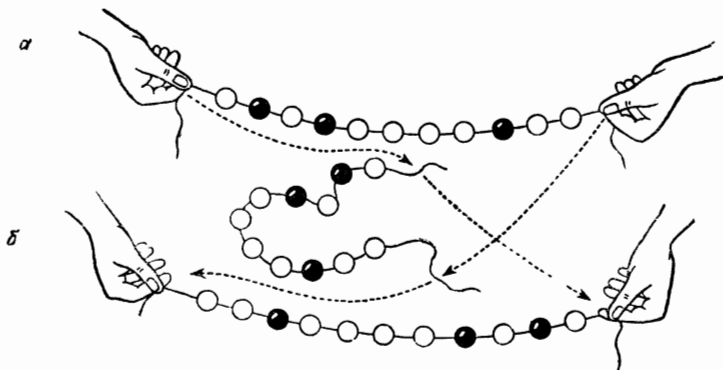


Рис. 93.

А поскольку это не так, то полученное им число различных вариантов бус, составленных по изложенному выше рецепту, следует уменьшить вдвое (поскольку мы не отличаем правый конец нити от левого). Действительно, если поменять местами правый и левый концы каких-нибудь бус, то сами бусы от этого не изменятся, только держать мы их будем иначе. На рис. 93 одни и те же бусы изобра-

жены в двух положениях. Если нанизывать бусы по изложенному выше рецепту, то бусы *a* следовало бы считать отличными от бус *b* (поскольку места для красных бусин всегда нумеруются слева направо).

Может быть, поэтому прав Золи? Не следует ли вместо числа 84 взять лишь его половину и считать, что существует 42 различных варианта бус?

3. Золи прав лишь отчасти. Дело в том, что по рецепту, которого мы придерживались при нанизывании бус, не все бусы получаются дважды: симметричные бусы, вид которых не изменится, если поменять правый и левый концы нити, можно получить лишь один раз.

Сколько существует симметричных бус?

В симметричных бусах одна красная бусина обязательно должна находиться посередине. (В противном случае число красных бу-

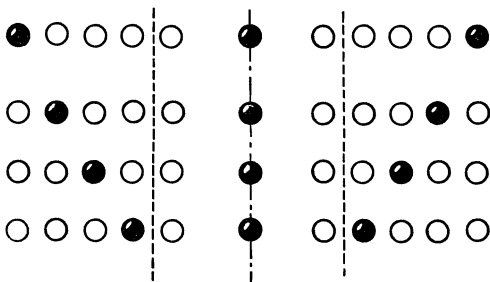


Рис. 94.

син в одной половине бус не совпадало бы с числом красных бусин в другой половине и симметрия была бы нарушена.) Две соседние бусины (первая справа и первая слева) по правилам должны быть белыми. Осталось по 4 бусины с каждой стороны. Одна из них красная, причем красные бусины расположены симметрично. Следовательно, всего существует 4 разновидности симметричных бус (рис. 94). (С каждой стороны для красной бусины можно выбрать одно из 4 свободных мест. После того как выбор произведен, необходимо другую красную бусину расположить симметрично первой относительно центральной красной бусины.)

Из 84 разновидностей бус, составленных по рецепту п. 1, 4 были симметричными. Каждая из них встречается лишь 1 раз. Остальные 80 разновидностей бус можно свести всего лишь к 40, каждая из которых сосчитана дважды: в «прямом» и в «обратном» положении. Таким образом, всего существует 44 разновидности бус — прав оказался Йошка.

[Но разве Йошка не мог ошибиться в какой-нибудь мелочи? Теперь волей-неволей ко всему станешь относиться подозрительно. Так ли безупречны рассуждения, в которых две разновидности бус считаются одинаковыми? Ведь если бусы одинаковы, то на местах с одинаковыми номерами в них должны находиться бусины одинакового цвета.

Скажем, что бусам *придана «линейная форма»*, если все последовательности бусин расположены одна под другой вдоль параллельных прямых. Две нитки бус, находящиеся в такой линейной форме, называются одинаковыми, если в обеих последовательностях бусин на местах с одинаковыми номерами находятся бусины одинакового цвета.

Каждой линейной форме бус соответствует одна (и только одна) последовательность бусин. Наоборот, каждой последовательности бусин соответствуют одна или две (но не больше) линейные формы. Наложить последовательность бусин на прямую можно лишь двумя способами: либо справа налево, либо слева направо. Эти два способа наложения порождают две линейные формы бус, либо различные, либо одинаковые. Обе линейные формы бус одинаковы, если последовательность бусин симметрична. Если же последовательность бусин несимметрична, то получаются две различные линейные формы бус.

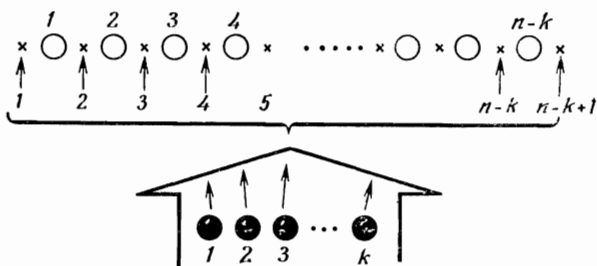


Рис. 95.

Таким образом, число различных последовательностей бусин мы найдем, прибавив к числу симметричных линейных форм бус половину числа несимметричных линейных форм бус.]

Примечание. Здесь уместно немного задержаться и сравнить некоторые детали решений трех последних задач.

Ясно, что Шани в действительности определил, сколько существует в Бергенгопенте трамвайных билетов с тремя пробитыми компостером отверстиями. Аналогичным образом можно найти и число трамвайных билетов «бергенгопентского образца» с 1, 2, 4, 5 и 6 отверстиями. (Два ответа очевидны заранее: существует 11 билетов с одним отверстием и 1 билет с шестью отверстиями. Во всех остальных случаях необходимо прибегнуть к методу Шани.) Чтобы не проводить рассуждения каждый раз заново, рассмотрим в общем случае, сколькими способами можно составить последовательность из n бусин, из которых k красные, а остальные белые, если две красные бусины не должны находиться рядом.

Метод Шани позволяет решить и эту более общую задачу. Выложив в ряд на стол $n-k$ белых бусин, мы получим $n-k+1$ мест для красных бусин (рис. 95). Выстроить все n бусин в допустимые последовательности нам удастся столькими способами, сколькими можно распределить r бусин по $n-k+1$ местам. Это

число называется «числом сочетаний из $n - k + 1$ по r » и имеет специальное обозначение $\binom{n - k + 1}{r}$, или $C_{n - k + 1}^r$ (доказательства мы приводить не будем). Известно, что

$$\binom{n - k + 1}{r} = \frac{(n - k + 1)(n - k)(n - k - 1) \dots (n - 2k + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

[В знаменателе правой части стоит произведение натуральных чисел от 1 до k , а в числителе — произведение k последовательных натуральных чисел, последнее (наибольшее) из которых равно $n - k + 1$.]

Разбив трамвайные билеты бергенгопнтского образца на группы по числу отверстий, пробиваемых компостером, и суммируя количество билетов в отдельных группах, находим:

$$\begin{aligned} & \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \binom{9}{3} + \binom{8}{4} + \binom{7}{5} + \binom{6}{6} = \\ &= \frac{11}{1} + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \\ &+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1 = 232. \end{aligned}$$

В решении задачи 35 было показано, что трамвайные билеты бергенгопнтского образца с 11 отверстиями можно поставить во взаимно однозначное соответствие со способами, которыми Юлишка могла взбираться по лестнице с 12 ступеньками. Нетрудно видеть, что *выписанные выше числа соответствуют способам подъема, при которых Юлишка перепрыгивает через 1, 2, 3, 4, 5 и 6 ступенек* (разумеется, не подряд, а за весь подъем). Тем самым мы получаем еще одно решение задачи 35. Прежнее решение гораздо сложнее, но этот его недостаток восполняется обилием тех частичных «путных» результатов, к которым оно приводит.

В заключение мы хотели бы отметить, что в 1970 г. на математической олимпиаде для школьников имени Йозефа Кюршака решение одной из задач¹ по существу сводилось к подсчету числа способов, которыми можно извлечь 5 номеров лото из 90 так, чтобы среди них не было двух последовательных чисел. Из приведенных выше рассуждений следует, что это можно сделать

$$\binom{86}{5} = \frac{86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

способами. Столькими же способами Юлишка могла бы избежать по лестнице с 91 ступенькой, если бы перепрыгивать через 1 ступеньку ей разрешалось ровно 5 раз. (Осуществлять столь большое число «восхождений» на столь длинную лестницу не рекомендуется!)

¹ См. задачу 209 в книге Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани, Венгерские математические олимпиады, изд-во «Мир», М., 1975, — *Прим. перев.*

37. БРАСЛЕТ ИЗ БУС

Евочка подала девочкам удачную мысль — сделать из бус браслеты, но *отнюдь не все браслеты получатся различными: из разных бус могут получиться одинаковые браслеты*. Например, бусы, изображенные на рис. 96, заведомо неодинаковы, но стоит лишь связать нитку, как все они превращаются в один и тот же браслет — такой же, как у Евочки.

[Проще всего это можно проверить, если нарисовать по кругу маленькие кружки («бусины») и, начав с точки, которая

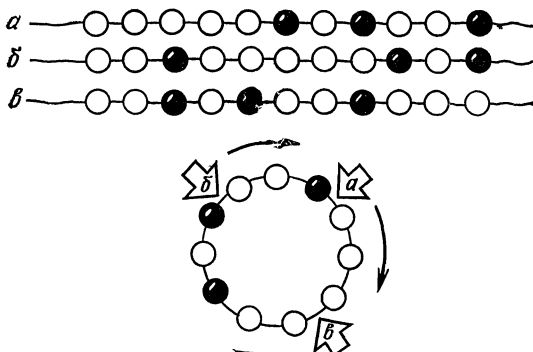


Рис. 96.

указана стрелкой, помеченной соответствующей буквой, обойти весь «браслет» по часовой стрелке. Три последовательности бусин будут точно такими же, как и в трех бусах (если перебирать бусины слева направо).]

38. БРАСЛЕТЫ

[Решение задачи можно было бы свести к подсчету числа девочек, посещающих занятия кружка «Умелые руки», у которых получатся одинаковые браслеты, но такой подход был бы сложен. Попробуем подсчитать число различных браслетов более прямым (а значит, и более быстрым) способом.

Необходимо соблюдать осторожность. Если браслет перевернуть и рассматривать «с другой стороны» (например, поднести к зеркалу), то сам браслет от этого, очевидно, не изменится. Поэтому нам необходимо придумать какую-нибудь метку, по которой один браслет можно было бы отличать от другого. В качестве такой метки удобно использовать, например, самую короткую последовательность белых бус.]

Действительно, 3 красные бусины разбивают браслет на 3 части. Условимся в дальнейшем называть их для краткости «дугами». Самой короткой дугой по определению считается та, которой принадлежит наименьшее число белых бусин.

Меньше всего белых бусин принадлежит той дуге, которая не содержит ни одной бусины. Такой случай может представиться, если на обоих концах той нитки бус, из которой сделан браслет, нахо-

дятся красные бусины. Поскольку никаким другим способом две красные бусины очутиться рядом не могут, то существует лишь одна-единственная кратчайшая дуга, не содержащая ни одной белой бусины («пустая»).

Число белых бусин, принадлежащих кратчайшей дуге, не превышает двух. Действительно, если бы это число достигало трех, то

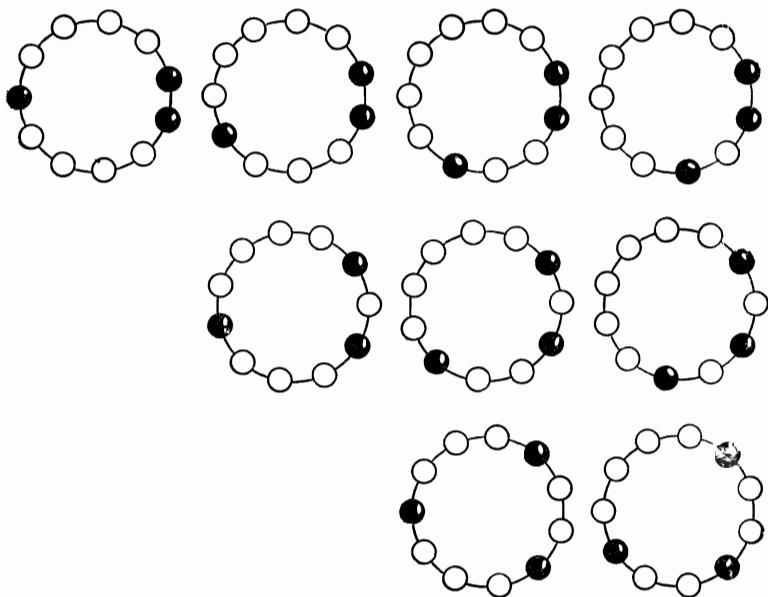


Рис. 97.

двум другим дугам, каждая из которых содержит по крайней мере по одной белой бусине, должно было бы принадлежать не менее 9 белых бусин, в то время как их всего лишь 8.

Зная это, нетрудно перечислить все возможные случаи распределения белых бусин по дугам.

Число белых
бусин на
кратчайшей
дуге

Число белых
бусин на двух
остальных дугах

0

1, 7
2, 6
3, 5

1

4, 4
1, 6
2, 5

2

3, 4
2, 4
3, 3

Все 9 браслетов изображены на рис. 97. Нельзя сказать, чтобы их было много.

[Мы видели, что приведенный нами перечень браслетов полон — других браслетов не существует. Ясно также, что эти 9 браслетов попарно различны, поскольку

а) если у двух браслетов кратчайшие дуги содержат различное число белых бусин, то такие браслеты нельзя считать одинаковыми;

б) если у двух браслетов кратчайшие дуги содержат по одинаковому числу белых бусин, то они отличаются более длинными дугами и, следовательно, их все равно нельзя считать одинаковыми.]

Часть III

39. СОРОКА-ВОРОВКА

[В условиях задачи указано, сколько из похищенных сорокой монет было мелких (достоинством в один или несколько филлеров) и сколько — крупных (достоинством не менее 1 форинта). Следовательно, мы могли бы попытаться установить, какая часть из 13 форинтов 40 филлеров была в мелких монетах. Если бы наш план удалось осуществить, то исходная задача свелась бы к двум более простым независимым задачам.]

Поскольку «крупными» монетами можно набрать лишь целое число форинтов, то мелочи (монет достоинством менее 1 филлера) сорока могла украсть на сумму либо 40 филлеров, либо 1 форинт 40 филлеров, либо 2 форинта 40 филлеров и так далее.

В действительности «продолжения» за суммой 2 форинта 40 филлеров не следует, поскольку наибольшая сумма, которую можно набрать мелочью, равна 2 форинтам 50 филлерам: 5 монет по 50 филлеров. Эту максимальную сумму нельзя понизить до 2 форинтов 40 филлеров, потому что при замене всего лишь одной монеты достоинством в 50 филлеров сумма уменьшится по крайней мере на 30 филлеров (50—20).

Аналогичным образом сорока не могла украсть мелочи лишь на сумму 40 филлеров, поскольку наименьшая сумма, которую можно набрать мелочью, составляет $5 \cdot 10 = 50$ филлеров. Остается единственная возможность:

монет достоинством менее 1 форинта («мелочи») сорока могла похитить лишь на сумму 1 форинт 40 филлеров.

Выясним теперь, из каких монет составлена эта сумма. Монетами достоинством менее 50 филлеров можно было бы набрать не более 1 форинта (5·20). Следовательно, среди похищенных сорокой мелких монет должно быть не менее двух монет *достоинством в 50 филлеров*. Действительно, если лишь одну из 5 монет досто-

инством в 20 филлеров заменить монетой достоинством в 50 филлеров, то мелочи наберется всего лишь на 1 форинт 30 филлеров (вместо прежней суммы в 1 форинт). Ясно также, что монет достоинством в 50 филлеров *не может быть более двух* ($3 \cdot 50 > 140$). Но условия «не менее двух» и «не более двух», взятые вместе, означают «ровно 2». Следовательно, среди похищенных сорокой мелких монет *2 монеты должны быть по 50 филлеров*. Ясно, что набрать недостающие *40 филлеров тремя монетами достоинством либо в 10, либо в 20 филлеров можно лишь единственным способом: $20 + 10 + 10$* .

Пятью монетами достоинством не менее 1 форинта сорока похитила на сумму $13,40 - 1,40 = 12$ форинтов. Монеты достоинством в 10 форинтов среди украденных сорокой быть не может, поскольку 2 недостающих форинта можно было бы набрать не более чем двумя монетами и общее число «крупных» монет достигло бы лишь 3. Монет достоинством в 5 форинтов также не может быть более одной. В то же время одна пятифоринтовая монета непременно должна быть, поскольку для того, чтобы набрать 12 форинтов монетами достоинством в 1 и 2 форинта, понадобилось бы не менее шести монет.

Следовательно, среди похищенных сорокой крупных монет могла быть лишь *1 пятифоринтовая монета*. Осталось 4 монеты на сумму $12 - 5 = 7$ форинтов. Нетрудно убедиться в том, что набрать 7 форинтов четырьмя монетами достоинством в 1 и 2 форинта можно лишь единственным способом: *если взять 1 монету достоинством в 1 форинт и 3 двухфоринтовые монеты*.

Итак, подведем итог. Условия задачи позволяют однозначно восстановить «картину преступления». Сорока похитила

- 1 монету достоинством в 5 форинтов,*
- 3 монеты достоинством в 2 форинта,*
- 1 монету достоинством в 1 форинт,*
- 2 монеты достоинством в 50 филлеров,*
- 1 монету достоинством в 20 филлеров,*
- 2 монеты достоинством в 10 филлеров.*

40. КРАЖИ ПРОДОЛЖАЮТСЯ

Мелочи сорока могла похитить на сумму не менее 1 форинта и не более 3 форинтов (6·50), то есть на сумму либо 1, либо 2, либо 3 форинта. Отдать предпочтение какой-нибудь одной из этих трех возможностей мы пока не в состоянии. Поэтому обратимся к другой части задачи и постараемся выяснить, на какую сумму были похищены монеты достоинством не менее 1 форинта.

Поскольку монет достоинством в 1 форинт было больше, чем пятифоринтовых, то среди похищенных сорокой крупных монет заведомо была *по крайней мере одна монета достоинством в 1 форинт*. Остальных монет должно быть на сумму 11, 12 или 13 форинтов (рис. 98).

Из условий задачи следует, что на каждую десятифоринтовую монету должна приходиться по крайней мере 1 двухфоринтовая монета. Каждая такая пара дает 12 форинтов, а вместе с двумя остальными монетами набирается по крайней мере 14 форинтов, что слишком много («перебор»). Следовательно, *среди украденных*

сорокой монет достоинством не менее 1 фори́нта не может быть десятифоринтовой монеты.

Наоборот, по крайней мере одна пятифоринтовая монета непременно должна быть среди похищенных, поскольку в противном случае четырьмя оставшимися монетами нельзя было бы набрать сумму 11 фори́нтов (4·2 составляет лишь 8 фори́нтов). Но по условиям задачи на каждую пятифоринтовую монету должно приходится не менее одной монеты достоинством в 1 фори́нт (поскольку



Рис. 98.

монет достоинством в 1 фори́нт должно быть больше, чем пятифоринтовых). Следовательно, остаются неизвестными лишь 2 монеты достоинством не менее 1 фори́нта на сумму 5, 6 или 7 фори́нтов (рис. 99). Для того чтобы «концы сошлись с концами», одна из них должна быть пятифоринтовой (поскольку в противном случае двумя монетами можно было бы набрать лишь не более $2 \cdot 2 = 4$ фори́нтов), а другая — еще одной монетой достоинством в 1 фори́нт. Тем самым весь набор из пяти монет достоинством не менее 1 фори́нта полностью определен.



Рис. 99.

Поскольку монет достоинством не менее 1 фори́нта сорока похитила на сумму 13 фори́нтов ($3 \cdot 1 + 2 \cdot 5$), то мелочи ею украдено на сумму 2 фори́нта. Набрать эту сумму можно лишь одним-единственным способом: $3 \cdot 50 + 2 \cdot 20 + 10$.

(На этот раз мы не доказываем подробно, почему 2 фори́нта мелочью можно набрать лишь одним способом, поскольку все рассуждения были бы аналогичны приведенным выше: монет достоинством в 50 филлеров должно быть не менее и не более трех, а все остальное ясно.)

Итак, 15 фори́нтов сорока могла похитить лишь одним-единственным способом, утащив

- 2 монеты достоинством в 5 фори́нтов,
- 3 монеты достоинством в 1 фори́нт,
- 3 монеты достоинством в 50 филлеров,
- 2 монеты достоинством в 20 филлеров,
- 1 монету достоинством в 10 филлеров.

41. ОДНО ЛИ И ТО ЖЕ?

Нет, утверждения (1) и (2) не эквивалентны: утверждение (2) следует из утверждения (1), но не наоборот — утверждение (1) не следует из утверждения (2).

Действительно, предположим, что некоторая сумма денег выплачена наименьшим числом купюр. Это означает, что ни одну из них нельзя разменять другими купюрами, поскольку если бы такой размен был возможен, то ту же сумму кассир мог бы выплатить большим числом купюр.

Однако может представиться такой случай, когда нельзя разменять ни одну из купюр, но определенную сумму денег тем не менее можно будет выплатить не наименьшим числом купюр. Пусть, например, требуется выплатить 110 форинтов. Кассир может выдать эту сумму одной купюрой в 50 форинтов и тремя купюрами по 20 форинтов. Ясно, что разменять 50 форинтов двадцатифоринтовыми купюрами невозможно. Однако это отнюдь не означает, что 110 форинтов выплачены наименьшим числом купюр: ту же сумму вместо четырех купюр можно выплатить всего лишь двумя купюрами (одной достоинством в 100 форинтов и одной достоинством в 10 форинтов).

[Против этого аргумента можно возразить, сославшись на то, что дядюшка Янош не мог получать 110 форинтов — слишком маленькая сумма. Прибавив к 110 форинтам 5 банкнотов по 500 форинтов, мы (сохранив наш аргумент в силе) доведем зарплату дядюшки Яноша до более правдоподобной величины — 2610 форинтов.]

42. «ЭКОНОМНАЯ» ВЫПЛАТА

Нет, такой уверенности нет и не может быть.

Более того, скорее можно быть уверенным в обратном. Действительно, весьма вероятно, что, услышав просьбу Эгона Берга, кассир выдаст ему сначала 2 монеты достоинством в 10 дукатов (поскольку монет большего достоинства в обращении нет), затем 2 монеты достоинством в 2 дуката и 1 монету достоинством в 1 дукат. Всего при таком способе выплаты Эгон Берг получит 5 монет.

Если же кассир проявит некоторую изобретательность, то начнет выплату с монет достоинством не в 10, а в 8 дукатов и, выдав Эгону Бергу 3 такие монеты, добавит к ним еще одну монету достоинством в 1 дукат. Для выплаты всей суммы на этот раз потребуется лишь 4 монеты.

Таким образом, если просьбу Эгона Берга понимать (как это сделал кассир в первом случае) в том смысле, что всякий раз необходимо брать монету «самого большого достоинства, какое только возможно», следя лишь затем, чтобы не превзойти требуемую сумму, то число монет не обязательно окажется наименьшим. Минимальность числа монет гарантируется лишь в том случае, если кассир (именно так он и поступил во втором варианте выплаты 25 дукатов) максимизирует, то есть сделает наибольшей, *среднюю величину* (отношение подлежащей выплате суммы к числу монет) достоинства тех монет, которыми производится выплата. Число монет при таком способе выплаты действительно достигает минимума,

поскольку при заданном числителе (подлежащей выплате сумме денег) величина отношения принимает наибольшее значение, когда знаменатель (число монет) имеет наименьшее значение.

Примечание 1. Проблема по существу заключалась в том, что просьба Эгона Берга (о выплате 25 дукатов «монетами самого большого достоинства, какое только возможно») допускала *неоднозначное толкование*. В одном случае кассир должен был бы всякий раз выбирать из имеющихся в кассе денег монету наибольшего достоинства и следить лишь за тем, чтобы не превзойти подлежащую выплате сумму. В другом случае кассиру необходимо было бы произвести выплату так, чтобы среднее достоинство выданных им монет приняло наибольшее из возможных значений. Результаты и в том, и в другом случае были бы одинаковыми, если бы речь шла о денежной системе, принятой в Венгрии, но в задаче речь шла о денежной системе Бергенгоции, и результаты, как мы видели, оказались различными.

Строго говоря, просьба Эгона Берга, пожелавшего получить причитающуюся ему сумму в монетах «самого большого достоинства, какое только возможно», допускает не только те два толкования, которые приведены выше. Вполне допустима, например, такая интерпретация: самые мелкие из монет, которыми будет выплачена сумма 25 дукатов, должны иметь как можно большее достоинство.

Выбор того или иного толкования не является, строго говоря, математической задачей. Поэтому предлагаемая вниманию читателя задача нуждается в «доработке» и станет чисто математической задачей лишь после того, как будет уточнено, в каком смысле надлежит понимать просьбу Эгона Берга. Однако, чтобы заметить отсутствие точного, однозначного определения того или иного понятия, необходимо математическое мышление.

Примечание 2. Нетрудно видеть, что в рамках той денежной системы, о которой говорится в условиях задачи, сумму 25 бергенгоцийских дукатов нельзя выплатить менее чем четырьмя монетами. Выплатить 25 дукатов ровно четырьмя монетами можно лишь так, как указано в приведенном выше решении (три монеты достоинством в 8 дукатов и одной монетой достоинством в 1 дукат). Доказательство этих утверждений мы предоставляем читателю.

Примечание 3. Первый способ (при котором всякий раз выплачивается монета «самого большого достоинства, которое только возможно», лишь бы не была превзойдена подлежащая выплате сумма) позволяет единственным образом выплачивать любую сумму в любой денежной системе. Однако если при выплате суммы стремиться к наибольшему среднему достоинству выдаваемых кассиром монет, то требуемую сумму не всегда оказывается возможным выплатить единственным образом. (Существующая в Венгрии денежная система позволяет единственным образом выплачивать любую сумму, однако другие денежные системы не обязательно обладают этим же свойством.) Не обладает им и бергенгоцийская денежная система, о которой говорится в задаче. Например, выплатить 32 дуката в ней можно не менее чем четырьмя монетами (трех монет недостаточно, поскольку не существует монет, достоинство которых превышало бы 10 дукатов, а тремя такими монетами можно выплатить лишь сумму в 30 дукатов), но ровно четырьмя монетами 32 дуката можно выплатить двумя способами: $3 \cdot 10 + 2 \cdot 1$ или $4 \cdot 8$.

Примечание 4. То, что оба приведенных выше толкования просьбы Эгона Берга о выплате причитающейся ему суммы монетами «самого большого достоинства, какое только возможно» (при первом толковании кассир каждый раз выплачивает монету наибольшего достоинства и следит лишь за тем, чтобы не превзойти подлежащую выплате сумму, при втором доводит до наибольшего значения среднее достоинство выплачиваемых монет), в принятой в Венгрии денежной системе приводят к одинаковым результатам, представляется естественным. Однако строгое доказательство этого утверждения не просто. Мы не будем приводить его здесь, предоставляя желающим найти его самостоятельно.

В этой связи возникает гораздо более интересный вопрос о том, в каких денежных системах эти два способа выплаты приводят к различным и в каких — к одинаковым результатам. На эту тему заинтересованный читатель сам мог бы придумать не одну задачу.

43. ДЕНЕЖНАЯ РЕФОРМА В БЕРГЕНГОЦИИ

1 решение.

[Задача не из легких. Если утверждение задачи верно, то необходимо доказать, что оно одновременно выполняется для *всех целых чисел*, то есть что любую целую сумму (за исключением сумм в 1, 2, 4 и 7 талеров, при выплате которых понадобится сдача) можно выплатить монетами достоинством в 3 и 5 талеров. Если утверждение задачи неверно, то необходимо найти какое-нибудь целое число, для которого оно не выполняется, то есть указать сумму денег, которую *никаким способом нельзя выплатить* монетами достоинством в 3 и 5 талеров (или, если речь идет о суммах в 1, 2, 4 и 7 талеров, что их нельзя выплатить ни со сдачей, ни без сдачи).

Впрочем, напрасно мы стали бы подыскивать контрпримеры, опровергающие утверждение задачи. Какое бы целое число мы ни взяли, после более или менее продолжительных попыток непременно выяснится, что равную ему сумму талеров можно выплатить монетами достоинством в 3 и 5 талеров. Это свидетельствует о том, что утверждение задачи должно быть верным.

Однако, прежде чем приступать к доказательству этого утверждения для общего случая, разумно проверить его на первых натуральных числах.]

Выплатить 1 талер можно, например, дав 2 монеты достоинством в 3 талера и получив сдачу — 1 монету достоинством в 5 талеров. Кратко этот способ выплаты можно записать так:

$$1 = 2 \cdot 5 - 3.$$

Аналогичным образом 2 талера можно выплатить, дав монету достоинством в 5 талеров и получив сдачу монетой в 3 талера:

$$2 = 5 - 3,$$

а 3 талера — одной монетой.

Сумму в 4 талера можно выплатить, представив ее как «дважды» два талера:

$$4 = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3,$$

5 талеров — одной монетой, 6 талеров — как «дважды три» талера:

$$6 = 2 \cdot 3.$$

Сумму в 7 талеров можно сначала представить в виде $7 = 4 + 3$, выплатить 4 талера так, как указано выше, а затем до-
бавить еще одну монету достоинством в 3 талера. Но можно воспользо-
ваться и другим способом:

$$7 = 2 \cdot 5 - 3.$$

Сумму в 8 талеров можно уплатить как «два раза по 4 тале-
ра»: $8 = 4 \cdot 5 - 4 \cdot 3$, но это не слишком удобно. Гораздо проще
выплатить 8 талеров без сдачи:

$$8 = 5 + 3.$$

[Дойдя до 8 талеров, мы достигли важного рубежа: по ут-
верждению задачи, при выплате любого целого числа талеров,
начиная с 8, всегда можно обойтись *без сдачи*.

Поскольку указанным образом нам все равно не удастся
установить возможность выплаты для каждого целого числа
талеров в отдельности, необходимо, начиная с некоторого числа,
подметить некую общую зависимость и доказать, что она вы-
полняется для всех последующих чисел. Иначе говоря, необхо-
димо доказать, что если некоторое целое число талеров можно
выплатить (разумеется, без сдачи) монетами достоинством в 3
и 5 талеров, то монетами того же достоинства удастся выпла-
тить и на единицу большее число талеров.

Предположим, что мы выложили на стол сумму в n тале-
ров, но выяснилось, что нам необходимо выплатить не n , а
 $n + 1$ талеров. Каким образом увеличить лежащую на столе
сумму денег на 1 талер, если монет достоинством в 1 талер в
Бергенгоции не существует?

Заметим, что число 1 можно представить в виде

$$1 = 2 \cdot 3 - 5.$$

Следовательно, если взять со стола одну монету достоинством
в 5 талеров, а вместо нее положить две монеты достоинством в
3 талера, то мы достигнем желаемого.

Все это так, но как быть, если в груде лежащих на столе
монет, которыми мы выплатили сумму в n талеров, не най-
дется ни одной монеты достоинством в 5 талеров? (Например,
при $n = 9$ на столе будет лежать «груда» из трех монет до-
стоинством в 3 талера, а при $n = 18$ «груда» из шести монет
того же достоинства.) Выход из подобного затруднения нам
подсказывает другое представление числа 1:

$$1 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3.$$

Выложенную на стол сумму денег можно увеличить на 1 та-
лер, если взять со стола 3 монеты достоинством в 3 талера и
вместо них положить 2 монеты достоинством в 5 талеров.

А как быть, если среди лежащих на столе монет не най-
дется ни трех монет в 3 талера, ни одной монеты в 5 талеров?
Так может произойти лишь в том случае, если на столе лежат
не более двух монет достоинством в 3 талера.

Если рядом с ними положить еще одну монету, то на столе окажется либо по крайней мере три монеты достоинством в 3 талера, либо одна монета достоинством в 5 талеров. (Следовательно, подлежащая выплате сумма должна быть больше 6 талеров. Она не может быть равной 7 талерам, поскольку 7 талеров невозможно «выложить на стол», не взяв сдачи. Таким образом, подлежащая выплате сумма должна составлять не меньше 8 талеров.)]

Итак, мы выяснили следующее.

Если на стол выложена любая сумма *не меньше 8 талеров*, то в «куче денег» на столе находятся:

а) либо одна монета достоинством в 5 талеров,

б) либо по крайней мере три монеты достоинством в 3 талера.

В случае а мы берем со стола 1 монету достоинством в 5 талеров и кладем вместо нее 2 монеты достоинством в 3 талера.

В случае б мы берем со стола 3 монеты достоинством в 3 талера и кладем вместо них 2 монеты достоинством в 5 талеров.

И в том и в другом случае мы можем, обходясь только своими монетами, выложить на стол сумму, которая на 1 талер превышает предыдущую, то есть, не требуя сдачи, увеличить лежащую на столе сумму на 1 талер.

После того как нам удастся выложить на стол без сдачи 8 талеров, мы, пользуясь (за неимением другого) изложенным выше методом, то есть производя попеременно то операцию а, то операцию б, можем увеличивать ее до тех пор, пока не будет достигнуто *любое заранее заданное значение*. Таким образом, утверждение бергенгоцкского историка было верным.

Примечание. Приведенные выше рассуждения принадлежат к числу так называемых «*доказательств существования*». Цель их состояла в том, чтобы доказать существование способа, позволяющего производить выплаты тех или иных денежных сумм. Но хотя *принципиальная* возможность выплатить любую сумму денег доказана, осуществить выплату указанным выше способом довольно трудно. Например, если бы нам потребовалось выплатить без сдачи 49 талеров, то мы должны были бы действовать следующим образом. Сначала выложить на стол $8 = 3 + 5$ талеров (то есть одну монету достоинством в 3 талера и одну монету достоинством в 5 талеров), а затем поочередно выкладывать на стол одни и забирать со стола другие монеты. На столе поочередно оказывались бы следующие монеты:

Число монет достоинством в 3 талера	Число монет достоинством в 5 талеров	Общая сумма в талерах
1	1	8
3	0	9
0	2	10
2	1	11
4	0	12
1	2	13

и так далее.

Ясно, что, действуя таким образом, мы в конце концов *непременно* дойдем до суммы 49 талеров, но предварительно нам предстоит проделать довольно большое число подготовительных операций. На практике было бы *гораздо удобнее* пользоваться *каким-нибудь более простым методом*. Непосредственное отношение к этому вопросу имеет задача 48.

II (короткое) решение.

Суммы от 1 до 10 талеров выплачиваются так же, как в I решении. Поскольку любое натуральное число n при делении на 3 дает в остатке либо (I) 0, либо (II) 1, либо (III) 2, то соответствующие значения n можно представить в виде либо (I) $n = 3k$, либо (II) $n = 3k + 1$, либо (III) $n = 3k + 2$. Следовательно, если $n > 10$, то

в I случае $n - 9 = 3k - 9 = 3(k - 3)$,

во II случае $n - 10 = 3k + 1 - 9 = 3k - 9 = 3(k - 3)$,

в III случае $n - 8 = 3k + 2 - 8 = 3k - 6 = 3(k - 2)$.

Таким образом, во всех трех случаях мы получаем целые положительные числа, кратные 3.

Следовательно, выплатив

в I случае 9 талеров,

во II случае 10 талеров,

в III случае 8 талеров

и добавив соответствующее число монет достоинством в 3 талера, мы получаем возможность выплатить n талеров при любом натуральном n .

44. ДРУГОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Обратим внимание на то, что новый проект денежной системы «унаследовал» от старой системы монеты достоинством в 5 талеров и лишь монеты достоинством в 3 талера заменены в нем монетами достоинством в 8 талеров.

I. Первое утверждение автора нового проекта очевидно.

Действительно, поскольку $3 = 8 - 5$, то, если разрешить выплаты со сдачей, никаких проблем не возникнет: в любой сумме, допускающей выплату монетами достоинством в 3 и 5 талеров, достаточно заменить каждую монету достоинством в 8 талеров и взять «лишнюю» монету достоинством в 5 талеров.

II. Второе утверждение автора нового проекта также верно, хотя и не очевидно.

[Из I следует, что «прибавку» в 1 талер, представленную в решении предыдущей задачи в двух видах:

$$1 = 2 \cdot 3 - 5,$$

$$1 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3,$$

можно преобразовать в два новых «рецепта»:

$$\begin{aligned} * \quad & \left\{ \begin{aligned} 1 &= 2 \cdot 3 - 5 = 2(8 - 5) - 5 = 2 \cdot 8 - 2 \cdot 5 - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5, \\ * \quad & 1 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 2 \cdot 5 - 3(8 - 5) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5 = 5 \cdot 5 - 3 \cdot 8. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Таким образом, новые рецепты позволяют увеличивать на 1 талер имеющуюся сумму денег. Но нас сейчас интересует выплата без сдачи, поэтому необходимо установить, в каких слу-

чаях из «выложенной на стол» суммы денег можно извлечь 5 монет достоинством в 5 талеров или 3 монеты достоинством в 8 талеров.

Мы заведомо сможем продолжать выплаты без сдачи, начиная с такой суммы денег, которую

1) можно выплатить без сдачи монетами достоинством в 5 и 8 талеров, причем так, чтобы было по крайней мере 3 монеты одного достоинства (либо в 5, либо в 8 талеров);

2) заведомо нельзя выплатить без сдачи, не выложив предварительно на стол по крайней мере трех монет достоинством в 5 талеров или по крайней мере трех монет достоинством в 8 талеров.

Условию 2 заведомо удовлетворяют

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 26$$

талеров и любые более крупные суммы (но число 26 не удовлетворяет условию 1). То же самое можно сказать и о числе 27 (проверку последнего утверждения мы предоставляем читателю). Зато число 28 удовлетворяет обоим условиям!

$$28 = 8 + 4 \cdot 5.$$

Таким образом, монеты достоинством в 5 и 8 талеров позволяют выплатить 28 талеров без сдачи. Начиная с 28 талеров для всех более крупных сумм справедливо следующее утверждение: если монеты достоинством в 5 и 8 талеров позволяют выплатить без сдачи некоторое целое число талеров, то монетами тех же двух достоинств можно выплатить и на 1 большее число талеров. Сделать это можно, взяв либо 2 монеты достоинством в 8 талеров вместо 3 монет достоинством в 5 талеров, либо 5 монет достоинством в 5 талеров вместо 3 монет достоинством в 8 талеров. При этом монет одного из двух достоинств (либо в 5, либо в 8 талеров) заведомо должно быть не меньше трех, поскольку в противном случае сумма не превысит $2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 26$ талеров.

45. СПОР ПРОДОЛЖАЕТСЯ

[На чем был основан утвердительный ответ предыдущей задачи?

На том, что *новую денежную единицу можно было представить в виде суммы двух старых*: $8 = 3 + 5$. Это позволило заменить старую денежную единицу, «вышедшую из употребления», разностью двух новых единиц: $3 = 8 - 5$.]

Утверждение верно во всех трех случаях.

1. От денежных единиц, предложенных в предыдущей задаче (монет достоинством в 5 и 8 талеров), к денежным единицам, предлагаемым автором проекта А, можно перейти так же, как мы перешли от 3 и 5 к 5 и 8, то есть представить новые денежные единицы в виде 8 и $8 + 5 = 13$. Это позволит заменить «вышедшую из употребления» денежную единицу разностью двух новых денежных единиц:

$$5 = 13 - 8.$$

Пользуясь этим соотношением, мы сможем вывести из рецептов *, приведенных в решении предыдущей задачи, новые рецепты

(представления единицы) и затем установить наименьшее число, удовлетворяющее условиям 1, и 2, приведенным там же. Аналогичным образом можно показать, что, начиная с этого числа, любую сумму можно будет выплачивать новыми монетами без сдачи. (Подобные вычисления мы предоставляем читателю.)

II. Если относительно монет любых двух достоинств в a и b ($a < b$) талеров доказано, что они, начиная с некоторой суммы, позволяют выплатить без сдачи любое целое число талеров, то, повторив рассуждения, приведенные в I части решения, можно доказать, что то же самое можно утверждать и относительно монет достоинством в b и $a + b$ талеров.

Следовательно, утверждение останется верным и в том случае, если мы рассмотрим денежную систему, в которой за основные единицы выбраны любые два последовательных числа Фибоначчи. (Напомним, что числа Фибоначчи

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

были получены в конце примечания 1 к решению задачи 34.) Таким образом, утверждение задачи выполняется для любой пары чисел: 8 и 13, 21 и 34, 144 и 233, что и требовалось доказать.

46. НОВЫЕ ЧИСЛА

Ни об одном из трех проектов денежной системы Г, Д и Е этого сказать нельзя.

Начнем с проекта Г. Монета достоинством в 8 талеров допускает размен на 4 монеты достоинством в 2 талера. Следовательно, если бы утверждение автора проекта (о том, что любое целое число талеров можно выплатить монетами достоинством в 2 и 8 талеров) было верно, то любое целое число талеров можно выплатить «мелкими» монетами достоинством в 2 талера. Но это заведомо неверно: монетами достоинством в 2 талера можно выплатить лишь четное число талеров. Разрешается ли при этом получать сдачу, здесь несущественно.

Аналогично обстоит дело и с проектом Д: монетами достоинством в 3 и 21 талер можно выплачивать лишь число талеров, кратное 3 (то есть делящееся на 3 без остатка).

Случай Е лишь на первый взгляд кажется более сложным. Действительно, поскольку

$$21 = 7 \cdot 3$$

и

$$144 = 48 \cdot 3,$$

то и монету достоинством в 21 талер, и монету достоинством в 144 талера можно было бы разменять монетами достоинством в 3 талера (специально начеканив их для такого случая). Следовательно, если бы любое целое число талеров можно было выплатить монетами достоинством в 21 и 144 талера, то его можно было бы выплатить и монетами «специального выпуска» достоинством в 3 талера. Но это заведомо неверно. Следовательно, денежные единицы, предусмотренные проектом Е, позволяют выплачивать лишь любое число талеров, делящееся на 3.

Примечание. Установить непригодность всех трех пар «денежных единиц» можно было бы сразу, если заметить, что числа 2 и 8 делятся на 2, а числа 3 и 21, так же как и числа 21 и 144, делятся на 3. Математическая «подоплека» во всех трех случаях одинакова. В «очищенном» виде ее можно сформулировать так: *если 2 целых числа имеют общий делитель, который больше 1, то монетами двух достоинств, совпадающих с этими числами, невозможно выплатить (да к тому же без сдачи) любое целое число талеров.*

47. НЕОЖИДАННЫЙ ПОВОРОТ

Верно.

Основную идею решения можно заимствовать из задач 43 и 44. После сравнительно небольшого числа попыток мы без труда установим, что, «выложив на стол» 3 мелкие монеты достоинством в 4 талера и «взяв со стола» 1 монету достоинством в 11 талеров, мы сможем увеличить выплаченную («выложенную на стол») сумму на 1 талер. То же самое произойдет, если сначала выложить 3 монеты достоинством в 11 талеров, а затем забрать 8 монет достоинством в 4 талера.

Поскольку

$$\begin{array}{l} \text{и} \quad 3 \cdot 4 - 1 \cdot 11 = 1 \\ \quad \quad 3 \cdot 11 - 8 \cdot 4 = 1, \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3 \cdot 4 - 1 \cdot 11 = 1 \\ 3 \cdot 11 - 8 \cdot 4 = 1 \end{array}} \right\} \quad (*)$$

то, умножив обе части каждого равенства на k , мы придем к соотношениям

$$3k \cdot 4 - k \cdot 11 = k$$

$$\text{и} \quad 3k \cdot 11 - 8k \cdot 4 = k.$$

Они означают, что *любое целое число (k) талеров можно выплатить, либо выложив втрое большее число ($3k$) монет достоинством в 4 талера и взяв однократное число (k) монет достоинством в 11 талеров, либо выложив второе большее число ($3k$) монет достоинством в 11 талеров и взяв в 8 раз большее число ($8k$) монет достоинством в 4 талера.*

Из равенств (*) следует, что *начиная с 30 талеров любые суммы можно выплачивать без сдачи.*

Действительно,

$$30 = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 4,$$

$$31 = 11 + 5 \cdot 4,$$

а далее суммы можно увеличивать, либо заменяя одну монету достоинством в 11 талеров тремя монетами достоинством в 4 талера, либо заменяя три монеты достоинством в 11 талеров восемью монетами достоинством в 4 талера.

Обобщение

После всех споров о денежной реформе в Бергенгоции у читателя, несомненно, возник вопрос: *какими должны быть 2 числа a и b для того, чтобы бергенгоцийские монеты достоинством в a и b талеров удовлетворяли двум условиям, сформулированным*

в решении задачи 44? Ответ: такими числами могут быть любые 2 числа, не имеющие других общих делителей, кроме 1 (то есть любые два взаимно простых числа).

Задавая этот вопрос, мы отнюдь не намереваемся получить новое решение задач о выборе наиболее рациональной денежной системы в Бергенгоции, поскольку для ответа на него необходимы определенные сведения из теории чисел (и прежде всего из теории диофантовых уравнений первой степени).

Мы приведем лишь краткий перечень тех сведений, которые необходимы для ответа на вопрос об интересующих нас числах.

Теорема 1. Если a и b — взаимно простые натуральные числа, то всегда найдутся такие целые числа x' и y' , что

$$ax' + by' = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим все целые числа, представимые в виде $ax + by$, где x и y — любые целые числа. Выберем среди них лишь положительные, то есть такие, для которых

$$ax + by > 0.$$

Пусть m — наименьшее из них (такое число непременно должно быть, поскольку в любом множестве положительных целых чисел всегда существует наименьшее число). Предположим, что это наименьшее значение достигается при $x = x'$, $y = y'$, то есть что

$$m = ax' + by'.$$

Докажем, что $m = 1$. Выбрав любое положительное число $ax + by$, будем вычитать из него целые кратные числа m до тех пор, пока полученная разность, оставаясь неотрицательной, не станет меньше m , то есть не будет выполняться неравенство

$$m > (ax + by) - km \geq 0.$$

Подставляя в km вместо m приведенное выше выражение, получаем

$$m > (ax + by) - k(ax' + by') \geq 0,$$

$$m > a(x - kx') + b(y - ky') \geq 0.$$

Итак, мы нашли неотрицательное число, которое меньше m и представимо в виде $ax + by$. Поскольку m — наименьшее из положительных чисел этого типа, найденное число может быть равно только 0. Следовательно,

$$(ax + by) - km = 0,$$

$$ax + by = km.$$

Таким образом, все положительные числа вида $ax + by$ — целые кратные числа m . Это относится и к самим числам a и b , поскольку они также представимы в виде $ax + by$: $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$, $b = a \cdot 0 + b \cdot 1$. Но это означает, что число m является общим делителем чисел a и b , а поскольку эти числа взаимно простые, то $m = 1$.

Примечание 1. Мы отнюдь не утверждали, будто $ax' + by'$ — единственное представление числа 1. Ниже будет показано, что такое утверждение неверно.

Примечание. 2. Задача о нахождении чисел x' и y' представляет интерес лишь при $a > 1$ и $b > 1$ (в противном случае утверждение теоремы очевидно).

Теорема 2. Если $a > 1$ и $b > 1$, то числа x' и y' в соотношении

$$ax' + by' = 1$$

имеют противоположные знаки.

Доказательство. Оба числа x' и y' не могут быть положительными, поскольку тогда соотношение $ax' + by' = 1$ перешло бы в неравенство $ax' + by' > 1$. Ни одно из чисел x' и y' не может быть равно нулю, и оба числа не могут быть отрицательными.

Теорема 3. Если число 1 представимо в виде

$$ax' + by' = 1$$

($a > 1$, $b > 1$ и a , b — взаимно простые числа), то оно представимо и в виде

$$ax'' + by'' = 1,$$

причем числа x' и x'' , а также y' и y'' имеют противоположные знаки.

Доказательство. Прибавив в левой части равенства

$$ax' + by' = 1$$

величину $kab - kab = 0$, где k — любое целое число, преобразуем его к виду

$$ax' + akb + by' - bka = 1,$$

$$a(x' + kb) + b(y' - ka) = 1.$$

Обозначим числа, стоящие в скобках, через x'' и y'' :

$$x' + kb = x'', \quad y' - ka = y''.$$

Значение k (которое может быть и отрицательным) выберем так, чтобы числа $x' + kb$ и x' имели противоположные знаки. Тогда по теореме 2 числа y'' и y' также должны иметь противоположные знаки.

Теорема 4. Если $a > 1$, $b > 1$ — взаимно простые натуральные числа, то любое натуральное число c представимо в виде

$$ax_1 + by_1 = c.$$

Доказательство. Как показано выше, всегда существует по крайней мере одно представление единицы в виде

$$ax' + by' = 1.$$

Умножив правую и левую части этого равенства на c , получим соотношение

$$a(x'c) + b(y'c) = c.$$

Тем самым утверждение теоремы доказано ($x_1 = x'c$, $y_1 = y'c$).

Теорема 5. Если c — достаточно большое натуральное число, то оно представимо в виде

$$ax_1 + by_1 = c,$$

причем ни x_1 , ни y_1 не отрицательны:

$$x_1 \geq 0 \quad y_1 \geq 0.$$

Доказательство. Пусть

$$ax' + by' = 1, \quad (1)$$

$$ax'' + by'' = 1 \quad (2)$$

— такие представления единицы, что $x' > 0$, $y'' > 0$. (Существование таких представлений следует из теоремы 3.) Значение k выберем так, чтобы числа x_1 и y_1 из соотношения

$$ax_1 + by_1 = k \quad (3)$$

удовлетворяли неравенствам

$$x_1 \geq x' \quad \text{и} \quad x_1 \geq |x''|,$$

$$y_1 \geq |y'| \quad \text{и} \quad y_1 \geq y''.$$

Ясно, что при еще большем значении k будут выполняться неравенства $x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$. Тем самым число k будет представлено в нужном виде. Покажем, что любое натуральное число, большее k , также можно представить в виде $ax + by$ с неотрицательными x и y .

Сложив равенства (1) и (3), получим

$$a(x_1 + x') + b(y_1 + y') = k + 1.$$

Поскольку $x_1 + x' > 0$, $y_1 + y' \geq 0$, то, обозначив числа в скобках через x_2 и y_2 ($x_2 = x_1 + x'$, $y_2 = y_1 + y'$), мы представим число $k + 1$ в виде

$$ax_2 + by_2 = k + 1 \quad (4)$$

с неотрицательными x_2 и y_2 .

Если затем сложить равенства (2) и (4), то получится соотношение

$$a(x_2 + x'') + b(y_2 + y'') = k + 2,$$

или, что то же,

$$ax_3 + by_3 = k + 2, \quad (5)$$

причем

$$x_3 = x_2 + x'' = x_1 + x' + x'' = (x_1 + x'') + x' \geq x' > 0,$$

$$y_3 = y_2 + y'' > y_2 > 0.$$

Таким образом, мы нашли число $k + 2$, представимое в виде $ax_3 + by_3$ с положительными x_3 и y_3 .

Сложим теперь равенства (3) и (5). Поскольку их правые части удовлетворяют неравенству $k + 2 > k$, то их левые части также связаны неравенством

$$ax_3 + by_3 > ax_1 + by_1.$$

Но поскольку числа a и b положительны, то должно выполняться по крайней мере одно из неравенств: либо (I) $x_3 > x_1$, либо (II) $y_3 > y_1$. Сложив в I случае равенства (5) и (2), а во II случае равенства (5) и (1), мы представим в нужном виде (с положительными x и y) число $k + 3$.

Повторяя рассуждения, содержащиеся в последнем абзаце, мы будем получать представления все больших натуральных чисел в виде $ax + by$ с положительными x и y .

*

Приведенные выше теоремы позволяют дать математическое обоснование выбора тех или иных денежных единиц Бергенгоции.

Полученный нами результат можно рассматривать как частный случай следующей более общей теоремы.

Если a , b , c — положительные целые числа и c делится на наибольший общий делитель чисел a и b , то уравнение

$$ax + by = c \quad (*)$$

всегда допускает решение (причем не одно решение, а бесконечно много решений) в целых числах (то есть такое решение, в котором x и y — целые числа).

Если число c достаточно велико (по сравнению с a и b), то уравнение $(*)$ допускает решение в неотрицательных целых числах (то есть такое решение, в котором x и y — неотрицательные целые числа).

Доказательство. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b . Разделим на d обе части уравнения $(*)$. Тогда числа

$$\frac{a}{d} = a_1, \quad \frac{b}{d} = b_1, \quad \frac{c}{d} = c_1$$

— целые, а в уравнении

$$a_1x + b_1y = c_1$$

коэффициенты a_1 и b_1 взаимно простые. Таким образом, утверждение общей теоремы следует из доказанных выше теорем 4 и 5.

[Если, решая алгебраическое уравнение с целочисленными коэффициентами, мы интересуемся лишь целыми корнями, то такое уравнение называется *диофантовым* (в честь древнегреческого математика Диофанта). Таким образом, в доказанной выше теореме речь идет о решении диофантовых уравнений первой степени.]

В рассмотренном нами примере числа a и b означали достоинства двух основных денежных единиц, а c — подлежащую выплате сумму. Наибольший общий делитель чисел a и b был равен 1, и поэтому любое целое число c на него заведомо делилось.

Доказанная нами общая теорема принадлежит к числу так называемых *теорем существования*: она утверждает лишь, что решение существует, но умалчивает о том, каким образом это решение можно найти. Однако отсюда не следует, будто для того, чтобы найти решение, необходимо прибегать к черной магии (во всяком случае, если говорить о рассмотренной нами задаче).

48. НЕОЖИДАННОЕ РЕШЕНИЕ

1. решение. Сколько монет достоинством в 5 талеров могут понадобиться для того, чтобы выплатить 49 талеров?

Сколько-то монет достоинством в 5 талеров заведомо понадобятся, поскольку монетами достоинством в 3 талера 49 талеров выплатить невозможно: число 49 не кратно 3. Одной монеты достоинством в 5 талеров мало (поскольку число $49 - 5 = 44$ не кратно 3), а двух достаточно (поскольку число $49 - 10 = 39$ кратно 3).

Эти рассуждения позволяют получить первое решение: *49 талеров можно выплатить 2 монетами достоинством в 5 талеров и 13 монетами достоинством в 3 талера* ($2 \cdot 5 + 13 \cdot 3 = 49$) (рис. 100).

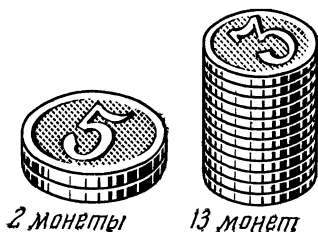


Рис. 100.

Ясно, что остальные решения будут отличаться от первого лишь тем, сколько монет достоинством в 3 талера заменены соответствующим числом монет достоинством в 5 талеров. Следовательно, для того, чтобы перейти от одного решения к другому, нам необходимо разменять монетами достоинством в 5 талеров некую сумму денег, которая была «набрана» монетами достоинством в 3 талера. Это означает, что число талеров, содержащихся в этой сумме, должно быть общим кратным чисел 3 и 5. Но существуют лишь 2 общих кратных чисел 3 и 5, которые не превосходят числа 39: 15 и 30. Таким образом, чтобы получить новые решения, нам необходимо разменять монетами достоинством в 5 талеров сумму, состоящую либо из 5, либо из 10 монет достоинством в 3 талера, то есть положить вместо них либо 3, либо 6 монет достоинством в 5 талеров (рис. 101).

Эти рассуждения позволяют получить второе решение: *5 монет достоинством в 5 талеров и 8 монет достоинством в 3 талера* ($5 \cdot 5 + 8 \cdot 3 = 49$), и третье решение: *8 монет достоинством в 5 талеров и 3 монеты достоинством в 3 талера* ($8 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 49$).

Других решений, как следует из приведенных выше рассуждений, не существует. Таким образом, 49 талеров можно выплатить тремя способами (с соблюдением всех условий задачи).

II решение. Как известно, число, кратное 5, оканчивается на 0 или на 5. Следовательно, при вычитании из 49 числа, оканчивающегося на 0 или на 5, всегда получается число, оканчивающееся на 9 или на 4. Это означает, что монет достоинством в 3 талера должно быть на сумму, которая меньше 49 талеров, оканчивается на 9 или на 4 и, разумеется, кратна 3.

Таких чисел всего лишь три: 9, 24 и 39. Следовательно, из 49 талеров монетами достоинством в 3 талера можно выплатить лишь 9, 24 или 39 талеров. Поэтому выплату всей суммы (49 талеров) можно произвести лишь тремя способами:

$$3 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 49,$$

$$8 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 49,$$

$$13 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 49.$$

Примечание 1. Наименьшее общее кратное чисел 3 и 5 равно 15. Все остальные общие кратные чисел 3 и 5 (по достаточно известной теореме из теории чисел) кратны 15:

1 · 15, 2 · 15, 3 · 15, 4 · 15 и так далее.

Примечание 2. Решение задачи можно было бы начать с вопроса: сколько монет достоинством в 3 талера могут понадобиться для того, чтобы выплатить 49 талеров? Начав вычитать из 49 тройки, мы продолжали бы «откладывать монеты достоинством в 3 талера» до тех пор, пока не получили бы число,

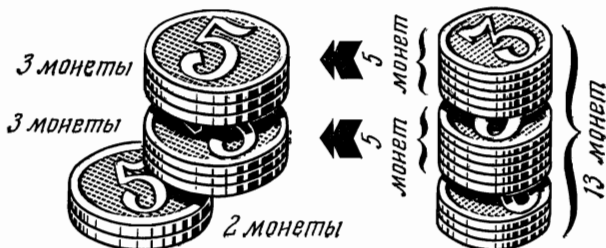


Рис. 101.

делящееся на 5. Это произошло бы после того, как мы вычли третью тройку ($49 - 3 \cdot 3 = 40$), и соответствовало бы первому из приведенных выше решений.

Первый способ менее утомителен, поскольку среди натуральных чисел, не превышающих 49, кратных 5 меньше, чем кратных 3.

Примечание 3. Если бы выплату 49 талеров не требовалось произвести без сдачи, то вместо того, чтобы каждый раз отбирать по 15 талеров и обменивать 5 монет достоинством в 3 талера на 3 монеты достоинством в 5 талеров, можно было бы поступить иначе, увеличив в зависимости от желания либо число монет достоинством в 5 талеров, либо число монет достоинством в 3 талера. В первом случае мы получили бы (из третьего решения) последовательность «ходов»

$$11 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 49,$$

$$14 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 49,$$

$$17 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = 49$$

и так далее, во втором случае (из первого решения) — последовательность «ходов»

$$- 1 \cdot 5 + 18 \cdot 3 = 49,$$

$$- 4 \cdot 5 + 23 \cdot 3 = 49,$$

$$- 7 \cdot 5 + 28 \cdot 3 = 49$$

и так далее.

Собственно говоря, обе последовательности нельзя рассматривать как два независимых набора решений. Речь идет лишь о подстановке всех целых значений k ($\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$) в общее соотношение

$$(3k + 2) \cdot 5 + (13 - 5k) \cdot 3 = 49.$$

Если число монет достоинством в 5 талеров, и возрастая, и убывая, изменяется каждый раз на 3 от начального значения 2, то число монет достоинством в 3 талера меняется каждый раз на 5 от начального значения, равного 13. Любому целому k соответствует некий способ выплаты 49 талеров.

Примечание 4. С точки зрения математики, решение задачи 48 по существу сводится к решению диофантова уравнения первой степени

$$3x + 5y = 49 \quad (1)$$

в неотрицательных целых числах. На графике это соответствует тому, чтобы в прямоугольной системе координат построить прямую, описываемую уравнением $3x + 5y = 49$, и в первом квадранте (где обе координаты положительны) отметить все точки

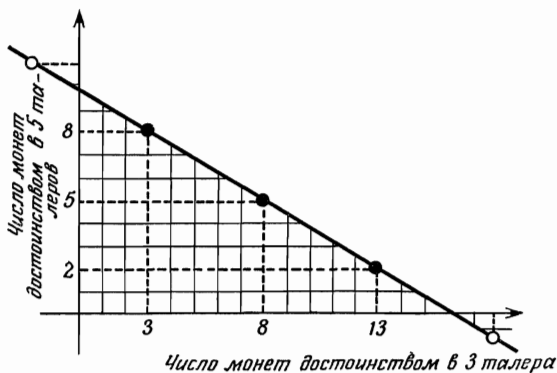


Рис. 102.

с целочисленными координатами (точки «целочисленной решетки»), попавшие на проведенную прямую (рис. 102).

Разумеется, как всегда бывает при графическом решении уравнений, результаты удастся получить лишь приближенно и они нуждаются в последующей проверке. Если коэффициенты

при неизвестных велики, то использование метода решения сопряжено с большими трудностями. Учитывая это, мы хотели бы продемонстрировать еще один — «безотказный» — метод, позволяющий находить решение при любых коэффициентах.

Разрешим уравнение прямой относительно неизвестной с меньшим коэффициентом (в рассматриваемом случае — относительно x):

$$x = \frac{49 - 5y}{3}. \quad (1a)$$

В правой части «выполним деление», то есть выделим целую часть стоящей справа дроби:

$$x = 16 - y + \frac{1 - 2y}{3}. \quad (16)$$

Поскольку x и y — целые числа, то равенство (16) возможно лишь в том случае, если

$$\frac{1 - 2y}{3}$$

— целое число, которое мы обозначим, например, t_1 :

$$\frac{1 - 2y}{3} = t_1. \quad (2)$$

Освобождаясь от знаменателя и перенося члены, получаем

$$3t_1 + 2y = 1. \quad (2a)$$

Разрешив новое уравнение относительно неизвестного с меньшим коэффициентом и повторив всю процедуру, получим

$$y = \frac{1 - 3t_1}{2}, \quad (26)$$

$$y = -t_1 + \frac{1 - t_1}{2}, \quad (2в)$$

$$\frac{1 - t_1}{2} = t_2 \quad (3)$$

(t_2 — некоторое целое число),

$$t_1 + 2t_2 = 1, \quad (3a)$$

откуда

$$t_1 = 1 - 2t_2. \quad (*)$$

На этот раз неизвестные t_1 и t_2 связаны линейным соотношением, не содержащим никаких дробей, поэтому необходимость в дальнейшем продолжении преобразований, аналогичных произведенным выше, отпадает. Подставляя в (2в) вместо t_1 правую часть выражения (*), находим

$$y = -(1 - 2t_2) + t_2 = 3t_2 - 1.$$

Аналогичным образом, подставляя в (1) вместо y правую часть вновь полученного выражения, получаем

$$x = \frac{49 - 5(3t_2 - 1)}{3} = -5t_2 + 18.$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -5t_2 + 18, \\ y &= 3t_2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

позволяют найти все решения исходного уравнения в целых числах.

Поскольку нас интересуют только решения в неотрицательных целых числах, то параметру t_2 следует придавать лишь такие значения, при которых $x \geq 0$, $y \geq 0$, то есть

$$\begin{aligned} -5t_2 + 18 &\geq 0, \\ 3t_2 - 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} 18 &\geq 5t_2, \quad 3t_2 \geq 1, \\ t_2 &\leq 3,6, \quad t_2 \geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Одновременно этим двум неравенствам удовлетворяют лишь значения t_2 , равные 1, 2 и 3. Они порождают три следующих решения исходного уравнения в неотрицательных целых числах:

t_2	1	2	3
$x = -5t_2 + 18$	13	8	3
$y = 3t_2 - 1$	2	5	8

Разумеется, все три решения совпадают с полученными ранее.

Примечание 5. Покажем, что изложенная в предыдущем примечании процедура, которая позволила вывести формулы

$$\begin{aligned} x &= -5t_2 + 18, \\ y &= 3t_2 - 1 \end{aligned} \quad (4)$$

для решения уравнения $3x + 5y = 49$ в целых числах, «срабатывает безотказно».

Действительно, с одной стороны, процедура, позволившая получить формулы (4), всегда осуществима и поэтому *любое* решение x , y исходного уравнения должно иметь такой вид, в каком оно представлено выше. С другой стороны, если x и y заданы формулами, аналогичными формулам (4), то параметр t_2 , принимая различные значения, порождает *любое* решение исходного уравнения в целых числах.

[Точный смысл приведенных выше утверждений сводится к следующему. Подставив в (3) любое целое значение t_2 , мы из (3а) найдем соответствующее целое значение t_1 . Зная его, по формуле (2в) вычисляем целое значение y . Затем, производя преобразования в обратном порядке, мы получаем из (2в) формулу (2б), из (2б) — (2а) и, наконец, из (2а) — формулу (2). Подставляя левую часть формулы (2) и вычисленное ранее зна-

чение y в (16), мы находим значение x , удовлетворяющее соотношению (16) и целое (поскольку t_1 и y — целые числа). Но если выполняется соотношение (16), то выполняются и эквивалентные ему уравнения (1a) и (1).]

Примечание 6. Было бы естественно проверить, являются ли полученные значения x и y решениями исходного уравнения, то есть удовлетворяют ли они ему, непосредственной подстановкой их в уравнение (1):

$$3(-5t_2 + 18) + 5(3t_2 - 1) = -15t_2 + 54 + 15t_2 - 5 = 49.$$

Такая «прямая» проверка гораздо проще предшествующего обоснования правильности решения, но использует конкретные числовые значения коэффициентов. Приведенные же выше рассуждения можно сформулировать в общем виде.

Примечание 7. Полученные ранее (в примечании 3) решения были представлены в так называемом параметрическом виде

$$x = 3k + 2, \quad y = 13 - 5k \quad (5a)$$

и лишь на первый взгляд отличаются от решений

$$x = 3t_2 - 1, \quad y = 18 - 5t_2, \quad (5б)$$

полученных в примечании 5. Действительно, полагая в (5a) $k = \dots -1, 0, 1, 2, \dots$, мы получаем те же пары значений x и y , которые соотношения (5б) порождают при $t_2 = \dots 0, 1, 2, 3, \dots$. Значения x и y , получаемые по обоим «рецептам», совпадают, если параметру t_2 придавать на 1 большее значение, чем параметру k .

Примечание 8. Различие между двумя представлениями решений в параметрическом виде (5a) и (5б) можно усмотреть и в том, что в первом случае начальными значениями служат $x_1 = 2, y_1 = 13$, а во втором $x_2 = -1, y_2 = 18$.

В общем случае из любого решения диофантова уравнения первой степени с двумя неизвестными можно получить (по существу тем способом, который изложен в примечании 5) все остальные решения.

*

Возможно, что на теории диофантовых уравнений первой степени с двумя неизвестными мы задержались чуть дольше, чем следовало бы. В свое оправдание мы могли бы сослаться на то, что задачи, решение которых сводится к решению уравнений такого типа, встречаются весьма часто. Приведем лишь два примера.

1. Для победителей школьной олимпиады установлены призы — шоколадки ценой 5 и 8 форинтов. (За решение более трудной задачи — шоколадка за 8 форинтов, за решение задачи полегче — шоколадка за 5 форинтов). На покупку призов оргкомитет олимпиады отпустил 100 форинтов.

Сколько шоколадок за 8 и за 5 форинтов следует купить, если требуется израсходовать все 100 форинтов? Сколькими способами оргкомитет может устанавливать соотношение между трудными и легкими задачами, если предположить, что рано или поздно каждая задача будет решена правильно?

2. Для встречи 286 гостей необходимо составить заявку на семнадцати- и девятнадцатиместные автобусы. Сколько потребуется тех и других автобусов, если ни в одном из заказанных автобусов не должно оставаться свободных мест?

(Последняя задача предлагалась в 1973 г. на первом туре математической олимпиады для школьников имени Даниэля Араня.)

Тем, кто не знаком с теорией диофантовых уравнений первой степени с двумя неизвестными, придется изрядно поломать голову над решением этих задач. (Теория диофантовых уравнений не входит в программу средней школы по математике.) Но для нас, до конца разобравшихся в спорах по поводу выбора денежных единиц в Бергенгоции и внимательно прочитавших все примечания, решение этих задач не представляет никаких трудностей.

Часть IV

49. КАКАЯ ИЗ МОНЕТ ФАЛЬШИВАЯ?

Поскольку $81 = 3 \cdot 27$, то все монеты, оказавшиеся в кассе к концу дня, можно разделить на 3 равные кучки — по 27 монет в каждой. Затем, выбрав любые две из трех кучек, их нужно взвесить: монеты из одной кучки положить на одну чашу весов, мо-

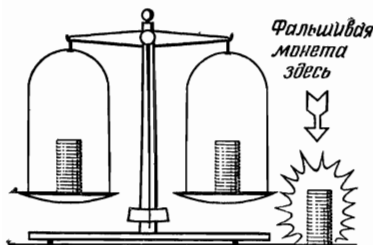


Рис. 103.

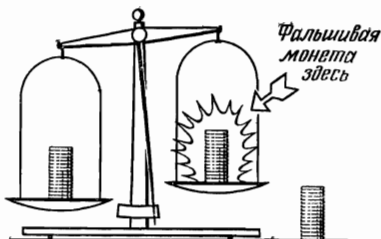


Рис. 104.

неты из другой кучки — на другую. Если чаши окажутся в равновесии, то это будет означать, что в двух выбранных кучках нет фальшивой монеты. Следовательно, в этом случае она находится в третьей кучке (рис. 103). Если же одна чаша весов опустится, а другая поднимется, то фальшивая монета будет находиться в более легкой кучке (рис. 104).

Таким образом, при помощи одного взвешивания можно установить, в какой из трех кучек, содержащих по 27 монет, находится фальшивая монета.

Поскольку $27 = 3 \cdot 9$, то кучку, в которой находится фальшивая монета, также можно разделить на 3 равные части и снова взвесить две из них. Тем самым после второго взвешивания удастся установить, в какой из трех групп по 9 монет находится фальшивая монета.

Аналогичную процедуру придется повторить еще 2 раза ($9 = 3 \cdot 3$, $3 = 3 \cdot 1$). После третьего взвешивания круг поисков сузится до трех монет, а после четвертого фальшивая монета будет обнаружена.

Примечание 1. В условиях задачи ничего не говорится о том, были ли у кассира разновесы. Действительно, если бы они и были, то это не меняло бы дела, поскольку разновесы не облегчали бы решение задачи. Поэтому упоминать о них мы сочли излишним.

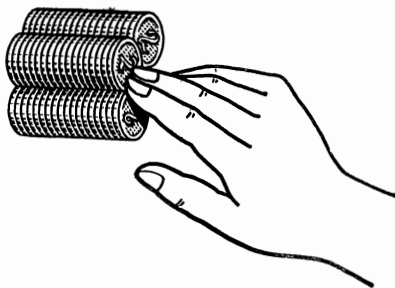


Рис. 105.

Примечание 2. Обращаем внимание на то, что при помощи взвешиваний в этой задаче в конечном счете установлен не вес монеты, а «опознана», или выделена, фальшивая монета, то есть из данного множества извлечен элемент, обладающий некоторой присущей только ему особенностью. (Пользоваться весами было не обязательно, поскольку из условий задачи следует, что фальшивая монета заметно легче настоящих монет, но без весов кассиру пришлось бы перебрать по одной все монеты, и это заняло бы много времени).

Примечание 3. Поскольку кассиру приходилось спешить, то для того, чтобы разделить на 3 равные части 81, 27 и 9 двухфоринтовых монет, он, разумеется, не отсчитывал каждый раз треть монет (хотя проведение такой «вспомогательной» операции несложно и позволяет в случае удачи обнаружить фальшивую монету без взвешивания прямо «на ощупь»), а просто складывал их в 3 столбика (рис. 105).

50. НА ВЕСАХ С ОДНОЙ ЧАШЕЙ

[Сколько бы монет из тех 64, о которых говорится в условиях задачи, мы ни «зачерпнули», весы с одной чашей всегда позволяют определить, не попала ли среди прочих фальшивая монета. Действительно, если стрелка весов стоит на де-

лении, соответствующем числу монет, которые находятся на единственной чаше весов, то это означает, что среди отобранных нами монет фальшивой монеты нет (рис. 106, а). Если же монеты на чаше весов явно «не дотягивают», то это означает, что одна из монет фальшивая (рис. 106, б).

Отсюда следует, что обойтись одним-единственным взвешиванием нам не удастся. По существу, взвешивания играют теперь такую же роль, какую в предыдущей задаче играл выбор сравниваемых по весу кучек монет. Единственное отличие состоит в том, что в этой задаче в отличие от предыдущей выбирать можно не из трех, а из двух кучек монет, одна из которых содержит фальшивую монету. Соответственно с этим монеты каждый раз следует делить не на 3, а на 2 равные части.]

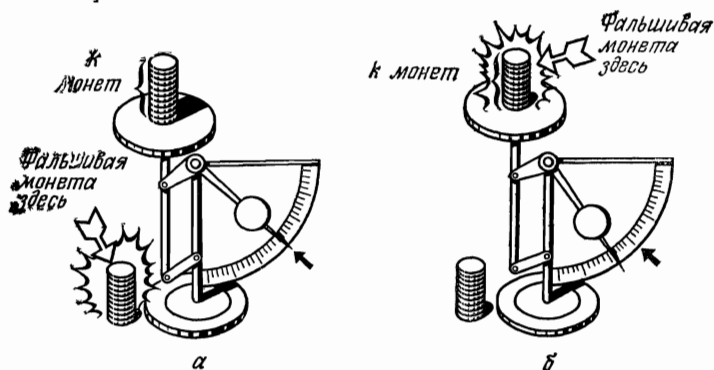


Рис. 106.

Верно: 6 взвешиваний всегда будет достаточно.

Действительно, разобьем 64 двухфоринтовые монеты на 2 равные части (по 32 монеты в каждой) и положим одну из «половинок» на чашу весов. Если стрелка весов не дойдет до деления, соответствующего весу 32 настоящих («полновесных») монет, то это будет означать, что одна из 32 монет, лежащих на чаше весов, фальшивая. В противном случае (когда стрелка весов останавливается против нужного деления) фальшивая монета остается среди 32 монет, не положенных на чашу весов (1-е взвешивание).

Возьмем теперь ту кучку монет, в которой находится фальшивая монета, снова разделим ее на 2 равные части (по 16 монет в каждой) и одну из «половинок половины» положим на чашу весов. Это позволит нам определить, в какой из двух кучек, содержащих по 16 монет, находится фальшивая монета (2-е взвешивание).

Поступив аналогичным образом с кучкой из 16 монет, мы установим те 8 монет, среди которых находится фальшивая (3-е взвешивание).

Затем сможем узнать, среди каких 4 монет находится фальшивая (4-е взвешивание),

а повторив разбиение на 2 равные части, сузим круг поисков до 2 монет (5-е взвешивание).

после чего (6-м взвешиванием) установим, наконец, фальшивую монету (перед последним взвешиванием в каждой «кучке» будет лишь по одной монете).

51. ПРОИСШЕСТВИЕ В АЭРОПОРТУ

Контрольное устройство достаточно включить 7 раз.

Действительно, представитель авиакомпании может разбить всех пассажиров, следующих отложенным рейсом, на 2 равные группы (по 64 человека в каждой) и попросить пройти в сектор обзора контрольного устройства пассажиров, оказавшихся в любой из двух групп (рис. 107). Если устройство сработает, то это будет оз-

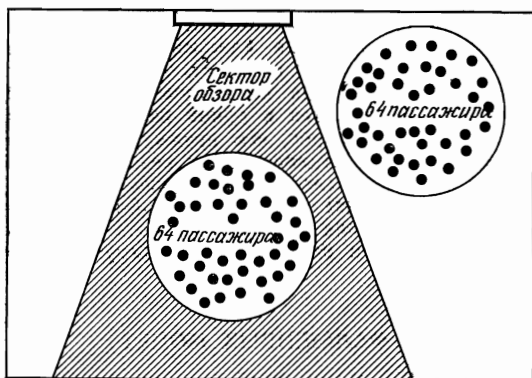


Рис. 107.

начать, что террорист находится среди тех 64 пассажиров, которые предстали перед контрольным устройством. Если устройство «про-молчит» (то есть его чувствительный элемент не обнаружит скры-тых металлических предметов у пассажиров, находящихся в секторе обзора), то террорист будет находиться среди тех пассажиров, ко-торые остались вне «поля зрения» контрольного устройства.

Ту группу из 64 пассажиров, в которой находится террорист, представитель авиакомпании снова может разбить на 2 равные под-группы (по 32 человека в каждой) и попросить пассажиров, ока-завшихся в какой-нибудь одной из подгрупп, снова пройти в сек-тор обзора контрольного устройства. Если устройство сработает, то это будет означать, что террорист находится среди тех 32 пасса-жиров, которые вошли в сектор обзора. Если же устройство не сра-ботает, то террорист окажется среди тех 32 пассажиров, которые не подверглись вторичному досмотру.

Группу из 32 пассажиров, среди которых находится террорист, прячущий оружие, представитель авиакомпании снова разобьет на 2 равные подгруппы и будет продолжать *разбиение пополам* до тех пор, пока не сузит круг поисков до одного-единственного пассажира. Действия представителя авиакомпании при этом по существу не бу-дут отличаться от метода разбиения множества на 2 равные части

(«дихотомического метода»), которым мы воспользовались в решении предыдущей задачи. Как показывают приведенные там соображения, исходную группу из 128 пассажиров придется подвергнуть семи «разбиениям пополам» (и, следовательно, 7 раз включать контрольное устройство).

Меньшее число включений иногда может оказаться недостаточным, даже если представитель авиакомпании сочтет необходимым время от времени отходить от метода разбиения очередной группы пассажиров на 2 равные подгруппы. Действительно, если «подозрительную» группу разбить на 2 неравные подгруппы, то может случиться так, что контрольное устройство не обнаружит металлических предметов у пассажиров меньшей подгруппы. Следовательно, террорист будет находиться среди пассажиров большей подгруппы и «под подозрением» окажется больше человек, чем осталось бы, если бы представитель авиакомпании каждый раз разбивал «подозрительную» группу пополам. Это означает, что при наиболее удобном способе разбиения пассажиров на группы — «делении пополам» — террорист всякий раз остается в одной из подгрупп, насчитывающих вдвое меньше пассажиров, чем предыдущая «подозрительная» группа, а при малейшем отклонении от разбиения пополам может оказаться в более многочисленной подгруппе. После того как разбиение на подгруппы будет произведено в 6-й раз, террорист может оказаться в подгруппе пассажиров, состоящей более чем из 1 человека, поэтому семи разбиений на подгруппы будет недостаточно.

52. ЦЕЛЫЙ ЯЩИК ФАЛЬШИВЫХ МОНЕТ

[Ясно, что 100 взвешиваний привели бы к чрезмерной задержке и излишним расходам. Поэтому напрашивается мысль о создании такого метода обнаружения брака, который бы не зависел от числа монет. Для этого необходимо перенумеровать все ящики с пятигрошовыми монетами и в дальнейшем оперировать непосредственно с порядковыми номерами ящиков.]

Для того чтобы определить ящик с бракованными монетами, достаточно одного взвешивания.

Действительно, перенумеруем все ящики последовательными целыми числами от 1 до 100, извлечем из каждого ящика число монет, равное его порядковому номеру, и все отобранные монеты положим на электронные весы. (Таким образом, из 1-го ящика мы возьмем 1 монету, из 2-го — 2 монеты, из 3-го — 3 монеты и так далее. Из последнего ящика, поскольку он сотый, мы извлечем 100 монет.) Если бракованные монеты находятся в ящике с номером n , то на электронных весах окажется ровно n бракованных монет. Следовательно, нехватка в весе всех отобранных монет будет равна n граммам. Таким образом, номер ящика с бракованными монетами можно установить при помощи одного взвешивания.

На весах всего окажется

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = \\ = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$$

монет, поэтому нетрудно сосчитать, сколько бы весили отобранные монеты, если бы среди них не было бракованных.

53. ДВА ЯЩИКА ФАЛЬШИВЫХ МОНЕТ

Утверждение неверно: двух взвешиваний, проводимых так, как говорится в условиях задачи, недостаточно для того, чтобы определить 2 ящика с бракованными монетами.

Действительно, после первого взвешивания (точнее, после того, как будет установлено, сколько граммов недостает) становится известной сумма номеров тех ящиков, в которых находятся бракованные монеты. Второе взвешивание позволяет найти сумму номеров тех же двух ящиков (новая нумерация обратна старой: ящики в ней перенумерованы «от конца к началу»). Но поскольку для любого ящика сумма старого и нового номеров равна 101, то результат второго взвешивания можно предсказать по результату первого взвешивания: новая сумма дополняет старую до 202.

Таким образом, второе взвешивание не дает никакой новой информации. Следовательно, по двум взвешиваниям, проводимым по предложенной выше схеме, мы в состоянии узнать лишь то, что известно из одного взвешивания, — сумму номеров тех ящиков, в которых оказались бракованные монеты. Это само по себе недостаточно для того, чтобы определить номер каждого ящика в отдельности.

53а. ЕЩЕ РАЗ О ДВУХ ЯЩИКАХ ФАЛЬШИВЫХ МОНЕТ

Описанная в условиях предыдущей задачи схема не позволяет найти ящики с бракованными монетами за 2 взвешивания, но это отнюдь не означает, будто двух взвешиваний всегда будет недостаточно. Не исключено, что неудачна сама схема проведения взвешиваний и при другом, более разумном ее варианте ящики с бракованными монетами все же удастся определить за 2 взвешивания.

Первое взвешивание можно оставить без изменений, поскольку оно позволяет установить сумму номеров тех ящиков, в которых находятся бракованные монеты. Если бы удалось установить еще и *разность* номеров этих двух ящиков, то найти номер каждого из них в отдельности не составляло бы никакого труда.

Ясно, что получить при взвешивании разность номеров двух ящиков можно лишь в том случае, если номер одного из них отсчитывать в прежнем направлении, а номер другого — в обратном направлении. Откуда начать отсчет, в принципе безразлично, лишь бы номера заведомо отсчитывались в противоположных направлениях.

Правильному выбору начала отсчета помогает сумма двух номеров. Действительно, если эта сумма равна, например, 128, то ящики могут иметь следующие номера:

63-й и 65-й,
62-й и 66-й,
61-й и 68-й

и так далее. Нетрудно видеть, что ящик с номером $128 : 2 = 64$ «равноудален от ящиков, образующих любую из перечисленных

выше пар: номер одного из этих ящиков он опережает ровно настолько, насколько отстает от номера другого.

Извлекаем

из 63-го и 65-го ящиков по 1 монете,

из 62-го и 66-го ящиков по 2 монеты,

из 61-го и 67-го ящиков по 3 монеты

и так далее (вообще из ящиков с номерами $64 - k$ и $64 + k$ извлекаем по k монет). Все изъятые из ящиков монеты положим на весы. Если весы покажут, что среди этих монет имеется $2n$ монет «облегченного образца», то бракованные монеты находятся в ящиках с номерами $64 - n$ и $64 + n$.

Сумма двух номеров может быть и нечетной. Пусть, например, она равна 93. В этом случае ящики с более легкими монетами могут иметь номера

46-й и 47-й,

45-й и 48-й,

44-й и 49-й

и так далее. В этом случае отсчет начинается с $93 : 2 = 46\frac{1}{2}$ ящика», то есть с числа, которое находится посередине между номерами, образующими любую пару, и также опережает один номер ровно настолько, насколько отстает от другого.

Извлекаем из ящиков

с номерами 46 и 47 по 1 монете,

с номерами 45 и 48 — по 2 монеты,

с номерами 44 и 49 — по 3 монеты

и так далее (вообще из ящиков с номерами $47 - k$ и $46 + k$ извлекаем по k монет) и все изъятые монеты положим на весы. Если весы покажут, что среди этих монет имеется $2n$ монет «облегченного образца», то бракованные монеты находятся в ящиках с номерами $47 - n$ и $46 + n$.

Контролерам достаточно произвести 2 взвешивания. Первое взвешивание проводится так же, как в решении задачи 52. Если выяснится, что недостает a граммов, то ящики необходимо перенумеровать заново, ведя отсчет в двух противоположных направлениях от ящика с номером

$$\frac{a}{2} \text{ при четном } a$$

и ящика с номером

$$\frac{(a-1)}{2} \text{ при нечетном } a.$$

Затем, сняв с весов все монеты, положить на них по столько монет на каждого ящика, каков его номер в новой нумерации, и снова взвесить. Если при втором взвешивании выяснится, что недостает $2b$ граммов, то бракованные монеты находятся в ящиках с номерами

$$\frac{a}{2} - b \text{ и } \frac{a}{2} + b \text{ при четном } a,$$

$$\frac{(a+1)}{2} - b \text{ и } \frac{(a+1)}{2} + b \text{ при нечетном } a.$$

В обоснование правильности приведенной выше «инструкции для контролеров» из казначейства Бергенгоции достаточно сослаться на то, что сумма номеров двух ящиков с бракованными монетами при первом взвешивании получается равной a , а если отсчет начинается с ящика $a/2$ при четном a и с промежутка между ящиками $(a-1)/2$ и $(a+1)/2$ при нечетном a и производится в обе стороны, то ящики с более легкими монетами получают одинаковые новые номера.

54. «ЮВЕЛИРНАЯ» ЗАДАЧА

а. Необычные «гири» позволяют отвесить любое число граммов золота.

б. Любое число граммов, начиная с 28 (то есть более 27).

Действительно, в решении задачи 44 было доказано, что монетами достоинством в 5 и 8 талеров (со сдачей) можно выплатить сумму, равную любому целому числу талеров, а начиная с 28 талеров производить все выплаты без сдачи.

Взвешивание на равноплечих весах с двумя наборами гирь весом 5 и 8 г сводится к той же самой задаче: достоинству монет соответствует вес гирь, подлежащей выплате сумме в целое число талеров — целое число граммов золота, которое необходимо взвесить, а сдача — перемещение с одной чаши весов на другую груза, вес которого в граммах равен числу возвращаемых талеров.

Примечание. Аналогичным образом обстоит бы дело и в том случае, если бы в ювелирной мастерской имелся запас готовых изделий весом не 5 и 8 г, а 3 и 5 г (задача 43), 8 и 13 г, 21 и 34 г или 144 и 233 г (задача 45), 4 и 11 г (задача 47), а также во всех остальных случаях, когда вес изделий равен a и b граммам, где a и b — два взаимно простых числа.

Часть V

55. СКОЛЬКО ЧУЛОК ВЗЯТЬ?

а. 3 чулка. Поскольку в коробке хранятся чулки только двух цветов (черные и белые), то все 3 чулка не могут быть различного цвета. Следовательно, среди них имеются по крайней мере 2 чулка одного и того же цвета и из них можно составить пару. Двух чулок, выбранных в темноте из коробки, может оказаться недостаточно для составления пары, поскольку не исключено, что они окажутся разного цвета.

б. 22 чулка. Действительно, поскольку среди чулок, хранящихся в коробке, имеется не более 20 черных, то среди выбранных 22 чулок непременно найдутся по крайней мере 2 белых чулка. Ясно,

что если взять из коробки меньшее число чулок, то двух белых чулок среди них может не оказаться.

в. 5 чулок. Действительно, 4 чулок мало, поскольку 3 из них могут оказаться одного, а 1 — другого цвета, а 5 чулок достаточно, поскольку их можно набрать, взяв

либо 5 чулок одного цвета,

либо 4 чулка одного и 1 чулок другого цвета,

либо 3 чулка одного и 2 чулка другого цвета.

В двух первых случаях можно выбрать 2 пары чулок одного цвета, а в третьем случае — одну пару чулок одного, а другую — другого цвета.

г. 7 чулок. Действительно, 6 чулок еще мало, поскольку 3 чулка могут оказаться одного, а 3 остальных — другого цвета, а среди 7 чулок непременно найдутся по крайней мере 4 чулка одного и того же цвета.

д. 22 чулка. Действительно, 21 чулка мало, поскольку 20 из них могут оказаться одного цвета, а из 22 чулок, даже если 20 из них одного цвета, непременно найдутся 2 чулка (то есть пара чулок) другого цвета. Поскольку сказанное в равной мере относится и к белому, и к черному цвету, то это и означает, что из 22 чулок всегда можно выбрать 2 чулка одного и 2 чулка другого цвета.

е. 24 чулка. Все рассуждения аналогичны приведенным в п. б.

ж. 11 чулок. Доказательство проводится так же, как в п. в.

з. 26 чулок. Действительно, 25 чулок мало, поскольку 20 из них могут оказаться одного цвета, а из 5 остальных нельзя будет составить 3 пар (напомним, что нам необходимо выбрать 3 пары белых чулок), а из 26 чулок всегда найдется по крайней мере 6 чулок одного цвета (поскольку чулок другого цвета может быть не больше 20).

56. ПОДБЕРЕМ ЧУЛКИ ПО ЦВЕТУ

$2k + 1$ чулок. (Разумеется, задача имеет решение лишь в том случае, если в коробке хранится не менее $2k + 1$ чулок, то есть при $n > 2k$.)

Действительно, $2k$ чулок мало, поскольку может представиться случай, когда чулок того и другого цвета окажется по нечетному числу и, следовательно, при составлении пар останется 1 «лишний» белый и 1 «лишний» черный чулок, которые нельзя объединить в пару. Таким образом, из $2k$ чулок можно выбрать не более $k - 1$ пар.

Наоборот, $2k + 1$ чулок всегда достаточно. Выбрав в темноте $2k + 1$ чулок, мы получим четное число чулок одного и нечетное число чулок другого цвета (поскольку сумма как двух четных, так и двух нечетных чисел была бы четна, а число $2k + 1$ нечетно). Следовательно, если изъять 1 чулок «другого» цвета (из нечетного числа чулок одного цвета), то из остальных $2k$ чулок можно будет составить k пар.

Примечание. Нам хотелось бы обратить внимание читателя на следующее важное обстоятельство: приведенное выше решение проще, чем решение задачи 55, в. Обобщение не только не усложнило, но, наоборот, сделало задачу «прозрачнее», что и позволило найти более простой подход к ее решению.

57. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ЗАКАЗ

Нет, не верно: Илонка заблуждается. Число чулок, которые необходимо извлечь из коробки, действительно не изменилось бы, если бы Илонка была уверена, что число дополнительно заказанных пар белых чулок не превышает 6. В этом случае и до, и после получения дополнительного заказа ей нужно было бы достать из коробки 32 чулка, поскольку лишь из такого количества чулок всегда можно выбрать 6 пар черных чулок (и тем самым выполнить первый заказ). Но если поступил дополнительный заказ на 7, 8, 9 или 10 пар белых чулок, то Илонке следует взять из коробки соответственно 34, 36, 38 или 40 чулок.

58. ТРИ ЦВЕТА

а. 4 чулка. Поскольку в коробке хранятся чулки лишь трех цветов, то из 4 чулок всегда можно выбрать по крайней мере 2 чулка одного цвета. Если из коробки взять меньше 4 чулок, то они все могут оказаться различного цвета.

б. 52 чулка. Действительно, общее число хранящихся в коробке чулок небелого цвета равно 50.

в. 42 чулка.

г. 32 чулка.

д. 6 чулок.

Мы не будем старательно перебирать все возможные комбинации чулок белого, черного и коричневого цвета, поскольку их слишком много, а вместо этого рассмотрим более простое решение.

1 решение. Действительно, 5 чулок мало, поскольку среди них может оказаться 1 чулок одного цвета, 1 чулок другого цвета и 3 чулка третьего цвета. В этом случае из 5 чулок можно выбрать лишь 1 пару.

Наоборот, если взять 6 чулок, то среди них непременно найдется четное число чулок какого-нибудь одного цвета, поскольку если бы чулок каждого из трех цветов было нечетное число, то сумма трех нечетных чисел также была бы нечетной и не могла бы совпадать с числом 6.

Если это четное число равно 0 (то есть если среди 6 выбранных чулок нет ни одного чулка какого-нибудь одного цвета), то число чулок двух других цветов равно 6, и этого, как показано в решении задачи 55, **в**, достаточно для того, чтобы из них можно было выбрать 2 пары. (То, что в задаче 55, **в** чулки извлекались из коробки, где хранилось по 10 пар чулок того и другого цвета, а в данной задаче содержимое коробки несколько иное, не имеет значения, поскольку в решении задачи 55, **в** точное число чулок того и другого цвета никак не использовалось.)

Если это четное число равно 2 (то есть если имеется 2 чулка одного цвета), то 1 пара уже готова. Остается еще 4 чулка двух других цветов. Как показано в решении задачи 55, **а**, этого вполне достаточно для того, чтобы выбрать еще одну пару.

Наконец, если это четное число равно 4 или 6 (то есть если среди выбранных чулок имеются 4 или 6 чулок одного цвета), то обе пары можно выбрать из них.

Приведенное выше решение выглядит весьма красивым и изящным, но такое впечатление обманчиво. Задача допускает гораздо более простое решение. Чтобы найти его, воспользуемся рассуждениями, приведенными в решении задачи 56.

II решение. То, что 5 чулок мало, а при 6 чулках нечетное число чулок одного цвета может встретиться не более двух раз, доказывается так же, как в предыдущем решении.

При составлении пар можно взять:

чулки того цвета, которых набралось четное число, и использовать их все «подчистую»;

чулки того цвета, которых набралось нечетное число, один чулок оставить, а остальные использовать.

Таким образом, число «напрасно потерянных» чулок не превышает количества групп, состоящих из нечетного числа чулок одного цвета. Поскольку в предыдущем решении доказано, что нечетное число чулок одного цвета может встретиться не более двух раз, то неиспользованными при составлении пар могут остаться не более 2 чулок. Следовательно, на пары можно «израсходовать» по крайней мере $6 - 2 = 4$ чулка, что позволяет составить 2 пары.

Второе решение лучше первого не только потому, что оно короче, но и потому, что оно отличается большей общностью: оно вполне применимо и в том случае, если бы речь шла о составлении не двух, а большего (любого заданного) числа пар.

е. 12 чулок (см. II решение задачи д).

ж. 33 чулка. Действительно, 32 чулок мало, поскольку 30 из них могут быть коричневыми, 1 черным и 1 белым. Наоборот, 33 чулок достаточно в любом случае, поскольку из них одного цвета могут быть не более 30 чулок (если они коричневые), и, следовательно, чулок двух других цветов должно быть не меньше 3, что всегда позволяет выбрать еще 1 пару чулок (см. решение задачи 55, а), цвет которой отличен от цвета первой пары.

з. 10 чулок. Действительно, 9 чулок мало, поскольку можно взять по 3 чулка каждого цвета. Если же выбрать 10 чулок, то по крайней мере 4 из них будут одного цвета, и из них можно составить 2 пары.

и. 22 чулка (см. решение задачи з).

к. 37 чулок (а не $40 = 3 \cdot 13 + 1$, как можно было бы думать, исходя из решений двух предыдущих задач). Действительно, 36 чулок мало, поскольку можно взять 10 белых, 13 черных и 13 коричневых. Предположим теперь, что мы набрали 37 чулок. Тогда даже если 10 из них окажутся белого цвета (их слишком мало, чтобы можно было использовать при составлении 7 пар чулок одного цвета), то чулок одного из двух остальных цветов непременно будет не менее 14.

л. 52 чулка. Действительно, 51 чулка мало, поскольку можно взять 30 коричневых, 20 белых чулок и 1 черный чулок. В то же время 52 чулок вполне достаточно, поскольку даже если среди них окажутся 30 «бесполезных» коричневых чулок, то все же останутся 22 черных и белых чулка. Из них черных может быть не более 20, а белых — не более 10, поэтому и в том и в другом случае нам удастся выбрать 1 пару белых и 1 пару черных чулок.

м. 42 чулка (доказательство см. в решении задачи к).

н. 52 чулка (доказательство см. в решении задачи к).

о. 52 чулка. Действительно, 51 чулка мало, поскольку можно взять 30 коричневых, 20 черных и 1 белый чулок. Но 52 чулок достаточно, поскольку чулок любых двух цветов наберется не более 50, и поэтому по крайней мере 2 чулка будут другого цвета.

п. 56 чулок. Действительно, 55 чулок мало, поскольку можно взять 30 коричневых, 20 черных и 5 белых чулок. В то же время 56 чулок достаточно, поскольку имеется всего 50 чулок небелого цвета. Следовательно, число черных и коричневых чулок не может превышать 50, и поэтому из 56 чулок по крайней мере 6 должны быть белыми.

р. 46 чулок (см. решение задачи п).

с. 36 чулок (см. решение задачи п).

т. 54 чулка. Действительно, 53 чулок мало, поскольку можно взять 30 коричневых, 20 черных и 3 белых чулка. Но 54 чулок достаточно, потому что имеется всего лишь 50 черных и коричневых чулок, а черных и белых — лишь 30.

у. 52 чулка (см. решение задачи с).

ф. 54 чулка. Действительно, 53 чулок мало, поскольку можно взять 30 коричневых, 20 черных и 3 белых чулка. Но 54 чулок достаточно, потому что черных и коричневых чулок всего 50, белых и коричневых лишь 40, а белых и черных — лишь 30.

59. СКОЛЬКО ПАР, СТОЛЬКО И ЦВЕТОВ

а. $2k + 2$ чулок. Доказательство этого утверждения проводится так же, как в решении задачи 58, д. К этому необходимо лишь добавить, что чулок по крайней мере одного цвета непременно должно быть четное число, поскольку сумма трех нечетных чисел всегда нечетна, а число $2k + 2$ четно.

б. Если n четно, то $2k + n$ чулок, а если n нечетно, то $2k + n - 1$ чулок.

Таким образом, число чулок, изъятых из коробки, всегда должно быть четным.

Действительно, при составлении пар «лишний» чулок остается всякий раз, когда встречается нечетное число чулок данного цвета. Следовательно, если n четно, то может представиться такой случай, когда число чулок каждого цвета будет нечетно (поскольку сумма четного числа нечетных слагаемых четна). Если же n нечетно, то число чулок по крайней мере одного цвета непременно должно быть четным (поскольку сумма нечетного числа нечетных слагаемых нечетна).

Пусть $[x]$ — целая часть числа x , то есть наибольшее из целых чисел, не превосходящих x . Тогда полученный нами результат и при четном, и при нечетном n можно записать в виде одной формулы; из коробки необходимо извлечь

$$2 \left(k + \left[\frac{n}{2} \right] \right)$$

чулок.

60. ПЕРЧАТКИ ВМЕСТО ЧУЛОК

Поскольку левые перчатки можно на ощупь отличить от правых, условимся считать, что все перчатки заранее рассортированы и левые перчатки помещены в специальные ящики или коробки отдельно от правых. Таким образом, мы имеем, с одной стороны, 20 белых и 20 черных левых перчаток, а с другой — 20 белых и 20 черных правых перчаток. Из них-то и следует выбирать пары.

а. 1 правую и 21 левую перчатку (или, наоборот, 1 левую и 21 правую). Действительно, все 20 перчаток на одну и ту же руку (левую или правую) могут быть одного цвета. Добавление к ним 20 перчаток на другую руку не всегда приводит к желанной цели, поскольку все эти перчатки могут оказаться другого цвета. Если же взять 21 перчатку из одной и той же коробки, то они заведомо будут двух цветов, и поэтому к ним достаточно добавить 1 перчатку на другую руку.

б. 21 левую и 21 правую перчатку. При любом меньшем числе перчаток на ту или другую руку среди них может не оказаться ни одной белой перчатки. Если же взять по 21 левой и по 21 правой перчатке, то как среди левых, так и среди правых перчаток непременно найдется по крайней мере одна белая перчатка.

в. 2 левые и 22 правые перчатки (или, наоборот, 2 правые и 22 левые). Указанных количеств достаточно, поскольку среди 22 правых перчаток заведомо найдутся по 2 белые и по 2 черные перчатки, которые вместе с 2 любыми левыми перчатками образуют 2 пары. Всего в этом случае из коробки необходимо извлечь 24 перчатки.

Меньшего числа перчаток может оказаться недостаточно, поскольку для составления двух пар необходимо иметь 2 левые и 2 правые перчатки,

причем либо левых, либо правых перчаток должно быть не меньше 21 (если каких-то перчаток взять меньше, то все правые перчатки могут быть одного цвета, а все левые — другого),

но если взять 21 перчатку на одну руку и не добавит к ним ни одной перчатки на ту же руку, то составить 2 пары перчаток нам удастся не всегда (20 перчаток на другую руку может не хватить; например, если взять 20 белых и 1 черную перчатку на правую руку и 20 черных перчаток на левую руку, то из них можно составить лишь 1 пару).

[Утверждения, содержащиеся в трех последних абзацах, весьма важны, и без них доказательство было бы неполным. Действительно, выясняется, будто существует другое решение задачи: не нужно извлекать из коробки 22 правые перчатки, достаточно взять 21 правую и 21 левую перчатку (ведь и среди правых, и среди левых перчаток найдется по одной перчатке каждого цвета и, следовательно, из них заведомо можно составить 2 пары перчаток разного цвета).

Но сколь ни убедительны эти рассуждения, они не приводят к новому решению. И дело здесь вовсе не в том, что, взяв по 21 правой и по 21 левой перчатке, мы не всегда сумеем составить 2 пары (выше было показано, что это всегда возможно). Препятствием на пути к получению нового решения служит число перчаток: их нужно взять $21 + 21 = 42$, что больше 24. Таким образом, не выполняется основное требова-

ние: число перчаток, вынимаемых (в темноте) из коробки, должно быть наименьшим из возможных.]

г. 22 левые и 22 правые перчатки. Действительно, соотношение левых и правых перчаток в этой задаче точно такое же, как и соотношение черных и белых чулок в задаче 55, б.

д. 3 левые и 22 правые перчатки (или, наоборот, 3 правые и 22 левые). Действительно, если начать с «выуживания» левых перчаток, то, как показано в решении задачи 55, а, их необходимо взять 3 штуки. Тогда среди левых перчаток по крайней мере 2 перчатки будут одного цвета. Для того чтобы среди правых перчаток можно было найти 2 перчатки того же цвета, из коробки следует взять 22 правые перчатки (см. решение задачи 55, б).

Таким образом, всего из коробки необходимо извлечь 25 перчаток. *Обойтись меньшим числом перчаток невозможно*, поскольку если взять больше 3 (но меньше 22) левых перчаток, то по-прежнему можно утверждать, что среди них заведомо найдутся 2 перчатки одного цвета.

е. 21 левую и 21 правую перчатку. Действительно, при меньшем числе левых или правых перчаток они все могут оказаться одного цвета. Если же выбрать по 21 перчатке на каждую руку, то среди них непременно найдутся по крайней мере 2 перчатки разного цвета (см. конец решения задачи в).

ж. 24 левые и 24 правые перчатки. Действительно, соотношение правых и левых перчаток здесь такое же, как соотношение черных и белых чулок в задаче 55, е. (То, что здесь говорится не о белых, а о черных перчатках, не столь существенно, поскольку и черные, и белые перчатки находятся в одной коробке.)

з. 11 левых и 26 правых перчаток (или, наоборот, 11 правых и 26 левых). Действительно, этого количества перчаток достаточно, поскольку из 11 левых перчаток всегда можно выбрать по крайней мере 6 перчаток одного цвета, а среди 26 правых перчаток непременно найдутся не менее 6 белых и не менее 6 черных перчаток. Таким образом, составить 6 пар перчаток одного цвета удастся во всех случаях.

Всего из коробки требуется извлечь 37 перчаток. *Обойтись меньшим количеством перчаток невозможно*, поскольку если взять больше 11 (но меньше 26) левых перчаток, то среди них будет лишь 6 (по крайней мере 6) перчаток одного цвета и по-прежнему понадобится 26 правых перчаток.

Тем самым доказано не только то, что число извлекаемых из коробки перчаток не может быть меньше 37, но и что не существует другого решения помимо того, которое приведено выше.

и. 5 левых и 25 правых перчаток (или, наоборот, 5 правых и 25 левых). Действительно, такого количества перчаток оказывается достаточно, поскольку среди 25 правых перчаток имеется по крайней мере по 5 белых и по 5 черных перчаток. Следовательно, какого бы цвета ни оказались 5 выбранных из коробки левых перчаток, им всегда можно подыскать пару.

Всего из коробки требуется извлечь 30 перчаток. *Обойтись меньшим количеством перчаток невозможно*, поскольку и левых, и правых перчаток должно быть не меньше 5. Если выбрать менее 25 правых перчаток, то 20 левых может не хватить для составления 5 пар (так произойдет, например, если взять 20 белых и

4 черные перчатки на правую руку и 20 черных перчаток на левую руку). Таким образом, если не наберется 25 перчаток какого-нибудь одного цвета, то и 44 перчаток может оказаться мало.

[В этой связи важно было бы проверить, что произойдет, если уменьшить большее из двух чисел и увеличить меньшее: *можно ли составить 5 пар из 21 левой и 24 правых или из 22 левых и 23 правых перчаток* (и, разумеется, из «обратных» вариантов, получающихся при замене левых перчаток на правые и наоборот)? Но *хотя большее из двух чисел уменьшается, их сумма — общее число изымаемых из коробки перчаток — возрастает.*]

Итак, мы доказали не только то, что любое число перчаток меньше 30 может оказаться недостаточным для составления 5 пар, но и что число 30 допускает единственное разбиение на слагаемые: $5 + 25$.

к. 26 левых и 26 правых перчаток. Действительно, соотношение левых и правых перчаток здесь такое же, как и соотношение черных и белых чулок в задаче 55, з.

Примечание 1. Мы видели, что решения задач г, ж и к можно свести к решению *одной и той же* задачи о чулках. Возникает вопрос: в каких случаях решение задач о перчатках удастся аналогичным образом свести к решению задачи о чулках?

При таком сведении 2 перчатки одного цвета (как левые, так и правые) соответствуют одной паре чулок. Следовательно, надеяться на то, что задачу о перчатках удастся свести к задаче о чулках, можно лишь в том случае, если по условиям задачи требуется составить четное число пар перчаток каждого цвета.

Кроме того, и в коробке должно храниться четное число перчаток каждого цвета. Впрочем, от последнего условия можно отказаться, если число пар перчаток того и другого цвета достаточно велико (с чулками дело обстоит аналогичным образом: если в коробке хранится достаточно много чулок, то совершенно не важно, сколько из них одного и сколько другого цвета; число пар каждого цвета может быть даже нечетным).

Если оба эти условия соблюдены и число пар перчаток каждого цвета, которые требуется составить, задано отдельно (независимо от числа пар перчаток другого цвета, конкретно и вполне определенно), то задачу о перчатках, как нетрудно видеть, удастся свести к задаче о чулках. Именно так и получилось с задачами г, ж и к.

Итак, в любом случае мы приходим к двум выводам.

I. Свести задачу о перчатках к задаче о чулках заведомо невозможно, если по условиям задачи требуется составить нечетное число пар перчаток лишь одного какого-нибудь цвета.

II. Наоборот, если

1) *в коробке хранится по четному числу пар перчаток каждого цвета или число пар достаточно велико,*

2) *в условиях задачи число пар каждого цвета, которые требуется составить, задано отдельно (независимо от числа пар другого цвета, конкретно и вполне определенно),*

3) число пар каждого цвета четно,
то решение задачи о перчатках можно свести к решению соответствующей задачи о чулках.

(Предполагается, что задача о чулках уже решена или известен алгоритм, «рецепт», позволяющий получить решение.)

Действительно, если по условиям задачи требуется составить вполне определенное число пар перчаток каждого цвета, то это означает, что должно быть вполне определенное число правых и левых перчаток каждого цвета, причем тех и других поровну. (*)

Следующее утверждение почти очевидно:

если в условиях задачи сказано, сколько перчаток и какого цвета необходимо выбрать на левую и на правую руку, то правые перчатки можно выбирать совершенно независимо от левых (и наоборот). (**)

Действительно, множество левых (или правых) перчаток, отобранных в темноте, либо содержит нужное число перчаток требуемого цвета, либо не содержит, и перчатки «на другую руку» здесь ничего изменить не могут.

Утверждения (*) и (**) позволяют без труда доказать сформулированную выше «теорему» о сводимости задач о перчатках к задачам о чулках, поскольку выбор перчаток на любую из рук представляет собой независимую задачу. Но в свою очередь выбор четного числа пар правых или левых перчаток любого цвета эквивалентен решению соответствующей задачи о составлении пар чулок (того же цвета, число пар чулок вдвое меньше числа пар перчаток). Поскольку должно быть одинаковое число правых и левых перчаток любого цвета, то обе независимые задачи о (левых и правых) перчатках сводятся к одной и той же задаче о чулках.

*

Если в условиях задачи не оговорено, какого цвета должны быть перчатки, из которых требуется составить заданное число пар, то дело несколько усложняется: левые и правые перчатки в этом случае уже нельзя выбирать независимо. Например, если в задаче з (где из перчаток, вынутых в темноте из коробки, требовалось составить 6 пар одного цвета) так же, как и в приведенном выше решении, начать с левых перчаток, то исходная задача будет эквивалентна задаче на составление трех пар чулок того же цвета (все левые перчатки можно считать «чулками»). Но как только мы, отложив 6 левых перчаток какого-нибудь одного цвета, попытаемся подобрать к ним парные правые перчатки, выяснится, что 6 правых перчаток должны быть не просто одного цвета, а именно того самого цвета, какой имеют ранее отложенные левые перчатки.

Может представиться и такой случай, когда выбор левых перчаток приводит к одной, а выбор правых — к другой задаче о чулках (так происходит, например, в задаче д).

Примечание 2. Сравним «ответы» к задачам **д**, **е** и **в**. Задача **в** тесно связана с задачами **д** и **е** и представляет собой как бы их «объединение»: для того чтобы решить задачу **в**, требуется решить либо задачу **д**, либо задачу **е**. Но те, кто думает, будто из решения задачи **в** можно каким-то образом вывести решения задач **д** и **е**, к сожалению, заблуждаются (в чем мы уже успели убедиться). Задача **в** «шире», чем задачи **д** и **е** (выбор разрешается из большего множества, поэтому можно обойтись меньшим числом перчаток), и это обстоятельство находит отражение в ответах.

61. А ЕСЛИ ПОДУМАТЬ?

а. *Нужно взять по 14 левых и правых перчаток (то есть всего 28 перчаток).*

Действительно, и левых и правых перчаток должно быть не менее 5.

Если взять лишь 5 перчаток на одну руку, то они все могут оказаться черными, и поэтому перчаток на другую руку придется взять не менее 25 (иначе из выбранных перчаток нельзя составить 5 пар). Таким образом, всего из коробки придется извлечь не менее 30 перчаток.

Если вместо 5 взять 6, 7, 8 или 9 перчаток на одну руку, то станет только хуже, поскольку перчаток на другую руку по-прежнему придется брать не менее 25.

Если же взять 10 перчаток на одну руку, то на другую руку достаточно выбрать 24 перчатки. Из 10 перчаток по крайней мере 1 перчатка белая. Среди 24 перчаток на другую руку имеется достаточное количество белых (их не менее 15) и заведомо 4 черные перчатки. Следовательно, при любом соотношении черных и белых перчаток среди 10 выбранных на одну руку всегда можно составить 5 пар.

Аналогичным образом можно показать, что *если взять 11 перчаток на одну руку, то на другую руку достаточно выбрать 23 перчатки. Если на одну руку взять 12 перчаток, то на другую руку можно взять всего лишь 22 перчатки. Если на одну руку взять 11 перчаток, то на другую руку достаточно выбрать 21 перчатку.*

Но в каждом из этих четырех случаев общее число перчаток, извлекаемых из коробки, равно 34.

(*) *Если же на одну руку взять 14 перчаток, то и на другую достаточно выбрать лишь 14 перчаток.* Действительно, по крайней мере 5 из 14 перчаток белые. Следовательно, все 5 пар можно составить из белых перчаток. При этом *всего* из коробки *придется* извлечь *лишь* 28 перчаток.

Тем самым мы завершили рассмотрение всех разумных случаев, поскольку выбирать из коробки более 14 левых и правых перчаток, очевидно, было бы бессмысленно.

б. *Эта задача имеет 2 решения: можно взять по 15 правых и левых перчаток или 5 перчаток на одну и 25 перчаток на другую руку. (В обоих случаях из коробки придется извлечь 30 перчаток).*

Анализ различных комбинаций перчаток проводится так же, как в предыдущем случае, поэтому мы лишь приведем «промежуточные» результаты, а все остальное предоставим читателю.

Число перчаток на одну руку	Число перчаток на другую руку	Общее число перчаток, взятых из коробки
5	25	30
6, ..., 10	25	31, ..., 35
11	24	35
12	23	35
13	22	35
14	21	35
15	15	30 (*)

в. Нужно взять 5 перчаток на одну и 25 перчаток на другую руку. (Всего из коробки придется извлечь 30 перчаток).

Как и в предыдущем случае, мы приведем лишь результаты, предоставляя проведение подробного анализа читателю.

Число перчаток на одну руку	Число перчаток на другую руку	Общее число перчаток, взятых из коробки
5	25	30
6, ..., 11	25	31, ..., 36
12	24	36
13	23	36
14	22	36
15	21	36
16	16	32 (*)

Примечание 1. В случае **а** задача допускает единственное решение: 14 правых и 14 левых перчаток. В случае **б** задача по существу имеет 3 решения: 15 правых и 15 левых, 5 правых и 25 левых, 25 правых и 5 левых перчаток. Два последних решения совпадают с решениями задачи в случае **в**.

Примечание 2. «Внутреннее устройство» задач **а**, **б** и **в** становится легкообозримым, если воспользоваться графиками (рис. 108, 109, 110). По осям координат отложены количества левых и правых перчаток, из которых заведомо можно составить 5 пар. Точками обозначены избыточные наборы перчаток: даже уменьшив число входящих в них правых и левых перчаток, мы все равно смогли бы составить те 5 пар, которые требуется подобрать по условиям задачи. Светлыми кружками обозначены наборы перчаток, в которых «с запасом» представлены либо левые, либо правые перчатки (их число можно уменьшить). Черными кружками обозначены наборы перчаток, в которых число перчаток на одну руку нельзя уменьшить без того, чтобы не увеличить число перчаток на другую руку. Те из последних наборов, где число перчаток минимально, соответствуют решениям задачи. Они отмечены двойными кружками.

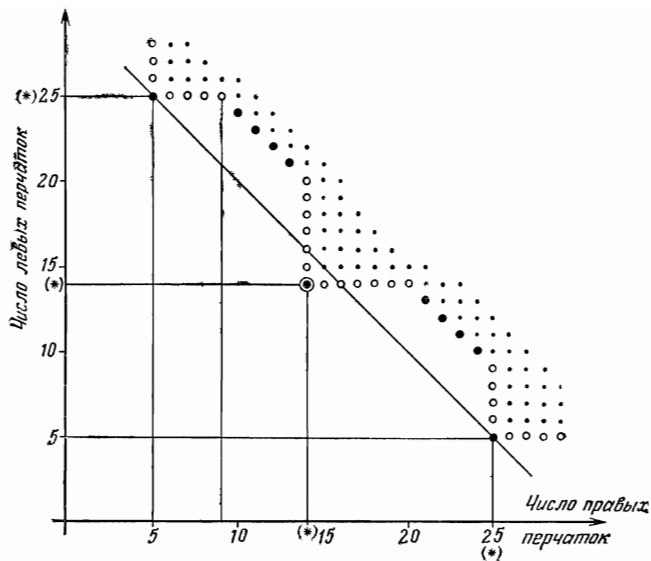


Рис. 108.

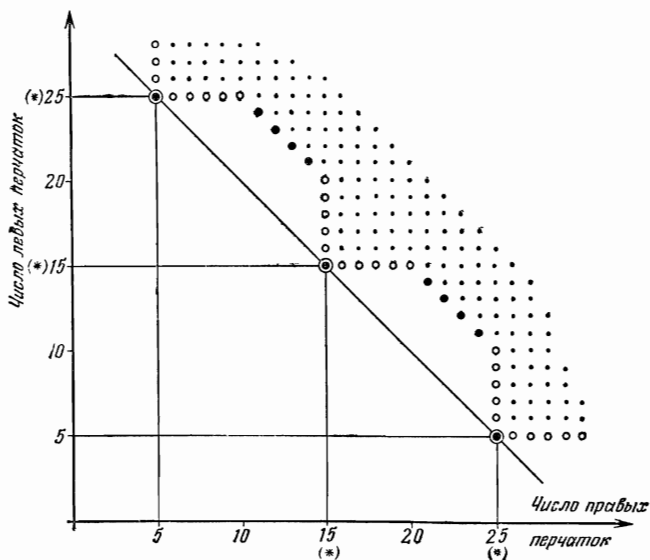


Рис. 109.

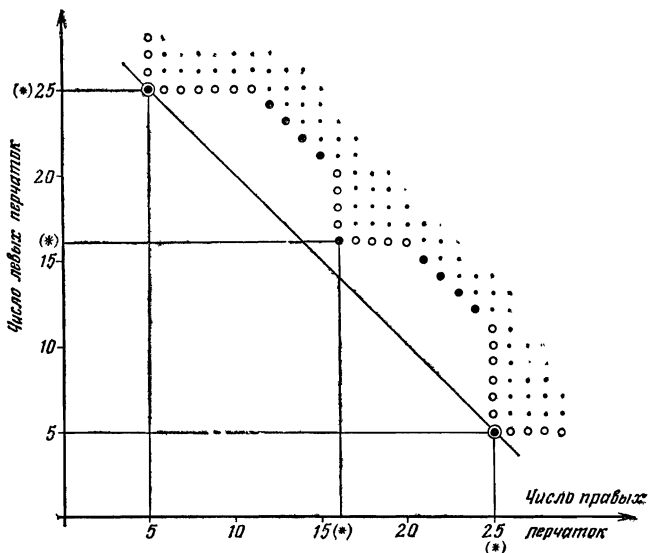


Рис. 110.

Примечание 3. Особого внимания заслуживают наборы перчаток, отмеченные звездочкой (*). Если изменить в них цвет левых или правых перчаток, то число перчаток на другую руку изменится скачком.

62. ОТВЕЧАЙТЕ ПОБЫСТРЕЕ!

В коробке хранятся перчатки четырех «сортов»: 1) белые левые; 2) белые правые; 3) черные левые; 4) черные правые. Перчаток каждого «сорта» в коробке имеется по 20 штук. Из этой «смеси» и приходится выбирать те или иные количества перчаток, позволяющие составить необходимое число пар.

а. 41 перчатку. Действительно, 40 перчаток мало, поскольку они все могут оказаться левыми (или все правыми, или все белыми левыми и черными правыми, или все черными левыми и белыми правыми). Из 41 перчатки по крайней мере 21 перчатка непременно окажется одного цвета, а среди 21 одноцветной перчатки непременно найдутся и левые, и правые (поскольку в коробке хранятся лишь по 20 левых и правых перчаток каждого цвета).

б. 61 перчатку. Действительно, из 60 перчаток 40 могут оказаться черными, а 20 — белыми левыми. Если же взять 61 перчатку, то белых среди них будет по крайней мере 21, а из 21 белой

перчатки уже всегда можно составить одну пару (см. конец решения задачи а).

в. 42 перчатки. Для составления двух пар необходимо взять столько перчаток, чтобы из них можно было составить по крайней мере 1 пару, то есть не менее 41 перчатки. Однако этого количества недостаточно! Действительно, 41 перчатку можно выбрать так, что лишь 1 из них будет левой (или правой). Если же взять 42 перчатки, то либо черных и белых перчаток окажется поровну (по 21 перчатке каждого цвета), либо из имеющихся 42 перчаток можно выбрать 22 перчатки одного цвета (либо черные, либо белые), либо из них можно выбрать 22 перчатки одного цвета. В первом случае нам всегда удастся составить 1 пару белых и 1 пару черных перчаток, во втором — по крайней мере 2 пары перчаток того же цвета, что и 22 отобранные перчатки (действительно, из 22 перчаток одного цвета имеется не более 20 левых и, следовательно, не менее 2 правых, но точно так же можно утверждать, что не менее 2 перчаток из 22 — левые; таким образом, нам всегда удастся составить по крайней мере 2 пары).

г. 62 перчатки. Действительно, если взять 61 перчатку, то 40 из них могут оказаться черными, 20 — белыми левыми и лишь 1 перчатка — белой правой. Если же взять 62 перчатки, то по крайней мере 22 из них непременно будут белыми, а из 22 белых перчаток всегда можно составить по крайней мере 2 пары (см. конец решения задачи в).

д. 43 перчатки. Действительно, из 42 перчаток 40 могут оказаться левыми, 1 перчатка — белой и еще 1 перчатка — черной правой. Если же взять 43 перчатки, то 22 из них непременно будут одного цвета и, следовательно, из них можно составить 2 пары.

е. 61 перчатку. Действительно, среди 60 перчаток может не оказаться ни одной белой правой. Если же взять 61 перчатку, то по крайней мере 21 из них окажется белой и по крайней мере 21 черной, поэтому нам всегда удастся составить по одной паре белых и черных перчаток.

ж. 64 перчатки.

з. 51 перчатку. Действительно, из 50 перчаток 40 могут оказаться левыми, 5 белыми и еще 5 черными правыми. Если же взять 51 перчатку, перчаток какого-нибудь одного цвета наберется не менее 26 и, следовательно, из них можно будет составить по крайней мере 6 пар.

и. 45 перчаток. Действительно, из 44 перчаток могут оказаться лишь 4 правые. Если же взять 45 перчаток, то либо среди них окажется по крайней мере по 20 черных и по 20 белых перчаток, либо наберется более 25 перчаток какого-нибудь одного цвета. В первом случае мы имеем сверх 20 перчаток каждого цвета еще 5 перчаток и, следовательно, всегда можем подобрать им в пару еще 5 перчаток. Во втором случае 5 пар можно составить из перчаток того же цвета, которых наберется более 25.

к. 66 перчаток. Действительно, из 65 перчаток 40 могут оказаться белыми, 20 — черными левыми и лишь 5 — черными правыми. Если же взять 66 перчаток, то среди них найдутся по крайней мере 26 белых и 26 черных и, следовательно, из перчаток каждого цвета можно будет составить по крайней мере 6 пар.

63. РАЗМЫШЛЕНИЯ

I решение. Интуитивно ясно, что при увеличении заказа на пары чулок одного цвета число чулок, извлекаемых в темноте из коробки, может не возрасти. Если наша догадка верна, то задачу можно решить «методом проб»: перебрать достаточно много задач на составление пар чулок и, если удастся, найти среди них соответствующий пример. Настойчивость и терпение непременно будут вознаграждены.

Да, такой случай может представиться. См., например, задачи 58, б и 58, л или 58, в и 58, м.

[Ясно, что «метод проб» не приводит к наиболее изящному решению задачи. Оно должно было бы приводить к примеру, подтверждающему правильность нашей догадки прямым путем, без «лишних» поисков. Такое решение действительно существует.]

II решение. При решении задачи 62, к можно было бы считать, что в коробке находятся «чулки» четырех «цветов»: «белые левые», «белые правые», «черные левые» и «черные правые» (по 20 чулок каждого цвета). Из них нужно было бы выбрать такое количество чулок, которое позволило бы составить по 2 пары «белых левых» и «белых правых» и по 3 пары «черных левых» и «черных правых». Как показывает приведенное выше решение задачи 62, к, того же самого количества чулок хватило бы и на составление 3 пар чулок всех четырех цветов, то есть 3 пар «белых левых», 3 пар «белых правых», 3 пар «черных левых» и 3 пар «черных правых».

64. ДАЛЬНЕЙШИЕ РАЗМЫШЛЕНИЯ

Нет, такого быть не может.

Действительно, предположим, что продавщица, зайдя в подсобное помещение, чтобы отобрать соответствующее число перчаток или чулок, позволяющее составить увеличенное число пар каждого цвета, случайно взяла на один чулок или на одну перчатку меньше, чем следовало. Недостача в одну перчатку или один чулок может сказаться при составлении самое большее одной пары. Предположим теперь, что нам удалось составить новое (большее) число пар каждого цвета, *за исключением, быть может, пар какого-то одного цвета, которых оказалось на 1 меньше, чем нужно.* Но поскольку по условиям задачи число пар каждого цвета должно было возрасти по крайней мере на 1, то это означает, что *исходное число пар каждого цвета заведомо можно составить из тех чулок или перчаток, которые продавщица взяла из корзины.* Следовательно, для составления исходного числа пар достаточно взять на 1 чулок или на 1 перчатку меньше, а для составления большего числа пар каждого цвета необходимо взять по крайней мере на 1 чулок или на 1 перчатку больше.

Примечание. Приведенное выше доказательство основано на рассуждениях, применимых не только к тому типу задач на выбор предметов, «неразличимых в темноте, но легко различимых на свету», в которых речь идет о составлении пар заранее заданного цвета. Но поскольку существует необычайно много разновидностей таких задач, то сформулировать утверждение в наиболее общем виде не представляется возможным.

65. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Взяв из коробки 50 чулок, мы можем не захватить ни одного белого чулка (если извлеченными окажутся все черные и все коричневые чулки), но заведомо «выудим» по крайней мере 5 пар черных чулок (поскольку общее число белых и черных чулок равно 40 и даже если их все вынуть из коробки, то среди 50 извлеченных нами чулок 10 должны быть черными) и по крайней мере 10 пар коричневых (поскольку общее число чулок других цветов — белых и черных — равно 30).

Взяв из коробки 51 чулок, мы можем не захватить ни одной пары белых чулок (если извлеченными окажутся все черные и все коричневые чулки, но из 51 чулка лишь 1 будет белым), но по крайней мере 5 пар черных (даже если мы извлечем все белые и все коричневые чулки, то и тогда среди 51 чулка окажется 11 черных и из них можно будет составить 5 пар) и по крайней мере 10 пар коричневых (поскольку если взять все белые и все черные чулки, то среди 51 чулка окажется 21 коричневый).

Рассмотрение всех остальных случаев мы предоставим читателю. Заполненная таблица имеет следующий вид:

Число чулок, извлеченных в темноте из коробки	Число пар, которые из них можно составить		
	белых	черных	коричневых
50	0	5	10
51	0	5	10
52	1	6	11
53	1	6	11
54	2	7	12
55	2	7	12
56	3	8	13
57	3	8	13
58	4	9	14
59	4	9	14
60	5	10	15

Примечание. Теперь мы можем взглянуть несколько глубже на вопрос, поставленный в задаче 63. После приведенного нами решения этой задачи могли остаться недоуменные вопросы: каким образом одно и то же множество чулок, выбранных в темноте из коробки, впоследствии может «набирать силу» и позволяет нам составлять большее число пар? Разумеется, «сила» множества остается неизменной, просто раньше мы «не спрашивали» у множества, можно ли из него составить большее число пар, и оно «умалчивало» об этом.

66. ЕЩЕ ОДИН ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ЗАКАЗ

Не более 19 пар.

1. *Дополнительный заказ на 19 пар чулок вполне выполним.* Действительно, если прежний заказ был на 2 пары белых чулок,

то Илонка, выполняя его, взяла из коробки 54 чулка. Но тех же 54 чулок достаточно и для выполнения нового заказа, если помимо двух пар белых чулок потребуется еще составить 7 пар черных и 12 пар коричневых чулок (см. таблицу, приведенную в решении предыдущей задачи).

2. *Дополнительный заказ более чем на 19 пар чулок невыполним.* Действительно, если Илонка взяла из коробки не более 54 чулок, то, как видно из таблицы, приведенной в решении предыдущей задачи, полученный ею первоначальный заказ мог быть не более чем на 2 пары белых, 7 пар черных и 12 пар коричневых чулок. В новом заказе не могла идти речь о чулках всех трех цветов, поскольку, как показано в решении задачи 64, извлеченных из коробки чулок для выполнения такого заказа было бы недостаточно. Следовательно, дополнительный заказ мог поступить на чулки самое большее двух цветов и не более чем на $7 + 12$ пар. Действительно, при составлении пар из 54 чулок эти два числа пар дают наибольшую сумму (причем 12 — наибольшее из трех чисел). При числе чулок, меньшем 54, число пар еще более уменьшается, поэтому число пар любого цвета не может быть больше, чем в том случае, когда выбор пар производится из 54 чулок.

[Более того, как станет ясно из решения следующей задачи, число пар каждого цвета и, следовательно, сумма числа пар двух цветов в действительности должны быть *меньше*, чем в том случае, когда выбор пар производится из 54 чулок.]

67. ОБОБЩЕНИЕ I

а. Необходимо рассмотреть наиболее неблагоприятный случай, когда среди извлеченных из коробки чулок представлены чулки не только i -го, но и всех других цветов. Более неблагоприятный случай, очевидно, представиться не может. Среди выбранных из коробки чулок k_i пар i -го цвета окажется в том и только в том случае, если из коробки извлечено *число чулок, равное общему количеству чулок других цветов, и сверх того еще $2k_i$ чулок.*

Последнее утверждение можно записать в виде формулы. Пусть A — общее число чулок, находящихся в коробке, a_i — число чулок i -го цвета, n — число чулок, извлеченных из коробки. Тогда число чулок другого (не i -го) цвета, хранящихся в коробке, равно $A - a_i$ и, следовательно,

$$n = A - a_i + 2k_i.$$

Разумеется, задача имеет решение лишь в том случае, если в коробке находятся не менее k_i пар чулок i -го цвета, то есть если $a_i \geq 2k_i$. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться выведенной нами формулой. Действительно, если $a_i < 2k_i$, то из A мы вычитаем больше того, что прибавляем. Следовательно, $n > A$, то есть из коробки необходимо извлечь больше чулок, чем в ней хранится.

б. Как показано в решении задачи а, из чулок i -го цвета нам заведомо удастся составить k_i пар в том и только в том случае, если число n извлеченных из коробки чулок по крайней мере на $2k_i$ чулок превышает общее число всех находящихся в коробке чулок другого цвета. Следовательно, *из числа n необходимо вычесть*

общее число чулок всех других цветов, которые находятся в коробке. Если полученная разность окажется положительной и четной, то половина ее даст число пар, которые заведомо можно составить из чулок i -го цвета.

Если эта разность не положительна (то есть если число извлекаемых из коробки чулок не больше общего числа чулок всех других цветов, которые находятся в коробке), то нельзя быть уверенным в том, что удастся составить хотя бы одну пару чулок i -го цвета.

Если полученная разность положительна, но нечетна, то, взяв половину от $n + 1$ меньшего числа, мы получим число (k_i) пар чулок i -го цвета, которые заведомо можно составить из n чулок, вынутых из коробки, поскольку можно утверждать, что число n не меньше чем на $2k_i$ превосходит общее число чулок всех других цветов, находившихся в коробке.

Итак, подведем итоги. Пусть в коробке находятся A чулок и a_i из них i -го цвета. Тогда, взяв в темноте («не глядя») из коробки n чулок, мы заведомо получим

$$k_i = \frac{n - (A - a_i)}{2} = \frac{n + a_i - A}{2}$$

пар чулок i -го цвета, если это число целое и положительное, или

$$k_i = \frac{n - (A - a_i)}{2} = \frac{n + a_i - A - 1}{2}$$

пар чулок i -го цвета, если это число целое и положительное (приведенное выше число при этом не будет целым). Возможно, что пар чулок i -го цвета удастся получить и больше, но утверждать это с уверенностью нельзя. Ни одной пары чулок i -го цвета не удастся составить в том случае, если число

$$k_i = \frac{n - (A - a_i)}{2} = \frac{n + a_i - A}{2}$$

не положительно.

[Понятие целой части числа (см. примечание к задаче 25) позволяет представить полученные результаты в более компактном виде:

$$k_i = \begin{cases} \left[\frac{n + a_i - A}{2} \right], & \text{если это число положительно,} \\ 0, & \text{если оно не положительно.} \end{cases}$$

Примечание. Нетрудно видеть, что если в выражении

$$n = A - a_i + 2k_i,$$

выведенном в п. а, числу k_i придавать дробные значения, то результаты будут получаться неверными. Так происходит потому, что k_i имеет смысл лишь при целых значениях.]

68. ОБОБЩЕНИЕ II

а. Число чулок каждого цвета нельзя взять меньше, чем следует из соотношения

$$n = A - a_i + 2k_i,$$

выведенного для чулок i -го цвета (см. решение предыдущей задачи, часть а). Если представить это соотношение в виде

$$n = A - (a_i - 2k_i),$$

то ответ можно «вычитать» прямо из него. Действительно, назовем разность $a_i - 2k_i$ (число чулок i -го цвета, оставшихся в коробке после того, как из нее извлечено заданное число чулок i -го цвета) *остатком i -го цвета*. Тогда ответ, «вычитанный» из приведенного выше соотношения, гласит: чулок необходимо извлечь *столько, чтобы из них заведомо можно было составить нужное число пар чулок того цвета (или тех цветов), у которого остаток наименьший*.

б. Ответ на этот вопрос следует из ответа к предыдущей части задачи. Если дополнительный заказ уменьшает наименьший из остатков всех цветов, сохранившихся от прежнего заказа, то для выполнения его из коробки придется взять новую партию чулок (столько чулок, на сколько уменьшится наименьший остаток). Если дополнительный заказ оставляет наименьший остаток неизменным, то для выполнения нового заказа достаточно тех чулок, которые уже извлечены из коробки.

Примечание. По существу, мы заново решили задачу 64, а. Действительно, если на чулки каждого цвета поступил дополнительный заказ, то остаток каждого цвета должен уменьшиться, поэтому для выполнения заказа из коробки необходимо извлечь столько чулок, сколько требуется для составления нужного числа пар того цвета, остаток которого наименьший.

69. НОВЫЕ РАЗМЫШЛЕНИЯ

Нет, новые задачи не возникнут. Действительно, рассортируем мысленно чулки и перчатки (предварительно разделив последние на левые и правые) сначала по цвету, а затем по размеру. Чулки и перчатки одного «сорта» (одного цвета и размера) ничем не отличаются друг от друга. Следовательно, каждый такой «сорт» по существу можно рассматривать как своего рода «цвет» в старых задачах, а только «цвет» и важен для решения задачи: ведь из перчаток и чулок, различающихся между собой по размерам, так же как из перчаток и чулок различного цвета, невозможно составить пару.

Примечание 1. Если кто-нибудь все же захочет включить в рассмотрение размеры чулок и перчаток и расширит избранный нами тип задач на случай, когда размеры левой и правой ноги или руки не совпадают, а также станет считать, что чулки и перчатки, образующие пару, не обязательно должны быть одного цвета, то он действительно придет к новым задачам. Однако те же самые задачи возникнут при составлении

пар чулок и перчаток одного размера, но различных цветов — необходимых деталей туалета цирковых клоунов.

Примечание 2. Вообще говоря, не существует принципиального различия между такими признаками, как цвет, размер, фасон и так далее. Если рассортировать чулки или перчатки так, что в одну группу попадут изделия, не отличающиеся друг от друга ни по одному из признаков, то задача на составление пар по существу сведется к задаче на составление пар чулок или перчаток соответствующего числа цветов.

У перчаток имеется еще один дополнительный признак: они бывают левыми и правыми. Тем не менее задачи на составление пар перчаток сводятся к задачам на составление пар чулок, в которых из чулок одних «цветов» (например, из «белых правых» с «белыми левыми») разрешается составлять пары, а из чулок других «цветов» (например, из «черных правых» с «черными левыми») составлять пары запрещается.

Часть VI

70. СПРАВЕДЛИВЫЙ РАЗДЕЛ

[Пусть один из золотоискателей делит намытый песок, а двое других выбирают себе долю по вкусу. Необходимо следить лишь за тем, чтобы каждый из них выбирал свою часть песка независимо от другого. Это позволит пресечь все попытки создания «коалиций», когда двое сговариваются и действуют против третьего. Разумеется, решение задачи необходимо найти и в том случае, если двое злоумышленников все же сговорятся между собой.]

Назовем того из трех золотоискателей, кто делит кучу намытого песка на 3 равные части, «раздатчиком», а тех двух, кто выбирает, какую часть взять себе, «приемщиками». Каждый из двух приемщиков отмечает те из трех кучек, которые, по его мнению, удовлетворяют условиям справедливого раздела, то есть составляют $\frac{1}{3}$ всего намытого песка. По крайней мере 1 кучка непременно будет отмечена (поскольку все 3 кучки не могут содержать менее $\frac{1}{3}$ песка).

а. Если найдутся 2 различные кучки, одну из которых сочтет приемлемой один, а другую — другой приемщик, то раздел золотого песка можно считать завершенным: каждый приемщик берет себе ту из двух кучек, которая ему приглянулась, а третий золотоискатель, исполнявший обязанности раздатчика и поэтому лишенный права выбора, забирает оставшуюся кучку золотого песка.

б. Предположим теперь, что найти 2 такие различные кучки не удалось. Это означает следующее: каждый из приемщиков счел, что условиям справедливого раздела удовлетворяет лишь 1 из 3 кучек,

причем оба приемщика отметили одну и ту же кучку золотого песка.

В этом случае 2 остальные кучки песка с точки зрения обоих приемщиков неприемлемы, то есть каждая кучка содержит менее $\frac{1}{3}$ намытого совместными усилиями песка. Следовательно, любую

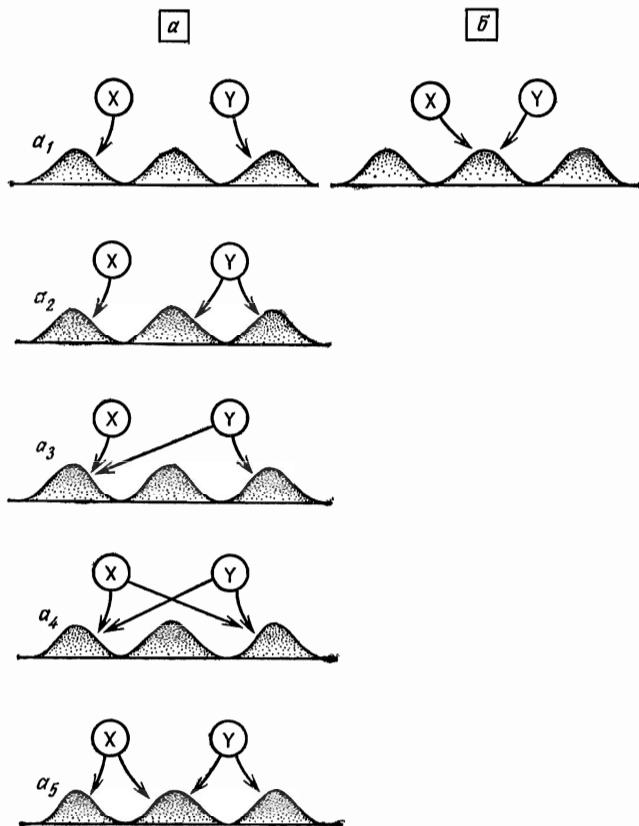


Рис. 111

из этих кучек можно оставить раздатчику. Поскольку она составляет менее $\frac{1}{3}$ всего песка, то в двух остальных кучках содержится более $\frac{2}{3}$ всего золотого песка. Разделив их между собой по уже известному рецепту справедливого раздела на двоих, приемщики тем самым завершат справедливый раздел на троих.

[После того как раздатчик получит свою долю золотого песка, один из приемщиков выступит в роли нового раздатчика: он

разделит оставшийся золотой песок на две части, а второй приемщик выберет ту из частей, которая ему больше понравится.] Указанный способ раздела позволяет каждому из трех золотоискателей получить не менее $\frac{1}{3}$ намытого песка.

Интересы раздатчика не будут ущемлены, если он разделит песок на 3 равные части, каждая из которых содержит $\frac{1}{3}$ общего количества намытого золота. (В противном случае ему не остается ничего другого, как обижаться на самого себя.)

Приемщики не должны выбирать ту кучку, которую им не хотелось бы оставлять себе. Если раздатчик разделил песок на неравные кучки, то ему следует отдать ту кучку, от которой откажутся оба приемщика (то есть ту, которая содержит менее $\frac{1}{3}$ золотого песка). Разделив между собой оставшуюся часть песка, приемщики получают не менее $\frac{1}{3}$ всего намытого золота.

Различные варианты раздела, описанные в п. а и б, изображены на рис. 111.

71. ИХ СТАЛО ЧЕТВЕРО

Последовательность действий по существу указана в решении предыдущей задачи. Если после первой же попытки каждый не получит справедливой (то есть удовлетворяющей всех приемщиков) доли, то по крайней мере один золотоискатель заведомо получит «то, что ему причитается» (по единодушному мнению всех приемщиков). Поскольку число золотоискателей, не получивших своей доли, после этого не будет превышать 3, то для справедливого раздела остальной части золотого песка они могут воспользоваться готовым рецептом.

Итак, один из золотоискателей («раздатчик») делит весь золотой песок на 4 равные части, а трое других («приемщики») выбирают ту из кучек, которая им понравится. Каждый из приемщиков отмечает те из 4 кучек, которые, по его мнению, удовлетворяют условиям справедливого раздела (то есть содержат не менее $\frac{1}{4}$ намытого золота). По крайней мере 1 из 4 кучек будет отмечена всеми приемщиками.

Далее возможны 3 случая.

I. *Какая-то кучка не отмечена* одним из приемщиков. Эту кучку приемщики должны оставить раздатчику, а золотой песок из трех остальных кучек разделить заново между собой так, как это сделали трое золотоискателей в решении предыдущей задачи.

II. *Ни одна кучка* золотого песка не осталась без отметки хотя бы одного из приемщиков, но какая-то кучка отмечена лишь одним приемщиком. Тогда эту кучку нужно отдать тому приемщику, который ее отметил, и задача снова сведется к предыдущей задаче (о справедливом разделе золотого песка между тремя золотоискателями).

III. *Все кучки* песка отмечены по крайней мере двумя приемщиками. Общее число «отметок» в этом случае не меньше $2 \cdot 4 = 8$. Следовательно, заведомо найдется приемщик А, поставивший по крайней мере 3 отметки (в противном случае общее число отметок не превышало бы $3 \cdot 2 = 6$), а какой-то из двух остальных приемщиков (назовем его Б) должен был поставить по крайней мере 2 отметки (в противном случае общее число отметок не превосходи-

ло бы $4 + 2 \cdot 1 = 6$, поскольку А не мог отметить более 4 кучек). Следовательно, если третий приемщик В получит ту кучку, которую он отметил (по крайней мере одна такая кучка непременно найдется), то для приемщика Б останется по крайней мере 1 из отмеченных им 2 кучек, а после того, как Б заберет свою долю, для А останется по крайней мере 1 из отмеченных им кучек. Четвертую кучку, которая останется после того, как все приемщики возьмут себе по кучке золотого песка, можно с их общего согласия оставить раздатчику. Тем самым справедливый раздел золотого песка на 4 части будет завершен.

Нам осталось еще показать, что при таком способе раздела каждый из 4 золотоискателей может получить не менее $\frac{1}{4}$ намывного ими золотого песка. Для этого необходимо лишь слово в слово повторить два последних абзаца из решения предыдущей задачи, заменив $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{4}$.

72. ОТ ДВУХ ДО...

На первый взгляд кажется, что решения двух предыдущих задач должны допускать обобщение на любое число участников раздела. Однако довольно скоро выясняется, что это не так. Если говорить о способе раздела, использованном в решении задачи 70, то нетрудно видеть, что при увеличении числа участников справедливого раздела сложность его быстро возрастает, поэтому от обобщения его на случай произвольного числа участников раздела разумнее отказаться. Рассуждения, использованные нами в решении задачи 71, оставляют кое-какие надежды на обобщение, но этим надеждам не суждено сбыться, поскольку в III случае эти рассуждения не проходят, даже если число участников раздела достигает 5.

Отсюда напрашивается вывод, что обобщение способов справедливого раздела на случай произвольного числа участников станет возможно лишь при условии, если ранее использованные нами методы удастся подвергнуть коренной «реконструкции», избежав при этом чрезмерного усложнения. Кое-какие возможности открылись бы перед нами, если бы, например, «раздатчик» заботился не о всех «кучках» сразу, а сосредоточил свое внимание на какой-нибудь одной части.

Пусть n — число участников раздела. Тогда каждый из них должен получить $1/n$ всего песка. Справедливый раздел золотоискатели могут осуществить следующим образом.

Прежде всего каждый золотоискатель получает свой номер от 1 до n (порядок, в котором производится нумерация участников раздела, несуществен). Затем они переносят весь золотой песок в какое-нибудь помещение, насыпают его посередине, а сами собираются на левой или на правой половине помещения (обозначим ту половину, на которой собрались золотоискатели, А). Первый золотоискатель подходит к куче золотого песка, отсыпает из нее часть, составляющую, по его мнению, $1/n$ общего количества песка, и становится рядом с ней. После этого он опрашивает поочередно в порядке возрастания номеров всех золотоискателей, находящихся на половине А (то есть начинает с золотоискателя с наименьшим номером и кончает золотоискателем с наибольшим номером, не

пропуская никакого), согласны ли они, чтобы он взял себе ту часть песка, рядом с которой стоит. Те, кто не возражает против этого, переходят на другую половину помещения, которую обозначим В (рис. 112).

Если все согласны, то золотоискатель, стоящий посреди помещения рядом с отсыпанной им частью песка, получает ее.

Если же имеются возражения, то среди тех золотоискателей, кто не согласен, всегда можно найти человека с наименьшим номером. Он первым заявил протест. Пусть его номер равен T_1 . Возражение T_1 -го золотоискателя, очевидно, означает, что, по его мнению, золотоискатель, стоящий посреди помещения, отсыпал себе больше, чем $1/n$ всего песка: T_1 -й золотоискатель, должно быть, хотел бы, чтобы эта кучка досталась ему. Более того, поскольку, по

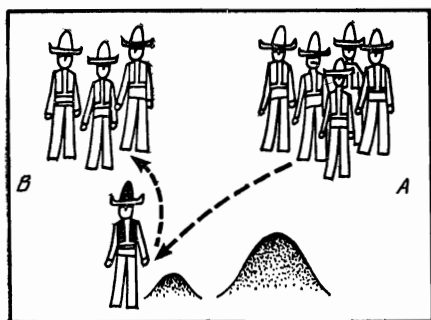


Рис. 112.

его мнению, она чрезмерно велика, из нее необходимо отсыпать «излишек» песка — то количество, на которое она превышает $1/n$. Отсыпав указанное T_1 -м золотоискателем количество золотого песка в оставшуюся кучу (содержащую $(n-1)/n$ намытого золотоискателями песка), тот, кто стоял посреди помещения, переходит на половину В, а его место рядом с «более справедливой» порцией песка занимает T_1 -й золотоискатель (рис. 113).

Он продолжает опрашивать тех, кто еще остался на половине А, и если поступает хотя бы один протест, все повторяется сначала (то есть он сам переходит на половину В, а его место занимает очередной «несогласный» с наименьшим номером) до тех пор, пока на половине А остается хотя бы 1 человек. Рано или поздно наступит такой момент, когда золотоискатель будет стоять посреди помещения рядом с горкой золотого песка, отсыпанного из общей кучи, а все остальные золотоискатели окажутся на половине В. Тогда золотоискатель, стоящий посреди помещения, получает ту горку золотого песка, рядом с которой он находится, а золотоискатели, собравшиеся на половине В (их $n-1$ человек) повторяют всю описанную выше процедуру с оставшейся кучей золотого песка. После второго «цикла» останется $n-2$ золотоискателей, после следующего (третьего) — $n-3$ золотоискателей и так далее. Вся про-

цедуру необходимо повторять до тех пор, пока каждый золотоискатель не получит причитающуюся ему долю золотого песка.

Нам остается еще проверить, правильно ли полученное решение и удовлетворяет ли оно условию справедливого раздела, выделенному в условиях задачи 70 курсивом: может ли каждый участник раздела получить не менее $1/n$ общего количества золотого песка (или, если он все же получит меньшую долю, быть уверенным в том, что это произошло по его собственной оплошности)?

1. Тот золотоискатель (обозначим его T), который последним останется посреди помещения рядом с горкой отсыпанного из общей кучи золотого песка и получит ее, в то время как все остальные золотоискатели соберутся на половине B , не имеет оснований быть

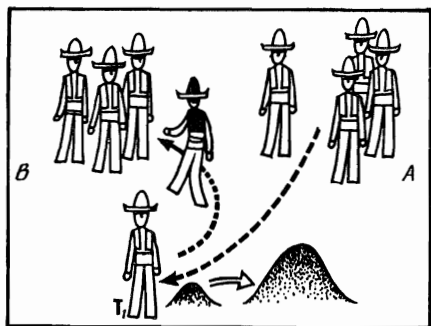


Рис. 113.

недовольным разделом, поскольку он сам выберет ту горку песка, которая ему достанется.

2. На половине B соберутся те золотоискатели, которые согласны либо с тем, чтобы T получил свою горку песка, либо с тем, чтобы кто-нибудь другой получил большую порцию золотого песка. Следовательно, даже если золотоискатель T получит слишком много песка (а им самим для последующего раздела останется слишком мало золотого песка), то виноваты в этом будут лишь они сами.

3. Не могут пожаловаться и те, кто отсыпал себе порцию золотого песка, вызвавшую возражения у других золотоискателей: поскольку себе они отсыпали больше песка, чем досталось золотоискателю T , то его долю они не могут назвать чрезмерной.

Примечание 1. Описанный в решении способ справедливого раздела позволяет осуществить разбиение любого исходного множества на n (в принципе равных частей). Это означает, что оставшаяся после первого разбиения часть множества содержит не одну, а $n - 1$ часть. Хотя такое «уменьшение» множества в общем ничего не меняет, тем не менее «отщепление» $1/n$ исходного множества позволяет легче оценить «на глазок» его величину. Более того, отщепленную часть можно использовать при дальнейшем разбиении множества (внося в случае необходимости соответствующие поправки).

Примечание 2. Предложенный способ справедливого раздела коренным образом отличается от тех, которые были использованы в решениях задач 70 и 71. Он позволяет разделить кучу золотого песка на 3 и на 4 части, но не так, как это было сделано в решениях задач 70 и 71, а совершенно иначе. Следовательно, этот способ позволяет получить *новые решения задачи о справедливом разделе для 3 и 4 человек*. Что же касается случая, когда раздел требуется произвести между двумя людьми, то здесь оба метода совпадают, поскольку в основу нового метода положен именно тот основной принцип, который был извлечен из известного способа традиционного раздела между двумя людьми (в задаче 70 этот принцип выделен курсивом).

Примечание 3. Разумеется, было бы нетрудно применить новый способ справедливого раздела к решению задач 70 и 71, но это не имело бы особого смысла: известно, что если число лиц, участвующих в разделе, равно 3 или 4, то приведенные нами решения задач 70 и 71 проще. Новый способ справедливого раздела отличается лишь большей принципиальной простотой, но при попытке практического применения оказывается весьма громоздким. Почти единственное его преимущество состоит в том, что он применим при любом числе участников раздела.

Примечание 4. Как показывает накопленный нами опыт не все методы решения (и доказательства) допускают обобщение, поэтому от некоторых «соблазнов», возникающих при решении той или иной задачи, приходится отказаться. Прогноз движения вперед часто зависит от того, удастся ли вырваться из привычного хода рассуждений. Поэтому рассчитывать на то, что заданную задачу непременно удастся решить, весьма трудно.

73. ПРЫТКАЯ ЯЩЕРИЦА

Да, возможно.

Такой ответ лишь на первый взгляд может показаться удивительным, своего рода «чудом» потому, что при поверхностном ознакомлении с условиями задачи их можно истолковать так, будто в течение всего шестиминутного периода наблюдений ящерица *за любую минуту* перемещалась на 1 м. Если бы это действительно было так, то ящерица должна была бы совершать равномерное прямолинейное движение со скоростью 1 м/мин и за 6 мин могла бы преодолеть лишь 6, а не 10 м.

Однако условия задачи ничего подобного *не утверждают!* Из условий задачи сделанный выше ошибочный вывод следовал бы лишь в том случае, если бы в каждый момент времени на протяжении всех 6 мин за ящерицей принимались следить все новые и новые наблюдатели, что явно невозможно.

В задаче ничего не говорится о том, что ящерица движется равномерно и прямолинейно. Более того, если принять, что сведения, содержащиеся в условиях задачи, верны, то придется прийти к противоположному выводу: *ящерица не может двигаться равномерно и прямолинейно*. Отдельные участки своего пути она будет

преодолевать то быстрее, то медленнее, и именно из таких неоднородных «кусков» нам необходимо ухитриться каким-то образом «сшить» решение.

Нетрудно видеть, что минутные промежутки времени, в течение которых следят за ящерицей различные наблюдатели, должны перекрываться. Если бы они не перекрывались, а следовали вплотную один за другим (один промежуток кончался именно в тот момент, когда начинался другой), то все одномоментные сеансы наблюдений мог бы провести один-единственный человек (всего ему пришлось бы провести 6 сеансов наблюдений продолжительностью

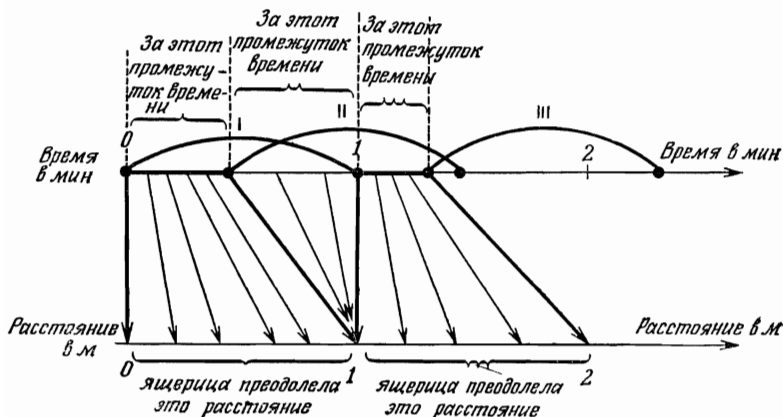


Рис. 114.

по 1 мин каждый), а ящерица успела бы продвинуться только на 6 м.

Итак, нам удалось выяснить следующее: если ящерица способна преодолеть 10 м, то

- 1) она должна двигаться с переменной скоростью;
- 2) по крайней мере 2 минутных промежутка времени, в течение которых наблюдатели следят за ящерицей, должны перекрываться.

Посмотрим, что можно извлечь из этих утверждений.

Предположим, что с самого начала шестиминутного периода, в течение которого производятся наблюдения, ящерица пускается бежать и за несколько секунд успевает продвинуться на 1 м. Затем она замирает и не движется, пока за ней следят одновременно 2 наблюдателя, и лишь после того, как минута, отведенная первому наблюдателю, истечет и он прекратит вести наблюдения, ящерица снова пускается бежать и в течение короткого промежутка времени (пока за ней не начнет следить третий наблюдатель) успевает снова преодолеть 1 м.

Так, то совершая короткие стремительные перебежки, то замирая неподвижно, ящерица преодолевает 2 м, затрачивая на это

чуть больше 1 мин, и перед ней открывается возможность за ту минуту, в течение которой за ней будет следить третий наблюдатель, продвинуться еще на 1 м.

Наглядно схема передвижения ящерицы представлена на рис. 114. На оси времени отмечены минуты, истекшие с начала шестиминутного периода наблюдений. На нижней оси отложены длины отрезков, проходимых ящерицей. Стрелки соединяют каждую точку

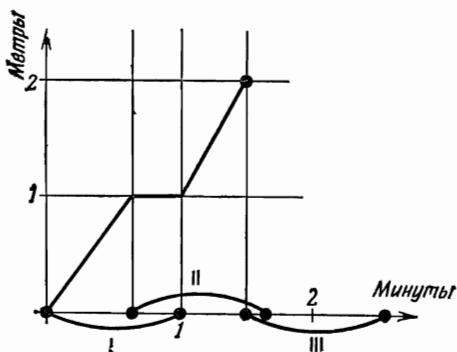


Рис. 115.

на оси времени с той точкой, где в данный момент находится ящерица. Промежутки времени, в течение которых за ящерицей следит тот или иной наблюдатель, отмечены дужками с номером наблюдателя (римские цифры).

Для тех, кто привык (и любит) описывать движение в прямоугольной системе координат, мы приводим на рис. 115 график того же самого движения ящерицы.

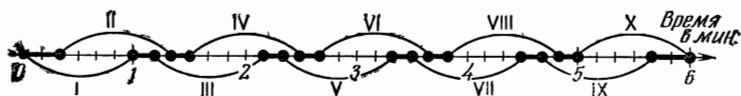


Рис. 116.

Хорошо видно, что *решение у нас в руках* — для получения его ничего больше не требуется. Последовательные минутные периоды наблюдений перекрываются; если «дежурят» одновременно 2 наблюдателя, то ящерица не движется (чтобы не портить обоим наблюдателям «бухгалтерию»), но стоит лишь наблюдателю остаться одному, как ящерица за считанные секунды пробегает 1 м.

Необходимо лишь так «сыграть» на паузах и перебежках, чтобы ящерица могла преодолеть 10 м.

Предположим, что в течение 6 мин за ящерицей следят 10 наблюдателей и очередность наблюдений установлена такой, как показано на рис. 116. (Минутные промежутки, в течение которых за

ящерицей следят отдельные наблюдатели, отмечены дужками с номерами наблюдателей. Нетрудно видеть, что последовательность минутных промежутков, изображенная на рис. 116, удовлетворяет условиям задачи.)

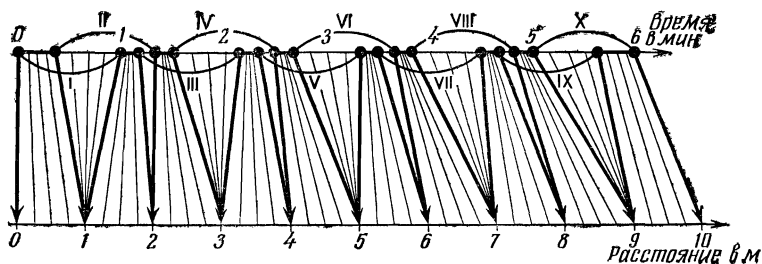


Рис. 117.

Начала и концы минутных промежутков разбивают весь шести-минутный период на меньшие промежутки (их всего 19). На протяжении одних промежутков за ящерицей одновременно следят 2 наблюдателя. В эти промежутки времени ящерица не движется.

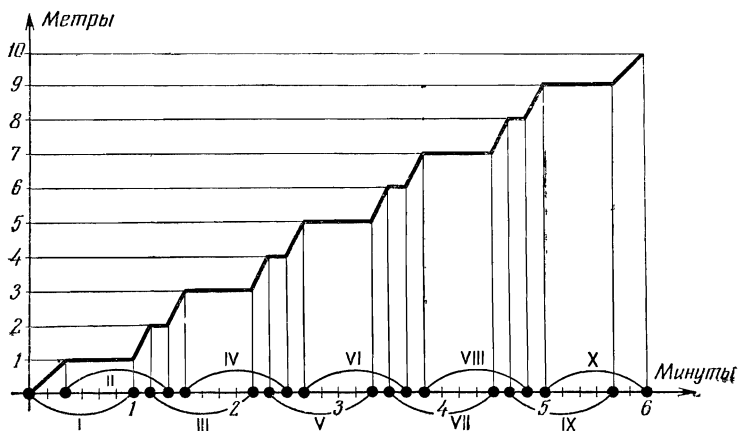


Рис. 118.

На протяжении каждого из остальных промежутков времени за ящерицей следит лишь 1 наблюдатель (эти промежутки отмечены жирными линиями). За каждый такой промежуток ящерица успевает пробежать 1 м. Поскольку всего имеется 10 таких промежутков, то ящерица пробегает 10 м, причем каждый наблюдатель

успевает проследить за тем, как она перемещается лишь на 1 м, после чего к нему присоединяется какой-нибудь другой наблюдатель. За минутное дежурство каждого наблюдателя такой промежуток времени, когда никто, кроме него, не следит за ящерицей, встречается лишь 1 раз.

Два графика движения ящерицы (аналогичные графикам, приведенным на рис. 114 и 115) изображены на рис. 117 и 118.

Примечание. Слова о том, что «ящерица перемещается на столько-то метров» или «успевает пробежать еще 1 м»; следует понимать так, будто ящерица все время движется вперед. Однако такое «одностороннее» толкование совсем не обязательно. Ящерица может двигаться не по прямой. «Прямолинейные» маршруты изображены на рис. 114 и 117 лишь для большей наглядности.

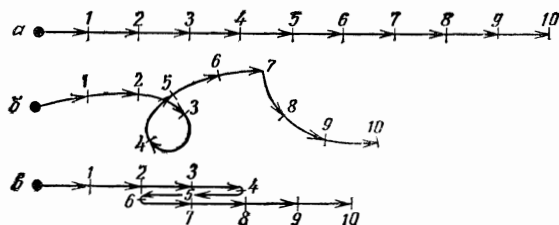


Рис. 119.

В действительности ящерица может перемещаться не только так, как показано на рис. 119, а, но и более сложным образом — например, описывая «петли» (рис. 119, б) или совершая «попятные движения» (рис. 119, в).

Из рис. 119, в видно, каким образом следует измерять расстояние, проходимое ящерицей, в тех случаях, когда на отдельных участках пути она движется не только вперед, но и назад.

74. В ЧЕТЫРЕ ГЛАЗА

«Распорядиться» лишними секундами так, чтобы ящерица успела пробежать еще какое-нибудь расстояние сверх 10 м, *невозможно*.

Действительно, среди наблюдателей непременно найдется такой, который следит за ящерицей на исходе шестиминутного периода наблюдений. Это означает, что он не сводит с ящерицы глаз на протяжении всей шестой минуты. Но тогда четырехсекундный отрезок времени, в течение которого из пятой пары наблюдателей за ящерицей следит лишь второй наблюдатель (отрезок времени, длящийся с 5 мин 16 с до 5 мин 20 с от начала шестиминутного периода наблюдений), целиком лежит внутри минутного промежутка,

составляющего «дежурство» последнего наблюдателя (рис. 120). Отсюда (если придерживаться приведенного в задаче «расписания» движения ящерицы) следует, что за последнюю минуту ящерица

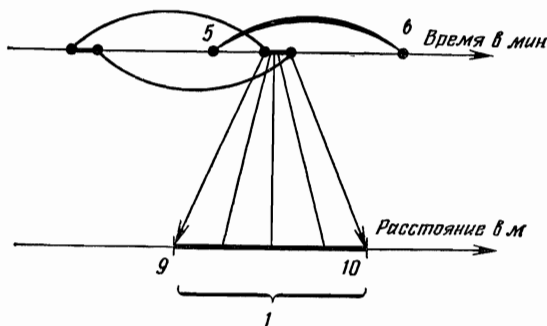


Рис. 120.

может преодолеть лишь тот метр, который она преодолевала раньше (в предыдущей задаче), и последние 40 с шестиминутного периода наблюдений ей придется замереть неподвижно.

75. ДО КАКИХ ПОР ПРОДОЛЖАЮТСЯ ЧУДЕСА?

За 6 мин ящерица не может пробежать более 10 м, это — максимальное расстояние.

[Необходимо соблюдать осторожности! Перед нами стоит гораздо более трудная задача, чем все те, которые нам приходилось рассматривать раньше: ведь теперь мы должны доказать утверждение, справедливое *при любом чередовании наблюдателей и любом «расписании» движения ящерицы.*

За что можно было бы ухватиться?

«Точка опоры», которая позволит нам перевернуть если не мир, то по крайней мере задачу, очевидна: необходимо воспользоваться тем самым обстоятельством, которое на первый взгляд делает невероятным предположение о том, что ящерица за 6 мин может преодолеть 10 м. Таким звеном, позволяющим вытянуть всю цепочку рассуждений, является условие задачи, в котором говорится, что ящерица успевает на глазах каждого наблюдателя переместиться лишь на 1 м. Все это так, но ведь наблюдателей может быть очень много. Против такого замечания трудно что-либо возразить, однако нетрудно убедиться (хотя бы методом проб и ошибок) в том, что *при любом чередовании наблюдателей из них всегда можно выбрать не более 10 таких, минутные дежурства которых охватят весь шестиминутный период наблюдений.* Следовательно, при любом чередовании наблюдателей ящерица за 6 мин успеет продвинуться не более чем на 10 м. Необходимо лишь разработать универсальный, то есть не зависящий ни от «расписания» движения

ящерицы, ни от чередования наблюдателей, способ извлечения этих 10 наблюдателей из общего их числа.

Ясно, что если дежурства нескольких наблюдателей приходятся на одно и то же время (в точности совпадают моменты заступления их на «дежурство» и моменты, когда они перестают следить за ящерицей), то из каждой такой группы наблюдателей можно оставить лишь одного, поскольку он с успехом может следить за ящерицей, а его «дублиеры» своим присутствием лишь затрудняют («загромождают») решение и без того довольно сложной задачи.]

Среди наблюдателей заведомо найдется такой, который следит за ящерицей с самого начала шестиминутного периода наблюдений. Назовем его первым наблюдателем. Из остальных наблюдателей выберем того, кто начинает следить за ящерицей после первого наблюдателя, но не позже, чем тот закончит свое дежурство, и назовем его вторым наблюдателем (рис. 121). (Второй наблюдатель

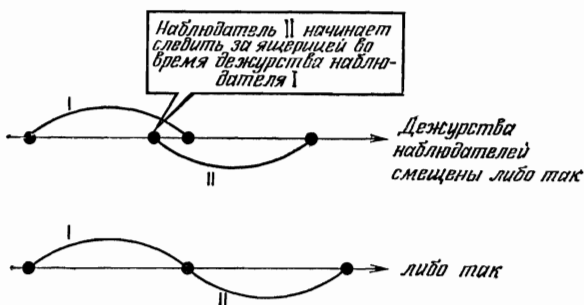


Рис. 121.

непрерывно найдется. Поскольку не все наблюдатели принимаются следить за ящерицей с самого начала шестиминутного периода наблюдений, то заведомо найдутся такие наблюдатели, которые заступают на дежурство позже первого наблюдателя. Среди них можно выбрать по крайней мере одного наблюдателя, который приступает к исполнению своих обязанностей во время дежурства первого наблюдателя, поскольку в противном случае в наблюдениях наступил бы перерыв, отделяющий окончание дежурства первого наблюдателя от момента заступления на дежурство следующего наблюдателя, в течение которого за ящерицей никто не следил бы, — рис. 122.)

Раз второй наблюдатель начинает следить за ящерицей позже первого, то и свое дежурство он заканчивает позже, чем первый наблюдатель.

Из остальных наблюдателей выберем того, кто заступает на дежурство после второго наблюдателя, но не «позже, чем второй наблюдатель перестанет следить за ящерицей», и назовем его третьим наблюдателем. Все сказанное выше о дежурстве второго наблюдателя в равной мере относится и к дежурству третьего на-

блюдателя. Ясно, свое дежурство третий наблюдатель заканчивает позже, чем второй.

Так мы будем действовать до тех пор, пока возможно. Выбрать нового наблюдателя нам не удастся лишь в том случае, когда окончание дежурства последнего из его предшественников совпадет с тем моментом, когда истекает шестиминутный период наблюдений. Во всех остальных случаях мы всегда сможем найти наблюдателя, принимающего следить за ящерицей позже, чем последний из отобранных нами наблюдателей, поскольку кто-нибудь должен следить за ящерицей и после того, как истечет минутное дежурство последнего из отобранных нами наблюдателей. (К тому же заключению можно прийти иначе. Из условий задачи следует, что существовать наблюдатель, дежурство которого заканчивается одновременно с истечением шестиминутного периода наблюдений. Следовательно, до

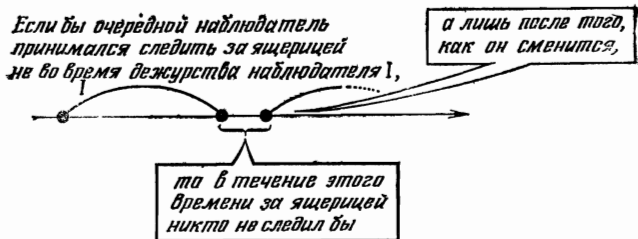


Рис. 122.

тех пор, пока дежурство очередного выбранного нами наблюдателя заканчивается до истечения шестиминутного периода наблюдений, всегда найдется по крайней мере один наблюдатель, дежурство которого начинается и заканчивается позже. Как уже отмечалось при выборе второго и третьего наблюдателей, среди наблюдателей, принимающихся следить за ящерицей позже последнего из выбранных нами наблюдателей, непременно найдется такой, который заступает на дежурство не позже, чем последний из выбранных наблюдателей перестанет следить за ящерицей.)

Процесс выбора наблюдателей после конечного числа шагов непременно завершится, поскольку по условиям задачи общее число наблюдателей конечно. Из сказанного выше следует, что последний из выбранных наблюдателей перестает следить за ящерицей именно в тот момент, когда истекает шестиминутный период наблюдений.

Сам выбор наблюдателей произведен так, что из любых трех наблюдателей с идущими подряд номерами первый и третий наблюдатели не могут следить за ящерицей одновременно, то есть в каждой такой тройке третий наблюдатель заступает на дежурство после того, как первый отбудет свой минутный срок наблюдений. Действительно, третий наблюдатель заступает на дежурство после второго, а в отрезок времени от момента заступления на дежурство второго наблюдателя до истечения той минуты, в течение которой за ящерицей следит первый наблюдатель, ни один из

наблюдателей заступить на дежурство не может (поскольку в противном случае он сам был бы вторым).

На рис. 123 изображено, каким образом могут сменять друг друга три выбранных нами наблюдателя с последовательными номерами. Нетрудно видеть, что отмеченная выше общая закономерность («непересечение» во времени дежурств первого и третьего наблюдателей), хотя на первый взгляд ее формулировка может показаться слишком громоздкой, относится ко всем мыслимым вариантам смены трех последовательных наблюдателей и содержится в каждом из этих вариантов.

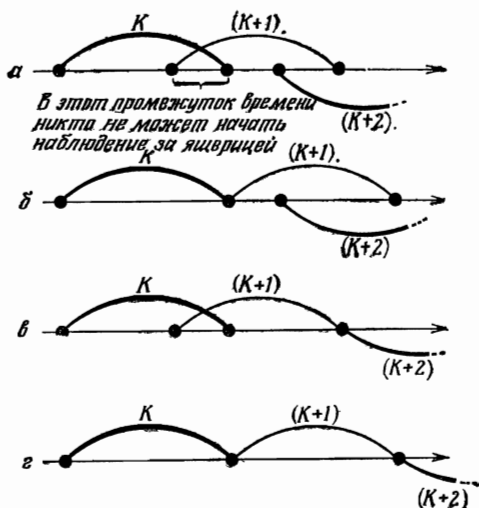


Рис. 123.

Таким образом, наблюдатели с нечетными номерами не могут следить за ящерицей одновременно. Отсюда следует, что число таких наблюдателей не превышает пяти, поскольку между минутными дежурствами пяти наблюдателей с последовательными нечетными номерами заведомо имеются перерывы. Аналогичным образом число выбранных наблюдателей с последовательными четными номерами также не превышает пяти. Отсюда мы заключаем, что общее число выбранных наблюдателей не превышает 10.

К исходу дежурства очередного выбранного нами наблюдателя ящерица может продвинувшись на 1 м дальше, чем она была в тот момент, когда за ней перестал следить предыдущий наблюдатель. Действительно, за время дежурства очередного наблюдателя из числа выбранных ящерица преодолевает 1 м, а конец дежурства предыдущего наблюдателя уже принадлежит тому минутному про-

межутку времени, в течение которого за ящерицей следит очередной наблюдатель. (Все выбранные наблюдатели приступают к исполнению своих обязанностей не позже, чем истечет срок полномочий предыдущего наблюдателя.)

На рис. 124 наглядно изображены те два случая, которые могут представиться при смене одного из выбранных наблюдателей другим. И в том и в другом случае в момент, когда завершается дежурство предыдущего наблюдателя, за ящерицей одновременно следят оба наблюдателя: и предыдущий, и тот, кто его сменяет.

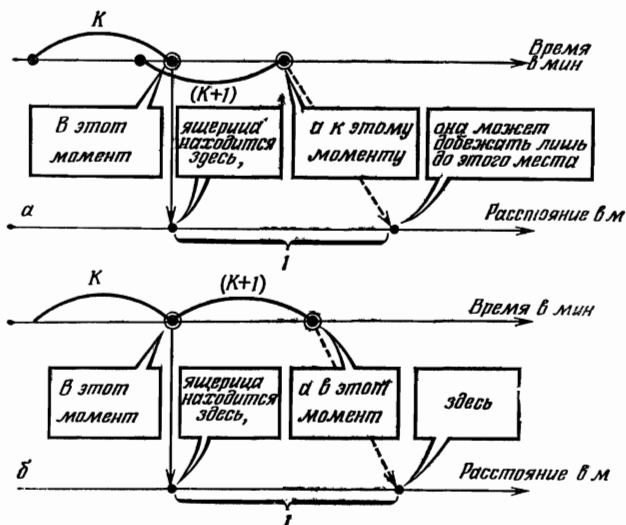


Рис. 124.

К концу дежурства первого из выбранных наблюдателей (то есть к концу первой минуты) ящерица успевает продвинуться ровно на 1 м. Число остальных выбранных наблюдателей не превышает 9. Следовательно, имеется не более 9 моментов времени, когда истекает дежурство какого-нибудь из выбранных наблюдателей, и поэтому к исходу последнего дежурства (к тому моменту, когда истечет шестая минута) ящерица может успеть продвинуться не более чем на 9 м от того места, где она была на исходе первой минуты. Следовательно, всего за 6 мин наблюдений ящерица может преодолеть не более 10 м.

Примечание 1. Доказанное утверждение можно сформулировать несколько иначе, а именно: за время дежурства каждого из наблюдателей с нечетным номером ящерица успевает продвинуться ровно на 1 м, а за каждый из остальных промежутков времени, приходящихся на дежурство наблюдателей с четными номерами, — не более чем на 1 м.

Наглядно это изображено на рис. 125. Разумеется, чередование дежурств отдельных наблюдателей можно осуществить весьма различными способами.

Примечание 2. В приведенном выше доказательстве неоднократно используется конечность числа наблюдателей.

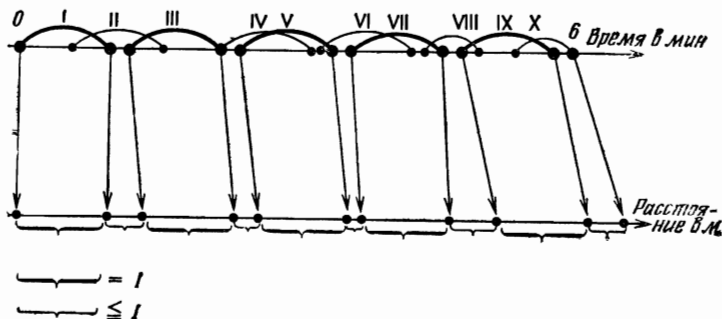


Рис. 125.

Именно поэтому в конце задачи мы особо подчеркнули, что число наблюдателей может быть сколь угодно велико, но конечно.

76. МЕТРЫ И МИНУТЫ

Ящерица успевает пробежать столько метров, сколько «полминут» будут следить за ней наблюдатели, минус 2 [то есть за n минут может преодолеть $(2n - 2)$ м].

Доказать, что за n мин ящерице удастся преодолеть $2n - 2$ м, можно так же, как и в задаче 73.

Доказать, что за n мин ящерица не успеет убежать дальше чем на $(2n - 2)$ м, можно так же, как и в задаче 75.

Подробное проведение всех рассуждений мы предоставляем читателю.

77. БЕЗ ОСТАНОВОК

Нет! Двигаясь непрерывно, ящерица за 6 мин всегда будет пробегать менее 10 м.

Наше утверждение станет очевидным, если мы докажем, что каждой ящерице, перемещающейся без остановок, можно сопоставить другую ящерицу,двигающуюся перебежками и успевающую за то же время преодолеть большее расстояние. Действительно, из решения задачи 75 известно, что ящерица, двигаясь перебежками, за 6 мин не может преодолеть более 10 м. Следовательно, первая ящерица за те же 6 мин может преодолеть лишь менее 10 м.

Выберем из имеющихся наблюдателей тех же самых, которых мы выбрали в решении задачи 75. Для того чтобы ящерица могла преодолеть 10 м, их число должно быть не более 10 (сам по себе этот факт не будет иметь особого значения, поскольку нам понадобятся лишь трое последних из выбранных наблюдателей).

Докажем сначала следующую лемму: если начало дежурства десятого наблюдателя совпадает с концом дежурства девятого наблюдателя, то ящерица никаким способом не может преодолеть 10 м. Действительно, в этом случае пятая минута наблюдений истекает как раз к концу дежурства девятого наблюдателя. Следовательно, если отбросить шестую минуту и девятого наблюдателя, то время передвижения ящерицы сократится до 5 мин, а все остальные условия задачи останутся в силе (рис. 126). Но из решения задачи

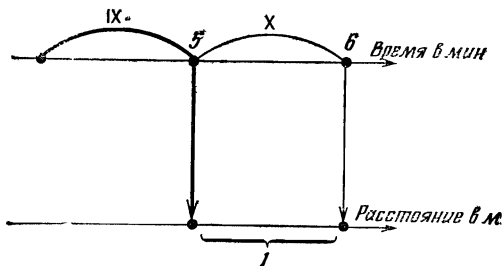


Рис. 126.

76 известно, что за 5 мин ящерица может преодолеть не более 8 м. Поскольку исходное расстояние на 1 м больше, то за 6 мин ящерица может продвинуться не более чем на 9 м. Лемма доказана.

Итак, достаточно рассмотреть лишь такие случаи, когда промежутки времени, на которые приходится дежурство двух последних (девятого и десятого) наблюдателей, частично перекрываются. Для большей наглядности воспользуемся графиком (рис. 127), отложив по осям прямоугольной системы координат время и расстояние, проходимое ящерицей. Безостановочное движение первой («исходной») ящерицы на графике соответствует тому, что к любому более позднему моменту времени она успевает пройти большее расстояние, чем к любому более раннему моменту времени: зависимость пройденного расстояния от времени «строго возрастающая». (На графике эта зависимость показана сплошной линией.)

Предположим, что до конца дежурства восьмого наблюдателя вторая ящерица движется точно так же, как первая, а затем обгоняет первую и к началу дежурства десятого наблюдателя преодолевает расстояние, которое первая ящерица успевает пробежать лишь к концу дежурства девятого наблюдателя. (На графике зависимость расстояния, проходимого второй ящерицей, от времени показана пунктиром.) Поскольку к концу пятой минуты вторая ящерица уже пробежала тот метр, который она должна преодолеть, пока за ней следит девятый наблюдатель, она до самого конца дежурства девятого наблюдателя остается на месте.

С того момента, когда первая ящерица поровняется со второй, до конца шестой минуты вторая ящерица может пробежать 1 м, поскольку до этого момента с самого начала дежурства десятого наблюдателя она не двигалась. Первая ящерица за оставшееся время может преодолеть меньшее расстояние и снова отстанет от второй, так как она движется без остановок и часть того метра, который ей по условиям задачи разрешается пройти за время дежурства десятого наблюдателя, успевает «израсходовать» за промежуток времени, отделяющий начало дежурства десятого наблюдателя (пятая минута) от конца дежурства девятого наблюдателя.

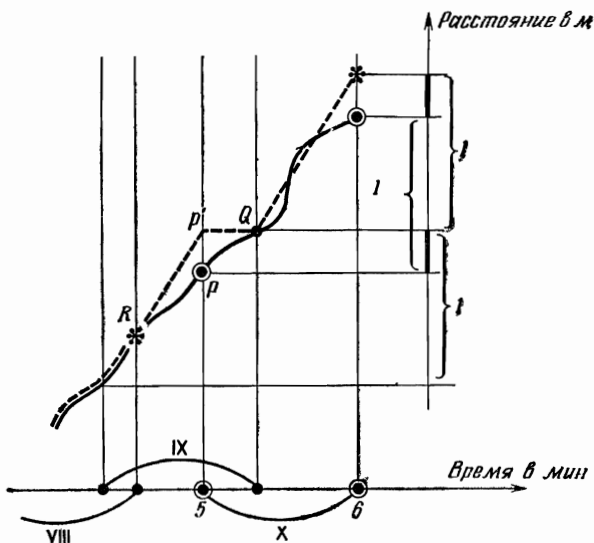


Рис. 127.

Итак, независимо от того, как распределены во времени минутные дежурства выбранных наблюдателей и какова зависимость от времени расстояния, проходимого первой ящерицей (движущейся непрерывно, без остановок), вторая ящерица за те же 6 мин успевает преодолеть большее расстояние, чем первая. Следовательно, максимальное расстояние, которое способна преодолеть за 6 мин первая ящерица, меньше 10 м.

Примечание 1. Во избежание недоуменных вопросов подчеркнем, что доказанное нами утверждение отнюдь не означает, будто при одном и том же графике дежурств выбранных наблюдателей вторая ящерица проходит большее расстояние, чем первая. Доказательство такого утверждения было бы сложно и не вызывается необходимостью. Наши намерения были более скромными: нас интересовало лишь, может ли первая ящерица за 6 мин преодолеть 10 м. Мы стремились доказать,

что путь первой ящерицы всегда будет короче 10 м. Для этого нам и понадобилась вторая ящерица, движение которой на протяжении всех 6 мин было строго согласовано с движением первой. Сравнивая путь, пройденный первой и второй ящерицами, мы установили, что за одно и то же время (6 мин) вторая преодолевает большее расстояние, чем первая. (То, что вторая ящерица, вынужденная часть пути строго следовать движению первой, не убегает на максимальное расстояние, не столь важно.) Движение второй ящерицы не должно непременно соответствовать графику дежурств выбранных наблюдателей, следящих за первой ящерицей. Важно лишь, чтобы при любом графике дежурств вторая ящерица могла преодолевать не более 10 м. За движением второй ящерицы, строго говоря, должны следить совсем другие наблюдатели с иным графиком дежурств. Лишь для удобства сравнения мы рассмотрели движения первой и второй ящериц при одних и тех же наблюдателях.

Примечание 2. Вторая ящерица не обязательно должна двигаться перебежками и часть времени стоять на месте, поскольку требуется лишь доказать, что первая ящерица за 6 мин преодолевает не максимальное расстояние, то есть что какая-то другая ящерица преодолевает за то же время большее расстояние. Для этого достаточно проследить за тем, чтобы точка P' на графике (рис. 127) была расположена выше точки P . Тогда за последнюю минуту вторая ящерица сможет подняться на 1 м из точки P' , а первая — лишь из расположенной ниже точки P .

78. НЕ СТОЛЬ ПРИСТАЛЬНОЕ ВНИМАНИЕ

Может.

Если число наблюдателей не меньше 6, то ящерица может за 6 мин преодолеть столько метров, сколько наблюдателей следят за ней. Поскольку число наблюдателей можно выбрать сколь угодно большим, то это означает, что за 6 мин ящерица может преодолеть любое расстояние (каким бы числом метров оно ни выражалось).

Пусть k ($k \geq 6$) — число наблюдателей. На рис. 128 показано, как должны распределяться во времени дежурства наблюдателей для того, чтобы ящерица могла преодолеть k м. (На рис. 128 $k = 12$. Приводимые ниже рассуждения носят общий характер и не зависят от этого конкретного значения k .)

Каждый из наблюдателей в течение первых минут должен следить за ящерицей по $1 - 1/k$ мин, причем дежурства отдельных наблюдателей следует распределить так, чтобы они полностью заполнили первые 5 мин. Поскольку $k(1 - 1/k) = k - 1 \geq 5$, то этого всегда можно добиться. (Например, начиная с 0 мин 5 наблюдателей могут последовательно сменять друг друга, а остальным наблюдателям придется дежурить одновременно в конце пятой минуты. Нетрудно видеть, что при таком графике дежурств все условия соблюдены.)

Наконец, в течение шестой минуты каждый наблюдатель независимо от другого должен следить за ящерицей по $1/k$ мин. Сменяя друг друга, k наблюдателей продежурят в общей сложности еще 1 мин.

В течение первых 5 мин ящерица стоит на месте (собирается с силами), а в течение последней (шестой) минуты за каждый отрезок времени продолжительностью $1/k$ мин пробегает по 1 м.

Нетрудно проверить, что все условия задачи при этом выполнены.

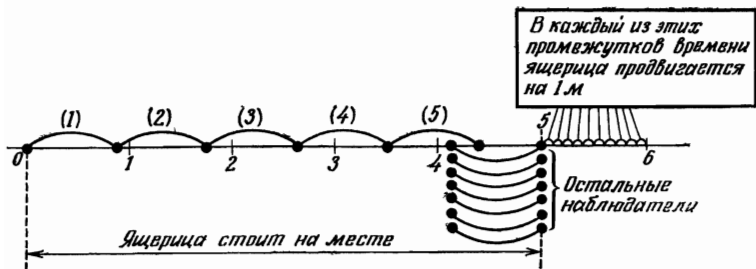


Рис. 128.

[Итак, отказ от условия непрерывности каждого наблюдения приводит к тому, что задача утрачивает смысл. Мы сочли возможным завершить серию бессмысленной задачей лишь для того, чтобы показать, сколь большое значение может иметь в условиях задачи любая «мелочь».]

79. КОЛЬЦЕВОЙ МАРШРУТ I

Длина кольцевого маршрута составляет 3600 км, суммарный запас бензина — 144 л. Этого количества горючего как раз достаточно для того, чтобы проехать по всему маршруту (поскольку расход бензина составляет 1 л на каждые 25 км, то 144 л должно хватить на $144 \cdot 25 = 3600$ км), если на очередной заправочной станции найдется соответствующее количество бензина для бергомобилia. Если Эгон Берг отправится в путь из оазиса F, то ему благополучно удастся проехать по всему кольцевому маршруту.

В правильности такого выбора отправной точки для путешествия вокруг пустыни нетрудно убедиться. На рис. 129 стрелками показано, сколько километров позволяют проехать бергомобиллю те количества горючего, которые остались на заправочных станциях.

Как определить, что отправляться в путешествие по кольцевому маршруту следует именно из оазиса F? Одной лишь ссылки на то, что общего количества бензина хватит на поездку по всему кольцевому маршруту, недостаточно, поскольку бергомобиль может не дотянуть до очередной заправочной станции и застрять между оазисами. (Именно этого не произойдет, если отправиться из оазиса F.)

Первое, что приходит в голову, это выбрать тот оазис, где имеется наибольший запас бензина, и отправиться в путешествие из него. Нетрудно видеть, что такой подход к выбору исходной точки маршрута ошибочен.

Действительно, в рассматриваемом примере наибольший запас (32 л) хранится на заправочной станции оазиса D. Имея в баках

32 л бензина, бергомобиль сможет доехать до оазиса *E*, но, чтобы достичь следующего оазиса *F*, не хватит даже того количества бензина, которым он сможет дозаправиться в оазисе *E*.

Бессмысленно отправляться в путь из тех оазисов, где запасы бензина так малы, что не позволят добраться даже до следующей заправочной станции (таковы оазисы *B*, *C*, *E*, *H* и *I*).

Каким образом из остальных оазисов в качестве исходного пункта путешествия по кольцевому маршруту выбрать именно *F*?

По существу отправную точку маршрута позволяет определить метод проб и ошибок.

Предположим, что бергомобиль выезжает, например, из оазиса *A*. Нетрудно видеть, что Эгон Берг сможет благополучно добраться

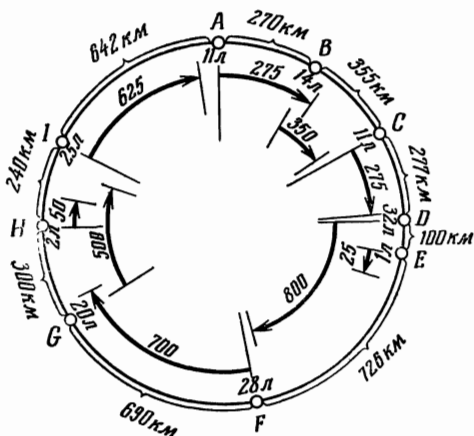


Рис. 129.

до оазиса *B* и, дозаправив машину имеющимся в *B* горючим, доедет до оазиса *C*, но за 2 км до оазиса *D* бензин кончится (рис. 129). Следовательно, отправляться в путешествие из *A* невозможно. В том, что *B* и *C* не подходят для старта автопробега по кольцевому маршруту, мы убедились раньше.

Назначив старт автопробега в оазисе *D*, мы убедимся, что бергомобиль «не дотянет» 1 км до оазиса *F*. Следовательно, оазис *D* не подходит для старта (непригодность оазиса *E* мы установили выше).

Следующей «кандидатурой» является оазис *F*. Отправляясь из него, Берг сможет доехать до оазисов *G*, *H*, *I* и *A*. Нетрудно подсчитать, что, когда он достигнет оазиса *A*, горючего, оставшегося в баках бергомобиля, хватит еще на 3 км пути. Этого количества бензина достаточно для того, чтобы «дотянуть» два отрезка пути длиной 2 и 1 км, оставшиеся «непокоренными» при предыдущих попытках (старта из оазисов *A* и *D*).

80. КОЛЬЦЕВОЙ МАРШРУТ II

И решение. Задача 80 по существу представляет собой обобщение предыдущей. Способ, позволивший нам решить задачу 79, приводит к успеху и на этот раз.

Произведем так называемый *мысленный эксперимент*. Представим себе, что пилот вертолета сбился с заданного курса, потерял ориентировку и, совершив посадку вслепую, доставил Эгона Берга в один из оазисов. Отважный автомобилист, так и не узнавший о грозившей ему опасности, заправил свою машину и весело пустился в путь в направлении, указанном стрелкой. Если ему повезет, то он сумеет объехать весь кольцевой маршрут, а в случае неудачи бензин кончится и машина остановится где-нибудь между оазисами. Поможем Эгону Бергу

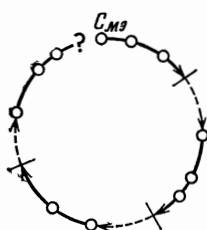


Рис. 130.

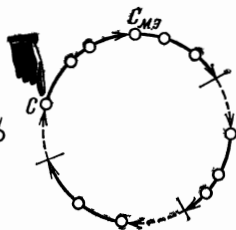


Рис. 131.

- машина едет своим ходом
- - -> машину пришлось толкать
- оазисы

добраться до ближайшего (в направлении, указанном стрелками) оазиса, откуда он, заправив бергомобиль, отправится дальше своим ходом. Возможно, что никаких проблем у Эгона Берга больше не возникнет и он сможет, описав круг, вернуться в исходную точку. Но не исключено, что бензин снова иссякнет и машина застрянет между двумя оазисами. В этом случае Эгону Бергу придется на руках катить свой бергомобиль до ближайшего (в направлении, указанном стрелками) оазиса.

Так, то сидя за рулем, то толкая автомашину, Эгон Берг в конце концов, описав полный круг (надеемся, что его не хватит солнечный удар), возвратится в тот самый оазис, откуда он начал свое путешествие [на рис. 130 этот оазис обозначен $C_{м. в.}$, что означает «старт (мысленный эксперимент)»].

Как Эгон Берг прибудет на место старта своего автопробега: сидя за рулем или толкая бергомобиль? Нетрудно видеть, что последний случай представиться не может. Действительно, если бы баки бергомобиль оказались пустыми и его пришлось толкать руками (после того как он объехал все оазисы и в его баки был залит и израсходован весь имевшийся в запасе бензин), то это означало бы, что вопреки условиям задачи суммарный запас бензина во всех заправочных станциях не позволяет автомашине объехать весь кольцевой маршрут.

Итак, господин Берг на несколько потрепанном, но весело попыхивающем выхлопными газами бергомобиле, описав полный круг, прибывает к месту старта (рис. 131). В баках бергомоб-

бия по прибытии в $C_{м.э}$ еще плещется некоторое количество бензина. Действительно, по дороге Эгон Берг перелил в баки своего бергомобилia весь бензин, хранившийся в емкостях заправочных станций, а поскольку по условиям задачи этого количества бензина достаточно для того, чтобы объехать кольцевой маршрут, то в баках бергомобилia должно остаться столько бензина, сколько было «сэкономлено» на тех отрезках пути, на которых бергомобиль из-за нехватки горючего пришлось толкать руками. Следовательно, количества бензина, оставшегося в баках бергомобилia, хватило бы для преодоления именно тех участков пути, на которых прежде горючее иссякало и бергомобиль приходилось толкать.

Теперь излишек бензина, образовавшийся из-за неправильно-го выбора места для старта автопробега, не нужен Эгону Бергу.

Но если бы Эгон Берг начал объезд кольцевого маршрута с последнего из оазисов, до которых ему пришлось добираться, толкая бергомобиль (то есть если бы он выехал из оазиса C), то смог бы проделать весь путь за рулем бергомобилia.

Действительно, выехав из оазиса C , Берг, как показано выше, прибывает в оазис, выбранный местом старта в нашем мысленном эксперименте, имея в баках столько бензина, сколько было сэкономлено на тех участках пути, где бергомобиль пришлось толкать. Этого запаса бензина достаточно для того, чтобы бергомобиль, управляясь по дороге, мог своим ходом объехать весь кольцевой маршрут.

Повторим кратко наиболее важные места приведенных выше рассуждений.

Пусть автомашина отправляется в объезд кольцевого маршрута от любой из заправочных станций (место старта обозначим $C_{м.э}$). Тогда возможны 2 случая: либо бензина хватит на преодоление всех участков пути, либо где-то бензин иссякнет. В первом случае утверждение задачи доказано. Во втором случае имеется один или несколько участков пути (между двумя соседними заправочными станциями), где бензин преждевременно кончается. Эти участки пути водителю придется преодолеть пешком, толкая машину, поэтому от первоначального запаса горючего останется неизрасходованным столько бензина, сколько потребовалось бы (если бы он был залит в баки) для преодоления участков, пройденных пешком.

Конец последнего из таких участков — оазис C — *удовлетворяет всем условиям задачи*. Действительно, отправляясь в объезд кольцевого маршрута из оазиса C , водитель достигнет оазиса $C_{м.э}$, имея в баках автомашины столько же бензина, сколько осталось в первом случае (поскольку оазиса он достиг, шествуя пешком и толкая перед собой автомашину с пустыми баками). Как следует из приведенных выше рассуждений, этого количества бензина должно хватить (правда, «в обрез») для преодоления всех тех участков, которые в первом варианте пришлось пройти пешком, толкая автомашину.

II решение. По условиям задачи общего запаса бензина на всех заправочных станциях достаточно для того, чтобы можно было один раз проехать по всему кольцевому маршруту. Следовательно, *запаса бензина (x л) по крайней мере в одном из оазисов (X)* должно хватить для того, чтобы машина могла доехать до следующего оазиса (Y) (рис. 132, а). (Действительно, если бы ни из одного

оазиса нельзя было доехать до следующего, то это означало бы, что суммарного запаса бензина, хранящегося на всех заправочных станциях, не хватает для того, чтобы объехать весь кольцевой маршрут.) Если автомашина каким-то образом оказалась в оазисе X , то она заведомо доедет до оазиса Y и сможет дозаправиться y л бензина, имеющимся на заправочной станции в Y . Следовательно, дело обстоит так, будто на заправочной станции в оазисе X имеется $(x + y)$ л бензина. Следовательно, мысленно «стерев с лица Земли» оазис Y и перенеся весь хранившийся в нем бензин в оазис X , мы ничего не изменим с точки зрения осуществимости автопробега по кольцевому маршруту (рис. 132, б и в).

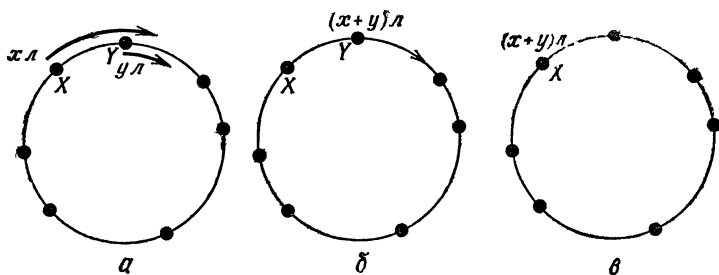


Рис. 132.

В результате проделанной операции число заправочных станций уменьшилось на 1, а во всем остальном условия задачи сохранились прежними. Повторяя приведенные выше рассуждения и проделывая основанную на них операцию еще раз, мы «уничтожим» еще один оазис и перенесем весь хранившийся в нем запас бензина в предыдущий оазис (откуда можно доехать до «разрушенного» оазиса; на заправочной станции предыдущего оазиса окажется количество бензина, равное суммарному запасу горючего, хранившегося ранее на заправочных станциях двух оазисов). Прделанную операцию можно повторять до тех пор, пока не останется лишь один оазис. В емкости его заправочной станции будет «слит» суммарный запас бензина, первоначально хранившийся на всех заправочных станциях. Следовательно, отправляясь в автопробег из оставшегося оазиса, автомашина сможет объехать весь кольцевой маршрут.

Эти рассуждения более кратки (и более математичны), но предъявляют большие требования к читателю.

Примечание 1. Те из читателей, кто знаком с методом математической индукции, по-видимому, обратили внимание на то, что приведенные выше рассуждения по существу были основаны на нем. Таким образом, метод математической индукции позволяет доказать утверждение задачи.

Примечание 2. То, что по кольцевой автостраде, проложенной вокруг пустыни, разрешено лишь одностороннее движение (в направлении, указанном стрелками), не имеет существенного значения. Важно лишь, чтобы, выехав в одном направлении, машина до конца следовала в том же направлении.

Условия задачи остаются в силе при выборе любого из двух направлений движения, но в зависимости от выбора того или иного направления место старта, вообще говоря, изменяется. Это нетрудно проверить на следующем простом примере. На рис. 133 рядом с каждым из трех оазисов указано, какая доля общего запаса бензина, достаточного для автопробега по кольцевому маршруту, имеется на заправочной станции. (Весь кольцевой маршрут разделен на 12 равных частей.) Нетрудно видеть, что если старт автопробегу будет дан в оазисе *A*, то объехать весь маршрут не удастся. Тем, кто отправится из оазиса *B*, удача будет сопутствовать лишь в том случае, если они выберут направление, указанное стрелкой (выехав в противоположном направлении, участники автопробега застрянут между оазисами *B* и *C*). Аналогичным образом те, кто отправится из *C*,

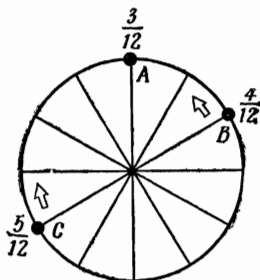


Рис. 133.

смогут объехать весь кольцевой маршрут лишь в том случае, если выберут направление, указанное стрелкой.

III решение. Все рассуждения существенно упростятся, если ввести два следующих дополнительных предположения.

1. Предположим, что водитель неожиданно обнаружил в багажнике автомашины канистру с таким количеством бензина, которое позволяет восполнить нехватку горючего на любом участке маршрута. Тогда водитель может отправиться в путь из любого оазиса и беспрепятственно объехать весь кольцевой маршрут. Утверждение задачи будет доказано, если нам удастся выяснить, что существует такая заправочная станция, отправляясь от которой водитель сможет объехать кольцевой маршрут, не израсходовав ни капли горючего из канистры.

2. Второе предположение менее фантастично, чем первое. Предположим, что бензоколонки на всех заправочных станциях снабжены автоматами, следящими за поддержанием постоянного уровня горючего в емкостях: если после очередной заправки емкости опустели, автомат за некоторое время доведет уровень горючего до первоначального значения. (Эта задержка — «некоторое время» — достаточно велика для того, чтобы машина не могла, оставаясь на месте, дожидаться, когда емкости бензоколонки снова заполнятся. Но к тому времени, когда машина, описав круг по кольцевой

автостраде, вернется к бензоколонке, автомат успеет восполнить убыль горючего.)

Если общего запаса бензина в емкостях бензоколонок достаточно для одной поездки по кольцевому маршруту, то машина, опустошая емкости всех попадающихся по пути бензоколонок, сможет описывать круг за кругом, поскольку за время ее отсутствия автоматы будут снова и снова наполнять емкости бензоколонок, доводя уровень горючего в каждой до первоначального значения.

Как изменяется запас горючего в баках автомашины на различных отрезках пути? Ясно, что между двумя заправочными станциями количество бензина в баках автомашины линейно убывает,

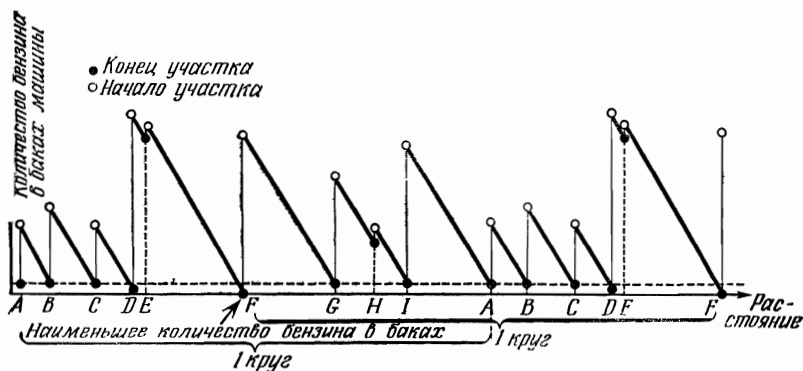


Рис. 134.

а при заправке у очередной бензоколонки скачкообразно возрастает. На графике зависимости количества бензина в баках автомашины от ее положения на кольцевой автостраде (запись показаний бензомера) изображается в виде пилообразной ломаной (рис. 134).

Эта ломаная имеет одну замечательную точку. Она соответствует наименьшему количеству бензина в баках автомашины. Если за отправную точку кольцевого маршрута выбрать заправочную станцию, в которой кривая показаний бензомера достигает минимума, то ни на одном участке пути не понадобится расходовать горючее из запасной канистры. Действительно, если выехать из этого оазиса, то расход бензина на любом участке пути не превысит количества бензина, взятого при заправке, причем опуститься до минимального уровня бензин может, лишь когда машина доедет до оазиса, поскольку все минимумы пилообразной ломаной приходится на оазисы, а в оазисах можно заправиться новой порцией бензина.

Если автомашина стартует из оазиса, на который приходится минимум пилообразной ломаной, то расходовать бензин из запасной канистры не придется. Поэтому отсутствие запасной канистры не мешает машине описывать по кольцевой автостраде круг за кругом (рис. 135). Если же водитель пожелает проехать по кольцевому маршруту лишь один раз, то можно и отключить автоматы

на заправочных станциях, и не заполнять снова емкости, после того как они опустеют (рис. 136).

Примечание 1. Это решение имеет много общего с I решением. Здесь мы использовали (в рассуждениях) бензин из запасной канистры, а в I решении — силу мышц Эгона Берга.

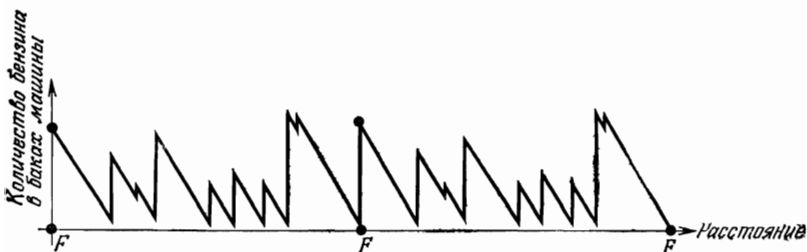


Рис. 135.

Примечание 2. Должно быть, читатель обратил внимание на то, что на рис. 134 изображены оазисы из предыдущей задачи. Действительно, художник использовал в этом рисунке данные задачи 79. Тем самым мы получили новое решение задачи 79. Не важно, что оно представлено лишь в виде графика.

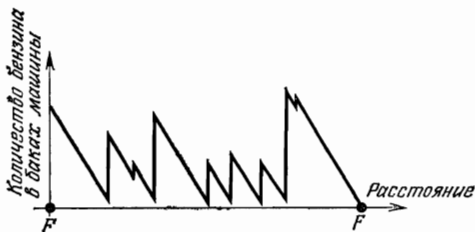


Рис. 136.

Достаточно проставить данные, соответствующие вершинам зубьев (точкам перелома), чтобы график «заговорил». Если автомашина отправляется по кольцевому маршруту из оазиса А, то (в условиях задачи 79) в моменты окончания очередного участка пути и начала следующего в ее баках останется бензина (в литрах):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	A . . .
Конец участка	0	0,2	0	—0,08	27,92	—0,12	0,28	8,28	0,68	0 . . .
Начало участка	11	14,2	11	31,92	28,92	27,88	20,28	10,28	25,68	11 . . .

(Отрицательные числа означают, что взятого бензина не хватило и пришлось брать бензин из запасной канистры.)

Минимум достигается на участке пути, заканчивающемся в оазисе *F*. Отсюда и следует отправляться в путешествие по кольцевому маршруту.

Часть VII

81. УДОБНЫЙ СПОСОБ

Лаборанту можно посоветовать, чтобы он не расстраивался: *во II сосуде находится именно то, что ему нужно приготовить, — 1 л $(100 - p)\%$ -ного водного раствора спирта.*

Действительно, после всех переливаний в каждом из двух сосудов оказалось по 1 л жидкости. Но в 2 л получившихся смесей содержится ровно 1 л спирта, как и до переливаний, поскольку суммарный объем жидкости в двух сосудах при переливаниях сохраняется. Так как в условиях задачи утверждается, что в одном сосуде содержится 1 л $p\%$ -ного водного раствора спирта, то весь остальной спирт, то есть $100 - p$ сотых долей литра, находится в другом сосуде. А поскольку во II сосуде налит ровно 1 л смеси, то это и означает, что II сосуд содержит 1 л $(100 - p)\%$ -ного водного раствора спирта.

Примечание. По существу приведенные нами рассуждения позволяют решать множество стандартных задач «на проценты», обычно сопряженных с громоздкими выкладками. Здесь же одна удачная идея позволяет избежать вычислений.

Задача 81, насколько нам известно, восходит к другой задаче, которую профессор Рожа Петер формулирует следующим образом:

«В одном бокале налито 200 мл вина, в другом — столько же воды. Из первого сосуда зачерпывают ложку вина, выливают его в сосуд с водой, тщательно перемешивают, затем зачерпывают ложку смеси (столько, сколько при первом переливании зачерпнули вина), выливают ее в сосуд с вином.

Спрашивается, чего больше: вина во втором сосуде или воды в первом?»

Ответ: поровну. Воды в сосуд с вином добавлено столько же, сколько вина добавлено в сосуд с водой.

82. ЧТО ЖЕ ДЕЛАТЬ ДАЛЬШЕ?

Любые действия бесполезны: смесь безнадежно испорчена, *задача не имеет решения.*

Действительно, в другом сосуде содержится водный раствор, в котором содержание спирта заведомо менее 50% (в противном

случае спирт составлял бы более половины жидкости в обоих сосудах, в то время как по условиям предыдущей задачи спирт составляет ровно половину всей жидкости). Следовательно, концентрация спирта ни в одном из сосудов не превышает 60%. Получить при смешивании таких растворов новый раствор, который содержал бы более 60% спирта, невозможно.

Это свидетельствует о том, что применяемый способ приготовления растворов несовершенен. Лаборанту приходится соблюдать необычайную осторожность, поскольку если он добавит слишком много воды в спирт (или нальет слишком много спирта в воду), то исправить ошибку будет невозможно.

83. ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ

Если в сосуде с меньшим количеством жидкости содержится 38%-ный водный раствор спирта, то в другом сосуде находится водный раствор с концентрацией спирта менее 62%.

Действительно, предположим, что в другом сосуде содержится раствор с концентрацией спирта не менее 62%. Перельем из второго сосуда в первый такое количество жидкости, чтобы в обоих сосудах оказалось ровно по 1 л. Тогда во втором сосуде останется 1 л водного раствора спирта, концентрация которого не менее 62%, а в первом сосуде 1 л раствора, концентрация которого более 38%. Следовательно, чистого спирта во втором сосуде содержится по крайней мере 620 мл, а в первом — больше чем 380 мл, то есть общее количество спирта в двух сосудах превышает 1 л, что невозможно, поскольку по условиям задачи 81 общее количество чистого спирта в двух сосудах составляет ровно 1 л.

Следовательно, утверждение, набранное курсивом, верно. Это означает, что *ответ предыдущей задачи остается в силе и в этом случае*, поскольку содержание спирта в обоих сосудах меньше требуемой концентрации 63%.

84. ОТ НАЧАЛА ДО КОНЦА

Никаким: как бы ни переливали жидкости из одного сосуда в другой и наоборот, содержание спирта во втором сосуде всегда будет менее 50% (а в первом сосуде — более 50%).

Объясняется это тем, что *если в первом сосуде содержание спирта более 50%, а во втором менее 50%, то из какого бы сосуда мы ни перелили жидкость в другой сосуд, содержание спирта в первом сосуде по-прежнему останется более, а во втором — менее 50%.*

Действительно, перелить всю жидкость из одного сосуда в другой нам не удастся, потому что ни один из сосудов не вмещает 2 л жидкости.

Если перелить часть жидкости из первого сосуда во второй, то в первом сосуде останется прежний раствор, содержащий более 50% спирта (иначе говоря, спирт составляет больше половины жидкости, находящейся в первом сосуде);

во втором сосуде содержание спирта останется менее 50% (поскольку если бы оно возросло настолько, что стало более 50%,

то содержание спирта в обоих сосудах было бы больше 50% и, следовательно, спирт вопреки условиям задачи составлял бы более половины всей жидкости).

Аналогичным образом можно показать, что если перелить часть жидкости из второго сосуда в первый, то

во втором сосуде останется исходный раствор, содержащий менее 50% спирта,

а в первом сосуде окажется водный раствор, содержащий более 50% спирта (хотя концентрация раствора изменится).

Таким образом, набранное курсивом утверждение доказано. Из него следует, что если первоначально в первом сосуде находился 100%-ный «раствор» спирта — чистый спирт (содержание спирта более 50%), а во втором сосуде — 0%-ный «раствор» спирта — чистая вода (содержание спирта менее 50%), то после любого числа переливаний из одного сосуда в другой независимо от того, в какой последовательности производились переливания, содержание спирта в первом сосуде всегда будет более, а во втором сосуде — менее 50%.

85. РАЗНОСТЬ ПЛОТНОСТЕЙ

До начала переливаний в одном из сосудов (*A*) содержится 2 л какой-то жидкости (*a*), а в другом сосуде (*B*) — 2 л другой жидкости (*b*). По окончании переливаний в каждом из двух сосудов снова оказалось по 2 л жидкости.

Вспользуемся решением основной задачи о переливаниях, сформулированной Рожей Петером (см. решение задачи 81): *из каких бы этапов ни складывалась схема, по которой производятся переливания, по окончании их из сосуда A в сосуд B будет перелито столько же жидкости a, сколько перелито из сосуда B в сосуд A жидкости b* (поскольку убыль одной жидкости может быть восполнена только другой жидкостью).

Обе схемы переливаний, о которых говорится в условиях задачи, состоят из одинаковых этапов и отличаются лишь тем, что сосуды *A* и *B* (так же как и жидкости *a* и *b*) меняются местами. Следовательно, если по окончании переливаний, производимых по одной схеме, из сосуда *A* в сосуд *B* окажется перелитым некоторое количество жидкости *a*, то по окончании переливаний, производимых по другой схеме, выяснится, что из сосуда *B* в сосуд *A* перелито такое же количество жидкости *b*.

Как следует из утверждения, набранного выше курсивом, это означает, что *в обоих случаях из одного сосуда в другой переносятся одинаковые количества жидкости*.

Таким образом, по окончании переливаний, производимых по любой из схем, *содержимое каждого сосуда оказывается одним и тем же. Следовательно, разность плотностей тех жидкостей, которые находятся в сосудах, не зависит от того, из какого сосуда начато переливание.*

Примечание 1. Решение этой задачи наглядно показывает, как одна удачная идея позволяет избежать необычайно громоздких вычислений. Сама идея была необычайно проста: *отвлечься от конкретных численных данных и выделить лишь наиболее существенное из того, о чем говорится в условиях за-*

дачи. Это — один из приемов (абстракция), часто используемых в математических рассуждениях.

Кроме того, нам удалось выяснить, что результат останется неизменным, даже если производить переливания по гораздо более сложной схеме: необходимо лишь, чтобы в каждом сосуде по окончании переливаний оказалось по 2 л жидкости.

Следует также заметить, что и вопрос задачи способен ввести в заблуждение. На первый взгляд кажется, будто необходимо определить, какая из двух схем переливаний приводит к меньшей разности плотностей, и лишь после некоторого размышления выясняется, что обе схемы (как мы убедились) приводят к одной и той же разности плотностей. Вопрос задачи можно было бы сформулировать иначе: например, поинтересоваться, в каком из двух случаев отношение показателей преломления жидкостей, находящихся в первом и во втором сосуде, будет больше, и так далее. Однако мы отнюдь не намеревались проследить «генеалогическое древо» задачи со всеми его ответвлениями. Нам хотелось лишь продемонстрировать читателям изящное решение, тем более что оно, с одной стороны, вполне здесь уместно, а с другой, как мы знаем по собственному опыту, — не слишком известно.

Примечание 2. Возможно, что кто-нибудь из читателей, знакомый с обычными приемами решения задач «на проценты», нашел арифметическое решение задачи 85. Тем, кто избрал такой подход к решению задачи, будет небезынтересно проверить правильность промежуточных результатов проделанных ими выкладок.

Переливания по схеме А

	Количество жидкости в л		Вес жидкости в кг		Плотность жидкости в кг/дм ³	
	А	В	А	В	А	В
До начала переливаний	2	2	2	1	1	$\frac{1}{2}$
После первого переливания	1	3	1	2	1	$\frac{2}{3}$
После второго переливания	3	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{3}$
После третьего переливания	1	3	$\frac{7}{9}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{20}{27}$
После четвертого переливания	2	2	$\frac{41}{27}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{41}{54}$	$\frac{20}{27} = \frac{40}{54}$

Переливания по схеме Б

	Количество жидкости в л		Вес жидкости в кг		Плотность жидкости в кг/дм	
	А	В	А	В	А	В
До начала переливаний	2	2	2	1	1	$\frac{1}{2}$
После первого переливания	3	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$
После второго переливания	1	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{13}{18}$
После третьего переливания	3	1	$\frac{41}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{41}{54}$	$\frac{13}{18}$
После четвертого переливания	2	2	$\frac{41}{27}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{41}{54}$	$\frac{20}{27} = \frac{40}{54}$

Конечные результаты переливаний, производимых по обеим схемам, оказываются одинаковыми, поэтому и разность плотностей одна и та же.

Примечание 3. Полученные данные позволяют определить, сколь велика разность плотностей двух жидкостей после переливаний: она равна $\frac{1}{54}$ кг/дм³.

Если бы это вызывалось необходимостью, то мы бы не стали «экономить» на вычислениях, но по условиям задачи определять разность плотностей не требовалось.

Примечание 4. Может случиться, что читатель вместо приведенных в таблицах точных значений весов и плотностей двух жидкостей получит их приближенные значения в виде десятичных дробей. (Например, вместо $\frac{5}{6}$ он получит 0,833, что несколько меньше $\frac{5}{6}$.) При таком подходе результаты переливаний, производимых по двум схемам, о которых говорится в условиях задачи, могут расходиться. В этом случае не следует забывать о том, что получаются не точные, а лишь приближенные результаты: из несовпадения результатов еще не следует, что веса или плотности жидкостей различаются. Две схемы переливаний вполне могут приводить к двум различным приближенным результатам!

Часть VIII

86. РОЗЫГРЫШ КУБКА I

В турнире на приз ПЛЮСа в прошлом году было проведено 165 встреч, а в этом году сыграно 213 матчей.

Подсчитать число состоявшихся встреч можно так, как показано в условиях задачи. Мы не приводим подробно весь ход вычислений, отсылая читателя вместо этого к следующей задаче.

87. РОЗЫГРЫШ КУБКА II

Если в розыгрыше кубка, проводимом по олимпийской системе, приняли участие n команд, то общее число состоявшихся встреч равно $n - 1$.

[Заметить необычайно простое соотношение между числом команд и числом сыгранных матчей можно на примерах, известных еще из предыдущей задачи: между 27 командами состоялось 26 встреч, между 166 командами — 165 встреч, между 214 командами — 213 встреч. Однако мы уже неоднократно убеждались, что утверждать, будто закономерность, подмеченная на нескольких частных примерах, выполняется в общем случае, довольно рискованно. Нашу догадку необходимо доказать. Все доказательство основано на одном удачном замечании: стоит лишь нам на основании накопленного опыта «заподозрить», что число встреч, состоявшихся при розыгрыше кубка, равно $n - 1$ и что обладателем кубка становится лишь 1 команда, а остальные $n - 1$ команд «вылетают», и поразмыслить над тем, не существует ли какой-нибудь связи между этими двумя совпадающими числами, как мы быстро находим остроумное и необычайно простое решение задачи.]

После каждой встречи одна команда выбывает. Следовательно, число команд, выбывших за весь розыгрыш кубка, совпадает с числом состоявшихся встреч (поскольку по условиям задачи розыгрыш кубка проводится по олимпийской системе, то команда, потерпевшая одно поражение, выбывает и в дальнейшем к участию в матчах с другими командами не допускается). За исключением одной команды (победительницы розыгрыша кубка) все остальные выбывают в каком-нибудь круге. Следовательно, число команд на 1 меньше числа встреч, состоявшихся за время розыгрыша кубка.

Пользуясь математической терминологией, то же самое доказательство можно сформулировать следующим образом.

В каждом матче терпит поражение одна и только одна команда. Все команды выбывают из розыгрыша кубка в том и только в том случае, если они терпят поражение. Сопоставив каждой встрече команду, потерпевшую в ней поражение (и, следовательно, выбывшую из участия в дальнейших встречах), мы установим взаимно однозначное соответствие между двумя множествами: множеством встреч, состоявшихся при проведении розыгрыша кубка, и множеством команд, потерпевших поражение. Следовательно, число элементов одного множества равно числу элементов другого.

Примечание. Теперь уже читателю должно быть ясно, почему в предыдущей задаче мы не стали проделывать довольно утомительные вычисления: эту задачу можно решить, не прибегая ни к каким выкладкам. Это еще один пример того, сколь большое значение может иметь и в теории, и на практике какой-нибудь хитроумный логический трюк.

88. РОЗЫГРЫШ КУБКА В СЛОЖНЫХ УСЛОВИЯХ

Можно: за весь турнир будет проведено 213 встреч.

Решение этой задачи представляет собой не что иное, как дословное (слово в слово!) повторение решения предыдущей задачи. Действительно, при подсчете общего числа встреч, состоявшихся при проведении розыгрыша кубка, не имело значения (и поэтому не упоминалось), сколько команд участвовало в играх того или иного круга и сколько без игр перешло в следующий круг.

89. К ЧЕМУ ПРИВОДИТ НЕХВАТКА СТАДИОНОВ

1. Утверждать заранее, что при одном и том же числе команд в турнире одного типа число кругов окажется больше, чем в турнире другого типа, нельзя. Может случиться, что и в «обычном», и в «необычном» турнире для определения победителя понадобится провести одинаковое число кругов (разумеется, число встреч в отдельных кругах в обычном и необычных турнирах будет различным). Чтобы убедиться в правильности этого утверждения, достаточно одного примера.

Предположим, что в турнирах того и другого типа участвуют по 9 команд. Тогда «обычный» турнир будет протекать так:

I круг: 9 команд, 1 команда переходит в следующий круг без игры, 4 встречи.

II круг: 5 команд, 1 команда переходит в следующий круг без игры, 2 встречи.

III круг: 3 команды, 1 команда переходит в следующий круг без игры, 1 встреча.

IV круг: 2 команды, 1 встреча.

«Необычный» турнир сложится иначе:

I круг: 9 команд, 3 команды переходят без игры в следующий круг, 3 встречи.

II круг: 6 команд, 2 команды переходят без игры в следующий круг, 2 встречи.

III круг: 4 команды, 2 встречи.

IV круг: 2 команды, 1 встреча.

Ход обычного и необычного турниров наглядно изображен на рис. 137 и 138. И в том, и в другом случае число кругов равно 4, но в необычном турнире число встреч во втором и в третьем круге больше, чем в обычном турнире.

2. Нет, так случиться не может: сколько бы команд ни переходило в следующий круг без игры, число кругов в турнире не может быть меньше, чем число кругов в обычном турнире, когда в следующий круг без игры переходит самое большее 1 команда.

[Это утверждение не столь очевидно, как может показаться на первый взгляд. Проанализируем более подробно первую часть задачи. Почему число кругов в турнире не увеличивается от того, что из любого круга в следующий могут перейти без игры сразу несколько команд? Как мы только что убедились, иногда в последних кругах нет ни одной команды, которая переходила бы в следующий круг без игры, а по мере приближения к финалу число участников турнира быстро убывает.

Может ли случиться так, что, хотя в первых кругах

имеется несколько команд, переходящих из одного круга в другой без игры, в дальнейшем такие команды не встречаются, а темп «отсева» проигравших команд возрастает настолько, что турнир заканчивается быстрее, чем обычный турнир, в котором при неблагоприятном числе участников одна команда может без игры переходить из круга в круг на протяжении всего турнира?

Разобраться в этом нам поможет нехитрая арифметика. Посмотрим, как можно замедлить темп обычного турнира и ускорить ход необычного турнира. Наша задача несколько облегчится, если мы «прокрутим в обратную сторону фильм о событиях, разыгравшихся во время проведения турнира».

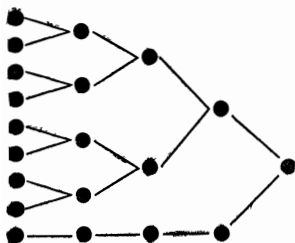


Рис. 137.

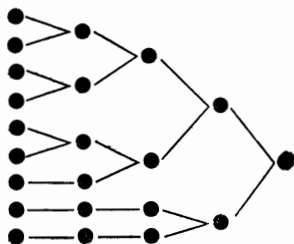


Рис. 138

Выясним сначала, как быстро может протекать необычный турнир, в котором из круга в круг без игры разрешается переходить любому числу команд. Ясно, что число команд, допущенных к проведению игр любого круга, не может более чем вдвое превышать число команд, вышедших в следующий круг. Это позволяет оценить наибольшее число команд, которые могут принять участие в играх нескольких последних кругов:

из последнего круга выходит победительницей 1 команда,
на один круг раньше число команд не превышает 2,
еще на один круг раньше число команд не превышает 4,
еще на один круг раньше число команд не превышает 8,
еще на один круг раньше число команд не превышает 16,
еще на один круг раньше число команд не превышает 32,
еще на один круг раньше число команд не превышает 64.

Выясним теперь, как медленно может протекать обычный турнир. Наименьшее число команд, которые могут принять участие в играх нескольких последних кругов, оказывается следующим:

из последнего круга выходит победительницей 1 команда,
на один круг раньше число команд не меньше 2,
еще на один круг раньше число команд не меньше 3,
еще на один круг раньше число команд не меньше 5,
еще на один круг раньше число команд не меньше 9,
еще на один круг раньше число команд не меньше 17,
еще на один круг раньше число команд не меньше 33.

Составим следующую таблицу.

Число кругов	Наибольшее число команд, которые могут принять участие в необычном турнире	Наименьшее число команд, которые могут принять участие в обычном турнире
0	1	1
1	2	2
2	4	3
3	8	5
4	16	9
5	32	17
6	64	33
...	...	...
	По-видимому, в общем случае	
k	2^k	$2^{k-1} + 1$
$k + 1$	2^{k+1}	$2^k + 1$
...	...	...

Мы видим, что с увеличением числа кругов числа в среднем столбце возрастают гораздо быстрее, чем числа в правом столбце, но нигде не превосходят чисел, стоящих в правом столбце и соответствующих на 1 большему числу кругов.

Таким образом, если турнир проводится в k кругов и переходить в следующий круг без игры разрешается любому числу команд, то число команд, принимающих участие в турнире, не превышает 2^k .

Если турнир проводится по обычной олимпийской системе и число кругов на 1 больше, то есть равно $k + 1$, то в нем принимает участие не менее $2^k + 1$ команд, то есть больше, чем в необычном турнире, проводимом в k кругов. Иначе говоря, если число кругов в обычном турнире больше, чем в необычном, то и число команд, принимающих участие в обычном турнире, также больше. Это означает, что если число команд, принимающих участие в обычном и необычном турнирах, одинаково, то обычный турнир невозможно провести за большее число кругов, чем необычный.

[Нам осталось еще доказать две зависимости (между числом кругов и наибольшим числом команд, принимающих участие в необычном турнире, с одной стороны, и между числом кругов и наименьшим числом команд, принимающих участие в обычном турнире, — с другой), которые мы использовали в своих рассуждениях.

Если a_k — наибольшее число команд, принимающих участие в турнире, проводимом в k кругов, то $a_{k+1} = 2a_k$, поскольку в турнире, проводимом по обычной олимпийской системе, число команд в предыдущем круге не может превосходить число команд в следующем круге более чем в 2 раза (но ровно в 2 раза может).

В турнире, состоящем из 1 круга, принимают участие 2 команды, а при увеличении числа кругов на 1 максимальное число команд, которые могут принять участие в турнире, каж-

дый раз удваивается, поэтому $a_1 = 2$, $a_2 = 2 \cdot 2 = 2^2$, $a_3 = 2^2 \cdot 2 = 2^3$, $a_4 = 2^3 \cdot 2 = 2^4$, ... Каково число кругов, таков и показатель степени двойки: $a_k = 2^k$, $a_{k+1} = a_k \cdot 2 = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$.

Пусть b_k — наименьшее число команд, которые могут принять участие в турнире, проводимом в k кругов по обычной олимпийской системе. Число команд, выступающих в любом круге такого турнира, не более чем вдвое превосходит число команд в следующем круге. Если какая-то команда переходит в следующий круг без игры, то отношение числа команд, выступающих в очередном круге, к числу команд, вышедших в следующий круг, становится меньше 2, так как с командой, переходящей без игры, не связан множитель 2. Поскольку в турнире, проводимом по олимпийской системе, перейти без игры в следующий круг может лишь 1 команда, то наименьшее число команд, которые могут принять участие в таком турнире из $k+1$ кругов, равно $2b_k - 1$. (При умножении числа b_k на 2 единица, соответствующая той команде, которая переходит в следующий круг без игры, также удваивается, поэтому из $2b_k$ необходимо вычесть 1.) Итак,

$$b_1 = 2,$$

$$b_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 2 + 2 - 1 = 2 + 1,$$

$$b_3 = 2(2 + 1) - 1 = 2^2 + 2 - 1 = 2^2 + 1,$$

$$b_4 = 2(2^2 + 1) - 1 = 2^3 + 2 - 1 = 2^3 + 1, \dots,$$

$$b_k = 2^{k-1} + 1,$$

$$b_{k+1} = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 2 - 1 = 2^k + 1.]$$

90. ОДИН КРУГ

Если в круг вышли k команд, то число встреч в нем равно $\left[\frac{k}{2} \right]$.

Число k может быть и четным, и нечетным. В первом случае (k четно) его можно представить в виде $k = 2l$, где l — некоторое целое число (удвоив число l , мы получим число k), во втором случае (k нечетно) оно представимо в виде $2l + 1$ (умножив целое число l на 2 и прибавив к полученному произведению 1, мы получим число k).

1. Если $k = 2l$, то число встреч в данном круге равно l . К этому же результату приводит и наша формула:

$$\left[\frac{2l}{1} \right] = [l] = l.$$

2. Если $k = 2l + 1$, то 1 команда переходит без игры в следующий круг, а число встреч равно l . К этому же результату приводит и наша формула:

$$\left[\frac{2l+1}{2} \right] = \left[l + \frac{1}{2} \right] = l.$$

91. ПОСЛЕ ОЧЕРЕДНОГО КРУГА

Если в очередной круг вышли k команд, то право играть в следующем круге получают $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ команд. Рассмотрим отдельно 2 случая: когда число k четно и когда оно нечетно.

1. $k = 2l$. В этом случае в очередном туре проводятся l встреч, l команд выбывают и l команд получают право выступать в следующем круге. К этому же результату приводит и наша формула:

$$\left\lfloor \frac{2l+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor l + \frac{1}{2} \right\rfloor = l.$$

2. $k = 2l + 1$. В этом случае 1 команда без игры переходит в следующий круг, l команд выбывают и $l+1$ получают право участвовать в следующем круге. К этому же результату приводит и наша формула:

$$\left\lfloor \frac{2l+1+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2l+2}{2} \right\rfloor = \lfloor l+1 \rfloor = l+1.$$

92. ИЗ КРУГА В КРУГ

Номер круга	1	2	3	4
Число команд, встречающихся в круге	n	$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor$
Число встреч, состоявшихся в круге	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor}{2} \right\rfloor$

Формулы, приведенные в решениях задач 90 и 91, позволяют без труда заполнить всю таблицу. Мы видим, что после проведения игр одного круга из k команд остается $\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$ команд, то есть для того, чтобы найти число команд, которые получат право выступать в следующем круге, нужно к числу команд, вышедших в очередной круг, прибавить 1, полученное число разделить на 2 и взять целую часть от результата деления. Итак, чтобы получить любое число, стоящее в верхней строке построенной нами таблицы, нужно взять число, стоящее слева, и преобразовать его так, как показано на рис. 139.

Определить по числу команд, вышедших в очередной круг, число встреч в нем нам позволяет формула из решения задачи 90: между k командами в одном круге проводятся $[k/2]$ встреч. Таким образом, чтобы найти число встреч, нужно взять число команд, которые вышли в интересующий нас круг, разделить его на 2 и от того, что получится, взять целую часть. Следовательно, для того

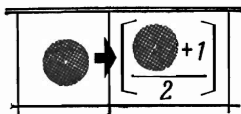


Рис. 139.

чтобы найти любое число, стоящее во второй строке нашей таблицы, нужно взять число, стоящее слева, и преобразовать его так, как показано на рис. 140.

Заполнение таблицы можно производить чисто механически и продолжать сколь угодно далеко от «входа» в таблицу — столбца, соответствующего первому кругу (рис. 141).

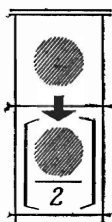


Рис. 140.

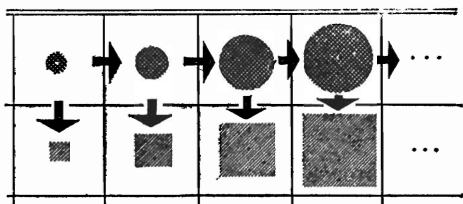


Рис. 141.

Примечание. Верно ли последнее утверждение? Ведь если заполнение таблицы продолжить достаточно далеко, то рано или поздно число кругов в любом соревновании, проводимом по олимпийской системе, окажется превзойденным.

Из-за этого не следует огорчаться. Наша таблица действительно простирается вправо сколь угодно далеко, и описанный выше механический процесс позволяет рано или поздно добраться до любого круга, каким бы большим ни был его номер, но это даже хорошо, поскольку таблица должна быть применима к турнирам с любым числом кругов. В любом же конкретном случае существует номер круга, начиная с которого обе формулы (и для числа команд, вышедших в очередной круг, и для числа встреч) будут неизменно «выдавать» нули (по этому поводу см. часть решения задачи 94, заключенную в квадратные скобки).

93. ДВА ТОЖДЕСТВА

1. Это тождество почти очевидно. По определению целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее числа x . Если число x увеличить на 1, то $[x]$ — «последнее» перед x целое число — также возрастет на 1 (рис. 142 и 143),

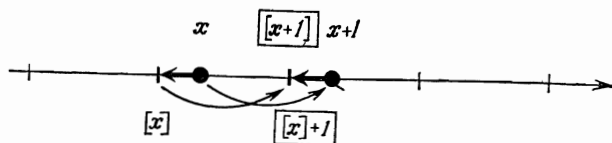


Рис. 142.

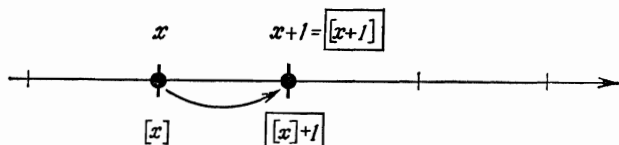


Рис. 143.

Более строго первое тождество можно доказать следующим образом.

Пусть

$$[x] = m. \quad (1)$$

Это означает, что

$$m \leq x < m + 1, \quad (2)$$

где m — некоторое целое число. Прибавив «ко всем трем частям» неравенства (2) по 1, получим

$$m + 1 \leq x + 1 < m + 2, \quad (3)$$

а поскольку $m + 1$ — целое число, то это и означает, что

$$[x + 1] = m + 1.$$

Наконец, используя подстановку (1), преобразуем последнее равенство к виду

$$[x + 1] = [x] + 1.$$

Тем самым первое тождество доказано.

2. Рассмотрим отдельно 4 случая: число t делится на 4, число t при делении на 4 дает остаток, равный 1, 2 и 3.

а) Если $t = 4l$, то

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{2} \right]}{2} \right] = \left[\frac{\left[\frac{4l}{2} \right]}{2} \right] = \left[\frac{[2l]}{2} \right] = \left[\frac{2l}{2} \right] = [l] = l,$$

$$\left[\frac{t}{4} \right] = \left[\frac{4l}{4} \right] = [l] = l.$$

Следовательно, в этом случае доказываемое тождество верно, поскольку его правая и левая части принимают одно и то же значение.

б) Если $t = 4l + 1$, то

$$\left[\left[\frac{t}{2} \right] \right] = \left[\left[\frac{4l+1}{2} \right] \right] = \left[\left[\frac{2l + \frac{1}{2}}{2} \right] \right] = \left[\frac{2l}{2} \right] = [l] = l,$$

$$\left[\frac{t}{4} \right] = \left[\frac{4l+1}{4} \right] = \left[l + \frac{1}{4} \right] = l.$$

Таким образом, и в этом случае правая и левая части доказываемого тождества принимают одно и то же значение.

в) Если $t = 4l + 2$, то

$$\left[\left[\frac{t}{2} \right] \right] = \left[\left[\frac{4l+2}{2} \right] \right] = \left[\frac{2l+1}{2} \right] = \left[\frac{2l+1}{2} \right] = \left[l + \frac{1}{2} \right] = l,$$

$$\left[\frac{t}{4} \right] = \left[\frac{4l+2}{4} \right] = \left[l + \frac{1}{2} \right] = l.$$

И в этом случае обе части доказываемого тождества равны.

г) Если $t = 4l + 3$, то

$$\left[\left[\frac{t}{2} \right] \right] = \left[\left[\frac{4l+3}{2} \right] \right] = \left[\left[\frac{2l+1 + \frac{1}{2}}{2} \right] \right] =$$

$$= \left[\frac{2l+1}{2} \right] = \left[l + \frac{1}{2} \right] = l,$$

$$\left[\frac{t}{4} \right] = \left[\frac{4l+3}{4} \right] = \left[l + \frac{3}{4} \right] = l.$$

И в этом случае доказываемое тождество верно.

Вместо 4 отдельных случаев можно рассмотреть один общий случай.

Любое число t заключено между двумя последовательными кратными числами 4:

$$4l \leq t < 4l + 4,$$

то есть представимо в виде $t = 4l + r$, где l — некоторое целое число и $0 \leq r < 4$. Следовательно,

$$\left[\left[\frac{t}{2} \right] \right] = \left[\left[\frac{4l+r}{2} \right] \right] = \left[\left[\frac{2l + \frac{r}{2}}{2} \right] \right] =$$

$$= \left[\frac{[2l + r']}{2} \right] = \left[l + \frac{r'}{2} \right] = l.$$

Действительно, поскольку $0 \leq \frac{r}{2} < 2$, то

$$2l \leq \left[2l + \frac{r}{2} \right] < 2l + 2,$$

и число $\left[2l + \frac{r}{2} \right]$ можно представить в виде

$$\left[2l + \frac{r}{2} \right] = 2l + r',$$

где $0 \leq r' < 2$, в силу чего

$$0 \leq \frac{r'}{2} < 1.$$

С другой стороны,

$$\left[\frac{t}{4} \right] = \left[\frac{4l + r}{4} \right] = \left[l + \frac{r}{4} \right] = l,$$

поскольку $0 \leq r/4 < 1$.

Примечание. В приведенном выше доказательстве нигде не используется то, что t — целое число. Поэтому второе тождество справедливо для любого (не обязательно целого) числа, но нам в дальнейшем будет достаточно и того, что оно выполняется для целых чисел.

94. ОЛИМПИАДНАЯ ЗАДАЧА

Сумма вычисляется без труда, если заметить, что i -е слагаемое задает число встреч в i -м круге турнира с n участниками, проводимого по олимпийской системе (проигравший выбывает). Сумма равна числу встреч, проведенных за весь турнир, то есть $n - 1$.

Действительно, тождества из задачи 93 позволяют упростить таблицу, составленную при решении задачи 92. Лучше всего составить ее целиком заново, комбинируя механический процесс, описанный в задаче 92 (рис. 139, 140 и 141), и результаты, полученные в решениях задач 90 и 91:

Номер круга	1	2
Число команд, встречающихся в круге	n	$\left[\frac{n+1}{2} \right]$
Число встреч, состоявшихся в круге	$\left[\frac{n}{2} \right]$	$\left[\left[\frac{n+1}{2} \right] \right] = \left[\frac{n+1}{4} \right]$

При заполнении последней клетки (в правом нижнем углу) мы воспользовались вторым тождеством из задачи 93:

$$\left[\left[\frac{t}{2} \right] \right] = \left[\frac{t}{4} \right].$$

Продолжим составление таблицы:

Номер круга	2	3
Число команд	$\left[\frac{n+1}{2} \right]$	$\left[\frac{\left[\frac{n+1}{2} \right] + 1}{2} \right] = \left[\frac{\left[\frac{n+1}{2} + 1 \right]}{2} \right] =$ $= \left[\frac{\left[\frac{n+3}{2} \right]}{2} \right] = \left[\frac{n+3}{4} \right]$

Здесь мы сначала воспользовались первым тождеством из задачи 93:

$$[x] + 1 = [x + 1],$$

а затем, преобразовав сумму, стоящую в числителе, вторым тождеством из той же задачи.

Номер круга	3
Число команд	$\left[\frac{n+3}{4} \right]$
Число встреч	$\left[\frac{\left[\frac{n+3}{4} \right]}{2} \right] = \left[\frac{n+3}{8} \right]$

Здесь мы также воспользовались вторым тождеством из задачи 93.

Аналогичным образом заполняем графы, соответствующие четвертому кругу:

Номер круга	3	4
Число команд	$\left[\frac{n+3}{4} \right]$	$\left[\frac{\left[\frac{n+3}{4} \right] + 1}{2} \right] = \left[\frac{\left[\frac{n+3}{4} + 1 \right]}{2} \right] =$ $= \left[\frac{\left[\frac{n+7}{4} \right]}{2} \right] = \left[\frac{n+7}{8} \right]$
Число встреч		$\left[\frac{\left[\frac{n+7}{8} \right]}{2} \right] = \left[\frac{n+7}{8} \right]$

Теперь уже начинает проявляться некая общая закономерность. Судя по первым четырем кругам, она должна иметь следующий вид:

Номер круга	k
Число команд	$\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \right]$
Число встреч	$\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^k} \right]$

В формуле для числа команд степень двойки и в числителе, и в знаменателе имеет показатель, который на 1 меньше номера круга. В формуле для числа встреч степень двойки в знаменателе имеет показатель, равный номеру круга.

Та же закономерность выполняется и при любом большем числе кругов:

Номер круга	k	$k+1$
Число команд	$\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \right]$	$\left[\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}} + 1 \right] \right] = \left[\frac{\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}} + 1 \right]}{2} \right] =$ $= \left[\frac{\left[\frac{n+2 \cdot 2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \right]}{2} \right] = \left[\frac{n+2^k-1}{2^k} \right]$
Число встреч		$\left[\frac{\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \right]}{2} \right] = \left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^k} \right]$

Таким образом, каждое слагаемое в сумме, значение которой требуется вычислить, действительно совпадает с числом встреч, состоявшихся в одном из кругов турнира с n участниками, проводимого по олимпийской системе. Следовательно, эта сумма равна общему числу встреч в таком турнире, то есть, как показано в решении задачи 86, $n-1$.

[В приведенном выше доказательстве остался небольшой пробел. Мы убедились в том, что слагаемые в той сумме, которую требовалось вычислить, задают число встреч в кругах турнира с n участниками, проводимого по олимпийской системе. Но турнир после определенного числа кругов заканчивается. Число встреч в последнем круге равно 1.

А что делать потом? По окончании турнира игры в «очередных» кругах не проводятся, поэтому бессмысленно говорить о том, что слагаемые совпадают с числом игр в несуществующих кругах. Если нам «повезет», то соответствующие слагаемые окажутся равными 0, но это еще необходимо доказать. Впрочем, сделать это совсем нетрудно. Преобразуем общий член последовательности, задающей число игр в различных кругах, к несколько иному виду:

$$\left[\frac{n + 2^{k-1} - 1}{2^{k-1}} \right] = \left[\frac{n-1}{2^{k-1}} + \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}} \right] = \left[\frac{n-1}{2^{k-1}} + 1 \right].$$

Нетрудно видеть, что при увеличении k изменяется лишь знаменатель дроби, поэтому значения стоящего в квадратных скобках выражения убывают. Если при некотором значении k значение этого выражения станет равным 1 (то есть мы дойдем до последнего круга), то

$$\frac{n-1}{2^{k-1}} + 1 < 2,$$

$$\frac{n-1}{2^{k-1}} < 1.$$

Преобразуем теперь слегка k -е слагаемое в той сумме, которую требуется вычислить по условиям задачи, к виду

$$\left[\frac{n + 2^{k-1} - 1}{2^k} \right] = \left[\frac{n-1}{2^k} + \frac{1}{2} \right].$$

При k , соответствующем последнему кругу, выполняется неравенство

$$\frac{n-1}{2^{k-1}} < 1,$$

поэтому

$$\frac{n-1}{2^k} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{n-1}{2^k} + \frac{1}{2} < 1,$$

а поскольку мы рассматриваем положительные числа, то

$$\left[\frac{n-1}{2^k} + \frac{1}{2} \right] = 0.$$

С увеличением k выражение, стоящее в квадратных скобках, все более убывает, оставаясь всегда положительным. Следовательно, все слагаемые в сумме, начиная с некоторого, обращаются в нуль.

(Этим объясняется, почему приведенную в условиях задачи сумму можно задавать в самом различном виде. Сумма обрывается на члене

$$\dots + \left[\frac{n + 2^{k-1} - 1}{2^k} \right] + \dots$$

На вопрос о том, каким образом следует продолжать сумму, однозначного ответа не существует: варианты могут быть самыми различными. Сумму можно продолжать до 20-го, 50-го, 5 000 000-го и любого другого члена со сколь угодно большим номером и даже до бесконечности. Как мы теперь знаем, ответ задачи во всех случаях будет одним и тем же, поскольку все слагаемые, начиная с некоторого, равны нулю.)

ОГЛЯДЫВАЯСЬ НАЗАД

Предположим, что кто-нибудь, прочитав задачу 87, вздумает решать ее, находя число встреч в отдельных кругах. Если он хоть немного разбирается в математике, знаком с понятием «целая часть числа» и даже знает некоторые свойства целой части (задача 93), то без особого труда справится с задачей. Встретив затем олимпиадную задачу, он, быть может, сумеет распознать в отдельных слагаемых «старых знакомых», хотя сделать это будет отнюдь не легко. Простота и наглядность результатов, полученных при решении задачи 87, станет особенно заметной при сравнении с абстрактно поставленной олимпиадной задачей.

Но предположим, что кому-нибудь потребовалось вычислить бесконечную сумму

$$\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{4} \right] + \left[\frac{n+3}{8} \right] + \left[\frac{n+7}{16} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{n + 2^{k-1} - 1}{2^k} \right] + \dots$$

ее можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n + 2^{k-1} - 1}{2^k} \right].$$

Все члены выписываются совершенно механически, и вычисление суммы вполне можно поручить ЭВМ. Использование ЭВМ обычно экономит много времени, но одна удачная идея иногда позволяет достичь еще большей экономии времени. В настоящее время, когда ЭВМ находят все более широкое применение, работу математика бывает полезно оценивать именно с этой точки зрения.

Часть IX

95.

По крайней мере в одном из слов (1) и (2) первая буква не совпадает с первой буквой задуманного слова [поскольку слова (1) и (2) начинаются с различных букв]. Но каждое из этих слов расходится с задуманным словом *ровно в одной букве*. Следовательно, в том слове, в котором первая буква не совпадает с первой буквой задуманного слова, две остальные буквы угаданы правильно. Но две последние буквы в словах (1) и (2) совпадают. Значит, «окончание» любого из них совпадает и с двумя последними буквами задуманного слова:

*АР.

(*)

Недостающая буква задуманного слова может совпадать лишь с первой буквой слова (3), поскольку из (*) следует, что вторая и третья буквы этого слова расходятся со второй и третьей буквами задуманного слова.

Итак, задумано могло быть только слово

ДАР.

Полученное решение задачи правильно: нетрудно проверить, что с каждым из слов (1), (2) и (3) слово ДАР имеет ровно столько совпадений (одинаковых букв на одних и тех же местах), сколько указано в условиях задачи.

Примечание. В рассуждениях, которые позволили нам восстановить часть задуманного слова, отмеченную звездочкой (*), выражение «любого из них» следовало бы заменить более точным выражением «обоих слов», однако допущенная нами неточность никак не сказалась на последующем ходе решения. Такого рода мелкие уточнения не позволяют ни продвинуться в решении задачи, ни добиться большей ясности, и мы считаем их излишними.

96.

1 решение. Предположим, что первая буква задуманного слова С. Тогда из условий (2) и (3) следовало бы, что двумя последними буквами могут быть и ЫР и ОҚ. Полученное противоречие доказывает, что *первой буквой задуманного слова может быть только С.*

Аналогичным образом из условий (1) и (3) следует, что *второй буквой задуманного слова может быть только О*, а из условий (1) и (2) — что его *третьей буквой может быть только Р.*

Итак, мы приходим к единственно возможному решению — слову СОР. Нетрудно проверить, что оно удовлетворяет всем условиям задачи.

II решение. В каждом «столбце» (рис. 144) содержатся по две различные буквы (одна буква повторяется дважды). Следовательно, одна из этих букв не совпадает со стоящей на том же месте буквой задуманного слова. Это означает, что в каждом столбце допущена по крайней мере 1 ошибка — по крайней мере 1 буква названа неверно, а в трех словах *вместе* допущено ровно 3 ошибки, то есть из 9 названных букв 3 не совпадают с соответствующими буквами задуманного слова. Поэтому *в каждом столбце*

				Число ошибок	
(1)	Б	О	Р	1	} Всего 3
(2)	С	Ы	Р	1	
(3)	С	О	К	2	
Число ошибок					
	Не менее 1	Не менее 1	Не менее 1		
	} Не менее 3				

Рис. 144.

содержится ровно 1 неправильно названная буква. Следовательно, та буква, которая встречается в столбце дважды, угадана правильно.

97.

Если бы в слове (1) с задуманным словом не совпадала буква М, то в слове (2) не содержалось бы ни одной правильно угаданной буквы. Следовательно, *третьей буквой в задуманном слове может быть только буква М.*

Если бы в слове (1) с задуманным словом не совпадала буква О, то в слове (3) не содержалось бы ни одной правильно угаданной буквы. Следовательно, *второй буквой в задуманном слове может быть только буква О.*

Итак, нам удалось восстановить две последние буквы задуманного слова:

•ОМ.

С каждым из заданных слов (1), (2) и (3) восстановленная часть задуманного слова имеет указанное в условиях задачи число совпадающих букв. Следовательно, *первая буква в каждом из трех слов названа неверно.* Условия задачи позволяют лишь утверждать, что *задуманное слово оканчивается на ОМ, а его первая буква отлична от букв С, Ж и Н.* Задача имеет столько решений, сколько существует таких слов из трех букв (в русском языке такие слова имеются: ДОМ, КОМ, ЛОМ, РОМ, ТОМ).

I решение. Из условий (1) и (2), так же как и в решении предыдущей задачи, следует, что *последней буквой задуманного слова может быть только буква Л.*

Из условий (1) и (3) мы заключаем, что *в середине задуманного слова может стоять только буква О,* поскольку эти слова отличаются лишь средними буквами и в слове (1) с задуманным словом совпадает более одной буквы.

После того как две последние буквы задуманного слова установлены, его *первая буква* однозначно определяется из условия (2): М.

Итак, задумано могло быть только слово МОЛ. Нетрудно проверить, что оно действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

II решение. Запишем слова одно под другим и подсчитаем, сколько букв не совпадает с задуманным словом в каждой строке и в каждом столбце. Результаты наших подсчетов представлены на рис. 145.

			Число ошибок	
В	О	Л	1	} Всего 4
М	Е	Л	1	
В	А	Л	2	
			Число ошибок	
не менее 1	не менее 1	не менее 1		
			не менее 3 ошибок	

Рис. 145.

Буква Л, стоящая в последнем столбце, угадана правильно, поскольку в противном случае число неправильно названных букв при подсчете по столбцам было бы не меньше 6.

		Л
		Л
~~А~~	~~О~~	Л

← 2 ошибки

Рис. 146.

Следовательно, двумя неправильно названными буквами в последней строке могут быть только первая и вторая (рис. 146).

Поскольку в первом столбце буква В не совпадает с первой буквой задуманного слова, то вторая и третья буквы в первой строке угаданы правильно (рис. 147).

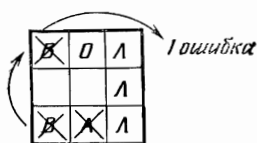


Рис. 147.

Во втором столбце теперь могут быть лишь 2 ошибки, а поскольку их столько и должно быть, получается то, что изображено на рис. 148.

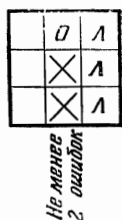


Рис. 148.

Во второй строке содержится лишь 1 ошибочно названная буква, поэтому первая буква угадана правильно (рис. 149), и тем самым решение задачи завершается.

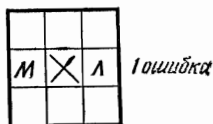


Рис. 149.

Примечание. Задачу можно было бы решить гораздо быстрее, *рассчитывая на то, что в каждом столбце содержится правильно угаданная буква.* Однако, как мы видели в предыдущей задаче, *для подобных надежд нет никаких оснований.* Если в каком-нибудь столбце ни разу не встретится «правильная» (то есть совпадающая с соответствующей буквой задуманного слова) буква, то восстановить ее будет невозможно (мы исключаем из рассмотрения случай, когда слов так много, что в столбце оказываются все буквы алфавита, кроме одной).

Однако, как мы убедились, решая предыдущую задачу, это совсем не плохо и означает лишь, что задача может допускать несколько решений.

99.

Запишем одно под другим слова (1), (2) и (3) (рис. 150) и подсчитаем по столбцам число неправильно угаданных букв. У нас получится, что в трех словах *не менее 4 букв* не совпадают с соответствующими буквами задуманного слова. Но поскольку из

			Число ошибок	} Всего 4
З	О	Б	1	
Л	У	Б	2	
З	У	Д	1	} Не менее 4 ошибок
Число ошибок			Не менее 1	
			Не менее 2	
			Не менее 1	

Рис. 150.

подсчета неправильно названных букв по строкам известно, что число «не тех» букв *равно 4*, то слова «не менее» можно отбросить (поскольку неправильно названных букв более 4 быть не может). Это означает, что в первом и третьем столбцах неправильно названы могут быть только те буквы, которые встречаются лишь

			Число ошибок
З	О	Б	1
Л	У	Б	2
З	У	Д	1
Число ошибок	1	2	1

Рис. 151.

			Число ошибок
З	О	Б	1
Л	У	Б	2
З	У	Д	1

Рис. 152.

1 раз (рис. 151). А поскольку в последней строке неправильно названа 1 буква, то две остальные угаданы правильно, и мы получаем единственно возможное решение, удовлетворяющее всем условиям задачи (рис. 152).

Итак, было задумано слово ЗУБ.

100.

Сравним эту задачу с задачей 95:

ЖАР 2	БУК 2
ПАР 2	СУК 2
ДОМ 1	ЛОМ 1

Обе задачи «устроены» совершенно одинаково. Соответствующие слова содержат одинаковое число правильно угаданных букв. Если в одной задаче какие-то буквы в названных словах совпадают, то они совпадают и в соответствующих им словах, приведенных в условиях другой задачи. Поскольку решение задачи опирается лишь на те данные, которые содержатся в условиях задачи,

<i>Число правильно угаданных букв</i>			
~~Ж~~	А	Р	2
~~П~~	А	Р	2
Д	~~В~~	~~М~~	1

Рис. 153.

<i>Число правильно угаданных букв</i>			
~~Б~~	У	К	2
~~С~~	У	К	2
Л	~~В~~	~~М~~	1

Рис. 154.

то решение задачи 100 мы получим, повторив шаг за шагом решение задачи 95, и правильно угаданные и ошибочно названные буквы в обоих решениях будут возникать в одних и тех же местах. Для задачи 95 правильно угаданные буквы представлены на рис. 153. Решение задачи 100 можно прочитать на рис. 154: было задумано слово ЛУК.

101.

Нетрудно заметить, что и эта задача «устроена» так же, как и задача 95:

ЖАР 2	УЛК 2
ПАР 2	ИЛК 2
ДОМ 1	АТЗ 1

Для того чтобы обнаружить, где находятся правильно угаданные буквы, можно дословно воспроизвести решение предыдущей

<i>Число правильно угаданных букв</i>			
~~Ж~~	Л	К	2
~~П~~	Л	К	2
А	~~В~~	~~М~~	1

Рис. 155.

задачи и воспользоваться рис. 153 (или рис. 154). В «переводе» на бергенгоцкий язык это решение будет выглядеть так, как показано на рис. 155.

Следовательно, было задумано бергенгоцкое слово АЛК.

Сравним эту задачу с задачей 95:

(1) ЖАР 2	(1) БАЛ 2
(2) ПАР 2	(2) ЛАЛ 2
(3) ДОМ 1	(3) ЗУБ 1

Можно ли утверждать, что обе задачи «устроены» одинаково?

На этот раз вопрос о «полном совпадении» двух задач не вполне ясен.

В словах, приведенных в задаче 102, некоторые буквы совпадают: первая буква слова (1) совпадает с последней буквой слова (3) так же, как первая и третья буквы слова (2), хотя в словах, приведенных в задаче 95, эти буквы различны.

Но в решении задачи 95 нигде не использовалось то, что перечисленные выше буквы различны, поэтому рассуждения, позволившие нам решить задачу 95, остаются в силе и в том случае, когда эти буквы совпадают. Следовательно, задачу 102 можно считать «устроенной» так же, как задача 95, и прочитать правильно угаданные буквы по рис. 156, по существу повторяющему рисунки, приведенные в двух предыдущих задачах.

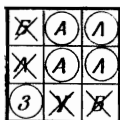


Рис. 156

Итак, было задумано слово ЗАЛ.

Как следует из объяснений, приведенных в предыдущей задаче, эта задача по своему «устройству» неотличима от задачи 95. Решение ее ясно из рис. 157. Важно не то, что часть букв не удалось

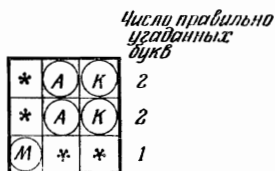


Рис. 157.

разобрать, а совсем другое: стертые буквы были отличны от правильно угаданных, поскольку именно это имеет значение при подсчете числа «промахов» и «попаданий». (Именно поэтому в условиях задачи было специально оговорено, что буквы, обозначенные звездочками *, не совпадают с теми, которые удалось разобрать.)

Задуманное слово: МАК.

Примечание. В действительности, как следует из решения предыдущей задачи, достаточно было бы знать, что если три названных слова расположить одно под другим, то ни в одном столбце стертые буквы не совпадут с правильно угаданными.

104.

Если три слова расположить одно под другим в той последовательности, в которой они приведены в задаче (рис. 158, а), то совпадение внутреннего устройства этой задачи с предыдущими не

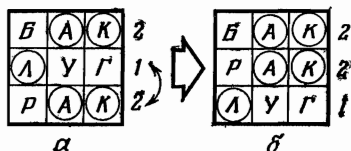


Рис. 158.

столь заметно. Но стоит лишь переставить слова (2) и (3), то есть подписать слово (2) под словом (3), как «все встанет на место» (рис. 158, б).

Задуманное слово: ЛАК.

105.

Нетрудно видеть, что и на этот раз задумано было слово ЛАК. Но если в предыдущих задачах внутреннее сходство слов бросалось в глаза, то для того, чтобы установить сходство между струк-

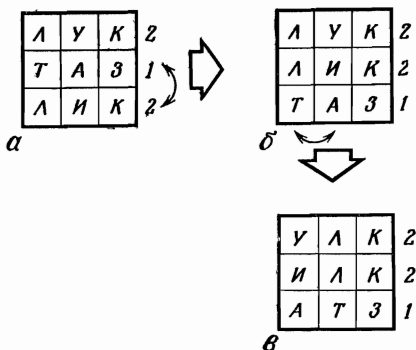


Рис. 159.

турой задачи 105 и родственными ей предыдущими задачами, необходимо проявить известную изобретательность.

Запишем слова одно под другим, но не в том порядке, в каком они приведены в условиях задачи (рис. 159, а), а предварительно

переставив слова (2) и (3) (рис. 159, б). Если учесть, что при подсчете правильно угаданных букв не имеет значения, в каком порядке перенумерованы столбцы, и переставить первый столбец со вторым, то получится задача 101 об отгадывании слова на бергенгоцийском языке (рис. 159, в). Решением задачи 101 было бергенгоцийское слово АЛК. Переставив в этом слове две первые буквы, мы получим решение исходной задачи.

Итак, было задумано слово ЛАК.

О ПЕРЕСТАНОВКЕ СТОЛБЦОВ

Быть может, нелишне еще раз более основательно поразмыслить над тем, в какой мере обоснован использованный нами прием — перестановка столбцов из букв в расположенных друг под другом словах. В том, что правильно угаданные буквы при такой операции остаются неизменными, а только «переезжают» на другое место вместе с теми столбцами, в которых они находятся, можно убедиться двумя способами.

а. К такому выводу нас приводит (о чем мы уже упоминали) само решение. Действительно, если столбец содержит правильно угаданные буквы, то, где именно он стоит, на каком месте, для решения не имеет ни малейшего значения. Все столбцы выступают совершенно независимо.

б. Быть может, допустимость перестановки столбцов станет понятнее, если задуматься на тем, что такое правильно угаданная буква. В названном слове буква считается правильно угаданной в том случае, если она совпадает с буквой, стоящей в задуманном слове на том же месте. Если во всех словах — и в задуманном, и в названных — переставить буквы, стоящие на одних и тех же местах (например, на i -м и на k -м местах), то буквы, совпадавшие до перестановки, будут совпадать и после перестановки, а буквы, не совпадавшие до перестановки, по-прежнему не будут совпадать после перестановки.

Иначе говоря, если какое-то слово было решением исходной задачи (совпадало с задуманным словом), то, переставив в нем буквы, стоящие на i -м и k -м местах, мы получим решение задачи, в условиях которой (в названных словах) i -я и k -я буквы переставлены, причем число правильно угаданных букв в исходной и в «переставленной» задачах будет одним и тем же. Если же какое-то слово не было решением исходной задачи, то слово, полученное из него при перестановке i -й и k -й букв, не будет решением задачи с переставленными i -м и k -м столбцами (предполагается, что все названные слова выписаны одно под другим), поскольку какое-то из названных слов не имело с ним нужного числа «совпадений» (правильно угаданных букв) до перестановки, и это соотношение сохранится и после перестановки.

Итак, если в некоторой задаче на буквенное лото i -й столбец переставить с k -м, то решением новой задачи будут те и только те слова, которые получаются из решения исходной задачи при перестановке i -й буквы с k -й.

Поясним наши общие соображения на примере того типа задач, который мы только что рассмотрели, и проследим, как связаны между собой их решения.

После перестановки второй строки с третьей (рис. 160, а), а также первого столбца со вторым исходная задача свелась к уже известной задаче (рис. 160, б). (Звездочками * обозначены буквы, относительно которых важно лишь знать, что они не совпадают с явно выписанными буквами, стоящими с ними в одном столбце.)

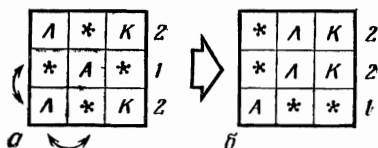


Рис. 160.

Задуманное слово без труда восстанавливается по рис. 160, б. Оно остается неизменным при перестановке строк и переходит в слово с соответствующим образом переставленными буквами при перестановке столбцов. Поскольку условия задачи 105 (рис. 161, а) мы получим из условий задачи 101 (рис. 160, б), переставив сначала

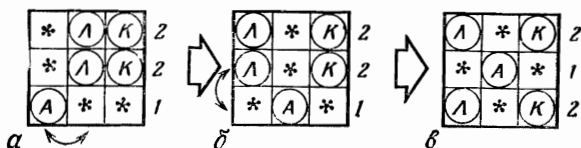


Рис. 161.

первый столбец со вторым (рис. 161, а), а затем вторую строку с третьей (рис. 161, б), то решение задачи 105 можно получить из решения задачи 101, переставив в нем две первые буквы. Так из бергенгоцийского слова АЛК мы получаем слово ЛАК, удовлетворяющее всем условиям задачи 105.

106.

1 решение. В пяти словах содержится всего 5 правильно угаданных букв. Запишем слова одно под другим (рис. 162). Ни в одном столбце нет такой буквы, которая бы повторялась более двух раз. Следовательно, в каждом столбце число правильно угаданных букв не может быть больше 2, поэтому правильно угаданные буквы могут распределиться по столбцам лишь так, что в двух столбцах

окажется по 2 такие буквы, а в одном столбце лишь 1 правильно угаданная буква.

Две правильно угаданные буквы могут оказаться в любом столбце, но в первом и втором столбцах дважды повторяется еще одна буква. Следовательно, удобнее начать с третьего столбца, где лишь одна буква повторяется дважды — буква Р. Если она совпадает с последней буквой задуманного слова (рис. 163, а), то, вычеркнув заведомо ошибочные буквы, мы придем к заключению, что в слове ШУМ правильно угаданной может быть лишь буква Ш.

Ш	О	В	1	} <i>Всего 5 правильно угаданных букв</i>
Ш	У	М	1	
Т	У	Р	1	
М	О	Л	1	
Т	И	Р	1	

Рис. 162.

Но, зачеркнув буквы, которые не могут совпадать с соответствующими буквами задуманного слова, если оно начинается с буквы Ш, мы увидим, что в слове МОЛ вопреки условиям задачи не останется ни одной буквы, которая могла бы быть правильно угаданной (рис. 163, б). Итак, наше исходное предположение приводит к противоречию.

Следовательно, буква Р в последнем столбце не может совпадать с третьей буквой задуманного слова. Значит, в последнем

	Ш	О	В	1		~~Ш~~	~~О~~	~~В~~	1
→	Ш	У	М	1		~~Ш~~	У	М	1
	Т	У	Р	1		Т	У	Р	1
	М	О	Л	1		!	М	~~О~~	Л
	Т	И	Р	1		Т	И	Р	1
а						б			

Рис. 163.

столбце содержится 1, а в первом и во втором столбцах — по 2 правильно угаданные буквы. Отсюда сразу же можно сделать вывод: буква И во втором столбце не совпадает со средней буквой задуманного слова. Но тогда в слове ТИР правильно угаданной может быть лишь буква Т (рис. 164, а). Вычеркнув буквы, которые не могут совпадать с соответствующими буквами задуманного слова (рис. 164, б), мы увидим, что в слове ШУМ правильно угаданной может быть лишь буква М, а во втором столбце — лишь буква О.

Получившееся слово ТОМ удовлетворяет всем условиям задачи (рис. 164, в).

[Нетрудно заметить, что для решения этой задачи вовсе не нужно было выписывать одно под другим все заданные слова. Ни на одном этапе решения нам не пришлось одновременно учитывать все условия задачи. Разумеется, иметь перед

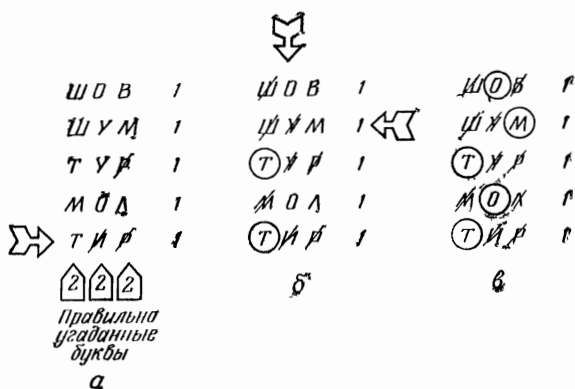


Рис. 164.

глазами все слова, названные при попытке отгадать задуманное слово, весьма удобно, поскольку так легче извлекать следствия из каждого предположения, высказанного в ходе решения. Но так как все предположения тесно связаны и одно влечет

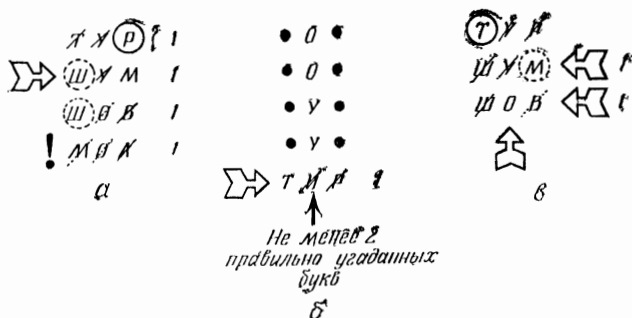


Рис. 165.

за собой другое, решение задачи можно изложить гораздо более «экономно», ограничиваясь лишь самым необходимым. Именно так мы и поступим.]

II решение. Предположим, что в слове ТУР правильно угадана буква Р (рис. 165, а). Тогда в слове ШУМ с задуманным словом должна была бы совпадать буква Ш, а поскольку слово ШОВ имеет с задуманным словом лишь одну общую букву, то

слово МОЛ не могло бы содержать ни одной правильно угаданной буквы, что невозможно.

Следовательно, в последнем столбце буква Р не совпадает с третьей буквой задуманного слова, в силу чего этот столбец может содержать не более одной правильно угаданной буквы. Но тогда и в первом, и во втором столбце должно быть не более двух правильно угаданных букв, а поскольку общее число таких букв равно 5, то в первом и во втором столбцах содержатся *ровно* по 2 правильно угаданные буквы.

Буква И во втором столбце не может совпадать со средней буквой задуманного слова. Следовательно, в слове ТИР правильно угаданной может быть лишь буква Т (рис. 165, б).

Сравнивая слова ТУР и ШУМ, мы видим, что в слове ШУМ правильно угаданной может быть лишь буква М. Но тогда в слове ШОВ с задуманным словом может совпадать только буква О (рис. 165, в).

Итак, задумано могло быть только слово ТОМ. Оно удовлетворяет всем условиям задачи (рис. 164, в).

107.

Вернемся еще раз к словам, приведенным в задаче 106, и запишем их одно под другим (рис. 166, а). Затем в первом столбце заменим Т на К и М на Р, во втором столбце заменим О на К, У на Б и И на М, в третьем столбце заменим В на Ы, М на О, Р на У и Л на А.

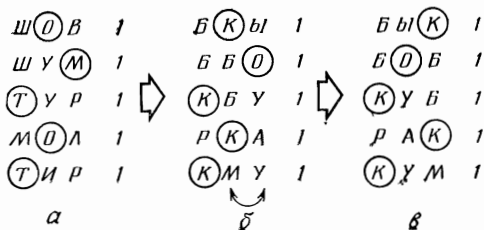


Рис. 166.

В итоге у нас получится некая задача из буквенного лото «на бергенгоцийском языке» (рис. 166, б), которая по своему внутреннему устройству ничем не отличается от задачи 106. Следовательно, решения этих задач также устроены одинаково. (Сравнивая условия обеих задач, нетрудно убедиться в том, что одинаковые буквы в столбцах остались одинаковыми и после «перевода» на бергенгоцийский язык, а различные остались различными.)

Переставим теперь в «бергенгоцийской задаче» второй столбец с третьим. Как известно (после того как мы решили задачу 105), правильно угаданные буквы от перестановки столбцов не изменяются. (Правильно угаданные буквы просто «переезжают» на новое место вместе со столбцом.) В результате мы получим новую задачу из буквенного лото, в которой положение правильно уга-

данных букв нам заранее известно (рис. 166, в). Условия новой задачи (слова, названные при отгадывании задуманного слова) совпадают с условиями задачи 107, только расположены в другой последовательности.

Итак, было задумано слово КОК.

[Как можно было догадаться, что задача 107 представляет собой хорошо «замаскированную» задуч 106? Этот вопрос заслуживает подробного ответа. Прежде всего даже «невооруженным глазом» видно, что и в задаче 107, и в предыдущей

К	У	М	/	*	*	•	/
К	У	Б	/	*	*	*	/
Б	В	Б	/	+	•	*	/
В	В	К	/	+	•	+	/
Р	А	К	/	•	•	+	/

Рис. 167.

задаче условия состоят из 5 слов, каждое из которых содержит по 1 правильно угаданной букве. Это наводит на мысль о том, что строки и столбцы обеих задач могут быть «устроены» одинаково. Проверка возникшего «подозрения» значительно облегчается, если отвлечься от конкретных букв, поскольку одинаковые буквы, стоящие в различных столбцах, порождают лишь путаницу. Для решения задачи имеет значение лишь то, сколько правильно угаданных букв содержит каждый столбец

Ш	⊙	В	/	*	*	•	/
Ш	У	⊙	/	*	+	⊙	/
⊙	У	Р	/	⊕	+	*	/
М	⊙	А	/	•	*	•	/
⊙	И	Р	/	⊕	•	*	/

Рис. 168.

в отдельности и сколько в нем одинаковых и различных букв (независимо от букв, входящих в другие столбцы). «Остов» задачи, полученный при замене конкретных букв значками, представлен на рис. 167.

В каждом столбце двумя крестиками и двумя звездочками отмечены одинаковые буквы. Точками заменены буквы, которые не совпадают ни с одной из букв, стоящих с ними в одном столбце. Поскольку все столбцы в решении задачи «участвуют» независимо, одинаковые значки, стоящие в различных столбцах, отнюдь не свидетельствуют о совпадении тех букв, которые они заменяют. Одинаковые значки для обозначения букв в различных столбцах нам понадобились лишь для того, чтобы чрезмерно не увеличивать число знаков. Поэтому в об-

шем случае две звездочки (две точки или два крестика), стоящие в различных столбцах, означают различные буквы, но не исключено, что эти буквы случайно совпадают.

Аналогичным образом поступим и с условиями задачи 106. Ее «остов» показан на рис. 168. Теперь уже нетрудно заметить, что, поменяв местами два последних столбца и произведя соответствующие перестановки строк, мы из условий задачи 107 получим условия задачи 106 (рис. 169). Но если известно, каким образом остов одной задачи переходит в остов другой, то, проследив путь каждой буквы, мы узнаем, какие буквы следует подставить вместо тех или иных букв в условиях задачи 106, чтобы они превратились в условия задачи 107, то

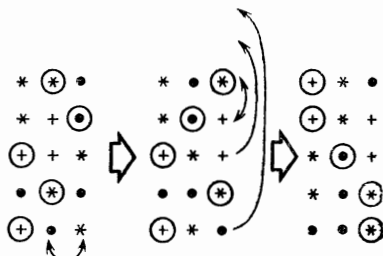


Рис. 169.

есть сумеем проделать тот «фокус», который сначала мог показаться столь удивительным.

Примечание. Как было показано, второй столбец в условиях задачи 106 соответствует третьему столбцу в условиях задачи 107. Это создает некоторые трудности, поскольку в задаче 106 первый и второй столбцы не имеют общих букв, а в задаче 107 буквы Б и К встречаются и в первом, и в третьем столбцах. Однако, как известно, совпадение букв, стоящих в различных столбцах, «не считается»: оно никак не сказывается на решении задачи. Оно лишь вводит в заблуждение, и кажущееся различие между задачами исчезает после того, как мы «переведем» их условия на язык абстрактных знаков.

108.

1 решение. Эту задачу можно решить «прямо», самыми элементарными средствами, не используя «метод столбцов».

Поскольку слова (1) и (2) отличаются только последней буквой, то *третьей буквой* задуманного слова может быть *только буква Р*. Относительно остальных букв мы можем лишь утверждать, что либо задуманное слово начинается с буквы Т, либо его вторая буква О.

Из условия (3) следует [поскольку последняя буква слова (3) названа неверно], что если задуманное слово начинается с буквы Т, то его второй буквой должна быть И, а если его вторая буква О, то оно должно начинаться с буквы М.

Ничего другого утверждать нельзя.

Таким образом, задача может иметь 2 решения: ТИР и МОР. Поскольку оба слова удовлетворяют всем трем условиям задачи, они действительно являются решениями задачи.

Это доказывает, что не только мы не сумели справиться с задачей. Неудача ожидала бы всякого, кто вздумал бы искать ее однозначное решение.

II решение. В трех словах всего должно содержаться 4 правильно угаданные буквы. Если записать их одно под другим (рис. 170, а) и подсчитать, сколько правильно угаданных букв мо-

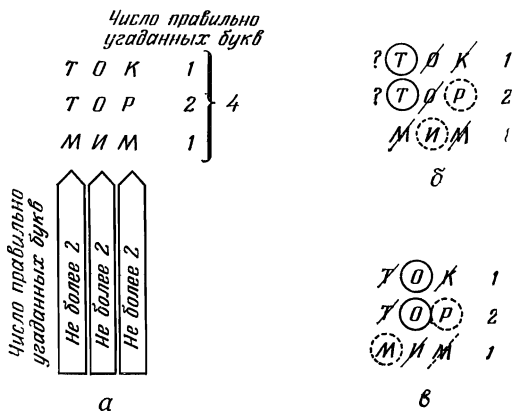


Рис. 170.

жет быть в каждом столбце, то нетрудно убедиться, что *либо в первом, либо во втором столбце должно содержаться 2 правильно угаданные буквы*. Таким образом, либо задуманное слово начинается с буквы Т, либо в середине его стоит буква О. Если принять первое предположение, то распределение правильно и неправильно названных букв окажется таким, как на рис. 170, б. Если принять второе предположение, то распределение окажется иным (рис. 170, в). Следовательно, задача может иметь лишь два решения, и они оба удовлетворяют всем условиям.

Итак, задуманными могли быть 2 слова: ТИР и МОР.

109.

I решение. Ясно, что в середине задуманного слова может стоять только буква У. Тогда, как следует из условий (1) и (2), возможны 2 случая: либо задуманное слово начинается с буквы Ч и оканчивается на букву Б, либо оно начинается с буквы К и оканчивается на букву М. Таким образом, задуманным словом может быть либо ЧУБ, либо КУМ. Но и у слова ЧУБ, и у слова КУМ с словом (3) имеется лишь 1 общая буква, а не 2, как

должно быть по условиям задачи. Следовательно, условия (1), (2) и (3) противоречивы: задача не имеет решения.

II решение. В трех словах всего должно содержаться 6 правильно угаданных букв. Если же записать их одно под другим

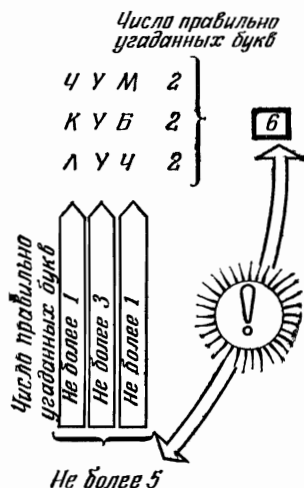


Рис. 171.

(рис. 171) и подсчитать число правильно угаданных букв по столбцам, то выяснится, что их не более 5.

110.

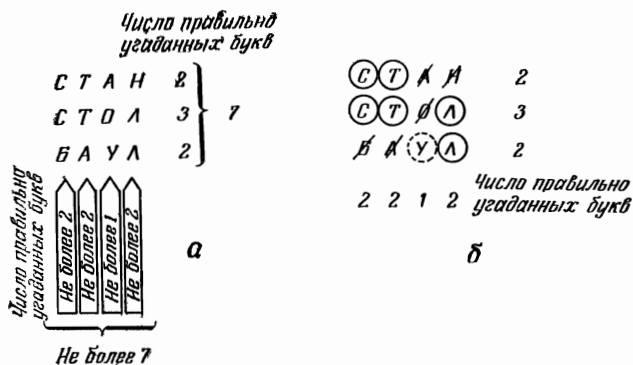


Рис. 172.

По условиям задачи должно быть 7 правильно угаданных букв. Как видно из рис. 172, а, при подсчете по столбцам их оказывается не более 7. Следовательно, во всех столбцах содержится

ровно 7 правильно угаданных букв. Это означает, что в тех столбцах, где имеются 2 одинаковые буквы, они должны быть правильно угаданными. Следовательно, задумано может быть только слово СТУЛ. Оно удовлетворяет всем трем условиям задачи (рис. 172, б).

111.

Запишем одно под другим три первых слова и рассмотрим сначала лишь их (рис. 173, а). По условиям задачи общее число правильно угаданных букв в них должно быть равно 6, а поскольку при подсчете по столбцам возможное число правильно угаданных

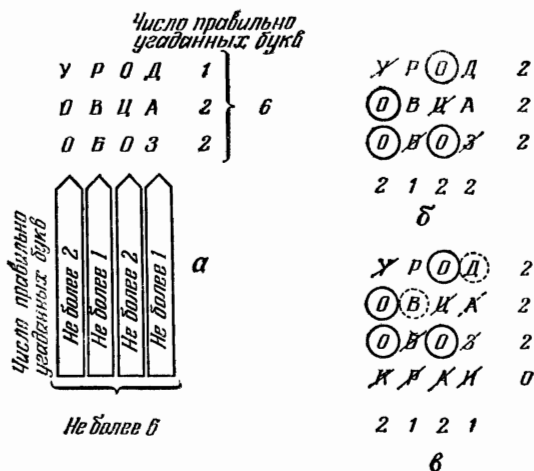


Рис. 173.

букв не превышает 6, то оно действительно равно 6. Следовательно, в первом и третьем столбцах правильно угаданными могут быть лишь буквы, повторяющиеся дважды, то есть буквы О. На рис. 173, б показано, к каким следствиям приводит это открытие. Теперь можно учесть условие (4). Из него мы узнаем, что буква Р во втором столбце не может совпадать со второй буквой задуманного слова (рис. 173, в). Таким образом, решением задачи может быть только слово ОВОД. Оно удовлетворяет всем 4 условиям задачи.

В трех словах должно содержаться всего 6 правильно угаданных букв, но при подсчете по столбцам их оказывается не более

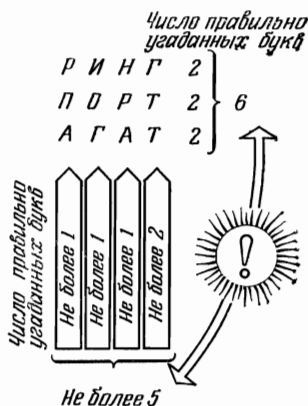


Рис. 175.

5 (рис. 175). Следовательно, условия задачи противоречивы, решения не существует.

Из условия (1) и, например, из условия (2) следует, что *первой буквой* задуманного слова *может быть лишь буква А* (см. первый абзац в решении задачи 96). Сравнивая слова (1) и (4), мы видим, что ни в одном из них четвертая буква не совпадает с последней буквой задуманного слова. Поскольку слово (6) начинается с уже известной правильно угаданной буквы А и имеет с задуманным словом только одну общую букву, то его вторая буква (V) не может быть правильно угаданной. А это означает, что в словах (1) и (4) с задуманным словом может совпадать только третья буква (А),

Если сопоставить условие (7) с условием (5) или обратиться к условию (2), то выяснится, что в задуманном слове либо вторая буква К (но тогда четвертая буква не Т), либо четвертая буква Т (тогда вторая буква не К). Аналогичным образом, сравнив условие (7) с условием (3), мы убедимся, что в задуманном слове либо второй, либо четвертой (но лишь одной из них) должна быть буква D.

Таким образом, задуманными могли быть лишь слова АКАД или АДАТ. Отдать предпочтение одному из них ни мы, ни кто-нибудь другой не можем, поскольку оба слова удовлетворяют всем 7 условиям задачи. Следовательно, задача 114 имеет 2 решения: АКАД и АДАТ.

Условия задачи противоречивы, задача не имеет решения.

Действительно, в словах (1) и (2) в общей сложности должно быть 6 правильно угаданных букв, а поскольку они не имеют ни одной общей буквы, то число правильно угаданных букв в них не может быть больше 5. (Если эти слова записать одно под другим, то в каждом столбце окажется не более 1 правильно угаданной буквы.)

Примечание 1. Условие (3) нам не понадобилось. Это означает, что задача останется неразрешимой (а ее условия противоречивыми) и в том случае, если условие (3) отбросить или заменить каким-нибудь другим условием.

Примечание 2. Условие (3) «хорошо» тем, что позволяет «замаскировать» противоречивость остальных условий. Действительно, мы неоднократно производили подсчет правильно угаданных букв по столбцам. Если одновременно выписывать не два, а три слова, то заметить противоречие становится невозможно. (При подсчете по столбцам общее число правильно угаданных букв может быть равным 8 и по условиям задачи оно должно быть равно 8.)

Запишем одно под другим слова (1) и (4) (рис. 176, а) и подсчитаем по столбцам возможное число правильно угаданных букв. Нетрудно видеть, что в этих двух словах общее число правильно угаданных букв не может превышать 7. Но поскольку по условиям задачи в них должно содержаться лишь 6 правильно угаданных букв, то это означает, что тот, кто пытался отгадать задуманное слово, использовал не все возможности: в одном из столбцов не должно быть ни одной правильно угаданной буквы. Но второй и четвертый столбцы не могут быть «пустыми», поскольку если стоящие в них дважды повторяющиеся буквы не совпадали бы со второй и с четвертой буквой задуманного слова, то максимальное число правильно угаданных букв в двух словах уменьшилось бы на 2, то есть не превышало бы 5, что противоречит условиям задачи. Следовательно, буквы А и О угаданы правильно.

Полученные сведения позволяют сравнить условия (1), (2) и (3) (рис. 176, б). Может ли в середине задуманного слова стоять буква R? Нетрудно видеть, что не может, поскольку в противном случае в слове (3) все остальные буквы были бы названы неправильно. Но если в середине задуманного слова стоит не буква R, а какая-то другая буква, то в слове MEREM двумя правильно угаданными могут быть лишь крайние буквы M. Сравнив условия (3) и (4) (рис. 176, в), мы заметим, что в третьем столбце правильно угаданной может быть лишь буква L.

Итак, задумано могло быть только слово MALOM. Нетрудно видеть, что оно удовлетворяет всем условиям задачи.

Примечание. Как догадаться, что решение задачи удобнее всего начать с подсчета правильно угаданных букв в словах (1) и (4)? *Выбирать всегда следует те слова, в которых по условиям задачи правильно угаданных букв должно*

быть больше, чем в других словах, а при записи «по вертикали», одного слова под другим, число повторяющихся букв в столбцах должно быть меньше, чем в других словах. Тогда наибольшее число букв, которые могут оказаться правильно угаданными, в этих словах будет меньше, чем в других.

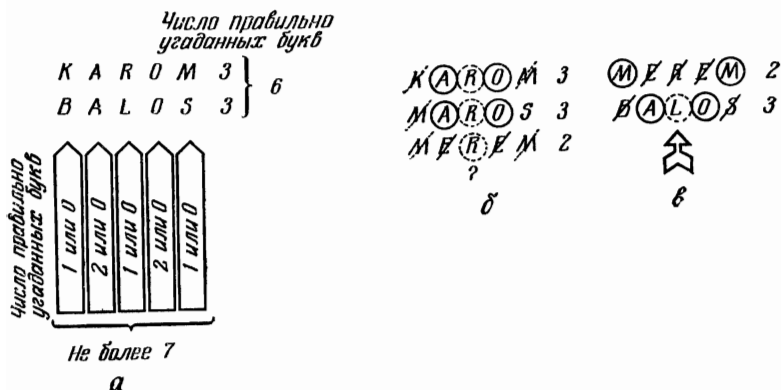


Рис. 176.

Мы уже неоднократно убеждались в том, что если эти два числа не слишком отличаются друг от друга, то, как правило, можно рассчитывать на успех в решении задачи.

117.

Сравнивая условия (1) и (2), мы видим, что в задуманном слове четвертая буква не может быть ни А, ни О. Действительно, число правильно угаданных букв во всех столбцах, кроме четвертого, может быть четным (либо 0, либо 2). Поскольку общее число

L	A	K	Ø	S	2	L	A	K	O	S	2	Æ	A	J	O	S	2
L	A	K	X	S	2	L	A	X	O	S	2	Æ	A	J	O	S	2

Рис. 177.

правильно угаданных букв должно быть четно (равно 4), то и в единственном столбце, содержащем 2 различные буквы, число правильно угаданных букв также должно быть четным. Ясно, что оно может быть равно только 0 (рис. 177).

Аналогичным образом из условий (2) и (3) следует, что в середине задуманного слова не могут стоять ни буква К, ни буква J, а из условий (3) и (4) — что задуманное слово начинается не с L и не с B (рис. 177).

Итак, в словах (1), (2), (3) и (4) первая, третья и четвертая буквы не совпадают с соответствующими буквами задуманного слова (рис. 178, а). Следовательно, двумя правильно угаданными буквами могут быть только две оставшиеся буквы: вторая и четвертая. Таким образом, вторая буква задуманного слова — А, а пятая — S.

Сравнивая затем слова (5), (6) и (7) (рис. 178, б), мы видим, что во всех столбцах может содержаться не более 5 правильно угаданных букв. Поскольку к этому же числу мы приходим и при

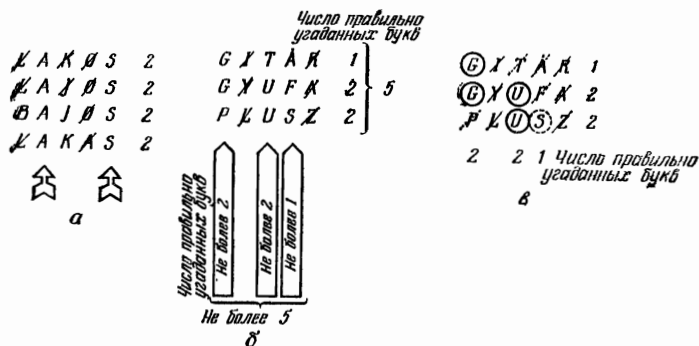


Рис. 178.

подсчете по строкам, то две совпадающие буквы в первом и третьем столбцах заведомо совпадают с первой и третьей буквами в задуманном слове. Зная это, мы без труда находим недостающую букву (рис. 178, в).

Итак, задумано могло быть только слово GAUSS. Оно удовлетворяет всем условиям задачи.

118. НЕСКОЛЬКО ВОПРОСОВ ПО СУЩЕСТВУ

Назовем однозначно разрешимой такую задачу из буквенного лото, которая допускает 1 решение, неоднозначно разрешимой — задачу, допускающую более 1 решения, и неразрешимой — задачу, допускающую 0 решений.

Какие бы слова ни были названы при угадывании задуманного слова, решениями задачи считаются любые слова, имеющие с названными заданное число совпадающих букв. Все остальные слова решениями не считаются. Следовательно, любое дополнительное условие (вновь высказанная догадка) может лишь сузить круг (математики предпочитают говорить: множество) решений, но никак не расширить его. Если какое-то условие исключало некоторое слово из числа возможных решений, то введение еще одного условия не может снять запрета, налагаемого прежним условием.

[До тех пор пока не высказано никаких догадок, но известно лишь, что в задуманном слове 5 букв, решением задачи можно считать любое слово из 5 букв. Первая же до-

гадка исключает одних «кандидатов в решения» (как правило, таких слов оказывается довольно много), но оставляет других (их тоже немало). Вторая догадка вынуждает отказаться от части слов, совместимых с первой, затем часть оставшихся слов «отсеивает» третья догадка и так далее. После того как высказана последняя догадка (наложено последнее условие), число оставшихся слов может быть больше 1 (в этом случае задача неоднозначно разрешима), равно 1 (задача однозначно разрешима) или 0 (задача неразрешима).

Разумеется, может случиться так, что новое условие (вновь высказанная догадка) не сузит круг допустимых слов. Так происходит, лишь когда оно согласуется со всеми ранее наложенными условиями.]

Наоборот, отказ от любого условия (от любой ранее высказанной догадки) *лишь расширяет* множество решений, поскольку любое слово, удовлетворявшее прежнему набору условий, согласуется и с новым, сокращенным набором решений, хотя слова, удовлетворяющие новому условию, не обязательно должны удовлетворять всем остальным условиям.

Итак, на вопросы задачи мы ответим следующим образом.

I. Если высказана одна новая догадка (или несколько новых догадок), то

в) неразрешимая задача останется неразрешимой,

а) однозначно разрешимая задача может стать неразрешимой или остаться однозначно разрешимой,

б) неоднозначно разрешимая задача может стать однозначно разрешимой, неразрешимой или остаться неоднозначно разрешимой (в последнем случае число решений может и остаться прежним, и уменьшиться, но непременно будет больше 1).

II. Если мы откажемся от одной или нескольких высказанных догадок, то

б) неоднозначно разрешимая задача останется неоднозначно разрешимой (при этом число решений может только возрасти, но не уменьшиться),

а) однозначно разрешимая задача может стать неоднозначно разрешимой или остаться однозначно разрешимой,

в) неразрешимая задача может стать неоднозначно разрешимой, однозначно разрешимой.

Часть X

119.

[Решение кросснамбера удобно начать с числа d по горизонтали, так как оно полностью задано своим определением.]

Поскольку наибольшее трехзначное число равно 999, а наименьшее 100, то число d по горизонтали равно 899 (рис. 179, а).

Но тогда число a по вертикали равно $888 - 400 = 488$, а число a по горизонтали — числу $488 : 2 = 244$, записанному от конца к началу, то есть 442 (рис. 179, б).

Средняя цифра числа b по вертикали равна $9 - 4 = 5$, а третьей цифрой числа g по горизонтали может быть только 0, поскольку это число делится на 10.

a	b	c
^{2}		
^{3} 8	9	9

a b c

Рис. 179.

Итак, кросснамбер решен (рис. 179, в). Поскольку вписанные числа не противоречат ни одному из определений, то полученное решение верно.

120. НЕСКОЛЬКО ВОПРОСОВ

А. Различие состоит лишь в том, что число g по горизонтали теперь не обязательно должно делиться на 17. Решение предыдущего кросснамбера останется прежним, поскольку при его заполнении делимость числа g по горизонтали на 17 никак не использовалась.

Б. В решении предыдущей задачи последний шаг состоял в использовании числа g по горизонтали. К этому времени было известно, что оно имеет вид $85*$, и оставалось найти лишь его последнюю цифру. Число 850 кратно 17. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что среди чисел вида $85*$ других кратных числу 17 нет. Следовательно, и в этом случае решение кросснамбера останется прежним.

В. Как мы уже знаем, не обращаясь к определению числа g по горизонтали, удается однозначно заполнить весь кросснамбер, за исключением той клетки, в которую должна быть вписана последняя цифра этого числа. Относительно числа g по горизонтали из других условий известно лишь, что оно имеет вид $85*$. Существуют 2 числа такого вида, делящиеся на 5: 850 и 855. Поскольку они оба согласуются с определением числа g по вертикали, то и число 850, и число 855 следует считать одинаково допустимыми. Таким образом, в этом случае кросснамбер имеет 2 решения.

Г. Относительно числа g по горизонтали из других условий (не использующих определение самого числа) известно, что оно должно иметь вид $85*$, то есть им может быть любое число от 850 до 859. Числа, делящиеся на 18, «перепрыгивают» через все эти числа: произведение $47 \cdot 18$ равно лишь 846, а следующее число, кратное 18, — произведение $48 \cdot 18$ — оказывается равным уже 864.

Таким образом, в этом случае кросснамбер не имеет решений: его условия противоречивы.

Д. В этом случае условия задачи становятся противоречивыми и кросснамбер не имеет решений. Действительно, из определения числа δ по горизонтали следует, что оно должно оканчиваться на 9. Но тогда и последняя цифра числа δ по вертикали также должна быть 9 и число не может быть четным.

121.

[Просмотрев от начала до конца определения всех чисел, приведенные в условиях задачи, можно убедиться в том, что лишь три из них «замкнуты»: это определения чисел a по горизонтали, δ и z по вертикали. Определение числа u по горизонтали само по себе недостаточно для того, чтобы можно было

a 1	δ 3	δ 3	z 1
δ		e 6	
$ж$	3	u	
κ 1	2	9	6

a δ

a 1	δ 3	δ 3	z 1
δ 9	1	e 6	9
$ж$ 9	3 6	u	
κ 1	2	9	6

δ z

Рис. 180.

его однозначно восстановить. Определения всех остальных чисел по горизонтали используют те или иные сведения о других числах, а определения всех остальных чисел по вертикали не несут никакой дополнительной информации.]

Основание числа, куб которого стоит под буквой a по горизонтали, больше 9, но меньше 22. Действительно, $9^3 < 10^3 = 1000$ — лишь трехзначное число, а $22^3 = 22 \cdot 22 \cdot 22 = 10648$ — уже пятизначное число. Но между 9 и 22 имеется только одно число, все цифры (их всего 2) которого одинаковы: число 11. Следовательно, числом a по горизонтали может быть только число $11^3 = 1 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$.

Относительно числа *в* по вертикали мы уже знаем, что его первая цифра 3, поэтому им может быть только число 36 — единственный из двузначных квадратов целых чисел, начинающийся с цифры 3.

Перейдем теперь к числу *г* по вертикали. Чтобы восстановить его, нам потребуется произвести кое-какие «подготовительные» работы, а вот число *к* по горизонтали можно вписать в кросснамбер незамедлительно.

Действительно, числом *к* по горизонтали может быть только число $36^2 = 36 \cdot 36 = 1296$ (рис. 180, а).

Теперь нам уже известны 2 цифры числа *г* по вертикали: этого достаточно для того, чтобы его можно было восстановить полностью. Наша задача упростится, если мы впишем в кросснамбер число *ж* по горизонтали, поскольку число *к* по горизонтали уже известно.

О числе *ж* по горизонтали мы теперь знаем, что оно равно 96 (рис. 180, б).

Накопленные сведения позволяют нам затем вписать числа *д* и *е* по горизонтали (рис. 180, в).

После этого уже ясно, что числом *г* по вертикали может быть только число 1936, поскольку ни одно из чисел 1906, 1916, 1926, ..., 1996 не является квадратом целого числа.

Последнее утверждение следует из того, что $43^2 = 1849$, а $45^2 = 2025$, в силу чего между числами 1849 и 2025 нет других квадратов целых чисел, кроме числа 1936.

Числом *и* по горизонтали может быть только числом 63. Действительно, его вторая цифра равна 3, а поскольку она нечетна, то не может быть вдвое больше первой. Следовательно, его первая цифра вдвое больше второй.

Итак, наш кросснамбер может иметь лишь такое решение, как показано на рис. 180, г. Нетрудно проверить, что найденные числа удовлетворяют всем условиям задачи и, следовательно, действительно являются ее решением.

[Не следует думать, дорогой читатель, что наше последнее замечание вызвано лишь чрезмерным педантизмом. Условия кросснамбера, как и любой математической задачи, могут оказаться противоречивыми, и тогда он не будет иметь решения. (В том, что такие случаи встречаются, мы убедились, отвечая на вопросы Г и Д предыдущей задачи.) При решении задачи 121 мы не использовали, например, ту часть определения числа *г* по вертикали, в которой говорится, что оно представляет собой квадрат двузначного числа с двумя *одинаковыми* цифрами. Поэтому могло оказаться, что под буквой *г* по вертикали вписан квадрат двузначного числа с различными цифрами. Это означало бы, что кросснамбер неразрешим.

Именно поэтому в своих рассуждениях мы избегаем категорических утверждений типа «Число *и* по горизонтали равно 63», а вынуждены формулировать свои заключения более осторожно, например так: «Числом *и* по горизонтали может быть только число 63».]

Примечание. Ясно, что к решению кросснамбера приводит не одна цепочка рассуждений. Если читатель решал задачу иначе, то это отнюдь не означает, будто он рассуждал неверно. Чрезвычайно интересно сравнить два решения и выяс-

нить, какое из них короче и проще. (Излишне говорить, что всегда полезно проверить полученное решение, нет ли в нем каких-нибудь пробелов или логических неточностей.)

122.

[В этом кросснамбере найти определение, которое само по себе позволяло бы восстановить число, труднее, чем в предыдущем. Тем не менее, тщательно просмотрев все условия, мы такое определение обнаружим: речь идет о числе u по горизонтали.]

Двузначное число u по горизонтали совпадает с пятой степенью своей второй цифры, то есть однозначного числа. Этим числом

a	b	c	d 2
e		f	2
$ж$	$з$	$и$ 3	2
$к$			2

a

a 8	b	c	d 2
e 8		f	2
$ж$ 8	$з$	$и$ 3	2
$к$ 8	6	4	2

b

a 8	b 8	c 3	d 2
e 8	0	f 5	2
$ж$ 8	$з$ 1	$и$ 3	2
$к$ 8	6	4	2

c

Рис. 181.

может быть лишь 2. Действительно, пятая степень единицы представляет собой однозначное число ($1^5 = 1$), а пятая степень тройки — трехзначное число ($3^5 = 243$).

Таким образом, числом u по горизонтали может быть только число $2^5 = 32$, оно действительно удовлетворяет определению.

Отсюда следует, что числом z по вертикали может быть только 2222 (рис. 181, a).

[Здесь нас ожидает неприятный сюрприз: хотя нам и удалось восстановить два числа, все попытки развить достигнутый успех ни к чему не приводят. «Гладкая» дорога внезапно обрывается!

Дальнейшие поиски можно вести по двум направлениям: продолжить заполнение кросснамбера либо с числа e , либо с числа $к$ по горизонтали. Чтобы «достроить» любое из них, необходимо выбрать один из двух возможных вариантов (остальные уже отпали).

Мы предпочитаем начать с числа $к$. Действительно, число a по вертикали сулит надежду не только на быстрое продвижение, но и (что гораздо важнее) на возможность выборов одного из двух вариантов числа $к$ по горизонтали.]

Упомянутая в определении числа $к$ по горизонтали постоянная разность между соседними цифрами может быть равна либо 1, либо 2. Других вариантов не существует потому, что если бы каждая следующая цифра была на 3 меньше предыдущей, то самая

первая цифра оказалась бы равной 11, то есть двузначному числу, что невозможно.

Следовательно, имеются лишь 2 «претендента» на звание «число k по горизонтали»: 5432 и 8642. Но число 5432 не может быть числом k по горизонтали, поскольку число a по вертикали заканчивалось бы тогда цифрой 5 и вопреки определению не было бы четным. Следовательно, числом k по горизонтали может быть только число 8642, а числом a по вертикали — только число 8888 (рис. 181, б).

Теперь нам уже известно, что число u по горизонтали равно 34, поэтому числом v по вертикали может быть только число $34 + 1 = 35$. Его последняя цифра совпадает с первой цифрой числа e по горизонтали, все клетки которого оказываются теперь заполненными: оно равно 52. Число $ж$ по горизонтали не меньше 80 и не больше 89, а поскольку оно делится на 9, то может быть равно только 81. Вписав его, мы одновременно найдем число $з$ по вертикали: оно равно 16. Это в свою очередь поможет нам восстановить число $б$ по вертикали: $5 \cdot 16 = 80$.

Итак, кросснамбер заполнен. Сделать это можно лишь одним способом — так, как показано на рис. 181, в. Поскольку полученные числа удовлетворяют всем условиям задачи (убедительно просим читателя проверить это!), нам действительно удалось найти ее решение.

Примечание. Неправильно думать, будто из определения числа a по горизонтали следует, что оно оканчивается на 0. Так было бы лишь в том случае, если бы число a по горизонтали было, например, в 10 раз больше какого-нибудь из целых чисел, стоящих в кросснамбере под другими буквами. Но $\frac{1}{10}$ целого числа не обязательно должна быть целым числом, хотя любое число в 10 раз больше $\frac{1}{10}$ своей величины.

Таким образом, определение числа a по горизонтали совершенно «пусто»: оно не содержит никакой информации.

123. ДРУГОЙ ВАРИАНТ

[Задача 123 гораздо труднее предыдущей. Прежний «вход» в задачу теперь накрепко «заперт»: начинать решение кросснамбера с числа u по горизонтали на этот раз невозможно. Поэтому нам не остается ничего другого, как еще раз тщательно просмотреть все определения в надежде, что из них удастся извлечь какие-нибудь, пусть даже неполные, сведения о числах: ведь должна же быть хоть какая-то «зацепка». Для облегчения поисков набросаем такую схему, как показано на рис. 182.]

Если число $з$ по вертикали при умножении на 5 переходит во всего лишь двузначное число, то оно меньше 20 и, следовательно, начинается с цифры 1.

Но тогда число $ж$ по горизонтали равно 81, число a по вертикали равно 8888, а число k по вертикали равно либо 8765, либо 8642. Число $г$ по вертикали в первом случае равно 5555, а во втором 2222 (рис. 183, а).

Число $з$ по вертикали равно либо 17, либо 16. Число e по горизонтали в первом случае равно $3 \cdot 17 + 4 = 55$, а во втором

$3 \cdot 16 + 4 = 52$. Следовательно, оно начинается с цифры 5. С учетом того, что нам известно о числе $в$ по вертикали, число $и$ по вертикали не может оканчиваться на 6: его последней цифрой может быть только цифра 4 ($4 + 1 = 5$, а $6 + 1 = 7$). Это позволяет отбросить одного из двух «кандидатов» в число $к$ по горизонтали,

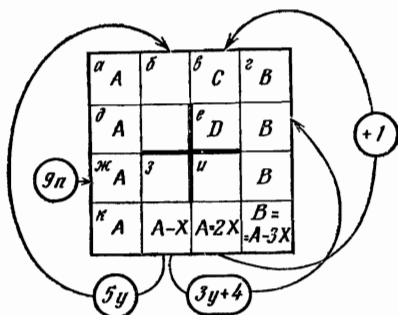


Рис. 182.

а именно число 8765, после чего останется единственный «претендент»: число 8642. После того как мы впишем все эти числа в клетки кросснамбера, он приобретет такой вид, как показано на рис. 183, б.

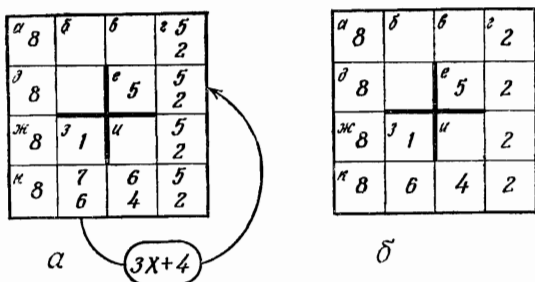


Рис. 183.

Оставшиеся пробелы заполняются без труда: число $и$ по горизонтали равно 32, число $в$ по вертикали 35, а число $б$ по вертикали $5 \cdot 16 = 80$.

Примечание. Мы видим, что оба изменения, внесенные в определения чисел, никак не сказались на окончательном ответе; все числа в новом варианте кросснамбера совпадают с соответствующими числами в старом варианте, хотя новые условия сообщают нам меньше сведений о числах, чем старые. Разумеется, мы могли бы заранее утверждать, что любое число, удовлетворяющее условиям предыдущего кросснамбера,

будет одновременно удовлетворять и условиям его нового варианта. Однако необходимо было выяснить, не приведут ли изменения, внесенные нами в условия задачи, к появлению новых решений и можно ли прийти к решению путем простых логических рассуждений.

124.

[На первый взгляд кажется, что ни одно из условий не может служить отправной точкой для поисков решения, но, приглядевшись повнимательнее, мы все же сумеем отыскать ключ к решению.]

Все цифры числа *в* по горизонтали одинаковы, половина его — целое число (*а* по горизонтали), число *г* по вертикали равно самому числу *в* по горизонтали, а число *д* по горизонтали — его квадрату. Все это означает, что *под буквами в по горизонтали и по вертикали стоят два равных четных числа с одинаковыми цифрами, четырехзначный квадрат которых оканчивается на ту же цифру, что и сами числа.*

Но при возведении в квадрат последняя цифра не изменяется лишь у чисел, оканчивающихся на 0, 1, 5 или 6.

[В общем случае можно утверждать, что *последняя цифра произведения равна произведению последних цифр сомножителей.* Этот хорошо известный факт следует из самого способа (алгоритма) вычисления произведений. Если число требуется умножить на самое себя (возвести в квадрат), то его последнюю цифру также необходимо умножить на самую себя, то есть возвести в квадрат, и *последняя цифра полученного произведения совпадает с последней цифрой квадрата всего числа.*]

Число *в* по горизонтали четно. Следовательно, оно не может оканчиваться ни на 1, ни на 5. Не может оно оканчиваться и на 0, поскольку в противном случае число *г* по вертикали должно было бы начинаться с 0. Таким образом, числа *в* по горизонтали и *г* по вертикали могут оканчиваться только на 6, а поскольку обе их цифры одинаковы, то эти числа могут быть равны только 66, а число *д* по горизонтали — только числу $66^2 = 4356$ (рис. 184, а).

Но тогда число *а* по горизонтали может быть равно только $66 : 2 = 33$, а число *з* по горизонтали (по определению числа *а* по вертикали) — сумма числа *а* по вертикали и 2, то есть $34 + 2 = 36$ (рис. 184, б).

Числом *в* по вертикали может быть только число 6561, поскольку это единственный четырехзначный квадрат целого числа, начинающийся с 65 ($81^2 = 6561$, но $80^2 = 6400$, $82^2 = 6724$).

Следовательно, число *и* по горизонтали начинается с цифры 1 и может быть равно только 10, 11, 12, 13 или 14. Действительно, число *ж* по вертикали получается при умножении числа *и* по горизонтали на 7, а оно двузначно. Так как число *ж* по вертикали должно оканчиваться на ту же цифру, что и число *и* по горизонтали, последнее не может быть равно ни 11, ни 12, ни 13, ни 14 (поскольку все эти числа оканчиваются на другую цифру, чем их произведения на 7). Таким образом, число *и* по горизонтали может быть равно только 10, а число *ж* по вертикали — только 70 (рис. 184, в).

Зная это, нетрудно установить, что второй цифрой числа e по горизонтали может быть только 6, а первой — только 4.

Итак, кросснамбер можно заполнить только так, как показано на рис. 184, г. Поскольку полученные числа удовлетворяют (просим читателей проверить!) всем определениям, нам действительно удалось получить решение исходной задачи.

a	b	b	z
		6	6
d	4	3	5
e			$ж$
3		$и$	

г

a	b	b	z
3	3	6	6
d	4	3	5
e			$ж$
3	3	6	$и$

б

a	b	b	z
3	3	6	6
d	4	3	5
e		6	$ж$ 7
3	3	6	$и$ 1

в

a	b	b	z
3	3	6	6
d	4	3	5
e	4	6	$ж$ 7
3	3	6	$и$ 1

з

Рис. 184.

Примечание. Отправной точкой для поиска решения (помимо той, о которой шла речь выше) может служить также одновременное рассмотрение чисел $и$ по горизонтали и $ж$ по вертикали.

125.

[Сравнивая этот кросснамбер с предыдущим, нетрудно заметить их поразительное сходство и отсутствие некоторых определений.]

От кросснамбера из задачи 124 этот кросснамбер отличается лишь тем, что в его условиях определения чисел $и$ по горизонтали и e по вертикали полностью отсутствуют, а определение числа e по горизонтали сообщает меньше сведений.

Все остальные определения сохранились такими же, как в предыдущей задаче. Поэтому и решение нового кросснамбера будет повторять решение кросснамбера из задачи 124 до тех пор, пока мы не воспользуемся определениями чисел e , $и$ по горизонтали и a , e по вертикали. Следовательно, за исключением числа 3 по горизонтали, начальная часть решения задачи 125 будет выглядеть так, как показано на рис. 184, б (рис. 185, а).

«Списывать» решение предыдущей задачи нам удастся лишь до этих пор. Для того чтобы продвигаться дальше, придется обратиться к «урезанным условиям», оставшимся от условий предыдущей задачи. Из определений чисел *и* по горизонтали и *ж* по вертикали можно выяснить следующее.

Хотя теперь не известно, начинается ли число *и* по горизонтали с 1, мы по-прежнему можем утверждать, что оно должно быть не меньше 10 (поскольку это число двузначно) и не больше 14 (поскольку при умножении его на 7 получается двузначное число). Поэтому в этой задаче, так же как и в предыдущей,

<i>a</i> 3	<i>b</i> 3	<i>b</i> 6	<i>z</i> 6
<i>б</i> 4	3	5	6
<i>e</i>			<i>ж</i>
3		<i>и</i>	

a

<i>a</i> 3	<i>b</i> 3	<i>b</i> 6	<i>z</i> 6
<i>б</i> 4	3	5	6
<i>e</i>			<i>ж</i> 7
3		<i>и</i> 1	0

б

<i>a</i> 3	<i>b</i> 3	<i>b</i> 6	<i>z</i> 6
<i>б</i> 4	3	5	6
<i>e</i>	1		<i>ж</i> 7
3 2	5	<i>и</i> 1	0

в

<i>a</i> 3	<i>b</i> 3	<i>b</i> 6	<i>z</i> 6
<i>б</i> 4	3	5	6
<i>e</i>	6	6	<i>ж</i> 7
3 3	6	<i>и</i> 1	0

г

<i>a</i> 3	<i>b</i> 3	<i>b</i> 6	<i>z</i> 6
<i>б</i> 4	3	5	6
<i>e</i> 4	6	6	<i>ж</i> 7
3 3	6	<i>и</i> 1	0

д

Рис 185.

число *и* по горизонтали может быть равно только 10, а число *ж* по вертикали — только 70 (рис. 185, *б*).

Что касается числа *б* по вертикали, то среди чисел вида 33** имеются лишь два числа, кратных 51: 3315 и 3366. Но если мы выберем первое из этих чисел, то число *з* по горизонтали должно оканчиваться на 5. Однако тогда оно может быть равно лишь 25, поскольку число 25 — единственный двузначный квадрат целого числа, оканчивающийся на 5. Тем самым мы пришли бы к противоречию с определением числа *a* по вертикали (число 34 не меньше 25; рис. 185, *в*).

Итак, остается лишь вторая возможность: число *б* по вертикали равно 3366. Но тогда, с одной стороны, мы, пользуясь определением числа *e* по горизонтали, восстанавливаем недостающую цифру числа *в* по вертикали: она равна 6, а с другой — находим число *з* по горизонтали: оно может быть равно только 36 (рис. 185, *г*).

Следовательно, число *e* по горизонтали должно начинаться и действительно начинается с цифры 4, поскольку в противном случае число, вписанное под буквой *e* по горизонтали, не удовлетворяло бы определению.

[Действительно, по определению число *e* по вертикали, увеличенное на 1, должно делиться на 11. Но в десятичной системе счисления двузначное число может делиться на 11 лишь в том случае, если обе цифры его одинаковы.]

Итак, единственно возможное решение кросснамбера совпадает с решением предыдущего кросснамбера (рис. 185, д).

126.

[На первый взгляд кажется, будто определения чисел *a* по горизонтали, *a* по вертикали, *g* по вертикали и *k* по горизонтали аналогичны по своему характеру и цифры в каждом числе возрастают от первой цифры к последней. Такая информация действительно очень полезна, поскольку означает, что разность между соседними цифрами не может принимать слишком много значений (последняя цифра не должна быть больше 9!).

Однако такое заключение было бы опрометчиво: *разность между соседними цифрами может быть отрицательной!* (Например, не исключено, что в числе *a* по вертикали цифры по мере продвижения сверху вниз не возрастают, а убывают.) Таким образом, информация, содержащаяся в определениях чисел *a* по горизонтали, *a* по вертикали, *g* по вертикали и *k* по горизонтали, позволяет разности соседних цифр изменяться в довольно широких пределах.

Чтобы сузить эти пределы, необходимо почерпнуть дополнительную информацию. Откуда ее взять? Ясно, что для этого необходимо найти какое-нибудь условие, в котором упоминается хотя бы одно из интересующих нас чисел. Таким источником дополнительной информации служит определение числа *b* по вертикали.]

Из определения числа *b* по вертикали следует, что в числе *a* по горизонтали вторая цифра совпадает с третьей. Это означает, что *разность между любыми двумя соседними цифрами, о которой говорится в определении числа *a* по горизонтали, равна 0*. Иначе говоря, *все цифры числа *a* по горизонтали одинаковы*.

Но из той части определения этого числа, которая заключена в скобки, следует, что разность между соседними цифрами, упоминаемая в определении числа *a* по вертикали, *не меньше 1*. В свою очередь это позволяет утверждать, что разность, упоминаемая в определении числа *g* по вертикали, *не меньше 2*, в силу чего разность, упоминаемая в определении числа *k* по горизонтали, *не меньше 3*.

Однако *последняя разность не может быть и больше 3*. Действительно, первая цифра числа *k* по горизонтали больше последней на величину, равную утроенной разности, упоминаемой в определении этого числа, а разность любых двух чисел не превосходит 9, причем достигает этого значения лишь в том случае, если большая цифра равна 9, а меньшая — 0.

Следовательно, в числе *к* по горизонтали каждая следующая цифра на 3 меньше, чем предыдущая, первая цифра равна 9, а последняя — 0.

Установив это, мы можем утверждать, что разность, упоминаемая в определении числа *г* по вертикали, не больше 2, а разность, упоминаемая в определении числа *а* по вертикали, не больше 1.

Но это означает, что в числе *г* по вертикали каждая цифра на 2 больше, а в числе *а* по вертикали — на 1 меньше, чем следующая.

Выделенные курсивом утверждения позволяют единственным способом заполнить всю наружную «рамку» кросснамбера (восстановить числа *а* по горизонтали, *а* по вертикали, *г* по вертикали и *к* по горизонтали) (рис. 186, а).

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>б</i>	<i>г</i>
6	6	6	6
<i>д</i>	7		4
<i>ж</i>	8	<i>з</i>	2
<i>к</i>	9	6	0

а

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>б</i>	<i>г</i>
6	6	6	6
<i>д</i>	7	6	2
<i>ж</i>	8	<i>з</i>	6
<i>к</i>	9	6	0

б

Рис. 186.

После этого уже нетрудно установить, что число *б* по вертикали может быть равно только 66, число *е* по горизонтали — только разности 100 минус число *д* по горизонтали: $100 - 76 = 24$. Поскольку числа *з* и *и* по вертикали «взаимно обратны» (одно число совпадает с другим, написанным от конца к началу), то первая цифра любого из этих чисел совпадает со второй цифрой другого числа. Следовательно, число *з* по вертикали может быть равно только 36, а число *и* по вертикали — только 63.

Итак, решить предлагаемый кросснамбер можно лишь единственным способом (рис. 186, б). Поскольку, как нетрудно проверить, найденные числа удовлетворяют всем условиям задачи, они действительно образуют ее решение.

127.

Из определений чисел *а* по вертикали, *ж* по горизонтали и *г* по вертикали следует, что в направлении, указанном на рис. 187, а стрелкой, цифры при переходе от любой из них к следующей должны возрастать по крайней мере на 1. Следовательно, первая цифра числа *а* по вертикали должна быть по крайней мере на 9 больше, чем первая цифра числа *г* по вертикали. Но поскольку разность любых двух цифр не превосходит 9, причем достигает наибольшего значения лишь в том случае, если одна из цифр равна 9, а другая — 0, то число *а* по вертикали начинается

с цифры 9, число a по вертикали — с цифры 0 (именно поэтому оно названо «набором цифр», не являющимся четырехзначным числом, но возникающим при записи некоторого четырехзначного числа от конца к началу), а при обходе «рамки» кросснамбера в направлении, указанном стрелкой, каждая следующая цифра больше предыдущей не более чем на 1. (Действительно, если бы какая-нибудь из цифр превосходила предыдущую более чем на 1, то первая цифра числа a по вертикали должна была бы быть больше 9.)

Это означает, что в направлении, указанном стрелкой, каждая следующая цифра превосходит предыдущую *ровно* на 1. Следовательно заполнить клетки кросснамбера, по которым проходит

a	b	b	z
d			
e			
$ж$			

a

a	b	b	z
9			0
8			1
7			2
6	5	4	3

b

a	b	b	z
9	6	3	0
8	9	0	1
7	9		2
6	5	4	3

d

a	b	b	z
9	6	3	0
8	9	0	1
7	9	7	2
6	5	4	3

z

Рис. 187.

стрелка, можно лишь единственным образом — так, как показано на рис. 187, b .

Ясно, что в числе a по горизонтали каждая следующая цифра на $(9-0):3=3$ меньше, чем предыдущая. Таким образом, число a по горизонтали может быть равно только 9630.

Но тогда средние цифры числа b по вертикали могут быть лишь двумя девятками (поскольку во всех остальных случаях сумма его цифр была бы меньше суммы цифр числа a по вертикали на величину, превышающую 1).

Третьей цифрой числа d по горизонтали может быть только 0 (поскольку сумма трех остальных цифр этого числа уже равна сумме цифр числа $ж$ по горизонтали).

Все найденные числа представлены на рис. 187, $в$. Поскольку в числе $в$ по вертикали (по его определению) сумма второй

и третьей цифр равна сумме первой и четвертой цифр, то есть $3 + 4 = 7$, то его третьей цифрой может быть лишь $7 - 0 = 7$.

Итак, все клетки кросснумбера заполнены (рис. 187, г). Поскольку найденные числа удовлетворяют всем условиям задачи, они действительно образуют ее решение.

Примечание. Решение этого кросснумбера стало возможным лишь потому, что определение числа $г$ по вертикали гласит: «Набор цифр, не являющийся четырехзначным числом». Согласно этому определению, четыре цифры, стоящие под буквой $г$ по вертикали, могут не быть четырехзначным числом (и даже не должны им быть).

Если бы в определении числа $г$ по вертикали не было этой оговорки, то задача не имела бы решения.

128.

По условиям задачи при обходе клеток кросснумбера в направлении, указанном на рис. 188, а стрелкой, цифры возрастают.

α	δ	δ	$г$
θ			
ϵ			
κ			

α

α	δ	δ	$г$
6	7	8	9
5			
4			
3	2	1	0

δ

α	δ	δ	$г$
θ			
ϵ			
κ			

θ

α	δ	δ	$г$
			9
5	6	7	8
4	3	2	1
κ			0

$г$

α	δ	δ	$г$
6	7	8	9
5	6	7	8
4	3	2	1
3	2	1	0

θ

Рис. 188.

Следовательно, заполнить клетки можно лишь единственным образом — так, как это было сделано в решении предыдущей задачи (рис. 188, б).

Аналогичное утверждение справедливо относительно «содержимого» клеток, выстроившихся вдоль стрелки на рис. 188, в. Поскольку их 10, то вписать в них цифры можно единственным способом — так, как показано на рис. 188, г.

Итак, решить кросснамбер можно лишь единственным способом (рис. 188, *б*). Поскольку найденные числа удовлетворяют всем условиям задачи, они действительно образуют ее решение.

129.

[Сравнивая этот кросснамбер с предыдущим, нетрудно заметить их сходство. Это позволяет установить ряд соответствий между числами и подобрать ключ к решению задачи.]

Условия этой задачи отличаются от условий предыдущей задачи лишь тем, что в определениях двух чисел по вертикали слово «меньше» заменено словом «больше». Отсюда следует, что задача 129 не имеет решения.

Действительно, предположим, что нам каким-то образом удалось заполнить клетки кросснамбера. Отразим полученное решение относительно его центра (на рис. 189, *а* центр отмечен точкой). Подчеркнем, что отражению относительно центра подвергается лишь решение, то есть цифры, вписанные в клетки кросснамбера,

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
<i>б</i>				<i>б</i>	1	2	3
<i>в</i>		●		<i>в</i>	1	2	3
<i>г</i>				<i>г</i>	8	7	6
<i>ж</i>				<i>ж</i>	9	8	7

Рис. 189.

а сама «сетка» кросснамбера — помеченные буквами клетки — остается на месте!) Что при этом произойдет?

Во-первых, числа *а* и *ж*, *б* и *в* по горизонтали, а также *б* и *г* по вертикали поменяются местами; во-вторых, каждое из них окажется «вывернутым наизнанку» — записанным от конца к началу. Поскольку порядок цифр в каждом из этих чисел изменится на обратный, то цифра, бывшая до отражения больше предыдущей, после отражения станет меньше предыдущей.

Нетрудно проверить, что числа, заполняющие все строки и столбцы кросснамбера после отражения, удовлетворяют всем условиям предыдущей задачи и, следовательно, образуют ее решение.

Однако, как мы видели, предыдущая задача допускает лишь единственное решение (рис. 188, *б*). Поэтому и кросснамбер 129 можно заполнить лишь единственным образом, «обратив» решение предыдущей задачи, представленное на рис. 188, *б*, то есть отразив его относительно центра (рис. 189, *б*). Однако обращенное решение задачи 128 не является решением задачи 129, поскольку «числа» *а* по горизонтали и вертикали начинались бы с 0, то есть не были бы числами.

Из определений чисел a по горизонтали, b по вертикали, c по горизонтали и d по вертикали следует, что при обходе клеток кросснамбера по направлению, указанному стрелками на рис. 190, каждая цифра должна была бы быть больше предыдущей. Однако после того, как «кольцевой маршрут» пройден один раз, дальнейшее возрастание цифр становится невозможным, поскольку, с какой

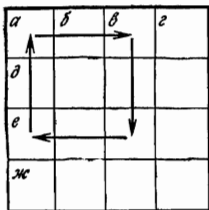


Рис. 190.

бы клетки мы ни начали его обход и какие бы цифры ни вписывали в клетки «по пути», по возвращении в исходную клетку выяснится, что стоящая в ней цифра должна быть больше самой себя.

Итак, задача 130 не имеет решения.

131.

Удовлетворить определению числа a по горизонтали можно лишь в том случае, если все его цифры одинаковы. Действительно, разность двух соседних цифр можно образовать двумя способами (вычесть из первой цифры левую или, наоборот, из левой цифры правую), и результат окажется одинаковым лишь в том случае, если обе разности равны нулю.

Рассмотрим «замкнутый маршрут», образованный числами a по горизонтали, c по вертикали, u по горизонтали и a по вертикали (на рис. 191, a направление обхода указано стрелками). Если бы клетки вдоль этого маршрута были заполнены, то каждая следующая цифра не могла бы быть меньше предыдущей.

[В определении числа a по вертикали речь идет не только о цифрах, расположенных в соседних клетках, но мы использовали лишь ту часть условия, которая относится к двум смежным клеткам, одна из которых расположена над другой.]

Завершив обход «кругового маршрута», мы должны будем вписать во все клетки вдоль него одну и ту же цифру, поскольку цифры «по пути» нигде не убывают и, кроме того, по возвращении в исходную клетку мы должны прийти к той же самой цифре, с которой начали.

[Что это может быть за цифра? Если бы она была известна, то мы сумели бы заполнить три четверти всех клеток кросснамбера. Такой успех был бы тем более ценен, что другие подходы к решению не позволяют продвинуться вперед, поскольку информация о всех прочих числах ничтожно мала.]

Из определения числа e по горизонтали следует, что в клетках, расположенных вдоль границы кросснамбера, должны стоять одинаковые четные «однозначные числа»: 2, 4, 6 или 8. (Цифру 0 можно исключить, поскольку мы заранее условились вписывать в строки и в столбцы кросснамбера только «настоящие» числа, которые не могут начинаться с нуля, если число знаков в них превышает 1, и тем более состоять только из нулей.)

По известному признаку делимости на 9 сумма цифр числа d по горизонтали делится на 9. Эта сумма не может обратиться в 0 (в

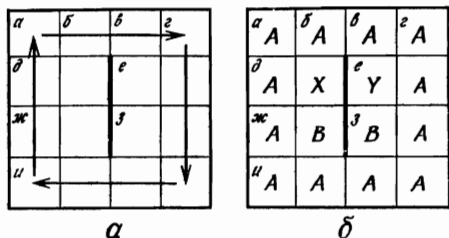


Рис. 191.

силу сделанного выше замечания) и быть больше 18, поскольку сумма любых двух однозначных чисел не превышает $9 + 9 = 18$. Более того, эта сумма не достигает и своего наибольшего значения (то есть должна быть меньше 18), поскольку известно, что первая цифра числа d по горизонтали четна. Итак, остается единственно возможный случай: сумма цифр числа d по горизонтали равна 9.

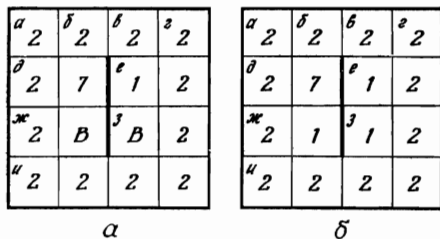


Рис. 192.

[Этот результат можно получить иначе. Действительно, относительно первой цифры числа d по горизонтали известно, что она четна. Существует всего 4 двузначных числа, делящихся на 9, с четной первой цифрой: 27, 45, 63 и 81. Возможно, что три из них придется отбросить. Возникает вопрос: какие числа «лишние»? К ответу на него следует подходить «по вертикали»!]

Первые и последние цифры чисел b и z по вертикали совпадают (об этом мы уже знаем). Но и третьи цифры этих чисел также должны быть равны, поскольку сумма цифр числа $ж$ по горизонтали

равна сумме цифр числа $з$ по горизонтали. Относительно их цифр известно, что первая цифра числа $ж$ по горизонтали совпадает со второй цифрой числа $з$ по горизонтали. Следовательно, вторая цифра числа $ж$ (она же — третья цифра числа $б$ по вертикали) равна первой цифре числа $з$ по горизонтали (она же — третья цифра числа $в$ по вертикали) (рис. 191, б).

Итак, третьи цифры чисел $б$ и $в$ по вертикали равны. Сумма цифр числа $б$ по вертикали может быть на 6 больше суммы цифр числа $в$ по вертикали лишь в том случае, если вторая цифра (X) числа $б$ по вертикали на 6 больше, чем вторая цифра (Y) числа $в$ по вертикали.

Поскольку Y не меньше 1, то X не меньше 7. Но $A + X = 9$ и A не меньше 2. Следовательно, X не больше 7. Таким образом, X может быть равен только 7, тогда $A = 2$ и $Y = 1$ (рис. 192, а).

Теперь нетрудно видеть, что число $з$ по горизонтали может быть меньше числа $ж$ по горизонтали лишь в том случае, если вместо B мы впишем 1. Единственное решение кросснамбера, удовлетворяющее всем условиям задачи, представлено на рис. 192, б.

132.

[Лишь на первый взгляд кажется, что найти «подступы» к решению этого кросснамбера весьма трудно. В действительности начать решение можно с двух «слабых» мест: 1) с чисел $и$ по

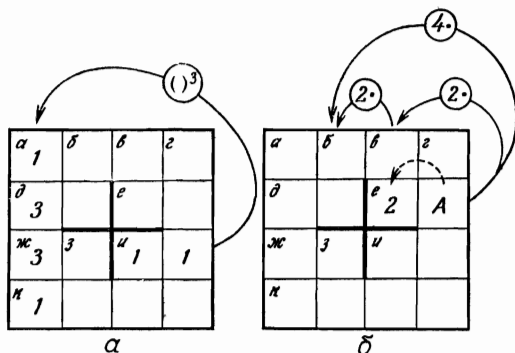


Рис. 193.

горизонтали и $а$ по вертикали, 2) с чисел $е$ по горизонтали, $в$ и $б$ по вертикали.]

1) Числом $и$ по горизонтали могут быть лишь числа 11, 22, 33 и так далее. Поскольку по определению числа $а$ по вертикали следует, что куб числа $и$ по горизонтали четырехзначен, то это число должно быть меньше 22 ($22^3 = 10648$ — пятизначное число). Итак, число $и$ по горизонтали может быть равно только 11, а число $а$ по вертикали — только $11^3 = 1331$ (рис. 193, а).

2) По условиям задачи число $в$ по вертикали в два, а число $б$ по вертикали в четыре раза больше числа $е$ по горизонтали, причем

число δ по вертикали двузначное. Следовательно, число e по горизонтали не больше 24, то есть его первая цифра не больше 2.

Ясно также, что число ν по вертикали (поскольку оно вдвое больше числа e по горизонтали) четно и поэтому число e по горизонтали начинается с четной цифры. Эта цифра в силу принятого

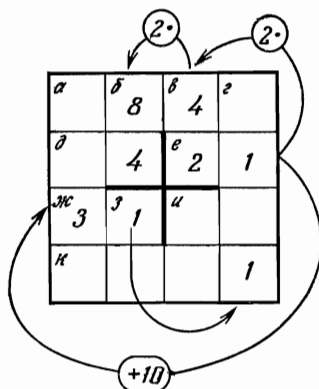


Рис. 194.

нами соглашения не может быть 0 и, как мы видели, не больше 2. Таким образом, число e по горизонтали может начинаться только с 2 (рис. 193, б). Но тогда последняя цифра числа ν по вертикали равна 2. Следовательно, последней цифрой (A) числа e по горизонтали может быть 1 или 6, поскольку в противном случае вдвое большее

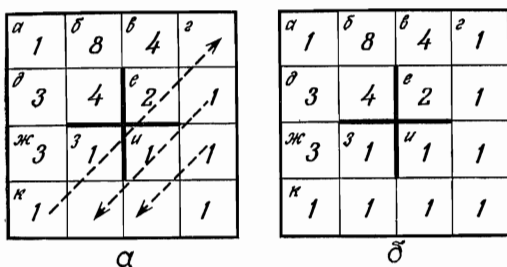


Рис. 195.

число ν по вертикали не оканчивалось бы цифрой 2. (О простом свойстве произведения чисел мы уже упоминали выше: последняя цифра произведения чисел равна последней цифре произведения последних цифр сомножителей.) Но поскольку было показано, что число e не может быть больше 24, то оно равно лишь 21, в силу чего число ν по вертикали равно 42, а число δ по вертикали — 84 (рис. 194). Число κ по горизонтали (по своему определению) рав-

но 31. Теперь мы уже знаем последнюю цифру числа k по горизонтали. Все найденные нами числа представлены на рис. 194.

Объединяя независимые частичные решения, изображенные на рис. 193, a и b , получаем сводную таблицу (рис. 195, a). Три оставшиеся пустыми клетки мы однозначно заполним, если обратимся к определению числа g по вертикали. Так мы приходим к единственному возможному способу заполнения кросснамбера (рис. 195, b). Поскольку найденные нами числа удовлетворяют всем условиям задачи, то они действительно образуют решение кросснамбера.

Примечание. При сведении воедино частичных результатов, представленных на рис. 193, a и 194, читатель, возможно, обратил внимание на то, что первая цифра числа $ж$ по горизонтали получается дважды — и в первой, и во второй части решения. Поскольку эти части независимы, это означает, что информацию, содержащуюся в условиях задачи, при желании можно уменьшить. Например, определение числа $ж$ по горизонтали можно сузить до следующего: «Число, оканчивающееся на ту же цифру, что и число e по горизонтали». (При таком определении на рис. 194 появилась бы лишь вторая цифра числа $ж$ по горизонтали.)

133.

Этот кросснамбер не имеет решения. Действительно, число d по горизонтали четно, но может оканчиваться на 0, поскольку в противном случае число b по вертикали должно было бы начинаться с 0. Следовательно, число d по горизонтали оканчивается либо на 2, либо на какую-нибудь еще большую четную цифру. Это означает, что число b по вертикали начинается по крайней мере с цифры 2, то есть не может быть меньше 22. Но тогда число g по вертикали должно было бы быть не менее чем пятизначным (см. решение предыдущей задачи).

134.

Можно.

[Вся содержащаяся в условиях задачи информация представлена на рис. 196.

Начинать решение, по-видимому, лучше всего с тех условий, в которых говорится о кубах целых чисел, поскольку существует не так много натуральных чисел с четырехзначными кубами. Этим свойством обладают лишь натуральные числа от 10 до 21, но их еще довольно много. Упоминаемые в условиях задачи кубы целых чисел обладают двумя свойствами:

1) основание одного куба равно основанию другого, записанному от конца к началу;

2) последняя цифра одного из кубов совпадает с первой цифрой другого.

Кроме того, один из кубов должен обладать дополнительным свойством:

3) вторая цифра его основания должна совпадать с третьей цифрой куба (это свойство следует из определений чисел $и$ по вертикали и k по горизонтали).

Быть может, эти свойства помогут нам сузить множество допустимых чисел до разумных пределов.]

Число b по вертикали совпадает с числом u по вертикали, записанным от конца к началу, и наоборот, а кубы обоих чисел четырехзначны (см. определения числа a по вертикали и k по горизонтали). Известно, что четырехзначными кубами обладают только натуральные числа от 10 до 21. Следовательно, оба числа b и u по вертикали, переходящие друг в друга при записи в обратном порядке (от конца к началу), должны быть не меньше 10 и не больше 21. Таким образом, эти числа могут начинаться только с цифр 1 или 2.

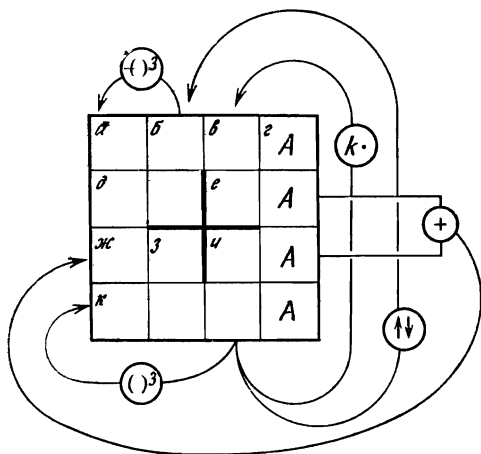


Рис. 196.

В зависимости от того, с какой цифры начинается одно из них, другое число, поскольку оно получается при записи первого от конца к началу, может оканчиваться только цифрой 1 или 2. Возможны 2 случая: либо оба числа равны 11, либо одно из них равно 12, а другое 21 (поскольку, как известно, число 22 слишком велико).

Рассмотрим кубы этих чисел:

$$11^3 = 1331,$$

$$12^3 = 1728,$$

$$21^3 = 9261.$$

Лишь число 12 обладает тем свойством, что его вторая цифра совпадает с третьей цифрой его куба. Следовательно, число u по вертикали может быть равно только 12, число b по вертикали — только 21, в силу чего число k по горизонтали равно $12^3 = 1728$, число a по вертикали — числу $21^3 = 9261$, а число g по вертикали — числу 8888 (рис. 197, а).

Число $ж$ по горизонтали равно сумме чисел e и u по горизонтали. Последняя цифра суммы двух чисел определяется последними

цифрами слагаемых. Но последние цифры слагаемых равны 8. Поскольку $8 + 8 = 16$, то последняя цифра суммы равна 6. Таким образом, число $ж$ по горизонтали равно 66 (рис. 197, б).

Число $е$ по горизонтали равно $66 - 18 = 48$ (рис. 197, в).

Относительно числа $в$ по вертикали известно лишь, что оно оканчивается на 4 и делится на 12. Среди двузначных кратных числа 12 имеются 2 оканчивающихся на 4: 24 и 84. Следовательно, кросснамбер можно заполнить двумя способами. Они оба показаны на рис. 197, г. Таким образом, мы имели все основания утверждать, что кросснамбер 134 решить можно.

α	β	γ	δ
9	2		8
θ	2	1	8
κ	6	3	8
λ	1	7	2

α

α	β	γ	δ
9	2		8
θ	2	1	8
κ	6	3	8
λ	1	7	2

β

α	β	γ	δ
9	2		8
θ	2	1	8
κ	6	3	8
λ	1	7	2

γ

α	β	γ	δ
9	2	2	8
θ	2	1	8
κ	6	3	8
λ	1	7	2

α	β	γ	δ
9	2	8	8
θ	2	1	8
κ	6	3	8
λ	1	7	2

2

Рис. 197.

Примечание. Когда говорят, что кросснамбер можно решить (или что он разрешим, допускает решение), то имеют в виду отнюдь не возможность однозначного заполнения всех его строк и столбцов. Кросснамбер разрешим, если во все его строки и столбцы можно вписать числа так, чтобы они удовлетворяли всем условиям задачи (именно это и означает, что решение кросснамбера существует). Иногда кросснамбер можно заполнить несколькими способами (с соблюдением всех условий задачи). В таких случаях говорят, что кросснамбер допускает несколько решений, или неоднозначно разрешим. Разумеется, всякий неоднозначно разрешимый кросснамбер разрешим.

Если кросснамбер допускает решение, но только одно, то его называют **однозначно разрешимым** (его решение единственно).

Кросснамбер не имеет решения, или *неразрешим*, если во все его строки и столбцы нельзя вписать числа так, чтобы они удовлетворяли всем условиям задачи. Это означает, что определения чисел противоречивы.

135.

А. Старое решение удовлетворяет всем прежним определениям чисел, поэтому в новом варианте задачи оно будет удовлетворять всем условиям, которые сохранятся после вычеркивания одного или нескольких определений, и старое решение будет решением и новой задачи. Но поскольку часть условий вычеркнута и удовлетворять им не нужно, то может случиться так, что появятся какие-нибудь новые способы заполнения кросснамбера, то есть число решений возрастет. Следовательно, *при вычеркивании одного или нескольких определений однозначно разрешимый кросснамбер (II типа) либо останется однозначно разрешимым, либо станет неоднозначно разрешимым (III типа).*

Б. При добавлении новых условий старое решение будет по-прежнему удовлетворять всем старым условиям задачи. Но поскольку заполнить кросснамбер с соблюдением всех старых условий можно было лишь I способом, то после наложения новых условий может оказаться, что прежнее решение им не удовлетворяет.

Итак, либо единственное решение старой задачи удовлетворяет каждому из новых условий, либо среди них найдется по крайней мере одно такое, с которым старое решение не согласуется. В первом случае старое решение остается решением новой задачи, во втором новая задача неразрешима. Таким образом, *при добавлении одного или нескольких новых условий однозначно разрешимый кросснамбер (II типа) может либо остаться однозначно разрешимым, либо стать неразрешимым (I типа).*

Проиллюстрируем сказанное на примере задачи 132. Этот кросснамбер принадлежит к типу II.

*

Если вычеркнуть определение числа *к* по горизонтали, то решение, представленное на рис. 195, б, по-прежнему останется в силе, но в клетку, стоящую в правом нижнем углу, можно будет вписать не только единицу. На рис. 194 показано, откуда «берется» эта единица. Но теперь одно условие отброшено, и последняя цифра числа *к* по горизонтали не должна более совпадать с последней цифрой числа *ж* по горизонтали. Следовательно, от решения задачи 132 останется лишь та часть, которая изображена на рис. 198. Клетка, стоящая в правом нижнем углу, остается незаполненной. В нее можно вписать любую цифру, причем полученное решение, как нетрудно проверить, будет удовлетворять определениям всех чисел. Следовательно, вычеркнув определение числа *ж* по горизонтали, мы превратим однозначно разрешимую задачу 132 в новую задачу, допускающую 10 решений.

(*) Мы хотим особо подчеркнуть, что лишь последнее замечание гарантирует нам увеличение числа решений. Само по себе вычеркивание одного или нескольких определений еще не позволяет утверждать, что число решений возрастет; может случиться, что вычерк-

нудое условие удастся почерпнуть из оставшихся, и тогда последний шаг, которого мы не сумели сделать, по-прежнему будет предопределен.

*

Дополним условия задачи 132 определением числа $з$ по вертикали: «Число, равное числу $и$ по горизонтали».

$а$	$б$	$в$	$г$
1	8	4	1
$д$	3	4	$е$
		2	1
$ж$	3	$з$	$и$
	1	1	1
$к$	1	1	

0, 1, 2, ..., 8, 9

Рис. 198.

Расширенному набору условий удовлетворяет решение, представленное на рис. 195, б (и только оно). Новая задача, как и старая, принадлежит ко II типу.

*

Присоединив к условиям задачи 132 определение числа $з$ по вертикали, мы получили новый кросснамбер II типа. Вычеркнем теперь из его условий определение числа $ж$ по горизонтали.

(1) Определение числа $з$ по вертикали позволяет продолжить заполнение кросснамбера, начатое так, как показано на рис. 193, а, и довести его до стадии, изображенной на рис. 199, а. Определения чисел $к$ по горизонтали и $г$ по вертикали дают нам возможность вписать цифры еще в несколько клеток (рис. 199, б).

Поскольку последняя цифра числа $е$ по горизонтали теперь известна, то можно найти и последнюю цифру числа $в$ по вертикали (рис. 199, в). Тем самым мы полностью восстановим числа $е$ по горизонтали и $в$ по вертикали, после чего без труда найдем число $б$ по вертикали (рис. 199, г).

Этот пример показывает, что кросснамбер II типа после вычеркивания одного или нескольких определений может остаться кросснамбером II типа.

Рассмотренный пример подтверждает то, о чем говорилось в замечании (*). Действительно, вычеркнув определение числа $ж$ по горизонтали, мы не сможем воспользоваться той стрелкой, которая на рис. 194 подходит к клетке, помеченной буквой $ж$ (поскольку информация, содержащаяся в определении числа $ж$ по горизонтали, будет утрачена). Однако недостающие сведения мы сумеем получить

косвенным путем, используя другую цепочку рассуждений, в которые определение числа *ж* по горизонтали явно не входит.

*

Если к условиям задачи 132 добавить следующее определение числа *з* по вертикали: «Число, которое вдвое больше числа *и* по горизонтали», то получится кросснамбер I типа (неразрешимый, с противоречивыми условиями). Это видно, например, из того, что без до-

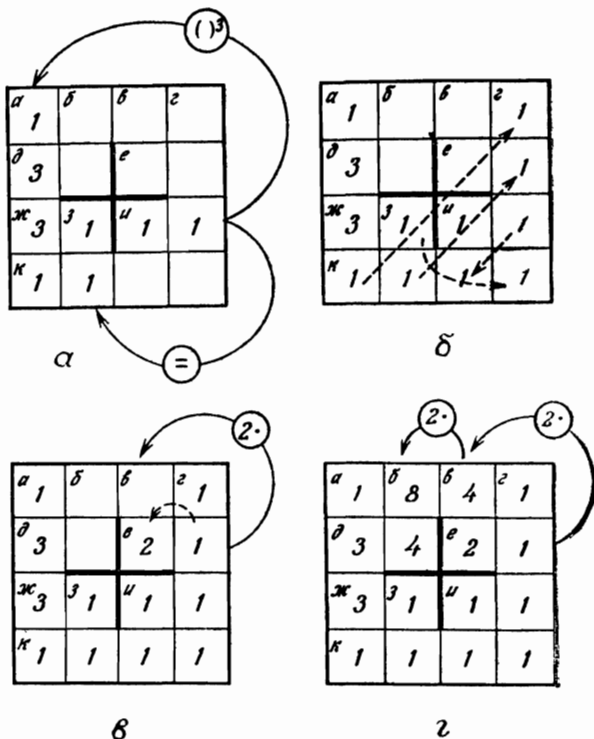


Рис. 199.

полнительного условия мы получаем единственное решение задачи, представленное на рис. 195, б, которое не удовлетворяет определению числа *з* по вертикали.

Интересно посмотреть, к чему приводит в этом случае цепочка рассуждений, изображенная на рис. 199. Все приведенные тогда соображения [они отмечены в тексте знаком (!)] можно дословно повторить и сейчас. Весь ход рассуждений наглядно представлен на рис. 200. Как видно из рис. 200, г, результат оказывается таким, как

сказано в начале последнего раздела. Действительно, из определения числа δ по вертикали следует, что число δ по вертикали должно быть трехзначным (и оно не умещается в отведенных ему клетках).

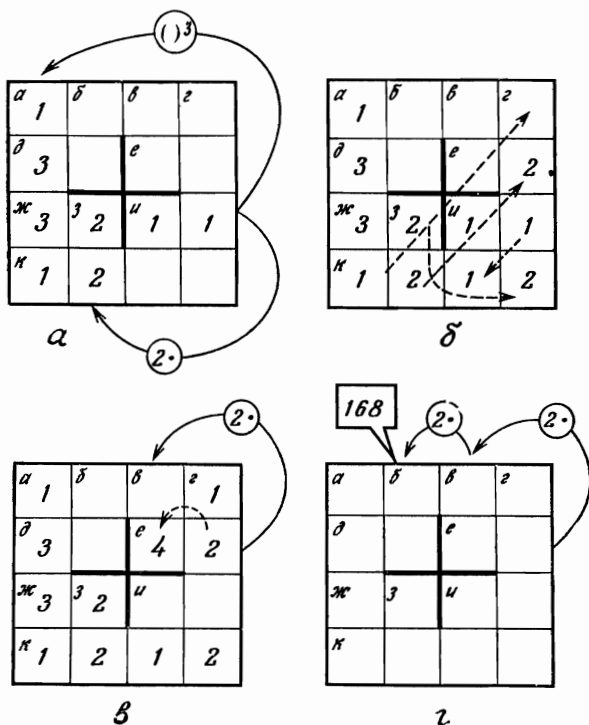


Рис. 200.

Противоречивость условий в различных задачах может проявляться по-разному.

*

Посмотрим, что произойдет, если в условиях задачи 132 определение числа z по вертикали заменить следующим: «Число, которое в 7 раз больше первой цифры числа κ по горизонтали».

Если временно «забыть» о новом условии, то старые условия позволят заполнить кросснамбер так, как показано на рис. 195, б (каким образом это можно сделать, описано в решении задачи 132). Подчеркнем, что определение числа z при этом использовано не было.

Если же воспользоваться рассуждениями, отмеченными выше знаком (!), то получатся другие числа (последовательные стадии

заполнения кросснамбера в этом случае представлены на рис. 201), противоречащие определению числа $ж$ по горизонтали.

Итак, мы видим, что два способа заполнения кросснамбера приводят к различным числам. Это одно из возможных проявлений противоречивости условий задачи.

Примечание 1. Из однозначно разрешимой задачи 132 мы получили 2 задачи с противоречивыми условиями. Для этого

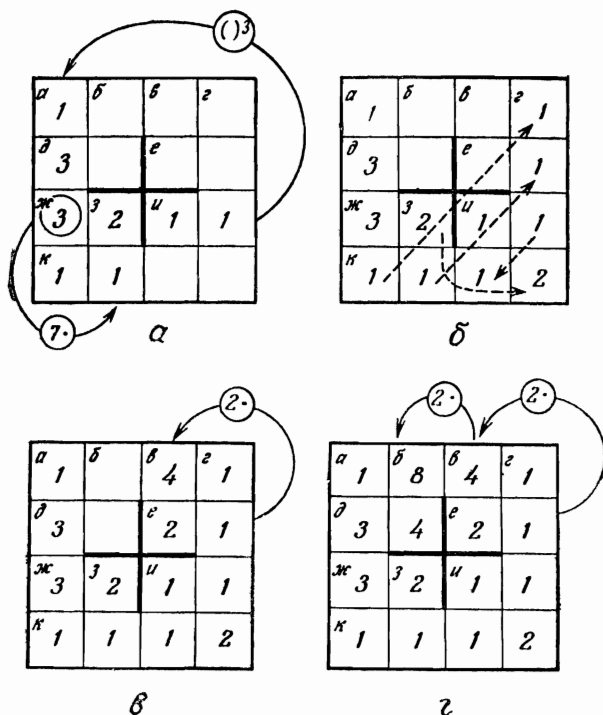


Рис. 201.

мы брали известное решение задачи 132 и вводили новое определение (числа $з$ по вертикали), противоречащее ранее полученным результатам.

Интересно отметить, что если задачу, дополненную еще одним определением, решать заново, то противоречие возникает не там, где его «подбросили» в задачу, а совсем в другом месте. Такие «блуждающие» противоречия встречаются довольно часто, когда нам приходится ломать голову над неразрешимой задачей: стоит лишь в одном месте нарушить целостность нити, как она тотчас же собирается в запутанный узел в другом месте.

Примечание 2. В рассмотренной нами задаче мы либо добавляли к имеющимся условиям одно или несколько новых определений, либо вычеркивали часть условий. К аналогичным выводам можно было бы прийти, увеличивая или уменьшая информацию, содержащуюся в отдельных условиях. Доказать это можно так же, как были доказаны утверждения задачи 134. (Об уменьшении информации, содержащейся в условиях задачи, речь шла, например, в примечании к решению задачи 132. Там из кросснамбера II типа снова получился кросснамбер II типа.)

136.

Вся информация, содержащаяся в определениях чисел, наглядно представлена на рис. 202. Для удобства записи она разбита на множество отдельных частей.

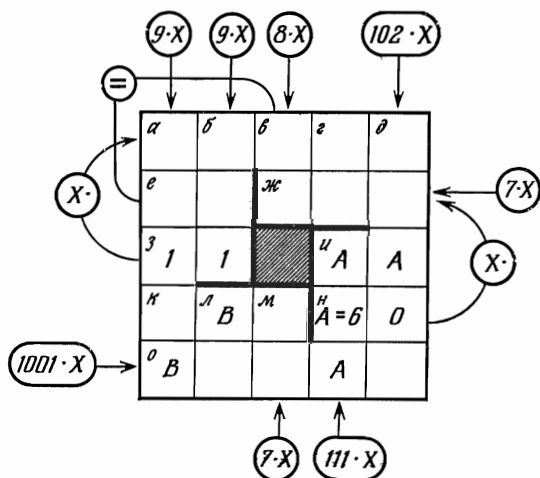


Рис. 202.

Если число p делится на число q , то p можно представить в виде $p = q \cdot x$, где x — некоторое целое число. Именно такие частные от деления одного числа на другое и приведены на рис. 202. (В общем случае x обозначает различные числа.)

Определение числа a по горизонтали можно сформулировать следующим образом: «Число, равное четвертой степени числа z по горизонтали».

Докажем это. Относительно числа z по горизонтали известно, что обе его цифры одинаковы. Следовательно, речь идет об одном из чисел 11, 22, ..., 99. Но среди них имеется лишь одно простое число (11), а все остальные делятся на 11 (частное от деления совпадает с повторяющейся цифрой). Таким образом, число z по горизонтали может быть равно только 11,

Относительно числа u по горизонтали теперь известно, что его цифры одинаковы (это показано на рис. 202). То же можно сказать и о числе u по вертикали

По определению числа n по горизонтали оно равно одному из общих кратных чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 60, а остальные — $2 \cdot 60$, $3 \cdot 60$, ... Нетрудно видеть, что двузначно лишь число 60. Таким образом, число n по горизонтали может быть равно только 60 (рис. 202).

Из определения числа l по вертикали следует, что его первая цифра совпадает с первой цифрой числа o по горизонтали (вторые цифры этих чисел также совпадают).

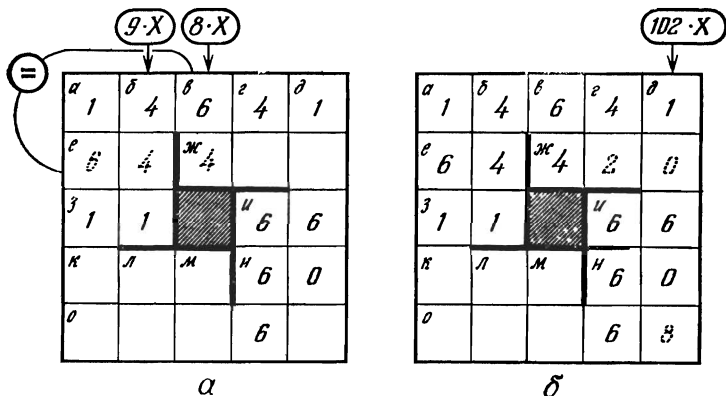


Рис. 203.

Все это нам удалось установить, исходя из простейшей информации, содержащейся в определениях чисел. Теперь результаты «посыплются» один за другим.

Нетрудно видеть (рис. 202), что число u по вертикали может быть равно только 666, а число u по горизонтали — только 66.

Поскольку число a по горизонтали не имеет других простых делителей, кроме 11, оно должно быть некоторой степенью числа 11. Но числа $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$ еще не пятизначные. Лишь $11^4 = 14641$ имеет нужное число знаков. Более того, 11^4 — единственная степень числа 11, имеющая 5 знаков, поскольку следующая степень $11^5 = 161051$ уже шестизначна. Итак, число по горизонтали может быть равно только 14641 (рис. 203, a).

Накопленные сведения (рис. 203, a) позволяют утверждать, что число v по вертикали может быть равно только 64 (поэтому число e по горизонтали также равно 64).

Число b по вертикали удастся восстановить однозначно (оно равно 441, см. рис. 203, a), не используя определение самого числа. Следовательно, это определение можно было бы вычеркнуть из условий задачи. Кроме того, число b по вертикали нетрудно восстановить непосредственно, не обращаясь к числам v по вертикали и e по горизонтали, после того как стали известны его первая и последняя

цифры, поскольку любое число делится на 9 в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на 9.

Число $ж$ по горизонтали кратно 7 и 60. Следовательно, оно делится на наименьшее общее кратное этих чисел, равное $7 \cdot 60 = 420$. Поскольку число $ж$ по горизонтали начинается с цифры 4, то оно может быть равно только 420.

В числе $д$ по вертикали осталось неизвестной лишь последняя цифра (рис. 203, б). Следовательно, оно может находиться лишь среди 10 чисел: 10 600, 10 601, ..., 10 608, 10 609. Ясно, что на 102

$(9 \cdot X)$
 $\downarrow$

a 1	$б$ 4	$б$ 6	$г$ 4	$д$ 1
e 6	4	$ж$ 4	2	0
$з$ 1	1		$и$ 6	6
$к$ 4	$л$ 6	$м$ 7	$н$ 6	0
$о$ 6	8	0	6	8

$\uparrow$
 $(7 \cdot X)$

Рис. 204.

может делиться не более чем одно из этих чисел. Таким «счастливым» оказывается число 10 608.

Из рис. 203, б ясно видно, что, поскольку трех известных цифр числа a по вертикали недостаточно для дальнейшего продвижения вперед, мы можем попытаться восстановить лишь число o по горизонтали. На сколько нужно умножить 1001, чтобы получить число o по горизонтали? Поскольку произведение $9 \cdot 1001 = 9009$ всего лишь четырехзначно, а произведение $100 \cdot 1001 = 100\,100$ уже шестизначно, то множитель должен быть не меньше 10 и не больше 99, то есть двузначным. Следовательно, число o по горизонтали содержится среди чисел

$$\begin{aligned}
 10 \cdot 1001 &= 10\,010, \\
 11 \cdot 1001 &= 11\,011, \\
 12 \cdot 1001 &= 12\,012, \\
 13 \cdot 1001 &= 13\,013, \\
 &\dots\dots\dots \\
 98 \cdot 1001 &= 98\,098, \\
 99 \cdot 1001 &= 99\,099.
 \end{aligned}$$

Мы видим, что две первые цифры произведения всегда совпадают с двумя последними (это свойство произведения нетрудно предсказать заранее, если учесть, что один из сомножителей двузначен, а другой равен 1001). Поскольку две последние цифры числа o по горизонтали уже известны, то оно само может быть равно только 68 068.

Далее нетрудно установить, что число a по вертикали может быть равно только 68, а число m по вертикали — только 70, так как это единственное двузначное число, которое оканчивается на 0 и делится на 7. Наконец, обратимся к числу a по вертикали. Сумма всех его известных цифр равна $1 + 6 + 1 + 6 = 14$. Следовательно, в клетку k можно вписать лишь цифру 4, поскольку во всех остальных случаях число a по вертикали не могло бы делиться на 9.

Итак, кросснумбер 136 можно заполнить единственным способом — так, как показано на рис. 204. Поскольку полученные числа удовлетворяют всем условиям задачи, то они действительно образуют ее решение.

137.

Нарисуем схему, позволяющую единым взглядом окинуть всю информацию, содержащуюся в «анкете» Иеромоша Бундаша (рис. 205). Для большей наглядности мы нанесем на схему не только сведения о различных числах, но и укажем связи между различными клетками кросснумбера.

Сумма чисел a и e по горизонтали равна числу a по вертикали. Эти сведения «скрыты» в данных о годе рождения и возрасте Бундаша.

Поскольку число a по вертикали имеет вид 19***, то число b по вертикали начинается с цифры 9. Если вторую цифру числа d по горизонтали обозначить A , то число g по вертикали равно $10A \cdot 90$.

В определении числа u по вертикали по существу говорится не о нем самом, а устанавливается связь между числами u и e по горизонтали.

С учетом всех этих сведений и составлена схема, изображенная на рис. 205.

В примечании к задаче утверждается, что «дело происходило в XX веке», а 2000 год еще не наступил, поэтому число a по вертикали может начинаться только с цифр 19. Таким образом, первой цифрой числа b по вертикали может быть лишь 9 (рис. 205).

Рассмотрим теперь определение числа e по горизонтали и связанного с ним числа v по вертикали.

По определению число v по вертикали оканчивается на ту же цифру, что и число e по горизонтали. Это означает, что обе цифры числа e по горизонтали одинаковы, то есть ими могут быть лишь числа 11, 22, 33 и так далее.

Разумеется, нам известно, что футболист должен быть старше 11 лет, однако это не слишком помогает решению задачи (так же как и наша уверенность в том, что он не слишком стар).

Из определения числа u по вертикали следует, что число u по горизонтали на 5 меньше, чем число e по горизонтали. Это означает, что число e по горизонтали не может быть равно 11, поскольку в

противном случае число u по горизонтали оказалось бы равным $11 - 5 = 6$, то есть было бы однозначным.

Но число e по горизонтали не может быть равно 33 или большему числу, поскольку тогда число v по вертикали было бы равно

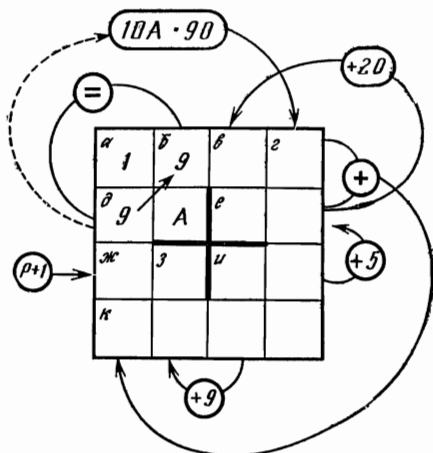


Рис. 205.

$33 + 20 = 55$ и из определения числа a по горизонтали следовало бы, что Иеромош Бундаш родился в пятидесятых годах XX века, но тогда ему не могло исполниться 33 года (поскольку наша книга вышла из печати до 1980 г.).

α	1	δ	9	β	4	z
ϑ	9			e	2	2
κ	3		u	1	7	
κ						

α

α	1	δ	9	β	4	z	9
ϑ	9			e	2	2	
κ	7	3		u	1	7	
κ	1						0

δ

Рис. 206.

Ясно также, что, полагая число e по горизонтали равным 44, 55 и так далее, мы каждый раз будем приходить к противоречию.

Итак, число e по горизонтали может быть равно только 22, число v по вертикали — сумме $22 + 20 = 42$, а число u по горизонтали — разности $22 - 5 = 17$ (рис. 206, α).

После этого определение числа $г$ по вертикали позволяет установить, что оно, во-первых, оканчивается на 0, а во-вторых (поскольку число $д$ по горизонтали не меньше 90), не меньше числа $(90 + 10) \cdot 10 \cdot 9 = 9000$. Это означает, что число $г$ по вертикали может начинаться только с цифры 9 и поэтому равно лишь 9270.

Но тогда число $д$ по горизонтали может быть равно лишь $(927 : 9) - 10 = 93$, а число $а$ по вертикали — лишь сумме чисел $а$ и $е$ по горизонтали, то есть $1949 + 22 = 1971$ (рис. 206, б).

Относительно не вписанных еще чисел $з$ и $и$ по вертикали известно, что первое из этих чисел на 9 больше, чем второе. Поскольку число $и$ по вертикали не превосходит 19, а число $з$ по вертикали — числа 28, то они могут начинаться либо с цифры 1, либо с цифры 2.

$а$ 1	$б$ 9	$в$ 4	$г$ 9
$д$ 9	3	$е$ 2	2
$ж$ 7	$з$ 1	$и$ 1	7
$к$ 1			0

$а$

$а$ 1	$б$ 9	$в$ 4	$г$ 9
$д$ 9	3	$е$ 2	2
$ж$ 7	$з$ 1	$и$ 1	7
$к$ 1	9	0	0

$б$

Рис. 207.

Но число $ж$ по горизонтали (по определению) нечетное и поэтому не может оканчиваться на 2. Следовательно, последней цифрой этого числа может быть только 1 (рис. 207, а).

Но тогда число $з$ по вертикали не может быть больше 19, а число $и$ по вертикали — больше 10, причем первое число может быть на 9 больше, чем второе, лишь в том случае, если число $з$ по вертикали равно 19, а число $и$ по вертикали равно 10 (рис. 207, б).

Итак, кросснамбер с биографическими данными Иеромоша Бундаша можно заполнить лишь так, как показано на рис. 207, б. Поскольку найденные числа удовлетворяют всем условиям задачи, то они действительно образуют решение кросснамбера 137.

138.

Все соображения, приведенные в решении задачи 137, останутся в силе и в XXX веке, если исключить замечание о том, что число $е$ по горизонтали (возраст футболиста в год заполнения им кросснамбера) не может быть равным 33, поскольку тогда число $а$ по вертикали было бы больше 1980, то есть дело происходило бы после выхода в свет нашей книги. Ясно, что Ечи Кобуки не мог воспользоваться этим условием. Посмотрим, каким образом он мог восполнить недостающее условие.

Независимо от того, когда решается кросснамбер — в XX или XXX веке, всегда можно дойти до начальной стадии заполнения его клеток, изображенной на рис. 205, и установить, что обе цифры числа $е$ по горизонтали одинаковы и что само число $е$ должно быть больше

11. (До этой стадии все рассуждения, приведенные в решении задачи 137, остаются в силе.)

Если число e по горизонтали выбрать равным 22, то получится решение задачи 137 (рис. 207, б).

Если число e по горизонтали выбрать равным 44, то число a по вертикали будет равно 64. Но тогда сумма чисел a и e по горизонтали была бы больше 2000, что невозможно, поскольку две первые цифры числа a по вертикали показывают, что Бундаш заполнял свою необычную анкету в XX веке (рис. 208, а). Ясно, что к аналогичному

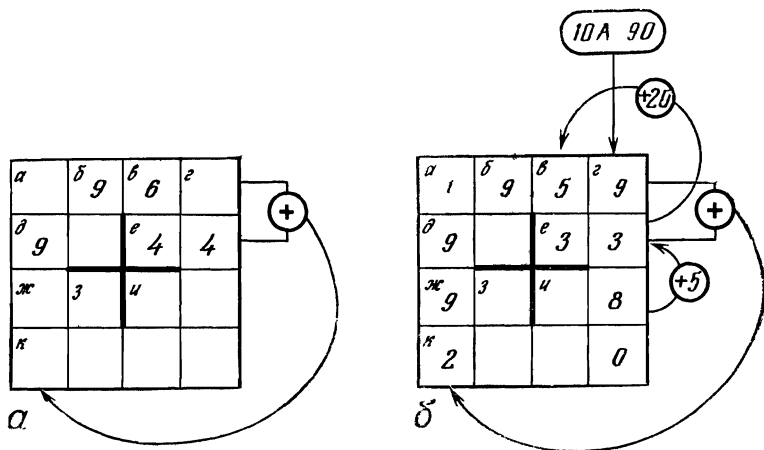


Рис. 208.

противоречию Ечи Кобуки пришел бы, предположив, что число e по горизонтали больше 44.

Итак, возможен лишь единственный случай: число e по горизонтали равно 33.

При таком выборе числа e противоречия с числом a по вертикали не возникает, поскольку дата заполнения анкеты остается в XX веке (рис. 208, б). Продолжим заполнение кросснамбера.

Последней цифрой числа u по горизонтали должна быть цифра 8. Установить первую и последнюю цифры числа g по вертикали можно из произведения $\overline{10A} \cdot 90$. Ясно, что это число оканчивается на 0, а его первой цифрой может быть только 9. (Действительно, поскольку $A \cdot 90 < 1000$ и $\overline{10A} \cdot 90 = 9000 + A \cdot 90$, то второе слагаемое не может изменить первой цифры первого слагаемого.)

Объединяя полученные результаты, мы заключаем, что число g по вертикали может быть равно лишь 9380. Но число 9380 не удовлетворяет определению числа g по вертикали: оно не делится на 9. (Сумма его цифр равна 20.) Следовательно, число e по горизонтали не может быть равно 33.

Итак, и в XXX веке Ечи Кобуки сможет получить лишь 1 решение кросснамбера 137: для этого ему не понадобится знать, когда вышла заинтересовавшая его книга.

Как показывает рис. 207, б, одно решение задачи заведомо существует. Возникает вопрос: не допускает ли кросснамбер 137 с вычеркнутым определением числа b по вертикали нескольких решений?

Мы сталкиваемся здесь с частным случаем рассмотренной нами общей проблемы (задача 135). Кросснамбер 137 принадлежит ко II типу. После вычеркивания одного условия он может остаться однозначно разрешимым (II тип) или стать неоднозначно разрешимым (III тип).

Число a по вертикали начинается с цифр 19, поскольку «дело происходило в XX веке», но утверждать, что число a по горизонтали также начинается с цифр 19, уже нельзя. Иеромош Бундаш мог родиться в прошлом веке, но не раньше, поскольку его возраст (число e

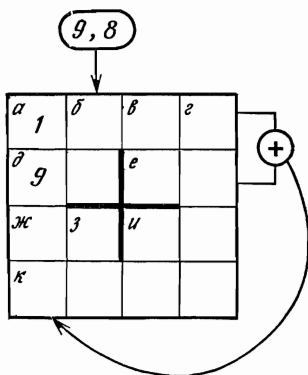


Рис. 209.

по горизонтали) выражается лишь двузначным числом. (Кроме того, сумма чисел a и e по горизонтали должна быть равна числу a по вертикали, поэтому разность между числами a по вертикали и горизонтали должна быть меньше 100.) Таким образом, второй цифрой числа b по горизонтали может быть только 8 или 9 (рис. 209).

[Остановимся на минутку. Читатель, должно быть, укоризненно качает головой.

— Как это может быть? — спрашивает он. — Ведь Иеромош Бундаш не мог родиться в 1700 г. или еще раньше. Трудно поверить, чтобы в возрасте более 100 лет человек оставался профессиональным футболистом или мог прожить более 200 лет.

Мы просим читателя на время забыть о своем жизненном опыте и при решении кросснамбера использовать лишь ту информацию, которая содержится в определениях чисел (условиях задачи). Тогда его рассуждения будут носить чисто математический характер, а выводы будут неопровержимыми.]

Если в первую клетку числа b по вертикали вписать цифру 9, то числа b по вертикали и d по горизонтали окажутся равными, то есть будут удовлетворять вычеркнутому условию. Как известно, чис-

ла, удовлетворяющие всем условиям, образуют единственное решение задачи 137 (рис. 207, б).

Впишем теперь в первую клетку числа b по вертикали цифру 8. Тогда число z по вертикали окажется иным (не таким, как в решении задачи 137), и произведение будет иметь вид (рис. 210, а)

$$(\overline{9A} + 10) \cdot 8 \cdot 10 = \overline{10A} \cdot 80.$$

Перебрав все возможные значения A (их всего десять: $A = 0, 1, 2, \dots, 9$), мы выберем лишь одно: $A = 9$. При этом значении A число u по горизонтали может быть на 5 меньше, чем число e по горизонтали, о котором известно, что оно больше 11 и у него одинаковые цифры. [В решении задачи 137 эти свойства числа e по горизонтали были установлены без обращения к вычеркнутому определению

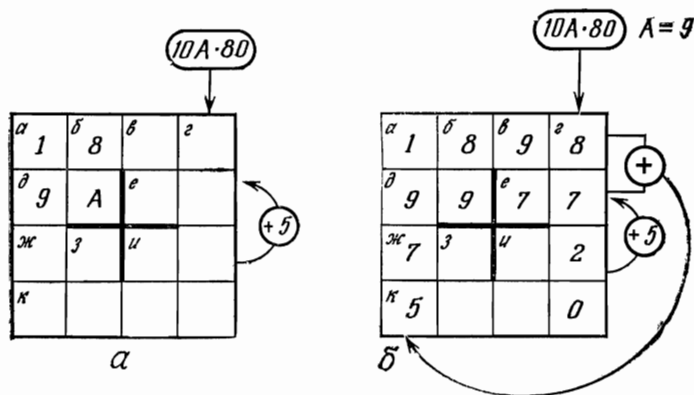


Рис. 210.

(числа b по вертикали), поэтому число e по горизонтали должно обладать ими и теперь.] Итак, при заполнении анкеты в XIX веке число z по вертикали может быть равно только $109 \cdot 80 = 8720$, а число d по горизонтали — только 99. Но число a по вертикали вынуждает нас вернуться в XX век: оно равно 1975 (рис. 210, б).

Далее решение кросснамбера повторяет решение задачи 137: число u по горизонтали = число e по горизонтали — 5 = 72. Пусть о некотором числе известно, что оно не меньше 70, и, прибавив к нему 9, мы получим сумму, не превышающую 79 (число $ж$ по горизонтали нечетное). Ясно, что так произойдет лишь в том случае, если это число равно 70. Таким образом, число u по вертикали равно 70, а число $з$ по вертикали — 79. На рис. 211 показано, как выглядело бы решение кросснамбера, если бы Иеромош Бундаш родился в XIX веке. Полученные числа действительно образуют решение задачи, поскольку удовлетворяют всем ее условиям.

Итак, задача 139 допускает 2 решения, одно из них изображено на рис. 207, б, другое — на рис. 211. Если верить первому решению, то футболисту исполнилось 22 года, если верить второму (явно «несерьезному»), то 77 лет. Последняя ситуация маловероятна, но кто

знает... С чисто математической точки зрения оба решения приемлемы, поскольку согласуются со всеми условиями задачи.

Примечание. Нам осталось еще проверить, что если в произведении $\overline{10A} \cdot 80$ к третьей цифре прибавить 5, то последняя цифра полученной суммы совпадет со второй цифрой произведения. Произведение $102 \cdot 80 = 8160$ таким свойством обладает ($6 + 5 = 11$), но число e по горизонтали оказывается при этом равным 11, что, как известно, мало (поскольку если из числа e

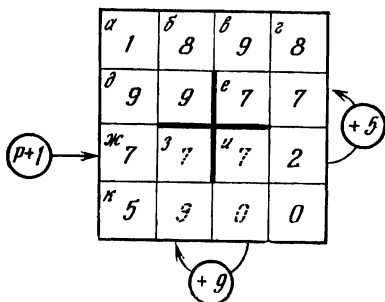


Рис. 211.

вычесть 5, то должно получиться двузначное число $и$ по горизонтали). В остальных 9 случаях ($A = 0, 1, 3, 4, \dots, 9$) вторая и третья цифры произведения $\overline{10A} \cdot 80$ указанным выше свойством не обладают.

140.

Задача будет допускать несколько решений.

Нетрудно понять, что ни одно из оставшихся определений не затрагивает цифры, стоящей в левом верхнем углу кросснамбера (в решении задачи 137 в этой клетке стояла 1). В нее можно вписать любую цифру, кроме 0 (рис. 212, а), после чего полученный набор чисел будет удовлетворять всем условиям задачи. Таким образом, задача 140 допускает не менее 9 решений.

Тем самым мы ответили на вопрос задачи. Действительно, ведь нам отнюдь не требовалось определить точное число решений, допускаемых задачей. Вопрос о точном числе решений кросснамбера мы умышленно обошли молчанием, поскольку он гораздо сложнее и ответ на него сопряжен с большей затратой труда, чем решение большинства задач, собранных в этой книге. Мы сообщим лишь о тех решениях задачи и их числе, которые можно получить сравнительно просто (далеко не всякая задача допускает изящное и неожиданное решение, основанное на какой-нибудь тонкой идее), и наметив в общих чертах, каким образом можно было бы проверить нужные утверждения. Прежде всего рассмотрим рассуждения, позволяющие получить решение задачи.

К сожалению, нам придется отказаться от начальной стадии решения задачи 137: в определении числа a по вертикали теперь уже не утверждается, что речь идет о 19... годе, то есть что это число начинается с цифр 19.

Подчеркнем еще раз, что если мы хотим проводить чисто математические рассуждения, то исходить можно лишь из сведений, содержащихся в условиях задачи, и на основе их строить различные умозаключения.

Все же кое-что из решения задачи 137 можно позаимствовать и на этот раз. Прежде всего — вывод о том, что у числа e по горизонтали обе цифры одинаковы (на рис. 212, б оно обозначено $\overline{ZZ}$).

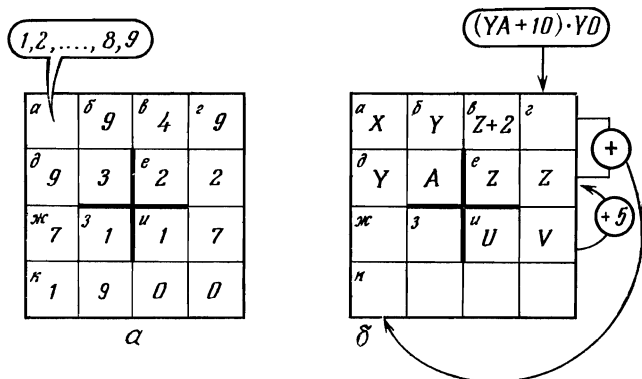


Рис 212.

Это число должно быть больше 11, в противном случае число $\overline{UV}$, которое на 5 меньше его, было бы однозначным. Следовательно, цифра Z больше 1.

Число e по вертикали имеет вид $\overline{ZZ} + 20$, поэтому его первая цифра равна $Z + 2$. Поскольку сумма чисел a и e по горизонтали должна быть равна числу a по вертикали, число сотен (Y) этого числа не может быть произвольным. Следовательно, цифра Z должна быть не больше 3 (поскольку сумма $44 + 60$ уже больше 100).

Это означает, что числом e по горизонтали может быть либо 22, либо 33. В обоих случаях числа e по вертикали и u по горизонтали восстанавливаются однозначно (рис. 213).

В первом случае (число e по горизонтали равно 22) удастся однозначно восстановить также числа u и z по вертикали [действительно, в клетки кросснумбера можно вписать (рис. 213, а) только числа 19 и 10, в противном случае число x по горизонтали оканчивалось бы на 2 и, следовательно, было бы четным]. Ясно, что число z по вертикали оканчивается на 0. Однако на этом цепочка простых рассуждений обрывается.

Первая цифра числа z по вертикали зависит от выбора цифр Y и A .

Если стремиться к полноте, то необходимо довести до конца рассмотрение всех случаев, которые здесь могут представиться. На

перебор всех вариантов уйдет не слишком много времени, поскольку потребуется составить около 60 произведений.

[Сколько произведений придется рассмотреть для того, чтобы выяснить, какими двумя цифрами — 38 или 27 — оканчивается произведение $(\overline{YA} + 10) \cdot Y$, если вместо Y подставлять 1, 2, 3, ..., 8, 9, а вместо A — цифры 0, 1, 2, ..., 9, то есть установить, в каких случаях получаются произведения 138, 238, 338, ..., 938 и в каких — произведения 127, 227, 327, ..., 927. Способ, позволяющий довести до конца рассмотрение всех возможных случаев, упоминался выше. (В данном случае значения

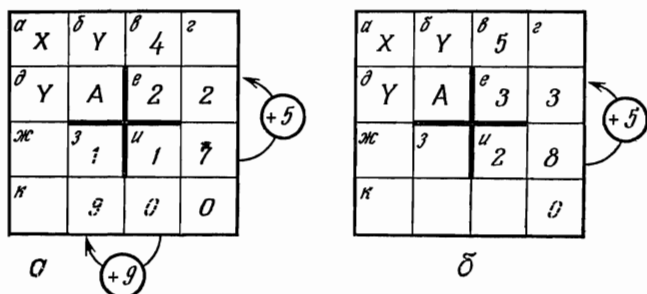


Рис. 213.

$Y = 1, 2$ и 9 можно опустить. В первых двух случаях мы не получили бы трехзначного произведения, а последний подробно разобран в решении задачи 137.)]

Продлав все выкладки, мы получили бы следующие результаты: при $Y = 3, A = 6$ число z по вертикали равно $46 \cdot 30 = 1380$, при $Y = 6, A = 3$ число z по вертикали равно $73 \cdot 60 = 4380$, при $Y = 9, A = 3$ число z по вертикали равно $103 \cdot 90 = 9270$.

В последнем случае, как известно, мы получили бы кроссрамбер, заполненный так, как показано на рис. 212, а, то есть по существу 9 решений.

В двух первых случаях кроссрамбер оказался бы заполненным так, как показано на рис. 214. Поскольку при этом число $ж$ по горизонтали может быть только нечетным, то сумма числа $и$ по вертикали и девятки не меньше 30. Следовательно, вторая цифра числа $и$ по вертикали не меньше 1, и на ее место можно вписать любую цифру от 1 до 9. При этом число z по вертикали будет равно 30, 31, ..., 38. Во всех этих случаях полученные числа удовлетворяют полному набору условий задачи.

Итак, две средние клетки в нижней строке кроссрамберов, изображенных на рис. 214, можно заполнить 9 способами, и в каждом из 18 кроссрамберов в клетку, стоящую в левом верхнем углу, можно вписать 9 различных цифр. Таким образом, мы получаем 162 решения.

Всего исходная задача допускает $9 + 162 = 171$ решение. Во всех решениях возраст футболиста указан лишь в двух вариантах,

год заполнения «анкеты» (если не считать тысячелетий) — в трех, а величина надбавки к зарплате, которую надеется получить футболист, перейдя в новую команду, — в 19 вариантах.

*

В заключение нам хотелось бы еще раз подчеркнуть, что с точки зрения математики кросснамбер считается разрешимым, если его условия непротиворечивы и из них путем чисто логических рассуждений можно получить набор чисел, удовлетворяющий всем условиям задачи. Этот набор называется решением задачи независимо от того,

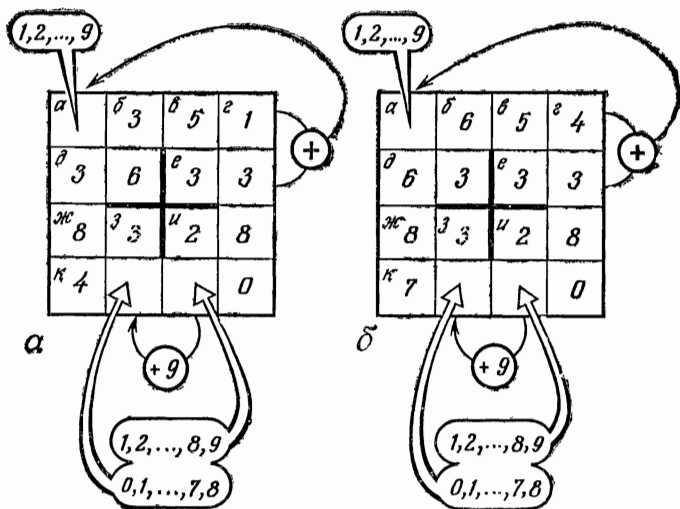


Рис. 214.

встречается ли в действительности описываемая им ситуация или она носит неправдоподобный характер. Выяснение степени правдоподобия полученного решения — вопрос особый, не являющийся, вообще говоря, математической задачей.

Например, в одном из решений нашей шуточной задачи в графе «Текущий год» (число a по вертикали) стоит число 1384. Такой ответ явно не соответствует действительности, но верен в том смысле, что следует из условий задачи. Если бы мы в условиях задачи упомянули в шутку о том, что на какой-то далекой планете существовала культура, в которой футбол был известен еще в XIV веке, то решение кросснамбера, носящее в земных условиях чисто математический характер, могло бы соответствовать действительности. Точно так же в 2384 и 9687 годах «обретут реальность» решения кросснамбера, которым на протяжении долгих веков суждено оставаться «чисто математическими».

Часть XI

141. ФИНАЛ ЭСТАФЕТЫ

1 решение. Прежде всего необходимо выяснить, какое из 9 утверждений ложно. До тех пор пока это не известно (точнее, до тех пор пока путем рассуждений мы не сможем установить, какое из рассуждений может быть ложным), нам не удастся продвинуться в решении задачи.

Если принять во внимание утверждение (9) (по условиям задачи оно заведомо истинно), то нетрудно установить, что *утверждения (4), (5) и (6) не могут быть истинными одновременно.* Действительно, если истинно утверждение (6), то 3 первых места разделили между собой либо 2 африканские и 1 американская команды, либо 1 африканская и 2 американские команды. Но по утверждению (5) 2 африканские команды не могли быть среди тех, кто вышел на 3 первых места, а по утверждению (4) 2 американские команды могли занять лишь первое и третье места. Кроме того, из того же утверждения (4) следует, что на второе место вышла европейская команда и, следовательно, среди обладателей трех первых мест не было ни одной африканской команды.

Таким образом, *ложные сведения должны содержаться в каком-то из утверждений (4), (5) и (6), а все остальные утверждения (поскольку в задаче сказано, что ложно лишь 1 утверждение) истинны.*

Итак, воспользуемся сначала заведомо истинными утверждениями.

Какие из них быстрее всего приводят к решению задачи?

Заметим, что 3 утверждения (1), (3) и (7) можно объединить. [В этом особенно легко убедиться, если прочитать их подряд, одно за другим в такой последовательности: (1), (7), (3).]

Утверждения (1), (3) и (7) сообщают нам о том, что *если исключить команды С и Е, то представители остальных команд могли прийти к финишу лишь в последовательности AFBD (*).*

Следовательно, среди команд, занявших 3 первых места, заведомо должна находиться европейская команда А. В худшем случае она могла выйти на третье место, но, безусловно, оказалась среди призеров (команд, занявших 3 первых места). Это означает, что утверждение (6) *ложно.* Итак, источник ложной информации установлен. Чтобы определить, какое место заняла каждая из шести команд, расположим (истинные) утверждения в следующем порядке: (2), (4), (5), (8), (*), (9).

Как видно из утверждений (2) и (*), *первое место* могла занять лишь команда С, поскольку команда D заведомо не вышла на первое место. По утверждению (5) команда D могла занять лишь *последнее (шестое) место.*

Утверждения (8) и (*) позволяют схематически изобразить распределение мест между четырьмя остальными командами так, как по-

казано на рис. 215 (острые стрелки направлено к команде, показавшей лучшее время, конец — к команде, занявшей худшее место). Остается невыясненным, какая из команд — *E* или *A* — показала лучший результат. Эту неопределенность помогает разрешить утверждение (4): согласно нашей схеме, между двумя американскими командами *E* и *F* могла «вклиниться» только одна европейская команда — *A*. Следовательно, представители четырех команд, о которых идет речь, могли пересечь линию финиша лишь в следующем порядке: *E*,

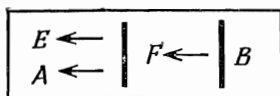


Рис. 215.

A, *F*, *B*. А это означает, что команда *C* заняла первое место, команда *E* — второе, команда *A* — третье, команда *F* — четвертое, команда *B* — пятое и команда *D* — шестое.

Поскольку такое распределение мест удовлетворяет всем условиям задачи [за исключением утверждения (6), оказавшегося ложным], нам действительно удалось найти решение задачи.

II решение. То, что 3 утверждения (4), (5) и (6) не могут быть истинными одновременно, мы докажем так же, как это было сделано

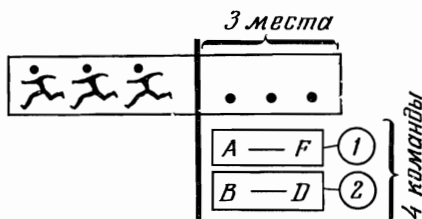


Рис. 216.

в начале предыдущего решения. Следовательно, одно из утверждений должно быть ложным.

Но утверждения (1), (3) и (6) также не могут быть истинными одновременно. Действительно, из утверждений (6) и (9), рассматриваемых одновременно, следует, что какие-то три команды из двух африканских и двух американских команд (*C*, *D*, *E*, *F*) заняли первые 3 места. Следовательно, европейская команда могла опередить лишь одну из этих четырех команд. Но по условиям (1) и (3) команда *F* опередила команду *A*, а команда *D* — команду *B* (рис. 216).

Таким образом, ложное утверждение должно содержаться, по-первых, среди утверждений (4), (5), (6), во-вторых, среди утверждений (1), (3), (6).

Поскольку имеется только одно ложное утверждение, то им может быть лишь *общий член* обеих троек (рис. 217), то есть утверждение (6). Итак, *утверждение (6) ложно*.

Все остальные рассуждения проводятся так же, как в предыдущей задаче.

Примечание 1. Существует и другой вариант «концовки» приведенного выше утверждения. Например, нетрудно видеть, что утверждения (3), (4) и (6) не могут быть истинными

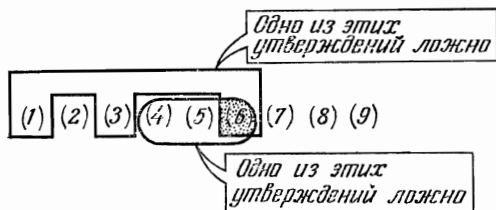


Рис. 217.

одновременно. Однако сопоставление этой тройки условий с любой из двух приведенных выше троек не приводит к желаемому результату — *не позволяет выделить ложное утверждение*. Действительно, из того, что ложное утверждение содержится среди утверждений (4), (5), (6) и среди утверждений (3), (4), (6), следует лишь неполный вывод: одно из утверждений (4) и (6) ложно (рис. 218), поскольку эти утверждения входят в оба набора условий. К аналогичному выводу мы придем, сопоставив утверждения (1), (3), (6) с утверждениями (3), (4), (6).

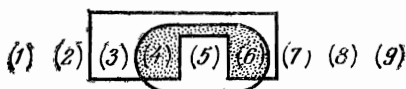


Рис. 218.

Нетрудно также заметить (если учесть утверждение (9)), что утверждения (1), (5), (6) не могут быть истинными одновременно. Сопоставляя тройки условий (3), (4), (6) и (1), (5), (6), мы снова придем к выводу о том, что ложным может быть лишь утверждение (6).

Примечание 2. Решая задачу, мы доказали, что утверждение (6) ложно: неверно, будто первыми финишировали 3 негритянских бегуна. Однако ложность этого утверждения отнюдь *не означает*, что среди спортсменов, занявших 3 первых места, не было *ни одного* темнокожего бегуна. Из ложности утверждения (6) следует лишь, что негритянские спортсмены не заняли *все* 3 первых места.

Соблазнительно простое, но неполное решение. То, что ложно именно утверждение (6), интуитивно ясно. [Лишь это утвержде-

ние непосредственно связано с заведомо истинным утверждением (9).] Исключив утверждение (6), мы из остальных утверждений без труда найдем, как распределились места между шестью командами. После того как мы исключим утверждение (6), все остальные утверждения не будут приводить к каким-либо противоречиям. Это показывает, что утверждение (6) действительно было ложным.

В чем недостаток такого решения?

В том, что, приступая к решению задачи, мы не знаем, будет ли она однозначно разрешимой. Приведенное выше краткое рассуждение убеждает нас в разрешимости задачи, но допускает ли она лишь одно или несколько решений, остается невыясненным. Если утверждение (6) действительно ложно, то остальные утверждения согласуются и позволяют распределить места среди команд только одним способом. Но остается открытым вопрос: не существует ли другого решения задачи, в котором ложным окажется не утверждение (6), а какое-нибудь другое утверждение?

Выяснение этого вопроса существенно удлинит приведенное выше решение и приблизит его к уже известным нам более строгим и полным вариантам.

(1) $\begin{matrix} \delta & \delta & \delta \\ \bullet & \odot & \odot & \odot \end{matrix}$

(2) $\begin{matrix} \odot & & \odot \\ & \boxed{\begin{matrix} \text{К-С} \\ \text{З-Б-Л-Д} \end{matrix}} & \\ \odot & & \odot \end{matrix}$

(3) $\begin{matrix} \delta & \delta & \delta \\ \odot & \odot & \odot & \bullet & \bullet \end{matrix}$

(4) $\begin{matrix} & & & \text{Л} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \odot & \bullet \end{matrix}$

(5) $\begin{matrix} \odot & \bullet & \bullet & \bullet & \odot \\ & \boxed{\begin{matrix} \text{К} \\ \text{С} \end{matrix}} & \\ \odot & & \odot \end{matrix}$

(6) $\begin{matrix} & & & \text{К} & \text{К} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \odot & \odot \end{matrix}$

(7) $\begin{matrix} & & & \delta & \delta \\ \bullet & \bullet & \bullet & \odot & \odot \end{matrix}$

(8) $\begin{matrix} & & \text{К} \\ \bullet & \bullet & \odot & \bullet & \bullet \end{matrix}$

(9) $\begin{matrix} \text{С} & & & & \text{С} \\ \odot & \bullet & \bullet & \bullet & \odot \end{matrix}$

Рис. 219.

142. КРОСС

Прежде всего необходимо установить, какие два утверждения ложны. Их поиск будет тем успешнее, чем больше пар противоречивых утверждений нам удастся составить. Действительно, если имеется пара противоречащих друг другу утверждений, то одно из них заведомо ложно.

Пары противоречивых утверждений мы легко обнаружим, окинув единым взглядом всю информацию, содержащуюся в утверждениях (1) — (9) (рис. 219).

Так, сразу же видно, что

по крайней мере одно из утверждений (6) и (8) ложно.

Действительно, по условиям задачи красный цвет встречается в спортивной форме лишь двух клубов («Вашаш» и «Гонвед»). Если бы оба утверждения (6) и (8) были истинны, то красный цвет входил бы в спортивную форму трех клубов (представители которых заняли 3 последних места.)

Ясно также, что

по крайней мере одно из утверждений (3) и (7) ложно.

Действительно, поскольку по условиям задачи 4 из 5 трусов были белыми, то трусы одного цвета могли быть только белыми. Следовательно, если бы оба утверждения (3) и (7) были истинными, то все 5 участников кросса оказались бы в белых трусах, что невозможно, поскольку в спортивной форме клуба «Вашаш» нет белого цвета.

Итак, среди утверждений (6) и (8), с одной стороны, и утверждений (3) и (7) — с другой, имеется по крайней мере по одному ложному утверждению, причем эти пары утверждений не содержат общих элементов (утверждения, входящие в одну пару, не принадлежат второй паре, и наоборот; рис. 220), поэтому среди четырех утверждений (6), (8), (3) и (7) содержатся по крайней мере 2 ложных. Но поскольку по условиям задачи имеется лишь 2 ложных утверждения, то это возможно только в том случае, если в каждой

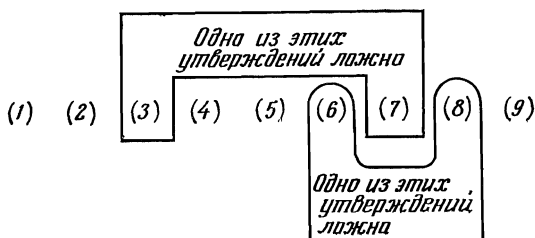


Рис. 220.

паре утверждений (6), (8) и (3), (7) содержится ровно 1 ложное утверждение: и в паре (6), (8), и в паре (3), (7) одно утверждение ложно, а другое истинно.

Но если два ложных утверждения содержатся среди утверждений (3), (6), (7) и (8), то все остальные утверждения — (1), (2), (4), (5) и (9) — должны быть истинными. Из этого мы и будем исходить в дальнейших рассуждениях.

Рассмотрим наиболее конкретные из заведомо истинных утверждений: (1), (4) и (9) (рис. 221). Ясно, что в утверждении (1) речь может идти лишь о трусах белого цвета. Из утверждения (9) следует (поскольку синий цвет встречается в спортивной форме лишь двух клубов — «Вашаш» и МТК), что первый и последний бегуны были в синих майках.

Нетрудно понять, что на четвертом месте мог оказаться только представитель спортивного клуба «Дожа». После того как это установлено, утверждение (2) становится достаточно конкретным, поскольку с лилово-белой формой спортивного клуба «Дожа» не имеет общих цветов только *красно-синяя форма*. Владелец ее должен занять *первое место*, тогда на пятом месте окажется спортсмен в *сине-белой форме* (на рис. 221 названия спортивных клубов указаны под пунктирной линией).

Утверждение (5) в дальнейшем становится *излишним*: мы не можем почерпнуть из него никаких новых сведений.

Схема, изображенная на рис. 221, теперь почти полностью заполнена. Нам осталось еще выяснить, каким образом распределили

между собой 2-е и 3-е места представители двух оставшихся клубов «Гонвед» и ФТЦ. Но информация, содержащаяся в пяти заведомо истинных утверждениях — (1), (2), (4), (5) и (9), — не позволяет нам установить это, поскольку она полностью исчерпывается тем, что изображено на рис. 221.

Итак, нам необходимы новые истинные утверждения, и поэтому было бы желательно выяснить, какие из утверждений — (3) и (7) или (6) и (8) — истинны.

Если бегун из «Дожа» (лиловая майка, белые трусы) занял четвертое место, то утверждение (6) должно быть ложным. С другой стороны, известно, что из двух утверждений (6) и (8) одно истинно, а другое ложно. Поскольку доказано, что утверждение (6) ложно, то утверждение (8) может быть только истинным. Но тогда третье место мог занять лишь представитель спортивного клуба «Гонвед», а

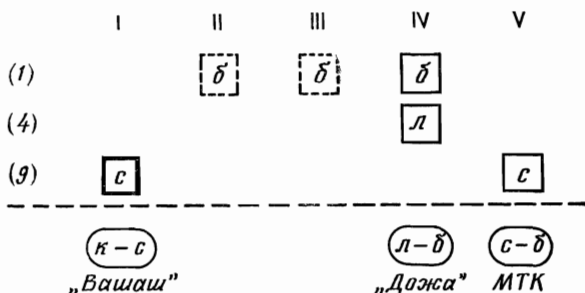


Рис. 221.

на второе вышел спортсмен из ФТЦ. Итак, места между участниками кросса могли распределиться только следующим образом: 1) «Вашаш», 2) ФТЦ, 3) «Гонвед», 4) «Дожа», 5) МТК.

Разумеется, необходимо еще проверить, удовлетворяет ли такое распределение мест всем условиям задачи (или, что то же, разрешима ли задача). Выясняется, что при таком распределении мест утверждения (3) и (6) ложны, а все остальные утверждения истинны. Таким образом, число ложных утверждений действительно равно 2, все условия задачи выполнены и она разрешима.

Примечание 1. Мы решили задачу, так и не узнав, какое из утверждений (3) и (7) ложно. Это выяснилось лишь при проверке правильности полученного распределения мест.

Примечание 2. В решении задачи не были использованы истинные утверждения [(5) целиком и (1) частично] (об этом на рис. 221 напоминают две буквы б, заключенные в пунктирные рамки). Это означает, что условия задачи содержат избыточную, лишнюю информацию.

Примечание 3. В решении задачи речь шла о том, что из двух утверждений — например, (6) и (8) — истинным может быть только одно. Пользуясь специальными обозначениями, принятыми в математической логике, то же самое можно выразить более кратко.

Действительно, если утверждения

(6) «В спортивной форме двух последних бегунов был красный цвет» и

(8) «Третий бегун был в красной майке»

не могут быть истинными одновременно, то это означает, что одно сложное утверждение (6) и (7) (то есть «В спортивной форме двух последних бегунов был красный цвет, и третий бегун был в красной майке») *не истинно*. Заменяя союз «и» каким-нибудь специальным значком, например значком $\wedge$, мы сможем записать последнее утверждение в виде «(6) $\wedge$ (8)». В этих обозначениях два утверждения в начале решения, набранные курсивом, запишутся так:

(6) $\wedge$ (8) *ложно*,

(3) $\wedge$ (7) *ложно*.

Примечание 4. Приведенный выше способ решения, разумеется, не является единственным. Распределение мест между пятью участниками кросса можно получать и многими другими способами. Отличается одно решение от другого парами утверждений, между которыми в первый раз возникает противоречие. Может случиться и так, что противоречие возникнет при сравнении не двух, а трех утверждений (из которых по крайней мере одно будет ложно). Такие «противоречивые» тройки образуют, например, утверждения (1), (2), (3) или (2), (3), (4).

143. ТРЕНЕР В УДИВЛЕНИИ

И решение. Утверждения (8) и (9) по существу совпадают, поэтому они должны быть либо (а) оба ложными, либо (б) оба истинными.

а) Если утверждения (8) и (9) ложны, то вторые утверждения Дежё и Эрнё [утверждения (7) и (10)] истинны. Следовательно, утверждение (4), противоречащее утверждению (7), ложно, в силу чего второе утверждение Белы — утверждение (3) — должно быть истинным. Итак, в рассматриваемом случае утверждения (10) и (3) должны быть истинными, но это невозможно: Андраш и Бела не могли вдвоем стать победителями заплыва (рис. 222).

Следовательно, если утверждения (8) и (9) ложны, то задача не имеет решения.

б) Задача становится разрешимой лишь в том случае, если принятое выше исходное предположение ложно, то есть если утверждения (8) и (9) истинны: *Эрнё занял четвертое место*.

Поскольку утверждение (8) истинно, то другое утверждение Дежё [утверждение (7)] может быть только ложным. Но тогда ложно и утверждение (1), совпадающее с утверждением (7). Следовательно, истинно второе утверждение Андраша: в состоявшемся заплыве *Андраш занял третье место*.

Утверждение (5), противоречащее истинному утверждению (2), может быть только ложным, а утверждение (6), как и в предыдущем случае, истинно: *Бела занял пятое место*.

Утверждение (3), противоречащее этому выводу, ложно. Следовательно, второе утверждение Белы — утверждение (4) — истинно: *Чаба занял второе место* (рис. 223), а Дежё мог занять лишь единственное место, оставшееся «свободным», — первое место. Итак, *Дежё*

занял первое место, Чаба — второе, Андраш — третье, Эрнё — четвертое и Бела — пятое.

Нетрудно проверить, что при таком распределении место утверждения (2), (4), (6), (8), (9) истинны, а утверждения (1), (3), (5), (7), (10) ложны.

Места	1	2	3	4	5
А		(1) Д	(2) А		
Б	(3) Бл ←	(4) Чл			
Ч	←	↑	(5) Ч		(6) Б
Д	←	(7) Дч ←		(8) Эл	
Э	(10) Ач ←			(9) Эл	

Рис. 222.

Это соответствует условию задачи, согласно которому каждый из пловцов высказал одно истинное и одно ложное утверждение. Итак, все условия задачи выполнены. Следовательно, найденное нами распределение мест между участниками заплыва действительно является решением задачи.

II решение. Мы отнюдь не уверены в том, что решение задачи лучше всего начинать с утверждений (8) и (9). Но если начать с

Места	1	2	3	4	5
А		(1) Дл →	(2) Ач		
Б	(3) Бл →	(4) Чч			
Ч	←	←	(5) Чл		(6) Бч
Д		(7) Дл ←		(8) Эч	
Э	(10) Ал ←			(9) Эч	

Рис. 223.

других утверждений, то решение становится более длинным и сложным. Действуя наугад, мы можем заблудиться в лабиринте взаимосвязей между отдельными утверждениями. Необходимо разработать метод, который «автоматически» приводил бы к решению задачи.

Обозначив каждое утверждение его порядковым номером и буквой, с которой начинается имя высказавшего его пловца, разобьем все 10 утверждений на две группы так, чтобы в каждую группу входили утверждения с одним и тем же значением истинности. Утверждения одной группы обведем квадратными рамками, утверждения

другой — кружками. Поскольку по условиям задачи каждый пловец высказал 2 утверждения, одно из которых истинно, а другое ложно, то на рис. 224 в каждой строке непременно встретится 1 кружок и 1 квадрат.

Ясно, что 2 утверждения, одинаковых по своему содержанию, либо оба истинны, либо оба ложны. И в том и в другом случае их необходимо заключить в одинаковые по форме рамки. С поиска таких утверждений мы и начнем решение задачи.

А { Утверждение (1) по существу совпадает с утверждением (7), поэтому их следует заключить в одинаковые по форме, например квадратные, рамки. Утверждения (2) и (8) имеют по сравнению с утверждениями (1) и (7) противоположное значение истинности, и мы обведем их кружками.

Утверждение (9) совпадает с утверждением (8), обведенным кружком, тогда утверждение (9) также следует обвести кружком, а противоположное им утверждение (10) заключить в квадратную рамку (рис. 224).

Места		1	2	3	4	5
По утверждениям	А		(1) □	↔	○ А (2)	
	Б	(3) Б	(4) Ч			
	Ч			(5) Ч		(6) Б
	Д		(7) □	↔	○ Э (8)	
	Э	(10) □			○ Э (9)	

Рис. 224.

Других утверждений, содержание которых совпадало бы, в условиях задачи нет, зато в избытке имеются противоречивые утверждения, согласно которым *либо один пловец занял в соревновании два различных места, либо два пловца оказались на одном и том же месте*. Таковы, например, утверждения (3) и (6) или (1) и (4).

Однако при обращении с такими утверждениями необходимо соблюдать осторожность: противоречие между ними носит не столь простой и естественный характер, как противоположность двух утверждений, оказавшихся в одной строке таблицы на рис. 224. Действительно, из двух утверждений, стоящих в любой строке таблицы, одно истинно, а другое ложно, в то время как, например, утверждения (1) и (4) не могут быть одновременно истинными, но вполне могут быть одновременно ложными! Следовательно, форма рамок, которыми надлежит обвести эти утверждения, не обязательно должна быть различной. Установить ее мы сможем, лишь предположив, что та или иная форма рамок соответствует истинным утверждениям. (Правильность нашего предположения будет подтверждена или опровергнута в дальнейшем ходе решения.)

{ Предположим, что квадратными рамками обведены истинные решения. Тогда, поскольку утверждение (1) заклю-

Б { чено в квадратную рамку, не согласующееся с ним утверждение (4) следует обвести кружком, а утверждение (3), стоящее в одной строке с утверждением (4), — квадратной рамкой.

Что же касается утверждения (10), не согласующегося с утверждением (3), то его необходимо обвести кружком. Но утверждение (10) уже заключено в квадратную рамку (рис. 225). Противоречие,

Места	1	2	3	4	5
А		(1) Д	(2) А		
Б	(3) Б	(4) Ч			
Ч			(5) Ч		(6) Б
Д		(7) Д		(8) Э	
Э	(10) А			(9) Э	

Рис. 225.

к которому мы пришли, доказывает, что исходное предположение было неверным: истинными должны быть не «квадратные», а «круглые» утверждения.

Таким образом, «маркировка» утверждений на рис. 225 неверна. Проводя ее, мы исходили из предположения о том, что утверждения, заключенные в квадраты, истинны.

Места	1	2	3	4	5
А		(1) Д	(2) А		
Б	(3) Б	(4) Ч			
Ч			(5) Ч		(6) Б
Д		(7) Д		(8) Э	
Э	(10) А			(9) Э	

Рис. 226.

В { Вернемся снова к рис. 224. Утверждение (2) обведено на нем кружком, поэтому не согласующиеся с ним утверждения (5) и (10) следует заключить в квадраты (это мы знали и раньше), утверждение (6), стоящее в одной строке с утверждением (5), обвести кружком, утверждение (3), не согласующееся с утверждением (6), вписать в квадрат, а утверждение (4), стоящее в одной строке с утверждением (3), обвести кружком (рис. 226).

В | Прodelав все эти операции, мы определим значения истинности всех утверждений: обведенные кружками утверждения (2), (4), (6), (8), (9) должны быть истинными, а заключенные в квадраты утверждения (1), (3), (5), (7) и (10) — ложными.

Истинные утверждения позволяют однозначно и непротиворечиво восстановить распределение мест между участниками заплыва: *первое место занял Дежё, второе — Чаба, третье — Андраш, четвертое Эрнё и последнее (пятое) место — Бела.*

Поскольку при таком распределении мест все утверждения в квадратных рамках оказываются ложными и выполнено условие задачи, по которому каждый пловец в разговоре с тренером высказал одно истинное и одно ложное утверждение (на рис. 226 в каждой строке таблицы стоят два утверждения, одно из которых обведено кружком, а другое заключено в квадрат), то нам действительно удалось найти решение задачи.

144. НОВЫЙ ВАРИАНТ

Ясно, что та часть решения задачи 143, в которой не использовалось утверждение (10), остается прежней. Изменениям может подвергнуться лишь другая часть решения, в которой мы так или иначе затрагивали утверждение (10).

В решении задачи 143 мы выяснили, что утверждения (2), (4), (6), (8), (9) истинны, а остальные — утверждения (1), (3), (5), (7), (10) — ложны, и установили, как распределились места между участниками заплыва: *первое место занял Дежё, второе — Чаба, третье — Андраш, четвертое — Эрнё и пятое — Бела.*

Это решение остается в силе и теперь. Действительно, все утверждения, которые, как мы доказали, были истинными в предыдущей задаче, остались прежними. Изменению подверглось лишь одно ложное утверждение (10). Но и в новой «редакции» это утверждение осталось ложным, поскольку Чаба занял не третье место. Таким образом, найденное в предыдущей задаче распределение мест среди участников заплыва удовлетворяет всем условиям новой задачи.

Однако этим вопрос не исчерпывается, поскольку задача может иметь несколько решений. А что, если после замены утверждения (10) новым утверждением задача стала неоднозначно разрешимой?

Итак, нет ли других решений?

Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к началу II решения задачи 143: к разбиению утверждений на «круглые» и «квадратные».

Часть решения, помеченная буквой А, так же как и распределение кружков и квадратов на схеме (рис. 224), остается без изменений.

То, что в этой части решения имеются ссылки на утверждение (10), еще не свидетельствует о ее ошибочности! Ведь речь там идет лишь о том, что утверждения (10) и (9) имеют противоположные значения истинности. Сам по себе этот факт не зависит от того, какую информацию несет утверждение (10), он обусловлен лишь тем, что одно из двух высказанных Эрнё утверждений истинно, а другое ложно.

Не изменяется также и та часть решения, которая обозначена буквой Б. Однако непосредственное продолжение этой части решения

[то место, где говорится, что утверждение (10), противоположное утверждению (3), следует обвести кружком] *теперь уже неверно*, поскольку новое утверждение (10) не противоречит утверждению (3). Поэтому на утверждении Б решение новой задачи обрывается: установить прежним способом, что заключенные в квадраты утверждения не могут быть истинными, нам (и не только нам) не удастся. Вполне возможно, что в новой задаче «квадратные» утверждения окажутся истинными.

Подчеркнем, что речь идет именно о возможности. Мы отнюдь не утверждаем, что они непременно будут истинными. Действительно, если истинность утверждений не удастся установить каким-нибудь одним способом, то это еще не означает, что ее нельзя установить другим способом. Именно поэтому необходимо быть особенно осторожным: не исключено, что утверждения в квадратах истинны.

Места	1	2	3	4	5
По утверждениям	А	(1) □ Д	(2) ○ А		
	Б (3) □ Б	(4) ○ Ч			
	Ч		(5) □ Ч		(6) ○ Б
	Д	(7) □ Д		(8) ○ Э	
	Э		(10) □ Ч	(9) ○ Э	

Рис. 227.

Из фрагментов решения А и Б (или из распределения кружков и квадратов на рис. 224 и части решения Б) следует, что утверждения (1), (7), (10) и (3) «квадратные», а утверждения (2), (8), (9) и (4) — «круглые». Нетрудно видеть, что утверждение (5) совпадает с утверждением (10), и поэтому его следует заключить в квадрат, а находящееся с ним в одной строке утверждение (6) обвести кружком (рис. 227).

Могут ли в новой задаче утверждения, заключенные в квадраты, быть истинными, а утверждения, обведенные кружками, ложными?

Из «квадратных» утверждений (1), (3), (5), (7), (10) следует, что *Бела занял первое место, Дежё — второе и Чабан — третье*. [Как распределились четвертое и пятое места, мы не знаем, поскольку утверждение (1) совпадает с утверждением (7), а утверждение (5) — с утверждением (10).] Но если обведенное кружком утверждение (8) не истинно, то Эрнэ не занял четвертого места и, следовательно, мог очутиться лишь на последнем месте. Итак, *Эрнэ занял пятое место*.

Следовательно, для Андраша осталось лишь четвертое место: *Андраш пришел четвертым*. Мы видим, что если «квадратные» утверждения истинны, то места могли распределиться лишь единственным образом: *на первом месте Бела, на втором Дежё, на третьем Чабан, на четвертом Андраш и на пятом Эрнэ*.

Мы действительно получили решение задачи, поскольку при таком распределении «квадратные» утверждения (1), (3), (5), (7),

(10) истинны, а «круглые» утверждения (2), (4), (6), (8), (9) ложны.

Итак, нам удалось найти 2 решения задачи.

Не существуют ли еще какие-нибудь решения?

Других решений задача не имеет, поскольку из фрагмента решения А следует, что на рис. 224 три утверждения, заключенные в квадраты, должны быть истинными, а три утверждения, обведенные кружками, ложными, или наоборот. В первом случае мы однозначно получаем распределение мест, совпадающее с последним из найденных нами распределений. Во втором случае остается в силе фрагмент В II решения задачи 143 и мы приходим к распределению, совпадающему с найденным в задаче 143 (это распределение также восстанавливается однозначно).

[То, что во втором случае остается в силе фрагмент решения В, казалось бы, должно противоречить содержащейся в нем ссылке на утверждение (10), играющее немаловажную роль в проводимых рассуждениях. Однако по существу в фрагменте решения В используется лишь то, что значение истинности, принимаемое утверждением (10), противоположно значению истинности, принимаемому утверждением (2), а этим свойством утверждение (10) обладает и в старом, и в новом вариантах.]

Примечание 1. В решении было показано, что рис. 227 одинаково применим и в том случае, когда истинны утверждения в кружках, и в том случае, когда истинны утверждения в квадратах. Это означает, что информация, содержащаяся в новом утверждении (10), входит в число следствий, выводимых из рис. 224, то есть является частью информации, содержащейся в «квадратных» и «круглых» утверждениях (3), (4), (5) и (6), причем *независимо от того, какие из них — квадратные или круглые — истинны*. В этом нетрудно убедиться, если рассмотреть, как связаны между собой значения истинности отдельных утверждений.

На рис. 222—226 (а вместе с ними и на рис. 227—229) между значениями истинности существуют 3 типа связей:

а) значения истинности двух утверждений совпадают (утверждения либо оба истинны, либо оба ложны; оба утверждения сообщают одни и те же сведения);

б) значения истинности двух утверждений противоположны (если одно утверждение истинно, то другое ложно, и наоборот; в задачах 143 и 144 к этому типу относятся 2 утверждения об одном и том же спортсмене);

в) 2 утверждения не согласуются друг с другом (оба утверждения не могут быть одновременно истинными, хотя вполне могут быть одновременно ложными); в задачах 143 и 144 таковы, например, утверждения (1) и (4), (3) и (6) и так далее.

Условимся обозначать связи типа а сплошной, связи типа б — штрихпунктирной и связи типа в пунктирной линией. Нанеся на схему все связи между десятью утверждениями задачи 144, мы получим рис. 228.

Каким образом эти связи зависят от того, какие утверждения истинны — в квадратах или в кружках? Что произойдет с этими связями, если значение истинности всех утверждений изменить на противоположное (то есть считать истинными утверждения в кружках и ложными утверждения в квадратах)?

Никак не скажется перемена и на связях типа «б». Действительно, если до обращения значений истинности одно из них было истинным, а другое ложным, то после обращения истинное утверждение станет ложным, а ложное — истинным. Значения истинности при этом останутся противоположными, и тип связи не изменится.

или можно, а другое нет, и) если оба утверждения истинны.

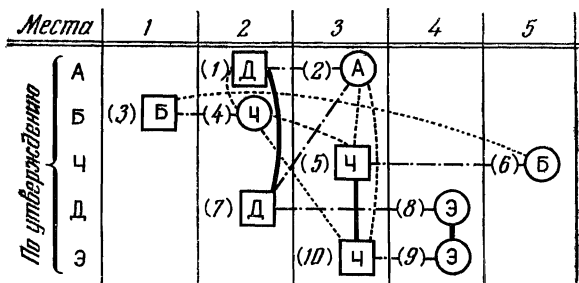


Рис. 228.

Но, взглянув на рис. 228, можно заметить, что пунктирная линия всюду соединяет кружок и квадрат. Следовательно, мы всюду имеем дело лишь с той разновидностью связи типа «в», которая возникает в первом случае, и поэтому при обращении значений истинности она сохраняется. Итак, *при замене значений истинности всех утверждений на противоположные все типы связей сохраняются.*

Отсюда становится ясно, почему задача 144 допускает по крайней мере 2 решения. Действительно, решая задачу, мы используем следствия из утверждений, перечисленных в ее условии, то есть связи между отдельными утверждениями, изображенные на рис. 228. Но, как мы только что убедились, тип связей не зависит от того, истинны ли утверждения, обведенные кружками, или те, которые заключены в квадраты.

Примечание 2. К иным выводам мы придем, нанеся на схему связи между десятью утверждениями из задачи 143 (рис. 229). Здесь уже встречается вторая разновидность связей типа «в» — между утверждениями (3) и (10). После «обращения» всех утверждений такая связь оборвется. Поэтому задача 143 допускает лишь одно решение (истинными могут быть лишь утверждения, обведенные кружками).

Примечание 3. Заметим, что кружки на рис. 227 совпадают с кружками на рис. 226. Это означает, что если на рис. 226 утверждения в кружках перестанут быть истинными, то «перебор» утверждений (3), (4), (5) и (6) не позволит определить, о каком варианте утверждения (10) идет речь: из за-

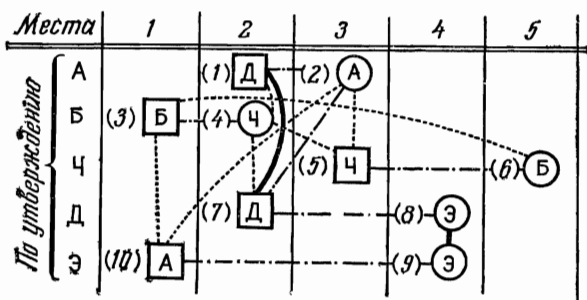


Рис. 229.

дачи 143 или из задачи 144. (Ранее мы уже обращали внимание на это обстоятельство, когда доказывали, что фрагмент В II решения задачи 143 остается в силе и для решения задачи 144.)

Примечание 4. При решении задачи 144 можно исходить не только из II, но и из I решения задачи 143. Прodelать это мы предоставляем читателю.

145. ЛАКОМСТВО I

I решение. И Пишта, и Юльчи утверждают, что Йошка вошел в кухню после них [(6) и (11)]. Если бы они лгали, то и у Пишты, и у Йошки набралось бы по 2 истинных утверждения — (4), (5), (10) и (12). Но это невозможно, поскольку утверждения (5) и (12) противоречат друг другу. Следовательно, Йошка мог войти в кухню только последним, и все утверждения о нем истинны.

Если утверждение (11) истинно, то истинно и следующее из него утверждение (3), а из истинности утверждения (12) вытекает истинность утверждения (2). Таким образом, у Юльчи набирается уже 2 истинных утверждения. Но тогда ее третье утверждение (1) не может быть истинным (не Юльчи, а Йошка вошел в кухню последним). Следовательно, утверждение (1) ложно: тарелку с пудингом опрокинула Юльчи.

Остается проверить, согласуется ли этот вывод со всеми условиями задачи. С утверждениями самой Юльчи, как мы только что убедились, в этом смысле все в порядке, поэтому необходимо проверить только утверждения остальных детей.

Пишта: $\left\{ \begin{array}{l} (4) \text{ истинно,} \\ (5) \text{ ложно — поскольку истинно (2),} \\ (6) \text{ истинно;} \end{array} \right.$

Эржи: $\left\{ \begin{array}{l} (7) \text{ истинно,} \\ (8) \text{ истинно,} \\ (9) \text{ ложно;} \end{array} \right.$

Йошка: $\left\{ \begin{array}{l} (10) \text{ истинно,} \\ (11) \text{ истинно,} \\ (12) \text{ истинно.} \end{array} \right.$

Таким образом, утверждения Пишты, Эржи и Йошки удовлетворяют всем условиям задачи.

II решение. Утверждения Йошки (10) и (12) должны быть истинными *в любом из двух случаев*: и когда утверждение (11) истинно, и когда оно ложно. Действительно, если истинно утверждение (11), то все утверждения Йошки должны быть истинными. Если же утверждение (11) ложно, то два остальных утверждения Йошки должны быть истинными. Если же утверждение (11) ложно, то два остальных утверждения Йошки должны быть истинными.

Поскольку утверждение (12) истинно, то истинно и вытекающее из него утверждение (2). С другой стороны, утверждение (5), противоречащее утверждению (12), ложно. Следовательно, два остальных утверждения Пишты истинны. Таким образом, утверждение (6) и вытекающее из него утверждение (3) истинны.

Но коль скоро утверждения (2) и (3) истинны, то третье утверждение Юльчи — утверждение (1) — может быть только ложным [поскольку из утверждения (6), истинность которого уже доказана, следует, что последним в кухню вошел Йошка, а не Юльчи]. Но если утверждение (1) ложно, то *тарелку с пудингом могла опрокинуть только Юльчи*.

Проверка правильности полученного ответа проводится так же, как и в предыдущем решении.

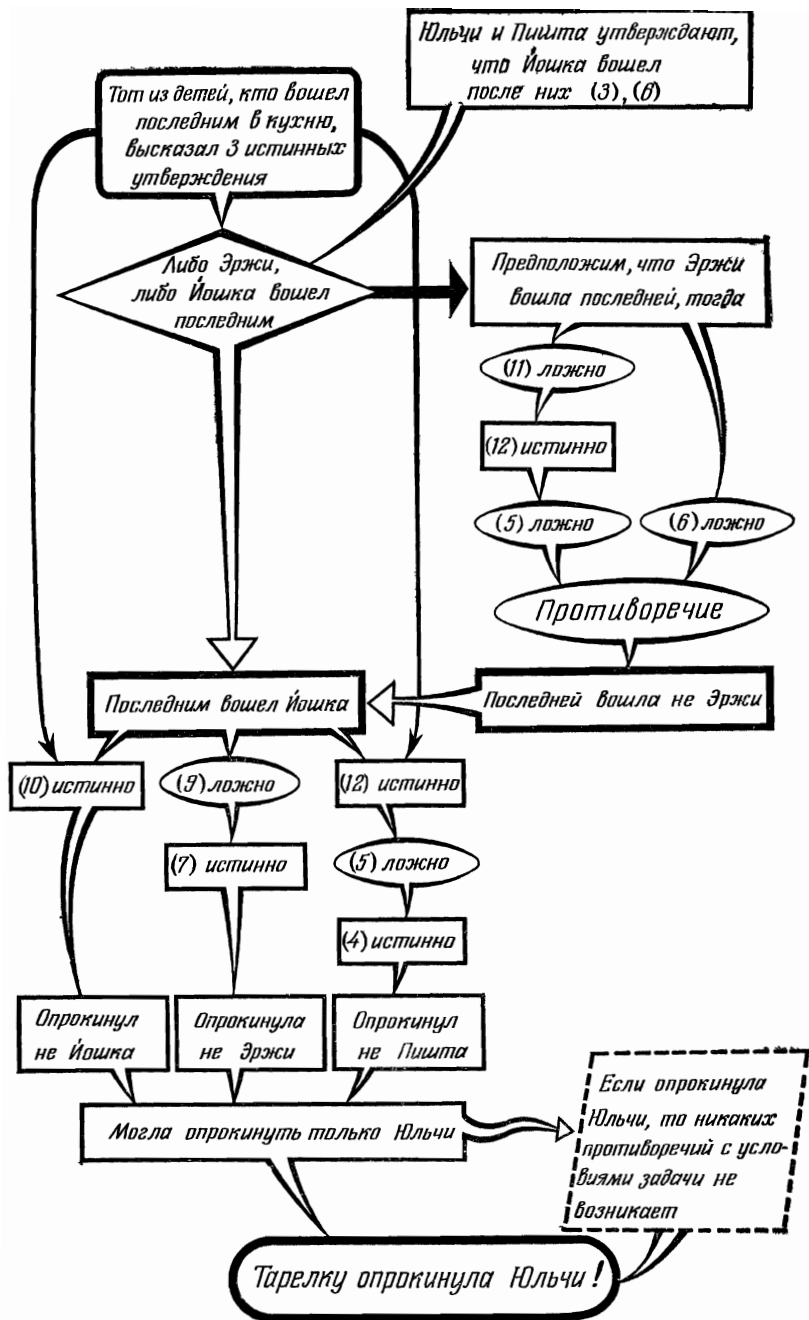
I и II решение построены так, чтобы как можно быстрее ответить на вопрос задачи. Приводимое ниже III решение несколько длиннее, но «надежнее»: оно позволяет систематически продвигаться к намеченной цели и при этом еще показывает, как можно было бы поразительно быстро решить задачу.]

III решение. Наглядно ход рассуждений в этом решении можно было бы изобразить в виде схемы на рис. 230.

Хотя восполнить недостающие детали доказательства совсем не трудно, мы все же приводим ниже подробное решение.

Разумеется, мы стремимся к тому, чтобы о как можно большем числе утверждений можно было сказать, истинно оно или ложно.

Поскольку каждый из ребят в первом из трех утверждений отрицал свою вину, тот, кто высказал 3 истинных утверждения, не мог



опрокинуть тарелку с пудингом на пол. Виновника происшествия следует искать среди трех других ребят — тех, кто высказал по одному ложному и лишь по два истинных утверждения. Тех из них, у кого ложным окажется второе или третье утверждение, можно вычеркнуть из числа подозреваемых. Тарелку с пудингом мог уронить на пол лишь тот, у кого второе и третье утверждения истинны, а ложно первое утверждение.

Если исключить утверждение (8), то все остальные вторые и третьи утверждения содержат информацию о том, в каком порядке ребята выходили на кухню. Именно это и следует выяснить, тем более что попутно будет установлено, кто трижды сказал правду.

Ни Юльчи, ни Пишта не могли выйти на кухню последними, поскольку, по их утверждениям, Пишта вошел после них. А ведь именно тот, кто вышел последним, высказал 3 истинных утверждения.

Остаются Эржи и Йошка.

Но если бы на кухню последней вышла Эржи, то утверждения (11) и (6) были бы ложны. Следовательно, утверждение (12) было бы истинно (поскольку Йошка не мог солгать дважды), и поэтому утверждение (5) должно было бы быть ложным. Таким образом, *если бы на кухню последней вышла Эржи, то утверждения (5) и (6) были бы ложными, но это невозможно, поскольку Пишта не мог солгать дважды.*

Следовательно, последним на кухню мог выйти только Йошка, лишь он высказал 3 истинных утверждения. Но это означает, что утверждение (10) истинно: *Йошка не опрокидывал тарелку с пудингом.* С другой стороны, утверждение (9) ложно, а утверждение (7) должно быть истинным (Эржи солгала только один раз): *тарелку с пудингом опрокинула не Эржи.*

Поскольку утверждение (12) истинно, то утверждение (5) ложно, в силу чего утверждение (4) истинно (Пишта солгал лишь один раз): *тарелку разбил не Пишта.*

В списке «подозреваемых» остается только Юльчи: в силу приведенных выше аргументов тарелку с пудингом могла опрокинуть на пол только она.

Утверждения (2), (3), (6) и (8) оказываются истинными, а утверждение (1) ложным (до установления личности виновника происшествия значения истинности этих утверждений оставались невыясненными). Нетрудно проверить, что ни к каким противоречиям наш вывод не приводит. Следовательно, нами получено решение задачи.

Примечание. Условия задачи содержат слишком много информации. При решении задачи вполне можно было бы обойтись и меньшим количеством сведений. Например, совершенно излишне утверждение (8): если его заменить любым утверждением, полностью лишенным информации, то и тогда задача осталась бы однозначно разрешимой. [В доказательство сошлемся на приведенный выше ход рассуждений: в них нигде не используется утверждение (8). Лишь при проверке правильности полученного решения нам понадобилось его значение истинности. Утверждение (8) оказалось истинным. Но было бы достаточно и любого истинного утверждения, не несущего никакой информации.]

146. ТРИ ДЕВУШКИ

Прежде всего необходимо выяснить, какие утверждения истинны и какие ложны. Установить это можно, сравнивая противоречивые утверждения.

Заключительная часть задачи позволяет прийти к следующим важным выводам, или замечаниям:

I. Среди трех утверждений, высказанных каждой девушкой, первое и третье либо оба ложны, либо оба истинны. (Такие утверждения принято называть «логически эквивалентными» или «имеющими одинаковые значения истинности».)

II. Одна и только одна девушка ни разу не солгала. Одна и только одна девушка солгала трижды.

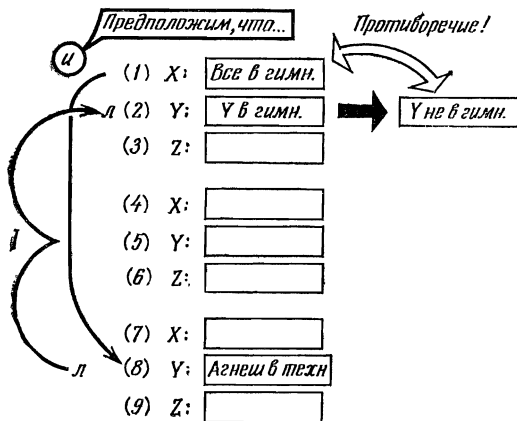


Рис. 231.

III. Среди трех ответов на любой вопрос ребят не менее одного раза встречается истинный и не менее одного раза — ложный.

IV. Число ложных ответов не меньше 4 и не больше 5.

Эти замечания, вытекающие непосредственно из заключительной части задачи, полезно иметь в виду, прежде чем приступать к решению. Мы отнюдь не утверждаем, что все они непременно понадобятся нам в процессе решения, но гораздо удобнее иметь перед собой в концентрированном виде всю информацию, рассеянную по многочисленным утверждениям, и избавить от необходимости вникать в их детали.

Информация относительно имен девушек содержится только в утверждениях (4), (5) и (6). Между этими утверждениями существует одна-единственная связь: кажется, будто утверждения (4) и (5) противоречат друг другу. В действительности никакого противоречия между этими утверждениями нет. Действительно, в условиях задачи нигде ни слова не говорится о том, о каких именах идет речь, поэтому вполне допустимы и более короткие женские имена, чем имя «Ева», состоящие из двух букв или даже из одной буквы. (Вспомним хотя бы имя «Ия».)

Относительно остальных утверждений заметим, что утверждения (1) и (8) противоречат друг другу: они не могут быть истинными одновременно.

Если утверждение (1) истинно, то утверждение (8) ложно, а в силу замечания I утверждение (2) также ложно. Последнее означает, что Y учится не в гимназии, а это противоречит утверждению (1). Таким образом, утверждение (1) не может быть истинным (рис. 231).

[Еще проще ложность утверждения (1) можно было бы доказать так: если бы оно было истинно, то из этого следовало бы, что истинны утверждения (2) и (3), а это невозможно в силу замечания III.]

Из замечания I следует, что если утверждение (1) ложно, то утверждение (7) также ложно: Анна еще учится в гимназии Бер-жени. (В этом нетрудно убедиться, взглянув на схему — рис. 232.)

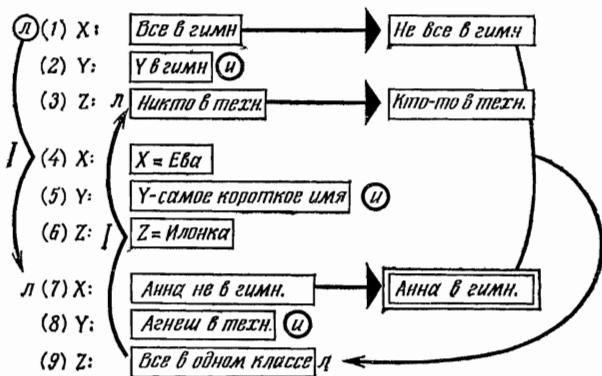


Рис. 232.

Итак, Анна гимназистка. Но тогда все 3 девушки не могут учиться в одном классе, и поэтому утверждение (9) должно быть ложным.

Отсюда следуют 2 вывода: во-первых, утверждение (3) может быть только ложным (см. замечание I), а это означает, что одна из девушек учится в техническом училище; во-вторых, X и Z уже солгали, поэтому говорить всегда только правду могла лишь Y (см. замечание II). Последнее означает, что утверждения (2), (5) и (8) истинны. Таким образом, Агнеш учится в техникуме.

Итак, мы установили, что одна девушка учится в гимназии [(2) и $\neg(7)$] ($\neg(7)$ означает отрицание утверждения (7), значком $\neg$ в математической логике принято обозначать отрицание, именно в этом смысле мы и используем его), одна девушка учится в техническом училище [$\neg(3)$] и одна девушка учится в техникуме (8). Поскольку всего в задаче речь идет о трех девушках, то нам осталось установить, как зовут и под каким «псевдонимом» (X, Y, Z) скрывается гимназистка, ученица технического училища и студентка техникума. Имя единственной гимназистки нам уже известно: ее зовут Анна. Утверждение (2) истинно, поэтому ею оказывается Y . Поскольку Y

говорит только правду, то утверждение (5) истинно, и у нее самое короткое имя. Следовательно, *утверждение (4) может быть только ложным*. Но тогда все 3 утверждения, высказанные *X*, оказываются ложными. Значит, это *X солгала трижды* (замечание II), а *Z говорила попеременно то правду, то ложь*, в силу чего *утверждение (6) истинно: Z зовут Илонка*. Поскольку имена гимназистки и студентки техникума нам уже известны, то *Илонка может учиться только в техническом училище*, а *X* может быть только студенткой техникума Агнеш.

Итак, мы установили следующее:

X — Агнеш — техникум (трижды солгала),

Y — Анна — гимназия (трижды сказала правду),

Z — Илонка — техническое училище (говорила попеременно то правду, то ложь).

Мы видели, что условия задачи приводят лишь к такому сочетанию имен, «псевдонимов» и названий учебных заведений. Нетрудно проверить, что оно удовлетворяет всем условиям задачи.

Доказательства от противного. Решение задачи мы начали с доказательства того, что утверждение (1) может быть только ложным. Мы установили это двумя способами и каждый раз проводили рассуждения по одной и той же схеме: предполагали, что утверждение (1) истинно, и, исходя из этого предположения, путем более или менее длинных рассуждений приходили к противоречию. Такой способ доказательства называется *доказательством от противного* или косвенным доказательством.

Доказательства такого рода широко применяются в математике. Мы также не раз встречались с ними: их можно обнаружить в решениях многих задач. (Например, в двух решениях задачи 141, рассуждая от противного, мы сумели найти ложные утверждения. В решении задачи 142 установить ложные утверждения нам также помогли рассуждения от противного. Они использованы в разделе а I решения задачи 143, в части Б II решения той же задачи. В III решении задачи 145 мы, рассуждая от противного, доказали, что последней на кухню вошла не Эржи.)

147. СТРАННИК В ПУСТЫНЕ

Странник мог, например, указать на одну из двух дорог и задать первому встречному вопрос: «Ответишь ли ты утвердительно, если я спрошу, ведет ли эта дорога в Бухару?»

Если попавшийся навстречу житель селения всегда говорит правду, то ему придется ответить утвердительно или отрицательно в зависимости от того, ведет ли указанная дорога в Бухару или нет. Если же встретившийся страннику житель селения всегда лжет, то на «внутренний вопрос» (ведет ли эта дорога в Бухару?) он даст ответ, который будет противоположен правильному. Но поскольку он лжет, то солжет еще раз, чтобы скрыть свой ответ на «внутренний вопрос». Следовательно, и он вынужден будет ответить утвердительно, если странник указал на дорогу, ведущую в Бухару, и отрицательно в противном случае.

Таким образом, независимо от того, говорит ли встретившийся житель селения всегда только правду или лжет, странник, задав свой вопрос, сумеет выбрать дорогу, ведущую в Бухару.

Примечание. Разумеется, мы привели лишь *одно из возможных решений* задачи и отнюдь не утверждаем, будто странник мог задать только *такой вопрос*. (В особенности мы не настаиваем на том, что странник облек свой вопрос именно в такую словесную форму, как в приведенном выше решении.) Но в такой задаче достаточно привести хотя бы одно решение, лишь бы оно было как можно проще.

148. ГДЕ ГОРИТ?

Дежурному по пожарной части следовало бы положить телефонную трубку и продолжать чтение романа с того самого места, на котором его прервали.

Действительно, звонить из Правдычина не могли, поскольку обитатели этого селения всегда говорят только правду и не стали бы вводить дежурного в заблуждение, утверждая, будто пожар начался в Середине-на-Половине. Следовательно, звонить могли либо из Кривдина, либо из Середины-на-Половине.

Но если звонили из Кривдина, то жители его всегда лгут и, следовательно, никакого пожара там нет.

Наконец, если звонили из Середины-на-Половине, то известно, что жители этого селения попеременно говорят то правду, то ложь. Поскольку самое последнее утверждение (о том, что звонят из Середины-на-Половине) истинно, то предыдущее утверждение (о том, что в селении пожар) ложно.

Таким образом, независимо от того, откуда звонили, утверждение о пожаре может быть только ложным. Следовательно, дежурному по пожарной части никаких действий предпринимать не нужно.

Примечание. Голос в телефонной трубке высказал 2 утверждения:

(I) «Приезжайте скорее, у нас в селении пожар!»

(II) «(Горит) в Середине-на-Половине».

Как показано в решении задачи, утверждение (II) истинно, поэтому утверждение (I) должно быть ложно. Но представим себе, что человек, звонивший в пожарную часть, высказался трижды:

(1) «Приезжайте скорее!»

(2) «У нас в селении пожар!»

(3) «(Горит) в Середине-на-Половине».

Поскольку утверждение (3) истинно, то утверждение (2) должно быть ложным. То, что говоривший по телефону произнес еще слова (1), ничему не мешает: слова (1) — не утверждение (или, как принято говорить, не высказывание) и, следовательно, не могут быть ни истинными, ни ложными.

Но ничего плохого с решением задачи не произойдет и в том случае, если мы вздумаем рассматривать слова (1) как утверждение. Действительно, значение истинности этого «утверждения» может быть произвольным и поэтому не противоречит тому, что утверждение (2) ложно. (Вместо того чтобы сказать: «Приезжайте скорее!», голос в трубке мог бы произнести, например, «Дождь идет» или «Вчера я был на экскурсии».)

[Прежде всего необходимо либо установить значение истинности какого-нибудь утверждения (определить, истинно оно или ложно), либо узнать, в каком селении живет кто-нибудь из островитян.

Однако обнаружить утверждение с известным значением истинности не удастся. Следовательно, нам не остается ничего другого, как приступить к сравнению двух или большего числа утверждений. В предыдущих задачах мы неоднократно изобра-

- (1) $X: \boxed{X \sim Y}$
 (2) $Y: \boxed{Y \sim Z}$
 (3) $Z: \boxed{Z \nsubseteq \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}}$
 (4) $X: \boxed{Z \in C-H-P}$
 (5) $Y: \boxed{X \nrightarrow Y \oplus} !$
 (6) $Z: \boxed{X \nrightarrow Y}$
 (7) $X: \boxed{Z \in C-H-P}$
 (8) $Y: \boxed{X \notin K}$
 (9) $Z: \boxed{(7) \wedge (8) \wedge}$

Рис. 233.

соблюдать осторожность. Из-за непроверяемой части утверждения (5) мы сможем воспользоваться лишь после того, как будет доказано, что оно истинно. Если же выяснится, что оно ложно, то причина этого останется неясной: не исключено, что ложна лишь та часть утверждения (5), в которой говорится о расстояниях между селениями.

Утверждения (7) и (8) можно несколько преобразовать, не затрагивая содержащейся в них информации, и придать им более краткую и понятную форму: если утверждение (7) истинно, то Z может быть жителем только Середины-на-Половине, а если он живет в Середине-на-Половине, то успел солгать лишь один раз.

Если истинно утверждение (8), то X не может быть жителем Кривдина. Если же утверждение (8) ложно, то это означает, что X успел солгать два раза подряд и, следовательно, может быть жителем только Кривдина.

Наиболее разумно, на наш взгляд, было бы собрать все сведения о каком-то *одном лице* и сопоставить их. Таким лицом мы избрали островитянина X .]

В утверждениях (4) и (7) X по существу говорит одно и то же. Следовательно, утверждения (4) и (7) либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Поскольку X высказал их одно за дру-

гим, то в первом случае X мог бы жить только в Правдычине, а во втором — только в Кривдине.

Но если X — житель Правдычина, то *должны быть истинны утверждения (4) и (1)*. Если же утверждение (1) истинно, то Y должен быть жителем Правдычина. Поскольку Y в этом случае всегда говорит только правду, то должно быть истинным утверждение (2). Однако в нем говорится, что Y и Z живут в одном селении, то есть что Z — житель Правдычина, а это противоречит утверждению (4). Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение было неверным: X не живет в Правдычине (*).

Но тогда X может быть жителем только Кривдина, и утверждения (1), (4) и (7) оказываются ложными,

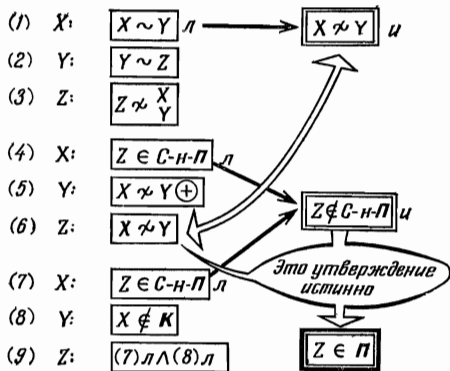


Рис. 234.

[Чтобы мы могли воспользоваться этим фактом, необходимо найти утверждения, связанные с каким-нибудь из утверждений (1), (4) и (7). Такое утверждение действительно удастся обнаружить: это утверждение (6).]

Поскольку утверждение (1) ложно, то противоположное утверждение (6) может быть только истинным. Следовательно, Z высказал по крайней мере одно истинное утверждение и поэтому не может быть жителем Кривдина. Так как утверждение (4) ложно, то Z не может быть жителем и Середины-на-Половине. Отсюда мы заключаем, что Z может быть жителем только Правдычина (рис. 234).

Но тогда все утверждения Z , в частности утверждения (3) и (6), истинны. Если «суммировать» содержащуюся в них информацию, то она сводится к тому, что X , Y , Z живут в разных селениях. Поскольку нам уже известно, где живут X и Z , то Y может быть жителем только Середины-на-Половине.

Итак, задача может иметь единственное решение:

X — житель Кривдина,
 Y — житель Середины-на-Половине,
 Z — житель Правдычина.

Просматривая все 9 утверждений, нетрудно убедиться в том, что характер высказываний всех трех островитян соответствует названиям тех селений, в которых они обитают. Никаких противоречий не возникает. Следовательно, установленное выше соответствие между тремя островитянами и тремя селениями действительно является решением задачи.

Примечание 1. Получить единственное решение задачи можно многими способами. Мы не будем знакомить читателя со всеми, но хотели бы лишь в общих чертах наметить ход рассуждений, позволяющий после (*) сначала установить, где живет Y , и лишь потом — Z . Из (*) нам известно, что X живет не в Кривдине. Остальное показано на рис. 235.

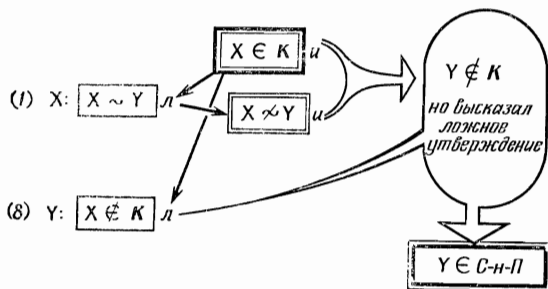


Рис. 235.

Примечание 2. В приведенном выше наброске решения никак не используется утверждение (9). Следовательно, его можно заменить любым истинным или бессодержательным утверждением.

Примечание 3. Упомянем о быстрой, но ошибочной концовке решения, в которой после того, как станет известно, где живут X и Z , родное селение Y определяется следующим образом. Утверждение (8) ложно (поскольку X живет в Кривдине), утверждение (6) истинно — как отрицание ложного суждения (1). В утверждении (5) говорится то же, что и в утверждении (6). Следовательно, утверждение (5) истинно, и Y живет в Середине-на-Половине. В действительности, как уже упоминалось, утверждение (5) содержит больше информации, чем утверждение (6), поэтому из того, что истинно утверждение (6), не следует истинность утверждения (5).

150. НА РАСПУТЬЕ В ЧИСТОМ ПОЛЕ

[Прежде всего необходимо выяснить, какие утверждения истинны и какие ложны. Истинность утверждений тесно связана с тем, где живут A , B и C . Поэтому решение задачи разумно начать с сопоставления утверждений (7), (8) и (9).

Такой «дебют» тем более оправдан, что лишь эти утверждения «замкнуты», то есть их значения истинности не зависят от того, истинны или ложны другие утверждения. Что же касается утверждений (1) — (6), то определить их значения истинности не представляется возможным до тех пор, пока мы не выясним, куда ведет каждая дорога.

Итак, обратимся к утверждениям (7), (8) и (9). Утверждение (9) полностью не известно. Об истинности утверждения (7) сказать заранее ничего нельзя: его мог высказать и житель Правдычина, и житель Кривдина, и тот, кто живет в Середине-на-Половине. Остается утверждение (8).]

Из утверждения (8) следует, что *В* может быть только жителем Середины-на-Половине. Действительно, если бы *В* жил в Правдычине, то утверждение (8) было бы ложным (в то время как хорошо известно, что обитатели Правдычина никогда не лгут). Если бы *В* жил в Кривдине, то утверждение (8) было бы истинным (хотя всем известно, что кривдинцы никогда не говорят правды).

Поскольку *В* живет в Середине-на-Половине и утверждение (8) ложно, то утверждение (5) должно быть истинным:

дорога (с) ведет в селение, где живет А, (1)

а утверждение (2) — ложным:

дорога (b) не ведет в Середину-на-Половине, где живет В. (II)

Из (I) следует, что утверждение (4) ложно (из схемы дорсг, изображенной на рис. 44, видно, что *А*, миновав развилку, пойдет не по дороге (с). Но тогда ложно и утверждение (7): *А* не может быть жителем Правдычина, поскольку высказанное им утверждение (4) было бы ложным. Итак, два утверждения, высказанных *А* одно за другим, — (4) и (7) — ложны: *А* может быть только жителем Кривдина. Из (I) следует, что

дорога (с) ведет в Кривдино,

а из (II), поскольку другой вариант отпадает, что

дорога (b) ведет в Правдычино и

дорога (с) ведет в Середину-на-Половине.

Таким образом, ответ на основной вопрос задачи получен. Осталось еще выяснить, что сказал *С* в утверждениях (3) и (9).

Поскольку по условиям задачи *С* живет в том же селении, что и *А*, *С* может быть только обитателем Середины-на-Половине. Из схемы дорог видно, что утверждение (6) ложно, в силу чего утверждения (3) и (9) должны быть истинными. Поскольку по условиям задачи *С* назвал какое-то из трех селений, то, судя по схеме дорог, он мог высказать лишь следующие утверждения:

(3) *Из Кривдина.*

(9) *Я в Середине-на-Половине.*

151. НОВЫЙ ВАРИАНТ

[Так же как и в предыдущей задаче, «замкнутыми» утверждениями, значения истинности которых не зависят от того, истинны или ложны другие утверждения, являются лишь те, в которых кто-нибудь из островитян говорит о том, где он живет. Среди таких утверждений мы выделим утверждение (2).]

Утверждение (2) может быть либо истинным, либо ложным.

В первом случае *В* может быть жителем только Середины-на-Половине, во втором — только жителем Кривдина [жителем Правдычина он быть не может, поскольку тогда утверждение (2) должно было бы быть истинным].

Предположим, что верно первое: *В живет в Середине-на-Половине* и, таким образом, утверждение (2) истинно. Но тогда высказанное *В* следующее утверждение (6) ложно, а высказанное затем очередное утверждение (9) истинно. Поэтому *С* живет в Кривдине и все его утверждения ложны. Итак, утверждения (7) и (11) ложны:

и дорога (а), и дорога (с) должны вести в Кривдино.

Теперь мы уже можем установить значения истинности тех утверждений, которые высказал *А*.

Поскольку утверждение (9) истинно, то противоречащее ему утверждение (10) может быть только ложным. Следовательно, *А* не может быть жителем Правдычина и обитает либо в Кривдине, либо в Середине-на-Половине.

Но если *А* живет в Кривдине, то утверждение (8) истинно, поскольку, как мы убедились, дорога (а) ведет в Кривдино. Но это невозможно: жители Кривдина не высказывают истинных утверждений.

Если *А* живет в Середине-на-Половине, то утверждение (8) ложно. Но это также невозможно — ведь жители Середины-на-Половине не могут солгать два раза подряд — утверждения (8) и (9) ложны.

Итак, мы видим, что *А* в этом случае не может быть жителем ни одного из трех селений. Поскольку каждый островитянин может жить лишь в одном из трех селений, мы приходим к противоречию. Оно показывает, что исходное предположение было неверным: *В не может быть жителем Середины-на-Половине*. Следовательно, *В может жить только в Кривдине*.

Тогда утверждения (2), (6) и (9) ложны. *А* если утверждение (9) ложно, то *С* сказал правду и поэтому не может быть жителем Кривдина. Но тогда утверждение (4) ложно (из него следует, что *С* живет в Кривдине). Таким образом, *С может жить только в Середине-на-Половине*. Это означает [ведь утверждение (4) ложно], что утверждение (7) истинно, а утверждение (11) снова ложно: *дорога (с) ведет в Середину-на-Половине*.

Теперь настала пора обратиться к утверждениям, высказанным *А*. Сведения, которыми мы располагаем, позволяют определить значение истинности утверждения (10). С него мы и начнем.

Поскольку по доказанному утверждение (9) ложно, то утверждение (10) истинно. Это означает, что *А* не может быть жителем Кривдина. Следовательно, он поселился либо в Правдычине, либо в Середине-на-Половине. Последнее противоречит истинности утверждения (10), а утверждение (5) в обоих случаях истинно. Следовательно (раз Кривдино и Середине-на-Половине уже «заняты»), *А живет в Правдычине* и все его утверждения должны быть истинными.

Поскольку еще не известно, куда ведут дороги (а) и (b), то для того, чтобы это выяснить, можно воспользоваться высказанными *А* утверждениями (8), (1) и (3).

Из утверждения (8) ясно, что *дорога (а) ведет в Правдычино, а судя по утверждениям (1) и (3), дорога (b) может вести только в Кривдино*.

Итак, возможно лишь единственное решение задачи:

<i>А живет в Правдычине,</i>	<i>дорога (а) ведет в Правдычино,</i>
<i>В живет в Кривдине,</i>	<i>дорога (б) ведет в Кривдино,</i>
<i>С живет в Середине-на-Половине,</i>	<i>дорога (с) ведет в Середину-на-Половине.</i>

(Дорога, у которой стоит каждый островитянин, ведет в то селение, где он живет.)

Нетрудно проверить, что полученный нами ответ не противоречит ни одному из условий задачи. Следовательно, мы действительно нашли решение задачи.

152. ЛАКОМСТВО II

Поскольку пропало 5 шоколадок, то из семи утверждений 5 должны быть ложными (и 2 истинными).

Какие два утверждения могут быть истинными?

Утверждения (4) и (5), а также (6) и (7) противоречат друг другу: любое из утверждений в каждой паре служит отрицанием другого. Следовательно, *и в паре (4) и (5), и в паре (6) и (7) одно утверждение истинно, а другое ложно.* Таким образом, *два истинных утверждения надлежит искать среди утверждений (4), (5), (6), (7).* Все остальные утверждения (1), (2) и (3) *ложны*, из чего следует, что

каждый из детей должен был взять по крайней мере 1 шоколадку.

Это означает, что утверждение (6) ложно: Кати и Илонка не могли взять все шоколадки, поскольку из (*) известно, что кое-что досталось и Шани.

Поскольку оба утверждения Шани — (3) и (6) — ложны, то *Шани взял 2 шоколадки.*

Из ложности утверждения (6) следует, что утверждение (7) истинно. Но тогда утверждение (4) ложно (ведь Шани взял 2 шоколадки). Если бы утверждение (4) было истинным, то Илонка должна была бы взять по крайней мере 3 шоколадки. Но это означало бы, что Кати вопреки утверждению (*) не взяла ни одной шоколадки.

Теперь мы уже располагаем всеми необходимыми сведениями для того, чтобы определить значения истинности всех высказанных Кати утверждений: утверждения (1) и (4) ложны, утверждение (7) истинно. Таким образом, *Кати солгала дважды и, следовательно, взяла 2 шоколадки.*

Последнюю оставшуюся шоколадку взяла Илонка.

Итак, если решение задачи существует, то оно единственно. Нам остается проверить, не возникает ли каких-нибудь противоречий, согласуется ли полученный нами ответ со всеми условиями задачи.

Если Кати взяла 2, Илонка — 1 и Шани — 2 шоколадки, то утверждение (1) Кати ложно, утверждение (2) Илонки ложно,

утверждение (3) Шани ложно,
утверждение (4) Кати ложно,
утверждение (5) Илонки истинно,
утверждение (6) Шани ложно,
утверждение (7) Кати истинно.

Таким образом, Кати действительно высказала 2, Илонка 1 и Шани 2 ложных утверждения. Эти числа в точности согласуются с числом шоколадок, взятых каждым из ребят. Никаких противоречий не возникает. Мы действительно получили решение задачи.

Примечание. В процессе решения задачи значение истинности каждого утверждения, за исключением утверждения (5), один раз уже было установлено, то есть мы выяснили, истинно данное утверждение или ложно. Теперь же, зная, по сколько шоколадок взяли Кати, Илонка и Шани, мы еще раз проверили значение истинности каждого утверждения. Такая проверка отнюдь не была лишней! Действительно, каждое утверждение вносило свой «вклад» в решение задачи двумя различными способами: во-первых, своим содержанием (тем, что в нем говорится), во-вторых, каждое ложное утверждение «позволяло» тому, кто его высказал, стянуть 1 шоколадку. Заранее не ясно, согласуются ли оба способа «участия» в решении между собой. Вполне может случиться, что утверждение, ложность которого была доказана в процессе решения, в свете полученных результатов окажется истинным (или, наоборот, утверждение, бывшее истинным, станет ложным). Разумеется, такой поворот событий означал бы, что условия задачи противоречивы и она неразрешима.

153. ВАРИАНТЫ

Поскольку оба варианта отличаются от задачи 152 только утверждением (6), то та часть ее решения, в которой не используется утверждение, остается в силе и для вариантов А и Б.

При выводе утверждения (*) условие (6) использовано не было. Следовательно, утверждение (*) без каких-либо изменений переносится в решения обоих вариантов задачи:

каждый из детей взял по крайней мере одну шоколадку.

Если мы теперь поинтересуемся тем, сколько шоколадок взял каждый из детей, то выясним, что Кати могла взять 1, 2 или 3, Илонка — 1 или 2 и Шани — 1 или 2 шоколадки.

[Теперь (в отличие от решения задачи 152) попытаемся вывести какие-нибудь заключения из утверждений (4) и (5). Оба эти утверждения совпадают в обоих вариантах, поэтому следствия, которые нам удастся извлечь из них, будут справедливы и для варианта А, и для варианта Б и избавят нас от необходимости рассматривать каждый из них в отдельности, то есть позволят получить более «экономное» решение.]

Если утверждение (4) истинно, то утверждение (5) должно быть ложным. Следовательно, Илонка должна взять 2 шоколадки (2 высказанных ею утверждения ложны), Шани — 1 шоколадку [поскольку утверждение (4) может быть только истинным], а Кати — 2 оставшиеся шоколадки из 5.

Но в одном из вариантов такой раздел «похищенных» шоколадок оказывается невозможным. Действительно, если Шани взял 1 шоколадку, то его утверждение (6) должно быть истинным [поскольку, взяв 1 шоколадку, он мог солгать только 1 раз, а одно ложное утверждение среди данных им «показаний» уже имеется — утверждение (3)], но утверждение (6) в одном из вариантов ложно: либо Кати не взяла 3 шоколадки (вариант А), либо Кати не взяла на 1 шоколадку больше, чем Илонка (вариант Б).

Таким образом, в обоих вариантах утверждение (4) должно быть ложным, а утверждение (5) — истинным. Это означает, что Илонка взяла 1 шоколадку [поскольку утверждение (2) ложно, а утверждение (5) истинно], Кати — 2 или 3 шоколадки в зависимости от того, истинно или ложно утверждение (7) [поскольку утверждения (1) и (4) должны быть ложными], а Шани соответственно 2 или 1 шоколадку [поскольку если утверждение (7) истинно, то утверждение (6) ложно, и наоборот]. Все это справедливо, какой бы из двух вариантов — А или Б — мы ни рассматривали.

В варианте А возможны оба случая. Действительно, если утверждение (7) ложно (Кати взяла 3 шоколадки), то утверждение (6) должно быть и действительно оказывается истинным, поскольку именно оно и сообщает нам, что Кати взяла 3 шоколадки. Но может представиться и второй случай: утверждение (7) истинно. Тогда Кати взяла лишь 2 шоколадки, и утверждение (6) ложно (ведь Кати не взяла 3 шоколадки).

Итак, в варианте А задача имеет 2 решения. В этом нетрудно убедиться.

1 решение.

Илонка взяла 1 шоколадку [солгала 1 раз: в утверждении (2)], Шани взял 1 шоколадку [солгал 1 раз: в утверждении (3)], Кати взяла 3 шоколадки [солгала 3 раза: в утверждениях (1), (4) и (7)].

Истинны утверждения (5) и (6).

II решение.

Илонка взяла 1 шоколадку [солгала 1 раз: в утверждении (2)], Шани взял 2 шоколадки [солгал 2 раза: в утверждениях (3), (6)], Кати взяла 2 шоколадки [солгала 2 раза: в утверждениях (1), (4)].

Истинны утверждения (5) и (7).

В варианте Б одно из этих решений непригодно: утверждение (6) не может быть ни истинным, ни ложным.

Действительно, если бы утверждение (6) было истинным, то утверждение (7) должно было бы быть ложным. Это означало бы, что Кати солгала 3 раза и, следовательно, взяла 3 шоколадки. Но тогда утверждение (6) отнюдь не было бы истинным, поскольку Илонка взяла лишь 1 шоколадку, а 3 на 2 больше 1.

Если бы утверждение (6) было ложным, то его отрицание — утверждение (7) — должно было бы быть истинным. Это означало бы, что Кати солгала 2 раза — в утверждениях (1) и (4) — и, следовательно, взяла 2 шоколадки. Но тогда утверждение (6) было бы истинным, поскольку Илонка взяла 1 шоколадку, а 2 на 1 больше 1.

Таким образом, в варианте Б решения не существует: условия задачи противоречивы.

Наиболее обнадеживающим (для решения задачи) следует считать мамин I вывод. Если учесть II вывод, то он позволяет прийти к заключению: тот, кто не польстился на яблоки и бананы, все время говорил только правду. Если бы удалось выяснить, кто из детей не взял ни одного яблока и ни одного банана, то разобраться в остальном было бы гораздо легче.

Итак, «обследуем» одного за другим всех детей и попытаемся установить, кто из них говорил только правду!

Мог ли Пишта от начала и до конца говорить только правду?

Нет, поскольку из маминого вывода II следует, что тогда он не мог бы взять ни одного фрукта и утверждение (2) было бы ложно. Таким образом, предположение о том, что Пишта высказывал только истинные утверждения, приводит к противоречию: одно из его утверждений, утверждение (2), оказывается ложным.

В то же время нетрудно доказать, что утверждение (2) *независимо от принятых предположений может быть только истинным*. Действительно, если бы оно было ложным, то это означало бы, что Пишта не брал ни яблок, ни бананов. Но тогда из маминого II вывода следовало бы, что Пишта не мог ни разу солгать (не нарушив правильность маминого II вывода).

Могла ли Юльчи оказаться правдолюбивой?

Нет, поскольку тогда было бы истинно утверждение (13) и мальчишки не могли бы высказать ни одного истинного утверждения, в то время как мы доказали, что утверждение (2) Пишты всегда истинно.

Мог ли Йошка говорить только правду?

Если бы это было так, то утверждения (3), (6), (10), (12) были бы истинными. Вместе с ними должно было бы быть истинным и утверждение (14), поскольку в силу маминого II вывода оно по содержанию совпадает с утверждением (6). Действительно, если [коль скоро утверждение (6) истинно] виноваты, то есть взяли фрукты, обе девочки, то в силу маминого II вывода обе должны были солгать. Именно об этом и говорит утверждение (14).

Кроме того, по-прежнему оставалось бы истинным утверждение (2), поскольку, как мы убедились, оно всегда истинно. Итак, в рассматриваемом случае истинными были бы 6 утверждений: (2), (3), (6), (10), (12) и (14). Следовательно, ложными могли бы быть лишь остальные 8 утверждений: (1), (4), (5), (7), (8), (9), (11) и (13). Но эти 8 утверждений непременно должны были быть ложными, поскольку дети взяли всего 8 фруктов (яблок и бананов), а в силу маминого II вывода это означает, что и солгать они должны были бы в общей сложности 8 раз.

Все это так, но утверждения (1) и (8) не могут одновременно быть ложными: Юльчи либо взяла какие-то фрукты, либо не прилагивалась к ним. Если она взяла фрукты, то истинно утверждение (8). Если она не взяла ни одного яблока и ни одного банана, то истинно утверждение (1).

Итак, предположение о том, что Йошка говорил только правду, также приводит к противоречию. Следовательно, *говорить только правду могла лишь Эржи*.

Дальнейшие рассуждения проведем в двух вариантах.

I вариант. Если Эржи говорила только правду, то утверждения (5), (9) и (11) истинны. Утверждение (2) истинно во всех случаях,

поэтому противоположное утверждение (13) ложно, а вместе с ним ложно и утверждение (6). Утверждение (14) также ложно, поскольку одна из девочек (Эржи) не солгала ни разу. А если утверждение (5) истинно, то из истинности утверждения (2) следует, что утверждения (4) и (8) ложны. Но если утверждение (8) ложно, то противоположное утверждение (1) истинно, а опровергающее его утверждение (3) ложно. Ложно также и утверждение (10), опровергающее истинное утверждение (9).

Итак, остались невыясненными значения истинности двух утверждений: (7) и (12). «Справиться» с утверждением (12) достаточно просто.]

Утверждение (12) может быть только истинным. Действительно, поскольку Юльчи по крайней мере один раз солгала, например в утверждении (13), то она взяла какие-то фрукты. Но относительно утверждения (1) мы установили, что оно истинно. Следовательно, Юльчи не взяла ни одного яблока. Но тогда она должна была взять бананы.

Для дальнейшего нам понадобится перечень истинных и ложных утверждений.

Итак, мы успели установить, что

истинны утверждения (1), (2), (5), (9), (11), (12),

ложны утверждения (3), (4), (6), (8), (10), (13), (14).

Из маминого II вывода нам известно, что всего должно быть 8 ложных утверждений. Следовательно, не обследованное нами утверждение (7) может быть только ложным. Таким образом, теперь нам известно, когда каждый из ребят говорил правду и когда лгал.

Эржи: утверждения (5), (9), (11) истинны,

Юльчи: утверждение (1) истинно, утверждения (7) и (13) ложны.

Йошка: утверждение (12) истинно, утверждения (3), (6) и (10) ложны,

Пишта: утверждение (2) истинно, утверждения (4), (8) и (14) ложны.

По числу ложных утверждений нетрудно установить, сколько фруктов взял каждый из детей. Задача сводится лишь к тому, чтобы определить, о каких фруктах идет речь: о яблоках или бананах. Для этого нам придется обратиться к тем утверждениям, которые могут «пролить свет» на интересующий нас вопрос: (1) и (12), (9) и (11).

По утверждению (9), которое истинно, *Йошка взял не меньше трех яблок*. Поскольку Йошка солгал в общей сложности 3 раза, то он не мог взять больше трех фруктов (яблок или бананов). Следовательно, *всего Йошка взял 3 яблока*.

По утверждению (1), которое также истинно, Юльчи не взяла ни одного яблока. Поскольку она солгала дважды, то *Юльчи могла взять только 2 банана*.

На долю *Пишты* остались *1 яблоко и 2 банана*. Их он и взял.

Итак, решение задачи, если оно существует, единственно и имеет следующий вид:

Эржи не брала фруктов,

Юльчи взяла 2 банана,

Пишта взял 2 банана и 1 яблоко,

Йошка взял 3 яблока.

Нетрудно проверить, что среди 14 утверждений при таком ответе оказывается ровно столько истинных и ложных, сколько мы

обнаружили в процессе решения, и у каждого из четырех детей число ложных утверждений совпадает с числом взятых фруктов (бананов и яблок вместе). Следовательно, нам действительно удалось пайти решение задачи.

II вариант. Посмотрим, какие следствия можно извлечь из того, что Эржи всегда говорит только правду.

Из утверждения (9) следует, что *Йошка* взял по крайней мере 3 яблока. Из утверждения (11) мы узнаем, что *Пишта* взял по крайней мере 1 яблоко и по крайней мере 1 банан. Таким образом, выяснилось, кто взял яблоки: *Йошке* досталось 3 яблока, *Пиште* — 1 яблоко.

Полученные сведения удобно свести в таблицу:

	Взятые яблоки	Взятые бананы	Ложные утверждения	Высказанные утверждения
Юльчи	0	Не меньше 1	Не меньше 1	3
Пишта	1		Не меньше 2	4
Йошка	3		Не меньше 3	4

Нам осталось выяснить, кто из ребят взял бананы и сколько.

Утверждение (12) *Йошки* истинно, поскольку *Юльчи* взяла только бананы. Следовательно, *Йошка* высказал ровно 3 ложных утверждения и не взял ни одного банана.

Среди утверждений, высказанных *Пиштой*, утверждение (2) (как мы выяснили) заведомо истинно, утверждения (4), (8) ложны [это следует из утверждения (5) и полученных результатов], утверждение (14) ложно (*Эржи* говорит только правду). Следовательно, *Пишта* солгал 3 раза и соответственно взял 2 банана.

	Взятые яблоки	Взятые бананы	Ложные высказывания
Юльчи	0	2	3
Пишта	1		
Йошка	3		

Но тогда *Юльчи* должна была взять 2 банана.

Полученные результаты позволяют установить, какие из 14 высказанных детьми утверждений истинны и какие ложны. Поскольку число ложных высказываний у каждого из четырех детей совпадает с числом взятых им фруктов, то мы действительно получили решение задачи.

Примечание 1. В реальной жизни из формулировки утверждения (1) *Юльчи* следовало бы, что она взяла бананы. Однако подробное заключение имеет силу лишь в юридических, но отнюдь не в логических (математических) доказательствах, поэтому мы им не воспользовались.

Примечание 2. По существу в каждом из утверждений (5) и (6) содержатся по 2 утверждения. Но первое из них («По-

малкивал бы уж лучше!», «Ты еще споришь?») не является высказыванием и не может быть истинным или ложным. Именно поэтому мы не считали первые части утверждений (5) и (6) отдельными утверждениями.

Примечание 3. В последних трех задачах каждое утверждение имело *два значения*: во-первых, в доказательстве использовалось фактическое содержание утверждения, во-вторых, его значение истинности — истинно или ложно то, что одно из действующих лиц сказала по поводу действий другого (или самого себя). Оба толкования утверждений, которым мы придали шутиливую форму, играют важную роль в математической логике. На них основана одна из наиболее глубоких теорем в теории доказательства — так называемая теорема Гёделя о полноте.

155. В СПОРТИВНОМ ЛАГЕРЕ

И решение. Прежде чем приступать к решению задачи, запишем в кратком, «удобообозримом» виде все 9 утверждений:

(1) $A: B \notin \text{«Гонвед»}$.

(2) $B: C \notin \text{«Вашаш»}$.

(3) $C: A \notin \text{«Гонвед»}$.

(4) $A: C \notin \text{«Гонвед»}$.

(5) $B: A \in \text{МТК}$.

(6) $C: B \notin \text{«Вашаш»}$.

(7) $A: l(C) > l(B)$ [относится к утверждениям (1)–(6)].

(8) B : среди утверждений (1)–(7) не меньше 4 истинных.

(9) C : среди утверждений (1)–(8) не меньше 5 ложных, не больше 3 истинных.

Теперь уже нетрудно заметить, за что можно «зацепиться» в условиях задачи.

Разумеется, неплохо было бы знать, кто из девушек «родом» из Правдычина, кто — из Кривдина и кто — из Середины-на-Половине. Выяснить это совсем несложно.

Действительно, первые два утверждения, высказанные A , — утверждения (1) и (4) — не могут быть одновременно ложными, поскольку это означало бы, что B и C выступают за «Гонвед». Следовательно, A «родом» из Середины-на-Половине. (*)

Из первых шести утверждений (1)–(6) больше извлечь ничего не удастся. Но если учесть утверждения (8) и (9), то довольно быстро выяснится, что

*среди первых шести утверждений (1)–(6) содержатся 3 истинных и 3 ложных. (**)*

Действительно, из первых шести утверждений каждой из девушек A , B и C принадлежат по 2 утверждения. Поскольку нам заранее известно, что

одна из девушек «родом» из Правдычина (оба ее утверждения истинны), другая — из Кривдина (оба ее утверждения ложны) и третья — из Середины-на-Половине (одно ее утверждение истинно, а другое ложно),

то всего получается 3 истинных и 3 ложных утверждения.

Теперь уже достаточно ясно, что утверждения (7), (8) и (9) необходимо рассмотреть подробнее.

Определить «на глаз», истинно или ложно каждое из них в отдельности, невозможно. Необходимо рассмотреть оба случая. Начать

удобно (хотя это может показаться довольно неожиданным) с утверждения (7).

I. *Предположим, что утверждение (7) ложно.* Тогда среди первых семи утверждений — от (1) до (7) — содержатся лишь 3 истинных утверждения. Следовательно, утверждение (8) ложно, а утверждение (9) истинно.

Поскольку утверждения (7) и (8) ложны, то ни *A*, ни *B* не могут быть «родом» из Правдычина. Оттуда «родом» может быть только *C*. Но тогда в силу утверждения (*) *A* «родом» из Середины-на-Половине, а *B* — из Кривдина.

Коль скоро все утверждения, высказанные *B*, должны быть ложными, то отрицания утверждений (2) и (5) истинны: *C* выступает за «Вашаш», а *A* — не за МТК. Следовательно, *A* должна выступать за «Гонвед». Но по утверждению (3), высказанному говорящей только правду спортсменкой *C*, *A* не может выступать за «Гонвед». Итак, мы пришли к противоречию. Оно означает, что исходное *предположение I неверно* и его необходимо отбросить.

II. Таким образом, утверждение (7) может быть только *истинным*. Тогда среди утверждений (1)–(7) 4 утверждения будут истинными, в силу чего утверждение (8) истинно, а утверждение (9) ложно.

Поскольку утверждения (7) и (8) истинны, то ни *A*, ни *B* не могут быть «родом» из Кривдина. Следовательно, «родом» из Кривдина должна быть спортсменка *C*, в силу чего утверждения (3) и (6) ложны. Отрицанием утверждения (3) служит утверждение «*A* выступает за «Гонвед», отрицанием утверждения (6) — утверждение «*B* выступает за «Вашаш». Оба отрицания истинны. Следовательно, *C* выступает за МТК, и утверждение (5) истинно. Значит, *B* «родом» из Середины-на-Половине, а *A* — из Правдычина.

Осторожно! Еще не все готово! Хотя нам и удалось определить, за какой спортивный клуб выступает каждая девушка, все же может случиться, что при проверке мы натолкнемся на какое-нибудь противоречие. Если бы это произошло, то задача была бы неразрешимой.

Итак, нам осталось проверить, все ли условия соблюдены, то есть ведет ли себя *A* как уроженка Правдычина, *B* — как обитательница Кривдина и *C* — как человек родом из Середины-на-Половине.

Никаких противоречий при проверке не возникает. Выше мы установили, что утверждения (7) и (8) истинны, а утверждение (9) ложно. Зная, за какой спортивный клуб выступает каждая девушка, мы без труда определим значения истинности всех остальных утверждений. Окончательный результат будет выглядеть следующим образом:

утверждения (1), (4) и (7) истинны — *A* ведет себя как подлинная обитательница Правдычина;

утверждения (3), (6) и (9) ложны — *C* ведет себя, как и подobaет жительнице Кривдина,

утверждение (2) истинно, (5) ложно, (8) снова истинно — *B* «родом» из Середины-на-Половине.

II *решение.* Все условия задачи будут выполнены, если нам удастся «зачислить» каждую из девушек в один из спортивных клубов так, чтобы утверждения девушек обрели значения истинности, из которых бы следовало, что одна из них всегда говорила только правду, другая лгала, а третья попеременно говорила правду и ложь.

Итак, рассмотрим все возможные способы, которыми трех спортсменов можно «записать» в 3 спортивных клуба, и выясним, будут ли при каком-нибудь из них спортсменки отвечать так, как подобает жительницам Правдычина, Кривдина и Середины-на-Половине.

Такой подход к решению задачи тем более разумен, что число возможных случаев не очень велико. Мы переберем их все, если выпишем все наборы из названий трех спортивных клубов (один набор отличается от другого порядком, в котором идут названия клубов) и «зачислим» спортсменку *A* в первый, спортсменку *B* во второй и спортсменку *C* в третий клуб каждого набора.

(Те, кто немного знаком с комбинаторикой, сразу увидят, что речь идет о перечислении всех *перестановок* трех спортивных клубов, а число таких перестановок равно $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Те, кто не знаком с комбинаторикой, без труда выпишут все возможные перестановки из названий трех спортивных клубов.)

Вот что у нас получится.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
				(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(I)	«Гонвед»	МТК	«Вашаш»	и	л	л	и	л	и	л	л	и
(II)	«Гонвед»	«Вашаш»	МТК	и	и	л	и	л	л	и	и	л
(III)	МТК	«Гонвед»	«Вашаш»	л	л	и	и	и	и	л	и	л
(IV)	МТК	«Вашаш»	«Гонвед»	и	и	и	л	и	л	и	и	л
(V)	«Вашаш»	«Гонвед»	МТК	л	и	и	и	л	и	л	и	л
(VI)	«Вашаш»	МТК	«Гонвед»	и	и	и	л	л	и	л	и	л

Нетрудно видеть, что во второй строке (II) *A* отвечает как жительница Правдычина, *C* — как жительница Кривдина и *B* — как жительница Середины-на-Половине. Во всех остальных случаях характер ответа иной: например, ни в одном из них спортсменка *C* не может быть жительницей ни одного из трех селений на острове Буяне.

156. «УСЕЧЕННЫЙ» ВАРИАНТ

Рассмотрим следующую часть таблицы, приведенной во II решении предыдущей задачи:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
				(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(I)	«Гонвед»	МТК	«Вашаш»	и	л	л	и	л	и
(II)	«Гонвед»	«Вашаш»	МТК	и	и	л	и	л	л
(III)	МТК	«Гонвед»	«Вашаш»	л	л	и	и	и	и
(IV)	МТК	«Вашаш»	«Гонвед»	и	и	и	л	и	л
(V)	«Вашаш»	«Гонвед»	МТК	л	и	и	и	л	и
(VI)	«Вашаш»	МТК	«Гонвед»	и	и	и	л	л	и

Нетрудно видеть, что в первой строке (I) *А*, *В* и *С* отвечают соответственно как жительницы Правдычина, Кривдина и Середины-на-Половине. Во второй строке (II) *А* отвечает как жительница Правдычина, *В* — как жительница Середины-на-Половине и *С* — как жительница Кривдина. Все остальные строки не удовлетворяют условиям задачи, поскольку в каждой строке две девушки отвечают так, будто они «родом» из Середины-на-Половине: в IV строке это *А* и *С*, а в III, V и VI строках *А* и *В*.

Таким образом, решение предыдущей задачи (II строка) сохраняется, но появляется новое решение (I строка). Следовательно, при отбрасывании части условий в решении задачи кое-что изменится: число решений возрастет с 1 до 2. Значит, мнение тех, кто утверждает, будто при вычеркивании части условий ничего не изменится, неверно.

157. НЕБОЛЬШОЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

а. Можно. Если девушки выступают за такие спортивные клубы (*А* за «Гонвед», *В* за МТК и *С* за «Вашаш»), что утверждения (1)–(9) приобретают значения истинности, при которых *А* отвечает, как жительница Правдычина, *В* — как жительница Кривдина и *С* — как жительница Середины-на-Половине, то (1)–(6) ответы девушек, содержащиеся среди утверждений (1)–(6), носят такой же характер.

(Действительно, вычеркивание утверждений (7), (8), (9) не изменяет ни значений истинности утверждений (1)–(6), ни чередования истины и лжи в ответах «жительницы» Середины-на-Половине спортсменки *В*.)

б. Может. Например, если вычеркнуть утверждение (6), а все остальные утверждения (1)–(5), (7)–(9) оставить, то получится следующая таблица:

<i>А</i>	<i>В</i>	<i>С</i>	<i>А</i>	<i>В</i>	<i>А</i>	<i>В</i>	<i>С</i>
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(7)	(8)	(9)
и	и	л	и	л			

Последние 3 столбца мы не заполнили потому, что значения истинности утверждений (7), (8) и (9) необходимо изменить. Действительно, поскольку до того, как высказано утверждение (7), спортсменки *В* и *С* успевают солгать по 1 разу, то утверждение (7) должно быть ложным:

<i>А</i>	<i>В</i>	<i>С</i>	<i>А</i>	<i>В</i>	<i>А</i>	<i>В</i>	<i>С</i>
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(7)	(8)	(9)
и	и	л	и	л	л		

Среди утверждений (1)—(5), (7) половина (но не более) истинных, поэтому утверждение (8) ложно:

A	B	C	A	B	A	B	C
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(7)	(8)	(9)
и	и	л	и	л	л	л	

Что же касается утверждения (9), то оно (в этом можно убедиться, взглянув на таблицу) истинно.

(Осторожно! Утверждение (9) обязательно должно быть в первоначальном виде — в том, в каком оно приведено *в условиях* задачи 155. Пользоваться его кратким изложением, данным в начале решения задачи 155, нельзя, поскольку число утверждений изменилось.)

Итак, после вычеркивания утверждения (6) остальные утверждения принимают следующие значения истинности:

A	B	C	A	B	A	B	C
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(7)	(8)	(9)
и	и	л	и	л	л	л	и

Поскольку ни A , ни B не могут теперь быть «родом» ни из одного селения на острове Буяне, то старое решение становится непригодным.

[Мы рассмотрели далеко не единственный пример того, как решение полной задачи не удовлетворяет условиям «усеченной» задачи. Нетрудно убедиться в том, что если вычеркнуть условие (7), а остальные условия оставить прежними, то значения истинности утверждений (8) и (9) изменятся на обратные. Тогда о девушках B и C можно будет сказать то же, что было сказано о девушках A и B : они не могут быть «родом» ни из одного селения на острове Буяне. Можно было бы привести и другие примеры того же рода. Число их довольно велико. (Вычеркивать можно не только по одному, но и по нескольку условий сразу.) Весьма интересно было бы выяснить, при вычеркивании каких утверждений (или, точнее, каких комбинаций утверждений) решение исходной задачи служит решением новой задачи и при каких утрачивает силу. Ответить на этот вопрос нелегко: необходимо перебрать огромное число различных вариантов, да и сам ответ сводится к обширному перечню комбинаций тех или иных утверждений.]

Все это так, но новое утверждение (7) гласит: « B солгала вам большее число раз, чем C ». Подсчет ложных и истинных утверждений произведен в приведенной выше (заключительной) цитате из решения задачи 155. Из него следует, что утверждение (7) в новом варианте истинно. Но тогда C не может быть «родом» из Кривдина, поскольку в первых шести утверждениях B солгала большее число раз (хотя обе высказали по 2 утверждения).

Итак, мы пришли к противоречию («Только спортсменка C может быть «родом» из Кривдина», « C не может быть «родом» из

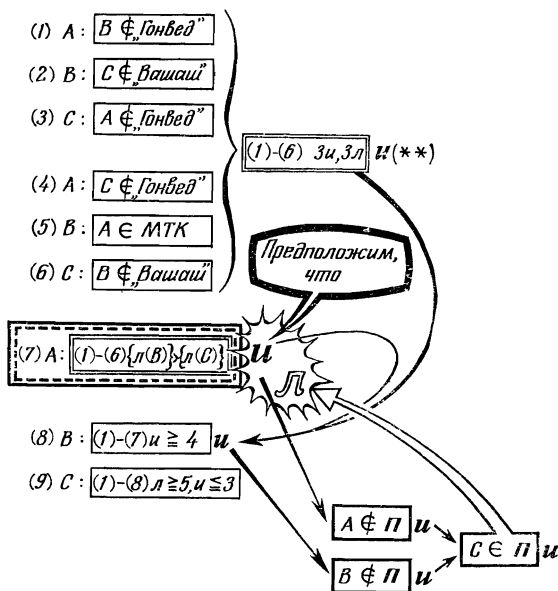


Рис. 237.

Кривдина»). Оно означает, что условия задачи противоречивы. Следовательно, задача 156 неразрешима.

[Обратите внимание на рис. 236 и 237. На них изображены схемы полного доказательства неразрешимости задачи 156. Выбрав одно из утверждений — утверждение (7), — мы сначала предполагаем, что оно ложно (рис. 236), затем — что оно истинно (рис. 237), и в обоих случаях приходим к противоречию.

Схема на рис. 236 воспроизводит ту часть доказательства, которую мы позаимствовали из I решения задачи 155 и не стали объяснять повторно.

Примечание. Весьма важно, что фрагмент доказательства, изображенный на рис. 236, использует только значение истинности утверждения (7), но не затрагивает содержания.

Именно поэтому все рассуждения остаются в силе и после того, как содержание утверждения (7) изменится.

II доказательство.

[При сравнении схем, изображенных на рис. 236 и 237, бросается в глаза, что вторая часть доказательства гораздо проще первой. Немного поразмыслив, можно понять причину столь сильного различия между схемами. Она заключается в том, что во второй части доказательства используется *содержание* утверждения (7). Попробуем видоизменить первую часть доказательства, изображенную на рис. 236, так, чтобы и оно использовало

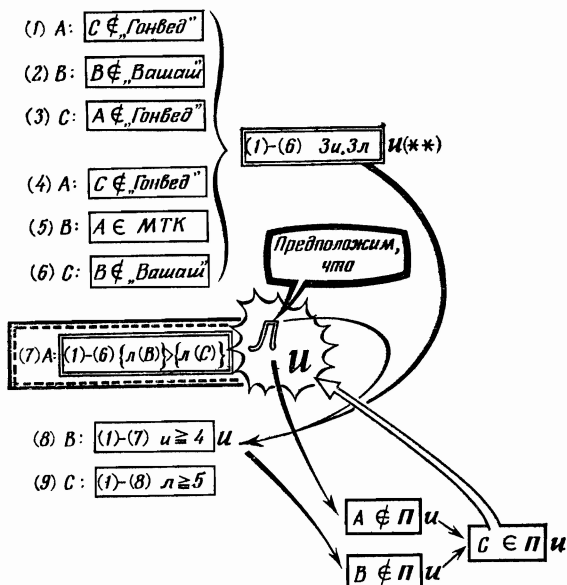


Рис. 238.

не только значение истинности утверждения (7), но и его содержание. Какую информацию несет утверждение (7)? Поскольку мы предполагаем, что оно ложно, то в первых шести утверждениях спортсменке С принадлежит больше ложных высказываний, чем спортсменке В. Но именно в этой части доказательства С говорит только правду. Следовательно, мы приходим ко второму противоречию. Оно возникает гораздо быстрее, чем прежнее противоречие, обнаруженное при сравнении одного из полученных выводов с утверждением (3): после того как правдивость С установлена, мы получаем возможность сравнивать выводы с утверждением (7), а не с утверждением (3), и последнее становится лишним. На рис. 236 хорошо видно, сколь длинна цепочка рассуждений, позволяющая утверждать, что С «родом» из Правдычина.]

Предположим, что утверждение (7) истинно. Тогда, рассуждая так, как показано на рис. 237 (часть доказательства, заимствованная из I решения задачи 155), мы приходим к противоречию: утверждение (7) окажется ложным.

Предположим, что утверждение (7) ложно. Тогда, рассуждая так, как показано на рис. 238, мы также приходим к противоречию: утверждение (7) окажется истинным.

Следовательно, независимо от того, выберем ли мы утверждение (7) истинным или ложным, задача 158 неразрешима.

Примечание 1. *Интересно отметить, что во II доказательстве в обоих случаях противоречие проявляется в исходной точке всех рассуждений — в утверждении (7).*

Примечание 2. Если со схемы доказательства, изображенной на рис. 236, убрать все лишнее, то исчезнут те утверждения, из которых следовала истинность утверждения (9). От них действительно можно отказаться, поскольку в цепочке рассуждений, позволившей нам прийти к выводу о неразрешимости задачи, утверждение (9) не использовалось. Следовательно, утверждение (9) в рассмотренном нами варианте задачи совершенно лишнее. Не используется оно и при проверке: поскольку задача неразрешима, то установить, за какой спортивный клуб выступают девушки, невозможно и «проверять нечего».

159. МИМОЛЕТНАЯ ВСТРЕЧА

Нет. Приведенные в условиях задачи утверждения противоречивы.

[Доказать это довольно просто. Рассмотрим рис. 237 и 238 из решения предыдущей задачи. На них наглядно показано, каким образом условия задачи приводят к противоречию. Хорошо видно, что утверждение (9) никак не используется в цепочке рассуждений, а утверждения (1)—(6) можно заменить одним утверждением (**). Если выяснится, что утверждение (**) зависит не от содержания утверждений (1)—(6), а только от того, что входящие в их число 2 утверждения жителя Кривдина и одно из утверждений жителя Середины-на-Половине заведомо ложны, а остальные утверждения (другое утверждение жителя Середины-на-Половине и два утверждения жителя Правдычина), заведомо истинны. О чем идет речь в каждом из утверждений, не важно. Утверждения, охваченные фигурной скобкой, при доказательстве неразрешимости задачи никак не используются, и их можно вычеркнуть. То же самое можно сказать и об утверждении (9).]

Перенумеруем утверждения, о которых упоминается в (а), натуральными числами от (1) до (6), утверждению из (б) присвоим номер (7), а утверждению из (в) — номер (8). Поскольку из (а) и (в) следует утверждение, отмеченное на рис. 237 и 238 знаком (**), то в совокупности утверждений задачи 159 содержатся все те утверждения, которые были использованы во II доказательстве неразрешимости предыдущей задачи.

Таким образом, окончательный вывод II доказательства остается в силе и для задачи 159.

Иначе говоря, задача 159 представляет собой все ту же задачу 158, из условий которой изъяты все элементы, не использованные во II доказательстве.

Примечание 1. В задаче ничего не говорится о том, в каком порядке были перенумерованы утверждения (1) — (6). Следовательно, на рис. 239 их можно располагать в каком угодно порядке: «номера» утверждений не имеют никакого значения, по-

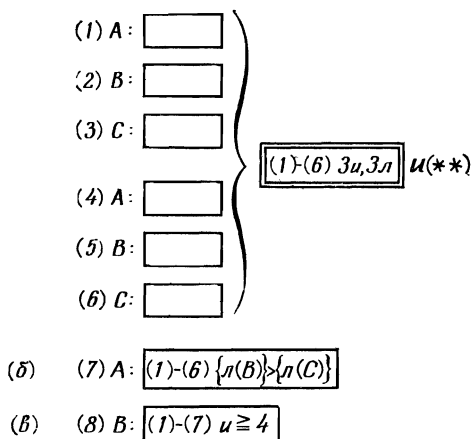


Рис. 239.

скольку не используются в доказательстве.

Примечание 2. Пункт (в) в условиях задачи относится к утверждениям, высказанным островитянами, а не к тому, о чем мы сообщили читателю в пункте (а), поскольку В не мог нас слышать.

Примечание 3. Задача 159 представляет особый интерес именно тем, что неразрешимость ее удается доказать, не выходя за пределы чистой логики. Все доказательство строится лишь на истинности и ложности, то есть на логических значениях отдельных утверждений. Конкретное содержание каждого утверждения никак не используется и может быть любым.

160. СНОВА СОРЕВНОВАНИЯ ПО БЕГУ

[Для того чтобы сделать условия задачи более обозримыми, запишем их в сокращенном виде, например так:

(1) A: $\bar{A} \neq 1$ и $\bar{A} < \bar{C}$. (2) B: $\bar{B} < \bar{C}$. (3) C: $\bar{D} < \bar{B}$. (4) D: $\bar{D} \neq 4$. (5) N: 1-е — л; 2-е, 3-е, 4-е — и	}	Не более 2 из этих утверждений ложны (*)

($\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ означают номера мест, занятых бегунами A , B , C D .)]

а. Если бы C занял 1-е или 2-е место, то

утверждение (1) не было бы истинным (поскольку в нем говорится, что A пришел к финишу раньше, чем C , но так как кто-то из бегунов преодолел дистанцию быстрее A , то это означало бы, что впереди спортсмена C оказалось 2 бегуна);

по крайней мере одно из утверждений (2) и (3) было бы ложным [ведь если бы оба утверждения (2) и (3) были истинными, то выполнялось бы неравенство $\bar{D} < \bar{B} < \bar{C}$ и бегуна C на дистанции обошли бы лишь 2 спортсмена: D и B];

утверждение (5) не могло бы быть истинным (поскольку из приведенных выше рассуждений следует, что по крайней мере 2 участника забега высказали ложные утверждения).

Это означает, что среди утверждений (1)—(5) содержится не менее трех ложных утверждений. Но это противоречит нашим подсчетам (*). Следовательно, исходное предположение неверно: *спортсмен C не занял ни первого, ни второго места.*

б. Нетрудно видеть, что произведенные нами подсчеты (*) не противоречат истинности утверждения, высказанного зрителем N . Следовательно, если существует такое распределение мест между четырьмя участниками забега, при котором утверждение зрителя N истинно, то N мог сказать правду.

Выясним, каким должно быть распределение мест для того, чтобы утверждение N было истинным. Для этого прежде всего необходимо ответить на вопрос, какое из утверждений (1)—(4) может быть ложным (известно, что существует 1 такое утверждение), если высказанное зрителем N утверждение (5) истинно.

Утверждение (2) не может быть ложным, поскольку если забег выиграл B , то утверждение о том, что он обошел спортсмена C , должно быть истинным, а не ложным.

Утверждение (3) не может быть ложным, поскольку в противном случае C первым пересек бы линию финиша, а это означало бы, что утверждение (2) ложно.

Утверждение (4) также не может быть ложным, поскольку в противном случае спортсмену D пришлось бы занять одновременно и первое, и последнее место.

Итак, *утверждение (5) может быть истинным лишь в том случае, если упоминаемым в нем ложным утверждением является утверждение (1), то есть если первое место занял спортсмен A .*

Возможно ли это?

Да, возможно. Действительно, если A занял первое место, то ложна первая часть, а значит, и все утверждение (1),

а утверждения (2) и (3) истинны в том и только в том случае, если места между остальными спортсменами распределились в следующем порядке: D , B , C ; при этом утверждение (4) также истинно

Итак, *утверждение (5) зрителя N может быть истинным в том и только в том случае, если A займет 1-е, D — 2-е, B — 3-е и C — 4-е место.*

По существу мы уже убедились в том, что полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи, но ради полной уверенности это можно проверить еще раз.

Примечание. Быть может, кто-нибудь из читателей возразит против ложности утверждения (1), исходя из следующих соображений. Если утверждение (1) ложно, то противоположное утверждение истинно. Но утверждение, противоположное утверждению (1), гласит: «Я выиграл забег, но пришел к финишу не раньше, чем С». Такое возражение было бы достаточно серьезным, но *утверждение (1), если оно ложно, не обязательно понимать так, как его понял этот читатель.* Действительно, *утверждение (1) представляет собой сложное утверждение, состоящее из двух частей, которые рассматриваются одновременно.* Если ложна хотя бы одна часть, то все сложное утверждение нельзя считать истинным. Таково одно из правил логики (в том, что оно верно, нас убеждает даже обычный «здравый смысл»). Действительно, утверждение (1) означает следующее: «Я пришел к финишу первым и опередил спортсмена С». Если это утверждение ложно, то возможны 2 случая: либо спортсмен А пришел к финишу не первым, но тем не менее опередил спортсмена С, либо спортсмен С обогнал спортсмена А. Оба эти случая противоречат утверждению (1)! В рассмотренном нами случае отрицание утверждения (1) соответствовало, как мы видели, первому случаю.

161. СУПРУЖЕСКИЕ ПАРЫ

[Эта задача — не из легких: о каждом из утверждений в отдельности невозможно сказать, истинно оно или ложно. Если бы мы все-таки попытались установить значение истинности каждого утверждения, то нам пришлось бы рассмотреть слишком много возможных случаев. Например, об утверждениях (1) и (2) заведомо известно, что они не могут быть одновременно истинными: либо истинно утверждение (1), а утверждение (2) ложно, либо истинно утверждение (2), а утверждение (1) ложно, либо оба утверждения (1) и (2) ложны.]

Решая задачу 161, лучше всего следовать II решению задачи 155, тем более что число возможных случаев в этой задаче так же, как и в задаче 155, равно 6.]

Всего существует 6 различных вариантов супружеских пар. Расположим их в виде таблицы и выясним, каким значениям истинности утверждений (1)—(6) соответствует каждый вариант:

	Анд- раш	Имре	Эгон	Эгон	Имре	Эржи	Анд- раш	Илон- ка	Анна
				(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(I)	Анна	Илонка	Эржи	и	л	и	л	л	и
(II)	Анна	Эржи	Илонка	л	л	и	л	и	и
(III)	Илонка	Анна	Эржи	л	л	л	л	и	и
(IV)	Илонка	Эржи	Анна	л	и	л	л	и	и
(V)	Эржи	Анна	Илонка	л	и	л	и	л	и
(VI)	Эржи	Илонка	Анна	л	л	л	и	и	и

Нетрудно проверить, что варианты (I), (III) и (V) не являются решениями задачи, поскольку, например, в (I) и (III) вариантах супружеская пара Эгон — Эржи, а в (V) варианте супружеская пара Имре — Анна не удовлетворяют условию (*). Что же касается трех остальных вариантов — (II), (IV) и (VI), то они все удовлетворяют условию (*) и, следовательно, всем условиям задачи.

Итак, установить точно, кто на ком женат и кто за кем замужем, не представляется возможным, поскольку допустимы 3 различных варианта супружеских пар.

162. НОВОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

а. Присоединив к условиям предыдущей задачи принадлежащее Андрашу утверждение (7а), мы получим задачу, допускающую 2 решения: (II) и (IV) варианты трех супружеских пар, перечисленных в решении предыдущей задачи.

В этом случае все утверждения Анны истинны. Следовательно, по условию (*) лгать должен ее муж. Высказав утверждение (7а), Андраш солгал. Это означает, что (VI) вариант супружеских пар не может быть решением задачи, поскольку Андраш ведет себя «непоследовательно» (один раз выскажет истинное утверждение, другой — ложное), а по условию (*) это невозможно. Варианты (II) и (IV) по-прежнему остаются решениями задачи: в них Андраш «последовательно» лжет.

б. Присоединив к условиям предыдущей задачи принадлежащее Андрашу утверждение (7б), мы получим задачу, допускающую единственное решение: (VI) вариант трех супружеских пар (Андраш и Эржи, Имре и Илонка, Эгон и Анна).

В этом случае все утверждения истинны. По условию (*) это означает, что ложные утверждения высказывает муж Анны. Высказав утверждение (7б), Андраш сказал правду. Следовательно, (II) и (IV) варианты уже не могут быть решениями (поскольку в них Андраш один раз говорит правду, а другой лжет). Всем условиям задачи удовлетворяет только (VI) вариант.

в. В этом случае задача не допускает ни одного решения.

Самое первое из условий, которым должно удовлетворять решение [утверждения (1) — (6) и (*)], — утверждение (1) — ложно: Эгон солгал. Следовательно, если Эгон высказывает еще одно всегда истинное утверждение, то оно портит все прежние решения: утверждения Эгона перестают удовлетворять условию (*).

г. В этом случае задача также не допускает ни одного решения, но совсем по другим причинам, чем в случае в. На этот раз существованию решения мешает то, что утверждение (7г) не может быть ни истинным, ни ложным [если мы хотим, чтобы оно удовлетворяло условию (*)].

Действительно, если жена Андраша высказывает только истинные утверждения, то это означает, что утверждение (7г) ложно. Но по условию (*) утверждение (7г) должно быть истинно.

Примечание 1. Разумеется, к аналогичному выводу мы бы пришли и в том случае, если бы утверждение (7г) высказал не Андраш, а любой из мужей. То, что его высказал именно Андраш, не имеет значения.

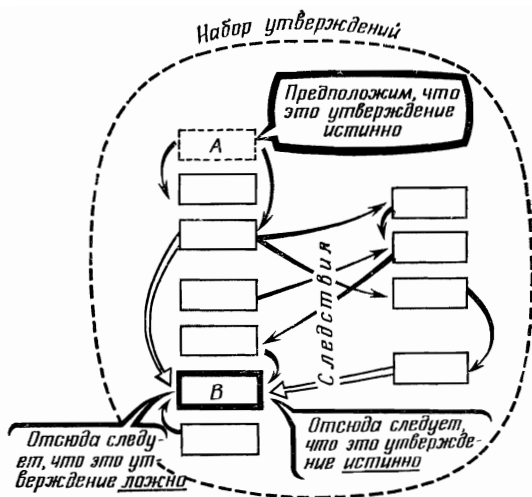


Рис. 240.

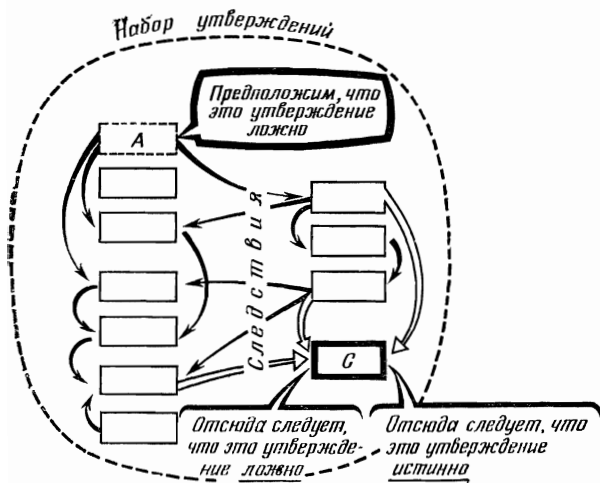


Рис. 241,

Примечание 2. Рассмотренные нами задачи служат примерами того, что удовлетворить некоторым наборам утверждений невозможно. Действительно, в этих задачах из некоторого утверждения A , если оно истинно, можно вывести 2 цепочки следствий, приводящих к одному и тому же утверждению B . Двигаясь по одной цепочке, мы приходим к заключению, что утверждение B истинно, двигаясь по другой — докажем, что оно ложно. Аналогичный результат мы получим и в том случае, если утверждение A ложно (разумеется, при этом истинным и ложным окажется, вообще говоря, утверждение C , не совпадающее с утверждением B ; см. схемы рассуждений, представленные на рис. 240 и 242). В таких случаях принято говорить, что условия задачи *противоречивы*.

(Интересно открыть книгу на решении задачи 158 и сравнить схемы, изображенные на рис. 236 и 237, с более общими



Рис. 242.

схемами, приведенными на рис. 240 и 241. Задача 158 может служить одним из конкретных примеров задачи с противоречивыми условиями.)

Условия (7г) и (*), как мы убедились, приводят к противоречию необычайно быстро (рис. 242). Отличительная особенность задач этого типа состоит в том, что противоречие содержится уже в исходном утверждении: и утверждение B , и утверждение C совпадают с утверждением A .

(Схемы, изображенные на рис. 242, интересно сравнить со II решением задачи 158. Нетрудно видеть, что схемы на рис. 237 и 238 представляют собой не что иное, как усложненный вариант схем на рис. 242.)

Разумеется, схемы на рис. 240—242 демонстрируют лишь существо тех противоречий, которые возникают при решении различных задач. Форма их в конкретных задачах может быть различной.

Примечание 3. Иногда задачи с противоречивыми условиями, при попытках решения которых рассуждения неизменно движутся по замкнутому кругу, неправильно называют *парадоксами*. Действительно, когда, предположив, что какое-нибудь утверждение истинно, мы доказываем затем его ложность, а предположив, что оно ложно, — истинность, это не может не вызвать

удивления. Но в действительности в «парадоксах» такого рода нет ничего парадоксального. Речь идет всего-навсего о задачах с логически противоречивыми условиями, то есть о таком наборе утверждений, в котором при любых значениях истинности, придаваемых отдельным утверждениям, не будут выполняться все отношения между исходными (или выводимыми из них) утверждениями. Но ясно, что надежды на то, будто нам всегда удастся удовлетворить любому набору условий (утверждений), ни на чем не основаны. *Во всех областях математики, а следовательно и в логике, существует бесконечно много неразрешимых проблем: ни в одной невозможно доказать, что некоторому набору утверждений нельзя удовлетворить тем или иным способом.*

Парадоксами в математике принято называть подлинные, несравненно более глубокие проблемы. Но эту важную тему мы не затрагиваем в нашей книге.

163. БОЛЕЕ ПРОСТОЕ РЕШЕНИЕ

Каждому действующему лицу из числа утверждений (1)—(6) принадлежит ровно одно. По условию (*) это означает, что среди утверждений (1)—(6) имеются 3 истинных и 3 ложных.

По крайней мере одно из утверждений (1) и (2) ложно.

По крайней мере одно из утверждений (3) и (4) ложно.

Следовательно, по крайней мере два из утверждений (1)—(4) ложны, поэтому если утверждение (5) ложно, то утверждение (6) заведомо истинно (из пяти утверждений ложны лишь 3). Но если истинно утверждение (5), то среди первых пяти утверждений больше половины, то есть 3 утверждения, ложны. Однако эти 3 утверждения составляют больше половины первых четырех утверждений, в силу чего утверждение (6) истинно. Итак, *Анна говорила правду.*

Но тогда из условия (*) следует, что ее муж лгал. Однако утверждение (7) истинно: *Андраш говорил правду.* Таким образом, утверждение (4) истинно: *Андраш женат на Эржи.*

Из этого можно заключить, что Эржи лгала. Но, к сожалению, из ложности утверждения (3) никаких новых следствий извлечь не удастся. Кроме того, уже ясно, что утверждение (1) ложно. Следовательно, *Эгон лгал*, а его жена должна была говорить правду, но установить ее имя непосредственно невозможно. Косвенные рассуждения быстрее всего приводят к цели, если рассмотреть утверждение (2).

Оно не может быть истинным, поскольку если бы Имре говорил правду, то его женой, имя которой начинается с другой буквы, могла бы быть только Анна (Эржи замужем за Андрашем, а у Илонки имя начинается с буквы «и»). Но Анна должна говорить правду, поскольку в противном случае нарушилось бы условие (*).

Итак, утверждение (2) может не выполняться лишь в том случае, если *Имре женат на Илонке* и, следовательно, *Эгон женат на Анне.*

Мы уже знаем, что это решение не только использует все условия задачи, но и удовлетворяет им.

Часть XII

164. СУПЕРМЕН И ЕГО ПОКЛОННИЦЫ

Попытаемся представить число 49 321 в виде произведения трех натуральных чисел. Сразу видно, что число 49 321 не делится ни на 2, ни на 5. Поскольку сумма цифр этого числа равна 19, то оно не делится и на 3. Как показывают прямые выкладки, это число не делится также ни на одно из простых чисел 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, но делится на 31. После этого уже нетрудно установить, что

число 49 321 представимо в виде произведения трех простых чисел $31 \cdot 37 \cdot 43$ и не допускает других разложений в произведение простых чисел. Следовательно, актеру N.N. могло исполниться либо 31 год, либо 37 лет, либо 43 года.

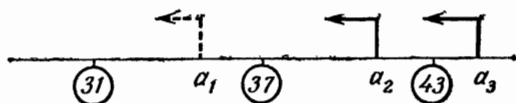


Рис. 243.

Эви знала, что ее отец (возраст которого ей был, конечно, известен) старше актера, но все же не могла определить возраст N.N. Каким образом возраст отца Эви связан с тремя предполагаемыми возрастaми актера?

Ясно, что отцу Эви больше 31 года, поскольку он старше исполнителя по крайней мере одной из трех главных ролей — актера N.N. Но отец Эви должен быть старше 37 лет, поскольку если бы он был моложе 37 лет [ему исполнилось бы только a_1 лет (рис. 243)], то актеру N.N. мог бы исполниться только 31 год.

Однако тогда Эви после разговора с отцом смогла бы определить возраст актера. (Следовательно, на рис. 243 возрасту отца Эви соответствует либо число a_2 , либо число a_3 .)

Кати узнала, что ее брат моложе N.N., но это не позволило ей определить возраст актера.

Ясно, что брат Кати моложе 43 лет, поскольку исполнитель по крайней мере одной из трех главных ролей старше его. Брат Кати должен быть моложе 37 лет, поскольку если бы ему исполнилось больше 37 лет (и его возрасту соответствовало бы число b_1 на рис. 244), то Кати бы догадалась, что актеру N.N. 43 года. (Таким образом, возрасту брата Кати на рис. 244 могут соответствовать только числа b_2 и b_3 .)

Когда обе девочки встретились, они, сравнив возраст отца Эви и брата Кати, сумели определить, какой из трех возрастов исполнителей главных ролей «принадлежит» актеру N.N. Это возможно лишь в том случае, если между возрастом брата Кати и отца Эви

заключен ровно один из трех возрастов исполнителей главных ролей. В свою очередь так может случиться лишь в том случае, если брат Кати не моложе 31 года, но не старше 37 лет (ему может быть ровно

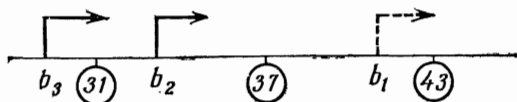


Рис. 244.

31 год, но он должен быть заведомо моложе 37 лет), а отец Эви старше 37, но не моложе 43 лет (ему больше 37 лет, однако может быть и 43 года). Но тогда актеру N.N. 37 лет (рис. 245).

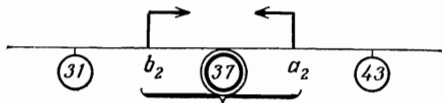


Рис. 245.

В любом другом случае Кати и Эви не смогли бы совместными усилиями определить возраст N.N. Действительно, если бы брат был моложе 31 года, то, поскольку отец старше 37 лет, возраст актера

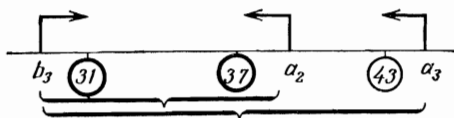


Рис. 246.

N.N. мог бы принимать два или три значения в зависимости от того, старше 43 лет или моложе отец Эви (рис. 246).

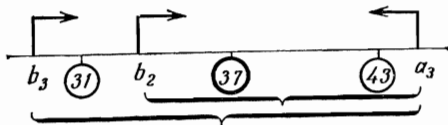


Рис. 247.

Аналогичным образом если отцу Эви больше 43 лет, то, поскольку брату Кати заведомо меньше 37 лет, возраст актера N.N. мог бы принимать два или три значения в зависимости от того, старше 31 года или моложе брат Кати (рис. 247).

165. ПАМЯТНИК ПРОШЛОГО

I решение. Из четырех цифр можно составить 3 даты, относящихся к прошлому: 1778, 1787, 1877 гг. Гостиница могла быть построена лишь в эти годы (в один из них).

В ходе беседы были упомянуты 3 неизвестные нам даты: 1) год написания картины пейзажистом Р. Р.; 2) год постройки часовни; 3) год путешествия по Венгрии некоего лица Х. У. Гостиница была построена позже 2-й даты, но раньше 1-й и 3-й дат. Год постройки гостиницы можно установить, исследуя пределы, устанавливаемые тремя датами, которые упоминались во время беседы: 1-я дата устанавливает верхний предел, 2-я — нижний предел и 3-я — верхний предел.

По этим трем пределам реставратор и историк сумели определить дату постройки гостиницы. Это означает, что один нижний и два верхних предела позволяют однозначно выбрать один год из трех:

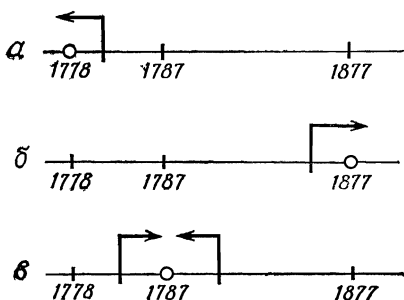


Рис. 248.

1778, 1787 и 1877. Выбор падает на 1778 г., если по крайней мере один из верхних пределов приходится на более раннюю дату, чем 1787 г. (условие необходимо и достаточно), — рис. 248, а. Выбор падает на 1877 г., если нижний предел приходится на более позднюю дату, чем 1787 г. (условие необходимо и достаточно), рис. 248, б. Выбор падает на 1787 г., если один верхний предел приходится на более позднюю дату, чем 1778 г., а другой — на более раннюю дату, чем 1877 г. (условие необходимо), — рис. 248, в.

Реставратор смог определить дату постройки гостиницы лишь после того, как было высказано утверждение (2). Поскольку этим утверждением устанавливается нижний предел постройки гостиницы, реставратор не мог выбрать 1778 г.

Историк смог определить дату постройки гостиницы после того, как услышал утверждение (3). Этим утверждением устанавливается один из верхних пределов, поэтому он не мог выбрать 1877 г.

Итак, из трех дат остается лишь одна: гостиница могла быть построена только в 1787 г.

Примечание. Приведенное выше решение задачи достаточно кратко, но не вполне удовлетворительно с математической

точки зрения. Действительно, если окончательный вывод («Гостиница могла быть построена только в 1787 г.») дополнить утверждением «Следовательно, гостиница была построена в 1787 г.», то не исключено, что новый вывод будет противоречить условиям задачи, хотя, как мы убедились, это отнюдь не обязательно. Необходимо проверить, что окончательный вывод из решения задачи согласуется со всеми ее «условиями».

Но как это сделать? Ведь «условия» задачи — размышления реставратора и историка — точно не известны. Тем не менее проверка возможна и, более того, легко осуществима.

В каком случае условия задачи 165 были бы противоречивыми?

В том случае, если бы в них содержались какие-то данные, утверждения и тому подобная информация, из которых следовало бы, что гостиница не могла быть построена в 1787 г. Итак, необходимо доказать, что такие сведения в условиях задачи не

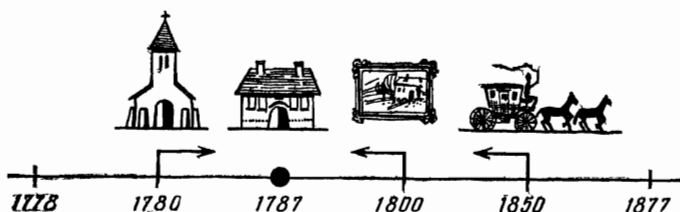


Рис. 249.

содержатся. Проще всего в этом можно убедиться, построив ситуацию, удовлетворяющую всем условиям задачи. Выглядит наша модель следующим образом.

Картина была написана пейзажистом в 1800 г. Об этом знал реставратор, но не знал историк.

Часовня была воздвигнута в 1780 г. Об этом знали и реставратор, и историк.

Х. У. путешествовал по Венгрии в 1850 г. Об этом знал историк (рис. 249).

Нетрудно проверить, что в этом случае реставратор и историк должны были бы реагировать на сообщения художника и архитектора именно так, как описано в задаче.

Если в действительности все происходило так (хотя, разумеется, возможны и другие варианты), то дата постройки гостиницы — 1787 г. — будет следовать не только из вымышленных нами дат, но и из тех сведений, которые приведены в условиях задачи, причем определить, когда была построена гостиница, можно тем способом, которым мы воспользовались в решении задачи. Таким образом, условия задачи не исключают того, что гостиница была построена в 1787 г. Ни к какому противоречию такое утверждение не приводит.

II решение. Маловероятно, чтобы читатель, в особенности если он впервые познакомился с задачами такого типа, тотчас же предложил изящное, безупречное решение задачи 165, изложенное выше.

Сначала ему пришлось бы поломать голову над выяснением следующих обстоятельств.

(I) Почему реставратор, услышав утверждение (1), не мог определить дату постройки гостиницы? Возможны 3 объяснения.

а) Реставратор не знал, когда была написана картина, поэтому все три даты постройки гостиницы — 1778, 1787 и 1877 гг. — оставались для него одинаково возможными (рис. 250, а).

Реставратор знал, когда была написана картина, но

б) работу над ней автор закончил после 1877 г. (или, быть может, в 1877 г.). В этом случае гостиницу могли построить и в 1778, и в 1787, и в 1877 г. (рис. 250, б).

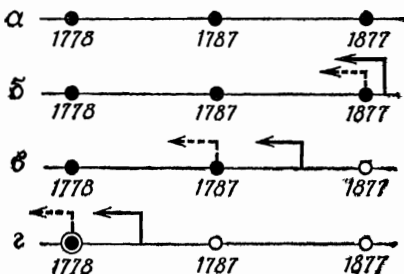


Рис. 250.

Таким образом, в случае б известно не больше, чем в случае а: имеющаяся информация не позволяет сделать никаких выводов.

в) Картина написана после 1787 г. (или, быть может, в 1787 г.), но до 1877 г. Гостиницу могли построить в 1778 и в 1787 г. (рис. 250, в).

Если бы картина была написана до 1787 г. (или в 1787 г.) и реставратор знал бы об этом, то утверждение (1) позволило бы ему определить дату постройки гостиницы (рис. 250, г). Картина не могла быть написана раньше, чем в 1787 г.

*

Итак, утверждения (1) и (I) не позволяют определить, когда была построена гостиница.

*

(II) Каким образом утверждения (1) и (2) помогли реставратору установить дату постройки гостиницы? Для этого он должен был знать, когда построили часовню, поскольку в противном случае он не мог бы почерпнуть из утверждения (2) ничего нового. Но в случаях а и б однозначно определить дату постройки гостиницы можно лишь при условии, если часовня была построена после 1787 г., но до 1877 г. (или в 1877 г.). В этом случае гостиница была построена в 1877 г. (рис. 251, а и б). После 1877 г. часовню построить не могли. Если бы часовню возвели до 1787 г. (или в 1787 г.), то однозначно определить дату постройки гостиницы было бы

невозможно: ее могли бы тогда закончить и в 1778, и в 1787 г. Если часовню построили до 1778 г., то гостиницу могли закончить и в 1778, и в 1787, и в 1877 г.

Таким образом, в случае в реставратор мог однозначно определить дату постройки гостиницы лишь при условии, если часовню возвели после 1778, но до 1787 г. (или в 1787 г.). Дата постройки гостиницы была бы 1787 г. (рис. 251, а).

Любые другие даты возведения часовни приводят к тому, что год постройки гостиницы либо остается неопределенным (число предполагаемых дат постройки больше 1), либо его невозможно установить (число предполагаемых дат равно 0).

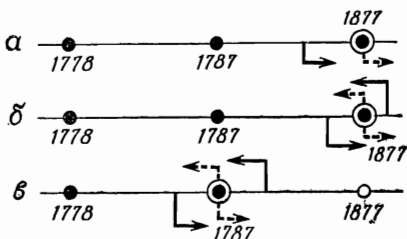


Рис. 251.

Итак, исходя из утверждений (1), (I), (2) и (II), реставратор мог считать, что гостиница была построена либо в 1787, либо в 1877 г.

*

(III)—(IV). Аналогичным образом мог рассуждать и историк.

Информация, почерпнутая из утверждений (1), (I), (2) и (II), не позволила ему определить, когда была построена гостиница. Выясним, сколь далеко он мог продвинуться в своих рассуждениях.

а) Историк мог исключить 1778 г., поскольку хотя он и не знал ни одной из дат, о которых говорилось в утверждениях (1) и (2), но так же, как и мы, восстановил возможный ход рассуждений реставратора.

б) Историк мог исключить 1877 г., даже не анализируя возможный ход рассуждений реставратора, если ему было известно, что картина написана до 1877 г. (но после 1787 г.).

в) Можно предположить, что историк исключил и 1787 г., хотя сведения, почерпнутые им из утверждений (1), (I), (2) и (II), не давали для этого оснований: из исторических хроник ему было известно, что в 1787 г. в селении, о котором шла речь, не было никакой гостиницы.

г) Возможно, что историку не удалось исключить ни одной из трех дат, поскольку он недостаточно внимательно прислушивался к тому, о чем говорили его приятели. (Такое предположение не противоречит условиям задачи.)

Итак, к тому моменту беседы, когда художник высказал утверждение (3), историк уже мог прийти к любому из выводов а, б, в и г, причем многими путями.

Но после того, как утверждение (3) было высказано, историк смог определить дату постройки гостиницы. Поскольку в утверждении (3) сообщается один из верхних пределов, то гостиницу могли построить:

- в случае а — только в 1787 г. (рис. 252, а),
- в случае б — только в 1778 г. (рис. 252, б),
- в случае в — только в 1778 г. (рис. 252, в) и
- в случае г — только в 1787 г. (рис. 252, г).

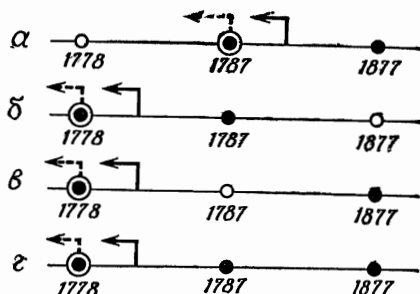


Рис. 252.

Итак, историк считал, что гостиница построена либо в 1778, либо в 1787 г.

*

Таким образом, задачу 165 можно «разобрать на части». Из рассмотрения их видно, что анализ рассуждений одного лишь реставратора или одного лишь историка не позволяет получить решение задачи. В обоих случаях круг поиска удаётся сузить, но остаются по 2 возможные даты постройки гостиницы: у реставратора — 1787 или 1877 г., у историка — 1778 или 1787 г. Объединяя оба частных решения, мы получаем решение всей задачи, поскольку оба набора дат имеют лишь один общий элемент: 1787 г.

166. СОРЕВНОВАНИЯ ПО ПЛАВАНИЮ В БЕРГЕНГОЦИИ

Прежде всего выясним, какие сведения о распределении мест между участниками марафонского заплыва содержатся непосредственно в утверждениях (1) — (6).

Из утверждений (1) и (6) следует, что пловцы А, F и H могли занять места только в следующем порядке:

А, Н, F.

Между ними могли оказаться другие пловцы. Именно поэтому мы оставили пробелы между «именами» пловцов.

По условию (2) пловец В пришел к финишу где-то впереди А, а пловец С — где-то позади В (рис. 253, а).

Горизонтальная черта означает, что мы не можем заранее сказать, удалось ли спортсмену *С* опередить кого-нибудь из спортсменов *А*, *Н* и *Р* и если удалось, то кого именно или же он отстал от них.

Условие (4) позволяет еще более расширить схему (рис. 253, б). Прямоугольная рамка вокруг букв *С* и *Д* означает, что

Д вышел на следующее после *С* место. (I)

Непосредственно из условия (5) нам известно, что

Г и *Е* заняли места в таком порядке: *Г*, *Е*. (II)

Где именно следовало бы поместить *Г* и *Е* на рис. 253, б, заранее предугадать невозможно. На этом информация, содержащаяся в исходных утверждениях, исчерпывается.

Какой еще информацией мы располагаем? В условиях задачи, помимо утверждений (1)–(6), содержатся также сведения о том, что знал и чего не знал комментатор *Х* о результатах заплыва. Их

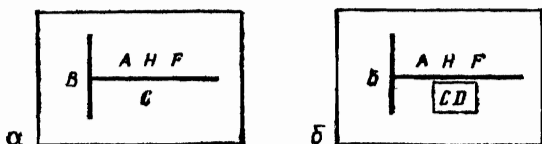


Рис. 253.

можно почерпнуть из утверждений (*), (**) и того, что *Х* мог узнать о распределении мест между восемью пловцами из утверждений (1)–(6). (***)

В задаче сказано, что *Х* было известно, кто из пловцов занял два первых и два последних места. Следовательно, он мог установить и тех, кто занял средние — с третьего по шестое — места, и тем самым разбить всех спортсменов на 3 группы: «первых», «средних» и «последних». Условие (*) означает, что

В и *А* вошли в разные группы, причем *В* оказался впереди, а *А* позади,

В и *С* расположились на «соседних» местах в одной группе.

С другой стороны, *Х* не мог заранее определить, обошел ли *В* своего соперника *С*: для этого *Х* понадобилось бы знать, что *В* занял более высокое место, чем *С*.

Так могло произойти лишь в двух случаях:

либо *В* и *С* заняли два первых места, а *А* оказался в средней группе,

либо *В* и *С* заняли какие-то из четырех средних мест, а *А* оказался на одном из двух последних мест.

Второй случай в действительности встретиться не мог, поскольку *А* опередил по крайней мере двух пловцов (*Н* и *Р*). Следовательно, два первых места заняли спортсмены *В* и *С*: *В* вышел на 1-е, а *С* — на 2-е место. Поскольку *Д* занял следующее за *С* место, то *Д* мог выйти лишь на 3-е место (рис. 254).

Об остальных участниках пока известно лишь, что места между ними распределились следующим образом:

$$\frac{A \quad H \quad F}{G \quad E}$$

и спортсмен *A* вошел в среднюю группу. (Теперь это уже означает, что он занял 4-е, 5-е или 6-е место.)

Комментатор *X* почерпнул новые сведения из утверждения (**), когда *E* заявил, что отстал от *G*. Это означает, что спортсмены *E* и *G* могли

- I) либо войти в среднюю группу,
- II) либо занять два последних места.

Действительно, если бы спортсмены *G* и *E* вошли в разные группы, то комментатор *X* с самого начала разговора знал бы, в какой последовательности они закончили дистанцию.

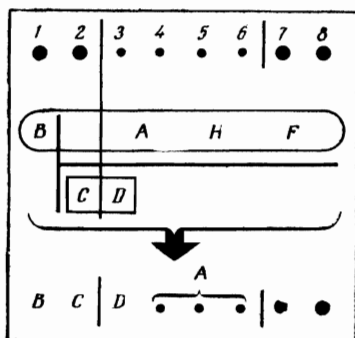


Рис. 254.

На основе приведенной в условиях задачи записи «интервью» мы не смогли установить, как распределились места между участниками заплыва, а *X* смог. Он имел перед нами то преимущество, что слышал, кто занял два последних места.

Чьи «имена» мог услышать *X*?

I) Если спортсмены *G* и *E* вошли в среднюю группу, то они разделили с третьего по шестое места со спортсменами *D* и *A*, и два последних места могли занять только спортсмены *H* и *F*. Следовательно, в этом случае из донесшихся до него обрывков разговоров *X* услышал, что *H* и *F* оказались позади всех остальных участников марафонского заплыва.

Теперь мы «сравнялись» и знаем столько же, сколько знал *X*, поскольку имена двух спортсменов, занявших два первых места, *X* также узнал из невольно подслушанных обрывков разговоров, а мы выяснили путем логических рассуждений.

Но каким образом распределились места между спортсменами *A*, *G* и *E*, в интервью ничего не говорилось, поэтому и нам, и *X*

необходимо рассмотреть 3 различных случая (рис. 255), причем ни мы, ни X не знаем, какой из них соответствует действительности. Но это невозможно, поскольку по условиям задачи X все же смог восстановить распределение мест между участниками заплыва. Таким образом, мы приходим к противоречию и вынуждены отказаться от исходного предположения, а это означает, что

II) X услышал другое: два последних места заняли спортсмены G и E . Тогда H и F (а не только A) вошли в среднюю группу. Распределение мест между ними, поскольку заранее известно, в какой последовательности они пришли к финишу, определяется однозначно (рис. 255).

Поскольку в этом случае X может однозначно установить распределение всех восьми мест (и поскольку, как мы убедились, других

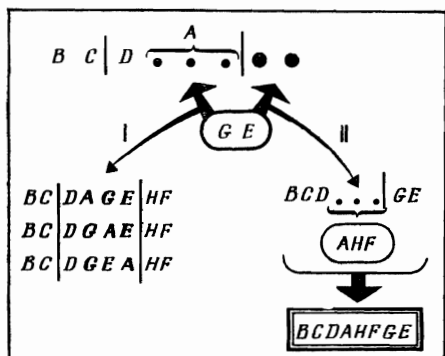


Рис. 255.

вариантов, кроме I и II, не существует), к финишу сверхдальнего заплыва спортсмены пришли в следующем порядке: 1-е место занял B , 2-е — C , 3-е — D , 4-е — A , 5-е — H , 6-е — F , 7-е — G и 8-е — E .

Нетрудно проверить, что такое распределение мест удовлетворяет всем условиям задачи.

Примечание 1. В задаче говорится о том, что, едва дослушав утверждение (6), комментатор X бросился к телефону — он понял, как распределились места между участниками заплыва. Строго говоря, отсюда еще не следует, что до того, как X услышал утверждение (6), распределение мест между участниками заплыва для него оставалось неясным. (Например, X мог додуматься до того, в какой последовательности пловцы закончили сверхдальнюю дистанцию, пока F говорил.) Разумеется, мы отнюдь не отрицаем того, что удалось выяснить в конце решения: поскольку H и F по доказанному входят в среднюю группу, то без утверждения (6) X не мог бы полностью восстановить распределение всех восьми мест.

Хотя это в конечном счете и согласуется с предположением о том, что до того, как было высказано утверждение (6), ком-

ментатору X не было известно распределение всех мест, тем не менее *использовать в решении это предположение было бы ошибочным*. Например, нельзя считать убедительной следующую попытку определить места, занятые спортсменами H и F , по тому, что известно о спортсменах G и H : «Новые сведения, почерпнутые комментатором X из утверждения (6), сводятся к тому, что спортсмены H и F оба входят либо в среднюю, либо в последнюю группу, поскольку во всех остальных случаях распределение мест было бы известно X до того, как F высказал утверждение (6)». Такое заключение (которое мы в приведенном выше решении осторожно обошли) основано на произвольном толковании условий задачи. Подчеркнем еще раз: *лишь в конце решения выяснилось, что комментатор X сумел восстановить распределение мест между участниками заплыва только после того, как было высказано утверждение (6); в самих условиях задачи об этом прямо не сказано. Подобного рода молчаливые предположения, исходящие из того, что требуется доказать, чрезвычайно крупными неприятностями, поскольку те, кто их делает, не всегда сознают свою ошибку*.

Примечание 2. Само утверждение (6) также может служить источником (другой) ошибки. Иногда его толкуют слишком широко. Из того, что H оказался сильнее F и закончил дистанцию раньше, отнюдь не следует однозначно, будто F пришел к финишу сразу же после H . Могло случиться, что F после безуспешных попыток догнать H отстал от него и занял не следующее, а более далекое место. В решении задачи мы выяснили, что в действительности обстоятельства сложились иначе и F пришел к финишу сразу же после H , но из утверждения (6) это не следует.

167. ЛОГИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НА ТЕЛЕВИДЕНИИ I

(Отборочный тур)

Победительница I тура могла рассуждать следующим образом: «Красных серег имеется лишь 1 пара. Следовательно, если бы они были на мне, то остальные участницы олимпиады уже знали бы, что на них белые серьги, и заявили бы об этом. Но ни одна из них не сказала ни слова. Значит, серьги на мне могут быть не красные, а лишь белые».

Примечание. Строго говоря, это решение совсем не безупречно. В нем остается некоторая неопределенность: ничего не говорится о том, сколько времени потребовалось победительнице, чтобы провести свое рассуждение.

Разумеется, эта неопределенность не слишком велика, поскольку если бы какая-нибудь из участниц олимпиады, посмотрев вокруг, увидела на другой участнице красные серьги, то без труда догадалась бы, что на ней самой белые серьги. Тем не менее в приводимых ниже более сложных задачах аналогичного типа даже столь незначительная неопределенность могла бы доставить немало «неприятностей». Именно поэтому мы формулируем все следующие задачи так, чтобы исключить эту неопределенность.

(Полуфинал)

У всех участниц второго тура было по 2 белые серьги.

(I) Ни одна из участниц олимпиады не смогла определить, какого цвета у нее серьги. Так могло произойти лишь в том случае, если *ни одна из участниц полуфинала не видела двух красных серег*. (В противном случае любая из участниц сразу бы догадалась, что на ней белые серьги.) Следовательно, *ни на одной участнице не было*



Рис. 256.



Рис. 257.

двух красных серег (иначе 3 остальные участницы увидели бы картину, изображенную на рис. 256). Среди участниц не было также *двух девушек с одной белой и одной красной серьгой* (иначе каждая из двух остальных девушек увидела бы картину, изображенную на рис. 257). Следовательно, *лишь у одной девушки могла быть 1 красная серьга*.

(II) Пока шел конкурс чтецов, каждая из участниц олимпиады размышляла. Ход ее рассуждений сводился к следующему.

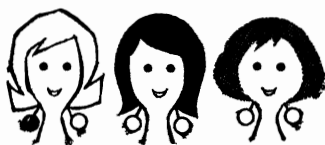


Рис. 258.

Если бы какая-нибудь из соперниц увидела на другой участнице олимпиады 1 красную серьгу, то она сразу бы догадалась, что на ней самой белые серьги. Следовательно, любая из участниц олимпиады, увидев такую картину, как на рис. 258 (разумеется, одновременно с ней аналогичную картину увидели бы еще две участницы), едва дождалась бы, пока истечет время, предоставленное для размышлений, и заявила бы, что на ней белые серьги.

(III) Как известно, этого не произошло. Из того, что все участницы олимпиады после достаточно продолжительных размышлений нажали на кнопки с вопросительным знаком, следует: *ни одна из участниц логической олимпиады не видела красной серьги* и поэтому не могла определить, не на ней ли единственная красная серьга. Иначе говоря, *никто из участниц не мог определить, какого цвета на ней серьги: две белые или одна белая и одна красная*.

Именно этой новой информации (сообщение о том, что старые сведения *не позволяют определить цвет серег*) оказывается достаточно для того, чтобы прийти к заключению: «У меня в ушах 2 белые серьги». После того как ведущий оставил включенным переговорное устройство, одна из участниц олимпиады быстрее других совершила последний шаг в своих рассуждениях и стала победительницей.

Примечание 1. У тех, кто участвовал в полуфинальном туре олимпиады, было достаточно времени, и они могли обдумать возможность следующего шага, рассуждая примерно так: «Увидев у кого-нибудь красную серьгу, любая участница олимпиады сразу поняла бы, что у нее самой белые серьги. Следовательно, если никто не может ответить на вопрос задачи, то это означает, что на мне белые серьги. Итак, я должна следить за остальными соперницами». Именно поэтому члены оргкомитета олимпиады (то есть условия задачи) тщательно следят за тем, чтобы любую информацию все участницы олимпиады получали одновременно: ведь если кто-нибудь из них раньше других узнает, что остальные участницы не могут определить цвет своих серег (например, если кто-нибудь из девушек увидит, на какие кнопки нажимает соперница), то она — см. часть (III) в условиях задачи — сможет первой довести до конца рассуждения и определить цвет своих серег. Но тогда не только участницы олимпиады оказались бы в неравных условиях, но и (что гораздо важнее) мы не могли бы строить свои умозаключения. Невозможно было бы понять, каким образом победительница полуфинала определила цвет своих серег: увидев красную серьгу у другой участницы олимпиады или поняв, что ее соперницы не в силах определить цвет своих серег.

Более того, не только у нас, но и у самих участниц олимпиады «почва ушла бы из-под ног»: никто не мог бы быть уверенным в том, что кто-нибудь другой не располагает дополнительным источником информации, и поэтому не только задача, но и вся олимпиада оказалась бы сорванной.

Итак, для чистоты логических рассуждений важно, чтобы поступление информации было строго упорядочено по времени.

Примечание 2. Правило, по которому любая девушка, которая могла определить цвет своих серег, но не сообщила жюри свое решение, подлежит исключению из числа участниц олимпиады, важно и справедливо. Оно гарантирует, что вопросительный знак, загоревшийся над кабиной, означает *лишь одно*: сидящая в кабине участница олимпиады на основе имеющейся у нее информации не может определить цвет своих серег. Без этого правила участницы олимпиады могли бы нажимать на кнопку с вопросительным знаком, руководствуясь какими-нибудь тактическими соображениями: например, из желания скрыть, что им известен цвет своих серег, и тем самым ввести в заблуждение других участниц, чтобы они не смогли правильно решить задачу. (Те, кто прибегает к столь неспортивным приемам ведения игры, как умышленное введение партнеров в заблуждение, рискуют самое большее тем, что не одержат победу в очередной попытке, но зато обеспечивают себе возможность продолжать борьбу.)

По существу это правило делает излишним то место в заключительной части задачи, где говорится о том, что все участницы олимпиады из любых данных «извлекают все возможные следствия». Действительно, если бы они не обладали способностью анализировать любые данные и извлекать все возможные следствия, то жюри исключило бы их, и олимпиаду пришлось бы прервать. Тем не менее это место целесообразно оставить в условиях задачи, чтобы в решении задачи каждое утверждение не приходилось из осторожности сопровождать следующей оговоркой: «Это означает, что либо участница олимпиады недостаточно хорошо владеет логикой и не умеет извлекать всех следствий из имеющихся данных и поэтому жюри не допускает ее к заключительному туру олимпиады, либо она рассуждает правильно, и тогда...»

Примечание 3. Для решения задачи по существу не имело значения, что в каждой группе было по 4 участницы. Ход решения остался бы прежним и в том случае, если бы в каждой группе было по 3 участницы олимпиады (только вместо восьми серег следовало бы взять 6).

169. ЧРЕЗМЕРНОЕ МНОГОСЛОВИЕ?

Абзац, отмеченный знаком (), необходим по следующим причинам.*

1. Начнем с наиболее существенной причины.

Во второй попытке (II) каждая из девушек пришла к заключению, что всего среди вынутых из коробочки серег может быть не более одной красной серьги.

Если участница олимпиады определяет цвет своих серег за большее число попыток, чем другие, то она проигрывает. Та из девушек, которая видит у других участниц только белые серьги, могла бы рассуждать примерно так: «На мне либо (а) две белые серьги, либо (б) одна белая и одна красная серьга. Определить цвет своих серег более точно я пока не могу, поэтому мне придется нажать на кнопку с вопросительным знаком.

Действительно, если бы на мне были разноцветные серьги [случай (б)], то остальные участницы олимпиады увидели бы красную серьгу и, нажав 2 белые кнопки, выиграли бы (если «ничья» допускается по правилам олимпиады), а я, нажав кнопку с вопросительным знаком, проиграла бы. *Не проиграть* я могу только при условии, если они нажмут кнопки с вопросительными знаками, а это произойдет лишь тогда, когда они видят только белые серьги. *Нажму-ка я лучше вместо кнопки с вопросительным знаком 2 белые кнопки.* Если на мне разноцветные серьги — случай (б), — то я проиграю, как проиграла бы, нажав кнопку с вопросительным знаком. Если же на мне две белые серьги — случай (а), — то, нажав 2 белые кнопки, я выиграю. Нажимать на кнопку с вопросительным знаком мне нет смысла».

Без абзаца, отмеченного звездочкой (), условия задачи по существу стали бы противоречивыми.* То, что участницам полуфинала олимпиады понадобилась III попытка, находилось бы в противоречии с утверждением об их умении извлекать из имеющейся информации все возможные следствия. Если бы они действительно в совершенстве владели логическим анализом, то, как показывает приве-

денное выше рассуждение, III попытка им не понадобилась бы. (Можно было бы попытаться спасти положение ссылкой на то, что тактические преимущества не всегда достигаются самым правильным ходом, но подобное «объяснение» в значительной мере лишило бы задачу красоты.)

Правило (), лишаящее логическую олимпиаду особенностей, присущих азартным играм, вводит следующее условие: любая участница олимпиады имеет право объявить о цвете своих серег лишь в том случае, если ее вывод однозначно определен имеющейся информацией. Во всех остальных случаях она должна нажать кнопку с вопросительным знаком.*

2. Сделанное ведущим замечание (*) оказывается полезным и по другой причине. О ней пойдет речь в следующей задаче.

170. НЕБОЛЬШОЙ ИНЦИДЕНТ

Выслушав данное председателем жюри объяснение, Жужа могла сразу же нажать на пульте перед собой 2 белые кнопки, тем самым показывая, что у нее 2 белые серьги.

Жужа могла рассуждать следующим образом: «Если мой ответ правилен, то я выиграла олимпиаду. Если же мой ответ не верен, то участницы олимпиады поставлены в неравные условия: председатель жюри надел им не одинаковые по цвету серьги». (Решая предыдущую задачу, мы убедились в том, что участницы олимпиады, видящие красную серьгу, получают значительное преимущество и с гораздо большей легкостью могут определить цвет своих серег. И в том и в другом случае жюри, если верить обещанию председателя, должно объявить Жужу победительницей.

Примечание 1. Эту задачу предложил Золтан Бёдь из Дебрецена, когда на конкурсе на лучшее решение задач, производимом журналом *Elét és Tudomány*, была опубликована задача 168.

Примечание 2. Может показаться, что аналогичные «соображения симметрии» позволят сократить решение задач 167 и 168: каждая из участниц олимпиады сразу поймет, что серьги у всех должны быть одного цвета, поскольку в противном случае одни участницы получили бы преимущество перед другими.

Однако соображения *алгебраической симметрии*, хотя они возникают в решениях многих задач и оказываются весьма полезными, здесь неприменимы. Действительно, при проведении олимпиад жюри обладает правом допускать к очередной попытке не всех участников одновременно, а лишь какую-то их часть, причем остальные могут не знать, что их включают в игру не сразу. Правило (*), определяющее, кто из участников будет допущен к следующему кругу, и при таком «дробном» отборе сильнейших остается в силе.

171. ЛОГИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НА ТЕЛЕВИДЕНИИ III (Заключительный тур)

У всех девушек были разноцветные (одна белая и одна красная) серьги.

(I) Безуспешность первой попытки (ни одна девушка не смогла определить цвет своих серег) означает, что *ни одна девушка не*

видела на других по две белые или по две красные серьги. Ни одна из девушек не видела того, что изображено на рис. 259 и 260.

В первом случае (рис. 259) девушка знала бы, что речь может идти лишь о белых серьгах, а во втором (рис. 260) — что остались только красные серьги, и смогла бы определить цвет своих серег.

Если же каждая из девушек сумела установить, что среди трех серег, которые она не видит, имеются и красные, и белые, то определить цвет своих серег ей не удалось: они могли быть и одноцветными, и разноцветными.



Рис. 259.



Рис. 260.

(II) Итак, после первой попытки и нам, и участницам олимпиады стало ясно: серьги распределены между тремя девушками так, что ни одна из девушек не может увидеть картину, изображенную на рис. 259 или 260. Каким образом могут распределиться серьги между девушками?

По крайней мере у двух девушек должны быть красные серьги, поскольку в противном случае одна из девушек увидела бы то, что изображено на рис. 260. Но ни у одной из девушек не может быть двух красных серег, поскольку если бы у кого-нибудь из участниц



Рис. 261.



Рис. 262.

оказались две красные серьги, то вместе с участницей, которой досталась одна красная серьга, они составили бы пару, изображенную на рис. 259 (мы уже говорили, что красные серьги должны быть по крайней мере у двух девушек). Следовательно, у двух или трех девушек должны быть разноцветные серьги.

Таким образом, красные серьги могли быть распределены лишь двумя способами: один из них изображен на рис. 261, а другой — на рис. 262. Все это девушки могли обдумать за время, предоставленное им при второй попытке. Зная их склонность к логическим умозаключениям, можно не сомневаться в том, что, когда ведущий попросил девушек нажать на кнопки, они уже знали, что серьги могут быть распределены между ними только двумя способами. Если бы серьги были распределены так, как показано на рис. 261, то девушки с разноцветными серьгами нажали бы по одной красной и бе-

лой кнопке, поскольку, видя у одной из соперниц две белые серьги, поняли бы, что серьги распределены не так, как на рис. 262.

(III) Но этого не произошло. И со второй попытки никто из девушек не смог определить, какого цвета у нее серьги. Следовательно, никто из девушек не видел на сопернице двух белых серег, и серьги могли быть распределены только так, как показано на рис. 262.

172. ПОГОВОРИМ О МУЖЧИНАХ

На каждом участнике олимпиады была белая шапка.

Ход рассуждений по существу совпадает с решением задачи 168, поэтому решение этой задачи мы предоставляем читателю (тем более что эта задача достаточно хорошо известна). Мы поместили ее в книгу, поскольку нам необходима была задача именно такого типа и не удалось найти варианта, который бы сильно отличался от традиционного.

Примечание. Заметим, что эту задачу часто приводят без упоминания о времени, которое каждое из действующих лиц затрачивает на обдумывание ответа. Обычно ее формулируют так: «Трем людям надели на головы шапки, и у каждого спросили, какого цвета доставшаяся ему шапка. Люди смотрели-смотрели друг на друга, а потом один из них (или все трое сразу) и говорит: «У меня на голове белая шапка». Как он догадался?»

В таком виде задача действительно становится необычайно краткой, но в ее решении приходится особо оговаривать, что «... и остальные должны додуматься до того же, а поскольку они молчат, то...» Тем самым молчаливо предполагается, что все действующие лица думают одинаково и с одинаковой быстротой. Такое предположение само по себе достаточно спорно: ведь если бы оно было верно, то в том случае, когда все 3 шапки одного цвета, никто из трех «мудрецов» не смог бы сказать, какого цвета шапка у него на голове.

173. ДРУГ ЗА ДРУГОМ

а. Девушка в последней кабине выигрывает финальный тур олимпиады во всех случаях, когда все красные серьги достанутся девушкам, сидящим в передней и в средней кабинах, но у девушки в передней кабине обе серьги не будут красными (рис. 263, а). Действительно, во всех этих случаях девушка в задней кабине сразу поймет, что на ней могут быть только белые серьги, и с первой же попытки нажмет две белые кнопки.

Ясно, что остальные участницы не смогут определить цвет своих серег, так как им не видно, сколько красных серег было роздано. (Поскольку ни одна из участниц олимпиады никогда не видит всех белых серег, то всегда можно говорить лишь о красных серьгах.)

(1) Если девушкам в передней и средней кабинах достались не все красные серьги, то девушка в задней кабине не может выиграть и на протяжении всего заключительного тура будет оставаться в неведении относительно того, какого цвета достались ей серьги. Действительно, если заменить пару серег, доставшуюся девушке в последней кабине, другой парой (это можно сделать, поскольку после

раздачи серег всем девушкам в коробочке еще остались серьги разного цвета), то ни одна из участниц заключительного тура ничего не заметит. Следовательно, поскольку факты, из которых девушки исходят в своих рассуждениях, останутся прежними, то и выводы также не изменятся. Это означает, что девушка в задней кабине при различных вариантах распределения серег не сможет приходить к различным выводам и, таким образом, ей не удастся однозначно определить цвет своих серег.

г. Если девушке в передней кабине достались две красные серьги, то девушки в средней и последней кабинах с первой попытки могли бы выиграть (возможно, закончив олимпиаду вничью). Это четвертый из рассматриваемых случаев (рис. 263, б).

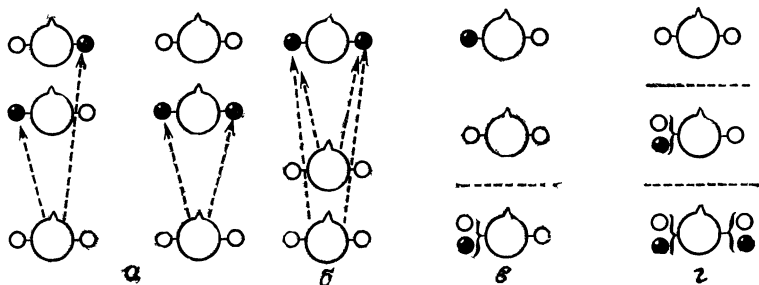


Рис. 263.

Девушки в средней и задней кабинах видят две красные серьги и, следовательно, могут определить цвет своих серег. Жюри по показаниям записывающего устройства установит, кто из девушек раньше нажмет кнопки, и объявит ее победительницей.

б. Победительница окажется в средней кабине, если девушке в передней кабине достанется одна красная серьга, а у самой победительницы обе серьги будут белыми (рис. 263, в).

Действительно, в этом случае при первой попытке все девушки нажмут на кнопку с вопросительным знаком, поскольку ни одна из них не увидит ни всех красных, ни всех белых серег. По безрезультатному исходу первой попытки девушка в средней кабине поймет, что у нее в ушах не может быть красной серьги, потому что в противном случае девушка в последней кабине смогла бы однозначно определить цвет своих серег. Следовательно, со второй попытки девушка в средней кабине устанавливает, что у нее две белые серьги, и выигрывает заключительный тур олимпиады, поскольку никто из двух остальных участниц еще не в состоянии определить цвет своих серег. Девушка в последней кабине — о чем уже упоминалось в абзаце, отмеченном знаком (!), — вообще не сможет определить цвет своих серег, а девушка в передней кабине, узнав о том, что в первой попытке остальные участницы тура нажали кнопки с вопросительными знаками, поймет лишь, что у нее и девушки в средней кабине вместе не наберется двух красных серег. Но вопрос о том, были ли среди розданных трем девушкам серег одна красная серьга и

если была, то кому досталась — ей самой или девушке в средней кабине, для девушки в передней кабине остается открытым.

в. *Девушка в передней кабине выиграет во всех остальных, еще не рассмотренных вариантах распределения, то есть в тех случаях, когда ей самой не достанется ни одной красной серьги, а девушка в средней кабине получит не более одной красной серьги.*

Действительно, в этих случаях, когда мы уже убедились, девушка в последней кабине вообще не может определить, какого цвета у нее серьги. Но девушка в средней кабине также не сможет теперь установить цвет своих серег. То, что у девушки в передней кабине две белые серьги, само по себе еще не позволяет девушке в средней кабине прийти к определенному заключению о цвете своих серег. Установить цвет серег косвенным путем — при помощи рассуждений —

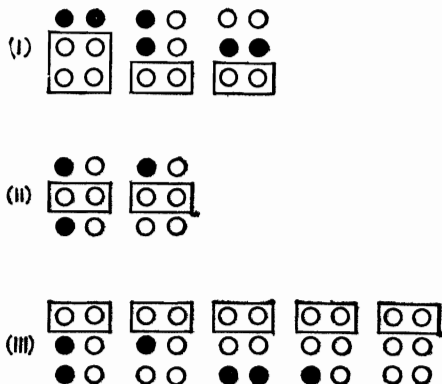


Рис. 264.

она может, лишь используя сигналы, подаваемые девушкой в задней кабине, поскольку только та видит больше нее. Но с первой попытки девушка в последней кабине нажала кнопку с вопросительным знаком. Это, как мы видели, означает всего-навсего, что девушкам в передней и средней кабинах вместе досталось не более одной красной серьги. Но так может быть и в том случае, когда девушка в средней кабине получила одну красную серьгу, и в том случае, когда у нее обе серьги белые.

Таким образом, в любом случае девушка в средней кабине во второй попытке непременно нажмет кнопку с вопросительным знаком. Но тогда девушка в передней кабине поймет, что ей должны достаться две белые серьги. Действительно, во всех остальных случаях, как мы убедились, кто-нибудь из сидящих позади нее девушек уже сумел бы определить цвет своих серег.

Итак, после двух попыток, в которых все 3 участницы олимпиады нажмут кнопки с вопросительными знаками, девушка в передней кабине нажмет две белые кнопки и одержит победу над своими соперницами. Ни одна из сидящих позади нее девушек не сможет опередить ее: в третьей попытке они в лучшем случае могут нажать

кнопки с вопросительным знаком (хотя заведомо известно, что это уже бесполезно). Девушки в средней и задней кабинах так и не успевают выяснить цвет своих серег. О том, почему неудача постигнет девушку в задней кабине, говорилось выше — там, где стоит знак (!). Теперь ее «примеру» последует и девушка в средней кабине. Она до конца тура не сможет определить, достались ли ей две белые серьги или одна белая и одна красная серьга, поскольку оба варианта распределения серег одинаково хорошо согласуются с теми сведениями, которыми она располагает (рис. 263, e).

П р и м е ч а н и е. Все возможные случаи распределения серег между 3 девушками показаны на рис. 264. Серьги победительницы заключены в рамку. Римские цифры указывают номер попытки, с которой ей удалось выиграть заключительный тур олимпиады.

174. СНОВА ШАПКИ

[Ясно, что эта задача аналогична предыдущей: и там, и здесь участники олимпиады рассажены «в затылок» друг другу.

Чем отличается этот вариант задачи?

Тем, что участники олимпиады теперь находятся *не в одинаковых условиях*. Если уровень умственного развития и способность к логическому мышлению участников олимпиады находятся на достаточно высоком уровне (а по условиям задачи это так), то исход олимпиады для каждого участника определяется не тем, сколь интенсивно он будет мыслить во время олимпиады, а чисто внешними причинами: порядком, в котором участники олимпиады выстроены «в затылок», и тем, как распределены шапки. Поскольку участники олимпиады лишены возможности переговариваться между собой (переговорное устройство не остается включенным даже во время последней попытки), то тот, кто думает быстрее других, не сможет опередить своих партнеров: жюри учитывает лишь число попыток.

Но «обзор», открывающийся перед различными участниками, не одинаков. Именно на этом и построено решение задачи.]

Информацию, позволяющую определить цвет шапки, участники олимпиады могут черпать из двух источников:

I) из того, что каждый из них видит, какого цвета шапки у сидящих впереди;

II) из того, что в предыдущей попытке все остальные участники нажали кнопки с вопросительным знаком и, следовательно, не могли определить цвет своих шапок.

(Действительно, если бы кто-нибудь нажал кнопку, цвет которой совпадает с цветом шапки, то дальнейшие попытки стали бы ненужными, поскольку победитель олимпиады стал бы известен.)

Поступающая из второго источника информация имеет одно важное ограничение, которое не следует упускать из виду при решении задачи:

(*) *для каждого участника олимпиады полезными оказываются лишь те дополнительные сведения, которые он получает, узнав о сомнениях тех, кто сидит сзади него (то есть о том, что они нажали кнопки с вопросительным знаком).* Действительно, сидящие впереди видят не больше того, что видит он сам (и даже не видят того, что

видит он сам), и, следовательно, их умозаключения не содержат ничего нового для него.

После этих предварительных замечаний рассмотрим, где может сидеть победитель (на каком месте) и сколько попыток понадобится ему, чтобы выиграть олимпиаду.

(1а). Тот, кто видит перед собой 6 красных шапок, приходит к заключению, что на нем может быть только белая шапка, и с первой попытки становится победителем олимпиады.

(1б). Тот, кто видит перед собой меньше 6 красных шапок, с первой попытки может нажать только кнопку с вопросительным знаком: определить однозначно цвет своей шапки он не в состоянии. Действительно, число красных шапок перед ним недостаточно для того, чтобы он мог с уверенностью назвать цвет своей шапки, а для того, чтобы воспользоваться неопределенными ответами сидящих сзади (нажавших кнопки с вопросительным знаком), ему необходима по крайней мере еще одна попытка.

Поскольку позади 1-го участника олимпиады (сидящего в кабине № 1) никого нет, ему не от кого ожидать дополнительных сведений II типа: если он не видит 6 шапок и, следовательно, не располагает информацией, позволяющей определить цвет шапки с первой попытки, то и в дальнейшем ему не удастся определить цвет своей шапки.

(1в). Если 1-й участник олимпиады не сможет определить цвет своей шапки с первой попытки, то ему не удастся сделать это и в дальнейшем.

По условиям задачи никто из участников олимпиады не сумел определить цвет своей шапки и все нажали кнопки с вопросительным знаком. Следовательно, возникла необходимость провести вторую попытку.

(2а). Тот, кто видит перед собой 5 шапок и сидит перед по крайней мере еще одним партнером, определит цвет своей шапки со второй попытки.

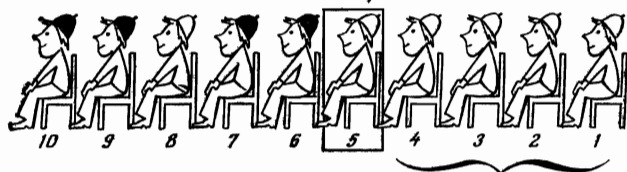
Действительно, если сидящий за ним в предыдущей попытке нажал кнопку с вопросительным знаком, то по доказанному утверждению (1а) сидящий сзади не мог видеть 6 шапок. Так может случиться лишь в том случае, если на голове у участника олимпиады, который видит 5 шапок, белая шапка.

(2б). Тот, кто видит меньше 5 шапок, не может определить цвет своей шапки со второй попытки. Ясно, что те красные шапки, которые ему видны, не позволяют однозначно определить цвет шапки у него на голове. Поскольку сидящие сзади него участники олимпиады с первой попытки нажали только кнопки с вопросительным знаком, он делает вывод, что ни один из них не видит 6 шапок — см. утверждение (1б). Так может произойти и в том случае, если на голове у того, кто видит меньше 5 шапок, красная шапка, и в том случае, когда на нем белая шапка (например, если у всех сидящих сзади белые шапки (рис. 265), но не обязательно (рис. 266).

(2в). Если 2-й участник олимпиады не сможет определить цвет своей шапки не позже чем со второй попытки, то ему не удастся сделать это и в дальнейшем. Действительно, сообщения, поступающие к нему в дальнейшем (после второй попытки), не увеличивают того количества информации, которым он располагает. Число красных и белых шапок, которые он видит непосредственно, до конца тура остается неизменным. Сообщение о том, что сидящий позади него

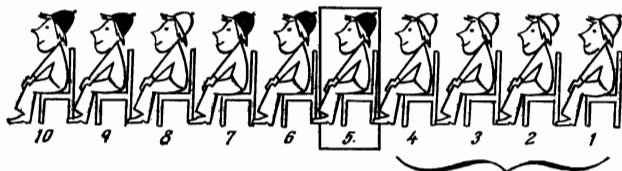
1-й участник олимпиады нажал кнопку с вопросительным знаком начиная со второй попытки, не приносит ничего нового: из утверждения (1в) известно, что если 1-й участник олимпиады не сумел определить цвет своей шапки с первой попытки, то он не сможет сделать это и в дальнейшем.

*Этот участник видит меньше
5 красных шапок; на нем
белая шапка*



*Эти участники видят меньше
6 красных шапок*

*Этот участник видит меньше
5 красных шапок;
на нем красная шапка*



*Эти участники видят меньше
6 красных шапок*

Рис. 265.

По условиям задачи с двух первых попыток никому из участников олимпиады не удалось определить цвет своей шапки: все нажали на кнопки с вопросительным знаком. Следовательно, возникает необходимость в проведении третьей попытки.

(3а). Тот, кто видит 4 красные шапки и сидит впереди по крайней мере двух других участников олимпиады, определит цвет своей шапки с третьей попытки.

Действительно, если тот из сидящих сзади интересующего нас лица, за кем сидит по крайней мере еще один участник олимпиады, во второй попытке нажал кнопку с вопросительным знаком, то в силу утверждения (2а) он не может видеть 5 красных шапок. Так может произойти лишь в том случае, если на сидящем перед ними участнике олимпиады (на том, кто видит 4 красные шапки) белая шапка,

(36). Тот, кто видит меньше 4 красных шапок, не сможет определить цвет своей шапки с третьей попытки.

Действительно, того, что он видит непосредственно, явно недостаточно. Сообщение о том, что сидящие сзади со второй попытки нажали кнопки с вопросительным знаком, также не несет новой информации: если речь идет о 1-м участнике, то сообщение «пусто» в силу утверждения (1в); если же речь идет об остальных участниках,

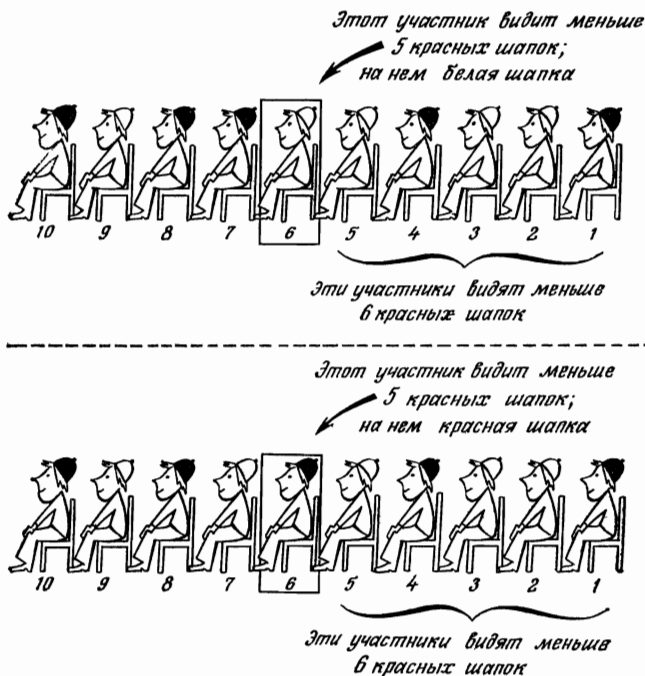


Рис. 266.

то в силу утверждения (2б) оно означает лишь, что каждый из них не видит 5 красных шапок. Так может произойти и в том случае, когда на участнике олимпиады, который видит меньше 4 красных шапок, белая шапка и когда на нем красная шапка — например, если на всех сидящих позади него белые шапки (рис. 267), но не обязательно (рис. 268).

(3в). Если 3-й участник олимпиады не определит цвет своей шапки с третьей попытки, то ему не удастся сделать это и в дальнейшем. Действительно, все сообщения, поступающие к нему после третьей попытки, не несут новой информации. Он видит то же, что видел раньше. Если кто-нибудь из сидящих сзади нажмет кнопку с вопросительным знаком, то это также не даст ничего нового: если

речь идет о 1-м участнике олимпиады, то начиная со второй попытки — в силу утверждения (1в), — а если речь идет о 2-м участнике олимпиады, то начиная с третьей попытки [в силу утверждения (2в)] никаких новых сведений уже не появляется. Известно, что эти участники уже не смогут определить цвет своих шапок и до конца тура вынуждены нажимать кнопку с вопросительным знаком.

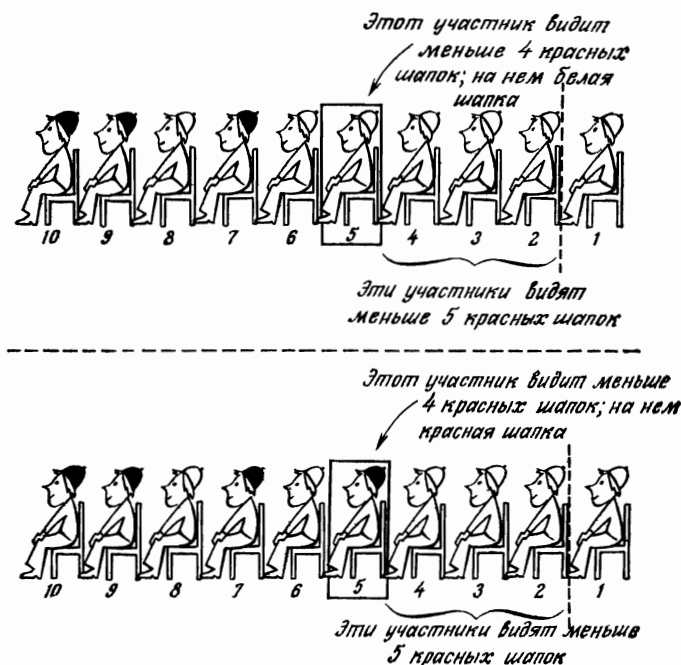


Рис. 267.

По условиям задачи с трех первых попыток никто из участников олимпиады не смог определить цвет своей шапки. Возникает необходимость в четвертой попытке.

(4а). Тот, кто видит 3 красные шапки и сидит впереди по крайней мере трех других участников олимпиады, определит цвет своей шапки с четвертой попытки.

Действительно, если тот из сидящих сзади интересующего нас лица, за кем сидят по крайней мере еще 2 участника олимпиады, с третьей попытки нажал кнопку с вопросительным знаком, то по утверждению (3а) он не может видеть 4 красные шапки. Так может быть лишь при условии, если на голове у того, кто видит 3 красные шапки, белая шапка.

(4б). Тот, кто видит меньше 3 красных шапок, не может определить цвет своей шапки с четвертой попытки.

Действительно, того, что он видит, явно недостаточно. Если же ему станет известно, что сидящие сзади него со второй попытки нажали кнопки с вопросительным знаком, то это также не даст ничего нового. В зависимости от того, о ком идет речь, «пустота» такого сообщения следует из разных утверждений: если имеется в виду 1-й

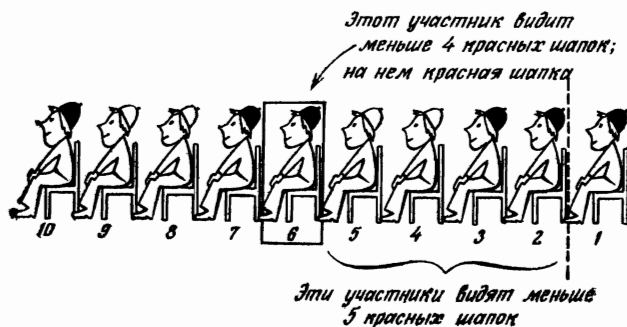
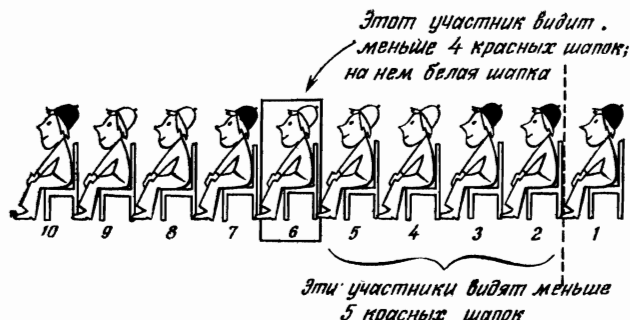


Рис. 268.

участник олимпиады, то из (1в), если 2-й, то из (2в). Что же касается остальных участников олимпиады, то в силу утверждения (3б) новое сообщение означает лишь, что ни один из них не видит 4 красные шапки. Так может произойти, когда на том, кто видит меньше 3 шапок, белая шапка и когда на нем красная шапка [например, если у всех сидящих сзади него белые шапки (рис. 269), но не обязательно (рис. 270)].

Мы могли бы также выписать и доказать утверждение (4в), но в этом нет никакой необходимости.

В силу утверждений (1в), (2в) и (3в) ни 1-й, ни 2-й, ни 3-й участник олимпиады не может быть победителем. Следовательно, номер кабины, в которой сидел победитель олимпиады, не меньше 4.

Сколько красных шапок он видел? Из утверждения (4б) следует, что не меньше 3, но больше 3 он видеть не мог, поскольку тогда — в силу утверждений (1а), (2а) и (3а) — кто-нибудь сумел бы

опередить его. Таким образом, победитель олимпиады должен был видеть ровно 3 красные шапки.

Из утверждения (4а) известно, что если участник олимпиады имеет номер, не превышающий число 4, и видит 3 красные шапки, то он может определить цвет своей шапки с четвертой попытки. Следовательно, если бы номер Пишты был больше 4, то все участники олимпиады, сидевшие позади Пишты на местах с номерами не

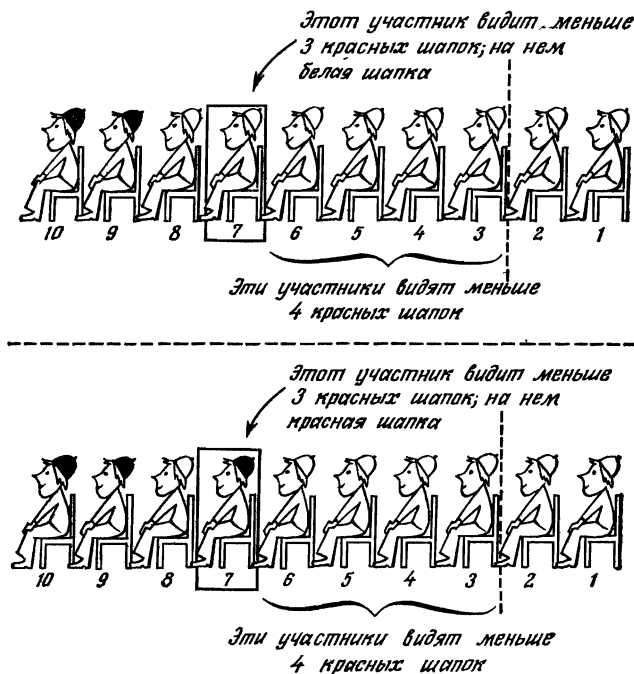


Рис. 269.

меньше 4, сумели бы определить цвет своих шапок одновременно с Пиштой (рис. 271). Но по условиям задачи Пишта оказался единственным победителем олимпиады. Так могло произойти лишь в том случае, если

(а) Пишта сидел в четвертой кабине.

(б) Что касается того, какого цвета шапки были на головах участников заключительного тура, то с уверенностью можно сказать: на сидевшем перед Пиштой 5-м участнике олимпиады должна была быть красная шапка, поскольку в противном случае сидевшие перед Пиштой участники олимпиады видели бы 3 шапки и, следовательно, так же, как и он, смогли бы определить цвет своих шапок с четвертой попытки (рис. 272).

Но поскольку Пишта видел 3 красные шапки, то у тех, кто сидел в пяти кабинах перед ним (в 10, 9, 8, 7 и 6-й), должны были быть 2 красные и 3 белые шапки.

Какого цвета была шапка у самого Пишты?

Красной шапки на нем быть не могло, поскольку в противном случае сидевший за ним 3-й участник олимпиады видел бы 4 красные шапки. За 3-м участником олимпиады сидели еще двое (2-й и

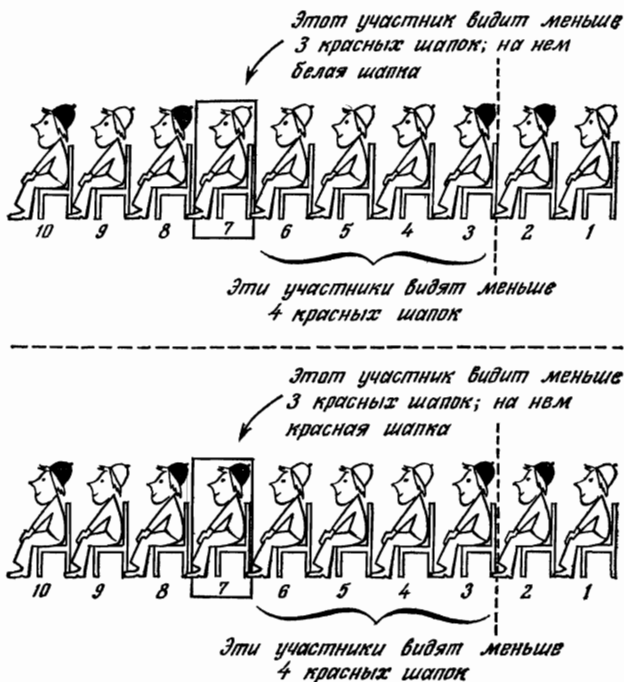


Рис. 270.

1-й), поэтому — в силу утверждения (3а) — он мог бы определить цвет своей шапки с третьей попытки, опередив тем самым на одну попытку Пишту.

Таким образом, на Пиште могла быть только красная шапка.

А какого цвета были шапки на тех, кто сидел позади Пишты?

Их шапки могли быть любого цвета. Действительно, какого бы цвета ни была шапка на 1, 2 и 3-м участнике олимпиады, 1-й мог бы видеть не больше 5, 2-й — не больше 4 и 3-й — не больше 3 красных шапок. Следовательно, ни один из этих участников (в силу утверждений серии б) не мог бы определить цвет своей шапки не только с трех первых попыток или с четвертой попытки, но и с любого большего числа попыток,

Итак, на вопрос (б) задачи можно дать следующий ответ.

У тех участников олимпиады, кто сидел в пяти передних кабинах (в 6, 7, 8, 9 и 10-й) было 2 красные и 3 белые шапки, на 5-м участнике была красная шапка, а на Пиште — белая.

Любые варианты распределения красных и белых шапок, которые согласуются с этими условиями, одинаково допустимы (рис. 273),

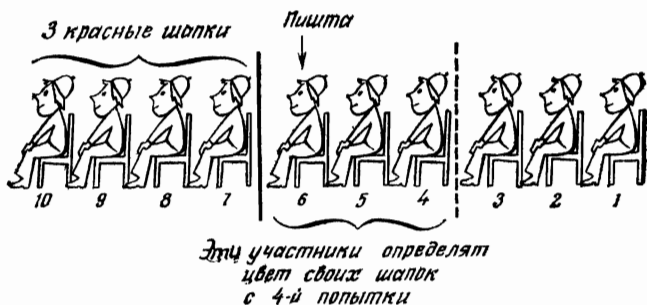


Рис. 271.

Варианты, изображенные на рис. 273, мы назвали допустимыми не потому, что нам нечего больше сказать о них: незнание не является доказательством. Мы могли что-нибудь упустить из виду, и даже само распределение красных и белых шапок при проверке могло бы оказаться ошибочным.

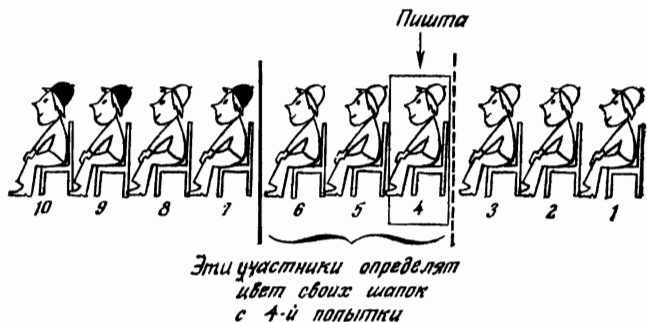


Рис. 272.

В правильности найденного распределения можно убедиться, доказав, что оно согласуется со всеми обстоятельствами проведения олимпиады, указанными в условиях задачи.

Примечание 1. Ясно, что все утверждения серии а — (1а), (2а), (3а), (4а) — представляют собой частные случаи некой общей закономерности. То же относится и к утверждениям серий б и в. Речь идет о следующих общих закономерностях.

(а). Тот, кто видит k красных шапок и сидит впереди по крайней мере $6 - k$ других участников олимпиады, определит цвет своей шапки с $(7 - k)$ -й попытки (разумеется, если все остальные участники олимпиады в предыдущих попытках будут нажимать кнопки с вопросительными знаками).

(б) Тот, кто видит меньше k красных шапок, не может определить цвет своей шапки с $(7 - k)$ первых попыток.

(в) Если k -й участник олимпиады не определит цвет своей шапки не позднее чем с k -й попытки, то ему не удастся сделать это и в дальнейшем.

Эти три утверждения можно доказать методом математической индукции.

Они допускают и дальнейшие обобщения, если вместо 6 взять m красных шапок, а число участников олимпиады (а вместе с ним и число белых шапок) положить равным n . (Ясно,

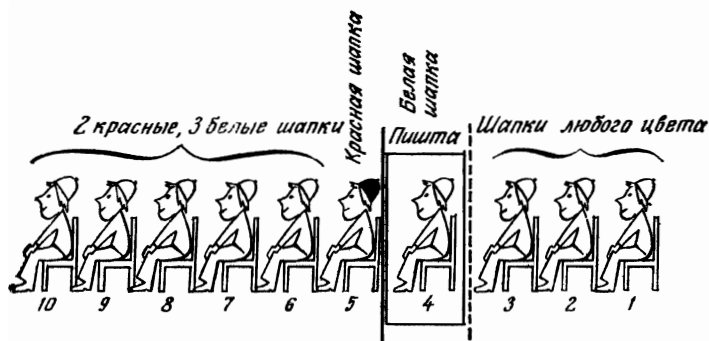


Рис. 273.

что последнее число независимо от того, равно ли оно 10 или n , входит в утверждения (а), (б) и (в). Важно, чтобы выполнялось неравенство $m < n$.)

Примечание 2. С учетом последних замечаний утверждения (1а), (1б) и (1в) можно сформулировать следующим образом.

(1а). Тот, кто видит перед собой все красные шапки, сразу определит, что на нем белая шапка, и с первой же попытки нажмет белую кнопку.

(1б). Тот, кто видит не все красные шапки, не может с первой попытки определить, какого цвета на нем шапка.

(1в). Если 1-й участник олимпиады (находящийся в задней кабине) не может определить цвет своей шапки с первой попытки, то ему не удастся сделать это и в дальнейшем.

Весьма интересно, что в такой форме эти три утверждения сами по себе достаточны для решения задачи.

Действительно, в силу утверждения (1а) если 1-й участник олимпиады с первой попытки нажмет кнопку с вопросительным знаком, то это означает, что он видит не все 6 красных шапок и, следовательно, 9 остальных участников олимпиады видят не

более 5 красных шапок. Но тогда из утверждения (1в) следует, что 1-й участник олимпиады теряет все шансы на выигрыш: закрепив каким-нибудь способом кнопку с вопросительным знаком в положении «включено», он мог бы уйти домой. Более того, он может спокойно отправляться домой, даже если ему не удастся закрепить кнопку с вопросительным знаком в нужном положении, поскольку все знают, что в дальнейшем он всегда может нажимать только ее. Таким образом, он может уйти домой не только потому, что у него не осталось шансов на выигрыш, но и потому,

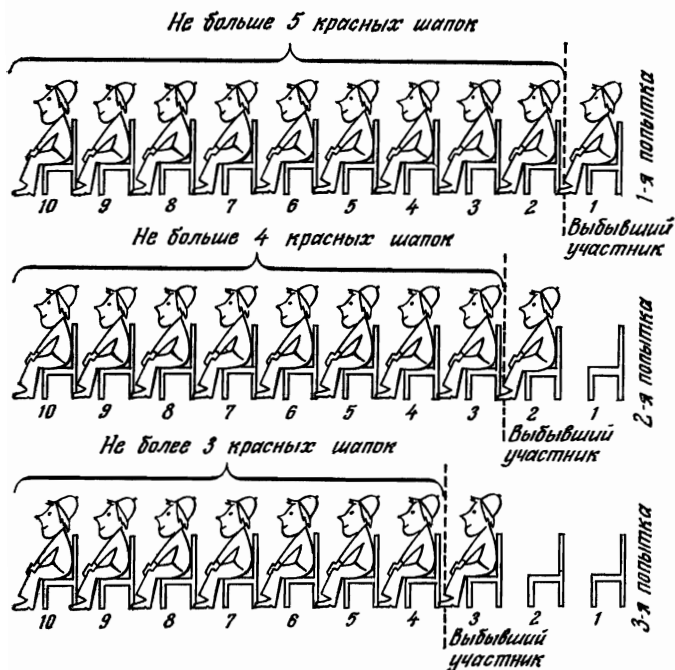


Рис. 274.

что утрачивает всякое влияние на исход олимпиады, который перестает зависеть от него.

Два выделенных курсивом утверждения означают, что (г) если с первой попытки все участники олимпиады нажмут кнопки с вопросительным знаком, то участник в задней кабине выбывает и число участников убывает на 1. В новой попытке число красных шапок по сравнению с предыдущей уменьшается не больше чем на 1.

Условия задачи позволяют воспользоваться утверждением (г) четыре раза подряд (рис. 274). К последней попытки от 10 участников олимпиады останутся только 7 (с номерами от

10-го до 4-го), а число красных шапок не будет превышать 3 (рис. 275).

Все остальные рассуждения проводятся так же, как и в помещенном выше решении задачи (хотя и несколько упрощаются).



Рис. 275.

Примечание 3. Во всем решении нигде не использовалось число белых шапок. Это понятно: ведь белых шапок было достаточно (столько же, сколько участников олимпиады), причем ни один участник олимпиады не остался без шапки. Следовательно, о белых шапках можно было не заботиться: достаточно знать, сколько красных шапок, и число белых шапок (дополняющее число красных шапок до 10) также становится известным.

175. ПРОСТОЙ ВОПРОС

[Ясно, что эта задача представляет собой обобщение предыдущей. Следовательно, и решение ее следует искать в том же направлении. Ключом к решению может служить примечание 1 из решения предыдущей задачи.]

Первую часть решения предыдущей задачи можно сформулировать следующим образом.

Дано произвольное число n участников олимпиады и число m красных шапок (числа m и n удовлетворяют неравенству $m < n$). Тогда участник олимпиады, который становится единственным победителем с k -й попытки ($k \leq m < n$), может находиться только в k -й кабине (нумерация идет от задней кабины к передней) и видеть $m - k + 1$ красных шапок.

Эту «теорему» нетрудно доказать либо при помощи обобщенных утверждений (а), (б) и (в), либо при помощи рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в примечании 2 к решению предыдущей задачи.

В наиболее общем виде утверждение (а) можно сформулировать следующим образом.

(а) Если, прибавив к числу красных шапок, которые видит некий участник олимпиады,

(а₁) число партнеров, сидящих позади него, мы получим число всех красных шапок, а

(a₂) прибавив к числу красных шапок, которые видит тот же участник олимпиады, номер очередной попытки, мы получим сумму, превосходящую число всех красных шапок, то этот участник с очередной попытки сможет определить цвет своей шапки. Отсюда следует, что *на Йошке могла быть только белая шапка.*

Действительно, если Йошка с k -й попытки стал единственным победителем олимпиады, то по доказанному выше он сидел в k -й кабине и видел $m - k + 1$ красных шапок. Если бы у Йошки на голове была красная шапка, то сидящий непосредственно за ним участник олимпиады, за которым следуют $k - 2$ других участников олимпиады, видел бы на 1 красную шапку больше, то есть $m - k + 2$ красных шапок. Но тогда сидящий непосредственно за Йошкой участник олимпиады удовлетворял бы условию (a₁):

$$(m - k + 2) + (k - 2) = m - \text{число всех красных шапок.}$$

Условие (a₂) было бы выполненным еще раньше — в $(k - 1)$ -й попытке:

$$m - k + 2) + (k - 1) = m + 1 - \text{больше числа всех красных шапок.}$$

Таким образом, из утверждения (a) следует, что участник олимпиады, сидящий непосредственно за Йошкой, мог бы определить цвет своей шапки раньше Йошки, и Йошка не стал бы победителем.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие переводчика	5
Предисловие	8
Как читать эту книгу	11

ЗАДАЧИ

Часть I. НЕВОЛЬШАЯ РАЗМИНКА	19
Часть II. НАВЕДЕМ ПОРЯДОК!	31
Часть III. ПОГОВОРИМ О ДЕНЬГАХ	50
Часть IV. ЛОГИКА НА ВЕСАХ	55
Часть V. ВОЗЬМЕМ НЕ ГЛЯДЯ!	61
Часть VI. ЗОЛОТОИСКАТЕЛИ, ЯЩЕРИЦА И БЕРГОМОБИЛЬ	70
Часть VII. СОСТАВЛЕНИЕ СМЕСЕЙ	79
Часть VIII. РОЗЫГРЫШ КУБКА	82
Часть IX. БУКВЕННОЕ ЛОТО	88
Часть X. КРОССНАМБЕРЫ	92
Часть XI. ИСТИННО И ЛОЖНО	104
Часть XII. ЧТЕНИЕ МЫСЛЕЙ	123

РЕШЕНИЯ

Часть I	137
Часть II	158
Часть III	196
Часть IV	218
Часть V	225
Часть VI	244
Часть VII	272
Часть VIII	276
Часть IX	291
Часть X	314
Часть XI	354
Часть XII	403