Ф. КАШ

МОДУЛИ И КОЛЬЦА

Перевод с немецкого
Е. Н. ЗАХАРОВОЙ и М. И. УРСУЛА
под редакцией
В. А. АНДРУНАКИЕВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1981

УДК 519.4

Книга видного западногерманского математика знакомит читателя с современным состоянием теории колец и модулей — одного из быстро развивающихся разделов алгебры. Изложение сопровождается многочисленными упражнениями, что делает книгу пригодной и для первоначального знакомства с предметом.

Для математиков различных специальностей, студентов старших курсов и преподавателей алгебры в университетах и педагогических институтах.

Редакция литературы по математическим наукам

Ф. Каш
МОДУЛИ И КОЛЬЦА

Ст. науч. редактор В. И. Авербух. Мл. науч. редактор Ю. С. Андреева. Художник М. Н. Кузьмина. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор Л. П. Бирюкова. Корректор В. С. Антипова.

ИБ № 1801

Сдано в набор 12.05.80. Подписано к печати 25.05.81. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 11,50 бум. л. Усл. печ. л. 23. Усл. кр.-отт. 23. Уч.-изд. л. 20,37. Изд. № 1/0292. Тираж 6 000 экз. Зак. 622. Цена 2 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». 129820, Москва, И-110, ГСП. 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

1702030000
К $\frac{20203-006}{041(01)-81}$ 06—81, ч. 1

Предисловие к русскому изданию

Эта книга, принадлежащая перу известного западногерманского алгебраиста Фридриха Каша, предназначена для тех, кто, ознакомившись с кольцами и модулями в объеме обязательного университетского курса (см. Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977; Скорняков Л. А. Элементы алгебры. — М.: Наука, 1980), хотел бы углубить свои знания в этой области. Изучив книгу Каша, читатель познакомится с рядом важных результатов теории модулей и получит возможность читать соответствующую журнальную литературу.

Однако немало важных аспектов теории модулей останется вне его поля зрения, ибо автор не гонится за полнотой изложения. Ниже даются рекомендации по заполнению этих пробелов. В первую очередь для дополнительного чтения можно рекомендовать книгу Ламбека [5][1]. С бóльшим трудом читается претендующая на энциклопедичность двухтомная монография Фейса [86]. Неплоха для первого чтения книга Херстейна [88], где рассматриваются теоретико-кольцевые вопросы. Специальным вопросам теории модулей посвящена монография Мишиной и Скорнякова [82]. Теоретико-радикальные аспекты получили развитие в монографии Андрунакиевича и Рябухина [68]. Отметим, что проективные модули широко используются в книге Кона [74], основное содержание которой теоретико-кольцевое. Отметим еще, что современная теория абелевых групп в значительной мере выглядит как теория модулей над кольцом целых чисел, что позволяет рекомендовать для дальнейшего чтения и книгу Фукса [87].

В заключение заметим, что предлагаемый автором список учебников уместно дополнить книгами [66], [67], [70], [71], [83], [85], [89].

Узнав о подготовке русского издания, автор прислал нам список опечаток, исправлений и дополнений. В частности, им был добавлен целый новый параграф, посвященный теореме Бьёрка (§ 11.7). Мы выражаем ему искреннюю благодарность.

Л. А. Скорняков

---

[1] Если не ограничиваться литературой на русском языке, то здесь уместно было бы назвать также книги [10], [89] и [83].

Предисловие

Задумывая эту книгу, я ставил перед собой две главные задачи. Во-первых, дать изложение основных понятий теории модулей и колец, и притом настолько подробное, чтобы книга была пригодна и для самостоятельного изучения.

Во-вторых, мне хотелось изложить легко доступным образом некоторые темы, не нашедшие до сих пор отражения в учебной литературе, но занимающие важное место в теории. Это относится, в частности, к кольцам с полной дуальностью и квазифробениусовым кольцам (QF-кольцам).

Таким образом, книга должна провести читателя от простейших основных понятий до актуальных проблем и методов современной теории модулей и колец.

Той же цели служат многочисленные упражнения различной степени трудности. Они касаются не только излагаемого в тексте материала, но также затрагивают новые понятия и направления, не отраженные в книге.

Строение книги определяется тем убеждением, что понятия проективного и инъективного модулей принадлежат к важнейшим основным понятиям теории модулей и колец и потому должны быть введены в самом начале. В дальнейшем они используются уже при изложении классических разделов теории.

Равным образом я постарался ввести как можно раньше понятия образующего и кообразующего, чтобы постоянно иметь их в своем распоряжении.

Если добавить еще сюда различные условия конечности, то мы получим все главные мотивы книги. Соответственно, идейная кульминация достигается в разделах, посвященных теории колец, являющихся инъективными кообразующими (в частности, инъективными кообразующими с условиями конечности (QF-колец)).

Чтобы книга не разрослась чрезмерно, категорные понятия включены в нее лишь в минимально необходимом объеме. По теории категорий есть много хороших книг (например, Pareigis B. Kategorien und Funktoren. — Stuttgart: B. G. Teubner, 1969[1]),

---

[1] Или: Букур и Деляну [72], Цаленко и Шульгейфер [90] (см. литературу, добавленную при переводе). — *Прим. ред.*

так что читатель легко может пополнить свои знания в этой области.

Кроме того, неизбежен был, разумеется, отбор обсуждаемых тем. Мы руководствовались при этом в первую очередь принципом: дать все абсолютно необходимые понятия, — а в остальном по возможности ориентировали изложение на материал трех последних глав.

Эта книга возникла из семинаров и лекций, прочитанных мною в разных университетах. Приобретенный при этом опыт преподавания нашел в ней свое отражение. Так, специалист может обнаружить, что я не всегда выбираю «кратчайший» вариант доказательства и иногда привожу выкладки там, где их можно было бы опустить. Не пугают меня и отдельные повторы или приведение другого варианта доказательства. Все это продиктовано желанием сделать книгу более доступной для понимания. При этом я отдаю себе отчет в том, что возможны самые разные педагогические точки зрения.

По моему мнению, в учебнике, в отличие от научной публикации, не обязательно указывать авторство всех без исключения результатов. Я весьма широко пользуюсь этим правом свободного выбора и называю имена лишь в самых четких и ясных случаях. Для многих направлений, развитых сразу целым рядом авторов, определить точное авторство того или иного результата зачастую затруднительно. Опыт других книг показывает, что лучше уж совсем не приводить данных, чем рисковать давать их неверными.

Для побуждения читателя к инициативе в литературе помимо ряда учебников по теории модулей и колец приводятся и некоторые оригинальные работы по тематике трех последних глав. Выбор работ отражает личные вкусы автора и не более того.

Мне хочется поблагодарить здесь многочисленных коллег — сотрудников и студентов, проявивших интерес к этой книге и высказывавших критические замечания в ее адрес. Я сердечно признателен им всем. Особую благодарность я приношу В. Мюллеру, В. Циммерманну и Х. Цёшингеру за их поддержку. В частности, последние главы возникли из продолжительных бесед с д-ром Х. Цёшингером, который внес в них свою лепту также многими упражнениями. Без стимулирующего интереса названных лиц к вставшим при написании книги математическим и педагогическим вопросам она вряд ли бы приняла свой настоящий вид.

Наконец, я благодарен редакторам серии и издательству за благоприятное и небюрократическое отношение.

Мюнхен, осень 1976 *Ф. Каш*

Используемые в книге обозначения

Символ	*Значение*
$\wedge$	и
$\vee$	или (неисключающее)
$\forall$	квантор общности («для всех», «для каждого»)
$\exists$	квантор существования («существует»)
$\Rightarrow$	импликация («влечет»)
$\Leftrightarrow$	эквивалентность
$:=$	определение
$\lightning$	противоречие
$\subset$	подмножество
$\subsetneq$	собственное подмножество
$\not\subset$	не является подмножеством
$\subsetneq$	подобъект в смысле соответствующей структуры
$\subsetneq$	собственный подобъект
$\not\subsetneq$	не является подобъектом
$\mid$	делит ($a \mid b$ означает «a делит b»)
$\setminus$	теоретико-множественная разность ($A \setminus B := \{a \;\; a \in A \wedge a \notin B\}$)
$\square$	конец доказательства
$\mathbf{N}$	множество натуральных чисел ($\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$)
$\mathbf{Z}$	кольцо целых чисел
$\mathbf{Q}$	поле рациональных чисел
$\mathbf{R}$	поле вещественных чисел

1. Некоторые основные понятия теории категорий

С 1945 г. развивается новая область математики — теория категорий. Эта теория интересна не только потому, что она породила существенно новые понятия и методы, но и потому, что она способствует пониманию математики в целом. Ее значение состоит в том, что она дает возможность охватить воедино важные понятия и рассуждения из различных разделов математики. В частности, она позволяет сформулировать и исследовать общие свойства различных структур.

Теория категорий принесла с собой новые точки зрения и постановки вопросов, которые интересны не только в ней самой, но вызвали новые исследования в различных конкретных категориях. В особой мере это относится к теории модулей, давшей со своей стороны толчок для развития теории категорий.

Наконец, надо отметить, что основные понятия теории категорий во все большей мере входят в математический «разговорный язык» и используются для формулировки понятий и утверждений в других разделах математики. И как раз для категорий модулей такое знание категорного языка обязательно.

Ниже даются необходимые сведения об этом языке. Хотя мы будем по возможности кратки, однако рассматриваемые понятия развиваются настолько далеко, насколько это требуется для их понимания. Более подробные сведения о категориях можно найти в вышедшей в этой же серии [1] книге Б. Парайгиса «Категории и функторы» [2].

1.1. Определение категории

Мы предполагаем известными понятия множества и класса. В первом приближении под классом можно понимать «очень большое множество», над которым нельзя выполнять операций, могущих приводить к парадоксам. Например, из класса нельзя образовать класс всех подклассов по аналогии с множеством всех

[1] Mathematische Leitfäden (учебники по математике). — *Прим. ред.*

[2] Упомянутой в предисловии автора. См. также подстрочное примечание к соответствующему месту этого предисловия. — *Прим. ред.*

подмножеств некоторого множества. В аксиоматической теории множеств и классов множества — это в точности те классы, которые являются элементами какого-нибудь класса. Интуитивно можно представлять себе класс как совокупность всех объектов с определенным свойством.

Точные сведения можно найти в соответствующих учебниках, но больше сказанного здесь нам не понадобится, ибо в этой книге не проводятся математические рассуждения, основанные на понятии класса.

1.1.1. *Определение.* *Говорят, что задана категория* $\mathscr{K}$, *если заданы:*
(I) *класс* $\mathrm{Ob}(\mathscr{K})$, *называемый классом объектов категории* $\mathscr{K}$, *элементы которого называются объектами категории* $\mathscr{K}$ *и обозначаются буквами* $A, B, C, \ldots$;
(II) *для каждой пары объектов* (A, B) *множество* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, B)$, *такое что для различных пар объектов* $(A, B) \neq (C, D)$

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(C, D) = \emptyset;$$

элементы множества $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, B)$ *называются морфизмами из* A *в* B *и обозначаются буквами* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$;
(III) *для каждой тройки объектов* (A, B, C) *отображение*

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, B) \ni (\beta, \alpha) \longmapsto \beta\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, C),$$

называемое умножением (или взятием композиции) морфизмов, для которого
(1) *выполняется закон ассоциативности:* $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ *для всех* $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, B)$, $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(B, C)$, $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(C, D)$;
(2) *существуют тождественные морфизмы: для каждого объекта* $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{K})$ *существует морфизм* $1_A \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, A)$, *называемый тождественным морфизмом для* A, *такой что для всех* $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, B)$

$$\alpha 1_A = 1_B \alpha = \alpha.$$

Приведем теперь некоторые обозначения и простые свойства. Если не возникает путаницы, мы пишем просто

$$\mathrm{Mor}(A, B) := \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, B).$$

Далее,

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{K}) := \bigcup_{A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{K})} \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, B)$$

обозначает класс всех морфизмов категории $\mathscr{K}$. Используется также сокращенная запись:

$$A \in \mathscr{K} :\Leftrightarrow A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{K}),$$
$$\alpha \in \mathscr{K} :\Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{K}).$$

Пусть теперь $\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$. Тогда, как и для отображений, определим

$$\text{область определения } \alpha = \mathrm{dom}(\alpha) := A,$$
$$\text{область значений } \alpha = \mathrm{ran}(\alpha) := B.$$

Для различных пар (A, B) множества $\mathrm{Mor}(A, B)$ не пересекаются, поэтому $\mathrm{dom}(\alpha)$ и $\mathrm{ran}(\alpha)$ однозначно определяются морфизмом α.

Вместо $\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$ пишут также

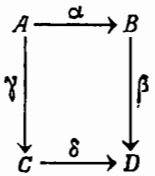
$$\alpha: A \to B \text{ или } A \xrightarrow{\alpha} B.$$

Символ

$$A \to B$$

обозначает некоторый элемент из $\mathrm{Mor}(A, B)$, а стрелка $\to$ — некоторый элемент из $\mathrm{Mor}(\mathscr{K})$.

Коммутативность диаграммы



означает, что $\beta\alpha = \delta\gamma$.

Если для морфизмов $\alpha, \beta \in \mathrm{Mor}(\mathscr{K})$ мы записываем произведение $\beta\alpha$, то это включает в себя условие $\mathrm{ran}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$, требуемое в определении 1.1.1.

1.1.2. *Утверждение.* *Тождественный морфизм 1_A однозначно определяется свойством, указанным в* III (2).

Доказательство. Пусть e_A — также тождественный морфизм, тогда

$$e_A = e_A 1_A = 1_A. \qquad \square$$

1.1.3. *Определение.* *Пусть $\mathscr{K}$ — категория и $\alpha: A \to B$ — ее морфизм. Говорят, что:*

(1) *α — мономорфизм, если*

$$\forall C \in \mathscr{K} \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Mor}(C, A)\,[\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2];$$

(2) α — *эпиморфизм, если*

$$\forall C \in \mathscr{K} \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Mor}(B, C)[\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \Rightarrow \beta_1 = \beta_2];$$

(3) α — *биморфизм, если*

(α — *мономорфизм*) $\wedge$ (α — *эпиморфизм*);

(4) α — *изоморфизм, если*

$$\exists \beta \in \mathrm{Mor}(B, A)[\beta\alpha = 1_A \wedge \alpha\beta = 1_B];$$

(5) α — *эндоморфизм, если*

$$\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{ran}(\alpha);$$

(6) α — *автоморфизм, если*

(α — *изоморфизм*) $\wedge$ (α — *эндоморфизм*).

1.1.4. ***Утверждение.*** (α — *изоморфизм*)$\Rightarrow$(α — *биморфизм*).

Доказательство. Пусть $\beta\alpha = 1_A$ и $\alpha\beta = 1_B$. Тогда из $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2$ следует, что

$$\gamma_1 = 1_A\gamma_1 = \beta\alpha\gamma_1 = \beta\alpha\gamma_2 = 1_A\gamma_2 = \gamma_2.$$

Аналогично из $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ следует, что

$$\beta_1 = \beta_1 1_B = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_B = \beta_2. \qquad \square$$

Заметим, что утверждение, обратное к 1.1.4, вообще говоря, неверно (примеры даны в упражнениях). Однако оно верно в ряде важных категорий, например в категории модулей; позже мы это докажем.

1.2. Примеры категорий

В приводимых ниже примерах, в пункте (I) указывается класс объектов, в пункте (II) — множества $\mathrm{Mor}(A, B)$, в пункте (III) — умножение морфизмов (произведение $\beta\alpha$ для $\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $\beta \in \mathrm{Mor}(B, C)$). Аксиомы всякий раз легко проверяются.

1.2.1. $\mathscr{S}$ = *категория множеств.*
(I) $\mathrm{Ob}(\mathscr{S})$ = класс всех множеств.
(II) $\mathrm{Mor}(A, B)$ = множество всех отображений из A и B.
(III) $\beta\alpha$ = композиция α и β (результат последовательного выполнения сначала отображения α, а затем β).

1.2.2. $\mathscr{G}$ = *категория групп.*
(I) $\mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ = класс всех групп.
(II) $\mathrm{Mor}(A, B) := \mathrm{Hom}(A, B)$ = множество всех групповых гомоморфизмов из A в B.
(III) Композиция.

1.2.3. $\mathscr{A}$ = *категория абелевых групп.*
(I) $\mathrm{Ob}(\mathscr{A})$ = класс всех абелевых групп.
(II) и (III), как в $\mathscr{G}$.

В этом примере само множество $\mathrm{Hom}(A, B)$ можно превратить в абелеву группу.

Определение. *Пусть групповая операция в B записывается аддитивно, и пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Определим $\alpha_1 + \alpha_2$ следующим образом:*

$$\mathrm{dom}(\alpha_1 + \alpha_2) := A, \quad \mathrm{ran}(\alpha_1 + \alpha_2) := B,$$
$$\forall a \in A\,[(\alpha_1 + \alpha_2)(a) := \alpha_1(a) + \alpha_2(a)].$$

Легко проверяется, что $\mathrm{Hom}(A, B)$ становится при этом абелевой группой. В частности, ее нулевым элементом служит нулевое отображение из A в B, и для всякого $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, B)$ гомоморфизм $-\alpha$ определяется так:

$$\mathrm{dom}(-\alpha) := A, \quad \mathrm{ran}(-\alpha) := B,$$
$$\forall a \in A\,[(-\alpha)(a) := -\alpha(a)].$$

1.2.4. $\mathscr{R}$ = *категория колец с единицей.*
(I) $\mathrm{Ob}(\mathscr{R})$ = класс всех колец с единицей.
(II) $\mathrm{Mor}(R, S)$ = множество всех унитарных кольцевых гомоморфизмов из R в S (см. определение 3.2.1).
(III) Композиция.

1.2.5. $\mathscr{M}_R$ = *категория унитарных правых R-модулей над кольцом R с единицей.*
(I) $\mathrm{Ob}(\mathscr{M}_R)$ = класс унитарных правых R-модулей (см. определение 2.1.1).
(II) $\mathrm{Mor}(A, B) := \mathrm{Hom}(A, B)$ = множество модульных гомоморфизмов из A в B (см. определение 3.1.1).
(III) Композиция.

Как и в случае категории абелевых групп, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ при помощи того же определения 1.2.3 превращается в абелеву группу, не становясь, однако, вообще говоря, R-модулем! Подробнее об этом будет сказано позже.

Если S — еще одно кольцо с единицей, то через ${}_S\mathscr{M}$ и ${}_S\mathscr{M}_R$ обозначаются категории унитарных левых S-модулей и унитарных S-R-бимодулей соответственно (см. определение 2.1.1 и следующий за ним абзац).

1.2.6. $\mathscr{T}$ = *категория топологических пространств.*
(I) $\mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ = класс всех топологических пространств.
(II) $\mathrm{Mor}(A, B)$ = множество непрерывных отображений из A в B.
(III) Композиция.

Во всех рассмотренных до сих пор категориях (кроме $\mathscr{S}$) объектами были множества с дополнительной структурой, а морфизмами — отображения, сохраняющие эту структуру. Сейчас мы приведем примеры категорий другого рода.

1.2.7. *Группа как категория.* Пусть G — произвольная группа и $*$ — ее произвольный элемент. Построим категорию $\hat{G}$ следующим образом:
(I) $\mathrm{Ob}(\hat{G}) = \{*\}$.
(II) $\mathrm{Mor}(*, *) = G$.
(III) Групповая операция в G.

Очевидно, что $1_* =$ нейтральный элемент группы G.

1.2.8. *Упорядоченное множество как категория.* Пусть $(M, \leqslant)$ — упорядоченное множество. Определим категорию $\hat{M}$ следующим образом:
(I) $\mathrm{Ob}(\hat{M}) = M$.

$$\text{(II)}\quad \mathrm{Mor}(A, B) := \begin{cases} \varnothing & \text{при } A \not\leqslant B, \\ \{(A \leqslant B)\} & \text{при } A \leqslant B, \end{cases}$$

т. е. $\mathrm{Mor}(A, B)$ в случае $A \leqslant B$ есть множество, состоящее из единственного символа $(A \leqslant B)$.
(III) $(B \leqslant C)(A \leqslant B) := (A \leqslant C)$.

Тождественным морфизмом для A является $1_A = (A \leqslant A)$.

1.2.9. *Дуальная категория.* Пусть дана категория $\mathscr{K}$. *Дуальная* к категории $\mathscr{K}$ категория $\mathscr{K}^\circ$ определяется следующим образом:
(I) $\mathrm{Ob}(\mathscr{K}^\circ) = \mathrm{Ob}(\mathscr{K})$.
(II) $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{K}^\circ)[\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}^\circ}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(B, A)]$.
(III) $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}^\circ}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}^\circ}(A, B) \ni (\gamma, \beta) \longmapsto \beta\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}^\circ}(A, C)$,

где $\beta\gamma$ образуется в $\mathrm{Mor}(\mathscr{K})$.

1.3. Функторы

Функторы играют для категорий ту же роль, что и отображения, сохраняющие структуру (= гомоморфизмы) для обычных алгебраических структур или непрерывные отображения для топологических структур. В соответствии с этим функтор (при нашем определении) — это пара сохраняющих структуру отображений из одной категории в другую (не обязательно отличную от первой).

1.3.1. *Определение.* *Ковариантный, соотв. контравариантный, функтор F из категории $\mathscr{K}$ в категорию $\mathscr{L}$ — это пара $F=(F_0, F_м)$ отображений F_0, $F_м$:*

(I) F_0: Ob $(\mathscr{K}) \to$ Ob $(\mathscr{L})$,
(II) $F_м$: Mor $(\mathscr{K}) \to$ Mor $(\mathscr{L})$,

со следующими свойствами:

(1) $\forall \alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{K})[\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B) \Rightarrow F_м(\alpha) \in \mathrm{Mor}(F_0(A), F_0(B)]$,

соотв. $[\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B) \Rightarrow F_м(\alpha) \in \mathrm{Mor}(F_0(B), F_0(A)]$;

(2) $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{K})[F_м(1_A) = 1_{F_0(A)}]$;

(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Mor}(\mathscr{K})[\mathrm{ran}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) \Rightarrow F_м(\beta\alpha) = F_м(\beta) F_м(\alpha)]$, *соотв.* $[\mathrm{ran}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) \Rightarrow F_м(\beta\alpha) = F_м(\alpha) F_м(\beta)]$.

Вместо F_0 и $F_м$ пишут также просто F, т. е. $F(A) := F_0(A)$, $F(\alpha) := F_м(\alpha)$. Тогда условие (1) записывается следующим образом:

(1) $\alpha: A \to B \Rightarrow F(\alpha): F(A) \to F(B)$,
соотв. $\alpha: A \to B \Rightarrow F(\alpha): F(B) \to F(A)$,

или

(1) $\mathrm{dom}(F(\alpha)) = F(\mathrm{dom}(\alpha)) \wedge \mathrm{ran}(F(\alpha)) = F(\mathrm{ran}(\alpha))$,
соотв. $\mathrm{dom}(F(\alpha)) = F(\mathrm{ran}(\alpha)) \wedge \mathrm{ran}(F(\alpha)) = F(\mathrm{dom}(\alpha))$.

Запись $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ означает, что F — функтор из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{L}$.

Если $G: \mathscr{L} \to \mathscr{P}$ — тоже функтор, то, очевидно, последовательное их выполнение $GF: \mathscr{K} \to \mathscr{P}$ — также функтор. Если оба функтора F и G ковариантны или оба контравариантны, то GF ковариантен; если F и G различно „вариантны“, то GF контравариантен.

1.3.2. *Забывающие функторы. Забывающий* функтор F из $\mathscr{M}_R$ в категорию $\mathscr{A}$ абелевых групп определяется следующим образом:

$$F_0: \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_R) \ni A \longmapsto A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A}),$$
$$F_м: \mathrm{Mor}(\mathscr{M}_R) \ni \alpha \longmapsto \alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}).$$

Этот ковариантный функтор „забывает“ модульную структуру; он сохраняет только аддитивную структуру модуля. Если „забывается“ еще и аддитивная структура, то получается забывающий функтор F из $\mathscr{M}_R$ в категорию $\mathscr{S}$ множеств:

$$F_0: \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_R) \ni A \longmapsto A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{S}),$$
$$F_м: \mathrm{Mor}(\mathscr{M}_R) \ni \alpha \longmapsto \alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{S}).$$

Функторные свойства проверяются тривиальным образом. Легко привести и другие примеры забывающих функторов.

1.3.3. *Функторы представления.* Пусть $\mathscr{K}$ — произвольная категория и $A \in \mathscr{K}$. Определим

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, -)\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{K}) \ni X \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{S}),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, -)\colon \mathrm{Mor}(\mathscr{K}) \ni \xi \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, \xi) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{S}),$$

где $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, \xi)$ для $X := \mathrm{dom}(\xi), Y := \mathrm{ran}(\xi)$ задается следующим образом:

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, \xi)\colon \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, X) \ni \alpha \longmapsto \xi\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, Y).$$

Легко проверяется, что $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, -)$ — ковариантный функтор из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{S}$.

Аналогично для фиксированного объекта $B \in \mathscr{K}$ определим

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(-, B)\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{K}) \ni X \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X, B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{S}),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(-, B)\colon \mathrm{Mor}(\mathscr{K}) \ni \xi \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(\xi, B) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{S}),$$

где для $X := \mathrm{dom}(\xi)$, $Y := \mathrm{ran}(\xi)$ полагаем

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(\xi, B)\colon \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(Y, B) \ni \gamma \longmapsto \gamma\xi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X, B).$$

Нетрудно проверить, что $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(-, B)$ — контравариантный функтор из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{S}$.

До сих пор мы рассматривали функторы от одного аргумента, т. е. из одной категории в другую. Однако часто встречаются функторы от многих аргументов. Правда, с помощью произведения категорий (и дуальных категорий) они сводятся к (ковариантным) функторам от одного аргумента. Для наших целей достаточно рассмотреть функторы от двух аргументов.

1.3.4. ***Определение.*** *Пусть $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$, $\mathscr{L}$ — категории. Функтор F от двух аргументов, а именно ковариантный, соотв. контравариантный, по первому аргументу и ковариантный по второму аргументу, из $\mathscr{K} \times \mathscr{K}'$ в $\mathscr{L}$ — это пара отображений $F = (F_0, F_м)$:*

(I) $F_0\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{K}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{K}') \to \mathrm{Ob}(\mathscr{L})$,

(II) $F_м\colon \mathrm{Mor}(\mathscr{K}) \times \mathrm{Mor}(\mathscr{K}') \to \mathrm{Mor}(\mathscr{L})$,

со следующими свойствами:

(1) *для $\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{K})$ и $\alpha' \in \mathrm{Mor}(\mathscr{K}')$, где $\alpha\colon A \to B$ и $\alpha'\colon A' \to B'$ имеем*

$$F_м(\alpha, \alpha')\colon F_0(A, A') \to F_0(B, B'),$$

соотв. $F_м(\alpha, \alpha')\colon F_0(B, A') \to F_0(A, B')$;

(2) $F_м(1_A, 1_{A'}) = 1_{F_0(A, A')}$;

(3) $F_м(\beta\alpha, \beta'\alpha') = F_м(\beta, \beta')\, F_м(\alpha, \alpha')$,

соотв. $F_м(\beta\alpha, \beta'\alpha') = F_м(\alpha, \beta')\, F_м(\beta, \alpha')$.

Аналогично определяются функторы, которые контравариантны по обоим аргументам или ковариантны по первому и контравариантны по второму.

1.3.5. *Функтор* Mor. Каждой категории $\mathscr{K}$ соответствует функтор $\mathrm{Mor} = \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}$ из $\mathscr{K} \otimes \mathscr{K}$ в $\mathscr{S}$, который контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. Он определяется так:

$$\mathrm{Mor}\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{K}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{K}) \ni (A, B) \longmapsto \mathrm{Mor}(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{S}),$$
$$\mathrm{Mor}\colon \mathrm{Mor}(\mathscr{K}) \times \mathrm{Mor}(\mathscr{K}) \ni (\alpha, \gamma) \longmapsto \mathrm{Mor}(\alpha, \gamma) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{S}),$$

где $\mathrm{Mor}(\alpha, \gamma)$ для $\alpha\colon A \to B$, $\gamma\colon C \to D$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{Mor}(\alpha, \gamma)\colon \mathrm{Mor}(B, C) \ni \beta \longmapsto \gamma\beta\alpha \in \mathrm{Mor}(A, D).$$

Требуемые функторные свойства легко проверяются.
Как частный случай этого функтора, получаем функтор Hom:

$$\mathrm{Hom}_R\colon \mathscr{M}_R \times \mathscr{M}_R \to \mathscr{S}.$$

1.4. Функторные морфизмы и сопряженные функторы

Пусть F и G — два функтора из категории $\mathscr{K}$ в категорию $\mathscr{L}$. Во многих важных примерах эти функторы не «независимы» друг от друга. Между ними существует функторный морфизм[1], который мы сейчас определим.

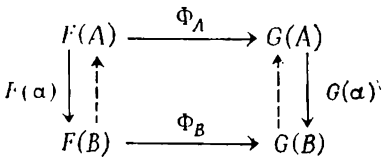
1.4.1. ***Определение.*** *Пусть* $F\colon \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ *и* $G\colon \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ *— два ковариантных либо два контравариантных функтора. Функторный морфизм* $\Phi\colon F \to G$ *— это такое семейство морфизмов*

$$\Phi = (\Phi_A \mid \Phi_A \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(F(A), G(A)) \wedge A \in K),$$

что для всех морфизмов $\alpha\colon A \to B$ *из* $\mathscr{K}$

$$G(\alpha)\Phi_A = \Phi_B F(\alpha),$$

т. е. коммутативна диаграмма



где вертикальные сплошные и штриховые стрелки обозначают соответственно ковариантный и контравариантный случаи.

[1] Используется также термин *естественное преобразование функторов*. — *Прим. перев.*

При этом существенно, что Φ_A зависит лишь от F, G и A, но не от α.

Тривиальный пример функторного морфизма — тождественный морфизм $F \to F$, где $\Phi_A = 1_{F(A)}$ для всех $A \in \mathcal{K}$. Далее, ясно, что последовательное выполнение двух функторных морфизмов Φ: $F \to G$ и Ψ: $G \to H$ опять дает функторный морфизм. Если $\Psi = (\Psi_A \mid A \in \mathcal{K})$, то по определению

$$\Psi\Phi := (\Psi_A \Phi_A \mid A \in \mathcal{K}).$$

Если отвлечься от теоретико-множественных затруднений, то для двух заданных категорий $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ можно определить теперь новую категорию $\mathrm{Funct}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ — категорию функторов из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{L}$. Объекты ее — функторы из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{L}$, а морфизмы — функторные морфизмы функторов из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{L}$. Например, в соответствии с нашими обозначениями $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{K}, \mathcal{L})}(F, G)$ было бы «множеством» функторных морфизмов из F в G. Разумеется, здесь нужно быть осторожным, поскольку для произвольных категорий $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{K}, \mathcal{L})}(F, G)$ может не быть множеством. Но предположим, что класс объектов категории $\mathcal{K}$ есть множество (в этом случае $\mathcal{K}$ называется *малой категорией*). Тогда для произвольных функторов F и G, как нетрудно видеть, $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{K}, \mathcal{L})}(F, G)$ — также множество и $\mathrm{Funct}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ — на самом деле категория. Такого рода категории играют важную роль в теории категорий. Однако для нас они не столь важны, и потому мы ограничимся сказанным выше.

1.4.2. *Определение.* (*Обозначения см. в* 1.4.1.) *Функторный морфизм* Φ: $F \to G$ *называется функторным изоморфизмом*[1], *если* Φ_A *— изоморфизм для всех* $A \in \mathcal{K}$. *В случае когда между функторами* F: $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *и* G: $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *существует функторный изоморфизм, это записывают так:* $F \cong G$.

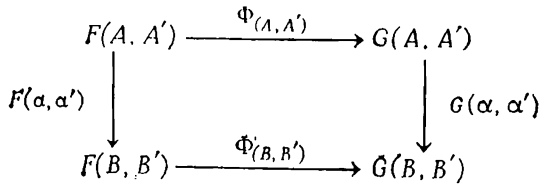
Всё, что было введено до сих пор для функторных морфизмов от одного аргумента, имеет смысл также для функторов от многих аргументов. Пусть, например, F: $\mathcal{K} \times \mathcal{K}' \to \mathcal{L}$ и G: $\mathcal{K} \times \mathcal{K}' \to \mathcal{L}$ — два функтора от двух аргументов, а именно контравариантных по первому аргументу и ковариантных по второму. Семейство морфизмов

$$\Phi = (\Phi_{(A, A')} \mid \Phi_{(A, A')} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A, A'), G(A, A')) \wedge (A, A') \in \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}')$$

называется *функторным морфизмом* из F в G, если для всех морфизмов α: $B \to A$ из $\mathcal{K}$ и α': $A' \to B'$ из $\mathcal{K}'$ коммутативна

[1] Или *естественной эквивалентностью*, — *Прим. перев.*

диаграмма



Φ называется *функторным изоморфизмом* между F и G (запись: $F \cong G$), если все $\Phi_{(A,\ A')}$ — изоморфизмы.

Теперь мы можем ввести понятие сопряженного функтора, играющее в теории категорий фундаментальную роль. В категории модулей весьма полезно иметь его в своем распоряжении, ибо только при использовании этого понятия становится ясной связь между функтором Hom и функтором тензорного произведения (см. гл. 10), которые на самом деле являются взаимно сопряженными.

Пусть даны два ковариантных функтора $F\colon \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ и $G\colon \mathscr{L} \to \mathscr{K}$, где G имеет противоположное к F «направление» вариантности. Рассмотрим «составной» функтор

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(F —,\ —)\colon \mathscr{K} \times \mathscr{L} \to \mathscr{S}.$$

Здесь речь идет о функторе от двух аргументов из $\mathscr{K} \times \mathscr{L}$ в категорию множеств $\mathscr{S}$, который контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. То же самое относится к функтору

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(—,\ G —)\colon \mathscr{K} \times \mathscr{L} \to \mathscr{S};$$

При этих предположениях дадим следующее определение.

1.4.3. *Определение.* *Функторы F и G называются парой сопряженных функторов (или взаимно сопряженными функторами), причем G называется сопряженным справа к F, а F — сопряженным слева к G, если существует функторный изоморфизм между* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(F —,\ —)$ *и* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(—,\ G —)$.

1.4.4. *Пример функторного морфизма.* Пусть $\mathscr{M}_K$ — категория векторных пространств над полем K. Для данного векторного пространства V_K, как известно, пространство

$$_KV^* := \mathrm{Hom}_K(V,\ K)$$

называется (*алгебраическим*) *сопряженным*, а пространство

$$V_K^{**} := \mathrm{Hom}_K(V^*,\ K)$$

1.5.1. *Определение.* *Пусть* $\mathcal{K}$ *— категория.*

1. *Пусть* $(A_i \mid i \in I)$ *— семейство объектов из* $\mathcal{K}$. *Пара* $(P, (\varphi_i \mid i \in I))$ *называется произведением семейства* $(A_i \mid i \in I)$, *если*

(I) $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$;

(II) $(\varphi_i \mid i \in I)$ *— семейство морфизмов из* $\mathcal{K}$,

$$\varphi_i\colon P \to A_i, \quad i \in I.$$

(III) *Для каждого семейства* $(\gamma_i \mid i \in I)$ *морфизмов* $\gamma_i\colon C \to A_i$, $i \in I$, *из* $\mathcal{K}$ *существует единственный морфизм* $\gamma\colon C \to P$ *из* $\mathcal{K}$, *такой, что*

$$\gamma_i = \varphi_i \gamma, \quad i \in I.$$

2. *Пусть* $(A_i \mid i \in I)$ *— семейство объектов из* $\mathcal{K}$. *Пара* $(Q, (\eta_i \mid i \in I))$ *называется копроизведением семейства* $(A_i \mid i \in I)$, *если*

(I) $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$;

(II) $(\eta_i \mid i \in I)$ *— семейство морфизмов из* $\mathcal{K}$,

$$\eta_i\colon A_i \to Q, \quad i \in I.$$

(III) *Для каждого семейства* $(\alpha_i \mid i \in I)$ *морфизмов* $\alpha_i\colon A_i \to B$, $i \in I$, *из* $\mathcal{K}$ *существует единственный морфизм* $\alpha\colon Q \to B$ *из* $\mathcal{K}$, *для которого*

$$\alpha_i = \alpha \eta_i, \quad i \in I.$$

Если $(P, (\varphi_i \mid i \in I))$ — произведение семейства $(A_i \mid i \in I)$, то мы полагаем

$$\prod_{i \in I} A_i := P$$

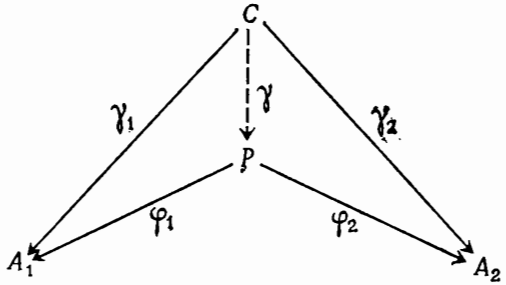
и называем $\prod_{i \in I} A_i$ произведением. Это может привести к недоразумениям, поскольку запись $\prod_{i \in I} A_i$ создает впечатление, что произведение определено однозначно, и поскольку при этом опускается задание семейства $(\varphi_i \mid i \in I)$. Поэтому при использовании записи $\prod_{i \in I} A_i$ необходима осторожность!

Если $(Q, (\eta_i \mid i \in I))$ — копроизведение семейства $(A_i \mid i \in I)$, то мы полагаем

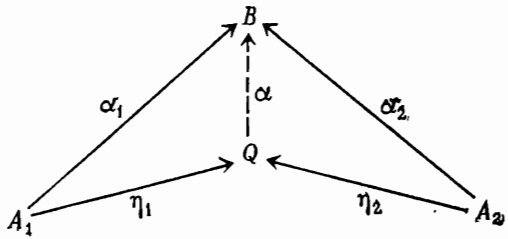
$$\coprod_{i \in I} A_i := Q$$

и называем $\coprod_{i \in I} A_i$ копроизведением. Сделанное для случая произведений предостережение остается в силе и здесь.

Содержащееся в (III) требование для произведения в случае $I=\{1, 2\}$ можно выразить следующей коммутативной диаграммой:



Соответственно для копроизведения получаем коммутативную диаграмму



В данной категории $\mathscr{K}$ не обязательно существуют произведения и копроизведения. Если они существуют для произвольных семейств $(A_i \mid i \in I)$, то $\mathscr{K}$ называется *категорией с произведениями*, соотв. *с копроизведениями*. Если они существуют по меньшей мере для любых конечных множеств индексов, то $\mathscr{K}$ называется *категорией с конечными произведениями*, соотв. *с конечными копроизведениями*.

Произведения и копроизведения, в случае когда они существуют, определены однозначно с точностью до изоморфизма. Более точно, имеет место следующая теорема.

1.5.2. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольная категория.*
(1) *Если $(P, (\varphi_i \mid i \in I))$ и $(P', (\varphi'_i \mid i \in I))$ — произведения семейства $(A_i \mid i \in I)$, то существует изоморфизм $\sigma\colon P \to P'$, удовлетворяющий условию*

$$\varphi_i = \varphi'_i \sigma, \quad i \in I.$$

(2) *Если $(Q, (\eta_i \mid i \in I))$ и $(Q', (\eta'_i \mid i \in I))$ — копроизведения семейства $(A_i \mid i \in I)$, то существует изоморфизм $\tau\colon Q \to Q'$, удовлетворяющий условию*

$$\eta'_i = \tau \eta_i, \quad i \in I.$$

Доказательство. (1) Подставляя в 1.5.1 (III) вместо $(\gamma_i \mid i \in I)$ семейство $(\varphi_i' \mid i \in I)$ и беря $C = P'$, получаем, согласно определению, морфизм $\sigma'\colon P' \to P$, для которого $\varphi_i' = \varphi_i\sigma'$. Аналогично существует морфизм $\sigma\colon P \to P'$, для которого $\varphi_i = \varphi_i'\sigma$. Отсюда следует, что $\varphi_i = \varphi_i\sigma'\sigma$, $\varphi_i' = \varphi_i'\sigma\sigma'$. Если взять теперь в определении произведения вместо $(\gamma_i \mid i \in I)$ семейство $(\varphi_i \mid i \in I)$, то $\gamma = 1_P$ дает нужное равенство: $\varphi_i' = \varphi_i 1_P$. Так как γ определено однозначно, а, с другой стороны, $\varphi_i = \varphi_i\sigma'\sigma$, то $1_P = \sigma'\sigma$ и аналогично $1_{P'} = \sigma\sigma'$, что и требовалось доказать.

(2) Доказательство для копроизведений получается *дуализацией* (= обращением стрелок) и предлагается читателю в качестве упражнения. □

Примеры произведений и копроизведений мы рассмотрим в категории $\mathscr{M}_R$.

Упражнения

1. Пусть $\mathscr{K}$ — категория. Доказать, что
($\beta\alpha$ — мономорфизм) $\Longrightarrow$ (α — мономорфизм).
(β, α — мономорфизмы $\wedge$ $\operatorname{ran}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$) $\Longrightarrow$ ($\beta\alpha$ — мономорфизм).
($\beta\alpha$ — эпиморфизм) $\Longrightarrow$ (β — эпиморфизм).
(β, α — эпиморфизмы $\wedge$ $\operatorname{ran}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$) $\Longrightarrow$ ($\beta\alpha$ — эпиморфизм).

2. a) Показать для категории $\mathscr{S}$ множеств и категории $\mathscr{T}$ топологических пространств, что если α — морфизм, то
(α — мономорфизм) $\Longleftrightarrow$ (α инъективно как отображение множеств);
(α — эпиморфизм) $\Longleftrightarrow$ (α сюръективно как отображение множеств).
b) Пусть $\mathscr{T}_2$ — категория отделимых топологических пространств. Проверить, выполняется ли a) для $\mathscr{T}_2$.

3. Абелева группа A называется *делимой*, если $\forall n \in \mathbf{N}\,[nA = A]$. Пусть $\mathscr{A}_0$ — категория делимых абелевых групп. Указать пример мономорфизма в $\mathscr{A}_0$, который не инъективен как отображение множеств. (*Указание.* Использовать $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.)

4. Пусть G — группа, содержащая более чем один элемент, и $\hat{G}$ — соответствующая ей в смысле 1.2.7 категория. Указать те и только те множества I, для которых существуют произведения и копроизведения с множеством индексов I.

5. Пусть M — упорядоченное множество и $\hat{M}$ — соответствующая ему в смысле 1.2.8 категория.
a) В терминах отношения порядка в M дать необходимые и достаточные условия для того, чтобы в $\hat{M}$ существовали конечные, соответственно произвольные произведения и копроизведения.
b) Какие морфизмы в $\hat{M}$ являются биморфизмами и какие биморфизмы — изоморфизмами?

6. Определить категорию $\mathscr{K}$ с $\operatorname{Ob}(\mathscr{K}) = \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ так, чтобы произведением семейства $(A_i \mid i = 1, \ldots, n)$, где $A_i \in \mathscr{K}$ был наибольший общий делитель $A_1, \ldots, A_n$, а копроизведением $(A_i \mid i = 1, \ldots, n)$ — наименьшее общее кратное $A_1, \ldots, A_n$.

2. Модули, подмодули и фактормодули

2.1. Предположения и соглашения

От читателя требуется некоторое знакомство с простейшими фактами о кольцах и модулях. Он должен быть знаком по меньшей мере с двумя специальными видами модулей — с векторными пространствами и абелевыми группами.

Хотя определения большинства понятий даются здесь заново — прежде всего, чтобы установить обозначения, — но, с учетом желательной предварительной подготовки читателя, эти понятия не особенно мотивируются. Таким образом, мы будем при этом очень кратки. Обоснования и примеры приводятся только тогда, когда мы выходим за рамки основных понятий, в частности когда речь идет не о непосредственных обобщениях понятий, относящихся к векторным пространствам.

В дальнейшем предполагается, что все кольца (которые обычно обозначаются через R, S или T) имеют единицу 1

2.1.1. *Определение.* *Пусть R — некоторое кольцо. Правый R-модуль M — это*
(I) *аддитивная абелева группа M вместе с*
(II) *отображением*

$$M \times R \to M, \quad (m, r) \longmapsto mr,$$

называемым модульным умножением, для которого выполняются:
(1) *закон ассоциативности:* $(mr_1)\, r_2 = m\,(r_1 r_2)$,
(2) *законы дистрибутивности:* $(m_1 + m_2)\, r = m_1 r + m_2 r$, $m\,(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$,
(3) *закон унитарности:* $m1 = m$.
(Здесь m, m_1, m_2 — произвольные элементы из M, а r, r_1, r_2 — произвольные элементы из R.)

Подчеркнем, что в соответствии с этим определением все рассматриваемые в дальнейшем модули являются унитарными. Если M — правый R-модуль, то мы записываем его также в виде M_R или $M = M_R$, чтобы указать кольцо R. Аналогично определяются *левые модули.*

Пусть даны два кольца S и R. Тогда M называется *S-R-бимодулем*, если M — левый S-модуль и правый R-модуль (с одной и той же аддитивной абелевой группой) и дополнительно выполняется следующий закон ассоциативности:

$$s(mr)=(sm)r \text{ для произвольных } s\in S,\ m\in M,\ r\in R.$$

Мы записываем S-R-бимодуль как ${}_SM_R$.

Когда мы говорим просто «модуль» или «R-модуль», мы имеем в виду односторонний R-модуль, у которого, однако, «сторона» не фиксирована. Утверждения об R-модулях имеют силу как для левых, так и для правых R-модулей.

Как известно, R-модуль называется *векторным пространством* над R, если R является полем (или телом). Далее, модули над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$ — это (аддитивно записываемые) абелевы группы.

Если M — правый R-модуль и нейтральные элементы аддитивных групп M и R обозначаются через 0_M и 0_R соответственно, то, как и для векторных пространств, мы имеем

$$0_M r = 0_M, \quad m0_R = 0_M,$$

а также

$$-(mr) = (-m)r = m(-r)$$

для произвольных $m\in M$, $r\in R$.

В дальнейшем, как обычно, вместо 0_M и 0_R будем писать просто 0.

2.2. Подмодули и идеалы

Вообще говоря, при изучении математических структур важную роль играют подструктуры, такие как, например, подгруппы, подполя, подпространства топологических пространств.

Точно также при исследовании модулей важную роль играют подмодули, к определению которых мы сейчас перейдем.

2.2.1. *Определение.* *Пусть M — правый R-модуль. Подмножество A в M называется подмодулем модуля M (запись: $A\subseteq M$ или $A_R\subseteq M_R$), если A является правым R-модулем при ограничении на A сложения и модульного умножения в M.*

Мы используем для обозначения подмодулей запись $A\subseteq M$, чтобы освободить запись $A\subset M$ для обозначения теоретико-множественного включения. Кроме того, мы употребляем такие обозначения:

$$A\underset{\neq}{\subseteq} M :\Leftrightarrow A \text{ — собственный подмодуль модуля } M;$$

$$A\not\subseteq M :\Leftrightarrow A \text{ не является подмодулем модуля } M.$$

Заметим, что из $A \not\subseteq M$ не обязательно следует $A \not\subset M$.

2.2.2. *Лемма.* Пусть M — *правый* R-*модуль. Если* A — *подмножество в* M *и* $A \neq \emptyset$, *то следующие утверждения эквивалентны:*
(1) $A \subseteq M$;
(2) A *есть подгруппа аддитивной группы модуля* M *и для всех* $a \in A$ *и* $r \in R$ *имеем* $ar \in A$ (*где* ar — *модульное произведение в* M);
(3) *для всех* $a_1, a_2 \in A$ *имеет место включение* $a_1 + a_2 \in A$ (*сложение в* M), *а для всех* $a \in A$ *и* $r \in R$ — *включение* $ar \in A$.

Доказательство проводится точно так же, как и для случая линейных подпространств векторных пространств. Мы предоставляем его читателю в качестве упражнения. □

Аналогичные утверждения верны для подмодулей левых модулей и бимодулей.

Заметим, что кольцо R можно рассматривать и как правый R-модуль R_R, и как левый R-модуль ${}_RR$, и как R-R-бимодуль ${}_RR_R$.

Правый идеал (соотв. *левый идеал*, *двусторонний идеал*) кольца R — это подмодуль модуля R_R (соотв. ${}_RR$, ${}_RR_R$). Если R коммутативно, то правые, левые и двусторонние идеалы совпадают и говорят просто об идеалах.

Примеры и замечания. **1.** Каждый модуль M имеет тривиальные подмодули 0 и M, где 0 — это модуль, состоящий из одного нулевого элемента модуля M.

2. Пусть M — произвольный модуль и $m_0 \in M$. Из 2.2.2 сразу видно, что

$$m_0R := \{m_0r \mid r \in R\}$$

является подмодулем. Он называется *циклическим подмодулем* в M, порожденным элементом m_0.

3. В случае когда M_K — векторное пространство над полем K, подмодули называются (линейными) подпространствами.

4. В кольце целых чисел $\mathbf{Z}$ каждый идеал цикличен.

5. Циклические идеалы кольца будем называть *главными идеалами*; коммутативное кольцо называется *кольцом главных идеалов*, если каждый его идеал является главным.

6. Поле K имеет лишь тривиальные идеалы 0 и K.

2.2.3. *Определение.* (1) *Модуль* $M = M_R$ *называется циклическим*, если

$$\exists m_0 \in M\,[M = m_0R].$$

(2) *Модуль* $M = M_R$ *называется простым*, если

$$M \neq 0 \wedge \forall A \subsetneq M\,[A = 0 \vee A = M],$$

т. е. $M \neq 0$ *и* 0 *и* M *суть единственные подмодули в* M.

(3) *Кольцо* R *называется простым, если*

$$R \neq 0 \wedge \forall A \subsetneq {}_RR_R\,[A = 0 \vee A = R],$$

т. е. $R \neq 0$ *и* 0 *и* R *суть единственные двусторонние идеалы кольца* R.

(4) *Подмодуль* $A \subsetneq M$ *называется минимальным, соотв. максимальным, подмодулем модуля* M, *если*

$$0 \underset{\neq}{\subsetneq} A \wedge \forall B \subsetneq M\left[B \underset{\neq}{\subsetneq} A \Rightarrow B = 0\right],$$

соотв. $A \underset{\neq}{\subsetneq} M \wedge \forall B \subsetneq M\left[A \underset{\neq}{\subsetneq} B \Rightarrow B = M\right]$.

Так же определяются *простые*, *минимальные* и *максимальные идеалы*. Как уже было сказано, циклические идеалы называют *главными идеалами*.

Заметим еще, что минимальные подмодули — это в точности простые подмодули. Минимальные (= простые), соотв. максимальные, подмодули модуля, если они существуют, очевидно, являются минимальными, соотв. максимальными, элементами в упорядоченном (по включению) множестве ненулевых подмодулей, соотв. собственных подмодулей.

2.2.4. ***Лемма.*** *Модуль* M *прост* $\Leftrightarrow$

$$M \neq 0 \wedge \forall m \in M\,[m \neq 0 \Rightarrow mR = M].$$

Доказательство. „$\Rightarrow$“: $m \neq 0 \Rightarrow mR \neq 0$ (так как $m1 = m \in mR$) $\Rightarrow mR = M$. „$\Leftarrow$“: $0 \underset{\neq}{\subsetneq} A \subsetneq M$ и $a \in A$, $a \neq 0 \Rightarrow aR = M \Rightarrow$ $\Rightarrow M = aR \subsetneq A \subsetneq M \Rightarrow A = M$. □

Примеры. 1. Кольцо $\mathbf{Z}$ не содержит минимальных (= простых) идеалов, так как если идеал $n\mathbf{Z} \neq 0$, то он содержит собственный идеал, отличный от нуля, например $2n\mathbf{Z}$.

Максимальные идеалы кольца $\mathbf{Z}$ — это в точности простые идеалы вида $p\mathbf{Z}$, где p — простое число. Это следует из того факта, что

$$m\mathbf{Z} \subsetneq n\mathbf{Z} \Leftrightarrow n \mid m.$$

2. Модуль $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ не имеет ни минимальных, ни максимальных подмодулей. Действительно,

$$0 \underset{\neq}{\subsetneq} A \subset \mathbf{Q}_\mathbf{Z} \text{ и } a \in A,\ a \neq 0 \Rightarrow 0 \underset{\neq}{\subsetneq} 2a\mathbf{Z} \underset{\neq}{\subsetneq} a\mathbf{Z} \subsetneq A \subsetneq \mathbf{Q}.$$

Таким образом, A не может быть минимальным. Отсутствие максимальных подмодулей будет выведено ниже как следствие из 2.3.7.

3. В векторном пространстве $V = V_K$ минимальные (= простые) подпространства исчерпываются одномерными подпространствами. Одномерные подпространства суть подпространства вида vK, где $v \neq 0$, $v \in V$. Если V n-мерно, то максимальные подпространства — это в точности $(n-1)$-мерные подпространства. Если V бесконечномерно, то и тогда имеются максимальные подпространства (что хорошо известно из линейной алгебры и что мы еще раз покажем в дальнейшем).

4. Если K — тело, то модуль K_K прост и K просто как кольцо (т. е. модуль ${}_KK_K$ прост). Это непосредственно следует из того факта, что любой ненулевой элемент из K имеет обратный.

5. Пусть $R := K_n^n$ — кольцо квадратных матриц порядка n с коэффициентами из тела K. Отметим без доказательства (оно последует позже), что хотя R просто (как кольцо), но модуль R_R не прост для $n > 1$.

Напомним в этой связи определение алгебры.

2.2.5. ***Определение.*** *Алгебра — это пара* (R, K), *где*
(I) R — *кольцо, а*
(II) K — *коммутативное кольцо, причем*
(III) R *есть правый* K*-модуль и*

$$\forall r_1, r_2 \in R \forall k \in K [(r_1 r_2) k = r_1 (r_2 k) = (r_1 k) r_2].$$

Из наших предположений о кольцах и модулях следует, что R обладает единицей и K унитарно действует на R.

Алгебра (R, K) называется также K-*алгеброй* R или *алгеброй над* K.

Тот факт, что мы определили R как „правую K-алгебру“, не играет никакой роли. Поскольку K коммутативно, с помощью определения

$$kr := rk, \quad r \in R, \quad k \in K$$

можно перейти к „левой K-алгебре“.

Если 1 — единица кольца R, то $1K = \{1k \mid k \in K\}$ — подкольцо центра кольца K. Обратно, каждое кольцо является алгеброй над любым подкольцом своего центра. Напомним, что *центр* кольца R — это множество таких элементов $a \in R$, что $ar = ra$ для любого элемента $r \in R$. Центр кольца R является его коммутативным подкольцом, содержащим единицу.

2.3. Пересечения и суммы подмодулей

2.3.1. ***Лемма.*** *Пусть* Γ *— некоторое множество подмодулей модуля* M*. Тогда*

$$\bigcap_{A\in\Gamma} A := \{m \in M \mid \forall A \in \Gamma\, [m \in A]\}$$

является подмодулем в M*.*

Доказательство проводится с помощью 2.2.2, как для подпространств векторных пространств. □

Замечание. Заметим, что для $\Gamma = \emptyset$ это определение дает

$$\bigcap_{A\in\emptyset} A = M.$$

Из 2.3.1 непосредственно вытекает

Следствие. $\bigcap_{A\in\Gamma} A$ *— наибольший подмодуль в* M*, содержащийся во всех* $A \in \Gamma$*.*

Примеры. $2\mathbf{Z} \cap 3\mathbf{Z} = 6\mathbf{Z}$; $\bigcap_{p\text{ — простое число}} p\mathbf{Z} = 0$.

2.3.2. ***Лемма.*** *Пусть* X *— подмножество модуля* M_R*. Тогда*

$$A := \begin{cases} \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j r_j \mid x_j \in X \wedge r_j \in R \wedge n \in \mathbf{N} \right\}, & \text{если } X \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } X = \emptyset \end{cases}$$

является подмодулем в M*.*

Доказательство. Для $X = \emptyset$ утверждение очевидно. Пусть $X \neq \emptyset$. В силу 2.2.2,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i r_i,\ \sum_{j=1}^{n} x'_j r' \in A \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i r_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j r'_j \in A,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j t_j \in A,\quad r \in R \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j r_j r \in A. \qquad \square$$

2.3.3. ***Определение.*** *Модуль* A*, определенный в* 2.3.2*, называется* ***подмодулем в*** M*,* ***порожденным множеством*** X*, и обозначается* $|X)$*.*

Важно, что этот подмодуль, который для $X \neq \emptyset$ состоит из всех конечных линейных комбинаций $\sum x_j r_j$, где $x_j \in X$, может быть охарактеризован следующим свойством.

2.3.4. ***Лемма.*** *$|X)$ — наименьший подмодуль в M, содержащий X, и*

$$|X) = \bigcap_{C \subseteq M \wedge X \subset C} C.$$

Доказательство. Если $X = \emptyset$, то $|X) = 0$ и утверждение тривиально.

Пусть $X \neq \emptyset$ и C — подмодуль, содержащий X. Тогда вместе с $x_j \in X$ модулю C принадлежат также $x_j r_j$ и все конечные суммы таких элементов. Следовательно, $|X) \subseteq C$. Так как X — подмножество в $|X)$ (ввиду того что $x = x1 \in |X)$), то $|X)$ — действительно наименьший подмодуль в M, содержащий X.

Пусть $D := \bigcap_{C \subseteq M \wedge X \subset C} C$. Тогда X есть подмножество в D, а поскольку D — подмодуль, то $|X) \subseteq D$. С другой стороны, $|X)$ фигурирует в указанном пересечении как одно из C, поэтому $D \subseteq |X)$, а значит $|X) = D$. □

В случае S-R-бимодуля M подмодуль, порожденный подмножеством X в M, задается равенством

$$(X) := \begin{cases} \left\{ \sum_{j=1}^{n} s_j x_j r_j \mid x_j \in X \wedge s_j \in S \wedge r_j \in R \wedge n \in \mathbf{N} \right\}, & \text{если } X \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } X = \emptyset. \end{cases}$$

Как и выше, имеем (X) — наименьший подмодуль в ${}_S M_R$, содержащий X, и

$$(X) = \bigcap_{C \subseteq M \wedge X \subset C} C.$$

Такие же обозначения используются для идеалов.

2.3.5. ***Определения.*** *Пусть снова $M = M_R$.*

(1) *Подмножество X модуля M называется* ***системой образующих*** *для M, если $|X) = M$.*

(2) *Модуль M (или правый идеал) называется* ***конечно-порожденным****, если для M существует конечная система образующих.*

(3) *Модуль (соотв. правый идеал) называется* ***циклическим*** *(соотв.* ***главным правым идеалом****), если он порождается одним элементом (ср. с 2.2.3).*

(4) *Подмножество X модуля M называется* ***свободным****, если для каждого конечного подмножества $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset X$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, из*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i r_i = 0, \quad r_i \in R,$$

следует, что $r_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.
(5) *Подмножество* X *модуля* M *называется базисом для* M, *если оно является системой образующих для* M *и свободно.*

Если $X \neq \emptyset$ — система образующих для M, то это означает, что каждый элемент $m \in M$ представим в виде конечной линейной комбинации

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i, \quad x_i \in X, \quad r_i \in R.$$

Само собой разумеется, что $n \in \mathbf{N}$ здесь не фиксировано, а зависит от выбранного m. Далее, как коэффициенты r_i, так и элементы $x_i \in X$, действительно входящие в линейную комбинацию, не определяются однозначно элементом m. Правда, если $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$ конечно, то каждый элемент $m \in M$ можно записать в виде

$$m = \sum_{i=1}^{t} x_i r_i,$$

так как отсутствующие слагаемые $x_i r_i$ можно включить в сумму в виде $x_i 0$. Однако и здесь коэффициенты r_i могут определяться не однозначно.

Если же речь идет о базисе, то коэффициенты определяются однозначно.

2.3.6. ***Лемма.*** *Пусть* $X \neq \emptyset$ — *некоторая система образующих для* $M = M_R$. *Тогда:* X — *базис* $\Leftrightarrow$ *для каждого* $m \in M$ *представление*

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i, \text{ где } x_i \in X, \ r_i \in R,$$

однозначно в следующем смысле: если

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i' \wedge x_i \neq x_j \text{ для } i \neq j \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

то

$$r_i = r_i' \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. „$\Rightarrow$“: Пусть

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i' \wedge x_i \neq x_j \text{ для } i \neq j \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$0 = \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - r'_j),$$

и так как X свободно, то получаем $r_j - r'_j = 0$, т. е. $r_j = r'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

„$\Leftarrow$“: Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} x_j r_j = 0 \wedge x_i \neq x_j \text{ для } i \neq j \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Поскольку также $0 = \sum_{j=1}^{n} x_j 0$, то $r_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. X свободно. □

Замечание. Если $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$ — конечная система образующих (причем $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$), то справедливо такое утверждение: X — базис $\Leftrightarrow$ для каждого $m \in M$ коэффициенты $r_i \in R$ в представлении

$$m = \sum_{j=1}^{t} x_j r_j$$

определены однозначно. Заметим, что в случае бесконечного базиса X это утверждение об однозначности лишено смысла. Для бесконечного X отсутствующие слагаемые нельзя включить в сумму в виде членов $x_j 0$, так как бесконечные суммы — даже нулей — не определены! Утверждение об однозначности приходится понимать в смысле 2.3.6!

Примеры. **1.** Каждый модуль M тривиальным образом служит сам себе системой образующих (поскольку каждый элемент $m \in M$ есть конечная линейная комбинация вида $m = m1$, $1 \in R$).

2. Если R — кольцо, то $\{1\}$ — базис для R_R (и для ${}_R R$).

3. Рассмотрим теперь свойства модуля $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$.

2.3.7. ***Утверждение.*** *Если из произвольной системы образующих X для $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ удалить конечное число произвольных элементов, то оставшееся множество снова будет системой образующих для $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что из X можно удалить произвольный элемент x_0. Утверждение для конечного числа элементов получается затем по индукции.

Из того что X — система образующих, следует, что $x_0/2$ можно представить в виде конечной суммы

$$\frac{x_0}{2} = x_0 z_0 + \sum_{x_i \neq x_0} x_i z_i, \quad x_i \in X, \quad z_i \in \mathbf{Z}.$$

Тогда

$$x_0 = x_0 2z_0 + \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2z_i, \text{ откуда } x_0 n = \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2z_i,$$

где $n := 1 - 2z_0 \in \mathbf{Z} \wedge n \neq 0$. Пусть теперь

$$\frac{x_0}{n} = x_0 z_0' + \sum_{x_j \neq x_0} x_j z_j', \quad x_j \in X, \quad z_j' \in \mathbf{Z}.$$

Тогда

$$x_0 = x_0 n z_0' + \sum_{x_j \neq x_0} x_j n z_j' = \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2 z_i z_0' + \sum_{x_j \neq x_0} x_j n z_j'$$
$$= \sum_{x_k \neq x_0} x_k z_k'', \quad x_k \in X, \quad z_k'' \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, x_0 принадлежит подмодулю, порожденному множеством $X \setminus \{x_0\}$, и поскольку X — система образующих для $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$, то и $X \setminus \{x_0\}$ — также система образующих. □

Из этого результата вытекают такие следствия:

$\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ не обладает конечной системой образующих. В противном случае пустое множество было бы системой образующих для $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ и мы имели бы $\mathbf{Q}_\mathbf{Z} = 0$ ↯ [1].

В $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ нет максимальных подмодулей. Действительно, предположим, что A — такой подмодуль и $q \in \mathbf{Q}$, $q \notin A$. Тогда, согласно 2.2.2,

$$q\mathbf{Z} + A := \{qz + a \mid z \in \mathbf{Z} \wedge a \in A\}$$

является подмодулем в $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$. Так как этот модуль строго содержит A, то

$$q\mathbf{Z} + A = \mathbf{Q}.$$

Следовательно, $A \cup \{q\}$ служит системой образующих для $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$. Но тогда и само A будет системой образующих, откуда получаем $A = \mathbf{Q}$ ↯.

Отсутствие в $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ простых (= минимальных) подмодулей уже было установлено раньше. Разумеется, $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ не обладает базисом, ибо если из базиса выбросить один элемент, то оставшееся мно-

[1] Напомним (см. стр. 8), что символ ↯ означает: „Противоречие!" — *Прим ред.*

жество не будет системой образующих (поскольку удаленный элемент не представим линейно через оставшиеся).

4. В качестве следующего примера мы докажем теорему о том, что каждое векторное пространство над телом обладает базисом. Здесь мы впервые применим лемму Цорна, которая позже будет использоваться во многих доказательствах. Поэтому сформулируем ее здесь.

Лемма Цорна. *Пусть A — упорядоченное множество. Если каждое вполне упорядоченное подмножество в A обладает верхней гранью в A, то A обладает максимальным элементом.*

Отметим тот известный факт, что лемма Цорна эквивалентна:
1° аксиоме выбора;
2° теореме о полном упорядочении.
В этой книге мы используем как лемму Цорна, так и аксиому выбора.

2.3.8. *Теорема.* *Каждое векторное пространство над телом обладает базисом.*

Доказательство. Пусть K — тело и V_K — векторное пространство над K. Обозначим через Φ множество всех свободных подмножеств в V. Поскольку пустое множество свободно, то Φ непусто. Множество Φ является упорядоченным по включению. Чтобы применить лемму Цорна, нам нужно показать, что каждое вполне упорядоченное подмножество Γ в Φ обладает верхней гранью. Если $\Gamma = \emptyset$, то каждый элемент является верхней гранью для Γ. Пусть теперь $\Gamma = \{X_j \mid j \in J\} \neq \emptyset$. Покажем, что

$$X := \bigcup_{j \in J} X_j$$

является верхней гранью для Γ в Φ. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные элементы из Γ. Поскольку Γ вполне упорядочено, существует $X_j \in \Gamma$, такое что $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_j$. Так как X_j свободно, то $\{x_1, \ldots, x_n\}$ свободно, следовательно X свободно. Тогда по лемме Цорна в Φ существует максимальный элемент Y. Покажем, что Y — базис пространства V над K. Поскольку Y свободно, достаточно показать, что $(Y) = V$. Если $V = 0$, то $Y = \emptyset$ и из определения (Y) следует, что $(Y) = V$. Если $V \neq 0$, то $Y \neq \emptyset$. Пусть теперь $v \in V$ и $v \notin Y$. Тогда $Y \cup \{v\}$ не свободно в силу максимальности Y. Следовательно, существуют различные $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ и $k, k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$, такие, что

$$vk + \sum_{j=1}^{n} y_j k_j = 0,$$

причем не все k, k_1, ..., k_n равны нулю. Равенство $k=0$ невозможно, ибо тогда (в силу того что Y свободно) мы имели бы $k_j=0$ $(j=1, \ldots, n)$. Из того что $k\neq 0$, следует, что

$$v=vkk^{-1}=\sum_{j=1}^{n} y_j(-k_jk^{-1})\in(Y)$$

и потому $V=(Y)$. □

После рассмотрения этих примеров продолжим общие рассуждения.

Утверждение. *Пусть* $\Lambda=\{A_i \mid i\in I\}$ *— некоторое множество подмодулей* $A_i \subseteq M_R$. *Тогда*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\begin{cases}\left\{\sum_{i\in I'} a_i \mid a_i\in A_i \wedge I'\subset I \wedge I' \text{ конечно}\right\}, & \text{если } \Lambda\neq\emptyset,\\ 0, & \text{если } \Lambda=\emptyset,\end{cases}$$

т. е. для $\Lambda\neq\emptyset$ *модуль* $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ *состоит из всех конечных сумм* $\sum a_i$, *где* $a_i\in A_i$.

Доказательство. По определению, для $I\neq\emptyset$ модуль $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ представляет собой множество всех конечных сумм вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_jr_j, \text{ где } a_j\in\bigcup_{i\in I} A_i.$$

Объединяя все слагаемые a_jr_j, лежащие в данном фиксированном A_i, в одну сумму a_i' и поступая аналогичным образом с остальными слагаемыми, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_jr_j=\sum_{i\in I'} a_i'.$$

Таким образом,

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\subseteq\left\{\sum_{i\in I'} a_i \mid a_i\in A_i\wedge I'\subset I\wedge I' \text{ конечно}\right\}.$$

Обратное включение очевидно. □

2.3.9. ***Определение.*** *Если* $\Lambda=\{A_i \mid i\in I\}$ *— произвольное множество подмодулей* $A_i\subseteq M$, *то*

$$\sum_{i\in I} A_i:=\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$

называется сумм ой подмодулей $\{A_i \mid i \in I\}$.

При $\Lambda = \{A_1, \ldots, A_n\}$ каждый элемент из $\sum_{j=1}^{n} A_j$ можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_j, \text{ где } a_j \in A_j,$$

беря вместо отсутствующих слагаемых $a_j = 0$. Подчеркнем еще раз, что представление $\sum_{i \in I'} a_i$ для элементов суммы не обязано быть однозначным. Представление это будет однозначным в частном случае, которым мы займемся в следующем параграфе.

Теперь мы в состоянии описать максимальные подмодули произвольного модуля.

2.3.10. ***Лемма.*** *Пусть* $A \subsetneq M$. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) A — *максимальный подмодуль в* M;
(2) $\forall m \in M\,[m \notin A \Rightarrow M = mR + A]$.

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2):“ : $m \notin A \Rightarrow A \subsetneq mR + A \Rightarrow$ (2).

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Пусть $A \subsetneq B \subsetneq M$. Тогда $m \in B$, $m \notin A \Rightarrow M = mR + A \subsetneq B + A \subsetneq B \subsetneq M \Rightarrow B = M$ и, таким образом, имеет место (1). □

Как было показано, $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ не содержит максимальных подмодулей. В связи с этим интересна следующая теорема.

2.3.11. ***Теорема.*** *В конечно-порожденном модуле* M_R *каждый собственный подмодуль* A *содержится в некотором максимальном подмодуле.*

Доказательство. Пусть $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\}$ — система образующих для M. Если $A \subsetneq M$, то множество

$$\Phi := \{B \mid A \subsetneq B \subsetneq M\}$$

непусто, поскольку $A \in \Phi$. Далее, оно упорядочено по включению. Чтобы применить лемму Цорна, нужно показать, что каждое вполне упорядоченное подмножество $\Gamma \subset \Phi$ обладает верхней гранью в Φ. Положим

$$C := \bigcup_{B \in \Gamma} B.$$

Тогда $A \subsetneq C$. Допустив, что $C = M$, мы получили бы, что $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\} \subset C$ и, следовательно, должен существовать под-

модуль $B \in \Gamma$, для которого $\{m_1, \ldots, m_t\} \subset B$. Но тогда $B = M$ ↯. Этим показано, что $C \in \Phi$. По лемме Цорна в Φ существует некоторый максимальный элемент D. Покажем, что D — максимальный подмодуль в M_R. Допустим, что $D \subsetneq L \subsetneq M_R$. Тогда $L \in \Phi$, и в силу максимальности D в Φ получаем $D \overset{\neq}{=} L$. □

Полагая $A = 0$, получаем, что всякий ненулевой конечно-порожденный модуль M обладает максимальным подмодулем.

2.3.12. ***Следствие.*** *Каждый конечно-порожденный модуль $M \neq 0$ содержит максимальный подмодуль.*

Чтобы дуализовать понятие конечной порожденности, нам нужно найти для него другую, эквивалентную формулировку.

2.3.13. ***Теорема.*** *Модуль M_R конечно-порожден тогда и только тогда, когда в каждом множестве $\{A_i \mid i \in I\}$ подмодулей $A_i \subsetneq M$, удовлетворяющем условию*

$$\sum_{i \in I} A_i = M,$$

существует такое конечное подмножество $\{A_i \mid i \in I_0\}$ (т. е. $I_0 \subset I$ и I_0 конечно), что

$$\sum_{i \in I_0} A_i = M.$$

Доказательство. Пусть M конечно порожден, т. е. $M = m_1R + \ldots + m_tR$. В силу того что $\sum_{i \in I} A_i = M$, каждый элемент m_j является конечной суммой элементов из A_i. Следовательно, существует такое конечное подмножество $I_0 \subset I$, что

$$m_1, \ldots, m_t \in \sum_{i \in I_0} A_i.$$

Отсюда вытекает, что

$$M = m_1R + \ldots + m_tR \subsetneq \sum_{i \in I_0} A_i \subsetneq M,$$

т. е. наше утверждение верно.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим множество подмодулей $\{mR \mid m \in M\}$. Существует конечное подмножество $\{m_1R, \ldots, m_tR\}$, для которого

$$m_1R + \ldots + m_tR = M,$$

следовательно, M конечно-порожден. □

Введем теперь дуальное понятие.

2.3.14. ***Определение.*** *Модуль M_R называется конечно-копорожденным, если в каждом множестве $\{A_i \mid i \in I\}$ подмодулей*

$A_i \subseteq M$, *удовлетворяющем условию* $\bigcap_{i \in I} A_i = 0$, *существует такое конечное подмножество* $\{A_i \mid i \in I_0\}$ (*т. е.* $I_0 \subset I$ *и* I_0 *конечно*), *что* $\bigcap_{i \in I_0} A_i = 0$.

Позже мы еще вернемся к этому понятию, а пока приведем лишь два *примера*.

1. Модуль $\mathbf{Z}_{\mathbf{Z}}$ не является конечно-копорожденным, ибо

$$\bigcap_{p \text{ — простое число}} p\mathbf{Z} = 0,$$

но для любого конечного набора простых чисел $p_1, \ldots, p_n$

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i\mathbf{Z} = p_1 \ldots p_n\mathbf{Z} \neq 0.$$

2. Векторное пространство V над полем K конечно-копорождено тогда и только тогда, когда оно конечномерно. Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

Как и для векторных пространств, для модулей над произвольным кольцом имеет место закон модулярности.

2.3.15. ***Лемма*** (закон модулярности). *Если* $A, B, C \subseteq M$ *и* $B \subseteq C$, *то*

$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C) = (A \cap C) + B.$$

Доказательство. Пусть $a + b = c \in (A + B) \cap C$, где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Тогда (поскольку $B \subseteq C$) $a = c - b \in A \cap C$. Следовательно, $a + b = c \in (A \cap C) + B$ и потому $(A + B) \cap C \subseteq (A \cap C) + B$. Пусть теперь $d \in A \cap C$, $b \in B$. В силу $B \subseteq C$ имеем $d + b \in \in (A + B) \cap C$ и, следовательно, $(A \cap C) + B \subseteq (A + B) \cap C$. □

Заметим, что для $A, B, C \subseteq M$ включение

$$(A \cap C) + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap C$$

справедливо всегда — и без предположения, что $B \subseteq C$. Однако обратное включение не всегда верно.

2.4. Внутренние прямые суммы

2.4.1. ***Определение.*** *Модуль* M *называется* (*внутренней*) *прямой суммой множества* $\{B_i \mid i \in I\}$ *подмодулей* $B_i \subseteq M$ (*запись:* $M = \bigoplus_{i \in I} B_i$), *если*

(1) $M = \sum_{i \in I} B_i$ *и*

(2) $\forall j \in I \left[B_j \cap \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} B_i = 0 \right]$.

Равенство $M = \bigoplus_{i \in I} B_i$ *называется также прямым разложением модуля* M *в сумму подмодулей* $\{B_i \mid i \in I\}$.

В случае конечного множества индексов $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *пишут также* $M = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$.

2.4.2. ***Лемма.*** *Пусть* $\{B_i \mid i \in I\}$ *— некоторое множество подмодулей* $B_i \subset M$ *и* $M = \sum_{i \in I} B_i$. *Тогда условие* (2) *предыдущего определения эквивалентно следующему условию:*

Для каждого $x \in M$ *представление* $x = \sum_{i \in I'} b_i$, *где* $b_i \in B_i$, $I' \subset I$, I' *конечно, однозначно в том смысле, что если* $x = \sum_{i \in I'} b_i = \sum_{i \in I'} c_i$, *где* $b_i, c_i \in B_i$, *то* $\forall i \in I' [b_i = c_i]$.

Доказательство. „$\Rightarrow$“: Пусть выполнено условие (2) и $x = \sum_{i \in I'} b_i = \sum_{i \in I'} c_i$. Тогда

$$\forall j \in I' \left[b_j - c_j = \sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} (c_i - b_i) \in B_j \cap \sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} B_i \right].$$

Из того что

$$B_j \cap \sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} B_i \subset B_j \cap \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} B_i = 0,$$

следует, что $b_j = c_j$ для всех $j \in I'$.

„$\Leftarrow$“: Пусть $b \in B_j \cap \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} B_i$. Тогда $b = b_j \in B_j$, и существует такое конечное подмножество $I' \subset I$, $j \notin I'$, что

$$b = b_j = \sum_{i \in I'} b_i, \quad b_i \in B_i.$$

Дополнив левую сторону слагаемыми $0 \in B_i$, $i \in I'$, а правую — слагаемыми $0 \in B_j$, для обеих сторон получаем одинаковое конечное множество индексов $I' \cup \{j\}$. Из однозначности разложения вытекает, что $b = b_j = 0$, т. е. верно (2). □

2.4.3. ***Определения.*** (1) *Подмодуль* $B \subset M$ *называется прямым слагаемым в* M, *если* $\exists C \subset M [M = B \oplus C]$.

(2) *Модуль* $M \neq 0$ *называется неразложимым, если* 0 *и* M *— единственные прямые слагаемые в* M.

Примеры и замечания. **1.** Пусть $V = V_K$ — векторное пространство и $\{x_i \mid i \in I\}$ — некоторый его базис. Тогда, очевидно,

$$V = \bigoplus_{i \in I} x_i K.$$

Как мы покажем позже, всякое подпространство в V является прямым слагаемым.

2. В $\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$ идеал $n\mathbf{Z}$, где $n \neq 0$, $n \neq \pm 1$, не является прямым слагаемым. Действительно, $\mathbf{Z} = n\mathbf{Z} \oplus m\mathbf{Z} \Rightarrow nm \in n\mathbf{Z} \cap m\mathbf{Z} = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \mathbf{Z} = n\mathbf{Z} \Rightarrow n = \pm 1$ ↯. Отсюда следует, что модуль $\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$ неразложим.

3. Каждый простой модуль M неразложим, ибо лишь 0 и M являются его подмодулями.

4. Если модуль обладает наибольшим собственным подмодулем или во множестве его ненулевых подмодулей есть наименьший подмодуль, то этот модуль неразложим. Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

2.5. Фактормодули и факторкольца

Фактормодули определяются так же, как и факторпространства векторных пространств, поскольку при этом используются лишь свойства линейности.

Всякий подмодуль $C \subseteq M_R$ является, в частности, подгруппой аддитивной группы M. Следовательно, определена *факторгруппа* $M/C = \{m + C \mid m \in M\}$ со сложением

$$(m_1 + C) + (m_2 + C) := (m_1 + m_2) + C.$$

В M/C можно ввести такое модульное умножение, что M/C становится правым модулем. Он называется *фактормодулем* или *модулем классов вычетов* M *по модулю* C (или просто *по* C).

2.5.1. ***Определение.*** $(m + C)\, r := mr + C$, $m \in M$, $r \in R$.

Чтобы показать, что M/C действительно является правым R-модулем, достаточно проверить, что

$$M/C \times R \to M/C, \quad (m + C,\ r) \longmapsto mr + C$$

является отображением, ибо выполнение остальных модульных свойств немедленно следует из их выполнения в M. Имеем $m_1 + C = m_2 + C \Rightarrow m_1 = m_2 + c$, $c \in C \Rightarrow m_1 r + C = (m_2 + c)\, r + C = m_2 r + cr + C = m_2 r + C$.

Фактормодули левых модулей и бимодулей определяются аналогично.

Пусть теперь R — некоторое кольцо и C — двусторонний идеал в R. Факторгруппу R/C аддитивной группы кольца R по модулю C можно превратить в кольцо, которое называется *факторкольцом* или *кольцом вычетов R по модулю C* (или просто *по C*).

2.5.2. *Определение.* $(r_1+C)(r_2+C) := r_1r_2+C$, $r_1, r_2 \in R$.

Как и выше, легко видеть, что это умножение не зависит от выбранных представителей классов вычетов, т. е. операция определена корректно. Выполнение остальных кольцевых свойств в R/C непосредственно следует из их выполнения в R. Если кольцо R обладает единицей 1 (как мы здесь всегда предполагаем), то $1+C$ — единица кольца R/C.

Исследуем теперь некоторые связи между свойствами двусторонних идеалов и свойствами соответствующих факторколец. Для этого нам понадобятся некоторые понятия и простые факты.

2.5.3. *Определение.* *Пусть A, B — двусторонние идеалы в R. Тогда*

$$AB := (\{ab \mid a \in A \wedge b \in B\}),$$

т. е. AB — двусторонний идеал кольца R, порожденный всевозможными произведениями ab, где $a \in A$, $b \in B$. Идеал AB называется произведением идеалов A и B.

Из этого определения непосредственно следует

Замечание. $AB = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \mid a_j \in A \wedge b_j \in B \wedge n \in \mathbf{N} \right\}$.

2.5.4. *Определение.* *Пусть C — двусторонний идеал в R.*

(1) *C называется вполне первичным идеалом в R, если*

$$\forall r_1, r_2 \in R\,[r_1r_2 \in C \Rightarrow (r_1 \in C \vee r_2 \in C)].$$

(2) *C называется первичным идеалом в R, если*

$$\forall A, B \subseteq_R R_R\,[AB \subseteq C \Rightarrow (A \subseteq C \vee B \subseteq C)],$$

т. е. в случае когда C содержит произведение AB двусторонних идеалов A, B, по крайней мере один из них должен содержаться в C.

(3) *Элемент $r \in R$ называется правым делителем нуля, если $r \neq 0$ и существует такой элемент $s \in R$, $s \neq 0$, что $rs = 0$. Аналогично определяется левый делитель нуля.*

(4) *Кольцо R называется кольцом без делителей нуля, если в R нет ни правых, ни левых делителей нуля.*

(5) *Пусть $r \in R$; элемент $r' \in R$ называется правым обратным (соотв. левым обратным, обратным) для r, если $rr' = 1$ (соотв. $r'r = 1$, $rr' = r'r = 1$).*

Заметим, что из существования правого делителя нуля в некотором кольце следует существование в этом кольце и левого

делителя нуля (и наоборот). Если r' — правый обратный и r'' — левый обратный для r, то

$$r' = 1r' = (r''r)\,r' = r''(rr') = r''1 = r''.$$

Отсюда сразу следует, что обратный элемент (если он существует) определен однозначно. Обозначается он через r^{-1}.

2.5.5. *Лемма.* (1) *Если C — вполне первичный идеал в R, то C — первичный идеал в R.*
(2) *Если R — коммутативное кольцо, то верно и обратное (т. е. в коммутативном кольце понятия полной первичности и первичности совпадают).*

Доказательство. (1) Пусть A, $B \subsetneq {}_RR_R$ и $AB \subseteq C$. Предположим, что $A \not\subseteq C$. Тогда $\exists a_0 \in A\,[a_0 \notin C]$. Так как $a_0 b \in C \wedge a_0 \notin C$, то $b \in C$ для всех $b \in B$, откуда $B \subseteq C$.

(2) Пусть $r_1 r_2 \in C$. Так как R коммутативно, то r_1R и r_2R — двусторонние идеалы; $r_1r_2 \in C \Rightarrow r_1Rr_2R = r_1r_2R \subseteq C$. В силу того что C — первичный идеал, получаем $r_1R \subseteq C \vee r_2R \subseteq C$, откуда $r_1 \in C \vee r_2 \in C$. □

2.5.6. *Теорема.* *Пусть C — двусторонний идеал в R. Тогда*
(1) *C — вполне первичный идеал в кольце $R \Leftrightarrow R/C$ — кольцо без делителей нуля.*
(2) *C — первичный идеал в $R \Leftrightarrow$ нулевой идеал кольца R/C первичен.*
(3) *C — максимальный двусторонний идеал в $R \Leftrightarrow R/C$ просто.*
4) *C — максимальный правый идеал в $R \Leftrightarrow R/C$ — тело.*

Доказательство. (1) „$\Rightarrow$“: Положим для краткости $\bar{R} := R/C$ и $\bar{r} := r + C$, и пусть $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in \bar{R}$. Имеем $\bar{r}_1\bar{r}_2 = 0 \Leftrightarrow r_1r_2 + C = C \Leftrightarrow r_1r_2 \in C \Rightarrow r_1 \in C \vee r_2 \in C \Rightarrow \bar{r}_1 = 0 \vee \bar{r}_2 = 0$.

(1) „$\Leftarrow$“: $r_1, r_2 \in R \wedge r_1r_2 \in C \Rightarrow 0 = \overline{r_1r_2} = r_1r_2 + C = (r_1 + C) \times (r_2 + C) = \bar{r}_1\bar{r}_2 \Rightarrow \bar{r}_1 = 0 \vee \bar{r}_2 = 0 \Rightarrow r_1 \in C \vee r_2 \in C$.

(4) „$\Rightarrow$“: $0 \neq \bar{r} \in \bar{R} \Rightarrow r \notin C \Rightarrow R = rR + C$. Так как $r \notin C$, то $rR + C$ — правый идеал, строго содержащий C, поэтому в силу максимальности C он должен быть равен R. Следовательно, существуют такие $r' \in R$ и $c \in C$, что $1 = rr' + c \Rightarrow \bar{1} = \overline{rr' + C} = (r + C)(r' + C) = \bar{r}\bar{r}'$, т. е. каждый элемент $\neq 0$ из $\bar{R}$ обладает правым обратным. Так как $\bar{1} = \bar{r}\bar{r}' \neq 0 \Rightarrow \bar{r}' \neq 0$, то существует такой элемент $\bar{r}'' \in \bar{R}$, что $\bar{r}'\bar{r}'' = \bar{1} \Rightarrow \bar{r} = \bar{r}'' \Rightarrow \bar{r}'$ — обратный элемент для $\bar{r}$; значит, $\bar{R}$ — тело.

(4) „$\Leftarrow$“: $r \in R \wedge r \notin C \Rightarrow \bar{r} \neq 0 \Rightarrow \exists \bar{r}' \in \bar{R}\ \ [\bar{r}\bar{r}' = \bar{r}'\bar{r} = \bar{1}] \Rightarrow rr' + C = 1 + C \Rightarrow rr' + c = 1 \Rightarrow rR + C = R \Rightarrow$ (согласно 2.3.10) C — максимальный правый идеал в R.

(2) и (3) доказываются аналогично (1) и (4). Провести это доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. Кроме того, позже мы укажем более точную связь между решет-

ками идеалов R и R/C, из которой непосредственно следуют все утверждения этой теоремы. □

Примеры. 1. Хорошо известный пример — факторпространства векторных пространств.

2. $$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \begin{cases} \text{поле из } p \text{ элементов, если } n = p \text{ — простое число,} \\ \text{кольцо с делителями нуля, если } n \neq p \wedge n \neq 0 \wedge n \neq \pm 1, \\ 0, \text{ если } n = \pm 1, \\ \mathbf{Z} \text{ (с точностью до изоморфизма), если } n = 0. \end{cases}$$

3. Пусть $K[x]$ — кольцо многочленов от переменного x с коэффициентами из некоторого поля K. Если $f(x) \in K[x]$ и $f(x)$ неприводим, то $K[x]/f(x)\,K[x]$ — конечномерное надполе поля K (точнее, поля, изоморфного полю K).

Упражнения

1. Показать, что в определении модуля коммутативность сложения следует из остальных условий.

2. Указать пример модуля M, не обладающего конечной системой образующих, в котором каждый собственный подмодуль содержится в некотором максимальном подмодуле.

3. a) Пусть $A, B, C \subsetneq M = M_R$. Доказать, что $A \subset B \cup C \Rightarrow A \subsetneq B \vee A \subsetneq C$.
b) Привести пример модуля M и подмодулей $A, B, C, D \subsetneq M_R$, таких что

$$A \subset B \cup C \cup D \wedge A \not\subset B \wedge A \not\subset C \wedge A \not\subset D.$$

4. Пусть A — двусторонний идеал кольца R. Показать, что A — максимальный правый идеал $\Leftrightarrow A$ — максимальный левый идеал.

5. Пусть $M = M_R \wedge x \in M \wedge x \neq 0 \wedge \Lambda := \{A \mid A \subsetneq M \wedge x \notin A\}$. Показать, что
a) Λ непусто и содержит некоторый максимальный элемент (в качестве отношения порядка рассматривается включение).
b) Если $R = K$ — поле то каждый максимальный элемент из Λ является максимальным подмодулем в M.

6. В множестве $\Lambda := \{A \mid A \subsetneq \mathbf{Q}_\mathbf{Z} \wedge 1 \notin A\}$ указать минимальный элемент B и подмодуль $C \subsetneq \mathbf{Q}_\mathbf{Z}$, такие что

$$B \underset{\neq}{\subsetneq} C \underset{\neq}{\subsetneq} \mathbf{Q}_\mathbf{Z}.$$

7. Пусть $\{B_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ — некоторое множество подмодулей в $M = M_R$, причем

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Показать, что следующие условия эквивалентны:

(1) $\forall j=1, 2, \ldots \left[B_j \cap \sum_{i=j+1}^{\infty} B_i = 0\right]$,

(2) $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$.

8. a) Указать пример модуля с максимальным свободным подмножеством не являющимся системой образующих.

b) Дать пример модуля $\neq 0$, не являющегося векторным пространством, у которого каждое максимальное свободное подмножество есть базис. (*Указание.* Используйте подходящий $\mathbf{Z}$-модуль.)

9. Пусть $V = V_K$ — векторное пространство, X — свободное подмножество в V и Y — система образующих для V, причем $X \subset Y$. Показать, что существует базис Z пространства V, удовлетворяющий условию $X \subset Z \subset Y$.

10. a) Указать пример модуля M и подмодуля $A \subsetneq M$, таких что существуют подмодули $B_1 \subsetneq M$ и $B_2 \subsetneq M$, для которых $M = A \oplus B_1 = A \oplus B_2$.

b) Указать пример модуля M, который непрост и в котором для каждого подмодуля $A \subsetneq M$ существует единственный подмодуль $B \subsetneq M$, такой что $M = A \oplus B$.

11. Пусть X — конечное множество, $X = \{x, \ldots, x_n\}$, и $R := \mathbf{R}^X$ — множество всех отображений $f\colon X \to \mathbf{R}$ (где $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел). Показать, что

a) R — коммутативное кольцо при следующем определении операций:

$$(f+g)(x_i) = f(x_i) + g(x_i),$$
$$(f \cdot g)(x_i) = f(x_i)\, g(x_i) \quad (f, g \in S,\ i = 1, \ldots, n);$$

b) R — кольцо главных идеалов;

c) каждый идеал есть пересечение максимальных идеалов, и пересечение всех максимальных идеалов равно 0;

d) каждый идеал есть прямое слагаемое;

e) R — прямая сумма простых идеалов.

12. Пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество подмодулей модуля M и $B \subsetneq M$. Показать что

a) $\sum_{i \in I} (A_i \cap B) \subsetneq \left(\sum_{i \in I} A_i\right) \cap B$;

b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) + B \subsetneq \bigcap_{i \in I} (A_i + B)$,

c) Дать пример, когда

$$\sum_{i \in I} (A_i \cap B) \neq \left(\sum_{i \in I} A_i\right) \cap B.$$

d) Дать пример когда

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) + B \neq \bigcap_{i \in I} (A_i + B).$$

13. Определение. Кольцо R называется *регулярным* (в смысле фон Неймана), если $\forall r \in R \exists r' \in R\,[rr'r = r]$.

Показать, что следующие условия эквивалентны:

(1) R регулярно;

(2) каждый циклический правый идеал в R является прямым слагаемым в R_R;

(3) каждый циклический левый идеал в R является прямым слагаемым в ${}_RR$;

(4) каждый конечно-порожденный правый идеал в R является прямым слагаемым в R_R;

(5) каждый конечно-порожденный левый идеал в R является прямым слагаемым в ${}_RR$.

3. Гомоморфизмы модулей и колец

3.1. Определения и некоторые простые свойства

Отображения модулей, сохраняющие структуру, называются гомоморфизмами. Они определяются так же, как и линейные отображения векторных пространств.

3.1.1. ***Определение.*** *Пусть A и B — правые R-модули, соотв. левые S-модули, S-R-бимодули. Гомоморфизм α из A в B — это отображение*

$$\alpha\colon A \to B,$$

для которого

(1) $\forall a_1,\ a_2 \in A\ \forall r_1,\ r_2 \in R\,[\alpha(a_1 r_1 + a_2 r_2) = \alpha(a_1)\, r_1 + \alpha(a_2)\, r_2]$,

соотв.

(2) $\forall a_1,\ a_2 \in A\ \forall s_1,\ s_2 \in S\,[\alpha(s_1 a_1 + s_2 a_2) = s_1 \alpha(a_1) + s_2 \alpha(a_2)]$,

(3) $\forall a_1,\ a_2 \in A\ \forall s_1,\ s_2 \in S\ \forall r_1,\ r_2 \in R\,[\alpha(s_1 a_1 r_1 + s_2 a_2 r_2) = s_1 \alpha(a_1)\, r_1 + s_2 \alpha(a_2)\, r_2]$.

Запись

$$\alpha\colon A_R \to B_R$$

означает, что A и B — правые R-модули и α — гомоморфизм. Аналогично записываются гомоморфизмы левых модулей и бимодулей.

Для того чтобы указать кольцо или „сторону", в случае $\alpha\colon A_R \to B_R$ говорят об *R-модульном гомоморфизме* или *гомоморфизме правых модулей*. Вместо $\alpha(a)$ для образа $a \in A$ при гомоморфизме α мы будем писать также просто αa. В случае $\alpha\colon {}_S A \to {}_S B$ образ a при гомоморфизме α обозначается через $a\alpha$; при этом равенство (2) принимает вид:

$$(s_1 a_1 + s_2 a_2)\,\alpha = s_1\,(a_1 \alpha + s_2\,(a_2 \alpha).$$

Таким образом, гомоморфизм и умножение на элементы кольца записываются с противоположных сторон. Если нужно отклониться от такой системы записи, то мы это особо оговариваем.

Для обозначения соответствия элементов при отображении $\alpha\colon A \to B$ обычно применяется символ $a \longmapsto \alpha(a)$; мы объединяем $\alpha\colon A \to B$ и $a \longmapsto \alpha(a)$ в запись

$$\alpha\colon A \ni a \longmapsto \alpha(a) \in B,$$

которая уже использовалась в гл. 1.

Для гомоморфизмов употребляются также следующие общепринятые для отображений понятия:

область определения $\alpha = \mathrm{dom}(\alpha) := A$;
область значений α $= \mathrm{ran}(\alpha) := B$;
образ α $= \mathrm{im}(\alpha) := \{\alpha(a) \mid a \in A\}$;
α — *инъекция* $\Leftrightarrow$ $\forall a_1, a_2 \in A\,[\alpha(a_1) = \alpha(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2]$ (т. е. α взаимно-однозначно);
α — *сюръекция* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{ran}(\alpha)$ (т. е. α — отображение „на“);
α — *биекция* $\Leftrightarrow$ α — инъекция $\wedge\, \alpha$ — сюръекция.

В дальнейшем, если мы говорим о гомоморфизмах модулей без указания „стороны“, то речь идет о понятиях и утверждениях, которые относятся к односторонним модулям. Рассуждения проводятся только для правых модулей; ясно, что всё, имеющее место для правых модулей, соответственно справедливо и для левых. Большинство фактов верно также и для бимодулей, однако дальше нам это не понадобится.

Рассмотрим теперь три простых примера.

Примеры *гомоморфизмов.* **1.** Нулевой гомоморфизм из A в B:

$$0\colon A \ni a \longmapsto 0 \in B.$$

2. Тождественная инъекция = вложение (включение) подмодуля $A \subseteq B$:

$$\iota\colon A \ni a \longmapsto a \in B.$$

3. Естественный (канонический) гомоморфизм модуля A на фактормодуль A/C, где $C \subseteq A$:

$$\nu\colon A \ni a \longmapsto a + C \in A/C.$$

В примерах 1 и 2 очевидно, что мы имеем дело действительно с гомоморфизмами; для ν это следует сразу из определения модуля A/C:

$$\nu(a_1 r_1 + a_2 r_2) = (a_1 r_1 + a_2 r_2) + C = (a_1 r_1 + C) + (a_2 r_2 + C)$$
$$= (a_1 + C) r_1 + (a_2 + C) r_2 = \nu(a_1) r_1 + \nu(a_2) r_2.$$

В дальнейшем гомоморфизмы 0, ι, ν всегда имеют указанный смысл; иногда при них могут стоять индексы, указывающие область определения или область значений. Тождественное отображение модуля A — частный случай включения — обозначается символом 1_A.

Если α и β — гомоморфизмы, для которых $\mathrm{ran}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$, скажем $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon B \to C$, то результат последовательного выпол-

нения отображений α и β, обозначаемый через $\beta\alpha$, очевидно, является гомоморфизмом из A в C. Для $a \in A$ имеем $(\beta\alpha)\, a = \beta(\alpha(a))$.

Легко видеть, что отображение $\alpha\colon A \to B$ будет биекцией тогда и только тогда, когда существует (однозначно определенное) обратное отображение $\alpha^{-1}\colon B \to A$, для которого $\alpha^{-1}\alpha = 1_A$, $\alpha\alpha^{-1} = 1_B$. Если α — биективный гомоморфизм, то α^{-1} также гомоморфизм. Действительно, пусть $b_1 = \alpha(a_1)$, $b_2 = \alpha(a_2)$ — произвольные элементы из B и $r_1, r_2 \in R$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(b_1 r_1 + b_2 r_2) &= \alpha^{-1}(\alpha(a_1) r_1 + \alpha(a_2) r_2)\\ &= \alpha^{-1}(\alpha(a_1 r_1 + a_2 r_2)) = a_1 r_1 + a_2 r_2\\ &= \alpha^{-1}(b_1) r_1 + \alpha^{-1}(b_2) r_2.\end{aligned}$$

Ниже всюду $\alpha\colon A \to B$ — гомоморфизм.
Для $U \subset A$, $V \subset B$ положим

$$\alpha(U) := \{\alpha(u) \mid u \in U\},$$
$$\alpha^{-1}(V) := \{a \mid a \in A \wedge \alpha(a) \in V\}.$$

Заметим, что само α^{-1} определено, лишь когда гомоморфизм α биективен.

3.1.2. *Лемма.* (1) $U \subseteq A \Rightarrow \alpha(U) \subseteq B$.
(2) $V \subseteq B \Rightarrow \alpha^{-1}(V) \subseteq A$.

Доказательство. (1) Пусть $u_1, u_2 \in U$. Тогда $\alpha(u_1), \alpha(u_2) \in \alpha(U) \wedge r_1, r_2 \in R \Rightarrow \alpha(u_1) r_1 + \alpha(u_2) r_2 = \alpha(u_1 r_1 + u_2 r_2) \in \alpha(U)$, поскольку $u_1 r_1 + u_2 r_2 \in U$.

(2) Пусть $a_1, a_2 \in \alpha^{-1}(V)$. Тогда $\alpha(a_1), \alpha(a_2) \in V \wedge r_1, r_2 \in R \Rightarrow \alpha(a_1 r_1 + a_2 r_2) = \alpha(a_1) r_1 + \alpha(a_2) r_2 \in V \Rightarrow a_1 r_1 + a_2 r_2 \in \alpha^{-1}(V)$. □

3.1.3. *Определение.*

Ядро	$\alpha = \ker(\alpha)$	$:= \alpha^{-1}(0)$,
образ	$\alpha = \operatorname{im}(\alpha)$	$:= \alpha(A)$,
коядро	$\alpha = \operatorname{coker}(\alpha)$	$:= \operatorname{ran}(\alpha)/\operatorname{im}(\alpha) = B/\alpha(A)$,
кообраз	$\alpha = \operatorname{coim}(\alpha)$	$:= \operatorname{dom}(\alpha)/\ker(\alpha) = A/\alpha^{-1}(0)$.

Образ $\operatorname{im}(\alpha)$ уже был определен нами раньше. На основании 3.1.2 мы знаем, что $\ker(\alpha)$ и $\operatorname{im}(\alpha)$ — подмодули, поэтому определение коядра и кообраза имеет смысл.

Для категории $\mathcal{M}_R$ правых R-модулей, введенной нами в 1.2.5 (заметим, что все модули теперь унитарны), мы используем все понятия и обозначения, введенные в гл. 1. В частности, мы хотим сейчас охарактеризовать с помощью понятий из 1.1.3 инъективные, сюръективные и биективные гомоморфизмы. Прежде всего напомним эти понятия для категории $\mathcal{M}_R$.

3.1.4. ***Определение.*** *Гомоморфизм* $\alpha\colon A_R \to B_R$ *называется мономорфизмом, если*

$$\forall C \in \mathcal{M}_R\ \forall \gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_R(C,\ A)\,[\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2];$$

эпиморфизмом, если

$$\forall C \in \mathcal{M}_R\ \forall \beta_1,\ \beta_2 \in \mathrm{Hom}_R(B,\ C)\,[\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \Rightarrow \beta_1 = \beta_2];$$

биморфизмом, если

$$\alpha - \textit{эпиморфизм} \wedge \alpha - \textit{мономорфизм};$$

изоморфизмом, если

$$\exists \alpha' \in \mathrm{Hom}_R(B,\ A)\,[\alpha'\alpha = 1_A \wedge \alpha\alpha' = 1_B].$$

3.1.5. ***Лемма.*** *Пусть* $\alpha\colon A \to B$ *— гомоморфизм. Тогда*

(1) α *— инъекция* $\Leftrightarrow \alpha$ *— мономорфизм;*
(2) α *— сюръекция* $\Leftrightarrow \alpha$ *— эпиморфизм;*
(3) α *— биекция* $\Leftrightarrow \alpha$ *— биморфизм* $\Leftrightarrow \alpha$ *— изоморфизм.*

Доказательство. (1) „$\Rightarrow$“: Пусть $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2$, где $\gamma,\ \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_R(C,\ A)$. Предположение, что $\gamma_1 \neq \gamma_2, \Rightarrow \exists c \in C\,[\gamma_1(c) \neq \gamma_2(c)] \Rightarrow \alpha(\gamma_1(c)) \neq \alpha(\gamma_2(c)) \Rightarrow \alpha\gamma_1 \neq \alpha\gamma_2$ ↯. Итак, должно выполняться равенство $\gamma_1 = \gamma_2$.

(1) „$\Leftarrow$“: $\alpha(a_1) = \alpha(a_2) \Rightarrow \alpha(a_1) - \alpha(a_2) = \alpha(a_1 - a_2) = 0.$

Если

$$\gamma_1 = \iota\colon\ (a_1 - a_2)\,R \ni (a_1 - a_2)\,r \longmapsto (a_1 - a_2)\,r \in A,$$
$$\gamma_2 = 0\colon\ (a_1 - a_2)\,R \ni (a_1 - a_2)\,r \longmapsto 0 \in A,$$

то $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_R((a_1 - a_2)\,R,\ A)$ и имеют место равенства

$$\alpha(\gamma_1((a_1 - a_2)\,r)) = \alpha((a_1 - a_2)\,r) = \alpha(a_1 - a_2)\,r = 0,$$
$$\alpha(\gamma_2((a_1 - a_2)\,r)) = \alpha(0) = 0,\ \text{т. е. } \alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2.$$

Тогда из предположения следует, что $\gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1(a_1 - a_2) = a_1 - a_2 = \gamma_2(a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$.

(2) „$\Rightarrow$“: Пусть $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, где $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathrm{Hom}_R(B,\ C)$. Предположение, что $\beta_1 \neq \beta_2, \Rightarrow \exists b \in B\,[\beta_1(b) \neq \beta_2(b)]$. Так как α сюръективен, то существует такой элемент $a \in A$, что $\alpha(a) = b \Rightarrow \Rightarrow \beta_1\alpha(a) = \beta_1(b) \neq \beta_2(b) = \beta_2\alpha(a) \Rightarrow \beta_1\alpha \neq \beta_2\alpha$ ↯. Итак, $\beta_1 = \beta_2$.

(2) „$\Leftarrow$“: Если

$$\beta_1 = \nu\colon\ B \to B/\mathrm{im}(\alpha),$$
$$\beta_2 = 0\colon\ B \to B/\mathrm{im}(\alpha),$$

то $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathrm{Hom}_R(B,\ B/\mathrm{im}(\alpha))$ и $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha = 0$. Тогда из предположения следует $\beta_1 = \beta_2$, т. е. $B = \mathrm{im}(\alpha)$ и, значит, α сюръективен.

(3) Эквивалентность „α — биекция $\Leftrightarrow$ α — биморфизм“ следует из (1) и (2). Далее, ясно, что каждая биекция является изоморфизмом, поскольку для всякой биекции α, как уже было показано раньше, α^{-1} является гомоморфизмом. Обратно, если α — изоморфизм, то из $\alpha\alpha' = 1_B$ следует, что α инъективен, а из $\alpha'\alpha = 1_A$, — что α сюръективен. (Очевидно, что тогда $\alpha^{-1} = \alpha'$.) □

3.1.6. ***Лемма.*** *Пусть* α: $A \to B$ *и* β: $B \to C$ *— гомоморфизмы. Тогда*:

(1) α, β — *мономорфизмы* $\Rightarrow$ $\beta\alpha$ — *мономорфизм*;
α, β — *эпиморфизмы* $\Rightarrow$ $\beta\alpha$ — *эпиморфизм*;
(2) $\beta\alpha$ — *мономорфизм* $\Rightarrow$ α — *мономорфизм*;
$\beta\alpha$ — *эпиморфизм* $\Rightarrow$ β — *эпиморфизм*.

Доказательство. (1) Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$. Поскольку β и α — мономорфизмы, то $\beta\alpha\gamma_1 = \beta\alpha\gamma_2 \Rightarrow \alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$. Таким образом, $\beta\alpha$ — мономорфизм. Для эпиморфизмов доказательство проводится аналогично.

(2) Пусть снова $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$. Тогда, поскольку $\beta\alpha$ — мономорфизм, то $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2 \Rightarrow \beta\alpha\gamma_1 = \beta\alpha\gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$. Таким образом, α — мономорфизм. Для эпиморфизмов доказательство аналогично. □

3.1.7. ***Определение.*** *Два модуля* A *и* B *называются изоморфными* (*запись*: $A \cong B$), *если существует изоморфизм* α: $A \to B$.

Замечание. В классе всех правых R-модулей отношение $\cong$ является отношением эквивалентности.

Доказательство. (1) Так как 1_A — изоморфизм, то $A \cong A$. (2) Если α: $A \to B$ — изоморфизм, то α^{-1}: $B \to A$ — также изоморфизм, т. е. из $A \cong B$ следует $B \cong A$.

(3) Если α: $A \to B$, β: $B \to C$ — изоморфизмы, то $\beta\alpha$ — также изоморфизм, потому что $\alpha^{-1}\beta^{-1}\beta\alpha = 1_A$ и $\beta\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1_C$, т. е. из $A \cong B$ и $B \cong C$ следует $A \cong C$.

3.1.8. ***Лемма.*** *Пусть* α: $A \to B$ *— гомоморфизм. Тогда*:

(1) α — *мономорфизм* $\Leftrightarrow \ker(\alpha) = 0$.
(2) $U \subseteq A \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha(U)) = U + \ker(\alpha)$.
(3) $V \subseteq B \Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}(V)) = V \cap \mathrm{im}(\alpha)$.
(4) *Если* β: $B \to C$ *— также гомоморфизм, то* $\ker(\beta\alpha) = \alpha^{-1}(\ker(\beta)) \wedge \mathrm{im}(\beta\alpha) = \beta(\mathrm{im}(\alpha))$.

Доказательство. (1) „$\Rightarrow$“: α — мономорфизм $\Rightarrow$ α — инъекция (согласно 3.1.5) $\Rightarrow \ker(\alpha) = 0$ (поскольку $\alpha(0) = 0$).

(1) „$\Leftarrow$“: $\alpha(a_1) = \alpha(a_2) \Rightarrow \alpha(a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 \in \ker(\alpha) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow \alpha$ — инъекция $\Rightarrow \alpha$ — мономорфизм (согласно 3.1.5).

(2) „$\alpha^{-1}(\alpha(U)) \subseteq U + \ker(\alpha)$“: $a \in \alpha^{-1}(\alpha(U)) \Rightarrow \alpha(a) \in \alpha(U) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists u \in U\,[\alpha(a) = \alpha(u)] \Rightarrow \alpha(a-u) = 0 \Rightarrow a - u \in \ker(\alpha) \Rightarrow a \in U +$ $+ \ker(\alpha)$.

(2) „$U + \ker(\alpha) \subseteq \alpha^{-1}(\alpha(U))$“: $u \in U$, $k \in \ker(\alpha) \Rightarrow \alpha(u+k) =$ $= \alpha(u) + \alpha(k) = \alpha(u) + 0 = \alpha(u) \in \alpha(U) \Rightarrow u + k \in \alpha^{-1}(\alpha(U))$.

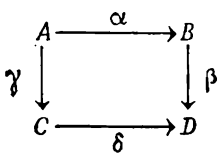
(3) Упражнение для читателя.

(4) $a \in \ker(\beta\alpha) \Leftrightarrow \beta\alpha(a) = 0 \Leftrightarrow \alpha(a) \in \ker(\beta) \Leftrightarrow a \in$ $\alpha^{-1}(\ker(\beta))$; $\operatorname{im}(\beta\alpha) = \beta\alpha(A) = \beta(\alpha(A)) = \beta(\operatorname{im}(\alpha))$. □

Из этой леммы непосредственно следует, что если $U \subseteq A$ и $\alpha\colon A \to B$ — мономорфизм, то $U = \alpha^{-1}(\alpha(U))$, т. е. каждый подмодуль U из A представим в виде $\alpha^{-1}(V)$, где $V \subseteq B$ (полагаем $V = \alpha(U)$). Далее, если $V \subseteq B$ и $\alpha\colon A \to B$ — эпиморфизм, то $V = \alpha(\alpha^{-1}(V))$, т. е. каждый подмодуль V из B представим в виде $\alpha(U)$, где $U \subseteq A$ (полагаем $U = {}^{-1}(V)$).

Оба эти факта дальше используются без особых ссылок.

3.1.9. ***Следствие.*** *Если диаграмма*



коммутативна, т. е. $\beta\alpha = \delta\gamma$, *и если* γ — *эпиморфизм, а* β — *мономорфизм, то*

$$\operatorname{im}(\alpha) = \beta^{-1}(\operatorname{im}(\delta)), \quad \ker(\delta) = \gamma(\ker(\alpha)).$$

Доказательство. Поскольку β — мономорфизм, то, в силу 3.1.8, $\operatorname{im}(\alpha) = \beta^{-1}(\beta(\operatorname{im}(\alpha))) \Rightarrow$ [1] $\operatorname{im}(\alpha) = \beta^{-1}(\operatorname{im}(\beta\alpha)) = \beta^{-1}(\operatorname{im}(\delta\gamma)) =$ $= \beta^{-1}(\operatorname{im}(\delta))$, так как γ — эпиморфизм. Далее, поскольку γ — эпиморфизм, то, в силу 3.1.8, $\ker(\delta) = \gamma(\gamma^{-1}(\ker(\delta))) \Rightarrow \ker(\delta) =$ $= \gamma(\ker(\delta\gamma))$ (в силу 3.1.8) $\Rightarrow \ker(\delta) = \gamma(\ker(\beta\alpha)) = \gamma(\ker(\alpha))$, так как β — мономорфизм. □

Теперь перейдем к вопросу о том, как ведут себя суммы и пересечения подмодулей при гомоморфизмах и взятии прообразов (в связи с этим см. также упр. 1).

3.1.10. ***Лемма.*** *Пусть даны гомоморфизм* $\alpha\colon A \to B$, *некоторое множество* $\{A_i \mid i \in I\}$ *подмодулей* $A_i \subseteq A$ *и некоторое множество*

[1] Для краткости автор часто, допуская некоторую вольность, использует символ „$\Rightarrow$“ просто как замену слов „откуда следует, что“. — *Прим. ред.*

$\{B_i \mid i \in I\}$ *подмодулей* $B_i \subseteq B$. *Тогда*:

(a) $\alpha\left(\sum_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} (A_i)$, $\alpha^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i)$.

(b) $\alpha^{-1}\left(\sum_{i\in I} B_i\right) \supseteq \sum_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i)$, $\alpha\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \alpha(A_i)$.

(c) *Далее, если* $B_i \subseteq \operatorname{im}(\alpha)$ *для всех* $i \in I$, *то*

$$\alpha^{-1}\left(\sum_{i\in I} B_i\right) = \sum_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i),$$

а если $\ker(\alpha) \subseteq A_i$ для всех $i \in I$, то

$$\alpha\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \alpha(A_i).$$

Доказательство. Утверждения (a) и (b) проверяются без труда, сделать это предоставляется читателю в качестве упражнения. Докажем (c).

Учитывая (a) и 3.1.8, получаем

$$\alpha^{-1}\left(\sum_{i\in I} B_i\right) = \alpha^{-1}\left(\sum_{i\in I} (B_i \cap \operatorname{im}(\alpha))\right) = \alpha^{-1}\left(\sum_{i\in I} \alpha\alpha^{-1}(B_i)\right)$$
$$= \alpha^{-1}\alpha\left(\sum_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i)\right) = \left(\sum_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i)\right) + \ker(\alpha) = \sum_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i),$$

а также

$$\alpha\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \alpha\left(\bigcap_{i\in I} (A_i + \ker(\alpha))\right) = \alpha\left(\bigcap_{i\in I} \alpha^{-1}\alpha(A_i)\right)$$
$$= \alpha\alpha^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} \alpha_i(A_i)\right) = \left(\bigcap_{i\in I} \alpha(A_i)\right) \cap \operatorname{im}(\alpha) = \bigcap_{i\in I} \alpha(A_i). \quad \square$$

3.1.11. ***Следствие.*** *Пусть* $U_R \subseteq M_R$. *Тогда* M/U *конечно-копорожден* (*см.* 2.3.14) $\Leftrightarrow$ *в каждом множестве* $\{A_i \mid i \in I\}$ *подмодулей* $A_i \subseteq M$, *удовлетворяющем условию*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = U,$$

существует конечное подмножество $\{A_i \mid i \in I_0\}$ (*т. е.* I_0 *конечно*), *такое что*

$$\bigcap_{i\in I_0} A_i = U.$$

Доказательство. „$\Rightarrow$“: Обозначим через ν: $M \to M/U$ естественный эпиморфизм. В силу равенства $\bigcap_{i\in I} A_i = U$ имеем $U = \ker(\nu) \subseteq$

$\subsetneq A_i$, так что можно применить 3.1.10 (c), а потому

$$\bigcap_{i\in I} \nu(A_i) = \nu\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \nu(U) = 0 \subsetneq M/U.$$

По предположению существует такое конечное подмножество $I_0 \subset I$, что

$$\bigcap_{i\in I_0} \nu(A_i) = 0.$$

Тогда, согласно 3.1.10 (a),

$$\nu^{-1}(0) = U = \nu^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I_0} \nu(A_i)\Big) = \bigcap_{i\in I_0} \nu^{-1}\nu(A_i) = \bigcap_{i\in I_0} (A_i + U) = \bigcap_{i\in I_0} A_i.$$

„$\Leftarrow$“: Пусть теперь $\{\Lambda_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество подмодулей $\Lambda_i \subsetneq M/U$, удовлетворяющее условию

$$\bigcap_{i\in I} \Lambda_i = 0.$$

Тогда, в силу 3.1.10 (a),

$$\nu^{-1}(0) = U = \nu^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} \Lambda_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \nu^{-1}(\Lambda_i).$$

По предположению существует такое конечное подмножество $I_0 \subset I$, что

$$\bigcap_{i\in I_0} \nu^{-1}(\Lambda_i) = U.$$

Учитывая, что $U = \ker(\nu) \subsetneq \nu^{-1}(\Lambda_i)$, на основании 3.1.10 (c) получаем

$$\nu\Big(\bigcap_{i\in I_0} \nu^{-1}(\Lambda_i)\Big) = \bigcap_{i\in I_0} \nu\nu^{-1}(\Lambda_i) = \bigcap_{i\in I_0} (\Lambda_i \cap \operatorname{im}(\nu)) =$$
$$= \bigcap_{i\in I_0} \Lambda_i = \nu(U) = 0. \quad \square$$

Решеткой, соотв. *полной решеткой*, называется упорядоченное множество, в котором каждое двухэлементное подмножество, соотв. каждое подмножество, имеет точную нижнюю и точную верхнюю грань. Множество всех подмодулей произвольного модуля есть полная решетка с отношением порядка $\subsetneq$. При этом точная нижняя грань есть пересечение подмодулей, а точная верхняя грань — сумма подмодулей.

Для данного модуля A_R обозначим через $\operatorname{Lat}(A)$ решетку подмодулей модуля A. Пусть дан гомоморфизм $\alpha\colon A \to L$. Положим $C := \ker(\alpha)$, $N := \operatorname{im}(\alpha)$. Рассмотрим подрешетку

$$\operatorname{Lat}(A, C) := \{U \mid C \subsetneq U \subsetneq A\}$$

решетки $\mathrm{Lat}(A)$ и подрешетку

$$\mathrm{Lat}(L,\ \underline{N}) := \{V \mid V \subseteq N\} \quad (= \mathrm{Lat}(N))$$

решетки $\mathrm{Lat}(L)$. При наших обозначениях справедлива следующая лемма.

3.1.12. *Лемма.* *Правилом*

$$\hat{\alpha}\colon \mathrm{Lat}(A,\ \bar{C}) \ni U \longmapsto \alpha(U) \in \mathrm{Lat}(L,\ \underline{N})$$

задается биекция, для которой
(1) $\hat{\alpha}(U_1 + U_2) = \hat{\alpha}(U_1) + \hat{\alpha}(U_2)$;
(2) $\hat{\alpha}(U_1 \cap U_2) = \hat{\alpha}(U_1) + \hat{\alpha}(U_2)$.
Это означает, что $\hat{\alpha}$ является решеточным изоморфизмом между $\mathrm{Lat}(\mathrm{dom}(\alpha),\ \underline{\ker(\alpha)})$ *и* $\mathrm{Lat}(\mathrm{ran}(\alpha),\ \underline{\mathrm{im}(\alpha)}) = \mathrm{Lat}(\mathrm{im}(\alpha))$.

Доказательство. Мы воспользуемся 3.1.8.

«$\hat{\alpha}$ — инъекция»: Пусть $\alpha(U_1) = \alpha(U_2)$, где $U_1,\ U_2 \in \mathrm{Lat}(A,\ \bar{C})$. Тогда $\alpha^{-1}(\alpha(U_1)) = U_1 + \ker(\alpha) = \alpha^{-1}(\alpha(U_2)) = U_2 + \ker(\alpha)$. В силу того что $\ker(\alpha) = C \subseteq U_i$ $(i = 1,\ 2)$, имеем $U_1 = U_2$.

«$\hat{\alpha}$ — сюръекция». Если $V \subseteq N = \mathrm{im}(\alpha)$, то $\alpha^{-1}(0) = C \subseteq \alpha^{-1}(V) \subseteq A \wedge \alpha(\alpha^{-1}(V)) = V \cap N = V$, т. е. $\hat{\alpha}(\alpha^{-1}(V)) = V$.

(1) $\hat{\alpha}(U_1 + U_2) = \alpha(U_1 + U_2) = \alpha(U_1) + \alpha(U_2) = \hat{\alpha}(U_1) + \hat{\alpha}(U_2)$.

(2) Очевидно, что $\hat{\alpha}(U_1 \cap U_2) \subseteq \hat{\alpha}(U_1) \cap \hat{\alpha}(U_2)$. Пусть теперь $x \in \hat{\alpha}(U_1) \cap \hat{\alpha}(U_2)$, т. е. $x = \alpha(u_1) = \alpha(u_2)$, где $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Тогда $\alpha(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = c \in \ker(\alpha) = C \Rightarrow u_1 = u_2 + c$. Поскольку $C \subseteq U_2$, имеем $u_1 = u_2 + c \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x = \alpha(u_1) \in \alpha(U_1 \cap U_2) \Rightarrow \hat{\alpha}(U_1) \cap \hat{\alpha}(U_2) \subseteq \hat{\alpha}(U_1 \cap U_2)$. □

3.1.13. *Следствие.* *Если $C \subseteq A$ и $\nu\colon A \to A/C$ — естественный гомоморфизм, то отображение*

$$\hat{\nu}\colon \mathrm{Lat}(A,\ \bar{C}) \ni U \longmapsto \nu(U) \in \mathrm{Lat}(A/C)$$

является решеточным изоморфизмом.

3.1.14. *Следствие.* *Подмодуль $C \subseteq A$ максимален $\Leftrightarrow$ фактормодуль A/C прост.*

В качестве упражнения читателю предлагается дать новое и полное доказательство теоремы 2.5.6.

3.2. Гомоморфизмы колец

Сделаем теперь несколько замечаний о кольцевых гомоморфизмах.

3.2.1. *Определение.* *Пусть R и S — кольца. Кольцевым гомоморфизмом из R в S называется отображение*

$$\rho\colon R \to S,$$

такое что для всех $r_1, r_2 \in R$

$$\rho(r_1+r_2)=\rho(r_1)+\rho(r_2), \quad \rho(r_1r_2)=\rho(r_1)\rho(r_2).$$

Гомоморфизм ρ *называется унитарным, если* R *и* S *— кольца с единицей (как здесь всегда предполагается) и* ρ *отображает единицу кольца* R *в единицу кольца* S.

Для категории колец мы тоже используем понятия, введенные в 1.1.3.

3.2.2. ***Лемма.*** *Если* ρ: $R \to S$ *— кольцевой гомоморфизм, то*
(1) ρ *— инъекция* $\Rightarrow \rho$ *— мономорфизм;*
(2) ρ *— сюръекция* $\Rightarrow \rho$ *— эпиморфизм;*
(3) ρ *— биекция* $\Leftrightarrow \rho$ *— изоморфизм* $\Rightarrow \rho$ *— биморфизм.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1.5. □

Стоит заметить, что для (1) верно и обратное утверждение, обращения же импликаций (2) и (3), вообще говоря, не имеют места (см. упражнения). В этом отличие категории колец от категории модулей.

Два кольца R и S называются *изоморфными* (запись: $R \cong S$), если существует изоморфизм R на S. Очевидно, что $\cong$ есть отношение эквивалентности в классе всех колец. Изоморфизм R на R называется *автоморфизмом*.

Как и для модулей, имеются кольцевые гомоморфизмы ι и ν, а также и 0, если ввести в рассмотрение и нулевое кольцо. Если C — двусторонний идеал кольца R, то ν определяется так:

$$\nu\colon R \ni r \longmapsto r+C \in R/C,$$

где R/C — кольцо вычетов (см. 2.5.2).

Далее, ясно, что образ (унитарного) подкольца при (унитарном) кольцевом гомоморфизме ρ является (унитарным) подкольцом в $\operatorname{tar}(\rho)$. В частности, $\operatorname{im}(\rho)$ — подкольцо (унитарное) в $\operatorname{tar}(\rho)$.

В большинстве случаев важны не просто подкольца, а идеалы. В связи с этим докажем следующую лемму.

3.2.3. ***Лемма.*** *Если* ρ: $R \to S$ *— кольцевой гомоморфизм и* V *— двусторонний идеал в* S, *то* $\rho^{-1}(V)$ *— двусторонний идеал в* R.

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in \rho^{-1}(V)$ и $r \in R$. Тогда $\rho(u_1+u_2)=\rho(u_1)+\rho(u_2) \in V \Rightarrow u_1+u_2 \in \rho^{-1}(V)$; $\rho(u_1r)=\rho(u_1)\times$ $\times\rho(r) \in V \Rightarrow u_1r \in \rho^{-1}(V)$ и аналогично $ru_1 \in \rho^{-1}(V) \in \rho^{-1}(V) \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho^{-1}(V)$ — двусторонний идеал в R. □

Из этой леммы вытекает, что $\ker(\rho)$ — двусторонний идеал в R. Поэтому существует кольцо вычетов $R/\ker(\rho)$. В частности, для ν: $R \to R/C$ имеем $\ker(\nu)=C$.

Покажем, что для каждого унитарного кольцевого гомоморфизма

$$\rho\colon R \to S$$

существует функтор (см. 1.3)

$$F_\rho\colon \mathscr{M}_S \to \mathscr{M}_R.$$

Для этого каждому модулю M_S поставим в соответствие модуль M_R следующим образом: аддитивная группа M^+ для M_R остается той же, что и для M_S, а R-модульная структура вводится так:

$$mr := m\rho(r), \quad m \in M^+, \quad r \in R.$$

Нетрудно проверить, что M_R действительно является унитарным R-модулем.

Пусть теперь

$$\varphi\colon M_S \to N_S.$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi(mr) = \varphi(m\rho(r)) = \varphi(m)\rho(r) = \varphi(m)r,$$

т. е. каждый S-гомоморфизм является и R-гомоморфизмом. Чтобы убедиться, что F_ρ, где $F_\rho(M_S) = M_R$, $F_\rho(\varphi) = \varphi$, — действительно функтор, остается только заметить, что

$$F_\rho(1_{M_S}) = 1_{M_R}, \quad F_\rho(\psi\varphi) = \psi\varphi = F_\rho(\psi)\cdot F_\rho(\varphi).$$

В англоязычной литературе функтор F_ρ называется обычно change of rings (замена колец).

Из того факта, что каждый S-гомоморфизм является R-гомоморфизмом, вытекает, что $\mathrm{Hom}_S(M, N) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Если ρ сюръективен, то имеет место даже равенство $\mathrm{Hom}_S(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Очевидно, что S-подмодули в M_S будут также и R-подмодулями. В случае когда ρ сюръективен, S-подмодули совпадают с R-подмодулями.

Примеры *кольцевых гомоморфизмов.* **1.** Как уже отмечалось, если R — унитарное подкольцо в S, то тождественное вложение $\rho = \iota$ является кольцевым гомоморфизмом.

2. Для каждого кольца S с единицей 1 имеется кольцевой гомоморфизм

$$\rho\colon \mathbf{Z} \ni z \longmapsto z1 \in S.$$

Соответствующий функтор F_ρ — это просто забывающий функтор из $\mathscr{M}_S$ в категорию абелевых групп.

3. Пусть C — двусторонний идеал кольца R и

$$\nu\colon R \to R/C$$

— естественный эпиморфизм. Тогда любой R/C-модуль является R-модулем и для $M_{R/C}$, $N_{R/C}$ имеет место равенство

$$\mathrm{Hom}_{R/C}(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N).$$

3.3. Образующие и кообразующие

Образующие и кообразующие — категорные понятия, играющие важную роль в современной теории модулей, а также и в других категориях. Мы дадим здесь определения и некоторые простые следствия из них. Позже мы неоднократно будем возвращаться к этим понятиям.

3.3.1. *Определение.* (a) *Модуль B_R называется образующим (для $\mathcal{M}_R$), если*

$$\forall M \in \mathcal{M}_R \left[M = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B,\ M)} \mathrm{im}(\varphi) \right].$$

(b) *Модуль C_R называется кообразующим (для $\mathcal{M}_R$), если*

$$\forall M \in \mathcal{M}_R \left[0 = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\ C)} \ker(\varphi) \right].$$

Для произвольных модулей B, M

$$\mathrm{im}(B, M) := \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B,\ M)} \mathrm{im}(\varphi)$$

является подмодулем в M как сумма подмодулей в M. Свойство модуля B быть образующим означает, что для каждого M модуль $\mathrm{im}(B, M)$ велик настолько, насколько это только возможно, т. е. равен M.

Для произвольных модулей C и M

$$\ker(M, C) := \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\ C)} \ker(\varphi)$$

есть подмодуль в M как пересечение подмодулей в M. Свойство модуля C быть кообразующим означает, что $\ker(M, C)$ для каждого модуля M мал настолько, насколько это только возможно, т. е. равен 0.

Приведем сразу пример образующего для $\mathcal{M}_R$: *модуль R_R является образующим.* Действительно, если $m \in M$, то существует гомоморфизм

$$\varphi_m\colon\ R \ni r \longmapsto mr \in M,$$

для которого $\varphi_m(1) = m1 = m$. Отсюда следует, что

$$M = \sum_{m \in M} \mathrm{im}(\varphi_m) \subseteq \mathrm{im}(R, M) \subseteq M.$$

Таким образом, $\operatorname{im}(R, M) = M$.

Для $\mathscr{M}_R$ существуют также и кообразующие, но примеры их приведем позже, когда в нашем распоряжении будут инъективные модули.

3.3.2. *Следствие.* (a) *Если B — образующий и A — такой модуль, что* $\operatorname{im}(A, B) = B$, *то A — также образующий.*
(b) *Каждый модуль, эпиморфно отображающийся на R_R, является образующим.*
(c) *Если C — кообразующий и D — такой модуль, что* $\ker(C, D) = 0$, *то D — также кообразующий.*
Доказательство. (a) Очевидно, что

$$\sum_{\substack{\psi \in \operatorname{Hom}_R(A, B) \\ \varphi \in \operatorname{Hom}_R(B, M)}} \operatorname{im}(\varphi\psi) = \sum_{\varphi, \psi} \varphi(\operatorname{im}(\psi)) = \sum_{\varphi} \varphi\left(\sum_{\psi} \operatorname{im}(\psi)\right) =$$

$$= \sum_{\varphi} \varphi(B) = \sum_{\varphi} \operatorname{im}(\varphi) = M.$$

(b) Это утверждение следует из (a), так как R_R — образующий.
(c) Очевидно, что

$$\bigcap_{\substack{\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, C) \\ \psi \in \operatorname{Hom}_R(C, D)}} \ker(\psi\varphi) = \bigcap_{\varphi, \psi} \varphi^{-1}(\ker(\psi)) = \bigcap_{\varphi} \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\psi} \ker(\psi)\right) =$$

$$= \bigcap_{\varphi} \varphi^{-1}(0) = \bigcap_{\varphi} \ker(\varphi) = 0. \qquad \square$$

Образующие и кообразующие можно охарактеризовать с помощью свойств гомоморфизмов следующим образом.

3.3.3. *Теорема.* (a) B — *образующий* $\Leftrightarrow$

$$\forall \mu \operatorname{Hom}_R(M, N), \quad \mu \neq 0, \quad \exists \varphi \in \operatorname{Hom}_R(B, M)\,[\mu\varphi \neq 0].$$

(b) C — *кообразующий* $\Leftrightarrow$

$$\forall \lambda \in \operatorname{Hom}_R(L, M), \quad \lambda \neq 0, \quad \exists \varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, C)\,[\varphi\lambda \neq 0].$$

Доказательство. (a) «$\Rightarrow$»: Поскольку $\mu \neq 0$, существует $m \in M$, для которого $\mu(m) \neq 0$. Так как B — образующий, то найдется представление m в виде

$$m = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(b_i), \quad \varphi_i \in \operatorname{Hom}_R(B, M), \quad b_i \in B,$$

откуда вытекает, что

$$0 \neq \mu(m) = \sum_{i=1}^{k} \mu\varphi_i(b_i)$$

и, следовательно, существует гомоморфизм φ_i, для которого $\mu\varphi_i \neq 0$.

(a) «⇐»: Допустим противное, т. е. что $\mathrm{im}(B, M) \neq M$, и пусть

$$\nu\colon M \to M/\mathrm{im}(B, M)$$

— естественный эпиморфизм. Поскольку $\nu \neq 0$, существует $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B, M)$, такой что $\nu\varphi \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{im}(\varphi) \not\subseteq \mathrm{im}(B, M)$, что противоречит определению $\mathrm{im}(B, M)$.

(b) «⇒»: Так как $\lambda \neq 0$, существует элемент $l \in L$, такой что $\lambda(l) \neq 0$. Так как C — кообразующий, то найдется гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$, для которого $\lambda(l) \notin \ker(\varphi)$. Поэтому $\varphi\lambda(l) \neq 0$, т. е. $\varphi\lambda \neq 0$.

(b) «⇐»: Предположим противное, т. е. что $\ker(M, C) \neq 0$. Пусть

$$\iota\colon \ker(M, C) \to M$$

— тождественное вложение. Поскольку $\iota \neq 0$, найдется гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$, такой что $\varphi\iota \neq 0$. Следовательно, $\ker(M, C) \not\subseteq \ker(\varphi)$, вопреки определению $\ker(M, C)$. □

3.4. Разложения гомоморфизмов в произведение

Зачастую полезно представить данный гомоморфизм в виде произведения двух гомоморфизмов, причем по крайней мере один из них, а то и оба обладают некими «полезными» свойствами. Первый и очень важный пример такого разложения — теорема о гомоморфизмах.

3.4.1. ***Теорема о гомоморфизмах.*** (a) *Каждый модульный гомоморфизм*

$$\alpha\colon A \to B$$

обладает разложением $\alpha = \alpha'\nu$, *где*

$$\nu\colon A \to A/\ker(\alpha)$$

— естественный эпиморфизм (см. 3.1), *а* α' *— мономорфизм, определяемый следующим образом*

$$\alpha'\colon A/\ker(\alpha) \ni a + \ker(\alpha) \longmapsto \alpha(a) \in B.$$

Мономорфизм α' *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* α *— эпиморфизм.*

(b) *Каждый кольцевой гомоморфизм*

$$\rho\colon R \to S$$

обладает разложением $\rho = \rho'\nu$, *где*

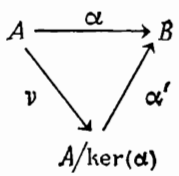
$$\nu\colon R \to R/\ker(\rho)$$

— естественный эпиморфизм, а ρ' *— мономорфизм, определяемый следующим образом:*

$$\rho'\colon\ R/\ker(\rho) \ni r + \ker(\rho) \longmapsto \rho(r) \in S.$$

Мономорфизм ρ' *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* ρ *сюръективен.*

Замечание. Равенство $\alpha = \alpha'\nu$ эквивалентно коммутативности диаграммы



(и аналогично для равенства $\rho = \rho'\nu$).

Доказательство. Достаточно провести доказательство для (a), потому что для (b) оно проходит аналогично.

Прежде всего покажем, что α' отображение. Действительно, $a + \ker(\alpha) = a_1 + \ker(\alpha) \Rightarrow a_1 = a + u$, $u \in \ker(\alpha) \Rightarrow \alpha'(a_1 + \ker(\alpha)) = \alpha(a_1) = \alpha(a+u) = \alpha(a) + \alpha(u) = \alpha(a) = \alpha'(a + \ker(\alpha))$. Ясно, что α' — гомоморфизм. Далее, проверим, что α' — мономорфизм. Имеем (с учетом 3.1.8) $\alpha'(a_1 + \ker(\alpha)) = \alpha(a_1) = 0 \Rightarrow a_1 \in \ker(\alpha) \Rightarrow a_1 + \ker(\alpha) = 0 + \ker(\alpha) \Rightarrow \ker(\alpha') = 0$.

Пусть теперь $a \in A$ — произвольный элемент. Тогда

$$\alpha'(\nu(a)) = \alpha'(a + \ker(\alpha)) = \alpha(a) \Rightarrow \alpha = \alpha'\nu.$$

Из того что α' — мономорфизм и $\operatorname{im}(\alpha') = \operatorname{im}(\alpha)$, вытекает, что α' является изоморфизмом тогда и только тогда, когда α — эпиморфизм. □

3.4.2. ***Следствие.*** (a) *Если* $\alpha\colon A \to B$ *— модульный гомоморфизм, то*

$$\hat{\alpha}\colon\ A/\ker(\alpha) \ni a + \ker(\alpha) \longmapsto \alpha(a) \in \operatorname{im}(\alpha)$$

является изоморфизмом. Таким образом,

$$A/\ker(\alpha) \cong \operatorname{im}(\alpha).$$

(b) *Если* $\rho\colon R \to S$ *— кольцевой гомоморфизм, то*

$$\hat{\rho}\colon\ R/\ker(\rho) \ni r + \ker(\rho) \longmapsto \rho(r) \in \operatorname{im}(\rho)$$

является изоморфизмом. Таким образом,

$$R/\ker(\rho) \cong \operatorname{im}(\rho) \quad (\textit{как кольца}).$$

Доказательство. (a) $\hat{\alpha}$ получается из α' ограничением с $\operatorname{ran}(\alpha') = \operatorname{ran}(\alpha)$ на $\operatorname{im}(\alpha)$.

(b) Доказательство аналогично. □

Поскольку для последующих рассуждений того, что мы уже знаем о кольцевых гомоморфизмах, будет достаточно, далее мы ограничимся только модульными гомоморфизмами.

Итак, ниже мы рассматриваем модули A, B, C, ... (правые, левые или бимодули) и все гомоморфизмы из некоторой категории модулей.

3.4.3. ***Первая теорема об изоморфизме.*** *Если* $B \subseteq A \wedge C \subseteq A$, *то*

$$(B+C)/C \cong B/(B \cap C).$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\nu\colon\ B+C \to (B+C)/C$$

с $\ker(\nu) = C$ и

$$\alpha := \nu \mid B\colon\ B \to (B+C)/C$$

с $\ker(\alpha) = B \cap C$. Применяем 3.4.2:

$$(B+C)/C \cong \operatorname{im}(\nu) = \nu(B+C) = \nu(B) + \nu(C) = \nu(B),$$
$$B/(B \cap C) \cong \operatorname{im}(\alpha) = \alpha(B) = \nu(B) \Rightarrow$$
$$(B+C)/C \cong B/(B \cap C).$$ □

Эту теорему можно доказать и без использования 3.4.2, непосредственно проверив, что отображение

$$B/(B \cap C) \ni b + (B \cap C) \longmapsto b + C \in (B+C)/C$$

— изоморфизм. Провести такую проверку предоставляется читателю в качестве упражнения.

3.4.4. ***Следствие.*** $A = B \oplus C \Rightarrow A/C \cong B$.

Доказательство. $A/C = (B+C)/C \cong B/(B \cap C) = B/0 \cong B$. □

Приведем здесь еще одно следствие — *лемму Цассенхауза*, существенно используемую в следующем пункте. Эта лемма показывает, что в некоторых случаях для использования первой теоремы об изоморфизме необходимо провести некоторые преобразования.

3.4.5. *Если* $U' \subseteq U \subseteq A \wedge V' \subseteq V \subseteq A$, *то*

$$(U' + (U \cap V))/(U' + (U \cap V')) \cong (V' + (U \cap V))/(V' + (U' \cap V)).$$

Доказательство. Покажем, что левая сторона изоморфна

$$(U \cap V)/((U' \cap V) + (V' \cap U)).$$

Поскольку это выражение симметрично относительно U и V, то правая сторона также ему изоморфна, откуда и следует наше утверждение. Поскольку $U \cap V' \subset U \cap V$, имеем

$$U' + (U \cap V) = (U \cap V) + (U' + (U \cap V')).$$

Далее, в силу закона модулярности (2.3.15)

$$\begin{aligned}(U \cap V) \cap (U' + (U \cap V')) &= (U \cap V \cap U') + (U \cap V') \\ &= (U' \cap V) + (U \cap V').\end{aligned}$$

По первой теореме об изоморфизме

$$\begin{aligned}(U' + (U \cap V))/(U' + (U \cap V')) &= ((U \cap V) + (U' + (U \cap V')))/(U' + (U \cap V')) \\ &\cong (U \cap V)/((U \cap V) \cap (U' + (U \cap V'))) \\ &= (U \cap V)/((U' \cap V) + (U \cap V')).\end{aligned}$$

□

3.4.6. ***Вторая теорема об изоморфизме.*** *Если* $C \subset B \subset A$, *то*

$$A/B \cong (A/C)/(B/C).$$

Доказательство. Пусть

$$\nu_1\colon A \to A/C,$$
$$\nu_2\colon A/C \to (A/C)/(B/C);$$

ν_2 имеет смысл, так как из $C \subset B \subset A$ вытекает, что B/C — подмодуль в A/C. Поскольку ν_1 и ν_2 — эпиморфизмы, то $\nu_2\nu_1$ — эпиморфизм (3.1.6). Применив 3.4.2, получим

$$A/\ker(\nu_2\nu_1) \cong (A/C)/(B/C).$$

При этом, согласно 3.1.8,

$$\begin{aligned}\ker(\nu_2\nu_1) = \nu_1^{-1}(\ker(\nu_2)) &= \nu_1^{-1}(B/C) = \nu_1^{-1}(\nu_1(B)) \\ &= B + \ker(\nu_1) = B + C = B,\end{aligned}$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

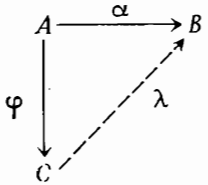
Пример. $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \cong (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})/(3\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$.

Укажем, наконец, результат, который можно рассматривать как обобщение теоремы о гомоморфизмах 3.4.1.

3.4.7. ***Теорема.*** *Пусть* $\alpha\colon A \to B$ — *гомоморфизм и* $\varphi\colon A \to C$ — *эпиморфизм, причем* $\ker(\varphi) \subset \ker(\alpha)$. *Тогда существует гомоморфизм* $\lambda\colon C \to B$, *такой что*

(1) $\alpha = \lambda\varphi$;
(2) $\operatorname{im}(\lambda) = \operatorname{im}(\alpha)$;
(3) λ — *мономорфизм* $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \ker(\alpha)$.

Замечание. Равенство (1) означает коммутативность диаграммы



Доказательство. Поскольку φ — эпиморфизм, то для произвольного $c \in C$ существует такое $a \in A$, что $\varphi(a) = c$. Если для каждого $c \in C$ выбрать такое $a_c \in A$, что $\varphi(a_c) = c$ (здесь мы пользуемся аксиомой выбора), то правило

$$\lambda(c) := \alpha(a_c)$$

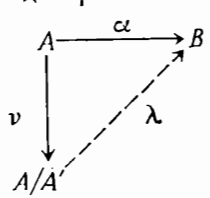
определяет отображение $\lambda\colon C \to B$. Чтобы показать, что λ — гомоморфизм, надо убедиться, что λ не зависит от выбора a_c и $\varphi(a_c) = c$. Действительно, пусть $c = \varphi(a) = \varphi(a_c)$, где $a, a_c \in A$. Тогда $\varphi(a - a_c) = 0 \Rightarrow a - a_c \in \ker(\varphi) \subseteq \ker(\alpha)$ (по предположению) $\Rightarrow \alpha(a - a_c) = 0 \Rightarrow \alpha(a) = \alpha(a_c) = \lambda(c)$. Отсюда сразу следует, что λ является гомоморфизмом. В самом деле, пусть $c_1 = \varphi(a_1)$, $c_2 = \varphi(a_2)$, где $a_1, a_2 \in A$ и $r_1, r_2 \in R$. Тогда

$$\varphi(a_1 r_1 + a_2 r_2) = \varphi(a_1) r_1 + \varphi(a_2) r_2 = c_1 r_1 + c_2 r_2$$
$$\Rightarrow \lambda(c_1 r_1 + c_2 r_2) = \alpha(a_1 r_1 + a_2 r_2) = \alpha(a_1) r_1 + \alpha(a_2) r_2$$
$$= \lambda(c_1) r_1 + \lambda(c_2) r_2.$$

Утверждения (1) и (2) непосредственно получаются из определения λ. Докажем (3). Допустим вначале, что λ является мономорфизмом. По предположению $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\alpha)$, поэтому достаточно установить обратное включение $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\varphi)$. Пусть $a \in \ker(\alpha)$. Тогда из $0 = \alpha(a) = \lambda(\varphi(a))$ вытекает, что $\varphi(a) = 0$, следовательно, $a \in \ker(\varphi)$. Теперь предположим, что $\ker(\varphi) = \ker(\alpha)$. Тогда из равенств $\lambda(c) = 0$ и $c = \varphi(a)$ вытекает, что $\alpha(a) = 0$. Таким образом, $a \in \ker(\alpha) = \ker(\varphi)$ и, следовательно, $c = \varphi(a) = 0$. □

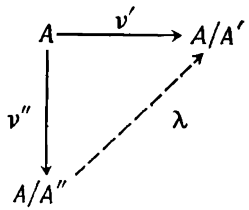
Укажем два частных случая теоремы 3.4.7.

1. Пусть $\alpha\colon A \to B$, $A' \subseteq \ker(\alpha)$, $C = A/A'$, $\varphi = \nu\colon A \to A/A'$. Тогда диаграмма



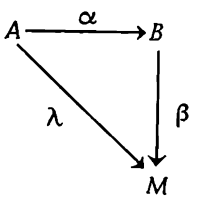
коммутативна, причем $\lambda(a + A') = \alpha(a)$. Для $A' = \ker(\alpha)$ это совпадает с теоремой о гомоморфизмах 3.4.1.

2. Если $A'' \subseteq A' \subseteq A$, $\alpha = \nu' \colon A \to A/A'$, $C = A/A''$, $\varphi = \nu' \colon A \to A/A''$, то диаграмма



коммутативна, причем $\lambda(a + A'') = a + A'$.

Пусть теперь для данного гомоморфизма λ дано разложение его в произведение $\lambda = \beta\alpha$:



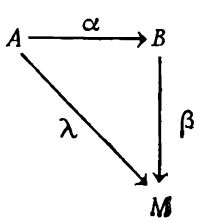
Возникает вопрос о связи между свойствами λ и свойствами такого разложения.

Напомним вначале определение (внутренней) прямой суммы (2.4), на этот раз для случая всего лишь двух слагаемых. В этом случае

$$B = B_0 \oplus B_1 \Leftrightarrow B = B_0 + B_1 \wedge B_0 \cap B_1 = 0.$$

3.4.8. ***Определение.*** (1) *Подмодуль $B_0 \subseteq B$ называется прямым слагаемым в B, если существует подмодуль $B_1 \subseteq B$, такой что $B = B_0 \oplus B_1$.*
(2) *Мономорфизм $\alpha \colon A \to B$ называется расщепляющим, если* $\operatorname{im}(\alpha)$ *— прямое слагаемое в B.*
(3) *Эпиморфизм $\beta \colon B \to C$ называется расщепляющим, если* $\ker(\beta)$ *— прямое слагаемое в B.*

3.4.9. ***Лемма.*** *Пусть диаграмма*



коммутативна, т. е. $\lambda = \beta\alpha$. *Тогда*

(1) $\mathrm{im}\,(\alpha) + \ker(\beta) = \beta^{-1}(\mathrm{im}\,\lambda)$),
(2) $\mathrm{im}\,(\alpha) \cap \ker(\beta) = \alpha(\ker(\lambda))$.

Доказательство. (1) $\lambda = \beta\alpha \Rightarrow \mathrm{im}\,(\lambda) = \mathrm{im}\,(\beta\alpha) = \beta\,(\mathrm{im}\,(\alpha)) \Rightarrow \beta^{-1}(\mathrm{im}\,(\lambda)) = \beta^{-1}(\beta\,(\mathrm{im}\,(\alpha))) = \mathrm{im}\,(\alpha) + \ker(\beta)$ (в силу 3.1.8).

(2) $\ker(\lambda) = \ker(\beta\alpha) = \alpha^{-1}(\ker(\beta))$ (в силу 3.1.8) $\Rightarrow \alpha(\ker(\lambda)) = \alpha(\alpha^{-1}(\ker(\beta))) = \mathrm{im}\,(\alpha) \cap \ker(\beta)$ (в силу 3.1.8). □

3.4.10. ***Следствие.*** (a) λ — *эпиморфизм* $\Rightarrow \mathrm{im}\,(\alpha) + \ker(\beta) = \beta^{-1}(M) = B$.
(b) λ — *мономорфизм* $\Rightarrow \mathrm{im}\,(\alpha) \cap \ker(\beta) = \alpha(0) = 0$.
(c) λ — *изоморфизм* $\Rightarrow \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus \ker(\beta) = B$.

Доказательство. Это непосредственно следует из 3.4.9. □

3.4.11. ***Следствие.*** (1) *Для* $\alpha\colon A \to B$ *следующие условия эквивалентны:*
(a) α — *расщепляющий мономорфизм;*
(b) *существует такой гомоморфизм* $\beta\colon B \to A$, *что* $\beta\alpha = 1_A$.
(2) *Для* $\beta\colon B \to C$ *следующие условия эквивалентны:*
(a) β — *расщепляющий эпиморфизм;*
(b) *существует такой гомоморфизм* $\gamma\colon C \to B$, *что* $\beta\gamma = 1_C$.

Доказательство. (1) „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Пусть $B = \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus B_1$ и $\pi\colon B \to \mathrm{im}\,(\alpha)$ — проекция B на $\mathrm{im}\,(\alpha)$, определяемая так:

$$\pi(\alpha(a) + b_1) := \alpha(a), \quad \alpha(a) \in \mathrm{im}\,(\alpha), \quad b_1 \in B_1.$$

Далее, обозначим через α_0 отображение $A \ni a \longmapsto \alpha(a) \in \mathrm{im}\,(\alpha)$, т. е. α_0 — изоморфизм, получаемый ограничением области значений мономорфизма α на $\mathrm{im}\,(\alpha)$. Тогда для $\beta := \alpha_0^{-1}\pi$

$$\beta\alpha(a) = \alpha_0^{-1}\pi\alpha(a) = \alpha_0^{-1}(\alpha(a)) = a, \quad a \in A.$$

Следовательно, $\beta\alpha = 1_A$.

(1) „(a) $\Leftarrow$ (b)“: Так как $\beta\alpha = 1_A$, то α является мономорфизмом, и притом, согласно 3.4.10 (c), расщепляющим.

(2) „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Пусть $B = \ker(\beta) \oplus B_1$ и $\iota\colon B_1 \ni b \longmapsto b \in B$ — вложение B_1 в B. Обозначая через β_1 ограничение β на B_1, получаем, что β_1 — изоморфизм (поскольку β — эпиморфизм и $\ker(\beta) \cap B_1 = 0$). Тогда для $\gamma := \iota\beta_1^{-1}$ имеем

$$\beta\gamma(c) = \beta\iota\beta_1^{-1}(c) = \beta(\beta_1^{-1}(c)) = c, \quad c \in C,$$

т. е. $\beta\gamma = 1_C$.

(2) „(a) $\Leftarrow$ (b)“: Так как $\beta\gamma = 1_C$, то β является эпиморфизмом, и притом, согласно 3.4.10 (c), расщепляющим. □

Отметим особо тот частный случай, когда α — вложение подмодуля $A \subseteq B$ и $\beta\colon B \to B/A$ — естественный эпиморфизм.

3.5. Теорема Жордана — Гёльдера — Шрайера

Мы будем рассматривать сейчас конечные цепи подмодулей данного модуля A. Пусть

$$0 = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_{k-1} \subset B_k = A,$$
$$0 = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_{l-1} \subset C_l = A.$$

Обозначим первую из этих цепей через $\mathscr{B}$, вторую — через $\mathscr{C}$. Дадим следующее определение.

3.5.1. *Определение.* (1) *Длина цепи* $\mathscr{B} := k$.
(2) *Факторы цепи* $\mathscr{B}$ *— это фактормодули* B_i/B_{i-1}, $i = 1, \ldots, k$; *i-й фактор* $\mathscr{B}$ *— это* B_i/B_{i-1}.
(3) *Цепи* $\mathscr{B}$ *и* $\mathscr{C}$ *называются изоморфными* (*запись:* $\mathscr{B} \cong \mathscr{C}$), *если существует биекция* δ *между множеством индексов* I *для* $\mathscr{B}$ *и множеством индексов* J *для* $\mathscr{C}$, *такая, что*

$$B_i/B_{i-1} \cong C_{\delta(i)}/C_{\delta(i)-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

(4) $\mathscr{C}$ *называется уплотнением* $\mathscr{B}$, *а* $\mathscr{B}$ *— подцепью цепи* $\mathscr{C}$, *если либо* $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ (*тривиальное уплотнение*), *либо* $\mathscr{B}$ *получается из* $\mathscr{C}$ *удалением некоторых* C_j.
(5) *Цепь* $\mathscr{B}$ *для* A *называется композиционным рядом, если* $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ [B_{i-1} *максимален в* B_i] ($\Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \ldots, k$ [B_i/B_{i-1} *прост*], *в силу* 3.1.14).
(6) *Модуль* A *называется модулем конечной длины, если* $A = 0 \vee A$ *обладает композиционным рядом.*

Замечание. *Если* $\mathscr{B} \cong \mathscr{C}$ *и* $B_i \cong B_{i-1}$ *для некоторого* i, *то существует такое* j, *что цепи, полученные удалением* B_j *из* $\mathscr{B}$ *и* C_j *из* $\mathscr{C}$, *опять изоморфны.*

Доказательство. Прежде всего, $B_i = B_{i-1}$ влечет $B_i/B_{i-1} = 0$ и потому $C_{\delta(i)}/C_{\delta(i)-1} = 0$. Следовательно, $C_{\delta(i)} = C_{\delta(i)-1}$. С удалением B_i, соотв. $C_{\delta(i)}$, исчезает лишь фактор $B_i/B_{i-1} = 0 = C_{\delta(i)}/C_{\delta(i)-1}$, а остальные факторы остаются неизменными. □

В дальнейшем мы будем пользоваться этим замечанием без особых оговорок. Далее, ясно, что изоморфизм, определенный в (3), является отношением эквивалентности в множестве всех цепей вида $\mathscr{B}$ для модуля A.

Примеры. 1. Пусть $V = V_K$ — векторное пространство и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис для V. Тогда

$$0 \subset x_1K \subset x_1K + x_2K \subset \ldots \subset \sum_{i=1}^{n-1} x_iK \subset \sum_{i=1}^{n} x_iK = V$$

— композиционный ряд для V.

2. Каждая цепь в $\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$ допускает нетривиальное уплотнение. Пусть

$$0 \subsetneq B_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbf{Z}$$

— цепь с $B_1 \neq 0$ (это не приводит к потере общности). Поскольку $\mathbf{Z}$ не содержит простых идеалов, то B_1 не может быть простым. Таким образом, между 0 и B_1 можно вставить отличный от них идеал. Следовательно, $\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$ не имеет композиционных рядов.

3. В $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ каждую цепь

$$0 \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \ldots \subsetneq B_k = \mathbf{Q}_\mathbf{Z}$$

с $0 \neq B_1$ и $B_{k-1} \neq \mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ можно уплотнить нетривиальным образом как между 0 и B_1, так и между B_{k-1} и $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$, поскольку $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ не содержит ни минимальных, ни максимальных подмодулей. Поэтому $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ также не обладает композиционным рядом.

Мы докажем сейчас теорему Жордана — Гёльдера — Шрайера. Важнейшим следствием ее является единственность (с точностью до изоморфизма) композиционного ряда модуля.

3.5.2. ***Теорема Жордана — Гёльдера — Шрайера.*** *Любые две (конечные!) цепи для данного модуля имеют изоморфные уплотнения.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — данные конечные цепи для модуля A. Вставим между B_i и B_{i+1} $(i = 0, \ldots, k-1)$ модули

$$B_{i,j} = B_i + (B_{i+1} \cap C_j), \quad j = 0, \ldots, l,$$

для которых, очевидно, имеют место соотношения

$$B_i = B_{i,0} \subsetneq B_{i,1} \subsetneq \ldots \subsetneq B_{i,l} = B_{i+1}.$$

Аналогично между C_j и C_{j+1} $(j = 0, \ldots, l-1)$ вставим модули

$$C_{i,j} = C_j + (C_{j+1} \cap B_i), \quad i = 0, \ldots, k,$$

для которых также

$$C_j = C_{0,j} \subsetneq C_{1,j} \subsetneq \ldots \subsetneq C_{k,j} = C_{j+1}.$$

Уплотненные таким образом цепи обозначим через $\mathscr{B}^*$ и $\mathscr{C}^*$. Они имеют одинаковую длину kl. Согласно 3.4.5,

$$B_{i,j+1}/B_{i,j} \cong C_{i+1,j}/C_{i,j} \quad (i = 0, \ldots, k-1;\ j = 0, \ldots, l-1).$$

Из того факта, что в этих kl изоморфизмах фигурируют все kl факторов цепи $\mathscr{B}^*$ и все kl факторов цепи $\mathscr{C}^*$, следует, что $\mathscr{B}^* \cong \mathscr{C}^*$. □

3.5.3. ***Следствие.*** *Пусть A — модуль конечной длины. Тогда:* (1) *каждую цепь $\mathscr{B}$ вида*

$$0 = B_0 \underset{\neq}{\subsetneq} B_1 \underset{\neq}{\subsetneq} \ldots \underset{\neq}{\subsetneq} B_k = A$$

можно уплотнить до композиционного ряда;
(2) *любые два композиционных ряда модуля A изоморфны.*

Доказательство. (1) По предположению в A существует композиционный ряд $\mathscr{C}$. По теореме Жордана — Гёльдера — Шрайера $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ обладают изоморфными уплотнениями $\mathscr{B}^*$ и $\mathscr{C}^*$. Но $\mathscr{C}$ как композиционный ряд можно уплотнить только тривиальным образом, поэтому (согласно замечанию после 3.5.1) для $\mathscr{B}$ существует уплотнение $\mathscr{B}^\circ$, изоморфное $\mathscr{C}$. Из того что в $\mathscr{C}$ все факторы просты, вытекает, что то же самое верно для всех факторов цепи $\mathscr{B}^\circ$. Следовательно, $\mathscr{B}^\circ$ — композиционный ряд.

(2) Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — композиционные ряды. Рассматривая, как и в части (1), уплотнение $\mathscr{B}^\circ$ для $\mathscr{B}$, имеем $\mathscr{B}^\circ \cong \mathscr{C}$. Поскольку $\mathscr{B}^\circ$ — уплотнение для $\mathscr{B}$ и оба они — композиционные ряды, то $\mathscr{B} = \mathscr{B}^\circ$ и потому $\mathscr{B} \cong \mathscr{C}$. □

3.5.4. ***Определение.*** *Пусть A — модуль конечной длины. Длиной A (обозначаемой через $\lg(A)$) называется длина любого композиционного ряда для A (все они имеют одинаковую длину).*

3.5.5. ***Следствие.*** *Пусть $A \subseteq M$. Тогда M — модуль конечной длины $\Leftrightarrow$ A и M/A — модули конечной длины. В этом случае*

$$\lg(M) = \lg(A) + \lg(M/A).$$

Доказательство. Если $0 = A$ или $A = M$, то утверждение очевидно. Пусть теперь $0 \subsetneq A \subsetneq M$ и M — модуль конечной длины. Тогда цепь

$$0 \subsetneq A \subsetneq M$$

можно уплотнить до композиционного ряда

$$0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_k = A \subsetneq \ldots A_n = M.$$

Начальный отрезок этого ряда до $A_k = A$ служит композиционным рядом для A Мы утверждаем, что

$$0 = A/A \subsetneq A_{k+1}/A \subsetneq \ldots \subsetneq A_n/A = M/A$$

— композиционный ряд модуля M/A. Действительно, в силу второй теоремы об изоморфизме модуль

$$(A_{k+i+1}/A)/(A_{k+i}/A) \cong A_{k+i+1}/A_{k+i}$$

прост. Из предыдущего следует, что

$$\lg(M) = \lg(A) + \lg(M/A).$$

Пусть теперь A и M/A — модули конечной длины и

$$0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_k = A,$$
$$0 \subsetneq \bar{B}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq B_l = M/A$$

— композиционные ряды для A и M/A соответственно. Пусть, далее, $\nu\colon M \to M/A$ и $B_i := \nu^{-1}(\bar{B}_i)$. Тогда $A \subsetneq B_i$ и $\nu(B_i) = B_i/A = \bar{B}_i$. Из простоты $\bar{B}_{i+1}/\bar{B}_i$ и изоморфизма

$$(B_{i+1}/A)/(B_i/A) \cong B_{i+1}/B_i$$

вытекает простота B_{i+1}/B_i. Следовательно,

$$0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_k = A \subsetneq B_1 \subsetneq \ldots \subsetneq B_l = M$$

— композиционный ряд для M, т. е. M — модуль конечной длины. □

Это доказательство, в частности, показывает, как из композиционных рядов для A и M/A можно построить композиционный ряд для M.

Пример. $\mathbf{Z}$-модуль $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ имеет два композиционных ряда:

$$0 \subsetneq 2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Z}/6\mathbf{Z},$$
$$0 \subsetneq 3\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}.$$

Факторы первого:

$$2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z},\quad (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})/(2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z};$$

второго:

$$3\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\quad (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})/(3\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}.$$

Отсюда сразу явствует изоморфизм обоих рядов.

Значение теоремы Жордана — Гёльдера — Шрайера для модулей конечной длины поясняется следующим соображением. Пусть A — модуль конечной длины, B — произвольный подмодуль в A и C — максимальный подмодуль в B. Тогда B/C — композиционный фактор (= фактор некоторого композиционного ряда) для A. Действительно, рассмотрим цепь

$$0 \subsetneq C \subsetneq B \subsetneq A$$

или соответствующую более короткую цепь, в случае $C = 0$ или $(B = A)$. Согласно 3.5.3, ее можно уплотнить до композиционного ряда, причем между C и B не будет подмодулей, так как C максимален в B. Следовательно, B/C — действительно композиционный фактор для A, т. е. один из конечного числа однозначно определенных (с точностью до изоморфизма) композиционных факторов для A.

3.6. Свойства функтора Hom

В гл. 1 мы ввели функтор Hom_R из категории $\mathscr{M}_R$ (или ${}_S\mathscr{M}$, или ${}_S\mathscr{M}_R$) в категорию множеств $\mathscr{S}$, контравариантный по первому

аргументу и ковариантный по второму:

$$\mathrm{Hom}_R\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_R)\times\mathrm{Ob}(\mathscr{M}_R)\ni(A,\ B)\longmapsto \mathrm{Hom}_R(A,\ B)\in\mathrm{Ob}(\mathscr{S}),$$
$$\mathrm{Hom}_R\colon \mathrm{Mor}(\mathscr{M}_R)\times\mathrm{Mor}(\mathscr{M}_R)\ni(\alpha,\ \gamma)\longmapsto \mathrm{Hom}_R(\alpha,\ \gamma)\in\mathrm{Mor}(\mathscr{S}),$$

где $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ — множество гомоморфизмов из A в B и $\mathrm{Hom}_R(\alpha, \gamma)$ определяется следующим образом: для $\alpha\colon A\to B$, $\gamma\colon C\to D$

$$\mathrm{Hom}_R(\alpha,\ \gamma)\colon \mathrm{Hom}_R(B,\ C)\ni\beta\longmapsto\gamma\beta\alpha\in\mathrm{Hom}_R(A,\ D).$$

Если $R=K$ — поле, т. е. $\mathscr{M}_R$ — категория векторных пространств над K, то $\mathrm{Hom}_R(A, B)$, как известно, превращается в векторное пространство над K с помощью определений

$$(\alpha_1+\alpha_2)(a):=\alpha_1(a)+\alpha_2(a),$$
$$(\alpha k)(a):=\alpha(ak)$$

(где $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2\in\mathrm{Hom}_K(A,\ B)$, $a\in A$, $k\in K$), так что Hom_K можно рассматривать как функтор в категорию $\mathscr{M}_R$ (а не только в $\mathscr{S}$). Обобщим теперь это свойство.

Пусть R — снова произвольное кольцо с единицей. Множество $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ превращается в абелеву группу при помощи следующего определения: $\alpha_1+\alpha_2$ для $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathrm{Hom}_R(A,\ B)$ определяется равенством

$$(\alpha_1+\alpha_2)(a)=\alpha_1(a)+\alpha_2(a),\ a\in A.$$

Групповые свойства $\mathrm{Hom}_R(A,\ B)$, вытекающие из групповых свойств B, легко проверяются; в частности, нулевое отображение из A в B служит нулевым элементом группы $\mathrm{Hom}_R(A,\ B)$ и отображение $-\alpha$, задаваемое формулой

$$(-\alpha)(a):=-\alpha(a),$$

— обратным гомоморфизмом для $\alpha\in\mathrm{Hom}_R(A,\ B)$.

Если толковать $\mathrm{Hom}_R(A,\ B)$ таким образом, то Hom_R становится функтором в категорию $\mathscr{A}$ абелевых групп. Чтобы убедиться в этом, надо еще показать, что $\mathrm{Hom}_R(\alpha,\ \gamma)$ есть групповой гомоморфизм из $\mathrm{Hom}_R(B,\ C)$ в $\mathrm{Hom}_R(A,\ D)$. Но действительно,

$$\mathrm{Hom}_R(\alpha,\ \gamma)(\beta_1+\beta_2)=\gamma(\beta_1+\beta_2)\alpha=\gamma\beta_1\alpha+\gamma\beta_2\alpha=$$
$$=\mathrm{Hom}_R(\alpha,\ \gamma)(\beta_1)+\mathrm{Hom}_R(\alpha,\ \gamma)(\beta_2),$$

поскольку

$$(\gamma(\beta_1+\beta_2)\alpha)(a)=\gamma((\beta_1+\beta_2)(\alpha(a)))$$
$$=\gamma(\beta_1(\alpha(a))+\beta_2(\alpha(a)))=\gamma(\beta_1(\alpha(a)))+\gamma(\beta_2(\alpha(a)))$$
$$=(\gamma\beta_1\alpha)(a)+(\gamma\beta_2\alpha)(a)=(\gamma\beta_1\alpha+\gamma\beta_2\alpha)(a).$$

Если теперь S — еще одно кольцо с единицей, $A={}_SA_R$ и снова $B=B_R$, то как непосредственно проверяется, $\mathrm{Hom}_R(A,\ B)$

с помощью определения

$$(\alpha s)(a) := \alpha(sa) \quad \alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B),\ a \in A,\ s \in S,$$

превращается в правый S-модуль.

Далее, если T — кольцо с единицей и $A = A_R$, а $B = {}_TB_R$, то $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ с помощью определения

$$(t\alpha)(a) := t\alpha(a),\ \alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B),\ a \in A,\ t \in T,$$

превращается в левый T-модуль.

Если одновременно $A = {}_SA_R$ и $B = {}_TB_R$, то

$$\mathrm{Hom}_R(A, B) = {}_T\mathrm{Hom}_R(A, B)_S,$$

т. е. $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ становится T-S-бимодулем.

3.6.1. *Определение.* *Центром кольца R называется множество*

$$\mathrm{cen}(R) := \{s \mid s \in R \wedge \forall r \in R\,[sr = rs]\}.$$

Замечание. $\mathrm{cen}(R)$ — коммутативное подкольцо в R, содержащее единицу.

Положим $S := \mathrm{cen}(S)$. Как легко убедиться, модуль $A = A_R$ с помощью определения

$$sa := as,\quad s \in S = \mathrm{cen}(R),\quad a \in A,$$

превращается в S-R-бимодуль.

Из того что это верно для любого R-модуля, вытекает, что $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ можно рассматривать как правый $S(= \mathrm{cen}(R))$-модуль (или как левый, или как бимодуль). Нетрудно видеть, что Hom_R можно интерпретировать как функтор в категорию $\mathscr{M}_S$, соотв. ${}_S\mathscr{M}$, ${}_S\mathscr{M}_R$. Если R коммутативно, т. е. $S = \mathrm{cen}(R) = R$, то Hom_R — функтор в $\mathscr{M}_R$, как в случае векторных пространств над полем.

Чтобы в сложных случаях избежать путаницы, мы пишем иногда, например для ${}_SA_R$, ${}_TB_R$,

$$\mathrm{Hom}_R({}_SA_R, {}_TB_R);$$

здесь индекс R у Hom_R указывает, что речь идет об R-гомоморфизмах, а индексы S и T означают, что $\mathrm{Hom}_R({}_SA_R, {}_TB_R)$ рассматривается как T-S-бимодуль в указанном выше смысле. В случае ${}_RA_S$, ${}_RB_T$ множество $\mathrm{Hom}_R({}_RA_S, {}_RB_T)$ является S-T-бимодулем, и по нашему соглашению в начале § 3.1

$$a(s\alpha t) = (as)(\alpha t) = (as\alpha)\,t = as\alpha t$$

означает, что сначала $a \in A$ умножается на $s \in S$, затем к as применяется $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, а потом результат умножается на $t \in T$.

Если Hom_R при фиксированном втором аргументе $\mathscr{M}_R$ рассматривается как функтор по первому аргументу, то используются следующие обозначения:

$$\mathrm{Hom}_R(-, M)\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_R) \ni A \longmapsto \mathrm{Hom}_R(A, M) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{S}),$$
$$\mathrm{Hom}_R(-, M)\colon \mathrm{Mor}(M_R) \ni \alpha \longmapsto \mathrm{Hom}_R(\alpha, M) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{S}),$$

где

$$\mathrm{Hom}_R(\alpha, M) := \mathrm{Hom}_R(\alpha, 1_M).$$

Аналогичная запись применяется при фиксированном первом аргументе.

3.7. Кольцо эндоморфизмов модуля

Как было сказано в предыдущем параграфе, $\mathrm{Hom}_R(A, A)$ для каждого модуля A есть аддитивная абелева группа. Далее, мы знаем, что композиция $\beta\alpha$ двух гомоморфизмов $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon B \to C$ — также гомоморфизм. Следовательно, в $\mathrm{Hom}_R(A, A)$ можно определить произведение двух элементов как их композицию, и так определенное умножение ассоциативно (поскольку операция взятия композиции отображений ассоциативна).

3.7.1. ***Теорема.*** *$\mathrm{Hom}_R(A, A)$ представляет собой кольцо с единицей, в котором сложение и умножение определяются следующим образом:*

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a),$$
$$(\alpha_1\alpha_2)(a) = \alpha_1(\alpha_2(a)).$$

Доказательство. После предыдущих рассуждений остается лишь показать, что выполняются законы дистрибутивности. Имеем

$$\begin{aligned}((\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3)(a) &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3(a)) = \alpha_1(\alpha_3(a)) + \alpha_2(\alpha_3(a)) \\ &= (\alpha_1\alpha_3)(a) + (\alpha_2\alpha_3)(a) = (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)(a) \\ \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 &= \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3; \\ (\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2))(a) &= \alpha_3((\alpha_1 + \alpha_2)(a)) = \alpha_3(\alpha_1(a)) + \alpha_2(a)) \\ &= \alpha_3(\alpha_1(a)) + \alpha_3(\alpha_2(a)) = (\alpha_3\alpha_1)(a) + (\alpha_3\alpha_2)(a) \\ &= (\alpha_3\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2)(a) \\ \Rightarrow \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) &= \alpha_3\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2.\end{aligned}$$

Единицей кольца $\mathrm{Hom}_R(A, A)$ служит тождественное отображение A на себя. □

3.7.2. ***Определение.*** *Описанное в* 3.7.1 *кольцо называется кольцом эндоморфизмов модуля A (или кольцом R-эндоморфизмов модуля A) и обозначается через* $\mathrm{End}(A_R)$.

Пример. Если $V = V_K$ — векторное пространство, то $\mathrm{End}(V_K)$ — кольцо всех линейных преобразований этого векторного пространства.

Замечание. Если V_K — векторное пространство размерности n, где $0 < n < \infty$, то $\mathrm{End}(V_K)$ изоморфно кольцу квадратных матриц порядка n с коэффициентами из K. Доказательство этого факта будет дано позже в более общей ситуации.

Теперь мы хотим определить $\mathrm{End}(V_R)$ для произвольного кольца R. С этой целью рассмотрим для фиксированного $r_0 \in R$ отображение

$$r_0^{(l)}: R \ni x \longmapsto r_0 x \in R.$$

В силу законов дистрибутивности и ассоциативности $r_0^{(l)} \in \in \mathrm{Hom}_R(R_R, R_R)$; $r_0^{(l)}$ называется *левым умножением, порожденным элементом* r_0. Пусть теперь $\varphi \in \mathrm{End}(R_R)$. Тогда для произвольного $x \in R$ и единицы $1 \in R$ имеем

$$\varphi(x) = \varphi(1x) = \varphi(1)(x) = \varphi(1)^{(l)}(x),$$

т. е. $\varphi = \varphi(1)^{(l)}$. Следовательно, $\mathrm{End}(R_R)$ состоит в точности из всех левых умножений; поэтому мы пишем

$$R^{(l)} = \mathrm{End}(R_R).$$

3.7.3. ***Лемма.*** *Отображение*

$$\rho: R \ni r \longmapsto r^{(l)} \in R^{(l)}$$

является кольцевым изоморфизмом.

Доказательство. Для r_1, r_2, $x \in R$ имеем

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2)^{(l)}(x) &= (r_1 + r_2)x = r_1 x + r_2 x \\ &= r_1^{(l)}(x) + r_2^{(l)}(x) = (r_1^{(l)} + r_2^{(l)})(x) \\ \Rightarrow (r_1 + r_2)^{(l)} &= r_1^{(l)} + r_2^{(l)}; \\ (r_1 r_2)^{(l)}(x) &= (r_1 r_2)(x) = r_1(r_2 x) = r_1^{(l)}(r_2^{(l)}(x)) \\ &= r_1^{(l)} r_2^{(l)})(x) \\ \Rightarrow (r_1 r_2)^{(l)} &= r_1^{(l)} r_2^{(l)}.\end{aligned}$$

Таким образом, ρ — кольцевой гомоморфизм.

Пусть теперь $r_1 x = r_2 x$. Тогда для $x = 1$ имеем $r_1 = r_1 1 = r_2 1 = = r_2$, поэтому $r_1^{(l)} = r_2^{(l)} \Rightarrow r_1 = r_2$, т. е. ρ инъективно. То, что ρ сюръективно, очевидно. □

Аналогично можно рассмотреть кольцо $R^{(r)}$ правых умножений для R и получить

$$R \cong R^{(r)} = \mathrm{End}({}_R R).$$

Далее следует важный результат о кольце эндоморфизмов простого модуля. Сначала докажем несколько более общий результат.

3.7.4. *Пусть A и B — два простых R-модуля. Тогда каждый гомоморфизм из A в B есть либо 0, либо изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\alpha\colon A \to B$ — гомоморфизм. Поскольку $\ker(\alpha) \subseteq A$, то либо $\ker(\alpha) = A$, а значит, $\alpha = 0$, либо $\ker(\alpha) = 0$, т. е. α — мономорфизм. Поскольку $\operatorname{im}(\alpha) \subseteq B$, то либо $\operatorname{im}(\alpha) = 0$, а значит, $\alpha = 0$, либо $\operatorname{im}(\alpha) = B$, т. е. α — эпиморфизм. Итак, $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha$ — изоморфизм. □

3.7.5. ***Лемма* (Шур).** *Кольцо эндоморфизмов простого модуля является телом.*

Доказательство. Согласно 3.7.4, каждый ненулевой эндоморфизм является автоморфизмом, а значит, обладает обратным элементом в кольце эндоморфизмов. Следовательно, кольцо эндоморфизмов является телом. □

Вернемся еще раз к общей ситуации, когда дан произвольный модуль A_R. Положим $S := \operatorname{End}(A_R)$. При нашей системе записи эндоморфизмы действуют на A слева. Записывая вместо $\alpha(a)$ лишь αa, где $\alpha \in S$, $a \in A$, легко проверить, что A — левый S-модуль. Из равенств

$$\alpha(ar) = \alpha(a)r = (\alpha a)r, \quad \alpha \in S, \quad a \in A, \quad r \in R,$$

вытекает, что A является даже S-R-бимодулем. В дальнейшем мы неоднократно будем обращаться к этой бимодульной структуре, ибо связь между структурами A_R, ${}_SA$ и ${}_SA_R$ играет важную роль в некоторых рассуждениях.

3.8. Дуальные модули

Как и для векторных пространств, важное место в теории модулей занимают понятие дуального модуля и связанные с ним соотношения. Главный результат последующих рассуждений — доказательство того, что переход к бидуальному модулю является функтором Λ и что существует функторный морфизм между тождественным функтором и Δ.

Докажем сейчас следующую общую теорему.

3.8.1. ***Теорема.*** *Пусть дан бимодуль ${}_TL_R$. Тогда*

(1) $\operatorname{Hom}_R(-, {}_TL_R)\colon \mathscr{M}_R \to {}_T\mathscr{M}$, *где*

$\operatorname{Hom}_R(-, {}_TL_R)\colon \operatorname{Ob}(\mathscr{M}_R) \ni A \longmapsto \operatorname{Hom}_R(A, {}_TL_R) \in \operatorname{Ob}({}_T\mathscr{M})$,

$\operatorname{Hom}_R(-, {}_TL_R)\colon \operatorname{Mor}(\mathscr{M}_R) \ni \alpha \longmapsto \operatorname{Hom}_R(\alpha, 1_L) \in \operatorname{Mor}({}_T\mathscr{M})$,

является контравариантным функтором.
(2) *Если* $\Delta_L := \mathrm{Hom}_T({}_T\mathrm{Hom}_R(-, {}_TL_R), {}_TL_R)$, *то*

$$\Delta_L: \mathscr{M}_R \to \mathscr{M}_R$$

является ковариантным функтором.
(3) *Для* $A \in \mathscr{M}_R$ *определим отображение* $\Phi_A: A \to \Delta_L(A)$ *правилом*

$$\Phi_A(a): \mathrm{Hom}_R(A, L) \ni \varphi \longmapsto \varphi(a) \in L.$$

Тогда

$$\Phi = (\Phi_A \mid A \in \mathscr{M}_R)$$

является функторным морфизмом между тождественным функтором $1_{\mathscr{M}_R}$ *и функтором* Δ_l.

Доказательство. (1) Как было показано раньше, $\mathrm{Hom}_R \times (A_R, {}_TL_R)$ есть левый T-модуль и для $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$

$$\mathrm{Hom}_R(\alpha, 1_L): \mathrm{Hom}_R(B, L) \ni \psi \longmapsto \psi\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, L).$$

Остается показать, что $\mathrm{Hom}_R(\alpha, 1_L)$ — гомоморфизм левых T-модулей. Это непосредственно следует из равенства

$$t\psi \cdot \alpha = t \cdot \psi\alpha, \quad t \in T.$$

Наконец,

$$\mathrm{Hom}_R(1_A, 1_L) = 1_{\mathrm{Hom}_R(A, L)},$$
$$\mathrm{Hom}_R(\beta\alpha, 1_L) = \mathrm{Hom}_R(\alpha, 1_L)\,\mathrm{Hom}_R(\beta, 1_L),$$

чем все и доказано.
(2) Функтор Δ_L есть композиция функторов

$$\mathrm{Hom}_R(\cdot, {}_TL_R): \mathscr{M}_R \to {}_T\mathscr{M}$$

и (аналогично определенного) функтора

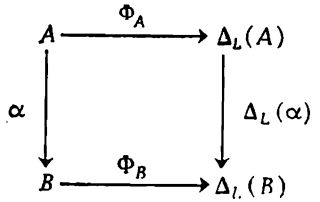
$$\mathrm{Hom}_T(\cdot, {}_TL_R): {}_T\mathscr{M} \to \mathscr{M}_R.$$

(3) Φ_A есть R-гомоморфизм. Пусть $a_1, a_2 \in A$, $r_1, r_2 \in R$, $\varphi \in \in \mathrm{Hom}_R(A, L)$. Тогда

$$\varphi\Phi(a_1r_1 + a_2r_2) = \varphi(a_1r_1 + a_2r_2) = \varphi(a_1)r_1 + \varphi(a_2)r_2 =$$
$$= \varphi\Phi(a_1)r_1 + \varphi\Phi(a_2)r_2 = \varphi(\Phi(a_1)r_1 + \Phi(a_2)r_2,$$

что и требовалось доказать.

Осталось установить коммутативность диаграммы



С одной стороны, для $a \in A$, $\psi \in \mathrm{Hom}_R(B, L)$

$$\psi\Phi_B(\alpha a) = \psi(\alpha a),$$

а с другой стороны,

$$\psi\Delta_L(\alpha)\,\Phi_A(a) = \psi\alpha\Phi_A(a) = \psi\alpha(a) = \psi(\alpha a),$$

что и требовалось доказать. □

Особый интерес представляет частный случай $T = R$ и ${}_TL_R = {}_RR_R$.

3.8.2. *Определение.* (1) *Для* A_R *модуль*

$$A^* := \mathrm{Hom}_R(A, R)$$

называется дуальным к A_R, *а*

$$A^{**} := \Delta(A) := \Delta_R(A) = \mathrm{Hom}_R({}_R\mathrm{Hom}_R(A_R, R_R),\ {}_RR)$$

— бидуальным к A_R *модулем.*

(2) *Для* $\alpha\colon A_R \to B_R$ *гомоморфизм*

$$\alpha^* := \mathrm{Hom}_R(\alpha, R) = \mathrm{Hom}_R(\alpha, 1_R)$$

называется дуальным гомоморфизмом к α, *а*

$$\alpha^{**} := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(\alpha, R), R)$$

— бидуальным к α *гомоморфизмом.*

(3) *Для* $a \in A$ *элемент* $a^{**} := \Phi_A(a)$ *называется бидуальным к* a *элементом.*

Во многих случаях интересно знать, какими свойствами обладает гомоморфизм

$$\Phi_A\colon A \ni a \longmapsto a^{**} \in A^{**}.$$

Если A_R — конечномерное векторное пространство, то, как известно, Φ_A — изоморфизм. В общем случае это не всегда так. Некоторые из имеющихся здесь возможностей получили особые названия.

3.8.3. *Определение.* *Пусть* $\Phi_A\colon A \ni a \longmapsto a^{**} \in A^{**}$.

(1) A_R *называется полурефлексивным*[1], *если* Φ_A *— мономорфизм.*

---

[1] Используется также термин „модуль без кручения в смысле Басса". — *Прим. перев.*

(2) A_R *называется рефлексивным, если* Φ_A *— изоморфизм.*

Позже мы рассмотрим многочисленные применения этого понятия, поэтому здесь не приводим примеры.

3.9. Точные последовательности

В гомологической алгебре важную роль играют комплексы и точные последовательности. Они принадлежат к основным алгебраическим понятиям и используются, в частности, для определения функторов Ext и Tor. И хотя в этой книге дальше гомологических понятий мы не идем, все же необходимо привести по крайней мере определения комплекса и точных последовательностей. Целесообразность этого выявится при одном их использовании в гл. 12.

Пусть R — некоторое кольцо и

$$\boldsymbol{A} := \ldots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \ldots$$

— последовательность гомоморфизмов $A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ правых R-модулей, конечная или бесконечная в одну или в обе стороны. Например, $\boldsymbol{A}$ может иметь вид

$$\boldsymbol{A} = 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \xrightarrow{\alpha_3},$$

или

$$\boldsymbol{A} = \ldots \xrightarrow{\alpha_{-4}} A_{-3} \xrightarrow{\alpha_{-3}} A_{-2} \xrightarrow{\alpha_{-2}} A_{-1} \longrightarrow 0,$$

или

$$\boldsymbol{A} = 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \rightarrow 0,$$

где всюду $0 \rightarrow A$, соотв. $W \rightarrow 0$ — однозначно определенный R-гомоморфизм. Наконец, нумерация может быть обратной, например:

$$\boldsymbol{A} = \ldots \xrightarrow{\alpha_3} A_3 \xrightarrow{\alpha_2} A_2 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \rightarrow 0.$$

3.9.1. ***Определение.*** (a) *Последовательность* $\boldsymbol{A}$ *называется комплексом, если для каждой подпоследовательности вида*

$$A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$$

имеет место включение

$$\operatorname{im}(\alpha_{i-1}) \subseteq \ker(\alpha_i).$$

(b) *Последовательность (или комплекс)* $\boldsymbol{A}$ *называется точной, если для каждой подпоследовательности вида*

$$A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$$

имеет место равенство

$$\operatorname{im}(\alpha_{i-1}) = \ker(\alpha_i).$$

(c) *Точная последовательность* $\boldsymbol{A}$ *называется расщепляющей точной последовательностью, если для каждой подпоследовательности вида*

$$A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$$

$\operatorname{im}(\alpha_{i-1}) = \ker(\alpha_i)$ *есть прямое слагаемое модуля* A_i.
(d) *Если* $\boldsymbol{A}$ *— комплекс, то последовательность*

$$\ldots, \ker(\alpha_i)/\operatorname{im}(\alpha_{i-1}), \ker(\alpha_{i+1})/\operatorname{im}(\alpha_i), \ldots$$

называется гомологией для $\boldsymbol{A}$, *а* $\ker(\alpha_i)/\operatorname{im}(\alpha_{i-1})$ *называется* i*-м модулем гомологии для* $\boldsymbol{A}$.
(e) *Точная последовательность вида*

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0$$

называется короткой точной последовательностью.

Заметим, что последовательность $\boldsymbol{A}$ является комплексом тогда и только тогда, когда (для всех встречающихся в последовательности пар индексов i, $i-1$)

$$\alpha_i \alpha_{i-1} = 0$$

(так как $\alpha_i \alpha_{i-1} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{im}(\alpha_{i-1}) \subseteq \ker(\alpha_i)$).

Мы напомнили все эти понятия исключительно ради полноты, в этой книге (в гл. 12) будут рассматриваться только короткие точные последовательности. Далее мы ограничиваемся тем, что нам понадобится ниже.

Прежде всего выясним, что означает точность короткой последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0.$$

Поскольку первое отображение $0 \to A$ имеет образ 0, точность $0 \to A \xrightarrow{f} M$ означает, что f — мономорфизм. Так как последнее отображение $W \to 0$ — нулевое с ядром W, то точность $M \xrightarrow{g} W \to 0$ означает, что g — эпиморфизм. Из $\operatorname{im}(f) = \ker(g)$ вытекает, что $M/\operatorname{im}(f) \cong W$.

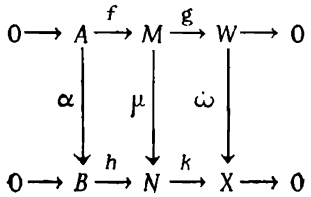
В частности, для $A \subseteq M$ мы имеем короткую точную последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\nu} M/A \to 0,$$

где ι — включение и ν — естественный эпиморфизм.

Позже мы воспользуемся следующим предложением.

3.9.2. *Предложение.* *Пусть все модули — правые R-модули и все гомоморфизмы — R-гомоморфизмы. Пусть, далее,*



— коммутативная диаграмма (т. е. $\mu f = h\alpha$ и $\omega g = k\mu$) с точными строками, причем α, μ, ω — мономорфизмы. Тогда μ является изоморфизмом, если и только если α и ω — изоморфизмы.

Доказательство. Пусть μ — изоморфизм. Если $b \in B$, то $h(b) \in N \Rightarrow$ существует $m \in M$ с $\mu(m) = h(b) \Rightarrow \omega g(m) = k\mu(m) = kh(b) = 0$. Так как ω — мономорфизм, $g(m) = 0$ и, следовательно, $m \in \ker(g) = \operatorname{im}(f) \Rightarrow$ существует такое $a \in A$, что $f(a) = m \Rightarrow h\alpha(a) = \mu f(a) = \mu(m) = h(b) \Rightarrow h(\alpha(a) - b) = 0$, а поскольку h — мономорфизм, то $\alpha(a) = b$, т. е. α также сюръективно, и потому α — изоморфизм.

Пусть теперь задано $x \in X$. Тогда существует такое $n \in N$, что $k(n) = x \Rightarrow$ существует такое $m \in M$, что $\mu(m) = n \Rightarrow \omega g(m) = k\mu(m) = k(n) = x \Rightarrow \omega$ также сюръективно, а значит, является изоморфизмом.

Обратно, пусть α и ω — оба изоморфизмы и $n \in N$. Тогда существует $w \in W$, для которого $\omega(w) = k(n)$. Следовательно, найдется такое $m \in M$, что $g(m) = w \Rightarrow k\mu(m) = \omega g(m) = \omega(w) = k(n) \Rightarrow k(n - \mu(m)) = 0 \Rightarrow$ существует такое $b \in B$, что $h(b) = n - \mu(m) \Rightarrow$ найдется такое $a \in A$, что $\alpha(a) = b \Rightarrow \mu f(a) = h\alpha(a) = h(b) = n - \mu(m) \Rightarrow \mu(f(a) + m) = n$; таким образом, μ сюръективно и, следовательно, является изоморфизмом. □

Это доказательство — типичный пример так называемого *диаграммного поиска*. Очевидно, что без диаграммы это доказательство было бы совершенно не наглядным.

Теперь вернемся к расщепляющим точным последовательностям. Пусть

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0$$

— точная последовательность. Очевидно, последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \quad \text{и} \quad M \xrightarrow{g} W \to 0$$

всегда расщепляющие, так что, является ли данная точная последовательность расщепляющей, зависит только от того, является

ли таковой последовательность

$$A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W,$$

т. е. от того, будет ли $\operatorname{im}(f) = \ker(g)$ прямым слагаемым в M.

3.9.3. ***Предложение.*** *Пусть* $\boldsymbol{A} = 0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0$ *— короткая точная последовательность.*

(a) *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\boldsymbol{A}$ *является расщепляющей,*

(2) *существует такой гомоморфизм* $f_0\colon M \to A$, *что*

$$f_0 f = 1_A;$$

(3) *существует такой гомоморфизм* $g_0\colon W \to M$, *что*

$$g g_0 = 1_W.$$

(b) *Если последовательность* $\boldsymbol{A}$ *— расщепляющая, то существуют* f_0 *и* g_0, *такие как в* (2) *и* (3) *соответственно, так что последовательность*

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{f_0} M \xleftarrow{g_0} W \leftarrow 0$$

— точная и расщепляющая.

Доказательство. (a) «(1) $\Leftrightarrow$ (2)»: 3.4.11 (1). «(1) $\Leftrightarrow$ (3)»: 3.4.11 (2).

(b) Пусть $f_0\colon M \to A$ — произвольный гомоморфизм, для которого $f_0 f = 1_A$. Согласно 3.4.10,

$$M = \operatorname{im}(f) \oplus \ker(f_0) = \ker(g) \oplus \ker(f_0).$$

Поэтому $g \mid \ker(f_0)$ — изоморфизм. Пусть $h\colon W \to \ker(f_0)$ — обратный изоморфизм и $\iota\colon \ker(f_0) \to M$ — включение. Положим $g_0 := \iota h$. Из того что $M = \ker(g) \oplus \ker(f_0)$ и g — эпиморфизм, вытекает, что каждый элемент из W записывается в виде $g(x)$, где $x \in \ker(f_0)$. Отсюда вытекает, что

$$g g_0(g(x)) = g\iota(hg(x)) = g(x);$$

таким образом, $g g_0 = 1_W$, и также $g_0 g(x) = x$, а значит, $\operatorname{im}(g_0) = \ker(f_0)$. Следовательно, последовательность

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{f_0} M \xleftarrow{g_0} W \leftarrow 0$$

точна и, в силу равенств $g g_0 = 1_W$ и $f_0 f = 1_A$, является, согласно (a), расщепляющей. □

Упражнения

1. Пусть $A, L \in \mathcal{M}_R$, $\alpha\colon A \to L$, $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $M \subseteq L$, $N \subseteq L$.

а) Показать, что следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\alpha(B \cap C) = \alpha(B) \cap \alpha(C)$;

(2) $(B + \ker(\alpha)) \cap (C + \ker(\alpha)) = B \cap C + \ker(\alpha)$;

(3) $(B \cap \ker(\alpha)) + (C \cap \ker(\alpha)) = (B + C) \cap \ker(\alpha)$.
b) Показать, что следующие утверждения эквивалентны:
(1) $\alpha^{-1}(M+N) = \alpha^{-1}(M) + \alpha^{-1}(N)$;
(2) $(M \cap \operatorname{im}(\alpha)) + (N \cap \operatorname{im}(\alpha)) = (M+N) \cap \operatorname{im}(\alpha)$;
(3) $(M + \operatorname{im}(\alpha)) \cap (N + \operatorname{im}(\alpha)) = (M \cap N) + \operatorname{im}(\alpha)$.

2. Привести пример модуля, для которого не выполняется соотношение (1) из упр. 1, a) (соотв. b)).

3. a) Пусть дан гомоморфизм модулей φ: $M \to N$, а также подмодули $A \subseteq M$, $V \subseteq N$. Показать, что $\varphi^{-1}(\varphi(A) + V) = A + \varphi^{-1}(V)$.
b) Пусть дан гомоморфизм модулей φ: $M \to N$, а также подмодули $B \subseteq N$, $U \subseteq M$. Показать, что $\varphi(\varphi^{-1}(B) \cap U) = B \cap \varphi(U)$.

4. a) Доказать, что в категории унитарных колец каждый мономорфизм инъективен. (*Указание.* Используйте $\mathbf{Z}[x]$ — кольцо многочленов от x с коэффициентами из $\mathbf{Z}$.)
b) Показать, что ι: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ — эпиморфизм в категории унитарных колец.

5. Найти все композиционные ряды для $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ и указать все изоморфизмы между ними.

6. a) Определить следующие группы: $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \mathbf{Q})$ для $n \in \mathbf{N}$.
b) Доказать, что для $M \in \mathcal{M}_R$

$$\operatorname{Hom}_R(R, M) \cong M,$$

7. Пусть A — аддитивная абелева группа и $\operatorname{End}(A)$ — кольцо ее эндоморфизмов, причем для $\alpha \in \operatorname{End}(A)$ и $a \in A$ образ a при α обозначается через αa. Пусть, далее, R — кольцо и

$$\rho\colon R \to \operatorname{End}(A)$$

— кольцевой гомоморфизм, соотв. унитарный кольцевой гомоморфизм.
a) Показать, что при помощи определения

$$ra := \rho(r)\,a, \quad a \in A, \quad r \in R,$$

A превращается в левый R-модуль, соотв. унитарный левый R-модуль.
b) Доказать, что каждый левый R-модуль, соотв. унитарный левый R-модуль, ${}_RA$ с A в качестве аддитивной группы получается с помощью указанного выше способа единственным образом.
c) Привести пример аддитивной абелевой группы A и кольца R, для которых A можно превратить в унитарный левый R-модуль двумя способами.
d) Сформулировать соответствующее утверждение для правых R-модулей без изменения умножения в $\operatorname{End}(A)$.
8. Доказать, что для каждого векторного пространства V_K кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End}(V_K)$ регулярно (см. упр. 13 к гл. 2).

4. Прямые произведения, прямые суммы, свободные модули

В структурной теории модулей, с одной стороны, изучают данный модуль при помощи аддитивного разложения на более простые модули либо при помощи сведения модуля к более простым фактормодулям, с другой стороны, стремятся, исходя из данных модулей, построить новые модули. Разумеется, эти конструкции создаются не произвольно; ведущий принцип при этом — построение модулей с определенными универсальными свойствами. С такими универсальными свойствами мы познакомились, рассматривая произведения и копроизведения в категориях (§ 1.5).

Сейчас мы исследуем произведения и копроизведения в категории модулей.

4.1. Конструкция произведений и копроизведений

Начнем с того, что напомним некоторые известные теоретико-множественные понятия. Пусть $(A_i \mid i \in I)$ — семейство множеств A_i с индексным множеством $I \neq \emptyset$. Произведение $\prod_{i \in I} A_i$ семейства $(A_i \mid i \in I)$ — это множество всех отображений

$$\alpha\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i,$$

удовлетворяющих условию $\alpha(i) \in A_i$ для каждого $i \in I$.

Обозначения. (1) $a_i := \alpha(i)$ (называется i-й *компонентой* α). (2) $(a_i) := (\alpha(i)) := \alpha$.

Очевидно, для (a_i), $(a_i') \in \prod_{i \in I} A_i$

$$(a_i) = (a_i') \Leftrightarrow \forall i \in I\, [a_i = a_i'].$$

Заметим, что I не обязательно должно быть счетным. В случае когда I счетно, скажем $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$, используется также запись

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots) := (a_i) = \alpha.$$

Когда I конечно, скажем $I=\{1, 2, \ldots, n\}$, мы пишем

$$(a_1a_2\ldots a_n) := (a_i)=\alpha.$$

Если теперь $A_i \in \mathscr{M}_R$ для всех $i \in I$, то $\prod_{i\in I} A_i$ естественным образом превращается в унитарный правый R-модуль с помощью следующего покомпонентного определения.

4.1.1. *Определение.* *Пусть* $(a_i), (b_i) \in \prod_{i\in I} A_i$, $r \in R$.

Сложение: $(a_i)+(b_i) := (a_i+b_i)$.
Модульное умножение: $(a_i)r := (a_ir)$.
Записывая $\alpha=(a_i)$, $\beta=(b_i)$, получаем

$$(\alpha+\beta)(i) := \alpha(i)+\beta(i), \quad i \in I,$$
$$(\alpha r)(i) := \alpha(i)r, \quad i \in I.$$

Доказательство того, что $\prod_{i\in I} A_i$ при таком определении — объект категории $\mathscr{M}_R$, тривиально. В частности, нулевое отображение $I \ni i \longmapsto 0_i \in \bigcup_{i\in I} A_i$, где 0_i — нуль из A_i, служит нулевым элементом $\prod_{i\in I} A_i$, а противоположным элементом относительно сложения для $\alpha=(a_i)$ служит $-\alpha := (-a_i)$.

4.1.2. *Определение.* *Элемент* $(a_i) \in \prod_{i\in I} A_i$ *называется финитным*[1], *если множество индексов* $i \in I$, *для которых* $a_i \neq 0$, *конечно* (*причем пустое множество рассматривается как конечное*).

Легко видеть, что множество всех финитных элементов из $\prod_{i\in I} A_i$ является подмодулем в $\prod_{i\in I} A_i$.

4.1.3. *Определение.* (1) *Для всякого семейства* $(A_i \mid i \in I)$ *объектов из* $\mathscr{M}_R$ *модуль* $\prod_{i\in I} A_i \in \mathscr{M}_R$ *называется прямым произведением этого семейства.*
(2) *Подмодуль всех финитных элементов из* $\prod_{i\in I} A_i$ *называется* (*внешней*) *прямой суммой семейства* $(A_i \mid i \in I)$ *и обозначается через* $\coprod_{i\in I} A_i$.

[1] В оригинале endlichwertig (буквально: конечнозначный). В отечественной литературе соответствующего устоявшегося термина нет. — *Прим. ред.*

4.1.4. Замечание. *Если I конечно, то*

$$\prod_{i\in I} A_i = \coprod_{i\in I} A_i.$$

В 1.5 мы определили в произвольной категории произведение и копроизведение для семейства объектов. Покажем, что прямое произведение, соотв. прямая сумма, вместе с некоторым семейством гомоморфизмов есть произведение, соотв. копроизведение, в $\mathscr{M}_R$.

С этой целью рассмотрим следующие отображения (для $j\in I$):

$$\pi_j\colon \prod_{i\in I} A_i \ni (a_i) \longmapsto a_j \in A_j,$$

$$\sigma\colon \coprod_{i\in I} A_i \ni (a_i) \longmapsto (a_i) \in \prod_{i\in I} A_i,$$

$$\eta_j\colon A_j \ni a_j \longmapsto \underline{a_j} \in \coprod_{i\in I} A_i, \text{ где } \underline{a_j}(i) := \begin{cases} 0 & \text{при } i\neq j, \\ a_j & \text{при } i=j. \end{cases}$$

Легко проверяются следующие свойства этих отображений.

4.1.5. ***Лемма.*** (1) *π_j и $\pi_j\sigma$ — эпиморфизмы.*

(2) *η_j и $\sigma\eta_j$ — мономорфизмы.*

(3) $\pi_k\sigma\eta_j = \begin{cases} 1_{A_j} & \text{для } k=j, \\ 0 & \text{для } k\neq j. \end{cases}$

(4) $(\sigma\eta_j\pi_j)^2 = \sigma\eta_j\pi_j$, $(\eta_j\pi_j\sigma)^2 = \eta_j\pi_j\sigma$.

(5) $I=\{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow (\eta_j\pi_j)^2 = \eta_j\pi_j \wedge 1_{\coprod A_i} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\pi_i$.

4.1.6. ***Теорема.*** (1) $\left(\prod_{i\in I} A_i,\ (\pi_i \mid i\in I)\right)$ *представляет собой произведение семейства $(A_i \mid i\in I)$ в категории $\mathscr{M}_R$, т. е. для каждого объекта C из $\mathscr{M}_R$ и каждого семейства $(\gamma_i \mid i\in I)$ гомоморфизмов*

$$\gamma_i\colon C \to A_i, \quad i\in I,$$

существует единственный гомоморфизм

$$\gamma\colon C \to \prod_{i\in I} A_i,$$

такой что

$$\gamma_i = \pi_i\gamma, \quad i\in I.$$

(2) $\left(\coprod_{i\in I} A_i,\ (\eta_i \mid i\in I)\right)$ *представляет собой копроизведение семейства $(A_i \mid i\in I)$ в категории $\mathscr{M}_R$, т. е. для каждого объекта B из $\mathscr{M}_R$ и каждого семейства $(\beta_i \mid i\in I)$ гомоморфизмов*

$$\beta_i\colon A_i \to B, \quad i\in I,$$

существует единственный гомоморфизм

$$\beta\colon \coprod_{i\in I} A_i \to B,$$

такой что

$$\beta_i := \beta\eta_i, \quad i \in I.$$

Доказательство. (1) Мы построим искомый гомоморфизм $\gamma\colon C \to \prod_{i\in I} A_i$ следующим образом. Положим

$$\gamma(c) := (\gamma_i(c)) \in \prod_{i\in I} A_i \text{ для } c \in C.$$

Ясно, что γ — гомоморфизм и

$$(\pi_j\gamma)(c) = \pi_j(\gamma(c)) = \gamma_j(c), \quad c \in C.$$

Следовательно, $\gamma_j = \pi_j\gamma$, $j \in I$.

Докажем единственность γ. Пусть также $\gamma'\colon C \to \prod_{i\in I} A_i$ удовлетворяет условиям $\gamma_j(c) = (\pi_j\gamma')(c) = \pi_j(\gamma'(c))$. Тогда $\gamma'(c) = (\gamma_i(c)) = \gamma(c)$, т. е. $\gamma' = \gamma$.

(2) Снова явно укажем искомый гомоморфизм $\beta\colon \coprod_{i\in I} A_i \to B$. Положим

$$\beta((a_i)) := \sum \beta_i(a_i) \in B,$$

где сумма распространяется только на те $i \in I$, для которых $a_i \neq 0$. По определению $\coprod A_i$ эта сумма имеет смысл (сумма по пустому множеству индексов полагается, как обычно, равной нулю). Ясно, что β — гомоморфизм и

$$(\beta\eta_j)(a_j) = \beta(a_j) = \beta_j(a_j).$$

Таким образом, $\beta_j = \beta\eta_j$, $j \in I$.

Докажем единственность β. Пусть также $\beta'\colon \coprod_{i\in I} A_i \to B$ удовлетворяет условиям $\beta_j = \beta'\eta_j$. Тогда

$$\beta(a_j) = \beta_j(a_j) = \beta'\eta_j(a_j) = \beta'(a_j).$$

Так как каждый элемент из $\coprod A_i$ есть сумма конечного числа a_j, то $\beta = \beta'$. □

В дальнейшем будем использовать следующие общепринятые определения.

4.1.7. Обозначения. Пусть I — непустое множество и $A \in \mathcal{M}_R$. Положим

$$A^I := \prod_{i \in I} A_i, \text{ где } A_i = A \text{ для всех } i \in I,$$

$$A^{(I)} := \coprod_{i \in I} A_i, \text{ где } A_i = A \text{ для всех } i \in I.$$

Модуль A^I, соотв. $A^{(I)}$, называется *прямым произведением*, соотв. *прямой суммой*, I *экземпляров* модуля A.

4.2. Связь между внешними и внутренними прямыми суммами

В § 2.4 были введены внутренние прямые суммы, а в предыдущем параграфе — внешние прямые суммы. Мы покажем здесь, что эти понятия несущественно отличаются друг от друга, так что не опасаясь путаницы, их можно обычно отождествлять.

Рассмотрим с этой целью определенный в § 4.1 мономорфизм

$$\eta_j\colon A_j \ni a_j \longmapsto \underline{a}_j \in \coprod_{i \in I} A_i,$$

где

$$\underline{a}_j(i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ a_j & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Положим $A_j' := \eta_j(A_j)$. Ясно, что A_j' — модуль, изоморфный A_j. Для случая $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ имеем

$$\underline{a}_j = (0 \ldots 0 a_j 0 \ldots 0) \ (a_j \text{ на } j\text{-м месте}),$$

а также

$$A_j' = \{(0 \ldots 0 a_j 0 \ldots 0) \mid a_j \in A_j\}.$$

4.2.1. ***Теорема.*** *Для всякого семейства R-модулей $(A_i \mid i \in I)$*

$$\coprod_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i', \text{ где } A_i \cong A_i',$$

т. е. внешняя прямая сумма модулей A_i совпадает с внутренней прямой суммой изоморфных им подмодулей A_i' модуля $\coprod_{i \in I} A_i$.

Доказательство. По определению A_i' имеем $\sum_{i \in I} A_i' \subseteq \coprod_{i \in I} A_i$. Пусть теперь $0 \neq (a_i) \in \coprod_{i \in I} A_i$, *причем* $a_{i_1} \neq 0, \ldots, a_{i_n} \neq 0$ и

$a_i = 0$ для всех других $i \in I$. Тогда

$$(a_i) \in A'_{i_1} + \ldots + A'_{i_n}$$

и, следовательно

$$\sum_{i \in I} A'_i = \coprod_{i \in I} A_i.$$

Далее,

$$(a_i) \in A'_j \cap \sum_{\substack{i \neq j \\ i \in I}} A'_i \Rightarrow a_i = 0 \text{ для } i \neq j,$$

и

$$a_j = 0 \Rightarrow (a_i) = 0.$$

Наконец, как было показано выше, имеет место изоморфизм $A_i \cong A'_i$, при котором $a_i \longmapsto \eta_i(a_i)$. □

Внимание! Изоморфные модули A_i и A'_i в дальнейшем чаще всего отождествляются, и вместо A'_i мы пишем A_i. Далее, ввиду теоремы 4.2.1 различие между внешней и внутренней прямыми суммами часто игнорируется, в обоих случаях пишут $\oplus A_i$ и говорят просто о прямой сумме. Из контекста обычно ясно, о какой сумме идет речь.

4.3. Гомоморфизмы прямых произведений и сумм

Пусть $(A_i \mid i \in I)$, $(B_i \mid i \in I)$ — два семейства модулей A_i, $B_i \in \mathscr{M}_R$. Далее, пусть $(\alpha_i \mid i \in I)$ — некоторое семейство гомоморфизмов

$$\alpha_i \colon A_i \to B_i, \quad i \in I.$$

При этих условиях имеет место

4.3.1. ***Лемма.*** *Отображения, определенные следующим образом:*

$$\coprod_{i \in I} \alpha_i \colon \prod_{i \in I} A_i \ni (a_i) \longmapsto (\alpha_i(a_i)) \in \coprod_{i \in I} B_i,$$

$$\bigoplus_{i \in I} \alpha_i \colon \bigoplus_{i \in I} A_i \ni (a_i) \longmapsto (\alpha_i(a_i)) \in \bigoplus_{i \in I} B_i,$$

являются гомоморфизмами, причем

(1) $\Pi\alpha_i$ — *моно* $\Leftrightarrow \oplus \alpha_i$ — *моно* $\Leftrightarrow \forall_i \in I\, [\alpha_i$ — *моно*$]$,
(2) $\Pi\alpha_i$ — эпи $\Leftrightarrow \oplus \alpha_i$ — *эпи* $\Leftrightarrow \forall_i \in I\, [\alpha_i$ — *эпи*$]$,
(3) $\Pi\alpha_i$ — *изо* $\Leftrightarrow \oplus \alpha_i$ — *изо* $\Leftrightarrow \forall_i \in I\, [\alpha_i$ — *изо*$]$.

Доказательство. Упражнение для читателя. □

4.3.2. ***Лемма.*** *Пусть выполнены те же условия и, кроме того,*

$$\iota_i\colon \ker(\alpha_i) \ni (a_i) \longmapsto a_i \in A_i,$$
$$\iota_i'\colon \operatorname{im}(\alpha_i) \ni (b_i) \longmapsto b_i \in B_i, \qquad i \in I.$$

Тогда отображения

$$(1)\qquad \prod_{i\in I} \ker(\alpha_i) \ni (a_i) \longmapsto (\iota_i(a_i)) \in \ker\left(\prod_{i\in I} \alpha_i\right),$$
$$(2)\qquad \bigoplus_{i\in I} \ker(\alpha_i) \ni (a_i) \longmapsto (\iota_i(a_i)) \in \ker\left(\bigoplus_{i\in I} \alpha_i\right),$$
$$(3)\qquad \prod_{i\in I} \operatorname{im}(\alpha_i) \ni (b_i) \longmapsto (\iota_i'(b_i)) \in \operatorname{im}\left(\prod_{i\in I} \alpha_i\right),$$
$$(4)\qquad \bigoplus_{i\in I} \operatorname{im}(\alpha_i) \ni (b_i) \longmapsto (\iota_i'(b_i)) \in \operatorname{im}\left(\bigoplus_{i\in I} \alpha_i\right)$$

являются изоморфизмами и, следовательно,

$$\prod_{i\in I} \ker(\alpha_i) \cong \ker\left(\prod_{i\in I} \alpha_i\right), \quad \bigoplus_{i\in I} \ker(\alpha_i) \cong \ker\left(\bigoplus_{i\in I} \alpha_i\right),$$
$$\prod_{i\in I} \operatorname{im}(\alpha_i) \cong \operatorname{im}\left(\prod_{i\in I} \alpha_i\right), \quad \bigoplus_{i\in I} \operatorname{im}(\alpha_i) \cong \operatorname{im}\left(\bigoplus_{i\in I} \alpha_i\right).$$

Доказательство. Упражнение для читателя. □

4.3.3. ***Лемма.*** *Для любых заданных семейств $(A_i \mid i \in I)$, $(B_j \mid j \in J)$ отображение*

$$\operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, \prod_{j\in J} B_j\right) \ni \varphi \longmapsto (\Pi_j \varphi \eta_i) \in \prod_{(i,j)\in I\times J} \operatorname{Hom}_R(A_i B_j)$$

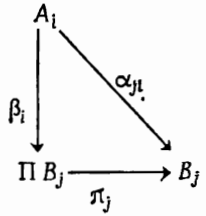
является групповым изоморфизмом.

Доказательство. Ясно, что мы имеем групповой гомоморфизм. Остается доказать «моно» и «эпи».

«Моно»: $0 \neq \varphi \in \operatorname{Hom}_R(\oplus A_i, \Pi B_j) \Rightarrow$ существует $(a_i) \in \oplus A_i$, для которого $\varphi((a_i)) \neq 0$. Поскольку $(a_i) = \sum_{a_i \neq 0} a_i$, то $\varphi((a_i)) = \varphi\left(\sum a_i\right) = \sum \varphi(a_i) \neq 0 \Rightarrow$ существует i, для которого $\varphi(a_i) = \varphi\eta_i(a_i) \neq 0 \Rightarrow$ найдется j, для которого $\pi_j \varphi \eta_i(a_i) \neq 0 \Rightarrow \pi_j \varphi \eta_i \neq 0$.

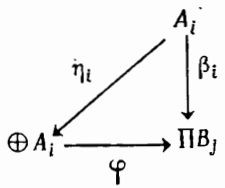
«Эпи»: Пусть $(\alpha_{ji}) \in \Pi \operatorname{Hom}_R(A_i, B_j)$. Согласно 4.1.6, при фиксированном $i \in I$ для семейства $(\alpha_{ji} \mid j \in J)$, где $\alpha_{ji}\colon A_i \to B_j$,

существует такой гомоморфизм β_i: $A_i \to \prod_{j \in J} B_j$, что диаграмма



коммутативна.

Снова в силу 4.1.6, для семейства $(\beta_j \mid i \in I)$ существует такой гомоморфизм $\varphi: \oplus A_i \to \Pi B_j$, что диаграмма



коммутативна. Поэтому $\alpha_{ji} = \pi_j \beta_i = \pi_j \varphi \eta_i$, откуда и следует наше утверждение. □

Частные случаи

$$\mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i \in I} A_i,\ B\Big) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(A_i, B), \text{ причем } \varphi \longmapsto (\varphi \eta_i).$$

$$\mathrm{Hom}_R\Big(A,\ \prod_{j \in I} B_j\Big) \cong \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}_R(A,\ B_j), \text{ причем } \varphi \longmapsto (\pi_j \varphi)$$

4.4. Свободные модули

В 2.3.5 было дано определение базиса как свободной порождающей системы. Модули, обладающие базисом, могут быть описаны следующим образом.

4.4.1. ***Лемма.*** *Для модуля $F = F_R$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *F обладает базисом;*

(2) $F = \bigoplus_{i \in I} A_i \wedge \forall_i \in I\ [R_R \cong A_i]$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что условия (1) и (2) выполнены для $F = 0$, а именно в (1) в качестве базиса надо взять $\emptyset$, а в (2) надо взять $I = \emptyset$. (Напомним о соглашении, что сумма по пустому множеству индексов равна 0.) Поэтому мы можем предположить, что $F \neq 0$.

«(1) $\Rightarrow$ (2)»: Пусть X — базис для F и $a \in X$. Тогда, очевидно, отображение

$$\varphi_a\colon R_R \ni r \longmapsto ar \in R_R$$

есть эпиморфизм. Так как из свойств базиса следует, что $ar = 0 = a0 \Rightarrow r = 0$, то φ_a — изоморфизм.

Мы утверждаем, что $F = \bigoplus\limits_{a \in X} aR$. Поскольку X как базис является также системой образующих, то $F = \sum\limits_{a \in X} aR$. Пусть для $a_0 \in X$

$$c \in a_0 R \cap \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_0}} aR.$$

Тогда существуют различные $a_1, \ldots, a_n \in X$, $a_i \neq a_0$, а также $r_0, r_1, \ldots, r_n \in R$, такие что

$$c = a_0 r_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i, \Rightarrow a_0 r_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(-r_i) = 0,$$

откуда, в силу свойства базиса 2.3.5(4),

$$r_0 = r_1 = \ldots = r_n = 0, \text{ т. е. } a_0 R \cap \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_0}} aR = 0.$$

Таким образом, $F = \bigoplus\limits_{a \in X} aR$.

«(2) $\Rightarrow$ (1)»: Пусть φ_i: $R_R \to A_i$ — изоморфизм, существующий по условию леммы. Мы утверждаем, что $\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$ — базис для F. В самом деле, поскольку $A_i = \varphi_i(R) = \varphi_i(1 \cdot R) = \varphi_i(1)R$, то $F = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i = \bigoplus\limits_{i \in I} \varphi_i(1)R$, следовательно, $\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$ — система образующих для F. Если $I' \subset I$, I' конечно и

$$\sum_{i \in I'} \varphi_i(1)\, r_i = 0,$$

то согласно 2.4.2 для всех $i \in I'$ имеем

$$\varphi_i(1) r_i = \varphi_i(r_i) = 0.$$

Так как φ_i является изоморфизмом, то $r_i = 0$, так что, действительно, $\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$ — базис для F. □

4.4.2. *Определение.* *Модуль F, удовлетворяющий условиям леммы* 4.4.1, *называется свободным.*

4.4.3. *Лемма.* *Для произвольного множества I модуль $R^{(I)}$ является свободным R-модулем, имеющим базис той же мощности, что и I.*

Доказательство. Рассмотрим семейство модулей $(A_i \mid i \in I)$, где $A_i = R_R$ для всех $i \in I$. Согласно 4.2.1,

$$R^{(I)} = \coprod_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i', \text{ где } R_R = A_i \overset{\varphi_i}{\cong} A_i'.$$

Как было показано выше, отсюда следует, что $R^{(I)}$ — свободный модуль с базисом $\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$. □

Напомним еще (см. § 4.2), что в случае $I = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\varphi_i(1) = (0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0),$$

т. е. в этом случае $\{\varphi_i(1) \mid i = 1, \ldots, n\}$ является «каноническим базисом» для R^n.

4.4.4. ***Следствие.*** *Каждый модуль M_R есть эпиморфный образ некоторого свободного правого R-модуля. Если M_R конечно-порожден, то M_R — эпиморфный образ некоторого свободного правого R-модуля с конечным базисом.*

Доказательство. Пусть Y — какая-нибудь система образующих модуля M. Рассмотрим свободный модуль

$$R^{(Y)} = \bigoplus_{b \in Y} \varphi_b(1)R.$$

Из единственности представления элементов из $R^{(Y)}$ через элементы базиса следует, что правило

$$R^{(Y)} \ni \sum \varphi_b(1) r_b \longmapsto \sum b r_b \in M$$

определяет эпиморфизм. □

4.4.5. Обозначение. То что мы обозначили базис $R^{(I)}$ через $\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$, не обязывает нас придерживаться этого обозначения в дальнейшем. Очевидно, в качестве элементов базиса можно взять элементы любого другого множества, равномощного I, например элементы самого множества I. Таким образом, мы приходим к записи

$$M = \bigoplus_{i \in I} iR;$$

при этом надо, конечно, иметь в виду, что элементы индексного множества I рассматриваются одновременно как элементы базиса модуля $R^{(I)}$.

Укажем еще одно важное свойство свободных модулей, которое будет играть в последующем (при изучении проективных модулей) основополагающую роль.

4.4.6. ***Теорема.*** *Если*

$$\varphi\colon A_R \to F_R$$

— эпиморфизм и F_R — свободный модуль, то φ является расщепляющим (см. определение 3.4.8).

Доказательство. Пусть Y — некоторый базис модуля F_R и для каждого $b \in Y$ выбрано $a_b \in A$, такое что $\varphi(a_b) = b$. Тогда отображение

$$\varphi' \colon F \ni \sum br_b \longmapsto \sum a_b r_b \in A$$

будет гомоморфизмом (так как Y — базис). Поэтому

$$\varphi\varphi'(\sum br_b) = \varphi(\sum a_b r_b) = \sum \varphi(a_b) r_b = \sum br_b,$$

и, значит, $\varphi\varphi' = 1_F$. Следовательно,

$$A = \operatorname{im}(\varphi') \oplus \ker(\varphi). \qquad \square$$

4.5. Свободные и делимые абелевы группы

Каждую абелеву группу можно естественным образом рассматривать как $\mathbf{Z}$-модуль, поэтому все понятия теории модулей применимы к абелевым группам. Абелева группа называется *свободной*, если она свободна как $\mathbf{Z}$-модуль, т. е. представляет собой прямую сумму некоторого множества экземпляров модуля $\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$.

Ниже под группой всюду подразумевается аддитивная абелева группа.

4.5.1. Определение. *Группа A называется делимой*, если

$$\forall z \in \mathbf{Z}\,[z \neq 0 \Rightarrow Az = A].$$

4.5.2. ***Лемма.*** *Каждый эпиморфный образ делимой группы есть делимая группа и, следовательно, каждая фактор-группа делимой группы делима.*

Доказательство. Пусть A — делимая группа и $\Phi\colon A \to B$ — эпиморфизм. Тогда для $0 \neq z \in \mathbf{Z}$ имеем

$$Bz = \Phi(A)z = \Phi(Az) = \Phi(A) = B.$$

Таким образом, B — делимая группа. $\square$

4.5.3. ***Лемма.*** *Прямое произведение и прямая сумма делимых групп делимы.*

Доказательство. Пусть $(A_i \mid i \in I)$ — семейство делимых групп. Тогда для $0 \neq z \in \mathbf{Z}$

$$\Big(\prod_{i\in I} A_i\Big)z = \prod_{i\in I}(A_i z) = \prod_{i\in I} A_i,$$

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i\Big)z = \bigoplus_{i\in I}(A_i z) = \bigoplus_{i\in I} A_i,$$

как это непосредственно следует из определения прямого произведения и прямой суммы □

Примеры. $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ — делимые группы. Группа $\mathbf{Z}$ не является делимой.

4.5.4. *Каждая абелева группа изоморфна подгруппе некоторой делимой абелевой группы.*

Доказательство. Пусть A — абелева группа. Согласно 4.4.4, существуют свободная абелева группа F и эпиморфизм

$$\Phi\colon F \to A$$

Положив $\bar{x} := x + \ker(\Phi)$, получаем, что

$$\Phi'\colon F/\ker(\Phi) \ni \bar{x} \longmapsto \Phi(x) \in A$$

— изоморфизм (см. 3.4.1). Пусть Y — какой-нибудь базис модуля $F = F_{\mathbf{Z}}$. Рассмотрим

$$D = \mathbf{Q}^{(Y)} = \bigoplus_{b \in Y} b\mathbf{Q}.$$

Из изоморфизма $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}} \cong b\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ следует делимость $b\mathbf{Q}$, а значит, в силу 4.5.3, и делимость D. Поскольку $F = \oplus\, b\mathbf{Z}$, то F — подгруппа в D. Тогда $\ker(\Phi)$ — также подгруппа в D и, в силу 4.5.2, $\overline{D} := D/\ker(\Phi)$ — делимая группа. Пусть

$$\iota\colon F/\ker(\Phi) \ni \bar{x} \longmapsto \bar{x} \in \overline{D}$$

— включение. Тогда Φ'^{-1} — искомый мономорфизм A в делимую группу $\overline{D}$. □

Докажем теперь дуальную к 4.4.6 теорему, показывающую, что делимые группы — это инъективные $\mathbf{Z}$-модули (определение инъективного модуля будет дано в следующей главе).

4.5.5. ***Теорема.*** *Если*

$$\varphi\colon D_{\mathbf{Z}} \to B_{\mathbf{Z}}$$

— мономорфизм и $D^{\mathbf{Z}}$ — делимая группа, то φ является расщепляющим (т. е. $\operatorname{im}(\varphi)$ *— прямое слагаемое в B).*

Доказательство. Согласно 4.5.2, группа $im(\varphi)$ делима, поэтому без ограничения общности можно рассматривать $D_{\mathbf{Z}}$ как подгруппу в $B_{\mathbf{Z}}$ и $\varphi = \iota$ как включение. Положим

$$\Gamma := \{U \mid U \subset B \wedge D \cap U = 0\}.$$

Поскольку $U = 0 \in \Gamma$, имеем $\Gamma \neq \emptyset$. Далее, очевидно, что объединение вполне упорядоченного множества элементов из Γ (с включением в качестве порядка) также принадлежит Γ, поэтому по лемме Цорна в Γ имеется максимальный элемент, ко-

торый обозначим через U. Для него выполняются соотношения

$$D+U=D\oplus U\subset B.$$

Остается показать, что $B=D\oplus U$.

Для произвольного $b\in B$ рассмотрим идеал $z_0\mathbf{Z}$ всех таких $z\in\mathbf{Z}$, что $bz\in D+U$.[1] Пусть $bz_0=d+u$. Из делимости D вытекает существование элемента d_0, для которого $d_0z_0=d\Rightarrow(b-d_0)z_0=u$. Отсюда очевидно, что $z_0\mathbf{Z}$ можно рассматривать также как идеал, состоящий из элементов $z\in\mathbf{Z}$, для которых $(b-d_0)z\in D+U$.

Мы утверждаем, что $D\cap(U+(b-d_0)\mathbf{Z})=0$. Действительно, пусть $d_1=u_1+(b-d_0)z_1\in D\cap(U+(b-d_0)\mathbf{Z})$. Тогда $(b-d_0)z_1=d_1-u_1\in D+U\Rightarrow z_1=z_0t$, $t\in\mathbf{Z}\Rightarrow(b-d_0)z_0t=ut=d_1-u_1\Rightarrow 0=d_1-(u_1+ut)\Rightarrow d_1=0$. Из максимальности U вытекает, что $(b-d_0)\mathbf{Z}\subset U\Rightarrow b-d_0\in U\Rightarrow b\in D+U$. Следовательно, $B=D\oplus U$, что и требовалось доказать. □

4.6. Полугрупповые кольца

В качестве дальнейшего примера применения свободных модулей введем понятие *полугруппового кольца*. Пусть G — произвольный мультипликативно записываемый *моноид*, т. е. G — множество с операцией $G\times G\ni(a,\ b)\to ab\in G$, которая ассоциативна и имеет нейтральный элемент e.[2] Далее, пусть R — произвольное кольцо. Положим

$$GR:=\bigoplus_{g\in G}gR$$

в смысле 4.4.5; таким образом, в качестве базиса взято само множество G. Заметим, что тогда $g1=g$ для $g\in G$, $1\in R$ (g стоит вместо $\varphi_g(1)$, см. 4.4.5). Введя в GR умножение, превратим его в кольцо (с единицей).

4.6.1. ***Определение.*** *Пусть T, T' — произвольные конечные подмножества в G. Для*

$$\sum_{g\in T}gr_g,\ \sum_{g'\in T'}g'r_{g'}\in GR$$

положим

$$\Big(\sum_{g\in T}gr_g\Big)\Big(\sum_{g'\in T'}g'r_{g'}\Big):=\sum_{\substack{g\in T\\ g'\in T}}gg'r_gr'_{g'}.$$

---

[1] Этот идеал ненулевой, в противном случае для подгруппы H, порожденной элементом b, мы имели бы $H\cap(D+U)=0$ откуда $(H+U)\cap D=0$, что противоречит выбору U. — *Прим. перев*

[2] Другими словами моноид — это полугруппа с единицей, что и справдывает название «полугрупповое кольцо». — *Прим ред.*

Это определение означает, что в GR элементы из G умножаются как в G, а элементы из R — как в R; в остальных случаях произведения вычисляются по дистрибутивности, причем считается, что элементы из G и R коммутируют.

Замечание. В стоящей в правой части сумме $\Sigma gg'r_g r'_{g'}$ один и тот же групповой элемент может встречаться многократно в виде gg'. Таким образом, это, вообще говоря, — не базисное разложение. Базисное разложение получится, если по дистрибутивности сгруппировать элементы базиса:

$$\sum_{\substack{g\in T\\ g'\in T'}} gg' r_g r'_{g'} = \sum_{b\in TT'} bs_b, \quad \text{где} \quad s_b = \sum_{\substack{gg'=b\\ g\in T,\ g'\in T'}} r_g r'_{g'}.$$

Для конечного моноида $G=\{g_1, \ldots, g_n\}$ определение можно дать в следующем виде

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g_i r_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} g_j r'_j\right) = \sum_{i,\,j=1}^{n} g_i g_j r_i r'_j = \sum_{k=1}^{n} g_k s_k,$$

где

$$s_k = \sum_{\substack{g_i g_j = g_k\\ i,\,j=1,\ \ldots,\ n}} r_i r'_j.$$

Легко проверить, что с введением этой операции GR становится кольцом. Ассоциативность GR следует из ассоциативности G и R, а дистрибутивность — из дистрибутивности R. Если e единица (= нейтральный элемент) моноида G, то $e=e1$ — единица кольца GR, что непосредственно следует из 4.6.1.

4.6.2. *Определение.* *Кольцо GR называется полугрупповым кольцом полугруппы G над кольцом R (или с коэффициентами в R). Если G — группа, то GR называется групповым кольцом группы G над кольцом R.*

Рассматривая подкольцо eR в GR, видим, что отображение

$$eR \ni er \longmapsto r \in R$$

есть кольцевой изоморфизм, поэтому обычно eR отождествляется с R, и тогда единица $e1$ группового кольца (где $1 \in R$) записывается просто как 1.

Наконец, отметим, что, положив

$$r\Sigma g r_g := er\Sigma g r_g = \Sigma g r r_g, \quad r \in R,$$

мы превращаем GR в левый R-модуль, для которого G снова является базисом. Так как кольцо GR является eR-GR-бимодулем, то оно является также R-GR-бимодулем. Если R коммутативно, то GR есть R-алгебра (см. 2.2.5).

При исследовании групповых колец используются понятия теории колец, теории модулей и теории групп, а при более глубоких исследованиях — и арифметические понятия. Эта многосторонность делает данную область особенно интересной и увлекательной.

4.7. Амальгама и коамальгама

Пусть даны два гомоморфизма с одной и той же областью определения:

$$\alpha\colon A \to B, \quad \varphi\colon A \to M.$$

Во многих задачах, которыми мы позже займемся, возникает вопрос, можно ли эти гомоморфизмы дополнить до коммутативного квадрата.

(*)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ M & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

Мы покажем, что это можно сделать нетривиальным образом, и даже с помощью некоторой универсальной пары ψ, β, т. е. такой пары, что любое другое дополнение пары φ, α до коммутативного квадрата можно получить факторизацией.

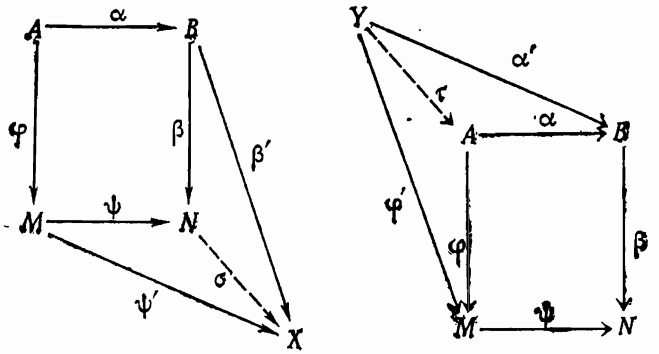
Естественно возникает и дуальный вопрос — существует ли для данных ψ, β с одной и той же областью значений универсальное дополнение φ, α до коммутативного квадрата. Ответ также положителен.

В первом случае решение называется амальгамой (английский термин: Pushout), во втором случае — коамальгамой [1] (английский термин: Pullback).

4.7.1. *Определение.* *Пусть дана коммутативная диаграмма* (*).
(1) *Пара* (ψ, β) *называется амальгамой пары* (φ, α), *если для каждой пары* (ψ', β'), $\psi'\colon M \to X$, $\beta'\colon B \to X$, *удовлетворяющей условию* $\psi'\varphi = \beta'\alpha$, *существует единственный гомоморфизм* $\sigma\colon N \to X$, *такой что* $\psi' = \sigma\psi$, $\beta' = \sigma\beta$.
(2) *Пара* (φ, α) *называется коамальгамой пары* (ψ, β), *если для каждой пары* (φ', α'), $\varphi'\colon Y \to M$, $\alpha'\colon Y \to B$, *удовлетворяющей условию* $\psi\varphi' = \beta\alpha'$, *существует единственный гомоморфизм* $\tau\colon Y \to A$, *такой что* $\varphi' = \varphi\tau$, $\alpha' = \alpha\tau$.

[1] В оригинале соответственно Fasersumme (расслоенная сумма) и Faserproduct (расслоенное произведение). Приведенные в скобках термины также используются, но реже. — *Прим. перев.*

Поясним эти ситуации на соответствующих диаграммах:



Прежде чем доказать существование амальгамы и коамальгамы, докажем их единственность.

4.7.2. Замечание. *Для любой данной пары* (φ, α), *соотв.* (ψ, β), *амальгама, соотв. коамальгама, определена однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть (ψ, β) и (ψ', β') — две амальгамы для (φ, α). Тогда наряду с $\sigma\colon N \to X$ существует также гомоморфизм $\rho\colon X \to N$, для которого $\psi = \rho\psi'$, $\beta = \rho\beta'$. Для $\rho\sigma\colon N \to N$ имеем $\psi = \rho\psi' = \rho\sigma\psi$, $\beta = \rho\beta' = \rho\sigma\beta$. Из требуемой в определении однозначности следует, что $\rho\sigma = 1_N$, соотв. $\sigma\rho = 1_X$; значит, σ и ρ — взаимно обратные изоморфизмы. Дуализуя это рассуждение, получаем утверждение для коамальгамы. □

Ниже мы обозначаем элементы из $M \oplus B$ через (m, b), а элементы из $(M \oplus B)/U$ — через $\overline{(m, b)}$.

4.7.3. ***Теорема.*** (1) *Пусть дана пара* (φ, α), *где*

$$\varphi\colon A \to M, \quad \alpha\colon A \to B.$$

Если $N := M \oplus B/U$, *где* $U := \{(\varphi(a), -\alpha(a)) \mid a \in A\}$, *и*

$$\psi\colon M \ni m \longmapsto \overline{(m, 0)} \in N,$$
$$\beta\colon B \ni b \longmapsto \overline{(0, b)} \in N,$$

то (ψ, β) — *амальгама для* (φ, α).
(2) *Пусть дана пара* (ψ, β), *где*

$$\psi\colon M \to N, \quad \beta\colon B \to N.$$

Если $A := \{(m, b) \mid m \in M \wedge b \in B \wedge \psi(m) = \beta(b)\}$ *и*

$$\varphi\colon A \ni (m, b) \longmapsto m \in M,$$
$$\alpha\colon A \ni (m, b) \longmapsto b \in B,$$

то (φ, α) — *коамальгама для* (ψ, β).

Доказательство. (1) Прежде всего ясно, что U — подмодуль, поэтому N есть фактормодуль модуля $M \oplus B$, а ψ и β — гомоморфизмы, для которых $\psi\varphi = \beta\alpha$. Пусть теперь ψ', β' — те же, что и в определении 4.7.1. Определим σ: $N \to X$ следующим образом: $\sigma(\overline{(m, b)}) := \psi'(m) + \beta'(b)$. Чтобы доказать, что σ — отображение, достаточно показать, что для $(m, b) \in U$ имеет место равенство $\sigma(\overline{(m, b)}) = 0$. Но действительно,

$$\sigma(\overline{(\varphi(a), -\alpha(a))}) = \psi'\varphi(a) - \beta'\alpha(a) = 0,$$

так как $\psi'\varphi = \beta'\alpha$. Непосредственно ясно, что σ — гомоморфизм и $\sigma\psi = \psi'$, $\sigma\beta = \beta'$. Остается доказать единственность σ. Пусть также $\psi' = \sigma_1\psi$, $\beta' = \sigma_1\beta$ для некоторого σ_1: $N \to X$. Тогда $(\sigma - \sigma_1)\psi = 0$, $(\sigma - \sigma_1)\beta = 0$ и, следовательно,

$$0 = (\sigma - \sigma_1)\psi(m) = (\sigma - \sigma_1)(\overline{(m, 0)}),$$

$$0 = (\sigma - \sigma_1)\beta(b) = (\sigma - \sigma_1)(\overline{(0, b)}).$$

Но $\{\overline{(m, 0)}, \overline{(0, b)} \mid m \in M \wedge b \in B\}$ является системой образующих для N и поскольку $\sigma - \sigma_1$ равно на ней нулю, то $\sigma - \sigma_1 = 0$. Тем самым для амальгамы все доказано.

(2) Для коамальгамы доказательство проходит дуальным образом. Укажем только гомоморфизм τ: $Y \to A$:

$$\tau(y) := (\varphi'(y), \alpha'(y)), \quad y \in Y,$$

и установим единственность τ. Если $(\tau - \tau_1)(y) = (m, b)$, то

$$0 = \varphi(\tau - \tau_1)(y) = \varphi(m, b) = m,$$

$$0 = \alpha(\tau - \tau_1)(y) = \alpha(m, b) = b$$

и, значит, $(\tau - \tau_1)(y) = 0$, т. е. $\tau - \tau_1 = 0$. □

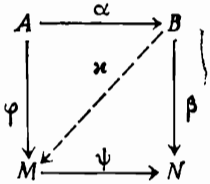
Ниже мы постоянно используем амальгамы и коамальгамы в форме, явно заданной в этой теореме.

В следующей главе при определении инъективных модулей нам понадобится

4.7.4. ***Теорема.*** *Если* (ψ, β) — *амальгама для* (φ, α), *то*
(1) α — *моно* $\Rightarrow \psi$ — *моно*, α — *эпи* $\Rightarrow \psi$ — *эпи*,
φ — *моно* $\Rightarrow \beta$ — *моно*, φ — *эпи* $\Rightarrow \beta$ — *эпи*.

(2) *Если* α *— мономорфизм, то* $\operatorname{im}(\psi)$ *является прямым слагаемым в* N *тогда и только тогда, когда существует такой гомоморфизм* $\varkappa\colon B \to M$, *что* $\varphi = \varkappa\alpha$:

(4.7.5)



Доказательство. (1) Пусть α — мономорфизм и $\psi(m) = (m, 0) = 0$. Тогда существует $a \in A$, для которого $(m, 0) = (\varphi(a), -\alpha(a)) \Rightarrow -\alpha(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow m = \varphi(a) = 0$.

Пусть α — эпиморфизм и $\overline{(m, b)} \in N$. Тогда найдется $a \in A$, для которого $b = -\alpha(a)$, $\Rightarrow$

$$\psi(m - \varphi(a)) = \overline{(m - \varphi(a), 0)} = \overline{(m - \varphi(a), 0)} + \overline{(\varphi(a), -\alpha(a))} = \overline{(m, b)}.$$

Таким образом, ψ — также эпиморфизм.

Доказательство для второй строки проводится аналогично.

(2) Пусть $\operatorname{im}(\psi)$ — прямое слагаемое в N, т. е.

$$N = \operatorname{im}(\psi) \oplus N_0.$$

Так как α — мономорфизм, то, в силу (1), ψ — также мономорфизм и, следовательно, ψ индуцирует изоморфизм $\psi_0\colon M \to \operatorname{im}(\psi)$. Пусть $\pi\colon N \to \operatorname{im}(\psi)$ — проекция, соответствующая прямой сумме $N = \operatorname{im}(\psi) \oplus N_0$. Тогда $\varkappa := \psi_0^{-1}\pi\beta$ — искомый гомоморфизм:

$$\varkappa\alpha(a) = \psi_0^{-1}\pi\beta(a) = \psi_0^{-1}\pi\varphi(a) = \psi_0^{-1}\pi\overline{(\varphi(a), 0)} = \varphi(a).$$

Обратно, пусть дан $\varkappa$, для которого $\varphi = \varkappa\alpha$. Рассмотрим отображение

$$\xi\colon N \ni \overline{(m, b)} \longmapsto m + \varkappa(b) \in M.$$

Поскольку $\xi\overline{(\varphi(a), -\alpha(a))} = \varphi(a) - \varkappa\alpha(a) = 0$, это — действительно отображение, и притом гомоморфизм. Так как $\xi\psi(m) = \xi(\overline{(m, 0)}) = m$, то $\xi\psi = 1_M$, откуда следует, что $N = \operatorname{im}(\psi) \oplus \ker(\xi)$, как и утверждалось. □

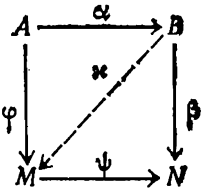
Теперь сформулируем дуальную теорему, которая подготавливает определение проективных модулей.

4.7.6. ***Теорема.*** *Если* (φ, α) *— коамальгама для* (ψ, β), то

(1) β *— моно* $\Rightarrow$ φ *— моно*, β *— эпи* $\Rightarrow$ φ *— эпи*,
ψ *— моно* $\Rightarrow$ α *— моно*, ψ *— эпи* $\Rightarrow$ α *— эпи*.

(2) *Если* ψ — *эпиморфизм, то* $\ker(\alpha)$ *является прямым слагаемым в* A *тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм* $\varkappa$: $B \to M$, *для которого* $\beta = \psi\varkappa$:

(4.7.7)



Доказательство дуально к доказательству теоремы 4.7.4, поэтому мы дадим лишь его набросок.

(1) Пусть ψ — эпиморфизм. Если $b \in B$, то найдется $m \in M$, для которого $\psi(m) = \beta(b)$. Таким образом, $(m, b) \in A$ и $\alpha((m, b)) \in b$, т. е. α — эпиморфизм. Рассуждения для других импликаций аналогичны.

(2) Пусть $\ker(\alpha)$ — прямое слагаемое в A:

$$A = \ker(\alpha) \oplus A_0.$$

Так как вместе с ψ и α — тоже эпиморфизм, то $\alpha_0 := \alpha | A_0$ — изоморфизм. Если ι: $A_0 \to A$ — включение, то $\varkappa := \varphi\iota\alpha_0^{-1}$ служит искомым гомоморфизмом:

$$\psi\varkappa(b) = \psi\varphi(\iota\alpha_0^{-1}(b)) = \beta\alpha\iota\alpha_0^{-1}(b) = \beta(b).$$

Обратно, пусть дан $\varkappa$, удовлетворяющий условию $\psi\varkappa = \beta$. Тогда для

$$\eta\colon B \ni b \longmapsto (\varkappa(b),\ b) \in A$$

имеем $\alpha\eta = 1_B$, откуда $A = \ker(\alpha) \oplus \operatorname{im}\eta$. □

4.8. Некоторые характеризации образующих и кообразующих

В § 3.3 мы познакомились с понятиями образующего и кообразующего. Дадим некоторые новые характеризации этих понятий.

Прежде чем сделать это, приведем одно предложение, которое интересно и само по себе.

4.8.1. ***Предложение.*** (*Обозначения см. в* § 4.1.)

(a) *Для каждого гомоморфизма* ψ: $\coprod_{i \in I} A_i \to M$

$$\operatorname{im}(\psi) = \sum_{i \in I} \operatorname{im}(\psi\eta_i).$$

(b) *Для каждого гомоморфизма* $\psi\colon M \to \prod_{i\in I} A_i$

$$\ker(\psi) = \bigcap_{i\in I} \ker(\pi_i\psi).$$

Доказательство. (a) В силу финитности элементов копроизведения каждый элемент из $\coprod_{i\in I} A_i$ записывается как конечная сумма

$$\Sigma' \eta_i(a_i), \quad \text{где} \quad a_i \in A_i.$$

Отсюда

$$\psi(\Sigma'\eta_i(a_i)) = \Sigma'\psi\eta_i(a_i).$$

Таким образом,

$$\operatorname{im}(\psi) \subseteq \sum_{i\in I} \operatorname{im}(\psi\eta_i).$$

Обратно, если $m \in \sum_{i\in I} \operatorname{im}(\psi\eta_i)$, то m представимо в виде конечной суммы:

$$m = \Sigma'\psi\eta_i(a_i) = \psi(\Sigma'\eta_i(a_i)), \quad a_i \in A_i.$$

Отсюда вытекает, что $m \in \operatorname{im}(\psi)$. Следовательно,

$$\sum_{i\in I} \operatorname{im}(\psi\eta_i) \subseteq \operatorname{im}(\psi).$$

(b) Если $m \in \ker(\psi)$, то непосредственно видно, что $m \in \ker(\pi_i\psi)$ для каждого $i \in I$. Поэтому

$$\ker(\psi) \subseteq \bigcap_{i\in I} \ker(\pi_i\psi).$$

Обратно, пусть $m \in \bigcap \ker(\pi_i\psi)$. Это означает, что все компоненты $\psi(m)$ равны 0, поэтому $\psi(m) = 0$ и, следовательно,

$$\bigcap_{i\in I} \ker(\pi_i\psi) \subseteq \ker(\psi). \qquad \square$$

Перейдем к характеризации образующих и кообразующих.

4.8.2. ***Теорема.*** (a) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) B_R *— образующий.*
(2) *Каждая прямая сумма экземпляров* B *— образующий.*
(3) *Некоторая прямая сумма экземпляров* B *— образующий.*
(4) *Каждый модуль* M_R *является эпиморфным образом некоторой прямой суммы экземпляров* B.
(b) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) C_R *— кообразующий.*

(2) *Каждое прямое произведение экземпляров* C *— кообразующий.*
(3) *Некоторое прямое произведение экземпляров* C *— кообразующий.*
(4) *Каждый модуль* M_R *можно мономорфно отобразить в некоторое прямое произведение экземпляров* C.

Доказательство. (a) „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“, „(1) $\Leftrightarrow$ (3)“: Эти эквивалентности следуют из 3.3.2.

„(1) $\Rightarrow$ (4)“: Рассмотрим прямую сумму

$$\coprod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B,\, M)} B_\varphi, \quad \text{где} \quad B_\varphi = B \text{ для всех } \varphi \in \mathrm{Hom}_R(B,\, M)$$

и гомоморфизм

$$\psi\colon \coprod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B,\, M)} B_\varphi \to M,$$

определяемый так:

$$\psi((b_\varphi)) := \sum_{b_\varphi \neq 0} \varphi(b_\varphi).$$

Поскольку в (b_φ) лишь конечное число $b_\varphi \neq 0$, то сумма справа имеет смысл. Согласно 4.8.1, имеем

$$\mathrm{im}(\psi) = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B,\, M)} \mathrm{im}(\varphi) = M,$$

следовательно, ψ — эпиморфизм.

„(4) $\Rightarrow$ (1)“: Обратно, если существует эпиморфизм

$$\psi\colon \coprod_{i \in I} B_i \to M, \quad \text{где } B_i = B \text{ для всех } i \in I,$$

и η_i обозначает i-е включение B в $\coprod B_i$, то $\psi\eta_i \in \mathrm{Hom}_R(B,\, M)$, а также, в силу 4.8.1,

$$M = \mathrm{im}(\psi) = \sum_{i \in I} \mathrm{im}(\psi,\ \eta_i) \subseteq \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B,\, M)} \mathrm{im}(\varphi) \subseteq M.$$

Таким образом, $\sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(B,\, M)} \mathrm{im}(\varphi) = M$, т. е. B — образующий.

(b) „(1) $\Leftrightarrow$ (2), (1) $\Leftrightarrow$ (3)“: Эти эквивалентности следуют из 3.3.2.

„(1) $\Rightarrow$ (4)“: Рассмотрим прямое произведение

$$\prod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\, C)} C_\varphi, \quad \text{где} \quad C_\varphi = C \text{ для всех } \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\, C),$$

и гомоморфизм

$$\psi\colon M \to \prod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\, C)} C_\varphi,$$

определенный следующим образом:

$$\psi(m) := (C_\varphi), \text{ где } C_\varphi := \varphi(m) \text{ для всех } \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, C).$$

Для $m \in \ker(\psi)$ имеем

$$m \in \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\, C)} \ker(\varphi) = 0,$$

следовательно, ψ — мономорфизм.

„(4) $\Rightarrow$ (1)“: Обратно, если существует мономорфизм

$$\psi\colon M \to \prod_{i \in I} C_i, \quad \text{где} \quad C_i = C \text{ для всех } i \in I,$$

и π_i обозначает i-ю проекцию, то $\pi_i\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$, а также согласно 4.8.1,

$$\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\, C)} \ker(\varphi) \subseteq \bigcap_{i \in I} \ker(\pi_i\psi) = \ker(\psi) = 0;$$

значит $\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\, C)} \ker(\varphi) = 0$, т. е. C — кообразующий. □

Упражнения

1. a) Показать, что для гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$ следующие утверждения эквивалентны:
(1) $\ker(\alpha)$ является прямым слагаемым в A, а $\mathrm{im}(\alpha)$ — прямым слагаемым в B;
(2) существует такой гомоморфизм $\beta\colon B \to A$, что $\alpha = \alpha\beta\alpha$.
b) Как упрощается эта эквивалентность в случае, когда α — мономорфизм или эпиморфизм?

2. Указать примеры семейства модулей $(A_i \mid i \in I)$ и модуля M, для которых

$$\mathrm{Hom}_R\Big(\prod_{i \in I} A_i,\ M\Big) \ncong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(A_i,\ M),$$

соотв.

$$\mathrm{Hom}_R\Big(M,\ \bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \ncong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M,\ A_i)$$

($\ncong$ означает „не изоморфны как аддитивные группы“).

3. a) Пусть $M_R \neq 0$ — модуль, удовлетворяющий условию $M_R \cong M_R \oplus M_R$, и пусть $S := \mathrm{End}(M_R)$. Доказать, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ у S_S существует базис из n элементов.
b) Дать пример модуля $M \neq 0$, удовлетворяющего условию $M \cong M \oplus M$, и для каждого $n \in \mathbf{N}$ указать базис S_S из n элементов.

4. Показать, что кольцо $R \neq 0$ является телом тогда и только тогда, когда каждый правый R-модуль свободен.

5. Доказать, что 4.4.6 имеет место также и для прямых слагаемых свободных модулей.

6. a) Доказать, что если β: $B_R \to C_R$ — эпиморфизм, φ: $F_R \to C_R$ — гомоморфизм и F_R — свободный модуль, то существует такой гомоморфизм φ': $F_R \to B_R$, что $\varphi = \beta\varphi'$.
b) Показать, что a) остается верным, если F_R заменить произвольным прямым слагаемым свободного модуля.

7. a) Показать, что если

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ M & \xrightarrow{\psi} & N \end{array},$$

— амальгама для (φ, α), то существует такой изоморфизм η: $B/\mathrm{im}(\alpha) \to N/\mathrm{im}(\psi)$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\nu} & B/\mathrm{im}(\alpha) \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ N & \xrightarrow{\nu} & N/\mathrm{im}(\psi) \end{array}$$

коммутативна (ν — естественный эпиморфизм).
b) Сформулировать и доказать дуальное утверждение.

8. Пусть R — область целостности с полем частных K. Модуль M_R называется *делимым*, если для каждого $0 \neq r \in R$ имеет место равенство $Mr = M$. Доказать, что
a) класс делимых R-модулей замкнут относительно взятия фактормодулей, произведений и копроизведений;
b) единственные делимые подмодули K_R суть 0 и K;
c) $R \neq K \Longrightarrow$ каждый делимый циклический R-модуль равен 0.

9. Пусть R — область целостности. Доказать следующие утверждения:
a) Модуль M_R делим тогда и только тогда, когда для каждого циклического идеала $A \subsetneq R$ и каждого гомоморфизма φ: $A_R \to M_R$ существует такой гомоморфизм φ': $R_R \to M_R$, что $\varphi' \mid A = \varphi$.
b) Если для данного фиксированного M_R при произвольном N_R каждый мономорфизм φ: $M_R \to N_R$ является расщепляющим, то модуль M_R делим.

10. a) Пусть T — делимая абелева группа. Показать, что
(1) если из произвольной системы ее образующих над $\mathbf{Z}$ выбросить конечное множество произвольных элементов, то оставшееся множество снова будет системой образующих (см. также 2.3.7);
(2) T не содержит максимальных подгрупп.
b) Показать, что абелева группа не содержащая максимальных подгрупп, делима.
c) Дать пример делимой абелевой группы, содержащей простую подгруппу.

11. Для абелевой группы A определим *периодическую часть*[1] $\mathrm{T}(A)$ формулой

$$\mathrm{T}(A) := \{a \mid a \in A \wedge \exists z \in \mathbf{Z}\ [z \neq 0 \wedge az = 0]\}.$$

Показать, что
a) A делима $\Longrightarrow \mathrm{T}(A)$ — прямое слагаемое в A.
b) A делима $\wedge \mathrm{T}(A) = 0 \Longrightarrow A$ $\mathbf{Z}$-изоморфна прямой сумме экземпляров $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ (*Указание.* A можно сделать векторным пространством над $\mathbf{Q}$.)

12. Пусть p — простое число и

$$\mathbf{Q}_p := \left\{\frac{z}{p^n} \,\middle|\, z \in \mathbf{Z} \wedge n \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Доказать, что

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \bigoplus_{\substack{p\text{ — простое} \\ \text{число}}} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}.$$

13. Пусть G — группа, R — кольцо и GR — групповое кольцо G над R.
a) Показать, что посредством правила

$$(\Sigma g r_g) \circ (\Sigma g' r'_{g'}) := \Sigma g g' g^{-1} r_g r'_{g'} \text{ для } \Sigma g r_g,\ \Sigma g' r'_{g'}$$

на GR определяется структура левого GR-модуля.
b) Используя a), указать пример модуля, являющегося левым и правым GR-модулем, но не являющегося GR-GR-бимодулем.

14. Модуль M_R называется *регулярным* (в смысле фон Неймана), если в нем каждый циклический подмодуль является прямым слагаемым. Показать, что
(1) в регулярном модуле каждый конечно-порожденный подмодуль является прямым слагаемым;
(2) R_R регулярен $\Longleftrightarrow {}_R R$ регулярен $\Longleftrightarrow$ для каждого $r \in R$ существует такое $r' \in R$, что $r = rr'r$ (см. также упр. 13 к гл. 2);
(3) если кольцо R регулярно, то каждый свободный правый R-модуль F регулярен. (*Указание.* Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ какой-нибудь базис для F_R и $x \in F_R$. Рассмотрите левый идеал в R, порожденный коэффициентами при x в разложении по элементам базиса. Согласно (1) и (2), он имеет вид Re, где $e^2 = e$; используя этот факт, найдите проекцию $F \to xR$).

---

[1] T — от torsion (кручение). — *Прим. ред.*

5. Инъективные и проективные модули

Инъективные и проективные модули — и вообще инъективные и проективные объекты в категории — играют важную роль в современной алгебре. Знакомство с этими понятиями должно поэтому произойти как можно раньше, с тем чтобы при дальнейших рассуждениях можно было показать в выгодном свете эти понятия и основанные на них точки зрения. В настоящей главе описаны некоторые общие свойства инъективных и проективных модулей. Позже мы неоднократно будем возвращаться к этим понятиям.

Как вспомогательное средство при исследовании инъективных и проективных модулей нам понадобятся *косущественные* и *существенные* подмодули, а также *дополнения*. Эти понятия оказываются важными и в других случаях (как, например, при изучении радикалов и цоколей) и потому будут сейчас изложены несколько шире, чем это нужно для рассмотрений данной главы.

5.1. Косущественные и существенные подмодули

5.1.1. ***Определение.*** (a) *Подмодуль A модуля M называется косущественным (=малым) в M (запись: $A \subsetq M$), соотв. существенным (=большим) в M (запись: $A \subsetq^* M$), если*

$$\forall U \subseteq M\,[A + U = M \Rightarrow U = M],$$

соотв.

$$\forall U \subseteq M\,[A \cap U = 0 \Rightarrow U = 0].$$

(b) *Правый, левый или двусторонний идеал A кольца R называется косущественным, соотв. существенным в R, если A — косущественный, соотв. существенный подмодуль в R_R, ${}_RR$ или ${}_RR_R$.*
(c) *Гомоморфизм $\alpha\colon A \to B$ называется косущественным, соотв. существенным, если*

$$\ker(\alpha) \subsetq A, \text{ соотв. } \operatorname{im}(\alpha) \subsetq^* B.$$

Замечание. Из определения непосредственно вытекают следующие свойства:

(1) $A \subsetneq^{\circ} M \Leftrightarrow \forall U \subsetneq M\ [A+U \underset{\neq}{\subsetneq} M]$;

(2) $A \subsetneq^{*} M \Leftrightarrow \forall U \subsetneq M,\ U \neq 0\ [A \cap U \neq 0]$;

(3) $M \neq 0 \wedge A \subsetneq^{\circ} M \Rightarrow A \neq M$;

(4) $M \neq 0 \wedge A \subsetneq^{*} M \Rightarrow A \neq 0$.

5.1.2. ***Примеры.*** 1. Для каждого модуля M имеем $0 \subsetneq^{\circ} M$, $M \subsetneq^{*} M$.

2. Модуль называется *полупростым*, если каждый его подмодуль является прямым слагаемым (см. гл. 8).

Если модуль M полупрост, то единственный косущественный подмодуль в M — нулевой и единственный существенный подмодуль в M — это сам M.

Доказательство. $A \subsetneq M \Rightarrow$ существует такой подмодуль $U \subsetneq M$, что $A \oplus U = M$. Поэтому $A \subsetneq^{\circ} M \Rightarrow U = M \Rightarrow A = 0$; $A \subsetneq^{*} M \Rightarrow U = 0 \Rightarrow A = M$. □

3. Пусть R — *локальное* кольцо (см. гл. 7), не являющееся телом, и A — двусторонний идеал из необратимых элементов в R. Тогда $A \neq 0$ (так как R не тело) и A — наибольший собственный левый, правый, соотв. двусторонний идеал в R (см. 7.1.1). Отсюда следует, что A косущественен и (поскольку $A \neq 0$) существен в R_R, ${}_R R$ и ${}_R R_R$.

Пример. $R := \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, $A := p\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, p — простое число.

4. В свободном $\mathbf{Z}$-модуле лишь тривиальный подмодуль 0 является косущественным.

Доказательство. Пусть

$$F = \bigoplus_{i \in I} x_i \mathbf{Z}$$

— свободный $\mathbf{Z}$-модуль с базисом $\{x_i \mid i \in I\}$, $A \subsetneq F$, $a \in A$. Пусть

$$a = x_{i_1} z_1 + \ldots + x_{i_m} z_m,\ z_i \in \mathbf{Z},$$

причем $z_1 \neq 0$. Пусть, далее, $n \in \mathbf{Z}$, н. о. д. $(z_1, n) = 1$ и $n > 1$ (например, n есть простое число p, не делящее z_1). Полагая

$$U = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq i_1}} x_i \mathbf{Z} + x_{i_1} n\mathbf{Z},$$

имеем $a\mathbf{Z} + U = F$, а значит, $A + U = F$, где $U \neq F$. □

В частности, лишь 0 является косущественным идеалом в $\mathbf{Z}$. Однако каждый ненулевой идеал в $\mathbf{Z}$ существен, потому что для любых двух ненулевых идеалов $a\mathbf{Z}$ и $b\mathbf{Z}$ мы имеем $0 \neq ab \in a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z}$.

5. Каждый конечно-порожденный подмодуль в $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ косущественен в $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$. Действительно, пусть $q_1, \ldots, q_n \in \mathbf{Q}$ и $U \subset \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$, причем

$$q_1\mathbf{Z} + \ldots + q_n\mathbf{Z} + U = \mathbf{Q}.$$

Тогда $\{q_1, \ldots, q_n\} \cup U$ — система образующих для $\mathbf{Q}$. Следовательно, согласно 2.3.7, уже само U является системой образующих для $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ и потому $U = \mathbf{Q}$.

Мы переходим теперь к простым следствиям из определения.

5.1.3. ***Лемма.*** (a) $A \subset B \subset M \subset N \wedge B \subset^{\circ} M \Rightarrow A \subset^{\circ} N$.

(b) $A_i \subset^{\circ} M,\ i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i \subset^{\circ} M$.

(c) $A \subset^{\circ} M \wedge \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \varphi(A) \subset^{\circ} N$.

(d) *Если* α: $A \to B$, β: $B \to C$ — *косущественные эпиморфизмы, то* $\beta\alpha$: $A \to C$ — *тоже косущественный эпиморфизм.*

Доказательство. (a) $A + U = N \Rightarrow B + U = N \Rightarrow B + (U \cap M) = M$ (закон модулярности) $\Rightarrow U \cap M = M$ (так как $B \subset^{\circ} M$) $\Rightarrow M \subset U$, и так как по предположению $A \subset M$, то $U = A + U = N$, что и требовалось доказать.

(b) Проведем индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение леммы верно по предположению. Пусть уже доказано, что

$$A := A_1 + \ldots + A_{n-1} \subset^{\circ} M$$

и для $U \subset M$

$$A + A_n + U = M.$$

Тогда $A_n + U = M$, так как $A \subset^{\circ} M$, $\Rightarrow U = M$, поскольку $A_n \subset^{\circ} M$.

(c) Пусть $\varphi(A) + U = N$, где $U \subset N$. Тогда для произвольного $m \in M$ имеем $\varphi(m) = \varphi(a) + u$, где $a \in A$, $u \in U$, $\Rightarrow \varphi(m - a) = u \Rightarrow m - a \in \varphi^{-1}(U) \Rightarrow m \in A + \varphi^{-1}(U) \Rightarrow A + \varphi^{-1}(U) = M \Rightarrow M = \varphi^{-1}(U)$, потому что $A \subset^{\circ} M$, $\Rightarrow \varphi(M) = \varphi\varphi^{-1}(U) = U \cap \mathrm{im}(\varphi) \Rightarrow \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(M) \subset U \Rightarrow U = \varphi(A) + U = N$, что и требовалось доказать.

(d) Пусть $\ker(\beta\alpha) + U = A$, где $U \subset A$. Тогда, в силу равенства $\ker(\beta\alpha) = \alpha^{-1}(\ker(\beta))$,

$$\alpha(\ker(\beta\alpha)) + \alpha(U) = \ker(\beta) + \alpha(U) = \alpha(A) = B.$$

Так как по предположению $\ker\beta \subset^{\circ} B$, то мы заключаем, что $\alpha(U) = B$ и, следовательно,

$$\ker(\alpha) + U = A.$$

Поскольку $\ker(\alpha) \subset^{\circ} A$, получаем $U = A$, что и требовалось доказать. □

Прежде чем заняться дуальными свойствами существенных подмодулей, приведем еще один важный результат о циклических подмодулях, не являющихся косущественными.

5.1.4. ***Лемма.*** *Для $a \in M_R$ подмодуль aR не является косущественным в $M \Leftrightarrow$ существует максимальный подмодуль $C \subsetneq M$, такой что $a \notin C$.*

Доказательство. „$\Leftarrow$“: Если C — максимальный подмодуль в M и $a \notin C$, то $aR + C = M$, поэтому aR не является косущественным в M.

„$\Rightarrow$“: Для доказательства этой импликации воспользуемся леммой Цорна. Положим

$$\Gamma := \{B \mid B \underset{\neq}{\subsetneq} M \wedge aR + B = M\}.$$

Так как aR не является косущественным, то существуют $B \in \Gamma$, т. е. $\Gamma \neq \emptyset$.

Пусть $\Lambda \neq \emptyset$ — произвольное вполне упорядоченное (по включению) подмножество в Γ. Ясно, что

$$B_0 := \bigcup_{B \in \Lambda} B$$

служит верхней гранью Λ. Допустим, что $a \in B_0$. Тогда a должно содержаться уже в некотором B, откуда следует, что $aR \subsetneq B$, а потому

$$B = aR + B = M \quad \lightning.$$

Таким образом, $a \notin B_0$ и, значит, $B_0 \underset{\neq}{\subsetneq} M$. Так как $B \subsetneq B_0$ для $B \in \Lambda$, то

$$aR + B_0 = M.$$

Следовательно, $B_0 \in \Gamma$, т. е. Λ обладает верхней гранью в Γ. По лемме Цорна Γ обладает максимальным элементом C.

Мы утверждаем теперь, что C — максимальный подмодуль в M. Действительно, пусть $C \underset{\neq}{\subsetneq} U \subsetneq M$. Тогда $U \notin \Gamma$, так как C максимален в Γ. Из соотношений $M = aR + C \subsetneq aR + U \subsetneq M$ вытекает, что $aR + U = M$. Поскольку $U \notin \Gamma$, должно выполняться равенство $U = M$, что и требовалось доказать. □

Обратимся теперь к существенным подмодулям. Прежде всего для них справедливо дуальное к 5.1.3 утверждение.

5.1.5. ***Лемма.*** (a) $A \subsetneq B \subsetneq M \subsetneq N \wedge A \subsetneq^* N \Rightarrow B \subsetneq^* M$.

(b) $A_i \subsetneq^* M$, $i = 1, \ldots, n \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subsetneq^* M$.

(c) $B \subseteq^* N \wedge \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \varphi^{-1}(B) \subseteq^* M$.
(d) *Если* α: $A \to B$, β: $B \to C$ — *существенные мономорфизмы, то* $\beta\alpha$: $A \to C$ — *также существенный мономорфизм.*

Доказательство. (a) $U \subseteq M \wedge B \cap U = 0 \Rightarrow A \cap U = 0 \Rightarrow U = 0$, так как $A \subseteq^* N \wedge U \subseteq M \subseteq N$.

(b) Применим индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение верно по предположению. Пусть уже доказано, что

$$A := \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subseteq^* M,$$

и пусть для $U \subseteq M$

$$A \cap A_n \cap U = 0.$$

Тогда $A_n \cap U = 0$, поскольку $A \subseteq^* M$, $\Rightarrow U = 0$, так как $A_n \subseteq^* M$.

(c) $U \subseteq M \wedge \varphi^{-1}(B) \cap U = 0 \Rightarrow B \cap \varphi(U) = 0 \Rightarrow \varphi(U) = 0$, так как $B \subseteq^* N$, $\Rightarrow U \subseteq \ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(B) \Rightarrow U = \varphi^{-1}(B) \cap U = 0$.

(d) Пусть $U \subseteq C$ и $\mathrm{im}(\beta\alpha) \cap U = 0$. Поскольку β — мономорфизм, то

$$0 = \beta^{-1}(0) = \beta^{-1}(\mathrm{im}(\beta\alpha)) \cap \beta^{-1}(U) = \mathrm{im}(\alpha) \cap \beta^{-1}(U).$$

Так как $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq^* B$, мы заключаем, что $\beta^{-1}(U) = 0$. Отсюда следует, что $\mathrm{im}(\beta) \cap U = 0$, а так как $\mathrm{im}(\beta) \subseteq^* C$, то мы получаем $U = 0$, что и требовалось доказать. □

Для существенных подмодулей имеется следующий важный для применений критерий, который нельзя непосредственно дуализовать.

5.1.6. ***Лемма.*** *Пусть* $A \subseteq M_R$. *Тогда*

$$A \subseteq^* M_R \Leftrightarrow \forall m \in M,\ m \neq 0\ \exists r \in R\,[mr \neq 0 \wedge mr \in A].$$

Доказательство. „$\Rightarrow$“: $m \neq 0 \Rightarrow mR \neq 0 \Rightarrow A \cap mR \neq 0$, так как $A \subseteq^* M$, $\Rightarrow$ наше утверждение.

„$\Leftarrow$“: $B \subseteq M \wedge B \neq 0 \Rightarrow$ найдется $m \in B$, $m \neq 0$. Далее, $mr \neq 0 \wedge mr \in A \Rightarrow 0 \neq mr \in A \cap B \Rightarrow A \subseteq^* M$. □

5.1.7. ***Следствие.*** *Пусть* $M = \sum_{i \in I} M_i$, $M_i \subseteq M$, $A_i \subseteq^* M_i$ *для всех* $i \in I$ *и*

$$A := \sum_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i.$$

Тогда

$$A \subseteq^* M \text{ и } M = \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

Доказательство. „$A \subsetneq^* M$“: Каждый элемент из M есть сумма конечного числа элементов из M_i, поэтому, согласно 5.1.6, достаточно доказать утверждение для конечного множества индексов I, скажем для $I = \{1, \ldots, n\}$.

Проведем доказательство индукцией по n. При $n = 1$ наше утверждение верно по предположению. Пусть оно верно для $n-1$ слагаемых, т. е.

$$A_1 + \ldots + A_{n-1} \subsetneq^* M_1 + \ldots + M_{n-1},$$

и пусть

$$0 \neq m = m_1 + \ldots + m_{n-1} + m_n, \text{ где } m_i \in M_i.$$

Если $m_1 + \ldots + m_{n-1} = 0$, то $m = m_n \neq 0$, поэтому найдется такое $r \in R$, что $0 \neq mr = m_n r \in A_n$. Будем поэтому считать, что $m_1 + \ldots + m_{n-1} \neq 0$. Тогда по предположению индукции найдется $r \in R$, для которого

$$0 \neq (m_1 + \ldots + m_{n-1})\, r \in A_1 + \ldots + A_{n-1}.$$

Если $m_n r = 0$ для этого r, то все доказано. Пусть поэтому $m_n r \neq 0$. Тогда существует такой элемент $s \in R$, что $0 \neq m_n rs \in A_n$, откуда $mrs \in A_1 + \ldots + A_n$. Поскольку сумма A_i — прямая, имеем, далее, $mrs \neq 0$. Это показывает, что $A \subsetneq^* M$.

„$M = \bigoplus M_i$“: И в этом случае также достаточно взять $I = \{1, \ldots, n\}$ и предположить, что

$$0 \neq m_n = m_1 + \ldots + m_{n-1} \in M_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} M_i.$$

Тогда существует $r \in R$, для которого

$$0 \neq (m_1 + \ldots + m_{n-1})\, r \in \sum_{i=1}^{n-1} A_i.$$

Таким образом,

$$0 \neq m_n r = (m_1 + \ldots + m_{n-1})\, r \in M_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} A_i.$$

Если бы нашлось $s \in R$, для которого $0 \neq m_n rs \in A_n$, то мы имели бы

$$0 \neq m_n rs = (m_1 + \ldots + m_{n-1})\, rs \in A_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} A_i,$$

в противоречие с предположением. □

5.1.8. ***Следствие.*** *Пусть* $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $M_i \subseteq M$, $A_i \subsetneq^* M_i$ *для всех* $i \in I$. *Тогда*

$$A := \sum_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i \text{ и } A \subsetneq^* M.$$

Доказательство. Из соотношений $M=\oplus M_i$ и $A_i \subseteq M_i$ следует, что $A=\oplus A_i$. Из 5.1.7 вытекает теперь, что $A \subseteq^{*} M$. □

5.1.9. ***Следствие.*** *Пусть* $M=\bigoplus_{i\in I} M_i$ *и* $B \subseteq M$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) $\forall i \in I\,[B \cap M_i \subseteq^{*} M_i]$;
(2) $\bigoplus_{i\in I} (B \cap M_i) \subseteq^{*} M$;
(3) $B \subseteq^{*} M$.

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: В силу 5.1.8.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Это следует из того, что $\bigoplus_{i\in I} (B \cap M_i) \subseteq^{*} B$, и из 5.1.5 (a).

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Пусть $0 \neq m_i \in M_i$. Тогда по 5.1.6 найдется $r \in R$, для которого $0 \neq m_i r \in B$. Так как, с другой стороны, $m_i r \in M_i$, то $0 \neq m_i r \in B \cap M_i$, следовательно, имеет место (1). □

5.2. Дополнения

Речь здесь пойдет об ослаблении понятия прямой суммы двух подмодулей. Прямая сумма

$$A \oplus B = M$$

определяется, как мы знаем, двумя условиями:

$$A + B = M,\quad A \cap B = 0.$$

Ослабляя их указанным ниже образом, мы приходим к понятию дополнений.

5.2.1. ***Определение.*** *Пусть* $A \subseteq M$.
(a) $A' \subseteq M$ *называется* ***аддитивным дополнением*** *(сокращенно а. д.) для (или к)* A *в* M, *если*
(1) $A + A' = M$,
(2) A' *— минимальный подмодуль со свойством* $A + A' = M$, *т. е.* $\forall B \subseteq M\,[(A + B = M \wedge B \subseteq A') \Rightarrow B = A']$.
(b) $A' \subseteq M$ *называется* ***дополнением по пересечению*** *(сокращенно д. п.) для (или к)* A *в* M, *если*
(1) $A \cap A' = 0$,
(2) A' *— максимальный подмодуль со свойством* $A \cap A' = 0$, *т. е.* $\forall C \subseteq M\,[(A \cap C = 0 \wedge A' \subseteq C) \Rightarrow A' = C]$. [1]

Прежде всего мы должны обосновать наше предварительное замечание.

---

[1] Ниже для краткости вместо „аддитивное дополнение“ и „дополнение по пересечению“ мы пишем иногда „+-дополнение“ и „$\cap$-дополнение“ соответственно. — *Прим. перев.*

5.2.2. ***Следствие.*** *Пусть* $A \subseteq M$ *и* $B \subseteq M$. *Тогда* $A \oplus B = M \Leftrightarrow B$ *— одновременно а. д. и д. п. для* A *в* M.

Доказательство. „$\Leftarrow$“: Непосредственно следует из определения.

„$\Rightarrow$“: Пусть $A + C = M$ и $C \subseteq B$. В силу закона модулярности, $(A \cap B) + C = B$, а из того что $A \cap B = 0$, получаем $C = B$. Поэтому B — а. д. Далее, $A \cap C = 0$ и $B \subseteq C \Rightarrow A \oplus C = M \Rightarrow B = C$, согласно предыдущему рассуждению, если поменять в нем ролями B и C. Таким образом, B является д. п. для A. □

Возникает вопрос о единственности и существовании таких дополнений. Уже в случае $A \oplus B = M$ подмодуль B (при фиксированных M и A), вообще говоря, определен лишь с точностью до изоморфизма. Для дополнений даже это не имеет места (см. пример в упр. 6, d)), всё же мы приведем позже некоторые результаты о единственности.

Обратимся теперь к вопросу о существовании дополнений. Как показывает пример $\mathbf{Z}_{\mathbf{Z}}$, аддитивные дополнения не всегда существуют. Действительно, пусть $n, m \in \mathbf{Z}$, причем $(n, m) = 1$. Тогда

$$n\mathbf{Z} + m\mathbf{Z} = \mathbf{Z}.$$

Для $n \neq 0$, $m \neq \pm 1$ и $(n, q) = 1$, $q > 1$ мы также имеем $(n, qm) = 1$, причем $qm\mathbf{Z} \subsetneq m\mathbf{Z}$; следовательно, $n\mathbf{Z}$ не обладает аддитивным дополнением.

С другой стороны, легко привести примеры модулей, в которых аддитивные дополнения существуют, таковы, например, артиновы модули и полупростые модули. Напротив, дополнения по пересечению существуют всегда, причем они могут быть даже выбраны специальным образом.

5.2.3. ***Лемма.*** *Пусть* $A, B \subseteq M$, *причем* $A \cap B = 0$. *Тогда для* A *существует такое* $\cap$*-дополнение* A', *что* $B \subseteq A'$, *и, следовательно, для* A' *существует такое* $\cap$*-дополнение* A'', *что* $A \subseteq A''$.

Доказательство. Привлечем лемму Цорна. Положим

$$\Gamma := \{C \mid C \subseteq M \wedge B \subseteq C \wedge A \cap C = 0\}.$$

Ясно, что $\Gamma \neq \emptyset$, ибо $B \in \Gamma$. Так как объединение всякого вполне упорядоченного подмножества из Γ, очевидно, принадлежит Γ, то каждое вполне упорядоченное подмножество в Γ имеет верхнюю грань в Γ. По лемме Цорна в Γ существует максимальный элемент A'. Беря A' вместо A и A вместо B, аналогично получаем $A \subseteq A''$. □

Тот факт, что дополнение по пересечению существует всегда, а аддитивное дополнение нет, играет для общей теории модулей

важную роль. Например, отсюда следует, что инъективная оболочка (определение будет дано ниже) существует всегда, а проективная оболочка, вообще говоря, не всегда. Причина заключается в том, что в категории модулей лемму Цорна нельзя применить в дуальном случае.

Между понятиями косущественного подмодуля и аддитивного дополнения, соотв. между понятиями существенного подмодуля и дополнения по пересечению, существует важная связь, которую мы сейчас опишем.

5.2.4. ***Лемма.*** (a) *Пусть* $M = A + B$. *Тогда* B *— а. д. для* A *в* $M \Leftrightarrow A \cap B \subseteq^{\circ} B$.
(b) *Если* B *— а. д.* A *в* M *и* A'' *— а. д.* A' *в* M, *то* A' *— также а. д. для* A'' *в* M.
(c) *Если* A' *— а. д.* A *в* M *и* A'' *— а. д.* A' *в* M, *причем* $A'' \subseteq A$, *то* $A/A'' \subseteq^{\circ} M/A''$.

Доказательство. (a) „$\Rightarrow$“: Пусть $U \subseteq B$, причем $(A \cap B) + U = B$. Тогда $M = A + B = A + (A \cap B) + U = A + U$. Так как B — а. д. для A, то $U = B$. Следовательно, $A \cap B \subseteq^{\circ} B$.

(a) „$\Leftarrow$“: Пусть $M = A + U$, причем $U \subseteq B$. Тогда $B = (A \cap B) + U$. Поскольку $A \cap B \subseteq^{\circ} B$, отсюда вытекает что $B = U$. Следовательно, B — а. д. для A в M.

(b) По условию, $M = A'' + A'$. Пусть $U \subseteq A'$, причем $M = A'' + U$. Тогда $A' = (A'' \cap A') + U$. В силу равенства $M = A + A'$, получаем $M = A + (A'' \cap A') + U$. Из $A'' \cap A' \subseteq^{\circ} A''$ следует, что $A'' \cap A' \subseteq^{\circ} M$. Поэтому $M = A + (A'' \cap A') + U = A + U$. Так как A' — а. д. для A и $U \subseteq A'$, то $U = A'$. Следовательно, A' — а. д. для A'' в M.

(c) Пусть $(A/A'') + (U/A'') = M/A''$, где $A'' \subseteq U \subseteq M$. Тогда $A + U = M$. Далее, поскольку $M = A'' + A'$ и $A'' \subseteq U$, то $U = A'' + (A' \cap U)$. Отсюда вытекает, что $M = A + U = A + A'' + (A' \cap U) = A + (A' \cap U)$. Так как A' — а. д. для A, то $A' \cap U = A'$. Следовательно, $A' \subseteq U$ и потому $M = A'' + A' \subseteq U \subseteq M$. Таким образом, $U = M$, откуда $U/A'' = M/A''$, что и требовалось доказать. □

Перейдем к дуальному утверждению.

5.2.5. ***Лемма.*** (a) *Если* A *и* B *— подмодули в* M, *для которых* $0 = A \cap B$, *то* B *— д. п. для* A *в* $M \Leftrightarrow (A + B)/B \subseteq^{*} M/B$.
(b) *Если* A' *— д. п.* A *в* M *и* A'' *— д. п.* A' *в* M, *то* A' *— также д. п.* A'' *в* M.
(c) *Если* A' *— д. п.* A *в* M *и* A'' *— д. п.* A' *в* M, *для которого* $A \subseteq A''$, *то* $A \subseteq^{*} A''$.

Доказательство. (a) „$\Rightarrow$“: Пусть $(A + B)/B \cap U/B = 0$, причем $B \subseteq U \subseteq M$. Тогда $(A + B) \cap U = B$. Отсюда $A \cap U \subseteq B$ и, следовательно, $A \cap U \subseteq A \cap B$. Так как B — д. п. для A, то

$A \cap B = 0$. Таким образом, $A \cap U = 0$. В силу того что $B \subset_{\oplus} U$ и B — д. п., имеем $B = U$. Поэтому $U/B = B/B = 0$. Это означает, что $(A+B)/B$ — существенный подмодуль в M/B.

(a) „$\Leftarrow$": Пусть теперь $A \cap U = 0$, причем $B \subset_{\oplus} U \subset_{\oplus} M$, и пусть $x \in (A+B) \cap U$. Тогда $x = a+b = u$, где $a \in A$, $b \in B$, $u \in U$. Следовательно, $a = u - b \in A \cap U = 0$; и потому $a = 0$ и $x = b \in B$. Отсюда $(A+B) \cap U = B$, поэтому $(A+B)/B \cap U/B = 0$. В силу того что $(A+B)/B \subset^{*} M/B$, мы должны иметь $U/B = 0$. Это означает, что $B = 0$. Следовательно, B — д. п. для A в M.

(b) По условию $A'' \cap A' = 0$. Пусть $A' \subset_{\oplus} U \subset_{\oplus} M$, причем $A'' \cap U = 0$. Из $(A''+A')/A'' \subset^{*} M/A''$ следует, что $A''+A' \subset^{*} M$ (в силу 5.1.5(c)). Пусть $x \in (A''+A') \cap (A \cap U)$. Тогда $x = a''+a' = a = u$, где $a'' \in A''$, $a' \in A'$, $a \in A$, $u \in U$. Отсюда $a'' = u - a' \in A'' \cap U = 0$. Следовательно, $a'' = 0$, и потому $x = a' = a \in A' \cap A = 0$. Таким образом, $(A''+A') \cap (A \cap U) = 0$. Поскольку $A''+A' \subset^{*} A$, имеем $A \cap U = 0$. Так как A' — д. п. для A и так как было предположено, что $A' \subset_{\oplus} U$, то $A' = U$, что и требовалось доказать.

(c) Пусть $U \subset_{\oplus} A''$, причем $A \cap U = 0$. Для $x \in A \cap (A' \cap U)$ имеем $x = a = a' + u$, где $a \in A$, $a' \in A'$, $u \in U$. Отсюда получаем, что $a - u = a' \in A'' \cap A' = 0$. Таким образом, $x = a = u \in A \cap U = 0$. Следовательно, $A \cap (A'+U) = 0$. Отсюда $A'+U = A'$, и потому $U \subset_{\oplus} A'$. Учитывая, что $U \subset_{\oplus} A''$, получаем $U \subset_{\oplus} A'' \cap A' = 0$ и, значит, $U = 0$. Этим доказано, что $A \subset^{*} A''$. □

5.3. Определение инъективных и проективных модулей и некоторые простые следствия

5.3.1. ***Теорема.*** (a) *Для модуля Q_R следующие условия эквивалентны:*
(1) *Каждый мономорфизм*

$$\xi: Q \to B$$

является расщепляющим (т. е. $\operatorname{im}(\xi)$ *— прямое слагаемое в B).*
(2) *Для каждого мономорфизма $\alpha: A \to B$ и каждого гомоморфизма $\varphi: A \to Q$ существует такой гомоморфизм $\varkappa: B \to Q$, что $\varphi = \varkappa\alpha$.*
(3) *Для каждого мономорфизма $\alpha: A \to B$ отображение*

$$\operatorname{Hom}(\alpha, 1_Q): \operatorname{Hom}_R(B, Q) \to \operatorname{Hom}_R(A, Q)$$

есть эпиморфизм.
(b) *Для модуля P_R следующие условия эквивалентны:*
(1) *Каждый эпиморфизм*

$$\xi: B \to P$$

является расщепляющим (т. е. $\ker(\xi)$ *— прямое слагаемое в B).*
(2) *Для каждого эпиморфизма $\beta: B \to C$ и каждого гомоморфизма $\psi: P \to C$, существует такой гомоморфизм $\lambda: P \to B$, что $\psi = \beta\lambda$.*
(3) *Для каждого эпиморфизма $\beta: B \to C$ отображение*

$$\operatorname{Hom}(1_P, \beta): \operatorname{Hom}_R(P, B) \to \operatorname{Hom}_R(P, C)$$

есть эпиморфизм.

Диаграмма для (a), (2):

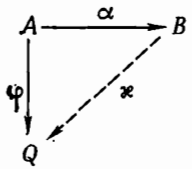
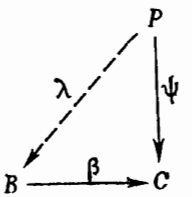
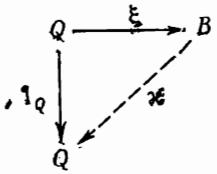


Диаграмма для (b), (2):



Доказательство. (a). „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Эта импликация следует из 4.7.4, поскольку по условию ψ в 4.7.4 является расщепляющим.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: По предположению существует такой гомоморфизм $\varkappa\colon B \to Q$, что диаграмма

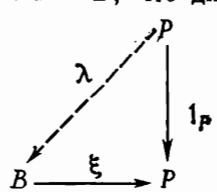


коммутативна, т. е. $1_Q = \varkappa\xi$, поэтому, согласно 3.4.11, ξ является расщепляющим.

(a) „(2) $\Leftrightarrow$ (3)“: Из рассмотрения определения $\mathrm{Hom}(\alpha, 1_Q)$ (см. 3.6) явствует, что (3) есть эквивалентная формулировка утверждения (2).

(b) „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Это следует из 4.7.6, поскольку по предположению α в 4.7.6 является расщепляющим.

(b) „(2) $\Rightarrow$ (1)“: По предположению существует такой гомоморфизм $\lambda\colon P \to B$, что диаграмма



коммутативна, т. е. $1_P = \xi\lambda$, поэтому, согласно 3.4.11, ξ является расщепляющим.

(b) „(2) $\Leftrightarrow$ (3)": Одно утверждение — эквивалентная переформулировка другого. □

5.3.2. ***Определение.*** (a) *Модуль* Q_R, *удовлетворяющий условиям* 5.3.1(a), *называется инъективным* R*-модулем.*
(б) *Модуль* P_R, *удовлетворяющий условиям* 5.3.1(b), *называется проективным* R*-модулем.*

В этом определении инъективного, соотв. проективного, модуля используется категория правых унитарных R-модулей, поскольку допускаются все мономорфизмы α: $A \to B$, соотв. все эпиморфизмы β: $B \to C$. Таким образом, в обоих случаях мы имеем категорное „внешнее" определение.

Естественно возникает вопрос, можно ли охарактеризовать инъективные и проективные модули с помощью „внутренних" свойств. Для проективных модулей, как мы скоро увидим, это легко сделать: R-модуль проективен тогда и только тогда, когда он изоморфен прямому слагаемому некоторого свободного R-модуля. Для инъективных модулей в общем случае нет аналогичного простого описания через внутренние свойства. Все же для $R = \mathbf{Z}$ такое описание имеется: $\mathbf{Z}$-модуль инъективен тогда и только тогда, когда он делим. Общий случай сводится к этому.

Приведем сначала некоторые простые следствия из определения.

5.3.3. ***Следствие.*** (a) Q *инъективен и* $Q \cong A \Rightarrow A$ *инъективен,*
(b) P *проективен и* $P \cong C \Rightarrow C$ *проективен.*

Доказательство. (a) Пусть φ: $Q \cong A$. Если α: $A \to B$ — мономорфизм, то $\alpha\varphi$ — также мономорфизм. Согласно 5.3.1, $\operatorname{im}(\alpha)$ — прямое слагаемое в B. Поскольку $\operatorname{im}(\alpha\varphi) = \operatorname{im}(\alpha)$, то A также инъективен.

(b) Пусть ψ: $C \cong P$. Если β: $B \to C$ — эпиморфизм, то $\psi\beta$ — также эпиморфизм. В силу равенства $\ker(\psi\beta) = \ker(\beta)$, $\ker(\beta)$ — прямое слагаемое в B, следовательно, C проективен. □

5.3.4. ***Теорема.*** (a) *Если* $Q = \prod_{i \in I} Q_i$, *то*

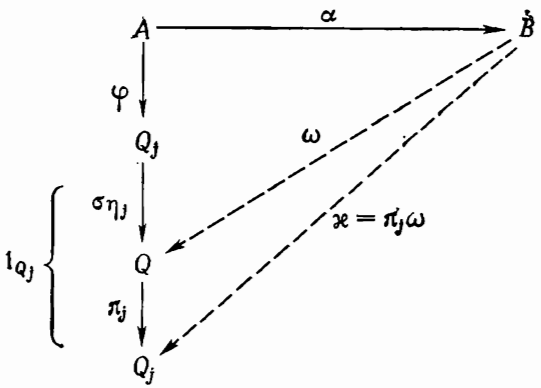
$$Q \text{ инъективен} \Leftrightarrow \forall i \in I \ [Q_i \text{ инъективен}].$$

(b) *Если* $P = \prod_{i \in I} P_i$ *или* $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$, *то*

$$P \text{ проективен} \Leftrightarrow \forall i \in I \ [P_i \text{ проективен}].$$

Доказательство. Обозначения проекций для прямого произведения и инъекций для прямой суммы те же, что и в гл. 4.

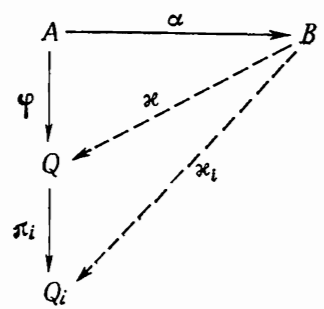
(a) „$\Rightarrow$“: Пусть Q инъективен, $\alpha\colon A \to B$ — мономорфизм и для $j \in I$ пусть $\varphi\colon A \to Q_j$ — некоторый гомоморфизм. По предположению, для $\sigma\eta_j\varphi$ существует гомоморфизм $\omega\colon B \to Q$, такой что $\sigma\eta_j\varphi = \omega\alpha$:



Тогда искомым гомоморфизмом $\varkappa$, для которого $\varphi = \varkappa\alpha$, будет $\varkappa := \pi_j\omega$, так как

$$\varphi = 1_{Q_j}\varphi = (\pi_j\sigma\eta_j)\,\varphi = \pi_j\,(\sigma\eta_j\varphi) = \pi_j\,(\omega\alpha) = (\pi_j\omega)\,\alpha = \varkappa\alpha.$$

(a) „$\Leftarrow$“: Пусть теперь даны мономорфизм $\alpha\colon A \to B$ и гомоморфизм $\varphi\colon A \to Q$. По предположению для каждого $\pi_i\varphi$ существует такой гомоморфизм $\varkappa_i$, что $\pi_i\varphi = \varkappa_i\alpha$. Согласно 4.1.6, существует $\varkappa\colon B \to Q$, для которого $\varkappa_i = \pi_i\varkappa$:

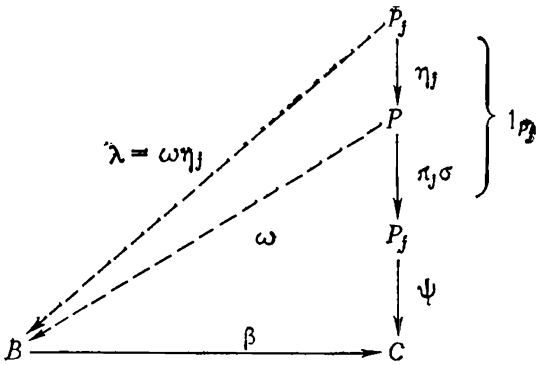


Мы утверждаем, что $\varphi = \varkappa\alpha$. В самом деле, из $\pi_i\varphi = \varkappa_i\alpha$ и $\varkappa_i = \pi_i\varkappa$ следует, что $\pi_i\varphi = \pi_i\varkappa\alpha$, поэтому по 4.1.6 (единственность) $\varphi = \varkappa\alpha$.

(b) В силу 5.3.3, достаточно рассмотреть случай $P = \coprod_{i \in I} P_i$.

Доказательство дуально к (a), поэтому мы будем кратки.

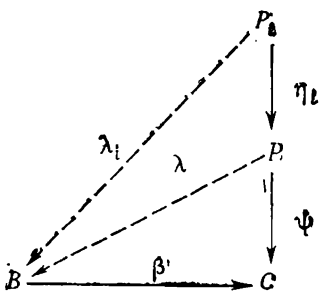
(b) „⇒“: Теперь мы имеем такую ситуацию:



Поскольку P проективен, то существует ω, для которого $\psi\pi_j\sigma = \beta\omega$. Тогда $\lambda := \omega\eta_j$ дает требуемый гомоморфизм. Действительно,

$$\psi = \psi 1_{P_j} = \psi\pi_j\sigma\eta_j = (\psi\pi_j\sigma)\,\eta_j = (\beta\omega)\,\eta_j = \beta\,(\omega\eta_j) = \beta\lambda.$$

(b) „⇐“: В диаграмме



существуют такое λ_i, что $\psi\eta_i = \beta\lambda_i$ (по предположению), и такое λ, что $\lambda_i = \lambda\eta_i$ (так как $P = \coprod P_i$). Остается показать, что $\psi = \beta\lambda$. Из $\psi\eta_i = \beta\lambda_i$ и $\lambda_i = \lambda\eta_i$ следует, что $\psi\eta_i = \beta\lambda\eta_i$. Поэтому по 4.1.6 (единственность) $\psi = \beta\lambda$. □

Отсюда, в частности, вытекает, что каждое прямое слагаемое проективного модуля тоже проективно, а поскольку для конечного множества индексов прямая сумма совпадает с прямым произведением, то и каждое прямое слагаемое инъективного модуля инъективно.

5.4. Проективные модули

Теперь мы можем дать упомянутое выше внутреннее описание проективных модулей.

5.4.1. ***Теорема.*** *Модуль проективен тогда и только тогда, когда он изоморфен прямому слагаемому некоторого свободного модуля.*

Доказательство. По 4.4.6 каждый свободный модуль проективен, а потому, согласно 5.3.4 и 5.3.3, каждый модуль, изоморфный прямому слагаемому свободного модуля, также проективен. Докажем обратное. Пусть P — проективный модуль P и

$$\xi\colon F \twoheadrightarrow P$$

— эпиморфизм некоторого свободного модуля F на P, существующий по 4.4.4. Поскольку P проективен, ξ является расщепляющим:

$$F = \ker(\xi) \oplus F_0,$$

а значит, F_0 изоморфен P. □

Эта теорема, у которой нет дуальной для инъективных модулей, сводит теорию проективных модулей к изучению свойств свободных модулей и их прямых слагаемых.

Как известно, каждый подмодуль свободного $\mathbf{Z}$-модуля снова свободен (см. упр. 10). Отсюда вытекает

Следствие. *Каждый проективный $\mathbf{Z}$-модуль свободен.*

Важным вспомогательным средством для исследования проективных модулей служит так называемая *лемма о дуальном базисе*, которая для проективных модулей в некотором смысле заменяет свойство существования базиса у свободных модулей.

5.4.2. ***Теорема*** (лемма о дуальном базисе). *Следующие свойства эквивалентны:*

(1) *Модуль P_R проективен.*

(2) *Для каждого семейства $(y_i \mid i \in I)$ образующих P над R существует семейство $(\varphi_i \mid i \in I)$, где $\varphi_i \in P^* := \mathrm{Hom}_R(P, R)$, такое что*

(a) $\forall p \in P\,[\varphi_i(p) \neq 0$ *лишь для конечного числа* $i \in I]$,

(b) $\forall p \in P\,[p = \sum_{\substack{i \in I \\ \varphi_i(p) \neq 0}} y_i \varphi_i(p)]$.

(3) *Существуют такие семейства $(y_i \mid i \in I)$, $y_i \in P$, и $(\varphi_i \mid i \in I)$, $\varphi_i \in P^*$, что имеют место* (a) *и* (b).

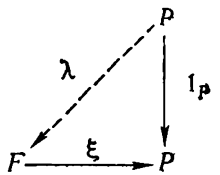
Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Как показано в § 4.4, существуют свободный R-модуль F с базисом $\{x_i \mid i \in I\}$ и эпиморфизм

ξ: $F \to P$, удовлетворяющий условию $\xi(x_i) = y_i$. Пусть

$$\pi_j\colon F \ni \sum x_i r_i \longmapsto r_j \in R,\ j \in I,$$

(где мы полагаем $r_j = 0$, если в $\sum x_i r_i$ член с индексом j отсутствует). Тогда для $a = \sum x_i r_i \in F$ имеем: $\pi_j(a) \neq 0$ лишь для конечного числа $j \in I$ и $a = \sum x_i \pi_i(a)$.

Из проективности P следует существование λ: $P \to F$, для которого $1_P = \xi\lambda$:



Введем обозначение $\varphi_i := \pi_i\lambda$, $i \in I$. Ясно, что $\varphi_i \in P^*$ и для $p \in P$ значение $\varphi_i(p) = \pi_i\lambda(p) \neq 0$ только для конечного числа $i \in I$. Далее, для $p \in P$ имеем

$$p = \xi\lambda(p) = \xi(\sum x_i \pi_i(\lambda(p))) = \sum \xi(x_i)\,\pi_i\lambda(p) = \sum y_i \varphi_i(p).$$

Таким образом, выполнены (a) и (b).

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Очевидно.

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: В силу (b), $(y_i \mid i \in I)$ — семейство образующих для P. Пусть теперь ξ: $F \to P$ — тот же эпиморфизм, что и в доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть, далее, τ: $P \to F$ определено формулой $\tau(p) := \sum x_i \varphi_i(p)$. Прежде всего ясно, что τ — корректно определенное отображение, поскольку $\varphi_i(p)$ однозначно определены и, в силу (a), почти все $\varphi_i(p)$ равны 0. Более того, очевидно, что τ есть R-гомоморфизм. Поэтому

$$\xi\tau(p) = \xi(\sum x_i \varphi_i(p)) = \sum y_i \varphi_i(p) = p;$$

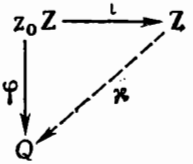
следовательно, $1_P = \xi\tau$, т. е. ξ является расщепляющим, а значит, в силу 5.4.1, P проективен.

5.5. Инъективные модули

Вообще говоря, инъективные модули нельзя описать с помощью внутренних свойств таким простым способом, как проективные модули. Однако для $R = \mathbf{Z}$ такое описание есть, и это имеет большое значение также и для случая произвольного кольца R, ибо эта характеризация используется для доказательства существования инъективных расширений.

5.5.1. ***Теорема.*** *$\mathbf{Z}$-модуль (=абелева группа) инъективен тогда и только тогда, когда он делим.*

Доказательство. Если модуль $D_{\mathbf{Z}}$ делим, то в силу 4.5.5 он инъективен. Обратно, пусть модуль $Q_{\mathbf{Z}}$ инъективен, и пусть $q_0 \in Q$, $0 \neq z_0 \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим гомоморфизмы



где ι — включение, а φ определен формулой $\varphi(z_0) := q_0$. В силу инъективности Q существует κ, для которого $\varphi = \kappa\iota$. Имеем $\kappa(z_0) = \kappa(1 \cdot z_0) = \kappa(1) z_0 = \varphi(z_0) = q_0$. Ввиду произвольности $q_0 \in Q$ получаем $Qz_0 = Q$, т. е. Q — делимая группа. □

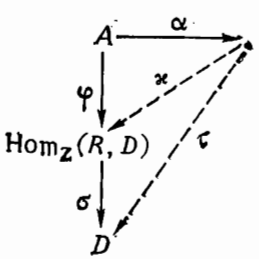
Пусть R — произвольное кольцо. Так как каждый модуль есть эпиморфный образ свободного R-модуля и свободные модули проективны, то каждый модуль есть эпиморфный образ проективного модуля. Обратимся теперь к дуальному вопросу и покажем, что каждый модуль можно мономорфно отобразить в инъективный модуль.

5.5.2. *Предложение.* *Если D — делимый (= инъективный) $\mathbf{Z}$-модуль, то $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)$ инъективен как правый R-модуль.*

Доказательство. Пусть α: $A \to B$ — произвольный R-мономорфизм и φ: $A \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)$ — произвольный R-гомоморфизм. Обозначим через σ следующий гомоморфизм:

$$\sigma\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D) \ni f \longmapsto f(1) \in D,$$

и рассмотрим диаграмму



Если трактовать α и φ как лишь $\mathbf{Z}$-гомоморфизмы, то в силу $\mathbf{Z}$-инъективности D существует $\mathbf{Z}$-гомоморфизм τ: $B \to D$, для которого $\sigma\varphi = \tau\alpha$. Определим теперь κ: $B \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)$ формулой

$$\kappa(b)(r) := \tau(br), \quad b \in B, \quad r \in R.$$

Тогда, очевидно, для фиксированного $b \in B$ имеем $\varkappa(b) \in$ $\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)$ и

$$\varkappa(br_1)(r) = \tau(br_1r) = \varkappa(b)(r_1r) = (\varkappa(b)\, r_1)(r),$$

т. е. $\varkappa(br_1) = \varkappa(b)\, r_1$. Следовательно, $\varkappa$ является R-гомоморфизмом. Для него

$$\varkappa\alpha(a)(r) = \tau(\alpha(a)\, r) = \tau(\alpha(ar)) = \tau\alpha(ar) = \sigma\varphi(ar)$$
$$= \varphi(ar)(1) = (\varphi(a)\, r)(1) = \varphi(a)(r).$$

Таким образом, $\varkappa\alpha = \varphi$. □

5.5.3. ***Теорема.*** *Для каждого модуля существует мономорфизм в инъективный модуль.*

Доказательство. Пусть дан модуль M_R. По 4.5.4 существует $\mathbf{Z}$-мономорфизм

$$\mu\colon M \to D$$

в делимую абелеву группу D. В силу 5.5.2, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)_R$ инъективен как R-модуль. Определим

$$\rho\colon M \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)$$

правилом $\rho(m)(r) := \mu(mr)$, $m \in M$, $r \in R$. Очевидно, ρ является R-гомоморфизмом. Из того что μ — мономорфизм, следует, что и ρ — мономорфизм. □

5.5.4. ***Следствие.*** *Q_R инъективен $\Leftrightarrow$ Q_R изоморфен прямому слагаемому модуля вида $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)_R$, где D — делимая абелева группа.*

Доказательство. „$\Rightarrow$“: Содержится в доказательстве теоремы 5.5.3.

„$\Leftarrow$“: Вытекает из 5.5.2 и 5.3.4.

Следствие 5.5.4 можно рассматривать как „внутреннюю“ характеризацию инъективных модулей.

5.5.5. ***Следствие.*** *Каждый модуль есть подмодуль инъективного модуля.*

Доказательство мы оформим в виде отдельного предложения.

5.5.6. ***Предложение.*** *Пусть $\rho\colon M_R \to N_R$ — мономорфизм. Тогда найдутся такой модуль N', удовлетворяющий условию $M \subseteq N'$, и такой изоморфизм $\tau\colon N' \to N$, что $\rho = \tau\iota$, где ι — включение M в N'.*

Доказательство. Пусть D — произвольное множество, равномощное множеству $N \setminus \rho(M)$ (теоретико-множественному дополнению множества $\rho(M)$ в N), причем $D \cap M = \emptyset$, и

$$\beta\colon D \to N \setminus \rho(M)$$

— некоторая биекция. Рассмотрим множество $N' := M \cup D$, и пусть

$$\tau\colon N' \to N$$

— биективное отображение, определенное следующим образом:

$$\tau(m) := \rho(m), \quad m \in M,$$
$$\tau(d) := \beta(d), \quad d \in D.$$

Чтобы превратить N' в R-модуль, содержащий M_R, а τ — в гомоморфизм R-модулей, положим

$$x + y := \tau^{-1}(\tau(x) + \tau(y)), \quad x, y \in N',$$
$$xr := \tau^{-1}(\tau(x)\, r), \quad r \in R.$$

Как легко видеть, все наши утверждения имеют место. □

Из этого предложения сразу следует 5.5.5, так как модуль N' инъективен как изоморфный инъективному модулю $N = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)_R$.

5.6. Инъективные и проективные оболочки

Итак, с одной стороны, каждый модуль мономорфно отображается в некоторый инъективный модуль. С другой стороны, всякий модуль является эпиморфным образом проективного модуля. Сейчас займемся вопросом, существуют ли „наименьшие" такие модули.

5.6.1. ***Определение.*** *Пусть дан модуль* M_R.
(a) *Мономорфизм* $\eta\colon M \to Q$ *называется инъективной оболочкой модуля* M, *если* Q *— инъективный модуль, а* η *— существенный мономорфизм* (*см.* 5.1.1).
(b) *Эпиморфизм* $\xi\colon P \to M$ *называется проективной оболочкой модуля* M, *если* P *— проективный модуль, а* ξ *— косущественный эпиморфизм* (*см.* 5.1.1).

В случае когда $\eta\colon M \to Q$ — инъективная оболочка, часто, если это не ведет к недоразумениям, сам модуль Q называют инъективной оболочкой модуля M, не указывая явно η. Аналогично поступают и в случае проективной оболочки.

Понимаемая в этом смысле инъективная оболочка для M обозначается через $\mathrm{I}(M)$, а проективная оболочка для M — через $\mathrm{P}(M)$. Заметим, что $\mathrm{I}(M)$ и $\mathrm{P}(M)$ не определяются модулем M однозначно, а лишь с точностью до изоморфизма (см. 5.6.3).

Пример. $\mathbf{Z}_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\iota} \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ — инъективная оболочка для $\mathbf{Z}_{\mathbf{Z}}$, ибо ι — мономорфизм, $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ инъективен (= делим) и, согласно 5.1.6, $\mathbf{Z}_{\mathbf{Z}}$ — существенный подмодуль в $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$.

5.6.2. ***Следствие.*** (a) *Если* $\eta_i\colon M_i \to Q_i$, *где* $i = 1, 2, \ldots, n$, — *инъективные оболочки* M_i, *то*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \eta_i\colon \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$$

— *инъективная оболочка* $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

(b) *Если* $\xi_i\colon P_i \to M_i$, *где* $i = 1, 2, \ldots, n$ — *проективные оболочки* M_i, *то*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \xi_i\colon \bigoplus_{i=1}^{n} P_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

— *проективная оболочка* $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

Доказательство. (a) следует из 5.1.7 и 5.3.4, (b) — из 5.1.3 и 5.3.4. □

Теперь возникают два вопроса, а именно о единственности и существовании оболочек. Мы начнем с вопроса о единственности. Докажем сейчас даже несколько более общий результат.

5.6.3. ***Теорема.*** (a) *Пусть* $\varphi\colon M_1 \to M_2$ — *изоморфизм*, $\eta_1\colon M_1 \to Q_1$ — *инъективная оболочка и* $\eta_2\colon M_2 \to Q_2$ — *мономорфизм, причем* Q_2 *инъективен. Тогда существует такой расщепляющий мономорфизм*

$$\psi\colon Q_1 \to Q_2,$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi} & M_2 \\ {\scriptstyle \eta_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_2} \\ Q_1 & \xrightarrow{\psi} & Q_2 \end{array}$$

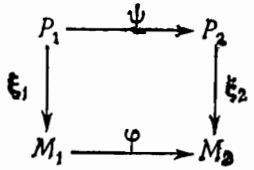
коммутативна и

$$\tilde{\eta}_2\colon M_2 \ni m \longmapsto \eta_2(m) \in \operatorname{im}(\psi)$$

— *инъективная оболочка* M_2. *Сам* η_2 *является инъективной оболочкой модуля* M_2 *тогда и только тогда, когда* ψ — *изоморфизм.* (b) *Пусть* $\varphi\colon M_1 \to M_2$ — *изоморфизм*, $\xi_1\colon P_1 \to M_1$ — *эпиморфизм*, P_1 *проективен и* $\xi_2\colon P_2 \to M_2$ — *проективная оболочка. Тогда существует такой расщепляющий эпиморфизм*

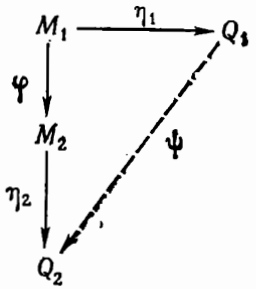
$$\psi\colon P_1 \to P_2,$$

что диаграмма



коммутативна и $\hat{\xi}_1 := \xi_1 | P_0$, *где* $P_1 = \ker(\psi) \oplus P_0$ (*заметим, что* $P_0 \cong P_1/\ker(\psi)$) — *проективная оболочка для* M_1. *Сам* ξ_1 *является проективной оболочкой модуля* M_1 *тогда и только тогда, когда* ψ — *изоморфизм.*

Доказательство. (а) В коммутативной диаграмме



ψ существует, так как Q_2 инъективен. Из того что $\eta_2\varphi = \psi\eta_1$ — мономорфизм, следует, что $\ker(\psi) \cap \operatorname{im}(\eta_1) = 0$. Поскольку $\operatorname{im}(\eta_1)$ существен в Q_1, то $\ker(\psi) = 0$, т. е. ψ — мономорфизм. Учитывая, что Q_1 инъективен, получаем, что ψ является расщепляющим и $\operatorname{im}(\psi)$ инъективен.

Поскольку $\operatorname{im}(\eta_2) \subseteq \operatorname{im}\psi$, $\tilde{\eta}_2$ определено корректно. Вместе с η_2 также и $\tilde{\eta}_2$ представляет собой мономорфизм и $\operatorname{ran}(\tilde{\eta}_2) = \operatorname{im}(\psi)$ инъективен. Осталось показать, что $\operatorname{im}(\tilde{\eta}_2) = \operatorname{im}(\eta_2)$ — существенный подмодуль в $\operatorname{im}(\psi)$. Положим

$$\tilde{\psi}\colon\ Q_1 \ni q \longmapsto \psi(q) \in \operatorname{im}(\psi),$$

ясно, что $\tilde{\psi}$ — изоморфизм и

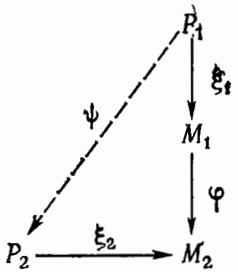
$$\tilde{\psi}\eta_1(M_1) = \tilde{\eta}_2\varphi(M_1) = \tilde{\eta}_2(M_2).$$

Так как $\eta_1(M_1)$ существен в Q_1, отсюда, согласно 5.1.5 (с) (с $\varphi = \tilde{\psi}^{-1}$), вытекает, что $\tilde{\eta}_2(M_2)$ — также существенный подмодуль в $\operatorname{ran}(\tilde{\psi}) = \operatorname{im}(\psi)$.

Если η_2 — инъективная оболочка M_2, то $\operatorname{im}(\eta_2) \subseteq^* Q_2$ и из включения $\operatorname{im}(\eta_2) \subseteq \operatorname{im}(\psi)$ следует, что $\operatorname{im}(\psi) \subseteq^* Q_2$. Поскольку $\operatorname{im}(\psi)$ —

прямое слагаемое в Q_2, это возможно лишь при $\operatorname{im}(\psi) = Q_2$, т. е. ψ — изоморфизм. Обратно, если ψ — изоморфизм, то $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$, т. е. η_2 — инъективная оболочка модуля M_2.

(b) В коммутативной диаграмме



ψ существует, поскольку P_1 проективен. Из того что $\varphi\xi_1 = \xi_2\psi$ — эпиморфизм, следует, что $\operatorname{im}(\psi) + \ker(\xi_2) = P_2$. Так как $\ker(\xi_2)$ косущественен в P_2, то $\operatorname{im}(\psi) = P_2$, т. е. ψ — эпиморфизм. Поскольку P_2 проективен, то ψ является расщепляющим:

$$P_1 = \ker(\psi) \oplus P_0,$$

и $P_0 \cong P_1/\ker(\psi)$ — проективный модуль.

Из включения $\ker(\psi) \subset \ker(\xi_1)$ вытекает, что вместе с ξ_1 также и $\hat{\xi}_1 := \xi_1 | P_0$ является эпиморфизмом. Так как P_0 проективен, остается лишь показать, что $\ker(\hat{\xi}_1) \subsetneq P_0$. Положим

$$\hat{\psi}\colon\ P_0 \ni p \longmapsto \psi(p) \in P_2.$$

Ясно, что $\hat{\psi}$ — изоморфизм, а из равенства $\varphi\hat{\xi}_1 = \xi_2\hat{\psi}$ и того, что φ и $\hat{\psi}$ — изоморфизмы, следует равенство

$$\ker(\hat{\xi}_1) = \hat{\psi}^{-1}(\ker(\xi_2)).$$

Поскольку $\ker(\xi_2)$ — косущественный подмодуль в P_2, то, согласно 5.1.3(c), $\ker(\hat{\xi}_1)$ — косущественный подмодуль в $\hat{\psi}^{-1}(P_2) = P_0$.

Если ξ_1 — проективная оболочка модуля M_1, то $\ker(\xi_1) \subsetneq P_1$. Так как $\ker(\psi) \subset \ker(\xi_1)$, то $\ker(\psi) \subsetneq P_1$. Поскольку, однако, $\ker(\psi)$ — прямое слагаемое в P_1, это возможно лишь при $\ker(\psi) = 0$, т. е. ψ — изоморфизм. Обратно, если ψ — изоморфизм, то $\xi_1 = \hat{\xi}_1$, так что ξ_1 — проективная оболочка модуля M_1. □

Подчеркнем еще раз, что в силу доказанной теоремы инъективная, соотв. проективная, оболочка (если она существует), определена однозначно с точностью до изоморфизма. Например, положив в инъективном случае $M = M_1 = M_2$ и $\varphi = 1_M$, получаем, что η_2 — инъективная оболочка для M тогда и только тогда, когда ψ — изоморфизм.

Перейдем теперь к вопросу о существовании проективных и инъективных оболочек. Мы покажем, что в то время как инъективная оболочка существует для каждого модуля, дуальное предложение не имеет места. Таким образом, существуют модули, не имеющие проективной оболочки. Например, $\mathbf{Z}$-модуль, не являющийся проективным (= свободным), не обладает проективной оболочкой, ибо, как было показано в 5.1.2, единственным косущественным подмодулем свободного $\mathbf{Z}$-модуля служит тривиальный подмодуль 0.

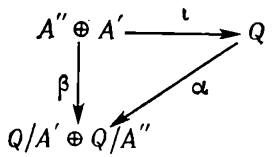
В связи с этим возникает интересный вопрос об описании таких колец R, для которых каждый R-модуль имеет проективную оболочку. Это — совершенные кольца, которыми мы займемся позже.

5.6.4. ***Теорема.*** *Каждый модуль M обладает инъективной оболочкой. Точнее, если $\mu\colon M \to Q$ — мономорфизм в некоторый инъективный модуль Q и $\operatorname{im}(\mu)''$ — второе $\cap$-дополнение[1] к $\operatorname{im}(\mu)$ в Q, удовлетворяющее условию $\operatorname{im}(\mu) \subsetneq \operatorname{im}(\mu)''$, то*

$$\tilde{\mu}\colon M \to \operatorname{im}(\mu)'',$$

где $\tilde{\mu}(m) = \mu(m)$ для всех $m \in M$ (ограничение области значений μ на $\operatorname{im}(\mu)''$), есть инъективная оболочка модуля M.

Доказательство. Положим $A := \operatorname{im}(\mu)$. Как было показано в 5.2.5(c), A — существенный подмодуль в A''. Остается установить, что A'' инъективен. Для этого мы докажем, что A'' — прямое слагаемое в Q; поскольку Q инъективен, отсюда по теореме 5.3.4 будет следовать, что A'' также инъективен. Рассмотрим диаграмму



где ι — включение, а α и β определяются следующим образом (ниже мы записываем элементы из $Q/A' \oplus Q/A''$ как пары): для $a'' + a' \in A'' \oplus A'$

$$\beta(a'' + a') := (a'' + a' + A',\ a'' + a' + A'') = (a'' + A',\ a' + A''),$$

а для $q \in Q$

$$\alpha(q) := (q + A',\ q + A'').$$

Ясно, что диаграмма коммутативна, т. е. $\beta = \alpha\iota$. Отсюда следует, что $\operatorname{im}(\beta) \subseteq \operatorname{im}(\alpha)$. Поскольку $A' \cap A'' = 0$, то α и β — мономор-

[1] То есть $\cap$-дополнение $\cap$-дополнения. — *Прим. ред.*

физмы. Так как Q инъективен и α — мономорфизм, то α является расщепляющим.

Мы утверждаем, что $\operatorname{im}(\beta)$ существен в $Q/A' \oplus Q/A''$. В самом деле, по 5.2.5 имеем $A'' + A'/A' \subset^* Q/A'$ и $A'' + A'/A'' \subset^* Q/A''$, откуда, с учетом 5.1.7, и вытекает сделанное утверждение.

Из включения $\operatorname{im}(\beta) \subset \operatorname{im}(\alpha)$ следует тогда, что $\operatorname{im}(\alpha)$ — существенный подмодуль в $Q/A' \oplus Q/A''$. Так как α является расщепляющим, то $\operatorname{im}(\alpha) = Q/A' \oplus Q/A''$, т. е. α — изоморфизм. Поэтому для произвольного $q \in Q$ существует такое $q_1 \in Q$, что $(q + A',\ 0 + A'') = (q_1 + A',\ q_1 + A'')$, откуда видно, что $q_1 \in A''$, а значит, $q \in A'' + A'$. Таким образом, $A'' \oplus A' = Q$. □

Проследим еще раз всю конструкцию, при помощи которой мы получили инъективную оболочку модуля M_R:

1. Вложение (мономорфизм) M как абелевой группы в делимую абелеву группу D.
2. Вложение μ: $M_R \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)_R$ (модуль $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)_R$ инъективен).
3. Пусть $\operatorname{im}(\mu)''$ — второе $\cap$-дополнение к $\operatorname{im}(\mu)$ в $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)_R$, удовлетворяющее условию $\operatorname{im}(\mu) \subset \operatorname{im}(\mu)''$. Тогда

$$\tilde{\mu}\colon M \ni m \longmapsto \mu(m) \in \operatorname{im}(\mu)''$$

— инъективная оболочка модуля M.

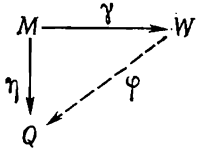
Ясно, что при такой сложной конструкции едва ли можно ожидать, чтобы в общем случае можно было делать заключения о свойствах инъективной оболочки модуля M, непосредственно исходя из свойств самого модуля M. Вопрос о том, какие свойства модуля сохраняются при переходе к инъективной оболочке, а какие теряются, несомненно интересен; он изучался с различных точек зрения и при различных предположениях.

Инъективная оболочка, являющаяся „минимальным инъективным расширением“, может быть также описана как „максимальное существенное расширение“.

5.6.5. ***Определение.*** *Пусть* $\alpha\colon A \to B$ *— мономорфизм.*
(1) α *называется существенным расширением модуля* A, *если* $\operatorname{im}(\alpha) \subset^* B$.
(2) α *называется максимальным существенным расширением модуля* A, *если* α *— существенное расширение* A *и любое существенное расширение модуля* B *является изоморфизмом.*

5.6.6. ***Теорема.*** *Пусть* $\gamma\colon M \to W$ *— мономорфизм. Тогда* γ *является максимальным существенным расширением модуля* M *в том и только том случае, если* γ *— инъективная оболочка модуля* M.

Доказательство. Пусть $\eta\colon M \to Q$ — инъективная оболочка модуля M. Рассмотрим коммутативную диаграмму



где φ существует ввиду инъективности Q. Поскольку $\operatorname{im}(\gamma) \subsetneq^* W$ и $\operatorname{im}(\gamma) \cap \ker(\varphi) = 0$, то $\ker(\varphi) = 0$, т. е. φ — мономорфизм. Из $\operatorname{im}(\eta) \subseteq \operatorname{im}(\varphi)$ и $\operatorname{im}(\eta) \subsetneq^* Q$ следует, что $\operatorname{im}(\varphi) \subsetneq^* Q$. Поэтому, если γ — максимальное существенное расширение, то φ — изоморфизм и, следовательно, γ — инъективная оболочка.

То что, обратно, каждая инъективная оболочка является максимальным существенным расширением, вытекает из того факта, что каждый мономорфизм

$$\alpha\colon Q \to B$$

с инъективным Q — расщепляющий, а прямые слагаемые не могут быть существенными подмодулями содержащего их модуля. □

Скажем еще пару слов о проективной оболочке. Как мы знаем, она существует не всегда. Все же, предполагая существование соответствующих аддитивных дополнений, можно дуализовать теорему 5.6.4. Используемые в доказательстве теоремы 5.6.4 дополнения по пересечению существуют в силу леммы Цорна всегда, аддитивные же дополнения — лишь при надлежащих предположениях. Пока мы не даем точных формулировок. Позже при рассмотрении полусовершенных и совершенных модулей вопрос о существовании проективных оболочек будет исследован подробнее.

5.7. Критерий Бэра

Чтобы установить инъективность модуля Q, надо, согласно определению инъективности, проверить, существует ли для каждого мономорфизма $\alpha\colon A \to B$ и каждого гомоморфизма $\varphi\colon A \to Q$ такой гомоморфизм $\varkappa\colon B \to Q$, что $\varphi = \varkappa\alpha$. Возникает вопрос, нельзя ли сузить класс „тестовых" мономорфизмов $\alpha\colon A \to B$. Это на самом деле возможно, а именно достаточно рассмотреть все включения правых идеалов $U \subseteq R_R$.

5.7.1. ***Теорема*** (критерий Бэра). *Модуль Q_R инъективен тогда и только тогда, когда для каждого правого идеала $U \subseteq R_R$ и каждого гомоморфизма $\rho\colon U \to Q$ существует гомоморфизм $\tau\colon R_R \to Q$, для которого $\rho = \tau\iota$, где ι — включение U в R.*

Доказательство. То что указанное условие необходимо для инъективности модуля, очевидно. Доказательство достаточности проведем в два шага.

Шаг 1. Пусть α: $A \to B$ — мономорфизм и $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, Q)$. Допустим, что $C \subsetneq B$, $\mathrm{im}(\alpha) \subsetneq C$, и пусть γ: $C \to Q$ — гомоморфизм, причем $\varphi(a) = \gamma\alpha(a)$ для всех $a \in A$. Мы утверждаем, что существуют такой подмодуль $C_1 \subsetneq B$, что $C \subsetneq C_1$, и такой гомоморфизм γ_1: $C_1 \to Q$, что $\gamma_1 | C = \gamma$ (а следовательно, также $\varphi(\alpha) = \gamma_1\alpha(a)$).

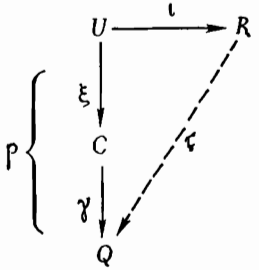
Для доказательства этого утверждения возьмем $b \in B$, $b \notin C$. Положим $C_1 = C + bR$. Если бы $C \cap bR = 0$, то γ можно было бы продолжить на C_1 тривиальным образом. Трудности возникают при $C \cap bR \neq 0$. Пусть

$$U = \{u \mid u \in R \wedge bu \in C\}.$$

Очевидно, что U — правый идеал в R и

$$\xi\colon\ U \ni u \longmapsto bu \in C$$

— R-гомоморфизм. Положим $\rho := \gamma\xi$, ρ: $U \to Q$. По предположению найдется такой гомоморфизм τ: $R \to Q$, что $\rho = \tau\iota$:



Определим теперь γ_1: $C_1 \to Q$ правилом

$$\gamma_1\colon\ C + bR \ni c + br \longmapsto \gamma(c) + \tau(r) \in Q.$$

Проверим, что γ_1 — отображение:

$$c + br = c_1 + br_1,\ c,\ c_1 \in C,\ r,\ r_1 \in R$$
$$\Rightarrow c - c_1 = b(r_1 - r) \in C \cap bR \Rightarrow r - r_1 \in U \Rightarrow \gamma\xi(r - r_1) = \tau(r - r_1)$$
$$\Rightarrow \gamma(c - c_1) = \gamma(b(r_1 - r)) = \gamma\xi(r_1 - r) = \tau(r_1 - r)$$
$$\Rightarrow \gamma(c) + \tau(r) = \gamma(c_1) + \tau(r_1),\ \text{и. т. д.}$$

Поскольку γ и τ суть R-гомоморфизмы, то γ_1 — также R-гомоморфизм, и из определения γ_1 вытекает, что $\gamma_1 | C = \gamma$.

Шаг 2. Пусть $C_0 := \operatorname{im}(\alpha)$ и α_0 — изоморфизм модуля A на C_0, индуцированный α. Положим $\gamma_0 := \varphi\alpha_0^{-1}$. Тогда $\varphi(a) = \gamma_0\alpha(a)$ для всех $a \in A$. Продолжим гомоморфизм γ_0 на B с помощью шага 1 и леммы Цорна. Именно, пусть Γ — множество всех пар (C, γ), где $\operatorname{im}(\alpha) C_0 \subsetneq C \subsetneq B$ и $\gamma\colon C \to Q$, причем $\gamma \mid C_0 = \gamma_0$. Это множество непусто, ибо $(C_0, \gamma_0) \in \Gamma$. Введем в множестве Γ порядок следующим образом:

$$(C_1, \gamma) \leqslant (C_1, \gamma_1) :\Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ\ C \subsetneq C_1, \\ 2^\circ\ \gamma_1 \mid C = \gamma. \end{cases}$$

Пусть теперь Λ — произвольное непустое вполне упорядоченное подмножество в Γ и

$$D := \bigcup_{(C,\ \gamma) \in \Lambda} C.$$

Ясно, что $C_0 \subsetneq D \subsetneq B$. Пусть, далее,

$$\delta\colon D \ni d \longmapsto \gamma(d) \in Q$$

для $d \in C$, где $(C, \gamma) \in \Lambda$. Ввиду условия 2°, δ — гомоморфизм, для которого $\delta \mid C_0 = \gamma_0$. Этим показано, что (D, δ) является верхней гранью для Λ в Γ. Поэтому по лемме Цорна в Γ существует максимальный элемент, и в силу шага 1 он должен быть равен $(B, \varkappa)$, где $\varphi = \varkappa\alpha$. Тем самым доказательство завершено. □

Отметим здесь, что теорема остается верной, если R_R заменить произвольным образующим (см. упр. 21). Однако дуальное утверждение не имеет места.

Важное применение критерия Бэра дано в следующей главе, где будет показано, что кольцо R нётерово тогда и только тогда, когда каждая прямая сумма инъективных R-модулей снова инъективна.

5.8. Дальнейшие характеризации и свойства образующих и кообразующих

В § 3.3 и 4.8 мы ввели образующие и кообразующие и описали некоторые их свойства. Здесь мы продолжаем эти рассмотрения. В частности, мы приводим одну характеризацию кообразующих, которая дает возможность построить их и тем самым доказать их существование. Более того, таким способом можно построить „минимальный“ кообразующий.

5.8.1. ***Теорема.*** (а) *Модуль B_R является образующим тогда и только тогда, когда для каждого проективного модуля P_R существует прямая сумма экземпляров B, содержащая прямое слагаемое, изоморфное P.*

(b) *Модуль C_R является кообразующим тогда и только тогда, когда для каждого инъективного модуля Q_R существует прямое произведение экземпляров C_R, содержащее прямое слагаемое, изоморфное Q.*

Доказательство. (a) Пусть B_R — образующий. Тогда, согласно 4.8.2(4), существует эпиморфизм некоторой прямой суммы экземпляров B на P. Так как по 5.3.1 каждый эпиморфизм на проективный модуль — расщепляющий, то ниже условие выполнено. Обратное утверждение также вытекает из 4.8.2(4), если заметить, что каждое прямое слагаемое модуля является его эпиморфным образом и что, согласно 4.4.4, каждый модуль M является эпиморфным образом проективного (и даже свободного) модуля.

(b) Доказывается дуальным образом, причем вместо 4.4.4 используется 5.5.3. □

5.8.2. *Следствие.* (a) *Пусть P — проективный образующий. Модуль B является образующим тогда и только тогда, когда существует прямая сумма экземпляров B, содержащая прямое слагаемое, изоморфное P.*

(b) *Пусть Q — инъективный кообразующий. Модуль C является кообразующим тогда и только тогда, когда существует прямое произведение экземпляров C, содержащее прямое слагаемое, изоморфное Q.*

Доказательство. (a) Если B — образующий, то указанное условие выполняется в силу 5.8.1. Обратно, пусть выполнено это условие, т. е.

$$\coprod_{i\in I} B_i = P' \oplus L, \quad B_i = B, \quad P' \cong P.$$

Очевидно, этот модуль можно эпиморфно отобразить на P, значит, он является образующим, а тогда по 4.8.2 и B — также образующий.

(b) Доказательство дуально к доказательству (a). □

Проективный модуль P определяется тем условием, что для каждого эпиморфизма β: $B \to C$ также и $\mathrm{Hom}(1_P, \beta)$ — эпиморфизм. Наоборот, образующий мы можем теперь охарактеризовать тем, что для каждого эпиморфизма $\mathrm{Hom}(1_D, \beta)$, также и β — эпиморфизм. Аналогичное описание имеет место и в дуальном случае.

5.8.3. *Теорема.* (a) *Модуль D_R — образующий тогда и только тогда, когда каждый гомоморфизм β: $B \to C$, для которого $\mathrm{Hom}(1_D, \beta)$ — эпиморфизм, сам является эпиморфизмом.*

(b) *Модуль C_R — кообразующий тогда и только тогда, когда каждый гомоморфизм α: $A \to B$, для которого* $\mathrm{Hom}(\alpha, 1_C)$ *— эпиморфизм, является мономорфизмом.*

Доказательство. (a) Если D — образующий, то

$$C = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(D,\ C)} \mathrm{im}(\varphi).$$

Так как $\mathrm{Hom}(1_D, \beta)$ — эпиморфизм, то для каждого $\varphi \in \in \mathrm{Hom}_R(D, C)$ найдется такой гомоморфизм $\varphi' \in \mathrm{Hom}_R(D, B)$, что $\varphi = \beta\varphi'$. Имеем

$$C = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(D,\ C)} \mathrm{im}(\varphi) = \sum_{\varphi' \in \mathrm{Hom}_R(D,\ B)} \mathrm{im}(\beta\varphi') \subseteq \mathrm{im}(\beta) \subseteq C.$$

Таким образом, $\mathrm{im}(\beta) = C$, т. е. β — эпиморфизм.

Докажем обратное. Пусть M_R — произвольный модуль. Положим

$$B := \coprod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(D,\ M)} D_\varphi,$$

где $D_\varphi = D$ для каждого $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(D, M)$, и определим β: $B \to \to M$ по следующему правилу:

$$\beta((d_\varphi)) = \sum_{d_\varphi \neq 0} \varphi(d_\varphi).$$

Очевидно, что для $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_R(D, M)$ справедливо равенство $\varphi_0 = \beta\eta_{\varphi_0}$, где η_{φ_0}: $D \to \coprod D_\varphi$ — канонический мономорфизм. Отсюда следует, что $\mathrm{Hom}_R(1_D, \beta)$ является эпиморфизмом. Поэтому, по предположению, β — эпиморфизм. Следовательно,

$$M = \mathrm{im}(\beta) = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(D,\ M)} \mathrm{im}(\varphi)$$

и, значит, D — образующий.

(b) Так как доказательство проводится дуальным образом, то мы будем кратки. Если C — кообразующий, то выполняются соотношения

$$0 = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,\ C)} \ker(\varphi) = \sum_{\varphi' \in \mathrm{Hom}_R(B,\ C)} \ker(\varphi'\alpha)$$
$$= \bigcap_{\varphi'} \alpha^{-1}(\ker(\varphi')) \supseteq \alpha^{-1}(0) = \ker(\alpha) \supseteq 0,$$

из которых следует, что $\ker(\alpha) = 0$, т. е. α — мономорфизм.

Докажем обратное утверждение. Пусть M_R — произвольный модуль. Положим

$$B := \prod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\ C)} C_\varphi,$$

где $C_\varphi = C$ для каждого $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$, и определим α: $M \to B$ формулой

$$\alpha(m) := (\varphi(m)), \quad m \in M.$$

Тогда для $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$ справедливо равенство $\varphi_0 = \pi_{\varphi_0}\alpha$, где π_{φ_0}: $\prod C_\varphi \to C_{\varphi_0} = C$ — канонический эпиморфизм. Значит, $\mathrm{Hom}(\alpha, 1_C)$ — эпиморфизм, а тогда, по предположению, α — мономорфизм. Следовательно,

$$0 = \ker(\alpha) = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\ C)} \ker(\varphi).$$

Таким образом, C — кообразующий. □

5.8.4. ***Следствие.*** (а) *Если* P_R — *проективный образующий и* β: $B_R \to C_R$ — *гомоморфизм, то*

β — *эпиморфизм* $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}(1_P, \beta)$ — *эпиморфизм.*

(в) *Если* Q_R — *инъективный кообразующий и* α: $A_R \to B_R$ — *гомоморфизм, то*

α — *мономорфизм* $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}(\alpha, 1_Q)$ — *мономорфизм.*

Доказательство. „$\Rightarrow$“: Справедливость этих импликаций следует из того, что P проективен, соотв. Q инъективен.

„$\Leftarrow$“: Это вытекает из 5.8.3. □

Займемся теперь отдельно кообразующими. Пусть E_R — простой модуль и $\mathrm{I}(E_R)$ — его инъективная оболочка, относительно которой мы предполагаем, что $E \subseteq \mathrm{I}(E)$. Пусть C_R — кообразующий. Тогда, поскольку

$$\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{I}(E),\ C)} \ker(\varphi) = 0,$$

должен существовать такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{I}(E), C)$, что $E \not\subseteq \ker(\varphi)$. Так как E прост, то $E \cap \ker(\varphi) = 0$. Поскольку E — существенный подмодуль в $\mathrm{I}(E)$, отсюда вытекает, что $\ker(\varphi) = 0$, т. е. φ — мономорфизм. Очевидно (в силу 5.6.3), что

$$\varphi'\colon\ E \ni x \longmapsto \varphi(x) \in \mathrm{im}(\varphi)$$

— инъективная оболочка модуля E. При этом модуль $\mathrm{im}(\varphi)$ является инъективным подмодулем модуля C, изоморфным $\mathrm{I}(E)$. Более того, как инъективный модуль он будет даже прямым слагаемым модуля C. Тем самым мы показали, что для каждого

простого модуля E кообразующий C содержит некоторую его инъективную оболочку. Существенно, что это свойство является характеристическим для кообразующих.

5.8.5. *Теорема.* (а) *Модуль C_R — кообразующий тогда и только тогда, когда для каждого простого модуля он содержит некоторую его инъективную оболочку.*

(в) *Пусть $\{E_j \mid j \in J\}$ — какая-нибудь система представителей классов изоморфных простых R-модулей и $\mathrm{I}(E_j)$ — инъективные оболочки модулей E_j. Тогда*

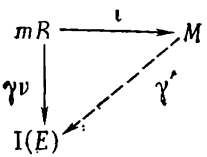
$$C_0 := \coprod_{j \in J} \mathrm{I}(E_j)$$

является кообразующим.
(с) *Модуль C_R — кообразующий тогда и только тогда, когда он содержит подмодуль, изоморфный C_0.*

Доказательство. (а) То что кообразующий содержит для каждого простого модуля E некоторую его инъективную оболочку, мы уже установили выше. Обратно, пусть это условие выполнено для модуля C. Если $0 \neq m \in M$, то модуль mR конечно-порожден и потому, согласно 2.3.12, содержит максимальный подмодуль A. Тогда фактормодуль $E := mR/A$ прост. Пусть

$$\gamma\colon E \to \mathrm{I}(E)$$

— инъективная оболочка E, удовлетворяющая условию $\mathrm{I}(E) \subset C$; она существует по предположению. Так как γ — мономорфизм, то $\gamma(m + A) \neq 0$. Если $\nu\colon mR \to mR/A$ — естественный эпиморфизм, то $\gamma\nu(m) = \gamma(m + A) \neq 0$. Так как $\mathrm{I}(E)$ — инъективный модуль, то найдется $\gamma'\colon M \to \mathrm{I}(E)$, для которого диаграмма



коммутативна. Следовательно, $\gamma'(m) \neq 0$. Определим φ правилом

$$\varphi\colon M \ni x \longmapsto \gamma'(x) \in C.$$

Ясно, что $\varphi(m) \neq 0$, т. е. $m \notin \ker(\varphi)$. Итак,

$$\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,\, C)} \ker(\varphi) = 0,$$

т. е., действительно, C — кообразующий.

(в) Принимая во внимание 5.6.3, выводим из (а), что $C_0 = \coprod_{j\in J} \mathrm{I}(E_j)$ — кообразующий.

(с) Из (а) следует, что если найдется такой подмодуль $C_1 \subsetneq C$, что $C_1 \cong C_0$, то C — кообразующий. Обратно, пусть C — кообразующий. Тогда, согласно (а), для каждого E_j существует инъективная оболочка $Q_j \subsetneq C$, которая в силу 5.6.3 изоморфна $\mathrm{I}(E_j)$. Положим γ_j: $\mathrm{I}(E_j) \cong Q_j$. Мы утверждаем, что

$$\sum_{j\in J} Q_j = \bigoplus_{j\in J} Q_j,$$

причем сумма берется в C. Пусть $E'_j := \gamma_j(E_j)$. Ясно, что E'_j изоморфен E_j и $E'_j \subsetneq^* Q_j$. Чтобы доказать сделанное утверждение, достаточно, в силу 5.1.7, показать, что

$$\sum_{j\in J} E'_j = \bigoplus_{j\in J} E'_j.$$

Допустим противное, т. е. что сумма слева не является прямой. Тогда найдется конечная подсумма $\neq 0$, которая тоже не является прямой. Среди всех конечных подсумм $\neq 0$, не являющихся прямыми, выберем (изменив, если надо, нумерацию) подсумму $E'_1 + \ldots + E'_n$ с наименьшим n. Тогда имеем

$$E'_2 + \ldots + E'_n = E'_2 \oplus \ldots \oplus E'_n,$$

а также $E'_1 \cap (E'_2 \oplus \ldots \oplus E'_n) \neq 0$. Из простоты E'_1 следует, что

$$E'_1 \subsetneq E'_2 \oplus \ldots \oplus E'_n.$$

Пусть π_i — проекция $E'_2 \oplus \ldots \oplus E'_n$ на E'_i, $i = 2, \ldots, n$. Найдется такое $i_0 \in \{2, \ldots, n\}$, что $\pi_{i_0}(E'_1) \neq 0$. Поскольку E'_1 и E'_{i_0} просты, то $E'_1 \cong \pi_{i_0}(E'_1) = E'_{i_0}$. Таким образом, $E_1 \cong E'_1 \cong E'_{i_0} \cong E_{i_0}$, в противоречие с предположением о системе $\{E_j \mid j \in J\}$. Этим показано, что на самом деле

$$\sum_{j\in J} Q_j = \bigoplus_{j\in J} Q_j$$

и потому изоморфизмы γ_j: $\mathrm{I}(E_j) \cong Q_j$ можно объединить в изоморфизм

$$\gamma\colon \coprod_{j\in J} \mathrm{I}(E_j) \to \bigoplus_{j\in J} Q_j$$

(см. 4.3.1), для которого $\gamma((a_j)) = \Sigma'\gamma_j(a_j)$, где $(a_j) \in \coprod(E_j)$, $\Sigma'\gamma_j(a_j) \in \bigoplus Q_j$. □

Утверждение (b) этой теоремы доставляет нам „минимальный“ кообразующий C_0 (см. в связи с этим упр. 28), который для

конечного J инъективен. Для произвольного J он инъективен, если R_R нётеров (см. 6.5.1).

Чтобы получить инъективный кообразующий в общем случае, надо взять произвольный инъективный модуль, содержащий $\coprod_{j\in J} E_j$, например $1\left(\coprod_{j\in J} E_j\right)$.

К инъективным кообразующим мы еще вернемся позже, причем предыдущая теорема будет существенно использоваться.

5.8.6. ***Пример.*** В случае $R=\mathbf{Z}$ модуль $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ является инъективным кообразующим. Действительно, прежде всего, так как он делим, то он инъективен. Далее, для произвольного кольца R каждый циклический R-модуль $M=mR$ изоморфен модулю R/A, где $A_R \subset R_R$ ($A=\ker(\alpha)$ для α: $R \ni r \longmapsto mr \in M$). Следовательно, каждый циклический, а поэтому, в частности, каждый простой $\mathbf{Z}$-модуль изоморфен некоторому модулю вида $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (где $n \in \mathbf{Z}$). Поскольку, очевидно, для $n \neq 0$ отображение

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \ni \bar{z} \longmapsto \frac{z}{n} + \mathbf{Z} \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

является мономорфизмом, то $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ содержит изоморфный экземпляр каждого простого $\mathbf{Z}$-модуля и, значит, является кообразующим.

Упражнения

1. Пусть $A \subset B \subset M$. Показать, что
a) $B \subsetneq M \Longleftrightarrow B/A \subsetneq M/A \wedge A \subsetneq M$.
b) $A \subsetneq M \Longleftrightarrow A \subsetneq B \wedge B \subsetneq M$.
c) Пусть $A^* -$ а. д. A в M. Показать, что для $T \subset M$

$$T \subsetneq M \Longrightarrow T \cap A^* \subsetneq A^*.$$

d) Пусть $A' -$ д. п. A в M. Показать, что для $T \subset M$

$$T \subsetneq M \Longrightarrow (T+A')/A' \subsetneq M/A'.$$

2. Пусть A и $B -$ подмодули в M.
a) Показать, что $A+B=M \wedge A \cap B \subsetneq B \Longrightarrow B -$ а. д. A в M.
b) Показать, что $A \cap B=0 \wedge (A+B)/B \subsetneq M/B \Longrightarrow B -$ д. п. A в M.

3. Доказать, что для $A \subset M$ следующие условия эквивалентны:
a) $A \subsetneq M$.
b) Для любой системы образующих $(x_i \mid i \in I)$ модуля M и любого семейства $(a_i \mid i \in I)$, где $a_i \in A$, множество $(x_i - a_i \mid i \in I) -$ также система образующих для M.
c) Существует такая система образующих $(x_i \mid i \in I)$ модуля M, что для каждого семейства $(a_i \mid i \in I)$, где $a_i \in A$, множество $(x_i - a_i \mid i \in I)$ также является системой образующих для M. (Отметим частный случай $M_R = R_R$, для которого системой образующих служит 1.)
d) При выбрасывании из любой системы образующих модуля M всех элементов из A оставшееся множество снова будет системой образующих для M.

4. Для $m \in M_R$ положим

$$r_R(m) = \{r \mid r \in R \wedge mr = 0\}.$$

Доказать что множество

$$\operatorname{sing}(M) := \{m \mid m \in M \wedge r_R(m) \subsetneq R_R\}$$

образует подмодуль модуля M_R ($\operatorname{sing}(M)$ называется *сингулярным подмодулем* модуля M.)

5. Доказать следующие утверждения:
a) Пусть R — коммутативное кольцо, $A \subset R_R$ и A^* — а. д. A в R. Тогда найдется такой подмодуль $B \subset A$, что $A^* \oplus B = R$.
b) Если R — область целостности и $A \subsetneq R_R$ имеет а. д. в R, то A косущественен в R.

6. Подмодуль $X \subset M_R$ называется *замкнутым* в M, если из $X \subsetneq U \subset M$ всегда следует $X = U$. Показать, что
a) Для X следующие условия эквивалентны:
i) X замкнут в M.
ii) X является $\cap$-дополнением некоторого подмодуля в M, т. е. найдется такой подмодуль $A \subset M$, что $X = A'$.
iii) Из $X \subset V \subsetneq M$ всегда следует $Y/X \subsetneq M/X$ т. е. естественное отображение $\nu\colon M \to M/X$ сохраняет существенные подмодули.

b) Пусть, кроме того, $M \subsetneq Q_R$, причем Q_R инъективен (и, следовательно, является инъективной оболочкой модуля M). Тогда X замкнут, если и только если найдется такое прямое слагаемое $Y \subset Q$, что $Y \cap M = X$.

c) В модуле M_R каждый подмодуль выделяется прямым слагаемым ($= M_R$ полупрост) тогда и только тогда, когда каждый подмодуль замкнут.

d) Привести пример, показывающий, что замкнутый подмодуль не обязательно является прямым слагаемым. (*Указание.* Рассмотрите, скажем, модуль $M_{\mathbf{Z}} := (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.)

e) Если R — область целостности, то в каждом R-модуле *R-подмодуль кручения*

$$T(M) := \{m \mid m \in M \wedge mr = 0,\ r \in R,\ r \neq 0\}$$

замкнут.

7. Охарактеризовать замкнутые подгруппы для случая $R = \mathbf{Z}$, т. е. в категории абелевых групп. Показать, что для $X \subset M_{\mathbf{Z}}$ справедливы следующие утверждения:
a) Если X — дополнение по пересечению для A в M, и $m \in M$, $m \notin X$, $mp \in X$ для некоторого простого числа p, то существует такое $x \in X$, что $mp = xp$. (*Указание.* Покажите, что $(m\mathbf{Z} + X)/X$ прост, а $(X + A)/X$ существен в M/X, так что $m \in X + A$.)
b) Если $X \subsetneq U \subset M$, то существует такое $u \in U$ и такое простое число p, что $u \notin X$, $up \in X$. (*Указание.* Покажите, что U/X содержит простую подгруппу.)
c) Подгруппа X замкнута в M тогда и только тогда, когда для любого простого числа p

$$Xp = X \cap Mp.$$

d) Подгруппа X замкнута в M тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{soc}(M/X) = (\operatorname{soc}(M) + X)/X.$$

Здесь $\operatorname{soc}(M)$ — *сумма всех простых подгрупп* группы M.

8. Пусть $0 \neq e \neq 1$ — некоторый идемпотент ($e^2 = e$) из центра кольца R. Показать, что правый R-модуль eR проективен, но не свободен.

9. Пусть β_1: $P_1 \to M$, β_2: $P_2 \to M$ — эпиморфизмы, причем P_1, P_2 проективны. Показать, что

$$P_1 \oplus \ker(\beta_2) \cong B_2 \oplus \ker(\beta_1).$$

10. Пусть $U \subset F$, где F — свободный правый R-модуль с базисом $(e_i \mid i \in I)$. Допустим, что множество I вполне упорядочено (относительно $\leqslant$), и положим для каждого $j \in I$

$$F_j = \bigoplus_{i<j} e_i R,\quad F_j = \bigoplus_{i\leqslant j} e_i R,\quad U_j = U \cap F_j,\quad \bar{U}_j = U \cap F_j,$$

а также $A_j = \pi_j(U_j)$, где π_j обозначает j-ю проекцию F на R. Доказать следующие утверждения:

a) Если правый идеал A_j проективен, то найдется такое $V_j \cong A_j$, что $\bar{U}_j = U_j \oplus V_j$.

b) Если для каждого $i \in I$ найдется такое V_i, что $\bar{U}_i = U_i \oplus V_i$, то

$$U = \bigoplus_{i\in I} V_i.$$

(*Указание.* Для того чтобы установить, что $X = \Sigma V_i$ совпадает с U, покажите что множество $\{i \mid i \in I \wedge U_i \not\subset X\}$ пусто.)

c) Если в R каждый правый идеал проективен, то каждый подмодуль свободного правого R-модуля является прямой суммой правых идеалов (с точностью до изоморфизма).

d) Для кольца главных идеалов без делителей нуля каждый подмодуль свободного модуля тоже свободен.

11. Пусть $(T_i \mid i \in I)$ — некоторое семейство колец. Положим

$$R := \prod_{i\in I} T_i.$$

R становится кольцом, если определить сложение и умножение покомпонентно. Это кольцо называется *произведением* семейства колец $(T_i \mid i \in I)$. Далее, положим

$$A := \coprod_{i\in I} T_i.$$

Очевидно, $A \subset B$. Для $k \in I$ обозначим через e_k тот элемент из A, у которого k-я компонента равна 1, а остальные равны 0. Показать, что

a) A — двусторонний идеал в R, причем $A_R = \bigoplus_{i\in I} e_i R$ и $A_R \subsetneq R_R$;

b) A_R проективен;

c) $\operatorname{Hom}_R((R/A)_R, R_R) = 0$ и $(R/A)_R$ не проективен в случае, когда I бесконечно;

d) для $j \in I$

$$(e_j R)_R \text{ инъективен} \iff (T_j)_{T_j} \text{ инъективен};$$

e) если все $(T_j)_{T_j}$ инъективны и I бесконечно, то модуль A_R есть прямая сумма инъективных R-модулей, но сам не инъективен.

f) R_R инъективен $\iff \forall j \in I\ [(T_j)_{T_j}$ инъективен].

12. Пусть R — область целостности с полем частных $K \neq R$. Показать, что
a) $\mathrm{Hom}_R(K, R) = 0$;
b) K_R не проективен;
c) если проективный модуль P_R содержит конечно-порожденный существенный подмодуль, то он сам конечно-порожден;
d) каждый проективный идеал конечно-порожден (как R-модуль).

(*Указание.* В случае c) воспользуйтесь леммой о дуальном базисе.)

13. Показать, что в категории абелевых групп (т. е. при $R = \mathbf{Z}$) справедливы следующие утверждения:
a) Если P проективен (= свободен) и A, B — два прямых слагаемых в P, то $A \cap B$ — также прямое слагаемое в P.
b) Если Q инъективен (= делим) и A, B — два прямых слагаемых в Q, то и $A + B$ — прямое слагаемое в Q.

14. Показать, что модуль P проективен тогда и только тогда, когда для каждого эпиморфизма $\beta\colon Q \to C$, где Q инъективен, и каждого гомоморфизма $\varphi\colon P \to C$ найдется такой гомоморфизм $\varphi'\colon P \to Q$, что $\varphi = \beta\varphi'$.

15. Всюду ниже предполагается, что $\mathrm{I}(M)$ — инъективная оболочка модуля M, удовлетворяющая условию $M \subsetneq \mathrm{I}(M)$.
a) Доказать, что каждый эпиморфизм φ модуля $\mathrm{I}(M)$, для которого $\varphi(m) = m$ при всех $m \in M$, является автоморфизмом.
b) Доказать эквивалентность двух приводимых ниже условий:
(1) каждый эндоморфизм φ модуля $\mathrm{I}(M)$, такой что $\varphi(m) = m$ для всех $m \in M$, является тождественным;
(2) $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{I}(M)/M, \mathrm{I}(M)) = 0$.

16. Как было сказано в предыдущем упражнении, мы предполагаем, что всегда $M \subsetneq \mathrm{I}(M)$, соотв. $X \subsetneq \mathrm{I}(X)$. Модуль M назовем *X-однозначным*[1], если $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{I}(M)/M, \mathrm{I}(X)) = 0$.

Доказать следующие утверждения:
a) MX-однозначен $\iff$ для каждого гомоморфизма $\varphi\colon M \to X$ существует единственный гомоморфизм $\varphi'\colon \mathrm{I}(M) \to \mathrm{I}(X)$, такой что $\varphi(m) = \varphi'(m)$ при всех $m \in M$.
b) M инъективен $\iff \forall X \in \mathscr{M}_R$ [M X-однозначен].
c) $\forall x \in X\,[\{r \mid r \in R \wedge xr = 0\} \subsetneq R_R \Rightarrow x = 0] \iff \forall M \in \mathscr{M}_R$ [M X-однозначен].
d) M $\prod_{t \in I} X_i$-однозначен $\iff \forall i \in I$ [M X_i-однозначен].
e) $M_1 \oplus M_2$ X-однозначен $\iff$ M_1 и M_2 X-однозначны.
f) $M_1 \oplus M_2$ является $M_1 \oplus M_2$-однозначным $\iff$ M_i является M_j-однозначным для $i, j = 1, 2$.
g) Пусть C — кообразующий и X — произвольный модуль. Инъективные модули — это в точности $C \oplus X$-однозначные модули. В частности, $C \oplus X$ является $C \oplus X$-однозначным $\iff C$ и X инъективны.

17. Доказать, что если Q_1, Q_2 инъективны и $\mu_1\colon Q_1 \to Q_2$, $\mu_2\colon Q_2 \to Q_1$ — мономорфизмы, то $Q_1 \cong Q_2$. (*Указание.* Без ограничения общности можно считать, что $Q_2 \subsetneq Q_1$, а $\mu_1\colon Q_1 \to Q_1$ и рассматривать μ_2 как включение. Если $Q_1 = Q_2 \oplus A$, то пусть $B := A + \mu_1(A) + \mu_1^2(A) + \mu_1^3(A) + \ldots$ и C — инъективная оболочка $B \cap Q_2 = \mu_1(B)$ в Q_2. Используя гомоморфизм $B \ni b \longmapsto \mu_1(b) \in C$, покажите, что $A \oplus C \cong C$.)

---

[1] Основанием для выбора такого названия служит утверждение a) ниже. — *Прим. ред.*

18. Пусть $S := \mathrm{End}\,(M_R)$, причем M рассматривается как S-R-бимодуль ${}_SM_R$. Доказать следующие утверждения:
a) Пусть для данного $x \in M$ модуль xR прост и содержится в некотором инъективном подмодуле модуля M_R. Тогда Sx — простой левый S-модуль.
b) Пусть $x, y \in M$, $xR \cong yR$ и xR содержится в некотором инъективном подмодуле модуля M_R. Тогда Sx изоморфен некоторому подмодулю модуля Sy.
c) Пусть $x, y \in M$ и $xR \cong yR$, причем как xR, так и yR содержатся в инъективных подмодулях модуля M. Тогда $\mathrm{l}\,(Sx) \cong \mathrm{l}\,(Sy)$.

19. Показать, что для области целостности R каждый делимый R-модуль без кручения инъективен. (Напомним определения: M_R *делим*, если $\forall r \in R$, $r \neq 0$, $[Mr = M]$; M_R — модуль *без кручения*, если $\forall m \in M$, $m \neq 0$, $\forall r \in R$, $r \neq 0$ $[mr \neq 0]$.)

20. Пусть R — область целостности и K — ее поле частных. В решетке $L\,(K_R)$ R-подмодулей модуля K_R вводится умножение

$$U \cdot V := \left\{ \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \mid u_i \in U \wedge v_i \in V \wedge n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Это умножение коммутативно, ассоциативно и имеет R в качестве единичного элемента. Доказать следующие утверждения:
a) Для $0 \neq U \subsetneq K_R$ приводимые ниже условия эквивалентны:
(1) существует подмодуль $V \subsetneq K_R$, такой что $U \cdot V = R$;
(2) U_R проективен и конечно-порожден;
(3) U_R проективен.
(*Указание.* Примените лемму о дуальном базисе.)
b) Если $0 \neq U_R \subsetneq R_R$, то три эквивалентных условия из a) эквивалентны, кроме того, условию
(4) для всех делимых M_R отображение

$$\mathrm{Hom}\,(\iota, 1_M)\colon \mathrm{Hom}_R\,(R, M) \to \mathrm{Hom}_R\,(U, M)$$

сюръективно.

(c) Для R следующие два условия эквивалентны:
(1) каждый идеал проективен;
(2) каждый делимый R-модуль инъективен.

Область целостности со свойством (1) из (c) называется *дедекиндовым кольцом*. В частности, каждое кольцо главных идеалов без делителей нули является дедекиндовым кольцом.

21. Модуль M_R назовем X_R-*инъективным*, если для каждого мономорфизма $\alpha\colon A \to X$ отображение

$$\mathrm{Hom}\,(\alpha, 1_M)\colon \mathrm{Hom}_R\,(X, M) \to \mathrm{Hom}_R\,(A, M)$$

сюръективно. Доказать приводимые ниже утверждения:
a) Пусть $\xi_1\colon X_1 \to X$ — мономорфизм и $\xi_2\colon X \to X_2$ — эпиморфизм, причем $\mathrm{im}\,(\xi_1) = \ker\,(\xi_2)$. Если M X-инъективен, то M также X_1- и X_2-инъективен.
b) Пусть M X-инъективен и M_1 — существенный подмодуль в M. Тогда M_1 X-инъективен $\Leftrightarrow \mathrm{im}\,(\varphi) \subsetneq M_1$ для каждого $\varphi \in \mathrm{Hom}_R\,(X, M)$.
c) Если M X_i-инъективен для каждого X_i из семейства $(X_i \mid i \in I)$, то M также $\coprod_{i \in I} X_i$-инъективен. (*Указание.* Примените утверждение (b) к инъективной оболочке модуля M.)

d) Если M X-инъективен и X — образующий, то M инъективен (обобщение теоремы 5.7.1).

22. Модуль M_R назовем Y_R-*проективным*, если для каждого эпиморфизма $(\beta\colon Y \to B$ отображение

$$\mathrm{Hom}\,(1_M,\ \beta)\colon \mathrm{Hom}_R\,(M,\ Y) \to \mathrm{Hom}_R\,(M,\ B)$$

сюръективно. Покажите, что

a) в случае $R = \mathbf{Z}$ модуль $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ является $\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$-проективным, но не $\mathbf{Z}^\mathbf{N}$-проективен $\left(\mathbf{Z}^\mathbf{N} := \prod_{n \in \mathbf{N}} Z_n,\ \text{где } Z_n = \mathbf{Z} \text{ для всех } n \in \mathbf{N}\right)$.

b) Если каждый простой правый R-модуль X-проективен, то X полупрост (= сумме всех своих полупростых подмодулей).

23. Доказать, что

a) если R — дедекиндово кольцо (см. упр. 20) с полем частных $K \neq R$, то K/R — инъективный кообразующий для $\mathcal{M}_R$.

b) если R — кольцо главных идеалов без делителей нуля, имеющее ровно один максимальный идеал $pR \neq 0$, то K/R-проективные модули (см. упр. 22) — это в точности R-модули без кручения. (*Указание.* Воспользуйтесь следующими двумя фактами относительно кольца R:

(1) Если R-модуль M не является модулем без кручения, то он имеет прямое слагаемое, изоморфное K/R или $R/(p^n)$ для некоторого $n \geqq 1$.

62) R-модули $A_n := R/(p^n)$ обладают таким свойством: $A_n \subsetneq B \wedge B/A_n$ — модуль без кручения $\Longrightarrow A_n$ — прямое слагаемое в B.)

24. Пусть $S := \mathrm{End}\,(C_R)$. Рассмотрим C как S-R-бимодуль ${}_SC_R$. Для $U \subsetneq C$ положим

$$\mathrm{l}_S(U) := \{s \mid s \in S \wedge s(U) = 0\},$$

а для $T \subset S$

$$\mathrm{r}_C(T) := \{c \mid c \in C \wedge t(c) = 0 \text{ при всех } t \in T\}.$$

Ясно, что $\mathrm{l}_S(U)$ — левый идеал в S, а $\mathrm{r}_C(T)$ — подмодуль в C_R. Аналогично определяются и все дальнейшие аннуляторы.

Показать, что для кообразующего C_R справедливы следующие утверждения:

a) $B \subsetneq C_R \Longrightarrow \mathrm{r}_C\mathrm{l}_S(B) = B$.

b) $A \subsetneq R_R \Longrightarrow \mathrm{r}_R\mathrm{l}_C(A) = A$.

c) ${}_SS$ — кообразующий $\Longrightarrow C_R$ инъективен. (*Указание.* Пусть $\eta\colon C \to \mathrm{I}(C)$ — инъективная оболочка; используя левый идеал $L \subsetneq {}_SS$:

$$L := \{\lambda\eta \mid \lambda \in \mathrm{Hom}_R\,(I(C),\ C)\},$$

покажите, что η является расщепляющим.)

d) Если модуль R является двусторонним кообразующим, то он инъективен с обеих сторон.

25. Пусть Q_R инъективен, $S := \mathrm{End}\,(Q_R)$ и $U \subsetneq Q$, $V \subsetneq Q$. Доказать, что

a) $\mathrm{l}_S(U \cap V) = \mathrm{l}_S(U) + \mathrm{l}_S(V)$;

b) $\mathrm{l}_S\mathrm{r}_Q(I) = I$ для всех конечно-порожденных левых идеалов $I \subsetneq {}_SS$.

26. Пусть $S = \mathrm{End}\,(M_R)$. Для $U \subsetneq M$ определим в S правый идеал

$$\lambda_S(U) := \{s \mid s \in S \wedge \mathrm{im}\,(S) \subsetneq U\};$$

для $T \subset S$ определим в M R-подмодуль

$$\rho_M(T) := \sum_{s \in T} \operatorname{im}(s).$$

Показать, что
a) M_R — образующий $\Rightarrow \rho_M \lambda_S(U) = U$ для всех $U \subseteq M_R$.
b) M_R проективен $\Rightarrow \lambda_S(U+V) = \lambda_S(U) + \lambda_S(V)$ для всех $U, V \subseteq M_R$.
c) M_R проективен $\Rightarrow \lambda_S \rho_M(I) = I$ для всех конечно-порожденных $I \subseteq S_S$.

27. Пусть $R = K[x, y]$ — кольцо многочленов от переменных x и y над полем K. Для фиксированного $n \in \mathbf{N}$ обозначим через A идеал кольца K, порожденный элементами

$$\{x^i y^{n+1-i} \mid 0 \leqslant i \leqslant n+1\}.$$

и положим $S := R/A$. Доказать следующие утверждения:
a) S_S не инъективен.
b) R-модуль

$$M := \left(\sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-i} R \right) \Big/ (x^{n+1} R + y^{n+1} R)$$

является также и S-модулем (т. е. $MA = 0$) и содержит ровно один простой подмодуль E_S.
c) Включение $E_S \subseteq M_S$ является максимальным существенным расширением.
d) M_S — инъективный кообразующий.

28. Допустим, что кообразующий C_0, введенный в 5.8.5(b), инъективен, и пусть D — также кообразующий для $\mathcal{M}_R$, обладающий тем свойством, что в каждом кообразующем для $\mathcal{M}_R$ содержится изоморфный ему подмодуль. Показать, что $C_0 \cong D$.

6. Артиновы и нётеровы модули

Исторически одним из исходных пунктов развития теории *некоммутативных* колец и модулей над такими кольцами была теория алгебр над полем K. Как сами такие алгебры, так и их идеалы и модули над ними являются одновременно векторными пространствами над K. Следовательно, можно привлечь теорию векторных пространств, что и было сделано в полном объеме на начальном этапе развития теории. Если используются условия конечности, то ясно, что нужно требовать конечной размерности лежащих в основе векторных пространств над K.

Последующее развитие было нацелено на максимальное возможное освобождение от предположения, что мы имеем дело с алгеброй. При рассмотрении колец (не являющихся алгебрами) в нашем распоряжении уже нет теории линейных пространств и потому, в частности, возникает вопрос о подходящей замене условий конечности для алгебр, которые более не применимы.

Соответствующие понятия и точки зрения здесь разработала в первую очередь Эмми Нётер, заложив тем самым основы для дальнейшего развития. В качестве условий конечности она ввела условия максимальности и минимальности, которые могут быть сформулированы эквивалентным образом как условия для цепей. И в других разделах алгебры они оказались столь же важными и естественными. Мы сформулируем эти условия уже сейчас, чтобы в последующих рассуждениях можно было ими пользоваться. Однако наше исследование артиновых и нётеровых модулей никоим образом не заканчивается в этой главе. Позже мы неоднократно будем возвращаться к ним, когда в нашем распоряжении появятся другие понятия и средства изучения.

Чтобы не возникало недоразумений, сразу подчеркнем, что в дальнейшем речь идет о конечных или счетных цепях (рядах) подмодулей и в качестве отношения порядка рассматривается включение.

6.1. Определения и некоторые характеризации

6.1.1. *Определение.* (1) *Модуль* $M = M_R$ *называется нётеровым, соотв. артиновым, если каждое непустое множество его подмодулей имеет максимальный, соотв. минимальный (по включению), элемент.*

(2) *Кольцо R называется нётеровым справа, соотв. артиновым справа, если модуль R_R нётеров, соотв. артинов.*
(3) *Говорят, что цепь подмодулей модуля M*

$$\ldots \subsetneq A_{i-1} \subsetneq A_i \subsetneq A_{i+1} \subsetneq \ldots$$

(конечная или бесконечная) стабилизируется (или обрывается), если она содержит лишь конечное число различных A_i.

Замечания. (a) Очевидно, указанные свойства сохраняются при изоморфизме.
(b) Нётеровы, соотв. артиновы, модули называют также модулями *с условием максимальности*, соотв. *с условием минимальности.*

6.1.2. ***Теорема.*** *Пусть $M = M_R$ и $A \subsetneq M$.*

(I) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *M артинов.*
(2) *A и M/A артиновы.*
(3) *Каждая убывающая цепь $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq A_3 \supsetneq \ldots$ подмодулей модуля M стабилизируется.*
(4) *Каждый фактормодуль модуля M конечно-копорожден.*
(5) *В каждом множестве $\{A_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$ подмодулей модуля M существует конечное подмножество $\{A_i \mid i \in I_0\}$ (т. е. $I_0 \subset I$ конечно), такое что*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I_0} A_i.$$

(II) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *M нётеров.*
(2) *A и M/A нётеровы.*
(3) *Каждая возрастающая цепь $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \ldots$ подмодулей модуля M стабилизируется.*
(4) *Каждый подмодуль модуля M конечно-порожден.*
(5) *В каждом множестве $\{A_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$ подмодулей модуля M существует конечное подмножество $\{A_i \mid i \in I_0\}$ (т. е. $I_0 \subset I$ конечно), такое что*

$$\sum_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I_0} A_i.$$

(III) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *M артинов и нётеров,*
(2) *M — модуль конечной длины (см. 3.5.1).*

Доказательство. (I) „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Поскольку каждое непустое множество подмодулей в A является непустым множеством подмодулей в M, то в этом множестве существует минимальный элемент. Следовательно, A — артинов модуль.

Пусть $\nu\colon M \to M/A$ и $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ — непустое множество подмодулей в M/A. Мы утверждаем, что если $\nu^{-1}(\Omega_{i_0})$ минимален в $\{\nu^{-1}(\Omega_i) \mid i \in I\}$, то Ω_{i_0} минимален в $\{\Omega_i \mid i \in I\}$. Действительно, $\Omega_i \subsetneq \Omega_{i_0} \Rightarrow \nu^{-1}(\Omega_i) \subsetneq \nu^{-1}(\Omega_{i_0}) \Rightarrow$ (в силу минимальности Ω_{i_0}) $\nu^{-1}(\Omega_i) = \nu^{-1}(\Omega_{i_0}) \Rightarrow \Omega_i = \nu\nu^{-1}(\Omega_i) = \nu\nu^{-1}(\Omega_{i_0}) = \Omega_{i_0}$. Следовательно, M/A артинов. Это следует также непосредственно из 3.1.13.

(I) „(2) $\Rightarrow$ (3)“: Пусть $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq A_3 \supsetneq \ldots$ — убывающая цепь подмодулей $A_i \subsetneq M$ и пусть снова $\nu\colon M \to M/A$. Положим

$$\Gamma := \{A_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}, \quad \nu(\Gamma) := \{\nu(A_i) \mid i = 1, 2, 3, \ldots\},$$
$$\Gamma_A := \{A_i \cap A \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Так как Γ непусто, то $\nu(\Gamma)$ и Γ_A непусты. Поэтому по предположению в $\nu(\Gamma)$ существует минимальный элемент, скажем $\nu(A_l)$, и в Γ_A тоже существует минимальный элемент, скажем $A_m \cap A$. Пусть $n := \max(l, m)$. Тогда

$$\nu(A_n) = \nu(A_{n+i}), \quad A_n \cap A = A_{n+i} \cap A, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Мы утверждаем, что $A_n = A_{n+i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, так что данная цепь действительно стабилизируется. Имеем

$$\nu(A_n) = \nu(A_{n+i}) \Rightarrow A_n + A = \nu^{-1}\nu(A_n) = \nu^{-1}\nu(A_{n+i}) = A_{n+i} + A,$$

т. е. $A_n + A = A_{n+i} + A$. Далее, $A_n \cap A = A_{n+i} \cap A$, а также, по предположению, $A_n \supsetneq A_{n+i}$. В силу закона модулярности

$$A_n = (A_n + A) \cap A_n = (A_{n+i} + A) \cap A_n = A_{n+i} + (A \cap A_n) =$$
$$= A_{n+i} + (A \cap A_{n+i}) = A_{n+i}.$$

(I) „(3) $\Rightarrow$ (1)“: Проведем доказательство от противного. Пусть непустое множество подмодулей Λ не содержит минимального элемента. Тогда для каждого $U \in \Lambda$ найдется такой $U' \in \Lambda$, что $U' \subsetneq U$. Зафиксируем для каждого U такой U' (аксиома выбора). Для произвольного $U_0 \in \Lambda$ цепь

$$U_0 \underset{\neq}{\supsetneq} U_0' \underset{\neq}{\supsetneq} U_0'' \underset{\neq}{\supsetneq} \ldots$$

будет бесконечной строго убывающей цепью, в противоречие с условием (3).

(I) „(4) $\Leftrightarrow$ (5)“: Это непосредственно следует из 3.1.11 (если в (5) записать $U := \bigcap_{i \in I} A_i$).

(I) „(1) $\Rightarrow$ (5)“: Согласно (1), в множестве всех возможных конечных пересечений подмодулей A_i, $i \in I$, существует минимальный элемент. Пусть это будет $D := \bigcap_{i \in I_0} A_i$. В силу мини-

мальности D для каждого $j \in I$ имеем $D \cap A_j = D$ и потому $D \subseteq \bigcap_{j \in I} A_j \Rightarrow D = \bigcap_{j \in I} A_j$.

(I) „(5) $\Rightarrow$ (3)“: Пусть дана цепь $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq A_3 \supsetneq \ldots$. Согласно (5), найдется n, для которого

$$\bigcap_{i=1,\,2,\,3,\,\ldots} A_i = \bigcap_{i=1,\,\ldots,\,n} A_i.$$

Следовательно, $A_n = A_i$ для $i \geqslant n$.

(II) Доказательство дуально к артинову случаю, за исключением эквивалентности (4) $\leftrightarrow$ (5). Эта эквивалентность была доказана в 2.3.13 (в (5) вместо $\sum_{i \in I} A_i$ надо подставить M).

(III) „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Так как M нётеров, то согласно (II) каждый его подмодуль нётеров. Следовательно, в каждом ненулевом подмодуле $A \subseteq M$ (в частности, в самом M) существует максимальный подмодуль A'. Пусть для каждого модуля A выбран фиксированный максимальный подмодуль A'. Рассмотрим цепь

$$M \underset{\neq}{\supsetneq} M' \underset{\neq}{\supsetneq} M'' \supsetneq M''' \underset{\neq}{\supsetneq} \ldots.$$

Поскольку M артинов, то эта цепь обрывается и, значит, представляет собой композиционный ряд, т. е. M имеет конечную длину.

(III) „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Пусть $\boldsymbol{A} := A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots$ — возрастающая цепь подмодулей модуля M. Допустим, что длина модуля M (= длина некоторого композиционного ряда для M) равна l. Мы утверждаем, что в $\boldsymbol{A}$ имеется самое большее $l+1$ различных A_i. Действительно, предположим противное, т. е. что имеется больше чем $l+1$ таких модулей. Тогда в $\boldsymbol{A}$ существует подцепь вида

$$A_{i_1} \underset{\neq}{\subseteq} A_{i_2} \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \underset{\neq}{\subseteq} A_{i_{l+2}}.$$

Ее можно уплотнить до композиционного ряда для M (см. 3.5.3), и следовательно, M имеет длину $\geqslant l+1$ ↯. Итак, $\boldsymbol{A}$ имеет лишь конечное число различных A_i, т. е. стабилизируется, стало быть, M нётеров. Аналогично устанавливается, что M артинов. □

Условие (I)(3), соотв. (II)(3), в 6.1.2 называется *условием обрыва убывающих*, соотв. *возрастающих, цепей*. Таким образом, теорема 6.1.2 утверждает, что модуль в точности тогда удовлетворяет условию минимальности, соотв. максимальности, когда он удовлетворяет условию обрыва убывающих, соотв. возрастающих, цепей.

Это утверждение остается в силе, если рассматривать не все подмодули, а лишь конечно-порожденные или циклические под-

модули, соотв. прямые слагаемые модуля. Например, модуль удовлетворяет условию минимальности для конечно-порожденных подмодулей (т. е. в каждом непустом множестве конечно-порожденных подмодулей существует минимальный элемент) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию обрыва конечно-порожденных подмодулей. Это означает, что каждая убывающая цепь конечно-порожденных подмодулей стабилизируется. Несложное доказательство этого и других аналогичных утверждений предоставляется читателю в качестве упражнения. Читателю должно быть также ясно, что вместо множества всех конечно-порожденных подмодулей, соотв. всех циклических подмодулей, всех прямых слагаемых может быть взято произвольное множество подмодулей. Впрочем, для нас представляют интерес только эти три указанных случая.

6.1.3. ***Следствие.*** (1) *Если модуль M является конечной суммой нётеровых, соотв. артиновых, подмодулей, то он сам нётеров, соотв. артинов.*
(2) *Если кольцо R нётерово справа, соотв. артиново справа, и модуль $M = M_R$ конечно-порожден, то он нётеров, соотв. артинов.*
(3) *Каждое факторкольцо нётерова справа, соотв. артинова справа, кольца также нётерово справа, соотв. артиново справа.*

Доказательство. (1) Пусть $M = \sum_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \subseteq M$. Проведем доказательство индукцией по числу n слагаемых. Для $n = 1$ утверждение совпадает с условием теоремы. Пусть утверждение доказано для $n - 1$ и

$$M = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

где A_i — нётеровы, соотв. артиновы, для всех i. Тогда модуль

$$L := \sum_{i=1}^{n-1} A_i$$

нётеров, соотв. артинов. По первой теореме об изоморфизме 3.4.3

$$M/A_n = (L + A_n)/A_n \cong L/L \cap A_n.$$

В силу 6.1.2, вместе с L нётеров, соотв. артинов, также и модуль $L/L \cap A_n$, а потому и M/A_n. Так как A_n нётеров, соотв. артинов, то наше утверждение следует из 6.1.2.

(2) Для $x \in M$ рассмотрим отображение

$$\varphi_x\colon R \ni r \longmapsto xr \in M.$$

Очевидно, φ_x — гомоморфизм из R_R в M_R. По теореме о гомоморфизмах

$$R/\ker(\varphi_x) \cong \operatorname{im}(\varphi_x) = xR$$

(изоморфизм правых R-модулей). Отсюда согласно 6.1.2 вытекает, что если модуль R_R артинов, соотв. нётеров, то и модуль xR артинов, соотв. нётеров. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система образующих для M_R. Наше утверждение следует теперь из (1) ввиду равенства

$$M = \sum_{i=1}^{n} x_i R.$$

(3) Если $A \subsetneq_R R_R$, то вместе с R_R будет нётеровым, соотв. артиновым, и модуль $(R/A)_R$. Так как $(R/A)\,A = 0$, то подмодули в $(R/A)_R$ совпадают с правыми идеалами в R/A, откуда и вытекает наше утверждение. □

6.2. Примеры

1. Всякое конечномерное векторное пространство — модуль конечной длины. Докажем это. Пусть V_K — векторное пространство над телом K и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — его базис. Тогда

$$0 \underset{\neq}{\subsetneq} x_1K \underset{\neq}{\subsetneq} x_1K + x_2K \underset{\neq}{\subsetneq} \ldots \underset{\neq}{\subsetneq} x_1K + \ldots + x_nK = V$$

представляет собой композиционный ряд для V, так как в силу изоморфизма

$$(x_1K + \ldots + x_{i+1}K)/(x_1K + \ldots + x_iK) \cong x_{i+1}K \cong K$$

каждый фактор прост.

2. Всякая конечномерная алгебра R над полем K имеет (как K-модуль) конечную длину с обеих сторон, так как каждый ее правый или левый идеал является одновременно подпространством в R, рассматриваемой как векторное пространство над K.

3. Бесконечномерное векторное пространство V_K не является ни артиновым, ни нётеровым. Действительно, пусть $\{x_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ — какое-нибудь множество линейно-независимых элементов. Рассмотрим цепи

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_iK \underset{\neq}{\supsetneq} \sum_{i=2}^{\infty} x_iK \underset{\neq}{\supsetneq} \sum_{i=3}^{\infty} x_iK \underset{\neq}{\supsetneq} \ldots$$

и

$$x_1K \underset{\neq}{\subsetneq} x_1K + x_2K \underset{\neq}{\subsetneq} x_1K + x_2K + x_3K \underset{\neq}{\subsetneq} \ldots.$$

Обе они не обрываются.

4. Модуль $\mathbf{Z}_{\mathbf{Z}}$ нётеров, но не артинов. Действительно, так как в нем каждый идеал главный и, следовательно, конечно-порожденный то он нётеров, а так как цепь

$$\mathbf{Z} \underset{\neq}{\supset} 2\mathbf{Z} \underset{\neq}{\supset} 2^2\mathbf{Z} \underset{\neq}{\supset} \dots$$

не обрывается, то он не артинов.

Замечание. Кольцо $\mathbf{Z}$ нётерово слева и справа, но не артиново. Обратная ситуация для колец (с единицей!) невозможна. В самом деле, как будет позже показано, всякое артиново кольцо нётерово. Поэтому, чтобы привести пример артинова, но не нётерова модуля (см. следующий пример), нет смысла брать кольца.

5. Пусть p — простое кольцо и

$$\mathbf{Q}_p := \left\{ \frac{a}{p^i} \,\middle|\, a \in \mathbf{Z} \wedge i \in \mathbf{N} \right\},$$

т. е. $\mathbf{Q}_p$ — множество всех рациональных чисел, знаменатель которых есть степень p (включая $p^0 = 1$). Ясно, что $\mathbf{Q}_p$ — подгруппа в $\mathbf{Q}$ (рассматриваемом как аддитивная группа) и $\mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q}_p$.

Утверждение. $\mathbf{Z}$-модуль $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$ артинов, но не нётеров.

Доказательство. Пусть $\left(\frac{1}{p^i} + \mathbf{Z}\right)$ — подмодуль $\mathbf{Z}$-модуля $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$, порожденный элементом $\frac{1}{p^i} + \mathbf{Z} \in \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$. Тогда

$$0 \subsetneq \left(\frac{1}{p} + \mathbf{Z}\right) \subsetneq \left(\frac{1}{p^2} + \mathbf{Z}\right) \subsetneq \left(\frac{1}{p^3} + \mathbf{Z}\right) \subsetneq \dots$$

— строго возрастающая цепь, поскольку

$$\frac{1}{p^{i+1}} \notin \left(\frac{1}{p^i} + \mathbf{Z}\right).$$

Следовательно, $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$ не нётеров. Чтобы доказать, что он артинов, мы покажем, что в рассмотренной выше цепи содержатся все его собственные подмодули. Отсюда, разумеется, следует, что в каждом непустом множестве подмодулей существует *наименьший* подмодуль (а не только минимальный!).

Заметим прежде всего, что

$$(*) \qquad (a, p) = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{p^i} + \mathbf{Z}\right) = \left(\frac{1}{p^i} + \mathbf{Z}\right).$$

Действительно, так как $(a, p) = 1$ (т. е. a и p взаимно просты), то найдутся такие $b, c \in \mathbf{Z}$, что $ab + p^i c = 1$, откуда $\frac{ab}{p^i} - \frac{1}{p^i} = -c \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $\frac{ab}{p^i} + \mathbf{Z} = \frac{1}{p^i} + \mathbf{Z}$, а значит $\left(\frac{1}{p^i} + \mathbf{Z}\right) \subsetneq$

$\subsetneq \left\langle \frac{a}{p^i}+\mathbf{Z}\right\rangle$. Так как, с другой стороны, $\left\langle \frac{a}{p^i}+\mathbf{Z}\right\rangle \subsetneq \left\langle \frac{1}{p^i}+\mathbf{Z}\right\rangle$, то наше утверждение доказано. □

Если теперь $B \subsetneq \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$, то возможны два случая.

Случай 1. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует такое $i \in \mathbf{N}$, что $i \geqslant n$ и $\frac{a}{p^i}+\mathbf{Z} \in B$, причем $(a, p)=1$ (т. е. в B существуют элементы сколь угодно высокого порядка). Из (*) вытекает, очевидно, что $B=\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$, поскольку каждый класс $\frac{Z}{p^n}+\mathbf{Z} \in B$.

Случай 2. Существует максимальное $i \in \mathbf{N}$, для которого найдется $\frac{a}{p^i}+\mathbf{Z} \in B$ с $(a, p)=1$ (т. е. в B нет элементов произвольно высокого порядка). Из (*) следует тогда, что

$$\left\langle \frac{a}{p^i}+\mathbf{Z}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{p^i}+\mathbf{Z}\right\rangle = B.$$

6. Пример кольца, которое с одной „стороны" артиново и нётерово и, следовательно, имеет конечную длину, а с другой — ни артиново, ни нётерово.

Пусть R и K — поля, причем R — бесконечное расширение K, например $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$. Пусть S — кольцо всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} k & r_1 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \text{ где } k \in K,\ r_1,\ r_2 \in R.$$

Легко видеть, что S — кольцо с единицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S не является слева ни артиновым, ни нётеровым. Пусть $\{x_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ — какое-нибудь счетное множество элементов из R, линейно-независимых над K. Положим

$$s_i = \begin{pmatrix} 0 & x_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} k & r_1 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} s_i = \begin{pmatrix} 0 & kx_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, для левого идеала, порожденного элементом s_i, мы имеем

$$Ss_i = \begin{pmatrix} 0 & Kx_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$Ss_1 \underset{\neq}{\subsetneq} Ss_1 + Ss_2 \underset{\neq}{\subsetneq} Ss_1 + Ss_2 + Ss_3 \underset{\neq}{\subsetneq} \dots$$

— строго возрастающая цепь левых идеалов, а

$$\sum_{i=1}^{\infty} Ss_i \underset{\neq}{\supsetneq} \sum_{i=2}^{\infty} Ss_i \underset{\neq}{\supsetneq} \sum_{i=3}^{\infty} Ss_i \underset{\neq}{\supsetneq} \dots$$

— строго убывающая цепь левых идеалов.

Чтобы доказать, что S_S — модуль конечной длины, достаточно явно указать композиционный ряд для S_S. При этом полезно иметь перед глазами произведение двух элементов из S:

$$\begin{pmatrix} h & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & r_1 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hk & hr_1 + a_1 r_2 \\ 0 & a_2 r_2 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эти правые идеалы просты (так как R — поле) и $A_1 \cap A_2 = 0$. Отсюда следует, что $(A_1 + A_2)/A_1 \cong A_2$ также прост. Мы утверждаем, что $0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_1 + A_2 \subsetneq S$ — композиционный ряд для S_S. Чтобы убедиться в этом, нужно только показать, что $A_1 + A_2$ максимален в S_S. Пусть

$$\begin{pmatrix} h & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \notin A_1 + A_2.$$

Тогда $h \neq 0$ и для

$$B := A_1 + A_2 + \begin{pmatrix} h & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} S$$

мы имеем

$$\left(\begin{pmatrix} h & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - a_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} h^{-1} & -h^{-1}a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B.$$

Следовательно, $B = S$.

6.3. Теорема Гильберта о базисе

Теорему Гильберта о базисе можно рассматривать как способ построения нётеровых колец. Эта теорема имеет важные применения в алгебраической геометрии.

6.3.1. ***Теорема.*** *Если кольцо R нётерово справа, то кольцо многочленов $R[x]$ (где x коммутирует с элементами из R) также нётерово справа.*

Следствие. *Кольцо $R[x_1, \ldots, x_n]$ нётерово справа.*

Доказательство теоремы. Мы покажем, что каждый правый идеал A в $R[x]$ конечно-порожден. Можно считать, что $A \neq 0$. Доказательство разобьём на 3 шага.

Шаг 1. Если $P(x) = x^n r_n + x^{n-1} r_{n-1} + \ldots + r_0 \in R[x]$, $r_n \neq 0$, то r_n называется старшим коэффициентом многочлена $P(x)$. Примем, что старший коэффициент нулевого многочлена из $R[x]$ равен 0. Обозначим через A_0 множество старших коэффициентов многочленов из A.

Мы утверждаем, что $A_0 \subsetneq R_R$. Действительно, если $a, b \in A_0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то существуют многочлены

$$P_1(x) = x^m a + x^{m-1} a_{m-1} + \ldots \in A,$$
$$P_2(x) = x^n b + x^{n-1} b_{n-1} + \ldots \in A.$$

Пусть, далее, $r_1, r_2 \in R$, причем $ar_1 + br_2 \neq 0$. Тогда $P_1(x) x^n r_1 + P_2(x) x^m r_2 \in A$, а значит $ar_1 + br_2 \in A_0$; следовательно, $A_0 \subsetneq R_R$.

Так как R_R нётеров, то A_0 конечно-порожден. Если $a_1, \ldots, a_k$ — система образующих для A_0, причем все $a_i \neq 0$, то существуют многочлены $P_1(x), \ldots, P_k(x) \in A$, для которых $a_1, \ldots, a_k$ — старшие коэффициенты (в указанной последовательности). Умножением на соответствующую степень x можно добиться того, чтобы все $P_i(x)$ имели одну и ту же степень, скажем n. Предположим, что это сделано. Рассмотрим теперь

$$B := \sum_{i=1}^{k} P_i(x) R[x].$$

Ясно, что B конечно-порожден и $B \subsetneq A$.

Шаг 2. Пусть $F(x) \in A$. Мы утверждаем, что $F(x)$ можно записать в виде

$$F(x) = G(x) + H(x),$$

где $G(x) \in B$ и $H(x) = 0$ или[1] $\deg H(x) \leqslant n$. Действительно, если $F(x) = 0$ или $\deg F(x) \leqslant n$, то это утверждение верно тривиальным образом с $H(x) = F(x)$.

Пусть поэтому $\deg F(x) = t > n$. Старший коэффициент b многочлена $F(x)$ можно представить в виде

$$b = a_1 r_1 + \ldots + a_k r_k, \quad r_i \in R.$$

[1] Ниже $\deg P(x)$ обозначает степень многочлена $P(x)$. — *Прим. ред.*

Ясно, что многочлен

$$F_1(x) := F(x) - \left(\sum_{i=1}^{k} P_i(x) r_i\right) x^{t-n}$$

имеет степень $\leqslant t-1$ или равен 0. Поэтому, полагая

$$G_1(x) := \left(\sum_{i=1}^{k} P_i(x) r_i\right) x^{t-n},$$

имеем

$$F(x) = G_1(x) + F_1(x),$$

где $G_1(x) \in B$. Если всё еще $\deg F_1(x) > n$, то разлагаем аналогично $F_1(x)$:

$$F_1(x) = G_2(x) + F_2(x),$$

где $G_2(x) \in B$ и $F_2(x) = 0$ или $\deg F_2(x) \leqslant t-2$. Тогда

$$F(x) = G_1(x) + G_2(x) + F_2(x),$$

где $G_1(x) + G_2(x) \in B$ и $F_2(x) = 0$ или $\deg F_2(x) \leqslant t-2$. Самое большее через $t-n$ шагов (таким образом, мы применяем индукцию) получится искомое разложение

(*) $F(x) = G(x) + H(x)$.

Поскольку $F(x) \in A$ и $G(x) \in B \subseteq A$, то

$$H(x) = F(x) - G(x) \in A \cap (R + xR + \ldots + x^n R).$$

Шаг 3. Рассмотрим правый R-модуль

$$A \cap (R + xR + \ldots + x^n R).$$

Это R-подмодуль конечно-порожденного правого R-модуля $R + xR + \ldots + x^n R$ над нётеровым справа кольцом R. Согласно 6.1.3 и 6.1.2 он также конечно-порожден. Пусть, скажем,

$$A \cap (R + xR + \ldots + x^n R) = \sum_{j=1}^{l} Q_j(x) R.$$

Мы утверждаем, что

$$A = \sum_{i=1}^{k} P_i(x) R[x] + \sum_{j=1}^{l} Q_j(x) R[x].$$

Действительно, так как $P_i(x)$, $Q_j(x) \in A$, то правая сторона содержится в A, а в силу (*) она содержит A. Этим доказательство завершено. □

6.4. Эндоморфизмы артиновых и нётеровых модулей

Пусть $M = M_R$ — произвольный модуль и φ — эндоморфизм M, т. е. гомоморфизм M в себя. Тогда φ^n, $n \in \mathbf{N}$, — также эндоморфизм M, причем

$$\operatorname{im}(\varphi) \supseteq \operatorname{im}(\varphi^2) \supseteq \operatorname{im}(\varphi^3) \supseteq \ldots,$$
$$\ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi^2) \subseteq \ker(\varphi^3) \subseteq \ldots.$$

Для артинова, соотв. нётерова, модуля первая, соотв. вторая, цепочка должна обрываться. Отсюда получаются интересные следствия.

6.4.1. ***Теорема.*** *Пусть φ — эндоморфизм модуля M.*
(1) *M артинов* $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geqslant n_0 [M = \operatorname{im}(\varphi^n) + \ker(\varphi^n)]$.
(2) *M артинов* $\wedge$ *φ — мономорфизм* $\Rightarrow$ *φ — автоморфизм.*
(3) *M нётеров* $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geqslant n_0 [0 = \operatorname{im}(\varphi^n) \cap \ker(\varphi^n)]$.
(4) *M нётеров и φ — эпиморфизм* $\Rightarrow$ *φ — автоморфизм.*

Доказательство. (1) Согласно сделанному перед теоремой замечанию найдется такое $n_0 \in \mathbf{N}$, что $\operatorname{im}(\varphi^{n_0}) = \operatorname{im}(\varphi^n)$ для $n \geqslant n_0$. Тогда для $n \geqslant n_0$ имеем $\operatorname{im}(\varphi^n) = \operatorname{im}(\varphi^{2n})$. Поэтому $x \in M \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi^n(x) \in \operatorname{im}(\varphi^n) = \operatorname{im}(\varphi^{2n}) \Rightarrow$ существует $y \in M$, для которого $\varphi^n(x) = \varphi^{2n}(y)$, $\Rightarrow \varphi^n(x - \varphi^n(y)) = 0 \Rightarrow k := x - \varphi^n(y) \in \ker(\varphi^n) \Rightarrow$

$$x = \varphi^n(y) + k \in \operatorname{im}(\varphi^n) + \ker(\varphi^n),$$

что и требовалось доказать.

(2) Если φ — мономорфизм, то, очевидно, φ^n — также мономорфизм для всех $n \in \mathbf{N}$, т. е. $\ker(\varphi^n) = 0$. Тогда, в силу (1), $M = \operatorname{im}(\varphi^{n_0})$ и потому $M = \operatorname{im}(\varphi)$, ибо $\operatorname{im}(\varphi^{n_0}) \subseteq \operatorname{im}(\varphi)$. Таким образом, φ — эпиморфизм и, следовательно, автоморфизм.

(3) Из нётеровости вытекает, что $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, такое что $\ker(\varphi^{n_0}) = \ker(\varphi^n)$ при $n \geqslant n_0$. Тогда для $n \geqslant n_0$ имеем $\ker(\varphi^n) = \ker(\varphi^{2n})$. Если $x \in \operatorname{im}(\varphi^n) \cap \ker(\varphi^n)$, то существует такое $y \in M$, для которого $x = \varphi^n(y)$ и

$$0 = \varphi^n(x) = \varphi^{2n}(y).$$

Следовательно, $y \in \ker(\varphi^{2n}) = \ker(\varphi^n)$, откуда вытекает, что $x = \varphi^n(y) = 0$. Значит, $0 = \operatorname{im}(\varphi^n) \cap \ker(\varphi^n)$.

(4) Если φ — эпиморфизм, то φ^n — эпиморфизм для всех $n \in \mathbf{N}$, т. е. $\operatorname{im}(\varphi^n) = M$. Отсюда в силу (3) следует, что $0 = \ker(\varphi^{n_0})$. Учитывая, что $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi^{n_0})$, получаем $\ker(\varphi) = 0$. Таким образом, φ — мономорфизм, а следовательно, и автоморфизм.

6.4.2. ***Следствие.*** *Пусть M — модуль конечной длины и φ — его эндоморфизм. Тогда*

(5) $\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geqslant n_0 [M = \operatorname{im}(\varphi^n) \oplus \ker(\varphi^n)]$.
(6) φ — *автоморфизм* $\Leftrightarrow$ φ — *эпиморфизм* $\Leftrightarrow$ φ — *мономорфизм*.

Доказательство. (5) В качестве n_0 можно взять максимальное из чисел n_0 в (1) и (3).
(6) следует из (2) и (4). □

Это следствие обобщает хорошо известные свойства конечномерных векторных пространств.

6.5. Одна характеризация нётеровых колец

Мы дадим здесь характеризацию нётеровых колец, имеющую основополагающее значение для теории модулей над нётеровыми кольцами. Доказательство существенно опирается на критерий Бэра.

6.5.1. ***Теорема.*** *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(1) *Модуль R_R нётеров.*
(2) *Любая прямая сумма инъективных правых R-модулей инъективна.*
(3) *Любая счетная прямая сумма инъективных оболочек простых правых R-модулей инъективна.*

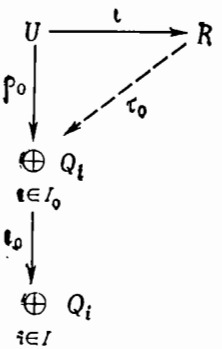
Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Пусть $Q := \bigoplus_{i \in I} Q_i$ — прямая (внутренняя или внешняя) сумма инъективных правых R-модулей Q_i. Согласно критерию Бэра 5.7.1, для доказательства ее инъективности достаточно установить, что для каждого правого идеала $U \subseteq R_R$ и каждого гомоморфизма $\rho\colon U \to Q$ существует такой гомоморфизм $\tau\colon R \to Q$, что $\rho = \tau\iota$, где $\iota\colon U \to R$ — включение. Так как R_R нётеров, то U конечно-порожден:

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i R.$$

Образы $\rho(u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, элементов u_i при гомоморфизме ρ имеют отличные от нуля компоненты лишь в конечном числе модулей Q_i, скажем в модулях Q_i, $i \in I_0$, где I_0 — некоторое конечное подмножество в I. Пусть

$$\iota_0\colon \bigoplus_{i \in I_0} Q_i \to \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

— включение и ρ_0 — гомоморфизм, индуцированный ограничением области значений ρ на $\bigoplus_{i\in I_0} Q_i$. Тогда $\rho = \iota_0\rho_0$. Поскольку I_0 конечно, то сумма $\bigoplus_{i\in I_0} Q_i$ инъективна и существует такой гомоморфизм τ_0, что следующая диаграмма коммутативна:



Следовательно, $\rho = \iota_0\rho_0 = \iota_0\tau_0\iota = \tau\iota$, где $\tau := \iota_0\tau_0$

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: (3) — частный случай (2).

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Проведем доказательство от противного. Пусть R_R не нётеров. Тогда имеется строго возрастающая цепь правых идеалов кольца R

$$A := A_1 \underset{\neq}{\subsetneq} A_2 \underset{\neq}{\subsetneq} A_3 \underset{\neq}{\subsetneq} \ldots.$$

Множество

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

— правый идеал в R, и для каждого $a \in A$ найдется такое $n_a \in \mathbf{N}$, что $a \in A_i$ для всех $i \geqslant n_a$. Для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$ выберем $c_i \in A$, $c_i \notin A_i$. Согласно 2.3.12, в циклическом модуле $(c_iR + A_i)/A_i$ существует максимальный подмодуль N_i/A_i. Ясно, что

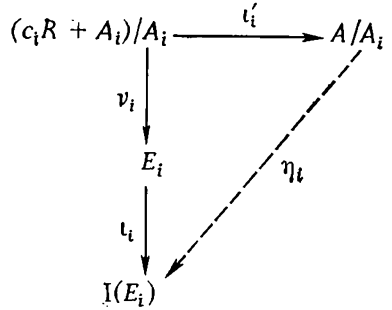
$$E_i := ((c_iR + A_i)/A_i)/(N_i/A_i)$$

— простой правый R-модуль. Обозначим через

$$\nu_i\colon (c_iR + A_i)/A_i \to E_i$$

естественный эпиморфизм. Пусть $\mathrm{I}(E_i)$ — инъективная оболочка модуля E_i, удовлетворяющая условию $E_i \subset \mathrm{I}(E_i)$, и $\iota_i\colon E_i \to$

$\to \mathrm{I}(E_i)$ — включение. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

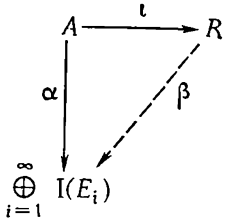


где ι_i' — соответствующее включение, причем $\eta_i(\bar{c}_i) = \iota_i\nu_i(\bar{c}_i) \neq 0$ для $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Теперь введем отображение

$$\alpha\colon A \ni a \longmapsto \sum_{i=1}^{n_a} \eta_i(a + A_i) \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}(E_i);$$

таким образом, $\eta_i(a + A_i)$ есть i-я компонента элемента $\alpha(a)$. Поскольку $a \in A_i$ для $i \geqslant n_a$, то $\alpha(a)$ действительно лежит в указанной прямой сумме (если рассматривать $\bigoplus \mathrm{I}(E_i)$ как внешнюю прямую сумму, то надо положить $\alpha(a) = (\eta_i(a + A_i))$ Так как по предположению сумма $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}(E_i)$ инъективна, то существует такой гомоморфизм β, что диаграмма



коммутативна. Пусть b_i обозначает i-ю компоненту элемента $\beta(1)$ в $\bigoplus \mathrm{I}(E_i)$. Существует такое $n \in \mathbf{N}$, что $b_i = 0$ для $i \geqslant n$. Поскольку $\alpha(a) = \beta(a) = \beta(1)a$, $a \in A$, то $\eta_i(a + A_i) = b_i a$, т. е. $\eta_i(a + A_i) = 0$ для всех $i \geqslant n$ и всех $a \in A$. Но $\eta_n(c_n + A_n) \neq 0$ по определению η_i. Противоречие! Тем самым теорема полностью доказана. □

Замечание. Если в этой теореме интересоваться только эквивалентностью (1) $\Leftrightarrow$ (2), то доказательство можно упростить. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) будет нам нужна позже при доказательстве одной теоремы. Наметим вкратце, как упрощается доказательство

импликации $(2) \Rightarrow (1)$ по сравнению с доказательством импликации $(3) \Rightarrow (1)$. Доказательство проводится на этот раз прямо, причем мы исходим из произвольной цепи

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

правых идеалов. Пусть снова

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

и пусть теперь η_i — включение

$$\eta_i\colon\ A/A_i \ni a + A_i \longmapsto a + A_i \in \mathrm{I}(A/A_i)$$

и

$$\alpha\colon\ A \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}(A/A_i)$$

определяется формулой

$$\alpha(a) := \sum_{i=1}^{n_a} (a + A_i), \quad a \in A.$$

Тогда для $i \geqslant n$ имеем $\eta_i = 0$. Следовательно, $A = A_i$ для $i \geqslant n$.

Если R — произвольное кольцо и $\eta_i\colon M_i \to \mathrm{I}(M_i)$, $i = 1, \dots, n$, — конечное число инъективных оболочек R-модулей, то

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \eta_i\colon \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{I}(M_i)$$

— тоже инъективная оболочка. Если же R_R нётеров, то, согласно 6.5.1 и 5.1.7, этот результат верен для любого множества индексов.

6.5.2. ***Следствие.*** *Пусть R_R нётеров и $(M_i \mid i \in I)$ — некоторое семейство правых R-модулей. Если для каждого $i \in I$*

$$\eta_i\colon\ M_i \to \mathrm{I}(M_i)$$

— инъективная оболочка M_i, то

$$\bigoplus_{i \in I} \eta_i\colon \bigoplus_{i \in I} M_i \to \bigoplus_{i \in I} \mathrm{I}(M_i)$$

— инъективная оболочка $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

6.6. Разложение инъективных модулей над нётеровыми и артиновыми кольцами

Для того чтобы сформулировать проблему, которой мы будем заниматься в этом параграфе, нам нужно предварительно ввести ряд определений.

6.6.1 *Определения.* (a) *Модуль* M_R *называется разложимым, если у него имеются прямые слагаемые, отличные от* 0 *и* M (*и неразложимым — в противном случае*).

(b) *Пусть* $U \subset M_R$. *Модуль* M *называется однородным над* U, *если для любых двух подмодулей* $A, B \subset M$, *таких что* $U \subset A$, $U \subset B$, *выполнено условие* $U \neq A \cap B$.

c) *Модуль* M *называется однородным, если он однороден над* 0.

Один из основных вопросов теории модулей — вопрос о разложении данного модуля в прямую сумму подмодулей. Очевидно, что наиболее полное разложение такого рода достигается, когда все подмодули из разложения сами уже неразложимы. В связи с этим возникают следующие вопросы:

1. При каких условиях модуль разлагается в прямую сумму неразложимых подмодулей?
2. Единственно ли такое разложение (если оно существует)?
3. Какими свойствами обладают неразложимые модули?

Здесь мы дадим ответ на первый и третий вопросы для инъективных модулей над нётеровыми и артиновыми кольцами. Ответ на второй вопрос дается в следующей главе теоремой Крулля — Ремака — Шмидта.

Начнем с изучения неразложимых инъективных модулей. Пусть вначале кольцо R произвольно.

6.6.2. *Теорема.* *Пусть модуль* Q_R *инъективен,* $Q_R \neq 0$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) Q *неразложим.*
(2) Q *является инъективной оболочкой любого своего ненулевого подмодуля.*
(3) *Каждый подмодуль в* Q *однороден.*
(4) Q *является инъективной оболочкой некоторого своего ненулевого однородного подмодуля.*

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)": Пусть $U \subset Q$, $U \neq 0$ и $\mathrm{I}(U) \subset Q$ — инъективная оболочка U. Так как $U \neq 0$, то $\mathrm{I}(U) \neq 0$. Как инъективный модуль $\mathrm{I}(U)$ выделяется прямым слагаемым в Q, откуда $\mathrm{I}(U) = Q$.

„(2) $\Rightarrow$ (3)": Пусть $M \subset Q$ и A, $B \subset M$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Так как Q — инъективная оболочка A, то A — существенный подмодуль в Q. Следовательно, $A \cap B \neq 0$.

„(3) $\Rightarrow$ (4)": В качестве однородного подмодуля можно взять сам Q.

„(4) $\Rightarrow$ (1)": Пусть Q — инъективная оболочка своего однородного подмодуля $M \neq 0$. Допустим, что $Q = A \oplus B$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Так как M — существенный подмодуль в Q, то $M \cap A \neq 0$, $M \cap B \neq 0$. Из однородности M следует, что $(M \cap A) \cap (M \cap B) \neq 0$, в противоречие с тем, что $A \cap B = 0$. Значит, модуль Q неразложим. □

6.6.3. *Следствия.* (a) *Инъективная оболочка простого R-модуля неразложима.*
(b) *Неразложимый инъективный модуль Q содержит не более одного простого подмодуля.*
(c) *Если модуль R_R артинов, то каждый неразложимый инъективный модуль $Q_R \neq 0$ есть инъективная оболочка некоторого простого модуля.*

Доказательство. (a) Каждый простой модуль однороден.
(b) Пусть E, E_1 — простые подмодули в Q. Из того, что $E \subsetneq^* Q$, следует, что $E \cap E_1 \neq 0$. Поэтому $E = E \cap E_1 = E_1$.
(c) Если $0 \neq q \in Q$, то согласно 6.1.3 модуль qR артинов. Следовательно, в $qR \subsetneq Q$ существует простой подмодуль E. По теореме Q — инъективная оболочка E. □

Теперь мы подошли к интересной теореме, дающей новую характеризацию нётеровых, соотв. артиновых, колец.

6.6.4. *Теорема.* (a) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *Модуль R_R нётеров.*
(2) *Каждый инъективный модуль Q_R есть прямая сумма неразложимых подмодулей.*
(б) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *Модуль R_R артинов.*
(2) *Каждый инъективный модуль Q_R является прямой суммой инъективных оболочек простых R-модулей.*

В силу 6.6.3 (a) инъективные оболочки простых модулей, о которых идет речь в характеризации артиновых колец, неразложимы. В частности, из теоремы следует, что если R_R нётеров, но не артинов, то найдется неразложимый инъективный R-модуль, не содержащий простых подмодулей.

Доказательство теоремы мы проведем здесь только для нётеровых колец в направлении (1) $\Rightarrow$ (2). Чтобы получить импликацию (1) $\Rightarrow$ (2) для артиновых колец, мы используем тот факт, что любое артиново справа кольцо нётерово справа; этот факт будет доказан в гл. 9. Для установления импликации (2) $\Rightarrow$ (1) нам потребуются некоторые вспомогательные средства, в частности единственность (с точностью до изоморфизма) разложения полупростого модуля в прямую сумму простых модулей. Когда

в нашем распоряжении будут все необходимые утверждения, мы проведем доказательство до конца (в § 9.5). Итак, мы докажем здесь только

6.6.5. ***Утверждение.*** *Если модуль R_R нётеров, то каждый инъективный модуль Q_R есть прямая сумма неразложимых подмодулей. Если R_R, кроме того, и артинов (позже будет доказано, что из артиновости R_R следует его нётеровость), то каждое из этих неразложимых слагаемых является инъективной оболочкой некоторого простого R-модуля.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобятся два предложения, представляющие и самостоятельный интерес.

6.6.6. ***Предложение.*** *Пусть Γ — произвольное множество подмодулей модуля M_R. Тогда среди всех подмножеств $\Lambda \subset \Gamma$, удовлетворяющих условию*

$$(*) \qquad \sum_{U \in \Lambda} U = \bigoplus_{U \in \Lambda} U,$$

существует максимальное множество Λ_0.

Доказательство проведем с помощью леммы Цорна. Положим

$$G := \{\Lambda \mid \Lambda \subset \Gamma \wedge \text{выполняется } (*)\}.$$

Ясно, что G упорядочено по включению и $G \neq \emptyset$, поскольку $\emptyset \in G$ $\left(\text{ибо } 0 = \sum_{U \in \emptyset} U = \bigoplus_{U \in \emptyset} U\right)$. Пусть H — вполне упорядоченное подмножество в G и

$$\Omega := \bigcup_{\Lambda \in H} \Lambda.$$

Тогда $\Omega \subset \Gamma$. Мы утверждаем, что $\Omega \in G$, т. е. Ω удовлетворяет условию (*). Действительно, предположим противное, т. е. что сумма всех подмодулей из Ω не является прямой. Тогда существует конечная подсумма, не являющаяся прямой. Но конечное число подмодулей из Ω лежит в некотором $\Lambda \in H$ (поскольку H — вполне упорядоченное подмножество), так что их сумма будет прямой. Следовательно, на самом деле $\Omega \in G$ и, значит, Ω — верхняя грань для H в G. Таким образом, по лемме Цорна в G существует максимальный элемент Λ_0. □

6.6.7. ***Следствие.*** (a) *Для каждого модуля M_R существует максимальное множество неразложимых инъективных подмодулей, сумма которых прямая.*
(b) *Для каждого модуля M_R существует максимальное множество простых подмодулей, сумма которых прямая.*

Доказательство. Это следует из 6.6.6, если в качестве Γ взять в случае (a) множество всех неразложимых инъективных подмодулей, а в случае (b) — множество всех простых подмодулей. □

6.6.8. ***Предложение.*** *Если модуль R_R нётеров, то каждый ненулевой модуль M_R содержит ненулевой однородный подмодуль.*

Доказательство. Мы докажем, что каждый ненулевой конечнопорожденный подмодуль $B \subseteq M$ (согласно 6.1.3 такие подмодули нётеровы) содержит однородный ненулевой подмодуль. Рассмотрим $\{X \mid X \subsetneq B \wedge X - \text{д. п. в } B\}$ — множество всех собственных подмодулей в B, которые являются дополнениями по пересечению в B для некоторого подмодуля модуля B. Это множество непусто, так как $0 -$ д. п. в B. Поскольку модуль B нётеров, то в этом множестве существует максимальный элемент X_0. Пусть $X_0 -$ д. п. для $U_0 \subseteq B$. Тогда, очевидно, $U_0 \neq 0$.

Мы утверждаем, что каждый ненулевой подмодуль $C \subseteq U_0$ существен в U_0 и, следовательно, U_0 однороден. Действительно, предположим противное, т. е. что для $L \subseteq U_0$ имеет место равенство $C \cap L = 0$. Тогда $C \cap (X_0 + L) = 0$. В силу максимальности X_0 и того, что $C \neq 0$ (а значит, $C' \neq B$), имеем $X_0 + L = X_0$, т. е. $L \subseteq X_0$. Следовательно, $L \subseteq U_0 \cap X_0 = 0$. Ввиду равенства $C \cap L = 0$ получаем $L = 0$, т. е. $C \subseteq^* U_0$. □

Доказательство утверждения 6.6.5. Рассмотрим максимальное множество неразложимых инъективных подмодулей в Q, сумма которых прямая (следствие 6.6.7). Пусть эта сумма равна $Q_0 := \bigoplus_{i \in I} Q_i$. Так как все Q_i инъективны, то по 6.5.1 модуль Q_0 также инъективен. Следовательно, Q_0 — прямое слагаемое в Q:

$$Q = Q_0 \oplus Q_1.$$

Допустим, что $Q_1 \neq 0$. Тогда Q_1 содержит однородный подмодуль $M \neq 0$ (предложение 6.6.8). Если $I(M)$ — инъективная оболочка M, содержащаяся в Q_1, то $I(M)$ — прямое слагаемое в Q_1, т. е. $Q_1 = I(M) \oplus Q_2$, и (согласно 6.6.2) $I(M)$ неразложим. Но тогда сумма $Q_0 = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ не максимальна, поскольку $Q_0 \oplus I(M)$ — тоже прямая сумма неразложимых инъективных подмодулей модуля Q. Это противоречие показывает, что имеет место равенство $Q = Q_0 \oplus \bigoplus_{i \in I} Q_i$.

Если R_R не только нётеров, но и артинов, то по 6.6.3 все $Q_i \neq 0$ являются инъективными оболочками простых модулей. □

Упражнения

1. Пусть R_n — кольцо квадратных матриц порядка n с коэффициентами из R. Доказать, что R_n артиново справа, соотв. нётерово справа, тогда и только тогда, когда R артиново справа, соотв. нётерово справа.

2. Доказать что каждое артиново справа кольцо без делителей нуля — тело.

3. Пусть $L := k(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ — поле рациональных функций от переменных t_1, t_2, t_3, ... с коэффициентами в поле k. Элементы из L — это частные многочленов $\frac{P_1(t_i)}{P_2(t_i)}$ (где $P_2(t_i) \neq 0$). Положим $K := k(t_1^2, t_2^2, t_3^2, \ldots)$; ясно что K — подполе в L. Показать, что

a) отображение $\tau\colon L \ni \frac{P_1(t_i)}{P_2(t_i)} \longmapsto \frac{P_1(t_i^2)}{P_2(t_i^2)} \in K$ представляет собой кольцевой гомоморфизм;

b) множество $R := L \times L$ с помощью определений

$$(l_1, l_2) + (m_1, m_2) := (l_1 + m_1, l_2 + m_2),$$
$$(l_1, l_2)(m_1, m_2) := (l_1 m_1, l_1 m_2 + l_2 \tau(m_1))$$

превращается в кольцо с единицей;
c) модуль ${}_R R$ имеет длину 2 (т. е. обладает композиционным рядом вида $0 \subsetneq A \subsetneq R$).
d) модуль R_R не артинов и не нётеров.

4. Кольцо называется *кольцом главных идеалов*, если любой правый идеал главный (= циклический).

Пусть R — кольцо главных правых и левых идеалов без делителей нуля и $A \subsetneq R_R$, $A \neq 0$. Доказать, что модуль $(R/A)_R$ артинов.

5. a) Показать, что для нётеровости модуля M_R достаточно, чтобы он удовлетворял условию максимальности для конечно-порожденных подмодулей.
b) Привести пример ненётерового модуля M_R, удовлетворяющего условию максимальности для циклических подмодулей.
c) Доказать что для абелевой группы $M = M_{\mathbb{Z}}$ следующие условия эквивалентны:
(1) M удовлетворяет условию минимальности для циклических подгрупп;
(2) $T(M) = M$, т. е. $\forall m \in M \exists z \in \mathbb{Z},\ z \neq 0\ [mz = 0]$.
(3) M удовлетворяет условию минимальности для конечно-порожденных подгрупп.

6. Пусть A, B — кольца и ${}_A M_B$ — некоторый A-B-бимодуль. В множестве

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a \in A,\ m \in M,\ b \in B \right\}$$

определим сложение покомпонентно и умножение следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & m_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 m_2 + m_1 b_2 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда R становится кольцом с единицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что

a) R_R нётеров (соотв. артинов) $\Leftrightarrow$ A_A, B_B, M_B нётеровы (соотв. артиновы),
b) ${}_R R$ нётеров (соотв. артинов) $\Leftrightarrow$ ${}_A A$, ${}_B B$, ${}_A M$ нётеровы (соотв. артиновы).

(*Указание.* Рассмотрите кольцевой гомоморфизм $\rho: R \to A \times B$, задаваемый формулой $\rho\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} = (a, b)$, и для его ядра $K := \ker(\rho)$ покажите, что K_R и M_B (соотв. ${}_RK$ и ${}_AM$) имеют изоморфные структуры подмодулей.)

7. Доказать следующие утверждения:
a) Пусть $M = U \oplus U_1 = V \oplus V_1$, где $U \subsetneq V$. Тогда U имеет прямое дополнение в M, содержащее V_1 (т. е. $M = U \oplus W$, причем $V_1 \subsetneq W$), а V имеет прямое дополнение в M, содержащееся в U_1.
b) Модуль M_R удовлетворяет условию максимальности для прямых слагаемых тогда и только тогда когда он удовлетворяет условию минимальности для прямых слагаемых.
c) Пусть M_R удовлетворяет условию максимальности для прямых слагаемых. Показать, что для $\varphi \in \mathrm{End}(M_R)$ приводимые ниже условия эквивалентны:
(1) φ обратим слева (т. е. φ — расщепляющий мономорфизм).
(2) φ обратим справа (т. е. φ — расщепляющий эпиморфизм).
(3) φ обратим (т. е. φ — изоморфизм).

8. Привести пример кольца R и модуля M_R, не являющегося модулем конечной длины и обладающего тем свойством, что для каждого $\varphi \in \mathrm{End}(M_R)$
a) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant n_0\ [M = \mathrm{im}(\varphi^n) \oplus \ker(\varphi^n)]$ и
b) φ — автоморфизм $\Longleftrightarrow$ φ — мономорфизм $\Longleftrightarrow$ φ — эпиморфизм.
(*Указание.* Возьмите в качестве M_R прямую сумму бесконечного числа неизоморфных простых модулей.)

9. Доказать, что если модуль $B_R \neq 0$ артинов, то он обладает неразложимым в сумму фактормодулем. (Модуль M_R называется *неразложимым в сумму*, если сумма любых двух его собственных подмодулей — снова собственный подмодуль M_R.)

10. Показать, что для коммутативного кольца R следующие условия эквивалентны:
(1) для каждого $x \in R$ последовательность $xR \supsetneq x^2R \supsetneq x^3R \supsetneq \ldots$ стабилизируется;
(2) для каждого циклического модуля M_R инъективные эндоморфизмы являются автоморфизмами;
(3) каждый простой идеал в R максимален.

(*Указание.* При доказательстве импликации (3) $\Longrightarrow$ (1) рассмотрите мультипликативное подмножество $S_x := \{x^n(1 - xr) \mid n \geqslant 0,\ r \in R\}$.)

11. Показать, что для модуля M_R следующие условия эквивалентны:
(1) каждое множество подмодулей, сумма которых прямая, является конечным;
(2) каждый подмодуль удовлетворяет условию максимальности для прямых слагаемых;
(3) каждая последовательность $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq \ldots$, где $U_i \subsetneq M$ и U_i — прямое слагаемое в U_{i+1}, обрывается;
(4) каждая последовательность $M \supsetneq U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq U_3 \supsetneq \ldots$ где $U_i \subsetneq M$ и U_{i+1} — прямое слагаемое в U_i, обрывается;
(5) каждый подмодуль содержит конечно-порожденный существенный подмодуль;
(6) M удовлетворяет условию максимальности для $\bigcap$-дополнений;
(7) M удовлетворяет условию минимальности для $\bigcap$-дополнений;
(8) инъективная оболочка M удовлетворяет условию минимальности для прямых слагаемых.

12. Пусть

$$\operatorname{sing}(M) := \{m \mid r_R(m) \subsetneq R_R\}$$

— сингулярный подмодуль модуля M, определенный в упр. 4 к гл. 5.

Доказать, что для кольца R с $\operatorname{sing}(R)=0$ следующие условия эквивалентны:

(1) $I(R_R)$ удовлетворяет условию максимальности для прямых слагаемых;

(2) для любого семейства $(Q_i \mid i \in I)$, где Q_i — инъективные модули и $\operatorname{sing}(Q_i)=0$, модуль $\coprod_{i \in I} Q_i$ инъективен.

(*Указание.* Используйте эквивалентность условий из упр. 11 и при доказательстве импликации (2) $\Longrightarrow$ (1) покажите сначала, что для любой возрастающей последовательности

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq R_R$$

$\cap$-дополнений ввиду условия $\operatorname{sing}(R_R)=0$ мы имеем $\operatorname{sing}(R/A_i=0$.)

13. а) Доказать, что для модуля M_R следующие условия эквивалентны:

(1) $M^{(I)}$ инъективен для любого множества индексов I;

(2) $M^{(N)}$ инъективен;

(3) M инъективен и R удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов, которые являются аннуляторами подмножеств из M.

b) Показать, что для кольца R следующие условия эквивалентны:

(1) модуль R_R нётеров;

(2) для каждого инъективного модуля Q_R модуль $Q^{(N)}$ также инъективен.

7. Локальные кольца, теорема Крулля — Ремака — Шмидта

Как было показано в гл. 6, каждый инъективный модуль над нётеровым кольцом есть прямая сумма своих неразложимых подмодулей. Возникает вопрос, будет ли и в каком смысле такое разложение единственным. На этот вопрос дает ответ теорема Крулля — Ремака — Шмидта. В этой теореме предполагается, что кольца эндоморфизмов прямых слагаемых являются так называемыми локальными кольцами. Поэтому мы вначале введем понятие локального кольца и приведем некоторые достаточные условия для того, чтобы кольцо эндоморфизмов неразложимого модуля было локальным.

7.1. Локальные кольца

Элемент r кольца R называется *обратимым справа*, соотв. *слева*, если существует такой элемент $r' \in R$, что $rr' = 1$, соотв. $r'r = 1$. В этом случае r' называется *правым*, соотв. *левым, обратным к* r. Если $rr' = r'r = 1$, то r называется *обратимым*, а r' — *обратным* к r. Если r имеет и правый обратный и левый обратный, то они совпадают и, следовательно, их общее значение есть элемент, обратный к r (см. 2.5.4).

Как показывают примеры, существуют обратимые справа или слева, но не обратимые элементы.

Мы будем рассматривать кольца, у которых множество всех необратимых элементов имеет особую структуру. При этом мы предполагаем всегда, что $R \neq 0$.

7.1.1. ***Теорема.*** *Пусть A — множество всех необратимых элементов кольца R. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *A — замкнуто относительно сложения* (т. е. $\forall a_1, a_2 \in A$ $[a_1 + a_2 \in A]$);
(2) *A — двусторонний идеал;*
(3п) *A — наибольший собственный правый идеал;*
(3л) *A — наибольший собственный левый идеал;*
(4п) *в R существует наибольший собственный правый идеал;*
(4л) *в R существует наибольший собственный левый идеал;*

(5п) *для каждого элемента* $r \in R$ *либо* r, *либо* $1-r$ *обратим справа*;
(5л) *для каждого элемента* $r \in R$ *либо* r, *либо* $1-r$ *обратим слева*;
(6) *для каждого элемента* $r \in R$ *либо* r, *либо* $1-r$ *обратим*.

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Покажем сперва, что каждый обратимый справа, соотв. слева, элемент обратим. Пусть $bb' = 1$.

Случай 1. $b'b \notin A \Rightarrow$ существует $s \in R$, для которого $1 - sb'b$, $\Rightarrow b' = sb'bb' = sb' \Rightarrow 1 = b'b$, что и требовалось доказать.

Случай 2. $b'b \in A \Rightarrow 1 - b'b \notin A$, так как в противном случае $1 - b'b + b'b = 1 \in A$ ↯. Далее, $1 = s(1-b'b) \Rightarrow b' = s(1-b'b)b' = s(b' - b'bb') = s(b'-b') = 0$, в противоречие с тем, что $bb' = 1$.

По предположению A аддитивно замкнуто, поэтому нам остается лишь показать, что

$$\forall a \in A \ \forall r \in R [ar \in A \wedge ra \in A].$$

Допустим противное, т. е. что $ar \notin A$. Тогда найдется $s \in R$, для которого $ars = 1$. По предварительному замечанию (с $a = b$ и $rs = b'$) имеем $rsa = 1$, в противоречие с тем, что $a \in A$. Для ra доказательство проводится аналогично.

„(2) $\Rightarrow$ (3п)“: Так как $A \subsetneq_R R_R$, то $A \subsetneq R_R$. Поскольку $1 \notin A$, то $A \neq R$. Пусть $B \subsetneq R_R \wedge b \in B$. Тогда $bR \subsetneq B \subsetneq R_R \Rightarrow b$ не имеет правого обратного $\Rightarrow b$ не имеет обратного $\Rightarrow b \in A \Rightarrow B \subsetneq A$.

„(3п) $\Rightarrow$ (4п)“: Очевидно.

„(4п) $\Rightarrow$ (5п)“: Пусть C — наибольший собственный правый идеал (он определен однозначно). Пусть для элемента $r \in R$ ни r, ни $1-r$ не являются обратимыми справа. Тогда $rR \subsetneq R_R \wedge (1-r)R \subsetneq R_R \Rightarrow rR \subsetneq C \wedge (1-r)R \subsetneq C \Rightarrow 1 \in rR + (1-r)R \subsetneq C \Rightarrow C = R$ ↯.

„(5п) $\Rightarrow$ (6)“: Достаточно доказать, что каждый обратимый справа элемент обратим. Пусть $bb' = 1$.

Случай 1. $b'b$ обратим справа $\Rightarrow$ существует $s \in R$, для которого $1 = b'bs \Rightarrow b = bb'bs = bs \Rightarrow 1 = b'b$.

Случай 2. $1 - b'b$ обратим справа $\Rightarrow$ найдется такое $s \in R$, что $1 = (1-b'b)s \Rightarrow b = b(1-b'b)s = bs - bb'bs = 0$, в противоречие с тем, что $bb' = 1$.

„(6) $\Rightarrow$ (1)“: Предположим, что для некоторых $a_1, a_2 \in A$ элемент $a_1 + a_2$ обратим. Тогда существует такое $s \in R$, что $(a_1 + a_2)s = 1 \Rightarrow a_1 s = 1 - a_2 s$. Из импликации (6) $\Rightarrow$ (5п) вытекает (как было показано при доказательстве импликации (5п) $\Rightarrow$ (6)), что каждый обратимый справа элемент обратим. Поэтому из $a \in A \wedge r \in R$

следует, что и $ar \in A$ (ибо $ar \notin A \Rightarrow ar$ обратим справа $\Rightarrow a$ обратим справа $\Rightarrow a \notin A$ ↯). Таким образом, $a_1 s \in A \wedge a_2 s \in A$, но, с другой стороны, из того, что $a_2 s \in A$, в силу (6) вытекает, что $a_1 s = 1 - a_2 s \notin A$ ↯.

В „левостороннем" случае рассуждения аналогичны. □

7.1.2. ***Определение.*** *Кольцо, удовлетворяющее эквивалентным условиям теоремы* 7.1.1, *называется локальным кольцом.*

7.1.3. ***Следствие.*** *Пусть R — локальное кольцо и A — идеал его необратимых элементов. Тогда справедливы следующие утверждения:*
(1) *R/A — тело.*
(2) *Каждый обратимый слева, соотв. справа, элемент в R обратим.*
(3) *Каждое ненулевое кольцо, являющееся образом локального кольца при сюръективном кольцевом гомоморфизме, само локально. В частности, каждый изоморфный образ локального кольца — локальное кольцо.*

Доказательство. (1) Каждый элемент, не содержащийся в A, имеет обратный.

(2) Доказательство этого утверждения содержится в доказательстве теоремы 7.1.1.

(3) Пусть $\sigma\colon R \to S$ — сюръективный кольцевой гомоморфизм. Покажем, что для S выполнено условие 7.1.1 (6). Для всякого $s \in S$ найдется $r \in R$, такое что $\sigma(r) = s$ и, следовательно, $\sigma(1-r) = \sigma(1) - \sigma(r) = 1 - s$. По предположению либо r, либо $1-r$ обратим. Пусть обратим r. Тогда $\sigma(r^{-1})$ — обратный элемент для s, так как из $rr^{-1} = r^{-1}r = 1$ следует, что $\sigma(r)\sigma(r^{-1}) = s\sigma(r^{-1}) = \sigma(r^{-1})s = \sigma(1) = 1 \in S$. Если же обратим $1-r$, то $\sigma((1-r)^{-1})$ — обратимый элемент для $1-s$. □

7.1.4. ***Примеры локальных колец.*** 1. Кольцо формальных степенных рядов $K[[x]]$ над полем K локально, ибо его необратимые элементы — это в точности ряды со свободным членом, равным 0, а множество таких рядов замкнуто относительно сложения.

2. Локализации коммутативных колец по первичным идеалам локальны. Напомним вкратце определение *локализации*.

Пусть R — коммутативное кольцо и $P \neq R$ — первичный идеал в R. Такой идеал P характеризуется свойством

$$\forall a,\ b \in R\,[ab \in P \Rightarrow (a \in P \vee b \in P)].$$

Это эквивалентно тому, что

$$\forall a,\ b \in R\,[(a \notin P \wedge b \notin P) \Rightarrow ab \notin P].$$

Положим

$$\Gamma := \{(r,\ a) \mid r \in R \wedge a \in R \setminus P\}$$

и введем в Γ отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом:

$$(r_1, a_1) \sim (r_2, a_2) :\Leftrightarrow \exists a \in R \setminus P\,[r_1 a_2 a = r_2 a_1 a].$$

Класс эквивалентности с представителем (r, a) обозначается через $\frac{r}{a}$. Пусть $R_{(P)}$ — множество всех таких классов эквивалентности, т. е.

$$R_{(P)} = \left\{\frac{r}{a} \,\middle|\, r \in R \wedge a \notin P\right\}.$$

Если определить в этом множестве операции сложения и умножения формулами

$$\frac{r_1}{a_1} + \frac{r_2}{a_2} := \frac{r_1 a_2 + r_2 a_1}{a_1 a_2}, \quad \frac{r_1}{a_1}\frac{r_2}{a_2} := \frac{r_1 r_2}{a_1 a_2},$$

то оно, как легко проверить, становится кольцом. Нулевым и единичным элементами кольца $R_{(P)}$ служат соответственно $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$, где 0 — нулевой, а 1 — единичный элемент кольца R.

Отображение

$$\varphi\colon R \ni r \longmapsto \frac{r}{1} \in R_{(P)}$$

является кольцевым гомоморфизмом, и часто $\mathrm{im}(\varphi)$ отождествляется с R (например, $\mathbf{Z}$ рассматривается как подкольцо кольца $\mathbf{Q}$).

Как легко доказать, необратимые элементы в $R_{(P)}$ — это те и только те элементы $\frac{r}{a}$, для которых $r \in P$. Множество этих элементов замкнуто относительно сложения, следовательно, кольцо $R_{(P)}$ локально.

Рекомендуем читателю в качестве упражнения провести детальное доказательство корректности этой конструкции и, в частности, проверить, что определенные выше операции не зависят от выбора представителей классов вычетов.

В коммутативном кольце R без делителей нуля 0 является первичным идеалом; кольцо $R_{(0)}$ называется *полем частных* для R. Например, для кольца целых чисел $\mathbf{Z}$ имеем $\mathbf{Z}_{(0)} = \mathbf{Q}$.

Если R — кольцо главных идеалов и $P = (p)$, то вместо $R_{(P)}$ будем писать $R_{(p)}$.

Обратите внимание: $\mathbf{Q}_p \neq \mathbf{Z}_{(p)}$!

7.2. Локальные кольца эндоморфизмов

Мы приведем здесь условия, при которых кольцо эндоморфизмов данного модуля является локальным. Необходимое условие — неразложимость модуля. Вообще говоря, этого условия недоста-

точно, как показывает пример $\mathbf{Z}_{\mathbf{Z}}$. Поэтому мы укажем дополнительные условия, обеспечивающие локальность кольца эндоморфизмов.

Начнем с того, что рассмотрим некоторые важные в этой связи свойства колец.

7.2.1. *Определение.* *Пусть R — кольцо и $r \in R$.*

(1) *элемент r называется нильпотентным (или нильпотентом), если* $\exists n \in \mathbf{N}\,[r^n = 0]$.

(2) *элемент r называется идемпотентным (или идемпотентом), если $r^2 = r$.*

7.2.2. *Следствия.* (1) *Если r нильпотентен, то он не обратим, а элемент $1 - r$ обратим.*

(2) *Если r — идемпотент, то $1 - r$ — также идемпотент.*

(3) *Если r — идемпотентен и обратим, то $r = 1$.*

Доказательство. (1) Предположим, что $rs = 1$. Пусть n_0 — наименьшее $n \in \mathbf{N}$, такое, что $r^n = 0$. Тогда $r^{n_0-1} \neq 0 \Rightarrow 0 = r^{n_0}s = r^{n_0-1}rs = r^{n_0-1} \cdot 1 = r^{n_0-1} \neq 0$. $\lightning$ Далее

$$(1-r)(1+r+\ldots+r^{n_0-1}) = (1+r+\ldots+r^{n_0-1})(1-r) = 1.$$

(2) $(1-r)(1-r) = 1 - r - r + r^2 = 1 - r - r + r = 1 - r$.

(3) $r^2 = r \wedge rr' = 1 \Rightarrow r = rrr' = r^2r' = rr' = 1$. □

Примеры. **1.** Пусть R — кольцо всех квадратных матриц порядка n с коэффициентами из некоторого поля (или кольца). Обозначим через d_{ij} матрицу, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а остальные элементы 0. Тогда

$$d_{ij}\,d_{kl} = \delta_{jk}\,d_{il} = \begin{cases} 0 & \text{для } j \neq k, \\ d_{il} & \text{для } j = k. \end{cases}$$

В частности,

$d_{ij}^2 = 0$ для $i \neq j$, т. е. d_{ij} — нильпотент,

$d_{ii}^2 = d_{ii}$, т. е. d_{ii} — идемпотент.

2. Пусть G — конечная группа порядка n, K — поле и GK — групповое кольцо группы G над K. Положим

$$\gamma := \sum_{g \in G} g.$$

Ясно, что $\gamma g = \gamma$ для каждого $g \in G$. Следовательно, $\gamma^2 = \gamma n$. Если характеристика $\chi(K)$ поля K является делителем n, то $\gamma^2 = \gamma n = 0$, т. е. γ — нильпотент. Если $\chi(K)$ не делит n, то

$$\left(\gamma \frac{1}{n}\right)^2 = \gamma^2 \frac{1}{n^2} = \gamma \frac{n}{n^2} = \gamma \frac{1}{n},$$

т. е. $\gamma \dfrac{1}{n}$ — идемпотент.

В следующем предложении собраны некоторые утверждения, касающиеся разложения колец; позже они понадобятся нам и при других рассуждениях.

7.2.3. *Предложение.* *Пусть R — кольцо и*

$$R_R = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

— его разложение в прямую сумму правых идеалов A_i, $i \in I$. Справедливы следующие утверждения:

(a) *Подмножество*

$$I_0 = \{i \mid i \in I \wedge A_i \neq 0\}$$

конечно; следовательно,

$$R = \bigoplus_{i \in I_0} A_i.$$

(b) *Существуют такие элементы $e_i \in A_i$, $i \in I_0$, что*

(1) $A_i = e_i R$, $i \in I_0$,

(2) $1 = \sum_{i \in I_0} e_i$,

(3) $e_i e_j = \begin{cases} e_i & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$ $(i, j \in I_0)$,

т. е. $\{e_i \mid i \in I_0\}$ — множество ортогональных идемпотентов.

(c) *Если A_i, $i \in I_0$ — двусторонние идеалы, то элементы e_i, $i \in I_0$, из* (b) *лежат в центре кольца R (т. е. $e_i r = r e_i$ для всех $r \in R$).*

(d) *Обратно, если даны такие ортогональные идемпотенты $e_1, \ldots, e_n \in R$, что*

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

то

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i R,$$

причем $e_i R$ являются двусторонними идеалами, если e_i принадлежат центру R.

Доказательство. Пусть $1 = \sum_{i \in I} e_i$, $e_i \in A_i$ и

$$I_0 := \{i \mid i \in I \wedge e_i \neq 0\}.$$

Тогда I_0 конечно и

$$1 = \sum_{i \in I_0} e_i,$$

причем $e_i \neq 0$ для $i \in I_0$. Поскольку $e_i \in A_i$, то также $A_i \neq 0$ для $i \in I_0$. Пусть теперь $a_j \in A_j$ для произвольного $j \in I$. Тогда из равенства

$$1 = \sum_{i \in I_0} e_i$$

умножением справа на a_j получаем

$$a_j = \sum_{i \in I_0} e_i a_j.$$

Так как $R_R = \bigoplus_{i \in I} A_i$ и $e_i a_j \in A_i$, то мы имеем

1° для $j \notin I_0$: $a_j = 0 \Rightarrow A_j = 0 \Rightarrow I_0 = \{i \mid i \in I \wedge A_i \neq 0\} \Rightarrow R = \bigoplus_{i \in I_0} A_i$,

2° для $j \in I_0$: $a_j = e_j a_j \Rightarrow A_j = e_j A_j \subsetneq e_j R \subsetneq A_j \Rightarrow A_j = e_j R$, а также $0 = e_i a_j$ для $i \neq j$.

Если мы теперь ограничимся $i, j \in I_0$, то для $e_j = a_j$ получим $e_j = e_j e_j$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, чем доказано (b). Из того что $1 = \sum_{i \in I_0} e_i$, следует, что для всякого $r \in R$ мы имеем одновременно $r = \sum_{i \in I_0} e_i r$ и $r = \sum_{i \in I_0} r e_i$. Если A_i — двусторонние идеалы, то $r e_i \in A_i$ и из равенства

$$\sum_{i \in I_0} e_i r = \sum_{i \in I_0} r e_i$$

вытекает утверждаемое в (c) равенство $e_i r = r e_i$.

Для доказательства утверждения (d) заметим прежде всего, что из равенства

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

умножением справа на R получается равенство

$$R = \sum_{i=1}^{n} e_i R.$$

Пусть теперь

$$r \in e_{i_0} R \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} e_i R.$$

Тогда

$$r = e_{i_0} r \quad \text{и} \quad r = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} e_i r_i,$$

так что

$$r = e_{i_0} r = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} e_{i_0} e_i r_i = 0.$$

Следовательно,

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i R.$$

Если e_i лежат в центре R, то мы имеем $re_iR = e_irR \subseteq e_iR$, т. е. идеал e_iR — двусторонний. Предложение полностью доказано. □

7.2.4. ***Следствие.*** *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(1) *модуль R_R неразложим;*
(2) *модуль ${}_RR$ неразложим;*
(3) *1 и 0 — единственные идемпотенты в R.*

Доказательство. «(1) $\Rightarrow$ (3)»: Если e — идемпотент, то e и $1-e$ суть ортогональные идемпотенты, причем $1 = e + (1-e)$. Поэтому согласно 7.2.3

$$R = eR \oplus (1-e)R.$$

Но в силу (1) либо $eR = 0$, а значит, $e = 0$, либо $eR = R$. В последнем случае

$$(1-e)R = (1-e)eR = 0$$

и, следовательно, $(1-e)1 = 1-e = 0$.

«(3) $\Rightarrow$ (1)»: Допустим, что $R_R = A \oplus B$. Тогда, согласно 7.2.3, существует идемпотент e, для которого $A = eR$. В силу (3), либо $e = 1$, либо $e = 0$. Значит, либо $A = R$, либо $A = 0$, т. е. R_R неразложим.

Аналогично доказывается эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3). □

7.2.5. ***Теорема.*** *Пусть $S := \mathrm{End}(M_R)$. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *M_R неразложим;*
(2) *S_S неразложим;*
(3) *${}_SS$ неразложим;*
(4) *0 и 1 — единственные идемпотенты в S.*

Доказательство. Согласно 7.2.4, условия (2) — (4) эквивалентны между собой.

«(1) $\Rightarrow$ (4)»: Если $e \in S$ — идемпотент, то

$$M = e(M) \oplus (1-e)M,$$

поскольку $m = e(m) + (1-e)(m)$ для $m \in M$. Полагая $e(m_1) = (1-e)m_2$ и применяя e к этому равенству, получаем

$$e^2(m_1) = e(m_1) = e(1-e)(m_2) = 0.$$

В силу (1), либо $e(M) = 0$, а следовательно $e = 0$, либо $(1-e)(M) = 0$, а значит $1-e$.

«(4) $\Rightarrow$ (1)»: Пусть $M_R = A \oplus B$. Тогда

$$\eta\colon\ M \ni a + b \longmapsto a \in M$$

есть эндоморфизм, удовлетворяющий условию $\eta^2 = \eta$, т. е. идемпотент в S. По предложению $\eta = 0$ или 1. Если $\eta = 0$, то $A = 0$, если $\eta = 1$, то $A = M$, т. е. M неразложим.

7.2.6. *Следствие.* *Если кольцо* $S := \mathrm{End}(M_R)$ *локально, то модуль* M_R *неразложим.*

Доказательство. В силу 7.2.5 достаточно доказать, что 0 и 1 — единственные идемпотенты в S. Пусть $e \in S$ — идемпотент, тогда $1-e$ — также идемпотент. Допустим, что $e \neq 0$, $e \neq 1$. Тогда $1-e \neq 0$, $1-e \neq 1$. Так как элементы e и $1-e$ оба необратимы, то в силу локальности кольца R элемент $1 = e + 1 - e$ также должен быть необратим $\lightning$. □

При дополнительных ограничениях имеет место и обратное утверждение. Мы покажем это для двух случаев.

7.2.7. *Теорема.* *Если* $M_R \neq 0$ *— неразложимый модуль конечной длины, то кольцо* $\mathrm{End}(M_R)$ *локально и его необратимые элементы — это в точности нильпотентные элементы.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(M_R)$. Тогда по 6.4.2

$$\exists n \in \mathbf{N}\,[M = \mathrm{im}(\varphi^n) \oplus \ker(\varphi^n)].$$

Так как M неразложим, то либо $\ker(\varphi^n) = 0$, либо $\mathrm{im}(\varphi^n) = 0$.

Случай 1. $\ker(\varphi^n) = 0 \Rightarrow \ker(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi$ — мономорфизм $\Rightarrow$ (согласно 6.4.2) φ — автоморфизм, т. е. φ обратим.

Случай 2. $\mathrm{im}(\varphi^n) = 0 \Rightarrow \varphi^n = 0 \Rightarrow 1 - \varphi$ обратим (по 7.2.2 (1)).

Таким образом, мы доказали, что или φ или $1 - \varphi$ обратим. Поэтому, в силу 7.1.1, $\mathrm{End}(M_R)$ — локальное кольцо. Если φ необратим (случай 2), то φ нильпотентен. Обратно, если φ нильпотентен, то, согласно 7.2.2, φ необратим. □

В качестве частного случая этой теоремы получаем уже известный нам результат, что кольцо эндоморфизмов простого модуля является телом. Действительно, единственным нильпотентным эндоморфизмом простого модуля является нулевое отображение.

Другой интересный случай представлен в следующей теореме.

7.2.8. *Теорема.* *Если $Q_R \neq 0$ — неразложимый инъективный модуль, то* $\mathrm{End}(Q_R)$ *— локальное кольцо.*

Доказательство. Если $\varphi\colon Q \to Q$ — мономорфизм, то его образ $\mathrm{im}(\varphi)$ инъективен и, следовательно, выделяется прямым слагаемым в Q. Поскольку Q неразложим, отсюда следует, что $\mathrm{im}(\varphi) = Q$, т. е. φ — автоморфизм и потому обратим в $\mathrm{End}(Q_R)$. Значит, каждый необратимый эндоморфизм модуля Q имеет ненулевое ядро.

Пусть теперь φ_1, φ_2 — два необратимых эндоморфизма Q. Тогда $\ker(\varphi_1) \neq 0$, $\ker(\varphi_2) \neq 0$. Так как (в силу 6.6.2) Q однороден, то

$$0 \neq \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2) \subsetneq \ker(\varphi_1 + \varphi_2),$$

т. е. $\varphi_1 + \varphi_2$ тоже необратим. Поэтому, согласно 7.7.1, $\mathrm{End}(M_R)$ — локальное кольцо. □

В связи с приводимой ниже теоремой Крулля — Ремака — Шмидта представляет интерес вопрос, какие модули разложимы в прямую сумму подмодулей с локальными кольцами эндоморфизмов Вот наиболее важные классы таких модулей:

1° инъективные модули над нётеровым (или артиновым) кольцом;
2° модули конечной длины;
3° полупростые модули;
4° проективные полусовершенные модули.

В случае 1° указанная разложимость следует из 6.6.5 и 7.2.8. Случай 2° мы рассмотрим сейчас, а к случаям 3° и 4° обратимся в гл. 8 и 11 соответственно.

7.2.9. *Теорема.* *Пусть* $M_R \neq 0$.
(a) *Если модуль M артинов или нётеров, то у него существуют такие неразложимые подмодули $M_1, \ldots, M_n$, что*

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$

(b) *Если M — модуль конечной длины (т. е. артинов и нётеров), то у него существуют такие подмодули $M_1, \ldots, M_n$, что*

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \wedge \text{кольцо } \mathrm{End}(M_i) \text{ локально для } i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. (*a*) Пусть M артинов и Γ — множество всех прямых слагаемых $B \neq 0$ в M. Так как $M \neq 0$ и $M =$

$= M \oplus 0$, то сам M принадлежит Γ, следовательно, $\Gamma \neq \emptyset$. Пусть B_0 — минимальный подмодуль из Γ. Тогда B_0 неразложим (иначе он не был бы минимальным). Пусть, далее, Λ — множество всех подмодулей $G \subsetneq M$, для которых существует конечное число неразложимых подмодулей $B_1 \neq 0, \ldots, B_l \neq 0$, таких что

$$M = B_1 \oplus \ldots \oplus B_1 \oplus C.$$

Из существования B_0 следует, что $\Lambda \neq \emptyset$. Пусть C_0 минимален в Λ и

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_1 \oplus C_0$$

— соответствующее разложение. Мы утверждаем, что $C_0 = 0$. Действительно, в противном случае C_0, будучи как подмодуль артинового модуля и сам артинов (см. 6.1.2), обладал бы в силу предыдущего рассуждения собственным ненулевым неразложимым прямым слагаемым, в противоречие с минимальностью C_0.

Пусть теперь M нётеров и Γ — множество всех прямых слагаемых $A \neq M$ в M. Так как $0 \in \Gamma$, то $\Gamma \neq \emptyset$. Пусть A_0 максимально в Γ и

$$M = A_0 \oplus B_0.$$

Ввиду максимальности A_0 модуль B_0 неразложим, а поскольку $A_0 \neq M$, то $B_0 \neq 0$. Пусть Λ — множество всех подмодулей в M, являющихся прямыми слагаемыми в M и конечными прямыми суммами неразложимых подмодулей. Так как $\{0\} \in \Lambda$, то $\Lambda \neq \emptyset$. Пусть

$$B_1 + \ldots + B_k = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k, \text{ где } B_l \text{ неразложимы,}$$

— максимальный элемент в Λ. Далее, пусть

$$M = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k \oplus C_0.$$

Предположим, что $C_0 \neq 0$. Тогда, как и в первом рассуждении, доказывается, что нётеров модуль C_0 содержит ненулевое неразложимое прямое слагаемое. Это противоречит максимальности элемента $B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$. Таким образом, $C_0 = 0$, чем доказательство и завершено.

Замечание. Симметрия доказательств в обоих вариантах проистекает из того, что в первом используется лишь условие минимальности для прямых слагаемых, а во втором — лишь условие максимальности. Но, согласно упр. 7 к гл. 6, эти два условия эквивалентны.

(b) следует из (a), 6.1.2 и 7.2.7. □

7.3. Теорема Крулля — Ремака — Шмидта

Мы подошли теперь к важной теореме единственности — *теореме Крулля — Ремака — Шмидта.*

7.3.1. ***Теорема.*** *Если*

$$M_R = \bigoplus_{i \in I} M_i,$$

причем кольца $\mathrm{End}(M_i)$ *локальны для всех* $i \in I$, *и*

$$M_R = \bigoplus_{j \in J} N_j,$$

где N_j *неразложимы и* $N_j \neq 0$ *для всех* $j \in J$, *то существует биекция* β: $I \to J$, *такая что* $M_i \cong N_{\beta(i)}$ *для всех* $i \in I$.

Доказательство мы проведем в несколько шагов, первые из которых оформлены в виде самостоятельных предложений.

7.3.2. ***Предложение.*** *Пусть*

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i,$$

причем кольца $\mathrm{End}(M_i)$ *локальны для всех* $i \in I$, *и пусть*

$$\sigma,\ \tau \in \mathrm{End}(M) \text{ и } 1_M = \sigma + \tau.$$

Тогда для каждого $j \in I$ *существуют* $U_j \subseteq M$ *и изоморфизм* φ_j: $M_j \to U_j$, *индуцированный* σ *или* τ (*т. е.* $\varphi_j(x) = \sigma(x)$ *для всех* $x \in M_j$ *или* $\varphi_j(x) = \tau(x)$ *для всех* $x \in M_j$), *такие что*

$$M = U_j \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} M_i \Big).$$

Доказательство. Для $j \in I$ пусть π_j: $M \to M_j$ и ι_j: $M_j \to M$ — соответственно проекции и инъекции, отвечающие прямой сумме (см. гл. 4). Из того что $1_M = \sigma + \tau$, следует, что

$$1_{M_j} = \pi_j 1_M \iota_j = \pi_j (\sigma + \tau) \iota_j = \pi_j \sigma \iota_j + \pi_j \tau \iota_j.$$

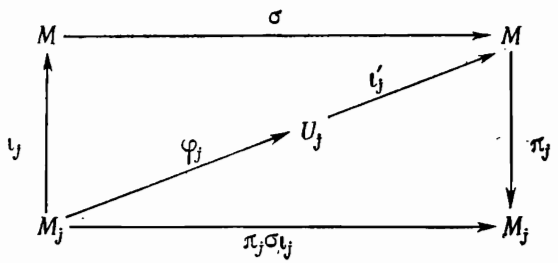
Так как в локальном кольце $\mathrm{End}(M_j)$ необратимые элементы образуют идеал (теорема 7.1.1), а эндоморфизм 1_{M_j} обратим, то по крайней мере один из элементов $\pi_j \sigma_j$, $\pi_j \tau \iota_j$ обратим, т. е. является автоморфизмом M_j. Пусть, скажем, $\pi_i \sigma \iota_j$ — автоморфизм. Положим

$$U_j := \sigma \iota_j (M_j) = \sigma(M_j),$$
$$\varphi_j\colon\ M_j \ni x \longmapsto \sigma(x) \in U_j,$$
$$\iota'_j\colon\ U_j \ni y \longmapsto y \in M.$$

Ясно, что φ_j — эпиморфизм. Для $x \in M_j$

$$\iota_j'\varphi_j(x) = \varphi_j(x) = \sigma(x) = \sigma\iota_j(x) \Rightarrow \iota_j'\varphi_j = \sigma\iota_j \Rightarrow \pi_j\iota_j'\varphi_j = \pi_j\sigma\iota_j.$$

Значит, имеет место следующая коммутативная диаграмма:



Так как $\pi_j\sigma\iota_j$ — автоморфизм, то по 3.4.10 из коммутативности нижнего треугольника вытекает, что

$$M = \operatorname{im}(\iota_j'\varphi_j) \oplus \ker(\pi_j) = U_j \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} M_i\right). \qquad \square$$

7.3.3. ***Предложение.*** *Пусть выполнены условия предложения* 7.3.2 *и пусть* $E = \{i_1, \ldots, i_t\} \subset I$. *Тогда существуют подмодули* $C_{i_j} \subseteq M$, $j = 1, \ldots, t$, *и изоморфизмы*

$$\gamma_{i_j}\colon M_{i_j} \to C_{i_j},$$

каждый из которых индуцирован либо σ, *либо* τ, *такие что*

$$M = C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_t} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \in E}} M_i\right).$$

Доказательство. Будем строить модули C_{i_j} последовательно с помощью 7.3.2. Возьмем в 7.3.2 $j = i_1$ и положим $C_{i_1} = U_{i_1}$. Имеем

$$M = C_{i_1} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq i_1}} M_i\right).$$

В силу изоморфизма $M_{i_1} \cong C_{i_1}$, кольцо $\operatorname{End}(C_{i_1})$ тоже локально. Используя 7.3.2, заменим, далее, в написанном выше разложении M_{i_2} на некоторое C_{i_2}. Заметим, что это C_{i_2} не обязательно совпадает с U_{i_2}, поскольку теперь мы имеем дело с другим разложением M! Сделав t шагов (по индукции), получим нужный результат. $\square$

7.3.4. ***Предложение.*** *Пусть*

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i,$$

причем кольцо $\operatorname{End}(M_i)$ *локально для всех* $i \in I$, *и пусть*

$$M = A \oplus B,$$

где подмодуль $A \neq 0$ *неразложим, и* $\pi'\colon M \to A$ *— соответствующая проекция. Тогда существует такое* $k \in I$, *что* π' *индуцирует изоморфизм* M_k *на* A *и*

$$M = M_k \oplus B.$$

Доказательство. Пусть $\iota\colon A \to M$ — включение и $\pi' := \iota\pi'$. Поскольку $1_M = \pi + (1_M - \pi)$, мы можем применить 7.3.2 с $\sigma = \pi$ и $\tau = 1_M - \pi$. Так как $A \neq 0$, то найдется $0 \neq a \in A$, для которого $\pi(a) = a$. Тогда $(1_M - \pi)(a) = 0$. Пусть

$$a = \sum_{j=1}^{t} m_{i_j}, \text{ где } 0 \neq m_{i_j} \in M_{i_j},\ i_j \in I,$$

— единственное представление a в $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Пусть, далее, модули C_{i_j} и изоморфизмы γ_{i_j} определены, как в 7.3.3. Допустим, что все γ_{i_j} индуцированы эндоморфизмом $1_M - \pi$. Тогда имеем

$$0 = (1_M - \pi)(a) = \sum_{j=1}^{t} (1_M - \pi)(m_{i_j}),$$

$$(1_M - \pi)(m_{i_j}) = \gamma_{i_j}(m_{i_j}) \in C_{i_j}.$$

Из того что сумма C_{i_j} — прямая, вытекает, что $\gamma_{i_j}(m_{i_j}) = 0$. Следовательно, $m_{ij} = 0$, откуда $a = 0$ ↯. Итак, найдется по крайней мере один индекс i_j, для которого γ_{i_j} индуцируется с помощью π. Обозначим его через k. Тогда

$$\gamma_k\colon M_k \ni x \longmapsto \pi(x) \in C_k$$

— изоморфизм. В силу 7.3.3, C_k — прямое слагаемое в M; пусть $M = C_k \oplus L$. Далее,

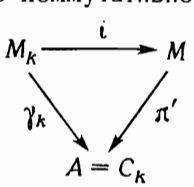
$$C_k = \pi(M_k) \subseteq \pi(M) = A.$$

Поэтому

$$A = M \cap A = (C_k \oplus L) \cap A = C_k \oplus (L \cap A).$$

Так как A неразложим и $C_k \neq 0$ (ибо $M_k \neq 0$), мы получаем отсюда, что $A = C_k$.

Из коммутативности диаграммы



где $\iota\colon M_k \to M$ — включение, следует, ввиду 3.4.10, что

$$M = \operatorname{im}(\iota) \oplus \ker(\pi') = M_k \oplus B,$$

чем все и доказано.

Доказательство теоремы 7.3.1. Согласно 7.3.4 (с $A = N_j$), каждый N_j изоморфен некоторому M_i; следовательно, $\operatorname{End}(N_j)$ — локальное кольцо и условия теоремы симметричны. Введем теперь в каждом из множеств I и J свое отношение эквивалентности, а именно:

$$i_1 \sim i_2 :\Leftrightarrow M_{i_1} \cong M_{i_2} \quad (i_1,\ i_2 \in I),$$
$$j_1 \sim j_2 :\Leftrightarrow N_{j_1} \cong N_{j_2} \quad (j_1,\ j_2 \in J).$$

Для всякого $i \in I$ обозначим через $\bar{i}$ порожденный им класс эквивалентности, а через $\bar{I}$ — множество всех классов эквивалентности. Аналогичные обозначения введем для J.

Определим теперь $\Phi\colon \bar{I} \to \bar{J}$ следующим образом:

$$\Phi(\bar{i}) = \bar{j}, \text{ если } M_i \cong N_j.$$

Φ — *биективное отображение.* Прежде всего, Φ корректно определено на всем $\bar{I}$, так как для всякого $i \in I$, в силу 7.3.4 (с $A = M_i$ и $M = \oplus N_j$ вместо $M = \oplus M_i$), существует такое $j \in J$, что $N_j \cong M_i$. Поскольку изоморфизм является отношением эквивалентности, то Φ не зависит от выбора представителей (в $\bar{I}$ и $\bar{J}$), т. е. действительно является отображением. Далее, Φ *инъективно*, поскольку из $\Phi(\bar{i}_1) = \bar{j}_1 = \bar{j}_2 = \Phi(\bar{i}_2)$ следует, что $M_{i_1} \cong N_{j_1} \cong N_{j_2} \cong M_{i_2}$. Таким образом, $\bar{i}_1 = \bar{i}_2$. В силу того же предложения 7.3.4 (с $A = N_j$), Φ также *сюръективно.*

Осталось еще показать, что для каждого $i \in I$ существует биекция $\beta_{\bar{i}}\colon \bar{I} \to \Phi(\bar{i})$. Тогда $\beta\colon I \ni i \longmapsto \beta_{\bar{i}}(i) \in J$ будет искомой биекцией, причем $M_i \cong N_{\beta(i)}$. Согласно теореме Шрёдера — Бернштейна (которую можно найти в любом учебнике по теории множеств [1]), достаточно показать, что существуют инъективные отображения

$$\bar{I} \to \Phi(\bar{I}) \text{ и } \Phi(\bar{I}) \to \bar{I}.$$

В силу симметрии условий достаточно установить существование какой-нибудь одной инъекции, скажем $\Phi(\bar{I}) \to \bar{I}$.

Случай 1. $\bar{I}$ конечно. Пусть число элементов в $\bar{I}$ равно t. Пусть, далее, $E = \{j_1, \ldots, j_s\} \subset \Phi(\bar{I})$. Согласно 7.3.4 (с $A = N_{j_1}$) существует такое M_{i_1}, что $M_{i_1} \cong N_{j_1}$, т. е. $i_1 \in \bar{I}$ и

$$M = M_{i_1} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{j \in J \\ j \neq j_1}} N_j \Big).$$

---

[1] См., например, П. С. Александров, Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. — *Прим. перев.*

По 7.3.4 $\left(\text{с } A = N_{j_2} \text{ и } B = M_{i_1} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \in J \\ j \neq j_1,\ j \neq j_2}} N_j \right)\right)$ найдется такое M_{i_2}, что $M_{i_2} \cong N_{j_2}$, т. е. $i_2 \in I$ и

$$M = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \in J \\ j \neq j_1,\ j \neq j_2}} N_j \right).$$

Последовательно продолжая эту процедуру, получаем, что

$$M = M_{i_1} \oplus \ldots \oplus M_{i_s} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \in J \\ j \notin E}} N_j \right), \text{ где } M_{i_l} \cong N_{j_l} \text{ для } l = 1, \ldots, s.$$

Так как эта сумма прямая, то $M_{i_1}, \ldots, M_{i_s}$ попарно различны. Таким образом, $s \leqslant t$. Следовательно, число элементов в $\Phi(I)$ не превосходит t, откуда и следует наше утверждение.

Случай 2. I бесконечно. Пусть π_j': $M \to N_j$ — проекция и для $k \in I$

$$E(k) := \{j \mid j \in J \wedge \pi_j' \text{ индуцирует изоморфизм } M_k \text{ на } N_j\}.$$

Мы утверждаем, что $E(k)$ конечно для каждого $k \in I$. Действительно,

$$0 \neq m \in M_k \wedge m = \sum_{l=1}^{t} n_{j_l},\ 0 \neq n_{i_l} \in N_{j_l} \Rightarrow \pi_{j_l}'(m) = n_{j_l}.$$

Чтобы π_j' индуцировало изоморфизм, мы должны иметь $\pi_j'(m) \neq 0$, т. е. $j \in \{j_1, \ldots, j_t\}$. Далее, мы утверждаем, что $\Phi(I) = \bigcup_{k \in I} E(k)$.

„$\Phi(I) \supseteq \bigcup_{k \in I} E(k)$“: Пусть $k \in I$ и $j \in E(k)$. Имеем

$$\left.\begin{array}{l} k \in I \Rightarrow M_k \cong M_i \\ j \in E(k) \Rightarrow M_k \cong N_j \end{array}\right\} \Rightarrow M_i \cong N_j \Rightarrow j \in \Phi(I).$$

„$\Phi(I) \subseteq \bigcup_{k \in I} E(k)$“: $j \in \Phi(I) \Rightarrow M_{i_1} \cong N_j$. Согласно 7.3.4, найдется такое $k \in I$, что π_j' индуцирует изоморфизм M_k на N_j, $\rightrightarrows M_k \cong N_j \Rightarrow M_k \cong M_i \Rightarrow k \in I \wedge j \in E(k)$.

Пусть $\dot{\bigcup_{k \in I}} E(k)$ обозначает и дизъюнктное объединение множеств $E(k)$. Очевидно, существует инъекция

$$\Phi(I) = \bigcup_{k \in I} E(k) \to \dot{\bigcup_{k \in I}} E(k).$$

Поскольку каждое $E(k)$ конечно, то для каждого $E(k)$ существует инъекция в $\mathbf{N}$. Поэтому существует инъекция

$$\bigcup_{k\in I} E(k)\to I\times\mathbf{N},$$

Так как I бесконечно, то, как известно из теории множеств[1], найдется биекция $I\times\mathbf{N}\to I$. В совокупности все эти инъекции дают инъекцию $\Phi(I)\to I$. Тем самым теорема Крулля — Ремака — Шмидта доказана. □

7.3.5. ***Следствие.*** *Пусть*

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i,$$

причем кольцо $\operatorname{End}(M_i)$ *локально для каждого* $i\in I$, *и*

$$N=\bigoplus_{j\in J} N_j,$$

где N_j *неразложимы и* $N_j\neq 0$ *для всех* $j\in J$, *и пусть* $M\cong N$. *Тогда существует биекция* $\beta\colon I\to J$, *такая что* $M_i\cong N_{\beta(i)}$ *для всех* $i\in I$.

Доказательство. Пусть $\sigma\colon N\to M$ — изоморфизм. Тогда

$$M=\bigoplus_{j\in J}\sigma(N_j),$$

где $\sigma(N_j)$ неразложимы. Согласно 7.3.1 (с $M=\bigoplus\sigma(N_j)$ вместо $M=\oplus N_j$), имеем $M_i\cong\sigma(N_{\beta(i)})\cong N_{\beta(i)}$. □

7.3.6. ***Следствие.*** *Разложение инъективного модуля над нётеровым кольцом, соотв. модуля конечной длины, в прямую сумму неразложимых подмодулей однозначно определено в смысле теоремы Крулля — Ремака — Шмидта.*

Доказательство. Это следует из 6.6.5 и 7.2.8, соотв. 7.2.9. □

Упражнения

1. Пусть $\sigma\colon R\to S$ — сюръективный гомоморфизм колец и $S\neq 0$. Показать, что если кольцо R локально и A — идеал его необратимых элементов, то $\sigma(A)$ — идеал необратимых элементов в S.

[1] См. тот же учебник П. С. Александрова. — *Прим. перев.*

2. a) Пусть R — локальное кольцо. Доказать, что для модуля M_R следующие условия эквивалентны:
(1) структура подмодулей в M вполне упорядочена;
(2) множество циклических подмодулей в M вполне упорядочено;
(3) каждый конечно-порожденный подмодуль в M циклический;
(4) каждый подмодуль в M, порожденный двумя элементами, циклический.
b) Дать пример кольца R и модуля M_R, таких что (3) выполняется, а (1) — нет.

3. (Продолжение упр. 11 к гл. 6). Доказать, что для инъективного модуля Q_R следующие условия эквивалентны:

(1) Q_R удовлетворяет условию максимальности для прямых слагаемых.

(2) Q_R — прямая сумма конечного числа неразложимых подмодулей.

(*Указание.* При доказательстве импликации (2) $\Longrightarrow$ (1) покажите вначале, что каждый ненулевой подмодуль в Q содержит однородный подмодуль.)

4. Модуль M, удовлетворяющий эквивалентным условиям упр. 11 к гл. 6, называется *конечномерным*, а число неразложимых слагаемых в разложении $I(M)$ (однозначно определенное по теореме Крулля — Ремака — Шмидта) — *размерностью*[1] M (обозначение: $\dim(M)$). Доказать, что
(a) $\dim(M)=0 \Longleftrightarrow M=0$: $\dim(M)=1 \Longleftrightarrow M$ однороден $\wedge M \neq 0$.
b) M конечномерен $\wedge U \subset M \Longrightarrow U$ конечномерен $\wedge \dim(U) \leqslant \dim(M)$;
(c) если M — конечномерный модуль и $U \subset M$, то

$$U \subset^{*} M \Longleftrightarrow \dim(U)=\dim(M)$$

(d) если M_1, M_2 и $M_1 \oplus M_2$ — конечномерные модули, то

$$\dim(M_1 \oplus M_2)=\dim(M_1)+\dim(M_2);$$

(e) если $X \subset M$ и X, M/X конечномерны, то и M конечномерен и

$$\dim(M) \leqslant \dim(X)+\dim(M/X).$$

5. a) Указать ненулевой нильпотентный элемент в $\mathbf{Z}/360\mathbf{Z}$.
b) Указать три отличных от единицы идемпотента в $\mathbf{Z}/360\mathbf{Z}$.
c) Разложить кольцо $\mathbf{Z}/360\mathbf{Z}$ в прямую сумму неразложимых идеалов.

6. Доказать, что
a) модуль $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ неразложим;
b) модуль $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ есть сумма двух собственных подмодулей;
c) кольцо эндоморфизмов модуля $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ изоморфно полю $\mathbf{Q}$.
d) модуль $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ обладает фактормодулем, который является неразложимым.

7. Пусть R — область целостности и K — поле частных R. Пусть V и W — векторные пространства над K, а M и N — R-подмодули в V и W соответственно. Пусть $x_1, \ldots, x_m \in M$, $k_1, \ldots, k_m \in K$, $\sum_{i=1}^{m} x_i k_i \in M$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Показать, что

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i k_i\right)=\sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i)\, k_i.$$

[1] В литературе ее часто называют размерностью Голди. — *Прим. перев.*

(Обращаем внимание, что здесь вовсе не обязательно, ни чтобы $k_i \in R$, ни чтобы $x_i k_i \in M$!)

8. Пусть R — область целостности и K — поле частных R. Пусть, далее, $V = V_K$ есть n-мерное векторное пространство над K и $U = U_R$ — произвольный R-подмодуль в $V = V_R$. Доказать, что в U найдутся такие неразложимые R-подмодули $U_1, \ldots, U_m$, $m \leqslant n$, что

$$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m.$$

(*Указание.* Пусть дано разложение $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ и пусть $u_i \in U_i$, $u_i \neq 0$ Тогда $u_1, \ldots, u_m$ линейно-независимы над K.)

9. Пусть $V = V_{\mathbf{Q}}$ — модуль с базисом $x_1, \ldots, x_{m+n}$, причем $m, n \geqslant 2$. Пусть, далее, p_i, q_j, где $1 \leqslant i \leqslant m+n$, $1 \leqslant j \leqslant m+n-1$ — простые числа и

$$A_i := \mathbf{Q}_{p_i} = \left\{ \frac{z}{p_i^n} \,\middle|\, z \in \mathbf{Z} \wedge n \in \mathbf{Z} \right\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m+n,$$

$$B_j := \frac{\mathbf{Z}}{q_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+n-1,$$

$$y_j := x_j + x_{j+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+n-1.$$

а) Показать, что если $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_{n-1}$ попарно различны, то

$$U := \sum_{i=1}^{n} x_i A_i + \sum_{j=1}^{n-1} y_j B_j$$

— неразложимый $\mathbf{Z}$-модуль. (*Указание.* Предположим, что $U = U' \oplus U''$, и обозначим соответствующие проекции через π' и π''. Установите последовательно следующие факты: $\pi'(x_i) A_i \subset U$, $\pi'(x_i) \in x_i A_i$, $\pi'(x_i) = 0$ или $\pi''(x_i) = 0$. Далее, используя элементы $y_i \frac{1}{q_j}$, докажите неразложимость U.)

b) Пусть p_i, $2 \leqslant i \leqslant n+m$, $i \neq n+1$, и q_j, $1 \leqslant j \leqslant n+m-1$ попарно различны и пусть $p_1 = p_{n+1}$. Показать, что

$$U_1 := \sum_{i=1}^{n} x_i A_i + \sum_{j=1}^{n-1} y_j B_j$$

и

$$U_2 := \sum_{i=n+1}^{m+n} x_i A_i + \sum_{j=n+1}^{m+n-1} y_j B_j$$

неразложимы. Определим

$$\varphi\colon U_1 \oplus U_2 \to U_1 \oplus U_2$$

для

$$u = \sum_{i=1}^{n+m} x_i a_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{n+m-1} y_j b_j, \quad a_i \in A_i, \quad b_j \in B_j$$

равенством

$$\varphi(u) := (q_1 (a_1 + b_1) + q_{n+1} (a_{n+1} + b_{n+1}) (x_1 - x_{n+1}).$$

Показать, что φ есть R-гомоморфизм. Найти q_1, q_{n+1}, такие что $\varphi^2 = \varphi$. Вывести отсюда, что $U_1 \oplus U_2$ можно записать как прямую сумму неразложимых

подмодулей двумя существенно различными способами (т. е. способами, не получающимися друг из друга с помощью изоморфизмов и перестановок).

10. Пусть $M = M_R$. Для $n \in \mathbf{N}$ положим $M^n := M^{\{1, 2, \ldots, n\}}$. Пусть

$$A_R = \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad B_R = \bigoplus_{j \in J} B_j,$$

причем $\mathrm{End}(A_i)$ локальны для $i \in I$, а B_j неразложимы для $j \in J$. Доказать следующие утверждения:

a) Пусть $n \in \mathbf{N}$. Если $A^n \cong B^n$, то $A \cong B$.

b) Пусть I конечно и пусть S, T — непустые множества. Если $A^{(S)} \cong A^{(T)}$, то S и T имеют одинаковую мощность.

8. Полупростые модули и кольца

8.1. Определение и некоторые свойства

Существуют два непосредственных и важных обобщения понятия векторного пространства. Это —

1° свободные модули и прямые слагаемые свободных модулей, т. е. проективные модули, с которыми мы познакомились в гл. 5;

2° модули, в которых каждый подмодуль является прямым слагаемым; такие модули называются полупростыми модулями; их-то мы и рассмотрим в этой главе.

Вначале докажем ряд подготовительных лемм.

8.1.1. ***Лемма.*** *Пусть $M = M_R$ — модуль, в котором каждый подмодуль выделяется прямым слагаемым. Тогда каждый ненулевой подмодуль содержит простой подмодуль.*

Доказательство. Пусть U — произвольный нулевой конечнопорожденный подмодуль в M. Согласно 2.3.12 существует максимальный подмодуль $C \subsetneq U$. По предположению $M \oplus C \oplus M_1$. Учитывая закон модулярности, получаем $U = M \cap U = C \oplus (M_1 \cap U)$. Значит, $U/C \cong M_1 \cap U$. Так как C максимален в U, то U/C прост. Следовательно, $M_1 \cap U$ — простой подмодуль в U. □

8.1.2. ***Лемма.*** *Пусть $M = \sum_{i \in I} M_i$, где M_i — простые подмодули. Пусть, далее, $U \subsetneq M$.*

(a) *Существует такое $J \subset I$, что $M = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i\right)$.*

(b) *Существует такое $K \subset I$, что $U \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$.*

Доказательство. (a) Доказательство проводится с использованием леммы Цорна. Положим

$$\Gamma := \left\{L \mid L \subset I \wedge U + \sum_{i \in L} M_i = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in L} M_i\right)\right\}.$$

Так как $\bigoplus_{i \in \emptyset} M_i = 0$, то $\emptyset \in \Gamma$. Следовательно, $\Gamma \neq \emptyset$. Далее, Γ упорядочено по включению. Пусть Λ — произвольное вполне упорядоченное подмножество в Γ. Мы утверждаем, что

$$L^* := \bigcup_{L \in \Lambda} L$$

— верхняя грань для Λ в Γ. Ясно, что L^* — верхняя грань. Надо только проверить, что $L^* \in \Gamma$. Пусть $E \subset L^*$ и E конечно. Тогда найдется $L \in \Lambda$, для которого $E \subset L$. Если теперь

$$u + \sum_{i \in E} m_i = 0, \quad u \in U, \quad m_i \in M_i,$$

то, поскольку $E \subset L$, имеем $u = m_i = 0$ для всех $i \in E$.
Таким образом,

$$U + \sum_{i \in L^*} M_i = U \oplus \Big(\bigoplus_{i \in L^*} M_i \Big)$$

и, следовательно, $L^* \in \Gamma$.

По лемме Цорна в Γ существует максимальный элемент $J \in \Gamma$. Положим

$$N := U + \sum_{i \in J} M_i = U \oplus \Big(\bigoplus_{i \in J} M_i \Big).$$

Для произвольного $i_0 \in I$ рассмотрим $N + M_{i_0}$. Равенство $N + M_{i_0} = N \oplus M_{i_0}$ невозможно, так как тогда

$$J \underset{\neq}{\subsetneq} J \cup \{i_0\} \in \Gamma.$$

Значит, $N \cap M_{i_0} \neq 0$. Но поскольку M_{i_0} прост, то $N \cap M_{i_0} = M_{i_0}$. Следовательно, $M_{i_0} \subsetneq N$. Поэтому

$$M = \sum_{i \in I} M_i \subsetneq N \subsetneq M,$$

т. е. $N = M$.
(b) Пусть теперь $M = U \oplus \Big(\bigoplus_{i \in J} M_i \Big)$. Применим (a) к подмодулю $\bigoplus_{i \in J} M_i$ (вместо U). Мы получим, что существует $K \subset I$, для которого

$$M = \Big(\bigoplus_{i \in J} M_i \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in K} M_i \Big).$$

По первой теореме об изоморфизме

$$U \cong M \Big/ \bigoplus_{i \in J} M_i \cong \bigoplus_{i \in K} M_i. \qquad \square$$

Сформулируем теперь основную теорему о полупростых модулях.

8.1.3. ***Теорема.*** *Для модуля $M = M_R$ следующие условия эквивалентны:*
(1) *каждый подмодуль в M является суммой простых подмодулей,*
(2) *M — сумма простых подмодулей;*
(3) *M — прямая сумма простых подмодулей;*

(4) *каждый подмодуль в M выделяется прямым слагаемым.*

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: (2) — частный случай (1).
„(2) $\Rightarrow$ (3)“: 8.1.2 (a) для $U=0$.
„(3) $\Rightarrow$ (4)“: 8.1.2 (a).
„(4) $\Rightarrow$ (1)“: Пусть $U \subsetneq M$. Положим

$$U_0 := \sum_{\substack{M_i \text{ прост} \\ M_i \subsetneq U}} M_i.$$

Ясно, что $U_0 \subsetneq U$. В силу (4), U_0 — прямое слагаемое в M, скажем, $M = U_0 \oplus N \Rightarrow U = M \cap U = U_0 \oplus (N \cap U)$.
Случай 1. $N \cap U = 0 \Rightarrow U = U_0 \Rightarrow$ (1).
Случай 2. $N \cap U \neq 0 \Rightarrow$ (в силу 8.1.1) существует простой подмодуль $B \subsetneq N \cap U \Rightarrow B \subsetneq U_0$ (согласно определению U_0) $\Rightarrow$ $\Rightarrow B \subsetneq U_0 \cap (N \cap U)$ $\lightning$.
Итак, возможен только первый случай. □

8.1.4. ***Определение.*** (a) *Модуль $M = M_R$ называется полупростым, если он удовлетворяет эквивалентным условиям из* 8.1.3. (b) *Кольцо R называется полупростым справа; соотв. слева, если модуль R_R, соотв. ${}_RR$, полупрост.*

Заметим, что модуль 0 полупрост, поскольку

$$0 = \sum_{i \in \emptyset} M_i, \quad M_i \text{ просты},$$

но не прост, поскольку для простого модуля M предполагается, что $M \neq 0$.

Позже мы покажем, что R_R полупрост $\Leftrightarrow {}_RR$ полупрост. Поэтому у полупростого кольца можно не указывать сторону.

Примеры **1.** Каждое векторное пространство $V = V_K$ над телом K полупросто:

$$V_K = \sum_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} xK \quad \wedge \quad xK \text{ просты для } x \neq 0.$$

2. Факторгруппа $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (где $n \neq 0$) полупроста как $\mathbf{Z}$-модуль $\Leftrightarrow n$ свободно от квадратов (т. е. n есть произведение попарно различных простых чисел) или $n = \pm 1$. Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. Позже мы приведем его в более общей ситуации.

3. Модули $\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ не полупросты, так как у них нет простых подмодулей.

4. Пусть $V = V_K$ — векторное пространство. Тогда кольцо $\mathrm{End}(V_K)$ полупросто (и справа и слева) $\Leftrightarrow \dim_K(V) < \infty$. Доказательство будет дано позже (в 8.3.1).

8.1.5. *Следствие.* (1) *Каждый подмодуль полупростого модуля полупрост.*
(2) *Эпиморфный образ полупростого модуля полупрост.*
(3) *Сумма полупростых модулей полупроста.*
(4) *Любые два разложения полупростого модуля в прямую сумму простых модулей изоморфны в смысле теоремы Крулля — Ремака — Шмидта* 7.3.1.

Доказательство. (1) непосредственно следует из 8.1.3.

(2) Пусть A — простой модуль и $\alpha\colon A \to B$ — эпиморфизм, тогда $A/\ker(\alpha) \cong B$. Если $\ker(\alpha) = 0$, то B прост. Если $\ker(\alpha) = A$, то $B = 0$. В силу простоты A другие случаи для $\ker(\alpha)$ невозможны. Следовательно, образ суммы простых модулей при гомоморфизме есть сумма простых модулей и нулей, которые можно опустить. Поэтому, в силу 8.1.3, эпиморфный образ полупростого модуля полупрост.

(3) Поскольку каждый полупростой модуль, согласно 8.1.3, есть сумма простых модулей, то и всякая сумма полупростых модулей представима в виде суммы простых модулей и потому, в силу 8.1.3, полупроста.

(4) Так как кольцо эндоморфизмов простого модуля является телом и, следовательно, локально, то применима теорема Крулля — Ремака — Шмидта. □

Следующая теорема показывает, что для полупростых модулей все условия конечности эквивалентны.

8.1.6. *Теорема.* *Для полупростого модуля $M = M_R$ все приводимые ниже условия эквивалентны:*
(1) *M есть сумма конечного числа простых модулей;*
(2) *M есть прямая сумма конечного числа простых модулей;*
(3) *M имеет конечную длину;*
(4) *M артинов;*
(5) *M нётеров;*
(6) *M конечно-порожден;*
(7) *M конечно-копорожден.*

Доказательство. Для $M = 0$ все эти условия выполняются тривиальным образом, поэтому мы можем считать, что $M \neq 0$.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: 8.1.2.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, где M_i просты. Тогда

$$0 \subset M_1 \subset M_1 \oplus M_2 \subset \ldots \subset \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = M$$

— композиционный ряд, поскольку фактормодули $M_1 \oplus \ldots \oplus M_i / M_1 \oplus \oplus \ldots \oplus M_{i-1} \cong M_i$ просты.

„(3) $\Rightarrow$ (5)“ }
„(5) $\Rightarrow$ (6)“ }: в силу 6.1.2.
„(6) $\rightleftarrows$ (1)“: 2.3.13.
„(3) $\Rightarrow$ (4)“ }
„(4) $\Rightarrow$ (7)“ }: 6.1.2.

„(7) $\Rightarrow$ (2)“: Предположим, что M является прямой суммой бесконечного числа простых подмодулей M_i. Тогда в M существует подмодуль вида $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots$ (прямая сумма счетного числа простых подмодулей $M_1, M_2, \ldots$). Положим

$$A_i := \bigoplus_{j=1}^{\infty} M_j, \quad i \in \mathbf{N}$$

Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = 0$, ибо

$$(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n) \cap A_{n+1} = 0,$$

а значит

$$(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) = 0$$

для произвольного $n \in \mathbf{N}$. Однако пересечение любого конечного числа A_i равно, очевидно, A_i с наибольшим i и, следовательно, не равно 0. □

Пусть M_R полупрост. Обозначим через Γ множество всех его простых подмодулей:

$$\Gamma := \{E \mid E \subseteq M \wedge E \text{ прост}\}.$$

Рассмотрим в Γ отношение эквивалентности $\cong$. Пусть $\{\Omega_j \mid j \in J\}$ — множество соответствующих классов эквивалентности, так что Ω_j — класс изоморфных между собой простых подмодулей в M. Ясно, что

$$\Omega_{j_0} \cap \Omega_{j_1} = \emptyset \quad \text{для} \quad j_0, j_1 \in J, \ j_0 \neq j_1.$$

8.1.7. ***Определение.*** $B_j := \sum_{E \in \Omega_j} E$ *называется* *однородной компонентой модуля* M.

8.1.8. ***Лемма.*** *Пусть* M_R *— полупростой модуль и* B_j *— его однородная компонента.*
(a) $U \subseteq B_j \wedge V$ *прост* $\Rightarrow U \in \Omega_j$.
(b) $M = \bigoplus_{j \in J} B_j$.

Доказательство. (a) следует из леммы 8.1.2 (b). Действительно, согласно этой лемме существует $E \in \Omega_j$, такое что $U \cong E$, поскольку других слагаемых в U нет, в силу его простоты.

b) Так как M — сумма своих простых подмодулей и каждый простой подмодуль содержится в некотором Ω_j, то $M = \sum_{j \in J} B_j$. Допустим, что для некоторого $j_0 \in J$

$$D := B_{j_0} \cap \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq j_0}} B_j \neq 0.$$

Тогда, в силу 8.1.1, в D найдется простой подмодуль E. Поскольку $E \subset B_{j_0}$, то, согласно (a), $E \in \Omega_{j_0}$. Поскольку $E \subset \sum_{j \neq j_0} B_j$, то по 8.1.2 (b) существует такое $j_1 \in J$, $j_1 \neq j_0$, что $E \in \Omega_{j_1}$. Тогда $\Omega_{j_0} \cap \Omega_{j_1} \neq \emptyset$ ↯. □

Проверить в конкретном случае, является ли данный модуль полупростым, довольно трудно; это может зависеть от самых разных свойств модуля. С этой точки зрения представляет интерес следующий важный пример полупростых модулей (и колец).

Пусть $R := GK$ — групповое кольцо конечной группы G над полем K (см. 4.6.2).

8.1.9. ***Теорема Машке.*** *R_R и ${}_RR$ полупросты тогда и только тогда, когда характеристика поля K не делит порядок группы G.*

Доказательство. Пусть характеристика K не делит $n := |G|$. Тогда для $0 \neq k \in K$ элемент $nk := k + \ldots + k$ (n слагаемых) обратим. Элемент, обратный к $n1$, где $1 \in K$, будем записывать как $1/n$. Пусть элементы группы G суть $g_1, \ldots, g_n$. Если рассматривать R как правый K-модуль, то R — векторное пространство над K. Для каждого $\varphi \in \mathrm{End}(R_K)$ определим отображение $\hat{\varphi}$: $R \to R$ формулой

$$\hat{\varphi}(r) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(rg_i) g_i^{-1}, \quad r \in R.$$

Покажем, что $\hat{\varphi} \in \mathrm{End}(R_R)$. Для произвольного $k \in K$

$$\hat{\varphi}(rk) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(rkg_i) g_i^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(rg_i g_i^{-1}) \right) k = \hat{\varphi}(r)\, k.$$

Пусть теперь $g \in G$. Так как $\{gg_1, \ldots, gg_n\} = \{g_1, \ldots, g_n\}$, то

$$\hat{\varphi}(rg) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(rgg_i) g_i^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(rgg_i) (gg_i)^{-1} = \hat{\varphi}(r)\, g.$$

Отсюда следует, что $\hat{\varphi}(r(x)) = \hat{\varphi}(r)x$ для произвольных $r, x \in R$, т. е. $\hat{\varphi} \in \mathrm{End}(R_R)$.

Пусть $A \subset R_R$. Тогда A — линейное подпространство в R_K. Следовательно, существует $B \subset R_K$, для которого $R_K = A \oplus B$. Пусть: π: $R_K \to R_K$ — проекция R на A, т. е. $\pi(a+b) = a$ для $a \in A$, $b \in B$. Поскольку $A \subset R_R$, имеем для $a \in A$

$$\hat{\pi}(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \pi(ag_i)g_i^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ag_ig_i^{-1} = \frac{1}{n}na = a$$

и для $r \in R$ получаем

$$\hat{\pi}(r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \pi(rg_i)g_i^{-1} \in A,$$

так как $\hat{\pi}(rg_i) \in A$. Отсюда вытекает, что $\hat{\pi}$ — проекция R_R на A и

$$R_R = \hat{\pi}(R) \oplus (1-\hat{\pi})(R) = A \oplus (1-\hat{\pi})(R).$$

Следовательно, R_R полупрост. Доказательство для ${}_RR$ аналогично (см. также 8.2.1).

Пусть теперь характеристика p поля K делит n. Покажем, что для $r_0 := g_1 + \ldots + g_n$ идеал r_0R не является прямым слагаемым модуля R_R. Прежде всего, для $g \in G$ имеем $r_0g = r_0$. Отсюда вытекает, что $r_0^2 = nr_0 = 0$, а также, что $r_0R = r_0K$. Предположим, что $R_R = r_0R \oplus U$. Тогда существует идемпотент e, для которого $eR = r_0R = r_0K$. Но если $e = r_0k_0$, где $k_0 \in K$, то $e = e^2 = r_0^2k_0^2 = 0$. Следовательно, $r_0 = 0$ ↯. □

8.2. Полупростые кольца

Если кольцо обладает некоторым свойством с одной „стороны“, то оно вовсе не обязательно обладает им с другой. Например, мы показали, что существуют кольца, являющиеся артиновыми лишь с одной стороны. При рассмотрении любого свойства колец, зависящего от „стороны“, возникает естественный вопрос, действительно ли оно „односторонне“ или же наличие его с одной стороны влечет за собой его наличие и с другой. С полупростотой колец дело обстоит как раз таким образом.

8.2.1. ***Теорема.*** *Для кольца R*

$${}_RR \text{ полупрост} \Leftrightarrow R_R \text{ полупрост.}$$

Доказательство. Достаточно показать, что если ${}_RR$ полупрост, то и R_R полупрост, поскольку обратная импликация получается тогда по симметрии.

Согласно 7.2.3 (с заменой стороны), полупростое кольцо ${}_RR$ обладает разложением

$$ {}_RR = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i, $$

где $L_i = Re_i$ — простые подмодули в ${}_RR$, $e_i \neq 0$, $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$, $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Из 7.2.3 (d) вытекает, что

$$ R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iR, $$

и остается только доказать, что все e_iR просты. Пусть e — одно из e_i и пусть $0 \neq a = ea \in eR$. Тогда $aR \subseteq eR$. Нам достаточно показать, что $aR = eR$; отсюда сразу будет следовать, что eR прост.

Поскольку $ea \neq 0$ и Re прост, то

$$ \varphi\colon Re \ni re \longmapsto rea = ra \in Ra $$

— изоморфизм. Если ${}_RR = Ra \oplus U$, то

$$ \psi\colon R = Ra \oplus U \ni ra + u \longmapsto \varphi^{-1}(ra) = re \in R $$

есть эндоморфизм ${}_RR$, определенный правым умножением на некоторый элемент $b \in R$ (поскольку $R^{(r)} = \mathrm{End}({}_RR)$, см. § 3.7). Таким образом,

$$ e = \psi(a) = ab \Rightarrow e \in aR \Rightarrow eR \subseteq aR \Rightarrow eR = aR. \qquad \square $$

8.2.2. *Следствие.* (a) *Кольцо R полупросто $\Leftrightarrow$ каждый правый и каждый левый R-модули полупросты.*
(b) *R полупросто $\Rightarrow R_R$ и ${}_RR$ имеют одинаковую конечную длину.*
(c) *Если R полупросто и $\rho\colon R \to S$ — сюръективный гомоморфизм колец, то и S полупросто.*
(d) *R полупросто $\Rightarrow R_R$ и ${}_RR$ — кообразующие.*
(e) *R полупросто $\Leftrightarrow$ каждый правый и каждый левый R-модули инъективны $\Leftrightarrow$ каждый правый и каждый левый R-модули проективны.*
(f) *R полупросто $\Leftrightarrow$ каждый простой правый R-модуль и каждый простой левый R-модуль проективны.*

Доказательство. (a) „$\Rightarrow$“: Если R_R полупрост и $M = M_R$, $m \in M$, то, в силу 8.1.5, mR как эпиморфный образ R_R полупрост. Следовательно, модуль

$$ M = \sum_{m \in M} mR $$

полупрост как сумма полупростых модулей. Рассуждение для „левого“ случая аналогично.

(a) „$\Leftarrow$“: Частный случай.

(b) Доказательство этого утверждения содержится в доказательстве теоремы 8.2.1, так как из простоты Re_i следует простота e_iR.

(c) S_S можно рассматривать как R-модуль (см. также § 3.2), если положить

$$sr := s\rho(r), \quad s \in S, \ r \in R.$$

При этом идеалы в S_S совпадают с подмодулями в S_R. Так как S_R полупрост, то и S_S полупрост.

(d) Чтобы показать, что R_R — кообразующий, возьмем $m \in M_R$, $m \neq 0$. В силу полупростоты R_R эпиморфизм

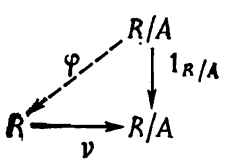
$$R \ni r \longmapsto mr \in mR$$

является расщепляющим. Следовательно, mR изоморфен некоторому правому идеалу в R. Таким образом, найдется мономорфизм φ: $mR_R \to R_R$. Поскольку mR — прямое слагаемое в M_R, то существует гомоморфизм $\hat{\varphi}$: $M_R \to R_R$, удовлетворяющий условию $\hat{\varphi} \mid mR = \varphi$. Отсюда следует, что $m \notin \ker(\hat{\varphi})$, что и требовалось доказать.

(e) R_R полупрост $\Rightarrow$ каждый правый R-модуль полупрост $\Rightarrow$ каждый подмодуль есть прямое слагаемое $\Rightarrow$ каждый правый R-модуль инъективен, соотв. проективен, $\Rightarrow$ каждый правый идеал в R есть прямое слагаемое в $R_R \Rightarrow R_R$ полупрост. Рассуждение для левого случая аналогично.

(f) „$\Rightarrow$“: Очевидно в силу (e).

(f) „$\Leftarrow$“: Пусть $\operatorname{soc}(R_R)$ — сумма всех простых правых идеалов в R (подробным изучением $\operatorname{soc}(M_R)$ мы займемся в следующей главе). Нам надо показать, что $R = \operatorname{soc}(R_R)$. Допустим, что $R \neq \operatorname{soc}(R_R)$. Тогда, в силу 2.3.11, $\operatorname{soc}(R_R)$ содержится в некотором максимальном правом идеале A кольца R. Так как факторкольцо R/A является простым правым R-модулем и, следовательно, по предположению проективно, то существует гомоморфизм φ, для которого диаграмма



коммутативна. Ясно, что $\varphi \neq 0$ и

$$R = \operatorname{im}(\varphi) \oplus A.$$

Но так как $\mathrm{im}\,(\varphi)$ прост, то мы должны иметь в противоречие с этим равенством

$$\mathrm{im}\,(\varphi) \subsetneq \mathrm{soc}\,(R_R) \subsetneq A.$$

Таким образом, $R = \mathrm{soc}\,(R_R)$. □

Следующий шаг наших рассуждений состоит в том, чтобы разложить полупростое кольцо в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов. А именно, пусть R — полупростое кольцо и

$$R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$$

— разложение модуля R_R на однородные компоненты (в смысле 8.1.8). Согласно 7.2.3, число однородных компонент, являющихся по определению правыми идеалами, конечно. Мы покажем, что B_j суть двусторонние простые идеалы, аннулирующие друг друга. Предварительно докажем один результат для произвольного кольца R.

8.2.3. ***Лемма.*** *Пусть A — прямое слагаемое в R_R. Тогда двусторонний идеал RA, порожденный A, содержит все правые идеалы кольца R, являющиеся эпиморфными образами A.*

Доказательство. Пусть $R_R = A \oplus B$, и $\pi\colon R \to A$ — соответствующая проекция. Пусть, далее, $\alpha\colon A \to A'$ — эпиморфизм, $A' \subsetneq R_R$ и $\iota'\colon A' \to R_R$ — включение. Тогда $\iota'\alpha\pi \in \mathrm{Hom}_R(R_R, R_R)$. Как было показано в § 3.7, каждый эндоморфизм модуля R_R есть левое умножение. Следовательно, существует такое $c \in R$, что $c^l = \iota'\alpha\pi$. Тогда, в силу равенства $\pi(R) = \pi(A)$, имеем

$$A' = \iota'\alpha\pi(R) = \iota'\alpha\pi(A) = cA \subset RA,$$

что и требовалось доказать. □

Докажем теперь первую часть классической *теоремы Веддербёрна*, полученной им первоначально для алгебр.

8.2.4. ***Теорема.*** *Пусть $R \neq 0$ — полупростое кольцо и*

$$R_R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m, \text{ соотв. } {}_RR = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n,$$

— разложение модуля R_R, соотв. ${}_RR$, на однородные компоненты (см. 8.1.8). Тогда

(a) *B_j, $j = 1, \ldots, m$, — простые двусторонние идеалы в R;*

(b) *$n = m$ и (после надлежащей перенумерации) $B_j = C_j$, $j = 1, \ldots, m$;*

(c) *$B_iB_j = \delta_{ij}B_i$, $i, j = 1, \ldots, m$;*

(d) *B_i, рассматриваемые сами по себе, являются простыми кольцами с единицей;*

(e) *разложение R в прямую сумму простых двусторонних идеалов определено однозначно с точностью до перестановки.*

Доказательство. (a) Покажем сперва, что если E — простой подмодуль в B_i, то $RE = B_i$. Для всякого $r \in R$ отображение

$$E \ni x \longmapsto rx \in rE$$

есть эпиморфизм. Так как E прост, то это либо нулевое отображение, т. е. $rE = 0$, либо изоморфизм, т. е. $E \cong rE$. В обоих случаях $rE \subseteq B_i$. Таким образом, $RE \subseteq B_i$. Обратно, если $E \cong E'$ (т. е. $E, E' \in \Omega_i$), то, согласно 8.2.3, E' имеет вид $E' = rE$, откуда $B_i \subseteq RE$. В итоге получаем $RE = B_i$.

Поскольку $B_i = \sum_{E \in \Omega_i} E$, то мы имеем

$$RB_i = \sum_{E \in \Omega_i} RE = \sum_{E \in \Omega_i} B_i = B_i.$$

Значит, B_i — двусторонний идеал. Пусть теперь $A \neq 0$ — двусторонний идеал, содержащийся в B_i. Тогда модуль A_R полупрост, и, следовательно, существует простой правый идеал E, для которого

$$E \subseteq A_R \subseteq B_i.$$

Поэтому

$$B_i = RE \subseteq RA = A \subseteq B_i,$$

откуда $A = B_i$. Таким образом, B_i как двусторонний идеал прост.

(b) Аналогично C_j, $j = 1, \ldots, n$, — также простые двусторонние идеалы. Поскольку B_iC_j — двусторонний идеал, то он содержится как в B_i, так и в C_j. Но оба они просты, так что либо $B_iC_j = 0$, либо $B_i = B_iC_j = C_j$. Для каждого фиксированного $i_0 = 1, \ldots, m$ должно существовать по крайней мере одно j_0, для которого $B_{i_0} = B_{i_0}C_{j_0} = C_{j_0}$, ибо в противном случае мы имели бы $B_{i_0}R = \sum_j B_{i_0}C_j = 0$ ↯. Но такое j_0 может существовать только одно, ибо из равенств $B_{i_0} = B_{i_0}C_{j_1} = C_{j_1}$ вытекало бы, что $C_{j_0} = C_{j_1}$ ↯. Так как для каждого C_{j_0}, $j_0 = 1, \ldots, n$, соответственно должно существовать i_0, такое что $B_{i_0} = C_{j_0}$, то утверждение (b) доказано.

(c) Из того что $R = \bigoplus_{i=1}^{m} B_i$, следует, что $RB_j = B_j = \bigoplus_{i=1}^{m} B_iB_j$, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

(d) В силу (c), в B_i двусторонние R-идеалы совпадают с двусторонними B_i-идеалами. Таким образом, B_i просто как кольцо. Пусть $1 = \sum f_i$, $f_i \in B_i$. Тогда, в силу (7.2.3), $B_i = f_iR$ и f_i — идемпотенты из центра R. Для $b = f_ir \in B_i$ имеем тогда $bf_i = f_ib = f_i^2r = f_ir = b$. Таким образом, f_i — единица в B_i.

(e) Доказательство аналогично доказательству утверждения (b). □

8.2.5. ***Определение.*** *Простые двусторонние идеалы B_i, $i=1, \ldots, m$ из теоремы* 8.2.4 *называются блоками кольца R.*

8.2.6. ***Следствие.*** *Пусть кольцо R полупросто. Тогда число его блоков равно числу классов изоморфных простых правых R-модулей и равно числу классов изоморфных простых левых R-модулей.*

Доказательство. Каждый простой правый, соотв. левый, R-модуль изоморфен некоторому правому, соотв. левому, идеалу в R (так как каждый эпиморфизм модуля R_R на циклический правый R-модуль является расщепляющим). Следовательно, достаточно рассмотреть простые правые, соотв. левые, идеалы, а для них наше утверждение следует из 8.2.4. □

8.3. Структура простых колец, обладающих простым односторонним идеалом

Чтобы полностью выяснить структуру полупростых колец, нужно еще исследовать двусторонние простые идеалы B_j, фигурирующие в 8.2.4. По определению B_j суть правые идеалы полупростого кольца R, следовательно, они являются полупростыми правыми R-модулями. Отсюда, в силу 8.2.4 (c), следует, что B_j — полупростые кольца. Речь идет, таким образом, об одновременно простых и полупростых кольцах. Примеры показывают (см. упр. 8), что не каждое простое кольцо полупросто. Так как B_j полупросты и предполагается, что $B_j \neq 0$, то это простые кольца, обладающие простым правым идеалом.

Обратно, как мы сейчас покажем, каждое простое кольцо R, обладающее простым правым идеалом E, будет также полупростым. Пусть B — однородная компонента для E в R_R, т. е. сумма всех изоморфных E правых идеалов в R. Тогда модуль B_R как сумма простых правых идеалов полупрост. Далее, для $r \in R$ и простого правого идеала $E' \subseteq R_R$ произведение rE' либо является изоморфным E' правым идеалом, либо равно 0. Таким образом, B — ненулевой двусторонний идеал в R. В силу простоты кольца R отсюда вытекает, что $B=R$. Объединяя все это вместе (см. также 8.2.4 (a)), получаем, что модуль R_R полупрост.

Рассмотрим теперь структуру таких колец.

Покажем, что каждое такое кольцо изоморфно кольцу эндоморфизмов (= кольцу всех линейных отображений в себя) некоторого конечномерного векторного пространства V над телом K; это кольцо эндоморфизмов изоморфно в свою очередь кольцу квадратных матриц порядка n (где $n=\dim_K(V)$) с элементами из K, и потому его можно считать уже известным.

8.3.1. ***Теорема.*** *Пусть* $V = {}_K V$ *— векторное пространство над телом* K.
(a) *Если* $1 \leqslant \dim_K (V) = n < \infty$, *то* $\mathrm{End}({}_K V)$ *— одновременно простое и полупростое кольцо.*
(b) *Если* $\dim_K (V) = \infty$, *то* $\mathrm{End}({}_K V)$ ***не является ни простым, ни полупростым.***

Доказательство. Заметим, прежде всего, что здесь мы, имея в виду последующую теорему, формулируем результат для случая левого векторного пространства $V = {}_K V$. Соответственно эндоморфизмы V будем записывать справа от аргумента: для $\varphi \in \mathrm{End}({}_K V)$ и $x \in V$ образ x при эндоморфизме φ обозначается через $x\varphi$. Аналогичный результат, конечно, справедлив и для правых векторных пространств.

(a) Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — какой-нибудь базис пространства ${}_K V$. Положим

$$V^{(i)} := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K v_j, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$S := \mathrm{End}({}_K V).$$

Тогда

$$E_i := \{\varphi \mid \varphi \in S \wedge V^{(i)} \subseteq \ker(\varphi)\}$$

— простой правый идеал в S и

$$S_S = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n;$$

$$E_i \cong E_j \text{ для всех } i, j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, S полупросто. Поскольку все E_i изоморфны между собой, то S_S состоит из одной-единственной однородной компоненты и потому S — простое кольцо. Приведенные выше утверждения относительно E_i доказывать здесь не стоит. Речь идет о простых фактах линейной алгебры, проверка которых предоставляется читателю в качестве упражнения.

Доказательство можно провести также с помощью изоморфного S кольца квадратных матриц порядка n с элементами из K. В этом кольце каждая строка[1] — простой правый идеал (а каждый столбец — простой левый идеал), и оно есть прямая сумма n строк (соотв. столбцов), которые все изоморфны.

(b) Положим снова $S := \mathrm{End}({}_K V)$.

Определение. Эндоморфизм $\varphi \in S$ называется *конечномерным*, если $\dim_K (\mathrm{im}(\varphi)) < \infty$.

---

[1] То есть матрица, в которой все элементы, не принадлежащие некоторой строке, нулевые. Аналогично понимается здесь и слово „столбец". — *Прим. ред.*

Легко показать, что множество A всех конечномерных эндоморфизмов есть ненулевой собственный двусторонний идеал в S. Следовательно, S не является простым кольцом. Если бы S было полупростым кольцом, то существовал бы подмодуль $B \subsetneq S_S$, такой что

$$S_S = A \oplus B.$$

Так как A — двусторонний идеал, то мы имели бы

$$BA \subsetneq B \cap A = 0$$

и, значит, $BA = 0$. Пусть $\beta \in B$, $\beta \neq 0$, $v \in V$, $v\beta \neq 0$ и

$$V = Kv\beta \oplus U, \quad U \subsetneq {}_KV.$$

Определим для $k \in K$, $u \in U$ отображение α правилом

$$\alpha\colon\ V \ni kv\beta + u \longmapsto kv\beta \in V.$$

Тогда $\alpha \in A$ (поскольку $\operatorname{im}(\alpha) = Kv\beta$) и $v\beta\alpha = v\beta \neq 0$. Следовательно, $\beta\alpha \neq 0$, в противоречие с тем, что $BA = 0$. □

Как мы уже отмечали, теорема 8.2.4 содержит первую часть известной и важной теоремы Веддербёрна о полупростых кольцах. Сейчас мы переходим ко второй ее части.

8.3.2. ***Теорема.*** *Простое кольцо R, обладающее простым правым идеалом, изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторого конечномерного векторного пространства над телом. Точнее, пусть E — простой правый идеал в R и $K := \operatorname{End}(E_R)$. Тогда K — тело, $E = {}_KE$ — конечномерное левое векторное пространство над K и*

$$R \cong \operatorname{End}({}_KE).$$

Доказательство. Согласно лемме Шура 3.7.5, K — тело и E можно рассматривать как левый K-модуль. Таким образом, E является K-R-бимодулем. Для $y \in E$ рассмотрим отображение

$$y_E^{(л)}\colon\ E \ni x \longmapsto yx \in E,$$

т. е. левое умножение E на y. Очевидно, $y_E^{(л)} \in K$. Для $r \in R$ рассмотрим отображение

$$r_E^{(п)}\colon\ E \in x \longmapsto xr \in E.$$

Ясно, что $r_E^{(п)} \in \operatorname{End}({}_KE)$, ибо для $k \in K$ имеем $k(xr) = (kx)r$.

Покажем, что

$$\Phi\colon\ R \ni r \longmapsto r_E^{(п)} \in \operatorname{End}({}_KE)$$

— кольцевой изоморфизм.

Прежде всего, Φ, очевидно, является кольцевым гомоморфизмом. Так как $\ker(\Phi)$ — двусторонний идеал в R, отличный от R

(ибо $1 \notin \ker(\Phi)$), то из простоты R следует, что $\ker(\Phi) = 0$. Следовательно, Φ — мономорфизм. Остается установить, что Φ — эпиморфизм. Поскольку $E \neq 0$ и RE — двусторонний идеал, то $RE = R$, откуда получаем

(1) $\quad \Phi(R) = \Phi(RE) = \Phi(R)\,\Phi(E).$

Далее, покажем, что $\Phi(E)$ — правый идеал в $R'' := \mathrm{End}({}_K E)$. Пусть $\xi \in R''$ и $x, y \in E$. Тогда

$$y\left(x_E^{(n)}\,\xi\right) = (yx)\,\xi = \left(y_E^{(n)}\,x\right)\xi = y_E^{(n)}\,(x\xi) = y\,(x\xi) = y\,(x\xi)_E^{n},$$

откуда следует, что

$$x_E^{(n)}\,\xi = (x\xi)_E^{(n)} \in \Phi(E),$$

т. е.

(2) $\quad \Phi(E)\,R'' = \Phi(E).$

Наконец, учитывая, что $\Phi(R) \subseteq R''$ и $1_E^{(n)} = 1_E \in \Phi(R)$, получаем

(3) $\quad R'' = \Phi(R)\,R''.$

Из (1) — (3) следует, что

$$R'' = \Phi(R)\,R'' = \Phi(R)\,\Phi(E)\,R'' = \Phi(R)\,\Phi(E) = \Phi(R).$$

Таким образом, действительно $\Phi(R) = R''$.

Так как R — простое кольцо и $R \cong R''$, то и R'' — простое кольцо. Поэтому, согласно 8.3.1, $\dim_K(E) < \infty$, чем и завершается доказательство. □

Помимо этого непосредственного доказательства, в следующем параграфе мы дадим второе доказательство теоремы 8.32 — получим ее как следствие из теоремы плотности.

Сформулируем основное содержание теорем 8.2.4 и 8.3.2 еще раз в несколько ином виде:

8.3.3. *Следствие.* *Всякое полупростое кольцо (с единицей) есть прямая сумма аннулирующих друг друга простых колец, каждое из которых изоморфно некоторому полному кольцу матриц над телом.*

8.3.4. *Следствие.* *Пусть R — простое кольцо, обладающее простым правым идеалом E, и пусть, кроме того, R является конечномерной алгеброй над полем H. Тогда существует изоморфное H подполе K_0 поля $K := \mathrm{End}(E_R)$, такое что $\dim_{K_0}(K) < \infty$.*

Если H алгебраически замкнуто, то $H \cong K = \mathrm{End}(E_R)$.

Доказательство. Определим для $h \in H$ правое умножение

$$h_E^{(n)}\colon\ E \ni x \longmapsto xh \in E.$$

Поскольку $(xh)r = (xr)h$ для $r \in R$, то $h_E^{(n)} \in K$. Поэтому

$$\psi\colon H \ni h \longmapsto h_E^{(n)} \in (K)$$

— кольцевой гомоморфизм. Положим $K_0 := \operatorname{im}(\psi)$. По условию алгебра R_H конечномерна, значит, и алгебра E_H конечномерна.

Так как $h_E^{(n)} x = xh$ для всех $h \in H$, $x \in E$, то базис для E_H над H будет также базисом для ${}_{K_0}E$ над K_0. Отсюда следует, что ${}_{K_0}K$ конечномерно и, следовательно, ${}_{K_0}K$ тоже должно быть конечномерным (ибо $\dim_{K_0}(K) \cdot \dim_K(E) = \dim_{K_0}(E)$).

Поскольку K — конечное алгебраическое расширение K_0, то в случае, когда H, а следовательно, и K_0 алгебраически замкнуты, имеем $K_0 = K$. Таким образом, $H \cong K_0 \cong K$. □

8.4. Теорема плотности

В предыдущих рассуждениях мы обычно имели дело с правым R-модулем $M = M_R$. При этом R-гомоморфизмы модуля M записывались слева от элементов из M. В частности, если $S := \operatorname{End}(M_R)$ — кольцо эндоморфизмов модуля M, то M можно рассматривать как S-R-бимодуль. Такой способ записи целесообразен во многих случаях, но не во всех. Так например, он не удобен в случае рассмотрений, при которых исходят из произвольной аддитивной группы M и кольца $T := \operatorname{End}(M_{\mathbf{Z}})$ всех ее эндоморфизмов, а как раз этот случай будет нас интересовать в дальнейшем.

Чтобы показать, как систему записи, использовавшуюся до сих пор, можно свести к системе записи, которая будет применяться ниже, и какое значение имеют последующие результаты, мы сделаем несколько предварительных замечаний, причем сначала ничего нового не предполагается.

8.4.1. ***Определение.*** *Пусть R, соотв. R°, — кольцо с умножением $\cdot$, соотв. $\circ$. Кольцо R° называется кольцом, противоположным к R, если*

(1) *аддитивная группа у R и R° одна и та же;*
(2) $\forall r, s \in R\,[r \cdot s = s \circ r]$.

8.4.2. Замечания. (a) *Существует ровно одно кольцо R°, противоположное к R.*
(b) $R^{\circ\circ} = R$.
(c) *R коммутативно* $\Leftrightarrow R = R^\circ$.

Доказательство. (a) *Существование* R°. Положим $(R^\circ, +) := (R, +)$ и

$$s \circ r := r \cdot s, \quad r, s \in R.$$

Тогда R° будет кольцом, противоположным к R.

Единственность. Пусть R^* — также противоположное к R кольцо с умножением $*$. Тогда по определению

$$(R^*, +) = (R, +) = (R^\circ, +).$$

Далее, $s * r = r \cdot s = s \cdot r$ для всех $r, s \in R$. Следовательно, $R^* = R^\circ$.

Доказать утверждения (b) и (c) предоставляется читателю в качестве упражнения. □

Далее, из определения следует, что все свойства кольца R переносятся на R°, с заменой „сторон".

8.4.3. Замечание. *Пусть $M = M_R$. При помощи определения*

$$r \circ m := mr \text{ для } m \in M,\ r \in R^\circ$$

M превращается в левый R°-модуль ${}_{R^\circ}M$. В точности те аддитивные подгруппы в M, которые являются подмодулями в M_R, будут подмодулями и в ${}_{R^\circ}M$.

Доказательство. При доказательстве того, что $M = {}_{R^\circ}M$, мы ограничимся лишь проверкой закона ассоциативности:

$$\begin{aligned} r_1 \circ (r_2 \circ m) = r_1 \circ (mr_2) &= (mr_2) r_1 \\ &= m(r_2 r_1) = (r_2 r_1) \circ m = (r_1 \cdot r_2) \circ m \end{aligned}$$

для всех $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$.

Далее, $U \subseteq M_R \Rightarrow r \cdot U = Ur \subset U$ для всех $r \in R \Rightarrow U \subseteq {}_{R^\circ}M$. Аналогично $U \subseteq {}_{R^\circ}M \Rightarrow U \subseteq M_R$.

Итак, все свойства M_R переносятся на ${}_{R^\circ}M$ (с заменой сторон). □

Теперь, после того как мы уяснили роль *замены сторон*, предположим, что $M = {}_R M$. Далее, пусть $T := \mathrm{End}(M_Z)$ (= кольцо всех эндоморфизмов группы M), причем эндоморфизмы должны применяться слева, так что мы имеем также $M = {}_T M$. Тогда для каждого $r \in R$ левое умножение

$$r^{(л)}\colon\ M \ni x \longmapsto rx \in M$$

будет элементом из T и отображение

$$\psi\colon\ R \ni r \longmapsto r^{(л)} \in T,$$

как легко проверить, является кольцевым гомоморфизмом.

Кольцо $R^{(л)} := \mathrm{im}(\psi)$ называется *кольцом левых умножений* модуля ${}_R M$. Ядро $\ker(\psi)$ представляет собой двусторонний идеал в R, состоящий из всех $r \in R$, таких что $rM = 0$.

8.4.4. ***Определение.*** *Модуль ${}_R M$ называется точным, если*

$$\forall r \in R\,[rM = 0 \Rightarrow r = 0] \Leftrightarrow \ker(\psi) = 0.$$

Для точных модулей кольцо R можно отождествить с $R^{(л)}$, так что в этом случае $R \subseteq T$.

8.4.5. *Определение.* *Пусть T — произвольное кольцо и $A \subset T$ (т. е. A — подмножество в T). Множество*

$$\mathrm{cen}_T(A) := \{t \mid t \in T \wedge \forall a \in A\,[at = ta]\}$$

называется централизатором A в T.

Непосредственно ясно, что $\mathrm{cen}_T(A)$ — унитарное подкольцо в T и что $\mathrm{cen}_T(T)$ совпадает с центром T.

8.4.6. *Лемма.* *Пусть $M = {}_KM$, $T := \mathrm{End}(M_Z)$, $S := \mathrm{End}({}_RM)$ (всё применяется слева). Тогда*
(a) $S = R' := \mathrm{cen}_T(R^{(л)})$;
(b) $R^{(л)} \subset R'' := \mathrm{cen}_T(\mathrm{cen}_T(R^{(л)}))$;
(c) $R' = R''' := \mathrm{cen}_T(\mathrm{cen}_T(\mathrm{cen}_T(R^{(л)})))$.

Доказательство. (a) „$S \subseteq \mathrm{cen}_T(R^{(л)})$“: Пусть $\sigma \in S$. Тогда для всех $r \in R$, $x \in M$ имеем $\sigma(rx) = r(\sigma x)$. Следовательно, $\sigma r^{(л)} = r^{(л)}\sigma \Rightarrow \sigma \in \mathrm{cen}_T(R^{(л)})$. „$\mathrm{cen}_T(R^{(л)}) \subseteq S$“: $\tau \in \mathrm{cen}_T(R^{(л)}) \Rightarrow \tau r^{(л)} = r^{(л)}\tau$ для всех $r \in R \Rightarrow \tau(rx) = r(\tau x) \Rightarrow \tau \in S$.

(b) и (c) следуют из определения централизатора. □

В связи с этой леммой возникает интересный вопрос: при каких условиях имеет место равенство $R^{(л)} = R''$ и какие соотношения между $R^{(л)}$ и R'' имеют место в случае, когда $S^{(л)} \neq R''$? Заметим при этом, что $R^{(л)}$ и R'' зависят, разумеется, от $M = {}_RM$, хоть это и не отражено в записи.

8.4.7. *Примеры.* 1. Если $M = {}_RM \neq 0$ — свободный R-модуль, то ${}_RM$ — точный R-модуль и $R^{(л)} = R''$. (Упражнение для читателя.)

2. Пусть ${}_RM = {}_Z\mathbf{Q}$. Тогда $\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}^{(л)}$ и $S = \mathbf{Z}' = \mathbf{Z}'' \cong \mathbf{Q}$. (Упражнение для читателя.)

3. Пусть $V = V_K$ — бесконечномерное векторное пространство и R — подкольцо в $T := \mathrm{End}(V_K)$, порожденное тождественным отображением и всеми конечномерными линейными отображениями. Тогда
(a) $V = {}_RV$ есть простой R-модуль;
(b) $R' = \mathrm{End}({}_RV) = K^{(п)}$ $(\cong K)$;
(c) $R^{(л)} = R \neq R'' = \mathrm{End}(V_{R'})$;
(d) для любого конечного числа элементов $v_1, \ldots, v_t \in V$ и любого $\sigma \in R''$ существует $r \in R$, такое что $\sigma v_i = rv_i$, $i = 1, \ldots, t$.

Доказательство утверждений (a) — (c) предоставляется читателю в качестве упражнения; утверждение (d) — частный случай приводимой ниже теоремы плотности.

8.4.8. *Определение.* *Пусть R и S — кольца, и пусть ${}_RM$ и ${}_SM$ — модули с одной и той же абелевой группой. Модуль ${}_RM$ называется*

плотным в ${}_SM$, *если для любого конечного числа элементов* $x_1, \ldots, x_t \in M$ *и любого* $s \in S$ *найдется такое* $r \in R$, *что* $sx_i = rx_i$, $i = 1, \ldots, t$.

8.4.9. ***Теорема.*** *Каждый полупростой модуль* ${}_RM$ *плотен в* ${}_{R''}M$.

Доказательство проведем в три шага.

Шаг 1. Пусть вначале $N = {}_RN$ — произвольный модуль и U — прямое слагаемое в N, т. е. $N = U \oplus N_1$. Пусть $R'' = R''_N$ — второй централизатор R относительно N.

Утверждение: $R''U = U$, т. е. U есть R''-подмодуль в ${}_{R''}N$. Действительно, пусть π — проекция N на U и η — вложение U в N. Тогда $\eta\pi \in R' = \mathrm{Hom}_R(N, N)$ и $\mathrm{im}(\eta\pi) = U$. Поэтому для $r'' \in R''$ и $u \in U$ имеем

$$r''u = r''\eta\pi(u) = \eta\pi r''(u) = \eta\pi(r''u) \in U,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь модуль N полупрост и $x \in N$. Тогда Rx — прямое слагаемое в N и $Rx = R''Rx = R''x$. Следовательно, для каждого $x \in N$ и каждого $r'' \in R''$ найдется такое $r_0 \in R$, что $r_0x = r''x$.

Шаг 2. Пусть $M = {}_RM$ — полупростой модуль и $N := \coprod_{i=1}^{n} M_i$, где $M_i = M$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда (см. гл. 4)

$$N = \coprod_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i', \text{ где } M_i' \cong M_i = M.$$

Значит, модуль N есть прямая сумма полупростых модулей M_i' и потому (см. 8.1.5) сам полупрост. Обозначим второй централизатор R относительно M, соотв. N, через R''_M, соотв. R''_N.

Утверждение. Для $r'' \in R''_M$ и $(x_1 \ldots x_n) \in N$ с помощью определения

$$\hat{r}''(x_1 \ldots x_n) := (r''x_1 \ldots r''x_n)$$

N превращается в R''_M-модуль, и отображение

$$\hat{r}'' \colon N \ni (x_1 \ldots x_n) \longmapsto (r''x_1 \ldots r''x_n) \in N$$

является элементом из R''_N. (Более того, отображение $R''_M \ni r'' \longmapsto \hat{r}'' \in R''_N$ есть кольцевой мономорфизм.)

Модульные свойства очевидны. Покажем, что $\hat{r}'' \in R''_N$. Пусть

$$\pi_i \colon N \to M_i \text{ и } \eta_i \colon M_i \to N$$

— канонические проекции и включения (см. гл. 4). Тогда

$$r''\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = r''x_i = \pi_i \hat{r}''(x_1 \ldots x_n),$$
$$\hat{r}'' \cdot \eta_i x_i = \hat{r}''(0 \ldots 0 x_i 0 \ldots 0) = \eta_i r'' x_i,$$

т. е. $r''\pi_i = \pi_i \hat{r}''$, $\hat{r}''\eta_i = \eta_i r''$.

Поскольку $\sum_{i=1}^{n} \eta_i \pi_i = 1_N$, то для произвольного $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(N, N)$ мы имеем

$$\varphi = 1_N \varphi 1_N = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_i \pi_i \varphi \eta_j \pi_j,$$

причем $\pi_i \varphi \eta_j \in \mathrm{Hom}_R(M, M)$ (ибо $M_i = M$). Поэтому

$$\hat{r}''\varphi = \hat{r}'' \sum_i \sum_j \eta_i \pi_i \varphi \eta_j \pi_j = \sum_i \sum_j \eta_i r''(\pi_i \varphi \eta_j)\pi_j$$
$$= \sum_i \sum_j \eta_i (\pi_i \varphi \eta_j) r'' \pi_j = \left(\sum_i \sum_j \eta_i \pi_i \varphi \eta_j \pi_j \right) \hat{r}'' = \varphi \hat{r}'',$$

что и требовалось доказать.

Шаг 3. Пусть теперь даны $x_1, \ldots, x_n \in M$ и $r'' \in R''_M$. Согласно шагу 1, примененному к

$$N := \prod_{i=1}^{n} M_i, \text{ где } M_i = M \text{ для } i = 1, \ldots, n,$$

а также к $x = (x_1, \ldots, x_n) \in N$ и $\hat{r}'' \in R''_N$ (где $\hat{r}''$ — элемент, соответствующий элементу r'' в смысле шага 2), найдется такое $r_0 \in R$, что

$$r_0 x = (r_0 x_1 \ldots r_0 x_n) = \hat{r}'' x = (r'' x_1 \ldots r'' x_n).$$

Таким образом,

$$r_0 x_i = r'' x_i, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad \square$$

8.4.10. ***Следствие.*** *Если модуль* ${}_R M$ *прост и* M *конечномерен над* $K = \mathrm{End}({}_R M)$, *то* $R^{(л)} = R''$.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — базис для ${}_K M$. Тогда для каждого $\sigma \in R''$ найдется такое $r \in R$, что $\sigma x_i = r x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Так как σ и $r^{(л)}$ — линейные отображения, то $\sigma = r^{(л)}$; значит, $R'' \subseteq R^{(л)}$. С другой стороны, $R^{(л)} \subseteq R''$, поэтому $R^{(л)} = R''$. $\square$

8.4.11. ***Следствие.*** *Если* ${}_R M$ *прост, а* ${}_R R$ *артинов, то* M *конечномерен над* K *и* $R^{(л)} = R''$.

Доказательство. Согласно 8.4.10, достаточно показать, что ${}_KM$ конечномерен. Допустим, что это не так. Тогда в ${}_KM$ найдется счетное множество линейно-независимых элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Положим

$$A_n := \{a \mid aR \wedge ax_1 = \ldots = ax_n = 0\}.$$

Ясно, что A_n — левый идеал в R. Так как (в силу 8.4.9) в A существуют такие a_n, что $a_n x_{n+1} \neq 0$, то $A_n \supsetneq A_{n+1}$ и, следовательно, существует бесконечная цепь левых идеалов

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq A_3 \supsetneq \ldots,$$

что противоречит артиновости ${}_RR$. □

В качестве следствия теоремы 8.4.9 докажем еще раз структурную теорему для простых колец (теорему 8.3.2).

8.4.12. *Следствие.* *Всякое простое кольцо R, обладающее простым левым идеалом, изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторого конечномерного векторного пространства над телом.*

Доказательство. Как было показано в начале § 8.3, кольцо R полупросто, а значит, согласно 8.1.6, артиново (с обеих сторон). Пусть ${}_RM$ — простой левый идеал в R. Тогда

$$\psi\colon R \to R_M^{(n)}$$

— изоморфизм. Действительно, $\ker(\psi)$ как двусторонний идеал в простом кольце R равен 0, ибо $1 \notin \ker(\psi)$. Поэтому наше утверждение следует из 8.4.11. □

Упражнения

1. a) Пусть p — простое число и $n \in \mathbf{N}$. Каков наибольший полупростой $\mathbf{Z}$-подмодуль в $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$?
b) Каков наименьший $\mathbf{Z}$-подмодуль U в $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, для которого фактормодуль $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})/U$ полупрост?
(c) Указать пример такого модуля M и такого его подмодуля U, что M не полупрост, но M/U и U полупросты.

2. Пусть R — кольцо. Обозначим через $\operatorname{clis}(R)$ число классов изоморфных простых правых R-модулей. (В классе всех простых правых R-модулей „$\cong$" есть отношение эквивалентности; класс изоморфизма — это класс эквивалентности относительно $\cong$.)
a) Дать для каждого $n \in \mathbf{N}$ пример кольца R с $\operatorname{clis}(R) = n$.
b) Указать пример кольца, для которого $\operatorname{clis}(R) = \infty$.
c) Возможен ли случай $\operatorname{clis}(R) = 0$?

3. Пусть e — идемпотентный элемент кольца R. Показать, что
a) $\operatorname{End}(e R_R) \cong eRe$;
b) Если R просто и eRe — тело, то eR — простой правый идеал в R.

4. Пусть R_i, $i=1, \ldots, n$, — кольца и $R := \prod_{i=1}^{n} R_i$ (с покомпонентным сложением и умножением).
a) Показать, что R — полупростое кольцо $\Leftrightarrow \forall i=1, \ldots, n$ [R_i полупросты]
b) Верно ли a) для случая бесконечного произведения?

5. a) Пусть V_K — векторное пространство счетной размерности. Показать что идеал, состоящий из всех конечномерных эндоморфизмов V_K, — единственный ненулевой собственный двусторонний идеал в $\mathrm{End}\,(V_K)$.
b) Верно ли a), если размерность V несчетна?

6. Доказать, что если модуль $M=M_R$ полупрост и $S := \mathrm{End}\,(M_R)$, то и модуль ${}_SM$ полупрост.

7. Пусть M_R — полупростой R-модуль с конечным числом однородных компонент:

$$M_R = \bigoplus_{j=1}^{n} B_j.$$

Показать, что

a) $S := \mathrm{End}\,(M_R) = \bigoplus_{j=1}^{n} S_j$, где S_j — двусторонние идеалы в S и $S_j \cong \mathrm{End}\,(B_{jR})$;

b) если модуль M_R конечно-порожден, то кольцо S полупросто;

c) если M_R конечно-порожден и все его простые подмодули изоморфны, то S одновременно просто и полупросто;

d) если M_R не является конечно-порожденным, то S ни просто, ни полупросто.

8. Пусть $K := \mathbf{R}(x)$ — поле рациональных функций от x с вещественными коэффициентами. Пусть, далее, для $k \in K$

$$k' := \frac{d}{dx}(k)$$

— обычная производная и $R := K[y]$ — аддитивная группа всех многочленов от y с коэффициентами из K. Определим в $K[y]$ (некоммутативное) умножение индукцией по $n=0, 1, 2, \ldots$ при фиксированном $m=0, 1, 2, \ldots$:

$$(ay^0)(by^m) := aby^m, \quad a, b \in K,$$
$$(ay^n)(by^m) := ay^{n-1}(by^{m+1} + by^m) \text{ для } n > 0.$$

Кроме того, потребуем выполнения законов ассоциативности и дистрибутивности. Доказать следующие утверждения:
a) R — простое кольцо. (*Указание.* Если двустороннему идеалу кольца R принадлежит многочлен степени $n \geqslant 1$, то ему принадлежит и некоторый многочлен степени $n-1$.)

b) R не содержит ни правых, ни левых простых идеалов и потому не полупрост.

9. Доказать утверждения примеров 8.4.7.

10. Пусть $M=M_R$.
a) Показать, что M полупрост $\Leftrightarrow$ в M нет собственных существенных подмодулей.
b) Пусть M конечно-порожден. Показать, что M полупрост $\Leftrightarrow$ в M нет существенных максимальных подмодулей.
c) Дать пример неполупростого модуля, не имеющего существенных максимальных подмодулей.

9. Радикал и цоколь

Уже на ранних порах развития теории колец было доказано, что во всякой конечномерной алгебре A существует двусторонний нильпотентный идеал B (идеал B называется нильпотентным, если $B^n = 0$ для некоторого натурального числа n), такой что A/B — полупростая алгебра.

Поэтому при исследовании конечномерной алгебры A можно выделить три основных пункта:

1° изучение полупростой алгебры A/B (с помощью теории полупростых алгебр);

2° изучение нильпотентного идеала B;

3° изучение связи между A/B и A, определяемой эпиморфизмом $A \to A/B$; в частности, возникает вопрос о „поднятии" свойств A/B в A.

Так как такой подход к исследованию конечномерных алгебр оказался очень плодотворным, естественно возникло желание найти для произвольного кольца или модуля какой-то аналог идеала B. Мы не будем здесь останавливаться на интересной истории развития этого вопроса. Скажем только, что это развитие привело к современному понятию радикала, которому и посвящена эта глава.

Радикал модуля M_R, обозначаемый через $\operatorname{rad}(M_R)$, определяется как пересечение всех максимальных подмодулей M_R, или, что то же самое, как сумма всех косущественных подмодулей M_R. Для радикала выполняется соотношение $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad}(M)) = 0$, и $\operatorname{rad}(M)$ содержится в каждом подмодуле $U \subsetneq M$, для которого $\operatorname{rad}(M/U) = 0$. Здесь также можно выделить три пункта, аналогичных указанным выше, хотя фактормодуль $M/\operatorname{rad}(M)$, вообще говоря, уже не будет полупростым.

Дуальным к понятию радикала является понятие цоколя. Цоколь модуля M_R, обозначаемый через $\operatorname{soc}(M_R)$, — это сумма всех минимальных (= простых) подмодулей M_R, а значит наибольший полупростой подмодуль в M_R. Он равен пересечению всех существенных подмодулей в M_R.

9.1. Определение радикала и цоколя

9.1.1. ***Теорема.*** *Пусть* $M = M_R$. *Тогда*

(a) $\sum_{A \subset^{\oplus} M} A = \bigcap_{\substack{B \subset M \\ B \text{ максимален}}} B = \bigcap_{\substack{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \\ N_R \text{ полупрост}}} \ker(\varphi)$;

(b) $\bigcap_{A \subset^{\oplus} M} A = \sum_{\substack{B \subset M \\ B \text{ минимален} \\ (= B \text{ прост})}} B = \sum_{\substack{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(N, M) \\ N_R \text{ полупрост}}} \mathrm{im}(\varphi)$.

Доказательство. (a) Обозначим три подмодуля в M, равенство которых нужно доказать, через U_1, U_2 и U_3 соответственно.

„$U_2 \subset U_1$“: Пусть $a \in U_2$. Предположим, что aR не является косущественным подмодулем в M. Тогда, в силу 5.1.4, найдется максимальный подмодуль C в M, такой что $a \notin C$ и, значит, $a \notin U_2$ ↯. Следовательно, aR — косущественный подмодуль и потому $a \in aR \subset U_1$.

„$U_3 \subset U_2$“: Пусть B — максимальный подмодуль в M и ν_B: $M \twoheadrightarrow M/B$ — естественный эпиморфизм M на простой модуль M/B. Тогда $\ker(\nu_B) = B$, откуда следует, что

$$U_3 \subset \bigcap_{\substack{B \subset M \\ B \text{ максимален}}} \ker(\nu_B) = \bigcap_{\substack{B \subset M, \\ B \text{ максимален}}} B = U_2.$$

„$U_1 \subset U_3$“: Согласно 5.1.3(c), для каждого гомоморфизма φ: $M \to N$ мы имеем $A \subset^{\oplus} M \Rightarrow \varphi(A) \subset^{\oplus} N$. Если N полупрост, то единственным косущественным подмодулем в N является 0 и потому $\varphi(A) = 0$, т. е. $A \subset \ker(\varphi)$. Следовательно, $U_1 \subset U_3$.

(b) Снова обозначим подмодули, о которых идет речь, через U_1, U_2 и U_3 соответственно.

„$U_2 \subset U_1$“: B — простой подмодуль в $M \vee A \subset^{\oplus} M \Rightarrow A \cap B \neq 0 \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow B \subset A \Rightarrow U_2 \subset U_1$.

„$U_3 \subset U_2$“: Так как гомоморфный образ полупростого модуля также полупрост и сумма полупростых модулей полупроста (см. 8.1.5), то U_3 является полупростым подмодулем в M и, значит, равен сумме некоторых простых подмодулей в M. Следовательно, $U_3 \subset U_2$, ибо U_2 — сумма всех простых подмодулей в M.

„$U_1 \subset U_3$“: Докажем сначала, что модуль U_1 полупрост. Пусть $C \subset U_1$ и C' — $\cap$-дополнение для C в M. Тогда $C + C' = C \ominus C' \subset^{\oplus} M$ (в силу 5.2.5) и, таким образом, $U_1 \subset C + C'$. Из закона модулярности (заметим, что $C \subset U_1$) вытекает, что $U_1 = C \oplus (C' \cap U_1)$. Следовательно, U_1 полупрост. Поэтому если $\iota : U_1 \to M$ — включение, то $U_1 = \mathrm{im}(\iota) \subset U_3$. □

9.1.2. ***Определение.*** (1) *Заданный в* 9.1.1(a) *подмодуль модуля* M *называется его* ***радикалом*** (*обозначение*: $\mathrm{rad}(M)$).

(2) *Заданный в* 9.1.1(b) *подмодуль модуля* M *называется его цоколем (обозначение*: $\operatorname{soc}(M)$).

9.1.3. ***Следствие.*** (a) *Для всякого* $m \in M_R$

$$mR \subsetneq^{\circ} M \Leftrightarrow m \in \operatorname{rad}(M).$$

(b) $\operatorname{soc}(M)$ — *наибольший полупростой подмодуль в* M.

Доказательство. (a) $mR \subsetneq^{\circ} M \Rightarrow m \in mR \subsetneq \operatorname{rad}(M)$ (по 9.1.1). Обратная импликация $m \in \operatorname{rad}(M) \Rightarrow mR \subsetneq^{\circ} M$ была уже установлена при доказательстве теоремы 9.1.1(a) (в пункте „$U_2 \subsetneq U_1$“).

(b) По определению, $\operatorname{soc}(M)$ есть сумма простых подмодулей и потому полупрост. Пусть C — произвольный полупростой подмодуль в M. Тогда C как образ при включении $\iota\colon C \to M$ содержится в $\operatorname{soc}(M)$. Таким образом, $\operatorname{soc}(M)$ — наибольший полупростой подмодуль в M. □

Мы подошли теперь к основной теореме о радикале и цоколе.

9.1.4. ***Теорема.*** (a) $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \varphi(\operatorname{rad}(M)) \subsetneq \operatorname{rad}(N) \wedge \varphi(\operatorname{soc}(M)) \subsetneq \operatorname{soc}(N)$.

(b) $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad}(M)) = 0 \wedge \forall C \subsetneq M\,[\operatorname{rad}(M/C) = 0 \Rightarrow \operatorname{rad}(M) \subsetneq C]$, *т. е.* $\operatorname{rad}(M)$ — *наименьший среди подмодулей* C *в* M, *для которых* $\operatorname{rad}(M/C) = 0$.

(c) $\operatorname{soc}(\operatorname{soc}(M)) = \operatorname{soc}(M) \wedge \forall C \subsetneq M\,[\operatorname{soc}(C) = C \Rightarrow C \subsetneq \operatorname{soc}(M)]$, *т. е.* $\operatorname{soc}(M)$ — *наибольший подмодуль в* M, *совпадающий со своим цоколем.*

Доказательство. (a) Из равенства $\operatorname{rad}(M) \sum_{A \subsetneq^{\circ} M} A$ следует, что $\varphi(\operatorname{rad}(M)) = \sum_{A \subsetneq^{\circ} M} \varphi(A)$. Но, как показано в 5.1.3, $\varphi(A) \subsetneq^{\circ} N$. Следовательно, $\varphi(\operatorname{rad}(M)) \subsetneq \operatorname{rad}(N)$. Поскольку образ полупростого подмодуля также полупрост, то $\varphi(\operatorname{soc}(M)) \subsetneq \operatorname{soc}(N)$.

(b) Утверждение. Максимальные подмодули Δ в M/C получаются как образы максимальных подмодулей $B \subsetneq M$, для которых $C \subsetneq B$, при гомоморфизме $\nu\colon M \to M/C$.

Это следует из 3.1.13 или доказывается непосредственно следующим образом: $\nu\nu^{-1}(\Delta) = \Delta \cap \operatorname{im}(\nu) = \Delta$; пусть $B := \nu^{-1}(\Delta)$; тогда $\nu(B) = \Delta$ и $C \subsetneq B \subsetneq M$; так как Δ максимален, то $(M/C)/\Delta = (M/C)/(B/C) \cong M/B$ прост. Значит, B — максимальный подмодуль в M.

Утверждение. Если $(B_i \mid i \in I)$ — произвольное семейство подмодулей в M и $\forall i \in I\,[C \subsetneq B_i]$, то

$$\bigcap_{i \in I} (B_i/C) = \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big)/C.$$

Действительно, ясно, что $(\bigcap B_i)/C \subseteq \bigcap (B_i/C)$. Обратно, пусть $v+C \in \bigcap (B_i/C)$. Тогда для каждого i найдется такое $b_i \in B_i$, что $v+C=b_i+C$, $\Rightarrow v=b_i+c_i \in B_i+C=B_i$ для всех $i \in I \Rightarrow v+C \in (\bigcap B_i)/C$.

Применяя оба эти утверждения, получаем

$$\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad}(M)) = \bigcap_{\substack{\Delta \subsetneq M/\operatorname{rad}(M) \\ \Delta \text{ максимален}}} \Delta = \bigcap_{\substack{B \subsetneq M \\ B \text{ максимален} \\ \operatorname{rad}(M) \subsetneq B}} (B/\operatorname{rad}(M))$$

$$= \Big(\bigcap_{\substack{B \subsetneq M \\ B \text{ максимален} \\ \operatorname{rad}(M) \subsetneq B}} B\Big)/\operatorname{rad}(M)$$

$$= \Big(\bigcap_{\substack{B \subsetneq M \\ B \text{ максимален}}} B\Big)/\operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(M)/\operatorname{rad}(M) = 0.$$

Если теперь $C \subsetneq M$ и $\operatorname{rad}(M/C)=0$, то для отображения $\nu\colon M \to M/C$ в силу (a) имеем

$$\nu(\operatorname{rad}(M)) \subset \operatorname{rad}(M/C) = 0,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{rad}(M) \subseteq \ker(\nu) = C.$$

(c) Полупростой модуль совпадает со своим цоколем. Отсюда следует, что $\operatorname{soc}(\operatorname{soc}(M)) = \operatorname{soc}(M)$, так как $\operatorname{soc}(M)$ — наибольший полупростой подмодуль в M. Если $\operatorname{soc}(C)=C$, то C полупрост и, значит, $C \subseteq \operatorname{soc}(M)$. □

Утверждения (a) — (c) этой теоремы можно сформулировать на языке функторов и получить таким образом определения *предрадикала* ((a)), *радикала* ((a) и (b)) и *цоколя* ((a) и (c)) в категориях.

9.1.5. ***Следствия.*** (a) $\varphi\colon M \to N$ — *эпиморфизм* $\wedge \ker(\varphi) \subsetneq^{\circ} M \Rightarrow$

$$\varphi(\operatorname{rad}(M)) = \operatorname{rad}(N) \wedge \operatorname{rad}(M) = \varphi^{-1}(\operatorname{rad}(N)):$$

$\varphi\colon M \to N$ — *мономорфизм* $\wedge \operatorname{im}(\varphi) \subsetneq^{*} N \Rightarrow$

$$\varphi(\operatorname{soc}(M)) = \operatorname{soc}(N) \wedge \operatorname{soc}(M) = \varphi^{-1}(\operatorname{soc}(N)).$$

(b) $C \subseteq M \Rightarrow \operatorname{rad}(C) \subseteq \operatorname{rad}(M) \wedge \operatorname{soc}(C) \subseteq \operatorname{soc}(M)$.

(c) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i \Rightarrow \operatorname{rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \operatorname{rad} M_i \wedge \operatorname{soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \operatorname{soc}(M_i)$.

(d) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i \Rightarrow M/\operatorname{rad}(M) \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i/\operatorname{rad}(M_i))$.

Доказательство. (a) Согласно 9.1.4, $\varphi(\operatorname{rad}(M)) \subseteq \operatorname{rad}(N)$. Пусть теперь $U \subsetneq^{\circ} N$ и $A+\varphi^{-1}(U)=M$ для $A \subseteq M$. Так как

φ — эпиморфизм, то $\varphi(A)+U=N$. Следовательно, $\varphi(A)=N$ и потому

$$A+\ker(\varphi)=M.$$

Поскольку $\ker(\varphi)\overset{\circ}{\subset}M$, то $A=M$, т. е. $\varphi^{-1}(U)\overset{\circ}{\subset}M$, $\Rightarrow\varphi^{-1}(U)\subset\subset\operatorname{rad}(M)\Rightarrow\varphi(\varphi^{-1}(U))=U\subset\varphi(\operatorname{rad}(M))$. Таким образом, $\operatorname{rad}(N)\subset\subset\varphi(\operatorname{rad}(M))$. Наконец, из равенства $\varphi(\operatorname{rad}(M))=\operatorname{rad}(N)$ с учетом включения $\ker(\varphi)\subset\operatorname{rad}(M)$ получаем

$$\operatorname{rad}(M)=\operatorname{rad}(M)+\ker(\varphi)=\varphi^{-1}\varphi(\operatorname{rad}(M))=\varphi^{-1}(\operatorname{rad}(N)).$$

Для цоколя, снова в силу 9.1.4, $\varphi(\operatorname{soc}(M))\subset\operatorname{soc}(N)$. Если теперь $E\subset N$ прост, то, поскольку $\operatorname{im}(\varphi)\overset{*}{\subset}N$, имеем $E\subset\operatorname{im}(\varphi)$, откуда $\varphi^{-1}(E)\subset\operatorname{soc}(M)$, $\Rightarrow\varphi\varphi^{-1}(E)=E\subset\varphi(\operatorname{soc}(M))\Rightarrow\operatorname{soc}(N)\subset\varphi(\operatorname{soc}(M))$. Наконец, из равенства $\varphi(\operatorname{soc}(M))=\operatorname{soc}(N)$ следует, что

$$\operatorname{soc}(M)=\varphi^{-1}\varphi(\operatorname{soc}(M))=\varphi^{-1}(\operatorname{soc}(N)).$$

(b) Если $\iota\colon C\to M$ — включение, то согласно 9.1.4

$$\operatorname{rad}(C)=\iota(\operatorname{rad}(C))\subset\operatorname{rad}(M)\wedge\operatorname{soc}(C)=\iota(\operatorname{soc}(C))\subset\operatorname{soc}(M).$$

(c) $\operatorname{rad}(M_i)\,|\subset\operatorname{rad}(M)$ (в силу (b)) $\Rightarrow$

$$\sum_{i\in I}\operatorname{rad}(M_i)=\bigoplus_{i\in I}\operatorname{rad}(M_i)\subset\operatorname{rad}(M).$$

Пусть теперь $m=\sum m_i\in\operatorname{rad}(M_i)$ и $\pi_i\colon M\to M_i$ — проекция. Тогда, в силу 9.1.4, $\pi_i(m)=m_i\in\operatorname{rad}(M_i)\Rightarrow m\in\bigoplus\operatorname{rad}(M_i)\Rightarrow$ $\Rightarrow\operatorname{rad}(M)\subset\bigoplus\operatorname{rad}(M_i)\Rightarrow$ наше утверждение. В случае цоколя рассуждения аналогичны.

(d) Мы зададим изоморфизм

$$\varphi\colon M/\operatorname{rad}(M)\to\bigoplus_{i\in I}(M_i/\operatorname{rad}(M_i))$$

в явном виде. Пусть $\sum m_i\in\bigoplus M_i$, где $m_i\in M_i$, — произвольный элемент из M. Положим

$$\varphi((\textstyle\sum m_i)+\operatorname{rad}(M)):=\sum(m_i+\operatorname{rad}(M_i))\in\bigoplus_{i\in I}(M_i/\operatorname{rad}(M_i)).$$

Прежде всего, φ — отображение. Действительно, если $(\sum m_i)+$ $+\operatorname{rad}(M)=(\sum m_i')+\operatorname{rad}(M)$, где $m_i,\ m_i'\in M_i$, то $\sum(m_i-m_i')\in$ $\in\operatorname{rad}(M)$. Учитывая (c), получаем, что $m_i-m_i'\in\operatorname{rad}(M_i)$, откуда $m_i+\operatorname{rad}(M_i)=m_i'+\operatorname{rad}(M_i)$. Следовательно,

$$\sum(m_i+\operatorname{rad}(M_i))=\sum(m_i'+\operatorname{rad}(M_i)).$$

Далее, φ — мономорфизм. Действительно, если

$$\varphi((\Sigma m_i)+\operatorname{rad}(M))=\Sigma(m_i+\operatorname{rad}(M_i))=0,$$

то для каждого из фигурирующих здесь m_i имеем $m_i \in \operatorname{rad}(M_i)$. Поскольку $\operatorname{rad}(M_i) \subsetneq \operatorname{rad}(M)$, отсюда следует, что

$$(\Sigma m_i) + \operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(M).$$

Таким образом, $\ker(\varphi) = 0$.

То что φ — эпиморфизм, очевидно.

Примеры **1.** $\operatorname{rad}(\mathbf{Z}_\mathbf{Z}) = 0$, так как 0 — единственный косущественный идеал в $\mathbf{Z}$ (см. 5.1.2). Поскольку $\mathbf{Z}$ не имеет простых идеалов, то и $\operatorname{soc}(\mathbf{Z}_\mathbf{Z}) = 0$.

2. $\operatorname{rad}(\mathbf{Q}_\mathbf{Z}) = \mathbf{Q}$, потому что для каждого $q \in \mathbf{Q}$ подмодуль $q\mathbf{Z}$ является косущественным в $\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$ (см. 5.1.2). Это равносильно тому, что в $\mathbf{Q}$ нет максимальных подмодулей.

3. Пусть $n \in \mathbf{Z}$, $n > 1$, и

$$n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k},\ p_i \neq p_j \text{ для } i \neq j,\ m_i > 0,$$

— разложение числа n на простые множители. Максимальные идеалы в $\mathbf{Z}$ — это идеалы, порожденные простыми числами. Поэтому максимальными идеалами, содержащими $n\mathbf{Z}$, будут идеалы $p_i\mathbf{Z}$, $i = 1, \dots, k$, причем

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_i\mathbf{Z} = p_1 \dots p_k\mathbf{Z}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rad}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} p_i\mathbf{Z}\right) \Big/ n\mathbf{Z} = p_1 \dots p_k\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},$$

откуда вытекает, что

$$\operatorname{rad}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0 \Leftrightarrow n = p_1 \dots p_k.$$

Для $n = 0$ и $n = 1$ тоже $\operatorname{rad}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$.

Найдем теперь цоколь $\operatorname{soc}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Для $n = 0$ и $n = 1$ он равен 0. Пусть $n > 1$, и пусть n имеет указанное выше разложение. Покажем прежде всего, что $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ прост тогда и только тогда, когда n — простое число. Действительно, если $n = p$ — простое число, то $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ является (как кольцо) полем и потому просто как $\mathbf{Z}$-модуль, а если n имеет хотя бы один собственный делитель q, то $q\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ — ненулевой собственный подмодуль в $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Учитывая, что

$$\frac{n}{p_i}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/p_i\mathbf{Z} \quad (i = 1, \dots, k),$$

получаем, что модули $\frac{n}{p_i}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ являются простыми подмодулями в $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}\mathbf{Z}\right)\Big/n\mathbf{Z}=\frac{n}{p_1p_2\dots p_k}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\subsetneq\operatorname{soc}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

С другой стороны, пусть $q\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ с $n=qn_1$ — простой подмодуль в $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Поскольку

$$q\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z},$$

то n_1 — одно из простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$, скажем p_i. Таким образом, $q=\frac{n}{p_i}$. Отсюда

$$\operatorname{soc}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})=\frac{n}{p_1\dots p_k}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Отметим особо следующие частные случаи:

$$\operatorname{rad}(\mathbf{Z}/p_1\dots p_k\mathbf{Z})=0,\qquad \operatorname{soc}(\mathbf{Z}/p_1\dots p_k\mathbf{Z})=\mathbf{Z}/p_1\dots p_k\mathbf{Z},$$
$$\operatorname{rad}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})=p\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z},\quad \operatorname{soc}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})=p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}.$$

9.2. Дальнейшие свойства радикала

В следующей теореме собраны некоторые дальнейшие свойства радикала.

9.2.1. ***Теорема.*** *Пусть* $M=M_R$.
(a) M *полупрост* $\Rightarrow \operatorname{rad}(M)=0$.
(b) $M\operatorname{rad}(R_R)\subseteq\operatorname{rad}(M)$.
(c) M *конечно-порожден* $\Rightarrow \operatorname{rad}(M)\subsetneq M$. *В частности,* $\operatorname{rad}(R_R)\subsetneq R_R$,
(d) M *конечно-порожден* $\wedge\, A\subseteq\operatorname{rad}(R_R)\ (\Leftrightarrow A\subsetneq R_R)\Rightarrow MA\subsetneq M$ (*лемма Накаямы*).
(e) M *конечно-порожден* $\wedge\, M\neq 0\Rightarrow \operatorname{rad}(M)\neq M$.
(f) $\operatorname{rad}(R_R)$ — *двусторонний идеал в* R.
(g) *Для всякого проективного модуля* P_R

$$\operatorname{rad}(P)=P\operatorname{rad}(R_R).$$

(h) $C\subsetneq M\Rightarrow C+\operatorname{rad}(M)/C\subsetneq\operatorname{rad}(M/C)$.

Доказательство. (a) M полупрост $\Rightarrow$ каждый подмодуль в нем является прямым слагаемым $\Rightarrow 0$ — единственный косущественный подмодуль $\Rightarrow \operatorname{rad}(M)=0$.

(b) Для всякого $m \in M$ отображение φ_m: $R_R \ni r \to mr \in M_R$ есть гомоморфизм. Согласно 9.1.4,

$$m \operatorname{rad}(R_R) = \varphi_m(\operatorname{rad}(R_R)) \subseteq \operatorname{rad}(M)$$
$$\Rightarrow \sum_{m \in M} m \operatorname{rad}(R_R) = M \operatorname{rad}(R_R) \subseteq \operatorname{rad}(M).$$

(c) Пусть $\operatorname{rad}(M) + C = M$. Предположим, что $C \neq M$. Поскольку M конечно-порожден, C содержится в некотором максимальном подмодуле $B \subseteq M$ (см. 2.3.11) $\Rightarrow M = \operatorname{rad}(M) + C \subseteq B$ ↯. Таким образом, $C = M$, а потому $\operatorname{rad}(M) \subseteq M$.

(d) $MA \subseteq M \operatorname{rad}(R_R) \subseteq \operatorname{rad}(M) \subsetneq M \Rightarrow MA \subsetneq M$.

(e) Так как $M \neq 0 \wedge \operatorname{rad}(M) \subsetneq M$, то $\operatorname{rad}(M) \neq M$, ибо из равенства $\operatorname{rad}(M) = M$ следовало бы, что $\operatorname{rad}(M) + 0 = M$ и, значит, $0 = M$.

(f) следует из (b) при $M_R = R_R$.

(g) Пусть (y_i, φ_i) — „проективный базис" в смысле леммы о дуальном базисе 5.4.2. Тогда для $u \in \operatorname{rad}(P)$ имеем $\varphi_i(u) \in \in \operatorname{rad}(R_R)$ (в силу 9.1.4).
Поэтому

$$u = \sum y_i \varphi_i(u) \in P \operatorname{rad}(R_R).$$

Следовательно, $\operatorname{rad}(P) \subseteq P \operatorname{rad}(R_R)$.
Справедливость обратного включения вытекает из (b).

(h) Если ν: $M \to M/C$ — естественный эпиморфизм, то

$$C + \operatorname{rad}(M)/C = \nu(\operatorname{rad}(M)) \subseteq \operatorname{rad}(M/C). \qquad \square$$

Заметим, что в § 9.3 мы воспользуемся (f) для доказательства равенства $\operatorname{rad}(R_R) = \operatorname{rad}({}_R R)$.

Теперь мы хотим показать, что если модуль M артинов, то $M/\operatorname{rad}(M)$ полупрост. Это вытекает из следующей более общей теоремы.

9.2.2. *Теорема.* (a) *Каждый подмодуль в M обладает аддитивным дополнением* $\wedge \operatorname{rad}(M) = 0 \Leftrightarrow M$ *полупрост.*
(b) *M артинов и* $\operatorname{rad}(M) = 0 \Leftrightarrow M$ *полупрост и конечно-порожден.*

Доказательство. (a) „$\Rightarrow$": $C \subseteq M \wedge C'$ — а. д. C в $M \Rightarrow M = C + C'$ (в силу 5.2.4 (a)) $\Rightarrow C \cap C' \subseteq \operatorname{rad}(M) = 0 \Rightarrow M = C \oplus C' \Rightarrow M$ полупрост.

(a) „$\Leftarrow$": Очевидно.

(b) „$\Rightarrow$": Если M артинов, то каждый его подмодуль обладает а. д. Учитывая (a), получаем, что M полупрост. Конечная порожденность M вытекает из его полупростоты и артиновости (см. 8.1.6).

(b) „$\Leftarrow$": Так как M полупрост и конечно-порожден, то M артинов (см. 8.1.6). Ясно, что $\operatorname{rad}(M) = 0$. $\square$

9.2.3. ***Следствие.*** *M артинов $\Rightarrow M/\mathrm{rad}(M)$ полупрост. В частности, R_R артинов $\Rightarrow R/\mathrm{rad}(R_R)$ полупрост.*

Доказательство. Если M артинов, то и $M/\mathrm{rad}(M)$ артинов. Согласно 9.1.4 (b), $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}(M))=0$, поэтому, в силу 9.2.2, $M/\mathrm{rad}(M)$ полупрост. □

Заметим, что в частном случае артинова модуля $M_R=R_R$ фактормодуль $R/\mathrm{rad}(R_R)$ полупрост как правый R-модуль. Согласно 9.2.1 (f), $\mathrm{rad}(R_R)$ — двусторонний идеал. Поэтому $\bar{R}:=R/\mathrm{rad}(R_R)$ полупрост справа и как кольцо. Тогда, как было показано раньше (см. 8.2.1), ${}_{\bar{R}}\bar{R}$ также полупрост. Следовательно, полупрост и ${}_R\bar{R}$. Отсюда, учитывая 9.1.4 (b), получаем включение

$$\mathrm{rad}({}_RR)\subseteq\mathrm{rad}(R_R).$$

По симметрии справедливо и обратное включение. Следовательно, $\mathrm{rad}(R_R)=\mathrm{rad}({}_RR)$. В следующем параграфе это равенство будет доказано для произвольных колец.

9.3. Радикал кольца

Основной результат этого параграфа — доказательство равенства

$$\mathrm{rad}({}_RR)=\mathrm{rad}({}_RR).$$

В качестве подготовки к нему докажем

9.3.1. ***Предложение.*** *Для $A\subseteq R_R$ следующие утверждения эквивалентны:*
(1) $A\subseteq^{\circ}R_R$;
(2) $A\subseteq\mathrm{rad}(R_R)$;
(3) $\forall a\in A$ [$1-a$ *обладает правым обратным в* R].
(4) $\forall a\in A$ [$1-a$ *обладает обратным в* R].

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: По определению радикала.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Согласно 9.2.1 (c), $\mathrm{rad}(R_R)\subseteq^{\circ}R_R$. Следовательно, $A\subseteq^{\circ}R_R$.

„(1) $\Rightarrow$ (3)“: $\forall r\in R[ar+(1-a)r=r]\Rightarrow A+(1-a)R=R\Rightarrow$ $\Rightarrow(1-a)R=R$ (ибо $A\subseteq^{\circ}R_R$) $\Rightarrow$ (3).

„(3) $\Rightarrow$ (4)“: Пусть $(1-a)r=1$. Тогда $r=1+ar=1-(-ar)$. Так как $-ar\in A$, то существует $s\in R$, для которого $rs=(1-(-(-ar))s=1$. Следовательно, r имеет обратный слева $1-a$ и обратный справа s. Но они должны совпадать, поэтому $1=rs=r(1-a)$, т. е. r есть обратный для $(1-a)$.

„(4) $\Rightarrow$ (1)“: $A+B=R_R\Rightarrow 1=a+b$, где $a\in A$, $b\in B$, $\Rightarrow b=1-a\Rightarrow$ существует r, для которого $br=(1-a)r$, $\Rightarrow B=R\Rightarrow$ $\Rightarrow A\subseteq^{\circ}R_R$. □

Замечания. (a) Правые идеалы, обладающие свойством (3) называют *квазирегулярными*.

(b) Естественно, имеет место „левый аналог" этого предложения, который получается, если всюду заменить правую сторону на левую.

9.3.2. ***Теорема.*** $\operatorname{rad}(R_R) = \operatorname{rad}({}_RR)$.

Доказательство. Применяя предложение 9.3.1 к A-$\operatorname{rad}(R_R)$, заключаем, что для A выполнено условие (4). Поскольку A как двусторонний идеал (см. (9.2.1 (*f*)) является также левым идеалом, то выполнено условие (4) левого аналога предложения 9.3.1. Следовательно,

$$\operatorname{rad}(R_R) \subsetneq \operatorname{rad}({}_RR).$$

По симметрии верно и обратное включение. Таким образом,

$$\operatorname{rad}(R_R) = \operatorname{rad}({}_RR). \qquad \square$$

9.3.3. ***Определение.*** $\operatorname{rad}(R) := \operatorname{rad}(R_R) = \operatorname{rad}({}_RR)$.

Вообще говоря, кольцо $R/\operatorname{rad}(R)$ не полупросто. Например, для $R = \mathbf{Z}$ мы имеем $\operatorname{rad}(\mathbf{Z}) = 0$ и потому $\mathbf{Z}/\operatorname{rad}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/0 \cong \mathbf{Z}$, а $\mathbf{Z}$ не полупросто. Для случая когда $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто, можно получить интересные утверждения.

9.3.4. ***Теорема.*** *Если R — кольцо, для которого $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто, то*
(a) *каждый простой правый, соотв. левый, R-модуль изоморфен некоторому подмодулю в $(R/\operatorname{rad}(R))_R$, соотв. ${}_R(R/\operatorname{rad}(R))$;*
(b) *число блоков в $R/\operatorname{rad}(R)$ конечно и равно числу классов изоморфных простых правых R-модулей, а также числу классов изоморфных простых левых R-модулей.*

Доказательство. (a) Каждый циклический правый R-модуль $M_R = mR$ является эпиморфным образом R_R. Поэтому $M \cong R/A$, где $A \subsetneq R_R$. Если теперь M_R прост, то A должен быть максимальным. Следовательно, $\operatorname{rad}(R) \subsetneq A$, и мы получаем, что

$$M \cong R/A \cong (R/\operatorname{rad}(R))/(A/\operatorname{rad}(R)).$$

Поскольку $\bar{R} := R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто, то $\bar{A} := A/\operatorname{rad}(R)$ выделяется прямым слагаемым:

$$\bar{R}_R = \bar{A} \oplus \bar{B},$$

откуда $M_R \cong \bar{B}_R$. Доказательство для левых модулей проводится аналогично.

(b) Как мы знаем, R-подмодули в $\bar{R}_R$ совпадают с правыми идеалами в $\bar{R}$ и два R-подмодуля изоморфны тогда и только

тогда, когда они изоморфны как правые идеалы в $\bar{R}$. Наше утверждение следует поэтому из 7.2.3 и 8.2.6. □

В 9.2.1 было показано, что для произвольного модуля M_R

$$M\,\mathrm{rad}\,(R) \subsetneq \mathrm{rad}\,(M).$$

Дадим здесь достаточные условия для справедливости равенства $M\,\mathrm{rad}\,(R) = \mathrm{rad}\,(M)$.

9.3.5. ***Теорема.*** *Если кольцо $R/\mathrm{rad}\,(R)$ полупросто, то для всякого модуля M_R*
(1) $\mathrm{rad}\,(M) = M\,\mathrm{rad}\,(R)$;
(2) $\mathrm{soc}\,(M) = \mathrm{l}_M(\mathrm{rad}\,(R)) := \{m \mid m \in M \wedge m\,\mathrm{rad}\,(R) = 0\}$.

Доказательство. (1) Поскольку $(M/M\,\mathrm{rad}\,(R))\,\mathrm{rad}\,(R) = 0$, то $M/M\,\mathrm{rad}\,(R)$ можно рассматривать как $R/\mathrm{rad}\,(R)$-модуль. При этом R-подмодули и $R/\mathrm{rad}\,(R)$-подмодули в $M/M\,\mathrm{rad}\,(R)$ совпадают. В силу 8.2.2, $M/M\,\mathrm{rad}\,(R)$ как модуль над полупростым кольцом $R/\mathrm{rad}\,(R)$ полупрост. Следовательно, согласно 9.2.1(a), $\mathrm{rad}\,(M/M\,\mathrm{rad}\,(R)) = 0$. Отсюда на основании 9.1.4 (b) заключаем, что $\mathrm{rad}\,(M) \subset M\,\mathrm{rad}\,(R)$. Обратное включение справедливо всегда (см. 9.2.1 (b)).

(2) С одной стороны, из 9.2.1 (a) и (b) следует, что $\mathrm{soc}\,(M) \subsetneq \subsetneq \mathrm{l}_M(\mathrm{rad}\,(R))$. С другой стороны, $\mathrm{l}_M(\mathrm{rad}\,(R))$ полупрост как $R/\mathrm{rad}\,(R)$-модуль, а значит и как R-модуль. Поэтому имеет место обратное включение $\mathrm{l}_M(\mathrm{rad}\,(R)) \subsetneq \mathrm{soc}\,(M)$. □

9.3.6. ***Определение.*** *Правый, левый или двусторонний идеал кольца R называется ниль-идеалом, если* $\forall a \in A \exists n \in \mathbf{N}\ [a^n = 0]$, *и нильпотентным идеалом, если* $\exists n \in \mathbf{N}\ [A^n = 0]$.

9.3.7. ***Следствие.*** (a) *Каждый односторонний или двусторонний нильпотентный идеал является ниль-идеалом.*
(b) *Сумма двух нильпотентных (правых, левых или двусторонних) идеалов — также нильпотентный идеал.*
(c) *Если модуль R_R нётеров, то каждый двусторонний ниль-идеал нильпотентен.*

Доказательство. (a) Очевидно.

(b) Пусть $A \subsetneq R_R$, $B \subsetneq R_R$ и $A^m = 0$, $B^n = 0$. Тогда $(A+B)^{m+n} = 0$. Действительно, возьмем произвольные элементы $a_i \in A$, $b_i \in B$, $i = 1, \ldots, m+n$. Раскрывая скобки, мы видим, что произведение

$$\prod_{i=1}^{m+n} (a_i + b_i)$$

равно сумме произведений $m+n$ сомножителей, причем в каждом из таких произведений содержится либо не менее m сомножителей

из A, либо не менее n сомножителей из B. Так как A и B — нильпотентные идеалы, то все эти произведения равны нулю, чем наше утверждение и доказано.

(c) Пусть N — двусторонний ниль-идеал в R. Из нётеровости R_R следует, что среди имеющихся в N правых нильпотентных идеалов есть максимальный. Пусть A — такой идеал и $A^n = 0$. В силу (b), A будет даже наибольшим правым нильпотентным идеалом, содержащимся в N. Поскольку для всякого $x \in R$ множество xA является нильпотентным правым идеалом, содержащимся в N, то A — даже двусторонний идеал. Если для некоторого элемента $b \in N$ имеет место включение $(bR)^k \subsetneq A$, то $(bR)^{kn} = 0$ и, значит, $bR \subsetneq A$.

Утверждение: $A = N$. Действительно, предположим, что $A \neq N$, и пусть $b \in N \setminus A$ выбрано так, что идеал

$$\mathrm{r}_R(b, A) := \{r \mid r \in R \wedge br \in A\}$$

максимален[1]. Тогда для любого $x \in R$

$$xb \in N \quad \text{и} \quad \mathrm{r}_R(b, A) \subseteq \mathrm{r}_R(xb, A),$$

поскольку N и A — двусторонние идеалы. Следовательно, для $xb \notin A$

$$\mathrm{r}_R(b, A) = \mathrm{r}_R(xb, A).$$

Пусть для $xb \notin A$ мы имеем $(xb)^k \in A$ и $(xb)^{k-1} \notin A$ (такое k существует, поскольку элемент xb нильпотентен!). Тогда

$$\mathrm{r}_R(b, A) = \mathrm{r}_R((xb)^{k-1}, A).$$

Таким образом, $bxb \in A$ и, следовательно, $(bR)^2 \subseteq A$; здесь используется тот факт, что $xb \in A$, поскольку A — двусторонний идеал. Как было показано вначале, отсюда следует, что $bR \subseteq A$, и, значит, $b \in A$ ↯. □

Рассмотрим, как связаны вновь введенные понятия с понятием радикала.

9.3.8. ***Теорема.*** *Каждый (односторонний или двусторонний) ниль-идеал содержится в радикале.*

Доказательство. Пусть A — правый ниль-идеал, $a \in A$, $a^n = 0$. Тогда

$$(1 + a + \ldots + a^{n-1})(1 - a) = (1 - a)(1 + a + \ldots + a^{n-1}) = 1 - a^n = 1,$$

т. е. $1 - a$ — обратимый элемент. В силу 9.3.1, $A \subseteq \mathrm{rad}(R)$. □

Займемся теперь радикалами артиновых колец.

---

[1] Среди всех правых идеалов такого вида. — *Прим. перев.*

9.3.9. ***Теорема.*** *R_R артинов* $\Rightarrow \operatorname{rad}(R)$ *нильпотентен.*

Доказательство. Для краткости положим $U := \operatorname{rad}(R)$. Поскольку R_R артинов, ряд

$$R \supset U \supset U^2 \supset \dots$$

обрывается, т. е. найдется такое $n \in \mathbf{N}$, что $U^n = U^{n+i}$ $(i \in \mathbf{N})$. Покажем, что $U^n = 0$. Предположим противное, т. е. что $U^n \neq 0$. Тогда множество правых идеалов

$$\Gamma := \{A \mid A \subset R_R \wedge AU^n \neq 0\}$$

непусто, ибо $U \in \Gamma$. В силу предположенной артиновости существует минимальный идеал $A_0 \in \Gamma$. Далее, найдется такой элемент $a_0 \in A_0$, для которого $a_0U^n \neq 0$, а значит и $a_0RU^n \neq 0$. В силу минимальности A_0 имеем $a_0R = A_0$. Поскольку $U^n = U^{n+1}$ и $RU = U$, мы получаем

$$a_0RU^n = a_0RUU^n = a_0UU^n,$$

так что $a_0U = a_0R = A_0$. С другой стороны, из конечной порожденности R_R и того, что $U = \operatorname{rad}(R)$, вытекает в силу леммы Накаямы 9.2.1, что

$$a_0U = a_0RU \subsetneq a_0R$$

и, значит, $a_0U \neq a_0R$ ↯. □

9.3.10. ***Следствия.*** (a) *Если R_R артинов, то* $\operatorname{rad}(R)$ *— наибольший нильпотентный правый, соотв. левый, соотв. двусторонний идеал кольца R.*

(b) *Если кольцо R коммутативно и артиново, то* $\operatorname{rad}(R)$ *совпадает с множеством всех нильпотентных элементов из R.*

(c) *Если R_R артинов, то для каждого правого R-модуля M_R, соотв. каждого левого R-модуля ${}_RM$,*

$$\operatorname{rad}(M) = M \operatorname{rad}(R) \subsetneq M, \text{ соотв. } \operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(R)\, M \subsetneq M.$$

Доказательство. (a) Идеал $\operatorname{rad}(R)$ нильпотентен и содержит каждый нильпотентный идеал.

(b) Поскольку $\operatorname{rad}(R)$ нильпотентен, то и каждый его элемент нильпотентен. Пусть теперь $a \in R$, $a^n = 0$. Ввиду коммутативности R

$$(aR)^n = a^nR^n = a^nR = 0R = 0.$$

Следовательно, aR нильпотентен, а потому $a \in aR \subset \operatorname{rad}(R)$.

(c) В силу 9.2.3 и 9.3.5, $\operatorname{rad}(M) = M \operatorname{rad}(R)$, соотв. $\operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(R)\, M$. Но (по теореме 9.3.9) $\operatorname{rad}(R)$ нильпотентен, поэтому найдется такое $n \in \mathbf{N}$, что $(\operatorname{rad}(R))^n = 0$. Пусть теперь для $U \subset M_R$

$$M = U + M \operatorname{rad}(R).$$

Заменяя $n-1$ раз в правой части M на $U+M\operatorname{rad}(R)$, получаем

$$M=U+M\operatorname{rad}(R)^n=U,$$

откуда видно, что $M\operatorname{rad}(R)\subsetneq M$.

Для левых модулей доказательство проводится аналогично. □

9.3.11. ***Теорема.*** *Пусть кольцо $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто и $\operatorname{rad}(R)$ нильпотентен. Тогда для модуля M_R следующие условия эквивалентны:*
(1) *M_R артинов;*
(2) *M_R нётеров;*
(3) *M_R имеет конечную длину.*
(Аналогичный результат справедлив для левых R-модулей).

Доказательство. Поскольку (1) $\wedge$ (2) $\Leftrightarrow$ (3), достаточно показать, что (1) $\Leftrightarrow$ (2). Положим для краткости $U:=\operatorname{rad}(R)$ и определим для каждого модуля M число $\mathrm{e}(M)$ формулой

$$\mathrm{e}(M):=\min\{i\mid i\in\mathbf{N}\wedge MU^i=0\}.$$

Такое число существует, так как имеется натуральное n, для которого $U^n=0$, а следовательно и $MU^n=0$. Докажем эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) индукцией по числу $\mathrm{e}(M)$ для всех модулей $M_R\neq 0$.

Начало индукции: $\mathrm{e}(M)=1$, т. е. $MU=0$. Поэтому, полагая

$$m(r+U):=mr,\quad r\in R,\quad m\in M,$$

мы превращаем M в $\bar{R}:=R/U$-модуль, причем R-подмодули совпадают с $\bar{R}$-подмодулями. Из полупростоты $\bar{R}$ вытекает, согласно 8.2.2 (a), что M полупрост. Поэтому эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из 8.1.6.

Пусть теперь наше утверждение уже доказано для всех модулей с $\mathrm{e}(M)\leqslant k$, и пусть модуль M таков, что $\mathrm{e}(M)=k+1$. Тогда $\mathrm{e}(MU^k)=1$. В силу того что $(M/MU^k)U^k=0$, имеем, далее, $\mathrm{e}(M/MU^k)\leqslant k$.

Пусть теперь M артинов, соотв. нётеров. Тогда, согласно 6.1.2, MU^k и M/MU^k также артиновы, соотв. нётеровы. По предположению индукции оба эти модуля нётеровы, соотв. артиновы, а значит, в силу 6.1.2, M нётеров, соотв. артинов. □

9.3.12. ***Следствие.*** (a) *Пусть R_R артинов. Тогда если модуль M_R артинов, соотв. нётеров, то он также нётеров, соотв. артинов.*
(b) *Если R_R артинов, то он и нётеров.*
(c) *Если R_R артинов, а ${}_RR$ нётеров, то ${}_RR$ тоже артинов.*

Доказательство. (a) Согласно 9.2.3, кольцо $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто, а в силу 9.3.9, $\operatorname{rad}(R)$ нильпотентен. Поэтому наше утверждение следует из 9.3.11.

(b) Частный случай (a) при $R_R = M_R$.
(c) Следует из 9.3.11 при ${}_RR = {}_RM$. □

9.4. Характеризации конечно-порожденных и конечно-копорожденных модулей

Мы уже познакомились ранее с понятиями конечно-порожденного и конечно-копорожденного модулей. Они использовались, в частности, для характеризации нётеровых и артиновых модулей (в гл. 6). Теперь мы можем дать дальнейшие их характеризации.

9.4.1. ***Теорема.*** *Модуль M_R конечно-порожден тогда и только тогда, когда*
(a) $\operatorname{rad}(M)$ *— косущественный подмодуль в* M *и*
(b) $M/\operatorname{rad}(M)$ *конечно-порожден.*

Доказательство. Допустим вначале, что модуль M_R конечно-порожден. Тогда условие (a) выполнено в силу 9.2.1 (c). Далее, вместе с M конечно-порожден и любой эпиморфный образ M. Поэтому выполнено и (b).

Обратно, пусть выполнены одновременно условия (a) и (b), и пусть $\bar{x}_i = x_i + \operatorname{rad}(M)$, $i = 1, \ldots, n$, — система образующих для $M/\operatorname{rad}(M)$. Тогда

$$x_1R + \ldots + x_nR + \operatorname{rad}(M) = M.$$

Поскольку $\operatorname{rad}(M) \subseteq M$, отсюда следует, что

$$x_1R + \ldots + x_nR = M,$$

т. е. модуль M конечно-порожден. □

9.4.2. ***Следствие.*** *Модуль M_R нётеров тогда и только тогда, когда для любого подмодуля $U \subseteq M$*
(a) $\operatorname{rad}(U) \subseteq U$ *и*
(b) $U/\operatorname{rad}(U)$ *конечно-порожден.*

Доказательство. Это следует из 6.1.2 и 9.4.1. □

Рассмотрим теперь конечно-копорожденные модули.

9.4.3. ***Теорема.*** *Для модуля $M_R \neq 0$ следующие условия эквивалентны:*
(1) M_R *конечно-копорожден;*
(2) (a) $\operatorname{soc}(M)$ *— существенный подмодуль в* M *и* (b) $\operatorname{soc}(M)$ *конечно-копорожден;*
(3) *инъективная оболочка* $\mathrm{I}(M)$ *модуля* M *представима в виде*

$$\mathrm{I}(M) = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_n,$$

где каждое Q_i есть инъективная оболочка некоторого простого R-модуля.

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: (a) Мы докажем с помощью леммы Цорна, что каждый ненулевой подмодуль $U \subseteq M$ содержит простой подмодуль E, такой что $U \cap \operatorname{soc}(M) \neq 0$. Пусть

$$\Gamma := \{U_i \mid i \in I\}$$

— множество всех подмодулей $U_i \neq 0$ модуля U. Поскольку $U \in \Gamma$, то $\Gamma \neq \emptyset$. Упорядочим Γ следующим образом:

$$U_i \leqslant U_j :\Leftrightarrow U_j \subseteq U_i$$

(*по обратному включению*). Пусть

$$\Lambda = \{A_j \mid j \in J\}$$

— произвольное вполне упорядоченное подмножество в Γ. Покажем, что

$$D := \bigcap_{j \in J} A_j$$

является верхней гранью Λ в Γ. Очевидно, достаточно установить, что $D \in \Gamma$. Предположим противное, т. е. что $D = 0$. Тогда, согласно (1), уже пересечение некоторого конечного числа A_j должно быть равно нулю. Так как Λ вполне упорядочено, то среди конечного числа этих A_j найдется максимальный элемент (относительно обратного включения) и он должен быть равен нулю. Получаем противоречие с тем, что $U_i \neq 0$!

Таким образом, $D \neq 0$, т. е. $D \in \Gamma$. По лемме Цорна в Γ существует максимальный элемент U_0. Очевидно, что U_0 — простой подмодуль модуля U.

(b) По определению конечной копорожденности вместе с модулем M конечно-копорожден и любой его подмодуль. В частности, $\operatorname{rad}(M)$ конечно-копорожден.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Из того что

$$\bigcap_{i \in I} A_i = 0, \quad A_i \subseteq M,$$

следует, что

$$\bigcap_{i \in I} \operatorname{soc}(A_i) = 0.$$

Поскольку $\operatorname{soc}(A_i) \subseteq \operatorname{soc}(M)$, и $\operatorname{soc}(M)$ конечно-копорожден, существует такое конечное подмножество $I_0 \subset I$, что

$$\bigcap_{i \in I_0} \operatorname{soc}(A_i) = 0.$$

По определению цоколя, для любого подмодуля $A \subseteq M$

$$\operatorname{soc}(A) = A \cap \operatorname{soc}(M).$$

Поэтому

$$0 = \bigcap_{i \in I_0} \operatorname{soc}(A_i) = \bigcap_{i \in I_0} (A_i \cap \operatorname{soc}(M)) = \left(\bigcap_{i \in I_0} A_i \right) \cap \operatorname{soc}(M).$$

Так как по предположению $\operatorname{soc}(M)$ — существенный подмодуль в M, то мы получаем, что

$$\bigcap_{i \in I_0} A_i = 0.$$

Тем самым доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (1) завершено.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Пусть $\mathrm{I}(M)$ — инъективная оболочка модуля M, причем $M \subseteq \mathrm{I}(M)$ и $M \neq 0$. Поскольку $\operatorname{soc}(M) \subseteq^* M$, то $\operatorname{soc}(M) \neq 0$. Далее, пусть

$$\operatorname{soc}(M) = F_1 \oplus \ldots \oplus E_n,$$

где модули E_i просты, и пусть $Q_i \subseteq \mathrm{I}(M)$ — инъективная оболочка для E_i. Тогда по 5.1.7

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$$

(суммы в $\mathrm{I}(M)$), а также

$$\operatorname{soc}(M) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i.$$

Модуль $\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$ инъективен как конечная прямая сумма инъективных модулей и потому выделяется прямым слагаемым в $\mathrm{I}(M)$. Из того что $\operatorname{soc}(M) \subseteq^* M$ и $M \subseteq^* \mathrm{I}(M)$, следует, что $\operatorname{soc}(M) \subseteq^* \mathrm{I}(M)$. Поэтому

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i \subseteq^* \mathrm{I}(M).$$

Сопоставляя полученные факты, заключаем, что

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i = \mathrm{I}(M),$$

ч. т. д.

„(3) $\Rightarrow$ (2)“: Без ограничения общности можно снова считать, что

$$M \subseteq \mathrm{I}(M) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i, \quad E_i \subseteq^* Q_i \text{ и } E_i \text{ просты.}$$

Поскольку $E_i \subseteq^* Q_i$, то E_i — единственный простой подмодуль в Q_i. Поэтому, согласно 9.1.5,

$$\operatorname{soc}(\mathrm{I}(M)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{soc}(Q_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i.$$

Так как $M \subsetneq^* \mathrm{I}(M)$, то $E_i \subsetneq M$ для $i = 1, \ldots, n$ и, следовательно,

$$\mathrm{soc}(M) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i.$$

По 8.1.6 модуль $\mathrm{soc}(M)$ конечно-копорожден, т. е. условие (2) (b) выполнено. Поскольку

$$\mathrm{soc}(M) = \mathrm{soc}(\mathrm{I}(M)) \subsetneq^* \mathrm{I}(M),$$

то $\mathrm{soc}(M) \subsetneq^* M$, так что имеет место и (2) (a). □

9.4.4. ***Следствие.*** *Модуль M_R артинов тогда и только тогда, когда для любого фактормодуля M/U*
(a) $\mathrm{soc}(M/U) \subsetneq^* M/U$ *и*
(b) $\mathrm{soc}(M/U)$ *конечно-копорожден.*

Доказательство. Это следует из 6.1.2 и 9.4.3. □

9.5. Завершение доказательства теоремы о характеризации артиновых и нётеровых колец

В гл. 6 мы сформулировали под номером 6.6.4 следующую теорему, которую, однако, смогли там доказать лишь частично.

Теорема. (a) *Следующие условия эквивалентности:*
(1) *модуль R_R нётеров;*
(2) *каждый инъективный модуль Q_R есть прямая сумма неразложимых (инъективных) подмодулей.*
(b) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *модуль R_R артинов;*
(2) *каждый инъективный модуль Q_R есть прямая сумма инъективных оболочек простых R-модулей.*

В 6.6.5 были доказаны обе импликации (1) $\Rightarrow$ (2). При этом, в силу 9.3.12, в пункте (b) достаточно предполагать лишь артиновость модуля R_R (в отличие от гл. 6, где мы дополнительно предполагали, что R_R нётеров). Теперь мы в состоянии доказать обратные импликации.

Доказательство. (b) „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Ввиду 9.4.4 достаточно показать, что каждый фактормодуль $M = R/A$ модуля R_R удовлетворяет условию (3) теоремы 9.4.3. Пусть $\mathrm{I}(R/A)$ — инъективная оболочка R/A, причем $R/A \subsetneq \mathrm{I}(R/A)$. По предположению

$$\mathrm{I}(R/A) = \bigoplus_{i \in I} Q_i,$$

где Q_i — инъективные оболочки простых R-модулей. Так как модуль R/A — циклический, то он содержится уже в некоторой конечной подсумме:

$$R/A \subseteq \bigoplus_{i \in I_0} Q_i, \quad I_0 \subset I, \ I_0 \text{ конечно.}$$

Поскольку $R/A \subsetneq^* \mathrm{I}(R/A)$, отсюда следует, что $I = I_0$, т. е. $\mathrm{I}(R/A) = \bigoplus_{i \in I_0} Q_i$, что и требовалось доказать.

(а) „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Чтобы установить эту импликацию, достаточно показать, что выполнено условие (3) теоремы 6.5.1. Пусть

$$M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i$$

— прямая сумма инъективных оболочек Q_i простых R-модулей $E_i \subseteq Q_i$, и пусть $\mathrm{I}(M)$ — инъективная оболочка M, причем $M \subseteq \mathrm{I}(M)$. Нам надо доказать, что $M = \mathrm{I}(M)$. Из того что $M \subsetneq^* \mathrm{I}(M)$, следует, что $\operatorname{soc}(M) = \operatorname{soc}(\mathrm{I}(M))$. Далее,

$$\operatorname{soc}(M) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \operatorname{soc}(Q_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Теперь используем предположение, что $\mathrm{I}(M) = \bigoplus_{j \in J} D_j$, где D_j — неразложимые инъективные модули. Положим

$$J_1 := \{j \mid j \in J \wedge \operatorname{soc}(D_j) \neq 0\}.$$

Тогда

$$\operatorname{soc}(\mathrm{I}(M)) = \bigoplus_{j \in J_1} \operatorname{soc}(D_j).$$

Если $\operatorname{soc}(D_j) \neq 0$, то согласно 6.6.3 модуль $F_j := \operatorname{soc}(D_j)$ прост и D_j есть его инъективная оболочка. Следовательно,

$$\operatorname{soc}(\mathrm{I}(M)) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i = \bigoplus_{j \in J_1} F_j.$$

По теореме Крулля — Ремака — Шмидта эти два разложения изоморфны (в смысле теоремы 7.3.1). Если $E_i \cong F_j$, то, в силу 5.6.3, $Q_i \cong D_j$. Учитывая биекцию из теоремы 7.3.1, имеем

$$M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i \cong \bigoplus_{j \in J_1} D_j.$$

Поскольку

$$\mathrm{I}(M) \left(\bigoplus_{j \in J_1} D_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J \setminus J_1} D_j \right),$$

модуль M изоморфен прямому слагаемому инъективного модуля $\mathrm{I}(M)$ и, следовательно, сам инъективен, ч. т. д. □

9.6. Радикал кольца эндоморфизмов инъективного или проективного модуля

Во многих ситуациях полезно знать радикал кольца эндоморфизмов данного инъективного или проективного модуля. Настоящий параграф посвящен изучению этого вопроса. В качестве приложения мы покажем затем, что для любого проективного модуля $P \neq 0$ всегда $\operatorname{rad}(P) \neq P$. Это означает, что такие модули всегда имеют максимальные подмодули.

9.6.1. ***Теорема.*** (a) *Пусть модуль Q_R инъективен и $S := \operatorname{End}(Q_R)$. Тогда для $\alpha \in S$*

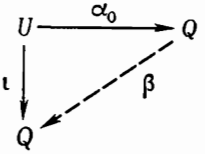
$$S\alpha \subsetneq {}_SS \Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{rad}(S) \Leftrightarrow \ker(\alpha) \subsetneq^* Q_R.$$

(b) *Пусть модуль P_R проективен и $S := \operatorname{End}(P_R)$. Тогда для $\alpha \in S$*

$$\alpha S \subsetneq S_S \Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{rad}(S) \Leftrightarrow \operatorname{im}(\alpha) \subsetneq P_R.$$

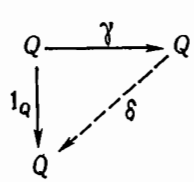
Доказательство. (a) „$S\alpha \subsetneq {}_SS \Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{rad}(S)$“: В силу 9.1.3,

(a) „$\alpha \in \operatorname{rad}(S) \Rightarrow \ker(\alpha) \subsetneq^* Q_R$“: Пусть $U \subseteq Q_R$ и $\ker(\alpha) \cap U = 0$. Тогда $\alpha_0 := \alpha | U$ — мономорфизм и существует коммутативная диаграмма



Поскольку $u = \iota(u) = \beta\alpha_0(u) = \beta\alpha(u)$ для $u \in U$, то $U \subseteq \ker(1 - \beta\alpha)$. Из $\alpha \in \operatorname{rad}(S)$ следует, что $\beta\alpha \in \operatorname{rad}(S)$. Тогда, в силу 9.3.1, элемент $1 - \beta\alpha$ обратим, поэтому $\ker(1 - \beta\alpha) = 0$. Отсюда вытекает, что $U = 0$. Это показывает, что $\ker(\alpha)$ — существенный подмодуль в Q.

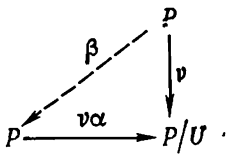
(a) „$\ker(\alpha) \subsetneq^* Q_R \Rightarrow S\alpha \subsetneq {}_SS$“: Пусть $S\alpha + \Gamma = {}_SS$, где $\Gamma \subsetneq {}_SS$. Тогда найдутся такие $\sigma \in S$, $\gamma \in \Gamma$, что $\sigma\alpha + \gamma = 1$. Поэтому $\ker(\alpha) \cap \ker(\gamma) = 0$. Так как $\ker(\alpha) \subsetneq^* Q_R$, то $\ker(\gamma) = 0$. Значит, существует коммутативная диаграмма



т. е. $1_Q = \delta\gamma$. Отсюда вытекает, что $\Gamma = S$, и, следовательно, $S\alpha \subsetneq {}_SS$.

(b) „$\alpha S \subsetneq {}_S S \Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{rad}(S)$“: В силу 9.1.3.

(b) „$\alpha \in \operatorname{rad}(S) \Rightarrow \operatorname{im}(\alpha) \subsetneq P_R$“: Пусть $U \subsetneq P_R$, причем $\operatorname{im}(\alpha) + U = P$, и пусть ν: $P \to P/U$ — естественный эпиморфизм. Тогда $\nu\alpha$ — тоже эпиморфизм, и мы получаем коммутативную диаграмму

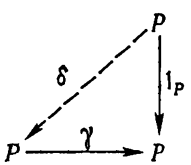


Так как $\nu = \nu\alpha\beta$, то $\nu(1-\alpha\beta) = 0$. Таким образом, $\operatorname{im}(1-\alpha\beta) \subsetneq U \subsetneq P$. Поскольку $\alpha \in \operatorname{rad}(S)$, то и $\alpha\beta \in \operatorname{rad}(S)$. Поэтому, согласно 9.3.1, элемент $1-\alpha\beta$ обратим. Следовательно,

$$P = \operatorname{im}(1-\alpha\beta) \subseteq U \subsetneq P,$$

т. е. $U = P$. Это показывает, что $\operatorname{im}(\alpha) \subsetneq P_R$.

(b) „$\operatorname{im}(\alpha) \subsetneq P_R \Rightarrow \alpha S \subsetneq {}_S S$“: Пусть $\alpha S + \Gamma = S_S$, где $\Gamma \subsetneq S_S$. Тогда существуют такие $\sigma \in S$, $\gamma \in \Gamma$, что $\alpha\sigma + \gamma = 1$. Отсюда следует, что $\operatorname{im}(\alpha) + \operatorname{im}(\gamma) = P$. Поэтому $\operatorname{im}(\gamma) = P$, ибо $\operatorname{im}(\alpha) \subsetneq P_R$. Таким образом, γ — эпиморфизм. Следовательно, существует гомоморфизм δ, такой что диаграмма

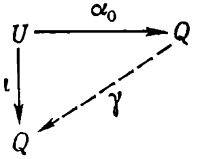


коммутативна, т. е. $1_P = \gamma\delta$. Значит, $\Gamma = S$, ч. т. д. □

9.6.2. ***Следствие.*** *Пусть модуль Q_R инъективен и $S := \operatorname{End}(Q_R)$. Тогда для каждого $\alpha \in S$ существует такое $\gamma \in S$, что*

$$\alpha\gamma\alpha - \alpha \in \operatorname{rad}(S).$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in S$ и U — д. п. для $\ker(\alpha)$ в Q. Согласно 5.2.5, $\ker(\alpha) + U \subsetneq^{\oplus} Q$. Из того что $\ker(\alpha) \cap U = 0$, следует, что $\alpha_0 := \alpha | U$ — мономорфизм. Поэтому существует гомоморфизм $\gamma \in S$, делающий коммутативной диаграмму



(где ι — включение). Для $u \in U$

$$\gamma\alpha(u) = \gamma\alpha_0(u) = u.$$

Поэтому

$$\ker(\alpha) + U \subsetneq \ker(\alpha\gamma\alpha - \alpha).$$

Так как

$$\ker(\alpha) + U \subsetneq^{*} Q,$$

то также

$$\ker(\alpha\gamma\alpha - \alpha) \subsetneq^{*} Q.$$

Из 9.6.1 вытекает тогда, что

$$\alpha\gamma\alpha - \alpha \in \operatorname{rad}(S). \qquad \square$$

Этот результат означает, что кольцо $S/\operatorname{rad}(S)$ *регулярно*. Регулярные кольца будут введены и подробно изучены в следующем параграфе.

Из 9.6.1 (b) и леммы о дуальном базисе получается интересное утверждение о радикале проективного модуля.

9.6.3. ***Теорема.*** *Для каждого проективного модуля* $P \neq 0$

$$\operatorname{rad}(P) \neq P.$$

Доказательство. Отметим сначала следующий общий факт. Если $p \in P_R$ и $\varphi \in P^* = \operatorname{Hom}_R(P_R, R_R)$, то $p\varphi$ можно рассматривать как элемент кольца $S = \operatorname{End}(P_R)$. А именно, положим

$$(p\varphi)(x) := p\varphi(x) \text{ для } x \in P.$$

Так как

$$\begin{aligned}(p\varphi)(x_1r_1 + x_2r_2) &= p\varphi(x_1r_1 + x_2r_2)\\ &= p(\varphi(x_1)r_1 + \varphi(x_2)r_2) = (p\varphi(x_1))r_1 + (p\varphi(x_2))r_2\\ &= (p\varphi)(x_1)r_1 + (p\varphi)(x_2)r_2,\end{aligned}$$

то $p\varphi$ — действительно элемент из S.

Пусть теперь $p \in \operatorname{rad}(P)$. Тогда $pR \subsetneq^{\circ} P_R$ и, следовательно, $\operatorname{im}(p\varphi) = p\varphi(P) \subsetneq^{\circ} P_R$ (ибо $p\varphi(P) \subsetneq pR$). Согласно 9.6.1 (b), имеем $p\varphi S \subsetneq^{\circ} S_S$. Пусть

$$x = \sum_{\varphi_i(x) \neq 0} p_i\varphi_i(x)$$

— представление x, даваемое леммой о дуальном базисе 5.4.2. Предположим, что $x \neq 0$, и пусть (после соответствующей перенумерации) $i = 1, \ldots, n$ — те индексы, для которых $\varphi_i(x) \neq 0$.

Тогда

$$1_P(x) = x = \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)(x),$$

откуда

$$\left(1_P - \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)(x) = 0;$$

здесь $p_i\varphi_i$ рассматриваются как элементы из S.

Допустим теперь, что $\operatorname{rad}(P) = P$. Тогда $\operatorname{im}(p_i\varphi_i) \subsetneq P_R$ и, значит, $p_i\varphi_i S \subsetneq S_S$, а следовательно, $p_i\varphi_i \in \operatorname{rad}(S)$ для $i = 1, \ldots, n$, так что и

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i \in \operatorname{rad}(S).$$

В силу 9.3.1,

$$1_P - \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i$$

— обратимый элемент в S Обозначая обратный к нему элемент через $\sigma \in S$, имеем

$$x = 1_P(x) = \sigma\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)(x) = \sigma(0) = 0\ \lightning.$$

Таким образом, предположение $0 \neq x \in P$ оказалось неверным, т. е. равенство $\operatorname{rad}(P) = P$ возможно лишь для $P = 0$. □

Как уже было сказано, условие $\operatorname{rad}(P) \neq P$ означает, что P содержит по крайней мере один максимальный подмодуль.

9.6.4. ***Следствие.*** *Если модуль P проективен и $P = P_1 \oplus P_2$, где $P_2 \subseteq \operatorname{rad}(P)$, то $P_2 = 0$.*

Доказательство. Пусть π: $P \to P_2$ — проекция P на P_2. Из включения $P_2 \subseteq \operatorname{rad}(P)$ вытекает, согласно 9.1.4, что $P_2 \subseteq \pi(\operatorname{rad}(P)) \subseteq \operatorname{rad}(P_2)$. Таким образом, $P_2 = \operatorname{rad}(P_2)$. Поскольку P_2 проективен, то, в силу 9.6.3, $P_2 = 0$. □

9.7. Хорошие кольца

В 9.2.1 (b) было показано, что всегда $M\operatorname{rad}(R) \subseteq \operatorname{rad}(M)$. Возникает вопрос о том, когда здесь имеет место равенство. Для произвольных колец и модулей равенства может и не быть. Например, $\operatorname{rad}(\mathbf{Z}) = 0$, но, как мы знаем, существуют $\mathbf{Z}$-модули

с ненулевым радикалом, как например $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ ($\operatorname{rad}(\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$!).

Следующая теорема проливает свет на этот вопрос.

9.7.1. *Теорема.* *Пусть $\mathcal{M}_R$ — категория правых унитарных R-модулей и $\bar{R} := R/\operatorname{rad}(R)$. Приводимые ниже условия эквивалентны:*

(1) $\forall M \in \mathcal{M}_R [M \operatorname{rad}(R) = \operatorname{rad}(M)]$;
(2) $\forall M \in \mathcal{M}_R [M \operatorname{rad}(R) = 0 \Rightarrow \operatorname{rad}(M) = 0]$;
(3) $\forall \Omega \in M_{\bar{R}} [\operatorname{rad}(\Omega) = 0]$;
(4) $\forall M, N \in \mathcal{M}_R \forall \varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, N) [\varphi(\operatorname{rad}(M)) = \operatorname{rad}(\varphi(M))]$;
(5) $\forall M \in \mathcal{M}_R \forall U \subset M \; [(\operatorname{rad}(M) + U)/U = \operatorname{rad}(M/U)]$;
(6) $\forall M \in \mathcal{M}_R \forall U \subset M \; [\operatorname{rad}(M) = 0 \Rightarrow \operatorname{rad}(M/U) = 0]$.

Доказательство. Мы докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) и (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1).

"(1) $\Rightarrow$ (2)": Частный случай.

"(2) $\Rightarrow$ (3)": Пусть $\Omega \in \mathcal{M}_{\bar{R}}$. Тогда Ω можно превратить в правый R-модуль следующим образом:

$$\omega r := \omega \bar{r}, \quad \omega \in \Omega, \; \bar{r} = r + \operatorname{rad}(R) \in \bar{R}.$$

Очевидно, что для Ω, рассматриваемого как правый R-модуль, $\Omega \operatorname{rad}(R) = 0$. Поэтому, в силу (2), $\operatorname{rad}(\Omega_R) = 0$. Поскольку из определения Ω_R следует, что R-подмодули в Ω в точности совпадают с $\bar{R}$-подмодулями, то $\operatorname{rad}(\Omega_{\bar{R}}) = 0$.

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Ввиду того, что $(M/M \operatorname{rad}(R)) \operatorname{rad}(R) = 0$, модуль $M/M \operatorname{rad}(R)$ можно превратить в $\bar{R}$-модуль следующим образом:

$$\overline{mr} = (m + M \operatorname{rad}(R))(r + \operatorname{rad}(R)) := \overline{mr} = mr + M \operatorname{rad}(R).$$

Заметим, что снова $\bar{R}$-подмодули в $M/M \operatorname{rad}(R)$ совпадают с R-подмодулями. Поэтому из $\operatorname{rad}((M/M \operatorname{rad}(R))_{\bar{R}}) = 0$ следует, что и $\operatorname{rad}(M/M \operatorname{rad}(R)) = 0$. Согласно 9.1.4 (b), имеем $\operatorname{rad}(M) \subset M \operatorname{rad}(R)$, следовательно, в силу 9.2.1 (b), $\operatorname{rad}(M) = M \operatorname{rad}(R)$.

„(1) $\Rightarrow$ (4)“: $M \operatorname{rad}(R) = \operatorname{rad}(M) \wedge \varphi(M) \operatorname{rad}(R) = \operatorname{rad}(\varphi(M)) \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi(\operatorname{rad}(M)) = \varphi(M \operatorname{rad}(R)) = \varphi(M) \operatorname{rad}(R) = \operatorname{rad}(\varphi(M))$.

„(4) $\Rightarrow$ (5)“: (5) — частный случай (4), отвечающий $\varphi = \nu$: $M \to M/U$.

„(5) $\Rightarrow$ (6)“: Очевидно.

„(6) $\Rightarrow$ (1)“: В силу 9.1.5 (a) условие (1) сохраняется при изоморфизмах модулей. Так как каждый модуль является эпиморфным образом некоторого свободного модуля, то достаточно доказать (1) для модулей вида F/U, где F — некоторый свободный модуль и $U \subset F$. Согласно 9.2.1 (g), имеем $\operatorname{rad}(F) = F \operatorname{rad}(R)$. Поэтому $\operatorname{rad}(F/F \operatorname{rad}(R)) = 0$, а значит, в силу (6),

$$\operatorname{rad}((F/F \operatorname{rad}(R))/(F \operatorname{rad}(R) + U/F \operatorname{rad}(R))) = 0.$$

Поскольку

$$(F/F\operatorname{rad}(R))/(F\operatorname{rad}(R)+U/F\operatorname{rad}(R))$$
$$\cong F/(F\operatorname{rad}(R)+U)\cong(F/U)/(F\operatorname{rad}(R)+U/U),$$

то

$$\operatorname{rad}((F/U)/(F\operatorname{rad}(R)+U/U))=0,$$

и следовательно, согласно 9.1.4 (b),

$$\operatorname{rad}(F/U)\subset F\operatorname{rad}(R)+U/U=(F/U)\operatorname{rad}(R).$$

Учитывая 9.2.1 (b), получаем отсюда $\operatorname{rad}(F/U)=(F/U)\operatorname{rad}(R)$, что и требовалось доказать. □

9.7.2. ***Определение.*** *Кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы* 9.7.1, *назовем хорошим справа. Аналогичным образом определяется хорошее слева кольцо. Кольцо, хорошее и слева и справа, будем называть просто хорошим.*

9.7.3. ***Следствия.*** (a) *Всякое кольцо* R, *для которого* $\bar{R}:=R/\operatorname{rad}(R)$ *полупросто, является хорошим (согласно* (3)).

(b) *Согласно* 9.2.3, *каждое артиново (с одной стороны) кольцо является хорошим.*
(c) *Если* R *— хорошее справа кольцо, то, в силу* 9.1.5 (b) *и* 9.7.1 (1), *для произвольного модуля* M_R

$$M=\sum_{i\in I}M_i\Rightarrow\operatorname{rad}(M)=\sum_{i\in I}\operatorname{rad}(M_i).$$

Заметим еще, что существуют хорошие кольца, для которых $R/\operatorname{rad}(R)$ не полупросто. Такая ситуация имеет, например, место, когда $R/\operatorname{rad}(R)$ коммутативно и регулярно (см. упр. 18 к гл. 10), но не полупросто.

Упражнения

1. a) Показать, что для кольца R следующие условия эквивалентны:
(1) $\operatorname{rad}(M)\subset^{\circ}M$ для каждого правого R-модуля;
(2) не существует ненулевого правого R-модуля M с $\operatorname{rad}(M)=M$.
(b) Показать, что для кольца R следующие условия эквивалентны:
(1) $\operatorname{soc}(M)\subset^{*}M$ для каждого правого R-модуля M;
(2) $\operatorname{soc}(M)\subset^{*}M$ для каждого правого циклического R-модуля M;
(3) не существует ненулевого правого R-модуля M с $\operatorname{soc}(M)=0$.

2. a) Пусть $\operatorname{soc}(M)\subset B_R\subset M_R\wedge a\in M\wedge a\notin B$. Доказать, что тогда существует такой подмодуль $C\subset^{*}M$, что $B\subset C$, $a\notin C$.
b) Доказать, что $\operatorname{soc}(M)\subset B_R\subset M_R\Rightarrow B=\bigcap_{B\subset C\subset^{*}M}C$.
c) Доказать, что $\operatorname{soc}(M)\subset A\subset M\wedge\operatorname{soc}(M/A)\subset^{*}M/A\Rightarrow A\subset^{*}M$.

3. Показать, что R_R является кообразующим тогда и только тогда, когда инъективная оболочка любого конечно-копорожденного правого R-модуля проективна.

4. а) Для следующих двух колец найти $\operatorname{rad}(R)$, $\operatorname{soc}({}_RR)$, $\operatorname{soc}(R_R)$ и проверить, будет ли $\operatorname{soc}(R_R)=\operatorname{soc}({}_RR)$:

$$R:=\left\{\begin{pmatrix} q & r \\ 0 & s \end{pmatrix} \middle| \, q \in \mathbf{Q} \wedge r,\ s \in \mathbf{R}\right\},$$

$$R:\Vdash \left\{\begin{pmatrix} z & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbf{Z} \wedge a,\ b \in \mathbf{Q}\right\}.$$

Здесь $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел.
b) Условия те же, что и в упр. 6 к гл. 6. Показать, что

$$\operatorname{rad}(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a \in \operatorname{rad}(A),\ m \in M,\ b \in \operatorname{rad}(B)\right\}.$$

Указание. Найдите обратимые справа элементы в R.)

5. Показать, что для модуля M_R следующие условия эквивалентны (ср. 9.2.2(b)):
(1) M конечно-копорожден и $\operatorname{rad}(M)=0$;
(2) M конечно-копорожден и полупрост.

6. Пусть Δ — полная решетка (см. § 3.1). Обозначим наименьший ее элемент через 0, наибольший — через M. Если $A, B \in \Delta$, и $A \leqslant B$, то подрешетка

$$[A, B]:=\{L \in \Delta \mid A \leqslant L \leqslant B\}$$

(с индуцированной из Δ структурой) тоже будет полной.

Определения. (a) Семейство $\Gamma=(A_i \mid i \in I)$ элементов из Δ называется *направленным (вверх)*, если для любых двух элементов A_i, A_j из Γ существует такой элемент A_k из Γ, что $A_i \leqslant A_k$ и $A_j \leqslant A_k$.
(b) Элемент $A \in \Delta$ называется *компактным*, если в любом направленном семействе $(A_i \mid i \in I)$, удовлетворяющем условию $A \leqslant \bigcup_{i \in I} A_i$, существует элемент A_j, такой что $A \leqslant A_j$.
(c) Решетка Δ называется *компактно-порожденной*, если каждый ее элемент представим в виде объединения компактных элементов.
(d) Решетка Δ называется *модулярной*, если

$$\forall A, B, C \in \Delta\, [B \leqslant A \Longrightarrow A \cap (B \cup C)=B \cup (A \cap C)].$$

(e) Элемент $A \in \Delta$ называется *косущественным* в Δ, если

$$\forall B \in \Delta \setminus \{M\}\, [A \cup B \neq M].$$

(f) $\operatorname{rad}(\Delta):=\bigcap_{\substack{B \text{ максимален} \\ \text{в } \Delta \setminus \{M\}}} B.$

Доказать следующие утверждения:

(1) $\bigcup_{A \text{ косуществен в } \Delta} A \leqslant \operatorname{rad}(\Delta)$.

(2) Если A компактен и $A \leqslant \operatorname{rad}(\Delta)$, то A косуществен в Δ.
(4) Если Δ компактно-порождена, то

$$\bigcup_{A \text{ косуществен } \Delta} A = \operatorname{rad}(\Delta).$$

(4) Для любого $A \in \Delta$

$$A \cup \operatorname{rad}(\Delta) \leqslant \operatorname{rad}([A, M]).$$

(5) Если $A \leqslant \operatorname{rad}(\Delta)$, то $\operatorname{rad}(\Delta) = \operatorname{rad}([A, M])$.
(6) Если Λ компактна, то $\operatorname{rad}(\Delta)$ косуществен в Δ.
(7) Если Δ модулярна и $A \in \Delta$, то $\operatorname{rad}([0, A]) \leqslant \operatorname{rad}(\Delta)$.
(8) Что означает в решетке подмодулей некоторого модуля M, что подмодуль $A \in \Delta$ компактен? (Заметьте, что в этом случае $\cup$ означает $+$.)

7. Определение. (a) Модуль $M = M_R$ называется *полуартиновым*, если

$$\forall U \underset{\neq}{\subset} M\ [\operatorname{soc}(M/U) \neq 0].$$

(b) $\operatorname{har}(M) := \sum_{U \subset M,\ U \text{ полуартинов}} U$.

Доказать следующие утверждения:
(1) M полуартинов $\Rightarrow \forall U \subset M$ [M/U полуартинов].
(2) $\forall M \in \mathcal{M}_R$ [har (M) полуартинов].
(3) $\forall M, N \in \mathcal{M}_R \forall_\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M \quad N)$ [φ (har (M)) $\subset$ har (N)].
(4) har (har (M)) = har (M).
(5) har $(M/\text{har}(M)) = 0$.
(6) M полуартинов $\Rightarrow \operatorname{soc}(M) \underset{\text{fin}}{\subset} M$.
(7) M полуартинов $\Rightarrow \forall U \subset M$ [soc $(M/U) \underset{\text{fin}}{\subset} M/U$].
(8) $\forall U \subset M$ [M полуартинов $\Leftrightarrow$ M/U полуартинов $\wedge$ U полуартинов].
(9) M полуартинов и нётеров $\Leftrightarrow$ M артинов и нётеров.
(10) M полуартинов $\wedge R_R$ нётеров $\Rightarrow M$ есть сумма своих артиновых подмодулей.

8. Определение. (a) Модуль M называется *полунётеровым*, если

$$\forall U \subset M,\ U \neq 0\ [\operatorname{rad}(U) \neq U].$$

(b) $\operatorname{hnr}(M) := \sum_{U \subset M,\ \operatorname{rad}(U) = U} U$.

Выяснить, справедливы ли утверждения, дуальные к утверждениям упр. 7, и если нет, то при каких дополнительных условиях они справедливы.

9. Определение. Модуль M называется *коатомарным*, если

$$\forall U \underset{\neq}{\subset} M \exists A \subset M\ [U \subset A \wedge A \text{ максимален в } M].$$

Доказать приводимые ниже утверждения.
а) Если M полупрост или конечно-порожден, то M коатомарен.

b) Существует коатомарный $\mathbf{Z}$-модуль M, не являющийся ни полупростым, ни конечно-порожденным.
c) M полупрост $\Leftrightarrow M$ коатомарен $\wedge$ каждый максимальный подмодуль в M выделяется прямым слагаемым в M.
d) $U \subset \operatorname{rad}(M) \wedge U$ коатомарен $\Rightarrow U \subsetneq M$.
e) M коатомарен $\Rightarrow \operatorname{rad}(M) \subsetneq M$.
f) Существует модуль M с $\operatorname{rad}(M)=0$, не являющийся коатомарным.

10. Пусть $M=M_{\mathbf{Z}}$ — абелева группа и

$$T(M) := \{m \in M \mid \exists z \neq 0\ [mz=0]\}$$

ее периодическая часть. Доказать, что
a) $\operatorname{soc}(M) \subsetneq M \Leftrightarrow T(M)=M$; $\operatorname{soc}(M)=0 \Leftrightarrow T(M)=0$;
b) $U \subsetneq M \Leftrightarrow \operatorname{soc}(M) \subset U \subset M \wedge T(M/U)=M/U$;
c) M полупрост $\Leftrightarrow T(M)=M \wedge \operatorname{rad}(M)=0$.

11. Показать, что для кольца R следующие условия эквивалентны:
(1) для каждого семейства $(M_i \mid i \in I)$ правых R-модулей

$$\operatorname{soc}\left(\coprod_{i\in I} M_i\right)=\prod_{i\in I} \operatorname{soc}(M_i);$$

(2) произведение любого числа полупростых правых R-модулей полупросто;
(3) каждый правый R-модуль без радикала (т. е. с $\operatorname{rad}(M)=0$) полупрост.
(4) кольцо $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто.

12. Показать, что для простого R-модуля
a) $U \subset M \wedge U$ — прямое слагаемое в $M \Rightarrow$

$$\operatorname{rad}(M/U)=(\operatorname{rad}(M)+U)/U,\ \operatorname{soc}(M/U)=(\operatorname{soc}(M)+U)/U;$$

b) $\forall U \subset M\ [\operatorname{rad}(U)=U \cap \operatorname{rad}(M)] \Leftrightarrow \operatorname{rad}(M)=0$;
c) $\forall U \subset M\ [\operatorname{soc}(M/U)=(\operatorname{soc}(M)+U)/U] \Leftrightarrow M$ полупрост.

13. a) Показать, что для левого идеала $U \subset_R R$ следующие условия эквивалентны:
(1) $\left(\coprod_{i\in I} M_i\right)U=\prod_{i\in I}(M_iU)$ для каждого семейства $(M_i \mid i \in I)$ правых R-модулей;
(2) ${}_RU$ конечно-порожден.
b) Если R — хорошее справа кольцо, то радикал в $\mathcal{M}_R$ перестановочен с прямым произведением тогда и только тогда, когда ${}_R\operatorname{rad}(R)$ конечно-порожден.
c) Если R коммутативно и нётерово, то радикал перестановочен с прямым произведением.

14. Для коммутативных колец R

$$\operatorname{rad}(M_R)=\bigcap\{MA \mid A \text{ — максимальный идеал в } R\}.$$

Этот результат допускает обобщение на случай колец, в которых каждый максимальный правый идеал является двусторонним.

Определение. Для всякого правого R-модуля M_R положим

$$\mathrm{D}(M) := \bigcap\{MA \mid A \text{ — максимальный правый идеал в } R\}.$$

Доказать, что
a) $D(M)$ — подмодуль в M_R и для каждого гомоморфизма $f\colon M \to N$

$$f(D(M)) \subset D(N)$$

(т. е. D — предрадикал в $\mathscr{M}_R$);
b) $D(R_R) = R \iff$ никакой максимальный правый идеал не является двусторонним;
c) $D(M) = \operatorname{rad}(M)$ для всех $M \in M_R \iff$ каждый максимальный правый идеал является двусторонним.

15. Пусть $M = M_Z$ — произвольная абелева группа. Показать, что существует абелева группа N с $\operatorname{rad}(N) = M$. (*Указание.* Выберите какое-нибудь инъективное расширение $M \subset Q$ и рассмотрите $\operatorname{soc}(Q/M)$.)

16. Обозначения те же, что и в упр. 27 к гл. 5. Показать, что
a) S локально;
b) цоколь S_S имеет длину $n+1$.

17. Для каждого R-модуля M определим возрастающую последовательность подмодулей M_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ следующим образом:

$$M_0 := 0,\quad M_{i+1}/M_i := \operatorname{soc}(M/M_i)$$

(точнее, если $\nu\colon M \to M/M_i$ — естественный эпиморфизм, то $M_{i+1} := \nu^{-1}(\operatorname{soc}(M/M_i))$). Доказать, что
a) если M артинов, то для каждого $i \geqslant 0$
(1) M_{i+1} имеет конечную длину,
(2) $B \subset M_{i+1} \wedge \operatorname{lng}(B_i) \leqslant i \Longrightarrow B \subset M_i$;
b) если M артинов и является самообразующим, то он также нётеров.
(Модуль M называется *самообразующим*, если для каждого его подмодуля U справедлива формула

$$U = \sum_{f \in \operatorname{Hom}_R(M,\, U)} \operatorname{im}(f).$$

Указание. При доказательстве утверждения (b) покажите, что множество $\{A \mid A \subset M \wedge M/A$ нётеров$\}$ содержит наименьший элемент A_0 и примените утверждение (a) с $i = \operatorname{lng}(M/A_0)$.)

18. Для каждого R-модуля M определим убывающую последовательность подмодулей M^i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ следующим образом:

$$M^0 := M,\quad M^{i+1} := \operatorname{rad}(M^i).$$

Показать, что
a) если кольцо $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто и модуль M_R нётеров, то для каждого $i \geqslant 0$.
(1) M/M^{i+1} имеет конечную длину,
(2) $M^{i+1} \subset B \subset M \wedge \operatorname{lng}(M/B) \leqslant i \Longrightarrow M^i \subset B$;
b) если $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто и M — нётеров самокообразующий, то M артинов.
c) Можно ли в (b) снять условие «$R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто»?
(Модуль M называется *самокообразующим*, если

$$0 = \bigcap_{f \in \operatorname{Hom}_R(M/U,\, M)} \ker(f)$$

для каждого его подмодуля U.)

10. Тензорное произведение, плоские модули и регулярные кольца

Значение тензорных произведений основано прежде всего на следующих двух фактах:

1°. Тензорное произведение обладает важным свойством пропускания, а именно каждое тензорное отображение можно пропустить через тензорное произведение (см. 10.1.8) и тензорное произведение определяется этим свойством однозначно с точностью до изоморфизма (см. 10.1.19).

2°. Тензорное произведение есть функтор (см. 10.3.1), а именно сопряженный к функтору Hom (см. 10.3.4).

10.1. Определение и свойство пропускания

Операция взятия тензорного произведения ставит в соответствие модулям A_S и ${}_SU$ новый модуль

$$A \underset{S}{\otimes} U,$$

который, вообще говоря, является $\mathbf{Z}$-модулем, однако при соответствующих предположениях может быть также модулем над другими кольцами.

Чтобы определить $A \underset{S}{\otimes} U$, рассмотрим

$$A \times U = \{(a,\ u) \mid a \in A \wedge u \in U\}$$

— декартово произведение множеств A и U. Далее, обозначим через $F = F(A \times U,\ \mathbf{Z})$ свободный правый (или левый — сторона в случае кольца $\mathbf{Z}$ не играет никакой роли) $\mathbf{Z}$-модуль с базисом $A \times U$ (см. § 4.4). Базисные элементы мы обозначаем снова через $(a,\ u)$. Наконец, пусть K — подмодуль модуля F (как $\mathbf{Z}$-модуля), порожденный множеством $D_1 \cup D_2 \cup T$, где

$$D_1 := \{(a+a',\ u)-(a,\ u)-(a',\ u) \mid a,\ a' \in A \wedge u \in U\},$$
$$D_2 := \{(a,\ u+u')-(a,\ u)-(a,\ u') \mid a \in A \wedge u,\ u' \in U\},$$
$$T := \{(as,\ u)-(a,\ su) \mid a \in A \wedge u \in U \wedge s \in S\}.$$

10.1.1. *Определение.* *Фактормодуль F/K называется тензорным произведением модулей A_S и ${}_SU$ над S:*

$$A \underset{S}{\otimes} U := F/K.$$

Образ элемента $(a, u) \in F$ при естественном эпиморфизме $F \to F/K$ называется тензорным произведением элементов a и u и обозначается через $a \otimes u$:

$$a \otimes u := (a, u) + K.$$

Если из контекста ясно, о каком кольце идет речь, то вместо $A \underset{S}{\otimes} U$ пишут просто $A \otimes S$.

Для тензорного произведения имеют место следующие правила вычисления:

10.1.2. *Правила вычисления:*

(1) $(a + a') \otimes u = a \otimes u + a' \otimes u$.

(2) $a \otimes (u + u') = a \otimes u + a \otimes u'$.

(3) $as \otimes u = a \otimes su$.

(4) $0 \otimes u = u \otimes 0 = 0$.

(5) $-(a \otimes u) = (-a) \otimes u = a \otimes (-u)$.

(6) $(a \otimes u) z = (az) \otimes u = a \otimes (uz), \quad z \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. (1) — (3) следуют из определения K.

(4) $0 \otimes u + 0 \otimes u = (0 + 0) \otimes u = 0 \otimes u \Rightarrow 0 \otimes u = 0$; аналогично устанавливается, что $a \otimes 0 = 0$.

(5) $a \otimes u + (-a) \otimes u = (a - a) \otimes u = 0 \otimes u = 0 \Rightarrow (-a) \otimes u = -(a \otimes u)$; аналогично для $a \otimes (-u)$.

(6) $z > 0 : (a \otimes u) z = \underbrace{a \otimes u + \ldots + a \otimes u}_{z \text{ слагаемых}} = (a + \ldots + a) \otimes u = (az) \otimes u$;

$z = 0 : (a \otimes u) 0 = 0 = 0 \otimes u = (a0) \otimes u$;

$z < 0 : (a \otimes u)(-z) = (a(-z)) \otimes u = (-az) \otimes u = -((az) \otimes u)$ согласно (5). Так как

$$(a \otimes u)(-z) + (a \otimes u) z = (a \otimes u)(-z + z) = (a \otimes u) 0 = 0,$$

то однозначно определенный противоположный элемент для $-((az) \otimes u)$ равен, с одной стороны, $(az) \otimes u$, а с другой, $(a \otimes u) z$. Поэтому $(az) \otimes u = (a \otimes u) z$. Аналогично доказывается и второе равенство. □

10.1.3. Замечания. (1) Свободный правый $\mathbf{Z}$-модуль F можно также рассматривать и как свободный левый $\mathbf{Z}$-модуль; сторона не играет никакой роли, и в дальнейшем для F и для $A \underset{S}{\otimes} U$ выбирается та сторона, которая в данный момент удобнее.

(2) Согласно правилу (6), каждый элемент $t \in A \underset{S}{\otimes} U$ может быть записан в виде конечной суммы вида

$$t = \sum a_i \otimes u_i.$$

(3) Представление $t = \sum a_i \otimes u_i$ определено, вообще говоря, не однозначно. Оно не единственно даже в случае, когда речь идет о представлениях „наименьшей длины".
(4) Тензорное произведение двух ненулевых модулей может оказаться равным нулю.

Пример к (3) и (4). Пусть $A = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_{\mathbf{Z}}$, $U = {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$. Тогда для любых $a \in A$, $u \in U$ имеем в $A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} U$

$$0 = 0 \otimes 0 = a \otimes 0 - 0 \otimes u = a \otimes (3u) - (2a) \otimes u$$
$$= 3(a \otimes u) - 2(a \otimes u) = a \otimes u.$$

Следовательно, $A \otimes U = 0$.

10.1.4. ***Определение.*** *Пусть даны модули* A_S, ${}_S U$, $M_{\mathbf{Z}}$.
(1) *Отображение* φ: $A \times U \to M$ *называется биаддитивным, если*

$$\forall a, a' \in A \ \forall u, u' \in U [\varphi(a + a', u) = \varphi(a, u) + \varphi(a', u) \wedge$$
$$\varphi(a, u + u') = \varphi(a, u) + \varphi(a, u')].$$

(2) *Биаддитивное отображение* φ *называется* S*-сбалансированным*[1] *отображением, если*

$$\forall a \in A \ \forall u \in U \ \forall s \in S [\varphi(as, u) = \varphi(a, su)].$$

10.1.5. ***Следствие.*** *Пусть* ν: $F \to F/K = A \underset{S}{\otimes} U$ *— естественный эпиморфизм и* τ *— его ограничение на базис* $A \times U$ *для* F:

$$\tau := \nu | A \times U, \text{ т. е. } \tau(a, u) = a \otimes u.$$

Тогда для каждого $\mathbf{Z}$*-гомоморфизма* λ: $A \underset{S}{\otimes} U \to M$ отображение

$$\varphi := \lambda\tau: A \times U \to M$$

является S*-сбалансированным. В частности, само* τ *является* S*-сбалансированным отображением.*

Доказательство. Имеем $\lambda\tau(a + a', u) = \lambda((a + a') \otimes u) = \lambda(a \otimes u + a' \otimes u) = \lambda(a \otimes u) + \lambda(a' \otimes u) = \lambda\tau(a, u) + \lambda\tau(a', u)$. Аналогично проверяются и прочие свойства. □

---

[1] В оригинале S-tensorielle. Мы придерживаемся терминологии, принятой в переводе книги Фейса *[12]. Соответственно ниже мы используем вместо авторского Tens символ Bln (напоминающий к тому же о *билинейных* отображениях, каковыми являются сбалансированные отображения в классическом случае модулей над общим коммутативным кольцом). — *Прим. ред.*

Для дальнейшего важно, что образ всякого элемента при отображении λ можно выразить через $\varphi := \lambda\tau$:

(10.1.6) $\lambda(\sum a_i \otimes u_i) = \sum \lambda(a_i \otimes u_i) = \sum \lambda\tau(a_i, u_i) = \sum \varphi(a_i, u_i)$.

Обозначим теперь через $\mathrm{Bln}(A \times U, M)$ множество всех S-сбалансированных отображений из $A \times U$ в M. Очевидно, это множество становится $\mathbf{Z}$-модулем, если ввести определения

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(a, u) := \varphi_1(a, u) + \varphi_2(a, u),$$
$$(-\varphi)(a, u) := -\varphi(a, u),$$

и отображение

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}_Z\left(A \underset{S}{\otimes} U, M\right) \ni \lambda \longmapsto \varphi := \lambda\tau \in \mathrm{Bln}(A \times U, M)$$

есть $\mathbf{Z}$-гомоморфизм.

10.1.7. ***Теорема.*** *Φ является изоморфизмом.*

Доказательство. Инъективность Φ следует из 10.1.6. Докажем сюръективность Φ. Пусть дано $\varphi \in \mathrm{Bln}(A \times U, M)$. Надо найти такое $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}\left(A \underset{S}{\otimes} U, M\right)$, что $\varphi = \lambda\tau$. Прежде всего продолжим φ до $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(F, M)$ по формуле

$$\hat{\varphi}(\sum (a_i, u_i) z_i) := \sum \varphi(a_i, u_i) z_i.$$

Так как φ S-сбалансировано, то $K \subseteq \ker(\hat{\varphi})$. Следовательно, $\hat{\varphi}$ можно пропустить через $F/K = A \underset{S}{\otimes} U$ (частный случай теоремы 3.4.7), т. е. существует такое отображение $\lambda\colon F/K \to M$, также являющееся $\mathbf{Z}$-гомоморфизмом, что $\varphi = \lambda\tau$. □

Для дальнейших приложений объединим 10.1.6 и 10.1.7 в единое утверждение:

10.1.8. ***Следствие.*** *Для каждого S-сбалансированного отображения $\varphi\colon A \times U \to M$ существует единственный $\mathbf{Z}$-гомоморфизм $\lambda\colon A \underset{S}{\otimes} U \to M$, такой что $\varphi = \lambda\tau$. При этом*

$$\lambda(\sum a_i \otimes u_i) = \sum \varphi(a_i, u_i).$$

В заключение покажем, что тензорное произведение $A \underset{S}{\otimes} U$ определяется свойством пропускания 10.1.8 однозначно с точностью до изоморфизма.

Точнее, пусть модуль $C_{\mathbf{Z}}$ и S-сбалансированное отображение $\gamma\colon A \times U \to C$ таковы, что для каждого $\mathbf{Z}$-модуля M и каждого S-сбалансированного отображения $\varphi\colon A \times U \to M$ существует единственный $\mathbf{Z}$-гомоморфизм

$$\eta\colon C \to M,$$

удовлетворяющий условию $\varphi = \eta\gamma$. Тогда $A \underset{S}{\otimes} U \cong C$ (как $\mathbf{Z}$-модули).

На самом деле при доказательстве этого факта можно обойтись и более слабыми предположениями, как показывает следующая теорема.

10.1.9. ***Теорема.*** *Пусть* γ: $A \times U \to C$ *есть* S*-сбалансированное отображение со следующими свойствами:*
(1) *существует такой* $\mathbf{Z}$*-гомоморфизм*

$$\sigma\colon C \to A \underset{S}{\otimes} U,$$

что $\tau = \sigma\gamma$ (*т. е.* τ *пропускается через* γ);
(2) *равенство* $\gamma = \eta\gamma$, *где* $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(C, C)$, *выполняется лишь для* $\eta = 1_C$ (*т. е. пропустить* γ *через* γ *можно лишь единственным образом*). *Тогда*

$$C \cong A \underset{S}{\otimes} U \text{ (как } \mathbf{Z}\text{-модули)}.$$

Доказательство. Ввиду 10.1.8 найдется ρ: $A \underset{S}{\otimes} U \to C$, такое что $\gamma = \rho\tau$. По предположению имеем $\tau = \sigma\gamma$. Из этих двух равенств вытекает, что $\tau = \sigma\rho\tau$, $\gamma = \rho\sigma\gamma$. В силу 10.1.8 и предположения (2) получаем

$$\sigma\rho = 1_{A \otimes U}, \quad \rho\sigma = 1_C.$$

Таким образом, $C \cong A \underset{S}{\otimes} U$. □

Из свойств тензорного произведения здесь использовались лишь равенство $\gamma = \rho\tau$ и единственность пропускания $\tau = \sigma\rho\tau$.

10.2. Дальнейшие свойства тензорного произведения

10.2.1. ***Тензорное произведение гомоморфизмов.*** Пусть даны S-модули A_S, B_S, а также ${}_SU$, ${}_SV$ и S-гомоморфизмы

$$\alpha\colon A \to B, \quad \mu\colon U \to V.$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon A \times U \ni (a, u) \longmapsto \alpha(a) \otimes \mu(u) \in B \underset{S}{\otimes} V.$$

Как легко проверить, φ является S-сбалансированным отображением, причем $\varphi(a, u) = \alpha(a) \otimes \mu(u)$. Отвечающий ему (согласно 10.1.8) $\mathbf{Z}$-гомоморфизм из $A \underset{S}{\otimes} U$ в $B \underset{S}{\otimes} V$ обозначим через $\alpha \otimes \mu$; он действует следующим образом:

$$\alpha \otimes \mu\colon A \underset{S}{\otimes} U \ni \sum a_i \otimes u_i \longmapsto \sum \alpha(a_i) \otimes \mu(u_i) \in B \underset{S}{\otimes} V,$$

т. е. α и μ применяются к соответствующим компонентам.

Определение. *Гомоморфизм* $\alpha\otimes\mu$ *называется тензорным произведением гомоморфизмов* α *и* μ.

Для тензорного произведения гомоморфизмов непосредственно проверяются следующие свойства:
(1) $1_A\otimes 1_U = 1_{A\underset{S}{\otimes}U}$.
(2) *Пусть, кроме* α *и* μ, *даны еще гомоморфизмы* β: $B_S\to C_S$, ν: ${}_SV\to {}_SW$. *Тогда* $(\beta\alpha)\otimes(\nu\mu)=(\beta\otimes\nu)(\alpha\otimes\mu)$.
(3) *Если* α *и* μ *— изоморфизмы, то* $\alpha\otimes\mu$ *— также изоморфизм, причем* $(\alpha\otimes\mu)^{-1}=\alpha^{-1}\otimes\mu^{-1}$.

10.2.2. ***Модульные свойства тензорного произведения.*** Пусть R — еще одно кольцо и ${}_RA_S$ — бимодуль. Покажем, что $A\underset{S}{\otimes}U$ с помощью определения

$$r\left(\sum a_i\otimes u_i\right) := \sum (ra_i)\otimes u_i, \qquad r\in R,$$

превращается в левый R-модуль. С этой целью рассмотрим при фиксированном $r\in R$ отображение

$$A\ni a\longmapsto ra\in A.$$

Так как ${}_RA_S$ — бимодуль, то это отображение есть S-гомоморфизм, который мы обозначим через $r^{\cdot}$. Согласно 10.2.1, $r^{\cdot}\otimes 1_U$ является гомоморфизмом, причем

$$r^{\cdot}\otimes 1_U\colon\ A\underset{S}{\otimes}U\ni\sum a_i\otimes u_i\longmapsto\sum(ra_i)\otimes u_i\in A\underset{S}{\otimes}U,$$

так что при указанном определении $A\underset{S}{\otimes}U$ действительно становится левым R-модулем. (Независимо от представления $\sum a_i\otimes u_i$ элемент $\sum(ra_i)\otimes u_i$ однозначно определяется по r и $\sum a_i\otimes u_i$!)

Если ${}_SU_T$ — бимодуль, то $A\underset{S}{\otimes}U$ превращается в правый T-модуль, если положить

$$\left(\sum a_i\otimes u_i\right)t := \sum a_i\otimes(u_it), \qquad t\in T,$$

и для бимодулей ${}_RA_S$, ${}_SU_T$ тензорное произведение $A\underset{S}{\otimes}U$ будет R-T-бимодулем.

Для гомоморфизмов

$$\alpha\colon {}_RA_S\to {}_RB_S,\quad \mu\colon {}_SU\to {}_SV$$

$\alpha\otimes\mu$ является R-гомоморфизмом:

$$\alpha\otimes\mu\colon\ {}_R\left(A\underset{S}{\otimes}U\right)\to {}_R\left(B\underset{S}{\otimes}V\right),$$

так как

$$\begin{aligned}(\alpha\otimes\mu)\left(r\sum a_i\otimes u_i\right) &= \sum\alpha(ra_i)\otimes\mu(u_i)\\ &= \sum r\alpha(a_i)\otimes\mu(u_i) = r\sum\alpha(a_i)\otimes\mu(u_i)\\ &= r(\alpha\otimes\mu)\left(\sum a_i\otimes u_i\right).\end{aligned}$$

Соответственно для

$$\alpha\colon {}_RA_S \to {}_RB_S, \quad \mu\colon {}_SU_T \to {}_SV_T$$

$\alpha \otimes \mu$ есть бимодульный R-T-гомоморфизм из ${}_R\left(A \underset{S}{\otimes} U\right)_T$ в ${}_R\left(B \underset{S}{\otimes} V\right)_T$.

Если R — подкольцо центра S (например, в случае коммутативного кольца S, если $R = S$), то ${}_SA$ и ${}_SU$ с помощью определений

$$ra := ar, \quad ur := ru, \quad r \in R,\ a \in A,\ u \in U,$$

превращаются соответственно в R-S- и S-R-бимодули, а $A \underset{S}{\otimes} U$ — в R-R-бимодуль. При этом

$$r\left(\sum a_i \otimes u_i\right) = \sum (ra_i) \otimes u_i = \sum (a_i r) \otimes u_i$$
$$= \sum a_i \otimes (ru_i) = \sum a_i \otimes (u_i r) = \left(\sum a_i \otimes u_i\right) r.$$

Особый интерес представляет частный случай, когда S коммутативно и $R = S$.

Пусть теперь даны ${}_RA_S$, ${}_SU$ и ${}_RM$, а также S-сбалансированное отображение

$$\varphi\colon A \times U \to M, \quad \varphi(ra, u) = r\varphi(a, u), \quad r \in R.$$

Рассматривая $A \underset{S}{\otimes} U$ как левый R-модуль, покажем, что отвечающий ему (согласно 10.1.8) $\mathbf{Z}$-гомоморфизм λ является также R-гомоморфизмом:

$$\lambda\left(r \sum a_i \otimes u_i\right) = \lambda\left(\sum (ra_i) \otimes u_i\right) = \sum \varphi(ra_i, u_i)$$
$$= \sum r\varphi(a_i, u_i) = r\lambda\left(\sum a_i \otimes u_i\right).$$

Соответствующее утверждение имеет место также для бимодулей ${}_RA_S$, ${}_SU_T$, ${}_RM_T$. Наконец, покажем, что отображение

$$\lambda\colon A \underset{S}{\otimes} S \ni \sum a_i \otimes s_i \longmapsto \sum a_i s_i \in A$$

является S-изоморфизмом правых S-модулей $A \underset{S}{\otimes} S$ и A_S. Так как отображение

$$\varphi\colon A \times S \ni (a, s) \longmapsto as \in A$$

S-сбалансированно и $\varphi(a_1, ss_1) = \varphi(a_1, s)s_1$, то λ есть S-гомоморфизм и даже, очевидно, эпиморфизм. Если $\sum a_i \otimes s_i \in \ker(\lambda)$, т. е. $\sum a_i s_i = 0$, то

$$\sum a_i \otimes s_i = \sum (a_i s_i \otimes 1) = \left(\sum a_i s_i\right) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0.$$

Следовательно, λ является также мономорфизмом, а значит, изоморфизмом. Аналогично имеет место изоморфизм

$${}_S\left(S \underset{S}{\otimes} U\right) \cong {}_SU.$$

10.2.3. ***Ассоциативность тензорного произведения.*** Мы докажем здесь, что операция взятия тензорного произведения ассоциативна с точностью до изоморфизма. А именно, мы утверждаем, что для любых модулей A_R, ${}_RM_S$, ${}_SU$

$$\left(A \underset{R}{\otimes} M\right) \underset{S}{\otimes} U \cong A \underset{R}{\otimes} \left(M \underset{S}{\otimes} U\right),$$

причем изоморфизм задается следующим образом:

(*) $\sum (a_i \otimes m_i) \otimes u_i \longmapsto \sum a_i \otimes (m_i \otimes u_i)$.

Чтобы доказать это, рассмотрим при фиксированном $u \in U$ отображение

$$\varphi_u\colon\ A \times M \ni (a, m) \longmapsto a \otimes (m \otimes u) \in A \underset{R}{\otimes} \left(M \underset{S}{\otimes} U\right).$$

Как легко видеть, φ_u есть R-сбалансированное отображение, поэтому, согласно 10.1.8, существует гомоморфизм

$$\lambda_u\colon\ A \underset{R}{\otimes} M \ni \sum a_i \otimes m_i \longmapsto \sum a_i \otimes (m_i \otimes u) \in A \underset{R}{\otimes} \left(M \underset{S}{\otimes} U\right).$$

Следовательно, элемент $\sum a_i \otimes (m_i \otimes u)$ определяется однозначно по $\sum a_i \otimes m_i$ и u (независимо от представления $\sum a_i \otimes m_i$). Стало быть, отображение

$$\left(A \underset{R}{\otimes} M\right) \times U \ni \left(\sum a_i \otimes m_i,\ u\right) \longmapsto \sum a_i \otimes (m_i \otimes u) \in A \underset{R}{\otimes} \left(M \underset{S}{\otimes} U\right)$$

является S-сбалансированным. Значит, в силу 10.1.8, отображение (*) есть гомоморфизм; обозначим его через ρ. Точно также существует соответствующий гомоморфизм σ в обратном направлении, причем, очевидно,

$$\sigma\rho = 1_{(A \otimes M) \otimes U}, \quad \rho\sigma = 1_{A \otimes (M \otimes U)};$$

таким образом, ρ и σ — изоморфизмы.

Ввиду установленной ассоциативности в тензорных произведениях трех и более сомножителей скобки можно опускать, если все рассматривается с точностью до изоморфизма.

10.2.4. ***Перестановочность с прямыми суммами.*** Пусть даны модули A_S, ${}_SU$ и

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad U = \bigoplus_{j \in J} U_j.$$

Обозначим через M_{ij} подгруппу в $A \underset{S}{\otimes} U$, порожденную элементами $a_i \otimes u_j$, $a_i \in A_i$, $u_j \in U_j$. Тогда

(1) $$A \underset{S}{\otimes} U = \bigoplus_{i \in I,\ j \in J} M_{ij}, \quad M_{ij} \cong A_i \underset{S}{\otimes} U_j$$

и, следовательно,

(2) $$\left(\bigoplus_{i \in I} A_i\right) \underset{S}{\otimes} \left(\bigoplus_{j \in J} U_j\right) \cong \bigoplus_{i \in I,\ j \in J} \left(A_i \underset{S}{\otimes} U_j\right).$$

Доказательство. Прежде всего, в силу определения M_{ij} $\cdot A \underset{S}{\otimes} U = \sum_{i \in I,\, j \in J} M_{ij}$.

Пусть

$$\iota_i\colon A_i \to A, \quad \iota'_j\colon U_j \to U,$$
$$\pi_i\colon A \to A_i, \quad \pi'_j\colon U \to U_j$$

— канонические включения и проекции, отвечающие нашим прямым суммам. Тогда

$$\pi_i \iota_i = 1_{A_i}, \quad \pi'_j \iota'_j = 1_{U_j}$$

и, значит,

$$1_{A_i \otimes U_j} = \pi_i \iota_i \otimes \pi'_j \iota'_j = (\pi_i \otimes \pi'_j)(\iota_i \otimes \iota'_j).$$

Поэтому $\iota_i \otimes \iota'_j$ — мономорфизм, для которого $\operatorname{im}(\iota_i \otimes \iota'_j) \subseteq M_{ij}$. Из определения M_{ij} и $\iota_i \otimes \iota'_j$ вытекает, что на самом деле справедливо даже равенство $\operatorname{im}(\iota_i \otimes \iota'_j) = M_{ij}$, т. е. $\iota_i \otimes \iota'_j$ индуцирует (при сужении области значений) изоморфизм ω_{ij} между $A_i \underset{S}{\otimes} U_j$ и M_{ij}. Это означает, что между элементами $a_i \otimes u_j \in A \underset{S}{\otimes} U$, где $a_i \in A_i$, $u_j \in U_j$, и элементами $a_i \otimes u_j \in A_i \underset{S}{\otimes} U_j$ можно не делать никакого различия.

Обратите внимание, что для первого элемента $a_i \otimes u_j$ речь идет об элементе из $A \underset{S}{\otimes} U$, для второго элемента $a_i \otimes u_j$ — об элементе из $A_i \underset{S}{\otimes} U_j$. Так как ω_{ij} — изоморфизм, то $\pi_i \otimes \pi'_j \mid M_{ij}$ — также изоморфизм. Отсюда вытекает, что

$$\omega_{ij}(\pi_i \otimes \pi'_j) \mid M_{ij} = 1_{M_{ij}},$$

и, следовательно,

$$\omega_{ij}(\pi_i \otimes \pi'_j)$$

является проекцией $A \underset{S}{\otimes} U$ на M_{ij}. Таким образом, $A \underset{S}{\otimes} U = \bigoplus M_{ij}$. □

10.2.5. ***Тензорное произведение свободных модулей.*** Пусть A_S — свободный S-модуль с базисом $\{x_l \mid l \in L\}$, так что $A = \bigoplus_{l \in L} x_l S$.

Утверждение. *Каждый элемент из $A \underset{S}{\otimes} U$ представим в виде конечной суммы*

$$\sum x_l \otimes u_l, \quad u_l \in U,$$

где $u_l \neq 0$ определены однозначно.

Доказательство. Применяя 10.2.4, получаем, что $x_l S \cong S$ и $x_l S \underset{S}{\otimes} U \cong S \underset{S}{\otimes} U \cong U$.

Доказательство можно также провести непосредственно с помощью 10.1.8. Ввиду закона дистрибутивности для тензорного произведения (см. 10.1.2) ясно, что каждый элемент из $A \underset{S}{\otimes} U$ может быть записан в виде конечной суммы $\sum x_l \otimes u_l$. Осталось доказать единственность. Пусть

$$a = \sum x_l s_l, \qquad s_l \in S,$$

— представление элемента $a \in A$ через базисные элементы, и пусть фиксировано $k \in L$. Очевидно, что соответствие

$$(a,\ u) \longmapsto \begin{cases} s_k u, & \text{если } k \text{ встречается в представлении } a \text{ через} \\ & \text{базисные элементы,} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

определяет S-сбалансированное отображение $A \times U \to U$. Следовательно, существует гомоморфизм $A \underset{S}{\otimes} U \to U$, для которого

$$\sum x_l \otimes u_l \longmapsto \begin{cases} u_k, & \text{если } k \text{ встречается в сумме } \sum x_l \otimes u_l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как при гомоморфизме образ определен однозначно (независимо от представления $\sum x_l \otimes u_l$), отсюда следует единственность $u_k \neq 0$. □

Если A и U — векторные пространства над одним и тем же полем размерностей m и n соответственно, то их тензорное произведение является векторным пространством над тем же полем размерности mn. Более общо, имеет место

Утверждение. *Пусть S — коммутативное кольцо, A_S — свободный S-модуль с базисом $x_1, \ldots, x_m$ и ${}_S U$ — свободный S-модуль с базисом $z_1, \ldots, z_n$. Тогда $A \underset{S}{\otimes} U$ есть свободный S-модуль с базисом*

$$\{x_i \otimes z_j \mid i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Доказательство. Это следует из 10.2.4 или из предыдущего утверждения. Согласно этим утверждениям, в $\sum x_l \otimes u_l$ элементы $u_l \neq 0$ определены однозначно, поэтому однозначно определены и ненулевые коэффициенты из представления

$$u_l = \sum s_{lk} z_k$$

элемента u_l через базисные элементы. Отсюда следует, что и ненулевые s_{lk} из представления $\sum x_l \otimes u_l = \sum (x_l \otimes z_k) s_{lk}$ тоже определены однозначно. □

10.3. Функторные свойства тензорного произведения

Пусть, как и всюду в этой книге, $\mathscr{M}_S$, соотв. ${}_S\mathscr{M}$, обозначает категорию (унитарных) правых, соотв. левых, S-модулей и A — категорию $\mathbf{Z}$-модулей, т. е. абелевых групп (определения см. в гл. 1).

10.3.1. ***Теорема.*** *Тензорное произведение — функтор из $\mathscr{M}_S \times {}_S\mathscr{M}$ в A, ковариантный по обоим аргументам.*

Доказательство. Проверим, что выполнены условия 1.3.4. Прежде всего ясно, что отображения

$$\mathrm{Ob}\,(\mathscr{M}_S) \times \mathrm{Ob}\,({}_S\mathscr{M}) \ni (A,\ U) \longmapsto A \underset{S}{\otimes} U \in A$$

и

$$\mathrm{Hom}_S(A, B) \times \mathrm{Hom}_S(U, V) \ni (\alpha, \mu) \longmapsto \alpha \otimes \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}\left(A \underset{S}{\otimes} U,\ B \underset{S}{\otimes} V\right)$$

определены корректно. Далее, как показано в 10.2.1,

$$1_A \otimes 1_U = 1_{A \underset{S}{\otimes} U},\quad \beta\alpha \otimes \nu\mu = (\beta \otimes \nu)(\alpha \otimes \mu).$$

Тем самым теорема доказана. □

Для полноты отметим, что тензорное произведение можно также рассматривать как ковариантный функтор

$$\underset{S}{\otimes}\colon {}_R\mathscr{M}_S \times {}_S\mathscr{M}_T \to {}_R\mathscr{M}_T.$$

Мы займемся сейчас доказательством того факта, что тензорное произведение и Hom при одном фиксированном аргументе являются сопряженными функторами по второму аргументу. Это мы получим как частный случай следующей общей теоремы. Чтобы ее сформулировать, нам придется напомнить вначале некоторые установленные ранее факты.

Пусть даны модули X_S, ${}_SU_T$, Y_T. Если гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}_T(U, Y)$ записывать слева от элементов из U, т. е. если образ элемента $u \in U$ при гомоморфизме $\mu \in \mathrm{Hom}_T(U, Y)$ обозначается через $\mu(u)$, то $\mathrm{Hom}_T(U, Y)$ с помощью определения

$$(\mu s)\, u := \mu(su),\quad u \in U,\ s \in S,\ \mu \in \mathrm{Hom}_T(U, Y)$$

превращается в правый S-модуль. В выражении $\mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(U, Y))$ будем понимать $\mathrm{Hom}_T(U, Y)$ как правый S-модуль в этом смысле. Далее, так как ${}_SU_T$ есть S-T-бимодуль, то $X \underset{S}{\otimes} U$ является правым T-модулем и как таковой фигурирует в выражении $\mathrm{Hom}_T\left(X \underset{S}{\otimes} U,\ Y\right)$.

Определим теперь гомоморфизм (аддитивных групп) $\Phi_{(X,U,Y)}$ из $\mathrm{Hom}_T\left(X \underset{S}{\otimes} U,\ Y\right)$ в $\mathrm{Hom}_S(X,\ \mathrm{Hom}_T(U,\ Y))$. Для этого каждому $\rho \in \mathrm{Hom}_T\left(X \underset{S}{\otimes} U,\ Y\right)$ надо поставить в соответствие его образ $\rho^* \in \mathrm{Hom}_S(X,\ \mathrm{Hom}_T(U,\ Y))$. Для $x \in X$ мы должны иметь $\rho^*(x) \in \mathrm{Hom}_T(U,\ Y)$. Действие $\rho^*(x)$ на $u \in U$ будем записывать в виде $\rho^*(x)(u)$. Положим теперь

$$\rho^*(x)(u) := \rho(x \otimes u),\quad x \in X,\quad u \in U,\quad x \otimes u \in X \underset{S}{\otimes} U,$$
$$\rho \in \mathrm{Hom}_T\left(X \underset{S}{\otimes} U,\ Y\right).$$

Ясно, что этим ρ^* определено однозначно для любых $x \in X$ и $u \in U$. Далее, для $x_1,\ x_2 \in X$, $u_1,\ u_2 \in U$, $s_1,\ s_2 \in S$, $t_1,\ t_2 \in T$ имеем

$$\begin{aligned}
&\rho^*(x_1s_1 + x_2s_2)(u_1t_1 + u_2t_2)\\
&= \rho((x_1s_1 + x_2s_2) \otimes (u_1t_1 + u_2t_2)\\
&= \rho(x_1 \otimes s_1u_1)t_1 + \rho(x_1 \otimes s_1u_2)t_2 + \rho(x_2 \otimes s_2u_1)t_1 + \rho(x_2 \otimes s_2u_2)t_2\\
&= \rho^*(x_1)(s_1u_1)t_1 + \rho^*(x_1)(s_1u_2)t_2 + \rho^*(x_2)(s_2u_1)t_1 + \rho^*(x_2)(s_2u_2)t_2,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\rho^* \in \mathrm{Hom}_S(X_S,\ \mathrm{Hom}_T(U,\ Y))$. Если теперь $\rho_1,\ \rho_2 \in \mathrm{Hom}_T\left(X \underset{S}{\otimes} U,\ Y\right)$, то, очевидно,

$$\begin{aligned}
(\rho_1 + \rho_2)^*(x)(u) &= (\rho_1 + \rho_2)(x \otimes u) =\\
&= \rho_1(x \otimes u) + \rho_2(x \otimes u) = \rho_1^*(x)(u) + \rho_2^*(x)(u),
\end{aligned}$$

т. е.

$$(\rho_1 + \rho_2)^* = \rho_1^* + \rho_2^*.$$

Итак, отображение

(10.3.2) $$\Phi_{(X,U,Y)}\colon \mathrm{Hom}_T\left(X \underset{S}{\otimes} U,\ Y\right) \ni \rho \longmapsto$$
$$\rho^* \in \mathrm{Hom}_S(X,\ \mathrm{Hom}_T(U,\ Y)),$$
$$\rho^*(x)(u) := \rho(x \otimes u),\quad x \in X,\quad u \in U,$$

есть гомоморфизм аддитивных групп.

10.3.3. ***Теорема.*** (1) *Для каждой тройки* X_S, ${}_SU_T$, Y_T *гомоморфизм* $\Phi_{(X,U,Y)}$ *является изоморфизмом.*

(2) *Для любых гомоморфизмов* $\xi\colon X'_S \to X_S$, $\mu\colon {}_SU'_T \to {}_SU_T$, $\eta\colon Y_T \to Y'_T$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_T(X \underset{S}{\otimes} U, Y) & \xrightarrow{\Phi_{(X,U,Y)}} & \mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(U, Y)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\xi\otimes\mu,\eta)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\xi, \mathrm{Hom}(\mu,\eta))} \\ \mathrm{Hom}_T(X' \underset{S}{\otimes} U', Y') & \xrightarrow{\Phi_{(X',U',Y')}} & \mathrm{Hom}_S(X', \mathrm{Hom}_T(U', Y')) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. (1) Положим для краткости $\Phi := \Phi_{X,U,Y}$. Гомоморфизм Φ является мономорфизмом, поскольку $\rho^* = 0$ означает, что $\rho^*(x)(u) = \rho(x \otimes u) = 0$ для всех $x \in X$, $u \in U$, а значит, $\rho = 0$. Пусть $\sigma \in \mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(U, Y))$. Рассмотрим S-сбалансированное отображение

$$X \times U \ni (x, u) \longmapsto \sigma(x)(u) \in Y.$$

Для него существует T-гомоморфизм

$$\rho\colon X \underset{S}{\otimes} U \ni \sum x_i \otimes u_i \longmapsto \sum \sigma(x_i)(u_i) \in Y.$$

Для этого ρ имеем

$$\rho^*(x)(u) = \rho(x \otimes u) = \sigma(x)(u),$$

т. е. $\Phi(\rho) = \sigma$. Таким образом, Φ является также эпиморфизмом Тем самым доказано, что Φ — изоморфизм.

(2) Отправляясь от $\rho \in \mathrm{Hom}_T\left(X \underset{S}{\otimes} U, Y\right)$, мы при прохождении по левому пути имеем

$$\rho \longmapsto \mathrm{Hom}(\xi \otimes \mu, \eta)(\rho) = \eta\rho(\xi \otimes \mu) \longmapsto (\eta\rho(\xi \otimes \mu))^*,$$

а при прохождении по правому

$$\rho \longmapsto \rho^* \longmapsto \mathrm{Hom}(\xi, \mathrm{Hom}(\mu, \eta))(\rho^*) = \mathrm{Hom}(\mu, \eta)\rho^*\xi.$$

Применяя отображения, стоящие справа, вначале к $x' \in X'$, а потом к $u' \in U'$, получаем

$$(\eta\rho(\xi \otimes \mu))^*(x')(u') = (\eta\rho(\xi \otimes \mu))(x' \otimes u') = \eta\rho(\xi x' \otimes \mu u');$$
$$(\mathrm{Hom}(\mu, \eta)\rho^*\xi)(x')(u') = (\mathrm{Hom}(\mu, \eta)\rho^*)(\xi x')(u') =$$
$$= \eta(\rho^*(\xi x')(\mu u')) = \eta\rho(\xi x' \otimes \mu u').$$

Таким образом, диаграмма коммутативна. □

10.3.4. ***Следствие.*** *Для каждого* $U \in {}_S\mathscr{M}_T$

$$\cdot \underset{S}{\otimes} U\colon \mathscr{M}_S \to \mathscr{M}_T \text{ и } \mathrm{Hom}_T(U, -)\colon \mathscr{M}_T \to \mathscr{M}_S$$

образуют пару сопряженных функторов.

(Определение сопряженных функторов см. в гл. 1.)
Доказательство. Это следует из 10.3.3 при $\mu = 1_U$. □

10.3.5. Замечание. Утверждения, аналогичные 10.3.3 и 10.3.4, справедливы также для ${}_SX$, ${}_RU_S$, ${}_RY$ (при перестановке сторон). В частности, вместо (1) в 10.3.3 имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_R\left(U \underset{S}{\otimes} X, Y\right) \cong \mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_R(U, Y))$$

и сопряженными функторами в аналоге 10.3.4 будут

$$U \underset{S}{\otimes} \cdot\colon {}_S\mathscr{M} \to {}_R\mathscr{M} \text{ и } \mathrm{Hom}_R(U, -)\colon {}_R\mathscr{M} \to {}_S\mathscr{M}.$$

Позже мы рассмотрим важные приложения факта сопряженности функторов $\otimes$ и Hom, поэтому здесь не будем приводить никаких примеров. Первое такое приложение появится уже в следующем параграфе.

10.4. Плоские модули и регулярные кольца

Пусть $A \subsetneq R$ — двусторонний идеал кольца R и $\iota\colon A \to R$ — включение. Рассмотрим гомоморфизм

$$\iota \otimes 1\colon A \underset{R}{\otimes} R/A \to R \underset{R}{\otimes} R/A \text{ (где } 1 = 1_{R/A}).$$

Утверждение. (1) $\iota \otimes 1 = 0$.
(2) $A \underset{R}{\otimes} R/A \cong A/A^2$; *следовательно,* $A \underset{R}{\otimes} R/A \neq 0$ *для* $A \neq A^2$.

Доказательство. (1) Для $a \in A$, $\bar{r} \in R/A$

$$(\iota \otimes 1)(a \otimes \bar{r}) = a \otimes \bar{r} = 1 \cdot a \otimes \bar{r} = 1 \otimes \overline{ar} = 1 \otimes \bar{0} = 0,$$

т. е. $\iota \otimes 1 = 0$.

(2) Положим $\hat{a} := a + A^2 \in A/A^2$ для $a \in A$. Так как отображение

$$A \times R/A \ni (a, \bar{r}) \mapsto \widehat{ar} \in A/A^2$$

R-сбалансированно и сюръективно, существует такой эпиморфизм

$$\lambda\colon A \underset{R}{\otimes} R/A \to A/A^2,$$

что $\lambda(a \otimes \bar{r}) = \widehat{ar}$. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \otimes \bar{1} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right) \otimes \bar{1} \in \ker(\lambda).$$

Тогда $\sum_{i=1}^{n} a_i r_i \in A^2$ и, значит,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i r_i = \sum_{j=1}^{k} a'_j a''_j, \quad a'_j,\ a''_j \in A.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right) \otimes 1 = \left(\sum_{j=1}^{k} a'_j a''_j\right) \otimes 1 = \sum_{j=1}^{k} (a'_j a''_j \otimes 1)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} a'_j \otimes a''_j = \sum_{j=1}^{k} a_j \otimes 0 = 0,$$

т. е. λ является также мономорфизмом. Стало быть, λ — изоморфизм. □

Таким образом, для $A^2 \neq A$ (например, для $A = n\mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Z}$, где $n > 1$) мы имеем следующую ситуацию: хотя $\iota\colon A \to R$ — мономорфизм, но $\iota \otimes 1$ не является мономорфизмом.

С другой стороны, существуют модули ${}_RM$, такие что для каждого мономорфизма $\alpha\colon A_R \to B_R$ и

$$\alpha \otimes 1_M\colon A \underset{R}{\otimes} M \to B \underset{R}{\otimes} M$$

— также мономорфизм. Как будет показано ниже, этим свойством обладают, например, все проективные модули ${}_RM$. Такие модули интересны со многих точек зрения, и мы займемся сейчас их изучением.

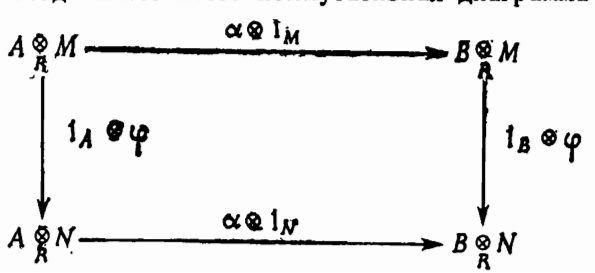
10.4.1. ***Определение.*** *Модуль ${}_RM$ называется плоским, если для каждого мономорфизма*

$\alpha\colon A_R \to B_R$

$\alpha \otimes 1_M$ *— тоже мономорфизм.*

10.4.2. ***Следствие.*** *Каждый изоморфный образ плоского модуля является плоским.*

Доказательство. Пусть ${}_RM$ плоск и $\varphi\colon {}_RM \to {}_RN$ — изоморфизм. Тогда имеет место коммутативная диаграмма



Так как $1_A \otimes \varphi$ и $1_B \otimes \varphi$ — изоморфизмы, то $\alpha \otimes 1_N$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\alpha \otimes 1_M$ — мономорфизм. □

10.4.3. ***Теорема.*** *Если*

$$_RM = \coprod_{i \in I} M_i \quad \left(\text{или } {}_RM = \bigoplus_{i \in I} M_i\right),$$

то M — плоский тогда и только тогда, когда все M_i, $i \in I$, плоски.

Доказательство. В силу 10.4.2 достаточно рассмотреть случай $M = \coprod_{i \in I} M_i$, причем элементы прямой суммы обозначаются, как и в гл. 4, через (m_i) (где лишь конечное число $m_i \neq 0$). В этом случае мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \underset{R}{\otimes} \left(\coprod_{i \in I} M_i\right) & \xrightarrow{\alpha \otimes 1_M} & B \underset{R}{\otimes} \left(\coprod_{i \in I} M_i\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I} \left(A \underset{R}{\otimes} M_i\right) & \xrightarrow{\coprod (\alpha \otimes 1_{M_i})} & \coprod_{i \in I} \left(B \underset{R}{\otimes} M_i\right) \end{array}$$

здесь вертикальные отображения — это изоморфизмы, определенные в 10.2.4 (например, для левого изоморфизма $a \otimes (m_i) \longmapsto (a \otimes m_i)$). Отсюда следует, что $\alpha \otimes 1_M$ является мономорфизмом в том и только том случае, когда $(\alpha \otimes 1_{M_i})$ является таковым, а это имеет место в точности тогда, когда $\alpha \otimes 1_{M_i}$ — мономорфизм для каждого $i \in I$. Тем самым наше утверждение доказано. □

10.4.4. ***Теорема.*** *Каждый проективный модуль плосок.*

Доказательство. Как мы знаем, каждый проективный модуль изоморфен прямому слагаемому свободного модуля. Поэтому, ввиду 10.4.2 и 10.4.3, достаточно проверить теорему для ${}_RR$. Но в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} A \underset{R}{\otimes} R & \xrightarrow{\alpha \otimes 1_R} & B \underset{R}{\otimes} R \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

$\alpha \otimes 1_R$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда α — мономорфизм. □

В связи с этим результатом возникает естественный вопрос, имеет ли место, и при каких условиях, обратное утверждение. В 1960 г. Х. Басс описал такие кольца R, над которыми любой плоский левый R-модуль проективен. Они характеризуются следующими эквивалентными условиями:

(1) Кольцо $R/\mathrm{rad}(R)$ полупросто и $\mathrm{rad}(R)$ *трансфинитно нильпотентен* справа, т. е. для любой последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ элементов из $\mathrm{rad}(R)$ найдется такое натуральное число n, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 0$.
(2) R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов (= циклических правых идеалов).
(3) Каждый левый R-модуль ${}_RM$ обладает проективной оболочкой, т. е. существует эпиморфизм ${}_RP \to {}_RM$ с проективным P и косущественным ядром.

Кольцо с этими свойствами (имеются и другие эквивалентные характеризации) называется *совершенным слева*. Согласно (1), соотв. (2), каждое артиново слева, соотв. справа, кольцо совершенно слева. В дальнейшем мы разовьем теорию совершенных колец довольно далеко.

Другой естественный вопрос — это вопрос о кольцах R, для которых каждый R-модуль плосок. Описание таких колец — главная цель последующих рассуждений.

10.4.5. ***Предложение.*** *Пусть даны модули* B_R *и* ${}_RM$.
(a) *Если* $0 = \sum b_i \otimes m_i \in B \underset{R}{\otimes} M$, *то существуют такие конечнопорожденные подмодули* $B_0 \subseteq B$, $M_0 \subseteq M$, *что* $b_i \in M_0$, $m_i \in M_0$ *и*

$$0 = \sum b_i \otimes m_i \in B_0 \underset{R}{\otimes} M_0.$$

(b) *Если* $B_1 \subseteq B$, $M_1 \subseteq M$ *и* $0 = \sum b_i \otimes m_i \in B_1 \underset{R}{\otimes} M_1$, *то*

$$0 = \sum b_i \otimes m_i \in B \underset{R}{\otimes} M.$$

Доказательство. (a) В качестве порождающих элементов для B_0, соотв. M_0, возьмем в первую очередь все элементы b_i, соотв. m_i, встречающиеся в $\sum b_i \otimes m_i$, так что выполнено условие $\sum b_i \otimes m_i \in B_0 \underset{R}{\otimes} M_0$. Чтобы обеспечить выполнение условия $\sum b_i \otimes m_i = 0 \in B_0 \underset{R}{\otimes} M_0$, нужно привлечь и другие элементы. В силу определения 10.1.1, условие $\sum b_i \otimes m_i = 0 \in B \underset{R}{\otimes} M$ означает, что $\sum (b_i, m_i) \in K$, где $K = K(B, M)$ зависит от B и M. В представлении $\sum (b_i, m_i)$ как элемента из K фигурирует лишь конечное число элементов из B в качестве первой компоненты, соотв. лишь конечное число элементов из M в качестве второй компоненты. Эти элементы также возьмем в качестве порождающих B_0,

соотв. M_0. Тогда $\sum(b_i, m_i) \in K(B_0, M_0)$, а значит, $0 = \sum b_i \otimes m_i \in \in B_0 \underset{R}{\otimes} M_0$.

(b) Пусть $\iota_{B_1}\colon B_1 \to B$ и $\iota_{M_1}\colon M_1 \to M$ — включения. Имеем

$$0 = (i_{B_1} \otimes \iota_{M_1})(0) = (i_{B_1} \otimes \iota_{M_1})(\sum b_i \otimes m_i) = \sum b_i \otimes m_i \in B \underset{R}{\otimes} M. \qquad \square$$

10.4.6. *Следствие.* *Если каждый конечно-порожденный подмодуль модуля $M = {}_RM$ содержится в некотором плоском подмодуле, то сам M является плоским.*

Доказательство. Пусть $\alpha\colon A_R \to B_R$ — мономорфизм и $\sum a_i \otimes m_i \in \in \ker(\alpha \otimes 1_M)$. Тогда, согласно 10.4.5 (a), существует конечно-порожденный подмодуль $M_0 \subseteq M$, для которого $\sum a_i \otimes m_i \in A \underset{R}{\otimes} M_0$ и $\sum a_i \otimes m_i \in \ker(\alpha \otimes 1_{M_0})$.

Пусть $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M$ и M_1 плоск. Из 10.4.5 (b) следует, что тогда $\sum a_i \otimes m_i \in \ker(\alpha \otimes 1_{M_1})$. Так как M_1 плоск, то $\sum a_i \otimes m_i = = 0 \in A \underset{R}{\otimes} M_1$. Поэтому, в силу 10.4.5 (b), $\sum a_i \otimes m_i = 0 \in A \underset{R}{\otimes} M$, что и требовалось доказать. $\square$

10.4.7. *Следствие.* *Если для гомоморфизма $\alpha\colon A_R \to B_R$ и модуля ${}_RM$ гомоморфизм*

$$\alpha \otimes 1_M\colon A \underset{R}{\otimes} M \to B \underset{R}{\otimes} M$$

не является мономорфизмом, то существует такой конечно-порожденный подмодуль $A_0 \subseteq A$, что $(\alpha \mid A_0) \otimes 1_M$ также не является мономорфизмом.

Доказательство. По предположению имеется ненулевой элемент $\sum a_i \otimes m_i \in \ker(\alpha \otimes 1_M)$. Если A_0 — подмодуль в A, порожденный элементами a_i, встречающимися в $\sum a_i \otimes m_i$, то по 10.4.5 (b)

$$0 \neq \sum a_i \otimes m_i \in A_0 \underset{R}{\otimes} M$$

и, как и раньше,

$$((\alpha \mid A_0) \otimes 1_M)(\sum a_i \otimes m_i) = \sum \alpha(a_i) \otimes m_i = 0 \in B \underset{R}{\otimes} M. \qquad \square$$

Для того чтобы проверить, является данный модуль плоским или нет, достаточно ввиду этого следствия ограничиться мономорфизмами $\alpha\colon A \to B$ с конечно-порожденными модулями A. Возникает вопрос, нельзя ли еще больше сузить класс „тестовых“ мономорфизмов. Это и в самом деле можно сделать, а именно это достигается сведением к инъективным модулям и к применению критерия Бэра.

Сведение к инъективным модулям осуществляется с помощью произвольного инъективного кообразующего для $\mathscr{M}_{\mathbf{Z}}$. Пусть D — такой кообразующий, скажем $D = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (см. 5.8.6). Положим для $X \in \mathscr{M}_{\mathbf{Z}}$

$$X^\circ := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X, D),$$

так что X° снова является $\mathbf{Z}$-модулем. Если в случае $X = {}_R M$ положить (см. § 3.6)

$$(\varphi r)(m) = \varphi(rm), \quad \varphi \in M^\circ, \ r \in R, \ m \in M,$$

то M° становится правым R-модулем и может быть рассматриваем как $\mathbf{Z}$-R-бимодуль.

Если еще для произвольного μ: ${}_R M \to {}_R N$ положить

$$\mu^\circ := \mathrm{Hom}(\mu, 1_D): N^\circ \to M^\circ,$$

то $^\circ$ будет контравариантным функтором из ${}_R\mathscr{M}$ в $\mathscr{M}_R$.

10.4.8. ***Теорема.*** *Для модуля ${}_R M$ следующие условия эквивалентны:*
(1) *${}_R M$ — плоский модуль;*
(2) *для каждого конечно-порожденного правого идеала $A \subsetneq R_R$ с вложением*

$$\iota_A: A_R \to R_R$$

$\iota_A \otimes 1_M$ является мономорфизмом;
(3) *модуль $M_R^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, D)$ инъективен.*

Доказательство. Для гомоморфизма α: $A \to B$ следующие условия эквивалентны:

(a) $\alpha \otimes 1_M$ — мономорфизм;
(b) $\mathrm{Hom}(\alpha \otimes 1_M, 1_D): \left(B \underset{R}{\otimes} M\right)^\circ \to \left(A \underset{R}{\otimes} M\right)^\circ$ — эпиморфизм;
(c) $\mathrm{Hom}(\alpha, \mathrm{Hom}(1_M, 1_D)) = \mathrm{Hom}(\alpha, 1_{M^\circ})$: $\mathrm{Hom}_R(B, M^\circ) \to \mathrm{Hom}_R(A, M^\circ)$ — эпиморфизм.

Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (b) следует из 5.8.4, а (b) $\Leftrightarrow$ (c) — из 10.3.3. Если потребовать выполнения условий (a) — (c) для каждого мономорфизма α, то (a) означает, что ${}_R M$ плоск, а (c) — что M_R^* инъективен. Этим показано, что (1) $\Leftrightarrow$ (3). Согласно критерию Бэра 5.7.1, M_R^* инъективен тогда и только тогда, когда (c) имеет место для всех вложений ι_A: $A_R \to R_R$ правых идеалов. Возвращаясь снова к (a), получаем, что M_R^* инъективен тогда и только тогда, когда $\iota_A \otimes 1_M$ — мономорфизм для каждого $A_R \subsetneq R_R$. В силу 10.4.7 при этом можно ограничиться конечно-порожденными правыми идеалами $A_R \subsetneq R_R$. Этим доказано, что (3) $\Leftrightarrow$ (2). □

Теперь мы ответим на вопрос, какие кольца обладают тем свойством, что любой модуль над ними является плоским. Напомним по этому поводу, что кольца, для которых любой модуль проек-

тивен, соотв. инъективен, — это полупростые кольца. Поскольку, как мы установили ранее, каждый проективный модуль плосок, полупростые кольца попадают в класс колец, описываемых следующей теоремой.

10.4.9. ***Теорема.*** *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(1) *каждый модуль ${}_RM$ плосок;*
(2) *для каждого элемента $r \in T$ существует такой элемент $r' \in R$, что $rr'r = r$;*
(3) *каждый циклический правый идеал в R является прямым слагаемым в R_R;*
(4) *каждый конечно-порожденный правый идеал в R является прямым слагаемым в R_R.*

Ясно, что условие (2) симметрично относительно замены сторон, так что указанные выше условия эквивалентны аналогичным левым условиям.

10.4.10. ***Определение.*** *Кольцо R, удовлетворяющее условиям* 10.4.9, *называется регулярным.*

Доказательство теоремы 10.4.9. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Для $r \in R$ рассмотрим вложение ι: $rR \to R$. По предположению

$$\iota \otimes 1_{R/Rr}\colon\ rR \underset{R}{\otimes} (R/Rr) \to R \underset{R}{\otimes} (R/Rr)$$

— мономорфизм. Имеем

$$(\iota \otimes 1_{R/Rr})(r \otimes \bar{1}) = r \otimes \bar{1} = 1 \otimes r\bar{1} = 1 \otimes \bar{r} = 1 \otimes \bar{0} = 0,$$

поэтому $0 = r \otimes \bar{1} \in rR \underset{R}{\otimes} (R/Rr)$. Пусть $\bar{y} := y + Rr \in R/Rr$ (в том же смысле используется черта и выше) и $\widehat{rz} := rz + rRr \in rR/rRr$. Тогда, очевидно,

$$rR \times R/Rr \ni (rx,\ \bar{y}) \longmapsto \widehat{rxy} \in rR/rRr$$

есть R-сбалансированное отображение, и, следовательно,

$$\tau\colon\ rR \underset{R}{\otimes} (R/Rr) \ni \sum rx_i \otimes \bar{y}_i \longmapsto \widehat{\sum rx_i y_i} \in rR/rRr$$

— гомоморфизм (аддитивных групп; на самом деле даже изоморфизм). Поскольку $0 = r \otimes \bar{1} \in rR \underset{R}{\otimes} (R/Rr)$, то

$$\tau(r \otimes \bar{1}) = \hat{r} = 0 \in rR/rRr.$$

Таким образом, $r \in rRr$, т. е. найдется такое $r' \in R$, что $rr'r = r$.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Если $rr'r = r$, то $(rr')(rr') = (rr'r)r' = rr'$ и, следовательно, $e := rr'$ — идемпотент, так что

$$R_R = eR \oplus (1 - e)R.$$

Далее, $eR = rr'R \subseteq rR$, а поскольку $er = rr'r = r$, то $rR \subseteq eR$ и, значит, $rR = eR$.

„(3) $\Rightarrow$ (4)“: Докажем индукцией по числу порождающих элементов, что каждый конечно-порожденный правый идеал порождается некоторым идемпотентом. Начало индукции обеспечивается условием (3). Действительно, если $R_R = rR \oplus A$ и $1 = e_1 + e_2$, $e_1 \in rR$, $e_2 \in A$, то e_1, e_2 — ортогональные идемпотенты, причем $rR = e_1R$, $A = e_2R$ (см. 7.2.3). Пусть теперь

$$B := r_1R + \ldots + r_nR \subseteq R_R.$$

По предположению индукции существует такой идемпотент $e \in R$, что $eR = r_1R + \ldots + r_{n-1}R$. Тогда, в силу равенства $r_n = er_n + (1-e)r_n$, имеем

$$r_nR \subseteq er_nR + (1-e)r_nR$$

и, следовательно,

$$B = eR + r_nR = eR + (1-e)r_nR.$$

Как было показано в начале индукции, найдется такой идемпотент $f \in R$, что

$$fR = (1-e)r_nR.$$

Поэтому $eR + r_nR = eR + fR$. Поскольку $f \in (1-e)r_nR$, то $ef = 0$.

Мы утверждаем, что $g := e + f(1-e)$ есть идемпотент, для которого

$$gR = eR + fR = r_1R + \ldots + r_nR.$$

Действительно, прежде всего $gR \subseteq eR + fR$. Далее, имеем $geR = eR \subseteq gR$, а также

$$gfR = (ef + f^2 + fef)R = f^2R = fR \subseteq gR$$

(ибо $ef = 0$ и $f^2 = f$). Таким образом, $gR = eR + fR$. Наконец,

$$\begin{aligned} g^2 &= (e + f(1-e))(e + f(1-e)) = e + f(1-e)f(1-e) \\ &= e + f^2 - f^2e = e + f(1-e) = g, \end{aligned}$$

т. е. g — идемпотент. Следовательно, $R_R = gR \oplus (1-g)R$, чем (4) и доказано.

„(4) $\Rightarrow$ (1)“: Согласно 10.4.8 достаточно проверить, что для каждого вложения ι_A: $A_R \to R_R$ конечно-порожденного правого идеала $A \subseteq R_R$ и произвольного модуля ${}_RM$ отображение $\iota_A \otimes 1_M$ является мономорфизмом. Поскольку A — прямое слагаемое в R_R, существует идемпотент g, для которого $A = gR$. Пусть

$$\begin{aligned} \sum a_i \otimes m_i &= \sum ga_i \otimes m_i = \sum g^2a_i \otimes m_i \\ &= \sum g \otimes ga_im_i = g \otimes (\sum ga_im_i) \in \ker(\iota_A \otimes 1_M), \end{aligned}$$

так что

$$g \otimes \sum a_i m_i = 1 \otimes \sum g a_i m_i = 0 \in R \underset{R}{\otimes} M.$$

Тогда (согласно (10.2.5) $\sum g a_i m_i = 0$ и потому также

$$\sum a_i \otimes m_i = g \otimes (\sum g a_i m_i) = g \otimes 0 = 0.$$

Следовательно, $\iota_A \otimes 1_M$ — мономорфизм, чем и доказано (1). □

Как было замечено выше, каждое полупростое кольцо регулярно. Однако существуют регулярные кольца, не являющиеся полупростыми. Чтобы построить пример такого кольца, возьмем произвольное регулярное кольцо (например, поле) K и положим

$$R := \prod_{i=1}^{\infty} K_i, \text{ где } K_i = K \text{ для } i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Определив в R сложение покомпонентно и умножение тоже покомпонентно:

$$(k_i)(k_i') = (k_i k_i'),$$

превращаем R в кольцо Это кольцо регулярно. Действительно, если $k_i k_i' k_i = k_i$, то $(k_i)(k_i')(k_i) = (k_i)$. В случае когда K — поле, k_i можно выбрать так:

$$k_i' = \begin{cases} k_i^{-1}, & \text{если } k_i \neq 0, \\ 0, & \text{если } k_i = 0. \end{cases}$$

Как легко проверить, $A := \prod_{i=1}^{\infty} K_i$ — собственный двусторонний идеал в $R = \prod_{i=1}^{\infty} K_i$, являющийся существенным как в R_R, так и в ${}_R R$. Следовательно, A не может быть прямым слагаемым в R_R (или в ${}_R R$). Значит, кольцо R не полупросто и ни модуль $(R/A)_R$, ни модуль ${}_R(R/A)$ не проективен (ибо в противном случае эпиморфизм $R \to R/A$ был бы расщепляющим). Так как любой R-модуль плосок, то мы получаем, что $(R/A)_R$ — плоский, но не проективный модуль.

В заключение приведем понятие чистого мономорфизма, представляющее собой своего рода дуализацию понятия плоского модуля.

10.4.11. *Определение.* *Мономорфизм*

$$\alpha\colon A_R \to B_R$$

называется чистым, если $\alpha \otimes 1_M$ *для любого* R*-модуля* ${}_R M$ *является мономорфизмом. Если* $A_R \subseteq B_R$ *и вложение* $\iota\colon A \to B$ *чисто, то* A *называется чистым подмодулем модуля* B.

10.5. Плоские фактормодули плоских модулей

Мы рассмотрим здесь вопрос о том, при каких условиях фактормодуль плоского модуля будет плоским. Этот вопрос интересен, в частности, в связи с совершенными кольцами, которыми мы займемся в следующем параграфе.

10.5.1. *Предложение.* *Пусть* ${}_RM$ *— плоский модуль,* $U \subset {}_RM$, $A \subset R_R$ *и* ι: $A \to R$ *— вложение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\iota \otimes 1_{M/U}$: $A \underset{R}{\otimes} (M/U) \to R \underset{R}{\otimes} (M/U)$ *— мономорфизм;*

(2) $U \cap AM = AU$.

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Если $u = \sum a_i m_i \in U \cap AM$, то для $t = \sum a_i \otimes \bar{m}_i \in A \underset{R}{\otimes} (M/U)$

$$(\iota \otimes 1_{M/U})(t) = \sum a_i \otimes \bar{m}_i = 1 \otimes \sum a_i \bar{m}_i = 1 \otimes \bar{u} = 0 \in R \underset{R}{\otimes} (M/U)$$

и, значит, по предположению $t = 0$. Очевидно, что соответствие

$$A \times (M/U) \ni (a, \bar{m}) \longmapsto \widehat{am} := am + AU \in AM/AU$$

задает R-сбалансированное отображение, которое индуцирует гомоморфизм

$$\lambda\colon A \underset{R}{\otimes} (M/U) \to AM/AU.$$

Поскольку $t = 0$, то

$$0 = \varphi(0) = \varphi(t) = \sum \widehat{a_i m_i} = \hat{u},$$

стало быть, $u \in AU$.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Пусть для $t = \sum a_i \otimes \bar{m}_i \in A \underset{R}{\otimes} (M/U)$

$$(\iota \otimes 1_{M/U})(t) = \sum a_i \otimes \bar{m}_i = 1 \otimes \sum \overline{a_i m_i} = 0,$$

т. е. $\sum a_i m_i \in U$. По предположению справедливо равенство

$$\sum a_i m_i = \sum a'_j u_j \in AU, \text{ где } u_j \in U.$$

Тогда, очевидно,

$$\sum a_i \otimes m_i - \sum a'_j \otimes u_j \in \ker(\iota \otimes 1_M).$$

Так как по предположению модуль M плосок, то $\ker(\iota \otimes 1_M) = 0$. Поэтому получаем $\sum a_i \otimes m_i = \sum a'_j \otimes u_j$ и, следовательно, для γ: $M \to M/U$ имеем

$$t = (1_A \otimes \gamma)(\sum a_i \otimes m_i) = \sum a_i \otimes \bar{m}_i$$
$$= (1_A \otimes \gamma)(\sum a'_j \otimes u_j) = \sum a'_j \otimes u_j = 0 \in A \underset{R}{\otimes} (M/U).$$

Итак, $\iota \otimes 1_{M/U}$ — на самом деле мономорфизм. □

Заметим, что при доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (2) условие, что ${}_RM$ — плоский модуль, не использовалось.

10.5.2. *Теорема.* *Пусть* ${}_RM$ *— плоский модуль и* $U \subseteq {}_RM$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *Фактормодуль* M/U *плоск;*
(2) $U \cap AM = AU$ *для каждого конечно-порожденного правого идеала* $A \subseteq R_R$.

Доказательство Это следует из 10.5.1 и 10.4.8. □

Как легко видеть, доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2) в 10.5.1 является обобщением доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ (2) в 10.4.9. Обратно, последнюю импликацию можно вывести из 10.5.1 или 10.5.2. А именно, если в 10.5.2 взять $M = {}_RR$, $U = Rr$, $A = rR$, то получим

$$Rr \cap rR \cdot R = Rr \cap rR = rR \cdot Rr = rRr;$$

поскольку $r \in Rr \cap rR$, существует такое r', что $rr'r = r$.

Теорема 10.5.2 имеет интересное приложение, касающееся плоских фактормодулей проективных модулей.

10.5.3. *Теорема.* *Если модуль* ${}_RP$ *проективен,* $U \subseteq \operatorname{rad}(P)$ *и фактормодуль* R/U *плоск, то* $U = 0$.

Доказательство. *Шаг 1.* Мы докажем сперва этот результат для свободного модуля ${}_RF$ (вместо ${}_RP$). Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ — некоторый базис F. Для произвольного элемента $u \in U$ запишем его представление через базисные элементы:

$$u = \sum a_i x_i, \quad a_i \in R.$$

Обозначим через $A = \sum a_i R$ правый идеал, порожденный коэффициентами a_i в представлении элемента u. Этот идеал, по определению, конечно-порожден. На основании 10.5.2 имеем

$$U \cap AF = AU.$$

Таким образом, $u = \sum b_j u_j$, где $b_j \in A$, $u_j \in U$. По предположению $U \subseteq \operatorname{rad}(F) = \operatorname{rad}(R)F$ (последнее равенство имеет место в силу 9.2.1). Поэтому в представлении элемента u_j:

$$u_j = \sum c_{jk} x_k,$$

все $c_{jk} \in \operatorname{rad}(R)$ (ибо $\operatorname{rad}(R)$ — двусторонний идеал). Имеем

$$u = \sum_i a_i x_i = \sum_j \sum_k b_j c_{jk} x_k.$$

Приравнивание коэффициентов дает

$$a_i = \sum_l b_j c_{ji} \in A \operatorname{rad}(R).$$

Так как это имеет место для каждого элемента a_i, а эти элементы порождают A, то $A \subseteq A\,\mathrm{rad}\,(R)$. Следовательно,

$$A = A\,\mathrm{rad}\,(R).$$

На основании 9.2.1 мы заключаем, что $A = 0$, но тогда $u = 0$. Поскольку элемент $u \in U$ был произвольным, то $U = 0$. Тем самым для свободных модулей доказательство завершено.

Шаг 2. Пусть теперь P — прямое слагаемое свободного модуля F, т. е.

$$F = P \oplus P_1,$$

и пусть $U \subseteq \mathrm{rad}\,(P)$, причем фактормодуль P/U плосок. Если $\nu\colon F \to F/U$ — каноническое отображение, то

$$F/U = \nu(F) = \nu(P) + \nu(P_1).$$

Поскольку $U \subseteq P$, то

$$\nu(P) + \nu(P_1) = \nu(P) \oplus \nu(P_1),$$

а также

$$\nu(P) = P + U/U = P/U,\ \nu(P_1) = P_1 + U/U \cong P_1/P_1 \cap U \cong P_1.$$

Следовательно, имеет место изоморфизм

$$F/U \cong P/U \oplus P_1.$$

Так как модули P/U и P_1 плоски — первый по предположению, а второй в силу своей проективности (см. 10.4.4), то по 10.4.2 и 10.4.3 фактормодуль F/U также плосок. Из того что $U \subseteq \mathrm{rad}\,(P) \subseteq \mathrm{rad}\,(F)$, следует, как уже было показано, что $U = 0$. Для произвольного проективного модуля наше утверждение следует теперь из 10.4.3. □

Так как нулевой модуль плосок, в качестве непосредственного следствия мы получаем результат, уже ранее установленный в 9.6.3:

10.5.4. *Следствие.* *Если модуль* ${}_RP$ *проективен и* $\mathrm{rad}\,(P) = P$, *то* $P = 0$.

Упражнения

1. Пусть даны коммутативное кольцо S и S-модули A и U. Доказать, что $A \underset{S}{\otimes} U \cong U \underset{S}{\otimes} A$.

2. Пусть даны произвольное кольцо S и S-модули $B_S \subseteq A_S$. ${}_SV \subseteq {}_SU$. Обозначим через $L(B, V)$ подгруппу в $A \underset{S}{\otimes} U$, порожденную элементами вида $a \otimes v$, $b \otimes u$, где $a \in A$, $b \in B$, $v \in V$, $u \in U$. Доказать, что

$$(A/B) \underset{S}{\otimes} (U/V) \cong \left(A \underset{S}{\otimes} U\right)/L(B, V).$$

3. a) Пусть B — правый, а V — левый идеал кольца S. Обозначим через $B+V$ аддитивную подгруппу в S, порожденную B и V. Показать, что

$$(S/B) \underset{S}{\otimes} (S/V) \cong S/(B+V).$$

b) Привести пример кольца S с идеалами ${}_S B \neq S$, ${}_S V \neq S$, для которых $(S/B) \underset{S}{\otimes} (S/V) = 0$.

4. a) Доказать, что для любых двух идеалов ${}_S B$, ${}_S V \subsetneq S$

$$B \underset{S}{\otimes} (S/V) \cong B/BV.$$

Здесь BV обозначает аддитивную подгруппу в S, порожденную элементами вида bv, где $b \in B$, $v \in V$.
b) Дать пример, когда ${}_S B \neq 0$, ${}_S V \neq S$ и $B \underset{S}{\otimes} (S/V) = 0$.

5. a) Пусть ι_B и ι_V — вложения идеалов ${}_S B$ и ${}_S V$ в S. Показать, что

$$\operatorname{im}(\iota_B \otimes \iota_V) \cong BV.$$

b) Привести пример, когда $B \underset{S}{\otimes} V \neq 0$, но $\operatorname{im}(\iota_B \otimes \iota_V) = 0$.

6. Пусть $\mathbf{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел. Доказать, что

$$\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}.$$

7. Показать, что если A — абелева группа, то $A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} A = 0 \Leftrightarrow A$ делима и каждый ее элемент имеет конечный порядок. (См. упр. 10 и 11 к гл. 4.)

8. Пусть $S := K[x, y]$ — кольцо многочленов от двух переменных x и y с коэффициентами из некоторого поля K. Положим $B := xS + yS$, т. е. B — идеал в S, порожденный элементами x и y. Показать, что элемент $x \otimes y - y \otimes x \in B \underset{S}{\otimes} B$ отличен от нуля.

9. Для данных множества H и модуля ${}_S M$ положим

$$M^H := \prod_{h \in H} M_h, \quad \text{где } M_h = M \text{ для всех } h \in H.$$

Как в гл. 4, будем обозначать элементы из M^H через (m_h). Доказать следующие утверждения:
a) Для каждого множества H существует единственный гомоморфизм

$$\varphi_H \colon M \underset{S}{\otimes} S^H \to M^H,$$

удовлетворяющий условию

$$\varphi_H(m \otimes (s_k)) = (ms_k).$$

b) Если H конечно, то φ_H — изоморфизм.
c) $\operatorname{im}(\varphi_H) = \bigcup B^H$, где B пробегает все конечно-порожденные подмодули в ${}_S M$.
d) ${}_S M$ конечно-порожден тогда и только тогда когда φ_H для каждого множества H является эпиморфизмом.

10. Указать множества I и J и правые, соотв. левые, S-модули A_i, $i \in I$, соотв U_j, $j \in J$, такие что

$$\Big(\prod_{i \in I} A_i\Big) \underset{S}{\otimes} \Big(\prod_{j \in J} U_j\Big) \ncong \prod_{i \in I,\, j \in J} \big(A_i \underset{S}{\otimes} U_j\big).$$

11. Пусть дан унитарный кольцевой гомоморфизм $\rho\colon R \to S$. Тогда каждый правый S-модуль M_S становится правым R-модулем, если положить $mr := m\rho(r)$, $m \in M$, $r \in R$ (см. § 3.2); аналогично для левой стороны. Ниже мы предполагаем, что так и сделано для всех правых, соотв. левых, S-модулей. Доказать что для всякого ${}_SU$ справедливы следующие утверждения:

a) Отображение $\lambda\colon U \ni u \longmapsto 1 \otimes u \in S \underset{R}{\otimes} U$ есть мономорфизм левых R-модулей ${}_RU$ и ${}_R\left(S \underset{R}{\otimes} U\right)$.

b) Отображение

$$\mu\colon S \underset{R}{\otimes} U \ni \Sigma s_i \otimes u_i \longmapsto \Sigma s_i u_i \in U$$

является S-эпиморфизмом и ядро этого эпиморфизма порождается элементами $s \otimes u - 1 \otimes su$.

c) ${}_R\left(S \underset{R}{\otimes} U\right) = \operatorname{im}(\lambda) \oplus \ker(\mu)$.

d) Пусть, далее, дан еще один модуль ${}_RC$ и

$$\varkappa\colon C \ni c \longmapsto 1 \otimes c \in S \underset{R}{\otimes} C.$$

Тогда отображение

$$\operatorname{Hom}_S\left({}_S\left(S \underset{R}{\otimes} C\right), {}_SU\right) \ni \varphi \longmapsto \varphi\varkappa \in \operatorname{Hom}_R\left({}_RC, {}_RU\right)$$

есть изоморфизм.

e) Пусть фиксированы $\rho\colon R \to S$ и ${}_RC$, и пусть для данного модуля ${}_SX$ существует R-гомоморфизм $\varkappa'\colon {}_RC \to {}_RX$, такой, что для каждого ${}_SU$ отображение

$$\operatorname{Hom}_S\left({}_SX, {}_SU\right) \ni \varphi \longmapsto \varphi\varkappa' \in \operatorname{Hom}_R\left({}_RC, {}_RU\right)$$

является изоморфизмом. Доказать, что $S \underset{R}{\otimes} U$ и X S-изоморфны.

f) Привести пример такого гомоморфизма $\rho\colon R \to S$ и такого модуля ${}_RC$, что

$$\varkappa\colon C \ni c \longmapsto 1 \otimes c \in S \underset{R}{\otimes} C$$

не является мономорфизмом.

12. Пусть R, S — кольца и ${}_RM_S$ — некоторый R-S-бимодуль. Определить функторы

$$F\colon \mathcal{M}_R \ni A \longmapsto A \underset{R}{\otimes} M \in \mathcal{M}_S,$$

$$G\colon \mathcal{M}_S \ni X \longmapsto \operatorname{Hom}_S(M, X) \in \mathcal{M}_R$$

и показать, что

a) F сопряжен слева к G;

b) следующие условия эквивалентны:

(1) F сохраняет мономорфизмы,

(2) G сохраняет инъективные объекты (т. е. X_S инъективен $\Rightarrow \operatorname{Hom}_S(M, X)_R$ инъективен),

(3) ${}_RM$ — плоский модуль.

c) следующие условия эквивалентны:

(1) G сохраняет эпиморфизмы,

(2) F сохраняет проективные объекты (т. е. A_R проективен $\Rightarrow \left(A \underset{R}{\otimes} M\right)_S$ проективен).

(3) M_S проективен.

Далее, пусть $\rho\colon S \to R$ — унитарный кольцевой гомоморфизм. Показать, что

d) Q_S инъективен $\Longrightarrow \mathrm{Hom}_S(R, Q)$ инъективен как правый R-модуль;

e) P_S проективен $\Longrightarrow P \underset{S}{\otimes} R$ проективен как правый R-модуль.

13. a) Пусть ${}_RM$ — свободный модуль с базисом $\{e_i \mid i \in I\}$. Доказать, что для $U \subset M$ следующие условия эквивалентны:
(1) M/U плоск;
(2) $u \in U \Longrightarrow u \in A_u U$, где A_u — правый идеал, порожденный коэффициентами, встречающимися в разложении u по заданному базису;
(3) $u \in U \Longrightarrow \exists\ \varphi\colon M \to U\ [\varphi(u) = u]$.
(4) $u_1, \ldots, u_n \in U \Longrightarrow \exists\ \varphi\colon M \to U\ [\varphi(u_i) = u_i$ для $i = 1, \ldots, n]$.
b) Показать что условия (1), (3), (4) эквивалентны и для проективных ${}_RM$.

14. Пусть кольцо R коммутативно и модуль ${}_RM$ полупрост.
a) Доказать, что если ${}_RM$ инъективен, то он плоск.
b) Доказать, что если ${}_RM$ плоск и имеет лишь конечное число однородных компонент, то он инъективен.
в) Дать пример, когда ${}_RM$ полупрост и плоск, но не инъективен.

15. a) Показать, что абелева группа тогда и только тогда плоска, когда она является группой без кручения.
b) Привести пример плоской, но не проективной абелевой группы.

16. Назовем модуль ${}_RM$ *регулярным*, если каждый его циклический подмодуль является прямым слагаемым. Доказать следующие утверждения:
a) В регулярном модуле каждый конечно-порожденный подмодуль является прямым слагаемым.
b) Для произвольного семейства $(M_i \mid i \in I)$ регулярных проективных R-модулей модуль $M = \coprod_{i \in I} M_i$ — также регулярен (и проективен). (*Указание.* Докажите это утверждение сперва для $|I| = 2$.)
c) Справедливо ли утверждение b) без дополнительного предположения о проективности?
d) Если R нётерово слева или $R/\mathrm{rad}(R)$ полупросто, то каждый регулярный левый R-модуль полупрост.

17. Пусть R — кольцо, M — R-модуль и $S = \mathrm{End}(M)$. Показать, что
a) S регулярно $\Longleftrightarrow \forall \alpha \in S\ [\mathrm{im}(\alpha)$ и $\ker(\alpha)$ — прямые слагаемые в $M]$;
b) R регулярно $\Longrightarrow$ каждый проективный R-модуль регулярен;
c) R регулярно $\bigwedge M$ проективен и конечно-порожден $\Longrightarrow S$ регулярно;
d) R регулярно $\Longrightarrow M_n(R)$ регулярно ($M_n(R)$ — кольцо квадратных матриц порядка n над R).

18. Доказать, что для коммутативного кольца R следующие условия эквивалентны:
(1) R регулярно;
(2) каждый (циклический) идеал $I \subset R$ идемпотентен (т. е. $I^2 = I$);
(3) каждый однородный идеал[1] первичен;
(4) каждый однородный идеал максимален;
(5) каждый (циклический) R-модуль M является *модулем без радикала* (т. е. $\mathrm{rad}(M) = 0$);
(6) каждый простой R-модуль инъективен.

19. Пусть G — конечная группа и T — кольцо. Показать, что групповое кольцо GT регулярно тогда и только тогда, когда T регулярно и порядок группы G обратим в T

---

[1] Идеал I кольца R называется *однородным*, если однороден модуль $(R/I)_R$ (см. 6.6.1). — *Прим. перев.*

11. Полусовершенные модули и совершенные кольца

Исторически в структурной теории некоммутативных колец и модулей первоначально изучались конечномерные алгебры. При этом важным вспомогательным средством служила имевшаяся в распоряжении теория векторных пространств. Позже — в первую очередь Эмми Нётер — было показано, что при структурных исследованиях во многих вопросах можно обойтись условиями на цепи и что исследовать можно не только кольца и их идеалы, но и модули. Таким образом получается, в частности, структурная теория артиновых колец и модулей над такими кольцами.

С этой точки зрения последние достижения в развитии алгебры представляют собой новый шаг вперед. Новые понятия, в частности категорные и гомологические понятия, такие как проективность, инъективность, плоскостность, гомологическая размерность и т. д., дают поводы и возможности развивать структурную теорию дальше в различных направлениях. Мы уже познакомились, например, с теоремами о разложении инъективных модулей над нётеровыми и артиновыми кольцами. Теперь мы потребуем существования проективных оболочек у определенных модулей и при этом предположении естественным способом разовьем структурную теорию для одного класса модулей (и колец), строго содержащего класс артиновых модулей.

В этом введении нельзя отразить все результаты этой главы, но все же хотелось бы привести один особенно яркий результат, служащий хорошей иллюстрацией последующих рассмотрений.

Теорема (Х. Басс, 1960). *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) *каждый модуль M_R обладает проективной оболочкой (т. е. существует эпиморфизм ξ: $P \to M$ с проективной областью определения P и косущественным ядром в P);*

(2) *каждый плоский правый R-модуль проективен;*

(3) *R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей для циклических левых идеалов;*

(4) *каждый ненулевой левый R-модуль имеет ненулевой цоколь и ${}_RR$ удовлетворяет условию минимальности для прямых слагаемых;*

(5) *кольцо* $R/\mathrm{rad}\,(R)$ *полупросто и радикал* $\mathrm{rad}\,(R)$ *t-нильпотентен*[1] *слева, т. е. для каждой последовательности* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *элементов* $a_i \in \mathrm{rad}\,(R)$ *существует такое* $k \in \mathbf{N}$, *что* $a_k a_{k-1} \ldots a_1 = 0$.

Кольцо, удовлетворяющее этим эквивалентным условиям, называется *совершенным справа*. Согласно (5), каждое артиново слева или справа кольцо совершенно справа. Особенный интерес представляют для нас условия (1) и (2), ибо они позволяют ответить на два вопроса, поднятые нами ранее. В целом теорема примечательна тем, что „внешние" свойства, такие как (1) и (2), оказываются эквивалентными „внутренним", таким как (3) и (5).

11.1. Полусовершенные модули. Основные понятия

Как мы установили ранее, инъективной оболочкой обладает любой модуль, а вот проективной — не всякий. Например, в случае $R = \mathbf{Z}$ проективной оболочкой обладают лишь проективные (= свободные) $\mathbf{Z}$-модули (причем проективная оболочка изоморфна исходному свободному модулю). Мы будем предполагать здесь существование „достаточно многих" проективных оболочек.

Начнем с теоремы, дуальной к теореме 5.6.4, в предположении существования проективной оболочки. Само собой разумеется, эту теорему можно было бы доказать уже в гл. 5, но нам хотелось собрать вместе все рассуждения, в которых фигурирует условие существования проективных оболочек.

11.1.1. ***Теорема.*** *Пусть модуль* N_R *имеет проективную оболочку. Если*

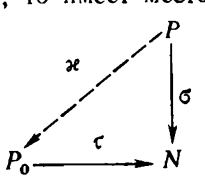
$$\sigma\colon P \to N$$

— эпиморфизм с проективной областью определения P, *то существует разложение* P *в прямую сумму* $P = P_1 \oplus P_2$, *где* $P_2 \subset \subset \ker(\sigma)$ *и*

$$\sigma_1 := \sigma \mid P_1 : P_1 \to N$$

— проективная оболочка.

Доказательство. Если $\tau\colon P_0 \to N$ — проективная оболочка для N, то имеет место коммутативная диаграмма



[1] *t* — от transfinite. Заметим, что чаще используют большую букву *T*. — *Прим. ред.*

Так как σ — эпиморфизм, то, в силу 3.4.10, $P_0 = \operatorname{im}(\varkappa) + \ker(\tau)$. Поскольку $\ker(\tau) \subsetneq P_0$, то $P_0 = \operatorname{im}(\varkappa)$, т. е. $\varkappa$ — эпиморфизм. Далее, P_0 проективен, поэтому из 5.3.1 следует, что $\varkappa$ является расщепляющим:

$$P = P_1 \oplus \ker(\varkappa).$$

Тогда

$$\varkappa_1 := \varkappa \mid P_1 \colon P_1 \to P_0$$

— изоморфизм. Так как (согласно 5.1.3)

$$\ker(\tau\varkappa_1) = \varkappa_1^{-1}(\ker(\tau)) \subsetneq P_1,$$

то

$$\tau\varkappa_1 = \sigma_1 \colon P_1 \to N$$

— также проективная оболочка для N. Поскольку $\ker(\varkappa) \subseteq \ker(\sigma)$ и $P = P_1 \oplus \ker(\varkappa)$, мы можем взять $P_2 := \ker(\varkappa)$. □

11.1.2. *Следствие.* *Пусть $U \subseteq P$, модуль P проективен и P/U имеет проективную оболочку. Тогда существует такое разложение $P = P_1 \oplus P_2$, что $P_2 \subseteq U \wedge P_1 \cap U \subsetneq P_1$.*

Доказательство. Это следует из 11.1.1 при $\sigma = \nu \colon P \to P/U$. □

Заметим, что в случае $P_2 = 0$ мы имеем $P_1 = P$ и $P \cap U = U \subsetneq P$, т. е. если U не содержит ненулевых прямых слагаемых модуля P, то U — косущественный подмодуль в P.

Если потребовать лишь, чтобы для каждого эпиморфного образа данного модуля M_R существовала проективная оболочка, то уже это имеет такие интересные следствия, касающиеся строения M, что мы прежде всего изучим эту ситуацию.

11.1.3. *Определение.* *Пусть R — произвольное кольцо и M_R — правый R-модуль.*

(a) *M называется полусовершенным, если каждый эпиморфный образ M обладает проективной оболочкой.*

(b) *M называется модулем с дополнениями, если каждый подмодуль в M обладает аддитивным дополнением (а. д., см. 5.2.1) в M.*

11.1.4. *Следствие.* (1) *Каждый эпиморфный образ полусовершенного модуля полусовершенен.*

(2) *Каждая проективная оболочка простого модуля полусовершенна.*

(3) *Каждый эпиморфный образ модуля с дополнениями является модулем с дополнениями.*

Доказательство. (1) Ясно из определения.

(2) Пусть $\xi \colon P \to E$ — проективная оболочка простого модуля E. Тогда $\ker(\xi)$ — косущественный и максимальный подмодуль

в P. Для произвольного $U \subsetneq P$ имеем $U + \ker(\xi) \subsetneq P$ и, следовательно, $U \subsetneq \ker(\xi)$. Таким образом, $U \subsetneq^{\circ} P$ и, значит, $P \to P/U$ — проективная оболочка для P/U. Таким образом, P — проективная оболочка каждого ненулевого эпиморфного образа P, т. е. P — полусовершенный модуль.

(3) Пусть C — модуль с дополнениями, $\gamma\colon C \to M$ — эпиморфизм и $B \subseteq M$. Мы утверждаем, что $\gamma(\gamma^{-1}(B)^{\cdot})$ — а. д. для B в M. Действительно, положим $A := \gamma^{-1}(B)$. Поскольку $C = A + A^{\cdot}$, то

$$M = \gamma(A) + \gamma(A^{\cdot}) = B + \gamma(A^{\cdot}).$$

Пусть также $M = B + U$, где $U \subseteq \gamma(A^{\cdot})$. Тогда

$$C = \gamma^{-1}(B) + \gamma^{-1}(U) = A + \gamma^{-1}(U)$$

и

$$\gamma^{-1}(U) \subseteq A^{\cdot} + \ker(\gamma).$$

Следовательно, каждый элемент $y \in \gamma^{-1}(U)$ может быть записан в виде

$$y = x + k, \text{ где } x \in A^{\cdot},\ k \in \ker(\gamma).$$

Отсюда следует, что $\gamma(y) = \gamma(x) + \gamma(k) = \gamma(x) \in U$, а значит, $x \in \gamma^{-1}(U) \cap A^{\cdot}$. В силу того что $\ker(\gamma) \subseteq A = \gamma^{-1}(B)$, имеем

$$y \in A + (\gamma^{-1}(U) \cap A^{\cdot}),$$

следовательно,

$$C = A + (\gamma^{-1}(U) \cap A^{\cdot}).$$

Из минимальности $A^{\cdot}$ вытекает, что $\gamma^{-1}(U) \cap A^{\cdot} = A^{\cdot}$. Отсюда $A^{\cdot} \subseteq \gamma^{-1}(U)$, т. е. $\gamma(A^{\cdot}) \subseteq U$. Так как по предположению $U \subseteq \gamma(A^{\cdot})$, то в результате получаем $U = \gamma(A^{\cdot})$, что и требовалось доказать. □

Позже мы покажем, что конечно-порожденный проективный модуль P полусовершенен уже тогда, когда каждый простой образ P обладает проективной оболочкой.

Следующее предложение показывает, что изучение проективных модулей можно в основном свести к изучению проективных полусовершенных модулей и что при этом решающую роль играет существование дополнений.

11.1.5. ***Теорема.*** *Пусть $\xi\colon P \to M$ — проективная оболочка для M. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *M полусовершенен;*
(2) *P полусовершенен;*
(3) *P — модуль с дополнениями.*

Доказательство. Мы покажем, что (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2).

„(2) $\Rightarrow$ (1)“. Ясно из определения полусовершенности.
„(1) $\Rightarrow$ (3)“. Пусть $A \subset P$. Рассмотрим эпиморфизм

$$\sigma = \nu\xi\colon\ P \xrightarrow{\xi} M \xrightarrow{\nu} M/\xi(A).$$

Согласно 11.1.1, существует такое прямое слагаемое $P_1 \subset P$, что

$$\sigma_1 := \sigma \mid P_1\colon\ P_1 \to M/\xi(A)$$

— проективная оболочка. Мы утверждаем, что P_1 — а. д. A в P. Действительно, поскольку $\sigma(P_1) = M/\xi(A)$, то $P = P_1 + \ker(\sigma)$. Так как $\ker(\sigma) = \ker(\nu\xi) = \xi^{-1}\ker(\nu) = \xi^{-1}(\xi(A)) = A + \ker(\xi)$, то $P = P_1 + A + \ker(\xi)$, а поскольку $\ker(\xi) \subset^{\circ} P$, то $P = P_1 + A$. Если теперь для $U \subset P_1$ также имеем $P = U + A$, то $\sigma(P) = \sigma(P_1) = \sigma_1(P_1) = \sigma_1(U)$ (ибо $\sigma(A) = 0$), следовательно,

$$P_1 = \sigma_1^{-1}(\sigma_1(P_1)) = \sigma_1^{-1}(\sigma_1(U)) = U + \ker(\sigma_1).$$

Из того что $\ker(\sigma_1) \subset^{\circ} P_1$, следует, что $P_1 = U$. Тем самым показано, что P_1 действительно является а. д. для A в P.

„(3) $\Rightarrow$ (2)“. Пусть $\sigma\colon\ P \to N$ — эпиморфизм. Положим $U := \ker(\sigma)$. Пусть U' — а. д. U в P. Согласно 5.2.4, $U' \cap U = U' \cap \ker(\sigma) \subset^{\circ} U'$. Мы покажем, что U' является прямым слагаемым в P и, следовательно, проективен, так что

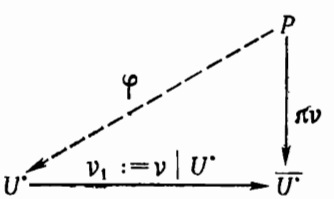
$$\sigma \mid U'\colon\ U' \to N$$

— проективная оболочка для N.

Пусть U'' — а. д. для U'. Мы утверждаем, что $P = U' \oplus U''$. Действительно, рассмотрим естественный эпиморфизм

$$\nu\colon\ P = U' + U'' \to P/U' \cap U''$$

и введем обозначения $\bar{P} := \nu(P)$, $\overline{U'} := \nu(U')$, $\overline{U''} := \nu(U'')$. Очевидно, $\bar{P} = \overline{U'} \oplus \overline{U''}$. Пусть далее $\pi\colon\ \bar{P} \to \overline{U'}$ — проекция $\bar{P} = \overline{U'} \oplus \overline{U''}$ на $\overline{U'}$. Имеет место коммутативная диаграмма



Поскольку $\pi\nu = \nu_1\varphi$, то $\pi\nu(U') = \overline{U'} = \nu_1\varphi(U')$, следовательно, $U' = \varphi(U') + \ker(\nu_1)$. Так как $\ker(\nu_1) = U' \cap U'' \subset^{\circ} U'$ (см. 5.2.4), то $U' = \varphi(U')$, поэтому $P = U' + \ker(\varphi)$. Из включения $\ker(\varphi) \subset$

$\subseteq \ker(\pi\nu) = U^{\cdot\cdot}$ и минимальности $U^{\cdot\cdot}$ следует, что $\ker(\varphi) = U^{\cdot\cdot}$. С другой стороны,

$$U^{\cdot\cdot} = \ker(\pi\nu) = \ker(\nu_1\varphi) = \varphi^{-1}(\ker(\nu_1)) = \varphi^{-1}(U^{\cdot} \cap U^{\cdot\cdot}).$$

Так как φ — эпиморфизм, то мы получаем

$$0 = \varphi(U^{\cdot\cdot}) = \varphi\varphi^{-1}(U^{\cdot} \cap U^{\cdot\cdot}) = U^{\cdot} \cap U^{\cdot\cdot},$$

что и требовалось доказать. □

11.1.6. ***Следствие.*** *Каждый проективный артинов модуль полусовершенен.*

Доказательство. Каждый артинов модуль является модулем с дополнениями. □

11.1.7. ***Теорема.*** *Если M_R — полусовершенный модуль, то*
(a) *M является модулем с дополнениями;*
(b) *$M/\mathrm{rad}(M)$ полупрост;*
(c) *$\mathrm{rad}(M)$ — косущественный подмодуль в M.*

Доказательство. (a) следует из 11.1.4 и 11.1.5.

(b) Так как $M/\mathrm{rad}(M)$ полусовершенен как эпиморфный образ M, то $M/\mathrm{rad}(M)$ — модуль с дополнениями. Если $\Lambda \subseteq M/\mathrm{rad}(M)$ и $\Lambda^{\cdot}$ — а. д. для Λ в $M/\mathrm{rad}(M)$, то

$$M/\mathrm{rad}(M) = \Lambda + \Lambda^{\cdot} \text{ и } \Lambda \cap \Lambda^{\cdot} \subsetneq M/\mathrm{rad}(M),$$

так что $\Lambda \cap \Lambda^{\cdot} \subseteq \mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}(M)) = 0$, а следовательно, $M/\mathrm{rad}(M) = \Lambda \oplus \Lambda^{\cdot}$. Таким образом, каждый подмодуль Λ выделяется прямым слагаемым и, значит, $M/\mathrm{rad}(M)$ полупрост.

(c) Пусть $\xi\colon P \to M$ — проективная оболочка M. Так как $\ker(\xi) \subsetneq P$, то $\ker(\xi) \subseteq \mathrm{rad}(P)$, поэтому, в силу 9.1.5, $\xi(\mathrm{rad}(P)) = \mathrm{rad}(M)$, так что ввиду 5.1.3 остается только показать, что $\mathrm{rad}(P) \subsetneq P$. Рассмотрим эпиморфизм $\nu\colon P \to P/\mathrm{rad}(P)$. Согласно 11.1.2, существует разложение $P = P_1 \oplus P_2$, такое что $P_1 \cap \mathrm{rad}(P) \subsetneq P_1$ и $P_2 \subseteq \mathrm{rad}(P)$. Из 9.6.4 следует, что $P_2 = 0$, поэтому $P = P_1$ и

$$\mathrm{rad}(P) = P \cap \mathrm{rad}(P) \subsetneq P. \qquad \square$$

11.2. Поднятие прямых разложений

11.2.1. ***Определение.*** (a) *Пусть дан гомоморфизм $\alpha\colon A \to M$. Говорят, что разложение*

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

может быть поднято относительно α, *если существует такое разложение*

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i,$$

что $\alpha(A_i) = M_i$ *для всех* $i \in I$.

(b) *Пусть* $B \subset_{\oplus} A$. *Говорят, что разложение*

$$A/B = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

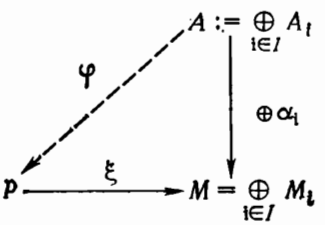
можно поднять в A, *если это разложение может быть поднято относительно* ν: $A \to A/B$.

11.2.2. ***Теорема.*** *Пусть* ξ: $P \to M$ — *проективная оболочка и*

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

Предположим, что для каждого $i \in I$ *существует эпиморфизм* α_i: $A_i \to M_i$ *с проективным* A_i *и* $\ker(\alpha_i) \subset_{\oplus} \operatorname{rad}(A_i)$. *Тогда разложение* $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ *можно поднять относительно* ξ.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму



Здесь φ существует, поскольку ξ — эпиморфизм, а A проективен. Так как $\bigoplus \alpha_i$ — эпиморфизм, то, согласно 3.4.10,

$$P = \operatorname{im}(\varphi) + \ker(\xi).$$

Поскольку $\ker(\xi) \subset_{\oplus} P$, то $P = \operatorname{im}(\varphi)$, т. е. φ — эпиморфизм. Так как P проективен, то φ является расщепляющим:

$$A = P_0 \oplus \ker(\varphi).$$

Из коммутативности указанной выше диаграммы вытекает, что $\ker(\varphi) \subset_{\oplus} \ker(\oplus \alpha_i) = \bigoplus \ker(\alpha_i) \subset_{\oplus} \bigoplus \operatorname{rad}(A_i) = \operatorname{rad}(A)$ (последнее равенство справедливо в силу 9.1.5). На основании 9.6.4 заключаем, что $\ker(\varphi) = 0$, следовательно, φ — изоморфизм. Поэтому

$$P = \bigoplus_{i \in I} \varphi(A_i),$$

где $\xi\varphi(A_i) = \alpha_i(A_i) = M_i$, $i \in I$. Тем самым показано, что разложение $M = \bigoplus M_i$ можно поднять относительно ξ. □

Из этой теоремы непосредственно вытекают такие следствия.

11.2.3. *Следствие.* *Пусть* ξ: $P \to M$ — *проективная оболочка полусовершенного модуля* M. *Тогда каждое прямое разложение* M *можно поднять относительно* ξ.

Доказательство. Это следует из 11.2.2, поскольку каждое прямое слагаемое модуля M обладает проективной оболочкой. □

11.2.4. *Следствие.* *Пусть модуль* P *полусовершенен и проективен. Тогда каждое прямое разложение полупростого модуля* $P/\mathrm{rad}(P)$ *можно поднять в* P.

Доказательство. Это следует из 11.2.2, поскольку (в силу 11.1.7) $\mathrm{rad}(P) \subseteq^{\circ} P$ и каждое прямое слагаемое в $P/\mathrm{rad}(P)$ обладает проективной оболочкой. □

В качестве частного случая получаем, что для артинова справа кольца R каждое разложение факторкольца $R/\mathrm{rad}(R)$ (как правого R-модуля) можно поднять в R_R. Не имея в распоряжении этих общих результатов, в литературе указанное поднятие производят обычно при помощи явных вычислений с идемпотентами.

11.3. Основная теорема о проективных полусовершенных модулях

Приводимые ниже характеризации проективных модулей весьма важны как для понимания структуры таких модулей, так и для решения вопроса, является данный модуль полусовершенным или нет.

11.3.1. *Теорема.* *Для проективного модуля* P_R *следующие условия эквивалентны:*
(a) P *полусовершенен;*
(b) P *— модуль с дополнениями;*
(c) P *таков, что*
(1) $P/\mathrm{rad}(P)$ *полупрост,*
(2) *каждое прямое слагаемое* $(P/\mathrm{rad}(P))_R$ *является образом некоторого прямого слагаемого модуля* P_R *при гомоморфизме* $P \to P/\mathrm{rad}(P)$,
(3) $\mathrm{rad}(P) \subseteq^{\circ} P$.

В (c) мы привели условие (2) в самой слабой возможной форме, поскольку, согласно 11.2.4, для импликации (a) $\Rightarrow$ (c) все равно имеется более сильное утверждение. Так как для приложений представляет интерес импликация (c) $\Rightarrow$ (a), то (c) стоит взять в возможно более слабой форме.

Доказательство. „(a) $\Leftrightarrow$ (b)“: Было доказано в 11.1.5.
„(a) $\Rightarrow$ (c)“: Вытекает из 11.1.7 и 11.2.4.
„(c) $\Rightarrow$ (b)“: Обозначим через

$$\nu\colon P \to P/\mathrm{rad}\,(P) := \bar{P}$$

естественный эпиморфизм. Так как $\bar{P}$ полупрост, то для $A \subseteq P$ имеем разложение

$$\bar{P}_R = \nu(A) \oplus \Gamma.$$

Согласно (2), существует прямое слагаемое $P_2 \subseteq P$, для которого $\nu(P_2) = \Gamma$. Мы утверждаем, что P_2 — а. д. A в P. Действительно, из равенства $\bar{P} = \nu(A) \oplus \nu(P_2)$ следует, что

$$P = A + P_2 + \mathrm{rad}\,(P),\quad A \cap P_2 \subseteq \mathrm{rad}\,(P),$$

поэтому, в силу того что $\mathrm{rad}\,(P) \subseteq^{\circ} P$, имеем

$$P = A + P_2,\quad A \cap P_2 \subseteq^{\circ} P.$$

Так как P_2 — прямое слагаемое в P, то согласно 5.1.3 (c) (с помощью проекции из P на P_2) получаем, что даже $A \cap P_2 \subseteq^{\circ} P_2$. Предположим, что для некоторого $B \subseteq P$

$$A + B = P,\quad B \subseteq P_2.$$

Тогда, в силу закона модулярности,

$$A \cap P_2 + B = P_2,$$

а значит $B = P_2$, поскольку $A \cap P_2 \subseteq^{\circ} P_2$. □

11.3.2. *Следствие.* *Пусть R — кольцо.*
(I) *R_R полусовершенен* $\Leftrightarrow$
(1) *$\bar{R} := R/\mathrm{rad}\,(R)$ полупросто и*
(2) *для каждого идемпотента $\varepsilon \in \bar{R}$ существует такой идемпотент $e \in R$, что $\varepsilon = \bar{e}$.*
(II) *R_R полусовершенен $\Leftrightarrow {}_RR$ полусовершенен.*

Доказательство. (I) Согласно 9.2.1, $\mathrm{rad}\,(R) \subseteq^{\circ} R_R$, так что условие (3) из 11.3.1 (c) выполнено для любого кольца и потому здесь как условие излишне. Далее, поскольку наше условие (1) совпадает с условием (c) из 11.3.1, то нужно проверить только, что условия (2) из 11.3.1. и 11.3.2 следуют одно из другого.
„$\Rightarrow$“: Пусть $\varepsilon \in \bar{R}$ — идемпотент. Согласно 11.2.4, для разложения $\bar{R}_R = \varepsilon R \oplus (\bar{1} - \varepsilon)\bar{R}$ имеется разложение

$$R_R = eR \oplus (1 - e)R,$$

где $e \in R$ — некоторый идемпотент и

$$\bar{e}\bar{R} = \varepsilon\bar{R},\quad (\bar{1} - \bar{e})\bar{R} = (\bar{1} - \varepsilon)\bar{R}.$$

Тогда $e\bar{e} = \bar{e}$, $(\bar{1} - e)(\bar{1} - \bar{e}) = \bar{1} - \bar{e}$, а значит $e = \bar{e}$.

„$\Leftarrow$“: Каждое прямое слагаемое в $\bar{R}_R$ имеет вид $e\bar{R}$, где $e \in \bar{R}$ — некоторый идемпотент. Если теперь e — идемпотент из R, такой что $\bar{e} = e$, то eR — прямое слагаемое в R_R и $\overline{eR} = \bar{e}\bar{R} = e\bar{R}$.

(II) Условия (1) и (2) из (I) не зависят от стороны. □

Кольцо R называется *полусовершенным*, если оно удовлетворяет (эквивалентным) условиям 11.3.2. В частности, это понятие в силу (II) не зависит от стороны.

Как было установлено ранее, каждый проективный артинов модуль полусовершенен. В частности, каждое артиново справа кольцо R_R полусовершенно справа и слева независимо от того, артиново R слева или нет. Однако существуют полусовершенные кольца, не являющиеся артиновыми. Если R — локальное кольцо (см. 7.1.2), то кольцо $R/\mathrm{rad}(R)$ является телом, а потому полупросто, и оно, очевидно, содержит лишь один ненулевой идемпотент — единицу. Следовательно, согласно 11.3.2, R полусовершенно.

Например, кольцо $K[[x]]$ формальных степенных рядов $\sum_{i=0}^{\infty} k_i x^i$ от переменного x с коэффициентами из поля K локально. Его радикал равен

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} k_i x^i \mid k_i \in K \right\}$$

и не обладает никакими „ниль-свойствами“. Отметим, что это кольцо полусовершенно, но не совершенно (см. § 11.6).

11.3.3. ***Теорема.*** *Пусть $(P_i \mid i \in I)$ — семейство полусовершенных проективных R-модулей. Модуль*

$$P := \bigoplus_{i \in I} P_i$$

полусовершенен тогда и только тогда, когда $\mathrm{rad}(P) \subsetneq P$.

Доказательство. Согласно 11.3.1, условие $\mathrm{rad}(P) \subsetneq P$ является необходимым. Чтобы показать, что оно и достаточно, мы проверим, что выполнены условия (1) — (3) из 11.3.1 (c). Прежде всего, условие (3) имеет место по предположению.

(1): В силу 9.1.5 (d),

$$P/\mathrm{rad}(P) \cong \bigoplus_{i \in I} P_i/\mathrm{rad}(P_i).$$

Так как, согласно 11.3.1, $P_i/\mathrm{rad}(P_i)$ полупрост для каждого $i \in I$, то $P/\mathrm{rad}(P)$ полупрост.

(2): Мы покажем сперва, что каждый простой подмодуль E модуля $P/\mathrm{rad}(P)$ обладает проективной оболочкой. Поскольку $P/\mathrm{rad}(P) \cong \bigoplus P_i/\mathrm{rad}(P_i)$, модуль E изоморфен некоторому простому подмодулю E' модуля $\bigoplus P_i/\mathrm{rad}(P_i)$. Разлагая каждое $P_i/\mathrm{rad}(P_i)$ в прямую

сумму простых подмодулей и применяя 8.1.2 (b), заключаем, что E' изоморфен некоторому простому подмодулю модуля $P_i/\mathrm{rad}\,(P_i)$. Так как этот простой подмодуль как прямое слагаемое полусовершенного модуля $P_i/\mathrm{rad}\,(P_i)$ имеет проективную оболочку, то и изоморфный ему модуль E имеет проективную оболочку.

Пусть теперь дано разложение $P/\mathrm{rad}\,(P) = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$. Поскольку $P/\mathrm{rad}\,(P)$ полупрост, каждое Λ_k есть прямая сумма простых подмодулей:

$$\Lambda_k = \bigoplus_{j \in J_k} E_j^k, \quad k = 1, 2.$$

Если $\xi_j^k\colon A_j^k \to E_j^k$ — проективная оболочка, то

$$\alpha_k := \bigoplus_{j \in J_k} \xi_j^k : A_k := \bigoplus_{j \in J_k} A_j^k \to \Lambda_k = \bigoplus_{j \in J_k} E_j^k$$

— эпиморфизм с проективной областью определения A_k и так как $\ker\left(\xi_j^k\right) \subsetneq A_j^k$, а значит $\ker\left(\xi_j^k\right) \subsetneq \mathrm{rad}\left(A_j^k\right)$, то

$$\ker(\alpha_k) = \bigoplus_{j \in J_k} \ker\left(\xi_j^k\right) \subsetneq \mathrm{rad}\,(A_k), \quad k = 1, 2.$$

Для $\xi = \nu\colon P \to P/\mathrm{rad}\,(P)$ выполнены условия теоремы 11.2.2, и потому разложение $P/\mathrm{rad}\,(P) = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ можно поднять в P. □

11.3.4. ***Следствие.*** (a) *Прямая сумма любого конечного числа полусовершенных R-модулей является полусовершенным модулем.* (b) *Если R_R — полусовершенен, то каждый конечно-порожденный R-модуль полусовершенен.*

Доказательство. (a) Пусть $M_1, \ldots, M_n$ полусовершенны и

$$\xi_i\colon P_i \to M_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

— проективные оболочки. Согласно 11.1.5, P_i полусовершенны, а по 11.3.3 и $P := \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ полусовершенен, ибо $\mathrm{rad}\,(P) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{rad}\,(P_i)$ косущественен в P как конечная прямая сумма косущественных подмодулей $\mathrm{rad}\,(P_i)$. Поскольку P полусовершенен, то и модуль $M_1 \ominus \ldots \oplus M_n$ полусовершенен как эпиморфный образ P.

(b) Согласно (a), каждый конечно-порожденный свободный модуль полусовершенен, а тогда полусовершенен и любой эпиморфный образ такого модуля. □

Дадим теперь интересную характеризацию полусовершенных модулей, которая сослужит нам позже хорошую службу.

11.3.5. ***Теорема.*** *Для проективного модуля P следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *P полусовершенен;*
(2) *P удовлетворяет условиям:*
(a) *каждый собственный подмодуль P содержится в некотором максимальном подмодуле P и*
(b) *каждый простой фактормодуль модуля P обладает проективной оболочкой.*

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Из определения полусовершенного модуля следует, что выполнено условие (b). Докажем (a). Пусть $U \subsetneq P$. Так как P/U полусовершенен, то согласно 11.1.7 радикал модуля P/U косущественен и, следовательно, является собственным подмодулем в P/U. Поскольку радикал есть пересечение всех максимальных подмодулей, то существует по крайней мере один максимальный подмодуль модуля P/U, имеющий вид X/U, где $U \subsetneq X \subsetneq P$. Из того что X/U максимален в P/U и $P/X \cong (P/U)/(X/U)$, вытекает, что X максимален в P.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Мы проведем доказательство этой импликации в три шага.

Шаг 1. Покажем, что $\operatorname{rad}(P) \subsetneq P$. В самом деле, если бы имело место равенство $U + \operatorname{rad}(P) = P$, где $U \subsetneq P$, то в силу (a) существовал бы такой максимальный подмодуль $X \subsetneq P$, что $U \subsetneq X$. Отсюда следовало бы, что $U + \operatorname{rad}(P) \subsetneq X \neq P$, — противоречие!

Шаг 2. Теперь покажем, что $\bar{P} := P/\operatorname{rad}(P)$ полупрост. Предположим противное, т. е. что $\operatorname{soc}(\bar{P}) \neq \bar{P}$. Тогда $\nu^{-1}(\operatorname{soc}(\bar{P})) \neq P$, где ν: $P \to \bar{P}$ — естественный эпиморфизм. Поэтому, согласно (a), существует максимальный подмодуль $X \subsetneq P$, такой, что $\nu^{-1}(\operatorname{soc}(\bar{P})) \subsetneq X$. Так как, в силу (b), P/X обладает проективной оболочкой, то по 11.1.2 мы имеем

$$P = P_1 \oplus P_2 = P_1 + X,$$

где $P_2 \subsetneq X$ и $P_1 \cap X \subsetneq P_1$, а следовательно, $P_1 \cap X \subsetneq \operatorname{rad}(P)$. Отсюда вытекает, что

(*) $\quad \bar{P} = \nu(P_1) \oplus \nu(X).$

Поскольку X максимален в P (и потому $\operatorname{rad}(P) \subsetneq X$), то

$$P/X \cong (P/\operatorname{rad}(P))/(X/\operatorname{rad}(P)) = \bar{P}/\nu(X) \cong \nu(P_1)$$

прост и, значит, $\nu(P_1) \subsetneq \operatorname{soc}(\bar{P}) \subsetneq \nu(X)$, в противоречие с условием (*)!

Шаг 3. Пусть теперь

$$\bar{P} = \bigoplus_{i \in I} E_i, \text{ где } E_i \text{ просты.}$$

Для каждого $j \in I$

$$E_j \cong \bar{P}/\bigoplus_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} E_i \cong P/\nu^{-1}\left(\bigoplus_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} E_i\right).$$

В силу (b) существуют проективные оболочки

$$\alpha_j\colon\ A_j \to E_j,\ j \in I.$$

Так как, очевидно, любой простой модуль, имеющий проективную оболочку, полусовершенен, то все E_j полусовершенны, а тогда, согласно 11.1.5, и все A_j полусовершенны.

Для $\nu\colon P \to P/\mathrm{rad}\,(P)$ (в роли ξ) и $P/\mathrm{rad}\,(P) = \oplus E_i$ (в роли M) выполнены условия теоремы 11.2.2. Как и в доказательстве теоремы 11.2.2, получаем, что

$$\varphi\colon\ A := \oplus A_i \to P$$

является изоморфизмом. Следовательно, $P = \oplus \varphi(A_i)$ — прямая сумма полусовершенных модулей $\varphi(A_i)$. Поскольку $\mathrm{rad}\,(P) \subsetneq P$, то на основании 11.3.3 заключаем, что P полусовершенен. □

11.4. Неразложимые полусовершенные модули

Как мы установили в 11.2.4, для каждого проективного полусовершенного модуля P_R любое разложение полупростого модуля $\bar{P} := P/\mathrm{rad}\,(P)$ в прямую сумму

$$\bar{P} = \bigoplus_{i\in I} E_i$$

простых модулей E_i, $i \in I$, может быть поднято в P. Это означает, что если

$$\nu\colon\ P \to \bar{P} = P/\mathrm{rad}\,(P)$$

— канонический эпиморфизм, то существует разложение

$$P = \bigoplus_{i\in I} P_i,$$

для которого $\nu(P_i) = E_i$, $i \in I$.

В силу того что $\mathrm{rad}\,(P) = \oplus\, \mathrm{rad}\,(P_i)$ (см. 9.1.5), имеем $\mathrm{rad}\,(P_i) = \mathrm{rad}\,(P) \cap P_i$. Поэтому

$$E_i = \nu(P_i) = P_i + \mathrm{rad}\,(P)/\mathrm{rad}\,(P) \cong P_i/P_i \cap \mathrm{rad}\,(P) = P_i/\mathrm{rad}\,(P_i).$$

Поскольку E_i прост, то $\mathrm{rad}\,(P_i)$ — максимальный подмодуль в P_i.

Сейчас мы хотим изучить проективные модули, у которых радикал является максимальным подмодулем. Напомним (см. упр. 9 к гл. 6), что модуль M_R называется *неразложимым в сумму*, если он не представим в виде суммы двух собственных подмодулей. Если M_R представим в таком виде, то он называется *разло-*

жимым в сумму (ср. с определением (просто) неразложимости 6.6.1).

11.4.1. *Теорема.* *Пусть $P_R \neq 0$ проективен. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(a) *P неразложим в сумму;*
(b) *P полусовершенен и неразложим;*
(c) $\operatorname{rad}(P)$ — *максимальный и косущественный подмодуль в P;*
(d) $\operatorname{rad}(P)$ — *наибольший собственный подмодуль в P;*
(e) $\operatorname{End}(P_R)$ — *локальное кольцо.*

Доказательство. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: На основании 11.1.5 достаточно доказать, что P — модуль с дополнениями. Но в силу (a) каждый отличный от P подмодуль в P имеет P своим а. д.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“: Согласно 11.1.7, $\operatorname{rad}(P) \subsetneq P$. Так как модуль $P/\operatorname{rad}(P)$ в силу 11.2.4 неразложим, то он не только полупрост, но даже прост. Следовательно, $\operatorname{rad}(P)$ — максимальный подмодуль в P.

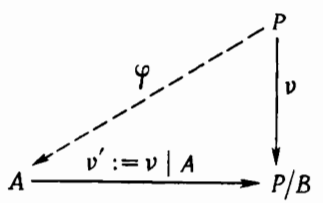
„(c) $\Rightarrow$ (d)“: Пусть $U \subsetneq P$, $U \not\subset \operatorname{rad}(P)$. Поскольку $\operatorname{rad}(P)$ — максимальный подмодуль, то $U + \operatorname{rad}(P) = P$. В силу того что $\operatorname{rad}(P) \subsetneq P$, имеем $U = P$. Следовательно, имеет место (d).

„(d) $\Rightarrow$ (e)“: Если φ: $P \to P$ — эпиморфизм, то он должен быть расщепляющим, а значит, в силу (d), является автоморфизмом. Следовательно, если φ_1, $\varphi_2 \in \operatorname{End}(P_R)$ необратимы, то они не могут быть эпиморфизмами. Поэтому

$$\operatorname{im}(\varphi_1 + \varphi_2) \subsetneq \operatorname{im}(\varphi_1) + \operatorname{im}(\varphi_2) \subsetneq \operatorname{rad}(P),$$

так что и сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ необратима, т. е. $\operatorname{End}(P_R)$ — локальное кольцо.

„(e) $\Rightarrow$ (a)“: Если $P = A + B$, то имеет место коммутативная диаграмма



Поэтому для $\gamma := \iota_A \varphi$, где ι_A: $A \to P$ — включение, справедливы соотношения

$$\operatorname{im}(\gamma) \subsetneq A, \quad \operatorname{im}(1_P - \gamma) \subsetneq B$$

(ибо $x + B = \varphi(x) + B$ для всех $x \in P$). Так как $1_P = \gamma + (1_P - \gamma)$ и так как кольцо $\operatorname{End}(P_R)$ локально, то либо γ, либо $1_P - \gamma$

должно быть автоморфизмом, следовательно, либо $A = P$, либо $B = P$. □

11.4.2. *Следствие.* *Всякий проективный полусовершенный модуль* P_R *обладает разложением*

$$P = \bigoplus_{i \in I} P_i,$$

где модули P_i *удовлетворяют условиям теоремы* 11.4.1. *Это разложение единственно в смысле теоремы Крулля — Ремака — Шмидта* 7.3.1.

Имея в виду дальнейшие применения, подробно запишем этот факт еще раз специально для случая колец; при этом мы примем во внимание 7.2.3.

11.4.3. *Следствие.* *Всякое полусовершенное кольцо* R *обладает единственным в смысле теоремы* 7.3.1 *разложением*

$$R_R = e_1 R \oplus \ldots \oplus e_n R$$

со следующими свойствами:
(1) $e_1, \ldots, e_n$ *суть ненулевые ортогональные идемпотенты с*

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 1;$$

(2) $\operatorname{rad}(e_i R)$ *— наибольший собственный правый идеал в* $e_i R$ и $\operatorname{rad}(e_i R) = e_i \operatorname{rad}(R)$;
(3) $e_i R$ *неразложимо в сумму;*
(4) $\operatorname{End}(e_i R)$ *локально и* $\operatorname{End}(e_i R) \cong e_i R e_i$.

Доказательство. Ввиду 11.4.2 и 7.2.3, всё непосредственно ясно, кроме двух следующих фактов, которые имеют место для произвольного идемпотента $e \in R$:

„$\operatorname{rad}(eR) = e \operatorname{rad}(R)$“: В силу 9.1.5, $\operatorname{rad}(eR) \subseteq \operatorname{rad}(R)$. Из того что $x = ex$ для каждого $x \in eR$, вытекает, что $\operatorname{rad}(eR) \subseteq e \operatorname{rad}(R)$. Обратно, в силу 9.2.1, $e \operatorname{rad}(R) \subseteq \operatorname{rad}(eR)$.

„$\operatorname{End}(eR) \cong eRe$“: Очевидно, что умножение на данный элемент $eae \in eRe$ индуцирует эндоморфизм

$$(eae)' \colon eR \ni er \longmapsto eaer \in eR.$$

Тем самым мы получаем кольцевой гомоморфизм

$$\psi \colon eRe \ni eae \longmapsto (eae)' \in \operatorname{End}(eR).$$

ψ — мономорфизм. Действительно, если $eaer = eber$ для всех $er \in eR$, то при $r = 1$ мы имеем $eae = ebe$. Далее, ψ — эпиморфизм. В самом деле, пусть $\alpha \in \operatorname{End}(eR)$. Так как eR — прямое слага-

емое в R_R, то α можно продолжить до эндоморфизма R_R, т. е. до левого умножения на некоторый элемент $a \in R$:

$$\alpha(er) = aer = eaer,$$

причем последнее равенство справедливо, поскольку $aer \in eR$. Итак, $\alpha = (eae)'$. □

Пример. Для кольца $R := \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $n > 1$, укажем явно разложение, существование которого утверждается в 11.4.3. В конце § 9.1 мы определили радикал и цоколь R. Будем использовать обозначения, введенные там. Положим

$$n_i := \frac{n}{p_i^{m_i}}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Очевидно,

$$\text{н. о. д.}\ (n_1, \ldots, n_k) = 1.$$

Следовательно, существуют $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{Z}$, для которых $a_1 n_1 + \ldots + a_k n_k = 1$. Отсюда следует, что н. о. д. $(a_i, p_i) = 1$.

Покажем теперь, что если

$$e_i := a_i n_i + n\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z},$$

то

$$R_R = e_1 R \oplus \ldots \oplus e_k R$$

есть искомое разложение. Прежде всего ясно, что

$$e_1 + \ldots + e_k = 1 \in R.$$

Далее, поскольку $n \mid n_i n_j$ для $i \neq j$,

$$e_i e_j = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Умножая равенство $e_1 + \ldots + e_k = 1$ на e_i, получаем

$$e_i^2 = e_i.$$

Поэтому, согласно 7.2.3,

$$R_R = e_1 R \oplus \ldots \oplus e_k R.$$

Ввиду 11.4.1, остается лишь показать, что $e_i R$ имеет локальное кольцо эндоморфизмов. Как следует из определения e_i, кольцевой гомоморфизм

$$\mathbf{Z} \ni z \longmapsto e_i \bar{z} e_i = e_i \bar{z} \in e_i R e_i$$

имеет своим ядром $p_i^{m_i}\mathbf{Z}$ (заметим, что н. о. д. $(a_i, p_i) = 1$), следовательно,

$$e_i R e_i \cong \mathbf{Z}/p_i^{m_i}\mathbf{Z}.$$

Далее, как было показано в § 9.1,

$$\operatorname{rad}\left(\mathbf{Z}/p_i^{m_i}\mathbf{Z}\right) = p_i\mathbf{Z}/p_i^{m_i}\mathbf{Z},$$

и в силу изоморфизма

$$\left(\mathbf{Z}/p_i^{m_i}\mathbf{Z}\right)/\left(p_i\mathbf{Z}/p_i^{m_i}\mathbf{Z}\right) \cong \mathbf{Z}/p_i\mathbf{Z}$$

$\operatorname{rad}\left(\mathbf{Z}/p_i^{m_i}\mathbf{Z}\right)$ является максимальным идеалом в $\mathbf{Z}/p_i^{m_i}\mathbf{Z}$. Но тогда и $\operatorname{rad}(e_iRe_i)$ будет максимальным идеалом, а значит наибольшим собственным идеалом в e_iRe_i. Из 11.4.1 следует поэтому, что e_iRe_i — локальное кольцо.

11.5. Свойства ниль-идеалов и t-нильпотентных идеалов

При изучении совершенных колец используются свойства ниль-идеалов и t-нильпотентных идеалов, выводом которых мы и займемся в этом параграфе.

Прежде всего речь пойдет о поднятии ортогональных идемпотентов по модулю ниль-идеала. Напомним, что элемент $e \in R$ называется идемпотентом, если $e^2 = e$. Идеал A из R называется ниль-идеалом, если каждый элемент $a \in A$ нильпотентен, т. е. существует такое $n \in \mathbf{N}$ (зависящее, вообще говоря, от a), что $a^n = 0$. В 9.3.8 было установлено, что каждый ниль-идеал содержится в $\operatorname{rad}(R)$.

В качестве основы для поднятия идемпотентов докажем следующее простое

11.5.1. *Предложение.* *Пусть b — произвольный элемент кольца R и R_0 — подкольцо в R, порожденное элементами $1 \in R$ и b.*
(a) *Для произвольных m, $n \in \mathbf{N}$*

$$R = b^nR + (1-b)^mR + (b-b^2)R,$$
$$b^nR \cap (1-b)^mR = b^n(1-b)^mR.$$

(b) *Если элемент $b - b^2$ нильпотентен, то существует такой идемпотент $e \in R_0$, что*

$$e = br_0,\ e - b = (b-b^2)s_0, \text{ где } r_0,\ s_0 \in R_0.$$

Доказательство (a) Рассмотрим $\mathbf{Z}[x]$ — кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами из $\mathbf{Z}$. Имеем

$$1 - x^n - (1-x)^m \in (x - x^2)\mathbf{Z}[x],$$

потому что $x(1-x) = x - x^2$ делит $1 - x^n - (1-x)^m$, ибо $x = 0$ и $x = 1$ являются корнями многочлена $1 - x^n - (1-x)^m$. Следовательно, существует такой многочлен $z_0 \in \mathbf{Z}[x]$, что

$$1 = x^n + (1-x)^m + (x - x^2)z_0.$$

При кольцевом гомоморфизме $\mathbf{Z}[x] \to R_0$, переводящем x в b, это равенство переходит в равенство

$$1 = b^n + (1-b)^m + (b-b^2)\, r_0, \quad r_0 \in R_0.$$

Следовательно,

$$R_0 = b^n R_0 + (1-b)^m R_0 + (b-b^2)\, R_0,$$

а также

$$R = b^n R + (1-b)^m R + (b-b^2)\, R.$$

Обратимся к второму равенству из (а). Непосредственно ясно, что

$$b^n (1-b)^m R \subseteq b^n R \cap (1-b)^m R.$$

Обратно, пусть

$$d = b^n r = (1-b)^m s \in b^n R \cap (1-b)^m R \ (r,\ s \in R).$$

Тогда из равенств

$$\begin{aligned} d = (1-b)^m s &= \left(1 - \binom{m}{1} b + \binom{m}{2} b^2 - \ldots\right) s \\ &= s - b\left(\binom{m}{1} - \binom{m}{2} b + \ldots\right) s \end{aligned}$$

следует равенство вида

$$s = d + b r_0 s = b^n r + b r_0 s, \text{ где } r_0 \in R_0.$$

Подставляя в правую часть вместо s снова эту правую часть, получаем

$$s = b^n r + b r_0 (b^n r + b r_0 s) = b^n r_1 + b^2 r_0^2 s, \text{ где } r_1 \in R;$$

здесь было использовано то, что R_0 коммутативно. Повторяя последовательно эту процедуру, получим после конечного числа шагов равенство вида $s = b^n t$, где $t \in R$. Отсюда следует, что

$$d = (1-b)^m s = (1-b)^m b^n t,$$

а следовательно $d \in b^n (1-b)^m R$, что и требовалось доказать.

(b) Пусть $(b-b^2)^n = 0$. Тогда $(b-b^2) R_0$ — нильпотентный идеал в R_0 (так как R_0 коммутативно), поэтому $(b-b^2) R_0 \subseteq \operatorname{rad}(R_0)$ и, следовательно, идеал $(b-b^2) R_0$ косущественен в R_0. Из равенства

$$R_0 = b^n R_0 + (1-b)^n R_0 + (b-b^2) R_0$$

следует, что

$$R_0 = b^n R_0 + (1-b)^n R_0,$$

а поскольку

$$b^n R_0 \cap (1-b)^n R_0 = b^n (1-b)^n R_0 = (b-b^2)^n R_0 = 0,$$

то мы имеем даже

$$R_0 = b^n R_0 \oplus (1-b)^n R_0.$$

В силу 7.2.3 существует такой идемпотент $e \in R_0$, что

$$eR_0 = b^n R_0, \quad (1-e)\,R_0 = (1-b)^n R_0;$$

Значит, $e = br_0$, $r_0 \in R_0$. Далее, согласно (a),

$$e - b = (1-b) - (1-e) \in bR_0 \cap (1-b)\,R_0 = (b-b^2)\,R_0.$$

Поэтому $e - b = (b-b^2)\,s_0$, $s_0 \in R_0$. □

11.5.2. ***Определение.*** (a) *Пусть* $A \subseteq_R R_R$ *и* $\nu\colon R \to R/A$ *— естественный кольцевой эпиморфизм. Говорят, что идемпотент* $\varepsilon \in R/A$ *можно поднять в* R, *если существует идемпотент* $e \in R$, *для которого* $\nu(e) = \varepsilon$.

(b) *Говорят, что множество* $\{\varepsilon_i \mid i \in I\}$ *ортогональных идемпотентов* $\varepsilon_i \in R/A$ *можно поднять в* R, *если существует множество* $\{e_i \mid i \in I\}$ *ортогональных идемпотентов* $e_i \in R$, *таких что* $\nu(e_i) = \varepsilon_i$ *для всех* $i \in I$.

11.5.3. ***Теорема.*** *Пусть* $A \subseteq_R R_R$ *— ниль-идеал. Тогда каждое конечное или счетное множество ортогональных идемпотентов* $\varepsilon_i \in R/A$ *можно поднять в* R.

Доказательство проведем по индукции. Начало индукции: один идемпотент $\varepsilon \in R/A$ можно поднять в R. Пусть снова $\nu\colon R \to R/A$ — канонический эпиморфизм, и пусть элемент $b \in R$ таков, что $\nu(b) = \varepsilon$. Тогда

$$\nu(b - b^2) = \nu(b) - \nu(b^2) = \varepsilon - \varepsilon = 0,$$

а значит $b - b^2 \in \ker(\nu) = A$. Согласно 11.5.1 (b) существует такой идемпотент $e \in R$, что $e - b = (b-b^2)\,s_0 \in A$. Тогда имеем

$$0 = \nu(e-b) = \nu(e) - \nu(b) = \nu(e) - \varepsilon,$$

следовательно, $\nu(e) = \varepsilon$.

Проведем теперь шаг индукции. Пусть

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3, \ \ldots$$

— конечное или счетное число ортогональных идемпотентов из R/A, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ уже выбраны, как надо. Возьмем $c \in R$, для которого $\nu(c) = \varepsilon_{n+1}$, и положим

$$b := \left(1 - \sum_{i=1}^{n} e_i\right) c \left(1 - \sum_{i=1}^{n} e_i\right).$$

Вследствие ортогональности $e_1, \ldots, e_n$

$$e_i b = b e_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$v(b) = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) \varepsilon_{n+1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) = \varepsilon_{n+1}.$$

В силу начального шага индукции и 11.5.1 (b) найдется такой идемпотент e_{n+1}, что

$$v(e_{n+1}) = v(b) = \varepsilon_{n+1}, \quad e_{n+1} = br_0 = r_0 b.$$

Поскольку $e_i b = be_i = 0$, то

$$e_i e_{n+1} = e_{n+1} e_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

чем доказательство и завершено. □

Перейдем теперь к изучению t-нильпотентных идеалов. Напомним приведенное в начале этой главы определение.

11.5.4. *Определение.* *Множество A элементов кольца R называется t-нильпотентным слева, соотв. справа, если для каждого семейства*

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad a_i \in A,$$

существует такое $k \in \mathbf{N}$, что

$$a_k a_{k-1} \ldots a_1 = 0, \text{ соотв. } a_1 a_2 \ldots a_k = 0.$$

Очевидно, что каждый t-нильпотентный слева или справа идеал является ниль-идеалом. С другой стороны, не каждый t-нильпотентный идеал нильпотентен. Таким образом, t-нильпотентные идеалы находятся между нильпотентными и ниль-идеалами.

11.5.5. *Теорема.* *Для правого идеала $A \subset R_R$ следующие условия эквивалентны:*
(a) *A t-нильпотентен слева;*
(b) *всякий модуль M_R, удовлетворяющий условию $MA = M$, равен 0;*
(c) *для любого модуля M_R имеет место соотношение $MA \subsetneq M$;*
(d) *$R^{(\mathbf{N})} A \subsetneq R^{(\mathbf{N})}$ (как правые R-модули).*

Доказательство. „(a) $\Rightarrow$ (b)“. Предположим, что $MA = M$ и $M \neq 0$. Тогда найдутся $m_1 \in M$, $a_1 \in A$, для которых $m_1 a_1 \neq 0$. Пусть $m_1 = \sum m_i' a_i'$. Тогда $m_1 a_1 = \sum m_i' a_i' a_1 \Rightarrow$ существует $m_2 a_2 a_1 \neq 0$, $m_2 \in M$, $a_2 \in A$. Пусть $m_2 = \sum m_i'' a_i''$. Тогда $m_2 a_2 a_1 = \sum m_i'' a_i'' a_2 a_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ существует $m_3 a_3 a_2 a_1 \neq 0$. Повторяя это рассуждение, получаем последовательность $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $a_i \in A$, для которой $a_n a_{n-1} \ldots$ $\ldots a_1 \neq 0$ при всех $n \in \mathbf{N}$, в противоречие с t-нильпотентностью A.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“: Предположим, что $MA + U = M$. Тогда $(M/U)A = M/U \Rightarrow M/U = 0$ (по предположению) $\Rightarrow U = M$, что и требовалось доказать.

„(c) $\Rightarrow$ (d)“: (d) — частный случай (c).

„(d) $\Rightarrow$ (a)“: Рассмотрим $F := R^{(\mathbf{N})}$ как правый R-модуль с базисом $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Для данной последовательности $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, где $a_i \in A$, рассмотрим его подмодуль

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} u_i R, \text{ где } u_i := x_i - x_{i+1}a_i, \; i \in \mathbf{N}.$$

Очевидно, что $FA + U = F$, поэтому по предположению $U = F$.

В частности, $x_1 \in U$ и, значит, существует представление

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k} u_i r_i = x_1 r_1 + x_2 (r_2 - a_1 r_1) + x_3 (r_3 - a_2 r_2) + \ldots + x_k (r_k - a_{k-1} r_{k-1}) - x_{k+1} a_k r_k.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$r_1 = 1, \; r_2 = a_1, \; r_3 = a_2 a_1, \; \ldots, \; r_k = a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1,$$

а также

$$a_k r_k = a_k a_{k-1} \ldots a_1 = 0. \qquad \square$$

11.5.6. ***Следствие.*** *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(1) $\operatorname{rad}(R)$ *t-нильпотентен слева;*
(2) *радикал каждого проективного правого R-модуля косуществен;*
(3) $R^{(\mathbf{N})}$, *рассматриваемый как правый R-модуль, имеет косущественный радикал.*

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Эта импликация — частный случай импликации (a) $\Rightarrow$ (c) из 11.5.5, ибо, согласно 9.2.1, для проективных модулей $\operatorname{rad}(P) = P \operatorname{rad}(R)$.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Очевидно.

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Ввиду 9.2.1(g) это следует из импликации (d) $\Rightarrow$ (a) теоремы 11.5.5. $\square$

Другая интересная характеризация t-нильпотентных идеалов получается с помощью аннуляторных условий.

11.5.7. ***Теорема.*** *Для правого идеала $A \subset R_R$ следующие условия эквивалентны:*
(a) *A t-нильпотентен слева;*
(b) *всякий модуль ${}_RM$, для которого*[1] $\mathrm{r}_M(A) = 0$, *равен* 0;
(c) *для каждого модуля ${}_RM$*

$$\mathrm{r}_M(A) \subset^{*} {}_RM.$$

---

[1] Напомним (см. упр. 24 к гл. 5), что $\mathrm{r}_M(A) = \{m \mid m \in M \wedge Am = 0\}$. — *Прим. перев.*

Доказательство. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Предположим, что $r_M(A) = 0$ и $M \neq 0$. Тогда для каждого $0 \neq m \in M$ найдется такое $a \in A$, что $am \neq 0$. Поэтому для фиксированного $0 \neq m_0 \in M$ по индукции строится последовательность $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $a_i \in A$, такая что $a_n a_{n-1} \ldots a_1 m_0 \neq 0$ для каждого $n \in \mathbf{N}$, а следовательно, $a_n a_{n-1} \ldots$ $\ldots a_1 \neq 0$ для каждого $n \in \mathbf{N}$, в противоречие с условием t-нильпотентности A.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“: Если для $X \subset M$

$$r_M(A) \cap X = 0,$$

то $r_X(A) = 0$, а значит $X = 0$.

„(c) $\Rightarrow$ (a)“: Проверим, что выполнено условие 11.5.5 (b). А именно, покажем, что $MA \neq M$ для $M_R \neq 0$. Для краткости положим $U := r_R(M)$; U — собственный двусторонний идеал в кольце R. Далее, рассмотрим

$$H := \{x \mid x \in R \wedge Ax \in U\}.$$

Ясно, что $U \subset H$ и

$$H/U = r_{R/U}(A).$$

В силу (c), $H/U \subsetneq^* R/U$, поэтому $U \subset H$ и, следовательно, $MH \neq 0$. Однако $MAH \subset MU = 0$. Отсюда вытекает, что $MA \neq M$. □

11.6. Совершенные кольца

Приступим теперь к изучению совершенных колец, введенных в начале главы. Начнем с того, что приведем еще раз их определение.

11.6.1. ***Определение.*** *Говорят, что кольцо R совершенно справа (или что R_R является совершенным), если каждый правый R-модуль обладает проективной оболочкой.*

11.6.2. ***Следствие.*** *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(a) *R совершенно справа;*
(b) *$R^{(\mathbf{N})}$ полусовершенно как правый R-модуль;*
(c) *R полусовершенно и радикал каждого свободного правого R-модуля косущественен.*

Доказательство. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Ясно из определения.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“: Как прямое слагаемое в $R_R^{(\mathbf{N})}$ кольцо R полусовершенно. Согласно 11.1.7 радикал $R_R^{(\mathbf{N})}$ косущественен, поэтому в силу 11.5.6 радикал каждого проективного R-модуля косущественен.

„(c) $\Rightarrow$ (a)“: Если R полусовершенно и радикал каждого свободного правого R-модуля косущественен, то согласно 11.3.3 каждый свободный правый R-модуль полусовершенен. Поскольку каждый

правый R-модуль есть образ свободного правого R-модуля, каждый правый модуль является полусовершенным, т. е. R полусовершенно справа. □

Чтобы иметь пример совершенного кольца, покажем, что артиново справа кольцо совершенно с обеих сторон.

Итак, пусть модуль R_R артинов. Как было отмечено сразу после доказательства следствия 11.3.2, каждое артиново справа кольцо полусовершенно. Поскольку в силу 9.3.10 для каждого правого и каждого левого R-модуля M

$$\operatorname{rad}(M) \subsetneq M,$$

двусторонняя совершенность R следует из 11.6.2.

Докажем теперь теорему, приведенную во введении к этому параграфу; для удобства читателя повторим ее формулировку.

11.6.3. ***Теорема.*** *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(1) *R совершенно справа;*
(2) *каждый плоский правый R-модуль проективен;*
(3) *R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей для циклических левых идеалов;*
(4) *каждый ненулевой левый R-модуль обладает ненулевым цоколем и R не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов;*
(5) *кольцо $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто и $\operatorname{rad}(R)$ t-нильпотентен слева.*

Доказательство. Мы последовательно докажем, что (1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1).

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: По предположению любой правый R-модуль и, в частности, любой плоский правый R-модуль M обладает проективной оболочкой. Поэтому, согласно 10.5.3 (с $M = P/U$), каждый плоский правый R-модуль проективен.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Пусть

$$Ra_1 \supset Ra_2 \supset Ra_2 \supset \ldots$$

— убывающая цепь левых идеалов в R. Поскольку $a_{i+1} \in Ra_i$, существует такое $b_{i+1} \in R$, что $a_{i+1} = b_{i+1}a_i$. Положив $b_1 = a_1$, по индукции находим, что

$$a_n = b_n b_{n-1} \ldots b_1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Следовательно, указанную выше цепь можно записать в виде

$$Rb_1 \supset Rb_2b_1 \supset Rb_3b_2b_1 \supset \ldots,$$

т. е. она однозначно определяется последовательностью b_1, b_2, b_3, ...

Мы покажем в 3 шага, что существуют левый идеал $A \subsetneq {}_RR$ и $m \in \mathbf{N}$, такие что

$$Rb_nb_{n-1} \ldots b_1 = Ra_n = A$$

для всех $n \geqslant m$. Это, очевидно, эквивалентно тому, что исходная цепь обрывается.

Шаг 1. Рассмотрим модуль $F := R^{(\mathbf{N})} \in \mathscr{M}_R$ с базисом

$$x_i := (00 \ldots \overset{i}{1}0 \ldots) \ (1 \text{ на } i\text{-м месте}), \ i \in \mathbf{N},$$

и его подмодуль

$$B := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}b_i) \subset_{\oplus} F_R.$$

Покажем, что F/B — плоский модуль. Для этого, согласно 10.5.2, нужно показать, что для каждого конечно-порожденного левого идеала $L \subset_{\oplus} {}_RR$

$$B \cap FL = BL.$$

Включение $BL \subset B \cap FL$ имеет место всегда. Докажем обратное включение. Пусть $d \in B \cap FL$, т. е.

$$d = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}b_i) r_i = \sum_{i=1}^{h} f_i l_i, \quad f_i \in F, \ l_i \in L.$$

Так как L — левый идеал, то

$$d = \sum_{i=1}^{h} f_i l_i = \sum_{j=1}^{k} x_j l'_j, \text{ где } l'_j \in L.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$r_1 = l'_1, \ r_2 - b_1 r_1 = l'_2, \ r_3 - b_2 r_2 = l'_3, \ \ldots.$$

Отсюда последовательно получаем, что все $r_i \in L$; следовательно, $d \in BL$, что и требовалось доказать.

Шаг 2. В силу условия (2), F/B — проективный модуль. Поэтому эпиморфизм

$$\nu\colon F \to F/B$$

является расщепляющим, так что $F = B \oplus U$. Пусть теперь

$$\pi\colon F \ni b + u \longmapsto u \in F, \ b \in B, \ u \in U,$$

— соответствующая проекция F на $U \subset_{\oplus} F$ (с областью значений F!). Имеем

$$\pi(x_k - x_{k+1}b_k) = 0, \quad k \in \mathbf{N},$$

следовательно, $\pi(x_k) = \pi(x_{k+1})\, b_k$. Полагая $z_k := \pi(x_k)$, получаем

$$z_k = z_{k+1}b_k, \quad k \in \mathbf{N},$$

отсюда последовательной подстановкой находим, что

$$z_k = z_{m+1}b_m b_{m-1} \dots b_k, \quad m \geqslant k.$$

Отметим еще, что поскольку $\pi^2 = \pi$, то $\pi(z_k) = z_k$, $k \in \mathbf{N}$.

Мы утверждаем, что для правого аннулятора $\mathfrak{r}_R(z_k)$ элемента z_k в R справедлива формула

$$\mathfrak{r}_R(z_k) = \{r \mid r \in R \wedge b_m b_{m-1} \dots b_k r = 0,\ m \geqslant k\}.$$

То что множество, стоящее справа, содержится в $\mathfrak{r}_R(z_k)$, следует из того, что $z_k = z_{m+1}b_m b_{m-1} \dots b_k$. Обратно, пусть $r \in \mathfrak{r}_R(z_k)$, т. е. $z_k r = 0$. Поскольку

$$x_k = y_k + z_k, \quad y_k \in B, \quad z_k \in U,$$

имеет место равенство вида

$$x_k r = y_k r = \sum_{l=1}^{m} (x_l - x_{l+1}b_l) r_l, \quad r_l \in R, \quad m \geqslant k.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем

$$\begin{aligned}
&r_1 = r_2 = \dots = r_{k-1} = 0,\\
&r_k = r,\\
&r_{k+1} = b_k r_k,\\
&r_{k+2} = b_{k+1} r_{k+1},\\
&\vdots\\
&r_m = b_{m-1} r_{m-1},\\
&0 = b_m r_m.
\end{aligned}$$

Производя последовательные подстановки, находим, что

$$0 = b_m r_m = b_m b_{m-1} r_{m-1} = \dots = b_m b_{m-1} \dots b_k r,$$

чем сделанное утверждение и доказано.

Шаг 3. Пусть z_k записываются (как элементы модуля $F = R^{(\mathbf{N})}$) в виде

$$z_k = (s_l^k) = (s_1^k s_2^k \dots), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Рассмотрим левый идеал A кольца R, порожденный коэффициентами s_l^1 для z_1:

$$A := \sum_l R s_l^1.$$

Так как почти все $s_l^1 = 0$, то A конечно-порожден.

Мы утверждаем, что существует такое m_0, что $Rb_n b_{n-1} \dots b_1 = A$ для всех $n \geqslant m_0$. Установив это, мы, очевидно, завершим доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (3).

Как было показано на шаге 2,

$$z_1 = z_{m+1} b_m b_{m-1} \dots b_1, \quad m \in \mathbf{N};$$

следовательно, для всех $i \in \mathbf{N}$

$$s_i^1 = s_i^{m+1} b_m b_{m-1} \dots b_1,$$

откуда вытекает, что

$$A \subseteq R b_m b_{m-1} \dots b_1, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Докажем, что для достаточно больших m справедливо обратное включение. Поскольку $\pi = \pi^2$, то $z_j = \pi(x_j) = \pi^2(x_j) = \pi(z_j)$, откуда получаем

$$z_1 = (s_i^1) = \left(\sum_{j=1}^{h} s_i^j s_j^1 \right),$$

где h выбрано так, что $s_j^1 = 0$ для $j \geqslant h$; заметим, что из равенства

$$z_1 = \sum_{j=1}^{h} x_j s_j^1$$

следует, что

$$z_1 = \pi(z_1) = \sum_j \pi(x_j) s_j^1 = \sum_i z_i s_i^1 = \sum_i \sum_j x_i s_i^j s_j^1.$$

Сравнение коэффициентов дает

$$s_i^1 = \sum_{j=1}^{h} s_i^j s_j^1, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Из равенства $z_j = z_{h+1} b_h b_{h-1} \dots b_j$, $h \geqslant j$ (шаг 2) получаем

$$s_i^j = s_i^{h+1} b_h b_{h-1} \dots b_j.$$

Подставляя это в предыдущее равенство, находим, что

$$s_i^1 = \sum_{j=1}^{h} s_i^{h+1} b_h b_{h-1} \dots b_j s_j^1 = s_i^{h+1} \sum_{j=1}^{h} b_h b_{h-1} \dots b_j s_j^1.$$

Так как, с другой стороны, $s_i^1 = s_i^{h+1} b_h b_{h-1} \dots b_1$, то

$$s_i^{h+1} \left(\sum_{j=1}^{h} b_h b_{h-1} \dots b_j s_j^1 - b_h b_{h-1} \dots b_1 \right) = 0, \quad i \in \mathbf{N};$$

следовательно,

$$z_{h+1} \left(\sum_{j=1}^{h} b_h b_{h-1} \dots b_j s_j^1 - b_h b_{h-1} \dots b_1 \right) = 0.$$

Согласно шагу 2 существует такое $m_0 \geqslant h+1$, что

$$b_{m_0}b_{m_0-1}\ldots b_{h+1}\Big(\sum_{j=1}^{h} b_h \ldots b_j s_j^1 - b_h b_{h-1}\ldots b_1\Big)=0.$$

Это означает, однако, что $b_{m_0}b_{m_0-1}\ldots b_1 \in A$, а следовательно,

$$Rb_n \ldots b_1 \subsetneq A \text{ для } n \geqslant m_0.$$

„(3) $\Rightarrow$ (4)“: Пусть $0 \neq m \in {}_RM$. Нам надо показать, что Rm содержит простой подмодуль. Допустим противное. Тогда каждый ненулевой подмодуль модуля Rm содержит ненулевой собственный подмодуль. Значит, существует бесконечная цепь

$$Rm \underset{\neq}{\supsetneq} Rr_1m \underset{\neq}{\supsetneq} Rr_2r_1m \underset{\neq}{\supsetneq} \ldots.$$

Поэтому

$$R \underset{\neq}{\supsetneq} Rr_1 \underset{\neq}{\supsetneq} Rr_2r_1 \underset{\neq}{\supsetneq} \ldots,$$

в противоречие с условием обрыва убывающих цепей для циклических левых идеалов.

Докажем теперь, что R не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов. Пусть $e_1, e_2, e_3, \ldots$ — ненулевые ортогональные идемпотенты в R. Тогда, как мы сейчас покажем,

$$R \underset{\neq}{\supsetneq} R(1-e_1) \underset{\neq}{\supsetneq} R(1-e_1-e_2) \underset{\neq}{\supsetneq} \ldots$$

будет строго убывающей цепью циклических левых идеалов, в противоречие с предположением. В самом деле, поскольку

$$(1-e_1-e_2-\ldots-e_n)(1-e_1-e_2-\ldots-e_{n-1}) = 1-e_1-\ldots-e_n,$$

то

$$R(1-e_1-\ldots-e_{n-1}) \supsetneq R(1-e_1-\ldots-e_n);$$

допустив, что

$$(1-e_1-\ldots-e_{n-1}) = r(1-e_1-\ldots-e_n),$$

мы после умножения справа на e_n получили бы $e_n = 0$ ↯.

„(4) $\Rightarrow$ (5)“: Сначала докажем, что $\operatorname{rad}(R)$ t-нильпотентен слева. Для этого, в силу 11.5.7, достаточно показать, что для каждого левого R-модуля M

$$\mathfrak{r}_M(\operatorname{rad}(R)) \subsetneq^{*} M.$$

Но всегда

$$\operatorname{soc}({}_RM) \subsetneq \mathfrak{r}_M(\operatorname{rad}(R))$$

(ибо $\operatorname{rad}(R)\operatorname{soc}(M) \subsetneq \operatorname{rad}(\operatorname{soc}(M)) = 0$), а по предположению $\operatorname{soc}(M) \subsetneq^{*} M$.

Итак, $\mathrm{rad}(R)$ t-нильпотентен слева и, следовательно, является ниль-идеалом, поэтому из 11.5.3 следует, что $R/\mathrm{rad}(R)$ не может содержать бесконечного множества ортогональных идемпотентов.

Для дальнейших рассуждений заметим, что левые идеалы $R/\mathrm{rad}(R)$ — это в точности R-подмодули в ${}_R(R/\mathrm{rad}(R))$, так что каждый ненулевой левый идеал кольца $R/\mathrm{rad}(R)$ содержит простой левый идеал. Для краткости введем обозначение $T := R/\mathrm{rad}(R)$.

Утверждение. Каждый простой левый идеал $E \subsetneq {}_TT$ является прямым слагаемым в ${}_TT$.

Действительно, так как $\mathrm{rad}(R/\mathrm{rad}(R)) = \mathrm{rad}(T) = 0$, то E не косущественен в ${}_TT$; следовательно, существует такой подмодуль $A \subsetneq {}_TT$, что $E + A = {}_TT$. Поскольку E прост, то $E \cap A = 0$ (в противном случае $E \subsetneq A \Rightarrow A = T$); значит, $E \oplus A = {}_TT$.

Мы построим сейчас последовательность ортогональных идемпотентов, которая, как мы установили выше, должна обрываться после конечного числа шагов. Пусть $E_1 \subsetneq {}_TT$. Тогда найдется идемпотент e_1, такой что $E_1 = Te_1$ и

$$ {}_TT = E_1 \oplus A_1 \ (= Te_1 \oplus T(1 - e_1)).$$

Если $A_1 = 0$, то ${}_TT$ прост и всё доказано. Если $A_1 \neq 0$, то по предположению найдется простой левый идеал $E_2 \subsetneq A_1$. Пусть ${}_TT = E_2 \oplus U_2$. В силу закона модулярности имеем $A_1 = E_2 \oplus (A_1 \cap U_2)$. Полагая $A_2 := A_1 \cap U_2$, находим, что

$$ {}_TT = E_1 \oplus E_2 \oplus A_2.$$

Повторно применяя это рассуждение, получаем последовательность разложений

$$ {}_TT = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus A_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где

$$ A_{n-1} = E_n \oplus A_n, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Она обрывается, лишь если появится $A_n = 0$. Но тогда ${}_TT$ полупрост и доказательство закончено.

В силу 7.2.3 этой последовательности разложений отвечает последовательность ортогональных идемпотентов

$$ e_1, \ldots, e_n, a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где

$$ a_{n-1} = e_n + a_n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

(т. е. при разложении a_{n-1} в сумму идемпотентов e_n и a_n предыдущие ортогональные идемпотенты $e_1, \ldots, e_{n-1}$ не изменяются!). Как мы уже установили, последовательность $e_1, e_2, e_3, \ldots$ должна обрываться, поэтому обязательно встретится $a_n = 0$, а значит $A_n = Ta_n = 0$.

„(5) $\Rightarrow$ (1)“: В силу 11.3.2 и 11.5.3 кольцо R полусовершенно. Согласно 11.5.6, для каждого свободного правого R-модуля F_R

$$\operatorname{rad}(F_R) \subsetneq F_R.$$

Из 11.3.3 следует тогда, что каждый свободный правый R-модуль является полусовершенным. Но это означает, что R_R совершенно. Тем самым доказательство теоремы 11.6.3 полностью завершено. □

Кольца, описанные в этой теореме, интересны со многих точек зрения. В дальнейшем мы неоднократно будем возвращаться к ним. Заметим еще раз, что для каждого правого R-модуля над совершенным справа кольцом имеют силу все утверждения о полусовершенных модулях. В частности, любой проективный модуль над таким кольцом обладает разложением, описанным в 11.4.2 (однозначным в смысле теоремы Крулля—Ремака—Шмидта).

11.6.4. *Следствие.* *Для полусовершенного справа кольца R*
(a) *каждый нётеров левый R-модуль артинов;*
(b) *каждый артинов правый R-модуль нётеров;*
(c) *если модуль R_R нётеров, то он и артинов.*

Доказательство. (a) Пусть ${}_RM$ нётеров. Тогда любой его подмодуль и любой фактормодуль также нётеровы. Следовательно, цоколь любого фактормодуля M конечно-порожден. Так как, согласно 11.6.3(4), цоколь произвольного левого R-модуля является существенным подмодулем, то, в силу 9.4.4, ${}_RM$ артинов.

(b) Пусть M_R артинов и $U \subset M_R$. Тогда U артинов и, следовательно, $U/\operatorname{rad}(U)$ полупрост и артинов, а потому конечно-порожден. Так как R совершенно справа, то (по 11.1.7) $\operatorname{rad}(U) \subsetneq U$, откуда следует (по 9.4.1), что U конечно-порожден. Но это означает, что модуль M нётеров.

(c) Согласно 9.3.7, $\operatorname{rad}(R)$ нильпотентен. Поскольку, кроме того, кольцо $R/\operatorname{rad}(R)$ полупросто, наше утверждение вытекает из 9.3.11. □

11.7. Теорема Бьёрка

Согласно теореме 11.6.3 кольцо совершенно справа тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей для циклических левых идеалов. Естественно возникает вопрос, а не будет ли кольцо в этом случае удовлетворять также условию обрыва убывающих цепей для конечно-порожденных левых идеалов. Оказывается, что, действительно, так оно и будет. Это вытекает из следующей теоремы, принадлежащей Й.-Э. Бьёрку [32].

11.7.1. *Теорема.* *Пусть R — произвольное кольцо. Каждый R-модуль, удовлетворяющий условию обрыва убывающих цепей для циклических подмодулей, удовлетворяет этому условию также и для цепей конечно-порожденных подмодулей.*

Доказательство. Напомним, что условие обрыва убывающих цепей для циклических, соотв. для конечно-порожденных, подмодулей эквивалентно условию минимальности для циклических, соотв. для конечно-порожденных, подмодулей. Ради краткости обозначим условие обрыва убывающих цепей для циклических, соотв. для конечно-порожденных, подмодулей через (Ц), соотв. через (К). Доказательство проведем для правых R-модулей. Разобьем его на несколько шагов.

Шаг 1. Утверждение. В множестве подмодулей произвольного модуля, удовлетворяющих условию (К), существует максимальный элемент.

Доказательство проводится с помощью леммы Цорна. Пусть M — произвольный модуль и $\mathscr{E}$ — множество подмодулей в M, удовлетворяющих условию (К)[1]. Ясно, что $0 \in \mathscr{E}$. Упорядочим $\mathscr{E}$ по включению. Пусть $\mathscr{K} \neq \emptyset$ — цепь из $\mathscr{E}$. Тогда

$$V := \bigcup_{U \in \mathscr{K}} U$$

— верхняя грань для $\mathscr{K}$ в $\mathscr{E}$. Действительно, если $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, то (поскольку $\mathscr{K}$ — цепь) найдется $U \in \mathscr{K}$, для которого $v_1, v_2, \ldots, v_n \in U$. Следовательно, каждый конечно-порожденный подмодуль в V содержится уже в некотором $U \in \mathscr{K}$, и потому каждая убывающая цепь конечно-порожденных подмодулей в V содержится уже в некотором $U \in \mathscr{K}$. Значит, она обрывается. Таким образом, и в самом деле $V \in \mathscr{E}$.

По лемме Цорна в $\mathscr{E}$ существует максимальный подмодуль $A \subsetneq M$. Если $A = M$, то всё доказано. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что A — собственный подмодуль в M.

Шаг 2. Пусть теперь M_R — модуль, удовлетворяющий условию (Ц). Поскольку $A \subsetneq M$, то множество циклических подмодулей mR, $m \in M$, для которых $mR \not\subset A$, непусто. По условию в этом множестве найдется минимальный элемент y_0R.

Мы утверждаем, что $U_0 := A + y_0R$ удовлетворяет условию (К), в противоречие с максимальностью A.

Действительно, рассмотрим произвольную убывающую цепь

$$U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq U_3 \supsetneq \ldots$$

конечно-порожденных подмодулей в U_0. Если $U_i \subsetneq A$ для некоторого i, то по предположению относительно A эта цепь обры-

[1] $\mathscr{E}$ — от endlich erzeugte (конечно-порожденный). — *Прим. ред.*

вается. Поэтому допустим, что $U_i \not\subset A$ для всех $i=1, 2, \ldots$. Тогда в каждом U_i существует циклический подмодуль uR, такой что $uR \not\subset A$. По предположеиию и среди таких подмодулей, удовлетворяющих условию $uR \not\subset A$, найдется минимальный циклический подмодуль $y_iR \subset U_i$. Пусть для каждого $i=1, 2, \ldots$ зафиксирован такой элемент y_i.

Шаг 3. Утверждение. Если $U_i = A_i + y_iR$, где $A_i \subsetneq A$, то $U_i = A_i + y_{i-1}R$ для $i=0, 1, 2, \ldots$.

Поскольку $y_{i-1} \in U_{i-1} \subsetneq U_i$, то $y_{i-1} = a + y_ir$, где $a \in A$, $r \in R$. Из того что $y_{i-1} \notin A$, вытекает, что также $y_ir \notin A$ и, следовательно, $y_irR \not\subset A$. Так как y_iR — минимальный циклический подмодуль в U_i, удовлетворяющий условию $uR \not\subset A$, то $y_irR = y_iR$; следовательно, найдется $r' \in R$, для которого $y_irr' = y_i$. Тогда $y_{i-1}r' = ar' + y_irr' = ar' + y_i$, а значит $y_i = -ar' + y_{i-1}r'$, где $ar' \in A_i$. Учитывая, что $y_{i-1} \in U_i$, получаем $U_i = A_i + y_iR = A_i + y_{i-1}R$.

Шаг 4. Докажем по индукции, что

$$U_i = A_i + y_iR, \quad i=1, 2, 3, \ldots,$$

где

$$A \supsetneq A_i \supsetneq A_{i+1} \text{ и } A_i \text{ конечно-порождены.}$$

По условию каждый подмодуль U_{i-1}, $i=0, 1, 2, \ldots$, конечно-порожден; пусть $v_1, \ldots, v_n$ — система образующих для U_{i+1}. Пусть уже доказано, что $U_i = A_i + y_iR$, где $A_i \subsetneq A$. Тогда, в силу шага 3, $U_{i+1} \subsetneq U_1 = A_i + y_{i+1}R$. Следовательно, $v_j = a_j + y_{i+1}r_j$, где $a_j \in A_i$, $r_j \in R$. Отсюда $a_j = v_j - y_{i+1}r_j$ и, значит, $a_1, \ldots, a_n$, y_{i+1} — система образующих для U_{i+1}. Таким образом, можно взять $A_{i+1} := a_1R + \ldots + a_nR$. Для того чтобы начать индукцию, в нашем распоряжении имеется равенство $U_0 = A + y_0R$.

Шаг 5. Так как A удовлетворяет условию (К), то цепь

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq A_3 \supsetneq \ldots$$

обрывается. Следовательно, найдется n, для которого

$$A_n = A_{n+i}, \quad i=1, 2, 3, \ldots.$$

Тогда

$$U_n = A_n + y_{n-1}R = A_{n+1} + y_{n-1}R = U_{n+1},$$

и по индукции мы получаем, что $U_n = U_{n+i}$, $i=1, 2, 3, \ldots$. Значит, и цепь

$$U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq U_3 \supsetneq \ldots$$

обрывается. Тем самым утверждение, высказанное на шаге 2, доказано, и доказательство теоремы Бьёрка завершено. □

11.7.2. ***Следствие.*** *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(1) *R совершенно справа;*
(2) *каждый левый R-модуль удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей для конечно-порожденных подмодулей.*

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Каждая убывающая цепь циклических подмодулей данного модуля ${}_RM$ может быть записана в виде

$$Rm \supset Rr_1m \supset Rr_2r_1m \supset Rr_3r_2r_1m \supset \ldots.$$

Так как, согласно 11.6.3, ${}_RR$ удовлетворяет условию (Ц), то цепь

$$R \supset Rr_1 \supset Rr_2r_1 \supset Rr_3r_2r_1 \supset \ldots$$

стабилизируется, следовательно, и предыдущая цепь тоже стабилизируется. Таким образом, ${}_RM$ удовлетворяет условию (Ц), а потому, в силу 11.7.2, и условию (К).

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: По предположению ${}_RR$ удовлетворяет условию (К), а значит и (Ц); следовательно, в силу 11.6.3, имеет место (1). □

11.7.3. ***Следствие.*** *Если R — совершенное справа кольцо и B — двусторонний идеал в R, то факторкольцо R/B также совершенно справа.*

Доказательство. Согласно 11.7.2, ${}_R(R/B)$ удовлетворяет условию (Ц). Так как B — двусторонний идеал, то R/B является также левым R/B-модулем и подмодули в ${}_R(R/B)$ совпадают с подмодулями в ${}_{R/B}(R/B)$. Значит, и ${}_{R/B}(R/B)$ удовлетворяет условию (Ц). Поэтому, согласно 11.6.3, R/B совершенно справа. □

Очевидно, что в этом доказательстве использовалась не сама теорема 11.7.1, а лишь ее следствие 11.7.2, да и то для условия (Ц). Существенных приложений теоремы 11.7.1, в которых используется не только условие (Ц), но и условие (К), пока нет.

Упражнения

1. Пусть R — область целостности с полем частных K. Показать, что
a) если R не является полем, то R-модуль K не обладает проективной оболочкой;
b) если R нелокально и M_R неразложим в сумму, то M_R не обладает проективной оболочкой;
c) если R нелокально и M_R полусовершенен, то $M = 0$.

2. a) Доказать, что если A и $A \oplus B$ имеют проективные оболочки, то и B обладает проективной оболочкой.
b) Пусть R — область целостности, имеющая ровно n максимальных идеалов ($n \geqslant 2$). Показать, что
(1) R-модуль $M := R/\mathrm{rad}\,(R)$ полупрост и имеет 2^n подмодулей;
(2) лишь два подмодуля в M обладают проективной оболочкой.

3. Пусть R — локальное кольцо главных идеалов без делителей нуля, не являющееся полем, и $M = M_R$. Показать, что

a) M обладает проективной оболочкой тогда и только тогда, когда он представим в виде прямой суммы проективного и конечно-порожденного R-модулей.
b) M полусовершенен тогда и только тогда, когда он конечно-порожден.
(*Указание.* Поле частных счетно-порождено как R-модуль.)

4. a) Привести пример модуля с дополнениями M, имеющего подмодуль, не являющийся модулем с дополнениями.
b) Если $M = A + B$, где A и B — модули с дополнениями, то и сам M — модуль с дополнениями.
c) Если M конечно-порожден и любой максимальный подмодуль обладает а. д., то M — модуль с дополнениями.

5. (1) Показать, что для модуля M_R с $\operatorname{rad}(M) \neq M$ следующие условия эквивалентны:
a) M неразложим в сумму;
b) для каждого $X \subsetneq M$ фактормодуль M/X неразложим;
c) $\operatorname{rad}(M)$ — максимальный и косущественный подмодуль в M;
d) $\operatorname{rad}(M)$ — наибольший собственный подмодуль в M;
e) для каждого $m \in M$ либо $mR \subsetneq M$, либо $mR = M$.
(2) Пусть $M \neq 0$ — полусовершенный модуль и $\xi\colon P \to M$ — проективная оболочка. Доказать, что M удовлетворяет эквивалентным условиям из (1) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет эквивалентным условиям из 11.4.1.

6. (1) Показать, что проективный модуль P_R полусовершенен справа тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим двум условиям:
(i) каждый некосущественный подмодуль содержит ненулевое прямое слагаемое;
(ii) каждый подмодуль содержит максимальное прямое слагаемое.
(2) Показать, что конечно-порожденный модуль M со свойством (ii) удовлетворяет условию максимальности для прямых слагаемых.

7. Доказать, что для проективного модуля P_R следующие условия эквивалентны:
a) кольцо $S := \operatorname{End}(P_R)$ полусовершенно;
b) P полусовершенен и удовлетворяет условию максимальности для прямых слагаемых;
c) P полусовершенен и конечно-порожден.

8. (1) Показать, что для кольца R следующие условия эквивалентны:
a) каждый конечно-порожденный правый идеал обладает а. д. в R_R;
b) каждый циклический правый идеал обладает а. д. в R_R;
c) $\bar{R} = R/\operatorname{rad}(R)$ — регулярное кольцо и для каждого идемпотента $\bar{e} \in \bar{R}$ существует идемпотент $e \in R$, такой что $\bar{e} = e$.
(2) Если ${}_RR$ инъективно, то R удовлетворяет эквивалентным условиям из (1).
(3) Кольцо R полусовершенно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет эквивалентным условиям из (1) и не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов.

9. Показать, что всякий двусторонний идеал A кольца R, t-нильпотентный слева и справа и конечно-порожденный как левый или правый идеал, является нильпотентным.

10. Для данного кольца R рассмотрим левый R-модуль

$$K := (R_R)^\circ := \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Доказать следующие утверждения:
a) ${}_RK$ — инъективный кообразующий.
b) Правый идеал $A \subset R_R$ тогда и только тогда t-нильпотентен слева, когда $\mathrm{l}_{K^{\mathbf{N}}}(A) \subsetneq K^{\mathbf{N}}$.
c) Если $K^{\mathbf{N}}$ обладает существенным цоколем, то радикал кольца R t-нильпотентен слева. Привести пример, показывающий, что обратное неверно.

11. Пусть R — кольцо. Показать, что
a) радикал проективного модуля P_R косущественен тогда и только тогда, когда $P/\mathrm{rad}(P)$ обладает проективной оболочкой как правый R-модуль;
b) радикал кольца R тогда и только тогда t-нильпотентен, когда правый R-модуль $(R/\mathrm{rad}(R))^{(\mathbf{N})}$ обладает проективной оболочкой;
c) R совершенно справа тогда и только тогда, когда каждый полупростой правый R-модуль обладает проективной оболочкой.

12. Доказать, что если $R^{(\mathbf{N})}$ выделяется прямым слагаемым в $R^{\mathbf{N}}$ (как правом R-модуле), то R совершенно справа. (*Указание.* Пусть $Ra_1 \supset Ra_2 \supset \ldots$ — убывающая цепь циклических левых идеалов, $b_1 := a_1$, $b_{i+1}a_i = a_{i+1}$ и

$$z_k := (0, \ldots, 0, b_k, b_{k+1}b_k, b_{k+2}b_{k+1}b_k, \ldots) \in R^{\mathbf{N}},$$

где b_k стоит на k-м месте. Покажите, что
(1) $z_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots) + z_{k+1}a_k$ для всех $k \in \mathbf{N}$;
(2) если разложить $z_k = u_k + v_k \in R^{(\mathbf{N})} \oplus V = R^{\mathbf{N}}$, то $v_1 = v_{k+1}a_k$ для всех $k \in \mathbf{N}$;
(3) если координаты u_1, начиная с m-го места, равны нулю, то $Ra_m = Ra_{m+1} = \ldots$.)

13. Пусть K — поле, V — векторное пространство над K со счетным базисом $x_1, x_2, \ldots$ и $S := \mathrm{End}_K(V)$. Далее, пусть

$$V_0 := 0, \quad V_n := \sum_{i=1}^{n} x_i K, \quad n \geqslant 1.$$

Положим

$$N := \{f \in S \mid \dim(\mathrm{im}(f)) < \infty \wedge f(V_{n+1}) \subset V_n \text{ для всех } n \geqslant 0\}.$$

Доказать, что
(1) N — подгруппа в S, удовлетворяющая условию $N^2 \subset N$;
(2) N t-нильпотеитна слева, но не справа;
(3) если $A \subset S$ — подкольцо умножений на скаляр, то $R := A + N$ — подкольцо в S, для которого $\mathrm{rad}(R) = N$ и $R/\mathrm{rad}(R) \cong K$ (как кольца);
(4) R — локальное кольцо, которое совершенно справа, но не совершенно слева;
(5) $\mathrm{soc}(R_R) = 0$.
(*Указание.* Покажите вначале, что $\mathrm{l}_S(N) = 0$.)

14. Доказать, что кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов модуля $F_R = R^{(\mathbf{N})}$ регулярно. (*Указание.* Докажите вначале, что $\mathrm{End}(F_R)$ регулярно $\Rightarrow R$ совершенно справа, а затем воспользуйтесь тем фактом, что B из доказательства теоремы 11.6.3 является образом некоторого подходящего эндоморфизма модуля F.)

12. Кольца с полной дуальностью

12.1. Введение и формулировка основной теоремы

Кольцо R называется *кольцом с полной дуальностью*, если правые и левые R-модули обладают теми же свойствами дуальности, что и векторные пространства, т. е. наилучшими возможными свойствами дуальности. При этом конечномерным векторным пространствам соответствуют конечно-порожденные или конечно-копорожденные R-модули.

Возникает вопрос об описании колец с полной дуальностью. Этим вопросом впервые занимался Ж. Дьёдонне, решивший его для случая артиновых колец (1958 г.). Здесь мы рассмотрим его для случая произвольных колец. Для того чтобы можно было сформулировать ответ (см. 12.1.1), нужно предварительно ввести некоторые понятия.

Пусть R — произвольное кольцо. Напомним (см. 3.8.2), что под *дуальным* к данному модулю M_R понимается модуль

$$M^* := \mathrm{Hom}_R(M_R, R_R),$$

причем в соответствии с определением

$$(r\varphi)(m) := r\varphi(m), \quad r \in R, \ \varphi \in M^*, \ m \in M,$$

M^* является левым R-модулем. Если $M = {}_RM$ — левый R-модуль, то M^* будет правым R-модулем, в соответствии с определением

$$(\varphi r)(m) := \varphi(m) r, \quad \text{или} \quad (m)(\varphi r) := ((m)\varphi) r$$

(в зависимости от того, с какой стороны записываются гомоморфизмы — слева или справа от аргумента).

Для каждого $A \subseteq M_R$ определим *ортогональное дополнение* A° *к* A *в* M^* формулой

$$A^\circ := \{\varphi \mid \varphi \in M^* \wedge \varphi(A) = 0\}.$$

Как легко видеть, $A^\circ \subseteq {}_RM^*$.

Обратно, для каждого $X \subseteq {}_RM^*$ положим

$$X^\perp := \{m \mid m \in M \wedge \forall \xi \in X\, [\xi(m) = 0]\}.$$

Очевидно, $X^\perp \subseteq M_R$.

Для каждого модуля M_R существует гомоморфизм

$$\Phi_M\colon M_R \to M_R^{**},$$

определенный следующим образом:

$$\Phi_M(m)(\varphi) := \varphi(m), \quad m \in M,\ \varphi \in M^*.$$

В идеальном случае Φ_M — изоморфизм и тогда модуль M называется *рефлексивным* (см. 3.8.3). Как хорошо известно, каждое конечномерное векторное пространство рефлексивно.

Мы сформулируем сейчас основные результаты этой главы. Они будут служить нам путеводной нитью в последующих рассуждениях, в ходе которых мы шаг за шагом докажем эти результаты. В приводимой ниже формулировке под R-модулем понимаются как правые, так и левые R-модули.

12.1.1. ***Основная теорема.*** *Следующие свойства кольца R эквивалентны:*
(1) *каждый конечно-порожденный R-модуль рефлексивен;*
(2) *каждый циклический R-модуль рефлексивен;*
(3) *каждый конечно-копорожденный R-модуль рефлексивен;*
(4) *для каждого R-модуля M и каждого подмодуля A в M справедливо равенство $A = A^{\circ\perp}$;*
(5) *R_R и ${}_RR$ — кообразующие;*
(6) *R_R — кообразующий, а ${}_RR$ — инъективен;*
(7) *${}_RR$ — кообразующий, а R_R — инъективен;*
(8) *R_R и ${}_RR$ инъективны и для каждого простого R-модуля существует изоморфный ему идеал в R*[1].

12.1.2. ***Определение.*** *Кольцо, удовлетворяющее условиям* 12.1.1, *называется кольцом с полной дуальностью.*

12.1.3. ***Следствие.*** *Если кольцо R является кольцом с полной дуальностью, то оно полусовершенно и R_R, а также ${}_RR$ конечно-копорождены.*

В основной теореме условия (1) — (4) выражены в терминах, относящихся к дуальности, а в условиях (5) — (8) речь идет о свойстве быть кообразующим и свойстве инъективности.

Следствие означает, что в случае колец с полной дуальностью можно использовать все результаты о полусовершенных кольцах (из гл. 11) и о конечно-копорожденных модулях.

В дальнейших рассуждениях будут доказаны не только вспомогательные утверждения, используемые для получения указанных выше основных результатов, но и теоремы, представляющие самостоятельный интерес, а также результаты, которые нам понадобятся в следующей главе.

[1] Последнее свойство получило в литературе имя автора.

12.2. Свойства дуальности

Пусть R — произвольное кольцо и $f\colon A_R \to M_R$ — произвольный R-гомоморфизм. Определим отображение

$$f^*\colon {}_RM^* \to {}_RA^*$$

формулой

$$f^*(\varphi) := \varphi f, \qquad \varphi \in M^*.$$

Поскольку $f^*(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2) = (r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2)f = r_1(\varphi_1 f) + r_2(\varphi_2 f) = r_1 f^*(\varphi_1) + r_2 f^*(\varphi_2)$, то f^* является R-гомоморфизмом; этот гомоморфизм называется *дуальным* к f. Некоторые простые свойства дуальных гомоморфизмов собраны в следующем утверждении.

12.2.1. *Утверждение.* *Пусть* $f\colon A_R \to M_R$, $f_0\colon M_R \to A_R$ *и* $g\colon M_R \to W_R$ *— гомоморфизмы.*
(a) $(gf)^* = f^*g^*$, $f_0 f = 1_A \Rightarrow f^* f_0^* = 1_A^* = 1_{A^*}$.
(b) f *— эпиморфизм* $\Rightarrow f^*$ *— мономорфизм.*
(c) *Если* R_R *инъективен, то* f *— мономорфизм* $\Rightarrow f^*$ *— эпиморфизм.*
(d) *Если* R_R *— кообразующий, то* f^* *— мономорфизм* $\Rightarrow f$ *— эпиморфизм,* f^* *— эпиморфизм* $\Rightarrow f$ *— мономорфизм.*
(e) *Если*

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0$$

— расщепляющая точная последовательность (см. 3.9.1), *то*

$$0 \to W^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} A^* \to 0$$

— также расщепляющая точная последовательность.
(f) *Если* R_R *инъективен, то для всякой точной последовательности*

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0$$

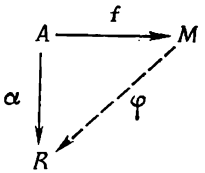
последовательность

$$0 \to W^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f} A^* \to 0$$

также точна.

Доказательство. (a) $(gf)^*(\omega) = \omega(gf) = (\omega g)f = f^*(\omega g) = f^*(g^*(\omega)) = (f^*g^*)\omega \Rightarrow (gf)^* = f^*g^*$.
$1_A^*(\alpha) = \alpha 1_A = \alpha = 1_{A^*}(\alpha) \Rightarrow 1_A^* = 1_{A^*} \Rightarrow (f_0 f)^* = f^* f_0^* = 1_A^* = 1_{A^*}$.
(b) Из $f^*(\varphi) = \varphi f = 0$ следует, что $\varphi(f(m)) = 0$ для всех $m \in M$. Если f — эпиморфизм, то $\varphi(M) = 0$ и, следовательно, $\varphi = 0$.

(c) Пусть дано $\alpha \in A^*$. Поскольку R_R инъективен, существует такое $\varphi \in M^*$, что $\alpha = \varphi f = f^*(\varphi)$:



(d) Пусть f^* — мономорфизм, т. е. из $f^*(\varphi) = \varphi f = 0$ следует, что $\varphi = 0$. Предположим, что f не эпиморфизм. Так как R_R — кообразующий, то существует $\tau \in (M/\mathrm{im}\,(f))^*$, $\tau \neq 0$. Пусть ν: $M \to M/\mathrm{im}\,(f)$ — канонический эпиморфизм. Тогда $\varphi := \tau\nu \in M^*$, $\varphi \neq 0$ и $\varphi(\mathrm{im}\,(f)) = 0$; значит $\varphi(f) = 0$, а потому $f^*(\varphi) = 0$, т. е. $\varphi = 0$ ↯.

Пусть f^* — эпиморфизм. Предположим, что f не является мономорфизмом. Так как R_R — кообразующий, то существует такое $\alpha \in A^*$, что $\alpha(\ker(f)) \neq 0$. Если $\varphi \in M^*$, где $\alpha = f^*(\varphi) = \varphi(f)$, то $0 \neq \alpha(\ker(f)) = \varphi(f(\ker(f))) = 0$ ↯.

(e) Так как последовательность является расщепляющей, то (согласно 3.9.3) существуют такие гомоморфизмы f_0: $M \to A$, g_0: $W \to M$, что $f_0 f = 1_A$, $g g_0 = 1_W$. Отсюда в силу (a) вытекает, что

$$1_{A^*} = f^* f_0^*, \quad 1_{W^*} = g_0^* g^*.$$

Следовательно, f^* — эпиморфизм, а g^* — мономорфизм и в последовательности

$$0 \to W^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} A^* \to 0$$

и $\mathrm{im}\,(g^*)$, и $\ker(f^*)$ — прямые слагаемые в M^*.

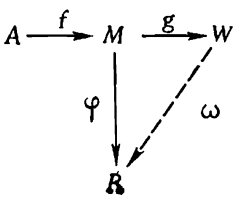
Осталось доказать точность в месте M^*; здесь нам понадобится только точность исходной последовательности, а не то, что она является расщепляющей. Из $gf = 0$ следует, что

$$(f^* g^*)(\omega) = \omega g f = 0 \text{ для всех } \omega \in W^*;$$

стало быть, $\mathrm{im}\,(g^*) \subseteq \ker(f^*)$. Пусть $f^*(\varphi) = \varphi f = 0$, т. е. $\varphi(f(m)) = 0$ для всех $m \in M$. Тогда

$$\ker(g) = \mathrm{im}\,(f) \subseteq \ker(\varphi).$$

Согласно 3.4.7, в диаграмме



существует $\omega \in W^*$, такое что $\varphi = \omega g = g^*(\omega)$. Следовательно,

$$\ker(f^*) \subseteq \operatorname{im}(g^*).$$

(f) В силу (b), g^* — мономорфизм, а в силу (c), f^* — эпиморфизм. Как и в предыдущем пункте, отсюда вытекает, что

$$\operatorname{im}(g^*) = \ker(f^*). \qquad \square$$

Аналогичные утверждения, разумеется, имеют место при перестановке сторон.

Применим теперь предыдущие рассуждения к гомоморфизму

$$\Phi_M\colon M_R \to M_R^{**}.$$

Мы получим гомоморфизм

$$\Phi_M^*\colon {}_RM^{***} \to {}_RM^*, \text{ где } \Phi_M^*(\tau) = \tau\Phi_M, \quad \tau \in M^{***}.$$

Далее, рассмотрим гомоморфизм

$$\Phi_{M^*}\colon {}_RM^* \to {}_RM^{***}.$$

12.2.2. *Предложение.* *Пусть R — произвольное кольцо и M_R — произвольный правый R-модуль.*

(a) $\Phi_M^*\Phi_{M^*} = 1_{M^*}$,

и, следовательно,

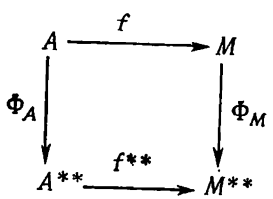
Φ_{M^*} *— мономорфизм,*

Φ_M^* *— эпиморфизм,*

${}_RM^{***} = \operatorname{im}(\Phi_{M^*}) \oplus \ker(\Phi_M^*)$.

(b) *Если Φ_M — эпиморфизм, то Φ_{M^*} — изоморфизм, т. е. модуль M^* рефлексивен.*

(c) *Для произвольного гомоморфизма $f\colon A_R \to M_R$ диаграмма*



коммутативна.

(d) *R_R является кообразующим тогда и только тогда, когда Φ_M для каждого модуля M_R — мономорфизм.*

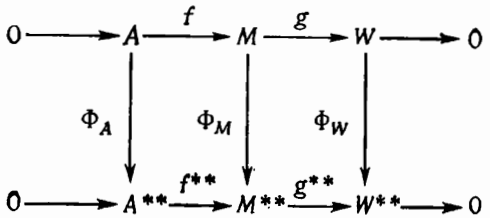
(e) *Пусть R_R и ${}_RR$ инъективны. Тогда для каждой точной последовательности*

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0.$$

последовательность

$$0 \to A^{**} \xrightarrow{f^{**}} M^{**} \xrightarrow{g^{**}} W^{**} \to 0$$

также точна и диаграмма



коммутативна.

Доказательство. (a) Пусть $\varphi \in M^*$. Тогда

$$(\Phi_M^* \Phi_{M^*})(\varphi) = \Phi_M^*(\Phi_{M^*}(\varphi)) = \Phi_{M^*}(\varphi)\,\Phi_M.$$

Поэтому для $m \in M$

$$(\Phi_{M^*}(\varphi)\,\Phi_M)(m) = \Phi_{M^*}(\varphi)(\Phi_M(m)) = \Phi_M(m)(\varphi) = \varphi(m).$$

Следовательно, $(\Phi_M^* \Phi_{M^*})(\varphi) = \varphi$, а значит $\Phi_M^* \Phi_{M^*} = 1_{M^*}$.

(b) Если Φ_M — эпиморфизм, то, как следует из 12.2.1 (b), Φ_M^* — мономорфизм. Тогда, в силу (a), Φ_M^* — изоморфизм и Φ_{M^*} — обратный ему изоморфизм.

(c) Для $a \in A$ и $\varphi \in M^*$

$$\begin{aligned}((f^{**}\Phi_A)(a))(\varphi) &= (\Phi_A(a) f^*)(\varphi)\\ &= \Phi_A(a)(f^*(\varphi)) = \Phi_A(a)(\varphi f)\\ &= \varphi(f(a)) = \Phi_M(f(a))(\varphi)\\ &= ((\Phi_M(f))(a))(\varphi).\end{aligned}$$

Следовательно, $f^{**}\Phi_A = \Phi_M f$.

(d) Из $\Phi_M(m) = 0$ вытекает, что $\varphi(m) = 0$ для всех $\varphi \in M^*$ и, значит,

$$m \in \bigcap_{\varphi \in M^*} \ker(\varphi).$$

Если R_R — кообразующий, то

$$\bigcap_{\varphi \in M^*} \ker(\varphi) = 0,$$

поэтому $m = 0$. Обратное очевидно.

(e) Из 12.2.1 (e) следует точность последовательности

$$0 \to A^{**} \xrightarrow{f^{**}} M^{**} \xrightarrow{g^{**}} W^{**} \to 0,$$

а из 12.2.2 (c) — коммутативность указанной диаграммы. □

Из проведенных рассуждений довольно быстро получается следующая теорема, которая интересна сама по себе и, кроме того, в дальнейшем будет иметь важные применения.

12.2.3. *Теорема.* (a) *Пусть R — произвольное кольцо. Если*

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0$$

— расщепляющая точная последовательность правых (или левых) R-модулей, то модуль M рефлексивен тогда и только тогда, когда A и W рефлексивны.
(b) *Пусть R_R и ${}_RR$ — инъективные кообразующие. Если*

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \to 0$$

— точная последовательность правых (или левых) R-модулей, то модуль M рефлексивен тогда и только тогда, когда A и W рефлексивны.

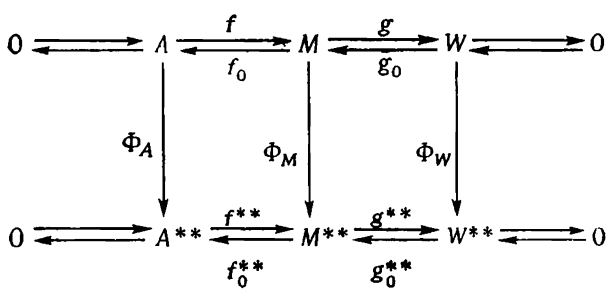
Доказательство. (a) По предположению и по 3.9.3 (b) существуют гомоморфизмы f_0 и g_0, такие что

$$f_0 f = 1_A, \quad g g_0 = 1_W$$

и последовательность

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{f_0} M \xleftarrow{g_0} W \leftarrow 0$$

является точной и расщепляющей. Тогда, согласно 12.2.1(e), диаграмма



имеет расщепляющие точные строки, и в силу 12.2.2(c) она коммутативна.

Пусть модуль M рефлексивен. Так как тогда Φ_M — изоморфизм и f — мономорфизм, то, в силу равенства $\Phi_M f = f^{**}\Phi_A$, Φ_A — также мономорфизм. Аналогично проверяется, что и Φ_W — мономорфизм. Из 3.9.2 следует теперь, что Φ_A и Φ_W — изоморфизмы.

Обратно, пусть теперь A и W рефлексивны. Для того чтобы снова можно было применить 3.9.2, нужно показать, что Φ_M —

мономорфизм. Пусть $m \in \ker(\Phi_M)$. Из того что

$$g^{**}\Phi_M = \Phi_W g$$

и Φ_W — изоморфизм, следует, что

$$m \in \ker(g) = \operatorname{im}(f).$$

Значит, существует такое $a \in A$, что

$$f(a) = m.$$

Поэтому

$$0 = \Phi_M(m) = \Phi_M(f(a)) = (\Phi_M f)(a) = (f^{**}\Phi_A)(a).$$

Так как f^{**} и Φ_A — мономорфизмы, то $a = 0$, следовательно, $m = 0$. Этим показано, что Φ_M — мономорфизм. Наше утверждение вытекает теперь из 3.9.2.

(b) По предположению имеет место 12.2.2(e). Согласно 12.2.2(d), в диаграмме из утверждения 12.2.2(e) гомоморфизмы Φ_A, Φ_M и Φ_W суть мономорфизмы. Поэтому наше утверждение следует из 3.9.2. □

12.2.4. *Следствие.* *Пусть R — произвольное кольцо.*
(a) *Если $A \cong M$, то M рефлексивен тогда и только тогда, когда A рефлексивен.*
(b) *Если $M_R = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, то M рефлексивен тогда и только тогда, когда все M_i, $i = 1, \ldots, n$, рефлексивны.*
(c) *Каждый конечно-порожденный проективный R-модуль рефлексивен.*

Доказательство. (a) Пусть дан изоморфизм $f\colon A_R \to M_R$. Тогда

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \to 0 \to 0$$

— точная расщепляющая последовательность, и наше утверждение следует из 12.2.3(a).

(b) Достаточно доказать утверждение для $n = 2$, поскольку тогда по индукции оно будет справедливо для любого n. Для случая же $n = 2$ оно получается из 12.2.3(a), если рассмотреть точную расщепляющую последовательность

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\iota} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi} M_2 \to 0,$$

где ι — включение M_1 в M, а π — проекция M на M_2.

(c) Так как R_R рефлексивен, то согласно (b) каждый конечно-порожденный свободный R-модуль рефлексивен. (Это можно доказать и непосредственно, так же, как для векторных пространств, с применением дуальных базисов.) Следовательно, каждый конечно-порожденный проективный модуль рефлексивен как прямое слагаемое конечно-порожденного свободного модуля. □

12.2.5. *Следствие.* *Пусть M — произвольный R-модуль.*
(a) *Если M рефлексивен, то все модули M^*, M^{**}, M^{***}, ... также рефлексивны.*
(b) *Если модуль M^* не рефлексивен, то и все модули M^{**}, M^{***}, ... не рефлексивны.*

Доказательство. (a) Следует из 12.2.2 (b).

(b) Согласно (a), достаточно доказать, что если M^{***} рефлексивен, то и M^* рефлексивен. В силу 12.2.2(a), M^* изоморфен прямому слагаемому $\operatorname{im}(\Phi_{M^*})$ в M^{***}. Поэтому из 12.2.4 следует, что если M^{***} рефлексивен, то и M^* рефлексивен. □

В заключение этих рассмотрений, посвященных свойствам дуальности, докажем еще одно утверждение, в котором идет речь о рефлексивности циклических модулей.

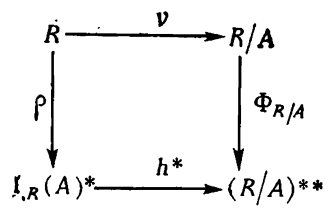
12.2.6. *Предложение.* *Пусть $A \subset R_R$.*
(a) *Отображение*

$$h\colon {}_R(R/A)^* \ni \varphi \longmapsto \varphi(\bar{1}) \in {}_R(\mathfrak{l}_R(A)),$$

где $\bar{1} := 1 + A \in R/A$, является изоморфизмом.
(b) *$\Phi_{R/A}$ — мономорфизм $\Leftrightarrow \mathfrak{r}_R\mathfrak{l}_R(A) = A$.*
(c) *Отображение $\rho\colon R_R \to \mathfrak{l}_R(A)^*$, определенное формулой*

$$\rho(r)(x) := xr, \quad r \in R,\ x \in \mathfrak{l}_R(A),$$

является гомоморфизмом, для которого диаграмма



коммутативна (здесь h — изоморфизм из (a)).
(d) *$\Phi_{R/A}$ — эпиморфизм $\Leftrightarrow \rho$ — эпиморфизм.*

Доказательство. (a) То что h есть R-гомоморфизм, очевидно. Пусть $h(\varphi) = \varphi(\bar{1}) = 0$. Тогда

$$\varphi(\bar{r}) = \varphi(\bar{1}r) = \varphi(\bar{1})r = 0, \quad r \in R;$$

следовательно, $\varphi = 0$, т. е. h — мономорфизм. Пусть $x \in \mathfrak{l}_R(A)$. Правилом

$$\varphi\colon R/A \ni \bar{r} \longmapsto xr \in R$$

определяется $\varphi \in (R/A)^*$, для которого $h(\varphi) = \varphi(\bar{1}) = x$. Следовательно, h является и эпиморфизмом.

(b) Если $\bar{r} \in R/A$, то $\bar{r} \in \ker(\Phi_{R/A}) \Leftrightarrow \Phi_{R/A}(\bar{r})(\varphi) = \varphi(\bar{r}) = \varphi(\bar{1})r = 0$ для всех $\varphi \in (R/A)^* \Leftrightarrow r \in \mathrm{r}_R\mathrm{l}_R(A)$ (в силу (a)), откуда и следует наше утверждение.

(c) Для $r \in R$ и $\varphi \in (R/A)^*$ имеем $(h^*\rho(r))(\varphi) = (\rho(r)h)(\varphi) = \rho(r)(\varphi(\bar{1})) = \varphi(\bar{1})r$, а также $(\Phi_{R/A}\nu(r))(\varphi) = \Phi_{R/A}(\bar{r})(\varphi) = \varphi(\bar{r}) = \varphi(\bar{1})r$, следовательно, $h^*\rho = \Phi_{R/A}\nu$.

(d) Так как h^* — изоморфизм, а ν — эпиморфизм, наше утверждение вытекает из равенства $h^*\rho = \Phi_{R/A}\nu$. □

После того как мы познакомились со свойствами дуальности, рассмотрим другие свойства, применяемые при доказательстве основной теоремы; некоторые из них используются и в следующей главе.

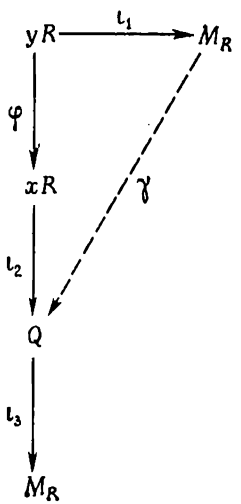
12.3. Замена сторон

Мы займемся сейчас вопросом о том, каким образом определенные свойства M_R можно перенести на ${}_SM$, где

$$S := \mathrm{End}(M_R).$$

12.3.1. ***Предложение.*** *Пусть R — произвольное кольцо, $x, y \in M_R$, $S := \mathrm{End}(M_R)$, $yR \cong xR$, и пусть xR содержится в некотором инъективном подмодуле модуля M_R. Тогда Sx изоморфен как S-модуль некоторому подмодулю в Sy. Если Sy прост, то $Sy \cong Sx$.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon yR \to xR$ — изоморфизм, существующий по предположению. Далее, пусть $xR \subseteq Q_R \subseteq M_R$, где модуль Q_R инъективен. Тогда имеет место коммутативная диаграмма



где ι_1, ι_2, ι_3 — соответствующие включения. Для $s_0 := \iota_3\gamma \in S$ имеем.

$$\varphi(yr) = s_0 yr, \qquad r \in R.$$

Пусть элементы r_0, $r_1 \in R$ определены так, что

$$\varphi(y) = s_0 y = xr_0, \quad \varphi(yr_1) = s_0 yr_1 = x.$$

Тогда

$$\hat{\varphi}\colon\ Sx \ni sx \longmapsto sxr_0 = ss_0 y \in Sy$$

является S-гомоморфизмом.

Предположим теперь, что $sxr_0 = 0$. Тогда

$$sxr_0 r_1 = ss_0 yr_1 = sx = 0;$$

следовательно, $\hat{\varphi}$ — мономорфизм. Поскольку $xR \cong yR$, то либо $x = y = 0$, либо $x \neq 0 \wedge y \neq 0$; поэтому из простоты Sy следует изоморфизм $Sy \cong Sx$. □

12.3.2. ***Предложение.*** *Пусть* $S := \mathrm{End}(M_R)$, $x \in M$, xR *прост и содержится в некотором инъективном подмодуле* Q *модуля* M_R. *Тогда* Sx *— простой подмодуль в* ${}_SM$.

Доказательство. Мы покажем, что для произвольного $s_0 x \neq 0$, $s_0 \in S$, выполняется равенство

$$Ss_0 x = Sx.$$

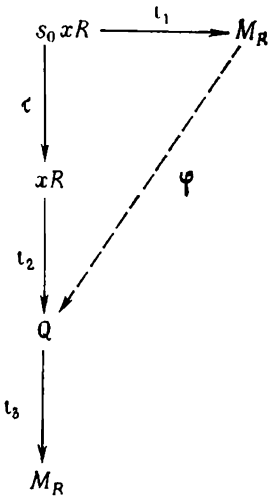
Так как xR прост и $s_0 x \neq 0$, то $s_0 xR$ также прост и отображение

$$xR \ni xr \longmapsto s_0 xr \in s_0 xR$$

есть изоморфизм. Пусть

$$\tau\colon\ s_0 xR \to xR$$

— обратный изоморфизм. Существует такой гомоморфизм φ, что диаграмма



коммутативна; здесь ι_1, ι_2, ι_3 — соответствующие включения. Положим $t_0 := \iota_3\varphi$. Ясно, что $t_0 \in S$ и $t_0 s_0 x = \tau s_0 x = x$; следовательно $Ss_0 x = Sx$, что и требовалось доказать.

12.4. Свойства аннуляторов

В этом параграфе мы изучим связь между свойствами кольца R и свойствами соответствующих аннуляторов. Вместо $\mathrm{l}_R(A)$, соотв. $\mathrm{r}_R(A)$, мы будем для краткости писать просто $\mathrm{l}(A)$, соотв. $\mathrm{r}(A)$. С одним свойством аннуляторов мы уже познакомились в 12.2.6, где речь шла о характеризации рефлексивности циклических модулей.

12.4.1. ***Предложение.*** *Если C_R — кообразующий, то для каждого $A \subset_{\oplus} R_R$*

$$\mathrm{rl}_C(A) = A.$$

Доказательство. Из определения аннуляторов следует, что

$$A \subset_{\oplus} \mathrm{rl}_C(A).$$

Пусть $r \in R$, $r \notin A$. По предположению существует гомоморфизм τ: $(R/A)_R \to C_R$, для которого $\tau(r + A) \neq 0$. Если ν: $R \to R/A$ — канонический эпиморфизм, то $0 = \tau\nu(A) = \tau\nu(1)\,A$. Следовательно $\tau\nu(1) \in \mathrm{l}_C(A)$. Далее, $\tau\nu(1)\,r = \tau\nu(r) = \tau(r + A) \neq 0$, так что $r \notin \mathrm{rl}_C(A)$. Таким образом,

$$\mathrm{rl}_C(A) \subset_{\oplus} A,$$

откуда и вытекает наше утверждение.

В большинстве случаев это предложение используется для случая $C_R = R_R$, и тогда пишут кратко $\mathrm{rl}(A) = A$.

12.4.2. *Теорема.* (a) *Если* R_R *инъективен, то*
(1) *для произвольных* $A \subseteq R_R$, $B \subseteq R_R$

$$\mathrm{l}(A \cap B) = \mathrm{l}(A) + \mathrm{l}(B);$$

(2) *для произвольного конечно-порожденного* $C \subseteq {}_RR$

$$\mathrm{lr}(C) = C.$$

(b) *Если для* R_R *выполнены условия* (1) *и* (2) *из* (a), *то каждый гомоморфизм любого конечно-порожденного правого идеала кольца* R *в* R *получается умножением слева на некоторый элемент из* R.

Доказательство. (a) Очевидно, что всегда

$$\mathrm{l}(A) + \mathrm{l}(B) \subseteq \mathrm{l}(A \cap B).$$

Обратно, пусть $x \in \mathrm{l}(A \cap B)$. Тогда отображение

$$\varphi\colon\ A + B \ni a + b \longmapsto xb \in R$$

есть R-гомоморфизм (ибо $a + b = a_1 + b_1 \Rightarrow a - a_1 = b_1 - b \in A \cap B \Rightarrow xb_1 = x(a - a_1) + xb = xb$). Так как R_R инъективен, то существует такое $y \in R$, что $\varphi(a + b) = y(a + b) = xb$. В частности, $0 = \varphi(a) = ya$ для всех $a \in A$, и следовательно, $y \in \mathrm{l}(A)$. Далее, для всех $b \in B$ имеем $\varphi(b) = yb = xb$, а значит $z := x - y \in \mathrm{l}(B)$. Отсюда вытекает, что $x = y + z \in \mathrm{l}(A) + \mathrm{l}(B)$. Тем самым (1) доказано.

Перейдем к (2). Пусть

$$C = Rc_1 + \ldots + Rc_n \subseteq {}_RR.$$

Тривиальным образом проверяется, что

$$\mathrm{r}\left(\sum_{i=1}^{n} Rc_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{r}(Rc_i).$$

Последовательно применяя (1), получаем

$$\mathrm{lr}\left(\sum_{i=1}^{n} Rc_i\right) = \mathrm{l}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{r}(Rc_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{lr}(Rc_i).$$

Чтобы установить (2), нужно показать еще, что

$$\mathrm{lr}(Rc) = Rc, \qquad c \in R.$$

Очевидно, что $Rc \subseteq \mathrm{lr}(Rc)$. Пусть теперь $b \in \mathrm{lr}(Rc)$. Тогда $\mathrm{r}(c) \subseteq \mathrm{r}(b)$ и потому

$$cR \ni cr \longmapsto br \in R$$

является гомоморфизмом, который в силу инъективности R_R задается умножением слева на некоторый элемент $a \in R$. В частности, $ac = b$, т. е. $b \in Rc$. Таким образом, $\mathfrak{l}\mathfrak{r}(Rc) \subseteq Rc$, что и требовалось доказать.

(b) Проведем индукцию по числу n порождающих элементов конечно-порожденного правого идеала.

$n = 1$: Пусть φ: $aR \to R_R$ — гомоморфизм. Так как из $ar = 0$ следует, что также $\varphi(ar) = 0 = \varphi(a)r$, то $\mathfrak{r}(a) \subseteq \mathfrak{r}(\varphi(a))$. Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{r}(Ra) \subseteq \mathfrak{r}(R\varphi(a)),$$

и согласно (2) получаем

$$R\varphi(a) = \mathfrak{l}\mathfrak{r}(R\varphi(a)) \subseteq \mathfrak{l}\mathfrak{r}(Ra) = Ra.$$

Следовательно, существует такое $c \in R$, что $\varphi(a) = ca$ и потому

$$\varphi(ar) = \varphi(a)r = car,$$

что и требовалось доказать.

Переход от n к $n+1$: Пусть

$$\varphi\colon \sum_{i=1}^{n+1} a_i R \to R_R$$

— гомоморфизм. По предположению индукции существуют c_1, $c_2 \in R$, такие что

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right) = c_1 \sum_{i=1}^{n} a_i r_i, \quad \varphi(a_{n+1} r_{n+1}) = c_2 a_{n+1} r_{n+1}.$$

В силу (1) имеем

$$c_1 - c_2 \in \mathfrak{l}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i R \cap a_{n+1} R\right) = \mathfrak{l}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i R\right) + \mathfrak{l}(a_{n+1} R),$$

т. е. существуют такие

$$s \in \mathfrak{l}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i R\right), \qquad t \in \mathfrak{l}(a_{n+1} R),$$

что $c_1 - c_2 = s - t$. Положим $c := c_1 - s = c_2 - t$. Тогда

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i r_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right) + \varphi(a_{n+1} r_{n+1})$$

$$= (c_1 - s) \sum_{i=1}^{n} a_i r_i + (c_2 - t)\, a_{n+1} r_{n+1} = c \sum_{i=1}^{n+1} a_i r_i,$$

так что φ задается умножением слева на элемент c. Тем самым (b) также доказано. □

12.4.3. ***Следствие.*** *Если R_R нётеров и выполнены условия* (1) *и* (2) *из* 12.4.2, *то R_R инъективен.*

Доказательство. Так как R_R нётеров, то каждый правый идеал в R конечно-порожден. Поэтому наше утверждение следует из 12.4.2(b) и критерия Бэра. □

12.5. Инъективность и свойство кольца быть кообразующим

Для R_R свойство быть кообразующим и инъективность, — вообще говоря, независимые свойства (см. упр. 13 и 14). Чтобы имела место их эквивалентность, надо налагать на кольцо некоторые дополнительные условия.

В качестве подготовки к соответствующей теореме докажем следующее.

12.5.1. ***Предложение.*** *Пусть R — произвольное кольцо.*
(a) *Если P_1, P_2 — проективные правые R-модули с косущественными радикалами, то*

$$P_1 \cong P_2 \Leftrightarrow P_1/\mathrm{rad}\,(P_1) \cong P_2/\mathrm{rad}\,(P_2).$$

(b) *Если Q_1, Q_2 — инъективные правые R-модули с существенными цоколями, то*

$$Q_1 \cong Q_2 \Leftrightarrow \mathrm{soc}\,(Q_1) \cong \mathrm{soc}\,(Q_2).$$

Доказательство. Пусть $\varphi\colon P_1 \to P_2$ — изоморфизм. Поскольку

$$\varphi(\mathrm{rad}\,(P_1)) = \mathrm{rad}\,(P_2),$$

то φ индуцирует изоморфизм

$$\hat{\varphi}\colon P_1/\mathrm{rad}\,(P_1) \ni p_1 + \mathrm{rad}\,(P_1) \longmapsto \varphi(p_1) + \mathrm{rad}\,(P_2) \in P_2/\mathrm{rad}\,(P_2).$$

Обратное следует из 5.6.3, так как $P_1 \to P_1/\mathrm{rad}\,(P_1)$ и $P_2 \to P_2/\mathrm{rad}\,(P_2)$ являются проективными оболочками.

(b) Доказательство дуально к доказательству утверждения (a). □

Мы подошли теперь к теореме, которая представляет самостоятельный интерес. Ее можно рассматривать как ослабленный односторонний вариант сформулированной в начале главы основной теоремы.

12.5.2. ***Теорема.*** *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(1) *R_R — кообразующий и существует лишь конечное число классов изоморфных простых правых R-модулей;*
(2) *R_R — кообразующий и каждый простой левый R-модуль изоморфен некоторому левому идеалу R;*

(3) *каждый модуль* M_R, *для которого* $\mathrm{r}_R(M)=0$ (*т. е. каждый точный модуль* M_R), *является образующим*;
(4) *каждый кообразующий в* $\mathcal{M}_R$ *является образующим*;
(5) R_R *инъективен и конечно-копорожден*;
(6) R_R *инъективен, полусовершенен и имеет существенный цоколь.*

Замечание. Кольцо R, удовлетворяющее условиям этой теоремы, в литературе называется *правым* PF-*кольцом*. Г. Адзумая поставил нерешенный до сих пор вопрос, является ли всякое правое PF-кольцо левым PF-кольцом.

Доказательство Мы покажем, что $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(5)\Rightarrow$ $\Rightarrow(6)$, $(6)\Rightarrow(2)\wedge(1)$, $(1)\Rightarrow(6)$.

„$(2)\Rightarrow(3)$“: Так как R_R — образующий, то в силу 3.3.2 достаточно показать, что

$$T:=\sum_{\varphi\in \mathrm{Hom}_R(M,\ R)} \mathrm{im}\,(\varphi)=R.$$

Так как $M^*=\mathrm{Hom}_R(M,\ R)$ — левый R-модуль, то T — левый идеал. Пусть $z\in \mathrm{r}_R(T)$. Тогда для каждого $m\in M$ и каждого $\varphi\in M^*$

$$\varphi(mz)=\varphi(m)\,z=0,$$

следовательно,

$$Mz\subset \bigcap_{\varphi\in M^*}\ker(\varphi).$$

Так как R_R — кообразующий, то

$$\bigcap_{\varphi\in M^*}\ker(\varphi)=0;$$

значит, $Mz=0$. Поскольку по предположению $\mathrm{r}_R(M)=0$, то $z=0$. Таким образом, $\mathrm{r}_R(T)=0$.

Предположим теперь, что $T\neq R$. Тогда найдется максимальный левый идеал $A\subsetneq_R R$, такой что $T\subsetneq A\subsetneq R$. По предположению существуют $Rx\subsetneq_R R$ и изоморфизм

$$\sigma\colon\ R/A\cong Rx.$$

Поэтому для всех $a\in A$ имеем

$$0=\sigma(0)=\sigma(\bar a)=a\sigma(\bar 1),$$

следовательно,

$$0\neq\sigma(\bar 1)\in \mathrm{r}_R(A)\subsetneq \mathrm{r}_R(T)=0\ \lightning.$$

Итак, $T=R$, что и требовалось показать.

„(3) $\Rightarrow$ (4)“: Из 12.4.1 при $A=0$ следует, что каждый кообразующий точен, а значит, в силу (3), является образующим.

„(4) $\Rightarrow$ (5)“: Минимальный в смысле 5.8.5 (b) кообразующий

$$C_0 = \coprod_{j \in J} Q_j$$

является по условию образующим. Поэтому, согласно 5.8.2, R_R изоморфен прямому слагаемому некоторой прямой суммы экземпляров C_0, а значит, по определению C_0, и некоторой прямой суммы экземпляров Q_j, $j \in J$. Так как $R = 1R$ — циклический модуль, то он изоморфен прямому слагаемому некоторой конечной прямой суммы

$$Q := \coprod_{i=1}^{n} Q_i, \text{ где } Q_i = \mathrm{I}(E_i) \text{ (см. 5.8.5).}$$

Поскольку модуль Q инъективен, то и R_R инъективен. В силу 9.4.3, Q конечно-копорожден, но тогда и R_R конечно-копорожден как изоморфный образ прямого слагаемого в Q.

„(5) $\Rightarrow$ (6)“: Надо лишь показать, что R_R — полусовершенный модуль. Ввиду 9.4.3,

$$R_R = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{I}(E_i), \text{ где } E_i \text{ просты.}$$

Поскольку $E_i \subsetneq^* \mathrm{I}(E_i)$, то $\mathrm{I}(E_i)$ неразложим. Поэтому, в силу 7.2.8, кольцо $\mathrm{End}(\mathrm{I}(E_i))$ локально, значит, согласно 11.4.1, модуль $\mathrm{I}(E_i)$ полусовершенен, а тогда по 11.3.4 и R_R является таковым.

„(6) $\Rightarrow$ (2) $\wedge$ (1)“: По предположению

$$\mathrm{soc}(R_R) \subsetneq^* R_R.$$

Так как, в силу 12.3.2, $\mathrm{soc}(R_R) \subseteq \mathrm{soc}({}_RR)$ и так как, согласно 9.2.1 (a) и (b), $\mathrm{soc}({}_RR) \subseteq r_R(\mathrm{rad}(R))$, то $r_R(\mathrm{rad}(R)) \subsetneq^* R_R$.

Пусть теперь E — простой левый R-модуль и U — подмодуль в ${}_RR$, такой что $E \cong R/U$. Поскольку R полусовершенен (согласно 11.3.2, с обеих сторон!), то ввиду 11.1.2 существует разложение

$${}_RR = R_1 \oplus R_2,$$

где $R_2 \subseteq U$, $R_1 \cap U \subsetneq R_1$. Пусть $R_1 = Re_1$, $R_2 = Re_2$ с идемпотентами e_1, $e_2 = 1 - e_1$. Поскольку $R_2 \subseteq U$, то, в силу закона модулярности,

$$U = (R_1 \cap U) \oplus R_2,$$

причем

$$R_1 \cap U \subseteq \mathrm{rad}(R_1) \subseteq \mathrm{rad}(R).$$

Поскольку $e_2^2 = e_2 \neq 1$ (ибо $R_2 \subsetneq U \neq R$ и $r = e_2 r + (1 - e_2) r$ для $r \in R$, то

$$\mathfrak{r}_R(Re_2) = (1 - e_2) R \neq 0.$$

Учитывая, что $R_1 \cap U \subsetneq \operatorname{rad}(R)$, получаем

$$\mathfrak{r}_R(\operatorname{rad}(R)) \subsetneq \mathfrak{r}_R(R_1 \cap U) \subsetneq R_R.$$

Как было показаио, $\mathfrak{r}_R(\operatorname{rad}(R)) \subsetneq^* R_R$, поэтому $\mathfrak{r}_R(R_1 \cap U) \subsetneq^* R_R$, откуда

$$0 \neq \mathfrak{r}_R(R_1 \cap U) \cap \mathfrak{r}_R(Re_2) = \mathfrak{r}_R((R_1 \cap U) + Re_2) = \mathfrak{r}_R(U).$$

Пусть теперь $0 \neq a \in \mathfrak{r}_R(U)$. Из максимальности U в ${}_RR$ следует, что $\mathfrak{l}_R(a) = U$. Таким образом,

$$Ra \cong R/U \cong E,$$

т. е. для любого простого левого R-модуля кольцо R содержит левый идеал, изоморфный этому модулю. Тем самым доказано (2).

Пусть теперь

$$Ra_1, \ldots, Ra_n, \text{ где } Ra_i \subsetneq {}_RR,$$

— система представителей классов изоморфных простых левых R-модулей. Так как R полусовершенно, то согласно 9.3.4 эта система конечна. Поскольку R_R имеет существенный цоколь, каждый правый идеал a_iR содержит по крайней мере один простой правый идеал, который может быть записан в виде a_ib_iR, $i = 1, \ldots, n$. Положим $c_i := a_ib_i$. Ввиду простоты Ra_i, $Ra_i \cong Rc_i$ и, следовательно,

$$Rc_1, \ldots, Rc_n$$

также является системой представителей классов изоморфных простых левых R-модулей. Если предположить, что $c_iR \cong c_jR$, то, согласно 12.3.1, мы будем иметь $Rc_i \cong Rc_j$ и, значит, $i = j$. Поэтому (в силу 9.3.4)

$$c_1R, \ldots, c_nR$$

— есть система представителей классов изоморфных простых правых R-модулей. Так как R_R инъективен, то из 5.8.5 следует, что R_R является кообразующим. Тем самым доказано и (1).

„(1) $\Rightarrow$ (6)“: Так как R_R — кообразующий, то (согласно 5.8.5) существует система представителей классов изоморфных простых правых R-модулей вида

$$a_1R, \ldots, a_nR,$$

где $a_iR \subsetneq Q_i \subsetneq R_R$, причем Q_i — инъективная оболочка a_iR. Так как a_iR прост и $aR \subsetneq^* Q_i$, то Q_i неразложим. Из того что Q_i — прямое слагаемое в R_R, следует, что Q_i проективен. Согласно

7.2.8 и 11.4.1, $F_i := Q_i/\mathrm{rad}\,(Q_i)$ прост и $\mathrm{rad}\,(Q_i) \subsetneq^{\oplus} Q_i$. Поэтому, в силу 12.5.1, $F_1, \ldots, F_n$ тоже является системой представителей классов изоморфных простых правых R-модулей. Поскольку

$$\nu_i\colon Q_i \to Q_i/\mathrm{rad}\,(Q_i) = F_i$$

— проективная оболочка для F_i, то, согласно 11.3.5, R_R, а тогда (см. 11.3.2) и ${}_RR$ полусовершенен. Пусть

$$R_R = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

— разложение R_R, даваемое следствием 11.4.2. Тогда $A_i/\mathrm{rad}\,(A_i) \cong F_j$ для подходящего j и, значит, согласно 12.5.1, $A_i \cong Q_j$. Следовательно, R_R сам инъективен как прямая сумма инъективных модулей. Так как Q_j — инъективная оболочка простого идеала a_jR, то $a_jR \subsetneq^{\oplus} Q_j$ и потому $a_jR = \mathrm{soc}\,(Q_j) \subsetneq^{\oplus} Q_j$. Поскольку $A_i \cong Q_j$, отсюда следует, что $\mathrm{soc}\,(A_i) \subsetneq^{\oplus} A_i$ и $\mathrm{soc}\,(A_i)$ прост. На основании 5.1.8 и 9.1.5 заключаем, что

$$\mathrm{soc}\,(R_R) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{soc}\,(A_i) \subsetneq^{\oplus} R_R.$$

Этим завершается доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (6), а с ним и всей теоремы. □

12.5.3. ***Следствие.*** *Если модуль R_R является нётеровым кообразующим, то он инъективен, полусовершенен и имеет существенный цоколь.*

Доказательство. Так как R_R нётеров, то $\mathrm{soc}\,(R_R)$ конечнопорожден и, следовательно, имеет лишь конечное число однородных компонент. Из того что R_R — кообразующий, следует, что существует только конечное число классов изоморфных простых правых R-модулей. Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 12.5.2. □

12.6. Доказательство основной теоремы

Мы докажем здесь сформулированную во введении теорему 12.1.1 по следующей схеме: (5) $\Leftrightarrow$ (8), (5) $\wedge$ (8) $\Leftrightarrow$ (6) $\wedge$ (7), (6) $\Rightarrow$ (5), (7) $\Rightarrow$ (5), (5) $\wedge$ (8) $\Rightarrow$ (1) $\wedge$ (3), (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (8), (3) $\Rightarrow$ (5), (5) $\Leftrightarrow$ (4).

„(5) $\Rightarrow$ (8)“: В силу (5) выполнено 12.5.2 (2) для обеих сторон. Поэтому, согласно 12.5.2, имеет место (8).

„(8) $\Rightarrow$ (5)“: Очевидно ввиду 5.8.5 (a).

„(5) $\wedge$ (8) $\Rightarrow$ (6) $\wedge$ (7)“: Очевидно.

„(6) $\Rightarrow$ (5)“: Нужно показать, что ${}_RR$ — кообразующий. Для этого сперва покажем, что R_R — модуль с дополнениями. Пусть $A \subsetneq R_R$ и $B \subsetneq {}_RR$ — д. п. для $l(A)$, т. е. $l(A) \cap B = 0$, где B — мак-

симальный подмодуль с таким свойством. Так как ${}_RR$ инъективен, то из 12.4.2 следует (при перестановке сторон), что

$$R = \mathrm{r}(0) = \mathrm{r}(\mathrm{l}(A) \cap B) = \mathrm{rl}(A) + \mathrm{r}(B).$$

Так как R_R — кообразующий, то с учетом 12.4.1 имеем

$$R = A + \mathrm{r}(B).$$

Покажем, что $\mathrm{r}(B)$ — минимальный подмодуль с таким свойством. Действительно, если $U \subsetneq \mathrm{r}(B)$, причем $A + U = R$, то $\mathrm{l}(A+U) = \mathrm{l}(A) \cap \mathrm{l}(U) = \mathrm{l}(R) = 0$. Далее, $U \subsetneq \mathrm{r}(B) \Rightarrow B \subsetneq \mathrm{lr}(B) \subsetneq \mathrm{l}(U) \Rightarrow \mathrm{l}(U) = B$, ибо B — максимальный подмодуль со свойством $\mathrm{l}(A) \cap B = 0$. Согласно 12.4.1, $B = \mathrm{l}(U) \Rightarrow \mathrm{r}(B) = \mathrm{rl}(U) = U$. Так как, ввиду 11.1.5, R полусовершенно, то в силу 9.3.4 имеется лишь конечное число классов изоморфных простых правых R-модулей. Этим показано, что выполнено условие 12.5.2 (1). Тогда согласно 12.5.2 (2), с учетом инъективности ${}_RR$, получаем, что ${}_RR$ является кообразующим.

„(7) $\Rightarrow$ (5)“: Эта импликация устанавливается аналогично.

Итак, мы доказали, что (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (8). Это — часть основной теоремы, не связанная со свойствами дуальности.

„(5) $\wedge$ (8) $\Leftrightarrow$ (1) $\wedge$ (3)“: Поскольку каждый конечно-порожденный модуль является эпиморфным образом конечно-порожденного свободного модуля, (1) следует из 12.2.4 (c) и 12.2.3 (b). Пусть теперь A_R конечно-копорожден. Тогда, согласно 9.4.3 (каждое Q_i из разложения $\mathrm{l}(A) = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_n$ можно мономорфно отобразить в R_R), существует мономорфизм A в конечно-порожденный свободный R-модуль. Поэтому, как и выше, утверждение теоремы вытекает из 12.2.4 (c) и 12.2.3 (b).

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Очевидно.

„(2) $\Rightarrow$ (8)“: Покажем с помощью критерия Бэра, что ${}_RR$ инъективен. Если $B \subsetneq {}_RR$, то, согласно предложению 12.2.6 (примененному к ${}_R(R/B)$), $\mathrm{lr}(B) = B$. Применяя теперь 12.2.6 к $A = \mathrm{r}(B) \subsetneq R_R$, получаем, что для каждого гомоморфизма τ из ${}_RB = \mathrm{lr}(B)$ в ${}_RR$ существует $r_0 \in R$, такое что $\tau(x) = xr_0$. Значит, по критерию Бэра ${}_RR$ инъективен. Аналогично показывается, что R_R инъективен. Пусть теперь E_R прост и $A \subsetneq R_R$, причем

$$R/A \cong E_R.$$

Поскольку $A = \mathrm{rl}(A)$, то, в силу 12.2.6, $\mathrm{l}(A) \neq 0$. Если $0 \neq x \in \mathrm{l}(A)$, то

$$xR \cong R/A \cong E,$$

что и требовалось показать. Аналогично рассматривается случай простого модуля ${}_RE$.

„(3) $\Rightarrow$ (5)“: Если модуль E_R прост и Q_R — инъективная оболочка для E_R, то Q_R конечно-копорожден. Так как Q_R рефлекси-

вен, то существует такое $\varphi \in Q^*$, что $\varphi(E) \neq 0$. С другой стороны, из $E \subsetneq^* Q$ следовало бы в случае $\ker(\varphi) \neq 0$, что $E \subsetneq \subsetneq \ker(\varphi)$. Таким образом, $\ker(\varphi) = 0$, т. е. φ — мономорфизм. Отсюда вытекает, что R_R — кообразующий. Рассуждение для ${}_RR$ аналогично. (В этом доказательстве вместо (3) мы использовали лишь то, что инъективные оболочки простых модулей полурефлексивны.)

„(5) $\Rightarrow$ (4)“: По определению, $A \subseteq A^{\circ\perp}$. Поскольку R_R — кообразующий, то для каждого $m \in M$, $m \notin A$, существует $\varphi \in M^*$, такое что $\varphi(m) \neq 0$ и $\varphi(A) = 0$. Отсюда вытекает, что $\varphi \in A^\circ$, а $m \notin A^{\circ\perp}$; следовательно, $A^{\circ\perp} \subseteq A$. Для левой стороны рассуждение аналогично.

„(4) $\Rightarrow$ (5)“: Пусть M_R — произвольный модуль. Тогда, очевидно, $0^\circ = M^*$ и

$$0 = 0^{\circ\perp} = \bigcap_{\varphi \in M^*} \ker(\varphi),$$

т. е. R_R — кообразующий. Случай ${}_RR$ рассматривается аналогично. Тем самым основная теорема полностью доказана. □

Осталось еще доказать следствие 12.1.3. Оно непосредственно получается из теоремы 12.5.2, причем используется тот факт, что кольцо с полной дуальностью удовлетворяет условиям этой теоремы с обеих сторон (например, сразу видно, что 12.1.1 (5) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 12.5.2 (2)).

12.6.1. ***Дополнение к основной теореме.*** *Пусть R — кольцо с полной дуальностью. Тогда для каждого R-модуля M и каждого $A \subseteq M$ гомоморфизм*

$$\psi\colon M^*/A^\circ \ni \varphi + A^\circ \longmapsto \varphi \mid A \in A^*$$

является изоморфизмом.

Доказательство. По определению ψ — мономорфизм. Как легко видеть, ψ является изоморфизмом для всех M_R и всех $A \subseteq M_R$ тогда и только тогда, когда R_R инъективен. Действительно, если ψ для всех $A \subseteq R_R$ представляет собой эпиморфизм, то это означает, что выполняется критерий Бэра, т. е. что R_R инъективен. Обратно, если R_R инъективен, то каждый элемент из A^* можно продолжить до элемента из M^*. □

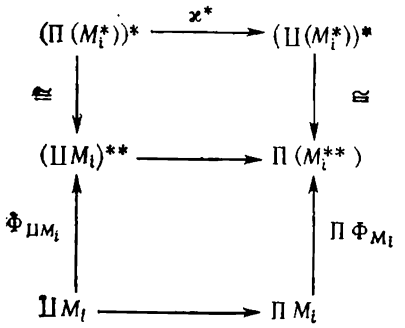
В заключение укажем еще на следующее свойство. В силу 12.2.5, при любом кольце R, если R-модуль M рефлексивен, то M^* также рефлексивен, и если M^{**} рефлексивен, то M^* тоже рефлексивен. В случае когда R — кольцо с полной дуальностью, из рефлексивности M^* следует даже рефлексивность самого M. Действительно, пусть M^* рефлексивен. Тогда, в силу 12.2.2 (a), Φ_M^* — изоморфизм, а значит, согласно 12.2.1 (d), Φ_M — изоморфизм, т. е. M_R рефлексивен.

В следующей, последней главе мы снова будем иметь дело со свойствами дуальности. Рассматриваемые там квазифробениусовы кольца являются кольцами с полной дуальностью, артиновыми с обеих сторон (достаточно предположить нётеровость с одной стороны). Однако существуют кольца с полной дуальностью, не удовлетворяющие никаким условиям обрыва (см. упр. 11). В случае артиновых колец можно дать новые характеризации полной дуальности, например такую: для всех простых модулей дуальные модули снова просты (см. в связи с этим упр. 12).

Упражнения

1. a) Если модуль M_R рефлексивен, $A \subset M_R$, $A^{\circ\perp} = A$ и гомоморфизм ι^*: $M \to A^*$ сюръективен, то A также рефлексивен.
b) Если M_R рефлексивен, $A \subset M_R$, $A^{\circ\perp} = A$ и ι^*: $M^{**} \to A^{\circ *}$ (где ι: $A^\circ \to M^*$) сюръективен, то и M/A рефлексивен.
c) Приведите пример такого рефлексивного модуля M_R и такого его подмодуля $A \subset M_R$, что ни A, ни M/A не рефлексивны.

2. Пусть $(M_i \mid i \in I)$ — непустое семейство правых R-модулей. Доказать следующие утверждения:
a) Имеет место коммутативная диаграмма



где ι и $\varkappa$: $\coprod (M_i^*) \to \prod (M_i^*)$ — включения.
b) Если I конечно, то модуль $\coprod M_i$ рефлексивен тогда и только тогда, когда все M_i рефлексивны.
c) Если ${}_RR$ является кообразующим или инъективен и $\coprod M_i$ рефлексивен, то *почти все* (т. е. все, кроме, быть может, конечного числа) M_i равны нулю. (*Указание.* В первом случае $\varkappa^*$ — мономорфизм, во втором — эпиморфизм.)

3. Пусть M — произвольный модуль, Y — конечно-порожденный подмодуль в M^* и $\alpha \in Y^*$. Показать, что если R_R — кообразующий, то существует такое $m \in M$, что $\alpha = \Phi_M(m) \mid Y$.

4. Пусть даны модуль M_R и непустое семейство $((m_i, U_i) \mid i \in I)$, где $m_i \in M$ и $U_i \subset M$. Элемент $m \in M$ называется *решением (этого семейства)*, если $m - m_i \in U_i$ для всех $i \in I$. Модуль M_R называется *линейно-компактным*, если

каждое семейство $((m_i, U_i) \mid i \in I)$, любое конечное подсемейство которого обладает решением, само обладает решением.
a) Если R_R — кообразующий, то модуль M_R линейно-компактен тогда и только тогда, когда он рефлексивен и ${}_RR$ *инъективен относительно* M^* (последнее означает, что для каждого мономорфизма α: ${}_RY \to {}_RM^*$ и каждого гомоморфизма β: ${}_RY \to {}_RR$ существует гомоморфизм γ: ${}_RM^* \to {}_RR$, удовлетворяющий условию $\beta = \gamma\alpha$; см. упр. 21 к гл. 5).
b) R является кольцом с полной дуальностью тогда и только тогда, когда R_R — кообразующий и R_R линейно-компактен.
c) Если R — кольцо с полной дуальностью, то R-модуль рефлексивен тогда и только тогда, когда он линейно-компактен.

5. Доказать следующие утверждения:
a) Каждый артинов модуль линейно-компактен.
b) Каждый линейно-компактный модуль является модулем с дополнениями (т. е. у каждого его подмодуля существует аддитивное дополнение.) (*Указание.* Доказательство существования дополнения по пересечению можно в этом случае дуализовать.)
c) Ни для a), ни для b) обратное утверждение не имеет места.
d) Если модуль $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ линейно-компактен, то почти все M_i равны нулю.
e) Если M линейно-компактен и $A \subset_\oplus M$, то как A, так и M/A линейно-компактен.
f) Если M линейно-компактен и $\operatorname{rad}(M)$ косущественен в M, соотв. $\operatorname{soc}(M)$ существен в M, то M конечно-порожден, соотв. конечно-копорожден.
g) Если R — нелокальное кольцо главных идеалов без делителей нуля, то каждый линейно-компактный R-модуль артинов.

6. Непустое семейство $((m_i, U_i) \mid i \in I)$, где $m_i \in M$ и $U_i \subset_\oplus M$, называется *проективным*, если I *направлено* (т. е. на I определен порядок $\leqslant$, такой что для произвольных $i, j \in I$ существует $k \in I$, удовлетворяющее условиям $i \leqslant k$, $j \leqslant k$) и из $i \leqslant j$ следует, что $U_j \subset U_i$, а также что $m_j - m_i \in U_i$. Показать, что
a) M линейно-компактен $\iff$ каждое проективное семейство имеет решение в M;
b) если $A \subset_\oplus M$ и A и M/A линейно-компактны, то и M линейно-компактен.

7. Показать, что если R инъективен с обеих сторон, то для каждого конечно-порожденного R-модуля M модуль M^* рефлексивен. (*Указание.* Используйте упр. 1, a)).

8. Для всякого целостного кольца R с полем частных K положим
$$\operatorname{rang}(M_R) := \dim_K\left(M \underset{R}{\otimes} K\right).$$
a) $\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(M/T(M))$, где $T(M)$ — подмодуль кручения для M. (*Указание.* Модуль K_R плоск.)
b) $\operatorname{rang}(M) = 0 \iff M = T(M)$.
c) $\operatorname{rang}(M) < \infty$ и $A \subset_\oplus M \Rightarrow \operatorname{rang}(A) < \infty \wedge \operatorname{rang}(M/A) < \infty \wedge$
$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(M/A)$.
d) $T(M) = 0 \iff$ не существует свободного подмодуля A в M, удовлетворяющего условию $A \subset_\oplus^* M$. Если $A \cong R^{(I)}$, то $\operatorname{rang}(M) = |I|$.
e) Если M порождается n элементами, то $\operatorname{rang}(M) \leqslant n$.
f) $\operatorname{rang}(M) < \infty \Rightarrow \operatorname{rang}(M^*) \leqslant \operatorname{rang}(M) \wedge M^*$ рефлексивен.

9. Пусть R_R — кообразующий. Доказать следующие утверждения:
a) $\operatorname{soc}({}_RR) \subset_\oplus^* {}_RR$. (*Указание.* Для $0 \neq x \in R$ выберите максимальный правый идеал, содержащий $r_R(x)$.)
b) $\operatorname{soc}({}_RR) \subset \operatorname{soc}(R_R)$.

Если, кроме того, $\operatorname{soc}({}_R R)$ имеет лишь конечное число однородных компонент, то

c) $\mathfrak{r}_R(\operatorname{rad}(R)) = \operatorname{soc}({}_R R) = \operatorname{soc}(R_R) = \mathfrak{l}_R(\operatorname{rad}(R))$;

d) $\mathfrak{r}_R\mathfrak{l}_R(\operatorname{rad}(R)) = \operatorname{rad}(R) = \mathfrak{l}_R\mathfrak{r}_R(\operatorname{rad}(R))$.

10. Пусть T — коммутативное кольцо. Для всякого T-модуля M_T определим коммутативное кольцо $R := \operatorname{Id}(M_T)$ следующим образом:

(1) как множество $R := M \times T$;

(2) сложение в R покомпонентное:

$$(m, t) + (m', t') := (m + m', t + t');$$

(3) умножение в R задается формулой

$$(m, t)(m', t') := (mt' + m't, tt').$$

Ясно, что единицей кольца R служит элемент $(0, 1)$. Показать, что

a) элемент $x = (m, t)$ обратим, соотв. нильпотентен, в $R \Leftrightarrow t$ обратим, соотв. нильпотентен, в T;

b) $\operatorname{rad}(R) = M \times \operatorname{rad}(T)$;

c) $\operatorname{soc}(R) = \operatorname{soc}(M) \times (\operatorname{soc}(T) \cap \mathfrak{r}_T(M))$;

d) R совершенно, соотв. полусовершенно, тогда и только тогда, когда T является таковым.

e) R нётерово, соотв. артиново, тогда и только тогда, когда T и M_T являются таковыми.

11. Пусть T — коммутативное кольцо и M_T — точный T-модуль (т. е. $\mathfrak{r}_T(M) = 0$). Для кольца $R = \operatorname{Id}(M_T)$, определенного в упр. 10, доказать следующие утверждения:

a) R_R инъективен $\Leftrightarrow M_T$ инъективен и для каждого $\varphi \in \operatorname{End}(M_T)$ существует $t \in T$, такое что $\varphi(m) = mt$ для всех $m \in M$.

b) R_R — кообразующий $\Leftrightarrow R_R$ инъективен и M_T — кообразующий.

c) Пусть T — полное кольцо дискретного нормирования с полем частных K и $M_T := K/T$. Тогда R — кольцо с полной дуальностью, но не нётерово кольцо.

12. a) Пусть R — коммутативное локальное кольцо с конечно-порожденным цоколем и E — простой R-модуль. Показать, что

$$E^* \cong E^n, \quad E^{**} \cong E^{n^2}, \ \ldots,$$

где $n := \operatorname{lng}(\operatorname{soc}(R))$.

b) Показать, что если K — поле и $M_K := K^n$ $(n \geqslant 1)$, то кольцо $R = \operatorname{Id}(M_K)$, определенное в упр. 10, коммутативно, локально и артиново и

$$\operatorname{lng}(\operatorname{soc}(R)) = n.$$

c) Показать, что если R — коммутативное локальное кольцо, то для простого R-модули E следующие условия эквивалентны:

(1) E рефлексивен;

(2) E^* прост;

(3) $\operatorname{soc}(R)$ прост.

d) Пусть T — неполное кольцо дискретного нормирования с полем частных K и $M_T := K/T$. Показать, что $R = \operatorname{Id}(M_T)$ (см. упр. 10) удовлетворяет условиям из c), но R не является кольцом с полной дуальностью.

13. Доказать, что

a) R полупросто $\Leftrightarrow \operatorname{rad}(R) = 0$ и для каждого простого правого R-модуля имеется изоморфный ему правый идеал в R;

b) если R — бесконечное произведение полей, то R_R инъективен, но не является кообразующим (см. также упр. 11 к гл. 5).

14. Пусть K — поле и R есть K-алгебра с базисом $\{1, u_0, u_1, u_2, \ldots, e_0, e_1, e_2, \ldots\}$ и умножением

$$u_i u_j = 0, \quad e_i e_j = \delta_{i,j} e_i, \quad e_i u_j = \delta_{i,j} u_j, \quad u_i e_j = \delta_{i-1,j} u_i.$$

Доказать следующие утверждения:
(1) Пусть $x = 1k + \Sigma u_i k_i + \Sigma e_i h_i \in R$, где $k, k_i, h_i \in K$. Тогда
a) x обратим слева $\Leftrightarrow$ x обратим справа $\Leftrightarrow$ $k \neq 0 \wedge k + h_i \neq 0$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$;
b) $x \in \operatorname{rad}(R) \Leftrightarrow k = 0 = h_i$ для всех $i \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x$ нильпотентен;
c) $x \in \operatorname{cen} R \Leftrightarrow k_i = 0 = h_i$ для всех i.
(2) a) $(\operatorname{rad}(R))^2 = 0$;
b) $\mathfrak{r}_R(\operatorname{rad}(R)) = \operatorname{rad}(R) = \mathfrak{l}_R(\operatorname{rad}(R))$;
c) $\operatorname{soc}({}_R R) = \operatorname{rad}(R) = \operatorname{soc}(R_R)$;
d) $R/\operatorname{rad}(R)$, рассматриваемое как кольцо, коммутативно и регулярно.
(3) Для максимальных, соотв. простых, идеалов в R верны приводимые ниже факты:
a) Максимальные правые идеалы — это в точности идеалы

$$\mathfrak{r}_R(u_0), \quad \mathfrak{r}_R(u_1), \quad \mathfrak{r}_R(u_2), \ldots.$$

Ими же исчерпываются и все двусторонние идеалы, а также все максимальные левые идеалы.
b) Максимальные правые идеалы — это в точности идеалы

$$u_0 R, \quad u_1 R, \quad u_2 R, \ldots.$$

Ими же исчерпываются все двусторонние идеалы и все простые левые идеалы.
c) $u_0 R, u_1 R, u_2 R, \ldots$ есть система представителей классов изоморфных правых R-модулей.
d) $A := \sum_{i=0}^{\infty} e_i R$ является максимальным левым идеалом в R и R/A, Ru_0, Ru_1, Ru_2, ... есть система представителей простых левых R-модулей. Для R/A не существует изоморфного ему левого идеала в R.
(4) Для каждого $i \geqslant 0$
a) $e_i R e_i$ как кольцо изоморфно полю K, так что, в частности, e_i — локальный идемпотент;
b) $u_i R$ — единственный нетривиальный подмодуль в $e_i R$ и $e_i R / u_i R \cong u_{i+1} R$;
c) модуль $e_i R$ инъективен и, следовательно, R_R — кообразующий;
d) R_R не инъективен.

[*Указание к* c). Если $A \subseteq R_R$, $f \in \operatorname{Hom}_R(A, e_i R)$ и $b \in R$, то f можно продолжить на $A + bR$ тогда и только тогда, когда существует такой гомоморфизм $g \in \operatorname{Hom}_R(bR, e_i R)$, что f и g совпадают на $A \cap bR$. Подумайте, как применить этот метод для $b = e_j$, $j \geqslant 0$, и $b = 1 - e_{i-1} - e_i$ $(e_{-1} := 0)$.]

15. Пусть R — произвольное кольцо. Показать, что R_R — кообразующий тогда и только тогда, когда инъективная оболочка каждого конечно-копорожденного правого R-модуля проективна.

13. Квазифробениусовы кольца

13.1. Введение

Мы идем здесь в направлении, обратном тому, в каком все развивалось исторически. Фактически первоначально рассматривались — более или менее явно — групповые кольца конечных групп с коэффициентами из некоторого поля (в рамках теории представлений конечных групп).

Пусть $R := GK$ — такое групповое кольцо, причем элементы группы G суть

$$g_1 = e,\ g_2,\ \ldots,\ g_n.$$

Тогда отображение

$$\varphi\colon\ R \ni \sum_{i=1}^{n} g_i k_i \longmapsto k_1 \in K$$

является K-гомоморфизмом R в K, т. е.

$$\varphi \in R^* := \mathrm{Hom}_K(R,\ K).$$

Этот гомоморфизм φ обладает тем важным свойством, что $\ker(\varphi)$ не содержит отличных от нуля идеалов, ни правых, ни левых; φ определяется этим свойством по существу однозначно (а именно однозначно с точностью до умножения справа на регулярные элементы из R). Будем называть φ *гомоморфизмом Фробениуса*. Так как R^* является правым R-модулем, то $\varphi R \subseteq R^*_R$. Более того, для гомоморфизма Фробениуса $\varphi R = R^*$. Далее,

$$\Phi\colon\ R_R \ni r \longmapsto \varphi r \in \varphi R = R^*_R$$

является R-изоморфизмом, и обратно, для каждого R-изоморфизма

$$\Phi\colon\ R_R \longmapsto R^*_R$$

формула $\varphi := \Phi(1)$, $1 \in R$, задает гомоморфизм Фробениуса

$$\varphi\colon\ R_K \to K_K.$$

В ходе развития теории постепенно выяснилось, что многие хорошие свойства групповых колец основываются только на существовании гомоморфизма Фробениуса φ, или, что эквивалентно, изоморфизма Φ, и постулирование существования такого φ,

соотв. Ф, для конечномерной K-алгебры R_K привело к понятию *фробениусовой алгебры* (хотя первоначально оно было сформулировано Т. Накаямой в 1939 г. в терминах теории представлений).

Следующий существенный шаг состоял в освобождении от рамок алгебр. Как легко убедиться, для фробениусовых алгебр с помощью φ, соотв. Ф, получаются следующие свойства аннуляторов:

$$r_R l_R(A) = A \quad \text{для всех } A \subseteq R_R,$$
$$l_R r_R(B) = B \quad \text{для всех } B \subseteq {}_R R$$

(соотношения ортогональности, связывающие конечномерное векторное пространство с его дуальным пространством!). Обратно, при некотором дополнительном ограничении на размерности из этих равенств для аннуляторов следует фробениусовость алгебры. В эти аннуляторные равенства свойства алгебры уже никак не входят.

Артиновы справа и слева кольца, удовлетворяющие указанным равенствам для аннуляторов, были названы *квазифробениусовыми кольцами*, а в случае если они удовлетворяют еще одному дополнительному условию, — *фробениусовыми кольцами* (Т. Накаяма, 1941).

На основе этого определения было получено весьма много результатов о квазифробениусовых и фробениусовых кольцах.

Новый сильный импульс к развитию теории дало появление категорно-гомологических понятий. Это развитие привело к тому, что на сегодняшний день мы имеем следующий результат:

Кольцо тогда и только тогда квазифробениусово, т. е. артиново (а значит, и нётерово) с обеих сторон и удовлетворяет приведенным выше условиям на аннуляторы, когда оно, во-первых, нётерово с одной стороны и, во-вторых, инъективно с одной стороны или является кообразующим.

Этот результат — основная теорема данной главы. Так как, согласно этой теореме, квазифробениусово кольцо является артиновым (и нётеровым) с обеих сторон инъективным кообразующим, то для квазифробениусовых колец в нашем распоряжении есть всё, что мы доказали раньше для артиновых и нётеровых модулей, а также для колец с полной дуальностью.

13.2. Определение и основная теорема

Мы докажем несколько больше, чем утверждается в приведенной во введении теореме. Вместо l_R, соотв. r_R, будем писать в дальнейшем просто l, соотв. r.

13.2.1. ***Теорема.*** *Пусть R_R нётеров.*
(а) *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *R_R инъективен;*

(2) R_R — *кообразующий;*
(3) ${}_RR$ *инъективен;*
(4) ${}_RR$ — *кообразующий;*
(5) $\forall A \subset_{\oplus} R_R [\mathrm{rl}(A) = A] \wedge \forall B \subset_{\oplus} {}_RR [\mathrm{lr}(B) = B]$.
(b) *Если выполнены условия из* (a), *то* R *артиново с обеих сторон.*

13.2.2. ***Определение.*** (1) *Кольцо, удовлетворяющее условиям* 13.2.1, *называется квазифробениусовым.*
(2) *Кольцо* R *называется фробениусовым, если оно квазифробениусово и*

$$\mathrm{soc}(R_R) \cong (R/\mathrm{rad}(R))_R, \quad \mathrm{soc}({}_RR) \cong {}_R(R/\mathrm{rad}(R)).$$

Из определения очевидно, что кольцо с полной дуальностью квазифробениусово тогда и только тогда, когда оно нётерово с одной стороны.

Довольно длинное доказательство теоремы 13.2.1 мы разобьем на несколько утверждений; некоторые из них представляют и самостоятельный интерес.

13.2.3. ***Утверждение.*** *Если* R_R *инъективен и нётеров, то* R *артиново с обеих сторон.*

Доказательство. Так как R_R инъективен, то, согласно 12.4.2, $\mathrm{lr}(C) = C$ для всех конечно-порожденных левых идеалов $C \subset_{\oplus} {}_RR$. Так как R_R нётеров, то R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей для всех конечно-порожденных и, в частности, для всех циклических левых идеалов. Следовательно, в силу 11.6.3, R_R совершенен. Поэтому, согласно 11.6.4, R_R артинов. Поскольку $\mathrm{lr}(C) = C$, то ${}_RR$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей для конечно-порожденных левых идеалов. Покажем, что, более того, ${}_RR$ нётеров. Действительно, если бы ${}_RR$ не был нётеров, то нашелся бы идеал $B \subset_{\oplus} {}_RR$, не являющийся конечно-порожденным. Тогда для каждого конечно-порожденного левого подыдеала левого идеала B[1] существовал бы строго больший конечно-порожденный подыдеал и, значит, в B можно было бы построить (по индукции) строго возрастающую цепь конечно-порожденных подыдеалов, в противоречие с тем, что мы установили раньше. Так как R артиново справа и нётерово слева, то, согласно 9.3.12, ${}_RR$ артинов. □

13.2.4. ***Утверждение.*** *Если* R_R *нётеров и выполнено условие* (5) *теоремы 13.2.1, то* R_R *инъективен и* R *артиново с обеих сторон.*

Доказательство. Мы хотим применить 12.4.3. Для этого надо показать, что для любых правых идеалов A и B кольца R

$$\mathrm{l}(A \cap B) = \mathrm{l}(A) + \mathrm{l}(B).$$

[1] То есть идеала кольца R, содержащегося в B. — *Прим. перев.*

В силу (5),

$$\mathrm{rl}(A \cap B) = A \cap B = \mathrm{rl}(A) \cap \mathrm{rl}(B) = \mathrm{r}(\mathrm{l}(A) + \mathrm{l}(B))$$

(последнее равенство проверяется непосредственно). Применяя l, получаем

$$\mathrm{l}(A \cap B) = \mathrm{lr}(\mathrm{l}(A) + \mathrm{l}(B)) = \mathrm{l}(A) \dotplus \mathrm{l}(B).$$

На основании 12.4.3 заключаем, что R_R инъективен. Остальное следует из 13.2.3. □

13.2.5. ***Утверждение.*** *Если R_R или ${}_RR$ нётеров и*

$$\mathrm{rl}(A) = A \text{ или } \mathrm{lr}(A) = A$$

для всех двусторонних идеалов A в R, то $\mathrm{rad}(R)$ *нильпотентен.*

Доказательство. Достаточно провести доказательство для случая $\mathrm{rl}(A) = A$, ибо для другого случая доказательство проводится совершенно аналогично. Положим $N := \mathrm{rad}(R)$. Тогда $N \supset N^2 \supset N^3 \supset \ldots$ и, следовательно,

$$\mathrm{l}(N) \subset \mathrm{l}(N^2) \subset \mathrm{l}(N^3) \subset \ldots$$

— цепь двусторонних идеалов. Поскольку R_R либо ${}_RR$ нётеров, эта цепь обрывается, т. е. найдется такое n, что

$$\mathrm{l}(N^n) = \mathrm{l}(N^{n+1}).$$

Отсюда следует, что

$$N^n = \mathrm{rl}(N^n) = \mathrm{rl}(N^{n+1}) = N^{n+1}.$$

Так как R_R либо ${}_RR$ нётеров, то N_R^n либо ${}_RN^n$ конечно-порожден, так что, согласно 9.2.1(d), $N^{n+1} \subset^{\circ} N^n$. Из двух последних соотношений вытекает, что $N^n = 0$, ч.т.д. □

13.2.6. ***Утверждение.*** *Если R_R инъективен и ${}_RR$ нётеров, то R_R — кообразующий и R артиново с обеих сторон.*

Доказательство. Поскольку ${}_RR$ нётеров, каждый левый идеал в R конечно-порожден. Тогда в силу 12.4.2 и 13.2.5, $\mathrm{rad}(R)$ нильпотентен. Из 9.6.2 при $Q_R = R_R$ получаем, что кольцо $\bar{R} := R/\mathrm{rad}(R)$ регулярно. Из того, что ${}_RR$ нётеров, следует, что и ${}_R\bar{R}$ нётеров, а тогда таковым является и ${}_{\bar{R}}\bar{R}$. Поэтому, согласно 10.4.9, каждый левый идеал в $\bar{R}$ является прямым слагаемым в $\bar{R}$, т. е. $\bar{R}$ полупросто. Следовательно, в силу 11.6.3, R совершенно с обеих сторон и, согласно 11.6.4, ${}_RR$ артинов. Поскольку ${}_RR$ совершенен, то, в силу 11.6.3(4), $\mathrm{soc}(R_R)$ является существенным подмодулем в R_R. Из 12.5.2 вытекает, что R_R — кообразующий. Тогда (по 12.4.1) $\mathrm{rl}(A) = A$ для всех $A \subset R_R$. Так как ${}_RR$ нётеров, отсюда следует, что R_R артинов. □

Доказательство теоремы 13.2.1. Утверждение (b) следует из 13.2.4. Остается доказать (a).

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Согласно 12.2.3, ${}_RR$ артинов, а следовательно, и нётеров. Поэтому наше утверждение вытекает из 13.2.6.

„(2) $\Rightarrow$ (5)“: Согласно 12.5.3, R_R инъективен, а значит, ввиду 13.2.3, ${}_RR$ нётеров. Поскольку R_R — кообразующий, то, в силу 12.4.1, $\mathrm{r}(A) = A$ для всех $A \subseteq R_R$. Далее, из инъективности R_R и нётеровости ${}_RR$ вытекает, согласно 12.4.2, что также $\mathrm{l}\mathrm{r}(B) = B$ для всех $B \subseteq {}_RR$. Следовательно, имеет место (5).

„(5) $\Rightarrow$ (1)“: Следует из 13.2.4.

„(5) $\Rightarrow$ (3)“: Из (5) и того факта, что R_R нётеров, вытекает, что ${}_RR$ артинов, а значит и нётеров. Поэтому, в силу 13.2.4, имеет место (3).

„(3) $\Rightarrow$ (4)“: Следует из 13.2.6.

„(4) $\Rightarrow$ (5)“: Из условия (4) и нётеровости R_R вытекает, согласно 12.4.1, что ${}_RR$ артинов, а потому и нётеров. Далее рассуждаем как при доказательстве импликации (2) $\Rightarrow$ (5). □

13.3. Свойства дуальности квазифробениусовых колец

Квазифробениусовы кольца можно охарактеризовать как нётеровы кольца, для которых выполнены условия теоремы 12.1.1. С помощью этих условий мы можем теперь дать дальнейшие характеризации квазифробениусовых колец в терминах свойств дуальности. Будем использовать обозначения гл. 12.

В качестве подготовки к дальнейшим рассуждениям выясним вначале, как условия конечности переносятся на дуальные модули.

13.3.1. ***Предложение.*** *Пусть M_R конечно-порожден и $M^* := \mathrm{Hom}_R(M_R, R_R)$.*

(a) *Если ${}_RR$ нётеров, то и ${}_RM^*$ нётеров.*

(b) *Если ${}_RR$ артинов, то ${}_RM^*$ имеет конечную длину (т. е. артинов и нётеров).*

Доказательство. (a) Если $F := \bigoplus_{i=1}^{n} x_iR$ — конечно-порожденный свободный правый R-модуль с базисом $x_1, \ldots, x_n$, то (как и в случае векторных пространств)

$$F^* = \bigoplus_{i=1}^{n} R\delta_i, \text{ где } \delta_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

т. е F^* является свободным левым R-модулем с базисом $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Поскольку ${}_RR$ нётеров, то, в силу 6.1.3, и ${}_RF^*$ нётеров.

Пусть теперь

$$M_R = \sum_{i=1}^{n} m_i R$$

и

$$\eta\colon F = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i R \ni \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \in M.$$

Поскольку η — эпиморфизм, то

$$\mathrm{Hom}(\eta, 1_R)\colon M^* \ni \alpha \longmapsto \alpha\eta \in F^*$$

— мономорфизм. Так как ${}_RF^*$ по доказанному нётеров, то и ${}_RM^*$ нётеров.

(b) следует из (a) и 6.1.3. □

Из 13.3.1 в сочетании с результатами гл. 6 вытекает, что если R артиново с обеих сторон, то для каждого конечно-порожденного правого или левого R-модуля M все подмодули и фактормодули модулей M и M^* имеют конечную длину. Этот факт будет использоваться в дальнейшем без специальных оговорок. Далее, напомним, что $\lg(M)$ обозначает длину модуля M (т. е. длину композиционного ряда для M).

13.3.2. ***Теорема.*** *Для артинова с обеих сторон кольца R следующие условия эквивалентны:*

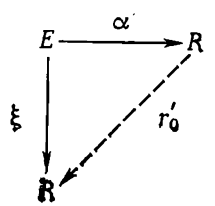
(1) *R квазифробениусово;*

(2) *модули, дуальные к простым правым R-модулям и к простым левым R-модулям, тоже являются простыми;*

(3) *для каждого конечно-порожденного правого R-модуля и каждого конечно-порожденного левого R-модуля M*

$$\lg(M) = \lg(M^*).$$

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Пусть E_R прост. Из того что R_R является кообразующим, следует, что существует мономорфизм $\mu\colon E_R \to R_R$. Значит, $E^* := \mathrm{Hom}_R(E_R, R_R) \neq 0$. Пусть теперь $0 \neq \alpha \in E^*$. Покажем, что $E^* = R\alpha$, т. е. E^* прост. Поскольку E_R прост и $\alpha \neq 0$, то α должно быть мономорфизмом. Поскольку R_R инъективен, то для каждого $\xi \in E^*$ существует коммутативная диаграмма



где r_0' — левое умножение на некоторый элемент $r_0 \in R$. Следовательно, $\xi = r_0\alpha$, т. е. $E^* = R\alpha$. Рассуждение для случая левых модулей аналогично.

„(2) $\Rightarrow$ (1)": Докажем, что выполнено условие 13.2.1(5). Доказательство проведем в два шага.

Шаг 1. Утверждение. Если $A \subset B \subset R_R$ и B/A просто, то $\mathfrak{l}(A)/\mathfrak{l}(B)$ либо просто, либо равно нулю.

Действительно, отображение

$$f\colon \mathfrak{l}(A)/\mathfrak{l}(B) \to (B/A)^*,$$
$$f(x+\mathfrak{l}(B))(b+A) := xb,\ x \in \mathfrak{l}(A),\ b \in B,$$

является, как легко видеть, мономорфизмом, а $(B/A)^*$ по условию просто. Само собой разумеется, аналогичное утверждение справедливо и для левых идеалов.

Шаг 2. Пусть теперь $A \subset R_R$. Тогда в R_R существует композиционный ряд, содержащий A, скажем,

(i) $\quad 0 = A_0 \subset \ldots \subset A_m = R.$

Действительно, рассмотрим цепь

(ii) $\quad R = \mathfrak{l}(0) \supset \mathfrak{l}(A_1) \supset \ldots \supset \mathfrak{l}(R) = 0.$

Согласно шагу 1, $\operatorname{lng}({}_RR) \leqslant \operatorname{lng}(R_R)$. По симметрии $\operatorname{lng}(R_R) \leqslant \operatorname{lng}({}_RR)$, поэтому $\operatorname{lng}({}_RR) = \operatorname{lng}(R_R)$. Следовательно, (ii) — композиционный ряд для ${}_RR$. Но тогда и

$$0 = \mathfrak{r}\mathfrak{l}(A_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{r}\mathfrak{l}(A_m) = R$$

— также композиционный ряд для R_R. Так как (i) — композиционный ряд и $A_i \subset \mathfrak{r}\mathfrak{l}(A_i)$, то $A_i = \mathfrak{r}\mathfrak{l}(A_i)$, $i = 1, \ldots, m$; в частности, $\mathfrak{r}\mathfrak{l}(A) = A$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{l}\mathfrak{r}(B) = B$ для $B \subset {}_RR$.

„(1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ (3)": Проведем индукцию по $\operatorname{lng}(M_R)$. В силу (2) наше утверждение верно для $\operatorname{lng}(M_R) = 1$. Предположим, что оно уже доказано для всех модулей с $\operatorname{lng}(M_R) \leqslant n$. Пусть L_R — модуль с $\operatorname{lng}(L_R) = n+1$ и E — его простой подмодуль. Тогда по предположению индукции $\operatorname{lng}((L/E)^*) = n$. Рассмотрим

$$E^0 := \{\varphi \mid \varphi \in L^* \wedge \varphi(E) = 0\}$$

(ортогональное дополнение к E, см. § 12.1). Очевидно, $(L/E)^* \cong E^0$ и, следовательно, $\operatorname{lng}(E^0) = n$.
В силу 12.6.1, отображение

$$\psi\colon L^*/E^0 \to E^*,\ \varphi + E^0 \mapsto \varphi \mid E$$

является изоморфизмом и $\operatorname{lng}(E^*) = 1$. Поэтому $\operatorname{lng}(L^*) = n+1$.

„(3) $\Rightarrow$ (2)": (2) — частный случай (3). $\square$

13.4. Классическое определение

Приведенные выше характеризации квазифробениусовых колец не делают классическое определение и связанные с ним дальнейшие характеризации излишними, ибо эти последние дают хорошую информацию о структуре идеалов квазифробениусовых колец.

Определение квазифробениусовых колец восходит к Т. Накаяме (1939 г.). Чтобы привести это определение, нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть R — артиново с обеих сторон кольцо и $N := \operatorname{rad}(R)$. Запишем

$$R = A_{11} \oplus \ldots \oplus A_{1g_1} \oplus A_{21} \oplus \ldots \oplus A_{2g_2} \oplus \ldots \oplus A_{k1} \oplus \ldots \oplus A_{kg_k}$$
$$= e_{11}R \oplus \ldots \oplus e_{1g_1}R \oplus \ldots \oplus e_{k1}R \oplus \ldots \oplus e_{kg_k}R.$$

Это — разложение в прямую сумму неразложимых правых идеалов $A_{ij} = e_{ij}R$ с ортогональными идемпотентами $e_{11}, \ldots, e_{kg_k}$. При этом индексация произведена таким образом, что $A_{i1}, \ldots, A_{ig_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ суть в точности все правые идеалы из разложения, изоморфные A_{i1}. Для краткости положим $A_i := A_{i1}$ и $e_i := e_{i1}$. Пусть еще $\bar{R} := R/N$ и $\bar{r} := r + N \in \bar{R}$. Ниже e и e' означают какие-нибудь два из ортогональных идемпотентов e_{ij}. В силу 12.5.1,

$$eR \cong e'R \Leftrightarrow \bar{e}\bar{R} \cong \bar{e}'\bar{R}.$$

Каждый из $\bar{e}_{ij}\bar{R}$ прост — и как правый идеал в $\bar{R}$, и как правый R-модуль (см. 11.4.3). Далее, каждый простой правый R-модуль изоморфен некоторому $(\bar{e}_{ij}\bar{R})_R$ (см. 9.3.4). Всё вместе это показывает, что

$$\bar{e}_1\bar{R}, \ \ldots, \ \bar{e}_k\bar{R}$$

является системой представителей классов изоморфных простых правых R-модулей.

13.4.1. ***Замечание.*** *Если e и e' — любые два из ортогональных идемпотентов e_{ij}, то*

$$eR \cong e'R \Leftrightarrow Re \cong Re'.$$

Доказательство. Согласно 12.5.1,

$$eR \cong e'R \Leftrightarrow \bar{e}\bar{R} \cong \bar{e}'\bar{R}.$$

Поскольку $\bar{R}$ как полупростое кольцо инъективно с обеих сторон, то, в силу 12.3.1 и 12.3.2,

$$\bar{e}\bar{R} \cong \bar{e}'\bar{R} \Leftrightarrow \bar{R}\bar{e} = \bar{R}\bar{e}'.$$

Повторно применяя 12.5.1, приходим к искомому утверждению. □

Если eR для некоторого идемпотента $e \neq 0$ неразложим, то это означает, что e нельзя представить в виде суммы $e = e' + e''$

двух ненулевых ортогональных идемпотентов. Отсюда следует, что и Re неразложим. Напомним, что в этом случае e называется *примитивным идемпотентом*.

Таким образом, из приведенного выше правостороннего разложения для R получается левостороннее разложение

$$R = Re_{11} \oplus \ldots \oplus Re_{1g_1} \oplus \ldots \oplus Re_{k1} \oplus \ldots \oplus Re_{kg_k},$$

которое обладает аналогичными свойствами.

В следующей теореме в качестве одного из эквивалентных условий фигурирует первоначальное определение квазифробениусовых колец, данное Накаямой.

13.4.2. ***Теорема.*** *Для артинова с обеих сторон кольца R приводимые ниже условия эквивалентны:*

(a) *R квазифробениусово;*

(b) *для каждого примитивного идемпотента e цоколи* $\operatorname{soc}(eR)$ *и* $\operatorname{soc}(Re)$ *просты и в* $\operatorname{soc}(R_R)$, *соотв. в* $\operatorname{soc}({}_RR)$, *содержатся с точностью до изоморфизма все простые правые, соотв. левые, R-модули;*

(c) *для каждого примитивного идемпотента e цоколи* $\operatorname{soc}(eR)$ *и* $\operatorname{soc}(Re)$ *просты и* $\operatorname{soc}(R_R) = \operatorname{soc}({}_RR)$;

(d) (определение Накаямы) *существует перестановка π множества* $\{1, \ldots, k\}$, *такая что для каждого* $i = 1, \ldots, k$

$$\operatorname{soc}(e_iR)_R \cong (\bar{e}_{\pi(i)}\bar{R})_R, \quad {}_R\operatorname{soc}(Re_{\pi(i)}) \cong {}_R(\bar{R}\bar{e}_i).$$

Доказательство. „(a) $\rightrightarrows$ (b)“: Пусть E — простой подмодуль в eR. Поскольку eR инъективен как прямое слагаемое в R_R, то eR содержит инъективную оболочку этого E, которая является прямым слагаемым в eR. Из того что eR неразложим, следует, что eR — инъективная оболочка для E. Так как $E \subsetneq^* eR$, то $E = \operatorname{soc}(eR)$. Этим доказано первое утверждение. Поскольку R_R и ${}_RR$ — кообразующие, то в $\operatorname{soc}(R_R)$, соотв. в $\operatorname{soc}({}_RR)$, содержатся с точностью до изоморфизма все простые правые, соотв. левые, R-модули.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“: Так как $\operatorname{soc}(R_R)$ содержит идеал, изоморфный $(\bar{e}\bar{R})_R$, то (в силу равенства $\bar{e}e = \bar{e}$) $\operatorname{soc}(R_R)\,e \neq 0$. Поскольку $\operatorname{soc}(R_R)$ — двусторонний идеал, отсюда вытекает, что он содержит некоторый ненулевой подыдеал идеала Re, а значит и $\operatorname{soc}(Re)$ (ибо последний прост и существен в Re). Таким образом, $\operatorname{soc}({}_RR) \subsetneq \subsetneq \operatorname{soc}(R_R)$ (так как $\operatorname{soc}({}_RR) = \operatorname{soc}(\bigoplus Re_{ij}) = \bigoplus \operatorname{soc}(Re_{ij})$). Обратное включение доказывается совершенно аналогично.

„(c) $\Rightarrow$ (b)“: Пусть e — примитивный идемпотент. Из того что $0 \neq \operatorname{soc}(Re) = \operatorname{soc}(Re)\,e$, следует, что

$$0 \neq \operatorname{soc}({}_RR)\,e = \operatorname{soc}(R_R)\,e.$$

Следовательно, найдется такое $x \in \operatorname{soc}(R_R)$, что xeR прост. Тогда $xeR \cong \bar{e}\bar{R}$ и, значит, имеет место (b).

„(b) $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d)“: Поскольку $\operatorname{soc}(e_iR)$ прост, для каждого $i \in \{1; \ldots, k\}$ найдется $\pi(i) \in \{1, \ldots, k\}$, такое что

(*) $\quad \operatorname{soc}(e_iR) \cong \bar{e}_{\pi(i)}\bar{R}$.

Так как в $\operatorname{soc}(R_R) = \bigoplus \operatorname{soc}(e_{ij}R)$ содержатся лишь простые идеалы, изоморфные некоторому $\operatorname{soc}(e_iR)$, $i = 1, \ldots, k$, и в то же время, согласно (b), должны быть представлены все классы изоморфных правых R-модулей, то $\{\operatorname{soc}(e_iR) \mid i = 1, \ldots, k\}$ образует систему представителей этих классов. Поскольку $\{\bar{e}_i\bar{R} \mid i = 1, \ldots, k\}$ тоже образует систему представителей, то $i \longmapsto \pi(i)$ (см. (*)) является перестановкой множества $\{1, \ldots, k\}$. Если $\operatorname{soc}(e_iR) = e_ia_iR$, то из изоморфизма $\operatorname{soc}(e_iR) \cong \bar{e}_{\pi(i)}\bar{R}$ следует, что $e_ia_ie_{\pi(i)} \neq 0$, поэтому $\operatorname{soc}(e_iR) = e_ia_ie_{\pi(i)}R$. Так как

$$0 \neq e_ia_ie_{\pi(i)} \in \operatorname{soc}(R_R) = \operatorname{soc}({}_RR),$$

то

$$Re_ia_ie_{\pi(i)} \subsetneq \operatorname{soc}({}_RR) \cap Re_{\pi(i)} = \operatorname{soc}(Re_{\pi(i)}),$$

а поскольку $\operatorname{soc}(Re_{\pi(i)})$ прост, мы заключаем, что

$$\operatorname{soc}(Re_{\pi(i)}) = Re_ia_ie_{\pi(i)}.$$

Тогда эпиморфизм

$$Re_i \ni re_i \longmapsto re_ia_ie_{\pi(i)} \in \operatorname{soc}(Re_{\pi(i)})$$

дает изоморфизм

$$\bar{R}\bar{e}_i \cong \operatorname{soc}(Re_{\pi(i)}),$$

чем и установлено (d).

„(d) $\Rightarrow$ (b)“: В силу теоремы Крулля — Ремака — Шмидта можно предполагать, что идемпотент e из (b) является одним из e_i, фигурирующих в (d), а тогда всё становится очевидным.

Тем самым доказано, что условия (b), (c) и (d) эквивалентны.

„(b) $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (a)“: Согласно 13.3.2, достаточно показать, что для любого простого правого R-модуля и любого простого левого R-модуля дуальный модуль также является простым. Так как изоморфные модули обладают изоморфными дуальными модулями, достаточно установить, что для каждого $\operatorname{soc}(e_iR)$ и каждого $\operatorname{soc}(Re_i)$, $i = 1, \ldots, k$, дуальный модуль прост, причем в силу симметрии можно ограничиться случаем $\operatorname{soc}(e_iR)$. Покажем сперва, что каждый ненулевой гомоморфизм

$$\varphi\colon \operatorname{soc}(e_iR)_R \longmapsto R_R$$

индуцируется умножением слева на некоторый элемент из Re_i. Используя доказанное выше равенство $\operatorname{soc}(e_iR) = e_ia_ie_{\pi(i)}R$, получаем

$$\varphi(e_ia_ie_{\pi(i)}r) = \varphi(e_ia_ie_{\pi(i)})e_{\pi(i)}r, \quad r \in R.$$

Если $q := \varphi(e_i a_i e_{\pi(i)}) \neq 0$, то $qe_{\pi(i)}R$ прост и, точно так же, как и при доказательстве импликации (b) $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d), мы имеем ($0 \neq Rqe_{\pi(i)} \subseteq \operatorname{soc}({}_RR) \cap Re_{\pi(i)} = \operatorname{soc}(Re_{\pi(i)}) \wedge \operatorname{soc}(Re_{\pi(i)})$ прост $\Rightarrow$ $\Rightarrow Rqe_{\pi(i)} = \operatorname{soc}(Re_{\pi(i)})$), откуда вытекает, что

$$Rqe_{\pi(i)} = \operatorname{soc}(Re_{\pi(i)}) = Re_i a_i e_{\pi(i)}.$$

Следовательно, существует $r_0 e_i \in Re_i$, такое что

$$qe_{\pi(i)} = r_0 e_i a_i e_{\pi(i)},$$

а значит,

$$\varphi(e_i a_i e_{\pi(i)} r) = qe_{\pi(i)} r = r_0 e_i a_i e_{\pi(i)} r.$$

Если умножение цоколя $\operatorname{soc}(e_iR) = e_i a_i e_{\pi(i)} R$ слева на элемент xe_i, $x \in R$, записывать как $(xe_i)^{\pi}$, то $\varphi = (r_0 e_i)^{\pi}$. Итак, отображение

$$\psi: Re_i \ni xe_i \longmapsto (xe_i)^{\pi} \in (\operatorname{soc}(e_iR))^*$$

есть эпиморфизм. Положим $N := \operatorname{rad}(R)$. Поскольку

$$0 = N \operatorname{soc}({}_RR) = N \operatorname{soc}(R_R),$$

то $Ne_i \subseteq \ker(\psi)$. Так как $\psi \neq 0$ и, согласно 11.4.3, Ne_i — единственный максимальный идеал в Re_i, то $\ker(\psi) = Ne_i$. Таким образом,

$$Re_i/Ne_i \cong (\operatorname{soc}(e_iR))^*$$

и, следовательно, $(\operatorname{soc}(e_iR))^*$ прост, ч. т. д. □

13.4.3. ***Следствие.*** *Если кольцо R артиново с обеих сторон, то следующие условия эквивалентны:*
(1) *R фробениусово;*
(2) $\operatorname{soc}(R_R) \cong (R/\operatorname{rad}(R))_R \wedge {}_R\operatorname{soc}({}_RR) \cong {}_R(R/\operatorname{rad}(R))$;
(3) *R квазифробениусово* $\wedge$

$$\operatorname{soc}(R_R)_R \cong (R/\operatorname{rad}(R))_R \text{ или } {}_R\operatorname{soc}({}_RR) \cong {}_R(R/\operatorname{rad}(R)).$$

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2) $\wedge$ (3)“: Очевидно из определения 13.2.2 (2).

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Так как в $(R/N)_R$, соотв. в ${}_R(R/N)$, содержатся с точностью до изоморфизма все простые правые, соотв. все простые левые R-модули, то же самое имеет место и для $\operatorname{soc}(R_R)_R$, соотв. для ${}_R\operatorname{soc}({}_RR)$. Поскольку

$$\oplus \operatorname{soc}(e_{ij}R) = \operatorname{soc}(R_R) \cong (R/N)_R = \oplus \bar{e}_{ij}\bar{R}$$

и все $\bar{e}_{ij}\bar{R}$ просты, подсчет числа слагаемых показывает, что и все $\operatorname{soc}(e_{ij}R)$ просты. Левосторонний случай разбирается аналогично. Таким образом, выполнено условие 13.4.2 (b).

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Пусть $\operatorname{soc}(R_R)_R \cong (R/N)_R$. Согласно 13.4.2 (d), это эквивалентно тому, что $g_i = g_{\pi(i)}$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Поскольку, ввиду 13.4.1, g_i не зависят от рассматриваемой стороны, то ${}_R\operatorname{soc}({}_RR) \cong {}_R(R/N)$, ч. т. д. □

13.5. Квазифробениусовы алгебры

Главная цель последующих рассмотрений — показать, что квазифробениусовы, соотв. фробениусовы, кольца в случае, когда они являются алгебрами над полем, могут быть также описаны с помощью классического определения квазифробениусовых, соотв. фробениусовых, алгебр.

Пусть K — поле и R_K — унитарная K-алгебра (см. 2.2.5). Это означает, в частности, что R_K есть унитарный K-модуль, т. е. векторное пространство над K. Алгебра R_K называется *конечномерной*, если размерность R как векторного пространства над K конечна. Если $A \subseteq R_R$, то для $a \in A$, $k \in K$

$$ak = (a1)k = a(1k) \in A,$$

т. е. всякий правый идеал является и K-подпространством в R_K. Если $B \subseteq {}_R R$, то для всех $b \in B$, $k \in K$

$$bk = (1b)k = (1k)b \in B,$$

так что и левые идеалы тоже являются K-подпространствами. Для всякого K-подпространства U в R_K его размерность над K будем, как обычно, обозначать через $\dim_K(U)$. Если $\dim_K(U) < \infty$, то для идеалов $A \subsetneq B \subseteq R_R$, соотв. $A \subsetneq B \subseteq {}_R R$, имеем

$$\dim_K(A) < \dim_K(B) < \infty.$$

Следовательно, в этом случае R представляет собой артиново с обеих сторон кольцо, потому что любая строго убывающая цепь идеалов обрывается через самое большее $\dim_K(R)$ шагов.

Рассмотрим теперь отображение

$$\varkappa: K \ni k \longmapsto 1k \in R \quad (1 \in R).$$

Из того, что $1(k_1 + k_2) = 1k_1 + 1k_2$ и

$$1(k_1k_2) = (1k_1)k_2 = ((1k_1)1)k_2 = (1k_1)(1k_2),$$

следует, что $\varkappa$ — кольцевой гомоморфизм. Для единицы e алгебры K имеем $1e = 1$, поэтому $\varkappa$ — ненулевой гомоморфизм и, следовательно (поскольку K — поле), мономорфизм. Далее, $\varkappa(K)$ лежит в центре кольца R. Действительно,

$$r(1k) = (r1)k = (1r)k = (1k)r, \quad r \in R, \ k \in K.$$

Ввиду этого факта мы можем и будем всюду далее предполагать, что K — подполе центра R (т. е. K заменяется на $\varkappa(K)$ и $\varkappa(K)$ снова называется K).

Пусть теперь $\dim_K(R) = n$. Рассмотрим дуальное к R_K векторное пространство

$$R^* := \mathrm{Hom}_K(R, K),$$

для которого также $\dim_K(R^*) = n$. (Заметьте, что теперь * относится к K, а не к R, как раньше!) Правило

$$(\varphi r)(x) := \varphi(rx), \quad \varphi \in R^*, \quad r, x \in R,$$

превращает R^* в правый R-модуль. Из того что $n = \dim_K(R) = \dim_K(R^*)$, следует, что R и R^* изоморфны как векторные пространства над K. Одним из существенных для дальнейшего вопросов является вопрос, изоморфны ли R и R^* также как правые R-модули. Мы покажем, что это так в том и только том случае, когда R — фробениусово кольцо.

13.5.1. *Лемма.* *Пусть* $\dim_K(R) = n$. *Для* $\varphi \in R^*$ *следующие условия эквивалентны:*
(1) $\ker(\varphi)$ *не содержит ненулевых правых идеалов* R;
(2) $\ker(\varphi)$ *не содержит ненулевых левых идеалов* R;
(3) $f: R_R \ni r \longmapsto \varphi r \in R_R^*$ *является* R*-изоморфизмом.*

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (3)“: Если $\varphi r = 0$, то $\varphi(rx) = 0$ для всех $x \in R$, т. е. $\varphi(rR) = 0$. Отсюда в силу (1) следует, что $r = 0$, т. е. f — мономорфизм. Поскольку $\dim_K(R) = \dim_K(R^*) = n$, то f — изоморфизм.

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: $\varphi(rR) = 0 \Rightarrow \varphi r = 0 \Rightarrow$ (поскольку f — изоморфизм) $r = 0$. Этим показано, что имеет место (1).

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: φR является K-подпространством в R^*. Предположим, что $\varphi R \neq R^*$. Тогда найдется $0 \neq x \in R$, такое что $\varphi(rx) = 0$ для всех $r \in R$ (можно взять любое ненулевое x из ортогонального дополнения к φR в R). Следовательно, $\varphi(Rx) = 0$, в противоречие с (2)! Таким образом, $\varphi R = R^*$, т. е. f — эпиморфизм, а значит, по размерностным соображениям, изоморфизм.

„(3) $\Rightarrow$ (2)“: Для каждого $0 \neq x \in R$ найдется такое $\xi \in R^*$, что $\xi(x) \neq 0$. Пусть $\xi = \varphi r$. Тогда $\varphi(rx) \neq 0$, а следовательно, $\varphi(Rx) \neq 0$, т. е. $Rx \not\subseteq \ker(\varphi)$. □

13.5.2. *Определение.* *Линейная функция* φ *на* R_K, *удовлетворяющая условиям* 13.5.1, *называется невырожденной.*

13.5.3. *Следствие.* *Если* $\dim_K(R) < \infty$, *то следующие условия эквивалентны:*
(1) *на* R_K *существует невырожденная линейная функция;*
(2) $R_R \cong R_R^*$.

Доказательство. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Это следует из 13.5.1.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Пусть $f: R_R \xrightarrow{\cong} R_R^*$ и $\varphi := f(1)$. Тогда

$$f(r) = f(1r) = f(1)\, r = \varphi r,$$

так что $f: R \ni r \longmapsto \varphi r \in R^*$. Поэтому, согласно 13.5.1, φ невырожденна. □

13.5.4. ***Определение.*** *Пусть* $\dim_K(R) < \infty$.
(a) *Алгебра* R *называется фробениусовой, если* $R_R \cong R_R^*$.
(b) *Алгебра* R *называется квазифробениусовой, если неразложимые прямые слагаемые в* R_R *и* R_R^* *совпадают с точностью до изоморфизма и перестановки слагаемых (т. е. каждому прямому слагаемому в* R_R *соответствует изоморфное ему прямое слагаемое в* R_R^*, *и обратно*).

В этом определении мы придерживаемся классической формулировки, с тем чтобы сделать доступнее старую литературу в этой области. Разъясним, что оно означает с современной точки зрения. В основе всего лежит то обстоятельство, что для произвольной конечномерной алгебры R_K дуальное пространство R_R^* как правый R-модуль является инъективной оболочкой для $(R/\mathrm{rad}(R))_R$, откуда сразу следует, что R_R^* является инъективным кообразующим. Поэтому условие (b) эквивалентно тому, что R_R является инъективным кообразующим, и, значит, представляет собой квазифробениусово кольцо, а условие (a) означает, что, кроме того,

$$\mathrm{soc}(R_R) \cong \mathrm{soc}(R_R^*) \cong (R/\mathrm{rad}(R))_R,$$

т. е. R является даже фробениусовым кольцом. Всё это сейчас мы докажем строго.

Для того чтобы доказать, что R_R^* — инъективная оболочка модуля $(R/\mathrm{rad}(R))_R$, установим сперва тот факт, что каждая полупростая конечномерная алгебра является фробениусовой. При этом алгебра называется *полупростой*, если она полупроста как кольцо (см. § 8.2).

13.5.5. ***Следствия.*** (1) *Если* R_K *— фробениусова алгебра,* S_K *— произвольная* K*-алгебра и* $R \cong S$ (*изоморфизм* K*-алгебр*), *то* S_K *— фробениусова алгебра.*
(2) *Пусть*

$$R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$$

— разложение K*-алгебры* R_K *в прямую сумму ненулевых двусторонних идеалов. Алгебра* R *фробениусова тогда и только тогда, когда каждый идеал* A_i, $i = 1, \ldots, m$, *является фробениусовой алгеброй.*
(3) *Пусть* L *— тело, содержащее* K *в центре, причем* $\dim_K(L) < \infty$. *Тогда кольцо всех квадратных матриц порядка* n ($n \in \mathbb{N}$) *с коэффициентами из* L *является фробениусовой алгеброй над* K.
(4) *Каждая конечномерная полупростая алгебра фробениусова.*
(5) *Если* G *— конечная (мультипликативная) группа и* K *— поле, то групповое кольцо* GK *является фробениусовой алгеброй над* K.

Доказательство. (1) Изоморфизм алгебр $\rho\colon R \to S$ является кольцевым гомоморфизмом, для которого $\rho(x)k = \rho(xk)$ при всех $x \in R$, $k \in K$. Пусть φ — невырожденная линейная функция на R_K. Тогда $\varphi\rho^{-1}$ — невырожденная линейная функция на S_K, так как из

$$0 = \varphi\rho^{-1}(s_0 S) = \varphi(\rho^{-1}(s_0)\rho^{-1}(S)) = \varphi(\rho^{-1}(s_0)R)$$

следует, что $\rho^{-1}(s_0) = 0$, т. е. $s_0 = 0$.

(2) Если φ — невырожденная линейная функция на R_K, то $\varphi | A_i$, $i = 1, \ldots, m$, — невырожденная линейная функция на A_i. Это сразу становится ясным, если заметить, что $A_i A_j = 0$ при $i \neq j$ и, стало быть, $aA_i = aR$ для $a \in A_i$. Обратно, если φ_i — невырожденная линейная функция на A_i, $i = 1, \ldots, m$, то $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — невырожденная линейная функция R, поскольку из

$$0 = \varphi((a_1 \ldots, a_m)R)$$

следует, что $0 = \varphi_i(a_i A_i)$ для всех i и, значит, по предположению $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

(3) Пусть $w_1, \ldots, w_m$, где $w_1 = 1$ — базис L_K над K и d_{ij} — матрица с 1 на (i, j)-м месте и 0 на остальных. Тогда, очевидно, $d_{ij}w_l$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, m)$ — базис кольца матриц $L^{n,n}$ над K. Определим функцию $\varphi\colon L^{n,n} \to K$ формулой

$$\varphi\left(\sum_{i,j,l} d_{ij}w_l k_{ij}^l\right) := \sum_i k_{ii}^1.$$

Это — невырожденная линейная функция. Действительно, пусть

$$r = \sum_{i,j,l} d_{ij}w_l k_{ij}^l \neq 0.$$

Тогда найдется $k_{i_0 j_0}^{l_0} \neq 0$. Следовательно,

$$x := \sum_{l=1}^{m} w_l k_{i_0 j_0}^l \neq 0$$

и

$$\varphi(r d_{j_0 i_0} x^{-1}) = 1.$$

Таким образом, ядро φ не содержит ненулевого правого идеала.

(4) На основании 8.2.4 и (2) можно ограничиться случаем, когда R_K — простая конечномерная алгебра. Тогда можно применить 8.3.2. Пусть E — простой правый идеал в R. Положим $L := \mathrm{End}(E_R)$. Тогда ${}_L E$ — конечномерное векторное пространство над L. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — какой-нибудь базис ${}_L E$. Согласно 8.3.2, имеем кольцевой изоморфизм

$$\rho\colon R \ni r \longmapsto (l_{ij}) \in L^{n,n},\ l_{ij} \in L,$$

где матрица (l_{ij}) определяется из условия

$$\begin{pmatrix} v_1 r \\ \vdots \\ v_n r \end{pmatrix} = (l_{ij}) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Так как K содержится в центре R, то K является подполем в L, а поскольку $K \subset R$, то даже подполем центра L. Следовательно, $L^{n,n}$ является также K-алгеброй, причем $(l_{ij})k = (l_{ij}k)$ для $k \in K$; здесь $l_{ij}k$ — произведение в L. Поэтому для rk имеем

$$v_i(rk) = (v_i r)\ k = \left(\sum_{j=1}^{n} l_{ij} v_j\right) k = \sum_{j=1}^{n} (l_{ij}k)\, v_j,$$

а значит,

$$\rho(rk) = \rho(r)\, k,$$

т. е. ρ есть K-изоморфизм алгебр. Теперь наше утверждение следует из (1) и (3).

(5) Пусть $|G| = n$ и $G = \{g_1 = e, g_2, \ldots, g_n\}$. Тогда

$$\varphi\colon GK \ni \sum_{i=1}^{n} g_i k_i \longmapsto k_1 \in K$$

— невырожденная линейная функция. Действительно, если в $\sum_{i=1}^{n} g_i k_i$, скажем, $k_j \neq 0$, то

$$\varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} g_i k_i\right) g_j^{-1}\right) = k_j \neq 0,$$

так что $\ker(\varphi)$ не содержит ненулевых правых идеалов. □

13.5.6. ***Теорема.*** *Пусть K — поле. Для всякой конечномерной K-алгебры R_K*

(a) $R/\mathrm{rad}(R) \cong \mathrm{soc}(R_R^*)$ *как правые R-модули;*
(b) R_R^* *— инъективная оболочка для* $(R/\mathrm{rad}(R))_R$;
(c) R_R^* *— инъективный кообразующий.*

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. R_R^* инъективен. Доказательство этого факта совершенно аналогично доказательству предложения 5.5.2. В роли $\mathbf{Z}$ выступает теперь K, а в роли $D_{\mathbf{Z}}$ выступает K_K; $\mathbf{Z}$-инъективности $D_{\mathbf{Z}}$ соответствует теперь K-инъективность K_K. После этих изменений доказательство предложения 5.5.2 дословно переносится на наш случай.

Шаг 2. Согласно 9.3.5, $\operatorname{soc}(R_R^*) = l_{R^*}(\operatorname{rad}(R))$. Мы утверждаем, что $\xi \in l_{R^*}(\operatorname{rad}(R)) \Leftrightarrow \operatorname{rad}(R) \subseteq \ker(\xi)$. Действительно, пусть

$$(\xi u)(x) = \xi(ux) = 0$$

для всех $u \in \operatorname{rad}(R)$ и всех $x \in R$. Беря $x = 1$, получаем $\operatorname{rad}(R) \subseteq \ker(\xi)$. Обратно, пусть имеет место это включение. Тогда (поскольку $\operatorname{rad}(R)$ — правый идеал)

$$0 = \xi(ux) = (\xi u)(x)$$

для всех $u \in \operatorname{rad}(R)$, $x \in R$ и, следовательно, $\xi \in l_{R^*}(\operatorname{rad}(R))$.

Шаг 3. Для $\xi \in \operatorname{soc}(R_R^*)$ обозначим через $\bar{\xi}$ индуцированную ξ линейную функцию

$$\bar{\xi}\colon R/\operatorname{rad}(R) \ni x + \operatorname{rad}(R) \longmapsto \xi(x) \in K.$$

Мы утверждаем, что отображение

$$\psi\colon \operatorname{soc}(R_R^*) \ni \xi \to \bar{\xi} \in \operatorname{Hom}_K(R/\operatorname{rad}(R), K)$$

является R-изоморфизмом. То, что это R-мономорфизм, очевидно. Пусть теперь $g \in \operatorname{Hom}_K(R/\operatorname{rad}(R), K)$ и

$$\nu\colon R \to R/\operatorname{rad}(R).$$

Тогда $g\nu \in \operatorname{soc}(R_R^*)$ и $\overline{g\nu} = g$. Следовательно, ψ — изоморфизм.

Шаг 4. Поскольку $R/\operatorname{rad}(R)$ — конечномерная полупростая K-алгебра, то по 13.5.5 существует $R/\operatorname{rad}(R)$-изоморфизм

$$\Lambda\colon \operatorname{Hom}_K(R/\operatorname{rad}(R), K) \to R/\operatorname{rad}(R),$$

который мы можем и будем рассматривать также как R-изоморфизм. В итоге мы имеем изоморфизм

$$\Lambda\psi\colon \operatorname{soc}(R_R^*)_R \to (R/\operatorname{rad}(R))_R.$$

Этим доказано утверждение (a). Обозначим обратный изоморфизм через f.

Шаг 5. Пусть $\iota\colon \operatorname{soc}(R_R^*) \to R_R^*$ — включение. Поскольку $\operatorname{soc}(R_R^*) \subseteq^{\bullet} R_R^*$ (в силу артиновости) и R_R^* инъективен, то

$$\iota f\colon (R/\operatorname{rad}(R))_R \to R_R^*$$

— инъективная оболочка. Этим доказано утверждение (b).

Шаг 6. Так как в $(R/\operatorname{rad}(R))_R$ содержатся с точностью до изоморфизма все простые R-модули, то R_R^* является кообразующим, т. е. выполнено (c). □

Дадим теперь обещанное строгое доказательство.

13.5.7. ***Теорема.*** *Пусть R_K — конечномерная алгебра над полем K.* (1) *Алгебра R_K квазифробениусова тогда и только тогда, когда R — квазифробениусово кольцо.*

(2) *Алгебра* R_K *фробениусова тогда и только тогда, когда* R — *фробениусово кольцо.*

Доказательство. (1) Напомним, что модуль является кообразующим, если и только если для любой инъективной оболочки каждого простого модуля он содержит изоморфный этой оболочке подмодуль. Последний будет тогда неразложимым прямым слагаемым кообразующего. Поскольку, согласно 13.5.6, R_R^* есть (инъективный) кообразующий, то R_R является кообразующим в том и только том случае, когда R_K — квазифробениусова алгебра.

(2) Если R_K — фробениусова алгебра, то R_K — тоже квазифробениусова алгебра, а значит, в силу (1), квазифробениусово кольцо. Далее, в силу 13.5.6 и изоморфизма $R_R^* \cong R_R$,

$$(R/\mathrm{rad}\,(R))_R \cong \mathrm{soc}\,(R_R^*) \cong \mathrm{soc}\,(R_R).$$

На основании 13.4.3 заключаем, что R — фробениусово кольцо. Обратно, пусть R — фробениусово кольцо. Тогда R — квазифробениусово кольцо и по определению имеем

$$(R/\mathrm{rad}\,(R))_R \cong \mathrm{soc}\,(R_R).$$

Следовательно, инъективная оболочка R_R^* модуля $(R/\mathrm{rad}\,(R))_R$ изоморфна инъективной оболочке R_R модуля $\mathrm{soc}\,(R_R)$, поэтому R_K — фробениусова алгебра. То что R_R действительно является инъективной оболочкой для $\mathrm{soc}\,(R_R)$, следует из инъективности R_R и того факта, что для артиновых колец $\mathrm{soc}\,(R_R) \subset^{\mathrm{ess}} R_R$. □

13.6. Характеризация квазифробениусовых колец

В заключение мы вернемся еще раз к общему случаю квазифробениусовых колец и дадим для них одну интересную характеризацию. Она интересна, в частности, тем, что здесь для получения алгебраических результатов существенно используются теоретико-множественные рассуждения. Мы должны будем при этом применить некоторые теоретико-множественные факты, которые в этой книге не доказываются, однако их доказательства можно найти в любом учебнике по теории множеств.

13.6.1. ***Теорема*** (Фейс — Уокер). *Для кольца* R *следующие условия эквивалентны:*

(1) R — *квазифробениусово кольцо;*

(2) *каждый проективный правый* R*-модуль инъективен;*

(3) *каждый инъективный правый* R*-модуль проективен.*

Доказательство. Проведем доказательство по схеме (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3), (2) $\Rightarrow$ (1), (3) $\Rightarrow$ (1). При этом первые две импликации доказываются легко, и мы сперва сразу освободимся от них,

в то время как для двух последних нужно будет заводить речь издалека.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Так как R_R инъективен и нётеров, то согласно 6.5.1 каждый свободный правый R-модуль инъективен, а значит и каждое прямое слагаемое такого модуля инъективно. Следовательно, каждый проективный правый R-модуль инъективен.

„(1) $\Rightarrow$ (3)“: Пусть Q_R — инъективный R-модуль. Согласно 6.6.4, Q есть прямая сумма подмодулей, которые являются инъективными оболочками простых правых R-модулей. Поэтому достаточно показать, что каждый такой модуль проективен. Но действительно, поскольку R_R — кообразующий, каждая проективная оболочка простого правого R-модуля изоморфна прямому слагаемому в R_R и потому проективна.

Для продолжения доказательства нам понадобится следующее

13.6.2. ***Предложение.*** *Пусть R — произвольное кольцо R и M_R — произвольный R-модуль. Если модуль $M^{(\mathbf{N})}$ инъективен, то R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей для правых идеалов вида $\mathfrak{r}_R(U)$, где $U \subset M$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существуют $U_i \subset M_i$, $i \in \mathbf{N}$, такие что

$$\mathfrak{r}_R(U_1) \underset{\neq}{\subsetneq} \mathfrak{r}_R(U_2) \underset{\neq}{\subsetneq} \ldots.$$

Тогда (поскольку $\mathfrak{r}_R\mathfrak{l}_M\mathfrak{r}_R(U) = \mathfrak{r}_R(U)$)

$$\mathfrak{l}_M\mathfrak{r}_R(U_1) \underset{\neq}{\supsetneq} \mathfrak{l}_M\mathfrak{r}_R(U_2) \underset{\neq}{\supsetneq} \ldots.$$

Выберем для каждого $i \in \mathbf{N}$

$$x_i \in \mathfrak{l}_M\mathfrak{r}_R(U_i), \quad x_i \notin \mathfrak{l}_M\mathfrak{r}_R(U_{i+1}).$$

Тогда найдется такой элемент $a_{i+1} \in \mathfrak{r}_R(U_{i+1})$, что $x_i a_{i+1} \neq 0$. Положим, далее,

$$A := \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \mathfrak{r}_R(U_i).$$

Ясно, что $A \subsetneq R_R$ и для каждого $a \in A$ существует $n_a \in \mathbf{N}$, такое что

$$a \in \mathfrak{r}_R(U_i) \text{ для всех } i \geqslant n_a.$$

Отсюда вытекает, что

$$x_i a = 0 \text{ для всех } i \geqslant n_a.$$

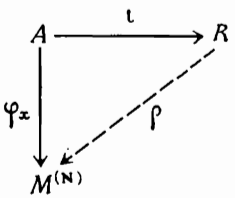
Следовательно, для элемента $x := (x_1 x_2 x_3 \ldots) \in M^{\mathbf{N}}$

$$xa = (x_1 a x_2 a \ldots x_{n_a - 1} a\ 000 \ldots) \in M^{(\mathbf{N})}.$$

Стало быть,

$$\varphi_x\colon\ A \ni a \longmapsto xa \in M^{(\mathbf{N})}$$

— гомоморфизм. По нашему предположению $M^{(\mathbf{N})}$ инъективен, поэтому существует коммутативная диаграмма



Пусть $\rho(1) = (z_1 z_2 \ldots z_n 000\ldots)$. Тогда для всех $a \in A$

$$\varphi_x(a) = xa = \rho(a) = \rho(1)\, a = (z_1 a \ldots z_n a\ 000\ldots).$$

Следовательно, $x_i a = 0$ для всех $i > n$ и всех $a \in A$, в частности $x_i a_{i+1} = 0$ при $i > n$ ↯. □

Продолжим теперь доказательство теоремы 13.6.1.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Так как по предположению $R^{(\mathbf{N})}$ — инъективный правый R-модуль, мы можем применить 13.6.2 для случая $M_R = R_R$. Получим, что R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей для идеалов вида $\mathrm{r}_R(U)$, где $U \subset R$. Поскольку R_R инъективен, то, в силу 12.4.2, R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей для конечно-порожденных, в частности для циклических левых идеалов. На основании 11.6.3 заключаем, что R_R — совершенный модуль. Положим $N := \mathrm{rad}(R)$. Тогда цепь

$$\mathrm{r}_R(N) \subsetneq \mathrm{r}_R(N^2) \subsetneq \mathrm{r}_R(N^3) \subsetneq \ldots$$

обрывается, т. е. существует $t \in \mathbf{N}$, для которого

$$\mathrm{r}_R(N^t) = \mathrm{r}_R(N^{t+i}),\quad i \geqslant 0.$$

Так как N^i — двусторонний идеал, то и $\mathrm{r}_R(N^i)$ — двусторонний идеал. Предположим, что $\mathrm{r}_R(N^t) \neq R$. Тогда, согласно 11.6.3,

$$\mathrm{soc}({}_R(R/\mathrm{r}_R(N^t))) \neq 0.$$

Пусть $\bar{x}$ — какой-нибудь ненулевой элемент из этого цоколя. Тогда $x \notin \mathrm{r}_R(N^t)$ и (поскольку цоколь полупрост) $N\bar{x} = 0$, следовательно, $Nx \subset \mathrm{r}_R(N^t)$. Поэтому

$$N^t N x = N^{t+1} x = 0,$$

стало быть $x \in \mathrm{r}_R(N^{t+1}) = \mathrm{r}_R(N^t)$ ↯. Это противоречие показывает, что $\mathrm{r}_R(N^t) = R$, а потому $N^t = 0$, т. е. $N = \mathrm{rad}(R)$ нильпотентен. Следовательно, ${}_R R$ также является совершенным. Согласно 11.6.3, каждый ненулевой правый R-модуль имеет тогда ненулевой цоколь.

Поэтому $\operatorname{soc}(R_R) \subsetneq^{*} R_R$. Этим показано, что выполнено условие 12.5.6 (6), откуда следует, что R_R — кообразующий. Поэтому, в силу 12.4.1, $r_R l_R(A) = A$ для каждого правого идеала A в R и, следовательно, R_R нётеров. Так как, кроме того, R_R инъективен, то (по 13.2.1) R квазифробениусово. Этим показано, что (2) $\Rightarrow$ (1).

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Так как каждый инъективный правый R-модуль проективен, то каждый инъективный модуль можно мономорфно отобразить в свободный модуль. Поскольку каждый правый R-модуль можно мономорфно отобразить в некоторый инъективный модуль, то (по 4.8.2) R_R является кообразующим. Теперь надо показать, что модуль R_R нётеров. Пусть Q_R — его инъективная оболочка. Так как R_R — кообразующий, то и Q_R — кообразующий. Мы вначале предположим, что $Q^{(\mathbb{N})}$ инъективен, и закончим доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (1) при этом предположении; доказательство инъективности $Q^{(\mathbb{N})}$ мы приведем в конце. Согласно 13.6.2 (при $M_R = Q_R$), R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей для правых идеалов вида $r_R(U)$, где $U \subset Q$. Так как, в силу 12.4.1, каждый правый идеал в R имеет такой вид, то R_R нётеров, и тем самым доказательство завершено, — в предположении, что уже доказана инъективность $Q^{(\mathbb{N})}$.

Если до сих пор доказательство проходило в рамках привычных рассуждений, то в дальнейшем нам придется существенно использовать теоретико-множественные рассуждения. Отдельные шаги доказательства, представляющие самостоятельный интерес, мы сформулируем в виде самостоятельных предложений.

Наша ближайшая цель — доказать *теорему Капланского*, утверждающую, что каждый проективный модуль является прямой суммой счетно-порожденных подмодулей. При этом „счетный“ включает в себя „конечный“.

13.6.3. *Предложение.* *Пусть R — произвольное кольцо и M — произвольный R-модуль. Предположим, что*

$$M = \bigoplus_{j \in J} M_j = A \oplus B,$$

где каждый модуль M_j счетно-порожден. Тогда для каждого множества $H \subset J$, такого что

$$U := \bigoplus_{j \in H} M_j$$

удовлетворяет условию

$$U = (A \cap U) \oplus (B \cap U),$$

существует множество I, $H \subset I \subset J$, такое что

$$W := \bigoplus_{j \in I} M_j$$

удовлетворяет условиям

$$W = (A \cap W) \oplus (B \cap W)$$

и

$$A \cap W = (A \cap U) \oplus C,$$

где C — некоторый счетно-порожденный подмодуль.

Доказательство. Пусть α и β $(= 1_M - \alpha)$ — проекции, соответствующие разложению $M = A \oplus B$. Пусть $i_0 \in J \setminus H$. Поскольку M_i счетно-порожден, то $\alpha(M_{i_0})$ и $\beta(M_{i_0})$ счетно-порождены. Поэтому найдется такое счетное множество $I_1 \subset J$, что

$$M_{i_0} \subset \alpha(M_{i_0}) + \beta(M_{i_0}) \subset \bigoplus_{j \in I_1} M_j.$$

Поскольку каждый модуль M_j счетно-порожден и I_1 — счетное множество, то $\bigoplus_{j \in I_1} M_j$ счетно-порожден. Следовательно, существует счетное множество $I_2 \subset J$, для которого

$$\bigoplus_{j \in I_1} M_j \subset \alpha\left(\bigoplus_{j \in I_1} M_j\right) + \beta\left(\bigoplus_{j \in I_1} M_j\right) \subset \bigoplus_{j \in I_2} M_j.$$

Продолжая по индукции, получаем последовательность счетных множеств

$$I_0 := \{i_0\},\ I_1,\ I_2,\ \ldots,$$

таких что

$$\bigoplus_{j \in I_n} M_j \subset \alpha\left(\bigoplus_{j \in I_n} M_j\right) + \beta\left(\bigoplus_{j \in I_n} M_j\right) \subset \bigoplus_{j \in I_{n+1}} M_j.$$

Поскольку $\operatorname{im}(\alpha) = A$ и $\operatorname{im}(\beta) = B$, это означает, что

$$(*) \qquad \bigoplus_{j \in I_n} M_j \subset \left(A \cap \bigoplus_{j \in I_{n+1}} M_j\right) + \left(B \cap \bigoplus_{j \in I_{n+1}} M_j\right).$$

Ясно, что множества

$$L := \bigcup_{n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots} I_n \text{ и } L \setminus H$$

также счетны. Положим $I := H \cup L$ и

$$V := \bigoplus_{j \in L \setminus H} M_j,\ W := \bigoplus_{j \in I} M_j = U \oplus V.$$

Очевидно, V тоже счетно-порождено. Мы утверждаем, что

$$W = (A \cap W) \oplus (B \cap W).$$

Прежде всего ясно, что $(A \cap W) \oplus (B \cap W) \subset W$. Чтобы доказать обратное включение, мы покажем, что каждое M_j, $j \in I$, содержится в $(A \cap W) \oplus (B \cap W)$. Для $j \in H$ это верно по предположению.

Если же $j \in L \setminus H$, причем, скажем, $j \in I_n$, то это имеет место согласно (*).

Из равенств

$$W = U \oplus V = (A \cap U) \oplus (B \cap U) \oplus V$$

и закона модулярности следует, что

$$A \cap W = (A \cap U) \oplus C, \quad B \cap W = (B \cap U) \oplus D,$$

где

$$C := ((B \cap U) \oplus V) \cap A, \quad D := ((A \cap U) \oplus V) \cap B.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} W &= (A \cap W) \oplus (B \cap W) \\ &= (A \cap U) \oplus (B \cap U) \oplus C \oplus D = U \oplus C \oplus D. \end{aligned}$$

Так как $W = U \oplus V$, то мы получаем, что

$$V \cong W/U \cong C \oplus D.$$

Таким образом, C является эпиморфным образом счетно-порожденного модуля V и потому сам счетно-порожден. □

13.6.4. ***Теорема.*** *Пусть R — произвольное кольцо и M — произвольный R-модуль. Если*

$$M = \bigoplus_{j \in J} M_j = A \oplus B,$$

где подмодули M_j счетно-порождены, то модули A и B являются прямыми суммами счетно-порожденных подмодулей.

Доказательство. Само собой разумеется, достаточно доказать утверждение для A. Пусть $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — множество всех счетно-порожденных подмодулей модуля A. Положим

$$\begin{aligned} X := \{(H, \Gamma) \mid H \subset J \wedge \Gamma \subset \Lambda \\ \wedge \bigoplus_{j \in H} M_j = \Big(A \cap \bigoplus_{j \in H} M_j\Big) \oplus \Big(B \cap \bigoplus_{j \in H} M_j\Big) \\ \wedge A \cap \bigoplus_{j \in H} M_j = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda\}. \end{aligned}$$

Так как $(\emptyset, \emptyset) \in X$, то $X \neq \emptyset$. Введем на X порядок следующим образом:

$$(H_1, \Gamma_1) \leqslant (H_2, \Gamma_2) \Leftrightarrow H_1 \subset H_2 \wedge \Gamma_1 \subset \Gamma_2.$$

Если $Y \subset X$ — произвольное вполне упорядоченное подмножество, то, как легко проверить,

$$(H', \Gamma'), \text{ где } H' := \bigcup_{(H, \Gamma) \in Y} H, \quad \Gamma' := \bigcup_{(H, \Gamma) \in Y} \Gamma,$$

служит верхней гранью для Y в X. По лемме Цорна существует некоторый максимальный элемент $(\bar{H}, \bar{\Gamma}) \in X$. Допустив, что $\bar{H} \neq J$, мы получили бы, согласно 13.6.3, что существует строго больший элемент в X $\lightning$. Поэтому $\bar{H} = J$. □

13.6.5. ***Следствие.*** *Каждый проективный R-модуль над произвольным кольцом R является прямой суммой счетно-порожденных подмодулей.*

Доказательство. Поскольку каждый проективный R-модуль изоморфен прямому слагаемому некоторого свободного R-модуля, это утверждение следует из 13.6.4 при $M = R^{(J)}$. □

13.6.6. ***Предложение.*** *Пусть R — произвольное кольцо и A_R — конечно-порожденный R-модуль. Тогда если инъективная оболочка модуля A проективна, то она конечно-порождена.*

Доказательство. Так как все инъективные оболочки A изоморфны, то без ограничения общности можно считать, что A — подмодуль своей инъективной оболочки Q. Поскольку модуль Q проективен, существует мономорфизм

$$\mu\colon Q \to R^{(J)}$$

в некоторый свободный R-модуль. Так как A конечно-порожден, найдется конечное подмножество $J_0 \subset J$, для которого

$$\mu(A) \subseteq R^{(J_0)} \subseteq R^{(J)}.$$

Обозначая через π проекцию $R^{(J)}$ на $R^{(J_0)}$, получаем, что $\pi\mu \mid A$ — мономорфизм. Поскольку $A \subseteq^{*} Q$, то и $\pi\mu$ — мономорфизм. Следовательно, модуль $\pi\mu(Q)$ конечно-порожден как прямое слагаемое в $R^{(J_0)}$, а тогда конечно-порожден и Q. □

13.6.7. ***Следствие.*** *Для произвольного кольца R имеет место следующее: каждый R-модуль, который одновременно проективен и инъективен, является прямой суммой конечно-порожденных подмодулей.*

Доказательство. Согласно 13.6.5, достаточно доказать утверждение для счетно-порожденного одновременно проективного и инъективного R-модуля M. Пусть

$$M = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i R$$

— такой модуль. Обозначим через $Q_1 \subseteq M$ инъективную оболочку для $x_1 R$. Так как модуль Q_1 — прямое слагаемое в M, то он также проективен и, стало быть, согласно 13.6.6, конечно-порожден. Пусть

$$M = Q_1 \oplus B_1.$$

Тогда B_1 также проективен и инъективен. Пусть уже индуктивно построены $Q_1, \ldots, Q_n$ и B_n, такие что

$$M = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_n \oplus B_n$$

и $x_1, \ldots, x_n \in \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$, и пусть

$$x_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}, \text{ где } a_{n+1} \in \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i, \ b_{n+1} \in B_n.$$

Возьмем в качестве $Q_{n+1} \subsetneq B_n$ инъективную оболочку для $b_{n+1}R$. Для полученной таким образом последовательности конечно-порожденных прямых слагаемых

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots,$$

удовлетворяющей условию $x_1, \ldots, x_n \in \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$, очевидно имеет место равенство

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Q_i. \qquad \square$$

Покажем теперь инъективность модуля $Q^{(\mathbb{N})}$ из доказательства импликации (3) $\Rightarrow$ (1) в теореме 13.6.1. Напомним, что Q — инъективная оболочка для R_R. По предположению Q также проективен и потому, согласно 13.6.6, конечно-порожден. Пусть теперь τ — некоторое бесконечное кардинальное число, строго большее $2^{|R|}$, где $|R|$ — кардинальное число множества R. Если A_R — конечно-порожденный R-модуль, то τ больше, чем кардинальное число множества всех подмодулей в A_R, так как это множество является частью множества всех подмножеств в R, а последнее множество имеет кардинальное число $2^{|R|}$ (см. любой учебник по теории множеств).

Пусть теперь I — какое-нибудь множество с кардинальным числом τ. Положим

$$M := Q^I = \prod_{i \in I} Q_i, \text{ где } Q_i = Q \text{ для всех } i \in I.$$

Так как модуль Q инъективен, то и M инъективен, а следовательно, также проективен. Пусть Q'_i — образ сомножителя $Q_i = Q$ при каноническом мономорфизме $\sigma\eta_i$ (см. 4.1.5).

С другой стороны, согласно 13.6.7, M есть прямая сумма конечно-порожденных подмодулей:

$$M = \bigoplus_{J \in \mathcal{J}} M_J.$$

Выберем произвольное $i_1 \in I$. Поскольку модуль Q'_{i_1} конечно-порожден, существует конечное подмножество $J_1 \subset J$, такое что

$$Q'_{i_1} \subsetneq \bigoplus_{j \in J_1} M_j.$$

Положим еще

$$Q_{(1)} := Q'_{i_1} \text{ и } D_1 := \bigoplus_{j \in J_1} M_j.$$

Ясно, что модуль D_1 конечно-порожден и найдется $B_1 \subsetneq D_1$, для которого

$$D_1 = Q_{(1)} \oplus B_1.$$

Рассмотрим множество

$$\{D_1 \cap Q'_i \mid i \in I \wedge i \neq i_1\}.$$

Это множество подмодулей конечно-порожденного модуля D_1. В силу выбора кардинального числа τ множества I не все $D_1 \cap Q'_i$ различны между собой (трансфинитный принцип ящиков). Пусть, скажем,

$$i_2,\ k \in I \setminus \{i_1\},\ i_2 \neq k \text{ и } D_1 \cap Q'_{i_2} = D_1 \cap Q'_k.$$

Поскольку $Q'_{i_2} \cap Q'_k = 0$, то

$$D_1 \cap Q'_{i_2} = D_1 \cap Q'_k = 0.$$

Следовательно,

$$Q'_{i_2} \xrightarrow{\iota_2} \bigoplus_{j \in J} M_j \xrightarrow{\pi_2} \bigoplus_{j \in J \setminus J_1} M_j$$

— мономорфизм (здесь ι_2 и π_2 — соответствующие включение и проекция, причем $\ker(\pi_2\iota_2) = D_1 \cap Q'_{i_2} = 0$, ибо $\ker(\pi_2) = D_1$). Так как Q'_{i_2} конечно-порожден, существует конечное множество

$$J_2 \subset J \setminus J_1,$$

такое что

$$\operatorname{im}(\pi_2\iota_2) \subsetneq D_2 := \bigoplus_{j \in J_2} M_j.$$

В силу выбора J_2 имеем $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. Пусть теперь

$$Q_{(2)} := \operatorname{im}(\pi_2\iota_2).$$

Тогда

$$Q_{(2)} \cong Q'_{i_2} \cong Q$$

и существует такое B_2, что

$$D_2 = Q_{(2)} \oplus B_2.$$

По индукции мы можем построить модуль Q'_{i_n}, $i_n \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_{n-1}\}$, для которого

$$(D_1 \oplus \ldots \oplus D_{n-1}) \cap Q'_{i_n} = 0$$

и

$$Q'_{i_n} \xrightarrow{\iota_n} \bigoplus_{j \in J} M_j \xrightarrow{\pi_n} \bigoplus_{j \in J \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_{n-1})} M_j,$$

а также конечное множество

$$J_n \subset J \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_{n-1}),$$

удовлетворяющее условию

$$\operatorname{im}(\pi_n \iota_n) \subsetneq D_n := \bigoplus_{i \in J_n} M_j.$$

Далее,

$$J_n \cap (J_1 \cup \ldots \cup J_{n-1}) = \emptyset.$$

Если положить

$$Q_{(n)} := \operatorname{im}(\pi_n \iota_n),$$

то снова $Q_{(n)} \cong Q$ и существует такое B_n, что

$$D_n = Q_{(n)} \oplus B_n.$$

Для получающихся таким образом последовательностей

$$J_1, J_2, J_3, \ldots, \quad D_1, D_2, D_3, \ldots,$$
$$Q_{(1)}, Q_{(2)}, Q_{(3)}, \ldots, \quad B_1, B_2, B_3, \ldots$$

имеют место следующие соотношения:

(*) $Q^{(\mathbb{N})} \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Q_{(i)}$ (поскольку $Q_{(i)} \cong Q$),

$$M = \bigoplus_{j \in J} M_j = \Big(\bigoplus_{j \in H} M_j\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j \in J \setminus H} M_j\Big),$$

$$\bigoplus_{j \in H} M_j = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{j \in J_i} M_j\Big) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Big(Q_{(i)} \oplus B_i\Big),$$

где

$$H := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i.$$

Следовательно,

$$M = \Big(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Q_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j \in J \setminus H} M_j\Big).$$

Таким образом, модуль

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Q_{(i)}$$

является прямым слагаемым инъективного модуля M и потому сам инъективен. Тогда, согласно (*), и $Q^{(N)}$ также инъективен, что и требовалось доказать. Тем самым доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (1) завершено. □

Упражнения

1. Показать, что

a) коммутативное артиново кольцо тогда и только тогда квазифробениусово, когда оно является прямой суммой идеалов, имеющих простые цоколи;
b) каждое коммутативное квазифробениусово кольцо является фробениусовым;
c) если R—коммутативное кольцо главных идеалов без делителей нуля и $0 \neq A \subsetneq R_R$, то R/A—фробениусово кольцо.

2. Пусть K—поле и R—кольцо всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b, c \in K.$$

a) Доказать, что для $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$

(1) x обратим слева $\Leftrightarrow$ x обратим справа $\Leftrightarrow$ $ac \neq 0$;
(2) x нильпотентен $\Leftrightarrow$ $x^2 = 0 \Leftrightarrow a = c = 0$;
(3) x идемпотентен $\Leftrightarrow x \in \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$;
(4) xR прост $\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge a = 0$; Rx прост $\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge c = 0$.

b) Доказать, что

(1)
$$\operatorname{rad}(R) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{soc}(R_R) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{soc}({}_R R) = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

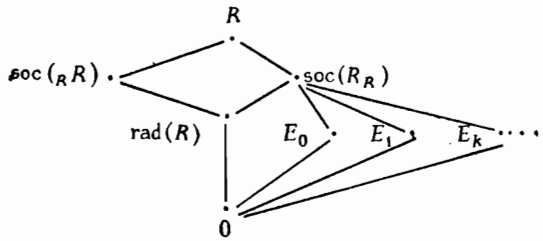
(2)
$$\begin{aligned} &r_R(\operatorname{rad}(R)) = \operatorname{soc}({}_R R), && {}_R(\operatorname{rad}(R)) = \operatorname{soc}(R_R), \\ &r_R(\operatorname{soc}(R_R)) = \operatorname{soc}({}_R R), && {}_R(\operatorname{soc}(R_R)) = 0, \\ &r_R(\operatorname{soc}({}_R R)) = 0, && {}_R(\operatorname{soc}(R_R)) = \operatorname{soc}(R_R); \end{aligned}$$

(3) $\operatorname{soc}(R_R)$ как левый идеал является прямым слагаемым, но как правый идеал не цикличен (а следовательно, не является прямым слагаемым);
(4) $\operatorname{soc}({}_R R)$ как правый идеал является прямым слагаемым, но как левый не цикличен.

c) Найти решетку правых идеалов кольца R, а именно показать, что
(1) $\operatorname{lng}(R_R) = 3$;
(2) максимальные правые идеалы в R суть $\operatorname{soc}(R_R)$ и $\operatorname{soc}({}_R R)$;
(3) простые правые идеалы в R суть $\operatorname{rad}(R)$ и

$$E_k := \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R, \quad k \in K;$$

(4) решетка правых идеалов имеет следующий вид:



d) Найти инъективную оболочку модуля R_R, а именно показать, что
(1) для всех $k \in K$

$$E_k \cong \mathrm{rad}\,(R) \cong R/\mathrm{soc}\,({}_RR) \text{ как правые } R\text{-модули};$$

(2) единственные инъективные правые идеалы в R суть 0 и $\mathrm{soc}\,({}_RR)$;
(3) R является подкольцом в $S := \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix} \left(= K^{2,2}\right)$; $R_R \xrightarrow{\iota} S_R$ — инъективная оболочка для R_R.

3. Доказать следующие утверждения:
(1) Пусть R — квазифробениусово кольцо. Если $e \in R$ — идемпотент, для которого eR — двусторонний идеал, то e лежит в центре R. (*Указание.* Покажите, что факторкольцо R/eR тоже квазифробениусово, и воспользуйтесь этим фактом.)
(2) Пусть A и B — кольца, ${}_AM_B$ — бимодуль и $R := \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Тогда R квазифробениусово $\Longleftrightarrow$ A и B квазифробениусовы и $M = 0$.

4. Пусть K — поле и R — коммутативная K-алгебра с базисом 1, a, b, c и умножением

$$1r = r1 = r \quad \text{для } r \in R,\ ab = ba = 0,\ a^2 = b^2 = c.$$

Доказать следующие утверждения:

a) Для $x = 1k_1 + ak_2 + bk_3 + ck_4 \in R$ $(k_i \in K)$
(1) x обратим $\Longleftrightarrow$ $k_1 \neq 0$;
(2) x нильпотентен $\Longleftrightarrow$ $x^3 = 0 \Longleftrightarrow k_1 = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{rad}\,(R)$;
(3) $x \in \mathrm{soc}\,(R) \Longleftrightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$.
b) Пусть $N := \mathrm{rad}\,(R)$. Тогда $N^2 = \mathrm{soc}\,(R) = cR$ и $0 \subsetneq cR \subsetneq aR \subsetneq N \subsetneq R$ — композиционный ряд для R_R. В частности, $\mathrm{soc}\,(R)$ прост, и следовательно, R — квазифробениусово кольцо.
c) Положим $A_k := (ak + b)R$ для каждого $k \in K$. Тогда
(1) $cR \subsetneq A_k \subsetneq N$, причем $A_k \neq A_{k'}$ для $k \neq k'$.
(2) если U — идеал в R длины 2, то либо $U = aR$, либо $U = A_k$ для некоторого $k \in K$. (*Указание*: покажите сперва, что U цикличен.)
(3) Найти решетку идеалов R.
d) Факторкольцо R/N^2 не является квазифробениусовым.

5. Пусть кольцо R коммутативно и артиново. Показать, что
a) если A — максимальный идеал в R, то инъективная оболочка фактормодуля R/A конечно-порождена;

b) для каждого конечно-порожденного R-модуля указанная инъективная оболочка тоже конечно-порождена;
c) если G — минимальный кообразующий в $\mathcal{M}_R$, то кольцо $S := \mathrm{Id}(G_R)$, определенное в упр. 10 к гл. 12, квазифробениусово и обладает факторкольцом, изоморфным R.

(*Указание* к а). Пусть Q — инъективная оболочка для R/A и $B_i := \mathfrak{l}_Q(A^i)$. Покажите сперва, что фактормодуль B_{i+1}/B_i конечно-порожден.)

6. Пусть R_R нётеров и каждый циклический левый R-модуль рефлексивен. Показать, что
a) R артиново справа и слева;
b) каждый максимальный правый идеал B является *аннуляторным идеалом* (т. е. $B = \mathfrak{r}_R\mathfrak{l}_R(B)$). (*Указание*: если E — простой левый R-модуль и A_R — простой модуль с $A_R^* \subseteq E_R^*$, то ${}_RA \cong {}_RE$);
c) если $R_R \subset M_R$ и M/R прост, то R_R — прямое слагаемое в M_R;
d) R квазифробениусово.

7. Доказать, что каждое кольцо с полной дуальностью, совершенное с одной стороны, является квазифробениусовым.

8. Показать, что все рефлексивные модули над квазифробениусовым кольцом конечно-порождены.

Литература

Учебники по кольцам и модулям (в порядке выхода в свет)

[1] **Э. Артин, С. Несбитт, Р. Тролл** (E. Artin, C. Nesbitt, R. Thrall) Rings with Minimum Condition. Ann Arbor, Mich. 1944.

[2] **Н. Джекобсон** (Jacobson N.) Structure of Rings. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 37 (1956). [Имеется перевод: Строение колец. — М.: ИЛ, 1961.]

[3] **Н. Бурбаки** (N. Bourbaki) Algèbre. Paris 1958. Chap. 8. [Имеется перевод: Алгебра. Гл. VII—IX. Модули, кольца, формы. — М.: Наука, 1966.]

[4] **Дж. П. Дженс** (J. P. Jans) Rings and Homology, New York, 1964.

[5] **И. Ламбек** (J. Lambek) Lectures on Rings and Modules. New York—London, 1966. [Имеется перевод: Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.]

[6] **К. Фейс** (Faith C.) Lectures on Injektive Modules and Quotient Rings. Berlin — Heidelberg — New York, 1976. = Lecture Notes in Math. 49.

[7] **Н. Бурбаки** (N. Bourbaki) Algèbre. Paris 1970, Chap. 2. [Имеется перевод более раннего издания: Алгебра. Гл. I—III. Алгебраические структуры. Линейная и нелинейная алгебра. — М. Физматгиз, 1962].

[8] **Д. У. Шарп, П. Вамош** (D. W. Sharpe, P. Vamos) Injektive Modules. London 1972.

[9] **Х. Татикава** (H. Tachikawa) Quasi-Frobenius Rings and Generalizations, QF-3 and QF-1 Rings. Berlin — Heidelberg — New York, 1973. = Lecture Notes in Math. 351.

[10] **Ф. У. Эндерсон** [1], **К. Р. Фуллер** (F. W. Anderson, K. R. Fuller) Rings and Categories of Modules. Berlin — Heidelberg — New York, 1974.

[11] **Б. Стенстрём** (B. Stenström) Rings of Quotients, Berlin — Heidelberg — New York, 1975.

Литература к главам 11—13 (в хронологическом порядке)
(работы по QF-3- и QF-1-кольцам не указаны,
их можно найти в списке литературы в книге Татикавы [9])

[1] **Т. Накаяма** (T. Nakayama) On Frobenius algebras I, Ann. Math. 40, (2) (1939), 611—633.

[2] **Т. Накаяма** (T. Nakayama) On Frobenius algebras II, Ann. Math. 42, (2) (1941), 1—21.

[3] **Т. Накаяма** (T. Nakayama) On Frobenius algebras III. Jap. J. Math. 18 (1942), 49—65.

[4] **Ф. Каш** (F. Kasch) Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. Math. Ann. 127 (1954), 453—474.

[5] **С. Эйленберг, Т. Накаяма** (S. Eilenberg, T. Nakayama) On the dimension of modules and algebras II (Frobenius algebras and quasi-Frobenius rings). Nagoya Math. J. 9 (1956), 1—16.

[6] **Ж. Дьёдонне** (J. Dieudonné) Remarks on quasi-Frobenius rings. Illinois J. Math. 2 (1958), 346—354.

[7] **И. Капланский** (I. Kaplansky) Projective modules. Ann. Math. 68 (1958). 372—377.

---

[1] = Андерсон. — *Прим. ред.*

[8] К. Морита (K. Morita) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, A6 (1958), 83—142.
[9] Х. Татикава (H. Tachikawa) Duality theorem of character modules for rings with minimum condition. Math. Z. 68 (1958), 479—487.
[10] Г. Адзумая (G. Azumaya) A duality theory for injektive modules. Amer. J. Math. 81 (1958), 249—278.
[11] Х. Басс (H. Bass) Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 466—488.
[12] Ф. Каш (F. Kasch) Projektive Frobeniuserweiterungen. Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss. (1960/61), 89—109.
[13] Ф. Каш (F. Kasch) Dualitätseigenschaften von Frobeniuserweiterungen. Math. Z. 77 (1961), 219—227.
[14] Ф. Каш (F. Kasch) Ein Satz über Frobeniuserweiterungen. Arch. Math. 12 (1961), 102—104.
[15] Э. А. Марез [1] (A. Mares) Semi-perfect modules. Math. Z. 82 (1963), 347—360.
[16] Б. Й. Мюллер (B. J. Müller) Quasi-Frobenius-Erweiterungen. Math. Z. 85 (1964), 345—368.
[17] К. Морита (K. Morita) Adjoint pairs of functors and Frobeniusextensions. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku 9 (1965), 40—71.
[18] Б. Й. Мюллер (B. J. Müller) Quasi-Frobenius-Erweiterungen II. Math. Z. 88 (1965), 380—409.
[19] Г. Адзумая (G. Azumaya) Completely faithful modules and selfinjective rings. Nagoya Math. J. 27 (1966), 697—708.
[20] К. Фейс (C. Faith) Rings with ascending chain condition on annihilators. Nagoya Math. J. 27 (1966), 179—191.
[21] Ф. Каш, Э. А. Марез (F. Kasch, E. A. Mares) Eine Kennzeichnung semi-perfekter Moduln. Nagoya Math. J. 27 (1966), 525—529.
[22] Дз. Миясита (J. Miyashita) Quasi-projective modules, perfect modules and a theorem for modular lattices. J. Fac. Sc. Hokkaido Univ. 19 (1966), 86—110.
[23] К. Морита (K. Morita) On S-rings in the sense of F. Kasch. Nagoya Math. J. 27 (1966), 687—695.
[24] Б. Л. Особская (B. L. Osofsky) A generalization of quasi-Frobenius rings. J. Algebra 4 (1966), 373—387.
[25] Р. Рентчлер (R. Rentschler) Eine Bemerkung zu Ringen mit Minimalbedingung für Hauptideale. Arch. Math. 17 (1966), 298—301.
[26] К. Фейс, Э. Уокер (C. Faith, A. Walker) Direct sum representations of injective modules. J. Algebra 5 (1967), 203—221.
[27] Т. Като (T. Kato) Self-injective rings. Tôhoku Math. Z. 19 (1967), 469—479.
[28] Ю. Утуми (Y. Utumi) Self-injective rings. J. Algebra 6 (1967), 56—64.
[29] Т. Като (T. Kato) Torsionless modules. Tôhoku Math. J. 20 (1968), 234—243.
[30] Т. Като (T. Kato) Some generalizations of QF-rings. Proc. Jap. Ac. 44 (1968), 114—119.
[31] Т. Оподэра (T. Onodera) Über Kogeneratoren. Arch. Math. 19 (1968), 402—410.
[32] Я.-Э. Бьёрк (J.-E. Björk) Rings satisfing a minimum condition on principal ideals. J. reine angew. Math. 236 (1969), 112—119.
[33] Ж.-И. Шамар (J.-Y. Chamard) Anneaux semi-parfaits et presque-frobeniusiens. C. R. Acad. Sci. Paris 269 (1969), 556—559.
[34] К. Р. Фуллер (K. R. Fuller) On indecomposable injectives over artinian rings. Pacific J. Math. 29 (1969), 115—135.
[35] Ф. Каш, Х.-Й. Шнайдер, Х. Й. Штольберг (F. Kasch, H.-J. Schneider, H. J. Stolberg) On injective modules and cogenerators. Carnegie-Mellon Univ. Report 23 (1969), 1—23.
[36] Г. О. Михлер (G. O. Michler) Idempotent ideals in perfect rings, Canadian J. Math. 21 (1969), 301—309.

[1] = Марес. — *Прим. ред.*

[37] **Э. Э. Раттер** (E. A. Rutter) Two characterizations of quasi-Frobenius rings. Pacific J. Math. **30** (1969), 777—784.
[38] **Ф. Л. Сандомирски** (F. L. Sandomierski) On semi-perfect and perfect rings, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 205—207.
[39] **Д. Йона**[1] (D. Jonah) Rings with minimum condition for principal right ideals have the maximum condition for principal left ideals. Math. Z. **113** (1970), 106—112.
[40] **Б. Й. Мюллер** (B. J. Müller) On semi-perfect rings. Illinois J. Math. **14** (1970), 464—467.
[41] **Ф. Л. Сандомирски** (F. L. Sandomierski) Some examples of right self-injective rings which are not left self-injective. Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 244—245.
[42] **И. С. Голан** (I. S. Golan) Quasi-perfect modules. Quart. J. Math. Oxford 22 (1971), 173—182.
[43] **Т. Онодэра** (T. Onodera) Eine Bemerkung über Kogeneratoren. Proc. Jap. Acad. **47** (1971), 140—142.
[44] **Т. Онодэра** (T. Onodera) Eine Satz über koendlich erzeugte RZ-Moduln, Tôhoku Math. J. **23** (1971), 691—695.
[45] **Б. Л. Ософская** (B. L. Osofsky) Loewy lenght of perfect rings. Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 352—354.
[46] **Э. Э. Раттер** (E. A. Rutter) PF-modules. Tôhoku Math. J. **23** (1971), 201—206.
[47] **Р. Уэйр** (R. Ware) Endomorphismrings of projective modules. Trans. Amer. Math. Soc. **155** (1971), 233—256.
[48] **У. Оберст, Х.-Й. Шнайдер** (U. Oberst, H.-J. Schneider) Die Struktur von projektiven Moduln. Invent. math. **13** (1971), 295—304.
[49] **Ф. У. Эндерсон, К. Р. Фуллер** (F. W. Anderson, K. R. Fuller) Modules with decompositions that complement direct summands. J. Algebra 22 (1972), 241—253.
[50] **И. Бек** (I. Beck) Projective and free modules. Math. Z. **129** (1972), 231—234.
[51] **Ф. Каш, Б. Парайгис** (F. Kasch, B. Pareigis) Einfache Untermoduln von Kogeneratoren. Sitz.-Ber. Bay. Akad. Wiss. (1972), 45—76.
[52] **Т. Онодэра** (T. Onodera) Linearly compact modules and cogenerators. J. Fac. Sci. Hokkaido 22 (1972), 116—125.
[53] **Э. Т. Ханнула** (A. T. Hannula) On the construction of quasi-Frobenius rings. J. Algebra 25 (1973), 403—414.
[54] **Г. Хаугер, В. Циммерманн** (G. Hauger, W. Zimmermann) Quasi-Frobenius-Moduln. Arch. Math. **24** (1973), 379—386.
[55] **Л. А. Скорняков.** Еще о квазифробениусовых кольцах. — Матем. сб., 1973, **92**, № 4, 518—529.
[56] **Г. Адзумая** (G. Azumaya) Characterization of semi-perfect and perfect modules. Math. Z. **140** (1974), 95—103.
[57] **Р. С. Каннингэм, Э. Э. Раттер** (R. S. Cunningham, E. A. Rutter) Perfect modules. Math. Z. **140** (1974), 105—110.
[58] **Р. Минг** (R. Y. C. Ming) On simple P-injective modules. Math. Japonicae **19** (1974), 173—176.
[59] **Б. Й. Мюллер** (B. J. Müller) The structure of quasi-Frobenius rings. Can. J. Math. **26** (1974), 1141—1151.
[60] **Х. Цёшингер** (H. Zöschinger) Komplementierte Moduln über Dedekindringen. J. Algebra **29** (1974), 42—56.
[61] **Х. Цёшингер** (H. Zöschinger) Komplemente als direkte Summanden. Arch. Math. **25** (1974), 241—253.
[62] **Г. Хаугер** (G. Hauger) Aufsteigende Kettenbedingungen für zyklische Moduln und perfekte Endomorphismenringe. Acta Math. Ac. Sci. Hungar, 1976, **28**, № 3—4, 275—278.

[1] = Йонах. — *Прим. ред.*

[63] **Т. Такэути** (T. Takeuchi) The endomorphism ring of a indecomposable module with an Artinian projective cover. Hokkaido Math. J. 4 (1975), 265—267.
[64] **Т. Такэути** (T. Takeuchi) On cofinite-demensional modules. Hokkaido Math. J. 5, (1976), 1—43.
[65] **В. Циммерманн** (W. Zimmermann) Über die aufsteigende Kettenbedingung für Annullatoren. Arch. Math. 27 (1976), 261—266.

Литература, добавленная при переводе

[66] **И. Т. Адамсон** (I. T. Adamson) Rings, modules and algebras. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1971.
[67] **И. Т. Адамсон** (I. T. Adamson) Elementary rings and modules, Oliver and Boyd, 1972; New York, 1973.
[68] **В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин.** Радикалы алгебр и структуриая теория. — М.: Наука, 1979.
[69] **М. Атья, И. Макдоиальд** (M. F. Atiyah, I. G. Macdonald) Введение в коммутативиую алгебру. — М.: Мир, 1972.
[70] **М. Ауслэидер, Д. Буксбаум** (M. Auslander, D. A. Buchsbaum) Groups, rings, modules. Harper and Row, New York, 1974.
[71] **Т. Блис** (T. S. Blith) Module theory. An approach to linear algebra. Oxford University Press, Oxford, 1977.
[72] **И. Букур, А. Деляиу** (I. Bucur, A. Deleanу) Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
[73] **А. Картан, С. Эйленберг** (H. Cartan, S. Eilenberg) Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960.
[74] **П. Кон** (P. Cohn) Свободиые кольца и их связи. — М.: Мир, 1975.
[75] **Ч. Кэртис, И. Райнер** (C. W. Curtis, I. Reiner) Теория представлеиий конечиых групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
[76] **С. Ленг** (S. Lang) Алгебра. — М.: Мир, 1968.
[77] **С. Маклейн** (S. MacLane) Гомология. — М.: Мир, 1965.
[78] **А. В. Михалёв.** Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей.— В сб.: Алгебра. Геометрия. Топология (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР).— М.: 1974, с. 51—76.
[79] **А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков.** Модули. — В сб.: Алгебра. Геометрия. Топология. 1968. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР), — М.: 1970, с. 57—100.
[80] **А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков.** Модули. I—IV. — Новосибирск: 1973.
[81] **А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков.** Модули. — В сб.: Алгебра. Геометрия. Топология (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1976, с. 57—190.
[82] **А. П. Мишина, Л. А. Скорняков.** Абелевы группы и модули. — М.: Наука, 1969. [Имеется переработаниое английское издаиие 1976 г.]
[83] **Г. Ренольт** (G. Renault) Algèbre non commutative. Gauthier-Villars, Paris, 1975.
[84] **Л. А. Скорияков.** Модули. — В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1967, с. 181—216.
[85] **А. Сольян** (A. Solian) Theory of modules. An introduction to the theory of module categories, Editura Academiei RSR—Wiley, Bucureşti—London, 1977.
[86] **К. Фейс** (C. Faith) Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1977, 1979.
[87] **Л. Фукс** (L. Fuchs) Бескоиечиые абелевы группы. Т. 1, 2, — М.: Мир, 1974, 1977.
[88] **И. Херстейи** (I. Herstein) Некоммутативиые кольца. — М.: Мир, 1972.
[89] **П. Хилтои, Ву** (P. J. Hilton, Y.-Ch. Wu) A course in modern algebra. John Wiley and Sons, New York, 1974.
[90] **М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер.** Основы теории категорий, — М.: Наука, 1974.

Именной указатель

Предметный указатель[1]

---

[1] В квадратных скобках приведены оригинальные немецкие термины. В тех случаях, когда в оригинале используется англоязычный термин, он дается с соответствующей пометой. Термины-прилагательные приводятся в мужском роде и при повторениях заменяются тире, даже если они повторяются в другом роде. На возможность варьирования рода указывает курсивный шрифт окончания (например, левый). — *Прим. ред.*

Указатель обозначений[1]

[1] См. также стр. 8. — *Прим. ред.*

Оглавление