

МОНОПОЛИ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Сборник статей

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ

М.И. Монастырского
и А.Г. Сергеева



МОСКВА "МИР" 1989

ББК 22.152
М77
УДК 515.1

М77 Монополи: Топологические и вариационные методы:
Сб. статей 1983–1986 гг.: Пер. с англ. – М.: Мир,
1989, 584 с., ил.
ISBN 5-03-001189-7

Сборник статей ведущих зарубежных ученых (Англия, США, Канада), посвященных одному из активно развивающихся направлений современной математики, объединяющих математику с физикой. Задача о классификации монополей и инстантонов, возникшая в современной теоретической физике, привела к новым важным результатам в математике, в частности алгебраической геометрии и топологии. Один из самых ярких результатов последних лет – построение Дональдсоном экзотических гладких структур на четырехмерных сферах – основан на изучении янгмилловских расслоений. С другой стороны, применение новых математических методов позволило существенно продвинуть исследование ряда важных физических проблем.

Для математиков разных специальностей, физиков-теоретиков, аспирантов и студентов.

М 1702040000-509 13-89, ч. 1
041(01)-89

ББК 22.152

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001189-7

© состав, перевод на русский язык, "Мир", 1989

Предисловие

Решающий прогресс в теории элементарных частиц в последние два десятилетия связан с описанием фундаментальных взаимодействий в рамках теории калибровочных полей.

Уравнения калибровочных полей возникают из вариационного принципа для лагранжианов теории. При этом важную роль играют классические решения уравнений движения, задаваемых функционалом действия. Широкий спектр таких решений, включая монополи, инстантоны, струны и т.п., был открыт в последние годы.

Важная для физики задача описания и классификации монополярных, инстантонных и струнных решений потребовала привлечения мощных и нетрадиционных для физики методов топологии и алгебраической геометрии. Даже использование более привычных и естественных в этой ситуации вариационных методов столкнулось с нестандартными постановками задач.

Наметившийся тесный физико-математический союз оказался исключительно плодотворным и для чистой математики, блившим свежую струю в проблематику самой топологии и алгебраической геометрии. Один из недавних ярких результатов в топологии — построение С. Дональдсоном различных гладких структур на односвязных четырехмерных многообразиях — включает идеи из теории поля [1, 2].

Из широкого спектра результатов, характеризующих новую область математической физики (или, с другой точки зрения, физической математики), в этом сборнике представлен цикл работ, концентрирующихся вокруг проблемы классификации монополей и, в меньшей степени, идейно связанной с ней классификацией инстантонов.

Статьи сборника дают довольно полную картину имеющихся достижений в математической проблематике теории монополей. Физические аспекты этой проблематики, восходящие к классической работе П. Дирака 1931 г., в сборнике практически не затронуты. Читателю-математику, желающему увидеть яркую общую картину взаимодействия физики и математики в теории монополей, мы бы рекомендовали ознакомиться с работами [3 — 6, 21 — 26].

Структура сборника отражает два подхода к задачам классификации монополей и инстантонов.

Первый из них, который естественно назвать алгебро-геометрическим, основан на замечательном открытии метода твисторов Р. Пенроузом. Предложенный в конце 60-х годов в связи с задачами теории гравитации метод твисторов оказался весьма плодотворным и в теории полей Янга - Миллса. Интерпретация уравнений дуальности в терминах алгебраических расслоений над $\mathbb{C}P^3$ с помощью твисторного преобразования, указанная Р. Уордом в 1977 г., позволила свести проблему классификации инстантонных решений к задаче алгебраической геометрии. Список ярких результатов, полученных на этом пути, включает классификацию инстантонов Атьи - Дринфельда - Хитчина - Манина (ADHM-конструкцию), а также классификацию монополей на $\mathbb{R}^3$ Нама - Хитчина [7, I, II¹]. Используя конструкцию Нама - Хитчина, Дональдсон [3] дал описание пространства модулей монополей как пространства рациональных функций на комплексной плоскости. Эти результаты составляют ядро сборника.

Учитывая, что твисторный подход и методы, развитые ранее для инстантонов, лежат в основе многих результатов данного сборника, мы сочли полезным снабдить его приложением, включающим как изложение метода твисторов, так и ряд новых результатов, примыкающих к темам, затронутым в основном тексте.

Второй подход связан с изучением уравнений Янга - Миллса - Хиггса вариационными методами. Он естественно дополняет алгебро-геометрические конструкции. Здесь также существует несколько направлений исследований.

Весьма плодотворной оказалась идея М. Атьи и Р. Ботта, позволяющая свести решение уравнения типа Янга - Миллса к отысканию минимумов нормы отображения моментов на устойчивых орбитах коприсоединенного представления калибровочной группы. Эта идея с успехом использована Дональдсоном в ряде работ. См. его статью [IX] и цитированную в ней литературу.

Другое, более классическое, направление основано на применении традиционных методов вариационного исчисления: вариационных неравенств, теорем вложения, теории Морса и т.д. В теории калибровочных полей оно развивалось в ряде работ. Отметим в первую очередь результаты К. Уленбека, в частности известные теоремы о слабой компактности и об устранении особенностей для связностей

¹) Римскими цифрами мы обозначаем статьи настоящего сборника.

Янга - Миллса [8]. К. Таубсу удалось построить экстремальные, но не минимальные решения уравнений Янга - Миллса - Хиггса. Его результаты опираются на предложенный им вариант теории Морса для калибровочных полей и теорию Люстерника - Шнирельмана. Первая работа Таубса [X] дает наглядное представление о развиваемом им методе и служит введением к двум другим его статьям в сборнике.

В большинстве представленных работ в полной мере используются методы комплексной алгебраической геометрии. Стараясь расширить круг читателей сборника, мы дополнили его комментариями, содержащими основные определения и формулировки некоторых результатов, на которые опираются авторы статей. (Снабженные сквозной нумерацией, они помещены в конце книги.) Необходимые сведения из дифференциальной геометрии (связности, группы и алгебры Ли), топологии (расслоения, гомотопии, гомологии, когомологии и характеристические классы), комплексной алгебраической геометрии (голоморфные расслоения, когомологии с коэффициентами в пучках) и функционального анализа (теоремы вложения, пространства Соболева) можно найти в книгах [9 - 20].

В заключение отметим несколько работ последних лет, близких к тематике сборника, где получены новые результаты, отражающие прогресс в этой бурно развивающейся области математической физики.

I. Классификация монополей

В работе Мюррея [27] конструкции Хитчина перенесены на группу $SU(n)$.

В работе Хорвати и Роунсли [28] детально анализируются монопольные решения для произвольной компактной группы с точки зрения топологического критерия [23, 24].

II. Динамика монополей

Описание динамики BPS -монополей в метрике Атья - Хитчина в различных моделях получило дальнейшее развитие в работах Гиббонса, Мантона и Рубака [29, 30].

III. Аналоги монополей в уравнениях Эйнштейна с точки зрения теории твисторов рассмотрены в работе Педерсена [31].

IV. Уравнения дуальности на римановых поверхностях изучены в работах Хитчина и Дональдсона [32, 33].

V. Обобщение уравнений Нама и связь с квантовыми интегрируе-

мыми системами Янга — Бакстера найдены в работе Уорда [34].

Появлению этого сборника способствовала энергичная поддержка С.П. Новикова и Б.В. Шабата.

Мы благодарим также профессора М. Атью, приславшего препринт своей работы о гиперболических монополях.

М.И. Монастырский

А.Г. Сергеев

Литература

1. Donaldson S.K. An application of Gauge theory to the topology of 4-manifolds. — J.Diff.Geom., 1983, 18, 269-316.
2. Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988.
3. Goddard P., Olive D.I. New Developments in the Theory of Magnetic Monopoles. — Rep. Prog.Phys., 1978, 41, 1357-1438.
4. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. Пер. с англ. — М.: Мир, 1985.
5. Jaffe A., Taubes C. Vortices and Monopoles. — Birkhäuser, Boston, 1980.
6. Коулмен С. Магнитный монополяр пятьдесят лет спустя. — УФН, 1984, 144, № 2, 277-340.
7. Nahm W. All Self-Dual Multimonopoles for Arbitrary Gauge Groups. — Preprint CERN TH-3172, 1981.
8. Uhlenbeck K. Removable Singularities in Yang-Mills Fields. — Commun. Math.Phys., 1982, 83, 11-29.
9. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.1,2. Пер. с англ. — М.: Наука, 1981.
10. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. Пер. с англ. — М.: Мир, 1968.
11. Геометрические идеи в физике: Сб. статей. Пер. с англ./ Под ред. Ю.И. Манина. — М.: Мир, 1983.
12. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т.1,2. Пер. с англ. — М.: Мир, 1982.

13. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. - М.: Наука, 1970.
14. Пале Р. Семинар по теореме Атья - Зингера об индексе. Пер. с англ. - М.: Мир, 1970.
15. Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. Пер. с англ. - М.: Мир, 1976.
16. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. - М.: Наука, 1975.
17. Спенсер Э. Алгебраическая топология. Пер. с англ. - М.: Мир, 1971.
18. Атья М. Лекции по К-теории. Пер. с англ. - М.: Мир, 1967.
19. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. Пер. с англ. - М.: Мир, 1982.
20. Ленг С. Эллиптические функции. Пер. с англ. - М.: Наука, 1984.
21. 't Hooft G. Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories. - Nucl.Phys., 1974, B79, 276-284.
22. Поляков А.М. Спектр частиц в квантовой теории поля. - Письма в ЖЭТФ, 1974, 20, 430-432.
23. Monastyrsky M.I., Perelomov A.M. Some Remarks on Monopoles in Gauge Field Theories. - Preprint ITP-56, Moscow, 1974.
24. Топкин Ю.С., Фатеев В.А., Шварц А.С. О существовании тяжелых частиц в калибровочных теориях поля. - Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, 91-93.
25. Prasad M.K., Sommerfield C.M. An Exact Classical Solutions for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. - Phys.Rev. Lett., 1975, 35, 760-763.
26. Богомольный Е.Б. Устойчивость классических решений. - ЯФ, 1976, 24, № 4, 861-870.
27. Murray M.K. Non-Abelian Magnetic Monopoles. - Commun.Math. Phys., 1984, 96, 539-565.
28. Horvathy P.A., Rawnsley J.H. Topological Charges in Monopole Theories. - Commun. Math.Phys., 1984, 96, 497-519.
29. Gibbons G.W., Manton N.S. Classical and Quantum Dynamics of BPS Monopoles. - Nucl.Phys., 1986, B274, 183.

30. Gibbons G.W., Ruback P.J. The Hidden Symmetries of Taub-NUT and Monopoles Scattering. - Phys.Lett., 1987, 188B,N#2,226-230.
31. Pedersen H. Einstein Metrics, Spinning Top Motions and Monopoles. - Math.Ann., 1986, 274, 35-59.
32. Hitchin N.J. The self-duality equations on a Riemann Surface.- Proc. London Math.Soc., 1987, 55, 59-126.
33. Donaldson S.K. Twisted Harmonic Maps and the Self-Duality Equations. - Proc. London Math.Soc., 1987, 55, 127-131.
34. Ward R.S. Generalized Nahm Equations and Classical Yang-Baxter Equations. - Phys.Lett., 1985, 112A, 3-5.

МОНОПОЛИ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ¹⁾

Н. Дж. Хитчин

St. Catherine's College, Oxford OX1 3UJ, England

Резюме. Методами голоморфной геометрии пространства прямых в евклидовом трехмерном пространстве показано, что любой статический монополярный заряд k может быть канонически построен по алгебраической кривой с помощью $\mathcal{A}_k$ -анзаца Атьи - Уорда.

1. Введение

Известно, что уравнения Богомольного, описывающие статические монополи Янга - Миллса - Хиггса в пределе Прасада - Зоммерфельда, могут быть решены твисторными методами. Действительно, эти уравнения можно интерпретировать как уравнения дуальности в евклидовом четырехмерном пространстве, инвариантные относительно сдвигов по времени, и применить к ним напрямую методы Пенроуза, Уорда и Атьи. В 1981 г. на этом пути был достигнут значительный прогресс в работах Уорда [15, 16], Прасада и Росси [12], а также Корригана и Годдарда [7]. Все указанные авторы пользовались разновидностью $\mathcal{A}_k$ -анзаца Атьи - Уорда [3] для построения $SU(2)$ -монопольей с зарядом k . Главная цель данной статьи состоит в том, чтобы доказать, что каждое решение уравнений Богомольного, удовлетворяющее подходящим граничным условиям, может быть построено каноническим образом с помощью этого метода.

Наш подход также основан на твисторах, но вместо перехода от

¹⁾ Hitchin N.J. Monopoles and Geodesics, Communications in Mathematical Physics, 1982, v. 83, pp. 579-602.

задачи в $\mathbb{R}^3$ к задаче в $\mathbb{R}^4$ мы пользуемся комплексными методами, внутренним образом связанными с евклидовой геометрией $\mathbb{R}^3$. Пространство точек $\mathbb{R}^3$ заменяется пространством ориентированных геодезических (прямых). Это пространство прямых имеет структуру комплексной поверхности (в действительности голоморфного касательного расслоения T проективной прямой), и решение уравнений Богомольного порождает естественным образом голоморфное векторное расслоение над этой поверхностью. На самом деле подобный подход к задачам в евклидовом пространстве совсем не нов — он был использован еще Вейерштрассом в 1866 г. при решении уравнений минимальной поверхности.

Вкратце наш метод заключается в том, чтобы определить векторное расслоение $\tilde{E}$ над поверхностью геодезических T , сопоставив каждой прямой ядро (нуль-пространство) дифференциального оператора

$$D = \nabla_U - i\Phi,$$

где ∇_U — ковариантное дифференцирование в направлении прямой, а Φ — поле Хиггса. Расслоение $\tilde{E}$ голоморфно, если (∇, Φ) удовлетворяет уравнениям Богомольного $\nabla\Phi = *F$. Анзац Атьи — Уорда позволяет строить голоморфные расслоения $\tilde{E}$ как расширения линейных расслоений. Это означает, что надо выделить некоторое линейное подрасслоение расслоения $\tilde{E}$. Мы покажем, что расслоение L^+ решений уравнения $Dz = 0$, убывающих при $t \rightarrow +\infty$, является голоморфным подрасслоением $\tilde{E}$, изоморфным некоторому стандартному расслоению $L(-k)$ на T . Отсюда будет вытекать, что $\tilde{E}$ является расширением $L(-k)$ посредством сопряженного к нему расслоения, и, следовательно, исходное решение уравнений Богомольного может быть построено с помощью канонического применения анзаца $\mathcal{A}_k$.

Пространство прямых, на которых уравнение $Dz = 0$ допускает решение из $\mathcal{L}^2$, образует алгебраическую кривую рода $(k-1)^2$ на поверхности T . Мы называем эту кривую спектральной кривой, поскольку она является своего рода нелинейным спектром семейства линейных дифференциальных операторов, параметризованных точками поверхности T . Используя глобальные свойства этой кривой, мы даем геометрическое описание подхода Корригана и Годдарда, предъявляя $(4k-1)$ -параметрическое семейство решений. Наконец, мы показываем, как с помощью когомологий пучков по спектральной

кривой определить голоморфное расслоение $\tilde{E}$ и, следовательно, решение уравнений Богомольного.

2. Пространство геодезических

Пусть M^n — риманово многообразие. Тогда геодезические, содержащиеся в подходящем открытом множестве (например, геодезически выпуклом), параметризуются многообразием размерности $(2n-2)$. Касательное пространство к этому многообразию в точке γ (являющейся геодезической) может быть описано следующим образом. Возьмем кривую $\gamma(t, s)$, состоящую из геодезических, для которой $\gamma(t, 0) \equiv \gamma(t)$, и рассмотрим поле

$$V = \partial \gamma / \partial s \Big|_{s=0}.$$

Это векторное поле вдоль геодезической γ , называемое полем Якоби⁽¹⁾, удовлетворяет уравнению

$$(\nabla_U)^2 V + R(V, U)U = 0, \quad (2.1)$$

где $U = d\gamma/dt$ — единичный касательный вектор к кривой γ , а $R(X, Y)Z$ — тензор кривизны многообразия M .

Пространство решений уравнения (2.1) $2n$ -мерно и содержит двумерное подпространство полей Якоби, касательных к кривой γ . Такие поля отвечают аффинным репараметризациям кривой и не являются касательными к ее деформациям. $(2n-2)$ -мерное пространство полей Якоби, ортогональных к U , состоит из настоящих деформаций кривой γ , и отображение

$$V \mapsto V - (V, U)U$$

задает изоморфизм между касательным пространством пространства геодезических в точке γ и пространством полей Якоби, ортогональных к направлению кривой γ .

Предположим теперь, что многообразие M трехмерно, и рассмотрим пространство G ориентированных геодезических (фиксируя направление U). Если поле V ортогонально полю U , то и векторное произведение полей $U \times V$ также ортогонально U . Так как поле U ковариантно постоянно вдоль геодезической⁽²⁾, то

$$(\nabla_U)^2 U \times V = U \times (\nabla_U^2 V).$$

Поэтому если⁽³⁾

$$R(U \times V, U)U = U \times R(V, U)U, \quad (2.2)$$

то мы можем определить линейное отображение

$$J(V) = U \times V, \quad (2.3)$$

которое удовлетворяет соотношению

$$J^2(V) = U \times (U \times V) = (U, V)U - (U, U)V = -V,$$

так как поле V ортогонально полю U .

Иными словами, мы получаем почти комплексную структуру⁽⁴⁾ на 4-мерном вещественном многообразии G . Отметим, что ориентация необходима для фиксирования направления U и определения отображения J . Условие на кривизну (2.2) выполняется для риманова трехмерного многообразия лишь тогда, когда его бесследовый тензор Риччи⁽³⁾ равен нулю. В таком случае метрика имеет постоянную кривизну, и почти комплексная структура является интегрируемой. Многообразие G при этом является комплексной поверхностью. Прежде чем детально заняться интересующим нас случаем $M = \mathbb{R}^3$, отметим некоторые свойства многообразия G .

Во-первых, на нем определено отображение $\tau: G \rightarrow G$, не имеющее неподвижных точек и такое, что $\tau^2 = \text{id}$. Это отображение задается простым изменением ориентации каждой геодезической. По определению (2.3), отображение τ меняет комплексную структуру J на $-J$, и потому является антиголоморфной инволюцией, или вещественной структурой, на многообразии G ⁽⁵⁾.

Во-вторых, рассмотрим некоторую точку $x \in M$. Ориентированные геодезические, проходящие через x , параметризуются единичной двумерной сферой в касательном пространстве T_x посредством экспоненциального отображения. Поскольку U является единичной нормалью к этой сфере, из формулы (2.3) вытекает, что инволюция J сохраняет ее касательное пространство и, более того, определяет стандартную комплексную структуру на римановой сфере. Та-

ким образом, точке x можно поставить в соответствие голоморфную проективную прямую $P_x \subset G$. Две достаточно близкие точки x и y могут быть соединены единственной геодезической, или (с учетом обоих направлений) двумя ориентированными геодезическими. Это означает, что проективные прямые P_x и P_y пересекаются в двух точках, и потому индекс самопересечения⁽⁶⁾ прямой P_x (степень ее нормального расслоения⁽⁷⁾) равен 2. Очевидно, что проективная прямая P_x сохраняется отображением τ и, следовательно, вещественна.

Таким образом, мы имеем вещественную комплексную поверхность G , наделенную семейством вещественных проективных прямых с индексом самопересечения 2. Можно показать, что, пользуясь вейлевской структурой вместо римановой, мы можем получить любую такую поверхность с помощью изложенной выше (геодезической) конструкции. Условие интегрируемости (2.2) оказывается тогда аналогом уравнений Зинштейна ($R_{ij} = \Lambda g_{ij}$) для вейлевской структуры (см. [10]). Такова общая подоплека описания, приводимого в этой статье, далее же мы ограничиваемся исследованием простейшего случая $M = \mathbb{R}^3$.

3. Прямые в трехмерном пространстве

Геодезические в пространстве $\mathbb{R}^3$ — это просто прямые. Мы можем параметризовать их, задавая, во-первых, направление прямой — единичный вектор u , и, во-вторых, выбирая начало координат и вектор V в точку на прямой, находящуюся на кратчайшем расстоянии от начала координат. Таким образом,

$$G \cong \{(u, v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \mid u \cdot v = 0\}.$$

Это пространство есть просто касательное расслоение TS^2 к сфере S^2 . Прямая $x = v + tu$ соответствует паре (u, v) .

Мы утверждаем, что комплексная структура, построенная в § 2 на многообразии G , является естественной структурой на голоморфном касательном расслоении к проективной прямой $P_1 \cong S^2$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим стандартную риманову связность на сфере S^2 и расщепим касательное пространство к TS^2 на вертикальное и горизонтальное пространства, так что

$$T(TS^2) \cong \pi^*T \oplus \pi^*T,$$

где $\pi: TS^2 \rightarrow S^2$ — проекция. Естественная комплексная структура на пространстве TS^2 получается, если взять стандартные почти комплексные структуры на сферах S^2 в обоих слагаемых.

С другой стороны, рассмотрим геодезическую

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = v + t\dot{u}, \text{ причем } u \cdot v = 0\}.$$

Касательный вектор к пространству прямых в точке γ задается парой векторов $(\dot{u}, \dot{v})$ со следующими свойствами:

$$u \cdot \dot{u} = 0, \quad \dot{u} \cdot v + u \cdot \dot{v} = 0.$$

Отсюда поле Якоби, ортогональное к геодезической, определяется как

$$V = t\dot{u} + \dot{v} - (\dot{v} \cdot u)u,$$

т.е. как пара касательных векторов $(\dot{u}, \dot{v} - (\dot{v} \cdot u)u)$. Это расщепление совпадает с прежним, поскольку риманова связность на сфере S^2 задается проектированием на касательное пространство с помощью плоской связности на $\mathbb{R}^3$.

Далее, комплексная структура в точке (u, v) задается векторным произведением обоих компонент на вектор нормали u . Указанная структура совпадает с обычной комплексной структурой на сфере S^2 , что и доказывает наше утверждение. В дальнейшем мы будем обозначать пространство ориентируемых прямых в $\mathbb{R}^3$ с этой комплексной структурой через T .

Так как прямые, проходящие через фиксированную точку $x \in \mathbb{R}^3$, определяются своими направлениями u , проективная прямая P_x является голоморфным сечением расслоения $\pi: T \rightarrow P_1$. Любое такое сечение является голоморфным векторным полем на пространстве P_1 , которое (поскольку касательное расслоение имеет степень⁽⁷⁾ 2) задается квадратным полиномом

$$s(\zeta) = (a\zeta^2 + b\zeta + c) \frac{d}{d\zeta}. \quad (3.1)$$

Вещественная структура определяется формой

$$\tau(u, v) = (-u, v),$$

которая равна $-\alpha_*$, где α_* — естественное действие антиподального отображения α на касательном расслоении TS^2 . В голоморфных координатах $\alpha(\zeta) = -\bar{\zeta}^{-1}$, и, следовательно, сечение $z(\zeta)$ вещественно тогда и только тогда, когда

$$b = \bar{b}, \quad \alpha = -\bar{c}.$$

Таким образом, точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ может быть сопоставлено вещественное сечение

$$z(\zeta) = ((x_1 + ix_2) - 2x_3\zeta - (x_1 - ix_2)\zeta^2) \frac{d}{d\zeta}, \quad (3.2)$$

и в этих координатах естественная конформная структура, индуцированная на пространстве $\mathbb{R}^3$ дискриминантом $b^2 - 4ac$, оказывается стандартной евклидовой структурой, определяемой метрикой $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$.

Итак, мы описали $\mathbb{R}^3$ как пространство вещественных голоморфных векторных полей на сфере P_1 , т.е. как алгебру Ли группы $SO(3)$. Поверхность T следует, конечно, представлять себе как аффинное векторное расслоение над сферой P_1 без выделенного нулевого сечения. Действительно, выбор вещественного сечения определяет начало координат в $\mathbb{R}^3$.

Связь между T и твисторным пространством $P_3 \setminus P_1$ пространства $\mathbb{R}^4$ (см. [1])⁽⁸⁾ может быть описана в терминах действия операции сдвига по времени. Указанный сдвиг является изометрией пространства $\mathbb{R}^4$ и индуцирует свободное голоморфное действие аддитивной группы $\mathbb{R}$ на пространстве $P_3 \setminus P_1$, являющееся вещественной частью голоморфного действия группы комплексных чисел $\mathbb{C}$. Факторпространство пространства $P_3 \setminus P_1$ по этому действию совпадает с поверхностью T .

4. Уравнения Богомольного

Теперь мы покажем, как решения уравнений Богомольного⁽⁹⁾ без учета пока граничных условий могут быть описаны в терминах

комплексной геометрии поверхности T .

Рассмотрим главное $SU(2)$ -расслоение со связностью ∇ на пространстве $\mathbb{R}^3$ и поле Хиггса, т.е. сечение Φ присоединенного расслоения. Пусть E - ассоциированное комплексное векторное расслоение ранга 2 над пространством $\mathbb{R}^3$ и F - кривизна связности ∇ . Определим теперь векторное расслоение $\tilde{E}$ ранга 2 на поверхности T :

$$\tilde{E}_x = \{z \in \Gamma(\gamma_x, E) \mid (\nabla_U - i\Phi)z = 0\}. \quad (4.1)$$

Здесь U - единичный касательный вектор к ориентированной геодезической γ_x , отвечающей точке $x \in T$. Таким образом, мы сопоставили любой прямой γ_x систему обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль этой прямой, причем конечномерное пространство решений указанной системы является слоем векторного расслоения $\tilde{E}$ над точкой $x \in T$.

Т е о р е м а 4.2. Если пара (∇, Φ) удовлетворяет $SU(2)$ -уравнениям Богомольного $\nabla \Phi = *F$, то $\tilde{E}$ является естественным образом голоморфным векторным расслоением над пространством геодезических T , причем

- (i) расслоение $\tilde{E}$ тривиально на любом вещественном сечении,
- (ii) расслоение $\tilde{E}$ обладает симплектической структурой⁽¹⁰⁾,
- (iii) расслоение $\tilde{E}$ обладает кватернионной структурой, т.е. существует антиголоморфное линейное отображение

$$\sigma: \tilde{E}_x \rightarrow \tilde{E}_{\tau x},$$

такое, что $\sigma^2 = -1$.

Обратно, любое такое голоморфное векторное расслоение над пространством T определяет решение уравнений Богомольного.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Построим на расслоении $\tilde{E}$ $\bar{\partial}$ -оператор⁽⁴⁾, т.е. линейный дифференциальный оператор

$$\bar{\partial}: \Gamma(\tilde{E}) \rightarrow \Gamma(\tilde{E} \otimes \Lambda^{0,1}),$$

такой, что

$$(a) \quad \bar{\partial}(fz) = f\bar{\partial}z + z \otimes \bar{\partial}f, \quad f \in C^\infty(T),$$

$$(b) \bar{\partial}^2 = 0,$$

где квадрат $\bar{\partial}^2$ определяется с помощью естественного продолжения $\bar{\partial}$ до оператора

$$\bar{\partial}: \Gamma(\tilde{E} \otimes \Lambda^{0,p}) \rightarrow \Gamma(\tilde{E} \otimes \Lambda^{0,p+1}).$$

Тогда из теоремы Ньюлендера - Ниренберга (см., например, [1])⁽¹¹⁾, будет следовать, что на $\tilde{E}$ имеется голоморфная структура, для которой указанный оператор является естественным $\bar{\partial}$ -оператором.

Вначале мы перефразируем определение комплексной структуры на пространстве геодезических в терминах расслоения единичных сфер $S(T\mathbb{R}^3)$. Плоская риманова связность расщепляет это расслоение в произведение $S^2 \times \mathbb{R}^3$. Геодезический поток X является векторным полем, горизонтальным по отношению к указанному расщеплению, а пространство геодезических T есть факторпространство $S^2 \times \mathbb{R}^3$ относительно этого потока:

$$p: S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow T,$$

$$p(u, X) = (u, X - (X \cdot u)u).$$

Ортогональное дополнение к вектору X в касательном пространстве в точке $(u, X) \in S^2 \times \mathbb{R}^3$ изоморфно проецируется в касательное пространство к поверхности T в точке $p(u, X)$. Определенная нами почти комплексная структура задается стандартной комплексной структурой сферы S^2 в направлениях слоев и стандартной комплексной структурой (векторное $\times$ -произведение с вектором X) в горизонтальном направлении, ортогональном вектору X . Условие интегрируемости для кривизны эквивалентно требованию инвариантности этой структуры вдоль потока.

Такая интерпретация позволяет проще описать сечения $\tilde{E}$ над пространством T . Если обозначить через p_1 и p_2 операторы проецирования пространства $S^2 \times \mathbb{R}^3$ на сомножители, то сечение $\hat{s} \in \Gamma(T, \tilde{E})$ задается сечением $\hat{s} \in \Gamma(S^2 \times \mathbb{R}^3, p_2^* E)$, удовлетворяющим уравнению $\nabla_X \hat{s} - i\Phi \hat{s} = 0$, причем используется связность, поднятая с пространства $\mathbb{R}^3$ оператором p_2 .

Теперь мы можем определить оператор $\bar{\partial}$ соотношением

$$(\bar{\partial}\hat{s})^{\wedge} = \nabla^{0,1}\hat{s}. \quad (4.3)$$

Это означает, что мы рассматриваем $(0,1)$ -компоненту сечения $\nabla\hat{s}$ относительно комплексной структуры в подпространстве, ортогональном к вектору X в касательном пространстве $T(S^2 \times \mathbb{R}^3)$. Мы должны теперь показать, что этот оператор корректно определен, т.е. что сечение $\bar{\partial}\hat{s}$ над пространством $S^2 \times \mathbb{R}^3$ спускается на самом деле до сечения над пространством T . Поскольку голоморфные касательные векторы к вещественным сечениям порождают касательное пространство к T в каждой точке, достаточно проверить наше утверждение для любого такого сечения.

Итак, фиксируем начало координат $0 \in \mathbb{R}^3$ и рассмотрим все проходящие через него прямые. Экспоненциальное отображение в этой точке задается соотношением

$$\exp: S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, t) \mapsto tu,$$

и совпадает с проекцией p_2 , примененной к пространству, полученному сдвигом $S^2 \times 0$ посредством геодезического потока. Мы имеем сечение $\hat{s} \in \Gamma(S^2 \times \mathbb{R}, p_2^*E)$, удовлетворяющее уравнению

$$(\nabla_{\partial/\partial t} - i\Phi)\hat{s} = 0,$$

и из формулы (4.3) следует, что

$$(\bar{\partial}\hat{s})^{\wedge} = (\nabla_{\partial/\partial x} + i\nabla_{\partial/\partial y})\hat{s} d\bar{z},$$

где $z = x + iy$ — голоморфная координата на сфере S^2 . Нужно показать, что

$$(\nabla_{\partial/\partial t} - i\Phi)(\nabla_{\partial/\partial x} + i\nabla_{\partial/\partial y})\hat{s} = 0;$$

тогда мы действительно получим сечение над пространством T . Но

$$(\nabla_{\partial/\partial t} - i\Phi, \nabla_{\partial/\partial x} + i\nabla_{\partial/\partial y}) = F\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \nabla_{\partial/\partial y}\dot{\Phi} +$$

и это выражение равно нулю в силу уравнений Богомольного $\nabla \Phi = *F$ и определения комплексной структуры. Следовательно, так как

$$(\nabla_{\partial/\partial t} - i\Phi)\hat{z} = 0,$$

то

$$(\nabla_{\partial/\partial t} - i\Phi)(\nabla_{\partial/\partial x} + i\nabla_{\partial/\partial y})\hat{z} = 0,$$

и мы имеем корректно определенный оператор $\bar{\partial}$, который очевидно удовлетворяет условию (а). Что касается условия (б), то отметим, что по определению (4.3)

$$(\bar{\partial}^2 z)^\wedge = F^{0,2} \hat{z}.$$

Однако слои проекции $p_2: S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задают голоморфные направления, поэтому всякая $(0, 2)$ -форма на пространстве T пропорциональна произведению $\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2$, где u_2 принадлежит касательному пространству слоя. С другой стороны, связность ∇ на пространстве $S^2 \times \mathbb{R}^3$ поднята с пространства $\mathbb{R}^3$ с помощью оператора p_2 , поэтому компонента кривизны F , пропорциональная $\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2$, должна равняться нулю. Отсюда $\bar{\partial}^2 z = 0$, и, следовательно, расслоение $\tilde{E}$ голоморфно.

Мы должны теперь проверить утверждения (i) – (iii) теоремы.

(i) Вещественное сечение расслоения $T \rightarrow \mathbb{P}_1$ задается геодезическими, проходящими через фиксированную точку $0 \in \mathbb{R}^3$. Возьмем фиксированный вектор $e_0 \in E_0$; тогда существует единственное решение уравнения $(\nabla_{\partial/\partial t} - i\Phi)\hat{z} = 0$ с начальным условием $\hat{z}(0) = e_0$. Это определяет сечение z расслоения $\tilde{E}$ над проективной прямой P_0 , а так как e_0 не зависит от направления, то

$$(\bar{\partial} z)^\wedge = \nabla^{0,1} \hat{z} = \nabla^{0,1} e_0 = 0.$$

Следовательно, z – голоморфное сечение, и, изменяя вектор e_0 в пространстве E_0 , мы получим тривиализацию расслоения $\tilde{E}$ на проективной прямой P_0 и аналогично на всяком вещественном сечении.

(ii) Связность ∇ сохраняет $SU(2)$ -структуру на расслоении E , и в частности симплектическую форму. Поле Хиггса Φ также сохраняет $SU(2)$ -структуру, но это неверно по отношению к полю $i\Phi$, которое самосопряженно. Однако симплектическая форма сохра-

няется, так как $\text{Tr}(i\Phi) = 0$, поэтому симплектическая форма на E определена и на решениях уравнения $(\nabla_U - i\Phi)z = 0$. Таким образом, на расслоении $\tilde{E}$ имеется симплектическая форма, которая очевидно согласована с $\tilde{\delta}$ -оператором и, следовательно, голоморфна.

(iii) Расслоение E над пространством $\mathbb{R}^3$ обладает кватернионной структурой⁽¹²⁾ $\mathcal{B}: E_x \rightarrow E_x$. Следовательно, если

$$(\nabla_U - i\Phi)z = 0,$$

то, применяя отображение $\mathcal{B}$, получим

$$(\nabla_U + i\Phi)\mathcal{B}z = 0,$$

откуда

$$(\nabla_U - i\Phi)\mathcal{B}z = 0.$$

Поэтому, вспоминая о том, что вещественная структура $\mathcal{T}$ на пространстве T задается изменением направления геодезической U , получаем, что отображение $\mathcal{B}$ определяет антилинейное (и, как легко видеть, антиголоморфное) отображение

$$\mathcal{B}: \tilde{E}_z \rightarrow \tilde{E}_{\tau z},$$

причем $\mathcal{B}^2 = -1$.

Для доказательства утверждения теоремы 4.2 в обратную сторону необходимо изучить геометрию комплексификации $\mathbb{C}^3$ пространства $\mathbb{R}^3$. В нашем твисторном представлении точка $(\alpha, b, c) \in \mathbb{C}^3$ задается голоморфным сечением $(\alpha\zeta^2 + b\zeta + c)\frac{d}{d\zeta}$ расслоения $T \rightarrow \mathbb{P}_1$, которое необязательно вещественно. Выберем систему локальных координат (η, ζ) на пространстве T , определяемую сопоставлением

$$(\eta, \zeta) \rightarrow \eta d/d\zeta,$$

где ζ — локальная аффинная координата на $\mathbb{P}_1$. Рассмотрим далее все сечения, проходящие через фиксированную точку $(\eta_0, \zeta_0) \in T$. Это есть множество

$$\{(\alpha, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid \eta_0 = \alpha \zeta_0^2 + b \zeta_0 + c\},$$

т.е. некоторая плоскость Π в пространстве $\mathbb{C}^3$. Конформная структура на $\mathbb{C}^3$ задавалась в § 3 с помощью дискриминанта, поэтому комплексификация евклидовой метрики есть

$$g = (db)^2 - 4(d\alpha)(dc).$$

Если теперь $c = \eta_0 - b\zeta_0 - \alpha\zeta_0^2$, то $dc = -\zeta_0 db - \zeta_0^2 d\alpha$, откуда

$$g = db^2 + 4d\alpha(\zeta_0 db + \zeta_0^2 d\alpha) = (db + 2\zeta_0 d\alpha)^2.$$

Тем самым индуцированная метрика на плоскости Π вырождена: Π является изотропной плоскостью⁽¹³⁾. Поэтому с точки зрения голоморфной структуры точка в пространстве T соответствует изотропной плоскости в пространстве $\mathbb{C}^3$. Плоскость Π и ее сопряженная $\bar{\Pi}$ пересекаются по прямой (геодезической нашей первоначальной конструкции), а ее ориентация задается упорядоченной парой $(\Pi, \bar{\Pi})$.

Предположим теперь, что $\tilde{E}$ — голоморфное векторное расслоение, тривиальное на любом вещественном сечении P_x расслоения $T \rightarrow P_1$. Расслоение $\tilde{E}$ также будет тривиально на комплексных сечениях P_y , отвечающих точкам $y \in \mathbb{C}^3$, достаточно близким к $x \in \mathbb{C}^3$, и мы можем определить векторное расслоение E в окрестности точки x , положив

$$E_y = H^0(P_y, \tilde{E}). \quad (4.4)$$

Его слой состоит из голоморфных сечений $\tilde{E}$ вдоль проективной прямой P_y . Более того, для любых проективных прямых, проходящих через точку $x \in T$, мы имеем каноническую тривиализацию расслоения E , определяемую изоморфизмом сужения:

$$H^0(P_y, \tilde{E}) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}_x. \quad (4.5)$$

Следовательно, на расслоении E имеется естественная плоская связность ∇_Π , определенная в окрестности геодезической γ_x на

плоскости Π . Если расслоение $\tilde{E}$ снабжено симплектической формой, то и расслоение E очевидно унаследует эту форму, которая будет сохраняться связностью.

Поскольку любая изотропная прямая лежит в единственной изотропной плоскости, мы можем использовать эту связность для определения параллельного переноса вдоль отрезка произвольной комплексной изотропной геодезической, проходящей через точку x . Дифференцируя по x , получим матричнозначную функцию A от изотропных направлений, которая однородна степени 1 и голоморфна. Однако пространство изотропных направлений совпадает с коникой C в пространстве $P(T_x) = P_2$ - проективизации касательного пространства к $\mathbb{C}^3$ в точке x . При этом всякая однородная функция степени 1 определяет сечение расслоения $O(1)$ на P_2 , суженного на C . Используя теорему Куннета, соотношение $H^1(C, O(1)) = 0$ и тот факт, что любое голоморфное сечение расслоения $O(1)$ над C является сужением линейной формы на T_x , получим, что функция A от изотропных направлений в действительности линейна. Тем самым понятие параллельного переноса определяется на самом деле некоторой связностью ∇ в окрестности точки x . Это рассуждение аналогично первоначальной конструкции Уорда [14].

Рассмотрим теперь сужение указанной связности на изотропную плоскость Π . Оно согласуется по определению с естественной плоской связностью ∇_Π в изотропных направлениях, поэтому

$$\nabla - \nabla_\Pi = i\Phi dy \quad (4.6)$$

для некоторого эндоморфизма Φ расслоения E ; при этом изотропные прямые в плоскости Π задаются уравнениями $y = \text{const.}$ Сделаем y линейной координатой, причем так, чтобы дифференциал dy имел единичную длину. Тогда дифференциал dy определен единственным образом с точностью до знака, фиксируемого ориентацией $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим далее все изотропные плоскости, проходящие через точку x . Эндоморфизм $\Phi(x, \Pi)$ является голоморфной матричнозначной функцией от изотропных направлений, однородной степени 0. Отсюда следует, что $\Phi(x, \Pi)$ на самом деле не зависит от Π и поэтому задает корректно определенный эндоморфизм расслоения E в окрестности пространства $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{C}^3$. Более того, поскольку связности ∇ и ∇_Π сохраняют симплектическую форму на E , то этим свойством обладает и эндоморфизм Φ .

Учитывая, наконец, что связность ∇_Π плоская, мы получаем

из соотношения (4.6) следующее уравнение:

$$F - i\nabla\Phi \wedge dy = 0. \quad (4.7)$$

Вещественная структура $\mathfrak{b}$ на $\tilde{E}$ определяет кватернионную структуру на E в точках вещественного пространства $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$, а связность ∇ и эндоморфизм Φ согласованы с этой структурой. Если воспользоваться указанной вещественной структурой, то из уравнения (4.7) немедленно получим уравнения Богомольного. Действительно, пусть (e_1, e_2, e_3) — ортонормированный базис в касательном пространстве к $\mathbb{R}^3$, выбранный таким образом, чтобы вектор $e_1 + ie_2$ задавал изотропное направление в плоскости Π . Тогда из уравнения (4.7) следует, что

$$F_{13} + iF_{23} = i\nabla_1\Phi - \nabla_2\Phi,$$

и, значит,

$$\nabla_1\Phi = F_{23}, \quad \nabla_2\Phi = F_{31},$$

а это дает уравнения Богомольного для всех изотропных направлений. Пусть $z \in T$ и γ_z — соответствующая геодезическая в направлении e_3 . Тогда из соотношений (4.4), (4.5) следует, что

$$\tilde{E}_z \cong \{z \in \Gamma(\Pi, E) \mid \nabla_\Pi z = 0\}.$$

Но это пространство изоморфно пространству сечений расслоения E над прямой γ_z в плоскости Π , удовлетворяющих условию $\nabla_\Pi z = 0$. Последнее пространство, согласно (4.6), совпадает с ядром оператора $\nabla_3 - i\Phi$. Тем самым мы построили обращение первоначальной конструкции.

Теорема теперь полностью доказана. Хотя она была сформулирована только для $SU(2)$ -решений, она останется верной (с небольшими изменениями вещественной структуры) для любой вещественной формы комплексной группы Ли.

5. Линейное расслоение L

В качестве иллюстрации к изложенной выше конструкции рас-

смотрим простейший пример решения уравнений Богомольного. Вместо группы $SU(2)$ возьмем теперь группу $U(1)$, в качестве расслоения E рассмотрим тривиальное линейное расслоение с плоской связностью, а поле Хиггса Φ положим равным константе i . Мы получим голоморфное линейное расслоение L над пространством T , тривиальное на каждом вещественном сечении, причем в этом случае вещественная структура определяет антиголоморфный изоморфизм

$$\sigma: L_z \cong L_{\tau z}^*.$$

Следуя теореме 4.2, определим

$$L_z = \left\{ z \in C^\infty(\gamma_z) \mid \frac{dz}{dt} + z = 0 \right\}.$$

Следовательно, $z = \text{const } e^{-t}$. Определим далее функцию $\hat{l}$ на пространстве $S^2 \times \mathbb{R}^3$, полагая

$$\hat{l}(u, x) = e^{-u \cdot x}. \quad (5.1)$$

На всякой прямой эта функция кратна e^{-t} ; таким образом, $\hat{l}$ порождает глобальное ненулевое сечение l линейного расслоения L над пространством T . Заметим, что сечение l зависит от выбора начала координат.

Приступим теперь к вычислению $\bar{\partial}l$. Отметим, во-первых, что функция $\hat{l}$ постоянна, если $u \cdot x = 0$. Следовательно, компонента связности $\nabla^{0,1}$ равна нулю в горизонтальном направлении на пространстве $S^2 \times \mathbb{R}^3$. Это в свою очередь означает, в терминах пространства T , что $\bar{\partial}l$ обращается в нуль вдоль слоев расслоения $\pi: T \rightarrow P_1$.

Пусть теперь $\zeta = x + iy$ — стандартная локальная координата на слое S^2 пространства $S^2 \times \mathbb{R}^3$. Пользуясь стереографической проекцией, запишем вектор u в виде

$$u = \left(\frac{2x}{1+\zeta\bar{\zeta}}, \frac{2y}{1+\zeta\bar{\zeta}}, \frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}} \right).$$

Полагая $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\alpha = x_1 + ix_2$ и $\beta = x_3$, получим для скалярного произведения $u \cdot x$ выражение

$$u \cdot x = \frac{\alpha \bar{\zeta} + \bar{\alpha} \zeta + b(1 - \zeta \bar{\zeta})}{1 + \zeta \bar{\zeta}}.$$

Отсюда

$$\nabla^{0,1}(u \cdot x) = (\alpha - 2b\zeta - \bar{\alpha}\zeta^2) \frac{d\bar{\zeta}}{(1 + \zeta \bar{\zeta})^2}. \quad (5.2)$$

Выбирая, далее, на многообразии T координаты $(\eta, \zeta) \rightarrow \eta d/d\zeta$ и сравнивая последнее выражение с выражением (3.2), мы видим, что проективная прямая P_x , отвечающая точке x , задается уравнением $\eta = \alpha - 2b\zeta - \bar{\alpha}\zeta^2$. Тем самым сечение l расслоения L над многообразием T удовлетворяет уравнению

$$\bar{\partial} l = \frac{-l \eta d\bar{\zeta}}{(1 + \zeta \bar{\zeta})^2}. \quad (5.3)$$

Отметим, что сечение l голоморфно на каждом слое расслоения $T \rightarrow P_1$ и на нулевом сечении $\eta = 0$, отвечающем выбранному началу координат в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Если теперь f_l — локальное голоморфное сечение расслоения L , то $\bar{\partial}(f_l) = 0$ и из уравнения (5.3) имеем

$$\partial f / \partial \bar{\eta} = 0,$$

а также

$$\partial f / \partial \bar{\zeta} = f \eta / (1 + \zeta \bar{\zeta})^2.$$

Отсюда получаем, что $f = g(\zeta, \eta) \exp(-\eta/\zeta(1 + \zeta \bar{\zeta}))$, где $g(\zeta, \eta)$ — голоморфная функция.

Функция $f_0 = \exp(-\eta/\zeta(1 + \zeta \bar{\zeta}))$ регулярна при $\zeta = \infty$, но имеет особенность при $\zeta = 0$. Аналогично, функция $f_1 = \exp(-\eta/\zeta(1 + \zeta \bar{\zeta}) + \eta/\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$, но сингулярна при $\zeta = \infty$.

Таким образом, $f_0 l$ задает тривиализацию расслоения L над открытым множеством $U_0 = \{(\eta, \zeta) \in T \mid \zeta \neq 0\}$, а функция $f_1 l$ — над открытым множеством $U_1 = \{(\eta, \zeta) \in T \mid \zeta \neq \infty\}$.

На пересечении $U_0 \cap U_1$ имеем $f_0 \ell = e^{\eta/\zeta} f_1 \ell$, поэтому функцией перехода φ_{01} будет функция

$$\varphi_{01} = \exp(-\eta/\zeta). \quad (5.4)$$

Поскольку в выбранных координатах вещественная структура задается отображением

$$\tau(\eta, \zeta) = (-\bar{\eta}/\bar{\zeta}^2, -\bar{\zeta}^{-1}),$$

которое переводит множество U_0 в множество U_1 , а U_1 в U_0 , получаем, что

$$\varphi_{01} \tau = \exp(\bar{\eta}/\bar{\zeta}) = \bar{\varphi}_{01}^{-1}.$$

Отсюда мы получаем антиголоморфный изоморфизм

$$\sigma: L_z \xrightarrow{\cong} L_{\tau z}^*.$$

Из самого описания расслоения L как решения уравнений Богомольного ясно, что это расслоение является каноническим объектом на многообразии T . В терминах алгебраической геометрии мы можем описать его следующим образом.

Напомним, что для любого компактного комплексного многообразия X^n определен фундаментальный класс⁽¹⁴⁾ $\omega \in H^n(X, K)$, где $\pi: K \rightarrow X$ — каноническое расслоение многообразия X . Далее, над тотальным пространством любого векторного расслоения E на X имеется тавтологическое сечение z расслоения π^*E . Поэтому, если взять в качестве E антиканоническое расслоение K^* , можно естественным образом построить элемент $z\pi^*\omega \in H^n(K^*, O)$.

В нашем случае $X = \mathbb{P}_1$, $T = K^*$, а линейное расслоение $L \in H^1(T, O^*)$ определяется равенством

$$L = \exp(z\pi^*\omega).$$

6. Граничные условия

Предположим теперь, что пара (∇, Φ) , являющаяся решением $SU(2)$ -уравнений Богомольного, удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|\Phi\| = 1 - \frac{m}{r} + O(r^{-2}), \\ (ii) \quad & \partial\|\Phi\|/\partial\Omega = O(r^{-2}), \\ (iii) \quad & \|\nabla\Phi\| = O(r^{-2}) \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь норма $\|\Phi\|$ задается равенством $\|\Phi\|^2 = -\frac{1}{2} \text{Tr } \Phi^2$, а через $\partial\|\Phi\|/\partial\Omega$ обозначена угловая производная $\|\Phi\|$:

$$\partial\|\Phi\|/\partial\Omega = ((\partial\|\Phi\|/\partial\theta)^2 + \sin^2\theta(\partial\|\Phi\|/\partial\varphi)^2)^{1/2}.$$

Эти условия не зависят от выбора начала координат. Заметим, что в условии (ii) подразумевается, что m является константой. Кроме того, поскольку сечение Φ согласно (i) не обращается в нуль при достаточно больших r , то расслоение E расщепляется в прямую сумму $E \cong M \oplus M^*$ собственных подпространств Φ . Сужение линейного расслоения M на сферу большого радиуса имеет целочисленный класс Чжэня $\pm k$. С помощью интегрирования по сфере (см. [15])⁽¹⁵⁾ можно показать, что константа m совпадает с положительным целым числом k . Мы будем называть k зарядом нашего решения.

Подход Уорда к построению решений с заданным зарядом k заключается в использовании анзаца $\mathcal{A}_k$. В терминах многообразия T это означает, что расслоение $\tilde{E}$ на T строится как расширение линейного расслоения. Точнее, мы выбираем на многообразии T гомотопное линейное расслоение⁽¹⁶⁾ $O(-k)$ (обратный образ единственного линейного расслоения степени $-k$ на P_1 относительно отображения $\pi: T \rightarrow P_1$), тензорно умножаем его на расслоение L , построенное в § 5, и рассматриваем векторные расслоения $\tilde{E}$, которые включаются в точные последовательности вида

$$0 \rightarrow L(-k) \xrightarrow{\alpha} \tilde{E} \xrightarrow{\beta} L^*(k) \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

Это означает, что в расслоении $\tilde{E}$ имеется выделенное голоморфное подрасслоение, изоморфное расслоению $L(-k)$. Поскольку на $\tilde{E}$ имеется симплектическая форма, линейное факторрасслоение $\tilde{E}$ по указанному подрасслоению изоморфно расслоению $L^*(k)$.

В терминах функций перехода расслоение является расширением, если его функции перехода можно задать верхними треугольными матричными функциями. В нашем случае функция перехода расслоения $O(k)$ есть ζ^k , а функция перехода расслоения L совпадает с $e^{-\eta/\zeta}$. Согласно анзацу $\mathcal{A}_k$, расслоение E должно задаваться функциями перехода вида

$$\begin{pmatrix} \zeta^{-k} e^{\eta/\zeta} & f(\eta, \zeta) \\ 0 & \zeta^k e^{-\eta/\zeta} \end{pmatrix}.$$

Внедиагональный член $f(\eta, \zeta)$ определяет коцикл Чеха, представляющий класс группы $H^1(T, L^2(-2k))$ когомологий пучков. Эта группа параметризует все расширения⁽¹⁷⁾ вида (6.2).

Докажем теперь следующую теорему:

Т е о р е м а 6.3. Пусть (V, Φ) является решением $SU(2)$ -уравнений Богомольного на $\mathbb{R}^3$, имеющим заряд k и удовлетворяющим граничным условиям (6.1). Пусть $\tilde{E}$ — соответствующее голоморфное расслоение на T , определяемое формулой (4.1), а L^+ — подрасслоение расслоения $\tilde{E}$, состоящее из решений уравнения $(V_U - i\Phi)s = 0$, убывающих при $t \rightarrow +\infty$. Тогда L^+ является голоморфным подрасслоением, изоморфным расслоению $L(-k)$, а расслоение $\tilde{E}$ может быть представлено как расширение вида

$$0 \rightarrow L(-k) \rightarrow \tilde{E} \rightarrow L^*(k) \rightarrow 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем тривиализацию (e_0, e_1) векторного расслоения E в окрестности ориентированной прямой в $\mathbb{R}^3$, задаваемую ортогональными собственными векторами сечения Φ на больших расстояниях (в направлении возрастания параметра на прямой). Тогда при больших τ

$$\bar{\Phi} e_j = (-1)^j i \|\Phi\| e_j, \quad j = 0, 1.$$

Следовательно, взяв ковариантную производную, получим

$$(\Phi - (-1)^j i \|\Phi\|) \nabla e_j = (i \nabla \|\Phi\| - (-1)^j \nabla \Phi) e_j.$$

Поскольку $\|\nabla \Phi\| = O(r^{-2})$ согласно (6.1), матрица связности в этой калибровке имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A \end{pmatrix}, \text{ где } \|B\| = O(r^{-2}).$$

Рассмотрим теперь диагональную часть этой матрицы. Она определяет связность, оставляющую инвариантными собственные подпространства Φ . Выберем калибровку, которая ковариантно постоянна⁽²⁾ в радиальных направлениях относительно этой связности. Тогда вид матрицы не изменится, но в полярных координатах 1-форма A не будет содержать члена с дифференциалом dr .

Кривизна F удовлетворяет соотношению

$$F = \begin{pmatrix} dA - B^*B & dB \\ -dB^* & -(dA - B^*B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i * d\|\Phi\| & 0 \\ 0 & -i * d\|\Phi\| \end{pmatrix} + O(r^{-2}),$$

в котором мы воспользовались уравнениями Богомольного $\nabla \Phi = *F$. Следовательно, если (u_1, u_2) — сферические координаты и $A = A_1 du_1 + A_2 du_2$, то мы получаем

$$\partial A_1 / \partial r = i \partial \|\Phi\| / \partial u_2 + O(r^{-2}),$$

и из условия (ii) в (6.1) вытекает, что

$$\partial A_1 / \partial r = O(r^{-2}).$$

Аналогичное соотношение имеет место для A_2 . Следовательно, в радиальных направлениях компоненты A_i стремятся к пределам $\bar{A}_i$ при $r \rightarrow \infty$.

Вместо того чтобы вводить фиксированный набор полярных координат, можно рассмотреть связность $p_2^* \nabla$, поднятую на $S^2 \times \mathbb{R}^3$ с помощью проекции $p_2: S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, и выбрать аналогичную калибровку в окрестности орбиты геодезического потока. Тогда при

$t \rightarrow \infty$ вдоль потока эта связность стремится к связности, поднятой с S^2 с помощью проекции $p_1: S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$. Предельная связность сохраняет к тому же собственные подпространства Φ .

Рассмотрим теперь соответствующее голоморфное векторное расслоение $\tilde{E}$ на T . Согласно (4.1),

$$\tilde{E}_x = \{z \in \Gamma(\gamma_x, E) \mid (\nabla_U - i\Phi)z = 0\}.$$

В выбранной калибровке это уравнение принимает вид

$$\frac{dx}{dt} - \begin{bmatrix} -1 + \frac{k}{t} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{k}{t} \end{bmatrix} x + C(t)x = 0, \quad (6.4)$$

где $\|C(t)\| = O(t^{-2})$ по условию (i).

Поскольку $\|C(t)\|$ — интегрируемая функция, мы можем применить теорему Левинсона (см. [5, 6]) об асимптотическом поведении решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Согласно этой теореме, уравнение (6.4) имеет решения x_0, x_1 , такие, что

$$\begin{aligned} x_0(t)t^{-\frac{k}{2}}e^t &\rightarrow e_0, \\ x_1(t)t^{\frac{k}{2}}e^{-t} &\rightarrow e_1 \end{aligned} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

В частности, существует однозначно определенное одномерное подпространство решений $L_x^+ \subset \tilde{E}_x$ (а именно подпространство, порожденное x_0), которые убывают при $t \rightarrow +\infty$.

Решение x_0 может быть получено при помощи фундаментального решения невозмущенного уравнения

$$K(s, t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} e^{s-t} \frac{t^{\frac{k}{2}}}{s^{\frac{k}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{при } s > t, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} \frac{s^{\frac{k}{2}}}{t^{\frac{k}{2}}} \end{bmatrix} & \text{при } s \leq t. \end{cases}$$

Решение x_0 удовлетворяет тогда уравнению

$$\begin{aligned} x(t) &= (t^k e^{-t})e_0 + \int_{t_1}^{\infty} K(z, t) C(z) x(z) dz = \\ &= (t^k e^{-t})e_0 + (Tx)(t). \end{aligned}$$

Поскольку функция $\|C(t)\|$ интегрируема, то отображение T является сжимающим для достаточно больших t_1 , а потому существует единственное решение последнего уравнения в классе функций, ограниченных на интервале $[t_1, \infty)$. Используя приведенный метод и равномерные оценки $C(t)$, обеспечиваемые граничными условиями, можно показать, что расслоение L^+ непрерывно зависит от точки $z \in T$ и, сверх того, дифференцируемо благодаря условию (ii). Производная при заданном выборе начального значения определяется формулой

$$\left. \frac{\partial x_0}{\partial z} \right|_{z=0} = \int_{t_1}^{\infty} K(z, t) \left[\frac{\partial C}{\partial z}(z, 0) x_0(z, 0) + C(z, 0) \frac{\partial x_0}{\partial z}(z, 0) \right] dz.$$

Из условия (ii) следует, что $\partial C / \partial z$ есть $O(z^{-2})$ при $z \rightarrow \infty$ равномерно по z , если z изменяется в пределах компактного множества. Поэтому мы имеем еще одно сжимающее отображение, причем

$$\|\partial x_0 / \partial z\| < \text{const} \cdot \|x_0\|.$$

Отсюда следует, в частности, что $\partial x_0 / \partial z \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Теперь мы хотим показать, что L^+ является голоморфным под-расслоением расслоения $\tilde{E}$. Пусть z — локальное дифференцируемое сечение расслоения L^+ . Препятствие к его голоморфности можно, пользуясь симплектической формой на расслоении $\tilde{E}$, выразить в виде $\langle \bar{\partial} z, z \rangle$.

В терминах сферического расслоения $S^2 \times \mathbb{R}^3$ имеем

$$\langle \bar{\partial} z, z \rangle = \langle \nabla^{0,1} \hat{z}, \hat{z} \rangle.$$

Последняя величина, в силу уравнений Богомольного, постоянна вдоль геодезического потока. Но, как мы показали выше, и $z(x, t)$, и $\nabla z(x, t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому указанная постоянная равна нулю, и расслоение L^+ голоморфно. Заметим, что мы могли бы точно так же ввести подрасслоение L^- , исходя из решений, убывающих при $t \rightarrow -\infty$, и теми же рассуждениями доказать его голоморфность. Связь между двумя этими расслоениями будет рассмотрена в следующем параграфе.

Нам осталось идентифицировать подрасслоение L^+ с расслоением $L(-k)$. Линейное расслоение L отвечает тривиальному $U(1)$ -решению уравнений Богомольного. Рассмотрим голоморфное расслоение $\tilde{E} \oplus L^*$. Оно отвечает $U(2)$ -решению уравнений Богомольного, в котором поле Хиггса Φ заменено на $\Phi - i$. Следовательно, подрасслоение $L^+ \oplus L^*$ изоморфно пространству решений уравнения

$$\frac{dx}{dt} - \begin{bmatrix} \frac{k}{t} & 0 \\ 0 & 2 - \frac{k}{t} \end{bmatrix} x + C(t)x = 0,$$

удовлетворяющих условию $t^{-k}x(t) \rightarrow \lambda e_0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Пусть далее z — локальное сечение расслоения $L^+ \oplus L^*$. Оно определяет сечение $\hat{z}(z, t)$ на $S^2 \times \mathbb{R}^3$. При $t \rightarrow +\infty$ собственное подпространство поля Хиггса, отвечающее собственному значению i , стремится к линейному расслоению⁽¹⁸⁾ p_1^*M степени $\pm k$ (над сферой в бесконечности), а связность, как было показано, стремится к поднятой связности $p_1^*\bar{V}$.

Определим отображение $\alpha: L^+ \oplus L^* \rightarrow p_1^*M$ соотношением

$$\alpha(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-k} \hat{z}(z, t).$$

Заметим, что α не зависит от выбора начала отсчета $t=0$ на пря-

мой. Используя снова фундаментальное решение, мы получим, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \propto (\hat{z}(z, t)) = \propto \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{z}}(z, t)$$

и, следовательно,

$$(\partial^{0,1} + \bar{A}^{0,1}) \propto (\hat{z}) = \propto (\nabla^{0,1} \hat{z}(z, t)). \quad (6.5)$$

Однако линейное расслоение со связностью на $S^2 = P_1$ обладает голоморфной структурой, определяемой $\bar{\partial}$ -оператором $\partial^{0,1} + \bar{A}^{0,1}$, а голоморфная структура на расслоении $\tilde{E} \otimes L^*$ задается оператором $\nabla^{0,1}$. Поэтому из (6.5) следует, что $\propto$ — голоморфный изоморфизм. Поскольку на линейном расслоении на P_1 существует единственная комплексная структура, имеем изоморфизм $L^+ \otimes L^* \cong \pi^* \mathcal{O}(\pm k)$. В действительности, так как расслоение $\tilde{E}$ голоморфно тривиально на любом вещественном сечении расслоения T , то расслоение L^+ должно иметь отрицательную степень, т.е.

$$L^+ \cong L(-k),$$

что и завершает доказательство теоремы 6.3.

7. Спектральная кривая

Нами было установлено, что голоморфное векторное расслоение $\tilde{E}$, соответствующее монополю, может быть представлено как расширение

$$0 \rightarrow L^+ \rightarrow \tilde{E} \rightarrow (L^+)^* \rightarrow 0, \quad (7.1)$$

где $L^+ \cong L(-k)$. Мы также показали при доказательстве теоремы 6.3, что имеется другое расширение

$$0 \rightarrow L^- \rightarrow \tilde{E} \rightarrow (L^-)^* \rightarrow 0. \quad (7.2)$$

На самом деле вещественная структура $\mathfrak{b}: \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$ переводит расслоение L^+ в расслоение L^- , так как она меняет ориентацию каждой прямой на противоположную, и решения, убывающие при $t \rightarrow +\infty$, переходят в решения, убывающие при $t \rightarrow -\infty$. Поэтому $\mathfrak{b}$ определяет антиголоморфный изоморфизм

$$\mathfrak{b}: L^+ \rightarrow L^-,$$

откуда, в частности, следует, что $L^- \cong L^*(-k)$.

Теперь мы можем спроектировать подрасслоение L^- расслоения $\tilde{E}$ на подрасслоение $(L^+)^*$ из последовательности (7.1), получив тем самым голоморфное сечение

$$\psi \in H^0(T, (L^+ \otimes L^-)^*) \cong H^0(T, O(2k)).$$

Назовем нулевое множество этого сечения спектральной кривой S . Такое название объясняется тем, что спектральная кривая состоит из точек $x \in T$, для которых $L_x^+ = L_x^-$. Другими словами, точкам кривой S отвечают такие прямые, для которых существуют решения уравнения $(\nabla_U - i\Phi)z = 0$, убывающие на обоих концах прямой. Поскольку эти решения стремятся к нулю экспоненциально, они, кроме того, принадлежат пространству $\mathcal{L}^2$. Следовательно, мы рассматриваем нелинейное семейство линейных дифференциальных операторов на прямой и ищем выделенные значения параметров, при которых существуют решения, принадлежащие пространству $\mathcal{L}^2$.

Кривая S обладает следующими свойствами.

Предложение 7.3. Пусть S - спектральная кривая, отвечающая $SU(2)$ -монополю с зарядом k . Тогда

- (i) кривая S компактна;
- (ii) кривая S задается уравнением

$$p(\eta, \zeta) = \eta^k + a_1(\zeta)\eta^{k-1} + \dots + a_k(\zeta) = 0,$$

где $a_i(\zeta)$ - полиномы степени $2i$;

- (iii) линейное расслоение L^2 голоморфно тривиально на S ;
- (iv) кривая S инвариантна относительно вещественной структуры τ .

Д о к а з а т е л ь с т в о . (i) Пусть z - ненулевое решение уравнения $(\nabla_U - i\Phi)z = 0$ на некоторой прямой. Рассмотрим функцию $f = \|z\|^2$ на этой прямой. Так как z - решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, то функция f не обращается в нуль. Далее,

$$df/dt = (\nabla_U z, z) + (z, \nabla_U z) = 2(i\Phi z, z),$$

так как связность ∇ сохраняет скалярное произведение, а $i\Phi$ - самосопряженный оператор. Дифференцируя еще раз, получим, что

$$d^2f/dt^2 = 2\{((i\nabla_U \Phi)z, z) + 2\|\Phi\|^2 f\}.$$

Но из граничных условий (i) и (iii) в формуле (6.1) следует, что существует $R > 0$, такое, что при $r > R$

$$\|\Phi\|^2 > \frac{1}{2}, \quad |((\nabla_U \Phi)z, z)| < \frac{1}{2} \|z\|^2.$$

Следовательно, если вся прямая отстоит от начала координат на расстояние, большее R , то

$$d^2f/dt^2 > f > 0$$

для всех решений z . Так как функция f выпукла и не равна константе, она неограничена. Следовательно, в этом случае нет ненулевых решений, убывающих на обоих концах прямой.

Таким образом, спектральная кривая S лежит целиком в подрасслоении кругов радиуса R расслоения $T = TS^2$ и тем самым является компактной.

(ii) Кривая S определяется условием $\phi = 0$, где ϕ - голоморфное сечение расслоения $O(2k)$ на T . Обозначим через $\mathcal{I}$ пучок идеалов некоторого фиксированного сечения P расслоения T . Тогда для любого векторного расслоения E имеется точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{I}^{n+1} \otimes \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{I}^n \otimes \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}_P(E \otimes N^{-n}) \rightarrow 0,$$

где N — нормальное расслоение сечения P . В нашем случае $N \cong \mathcal{O}_P(2)$, и если мы положим $E = \mathcal{O}(2k)$, то получим последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{I}^{n+1} \otimes \mathcal{O}(2k) \rightarrow \mathcal{I}^n \otimes \mathcal{O}(2k) \rightarrow \mathcal{O}_P(2k - 2n) \rightarrow 0. \quad (7.4)$$

Пусть теперь $n > k$. Тогда $H^0(P_1, \mathcal{O}(2k - 2n)) = 0$, и из точной когомологической последовательности, порожденной последовательностью (7.4), вытекает следующее утверждение: если сечение ϕ расслоения $\mathcal{O}(2k)$ имеет нуль порядка $(k+1)$ на P , то это сечение тождественно равно нулю на T . Тем самым сечение ϕ полностью определено своим сужением на инфинитезимальную окрестность⁽¹⁹⁾ k -го порядка сечения P . Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(2k - 2n) \rightarrow \mathcal{O}_P^n(2k) \rightarrow \mathcal{O}_P^{n-1}(2k) \rightarrow 0,$$

отвечающей инфинитезимальным окрестностям более высокого порядка, получаем, что

$$\begin{aligned} \dim H^0(P, \mathcal{O}_P^k(2k)) &= \sum_{n=0}^k \dim H^0(P, \mathcal{O}(2k - 2n)) = \\ &= \sum_{n=0}^k (2n + 1) = (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dim H^0(T, \mathcal{O}(2k)) \leq (k + 1)^2. \quad (7.5)$$

С другой стороны, расслоение $\mathcal{O}(2)$ является поднятием на T касательного расслоения к P_1 , и над многообразием T оно имеет каноническое сечение, задаваемое в стандартной системе координат формулой $\eta \, d/d\zeta$. Поэтому если $p(\eta, \zeta)$ — произвольный полином вида, указанного в условии (ii), то $\phi = p(\eta, \zeta)(d/d\zeta)^k$ будет голоморфным сечением расслоения $\mathcal{O}(2k)$. Поскольку размерность пространства таких сечений равна $(k+1)^2$, из формулы (7.5) следует, что любое из этих сечений, в частности ϕ , имеет такой вид. Для компактности кривой S необходимо, чтобы коэффициент при η^k был

отличен от нуля; таким образом, кривая S определяется уравнением

$$\eta^k + \alpha_1(\zeta)\eta^{k-1} + \dots + \alpha_k(\zeta) = 0.$$

(iii) Поскольку $L^+ = L^-$ на S , а также $L^+ \cong L(-k)$, $L^- \cong L^*(-k)$, то $L \cong L^*$ на S , и, следовательно, линейное расслоение L^2 тривиально.

(iv) Из равенства $\sigma(L^+) = L^-$ очевидным образом следует, что S — вещественная кривая.

Итак, кривая S определяется набором $(k+1)^2 - 1$ вещественных параметров, но ввиду условия (ii) на нее налагаются дальнейшие ограничения. Так как класс Чжэня расслоения L^2 равен нулю, то сужение этого расслоения на S определяется (с точностью до изоморфизма) точкой g -мерного комплексного тора ⁽⁴¹⁾

$$H^1(S, \mathbb{O})/H^1(S, \mathbb{Z}),$$

где g — род кривой S . Так как, кроме того, расслоение L^2 вещественно ($L^+ = L^-$ на кривой S), то условие (iii) дает g дополнительных вещественных условий на кривую S . Если кривая S неособая, то можно вычислить ее род с помощью формулы присоединения ⁽²⁰⁾

$$K \cdot S + S^2 = 2g - 2.$$

Кривая S является нулевым множеством сечения расслоения $\mathcal{O}(2k)$, поэтому ее индекс самопересечения ⁽²¹⁾ равен $c_1(\mathcal{O}(2k))[S]$. Но так как $p(\eta, \zeta)$ — полином степени k по η , то кривая S является накрытием k -й степени базы $\mathbb{P}_1$. Следовательно, $S^2 = 2k^2$, и поскольку каноническое расслоение K изоморфно расслоению ⁽²²⁾ $\mathcal{O}(-4)$, то $K \cdot S = -4k$ и, значит,

$$2g - 2 = 2k^2 - 4k \quad \text{и} \quad g = (k-1)^2.$$

Поэтому перечисленные выше условия (геометрический вариант условий из работы [7]) сводятся к выбору $(k+1)^2 - 1 - (k-1)^2 = 4k - 1$

вещественных параметров.

Прямой подсчет параметров позволяет предположить, что спектральная кривая определяет решение. Сейчас мы убедимся в том, что это действительно так.

Расслоение $\tilde{E}$ было описано нами как расширение

$$0 \rightarrow L(-k) \rightarrow \tilde{E} \rightarrow L^*(k) \rightarrow 0;$$

другими словами, оно определяется элементом α группы когомологий $H^1(T, L^2(-2k))$. Возьмем сечение $\phi \in H^0(T, O(2k))$ и, умножая его на α , получим элемент $\phi(\alpha) \in H^1(T, L^2)$. Этот класс равен нулю из общих соображений. Действительно, у нас есть расширение

$$0 \rightarrow L^+ \xrightarrow{\alpha} \tilde{E} \xrightarrow{\beta} (L^+)^* \rightarrow 0$$

и гомоморфизм $\phi: L^- \rightarrow (L^+)^*$. Их произведение определяет расширение

$$0 \rightarrow L^+ \rightarrow F \rightarrow L^- \rightarrow 0,$$

которое можно задать следующим образом:

$$F = \{(x, y) \in \tilde{E} \oplus L^- \mid \beta(x) = \phi(y)\}.$$

Но в нашем случае $\phi = \beta|_{L^-}$, поэтому диагональное отображение

$$\Delta: L^- \rightarrow F, \quad y \mapsto (y, y)$$

определяет расщепление этого расширения. Отсюда видно, что класс $\phi(\alpha)$ равен нулю.

Рассмотрим теперь точную когомологическую последовательность, порожденную точной последовательностью пучков

$$0 \rightarrow O(L^2(-2k)) \rightarrow O(L^2) \rightarrow O_S(L^2) \rightarrow 0.$$

Имеем

$$0 \rightarrow H^0(S, L^2) \xrightarrow{\delta} H^1(T, L^2(-2k)) \xrightarrow{\Phi} H^1(T, L^2).$$

Поскольку $\phi(\alpha) = 0$, то $\alpha = \delta(\alpha)$ для некоторого элемента $\alpha \in H^0(S, L^2)$. Но расслоение L^2 тривиально на компактной связной кривой S , поэтому класс α определяется единственным образом с точностью до множителя (не меняющего расслоения $\tilde{E}$). Отсюда следует

Т е о р е м а 7.6. Если S - спектральная кривая, то расслоение $\tilde{E}$ получается как расширение $\delta(\alpha)$, где элемент α задает тривиализацию расслоения L^2 на S , а

$$\delta: H^0(S, L^2) \rightarrow H^1(T, L^2(-2k))$$

является кограничным отображением.

В частности, кривая S определяет расслоение $\tilde{E}$.

П р и м е р 7.7. В случае $k=1$ спектральная кривая S задается уравнением $\eta + \alpha_1(\zeta) = 0$, где $\alpha_1(\zeta)$ - полином 2-й степени. В точности такой же формулой определяются расслоения $\pi: T \rightarrow P_1$, а так как кривая S вещественна, она отвечает вещественному сечению P_x для некоторой выделенной точки $x \in R^3$.

Выберем в качестве x начало координат. Соответствующее решение $SU(2)$ -уравнений Богомольного с зарядом, равным 1, дается вращ-монополем [4, 13]. Поле Хиггса Φ для этого решения имеет вид

$$\Phi = r \left(\operatorname{cth} z - \frac{1}{z} \right).$$

Таким образом, если мы рассматриваем прямые, проходящие через начало координат, и выбираем калибровку, ковариантно постоянную

в радиальных направлениях, дифференциальное уравнение на любой из этих прямых имеет вид

$$\frac{dx}{dz} - \begin{bmatrix} \operatorname{cth} z - \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & -\operatorname{cth} z + \frac{1}{z} \end{bmatrix} x = 0.$$

Очевидно, что единственным решением этого уравнения, убывающим

при $z \rightarrow +\infty$, является $x = \begin{bmatrix} 0 \\ z/\operatorname{sh} z \end{bmatrix}$. А поскольку оно также

стремится к нулю при $z \rightarrow -\infty$, то спектральная кривая содержит в качестве связанной компоненты все прямые, проходящие через x , т.е. сечение P_x . Так как спектральная кривая должна быть сечением, она совпадает с P_x . Наконец, из теоремы 7.6 вытекает, что спектральная кривая определяет решение, поэтому BPS-монополь является единственным решением с зарядом $k = 1$.

Пример 7.8. Рассмотрим осесимметричный случай, изученный Прасадом и Росси [12], а также (с использованием других методов) Форгачем и др. [9]. В нашем твисторном подходе вращению θ вокруг оси x_3 соответствует действие группы $U(1)$ на многообразии T по формуле

$$(\eta, \zeta) \rightarrow (e^{i\theta} \eta, e^{i\theta} \zeta).$$

Следовательно, спектральная кривая S , определяемая уравнением

$$\eta^k + \alpha_1(\zeta) \eta^{k-1} + \dots + \alpha_k(\zeta) = 0,$$

инвариантна относительно этого действия тогда и только тогда, когда $\alpha_i(\zeta) = c_i \zeta^i$ с некоторыми константами c_i , $1 \leq i \leq k$. Но тогда уравнение кривой факторизуется:

$$\prod_{i=1}^k (\eta - \lambda_i \zeta) = 0,$$

где λ_i — корни уравнения $\zeta^k + c_1 \zeta^{k-1} + \dots + c_k = 0$.

Геометрически это означает, что кривая S приводима и является суммой k сечений расслоения T , каждое из которых проходит через две точки $(\eta, \zeta) = (0, 0), (0, \infty)$.

На любом из указанных сечений расслоение L^2 тривиально, поскольку его степень равна нулю. Таким образом, мы имеем комплексное $\mathbb{C}^*$ -решение уравнений Богомольного на пространстве $\mathbb{C}^3$. Как следует из § 5, оно соответствует линейному расслоению с тривиальной связностью и полем Хиггса $2i$. Опишем теперь условие тривиальности расслоения L^2 на кривой S в терминах этой связности.

Возьмем две компоненты P_u и P_v кривой S , отвечающие точкам $u = (0, 0, \lambda_i/2)$ и $v = (0, 0, \lambda_j/2)$ пространства $\mathbb{C}^3$. Согласно голоморфной интерпретации уравнений Богомольного (в заключительной части доказательства теоремы 4.2), тривиализации расслоения L^2 на сечениях P_u и P_v согласуются в их точке пересечения $x \in P_u \cap P_v$, если соответствующие векторы в точках u и v связаны параллельным переносом в плоскости Π , отвечающей точке x , который порожден плоской связностью ∇_Π . Следовательно, они согласуются в обеих точках пересечения x и x' , если параллельный перенос вдоль геодезической, соединяющей точки u и v , будет одним и тем же для обеих связностей ∇_Π и $\nabla_{\Pi'}$.

Далее, из (4.6) следует, что $\nabla - \nabla_\Pi = i\Phi dy$, $\nabla - \nabla_{\Pi'} = i\Phi dy'$. На прямой пересечения имеем $dy' = -dy$, поэтому параллельный перенос будет одним и тем же, если

$$\exp\left(-\int_u^v 2dy\right) = \exp\left(\int_u^v 2dy\right),$$

т.е. если расстояние между u и v кратно $i\pi/2$.

После выбора подходящего начала координат и с учетом условия вещественности спектральная кривая для осесимметричного решения примет вид

$$\eta \prod_{i=1}^l (\eta^2 + k_i^2 \pi^2 \zeta^2) = 0,$$

если $k = 2l+1$ и $k_i \in \mathbb{Z}$, или

$$\prod_{i=1}^l (\eta^2 + (k_0/2 + k_i)^2 \pi^2 \zeta^2) = 0,$$

если $k = 2l$.

В частности, как уже было отмечено Прасадом и Росси, единственными непрерывными параметрами в этой конструкции оказываются выбор начала координат и направления оси симметрии.

8. Заключение

Мы показали, что любой $SU(2)$ -монополь, удовлетворяющий граничным условиям (6.1), задает алгебраическую кривую на поверхности $T = \mathbb{CP}_1$, причем эта кривая однозначно определяет монополь. Таким образом, в принципе возможно изучать свойства монополя, исследуя алгебраические кривые. Имеется, однако, ряд вопросов, связанных с приведенной конструкцией, на которые мы пока не нашли исчерпывающих ответов:

(1) Какие кривые в T удовлетворяют необходимым условиям предложения 7.3 и являются спектральными кривыми?

Ответ на этот вопрос связан с периодами кривой и поэтому является трансцендентным по самой своей природе. Любая кривая, которая действительно удовлетворяет этим условиям, порождает (с помощью кограничной конструкции теоремы 7.6) векторное расслоение $\tilde{E}$ на T , задаваемое как расширение $\delta(\alpha)$ из группы $H^1(T, L^2(-2k))$. Более того, обращая доказательство этой теоремы, можно показать, что сопряженный элемент $\delta\delta(\alpha) \in H^1(T, L^2(-2k))$ определяет изоморфное расслоение. Таким образом, на $\tilde{E}$ существует кватернионная структура. По теореме 4.2 расслоение $\tilde{E}$ порождает решение уравнений Богомольного в точках $\mathbb{R}^3$, соответ-

ствующих сечениям Γ , над которыми расслоение $\tilde{E}$ тривиально. Здесь естественно возникает следующий вопрос:

(2) Для каких кривых расслоение $\tilde{E}$ тривиально на любом вещественном сечении?

Поскольку на всякой проективной прямой расслоение $\tilde{E}$ изоморфно $O(m) \oplus O(-m)$ для некоторого m , мы можем охарактеризовать сечения P_x , на которых расслоение $\tilde{E}$ тривиально, с помощью условия $H^0(P_x, \tilde{E}(-1)) = 0$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow L(-k-1) \rightarrow \tilde{E}(-1) \rightarrow L^*(k-1) \rightarrow 0$$

следует, что приведенное условие выполняется тогда и только тогда, когда кограничное отображение

$$H^0(P_x, L^*(k-1)) \rightarrow H^1(P_x, L(-k-1)) \quad (8.1)$$

является изоморфизмом. Это отображение задается умножением на класс расширения $\delta(\alpha) \in H^1(P_x, L^2(-2k))$. Далее, тривиализация α расслоения L^2 на кривой S связана с фиксированной тривиализацией β расслоения L^2 на сечении P_x соотношением

$$\alpha = \lambda_i \beta, \quad 1 \leq i \leq 2k,$$

в точках пересечения $\zeta_i \in P_x \cap S$. Если сечение P_x задается уравнением $\eta = a(\zeta)$, а спектральная кривая — уравнением $\varphi(\eta, \zeta) = 0$, то мы можем определить квадратичную форму на полиномах $(k-1)$ -й степени, полагая

$$Q(f, g) = \sum_i \lambda_i \operatorname{Res}_{\zeta = \zeta_i} \frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\varphi(a(\zeta), \zeta)}.$$

Эта форма после отождествления $H^1(P_x, L(-k-1))$ с $H^0(P_x, L^*(k-1))$ по двойственности Серра ⁽²³⁾ задает отображение (8.1). Поэтому необходимым условием является невырожденность формы Q . На практике получить эту невырожденность довольно трудно даже в осесимметричном случае.

Рассмотрев вопросы внутренней регулярности, обратимся к граничным условиям.

(3) Удовлетворяет ли решение уравнений Богомольного, полученное указанным способом, граничным условиям (6.1)?

Это представляется вполне вероятным — частичный ответ дан в работе Корригана и Годдарда [7].

В некотором смысле трудности, возникающие при доказательстве несингулярности решений уравнений Богомольного, аналогичны трудностям, возникающим при алгебро-геометрическом подходе в теории инстантонов [3]. Более удачный, хотя и не такой явный, способ построения решений дает метод монад⁽²⁴⁾ [2]. Возможно, какое-нибудь аналогичное описание монополей (см. Нам [11]) помогло бы обойти некоторые трудности, присущие изложенному здесь методу.

9. Приложение. Минимальные поверхности

В заключение остановимся на том, как Вейерштрасс использовал комплексную геометрию пространства T при решении уравнений минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$ (см. [8, 17]). Напомним, что минимальная поверхность может быть задана отображением $h: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, определенным на некотором открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющим следующим условиям:

(i) h — гармоническое отображение,

(ii) h — конформное отображение.

Отождествим пространство $\mathbb{R}^2$ с комплексной прямой $\mathbb{C}$. Тогда

$$h(z) = x(z) + i\bar{y}(z),$$

где $x(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$ голоморфна ввиду условия (i). Условие (ii) означает, что $(2, 0)$ -компонента метрики, индуцированной на поверхности, равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^3 \partial x_i^2 / \partial z = 0.$$

Тем самым отображение $x = x(z)$ описывает голоморфную изотропную кривую в пространстве $\mathbb{C}^3$. Через каждую точку кривой проходит

единственная касательная изотропная плоскость, поэтому отображению $X(x)$ соответствует кривая в пространстве изотропных плоскостей пространства $\mathbb{C}^3$, т.е. в твисторном пространстве T .

Обратно, пусть C - голоморфная кривая в пространстве T . С каждой точкой этой кривой ассоциируется соприкасающееся сечение⁽²⁵⁾ P , т.е. сечение, касающееся кривой в этой точке с точностью до второго порядка. В локальных координатах кривая C описывается голоморфной функцией $\eta = f(\zeta)$, за исключением точек, в которых кривая касается слоев. Сечение $\eta = \alpha + b\zeta + c\zeta^2$ соприкасается с кривой C в точке ζ , если

$$\alpha + b\zeta + c\zeta^2 = f(\zeta), \quad b + 2c\zeta = f'(\zeta), \quad 2c = f''(\zeta). \quad (9.1)$$

Эти уравнения описывают голоморфную кривую в пространстве $\mathbb{C}^3$:

$$(\alpha, b, c) = (f - \zeta f' + \frac{1}{2}\zeta^2 f'', f' - \zeta f'', \frac{1}{2}f'').$$

Кроме того,

$$(b')^2 - 4\alpha'c' = \zeta^2(f''')^2 - 2f'''(\frac{1}{2}\zeta^2 f''') = 0,$$

так что кривая изотропна. Следовательно, в стандартных координатах в пространстве $\mathbb{R}^3$ (см. § 3) мы получаем минимальную поверхность

$$x_1 = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2}(1 - \zeta^2)f'' + \zeta f' - f \right),$$

$$x_2 = \operatorname{Re} \left(\frac{-i}{2}(1 + \zeta^2)f'' + i\zeta f' - if \right),$$

$$x_3 = \operatorname{Re}(\zeta f'' - f').$$

Интерпретацию минимальной поверхности, отвечающей спектральной кривой монополя, мы оставляем воображению читателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Atiyah M.F., Hitchin N.J., Singer I.M. - Proc. R. Soc. Lond. A 362, 1978, 425-461.
2. Atiyah M.F., Hitchin N.J., Drinfeld V.G., Manin Yu.I. - Phys. Lett. 65 A, 1978, 185.
3. Atiyah M.F., Ward R.S. - Commun. Math. Phys. 55, 1977, 117.
4. Богомоловый Е.Б. Устойчивость классических решений. - Ядерная физика, 24(1976), 449-454.
5. Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. - New York: McGraw-Hill, 1955. [Имеется перевод: Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1958.]
6. Coppel W.A. Stability and asymptotic behaviour of differential equations. - Boston: D.C. Heath & Co., 1965.
7. Corrigan E., Goddard P. - Commun. Math. Phys., 80, 1981, 575-587.
8. Eisenhart L.P. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. - Boston: Ginn & Co., 1909.
9. Forgacs P., Horvath Z., Palla L. - Phys. Lett. 102 B, 1981, 131.
10. Hitchin N.J. In: Proc. of conf. on gauge theories, Primorsko, Bulgaria 1980. - World Sci., Singapore, 1981.
11. Nahm W. - Phys. Lett. 90 B, 1980, 413-414.
12. Prasad M.K., Rossi P. - MIT preprint CTP 903, 1980.
13. Prasad M.K., Sommerfield C.M. - Phys. Rev. Lett. 35, 1975, 760.
14. Ward R.S. - Phys. Lett. 61 A, 1977, 81.
15. Ward R.S. - Commun. Math. Phys. 79, 1981, 317-325.
16. Ward R.S. - Phys. Lett. B (to appear).
17. Weierstrass K. - Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, 612-625.

О ПОСТРОЕНИИ МОНОПОЛЕЙ¹⁾

Н. Дж. Хитчин

St.Catherine's College, Oxford OX1 3UJ, England

Резюме. В работе показано, что любой автодуальный $SU(2)$ -монополь можно построить либо твисторным методом Уорда, либо при помощи АДНМ-конструкции в интерпретации Нама. При обоих подходах рассматривается алгебраическая кривая, якобиан которой используется для линеаризации нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в методе Нама. В терминах этой кривой дается условие отсутствия особенностей для монополя, которое используется для доказательства регулярности осесимметричных решений.

1. Введение

В этой статье мы занимаемся построением решений уравнений Богомольного $D\Phi = *F$. Здесь F — кривизна $SU(2)$ -связности на $\mathbb{R}^3$, а Φ (поле Хиггса) — сечение присоединенного расслоения. Мы ищем решения, для которых $\|\Phi\| = 1 - k\tau^{-1} + O(\tau^{-2})$ при $\tau \rightarrow \infty$. Это специальные решения статических уравнений Янга — Миллса — Хиггса, обладающие конечной энергией, и в дальнейшем они часто именуются просто "монополями".

Существуют два различных подхода к построению монополей. Один из них, принадлежащий Р.С.Уорду, с помощью твисторного формализма сводит исходную задачу к соответствующей задаче для голоморфных векторных расслоений на алгебраической поверхности TP_1 — касательном расслоении к проективной прямой. Метод Уорда,

¹⁾ Hitchin N.J. On the Construction of Monopoles. — Communications in Mathematical Physics, 1983, v.89, pp.145-190.

расширенный Корриганом и Годдардом [6] и автором [8], показывает, что монополю определяется алгебраической кривой в TP_1 . Более того, как показано в [6], любой монополю может быть получен таким способом. Основная проблема при этом подходе – найти условия на кривую, гарантирующие несингулярность монополя.

Другой подход, разработанный Намом [10], непосредственно обеспечивает условие несингулярности и имеет другие формальные преимущества перед твисторным подходом. Метод Нама – это смелое обобщение АНМ-конструкции инстантонов [3], в котором матрицы заменяются дифференциальными операторами, а квадратичные условия на матрицы – нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dT_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k]$$

для матричных функций T_1, T_2, T_3 . Основная проблема здесь в том, чтобы явно решить эти уравнения. Остается также вопрос: все ли монополи дает такой подход.

В данной работе предлагается синтез этих двух методов, позволяющий ответить на поставленные выше вопросы. Фактически будет показано, что уравнения Нама можно решить, исследуя линейный поток на якобиане алгебраической кривой – той самой кривой, которая используется и в методе Уорда. Именно, будет доказана эквивалентность следующих объектов.

А. Решение уравнений Богомольного $D\Phi = *F$ на $\mathbb{R}^3$ со следующими граничными условиями при $r \rightarrow \infty$:

$$A1. \quad \|\Phi\| = 1 - \frac{k}{r} + O(r^{-2});$$

$$A2. \quad \frac{\partial \|\Phi\|}{\partial \Omega} = O(r^{-2});$$

$$A3. \quad \|D\Phi\| = O(r^{-2}).$$

В. Компактная алгебраическая кривая $S \subset TP_1$ в линейной системе $|O(2k)|$, удовлетворяющая условиям:

B1. S не имеет кратных компонент;

B2. S вещественна относительно стандартной вещественной структуры на TP_1 ;

B3. расслоение L^2 тривиально на кривой S , а расслоение $L(k-1)$ вещественно;

$$B4. \quad H^0(S, L^*(k-2)) = 0 \quad \text{для} \quad z \in (0, 2).$$

Здесь L^2 - голоморфное линейное расслоение на TP_1 , задаваемое экспонентой $\exp(z\omega)$, где ω - стандартный $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантный элемент группы $H^1(TP_1, 0)$.

С. Решение дифференциального уравнения

$$\frac{dT_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k], \quad z \in (0, 2),$$

для $k \times k$ -матричных функций $T_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющих условиям:

С1. $T_i^* = -T_i$;

С2. $T_i(z) = -\bar{T}_i(2-z)$;

С3. T_i имеет простые полюсы в точках $z = 0$ и $z = 2$ и аналитична для других z ;

С4. в каждом полюсе вычеты (T_1, T_2, T_3) определяют неприводимое представление группы $SU(2)$.

Параграф 2 посвящен доказательству импликации $C \Rightarrow A$ и содержит подробное изложение работы Нама [10]. Импликация $A \Rightarrow B$ изучена в основной работе автора [8]. Результаты кратко излагаются в § 3, где также доказано условие ВЗ - теорема тривиальности для алгебраической кривой. Это именно то условие, которое надо наложить на кривую для несингулярности монополя; и сам результат, и метод доказательства аналогичны основной теореме тривиальности $H^1(P_3, E(-2)) = 0$ в теории инстантов [7]. В § 4, 5 и 6 доказывается импликация $B \Rightarrow C$, а в § 7 проверяется, что "круг замкнут", а именно, что монополь, получающийся после прохода вдоль $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$, калибровочно эквивалентен исходному.

Доказательство импликации $B \Rightarrow C$, связывающей нелинейные дифференциальные уравнения с алгебраическими кривыми, аналогично известному теперь методу решения уравнения КдФ и связанных с ним уравнений. Здесь тоже имеется иерархия уравнений (первое из них - уравнение Нама), решения которых получаются, если брать линейные потоки в различных направлениях якобиана. Эти и другие общие замечания кратко рассматриваются в § 8, где также проверяется несингулярность осесимметричных монополей Прасада и Росси.

2. Конструкция Нама

В работе [10] Наму удалось получить решения уравнений Богомольного $D\Phi = *F$ с помощью неожиданного обобщения монадной (или АДНМ-) конструкции инстантонов. В этом параграфе мы дадим краткий обзор его метода.

Прежде всего напомним, что решение уравнений Богомольного в $\mathbb{R}^3$ эквивалентно решению уравнений дуальности⁽²⁶⁾ в $\mathbb{R}^4$, которое, помимо того, инвариантно относительно действия аддитивной группы $\mathbb{R}$ трансляций по направлению x_0 . Чтобы убедиться в этом, допустим, что E — векторное расслоение со связностью ∇ на $\mathbb{R}^3$, а Φ — сечение присоединенного расслоения. Пусть p — проекция $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда $\nabla' = p^*\nabla - \Phi dx_0$ задает $\mathbb{R}$ -инвариантную связность на поднятом расслоении $E' = p^*E$ с кривизной $F' = p^*F - D\Phi \wedge dx_0$. Очевидно, что кривизна F' автодуальна относительно ориентации $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ тогда и только тогда, когда

$$D\Phi = *F.$$

Обратно, предположим, что E' есть $\mathbb{R}$ -инвариантное векторное расслоение на $\mathbb{R}^4$ с инвариантной связностью ∇' . Сужая на $\mathbb{R}^3$, получим расслоение E , и действие группы определяет изоморфизм $\alpha: p^*E \rightarrow E'$ посредством

$$\alpha(p^*e)_{(x_0, x)} = x_0 \cdot (e_x), \quad (2.1)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ и через $x_0 \cdot e$ обозначено действие $\mathbb{R}$ на E' .

Поскольку связность ∇' $\mathbb{R}$ -инвариантна, получим, что для некоторой связности ∇ на E и сечения Φ присоединенного расслоения выполнено соотношение $\alpha^{-1}\nabla'\alpha = p^*\nabla - \Phi dx_0$. Так как уравнения дуальности инвариантны относительно калибровочных преобразований α , из предшествующих рассуждений следует, что пара (∇, Φ) удовлетворяет уравнениям Богомольного.

АДНМ-конструкция [2, 3] воспроизводит автодуальные $SU(2)$ -связности на $\mathbb{R}^4$, исходя из кватернионной $(k+1) \times k$ -матричной функции, имеющей вид $\Delta(x) = Cx + D$, где C и D — постоянные матрицы, а $x \in \mathbb{H}$ — кватернионная переменная (27).

Более инвариантным образом $\Delta(x)$ можно рассматривать как отображение $W \rightarrow V$, где V - кватернионное $(k+1)$ -мерное векторное пространство с эрмитовым внутренним произведением, согласованным с кватернионной структурой, а W - вещественное k -мерное векторное пространство. Если $\Delta(x)$ имеет максимальный ранг при всех x , то ядро $\Delta^*(x)$ есть одномерное кватернионное подпространство E_x пространства V . Когда x изменяется в $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, пространство E_x задает векторное расслоение E над $\mathbb{R}^4$, а ортогональная проекция в V порождает связность на E из тривиальной плоской связности на $\mathbb{R}^4 \times V$. Кривизну этой связности можно выразить в виде $F = PC dx \rho^{-2} d\bar{x} C^* P$, где $\rho^2 = \Delta^* \Delta$, а P - ортогональный проектор на E в пространстве V . Если матрица ρ^2 вещественна, кривизна F будет содержать только компоненты кватернионной 2-формы

$$dx \wedge d\bar{x} = (dx_0 + i dx_1 + j dx_2 + k dx_3) \wedge (dx_0 - i dx_1 - j dx_2 - k dx_3),$$

которые автодуальны. Следовательно, необходимое условие на Δ , при котором связность автодуальна, состоит в том, что $\Delta^* \Delta$ вещественно при всех $x \in \mathbb{H}$.

Подход Нама заключается в отыскании аналогичных векторных пространств W, V и линейного отображения $\Delta(x) = Cx + D$, таких, что

(1) $\Delta(x + x_0) = U(x_0)^{-1} \Delta(x) U(x_0)$, где $x_0 \rightarrow U(x_0)$ есть представление группы $\mathbb{R}$ в группе кватернионных унитарных преобразований пространства V . Это условие обеспечивает $\mathbb{R}$ -инвариантность связности, задаваемой АДМ-конструкцией. Действительно, $U(x_0)$, по существу, совпадает с калибровочным преобразованием $\propto$ из (2.1).

(2) Отображение $\Delta^* \Delta$ вещественно.

(3) Отображение $\Delta^* \Delta$ обратимо.

(4) Ядро отображения Δ^* имеет кватернионную размерность 1.

Основное отличие задачи для монополей по сравнению с инстантонами в том, что пространства W и V теперь бесконечномерны, а $\Delta(x)$ - дифференциальный оператор.

Точнее, пусть $H^0 = \mathcal{L}^2[0, 2]$; определим на H^0 вещественную структуру (антилинейное отображение $\bar{\cdot}$, такое, что $\bar{\bar{z}} = z$), полагая $\bar{f}(\bar{z}) = \bar{f}(2 - z)$. Положим теперь $V = H^0 \otimes \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^2$ и будем считать, что $\mathbb{C}^k$ имеет вещественную структуру $\bar{\cdot}'$, а $\mathbb{C}^2$ совпадает с пространством кватернионов. Тем самым V наделается кватернионной структурой, а обычное внутреннее произ-

ведение в $\mathcal{L}^2$ порождает на нем согласованную с ней эрмитову структуру.

В качестве вещественного пространства W возьмем

$$W = \{f \in H^1 \otimes \mathbb{C}^k \mid f(0) = f(2) = 0\},$$

где H^1 — соболевское пространство функций на $[0, 2]$, производные которых принадлежат $\mathcal{L}^2$. По теореме вложения Соболева такие функции непрерывны, и потому их значения в каждой точке корректно определены. Тем самым пространство W корректно определено и вещественно относительно θ и θ' .

Пусть теперь e_1, e_2, e_3 — операторы левого умножения кватернионов из $\mathbb{C}^2$ на i, j и k соответственно. Так как они не зависят от x и коммутируют с операторами правого умножения элементов $\mathbb{C}^2$ на кватернионы, то они задают кватернионные преобразования пространства V . В качестве отображения $\Delta(x): W \rightarrow V$ возьмем (следуя Наму) дифференциальный оператор вида

$$\Delta(x)f = \left(x_0 + \sum_1^3 x_j e_j\right)f + i df/dx + i \sum_1^3 T_j(x) e_j f, \quad (2.2)$$

где $T_j(x)$ — матрицы размера $k \times k$, аналитически зависящие от x при $x \in (0, 2)$ и имеющие простые полюсы на концах этого интервала. В силу нашего выбора соболевских пространств W и V оба оператора $T_j(x)$ и d/dx ограничены, поэтому и сам оператор $\Delta(x)$ ограничен. Очевидно, что он имеет нужный вид $Cx + D$, где $C = I$, $D = i d/dx + i \sum_j T_j e_j$. Поэтому, чтобы применить АНМ-конструкцию, нужно прежде всего показать, что D — кватернионный оператор из $W \otimes \mathbb{C}^2$ в V . Обозначим через J кватернионную структуру на $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^2$; тогда кватернионная структура τ на функциях из V или из $W \otimes \mathbb{C}^2$ удовлетворяет соотношению $\tau f(x) = J(f(2-x))$. Таким образом,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dx} (\tau f) &= i \frac{d}{dx} (Jf(2-x)) = -Ji \frac{d}{dx} (f(2-x)) = \\ &= Ji \frac{df}{dx} (2-x) = \tau i \frac{d}{dx} f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i \sum T_j(x) e_j(\tau f) &= i \sum T_j(x) e_j J f(2-x) = \\
 &= -J i \sum \bar{T}_j(x) e_j f(2-x) = \tau \left(i \sum T_j(x) e_j f \right) \text{ (если } T_j(2-x) = -\bar{T}_j(x)).
 \end{aligned}$$

Поэтому предположим, что

$$T_j(x) = -\bar{T}_j(2-x). \quad (2.3)$$

Тогда оператор $\Delta(x)$ кватернионно линеен.

Рассмотрим далее условие инвариантности (1). Имеем

$$\Delta(x+x_0)f = \Delta(x)f + x_0f = e^{ix_0(x-1)} \Delta(x) e^{-ix_0(x-1)} f$$

$$\text{и} \quad \tau(e^{ix_0(x-1)} f) = e^{ix_0(x-1)} \tau f,$$

поэтому оператор $U(x_0) = e^{ix_0(x-1)}$ кватернионный и, очевидно, унитарный. Таким образом, условие (1) выполнено.

Обратимся теперь к условию вещественности (2). Требуется, чтобы оператор $\Delta^* \Delta: W \rightarrow W^*$ был вещественным. Этот оператор можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta^* \Delta &= \left(\bar{x} + i \frac{d}{d\bar{x}} + i \sum T_j^* e_j \right) \left(x + i \frac{d}{dx} + i \sum T_k e_k \right) = \\
 &= -\frac{d^2}{dx^2} + \left(2ix_0 - \sum (T_j + T_j^*) e_j \right) \frac{d}{dx} - \sum \frac{dT_k}{d\bar{x}} e_k + \\
 &\quad + (\bar{x} + i \sum T_j^* e_j) (x + i \sum T_k e_k).
 \end{aligned}$$

Рассматривая член, пропорциональный $d/d\bar{x}$, потребуем для вещественности $\Delta^* \Delta$, чтобы $T_j + T_j^* = 0$; тогда из члена нулевого порядка по производным получим, что

$$\sum_i \frac{dT_i}{d\bar{x}} e_i = \sum_{j,k} T_j T_k^* e_j e_k.$$

Следовательно, $T_j = -T_j^*$, и матрицы T_j должны удовлетворять уравнениям Нама

$$\begin{aligned}
 dT_1/dx &= [T_2, T_3], \\
 dT_2/dx &= [T_3, T_1], \\
 dT_3/dx &= [T_1, T_2].
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Если эти уравнения выполнены и $T_i = -T_i^*$, то

$$\Delta^* \Delta = -\frac{d^2}{dx^2} + 2ix_0 \frac{d}{dx} + \|x\|^2 - \sum T_i^2. \tag{2.5}$$

Допустим, что существует функция $f \in W$, для которой $\Delta^* \Delta f = 0$. Тогда, так как f обращается в нуль в концах отрезка $[0, 2]$, из (2.5) получаем

$$0 = \langle \Delta^* \Delta f, f \rangle = \left\langle \frac{df}{dx}, \frac{df}{dx} \right\rangle + \langle (\|x\|^2 + \sum T_i^* T_i) f, f \rangle. \tag{2.6}$$

Но правая часть положительна, если только f не равна тождественно нулю, следовательно, оператор $\Delta^* \Delta$ обратим, и условие (3) выполнено.

Для доказательства последнего условия на Δ , а именно условия $\dim_{\mathbb{N}} \ker \Delta^* = 1$, нужно рассмотреть поведение $T_i(x)$ в концах отрезка $[0, 2]$. Предположим, что каждая из матриц $T_i(x)$ имеет простой полюс при $x = 0$; тогда она представима в виде

$$T_i(x) = \frac{\alpha_i}{x} + b_i(x),$$

где матричная функция $b_i(x)$ аналитична в окрестности точки $x = 0$. Отсюда

$$\frac{dT_i}{dx} = -\frac{\alpha_i}{x^2} + \frac{db_i}{dx},$$

и из уравнений Нама (2.4) получаем, что

$$-\alpha_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} [\alpha_j, \alpha_k].$$

Тем самым отображение $(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \rightarrow -2(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3)$ определяет k -мерное представление алгебры Ли мнимых кватернионов и, следовательно, представление группы $SU(2)$. Следуя Наму, предположим, что это единственное неприводимое представление $(28) S^{k-1}$ этой группы в пространстве однородных полиномов по переменным (x_1, x_2) степени $k-1$, и аналогично для другого полюса $x=2$.

Теперь в окрестности точки $x=0$ можно написать

$$i \sum_j T_j e_j = \frac{i}{x} \sum_j \alpha_j \otimes e_j + b(x) = -\frac{i}{2x} \sum_j \rho(e_j) \otimes e_j + b(x),$$

где $b(x)$ аналитична, а ρ — представление алгебр Ли. Вводя оператор Казимира $(29) C(S) = \sum_j \rho(e_j)^2$ для представления S , получим

$$C(S^{k-1} \otimes S^1) = C(S^{k-1}) \otimes 1 + 2 \sum_j \rho(e_j) \otimes e_j + 1 \otimes C(S^1),$$

поскольку обычное умножение кватернионов на пространстве $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ совпадает с представлением S^1 . Таким образом, вычет $T = -(i/2) \sum_j \rho(e_j) \otimes e_j$ матрицы $i \sum_j T_j e_j$ в точке $x=0$ можно выразить через операторы Казимира. Оператор Казимира неприводимого представления S^k есть скаляр $(30) -k(k+2)$. Далее, разложение тензорного произведения $S^{k-1} \otimes S^1$ по неприводимым представлениям изоморфно $(30) S^k \oplus S^{k-2}$. Отсюда получаем

$$T = \begin{cases} \frac{i}{4} (-(k-1)(k+1) - 3 + k(k+2)) = \frac{i}{2} (k-1) & \text{для } S^k, \\ \frac{i}{4} (-(k-1)(k+1) - 3 + (k-2)k) = -\frac{i}{2} (k+1) & \text{для } S^{k-2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\tilde{\Delta} = i \frac{d}{dx} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-2)} \right) T.$$

Ясно, что уравнение $\tilde{\Delta} f = 0$ имеет пространство решений размерности $\dim S^k = k+1$ вида $c(x^2 - 2x)^{-(k-1)/2}$, а также пространство решений размерности $\dim S^{k-2} = k-1$ вида

$$c(z^2 - 2z)^{(k+1)/2}.$$

Таким образом, для оператора $\tilde{\Delta}$, действующего в указанных соболевских пространствах, имеем $\dim_{\mathbb{C}} \ker \tilde{\Delta} = k-1$ (при $k \geq 1$)⁽³¹⁾ и аналогично $\dim_{\mathbb{C}} \ker \tilde{\Delta}^* = k+1$. Поэтому $\tilde{\Delta}: W \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ есть фредгольмов оператор с индексом $(k-1) - (k+1) = -2$.

В точках $z=0$ и $z=2$ вычеты T_i определяют неприводимое представление группы $SU(2)$ в пространстве $\mathbb{C}^k$. По лемме Шура (и поскольку $T_i^*(z) = -T_i(z)$) существует единственная с точностью до скаляров матрица $P \in U(k)$, такая, что $\operatorname{Res}_{z=0} T_i = \operatorname{Res}_{z=2} P^{-1} T_i P$. Пусть Q — кососимметричная матрица, такая, что $\exp 2Q = P$. Тогда $\Delta = e^{-zQ} \tilde{\Delta} e^{zQ} + K$, где K — матричнозначная функция, аналитическая в окрестности $[0, 2]$. Из ее регулярности следует, что K — компактный оператор на соболевских пространствах, откуда ввиду инвариантности индекса получаем $\operatorname{ind} \Delta = \operatorname{ind} \tilde{\Delta} = -2$. Однако оператор $\Delta^* \Delta$ обратим, поэтому $\ker \Delta = 0$ и $\dim_{\mathbb{C}} \ker \Delta^* = 2$. Так как Δ и, следовательно, Δ^* — кватернионные операторы, отсюда следует выполнение последнего условия (4): $\dim_{\mathbb{H}} \ker \Delta^* = 1$. Итак, доказана

Т е о р е м а 2.8 (Нам). Пусть $T_i(z)$ ($1 \leq i \leq 3$) — три $k \times k$ -матричнозначные функции аргумента $z \in (0, 2)$, удовлетворяющие условиям

$$(1) \quad \frac{dT_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k];$$

(2) T_i аналитична при $z \in (0, 2)$ и имеет простые полюсы в точках $z=0$ и $z=2$;

(3) представления группы $SU(2)$, определяемые вычетами функций T_i в их полюсах, неприводимы;

$$(4) \quad T_i(z) = -\bar{T}_i(2-z);$$

$$(5) \quad T_i^*(z) = -T_i(z).$$

Тогда АДМ-конструкция, примененная к кватернионному оператору

дает несингулярное решение
на $\mathbb{R}^3$.

SU(2)-уравнений Богомольного

Исследуем теперь поведение решения Нама при $\chi \rightarrow \infty$ и покажем, что в этом пределе оно удовлетворяет условиям A1 - A3 из § 1.

Аппроксимация оператора Δ оператором $\tilde{\Delta}$ уже использовалась выше. Учтем теперь зависимость операторов от x и определим оператор $\Delta_0(x) = e^{-xQ} \tilde{\Delta} e^{xQ} + (x_0 + \sum x_i e_i)$. Хотя Δ_0 не является кватернионным оператором, он, тем не менее, хорошо описывает асимптотическое поведение Δ при $\chi \rightarrow \infty$. Действительно, оператор Δ_0 связан с Δ соотношением $\Delta(x) = \Delta_0(x) + A$, где операторнозначная функция A является гладкой в окрестности отрезка $[0, 2]$ и не зависит от x . В частности, $\text{ind } \Delta_0 = \text{ind } \Delta = -2$. Кроме того, из (2.6) имеем $\langle \Delta^* \Delta f, f \rangle \geq \chi^2 \|f\|^2$ ($\chi^2 = \|x\|^2$). Следовательно, для достаточно больших χ существует положительная константа c^2 , такая, что

$$\langle \Delta_0^* \Delta_0 f, f \rangle = \langle (\Delta - A)f, (\Delta - A)f \rangle \geq c^2 \chi^2 \|f\|^2.$$

Значит, оператор $\Delta_0^* \Delta_0$ положителен для больших χ и $\dim_{\mathbb{C}} \ker \Delta_0^* = 2$. Два решения уравнения $\Delta_0^* f = 0$ будут в дальнейшем использоваться для аппроксимации $\ker \Delta^*$.

Пусть G_0 - функция Грина оператора Δ_0 , т.е. $\Delta_0 G_0 = I - P_0$, $G_0 \Delta_0 = I$, где P_0 - оператор ортогональной проекции на $\ker \Delta_0^*$.

Тогда, поскольку $\langle \Delta_0 f, \Delta_0 f \rangle \geq c^2 \chi^2 \|f\|^2$, имеем $\|f\|^2 - \|P_0 f\|^2 \geq c^2 \chi^2 \|G_0 f\|^2$. Отсюда $\|G_0\| \leq 1/c\chi$ и

$$\|G_0^*\| \leq \frac{1}{c\chi}. \quad (2.9)$$

Теперь, так как $G_0^* \Delta_0^* = I - P_0$, при $\Delta^* f = 0$ имеем

$$f - P_0 f = G_0^* (\Delta^* - A^*) f = -G_0^* A^* f,$$

откуда для некоторой константы K

$$\|f - P_0 f\| \leq \frac{K}{\nu} \|f\|. \quad (2.10)$$

Поэтому решения уравнения $\Delta^* f = 0$ можно с точностью до членов порядка ν^{-1} аппроксимировать решениями уравнения $\Delta_0^* f = 0$.

Выберем далее некоторое направление в $\mathbb{R}^4$, определяемое кватернионом с единичной нормой u . Поскольку связности будут интересоваться нас только в окрестности $\mathbb{R}^3$, можно считать, что $u \neq \pm 1$ и, следовательно, u порождает подгруппу $U(1)$ в $SU(2)$. Пространство представления $S^{k-1} \otimes S^1 \cong S^k \oplus S^{k-2}$ расщепляется тогда на одномерные весовые пространства с весами (32)

$$k, k-2, k-4, \dots, -(k-2), -k \text{ для } S^k$$

$$\text{и} \quad k-2, k-4, \dots, -(k-2) \text{ для } S^{k-2}.$$

Рассмотрим действие элемента $1 \otimes u$, определяемого кватернионом u , на $S^{k-1} \otimes S^1$. Оно коммутирует с действием представления (т.е. $u \otimes u$), и так как пространства веса $\pm k$ входят с кратностью единица, то они сохраняются под действием $1 \otimes u$. Если теперь u — мнимый кватернион (т.е. $u \in \mathbb{R}^3$), то $(1 \otimes u)^2 = -1$, откуда $(1 \otimes u)v_{\pm} = \pm i v_{\pm}$, где $v_{\pm}$ — векторы в весовых пространствах с весами $\pm k$.

Пусть $g_{\pm} = g(z) e^{-zQ} v_{\pm}$. Тогда для $x = \nu u$

$$\Delta_0^* g_{\pm} = e^{zQ} \left(i \frac{dg}{dz} - \frac{i}{2} (k-1) \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{z-2} \right\} g \pm \nu i g \right) v_{\pm}$$

согласно (2.7). Таким образом, $g_{\pm} = (z^2 - 2z)^{(k-1)/2} e^{\pm \nu(z-1) - zQ} v_{\pm}$ есть $\mathcal{L}^2$ -решение уравнения $\Delta_0^* f = 0$.

Теперь из (2.10) следует, что базис решений уравнения $\Delta^* f = 0$ может быть выбран в виде

$$f_{\pm} = g_{\pm} / \|g_{\pm}\| + O(\nu^{-1}), \quad (2.11)$$

где $g_{\pm} = (z^2 - 2z)^{(k-1)/2} e^{\pm \nu(z-1) - zQ} v_{\pm}$.

В оценках, которые нам требуются, должно участвовать хиттсовское поле Φ . Как следует из обсуждения в начале § 2, поле Φ определяется в терминах $\mathbb{R}$ -инвариантной автодуальной связности формулой

$$\Phi(z) = -\nabla' \Big|_{\partial/\partial x_0} z \Big|_{x_0=0},$$

где z — сечение расслоения E' , инвариантное относительно действия группы $\mathbb{R}$. В рамках конструкции Нама решение уравнения $\Delta^* f = 0$ вида $f = e^{ix_0(z-1)} g(x_1, x_2, x_3, z)$ и есть такое инвариантное сечение расслоения $E' = \ker \Delta^*$. Так как автодуальная связность ∇' получается ортогональной проекцией обычной плоской связности, то в итоге получим

$$\Phi(f) = -P \partial f / \partial x_0 \Big|_{x_0=0} = P(i(1-z)g),$$

где P — оператор ортогональной проекции на ядро оператора Δ^* . Далее, ввиду (2.10) и (2.11) поле Φ можно определить с точностью до членов порядка z^{-1} , исходя из оператора Δ_0^* и решений $g_{\pm}$.

В этом случае если взять в качестве базиса сечений векторного расслоения решения g_+ и g_- , то поле Хиггса будет определяться формулой

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\langle i(1-z)g_+, g_+ \rangle}{\|g_+\|^2} & \frac{\langle i(1-z)g_+, g_- \rangle}{\|g_+\| \|g_-\|} \\ \frac{\langle i(1-z)g_-, g_+ \rangle}{\|g_+\| \|g_-\|} & \frac{\langle i(1-z)g_-, g_- \rangle}{\|g_-\|^2} \end{pmatrix}.$$

Но $\|g_{\pm}\|^2 = \int_0^2 (2z - z^2)^{k-1} e^{\pm 2z(z-1)} dz$, и поэтому $\|g_{\pm}\| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$\langle i(1-z)g_+, g_- \rangle = \int_0^2 i(1-z)(2z - z^2)^{k-1} dz = 0.$$

Следовательно, внедиагональные члены в Φ исчезают. Более того,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\int_0^2 i(1-z)(2z - z^2)^{k-1} e^{\pm 2z(z-1)} dz}{\int_0^2 (2z - z^2)^{k-1} e^{\pm 2z(z-1)} dz} = \mp i.$$

Отсюда в указанной калибровке получаем, что

$$\Phi \rightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Таким образом, $\|\Phi\| \rightarrow 1$ и собственное подпространство, соответствующее $\mp i$ для больших ν , изоморфно однородному расслоению $\mathbb{R}^3 \setminus 0 \times_{S^1} \mathbb{C}$, где группа S^1 (окружность) действует на $\mathbb{C}$ с весом $\pm k$. Линейные расслоения, определяемые собственными подпространствами Φ на большой сфере, имеют поэтому класс Чжэня, равный $\pm k$, и по определению заряд монополя равен k .

Рассмотрим далее кривизну связности ∇' . Она задается соотношением

$$F = P dx G G^* d\bar{x} P. \quad (2.13)$$

Следовательно, из (2.9) получаем, что $\|F\|^2 \leq 3/c^4 \nu^4$, и поэтому $\|D\Phi\| = \|F\| = O(\nu^{-2})$, что совпадает с условием АЗ.

Из тождества Бьянки следует, что $D^*D\Phi = 0$, поэтому

$$d^*d\|\Phi\|^2 = -\|D\Phi\|^2 = -\|F\|^2.$$

Таким образом, пользуясь формулой Грина и оценками

$$\|d\|\Phi\|^2\|^2 = 2\|(D\Phi, \Phi)\|^2 = O(\nu^{-4}),$$

$$\|\Phi\| \rightarrow 1,$$

получим, что

$$\|\Phi\|^2(x) = 1 - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|F\|^2(x')}{\|x - x'\|} dx'. \quad (2.14)$$

Приблизим теперь кривизну F кривизной F_0 . Если положить $G = G_0 + B$, то

$$(\Delta_0 + A)(G_0 + B) = I - P,$$

откуда $\Delta_0 B = P_0 - P - A G_0$. Следовательно, согласно (2.9) и (2.10), существует константа α , такая, что $\|\Delta_0 B\| \leq \alpha \nu^{-4}$.

Поэтому $\|B\| = \|G_0 \Delta_0 B\| \leq \kappa/c\chi^2$, т.е. $\|G - G_0\| = O(\chi^{-2})$, и снова в силу (2.9) $\|GG^* - G_0 G_0^*\| = O(\chi^{-3})$. Таким образом, из (2.13) получаем

$$\|F - F_0\| = O(\chi^{-3}), \quad (2.15)$$

откуда

$$\|F\|^2 - \|F_0\|^2 = O(\chi^{-5}). \quad (2.16)$$

Здесь F_0 — кривизна однородной связности на прямой сумме линейных расслоений с базой $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, поэтому $\|F_0\|^2 = \beta\chi^{-4}$ для некоторой константы β . Следовательно, из (2.16) получаем $\|F\|^2 = \beta\chi^{-4} + O(\chi^{-5})$, и из (2.14) можно вывести, что

$$\|\Phi\|^2(x) = 1 - \frac{1}{4\pi\chi} \int_{\mathbb{R}^3} \|F\|^2 + O(\chi^{-2}). \quad (2.17)$$

Далее, по формуле Стокса

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|F\|^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} *(D\Phi, \Phi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (F, \Phi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (F_0, \Phi)$$

(последнее равенство вытекает из (2.15)). Но при $\chi \rightarrow \infty$ линейные расслоения с кривизной F_0 аппроксимируются собственными подпространствами оператора Φ . Поэтому последний интеграл в цепочке равенств может быть выражен в терминах классов Чжэня, и из (2.17) получаем

$$\|\Phi\|^2 = 1 - \frac{2k}{\chi} + O(\chi^{-2}),$$

что совпадает с условием A1. В этих оценках нетрудно проследить за угловой зависимостью $\|F\|$, что позволяет получить все три условия A1, A2, A3.

Таубс (неопубликовано) показал, используя методы работы [9], что в действительности условия A1 — A3 следуют из уравнений $D\Phi = *F$ и единственного ограничения $\|\Phi\| \rightarrow 1$.

Итак, мы видим, что конструкция Нама воспроизводит монополю с требуемыми асимптотическими свойствами и осуществляет переход из области обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям с частными производными. В следующем параграфе, используя твисторные методы, мы перейдем от уравнений с частными производными к алгебраической геометрии.

3. Спектральная кривая

Исходной точкой конструкции Нама является интерпретация уравнений Богомольного как уравнений дуальности в $\mathbb{R}^4$, инвариантных относительно x_0 -трансляций. Хорошо известно, что автодуальной $SU(2)$ -связности на $\mathbb{R}^4$ соответствует по теории твисторов Пенроуза⁽³³⁾ голоморфное векторное расслоение ранга 2 на трехмерном комплексном многообразии $\mathbb{P}_3 \setminus \mathbb{P}_1$. Это расслоение тривиально на каждой вещественной прямой и является кватернионным расслоением относительно вещественной структуры на $\mathbb{P}_3$, индуцированной кватернионной структурой на $\mathbb{C}^4$ (см. [2, 4, 5]). Действие группы трансляций по направлению x_0 индуцирует свободное голоморфное действие аддитивной группы $\mathbb{C}$ комплексных чисел на $\mathbb{P}_3 \setminus \mathbb{P}_1$, фактор по которому является алгебраической поверхностью. Эту поверхность можно отождествить с пространством касательного расслоения TP_1 к проективной прямой.

Таким образом, решение $SU(2)$ -уравнений Богомольного на $\mathbb{R}^3$ соответствует голоморфному векторному расслоению $\tilde{E}$ ранга 2 на TP_1 , которое является кватернионным расслоением и тривиально на вещественных сечениях $\pi: TP_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$, задаваемых проекциями вещественных проективных прямых в $\mathbb{P}_3$.

Это соответствие рассматривалось непосредственно, без перехода к пространству $\mathbb{R}^4$, в работе [8], к которой мы отсылаем за деталями последующего изложения. Комплексную поверхность TP_1 можно представлять себе как пространство ориентированных прямых в $\mathbb{R}^3$, и в этом случае расслоение $\tilde{E}$ определяется посредством

$$\tilde{E}_x = \{z \in \Gamma(\gamma_x, E) \mid (\nabla_U - i\Phi)z = 0\}.$$

Здесь U — единичный касательный вектор к ориентированной геодезической γ_x , соответствующей точке $x \in TP_1$.

Если пара (V, Φ) удовлетворяет условиям А1 — А3, то существуют два различных голоморфных линейных расслоения L^+ и L^- в $\tilde{E}$, задаваемых соотношением

$$L_x^\pm = \{z \in \tilde{E}_x \mid z(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \pm \infty\}.$$

Спектральная кривая S определяется как множество $S = \{x \in \mathbb{TP}_1 \mid L_z^+ = L_z^-\}$ и является компактной алгебраической кривой.

Обозначим через L голоморфное линейное расслоение на $\mathbb{TP}_1$, отвечающее тривиальному $U(1)$ -решению уравнений Богомольного $\Phi = i$, а через $O(k)$ — подъем (обратный образ) с $\mathbb{P}_1$ единственного линейного расслоения ⁽¹⁶⁾ степени k . Покроем $\mathbb{P}_1$ двумя стандартными аффинными открытыми множествами U_0, U_1 и обозначим через ζ координату на U_0 . Тогда векторное поле $d/d\zeta$ тривиализует касательное расслоение над U_0 , и мы задаем локальные координаты (η, ζ) на $\pi^{-1}(U_0)$, полагая $(\eta, \zeta) \leftrightarrow \eta d/d\zeta$. По отношению к открытому покрытию $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$ пространства $\mathbb{TP}_1$ линейное расслоение L определяется функцией перехода $e^{i/\zeta}$ на $\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1$.

В [8] показано, что $L^+ \cong L(-k)$, а $L^- \cong L^*(-k)$. Значит, поскольку $L^+ = L^-$ на S , справедливо следующее основное ограничение: $L \cong L^*$ на S .

Естественная вещественная структура ⁽⁵⁾ на $\mathbb{TP}_1$ задается посредством $\tau(\eta, \zeta) = (-\bar{\eta}/\bar{\zeta}^2, -\bar{\zeta}^{-1})$; она соответствует изменению ориентации каждой прямой в $\mathbb{R}^3$ на противоположную. Кватернионная структура $\sigma: \tilde{E}_x \rightarrow \tilde{E}_{\tau x}$ отображает L_x^+ на $L_{\tau x}^-$, поэтому расслоение $L(-k)$ обладает кватернионной структурой ⁽³⁴⁾ на спектральной кривой S . Отсюда следует, что расслоение $L(k-1) = L(-k) \otimes O(2k-1)$ вещественно.

Спектральная кривая S определяется условием $L_z^+ = L_z^-$, что соответствует обращению в нуль отображения $L^- \subset \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}/L^+ \cong (L^+)^*$. Но $L^- \cong L^*(-k)$ и $L^+ \cong L(-k)$, поэтому кривая S является дивизором ⁽³⁵⁾ сечения $\psi \in H^0(\mathbb{TP}_1, O(2k))$. Так как она компактна, то ψ определено уравнением

$$\psi = \eta^k + \alpha_1(\zeta) \eta^{k-1} + \dots + \alpha_k(\zeta) = 0,$$

где $\alpha_i(\zeta)$ — полиномы степени $2i$ по ζ (см. [8]). Кривая S может, конечно, быть сингулярной или приводимой.

Итак, кривая S обладает следующими свойствами: это есть компактная алгебраическая кривая в линейной системе ⁽³⁵⁾ $|O(2k)|$ на пространстве $\mathbb{TP}_1$, причем S вещественна и расслоение L^2 тривиально на S .

В этом параграфе будет сначала описано пространство $H^1(C, O)$ для произвольной кривой C в системе $|O(2k)|$, затем будет показано, что S не имеет кратных компонент, и доказано важное условие тривиальности В4 из § 1. Для краткости мы вводим

обозначение: $T = TP_1$.

Вспомним, что имеется каноническое сечение $\eta d/d\zeta \in H^0(T, O(2))$, которое будет обозначаться просто через η . Докажем следующее

Предложение 3.1. Пусть S — кривая в линейной системе $|O(2k)|$. Тогда каждый элемент $c \in H^1(S, O)$ может быть единственным образом представлен в виде

$$c = \sum_{i=1}^{k-1} \eta^i \pi^* c_i,$$

где $c_i \in H^1(P_1; O(-2i))$, $\pi: S \rightarrow P_1$ — проекция.

Доказательство. Сначала компактифицируем T , заменяя линейное расслоение на расслоение проективных прямых. Тогда получим компактную неособую алгебраическую поверхность

$$\hat{T} = P(O(2) \oplus O) = P(O(1) \oplus O(-1)),$$

так как $T = TP_1 = O(2)$.

Пусть H_1 — линейное расслоение $\pi^*O(1)$ на $\hat{T}$, а H_2 — тавтологическое расслоение над $P(O(1) \oplus O(-1))$. Напомним, что всякое проективное расслоение $P(V)$ обладает тавтологическим расслоением H , дуальное к которому определяется как

$$H^* = \{(x, y) \in P(V) \times V \mid \pi(x) = \pi(y) \text{ и } y \in x\}.$$

Каноническое расслоение $(I4, I6)$ K голоморфных 2-форм на $\hat{T}$ выражается через введенные расслоения (в аддитивной записи) следующим образом:

$$K = -2H_2 - 2H_1. \quad (3.2)$$

Сечение $\eta \in H^0(T, O(2))$ продолжается до сечения $\hat{\eta} \in H^0(\hat{T}, H_1 + H_2)$, обращающегося в нуль лишь на нулевом сечении Z . Существует также сечение $\hat{\xi} \in H^0(\hat{T}, H_2 - H_1)$, обращающееся в нуль только на сечении в бесконечности. Тем самым сечение $\hat{\xi}$ тривиализует расслоение $H_2 - H_1$ над поверхностью $T \subset \hat{T}$ и, следовательно, в окрестности кривой S .

Рассмотрим сначала отображение сужения

$$H^1(\hat{T}, (k-1)(H_2 - H_1)) \xrightarrow{p_S} H^1(S, (k-1)(H_2 - H_1))$$

и покажем, что это изоморфизм. Так как расслоение $H_2 - H_1$ тривиально на кривой S , тем самым будет получено описание $H^1(S, O)$. Для этого заметим прежде всего, что кривая S определена в $\hat{T}$ как дивизор сечения $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi} = \hat{\eta}^k + \alpha_1 \hat{\eta}^{k-1} \hat{\xi} + \dots + \alpha_k \hat{\xi}^k \in H^0(\hat{T}, k(H_1 + H_2)).$$

Рассмотрим поэтому точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow O_{\hat{T}}(-H_2 - (2k-1)H_1) \rightarrow O_{\hat{T}}((k-1)(H_2 - H_1)) \rightarrow O_S \rightarrow 0.$$

Из точной когомологической последовательности видно, что ρ_S будет изоморфизмом, если

$$H^p(\hat{T}, -H_2 - (2k-1)H_1) = 0 \quad \text{для } p=1, 2. \quad (3.3)$$

Далее, на поверхности $\hat{T} = \mathbb{P}(O(2) \oplus O)$ кривизна естественной связности на тавтологическом расслоении всюду неотрицательна и положительна в направлениях слоев. В наших обозначениях это расслоение $H_1 + H_2$. Так как расслоение H_1 положительно⁽³⁶⁾ на базе, то

$$(H_1 + H_2) + \varepsilon H_1 > 0 \quad \text{при } \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$(2k-1)H_1 + H_2 = (2k-2)H_1 + (H_1 + H_2) > 0$$

при $k > 1$, а поэтому, согласно теореме Кодаиры о тривиальности,

$$H^p(\hat{T}, -H_2 - (2k-1)H_1) = 0 \quad \text{при } p=0, 1.$$

С другой стороны, из теоремы Римана - Роха⁽³⁷⁾ для линейного расслоения L с классом Чжэня l имеем

$$h^0 - h^1 + h^2 = \frac{1}{2} \ell^2 + \frac{1}{2} c_1 \ell + \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2).$$

Так как поверхность $\hat{T}$ рациональная, то $c_1^2 + c_2 = 12$. Положим теперь $L = -H_2 - (2k-1)H_1$. Пользуясь соотношением (3.2) и значениями индексов пересечения⁽³⁸⁾: $H_1 \cdot H_2 = 1$, $H_1^2 = 0$, $H_2^2 = 0$, получаем $h^2 = (2k-1) \cdot 1 - (2k-1) + 1 = 0$. Следовательно, (3.3) выполнено и ρ_S — изоморфизм.

Рассмотрим далее отображение

$$\hat{\xi}: H^1(\hat{T}, (\ell-1)(H_2 - H_1)) \rightarrow H^1(\hat{T}, \ell(H_2 - H_1)).$$

Так как сечение $\hat{\xi}$ обращается в нуль на рациональной кривой C в бесконечности, а сечение $\hat{\eta}$ тривиализует расслоение $H_1 + H_2$ в окрестности C , то имеется точная последовательность пучков:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{T}}((\ell-1)(H_2 - H_1)) \xrightarrow{\hat{\xi}} \mathcal{O}_{\hat{T}}(\ell(H_2 - H_1)) \xrightarrow{\rho_C} \mathcal{O}_C(-2\ell) \rightarrow 0.$$

Поскольку $H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-2\ell)) = 0$ при $\ell > 0$, то отображение $\hat{\xi}$ инъективно. Для произвольных элементов $c_i \in H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-2\ell))$ получаем

$$\rho_C(\hat{\eta}^{\ell} \pi^* c_i) = c_i, \quad (3.4)$$

так как C — сечение расслоения $\pi: \hat{T} \rightarrow \mathbb{P}_1$.

Возьмем теперь элемент $\alpha \in H^1(\hat{T}, (k-1)(H_2 - H_1))$ вида

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k-1} \hat{\eta}^i \hat{\xi}^{k-1-i} \pi^* c_i.$$

Если он равен нулю, то из (3.4) получим, что $c_{k-1} = 0$. Но поскольку отображение $\hat{\xi}$ инъективно, отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{k-2} \hat{\eta}^i \hat{\xi}^{k-1-i} \pi^* c_i = 0.$$

Повторяя рассуждения, получим, что $c_i = 0$ для всех i . Следовательно, все элементы вида $\hat{\eta}^i \hat{\xi}^{k-1-i} \pi^* c_i$, где $c_i \in H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-2i))$ и $1 \leq i \leq k-1$, линейно независимы, и их линейная оболочка является подпространством $H^1(\hat{T}, (k-1)(H_2 - H_1))$ размерности

$$\sum_{i=1}^{k-1} \dim H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-2i)) = \sum_{i=1}^{k-1} (2i-1) = (k-1)^2. \quad (3.5)$$

Тем самым, поскольку ρ — изоморфизм, указанное пространство является $(k-1)^2$ -мерным подпространством в $H^1(S, O)$. Однако из точной последовательности

$$0 \rightarrow O_{\hat{T}}(-k(H_1 + H_2)) \rightarrow O_{\hat{T}} \rightarrow O_S \rightarrow 0$$

мы видим, применяя к $\hat{T}$ теорему Римана — Роха, что

$$\dim H^0(S, O) - \dim H^1(S, O) = 1 - (k-1)^2.$$

Так как кривая S связна, то $\dim H^0(S, O) = 1$, поэтому число $\dim H^1(S, O)$, совпадающее с арифметическим родом кривой, равно $(k-1)^2$.

Следовательно, ввиду (3.5), любой элемент $c \in H^1(S, O)$ единственным образом представим в виде

$$c = \sum_1^{k-1} \eta^i \pi^* c_i,$$

и предложение 3.1 доказано.

Обращаясь теперь к специальному случаю кривой, а именно спектральной кривой монополя, можно вывести следующее свойство:

Предложение 3.6. Пусть S — спектральная кривая монополя. Тогда S не имеет кратных компонент.

Доказательство. Пусть C — приведенная кривая, являющаяся компонентой кривой S кратности больше 1. Тогда по определению S имеем $L^+ = L^-$ в первой формальной окрестности ⁽¹⁹⁾ кривой C на многообразии T . Следовательно, расслоение L^2 тривиально на окрестности первого порядка. Кривая C является дивизором сечения ϕ пучка $O(2l)$ при некотором $l < k$ (можно выбрать кривую C вещественной). Рассмотрим теперь точную последовательность пучков, определяющую первую формальную окрестность $O_C^{(1)}(2L)$:

$$0 \rightarrow O_C(2L - 2l) \rightarrow O_C^{(1)}(2L) \rightarrow O_C(2L) \rightarrow 0.$$

Если элемент α задает тривиализацию расслоения $2L$ на S , которая продолжается в окрестность первого порядка, то препятствие $\delta(\alpha) \in H^1(C, O(-2l))$ в точной когомологической последовательности равно нулю. В частности, рассмотрев семейство

сечений $\psi(t) \in H^0(T, O(2\ell))$ с $\psi(1) = \psi$, получим, что препятствие к продолжению α в направлении, задаваемом этим семейством, равно нулю, поскольку оно совпадает с элементом

$$\langle \delta(\alpha), \frac{\partial \psi}{\partial t}(1) \rangle \in H^1(C, O).$$

Возьмем теперь семейство $\psi(t) = \psi(t\eta, \zeta)$; тогда $\eta \mapsto t\eta$ определяет биголоморфную эквивалентность между дивизором C_t сечения $\psi(t)$ и кривой C . Линейное расслоение $2L$ на C_t задается поэтому как расслоение на C функцией перехода $e^{2t\eta/\zeta}$.

Следовательно, препятствием к продолжению тривиализации в этом направлении оказывается элемент $H^1(C, O)$, задаваемый коциклом $2\eta/\zeta$.

Далее, ζ^{-1} представляет нетривиальный элемент группы $H^1(P_1, O(-2))$; поэтому из предложения 3.1 вытекает, что коцикл $2\eta/\zeta$ задает нетривиальный элемент в $H^1(C, O)$.

Отсюда следует, что $\delta(\alpha) \neq 0$, и предложение доказано.

В предложении 3.6 мы привели одно условие на спектральную кривую, которое не было включено в [8]. Вслед за ним мы докажем более важное условие, которое окажется эквивалентным условию несингулярности монополя, определяемого спектральной кривой S . Это теорема тривиальности, аналогичная теореме тривиальности для расслоений на P_3 , которая играла важную роль в адим-конструкции инстантов [2, 7, 12].

Обозначим через L^z линейное расслоение над T , соответствующее решению $\Phi = zi$ $U(1)$ -уравнений Богомольного. Его функция перехода относительно покрытия $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1$ равна $e^{z\eta/\zeta}$.

Т е о р е м а 3.7. Пусть S — спектральная кривая монополя с зарядом k . Тогда

$$H^0(S, L^z(k-2)) = 0 \text{ при } z \in (0, 2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним сначала, следуя работе [8, § 7], как спектральная кривая определяет расслоение $\tilde{E}$ над T .

Расслоение L^2 тривиально на S , поэтому кограничное отображение

$$\delta: H^0(S, L^2) \rightarrow H^1(T, L^2(-2k))$$

определяет расширение $E^+: 0 \rightarrow L(-k) \rightarrow E^+ \rightarrow L^*(k) \rightarrow 0$, отвечающее элементу $\delta(\alpha)$, где $\alpha \in H^0(S, L^2)$ задает тривиализацию. Так как кривая S связна, то α определяется единственным образом с точностью до умножения на скаляр, поэтому расслоение E^+ однозначно определено.

Вещественная структура порождает антиголоморфное отображение $\sigma: L^2(-2k) \rightarrow L^{-2}(-2k)$ на T , поэтому элемент $\sigma\delta(\alpha)$ определяет другое расширение

$$0 \rightarrow L^*(-k) \rightarrow E^- \rightarrow L(k) \rightarrow 0.$$

Оба расслоения E^+, E^- изоморфны, и изоморфизм задает кватернионную структуру на $\tilde{E} = E^+ \cong E^-$. Два указанных расширения соответствуют двум выделенным подрасслоениям L^+ и L^- .

Доказательство основано на изучении кограничного отображения. Главная идея заключается в том, чтобы рассмотреть композицию

$$H^0(S, L^2(k-2)) \xrightarrow{\delta} H^1(T, L^2(-k-2)) \xrightarrow{i} H^1(T, L^{2-1}\tilde{E}(-2)),$$

где отображение i индуцировано включением $L(-k) \rightarrow \tilde{E}$. Пусть $z \in H^0(S, L^2(k-2))$; тогда, если обратиться к твисторной интерпретации безмассовых полей ⁽³⁹⁾, то $i\delta(z)$ представляет решение φ дифференциального уравнения типа Лапласа на $\mathbb{R}^3$. Будет показано, что φ убывает на бесконечности достаточно быстро для того, чтобы гарантировать его обращение в нуль тождественно. Отсюда будет следовать, что и само z равно нулю.

Для того чтобы получить нужные оценки, необходимо иметь хороший аналитический контроль за проводимыми преобразованиями, поэтому удобнее перейти от когомологий Чеха к когомологиям Дольбо.

Пусть $\alpha \in H^0(S, L^2)$ — тривиализация, а $\{V_i\}$ — достаточно мелкое покрытие окрестности S открытыми шарами. Так как кривая S компактна, можно считать, что элементы покрытия лежат в компактном подмножестве T .

Чтобы получить представитель класса $\delta(\alpha)$ в когомологиях Чеха, нужно продолжить покрытие $\{V_i\}$ до покрытия всего пространства T и взять коцикл, равный $(\alpha_i - \alpha_j)/\varphi$ на $V_i \cap V_j$.

где α_i — некоторое голоморфное продолжение сечения α на множество V_i . На всех остальных пересечениях копикл положим равным нулю. Представитель в когомологиях Дольбо можно получить, рассматривая разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, подчиненное нашему покрытию, и полагая $\theta_i = \bar{\partial} \sum \varphi_i (\alpha_i - \alpha_j) / \psi$. Тогда на множестве $V_i \cap V_k$ имеем

$$\theta_i - \theta_k = \bar{\partial} \left(\sum \varphi_i (\alpha_i - \alpha_j) / \psi \right) = \bar{\partial} ((\alpha_k - \alpha_j) / \psi) = 0.$$

Тем самым θ — корректно определенная $\bar{\partial}$ -замкнутая $(0, 1)$ -форма со значениями в $L^2(-2k)$. Действительно,

$$\theta = \bar{\partial} \left(\sum \varphi_i \alpha_i \right) / \psi = \bar{\partial} \alpha / \psi, \quad (3.8)$$

где α — сечение класса C^∞ расслоения L^2 с компактным носителем.

Имея это явное представление, можно определить голоморфную структуру на расширении E^+ . Рассмотрим на $E^+ = L(-k) \oplus L^*(k)$ новый $\bar{\partial}$ -оператор, задаваемый равенством

$$\bar{\partial}(x, y) = (\bar{\partial}x + \theta y, \bar{\partial}y). \quad (3.9)$$

Аналогично на E^- определяется голоморфная структура:

$$\bar{\partial}(x', y') = (\bar{\partial}x' + \theta^* y', \bar{\partial}y'), \quad (3.10)$$

где $\theta^* \in \Omega^{0,1}(L^{-2}(-2k))$ — форма, сопряженная к θ относительно вещественной структуры. Таким образом, из (3.8) получаем

$$\theta^* = \bar{\partial} \alpha^* / \psi^* = \bar{\partial} \alpha^* / \psi, \quad (3.11)$$

так как $\psi \in H^0(T, O(2k))$ — вещественное сечение.

Расслоения E^+ и E^- голоморфно эквивалентны, и соответствующий изоморфизм сохраняет естественную симплектическую форму на каждом расслоении:

где $A \in \Gamma(T, L^{-2})$, $D \in \Gamma(T, L^2)$, $B \in \Gamma(T, O(-2k))$
и $C \in \Gamma(T, O(2k))$, а $AD - BC = 1$.

Для того чтобы этот изоморфизм действительно был голоморфным, вышеприведенная матрица должна сплетать два $\bar{\partial}$ -оператора. Следовательно,

$$\begin{aligned}\bar{\partial}x' + \theta^*y' &= \bar{\partial}(Ax + By) + \theta^*(Cx + Dy) = \\ &= A(\bar{\partial}x + \theta y) + B\bar{\partial}y\end{aligned}\quad (3.12)$$

и

$$\bar{\partial}y' = \bar{\partial}(Cx + Dy) = C(\bar{\partial}x + \theta y) + D\bar{\partial}y. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что $\bar{\partial}C = 0$, значит, C является голоморфным сечением пучка $O(2k)$. В действительности по самому определению спектральной кривой $C = \psi$. Также из (3.13) получаем, что $\bar{\partial}D = C\theta = \psi\bar{\partial}\alpha/\psi = \bar{\partial}\alpha$. Следовательно, $D - \alpha$ есть голоморфное сечение расслоения L^2 . Но если расслоение L^2 имеет голоморфное сечение на T , то оно должно быть тривиальным и определять тривиальное решение $\Phi = 0$ уравнений Богомольного. Так как $\Phi = 2i$ в случае L^2 и не тривиально, то $D = \alpha$.

Далее, из (3.12) находим, что $\bar{\partial}A + \theta^*C = 0$. Следовательно, ввиду (3.11), $\bar{\partial}A + \bar{\partial}\alpha^* = 0$, и поскольку снова L^2 не имеет голоморфных сечений, то $A = -\alpha^*$.

Последняя компонента B определяется из условия $AD - BC = 1$. Следовательно, кватернионная структура на $\tilde{E}$, т.е. изоморфизм $E^+ \cong E^-$, задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -\alpha^* & -(1 + \alpha\alpha^*)/\psi \\ \psi & \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Возвращаясь к доказательству теоремы, возьмем сечение $z \in H^0(S, L^*(k-2))$ и рассмотрим элемент $i\delta(z) \in H^1(T, L^{z-1}\tilde{E}(-2))$. Его можно представить по указанному выше рецепту формой Дольбо

$$(\bar{\partial}\phi/\psi, 0) \in \Omega^{0,1}(L^{z-1}E^+(-2)),$$

где ϕ — сечение расслоения $L^*(k-2)$ с компактным носителем в окрестности S .

Но из (3.14) имеем

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\partial}\sigma/\psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^* \bar{\partial}\sigma/\psi \\ \bar{\partial}\sigma \end{pmatrix}$$

и для сечения $L^{\alpha-1}E^*(-2)$ получаем

$$\bar{\partial} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^* \sigma \\ \bar{\partial}\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \bar{\partial}\alpha^*/\psi \\ \bar{\partial}\sigma \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\partial}\sigma/\psi \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\partial} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\partial}(\alpha^* \sigma)/\psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Иными словами, когомологический класс $i\delta(\sigma) \in H^1(T, L^{\alpha-1}\tilde{E}(-2))$ может быть представлен двумя формами:

$$\theta^+ = \bar{\partial}\sigma/\psi \in \Omega^{0,1}(L^{\alpha-1}L^+(-2)) \text{ и } \theta^- = -\bar{\partial}(\alpha^* \sigma)/\psi \in \Omega^{0,1}(L^{\alpha-1}L^-(-2))$$

и, кроме того,

$$\theta^+ - \theta^- = \bar{\partial}\gamma, \quad (3.16)$$

где $\gamma = \bar{\partial}(0, \sigma)$. При этом θ^+ , θ^- и γ имеют носители в одной и той же компактной окрестности кривой S .

Напомним теперь, что если E - векторное расслоение в $\mathbb{R}^4$ с автодуальной связностью, а $\tilde{E}$ - соответствующее голоморфное расслоение на $P_3 \setminus P_1$, то имеется изоморфизм [2, 7, 12]

$$H^1(P_3 \setminus P_1, \tilde{E}(-2)) \cong \{\varphi \in \Gamma(\mathbb{R}^4, E) \mid \nabla^* \nabla \varphi = 0\}.$$

Можно непосредственно убедиться в том, что для автодуальной связности, инвариантной относительно трансляций по переменной x_0 , есть аналогичный изоморфизм

$$H^1(T, \tilde{E}(-2)) \cong \{\varphi \in \Gamma(\mathbb{R}^3, E) \mid (\nabla^* \nabla + \Phi^* \bar{\Phi}) \varphi = 0\}. \quad (3.17)$$

В нашем случае рассматривается расслоение $L^{z-1}\tilde{E}$, соответствующее решению $U(2)$ -уравнений Богомольного, получаемому из первоначальной связности на E , но с подправленным полем Хиггса $\Phi' = \Phi + (z-1)i$. Заметим, что собственные значения оператора $i\Phi'$ на бесконечности равны $-z$ и $(2-z)$, поэтому для $z \in (0, 2)$ они имеют противоположные знаки.

Исследуем подробнее изоморфизм (3.17) с целью получить оценки на рост φ .

Значение сечения φ в точке $x \in \mathbb{R}^3$ получается ограничением на соответствующее сечение $P_x \subset T$.

По двойственности Серра⁽²³⁾

$$H^1(P_x, L^{z-1}\tilde{E}(-2)) \cong H^0(P_x, L^{1-z}\tilde{E})^* = E_x^* \cong E_x.$$

Требуется оценить норму $\varphi(x)$. Рассмотрим для этого все голоморфные сечения расслоения $L^{1-z}\tilde{E}$ на P_x и вычислим класс $i\delta(s)$, соответствующий φ на этих сечениях.

Отметим, что, согласно [8], сечение f расслоения $L^{1-z}\tilde{E}$ соответствует сечению $\hat{f}$ расслоения E над сферическим расслоением $S^2 \times \mathbb{R}^3$; при этом $\hat{f}$ удовлетворяет уравнению $(\nabla_U - i\Phi')\hat{f} = 0$ вдоль геодезического потока.

Аналогично, форме $\theta \in \Omega^{0,1}(L^{z-1}\tilde{E}(-2))$, представляющей элемент $i\delta(s)$, соответствует форма $\hat{\theta}$ на $S^2 \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющая аналогичному уравнению относительно потока. Величина $\langle \hat{\theta}, \hat{f} \rangle$ тем самым инвариантна вдоль потока и определяет величину $\langle \theta, f \rangle \in \Omega^{0,1}(T, O(-2))$. Следовательно, чтобы вычислить φ в точке $x \in \mathbb{R}^3$, нужно выбрать базис $\{e_1, e_2\}$ в слое E_x , поднять его на $S^2 \times \mathbb{R}^3$, получив голоморфные сечения $\{f_1, f_2\}$ расслоения $L^{1-z}\tilde{E}$ на P_x , а затем вычислить интеграл:

$$\langle \varphi, e_i \rangle_x = \langle i\delta(s), f_i \rangle = \int_{S^2} \langle \hat{\theta}(x, \mu), \hat{f}_i(x, \mu) \rangle,$$

где $\mu \in S^2 \cong P_x$ пробегает множество единичных касательных векторов в точке $x \in \mathbb{R}^3$.

Далее, в (3.16) входят два представителя θ^+ и θ^- элемента $i\delta(s)$, причем $\theta^\pm \in \Omega^{0,1}(L^{z-1}\tilde{E}^\pm(-2))$. Но в [8] расслоение L^+ определено как пространство решений уравнения $(\nabla_U - i\Phi)z = 0$ на прямой, убывающих как $t^{\frac{z}{2}}e^{-t}$ при $t \rightarrow \infty$.

Аналогично, используя поле Хиггса Φ' , мы получаем оценки

$$\hat{\theta}^+(y+tu, u) \sim t^k e^{(z-2)t} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

$$\hat{\theta}^-(y+tu, u) \sim |t|^k e^{-z|t|} \quad \text{при } t \rightarrow -\infty.$$

Рассмотрим далее параметризацию пространства T вида

$$\{(u, x) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \|u\| = 1 \text{ и } u \cdot x = 0\}.$$

Иначе говоря, прямая задается своим направлением и вектором кратчайшего расстояния от начала координат.

Так как носители форм θ^+ и θ^- содержатся в расслоении на круги радиуса R , то при $z \in (0, 2)$ справедливы оценки

$$\|\hat{\theta}^+(y+tu, u)\| < Ke^{-\epsilon t}, \quad t \geq 0,$$

$$\|\hat{\theta}^-(y+tu, u)\| < Ke^{-\epsilon|t|}, \quad t < 0, \quad \text{где } y \cdot u = 0.$$

Отсюда, полагая $x = y + tu$, получаем

$$\|\hat{\theta}^+(x, u)\| < Ke^{-\epsilon(x \cdot u)}, \quad \text{если } x \cdot u \geq 0,$$

$$\|\hat{\theta}^-(x, u)\| < Ke^{-\epsilon|x \cdot u|}, \quad \text{если } x \cdot u < 0.$$

(3.18)

Когда $\|x\|^2 - (x \cdot u)^2 > R^2$, расстояние от начала координат до прямой, проходящей через точку x в направлении u , всегда больше R . Следовательно, из неравенств (3.18) при $\|x\| > R$ получаем оценки

$$\|\hat{\theta}^+(x, u)\| < K \exp(-\epsilon \sqrt{\|x\|^2 - R^2}) \quad \text{при } x \cdot u \geq 0,$$

$$\|\hat{\theta}^-(x, u)\| < K \exp(-\epsilon \sqrt{\|x\|^2 - R^2}) \quad \text{при } x \cdot u < 0.$$

(3.19)

Определим теперь открытые подмножества сферы S^2 :

При достаточно больших $\|x\|$ множества $V^\pm$ являются непересекающимися окрестностями точек $\pm x/\|x\| \in S^2$, а носители форм $\hat{\theta}^+$ и $\hat{\theta}^-$ лежат в объединении $V^+ \cup V^-$.

Следовательно, после интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \langle i\delta(z), f_i \rangle &= \int_{V^+} \langle \hat{\theta}^+, \hat{f}_i \rangle + \int_{V^-} \langle \hat{\theta}^+, \hat{f}_i \rangle = \\ &= \int_{V^+} \langle \hat{\theta}^+, \hat{f}_i \rangle + \int_{V^-} \langle \hat{\theta}^-, \hat{f}_i \rangle + \int_{V^-} \langle \bar{\partial}\gamma, \hat{f}_i \rangle. \end{aligned}$$

Однако, согласно уравнению (3.16), сечение γ имеет носитель в $V^+ \cup V^-$, поэтому последний член равен нулю по теореме Стокса. Таким образом, из оценок (3.19) получаем, что

$$|\langle i\delta(z), f_i \rangle|_x < 4\pi K \exp(-\epsilon \sqrt{\|x\|^2 - R^2}) \|f_i\|,$$

и норма $\|\varphi(x)\|$ экспоненциально стремится к нулю при $\|x\| \rightarrow \infty$. Так как (см. [8]) производные форм $\hat{\theta}^\pm$ также убывают экспоненциально вдоль любой прямой, то подобная оценка имеет место и для $\|\nabla\varphi\|$.

Воспользуемся теперь стандартной техникой, применяемой при доказательстве теорем о тривиальности. Из (3.17) следует, что $(\nabla^*\nabla + \Phi'^*\Phi')\varphi = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\|x\| \leq R} \langle (\nabla^*\nabla + \Phi'^*\Phi')\varphi, \varphi \rangle = \\ &= \int_{\|x\| \leq R} (\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Phi'(\varphi)\|^2) + \int_{\|x\| = R} \operatorname{Re}(\nabla\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Согласно нашим оценкам, граничный член стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, поэтому $\nabla\varphi = 0$. Так как $\varphi \rightarrow 0$ на бесконечности, то $\varphi = 0$ и, следовательно, $i\delta(z) = 0$.

Для завершения доказательства осталось проверить инъективность отображения $i\delta$. Из точной последовательности пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_T(L^z(-k-2)) \rightarrow \mathcal{O}_T(L^z(k-2)) \rightarrow \mathcal{O}_S(L^z(k-2)) \rightarrow 0$$

видно, что кограничное отображение δ инъективно, если $H^0(T, L^z(k-2)) = 0$, а из точной последовательности

$$0 \rightarrow O_T(L^z(k-2)) \rightarrow O_T(L^{z-1}\tilde{E}(-2)) \rightarrow O_T(L^{z-2}(k-2)) \rightarrow 0$$

вытекает, что отображение i инъективно, если $H^0(T, L^{z-2}(k-2)) = 0$.

Однако при $z \neq 0$ голоморфных сечений расслоения $L^z(k-2)$ на T не существует. В самом деле, такое сечение поднимается до голоморфного сечения расслоения $O(k-2)$ на $P_3 \setminus P_1$ с помощью факторотображения $P_3 \setminus P_1 \rightarrow T$. Действительно, рассматривая $P_3 \setminus P_1$ как главное расслоение со слоем $\mathbb{C}$ на T , получим, что расслоение L^z на T порождено представлением $w \rightarrow e^{zw}$ группы $\mathbb{C}$. Следовательно, L^z тривиально на $P_3 \setminus P_1$.

Далее, по теореме Хартста (40) любое голоморфное сечение продолжается с $P_3 \setminus P_1$ на все пространство P_3 . Но группа $\mathbb{C}$ на таких сечениях действует алгебраически, поэтому не существует сечений, преобразующихся с трансцендентным множителем e^{zw} (см. также лемму 5.4).

Таким образом, если z отлично от 0 или 2, отображение $i\delta$ инъективно, и потому $z = 0$, что завершает доказательство теоремы.

Мы установили справедливость условий В1 – В4 для спектральной кривой S .

Условие тривиальности расслоения L^2 вместе с антиголоморфным изоморфизмом $L \cong L^*$, определяемым вещественной структурой, означает, что элемент $2[\eta/\zeta] \in H^1(S, \mathbb{O})$ является мнимой точкой решетки (41), задаваемой вложением $H^1(S, \mathbb{Z}) \subset H^1(S, \mathbb{O})$. Поэтому прямая, проходящая через 0 и $[2\eta/\zeta] \in H^1(S, \mathbb{O})$, определяет гомоморфизм

$$h: S^1 \rightarrow H^1(S, \mathbb{O})/H^1(S, \mathbb{Z}) = \text{Pic}^0(S).$$

Отсждествим группу Пикара с якобианом $\text{Jac}(S)$ классов дивизоров степени $g-1$ с помощью отображения $L \mapsto L(k-2)$ (напомним, что $\deg L(k-2)|_S = k(k-2) = (k-1)^2 - 1$). Тогда условие тривиальности из теоремы 3.7 означает, что $h^{-1}(\odot) = 1$, где $\odot$ является тета-дивизором линейных расслоений степени $(g-1)$, допускающих хотя бы одно сечение. В частности, отображение h инъективно, поэтому элемент $[2\eta/\zeta]$ не может быть кратным никакого элемента группы $H^1(S, \mathbb{Z})$.

4. Решение уравнений Нама

Предположим теперь, что S — кривая в пространстве TP_1 , удовлетворяющая условиям В1 — В4, т.е.

(i) S определяется уравнением

$$\eta^k + \alpha_1 \eta^{k-1} + \dots + \alpha_k = 0,$$

где сечения $\alpha_i \in H^0(P_1, O(2i))$ вещественны;

(ii) S не имеет кратных компонент, и расслоение $L(k-1)$ вещественно;

(iii) линейное расслоение L имеет порядок 2 на S ;

(iv) $H^0(S, L^z(k-2)) = 0$ для $z \in (0, 2)$.

Мы покажем, что такая кривая S каноническим образом определяет решение уравнений Нама, удовлетворяющее условиям С1 — С4. Сначала выведем некоторые следствия условия (iv).

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow O_{\hat{T}}(\ell H_1 - k(H_1 + H_2)) \xrightarrow{\Psi} O_{\hat{T}}(\ell H_1) \rightarrow O_S(\ell H_1) \rightarrow 0$$

на компактификации $\hat{T}$ пространства T :

Из точной кохомологической последовательности и теоремы Римана — Роха⁽³⁷⁾ для пространства $\hat{T}$ получаем

$$\begin{aligned} \dim H^0(S, O(\ell)) - \dim H^1(S, O(\ell)) &= \\ &= \frac{1}{2} \ell^2 H_1^2 - \frac{1}{2} \ell H_1 \cdot K - \frac{1}{2} (\ell H_1 - k(H_1 + H_2))^2 + \frac{1}{2} (\ell H_1 - k(H_1 + H_2)) \cdot K = \\ &= \ell + \ell k - k^2 - \ell + 2k = k(\ell - k) + 2k. \end{aligned}$$

Следовательно, для плоского линейного расслоения L^z ввиду инвариантности при деформациях имеем

$$\dim H^0(S, L^z(\ell)) - \dim H^1(S, L^z(\ell)) = k(\ell - k) + 2k. \quad (4.1)$$

В частности, $\dim H^0(S, L^z(k-2)) = \dim H^1(S, L^z(k-2))$, и по условию (iv)

$$H^1(S, L^z(k-2)) = 0 \text{ для } z \in (0, 2). \quad (4.2)$$

Обозначим далее через F слой расслоения T , пересекающийся с кривой S в k различных точках (его существование обеспечивается условием (ii)), и рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(L^z(l)) \rightarrow \mathcal{O}_S(L^z(l+1)) \rightarrow \mathcal{O}_{S \cap F}(L^z(l+1)) \rightarrow 0.$$

Из нее получаем, что отображение

$$H^0(S, L^z(l)) \rightarrow H^0(S, L^z(l+1))$$

инъективно, а отображение

$$H^1(S, L^z(l)) \rightarrow H^1(S, L^z(l+1))$$

сюръективно. Следовательно, ввиду условий (iv) и (4.2) имеем

$$\begin{aligned} H^0(S, L^z(l)) &= 0 \text{ при } l \leq k-2, \\ H^1(S, L^z(l)) &= 0 \text{ при } l \geq k-2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Пользуясь соотношением (4.1), получаем отсюда, в частности, что

$$\dim H^0(S, L^z(k-1)) = k. \quad (4.4)$$

При $z = 0$ (или $z = 2$, так как L^2 тривиально) линейное расслоение $\mathcal{O}(l)$ обладает большим запасом сечений.

Предложение 4.5. При $l < 2k$ любое сечение $z \in H^0(S, \mathcal{O}(l))$ может быть единственным образом представлено в виде

$$z = \sum_{i=0}^{[l/2]} \eta^i \pi^* c_i,$$

где $c_i \in H^0(P_1, \mathcal{O}(l-2i))$, а $\eta \in H^0(S, \mathcal{O}(2))$ — тавтологическое сечение на T .

Доказательство. Предположим вначале, что l четно, $l = 2n$, и возьмем точную последовательность

$$0 \rightarrow O_{\hat{T}}((n-k)(H_1+H_2)) \rightarrow O_{\hat{T}}(n(H_1+H_2)) \rightarrow O_S(2n) \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $H^0(\hat{T}, (n-k)(H_1+H_2)) = 0$, поскольку $n-k < 0$, получаем

$$H^0(\hat{T}, n(H_1+H_2)) \cong H^0(S, O(2n)), \quad (4.6)$$

если $H^1(\hat{T}, (n-k)(H_1+H_2)) = 0$. Обозначим через Z нулевое сечение; тогда имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow O_{\hat{T}}(-m(H_1+H_2)) \rightarrow O_{\hat{T}}((1-m)(H_1+H_2)) \rightarrow O_Z(2-2m) \rightarrow 0.$$

Если $m > 1$, то $H^0(P_1, O(2-2m)) = 0$, поэтому отображение

$$H^1(\hat{T}, -m(H_1+H_2)) \rightarrow H^1(\hat{T}, (1-m)(H_1+H_2))$$

инъективно. Применяя последовательно указанное отображение, мы получим вложение в группу $H^1(\hat{T}, -(H_1+H_2))$. Но $H^1(\hat{T}, O) = 0$ ввиду рациональности ⁽⁴²⁾ поверхности $\hat{T}$, а так как отображение $H^0(\hat{T}, O) \rightarrow H^0(Z, O)$ есть изоморфизм, то из точной кохомологической последовательности с $m=1$ следует, что $H^1(\hat{T}, -(H_1+H_2)) = 0$. Значит, и группа $H^1(\hat{T}, -m(H_1+H_2))$ также равна нулю.

Тем самым мы доказали изоморфизм (4.6). Сужение с пространства $\hat{T}$ на T дает

$$H^0(\hat{T}, n(H_1+H_2)) \cong H^0(T, O(2n)) \cong H^0(S, O(2n));$$

откуда, принимая во внимание результат работы [8, § 7], гласящий, что каждое сечение из $H^0(T, O(2n))$ имеет вид $z = \alpha_0 \eta^n + \alpha_1 \eta^{n-1} + \dots + \alpha_n$, получаем утверждение предложения.

Если $l = 2n+1$, мы применяем аналогичные рассуждения к точной последовательности

$$0 \rightarrow O_{\hat{T}}(H_1 + (n-k)(H_1+H_2)) \rightarrow O_{\hat{T}}(H_1 + n(H_1+H_2)) \rightarrow O_S(2n+1) \rightarrow 0.$$

В этом случае нужно показать, что $H^1(\hat{T}, -H_2) = 0$. Но по двойственности Серра⁽²³⁾ ввиду соотношения (3.2) имеем

$$H^1(\hat{T}, -H_2) \cong H^1(\hat{T}, H_2 - 2H_1 - 2H_2)^*.$$

Последняя группа равна нулю по теореме Кодаири⁽³⁶⁾.

Важным частным случаем предложения является случай $l = 2$. Тогда при $k > 1$ пространство $H^0(S, O(2))$ порождается сечениями

$$\eta d/d\zeta, \quad d/d\zeta, \quad \zeta d/d\zeta, \quad \zeta^2 d/d\zeta,$$

где $\eta d/d\zeta$ — введенное выше тавтологическое сечение, а остальные три сечения образуют базис пространства голоморфных векторных полей на P_1 .

Согласно формуле (4.4) и предложению 4.5, размерность векторного пространства $H^0(S, L^z(k-1))$ подсказывает с k до $(k+1)^2/4$ (при нечетных k) и до $k(k+2)/4$ (при четных k), когда z стремится к 0 или 2. Тем не менее мы можем ввести голоморфное семейство векторных пространств над $\mathbb{C}$ (иначе говоря, векторное расслоение V), взяв пучок $\pi_* M$, являющийся прямым образом линейного расслоения M над пространством $\mathbb{C} \times S$, слой которого над точкой $(z, w) \in \mathbb{C} \times S$ совпадает с $L^z(k-1)_w$. Пучок $\pi_* M$ не имеет кручения на одномерном пространстве $\mathbb{C}$ и потому локально свободен. Из условия $H^0(S, L^z(k-2)) = 0$ (при $z \in (0, 2)$) следует, что ранг расслоения V равен k , а его слой в точке $z \in (0, 2)$ совпадает с $V_z = H^0(S, L^z(k-1))$. Структуру слоев в концевых точках $z = 0, 2$ мы исследуем позднее. Нашим главным объектом изучения в этом параграфе будет отображение произведения

$$H^0(S, O(2)) \otimes H^0(S, L^z(k-1)) \xrightarrow{m} H^0(S, L^z(k+1)) \quad (4.7)$$

и в особенности его ядро.

Предложение 4.8. Обозначим через K_z ядро отображения (4.7). Тогда отображение $h: K_z \rightarrow V_z$, определяемое соотношением

$$h(\eta \otimes z_0 + 1 \otimes z_1 + \zeta \otimes z_2 + \zeta^2 \otimes z_3) = z_0,$$

является изоморфизмом при $z \in (0, 2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сечения расслоения $O(2)$ задают вложение пространства T внутрь конической квадрики в P_3 :

$$\{(z_0, z_1, z_2, z_3) | z_0 = \eta, z_1 = 1, z_2 = \zeta, z_3 = \zeta^2\}.$$

Обозначим через H линейное расслоение гиперплоского сечения⁽¹⁶⁾ на P_3 ; тогда $H|_T \cong O(2)$.

Существует точная последовательность векторных расслоений на P_3 (последовательность Эйлера)

$$0 \rightarrow \Omega_P^1(H) \rightarrow \mathbb{C}^4 \rightarrow H \rightarrow 0,$$

где Ω_P^1 — кокасательное расслоение, а

$$\mathbb{C}^4 \cong H^0(P_3, H) \cong H^0(T, O(2)) \cong H^0(S, O(2))$$

ввиду предложения 4.5. Сужая эту последовательность на S и беря тензорное произведение с пучком $L^{\otimes(k-1)}$, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \Omega_P^1 L^{\otimes(k+1)} \rightarrow H^0(S, O(2)) \otimes L^{\otimes(k-1)} \rightarrow L^{\otimes(k+1)} \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Отвечающая ей точная когомологическая последовательность дает

$$0 \rightarrow H^0(S, \Omega_P^1 L^{\otimes(k+1)}) \rightarrow H^0(S, O(2)) \otimes H^0(S, L^{\otimes(k-1)}) \xrightarrow{m} \\ \xrightarrow{m} H^0(S, L^{\otimes(k+1)}) \rightarrow H^1(S, \Omega_P^1 L^{\otimes(k+1)}) \rightarrow \dots$$

Покажем, что отображение m сюръективно, и найдем его ядро.

Касательная плоскость квадрики, содержащая прямую $\zeta = \infty$, совпадает с $\{z_1 = 0\}$. В дополнении к этой плоскости мы имеем следующую тривиализацию расслоения Ω_P^1 :

$$\omega_1 = d(z_0/z_1), \quad \omega_2 = d(z_2/z_1), \quad \omega_3 = d(z_3/z_1).$$

В дополнении к касательной плоскости, содержащей прямую $\zeta = 0$, имеем тривиализацию

$$\tilde{\omega}_1 = d(z_0/z_3), \quad \tilde{\omega}_2 = d(z_2/z_3), \quad \tilde{\omega}_3 = d(z_3/z_1);$$

поэтому

$$\tilde{\omega}_1 = d(x_0/x_1 \cdot x_1/x_3) = \omega_1 \zeta^{-2} + \eta \tilde{\omega}_3,$$

$$\tilde{\omega}_2 = d(x_2/x_1 \cdot x_1/x_3) = \omega_2 \zeta^{-2} + \zeta \tilde{\omega}_3,$$

$$\tilde{\omega}_3 = -\zeta^{-4} \omega_3.$$

Следовательно, расслоение Ω_P^1 на T задается относительно стандартного покрытия $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1$ матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \zeta^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^{-2} & 0 \\ -\eta \zeta^{-4} & -\zeta^{-3} & -\zeta^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

В частности, можно рассмотреть отображение $f: \Omega_P^1 \rightarrow \Omega_T^1 \rightarrow \Omega_F^1 \cong O(-2)$, где через Ω_F^1 обозначено кокасательное расслоение вдоль слоев расслоения T . Так как формы $\omega_1 = d\eta$ и $\tilde{\omega}_1$ задают локальные тривиализации расслоения Ω_F^1 , ядро отображения $f: \Omega_P^1 \rightarrow \Omega_F^1$ является расширением расслоения $O(-2)$ с помощью $O(-4)$ и задается матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \zeta^{-2} & 0 \\ -\zeta^{-3} & -\zeta^{-4} \end{pmatrix};$$

оно нетривиально на P_1 , поскольку $[\zeta^{-1}]$ — нетривиальный элемент группы $H^1(P_1, O(-2))$. Следовательно,

$$\ker f \cong O(-3) \oplus O(-3).$$

Рассмотрим теперь точную последовательность

$$0 \rightarrow L^{\otimes}(k-2) \oplus L^{\otimes}(k-2) \rightarrow \Omega_P^1 L^{\otimes}(k+1) \xrightarrow{f} L^{\otimes}(k-1) \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Из соотношений (4.3) следует, что

$$H^0(S, L^{\otimes}(k-2)) = H^1(S, L^{\otimes}(k-2)) = 0 \text{ и } H^1(S, L^{\otimes}(k-1)) = 0.$$

Поэтому из точной когомологической последовательности, ассоциированной с (4.11), вытекает, что отображение

$$f: H^0(S, \Omega_P^1 L^z(k+1)) \rightarrow H^0(S, L^z(k-1))$$

есть изоморфизм и $H^1(S, \Omega_P^1 L^z(k+1)) = 0$ при $z \in (0, 2)$. Следовательно, m есть отображение "на" и имеет k -мерное ядро, изоморфное пространству $H^0(S, L^z(k-1))$ (изоморфизм устанавливается отображением f).

Легко видеть, что отображение f совпадает с отображением h , описанным в предложении. Тем самым предложение доказано.

Из предложения 4.8 следует, что все сечения s_1, s_2, s_3 линейно зависят от сечения s_0 . Поэтому существуют корректно определенные эндоморфизмы $\tilde{A}_0(z), \tilde{A}_1(z), \tilde{A}_2(z) \in \text{End } V_z$ при $z \in (0, 2)$, такие, что

$$(\eta + \tilde{A}_0 + \zeta \tilde{A}_1 + \zeta^2 \tilde{A}_2) s = 0. \quad (4.12)$$

Эндоморфизмы $\tilde{A}_i$ уже почти определяют решения уравнений Нама, но они еще не являются матрицами — для этого мы должны тривиализовать векторное расслоение V над $\mathbb{C}$. Чтобы получить такую тривиализацию, мы построим теперь некоторую связность на V .

Напомним, что один из подходов к определению связности основан на понятии ковариантной производной сечения векторного расслоения. Предположим, что $s(z)$ — локальное голоморфное сечение расслоения V . Мы можем задать его парой голоморфных функций $f_0: U \rightarrow \mathbb{C}^k$ и $f_1: U' \rightarrow \mathbb{C}^k$ (где $U = \tilde{U}_0 \cap S, U' = \tilde{U}_1 \cap S$), удовлетворяющих соотношению $f_0 = e^{z\eta/\zeta} \zeta^{k-1} f_1$ на $U \cap U'$. Если мы продифференцируем это соотношение по z , то получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial z} = \frac{\eta}{\zeta} f_0 + e^{z\eta/\zeta} \zeta^{k-1} \frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad (4.13)$$

откуда ясно, что в результате дифференцирования мы не получаем сечения V . Однако в силу (4.12)

$$\frac{\eta}{\zeta} s = -(\tilde{A}_0 \zeta^{-1} + \frac{1}{2} \tilde{A}_1) s - (\frac{1}{2} \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 \zeta) s,$$

что после подстановки в (4.13) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \tilde{A}_1 z + \zeta \tilde{A}_2 z \right) \Big|_{U \cap U'} &= \\ &= \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\eta}{\zeta} f_0 - \left(\zeta^{-1} \tilde{A}_0 z + \frac{1}{2} \tilde{A}_1 z \right) \Big|_{U \cap U'} = \\ &= e^{x\eta/\zeta} \zeta^{k-1} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - \left(\zeta^{-1} \tilde{A}_0 z + \frac{1}{2} \tilde{A}_1 z \right) \right] \Big|_{U \cap U'}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Поскольку сечение $\frac{1}{2} \tilde{A}_1 z + \zeta \tilde{A}_2 z$ регулярно в U , а сечение $\zeta^{-1} \tilde{A}_0 z + \frac{1}{2} \tilde{A}_1 z$ регулярно в U' , мы получаем корректно определенную связность в расслоении V на интервале $(0, 2)$, которой отвечает ковариантная производная вида

$$\nabla_x z = \frac{\partial f_0}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \tilde{A}_1 z + \zeta \tilde{A}_2 z \right) \Big|_U. \quad (4.15)$$

Выбирая далее базис $z_1, \dots, z_k$ ковариантно постоянных сечений на интервале $(0, 2)$, мы можем задать каждый эндоморфизм $\tilde{A}_i$ его матрицей A_i .

Уравнения Нама возникают следующим образом.

Предложение 4.16. Пусть $A_0 = T_1 + iT_2$, $A_1 = -2iT_3$, $A_2 = T_1 - iT_2$; тогда T_1, T_2, T_3 удовлетворяют уравнениям Нама

$$\frac{dT_i}{dx} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k] \quad \text{для } x \in (0, 2).$$

Доказательство. Положим $A = A_0 + \zeta A_1 + \zeta^2 A_2$ и $A_+ = \frac{1}{2} A_1 + \zeta A_2$. Тогда из (4.12) следует, что

$$(\eta + A)z = 0, \quad (4.17)$$

а поскольку V было тривиализовано с помощью ковариантно постоянных сечений, то из определения (4.15) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} + A_+ z = 0 \quad \text{на } U. \quad (4.18)$$

Следовательно, из соотношения (4.17) имеем

$$(\eta + A) \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{dA}{dz} s = 0,$$

а из соотношения (4.18) вытекает, что

$$-(\eta + A) A_+ s + \frac{dA}{dz} s = 0.$$

Поэтому

$$-A_+ \eta s - A A_+ s + \frac{dA}{dz} s = 0,$$

и опять применяя (4.17), получаем

$$([A_+, A] + \frac{dA}{dz}) s = 0. \quad (4.19)$$

Возьмем теперь такой слой F расслоения T , для которого $S \cap F$ состоит из k различных точек. Пусть F — дивизор сечения $\mathcal{U}$ расслоения $\mathcal{O}(1)$ на T ; рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S L^{\otimes (k-2)} \xrightarrow{\mathcal{U}} \mathcal{O}_S L^{\otimes (k-1)} \rightarrow \mathcal{O}_{S \cap F} \rightarrow 0.$$

Поскольку $H^0(S, L^{\otimes (k-2)}) = H^1(S, L^{\otimes (k-2)}) = 0$, из точной когомологической последовательности следует, что отображение сужения $\rho: H^0(S, L^{\otimes (k-1)}) \rightarrow H^0(S \cap F, \mathcal{O})$ является изоморфизмом. Поэтому существует базис сечений $s_1, \dots, s_k$, принадлежащих $H^0(S, L^{\otimes (k-1)})$, такой, что $s_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$, но $s_i(x_i) \neq 0$, где $\{x_1, \dots, x_k\} = S \cap F$.

Уравнение (4.19) не зависит от η , поэтому элементы матрицы $B = [A_+, A] + dA/dz$ удовлетворяют соотношениям $\sum_i B_{ij} s_j(x_i) = 0$ для всех i, l , откуда $B_{ij} = 0$ при всех i, j . Итак,

$$dA/dz = [A, A_+]. \quad (4.20)$$

Наши рассуждения относились к типичному слою, поэтому уравнение (4.20) справедливо при всех ζ . Приравнявая коэффициенты при разных степенях ζ , получаем

$$\frac{dA_0}{dz} = \frac{1}{2}[A_0, A_1], \quad \frac{dA_1}{dz} = [A_0, A_2], \quad \frac{dA_2}{dz} = \frac{1}{2}[A_1, A_2].$$

Подставляя сюда выражения матриц A_i через T_i , немедленно получаем уравнения Нама.

З а м е ч а н и е. Уравнение (4.20) имеет форму Лакса⁽⁴³⁾. Из него немедленно следует, что $\frac{d}{dz} \text{Tr} A^n = 0$ для любого $n \geq 0$, поэтому спектр матрицы A не зависит от z . Спектр матрицы определяется характеристическим уравнением $\det(\eta + A(\zeta)) = 0$, которое задает кривую в пространстве T и является инвариантом уравнений Нама.

Из уравнения (4.12) следует, что $\det(\eta + A(\zeta)) = 0$ при $(\eta, \zeta) \in S$.

Поскольку $\det(\eta + A) = \eta^k + b_1 \eta^{k-1} + \dots + b_k$ определяет дивизор из линейной системы $|O(2k)|$, точно так же как S , а кривая S не имеет кратных компонент, то отсюда следует, что $S = \{(\eta, \zeta) \in T \mid \det(\eta + A(\zeta)) = 0\}$. Таким образом, S является инвариантной кривой нашего решения, а тем самым и общее решение уравнений может быть получено с помощью изложенного метода.

Следующая задача — выяснить поведение нашего решения уравнений Нама при $z = 0$.

5. Граничные условия

Найдем прежде всего слой V_0 векторного расслоения V в точке $z = 0$.

Предложение 5.1. Обозначим через $V_0 \subset H^0(S, O(k-1))$ слой расслоения V в точке $z = 0$. Тогда

$$V_0 = \pi^* H^0(P_1, O(k-1)).$$

Док а з а т е л ь с т в о. Мы знаем, что слой V_0 , так же как пространство $H^0(P_1, O(k-1))$, имеет размерность k . Мы должны показать, что любое сечение расслоения $O(k-1)$ на S , поднятое с пространства P_1 , локально продолжается до сечения расслоения $L^2(k-1)$ над пространством $C \times S$. Если такое продолжение существует, оно задается сечениями z и z' , которые разлагаются в степенные ряды

$$z(\eta, \zeta, x) = z_0 + x z_1 + x^2 z_2 + \dots,$$

$$z'(\eta, \zeta, x) = z'_0 + x z'_1 + x^2 z'_2 + \dots$$

на $W \times U$ и $W \times U'$ соответственно, где W - окрестность нуля $0 \in C$, $U = \tilde{U}_0 \cap S$ и $U' = \tilde{U}_1 \cap S$ ($\tilde{U}_0, \tilde{U}_1$ - стандартное покрытие пространства T двумя открытыми множествами) и $z = \zeta^{k-1} e^{x\eta/\zeta} z'$ на $U \cap U'$. Приравнивая сначала коэффициенты при x , мы получим, что

$$z_1 = \zeta^{k-1} \frac{\eta}{\zeta} z'_0 + \zeta^{k-1} z'_1;$$

тем самым класс $[\eta z_0 / \zeta] \in H^1(S, O(k-1))$ является кограницей и потому равен нулю. Аналогичные препятствия имеются для продолжений на окрестности более высокого порядка, причем все они принадлежат группе $H^1(S, O(k-1))$, к изучению которой мы переходим.

Л е м м а 5.2. Любой элемент $c \in H^1(S, O(k-1))$ может быть единственным образом представлен в виде

$$c = \sum_{i=[(k+2)/2]}^{k-1} \eta^i \pi^* c_i,$$

где $c_i \in H^1(P_1, O(k-1-2i))$.

Док а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству предложения 3.1. По теореме Кодайры⁽³⁶⁾ и теореме Римана - Рокха⁽³⁷⁾, $H^p(\hat{T}, -H_2 - kH_1) = 0$ для всех p , поэтому отображение сужения

$$\rho: H^1(\hat{T}, (k-1)H_2) \rightarrow H^1(S, O(k-1)) \quad (5.3)$$

есть изоморфизм. Рассматривая далее точную последовательность для кривой C в бесконечности, получим, что отображение

$$\hat{\xi}: H^1(\hat{T}, (k-1)N_1 + (l-1)(N_2 - N_1)) \rightarrow H^1(\hat{T}, (k-1)N_1 + l(N_2 - N_1))$$

инъективно при $-2l + (k-1) \leq 0$.

Рассмотрим теперь элемент

$$\alpha = \sum_{i=[(k+2)/2]}^{k-1} \hat{\eta}^i \hat{\xi}^{k-1-i} \pi^* c_i \in H^1(\hat{T}, (k-1)N_2).$$

Если он равен нулю, то после сужения на C получим $c_{k-1} = 0$ (ср. с формулой (3.4)). Однако из инъективности отображения $\hat{\xi}$ следует, что

$$\sum \hat{\eta}^i \hat{\xi}^{k-2-i} \pi^* c_i = 0,$$

и, повторяя процедуру, мы получим, что все $c_i = 0$. Тем самым (с учетом изоморфизма (5.3)) пространство сечений расслоения $O(k-1)$ на S имеет размерность

$$\tilde{h}^1 = \begin{cases} \sum_{m=1}^{l-1} 2m & \text{при } k=2l, \\ \sum_{m=1}^{l-1} (2m-1) & \text{при } k=2l-1. \end{cases}$$

Но $h^0 - h^1 = k$ по формуле Римана - Роха (4.1), а из предположения 4.5 следует, что $h^0 = \sum_{i=0}^{[k-1/2]} (k-2i)$. Отсюда $\tilde{h}^1 = h^1$, и лемма доказана.

Рассмотрим теперь препятствия более высоких порядков. Продолжение сечения расслоения $O(k-1)$ на S до сечения расслоения $L^2(k-1)$ до m -го порядка определяется относительно открытых множеств U и U' голоморфными функциями

$$z = z_0 + xz_1 + x^2z_2 + \dots + x^mz_m, \quad z_i \in H^0(U, O),$$

$$z' = z'_0 + xz'_1 + \dots + x^mz'_m, \quad z'_i \in H^0(U', O),$$

причем

$$z = \zeta^{\kappa-1} e^{z\eta/\zeta} z' \bmod x^{m+1} \text{ на } U \cap U'.$$

Мы рассмотрим специальное продолжение, при котором функции z и z' являются функциями $z\eta$ на U (и $z\eta/\zeta^2$ на U'), поскольку функция перехода $e^{z\eta/\zeta}$ сама имеет такой вид. В этом случае будем искать функции

$$p = p_0 + z\eta p_1 + \dots + z^m \eta^m p_m, \quad p_i \in H^0(U_0, O(\kappa-1-2i)),$$

$$p' = p'_0 + z\eta p'_1 + \dots + z^m \eta^m p'_m, \quad p'_i \in H^0(U_1, O(\kappa-1-2i)),$$

где $\mathbb{P} = U_0 \cup U_1$ — стандартное покрытие, причем $p = e^{z\eta/\zeta} p' \bmod x^{m+1}$ на $U_0 \cap U_1$. Указанное выше условие после замены $z\eta$ на η станет условием продолжимости сечения расслоения $O(\kappa-1)$ на нулевом сечении Z расслоения TP_1 до сечения расслоения $L(\kappa-1)$ на m -й формальной окрестности⁽¹⁹⁾. Справедлива следующая

Л е м м а 5.4. Каждое сечение расслоения $L(m)$ над $Z \subset TP_1$ может быть единственным образом продолжено на m -ю формальную окрестность, но никакое сечение не может быть продолжено на $(m+1)$ -ю окрестность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сечение расслоения $L(m)$ на m -й окрестности Z задается сечениями $p_i \in H^0(U_0, O(m-2i))$ и $p'_i \in H^0(U_1, O(m-2i))$, такими, что

$$p_0 + \eta p_1 + \dots + \eta^m p_m = e^{\eta/\zeta} (p'_0 + \eta p'_1 + \dots + \eta^m p'_m) \bmod \eta^{m+1}.$$

Иными словами, мы ищем функции p_i на U_0 и p'_i на U_1 , такие, что на $U_0 \cap U_1$

$$\begin{pmatrix} \zeta^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta^{m-1} & \zeta^{m-2} & 0 & & 0 \\ \frac{1}{2}\zeta^{m-2} & \zeta^{m-3} & \zeta^{m-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{m!} & \frac{\zeta^{-1}}{(m-1)!} & \dots & \dots & \zeta^{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_0 \\ \vdots \\ p'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Далее, набор

$$\begin{pmatrix} p'_0 \\ \vdots \\ p'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \zeta^{-m+l} \\ c_1 \zeta^{-m+l+1} \\ \vdots \\ c_{m-l} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

является решением, если

$$\sum_{i=0}^{m-l} c_i / (n-i)! = 0 \quad \text{при } l+1 \leq n \leq m. \quad (5.6)$$

Заметим, что детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{m!} & \frac{1}{n!} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(2n-m)!} \end{vmatrix}, \quad \text{где } n \leq m,$$

всегда отличен от нуля. Действительно, если вынести из каждой строки наибольший знаменатель и затем поделить i -й столбец на $(i-1)!$, получим, что Δ равен нулю тогда и только тогда,

когда равен нулю определитель

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \binom{m}{m-n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \end{vmatrix}.$$

Если бы строки $\tilde{\Delta}$ были линейно зависимы, то по теореме о биномиальных коэффициентах существовали бы числа $\lambda_i \in \mathbb{R}$, такие, что многочлен $q(x) = \sum_{i=n}^m \lambda_i (1+x)^i$ делился бы на x^{m-n+1} . Но $q(x) = (1+x)^n r(x)$, где $\deg r \leq m-n$, поэтому отсюда следовало бы, что $(1+x)^n$ делится на x , что невозможно.

Таким образом, с точностью до постоянного множителя существует единственное решение уравнения (5.6) и, более того, числа c_0 и c_{m-k} отличны от нуля.

Слегка изменяя первоначальную постановку, можно сказать, что вектор-столбцы в формуле (5.5) задают тривиализацию векторного расслоения E_m на P_1 , определяемого матрицей перехода (5.5). У нас имеется далее точная последовательность

$$0 \rightarrow E_{m-1}(-1) \rightarrow E_m \xrightarrow{p_0} O(m) \rightarrow 0$$

векторных расслоений на P_1 . Пользуясь тривиальностью расслоения E_{m-1} и условием $H^p(P_1, O(-1)) = 0$, получим из точной когомологической последовательности следующий изоморфизм:

$$H^0(P_1, E_m) \xrightarrow[p_0]{\cong} H^0(P_1, O(m)). \quad (5.7)$$

Тем самым любое сечение расслоения $O(m)$ обладает единственным продолжением до сечения расслоения E_m и, следовательно, до сечения расслоения $L(m)$ на m -й формальной окрестности.

Продолжение до $(m+1)$ -го порядка задается поднятием сечения расслоения $O(m)$ с помощью точной последовательности

$$0 \rightarrow E_m(-2) \rightarrow E_{m+1}(-1) \rightarrow O(m) \rightarrow 0.$$

Но, поскольку $H^0(P_1, E_{m+1}(-1)) = 0$, расслоение E_{m+1} тривиально, поэтому таких продолжений не существует.

Построенное продолжение $\tilde{z}$ сечения $z \in H^0(P_1, O(m))$ на m -ю окрестность мы будем далее называть каноническим. На языке формальных окрестностей оно определяет изоморфизм $H^0(P_1, L^{(m)}(m)) \cong H^0(P_1, O(m))$, который ввиду единственности инвариантен относительно группы $SL(2, \mathbb{C})$ биголоморфных преобразований пространства TP_1 , сохраняющих нулевое сечение Z .

Обратившись к точным последовательностям

$$0 \rightarrow O(m-2k) \rightarrow L^{(k)}(m) \rightarrow L^{(k-1)}(m) \rightarrow 0,$$

мы видим, что $SL(2, \mathbb{C})$ -модуль $(28) S^m \cong H^0(P_1, O(m))$ входит с кратностью 1 в модуль $(44) H^0(P_1, L^{(k)}(m))$ при $k \leq m$. Поэтому каноническое продолжение на k -ю окрестность обязано совпадать с единственным $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантным продолжением. Это свойство инвариантности позволяет также установить, что кограничное отображение $\delta: H^0(P_1, L^{(m)}(m)) \rightarrow H^1(P_1, O(-m-2))$, возникающее из точной последовательности

$$0 \rightarrow O(-m-2) \rightarrow L^{(m+1)}(m) \rightarrow L^{(m)}(m) \rightarrow 0,$$

определяет $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантный гомоморфизм h из $H^0(P_1, O(m))$ в $H^1(P_1, O(-m-2))$, задаваемый формулой

$$h z = \delta \tilde{z}. \quad (5.8)$$

По лемме 5.4 ядро h равно нулю, а так как оба пространства являются неприводимыми представлениями, то h — изоморфизм.

Теперь мы можем завершить доказательство предложения 5.1.

Пусть z — сечение расслоения $O(k-1)$ на P_1 ; рассмотрим каноническое продолжение до $(k-1)$ -го порядка элемента $\pi^* z \in H^0(S, O(k-1))$, определяемое леммой 5.4, как сечение расслоения $L^*(k-1)$ на $S \times \mathbb{C}$. Тогда препятствием к продолжению до k -го порядка служит элемент

$$c = \eta^k \pi^* h z \in H^1(S, O(k-1)). \quad (5.9)$$

Однако на кривой S выполнено соотношение $\eta^k + \alpha_1 \eta^{k-1} + \dots + \alpha_k = 0$; поэтому можно переписать (5.9) в виде

$$c = - \sum_{i=1}^l \alpha_i \eta^{k-i} \pi^* h_i, \quad l = k - [k/2],$$

или иначе

$$c = \sum \eta^{k-i} \pi^* h_i, \quad (5.10)$$

где $h_i \in H^1(\mathbb{P}_1^1, \mathcal{O}(2i - k - 1))$.

Согласно определению (5.8), каждый член $\eta^{k-i} \pi^* h_i$ является препятствием к продолжению канонического продолжения сечения $\pi^* z_i \in H^0(S, \mathcal{O}(k-1-2i))$, где $h_i = h z_i$, до $(k-2i)$ -го порядка как сечения расслоения $L^*(k-1-2i)$. Иначе говоря, такой член является препятствием к продолжению канонического продолжения элемента $\eta^i \pi^* z_i \in H^0(S, \mathcal{O}(k-1))$ до $(k-2i)$ -го порядка или к продолжению элемента $z^{2i} \eta^i \pi^* z_i$ с $(k-1)$ -го порядка до k -го.

Следовательно, если обозначить через $\bar{z}$ каноническое продолжение, то сечение

$$\bar{z} - z^2 \eta \bar{z}_1 - z^4 \eta^2 \bar{z}_2 - \dots - z^{2l} \eta^l \bar{z}_l \quad (5.11)$$

продолжается с $(k-1)$ -го до k -го порядка по z .

Препятствием к дальнейшему продолжению является некоторый элемент $c' \in H^1(S, \mathcal{O}(k-1))$. Но по лемме 5.2 и формуле (5.8) элемент c' канонически определяет сечения $z'_1, \dots, z'_l$, такие, что

$$c' = \sum \eta^{k-i} h(z'_i). \quad (5.12)$$

Следовательно, если изменить наше сечение до k -го порядка, добавляя к нему члены, кратные $\bar{z}'_i$, такие, как в (5.11), мы можем устранить препятствие и продолжить процедуру. Отметим, что, поскольку каждый член в (5.12) является препятствием к продолжению сечения не более чем до $(k-2)$ -го порядка, все члены, которые необходимо добавить к (5.11) при продолжении до $(k+1)$ -го порядка, кратны z^3 . Таким образом, при про-

ведении вышеуказанной процедуры каждый коэффициент при x^n подвергается конечному числу модификаций, так что в результате мы получаем степенной ряд по x , задающий формальное продолжение.

Теперь мы воспользуемся теоремой Ваврика [14], утверждающей, что если существует формальное продолжение, то существует и настоящее (т.е. задаваемое сходящимся рядом) продолжение.

Следовательно (в обозначениях предложения), $\pi^*H^0(P_1, O(k-1)) \subset V_0$. Однако, ввиду того что оба пространства k -мерны, мы имеем на самом деле равенство, и предложение 5.1 тем самым доказано.

Далее мы исследуем аналогичным образом поведение ядра $K_x \subset H^0(S, O(2)) \otimes H^0(S, L^x(k-1))$ отображения m произведения (4.7) при x , стремящемся к нулю. Согласно формуле (4.9), это эквивалентно изучению продолжаемости сечений векторного расслоения $\Omega_P^1(k+1)$ над S до сечений расслоения $\Omega_P^1 L^x(k+1)$. Так как прямой образ $\pi_* \Omega_P^1 L^x(k+1)$ над $\mathbb{C}$ локально свободен, а $\dim K_x = k$ при $x \in (0, 2)$ согласно предложению 4.8, то существует корректно определенное k -мерное подпространство сечений $K_0 \subset H^0(S, O(2)) \otimes V_0$, которые допускают продолжение. Из предложений 5.1 и 4.5 следует, что $K_0 \subset H^0(TP_1, O(2)) \otimes \pi^*H^0(P_1, O(k-1))$. Если теперь $\eta z_0 + z_1 + \zeta z_2 + \zeta^2 z_3 = 0$ для $z_i \in \pi^*H^0(P_1, O(k-1))$, то из предложения 4.5 вытекает, что $z_0 = 0$. Поэтому $K_0 \subset \pi^*(H^0(P_1, O(2)) \otimes H^0(P_1, O(k-1)))$. Пусть далее X_0, X_1, X_2 есть базис алгебры Ли группы $SL(2, \mathbb{C})$, дуальный относительно формы Киллинга базису $d/d\zeta, \zeta d/d\zeta, \zeta^2 d/d\zeta$. Каждый оператор X_i действует как эндоморфизм пространства $H^0(P_1, O(k-1))$.

Предложение 5.13. Каждый элемент $z \in K_0$ единственным образом представляется в виде

$$z = \pi^*(1 \otimes X_0 \tilde{z} + \zeta \otimes X_1 \tilde{z} + \zeta^2 \otimes X_2 \tilde{z})$$

для некоторого $\tilde{z} \in H^0(P_1, O(k-1))$.

Доказательство. Рассматривая действие группы $SL(2, \mathbb{C})$, заметим, что пространство $H^0(P_1, O(2)) \otimes H^0(P_1, O(k-1))$ совпадает с пространством представления

$S^2 \otimes S^{k-1} \cong S^{k+1} \oplus S^{k-1} \oplus S^{k-3}$. Предложение утверждает, что K_0 совпадает с единственным подмодулем, изоморфным S^{k-1} .

Мы хотим найти локальные сечения $z_0, z_1, z_2, z_3 \in H^0(S, L^*(k-1))$, такие, что

$$\eta z_0 + z_1 + \zeta z_2 + \zeta^2 z_3 = 0.$$

Из предложения 5.1 следует, что $z_0 = \chi t_0$, поэтому $\eta \chi t_0 + z_1 + \zeta z_2 + \zeta^2 z_3 = 0$.

Как и при доказательстве предложения 5.1, ограничимся сначала продолжениями, являющимися функциями от $\eta \chi$, которые мы связываем с формальными окрестностями нулевого сечения $Z \subset TP_1$.

Л е м м а 5.14. Пусть z есть элемент пространства

$$S^{k-1} \subset H^0(P_1, O(2)) \otimes H^0(P_1, O(k-1)).$$

Тогда существует единственное продолжение z до $(k-1)$ -го порядка как элемента ядра отображения m в пространстве

$$H^0(Z, O^{(k-1)}(2)) \otimes H^0(Z, L^{(k-1)}(k-1)),$$

где расслоение $L^{(k-1)}(k-1)$ является сужением расслоения $L(k-1)$ на $(k-1)$ -ю формальную окрестность $Z \subset TP_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из [8] следует, что $H^0(Z, O^{(k-1)}(2)) \cong H^0(TP_1, O(2))$ при $k > 1$, и из леммы 5.4 вытекает, что $H^0(Z, L^{(k-1)}(k-1)) \cong S^{k-1}$ как $SL(2, \mathbb{C})$ -модуль. Поэтому имеют место изоморфизмы $SL(2, \mathbb{C})$ -пространств

$$H^0(Z, O^{(k-1)}(2)) \otimes H^0(Z, L^{(k-1)}(k-1)) \cong (S^0 \oplus S^2) \otimes S^{k-1} \cong S^{k-1} \oplus S^{k+1} \oplus S^{k-1} \oplus S^{k-3}. \quad (5.15)$$

Сужая далее расслоение Ω_P^1 на $TP_1 \subset P_3$, получим точную последовательность векторных расслоений $0 \rightarrow N^* \rightarrow \Omega_P^1 \rightarrow \Omega_T^1 \rightarrow 0$, где $N^* \cong O(-4)$ — кономальное расслоение, а Ω_T^1 — кокасательное расслоение пространства TP_1 . Следовательно, на $(k-1)$ -й формальной окрестности мы имеем

последовательность

$$0 \rightarrow H^0(Z, L^{(k-1)}(k-3)) \rightarrow H^0(Z, \Omega_P^1 L^{(k-1)}(k+1)) \rightarrow \\ \rightarrow H^0(Z, \Omega_T^1 L^{(k-1)}(k+1)) \rightarrow \dots$$

Но из леммы 5.4 вытекает, что $H^0(Z, L^{(k-1)}(k-3)) = 0$, поэтому $H^0(Z, \Omega_P^1 L^{(k-1)}(k+1))$ является подпространством в $H^0(Z, \Omega_T^1 L^{(k-1)}(k+1))$. После сужения на слои расслоения TP_1 мы получаем точную последовательность $0 \rightarrow O(-2) \rightarrow \Omega_T^1 \rightarrow O(-2) \rightarrow 0$ и соответствующую ей кохомологическую последовательность

$$0 \rightarrow H^0(Z, L^{(k-1)}(k-1)) \rightarrow H^0(Z, \Omega_T^1 L^{(k-1)}(k+1)) \rightarrow \\ \rightarrow H^0(Z, L^{(k-1)}(k-1)) \rightarrow \dots$$

По лемме 5.4 имеем изоморфизм $H^0(Z, L^{(k-1)}(k-1)) \cong S^{k-1}$, поэтому пространство $H^0(Z, \Omega_P^1 L^{(k-1)}(k+1))$ является подмодулем в $S^{k-1} \oplus S^{k-1}$ и, в частности, не содержит неприводимых компонент вида S^{k+1} или S^{k-3} . Следовательно, ядро отображения m в (5.15) является подпространством пространства $S^{k-1} \oplus S^{k-1}$.

Если $\bar{z}$ обозначает каноническое продолжение элемента $z \in H^0(P_1, O(k-1))$ в $H^0(Z, L^{(k-1)}(k-1))$, то элемент $\eta \bar{z} \in H^0(Z, L^{(k-1)}(k+1))$ отличен от нуля, поэтому одна из S^{k-1} -компонент в (5.15) нетривиально преобразуется под действием m . Следовательно, как $SL(2, \mathbb{C})$ -модуль ядро m либо изоморфно S^{k-1} , либо равно нулю. Однако оно не может быть нулевым, поскольку, согласно лемме 5.4, мы имеем изоморфизм

$$H^0(Z, L^{(k-1)}(k+1)) \cong S^{k+1} \oplus S^{k-1} \oplus S^{k-3},$$

и в правую часть входит только одно S^{k-1} .

Итак, $\ker m \cong S^{k-1}$. После сужения на окрестность нулевого порядка получим, что S^{k-1} -компонента вида $\eta \oplus \bar{z}$ в (5.15) исчезает, поэтому оставшаяся компонента $\ker m$ отображается нетривиально и потому изоморфно на S^{k-1} -компоненту в пространстве $H^0(P_1, O(2)) \oplus H^0(P_1, O(k-1))$. Это и определяет искомое продолжение.

Теперь мы можем найти такие канонические продолжения сечений $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ и такое $\bar{t}_0$, что

$$\eta \bar{z}_0 + \bar{z}_1 + \zeta \bar{z}_2 + \zeta^2 \bar{z}_3 = 0 \mod \bar{z}^k, \quad (5.16)$$

при условии что $1 \otimes \bar{z}_1 + \zeta \otimes \bar{z}_2 + \zeta^2 \otimes \bar{z}_3 \in S^{\bar{k}-1}$.

Для дальнейшего продолжения до $\bar{k}$ -го порядка мы должны модифицировать $\bar{z}_i$ так же, как в (5.11). Поскольку добавляемые члены имеют вид $\bar{z} \eta u$, мы можем просто вычесть $\bar{z} \eta u$ из $\bar{z}_i$ и прибавить u к $\bar{t}_0$, чтобы получить продолжение до $\bar{k}$ -го порядка, удовлетворяющее соотношению (5.16). Действуя таким образом, мы получим формальное продолжение, которое определяет формальное сечение расслоения $\Omega_P^1 L^*(\bar{k}+1)$. Применяя снова теорему Ваврика, получим настоящее продолжение. Этим доказано предложение 5.13.

Рассмотрим теперь элемент $\tilde{z} \in H^0(P_1, O(\bar{k}-1))$ и продолжим сечение $z = \pi^*(1 \otimes X_0 \tilde{z} + \zeta \otimes X_1 \tilde{z} + \zeta^2 \otimes X_2 \tilde{z})$ в соответствии с предложением 5.13. Для получения формального продолжения необходимо модифицировать каждый из элементов $X_i \tilde{z}$, но все они имеют порядок ≥ 2 по $\bar{z}$. Поэтому член первого порядка в формальном продолжении совпадает с аналогичным членом канонического продолжения. Для получения настоящего продолжения из формального, возможно, понадобятся модификации, однако всегда можно найти сходящееся продолжение, совпадающее с формальным до любого наперед заданного порядка n .

Вычислим теперь член первого порядка. По лемме 5.4 это эквивалентно нахождению отношения c_0/c_1 для вектор-столбца

$$\begin{pmatrix} p'_0 \\ \vdots \\ p'_{\bar{k}-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \zeta^{-1} \\ c_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющего соотношению (5.5). Мы воспользуемся, однако, другим описанием канонического продолжения как $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантного продолжения.

Нам нужно найти, согласно (5.5), $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантное расщепление пространства сечений расслоения над P_1 , зада-

ваемого функцией перехода

$$S_{01} = \begin{pmatrix} \zeta^{k-1} & 0 \\ \zeta^{k-2} & \zeta^{k-3} \end{pmatrix}$$

и определяющего инвариантное продолжение, отвечающее классу $[\zeta^{-1}] \in H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-2))$.

Моделью такого продолжения является продолжение $J_1(k-1)$ расслоения $\mathcal{O}(k-1)$ на $\mathbb{P}_1$ -джеты⁽⁴⁵⁾:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(k-3) \rightarrow J_1(k-1) \rightarrow \mathcal{O}(k-1) \rightarrow 0.$$

В этом случае инвариантное расщепление задается просто произведением или отображением в $\mathbb{P}_1$ -джеты:

$$j_1: H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(k-1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_1, J_1(k-1)).$$

Функцией перехода для $\mathcal{O}(k-1)$ будет ζ^{k-1} , поэтому производная сечения $f_0 = \zeta^{k-1} f_1$ преобразуется как $f'_0 = (k-1)\zeta^{k-2} f_1 + \zeta^{k-1} f'_1$ и определяет расслоение $J_1(k-1)$ посредством функции перехода

$$T_{01} = \begin{pmatrix} \zeta^{k-1} & 0 \\ (k-1)\zeta^{k-2} & \zeta^{k-3} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для сечения, задаваемого мономом $\zeta^l \in H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(k-1))$, имеем

$$j_1(\zeta^l) = \begin{pmatrix} \zeta^l \\ l\zeta^{l-1} \end{pmatrix}.$$

относительно T_{01} . Изменяя базис для функции перехода S_{01} , зададим каноническое продолжение (в обозначениях леммы 5.4) формулой

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^\ell \\ \frac{\ell}{k-1} \zeta^{\ell-1} \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Легко видеть, что базис $\{X_0, X_1, X_2\}$ алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$, дуальный к базису $\{d/d\zeta, \zeta d/d\zeta, \zeta^2 d/d\zeta\}$, имеет вид

$$X_0 = -\frac{1}{2} \zeta^2 \frac{d}{d\zeta}, \quad X_1 = \frac{1}{2} \zeta \frac{d}{d\zeta}, \quad X_2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta},$$

а действие операторов X_0, X_1, X_2 на моном $\zeta^\ell \in H^0(P_1, \mathcal{O}(k-1))$ задается формулами

$$\begin{aligned} X_0 \cdot \zeta^\ell &= -\frac{1}{2} (\ell - k + 1) \zeta^{\ell+1}, \\ X_1 \cdot \zeta^\ell &= \frac{1}{2} (2\ell - k + 1) \zeta^\ell, \\ X_2 \cdot \zeta^\ell &= -\frac{1}{2} \ell \zeta^{\ell-1}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Следовательно, положив $p_0 = \zeta^\ell$, из формул (5.17), (5.18) получим

$$\begin{aligned} X_0 \cdot p_0 + \zeta X_1 \cdot p_0 + \zeta^2 X_2 \cdot p_0 &= 0, \\ X_0 \cdot p_1 + \zeta X_1 \cdot p_1 + \zeta^2 X_2 \cdot p_1 &= \frac{1}{2} \zeta^\ell. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Тем самым в (5.16) будем иметь

$$t_0 = -\frac{1}{2} \tilde{z} \bmod \mathfrak{z}, \quad (5.20)$$

где $\mathfrak{z}_i = X_{i-1} \tilde{z}$.

Найдем теперь предел при $x \rightarrow 0$ эндоморфизмов $\tilde{A}_i(x) \in \text{End } V_x$. Полагая $z_0 = x t_0$, получим из уравнения (4.12), что $z \tilde{A}_i t_0 = z_{i+1}$. Тем самым эндоморфизм $z \tilde{A}_i$ регулярен при $x = 0$, и из (5.20) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} z \tilde{A}_i(\tilde{z}) = -2z_{i+1}(0) = -2X_i \cdot \tilde{z}. \quad (5.21)$$

Итак, эндоморфизм $\tilde{A}_i$ имеет простой полюс при $x = 0$ с вычетом, задаваемым выражением (5.21).

Чтобы получить матрицы A_i , нужно рассмотреть поведение связности на расслоении V при $x \rightarrow 0$. Согласно (4.15), ковариантная производная равна

$$\nabla_z = \frac{\partial f_0}{\partial z} + \left(\frac{1}{2} \tilde{A}_1 z + \zeta \tilde{A}_2 z \right) \Big|_U.$$

Далее, из формул (5.21) и (5.18) имеем

$$\frac{1}{2} \tilde{A}_1 + \zeta \tilde{A}_2 = \frac{(k-1)}{2x} + B, \quad (5.22)$$

где эндоморфизм B является голоморфным в окрестности $x = 0$.

Матрицы $A_i(x)$ определяются тривиализацией расслоения V вдоль интервала $(0, 2)$ с помощью ковариантно постоянных сечений z_i , $1 \leq i \leq k$, и соотношениями

$$\sum A_i^{jk}(x) z_k = \tilde{A}_i(x) z_j. \quad (5.23)$$

Из равенства (5.22) следует, что сечения $t_i = z^{(k-1)/2} z_i$ регулярен при $x = 0$, поэтому из (5.23) вытекает, что матрица $A_i(x)$ имеет тот же полюс с тем же вычетом, что и эндоморфизм $\tilde{A}_i$, поскольку вычет связности является скаляром. Итак, мы наконец получаем необходимые граничные условия.

Предложение 5.24. Пусть S - кривая в TP_1 , удовлетворяющая условиям В1 - В4. Тогда матрицы T_i , построенные в предложении 4.16, имеют простые полюсы при $x = 0$ и $x = 2$, вычеты в которых определяют неприводимое представление группы $SU(2)$.

Доказательство. Согласно (5.21), вычеты матриц A_0, A_1, A_2 задают стандартное неприводимое представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ в пространстве $H^0(P_1, O(k-1))$. Полагая $A_0 = T_1 + iT_2, A_1 = -2iT_3, A_2 = T_1 - iT_2$, как в предложении 4.16, получим, что вычеты матриц T_i задают представление группы $SU(2)$, которое по-прежнему неприводимо.

Из условия В3 о тривиальности расслоения L^2 на S следует, что при $x = 2$ матрицы $A_i(x)$ ведут себя так же, как и при $x = 0$.

6. Условия вещественности

Нам осталось проверить условия вещественности для матриц T_i , а именно:

$$C1. \quad T_i^*(x) = -T_i(x);$$

$$C2. \quad T_i^*(x) = -\bar{T}_i(2-x).$$

Для проверки условия C1 мы должны ввести эрмитову структуру⁽⁴⁶⁾ на векторном расслоении V . Напомним, что $V_x = H^0(S, L^*(k-1))$ при $x \in (0, 2)$.

Вещественная структура на S определяет антилинейный изоморфизм $\sigma: H^0(S, L^*(k-1)) \rightarrow H^0(S, L^*(k-1))$. Как и при доказательстве теоремы 3.7, мы будем обозначать эту операцию сопряжения через $\sigma(z) = \bar{z}^*$. Рассмотрим теперь сечения $z, t \in H^0(S, L^*(k-1))$ и $zt^* \in H^0(S, O(2k-2))$. Пользуясь предложением 4.5, сечение zt^* единственным образом можно записать в виде

$$zt^* = c_0 \eta^{k-1} + c_1 \eta^{k-2} + \dots + c_{k-1}, \quad (6.1)$$

где $c_i \in \pi^* H^0(P_1, O(2i))$.

Определим эрмитово внутреннее произведение на V формулой

$$\langle z, t \rangle = c_0. \quad (6.2)$$

Эта форма имеет, очевидно, правильную антилинейность. Но не вполне ясно, что она положительно определена.

Из определения эндоморфизмов $\tilde{A}_i$ имеем

$$\eta z + \tilde{A}_0 z + \zeta \tilde{A}_1 z + \zeta^2 \tilde{A}_2 z = 0 \in H^0(S, L^*(k+1)).$$

Применяем вещественную структуру σ и находим, что

$$-\eta \sigma(z) + \zeta^2 \sigma(\tilde{A}_0 z) - \zeta \sigma(\tilde{A}_1 z) + \sigma(\tilde{A}_2 z) = 0, \quad (6.3)$$

используя вещественную структуру⁽⁴⁷⁾ на $H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(2))$. С другой стороны,

$$\eta \sigma(z) + \tilde{A}_0(\sigma z) + \zeta \tilde{A}_1(\sigma z) + \zeta^2 \tilde{A}_2(\sigma z) = 0. \quad (6.4)$$

Отсюда, складывая (6.3) и (6.4) и пользуясь предложением 4.8, получим

$$\sigma \tilde{A}_0 = -\tilde{A}_2 \sigma, \quad \sigma \tilde{A}_2 = -\tilde{A}_0 \sigma, \quad \sigma \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1 \sigma. \quad (6.5)$$

Рассмотрим теперь внутренние произведения $\langle \tilde{A}_i z, t \rangle$.
Имеем $\eta z + \tilde{A}_0 z + \zeta \tilde{A}_1 z + \zeta^2 \tilde{A}_2 z = 0$, и потому

$$\eta z t^* + (\tilde{A}_0 z) t^* + \zeta (\tilde{A}_1 z) t^* + \zeta^2 (\tilde{A}_2 z) t^* = 0. \quad (6.6)$$

Аналогично,

$$\eta t z^* + (\tilde{A}_0 t) z^* + \zeta (\tilde{A}_1 t) z^* + \zeta^2 (\tilde{A}_2 t) z^* = 0,$$

и после применения вещественной структуры

$$-\eta t^* z + \zeta^2 (\tilde{A}_0 t)^* z - \zeta (\tilde{A}_1 t)^* z + (\tilde{A}_2 t)^* z = 0. \quad (6.7)$$

Прибавляя (6.7) к (6.6), получаем

$$\begin{aligned} \{(\tilde{A}_0 z) t^* + z (\tilde{A}_2 t)^*\} + \zeta \{(\tilde{A}_1 z) t^* - z (\tilde{A}_1 t)^*\} + \\ + \zeta^2 \{(\tilde{A}_2 z) t^* + z (\tilde{A}_0 t)^*\} = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из точной последовательности (см. предложение 4.5)

$$0 \rightarrow O_{\hat{T}} \xrightarrow{\psi} O_{\hat{T}}(k(H_1 + H_2)) \rightarrow O_S(2k) \rightarrow 0$$

мы видим, что в силу тривиальности $H^1(\hat{T}, O)$ любое сечение расслоения $O(2k)$ на S может быть записано в виде $s = c_0 \eta^k + c_1 \eta^{k-1} + \dots + c_k$, причем единственное линейное соотношение между сечениями получается при обращении в нуль некоторого кратного ψ .

Отсюда, поскольку формула (6.8) не содержит степеней η^k , а потому и слагаемых, кратных ψ , получаем, рассматривая коэффициенты при η^{k-1} , что

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}_0 s, t \rangle &= -\langle s, \tilde{A}_2 t \rangle, \\ \langle \tilde{A}_1 s, t \rangle &= \langle s, \tilde{A}_1 t \rangle. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Следовательно, полагая $\tilde{A}_0 = \tilde{T}_1 + i\tilde{T}_2$, $\tilde{A}_1 = 2i\tilde{T}_3$ и $\tilde{A}_2 = \tilde{T}_1 - i\tilde{T}_2$, получим, что каждый эндоморфизм $\tilde{T}_i$ кососимметричен относительно введенной эрмитовой формы.

Исследуем далее действие связности на эрмитову форму. Возьмем сечение $st^* = c_0(z)\eta^{k-1} + \dots$ и ограничим его на открытое множество $\tilde{U}_0 \cap S$. Тогда

$$\frac{ds_0}{dz} t_0^* + s_0 \frac{dt_0^*}{dz} = \frac{dc_0}{dz} \eta^{k-1} + \dots \quad (6.10)$$

Далее, из (4.15) получаем

$$\frac{dt_0^*}{dz} = \left(\frac{dt_1}{dz} \right)^* = (\nabla_z t + \zeta^{-1} \tilde{A}_0 t + \frac{1}{2} \tilde{A}_1 t)^*$$

и соответственно

$$\frac{ds_0}{dz} = \nabla_z s - \frac{1}{2} \tilde{A}_1 s - \zeta \tilde{A}_2 s.$$

Следовательно, подставляя в (6.10), получим

$$\begin{aligned}
(\nabla_z s) t^* + s (\nabla_z t)^* - \frac{1}{2} (\tilde{A}_1 s) t^* - \zeta_1 (\tilde{A}_2 s) t^* - \zeta_1 s \tilde{A}_0 \sigma^{-1} t^* + \\
+ \frac{1}{2} s \tilde{A}_1 \sigma^{-1} t^* = \frac{dc_0}{dz} \eta^{k-1} + \dots,
\end{aligned}$$

откуда, пользуясь (6.5), выводим, что

$$(\nabla_z s) t^* + s (\nabla_z t)^* = \frac{dc_0}{dz} \eta^{k-1} + \dots$$

Приравнивая теперь коэффициенты при η^{k-1} , получим из определения (6.2), что

$$\langle \nabla_z s, t \rangle + \langle s, \nabla_z t \rangle = \frac{d}{dz} \langle s, t \rangle; \quad (6.11)$$

тем самым связность сохраняет эрмитову структуру.

Таким образом, тривиализуя V с помощью связности, мы получаем эрмитово внутреннее произведение, относительно которого матрицы T_i кососимметричны. В частности, вычеты T_i в точках $x = 0, 2$ кососимметричны относительно этого внутреннего произведения. Однако, поскольку вычеты определяют неприводимое представление группы $SU(2)$, существует единственное с точностью до скаляра нетривиальное эрмитово внутреннее произведение, относительно которого они кососимметричны. В частности, оно положительно определено. Тем самым произведение $\langle s, t \rangle$ либо положительно определено, либо равно нулю.

Пусть теперь $s \in H^0(S, L^{\otimes(k-1)})$ — сечение, имеющее нули только в $k-1$ точках слоя $\pi^{-1}(\zeta_0)$, как при доказательстве предложения 4.16. Предположим, что $\langle s, s \rangle = 0$; тогда $ss^* = c_1 \eta^{k-2} + \dots + c_{k-1}$ и при $\zeta_i = \zeta_0$ это выражение обращается в нуль для $k-1$ значений η . Отсюда следует, что $c_1(\zeta_0) = c_2(\zeta_0) = \dots = c_{k-1}(\zeta_0) = 0$, и потому ss^* равно нулю во всех k точках слоя. Но тогда сечение s равно нулю на всем слое, что невозможно. Таким образом, доказано, что внутреннее произведение отлично от нуля и, значит, положительно определено.

Тем самым матрицы $T_i(x)$ удовлетворяют условию C1.

Условие вещественности C2 включает в себя тривиальность расслоения L^2 . Пусть $\alpha \in H^0(S, L^2)$ — некоторая тривиализация.

Рассмотрим вещественную постоянную функцию $c = \alpha\beta(\alpha)$ и антилинейное отображение

$$\sigma': H^0(S, L^*(k-1)) \rightarrow H^0(S, L^{2-k}(k-1)),$$

определяемое условием $\sigma' = \alpha\beta$. Тогда $\sigma'^2(z) = \alpha\beta(\alpha)z = cz$. После нормировки посредством $|c|$ отображение σ' определяет вещественную структуру, если $c > 0$, и кватернионную структуру, если $c < 0$ на расслоении V . Однако по предположению отображение $\sigma': H^0(S, L(k-1)) \rightarrow H^0(S, L(k-1))$ вещественно, поэтому V обладает вещественной структурой. Легко видеть, что она совместима со связностью; поэтому если мы тривиализуем V с помощью ковариантно постоянных сечений, которые одновременно вещественны и унитарны, то условие C2 будет выполнено автоматически.

Следовательно, решение уравнений Нама, определяемое кривой S , удовлетворяет всем необходимым условиям конструкции Нама.

7. Спектральная кривая в конструкции Нама

Итак, мы показали, что решение уравнений Нама определяет монополь, что монополь порождает алгебраическую кривую и что алгебраическая кривая снова определяет решение уравнений Нама. Чтобы замкнуть круг, осталось показать, что если мы решим уравнения Нама методом § 4, т.е. исходя из алгебраической кривой S , а затем построим монополь способом, изложенным в § 2, то его спектральной кривой снова будет S .

Напомним, как в § 4 кривая S определялась по матрицам T_i . Кривая S является дивизором сечения $\psi \in H^0(P_1, O(2k))$, где

$$\psi = \det(\eta + (T_1 + iT_2)z + 2iT_3\zeta + (T_1 - iT_2)\zeta^2).$$

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что точка $(\eta, \zeta) = (0, 0)$ принадлежит S ; тогда

$$\det(T_1 + iT_2) = 0 \text{ для всех } z \in (0, 2). \quad (7.1)$$

Ориентируемая прямая в $\mathbb{R}^3$, соответствующая $(\eta, \zeta) = (0, 0)$,

есть

$$\underline{x}(t) = (0, 0, t). \quad (7.2)$$

Мы должны показать, что точка $(0, 0)$ лежит на спектральной кривой, т.е. что существует решение $\mathcal{Z}$ уравнения $(\nabla_3 + i\Phi)\mathcal{Z} = 0$ вдоль этой прямой, которое стремится к нулю на обоих концах прямой. Используемый нами для этого способ был предложен Намом.

Отметим, во-первых, что из уравнений Нама, в частности, следует, что

$$\left[\frac{d}{dz} - iT_3, T_1 + iT_2 \right] = 0. \quad (7.3)$$

Поэтому оператор $T_1 + iT_2$ действует на всем k -мерном пространстве решений $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{C}^k$ уравнения

$df/dz = iT_3 f$ без граничных условий. Так как это дифференциальное уравнение первого порядка, значения образующих базис решений $f_\alpha(z)$ в каждой точке $z \in (0, 2)$ линейно независимы. Но $\det(T_1 + iT_2) = 0$ при всех $z \in (0, 2)$, поэтому существует решение f_+ , для которого

$$(T_1 + iT_2)f_+ = 0 \quad \forall z \in (0, 2). \quad (7.4)$$

Аналогичным образом, из соотношения $(T_1 + iT_2)^* = -T_1 + iT_2$ следует, что существует решение f_- уравнения $df/dz = -iT_3 f$, такое, что

$$(T_1 - iT_2)f_- = 0. \quad (7.5)$$

Возьмем теперь оператор Нама (2.2): $\Delta^* = \bar{\partial} + id/dz - i \sum T_j e_j$. На рассматриваемой прямой имеем $\Delta^* = -te_3 + id/dz - i \sum T_j e_j$. Если мы разложим пространство $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^2$ в прямую сумму собственных подпространств оператора Δ^* e_3 , то ядро оператора Δ^* будет описываться уравнениями (48)

$$\left(it + i \frac{d}{dz} - T_3\right) f_1 = i(T_1 + iT_2) f_2, \quad (7.6)$$

$$\left(-it + i \frac{d}{dz} + T_3\right) f_2 = i(-T_1 + iT_2) f_1.$$

Поэтому пары функций

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= (e^{-tz} f_-, 0), \\ (f_1, f_2) &= (0, e^{tz} f_+) \end{aligned} \quad (7.7)$$

задают два линейно независимых решения уравнения $\Delta^* f = 0$. Они являются также решениями из $\mathcal{L}^2$, как мы покажем ниже.

Так как $T_3(z) = \alpha_3/z + S(z)$, где матрица S регулярна в окрестности точки $z = 0$, то

$$\frac{df_+}{dz} = \frac{i\alpha_3}{z} f_+ + iS(z) f_+. \quad (7.8)$$

Вычет в нуле, равный $i\alpha_3$, порождает вместе с вычетами матриц T_1, T_2 неприводимое представление группы $SU(2)$, а потому матрица $i\alpha_3$ приводится к диагональному виду с различными собственными значениями (которые являются по сути весами⁽³²⁾ представления $\lambda_1, \dots, \lambda_k$). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что существует базис $\{f_\alpha\}$ решений уравнения (7.8), такой, что $z^{-\lambda_\alpha} f_\alpha \rightarrow e_\alpha$ при $z \rightarrow 0$, где e_α — нормированный собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_α .

В представлении S^{k-1} матрица $\alpha_1 + i\alpha_2$ преобразует собственные векторы матрицы $i\alpha_3$ по формуле

$$(\alpha_1 + i\alpha_2) e_\alpha = n_\alpha e_{\alpha+1}, \quad (7.9)$$

где n_α отлично от нуля при $\alpha \neq k$, а собственные значения λ_i упорядочены по возрастанию: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$. Далее,

$$T_1 + iT_2 = (\alpha_1 + i\alpha_2)/z + U(z),$$

где матрица $U(z)$ регулярна в окрестности точки $z = 0$. Отсюда, используя уравнение (7.4), получим, что $(\alpha_1 + i\alpha_2)f_+ = -zU(z)f_+$. Разлагая $f_+ = \sum_{\alpha=1}^k c_{\alpha} f_{\alpha}$ в базисе $\{f_{\alpha}\}$, получим

$$\sum c_{\alpha}(\alpha_1 + i\alpha_2)f_{\alpha} = -zU(z)\sum c_{\alpha}f_{\alpha}. \quad (7.10)$$

Умножим это соотношение на $z^{-\lambda_1}$ и устремим z к нулю; мы видим, что $z^{-\lambda_2}c_1n_1e_2 = 0$, откуда $c_1 = 0$. Умножая далее (7.10) на $z^{-\lambda_2}$ и повторяя процедуру, мы найдем, что $c_{\alpha} = 0$ при $1 \leq \alpha < k$. Поэтому $z^{-\lambda_k}f_+ \rightarrow se_k$, откуда следует, в силу положительности λ_k , что f_+ заведомо принадлежит $\mathcal{L}^2$ в окрестности $z = 0$.

Такой же анализ вблизи точки $z = 2$ показывает, что f_+ (и соответственно f_-) квадратично интегрируемы.

Тем самым функции (7.7) в намовском варианте АНМ-конструкции задают базис слоя E_x векторного расслоения, ассоциированного с решением уравнений Богомольного.

Рассмотрим теперь произвольное сечение z расслоения E вдоль прямой $x(t) = (0, 0, t)$. Предыдущее обсуждение показывает, что такое сечение представимо в виде

$$z = (\alpha_1(t)e^{-tz}f_-(z), \alpha_2(t)e^{tz}f_+(z)).$$

Связность на E задается ортогональной проекцией оператора дифференцирования, а поле Хиттса — проекцией оператора умножения на $i(1-z)$ (см. § 2). Тем самым

$$(\nabla_3 - i\Phi)z = P\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1-z)\right)z\right). \quad (7.11)$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial t} + (1-z)z = ((\alpha'_1 + (1-2z)\alpha_1)e^{-tz}f_-, (\alpha'_2 + \alpha_2)e^{tz}f_+).$$

Поэтому, полагая $\alpha_2(t) = 0$, получим, что выражение (7.11) равно нулю, если выполнено соотношение

$$(\alpha'_1 + \alpha_1) \int_0^2 e^{-2tz} \|f_-(z)\|^2 dz = 2\alpha_1 \int_0^2 ze^{-2tz} \|f_-(z)\|^2 dz. \quad (7.12)$$

Мы можем переписать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_1 \int_0^2 e^{-2tz} \|f_-\|^2 dz \right) + \alpha_1 \int_0^2 e^{-2tz} \|f_-\|^2 dz = 0,$$

откуда

$$\alpha_1 = c e^{-t} / \int_0^2 e^{-2tz} \|f_-\|^2 dz.$$

Таким образом, сечение

$$z = \left(e^{-t(1+z)} f_- / \int_0^2 e^{-2tz} \|f_-\|^2 dz, 0 \right)$$

является решением уравнения $(\nabla_3 - i\Phi)z = 0$. Более того,

$$\|z\|^2 = e^{-2t} / \int_0^2 e^{-2tz} \|f_-\|^2 dz = \left(\int_0^2 e^{2t(1-z)} \|f_-\|^2 dz \right)^{-1},$$

и это выражение (см. (2.12)) стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, рассматриваемая нами прямая действительно принадлежит спектральной кривой.

Итак, кривая S содержится в спектральной кривой, а так как обе кривые имеют одинаковую степень, а спектральная кривая не имеет кратных компонент, то S совпадает со спектральной кривой.

В результате мы доказали, что любой монополю может быть получен методом Нама с использованием спектральной кривой для построения решений уравнений Нама.

8. Замечания

1. Автору неоднократно указывали на то, что уравнения Нама (2.4) являются по сути уравнениями Эйлера для вращающегося волчка⁽⁴⁹⁾ в случае $k = 2$. Уравнения этого типа интенсивно изучались в последнее время. В частности, идея линеаризации потока на якобиане кривой, описанная в § 4, содержится в теореме 1 работы Адлера и ван Мёрбеке [17]. Автор выражает признательность Ф. Гриффитсу за это замечание⁽⁵⁰⁾. Интересно

отметить, между прочим, что линейзация из § 4 возникает в монадной конструкции⁽²⁴⁾ векторных расслоений на $\mathbb{P}_3$, которая является алгебро-геометрической основой АДНМ-конструкции.

В этой работе нами рассматривалась структура модуля

$$M = \bigoplus_{m=k-1}^{\infty} H^0(S, L^{\otimes k}(m))$$

над кольцом

$$R = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(S, \mathcal{O}(2m)).$$

Однако у нас в распоряжении имеются кограничное отображение

$$\delta: H^0(S, L^{\otimes k}(m)) \rightarrow H^1(T\mathbb{P}_1, L^{\otimes k}(m-2k)),$$

отображение включения

$$i: H^1(T\mathbb{P}_1, L^{\otimes k}(m-2k)) \rightarrow H^1(T\mathbb{P}_1, L^{\otimes k-1}\tilde{E}(m-k))$$

и отображение обратного образа

$$p^*: H^1(T\mathbb{P}_1, L^{\otimes k-1}\tilde{E}(m-k)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_3 \setminus \mathbb{P}_1, p^*\tilde{E}(m-k))$$

(напомним, что расслоение $L^{\otimes k}$ тривиально на $\mathbb{P}_3 \setminus \mathbb{P}_1$). Рассматривая композицию этих отображений, мы убедимся, что M — подпространство пространства

$$\bigoplus_{\ell=-1}^{\infty} H^1(\mathbb{P}_3 \setminus \mathbb{P}_1, p^*\tilde{E}(\ell)),$$

а R — подкольцо кольца

$$\bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(\mathbb{P}_3 \setminus \mathbb{P}_1, \mathcal{O}(m)),$$

инвариантного относительно действия группы $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{P}_3 \setminus \mathbb{P}_1$. Факторпространством которого является пространство $T\mathbb{P}_1^1$. Вся эта конструкция совпадает по сути со стандартным монадным методом Хоррокса и Барта [2], примененным к пространству $\mathbb{P}_3 \setminus \mathbb{P}_1$.

2. Существует целая иерархия уравнений, подобных уравнению Нама, соответствующая линейным потокам в других направлениях на якобиане (этот вопрос также рассмотрен в [1]). С нашей точки зрения, каждому направлению на якобиане отвечает элемент группы $H^1(S, O)$, имеющий, согласно предложению 3.1, вид

$$c = \sum_{i=1}^{k-1} \eta^i \pi^* c_i,$$

где $c_i \in H^1(P_1, O(-2i))$.

Пользуясь стандартным открытым покрытием пространства P_1 , зададим c_i коциклами $c_i = [p_i(\zeta)/\zeta^i]$, где $p_i(\zeta)$ — полиномы степени $(2i-2)$.

Следуя процедуре из § 4, положим $A(\zeta) = A_0 + \zeta A_1 + \zeta^2 A_2$ и

$$B(\zeta) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i(\zeta) (-A(\zeta)/\zeta)^i,$$

а затем представим $B(\zeta)$ в виде $B(\zeta) = A_+(\zeta) + A_-(\zeta^{-1})$, где $A_+(\zeta)$ — полиномиальная часть матричной функции $B(\zeta)$. Из рассуждений § 4 непосредственно следует, что линейный поток на якобиане в направлении c (при этом надо заменить расслоение L^z на плоское линейное расслоение с функцией перехода $\exp(z \sum_{i=1}^{k-1} p_i(\zeta)/(\eta/\zeta)^i)$) порождает матричное уравнение

$$dA/dz + [A_+, A] = 0. \quad (8.1)$$

Сравнивая коэффициенты при степенях ζ , мы получим систему уравнений более высокого порядка для матриц T_i .

Важно отметить, что такие потоки в пространстве матриц

$$(T_1, T_2, T_3) \in \mathbb{R}^3 \otimes su(n),$$

определяемые уравнением (8.1), не обязательно коммутируют, хотя линейные потоки на якобиане коммутируют всегда. Это происходит из-за того, что матричные функции A_+ и A_- определяют, как в формуле (4.15), связность на векторном расслоении V (над дополнением к тета-дивизору на якобиане), порождаемом плоским линейным расслоением L по формуле $V_L = H^0(S, L(k-1))$.

Матричные потоки (8.1) получаются в результате горизонталь-

ного относительно данной связности поднятия линейных потоков на якобиане $Jac(S)$. Однако легко видеть, что эта связность обладает кривизной, которая является препятствием к коммутативности горизонтальных векторных полей. Впрочем, указанная связность зависит от выбора покрытия пространства P_1 , поэтому вполне возможно, что существует более разумный выбор покрытия, приводящий к более инвариантным уравнениям для потоков высших порядков.

3. С. Катц отметил, что уравнения Нама тесно связаны с уравнениями, которые изучал В. Шмид в связи с вариациями структуры Ходжа на вырождающемся семействе алгебраических многообразий [13]. Единственная разница заключается в вещественной структуре — уравнения Шмида отвечают кривой S в TP_1 , которая вещественна относительно вещественной структуры $(\eta, \zeta) \rightarrow (\bar{\eta}, \bar{\zeta})$. Впрочем, линейаризация уравнений Шмида в указанном контексте, по-видимому, не исследовалась.

4. Вероятно, наиболее полезным результатом из представленного здесь круга утверждений является условие на спектральную кривую, гарантирующее регулярность монополя, а именно условие B4: $H^0(S, L^z(k-2)) = 0$ для $z \in (0, 2)$. Это условие может все еще оказаться трудным для проверки, ибо оно связано с геометрией тета-дивизора. Однако в качестве иллюстрации возможностей такого метода мы докажем с его помощью, что осесимметричные решения Прасада и Росси [11] несингулярны.

Т е о р е м а 8.2. Пусть S — кривая в TP_1 , задаваемая условием $\psi(\eta, \zeta) = 0$, где

$$\psi = \eta \prod_{\ell=1}^n (\eta^2 + \ell^2 \pi^2 \zeta^2) \quad \text{при } k = 2n+1$$

или

$$\psi = \prod_{\ell=0}^n \left(\eta^2 + \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \zeta^2 \right) \quad \text{при } k = 2n+2.$$

Тогда S является спектральной кривой для несингулярного решения уравнений Богомольного.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам нужно проверить, что S удовлетворяет условиям B1 — B4. Первые два очевидно выполнены, и мы должны доказать только B3 и B4.

Кривая S в нашем случае приводима и имеет особенности при $(\eta, \zeta) = (0, 0)$ и $(0, \infty)$, поэтому для построения голоморфных сечений линейных расслоений на S мы должны сначала выяснить, что понимать под голоморфной функцией в окрестности особенностей S . Это есть локальное сечение пучка $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ на $\mathbb{P}^1$, где $\mathcal{I}$ — идеал, порожденный ψ , т.е. идеал вида

$$\mathcal{I} = [(\eta - \alpha_1 \zeta)(\eta - \alpha_2 \zeta) \dots (\eta - \alpha_k \zeta)].$$

Локальное сечение пучка $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ вблизи точки $(0, 0)$ в таком случае может быть единственным образом представлено функцией

$$f = g_1(\zeta) + \eta g_2(\zeta) + \dots + \eta^{k-1} g_k(\zeta), \quad (8.3)$$

так что на каждой компоненте $\eta = \alpha_i \zeta$ мы получаем функцию

$$f_i = g_1(\zeta) + \alpha_i \zeta g_2(\zeta) + \dots + (\alpha_i \zeta)^{k-1} g_k(\zeta).$$

Теперь, имея k голоморфных функций $f_i(\zeta)$, мы хотим выяснить, при каком условии они определяют локальное сечение пучка $\mathcal{O}/\mathcal{I}$. Из формулы (8.3) очевидно следует, что

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \zeta & \dots & \alpha_1^{k-1} \zeta^{k-1} \\ 1 & \alpha_2 \zeta & \dots & \alpha_2^{k-1} \zeta^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_k \zeta & \dots & \alpha_k^{k-1} \zeta^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Если теперь все α_i различны, то матрица

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{k-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_k & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

определителя Вандермонда обратима. Следовательно, подставляя $g_i = \zeta^{k-i} h_i$ с подходящими голоморфными функциями h_i в уравнение (8.4), получим, что это уравнение накладывает ограничения только на $(k-2)$ -джет функции f_i . Так, если

$$f_i(\zeta) = f_{i1} + f_{i2}\zeta + \dots + f_{i, k-2}\zeta^{k-2} \mod \zeta^{k-1},$$

то условие (8.4) дает нам соотношения

$$f_{i1} = g_{i1}, \quad f_{i2} = g_{i2} + \alpha_i g_{21}, \quad f_{i3} = g_{i3} + \alpha_i g_{22} + \alpha_i^2 g_{31} \text{ и т.д.},$$

т.е.

$$f_{ij} = \sum_l V_{il} G_{lj}, \quad (8.5)$$

где G_{ij} есть матрица размера $k \times (k-1)$, такая, что $G_{ij} = 0$ при $i > j$.

Рассмотрим теперь условие тривиальности расслоения L^2 на S . Сечение расслоения L^2 задается голоморфными функциями f на U и f' на U' , такими, что (см. доказательство предложения 5.1) $f = e^{2\eta/\zeta} f'$ на $U \cap U'$. На каждой компоненте $\eta = \alpha_i \zeta$, мы требуем, чтобы (постоянные) функции f_i, f'_i удовлетворяли соотношениям

$$f_i = e^{2\alpha_i} f'_i. \quad (8.6)$$

и условию совместности (8.5), а также аналогичному условию в точке $(\eta, \zeta) = (0, \infty)$. Отсюда следует, что

$$f_1 = f_2 = \dots = f_k, \quad f'_1 = f'_2 = \dots = f'_k,$$

поэтому расслоение L^2 обладает сечением на S тогда и только тогда, когда $e^{2\alpha_i} = e^{2\alpha_j}$, $1 \leq i, j \leq k$, т.е. $\alpha_i - \alpha_j = i\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Эти условия очевидно выполняются для рассматриваемой кривой S , поэтому расслоение L^2 тривиализуется сечением α .

Мы накладываем также условие вещественности на расслоение $L(k-1)$. Если k нечетно, это условие эквивалентно требованию вещественности L , а при четном k расслоение L должно быть кватернионным, что в свою очередь (см. § 6) определяется знаком $c = \alpha\bar{\alpha}$. Если мы зададим сечение α с

помощью функций $(f_i = e^{2\alpha_i}, f'_i = 1)$ на компоненте $\eta - \alpha_i \zeta = 0$, то (учитывая, что вещественная структура меняет местами U и U') будем иметь

$$\sigma(\alpha) = (f_i = 1, f'_i = e^{2\bar{\alpha}_i})$$

на компоненте $\eta - \alpha_i \zeta = 0$. Тем самым

$$\alpha \sigma(\alpha) = e^{2\alpha_i} = \begin{cases} e^{2li\pi} = 1, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ e^{2(l+1/2)i\pi} = -1, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Значит, условие вещественности выполнено и проверка В3 закончена.

Для проверки условия несингулярности В4 рассмотрим сечение расслоения $L^{-2}(k-2)$ на S . На компонентах кривой S это сечение определяет полиномы f_i степени $k-2$, так что выполняется соотношение (8.4), а функции

$$f'_i = e^{x\eta/\zeta} \zeta^{-(k-2)} f_i = e^{x\alpha_i} \zeta^{-(k-2)} f_i$$

являются полиномами по ζ^{-1} , удовлетворяющими условию, аналогичному (8.4), а именно

$$\begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \zeta^{-1} & \dots & \alpha_1^{k-1} \zeta^{-(k-1)} \\ 1 & \alpha_2 \zeta^{-1} & \dots & \alpha_2^{k-1} \zeta^{-(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_k \zeta^{-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \zeta^{-(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \vdots \\ g'_k \end{pmatrix}$$

для голоморфных функций g'_i переменного ζ^{-1} .

Тем самым мы получаем матричное уравнение

$$\sum_l D_{il} f_{lj} = \sum_l V_{il} G'_{lj}, \quad (8.7)$$

где $D_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $D_{ii} = e^{x\alpha_i}$, а G'_{ij} — матрицы размера $k \times (k-1)$ с $G'_{ij} = 0$ при $k-j < i$.

Таким образом, из уравнений (8.5) и (8.7) следует, что расслоение $L^{-z}(k-2)$ имеет ненулевое сечение тогда и только тогда, когда существуют ненулевые матрицы G и G' указанного выше вида, для которых

$$DVG = VG', \text{ т.е. } V^{-1}DVG = G'. \quad (8.8)$$

Так как матрица G (а, следовательно, и G') не равна тождественно нулю, то некоторый ее столбец, скажем с номером j , отличен от нуля. Но $G_{ij} = 0$ при $i > j$, поэтому только первые j компонент этого столбца ненулевые. С другой стороны, $G_{ij} = 0$ при $k-j < i \leq k$, поэтому из (8.8) сразу следует, что левый нижний $j \times j$ -минор матрицы $V^{-1}DV$ обязан обращаться в нуль.

Следовательно, условием отсутствия сечений расслоения $L^{-z}(k-2)$ на кривой S является условие необращения в нуль всех таких $j \times j$ -миноров матрицы $V^{-1}DV$.

Столбцы матрицы V^{-1} суть коэффициенты полиномов $p_1, \dots, p_k$ степени $k-1$, удовлетворяющих условиям $p_i(\alpha_j) = 0$ при $i \neq j$, $p_i(\alpha_i) = 1$. Следовательно, столбцы матрицы $V^{-1}DV$ являются коэффициентами полиномов $q_i(\zeta)$ степени $k-1$ вида

$$q_i(\zeta) = \sum_{l=1}^k p_l(\zeta) \alpha_l^i e^{z\alpha_l}.$$

Таким образом, $q_0(\zeta)$ есть интерполяционный полином Лагранжа, удовлетворяющий условию $q_0(\zeta) = e^{z\zeta}$ при $\zeta = \alpha_i$, а остальные полиномы q_i являются его производными, $q_i(\zeta) = \partial^i q_0 / \partial z^i$. Положим

$$q_0(\zeta) = c_0 \zeta^{k-1} + c_1 \zeta^{k-2} + \dots + c_{k-1};$$

тогда $V^{-1}DV$ есть матрица вида

$$\begin{pmatrix} c_{k-1} & c'_{k-1} & \dots & c_{k-1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c'_1 & \dots & c_1^{(k-1)} \\ c_0 & c'_0 & \dots & c_0^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

где $c' = \partial c / \partial x$.

Далее, $\partial q_0 / \partial x = \alpha_i e^{x\alpha_i} = \zeta_i q_0$ при $\zeta_i = \alpha_i$, следовательно,

$$\frac{\partial q_0}{\partial x} - \zeta q_0 = -c_0 \prod_{i=1}^k (\zeta - \alpha_i). \quad (8.10)$$

Таким образом, $\partial c_i / \partial x - c_{i+1} = (-1)^i c_0 \sigma_{i+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, поэтому каждая функция c_i является линейной комбинацией

$$c_i = \sum_{l=0}^i \lambda_l \frac{\partial^l c_0}{\partial x^l} \quad (8.11)$$

с постоянными коэффициентами. Тем самым определитель $j \times j$ -минора, который мы ищем, имеет, согласно формулам (8.9) и (8.11), вид

$$\begin{vmatrix} c_0^{(j-1)} & & \dots & c_0^{(2j-2)} \\ \vdots & & & \vdots \\ c'_0 & c''_0 & & \vdots \\ c_0 & c'_0 & \dots & c_0^{(j-1)} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, он обращается в нуль в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда найдутся постоянные μ_i , такие, что функция

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{j-1} \mu_{\ell} \frac{\partial^{\ell} c_0}{\partial z^{\ell}} \quad (8.12)$$

имеет нуль порядка j при $z = z_0$.

Полином Лагранжа $q_0(\zeta)$ задается формулой

$$q_0(\zeta) = \sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i} \frac{(\zeta - \alpha_j)}{(\alpha_i - \alpha_j)} e^{z\alpha_i},$$

поэтому

$$c_0 = \sum_{i=1}^k \frac{e^{z\alpha_i}}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}. \quad (8.13)$$

При $k = 2n + 1$ эта формула дает нам

$$c_0 = \sum_{-n}^n \frac{e^{zi\pi\ell} (-1)^{\ell}}{\pi^{2n} (2n)!} \binom{2n}{\ell} = \frac{2^{2n} (-1)^n}{\pi^{2n} (2n)!} (\sin z\pi/2)^{2n}, \quad (8.14)$$

а при $k = 2n + 2$

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{-n-1}^{+n} \frac{e^{zi\pi(\ell+1/2)} (-1)^{\ell}}{(2n+1)! i\pi^{2n+1}} \binom{2n+1}{\ell} = \\ &= \frac{2^{2n+1} (-1)^n}{\pi^{2n+1} (2n+1)!} (\sin z\pi/2)^{2n+1}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Из формул (8.12), (8.14) и (8.15) имеем

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{j-1} \mu_{\ell} \frac{\partial^{\ell} c_0}{\partial z^{\ell}} = (\sin z\pi/2)^{2n-2j+2} P(\operatorname{ctg} z\pi/2),$$

где P — полином степени $j-1$. Но если $z \in (0, 2)$, то $\sin z\pi/2 \neq 0$, поэтому если функция $f(z)$ имеет нуль порядка j , то она тождественно равна нулю. В этом случае функция c_0 удовлетворяет линейному дифференциальному уравне-

нию порядка $< 2n$, что невозможно, поскольку она имеет нуль порядка точно $2n$ при $x = 0$. Таким образом, все нужные нам миноры матрицы $V^{-1}DV$ не обращаются в нуль и условие B4 выполнено.

Следовательно, кривая S определяет несингулярный монополяр посредством конструкции Нама.

Благодарности. Автор выражает признательность М.Ф. Атье, С.Катцу, В. Наму и К.Таубсу за ценные обсуждения и Институту перспективных исследований (г.Принстон) за гостеприимство в период подготовки этой статьи.

Литература

1. Adler M., van Moerbeke P. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. - Adv. Math. 38, 318-379 (1980).
2. Atiyah M.F. Geometry of Yang-Mills fields (Fermi Lectures). - Scuola Normale Superiore, Pisa (1979).
3. Atiyah M.F., Drinfeld V.G., Hitchin N.J., Manin Yu. I. Construction of instantons. - Phys.Lett. 65A, 185-187 (1978).
4. Atiyah M.F., Hitchin N.J., Singer I.M. Self-duality in four dimensional Riemannian geometry. - Proc.R.Soc. London A362, 425-461 (1978).
5. Atiyah M.F., Ward R.S. Instantons and algebraic geometry. - Commun. Math. Phys. 55, 117-124 (1977).
6. Corrigan E., Goddard P. A $4n$ -monopole solution with $4n-1$ degrees of freedom. - Commun. Math. Phys. 80, 575-587 (1981).
7. Hitchin N.J. Linear field equations on self-dual spaces. - Proc.R.Soc.London A370, 173-191 (1980).
8. Hitchin N.J. Monopoles and geodesics. - Commun. Math. Phys. 83, 579-602 (1982). [Перевод в настоящем сборнике.]
9. Jaffe A., Taubes C. Vortices and monopoles. - Boston: Birkhäuser (1980).
10. Nahm W. All self-dual multimonopoles for arbitrary gauge groups (preprint). TH.3172-CERN Geneve (1981).
11. Prasad M.K. Yang-Mills-Higgs monopole solutions of arbitrary topological charge. - Commun. Math. Phys. 80, 137-149 (1981).
12. Rawnsley J.H. On the Atiyah-Hitchin vanishing theorem for certain cohomology groups of instanton bundles. - Math. Ann.

241, 43-56 (1979).

13. Schmid W. Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping. - Invent. Math. 22, 211-319 (1973).
14. Wavrik J.J. Deforming cohomology classes. - Trans. Am. Math. Soc. 181, 341-350 (1973).

УРАВНЕНИЯ НАМА И КЛАССИФИКАЦИЯ МОНОПОЛЕЙ¹⁾

С.К. Дональдсон

All Souls College, Oxford, United Kingdom, and The Institute
for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

Резюме. С помощью вариационных методов строятся решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений Нама. Это дает явную параметризацию решений уравнений Богомольного в $\mathbb{R}^3$.

Введение

Уравнения Богомольного являются нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных для связности и поля Хиггса, заданных на расслоении над пространством $\mathbb{R}^3$. При наличии подходящих граничных условий в бесконечности пространство решений, называемых математическими монополями, распадается в объединение счетного числа классов, параметризуемых "топологическим зарядом". Если структурной группой расслоения является $SU(2)$, что предполагается всюду в этой работе, то указанный заряд есть целое число $k \geq 0$. Внутри каждого топологического класса решения параметризуются непрерывными переменными или пространствами модулей M_k .

Монополи изучались с различных точек зрения. В простейшем случае, при $k = 1$, известно явное "фундаментальное решение", построенное Прасадом и Зоммерфельдом⁽⁵¹⁾, которое имеет солитоноподобную или частицеобразную структуру. Более общим образом, Та-

¹⁾ Donaldson S.K. Nahm's equations and the classification of monopoles. - Communications in Mathematical Physics, 96 (1984), 387-407.

убс показал [8, гл. 4], что при любом значении заряда k существуют решения уравнений, которые приближенно являются суперпозициями k экземпляров монополя Прасада — Зоммерфельда с центрами в далеко разнесенных точках пространства $\mathbb{R}^3$.

С другой стороны, Нам и Хитчин разработали независимые, но тесно связанные друг с другом методы построения монополей на основе твисторной геометрии [5]. В окончательной формулировке, принадлежащей Хитчину, построение монополя эквивалентно отысканию алгебраической кривой со специальными свойствами. Пользуясь этим методом, Уртьюбиз [7] описал все монополи заряда 2.

Тем не менее оставалось непонятным, как с аналитической, так и с геометрической точек зрения, что собой представляет полное пространство модулей M_k при больших значениях k . Этому вопросу и посвящена данная работа. Мы доказываем гипотезу Атьи и Мюррея [11], связывающую указанные пространства модулей с пространствами рациональных функций на римановой сфере $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Многообразия M_k при $k \geq 1$ имеют размерность $4k - 1$. Удобнее, однако, рассматривать более широкое пространство $\tilde{M}_k$ размерности $4k$, которое является расслоением над M_k со слоем "окружность". Его описание в терминах рациональных функций дается следующей теоремой.

Т е о р е м а . Для заданного (фиксированного) изоморфизма $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, совместимого с обычными метриками на указанных пространствах, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между расширенным пространством модулей $\tilde{M}_k$ и комплексным многообразием R_k , состоящим из рациональных функций $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ степени k , удовлетворяющих нормировке $f(\infty) = 0$.

Конечно, любая такая функция f представляется единственным образом в виде $f(z) = p(z)/q(z)$, где p и q — взаимно простые многочлены, q имеет степень k и коэффициент 1 при старшей степени, а степень p не превосходит $k - 1$.

Точное определение расслоения $\tilde{M}_k$ над пространством модулей приводится в конце § 1. Из этого определения и результатов § 3 следует, что само пространство модулей M_k соответствует факторпространству $R_k/\sim$ по отношению эквивалентности $f \sim e^{i\theta} f$ для любого $\theta \in \mathbb{R}$.

Нетрудно дать интуитивную интерпретацию приведенной параметризации решений уравнений Богомольного. Общая функция f из R_k

может быть представлена в виде

$$f(z) = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{z - z_i}.$$

Если точки z_i на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ разнесены далеко друг от друга, то указанная функция f отвечает, по-видимому, решению типа Таубса, отнесенному к k точкам $(z_i, \log |\alpha_i|) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Дополнительные параметры $\arg \alpha_i \in S^1$ можно интерпретировать как некие "групповые ориентации" относительно фиксированной тривиализации в бесконечности. Другой крайний случай отвечает $f(z) = 1/z^k$; при этом мы получаем, по существу, единственное осесимметричное решение Прасада и Россси (52).

Используемый нами метод оформился в двух наших предыдущих работах по (анти)автодуальным уравнениям Янга – Миллса, частным случаям которых являются уравнения Богомольного. С одной стороны, модули решений таких уравнений на компактных комплексных поверхностях (т.е. в вещественной размерности 4) связаны в некоторых случаях с модулями голоморфных расслоений – вполне комплексно аналитическими объектами. Эта связь устанавливается исходя из дифференциального уравнения с частными производными второго порядка для метрики на голоморфном расслоении. Однако, как указано в работе [3], ее можно рассматривать, следуя идеям Атьи и Ботта [2], как бесконечномерный пример общего принципа, позволяющего выбирать отмеченные точки на орбитах комплексных групп Ли.

С другой стороны, продолжая то же направление исследований, Дональдсон [4] установил, что если зафиксировать комплексную структуру на пространстве $\mathbb{R}^4$, то инстантоны Янга – Миллса можно аналогичным образом связать с голоморфными расслоениями на (проективной) плоскости. Эта связь была установлена, исходя из ADHM-конструкции инстантонов, но она есть проявление того же общего принципа. В случае инстантонов также оказалось легче описать расширенное пространство модулей, отвечающее тривиализации на бесконечности.

В этой статье мы начинаем применять указанные методы к монополям в полной аналогии с инстантонами, пользуясь вариантом ADHM-конструкции, предложенным Намом. Конечно, это означает, что мы существенно опираемся на результаты Хитчина и Нама, устанавливающие соответствие между уравнениями Богомольного и нели-

нейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений - уравнениями Нама.

План нашего доказательства следующий.

(i) Нарушим естественную симметрию задачи, выделив из уравнений Нама одно "комплексное" уравнение и одно "вещественное" уравнение так, чтобы комплексное уравнение было инвариантно относительно комплексной группы преобразований.

(ii) Покажем с помощью вариационных методов, что в каждой орбите комплексной группы имеется единственное в существенном решение вещественного уравнения.

(iii) Опишем классы эквивалентности решений комплексного уравнения, пользуясь комплексными алгебраическими методами.

Следуя этой программе, мы обнаружили, что аналогия с монадами (см. [4]) приводит к простой классификации. Любопытно, что таким путем мы приходим снова к некоторому дифференциальному уравнению второго порядка для метрики на голоморфном расслоении, что позволяет частично заимствовать нужную нам технику из теории таких уравнений. Это безусловно связано с замечательным фактом, на который указывал Нам [13], рассматривавший свой метод как преобразование от одного уравнения дуальности к другому.

Не стоит скрывать, что эта работа является во многих отношениях только первым шагом на пути к полному пониманию природы пространств модулей монополей. Имеется много интересных вопросов, заслуживающих дальнейшего изучения. Например, можно попытаться описать рациональное отображение f непосредственно в терминах монополя или попробовать распространить приведенные результаты на другие калибровочные группы (ср. с [10]) и объединить их с близким по духу описанием монополей на гиперболическом пространстве, полученным Атьей [1]. Наконец, интересно было бы найти правильное объяснение природы дуальности в конструкции Нама и связи "комплексов Нама", которые мы определяем ниже, с монадной конструкцией для расслоений.

В этой работе, за исключением одного технического результата, мы сосредоточиваем внимание на уравнениях Нама (имеющих и самостоятельный интерес), которые можно считать описанием монополя в "импульсном представлении".

§ 1. Преобразование уравнений Нама

В этом параграфе мы преобразуем уравнения Нама к нужному нам виду, исходя из теоремы Хитчина [6] (мы слегка изменили обозначения).

Предложение 1.1 [6]. Имеется естественная эквивалентность между:

(а) монополями с группой $SU(2)$ заряда k , определенными с точностью до калибровочного преобразования;

(б) классами эквивалентности относительно действия группы $O(k, \mathbb{R})$ матричнозначных функций $T_1(z), T_2(z), T_3(z)$ одного вещественного переменного $z \in (0, 2)$, удовлетворяющих условиям

$$(i) \quad \frac{dT_i}{dz} + \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k] = 0,$$

$$(ii) \quad T_i^*(z) = -T_i(z),$$

$$(iii) \quad T_i(2-z) = T_i(z)^T,$$

(iv) $T_i(z)$ продолжаются до мероморфных матричных функций в комплексной окрестности отрезка $[0, 2]$, аналитических всюду, кроме точек $z = 0, 2$, в которых они имеют простые полюсы,

(v) вычеты матричных функций $T_i(z)$ в полюсе $z = 0$ задают неприводимое представление группы $SU(2)$.

Мотивировкой нашего исследования уравнений Нама послужило прежде всего следующее

Предложение 1.2 (см. [13]). Система дифференциальных уравнений $\frac{dT_i}{dz} + \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k] = 0$ эквивалентна условию антиавтодуальности 1-формы связности вида

$$A = \sum_{i=1}^3 T_i dp_i$$

на "импульсном" пространстве $\mathbb{R}^4 = \{(z, p_1, p_2, p_3)\}$, т.е., другими словами, условию антиавтодуальности формы $dA + A \wedge A$ (26).

(Это утверждение, а также другие простые вычисления этого параграфа предлагается проверить читателю. Заметим, что простран-

ство с координатами p_i является двойственным к исходному пространству $\mathbb{R}^3$, так как точка "физического" пространства (x_1, x_2, x_3) переходит по схеме Нама в 1-форму $\sum x_i dp_i$.

Принимая во внимание сформулированное предложение, более естественно ввести в рассмотрение четвертую матрицу $T_0(z)$, удовлетворяющую тем же условиям (ii), (iii) предложения 1.1 (b), и заменить уравнения Нама на уравнения

$$\frac{dT_i}{dz} + [T_0, T_i] + \frac{1}{2} \sum \epsilon_{ijk} [T_j, T_k] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

которые являются условием антиавтодуальности формы $T_0 dz + \sum T_i dp_i$.

Конечно, последние уравнения учитывают, как обычно, производ, связанный с действием калибровочной группы. Если матричная функция

$$u: (0, 2) \rightarrow U(k) \quad (1.4)$$

удовлетворяет условию

$$u(2-z) = u^T(z)^{-1}, \quad (1.5)$$

то действие

$$\begin{cases} u(T_i) = u T_i u^{-1}, \\ u(T_0) = u T_0 u^{-1} - \left(\frac{du}{dz} \right) u^{-1} \end{cases} \quad (1.6)$$

переводит решения уравнения (1.3) в решения того же уравнения и сохраняет условия (ii), (iii) предложения 1.1 (b). В частности, с помощью этого действия всегда можно выбрать калибровку, в которой $T_0 = 0$. (Мы откладываем на время обсуждение полюсов.)

Выбор изоморфизма $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ в условии теоремы позволяет нам ввести естественным образом комплексные координаты

$$z = z + ip_1, \quad w = p_2 + ip_3.$$

Проводя вычисления в комплексных координатах, принято расщеплять

связность на $(1, 0)$ - и $(0, 1)$ -составляющие; аналогично и кривизна расщепляется на составляющие по бистепени. Хорошо известно, далее, что $(0, 2)$ -формы автодуальны, поэтому унитарная антиавтодуальная связность имеет кривизну типа $(1, 1)$ и задает тем самым интегрируемую голоморфную структуру (т.е. $\bar{\partial}$ -оператор)⁽⁴⁾. Более того, голоморфная структура преобразуется естественным образом под действием группы комплексных автоморфизмов расслоения. Исходя из этого, перепишем теперь уравнения Нама применительно к нашему случаю, когда в уравнения эффективно входит только одна из переменных.

Для косозермитовых матричных функций $T_0(z)$, $T_i(z)$ положим

$$\alpha = \frac{1}{2} (T_0 + iT_1), \quad \beta = \frac{1}{2} (T_2 + iT_3), \quad (1.7)$$

так что α и β являются комплексными $k \times k$ -матричнозначными функциями. Обратно, матричные функции T_i могут быть восстановлены по матрицам α и β . Мы будем, как правило, предполагать, что матрицы α и β удовлетворяют "условию симметрии"

$$\alpha(2-z) = \alpha^T(z), \quad \beta(2-z) = \beta^T(z), \quad (1.8)$$

отвечающему условию (iii) предложения 1.1 (b). Тогда система уравнений (1.3) эквивалентна паре уравнений

$$\frac{d\beta}{dz} + 2[\alpha, \beta] = 0 \quad (\text{"комплексное уравнение"}), \quad (1.9)$$

$$\hat{F}(\alpha, \beta) = \frac{d}{dz}(\alpha, \alpha^*) + 2([\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*]) = 0 \quad (\text{"вещественное уравнение"}), \quad (1.10)$$

причем комплексное уравнение инвариантно относительно "комплексной калибровочной группы". Иначе говоря, если матричная функция

$$g: (0, 2) \mapsto GL(k, \mathbb{C}) \quad (1.11)$$

удовлетворяет соотношению

$$g(2-z) = g^T(z)^{-1}, \quad (1.12)$$

то действие, задаваемое формулами

$$\begin{cases} \alpha' = g(\alpha) = g\alpha g^{-1} - \frac{1}{2} \frac{dg}{dz} g^{-1}, \\ \beta' = g(\beta) = g\beta g^{-1} \end{cases} \quad (1.13)$$

(мы часто записываем кратко $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$), обладает свойством

$$\frac{d\beta'}{dz} + 2[\alpha', \beta'] = g \left(\frac{d\beta}{dz} + 2[\alpha, \beta] \right) g^{-1}.$$

Это соотношение станет более прозрачным, если ввести операторы (совпадающие на самом деле с операторами $\bar{\partial}$ и ∂ , построенными по связности), действующие на $\mathbb{C}^k$ -значные функции f по формулам

$$\begin{cases} \bar{d}_\alpha f = \frac{1}{2} \frac{df}{dz} + \alpha f, & d_\alpha f = \frac{1}{2} \frac{df}{dz} - \alpha^* f, \\ \bar{d}_\beta f = \beta f, & d_\beta f = -\beta^* f, \end{cases} \quad (1.14)$$

и аналогичные операторы, обозначаемые теми же буквами, действующие на матричнозначные функции γ :

$$\bar{d}_\alpha \gamma = \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dz} + [\alpha, \gamma] \text{ и т.д.}$$

Тогда комплексное уравнение эквивалентно операторному уравнению

$$[\bar{d}_\alpha, \bar{d}_\beta] = 0, \quad (1.15)$$

которое очевидно сохраняется под действием комплексных автоморфизмов

$$\begin{cases} \bar{d}_{g(\alpha)} = g \circ \bar{d}_\alpha \circ g^{-1}, \\ \bar{d}_{g(\beta)} = g \circ \bar{d}_\beta \circ g^{-1}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Исследуем далее полюсы в точках $z = 0, 2$. Предполагая, что матричные функции α, β удовлетворяют комплексному уравнению

$$\frac{d\beta}{d\lambda} + 2[\alpha, \beta] = 0$$

и имеет при $\lambda = 0$ простые полюсы с вычетами α, β соответственно, получим, что вычеты связаны соотношением

$$\beta = 2[\alpha, \beta]. \quad (1.17)$$

Отсюда следует, что матрица β действует на собственных векторах матрицы α , переводя один собственный вектор в другой:

$$\alpha v = \lambda v \Rightarrow \alpha(\beta v) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \beta v. \quad (1.18)$$

В данном ниже формальном определении предполагается, во-первых, что $\text{Tr } \alpha = 0$, и, во-вторых, что применение матрицы β к некоторому собственному вектору v матрицы α : $\alpha v = -\frac{k-1}{4} v$ позволяет получить все пространство $\mathbb{C}^k$. Поэтому в некотором базисе матрицы α и β будут иметь вид

$$\alpha = \text{diag} \left(-\left(\frac{k-1}{4}\right), \dots, \frac{k-1}{4} \right), \quad (1.19)$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & & & & & \cdot \\ \cdot & 1 & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Главный смысл всех этих преобразований состоит в том, что решения комплексного уравнения по модулю действия комплексной калибровочной группы образуют "локально тривиальное" семейство, в том же смысле, как и в случае голоморфных расслоений. Именно, если локально разрешить относительно преобразования g уравнение

$$\alpha' = g(\alpha) = g\alpha g^{-1} - \frac{1}{2} \frac{dg}{dz} g^{-1} = 0,$$

т.е.
$$\frac{dg}{dz} = 2g\alpha,$$

то комплексное уравнение превратится в тривиальное уравнение $d\beta'/dz = 0$. Следовательно, общее локальное решение комплексного уравнения имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{2} g^{-1} \frac{dg}{dz}, \quad \beta = g^{-1} \beta' g,$$

где β' — постоянная матричная функция. Тем самым глобальная классификация, которая будет получена в § 3, сводится к изучению поведения матричных функций α, β в полюсах $z = 0, 2$.

Завершив эти предварительные пояснения, мы можем ввести основные определения.

О п р е д е л е н и е 1.21. Комплексом Нама называется пара $k \times k$ -матричнозначных функций $\alpha(z), \beta(z)$ переменного $z \in (0, 2)$ вместе с вектором $v \in \mathbb{C}^k$, которые удовлетворяют условиям

$$(i) \quad \frac{d\beta}{dz} + 2[\alpha, \beta] = 0;$$

$$(ii) \quad \alpha(2-z) = \alpha^T(z), \quad \beta(2-z) = \beta^T(z);$$

(iii) матричные функции α и β являются гладкими на интервале $(0, 2)$ и мероморфны в некоторых комплексных окрестностях точек $z = 0, 2$ с единственными простыми полюсами в этих точках; вычеты α, β при $z = 0$ обозначаются через α, β соответственно;

(iv) $\text{Tr } \alpha = 0$; вектор v является собственным для матрицы α с собственным значением $-(k-1)/4$ и векторы $\{\beta^j v\}_{j=0}^{k-1}$ порождают все пространство $\mathbb{C}^k$.

О п р е д е л е н и е 1.22. Два комплекса Нама (α, β, ν) и (α', β', ν') эквивалентны, если найдется непрерывное отображение

$$g: [0, 2] \rightarrow GL(k, \mathbb{C}),$$

гладкое внутри отрезка $[0, 2]$ и удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) $g(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ на интервале $(0, 2)$ (см. (1.13));
- (ii) $g(2-s) = g^T(s)^{-1}$;
- (iii) $g(0)\nu = \nu'$.

З а м е ч а н и я . (а) В приведенных определениях мы пожертвовали элегантностью ради упрощения дальнейших доказательств. Например, мы не определили на самом деле действие группы, а также разрешили матричным функциям α, β быть гладкими только внутри отрезка, с тем чтобы можно было использовать там функции срезки.

(б) В определении 1.22 (iii) достаточно предполагать, что $g(1) \in O(k, \mathbb{C})$.

(с) Подчеркнем, что слово "комплекс" в нашем контексте употреблено не в обычном смысле. Его использование связано, как мы видели, с вырожденными примерами $\bar{\partial}$ -операторов, которым отвечает "комплекс Дольбо"

$$V \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bar{d} \\ d_\alpha \end{pmatrix}} V \oplus V \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bar{d} \\ (-\bar{d}_\beta \quad \bar{d}_\alpha) \end{pmatrix}} V, \quad \bar{d}^2 = 0,$$

где V — пространство $\mathbb{C}^k$ -значных функций на интервале $(0, 2)$. Наша конструкция напоминает монадную конструкцию Хоррокса и Барта (упомянутую в работе [4]) в том смысле, что, например, слой расслоения в точке $0 \in \mathbb{R}^3$, на котором Нам определяет свое решение уравнений Богомольного, совпадает с $\text{Ker } \bar{d} / \text{Im } \bar{d}$ (при подходящем выборе граничных условий).

Решение $\{T_i\}$ уравнений Нама из предложения 1.1 (b) дает, согласно сказанному выше, матричнозначные функции

$$\alpha = \frac{i}{2} T_1, \quad \beta = \frac{1}{2} (T_2 + iT_3),$$

которые удовлетворяют всем условиям из определения комплексов Нама (вычеты α, β обладают нужными свойствами, исходя из стандартной теории представлений группы $(28) SU(2)$). Более того, мы можем выбрать единичный вектор v в собственном $\left(-\frac{k-1}{4}\right)$ -подпространстве матрицы α (т.е. весовой вектор относительно тора в группе $SU(2)$, определяемый заданием комплексной структуры). Такой выбор весового вектора определяет расслоение $\tilde{M}_k$ со слоем окружность над пространством модулей монополей, и мы имеем тем самым естественное отображение пространства $\tilde{M}_k$ в множество классов эквивалентности комплексов Нама. В следующем параграфе мы покажем, что это отображение является в действительности изоморфизмом.

§ 2. Вещественное уравнение

Займемся теперь исследованием решений вещественного уравнения (1.10) внутри фиксированного класса эквивалентности комплексов Нама или, более общо, изучением свойств соответствия

$$(\alpha, \beta) \mapsto \hat{F}(\alpha, \beta) = \frac{d}{d\lambda} (\alpha + \alpha^*) + 2([\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*]).$$

Заметим сначала, что все наши конструкции на самом деле инвариантны относительно действия унитарной калибровочной группы (задаваемого формулой (1.6)), поэтому часто бывает удобно факторизовать по этому действию, переходя к однородному пространству $\mathcal{H} = GL(k, \mathbb{C})/U(k)$, которое мы отождествляем с пространством положительных самосопряженных матриц. Так, вместо преобразования

$$g: (0, 2) \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$$

мы будем рассматривать преобразование

$$h = h(g) = g^* g: (0, 2) \rightarrow \mathcal{H}. \quad (2.1)$$

Далее нас интересует, как функционал $\hat{F}$ преобразуется под действием таких комплексных калибровочных преобразований.

Л е м м а 2.2. Если g есть отображение $(0, 2) \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$, то для любой пары $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$ справедливо соотношение

$$g^{-1} \hat{F}(\alpha', \beta') g = \hat{F}(\alpha, \beta) - 2 [\bar{d}_\alpha (h^{-1} d_\alpha h) + \bar{d}_\beta (h^{-1} d_\beta h)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Это соотношение легко вытекает из более простых соотношений

$$\begin{cases} g^{-1} \cdot \bar{d}_\alpha \cdot g = \bar{d}_\alpha, & \begin{cases} g^{-1} \cdot d_\alpha \cdot g = d_\alpha + h^{-1} d_\alpha h, \\ g^{-1} \cdot \bar{d}_\beta \cdot g = \bar{d}_\beta, & \begin{cases} g^{-1} \cdot d_\beta \cdot g = d_\beta + h^{-1} d_\beta h \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

и выражения

$$\hat{F}(\alpha, \beta) = 2([d_\alpha, \bar{d}_\alpha] + [d_\beta, \bar{d}_\beta]).$$

Наше исследование вещественного уравнения основано на вариационном подходе и одном дифференциальном неравенстве, к описанию которых мы теперь переходим.

Вариационное описание

Л е м м а 2.3. Фиксируем пару (α, β) и положим $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$. Тогда уравнение $\hat{F}(\alpha', \beta') = 0$ является уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала от g , задаваемого формулой

$$\mathcal{L}_\varepsilon(g) = \frac{1}{2} \int_\varepsilon^{2-\varepsilon} (|\alpha' + \alpha'^*|^2 + 2|\beta'|^2) dz.$$

Иначе говоря, $\hat{F}(\alpha', \beta') = 0$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ вариация этого интеграла по отношению к вариациям δg с носителями в интервале $(\varepsilon, 2-\varepsilon)$ равна нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Ввиду инвариантности относительно действия группы, можно предполагать, что $g = 1$, и потому $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, а также что вариация δg является самосопряженным оператором. Тогда

$$\delta \mathcal{L} = \operatorname{Re} \int \operatorname{Tr} ((\alpha + \alpha^*) \delta(\alpha + \alpha^*) + 2\beta(\delta\beta)^*) dz.$$

Но $\delta\alpha = [\delta g, \alpha] - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\delta g)$, откуда $\delta(\alpha + \alpha^*) = [\delta g, \alpha - \alpha^*] - \frac{d}{dz} (\delta g)$ и $\delta\beta = [\delta g, \beta]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \operatorname{Re} \int \left\{ -\operatorname{Tr} \left((\alpha + \alpha^*) \frac{d}{dz} (\delta g) \right) + \operatorname{Tr} ((\alpha + \alpha^*) [\delta g, \alpha - \alpha^*] + 2\beta [\beta^*, \delta g]) \right\} dz = \\ &= \int \operatorname{Tr} \left(\delta g \left\{ \frac{d}{dz} (\alpha + \alpha^*) + 2[\alpha, \alpha^*] + 2[\beta, \beta^*] \right\} \right) dz = \\ &= \int \operatorname{Tr} (\delta g \hat{F}(\alpha, \beta)) dz, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Мы видим, пока формально, что для нахождения в классе эквивалентности комплексов Нама комплекса, удовлетворяющего уравнению $\hat{F}(\alpha, \beta) = 0$, необходимо минимизировать лагранжиан $\mathcal{L}$ из леммы 2.3, так же как в случае монад из работы [4] (ср. с обсуждением этого вопроса в работе [3]). Конечно, интеграл по всей области определения расходится, поэтому мы должны ограничиться вначале интервалами $(\varepsilon, 2-\varepsilon)$, как и выше. Преимуществом такого подхода является то, что мы работаем благодаря этому в локально тривиальной комплексной калибровке (как было указано в § 1), а в подобной калибровке легче проследить за поведением лагранжиана.

Предположим, что на некотором интервале $(\epsilon, 2 - \epsilon)$ матричная функция β постоянна, а $\alpha = 0$. Тогда подынтегральное выражение в лагранжиане принимает вид

$$\frac{1}{4} \left| \frac{dg}{ds} g^{-1} + g^{*-1} \frac{dg^*}{ds} \right|^2 + 2 |g \beta g^{-1}|^2, \quad (2.4)$$

что нетрудно переписать в терминах $h = g^* g$:

$$\frac{1}{4} \text{Tr} \left(h^{-1} \frac{dh}{ds} \right)^2 + 2 \text{Tr} (\beta h^{-1} \beta^* h). \quad (2.5)$$

Здесь $\frac{1}{4} \text{Tr} (h^{-1} dh)^2$ есть обычная $\text{GL}(k)$ -инвариантная риманова метрика $|\cdot|_{\mathcal{H}}^2$ на однородном пространстве $\mathcal{H} = \text{GL}(k)/U(k)$. Поэтому в указанной калибровке лагранжиан (рассматриваемый как функционал от $h(s)$) принимает вид

$$\mathcal{L}_\epsilon = \int_\epsilon^{2-\epsilon} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{dh}{ds} \right|_{\mathcal{H}}^2 + V_\beta(h) \right) ds, \quad (2.6)$$

где $V_\beta(h) = \text{Tr}(\beta h^{-1} \beta^* h) \geq 0$. (Тем самым искомое решение задает траекторию частицы на полном римановом многообразии $\mathcal{H}$, движущейся в поле потенциала $-V_\beta$.) Так как функция $V_\beta(h)$ гладкая и неотрицательная, то, пользуясь прямым методом вариационного исчисления, нетрудно установить, что для любых $h_+, h_- \in \mathcal{H}$ найдется непрерывная траектория

$$h: [\epsilon, 2 - \epsilon] \rightarrow \mathcal{H} \begin{cases} h(\epsilon) = h_+, \\ h(2 - \epsilon) = h_-, \end{cases} \quad (2.7)$$

гладкая на интервале $(\epsilon, 2 - \epsilon)$ и минимизирующая лагранжиан $\mathcal{L}_\epsilon$ в классе всех таких траекторий. В частности, для любого выбора отображения g , такого, что $g^* g = h$, пара $(\alpha', \beta') = g(0, \beta)$ удовлетворяет вещественному уравнению

$$\hat{F}(\alpha', \beta') = \frac{d}{ds} \left(h^{-1} \frac{dh}{ds} \right) + 2[\beta, [\beta^*, h]] = 0.$$

Тем самым установлено главное свойство существования.

Предложение 2.8. Если $\varepsilon > 0$ и матричные функции α, β удовлетворяют комплексному уравнению на отрезке $[\varepsilon, 2 - \varepsilon]$, то для любых $h_+, h_- \in \mathcal{H}$ существует непрерывное отображение $g: [\varepsilon, 2 - \varepsilon] \rightarrow GL(h, \mathbb{C})$, такое, что $h = h(g) = h_+$ (соответственно h_-) в точке ε (соответственно $2 - \varepsilon$) и пара $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$ удовлетворяет вещественному уравнению $\hat{F}(\alpha', \beta') = 0$ на интервале $(\varepsilon, 2 - \varepsilon)$.

Предложение вытекает из предшествующих ему рассуждений и существования локально тривиальной комплексной калибровки.

Дифференциальное неравенство

Напомним, что для непрерывной функции $f(z)$ неравенство

$$d^2 f / dz^2 \geq 0$$

в слабом смысле означает, что для всех гладких положительных пробных функций γ с компактным носителем

$$\int \frac{d^2 \gamma}{dz^2} \cdot f \geq 0.$$

Если матрица $h \in \mathcal{H}$ имеет собственные значения λ_i , то положим по определению

$$\Phi(h) = \log(\max\{\lambda_i\}_{i=1}^k) \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

В частности, функционал $\Phi(h(z))$ непрерывен, если матричная функция $h(z)$ непрерывна.

Л е м м а 2.10. Если $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$ на некотором подынтервале в $(0, 2)$, то для $h = g^*g$ будем иметь

$$\frac{d^2}{ds^2} \Phi(h) \geq -2(|\hat{F}(\alpha, \beta)| + |\hat{F}(\alpha', \beta')|),$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \Phi(h^{-1}) \geq -2(|\hat{F}(\alpha, \beta)| + |\hat{F}(\alpha', \beta')|)$$

в слабом смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для заданной фиксированной пары (α, β) обе части приведенных неравенств зависят только от h . Множество самосопряженных матриц с двумя или более равными собственными значениями имеет коразмерность не менее 3 в пространстве $\mathcal{H}$. Следовательно, любое отображение h можно аппроксимировать в C^2 -норме отображением, собственные значения которого различны при всех s , и, учитывая равномерность неравенств, доказать общий случай переходом к пределу. Поэтому, не ограничивая общности, будем предполагать, что собственные значения матрицы $h(s)$ различны при всех s .

Тогда, применяя унитарное калибровочное преобразование, можно привести матричную функцию g к виду

$$g = \text{diag}(e^{t_1}, e^{t_2}, \dots, e^{t_k}) \quad \text{с} \quad t_1(s) > t_2(s) > \dots > t_k(s).$$

В этом случае $\Phi(h) = 2t_1$. Сравним матричные элементы с номером $(1, 1)$ в матрицах $\hat{F}(\alpha, \beta)$ и $\hat{F}(\alpha', \beta')$. По лемме 2.2 имеем

$$g^{-1} \hat{F}(\alpha', \beta') g = \hat{F}(\alpha, \beta) - 2[\bar{d}_\alpha(h^{-1} d_\alpha h) + \bar{d}_\beta(h^{-1} d_\beta h)].$$

В рассматриваемом случае

$$d_\alpha h = \left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} - [\alpha^*, \] \right) (\text{diag}(e^{2t_i})).$$

Поэтому

$$h^{-1} d_{\alpha} h = \text{diag} \left(\frac{dt_i}{ds} \right) + \alpha^* - h^{-1} \alpha^* h,$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{d}_{\alpha}(h^{-1} d_{\alpha} h) &= \frac{1}{2} \text{diag} \left(\frac{d^2 t_i}{ds^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\alpha^* - h^{-1} \alpha^* h) + \\ &+ \left[\alpha, \text{diag} \left(\frac{dt_i}{ds} \right) \right] + [\alpha, \alpha^* - h^{-1} \alpha^* h]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\bar{d}_{\beta}(h^{-1} d_{\beta} h) = [\beta, \beta^* - h^{-1} \beta^* h].$$

Для любой диагональной матрицы Λ диагональные элементы матрицы $[\Lambda, A]$, где A — произвольная матрица, равны нулю, и аналогично диагональные элементы матрицы $g^{-1} \hat{F} g$ совпадают с диагональными элементами матрицы $\hat{F}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (\hat{F}(\alpha, \beta) - \hat{F}(\alpha', \beta'))_{(1,1)} &= \\ &= -2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 t_1}{ds^2} + ([\alpha, \alpha^* - h^{-1} \alpha^* h] + [\beta, \beta^* - h^{-1} \beta^* h])_{(1,1)} \right). \end{aligned}$$

Но $(1, 1)$ -элемент матрицы $[\alpha, \alpha^* - h^{-1} \alpha^* h]$ равен

$$\sum_{j>1} \left\{ |\alpha_{1j}|^2 (1 - e^{2(t_1 - t_j)}) - |\alpha_{j1}|^2 (1 - e^{2(t_j - t_1)}) \right\},$$

и, значит, отрицателен, так как $t_1 > t_j$ при $j > 1$. То же самое

справедливо по отношению к члену с β . Таким образом,

$$\frac{d^2 t_1}{dz^2} \geq -|\langle \hat{F}(\alpha', \beta') - \hat{F}(\alpha, \beta) \rangle_{(1,1)}| \geq -(|\hat{F}(\alpha', \beta')| + |\hat{F}(\alpha, \beta)|).$$

Точно так же находим оценку функционала $\Phi(h^{-1}) = -2t_k$, рассматривая матричный элемент с номером (k, k) .

Полученное неравенство позволяет установить единственность (в существенном) наших решений.

Л е м м а 2.12. Пусть пара (α, β) задает решение комплексного уравнения (1.9) в некотором интервале $(\varepsilon, 2-\varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$. Предположим, что пары

$$(\alpha', \beta') = g_1(\alpha, \beta),$$

$$(\alpha'', \beta'') = g_2(\alpha, \beta),$$

где $g_1, g_2: [\varepsilon, 2-\varepsilon] \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$ — непрерывные отображения, удовлетворяют вещественному уравнению $\hat{F}(\alpha', \beta') = \hat{F}(\alpha'', \beta'') = 0$. Тогда если отображения $h_1 = g_1^* g_1$, $h_2 = g_2^* g_2$ принимают равные значения в концевых точках ε и $2-\varepsilon$, то на самом деле $h_1(z) = h_2(z)$ всюду на отрезке $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Можно предполагать, что $g_2 = 1$ и $(\alpha'', \beta'') = (\alpha, \beta)$. Тогда по лемме 2.10 логарифм максимального собственного значения матрицы h , равный $2t_1 = \Phi(h)$, удовлетворяет слабому неравенству

$$d^2 t_1 / dz^2 \geq 0.$$

Но $t_1 = 0$ в точках $z = \varepsilon, 2-\varepsilon$, поэтому по стандартным соображениям выпуклости (справедливым и для дифференциальных неравенств в слабом смысле) имеем $t_1 \leq 0$ на отрезке $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$. По той же причине логарифм $2t_k = -\Phi(h^{-1})$ минимального собственного значения матрицы h удовлетворяет неравенству $t_k \geq 0$ на отрезке $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$. Так как $t_1 \geq t_k$, то по определению получаем, что $t_1 = t_2 = \dots = t_k$

на отрезке $[\epsilon, 2-\epsilon]$ и $h_1(z) = 1$.

С л е д с т в и е 2.13. Предположим дополнительно, что пара (α, β) удовлетворяет условию симметрии (1.8):

$$\alpha(2-z) = \alpha^T(z),$$

$$\beta(2-z) = \beta^T(z),$$

а также $h(2-\epsilon) = h^T(\epsilon)^{-1}$. Тогда если пара $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$ является решением вещественного уравнения, то

$$h(2-z) = h^T(z)^{-1}, \quad z \in (\epsilon, 2-\epsilon),$$

и пара (α', β') также удовлетворяет условию симметрии.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Утверждение вытекает из очевидных соображений симметрии, примененных к отображению $\cdot h_2 = (h^T)^{-1}$ в лемме 2.12.

Замечание. Доказанная единственность отражает согласованность между кинетическим и потенциальным членами в лагранжиане

$$\int \left(\frac{1}{2} \left| \frac{dh}{dz} \right|_g^2 + V_\beta(h) \right) dz.$$

Многообразие $\mathcal{H} = GL(k)/U(k)$ имеет неположительную кривизну, а функция V_β на $\mathcal{H}$ геодезически выпуклая [9]. Более общим образом, для любого односвязного многообразия с полной римановой метрикой отрицательной кривизны и любой положительной геодезически выпуклой потенциальной функции существует единственная стационарная траектория соответствующего лагранжиана, соединяющая две любые наперед заданные точки многообразия.

Вооруженные этими результатами, мы сможем вскоре устремить ϵ к нулю, с тем чтобы получить решения вещественного уравнения во всей области определения. Начнем с исследования ситуации, возникающей вблизи полюсов, с помощью разложений в степенные ряды.

Л е м м а 2.14. Предположим, что (α, β, ν) — комплекс Нама.
Тогда существует эквивалентный ему комплекс Нама (α', β', ν') ,
такой, что

- (i) функционал $\hat{F}(\alpha', \beta')$ ограничен на интервале $(0, 2)$;
- (ii) норма $|\alpha - \alpha'^*|$ ограничена на интервале $(0, 2)$;
- (iii) $|\nu'| = 1$;
- (iv) вычеты матричных функций T_i , отвечающих матричным функциям α', β' , в полюсе $z = 0$ задают представление, которое эквивалентно стандартному неприводимому представлению τ_1, τ_2, τ_3 группы $SU(2)$ в пространстве $\mathbb{C}^k$ (тем самым $\tau_1 = [\tau_2, \tau_3]$ и т.д.), причем эквивалентность задается унитарным сплетающим оператором (53).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Будем проводить вычисления в окрестности точки $z = 0$. Так как матричные функции α, β имеют в этой точке простые полюсы с вычетами α, β соответственно, то функционал $\hat{F}$ допускает представление

$$\hat{F}(\alpha, \beta) = \frac{1}{z^2} (-(\alpha^* + \alpha) + 2([\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*])) + \frac{1}{z} \Psi + \text{голоморфная часть.}$$

Легко видеть, что при сделанных предположениях о вычетах α, β мы можем добиться выполнения условий (ii), (iii), (iv) в окрестности точки $z = 0$ с помощью постоянного комплексного калибровочного преобразования. Отсюда следует, что коэффициент при $1/z^2$ в представлении функционала $\hat{F}$ обращается в нуль.

Итак, допустим, не ограничивая общности, что вычеты α, β имеют стандартную форму, отвечающую представлению⁽²⁸⁾ S^{k-1} группы $SU(2)$, т.е.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{i}{2} \tau_1, \\ \beta &= \frac{1}{2} (\tau_2 + i\tau_3). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Рассмотрим тогда комплексное калибровочное преобразование

$$g = 1 + \frac{\chi}{2} z + \dots \text{ с } \chi = \chi^*.$$

Пользуясь формулой

$$g^{-1}\hat{F}(\alpha', \beta')g = \hat{F}(\alpha, \beta) - 2\{\bar{d}_\alpha(h^{-1}(d_\alpha h)) + \bar{d}_\beta(h^{-1}(d_\beta h))\},$$

находим, что вычет Ψ функционала $\hat{F}$ в нуле преобразуется при этом по правилу

$$\Psi' = \Psi + 2([\ell, [\ell^*, \chi]] + [\alpha, [\alpha, \chi]]) - [\alpha, \chi].$$

Отсюда следует, что $\Psi' = 0$ для некоторой матричной функции χ тогда и только тогда, когда вычет Ψ принадлежит образу отображения

$$\chi \xrightarrow{D} 4[\ell, [\ell^*, \chi]] + 4[\alpha, [\alpha, \chi]] - 2[\alpha, \chi].$$

Но

$$\begin{aligned} -D(\chi) &= [\tau_2 + i\tau_3, [\tau_2 - i\tau_3, \chi]] + [\tau_1, [\tau_1, \chi]] + i[\tau_1, \chi] = \\ &= \sum_{i=1}^3 [\tau_i, [\tau_i, \chi]]. \end{aligned}$$

Отображение $\chi \rightarrow \sum_{i=1}^3 [\tau_i, [\tau_i, \chi]]$ есть оператор Казимира⁽²⁹⁾ представления

$$S^{k-1} \otimes S^{k-1} \cong S^{2k-2} \oplus \dots \oplus S^0,$$

и потому совпадает с умножением на число⁽³⁰⁾ $\ell(\ell+1)/2$ на представлении S^ℓ при каждом ℓ . Следовательно, мы можем найти матричную функцию χ из уравнения $\Psi' = 0$ тогда и только тогда, когда Ψ не имеет S^0 -составляющей, т.е. при условии, что

$$\text{Tr } \Psi = 0.$$

Но последнее условие выполнено всегда, поскольку полюс функционала $\hat{F} = \frac{d}{dz}(\alpha + \alpha^*) + 2([\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*])$ целиком определяется членами, содержащими коммутаторы.

Таким образом, нам удалось найти комплексное калибровочное преобразование g , аналитическое в окрестности $z = 0$, такое, что функционал $\hat{F}(\alpha', \beta')$ ограничен в этой окрестности. Продолжим преобразование g гладким образом так, чтобы оно равнялось $\mathbb{I}$ в окрестности $z = 1$ и удовлетворяло соотношению $g(2-z) = g^T(z)^{-1}$ при $z > 1$.

Теперь мы можем сформулировать окончательные результаты этого параграфа (единственность уже была доказана выше).

Предложение 2.16. Пусть (T_1, T_2, T_3) и (T'_1, T'_2, T'_3) — два решения уравнений (1.1) (b) и v, v' — соответствующие весовые векторы единичной нормы. Тогда, если отвечающие им комплексы Нама (α, β, v) и (α', β', v') эквивалентны, то набор $(T_1, T_2, T_3; v)$ эквивалентен набору $(T'_1, T'_2, T'_3; v')$; при этом эквивалентность задается преобразованием из группы $O(k, \mathbb{R})$.

Доказательство. Предположим, что преобразование $g: [0, 2] \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$ переводит комплекс Нама (α, β, v) в комплекс Нама (α', β', v') , причем $g(2-z) = g^T(z)^{-1}$. Тогда, рассматривая представления в точке $z = 0$ и пользуясь тем, что $|v| = |v'| = 1$, получим, что матрица $g(0)$ должна быть унитарной, откуда $h = h(g) = \mathbb{I}$ при $z = 0, 2$. Поэтому из леммы 2.12 с $\epsilon = 0$ вытекает, что $h = \mathbb{I}$ всюду на интервале $(0, 2)$. Так как матрицы α и α' самосопряжены (т.е. $T_0 = T'_0 = 0$), откуда следует, что $g = g(1)$ — постоянная унитарная матрица. Но по условию матрица $g(1)$ ортогональна, поэтому эквивалентность наборов $(T_1, T_2, T_3; v)$ и $(T'_1, T'_2, T'_3; v')$ задается преобразованием из $O(k)$, и эти наборы отвечают одной и той же точке расслоения $\tilde{M}_k$ над пространством модулей.

Предложение 2.17. Если (α, β, v) — комплекс Нама, то найдутся решение $\{T'_i\}$ уравнений Нама и весовой вектор v' , такие, что комплекс Нама, задаваемый набором $(T'_1, T'_2, T'_3; v')$, эквивалентен комплексу (α, β, v) .

Доказательству этого предложения посвящена оставшаяся часть § 2. Можно предполагать, что комплекс (α, β, v) удовлетворяет ус-

ловиям (i)-(iv) леммы 2.14. Тогда, согласно предложению 2.8, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся преобразование g_ε и соответствующее ему преобразование h_ε , такие, что $h_\varepsilon = 1$ при $z = \varepsilon, 2 - \varepsilon$ и пара $g_\varepsilon(\alpha, \beta)$ удовлетворяет вещественному уравнению на интервале $(\varepsilon, 2 - \varepsilon)$. По принципу симметрии (следствие 2.9) имеем $h_\varepsilon(2 - z) = h_\varepsilon^{-1}(z)$.

Воспользуемся теперь снова дифференциальным неравенством.

Л е м м а 2.18. Для описанного выше преобразования h_ε и некоторой константы $C = C(\alpha, \beta)$ справедливо неравенство

$$\Phi(h_\varepsilon) + \Phi(h_\varepsilon^{-1}) \leq C\varepsilon(2 - \varepsilon).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим $\bar{\Phi} = \Phi(h_\varepsilon) + \Phi(h_\varepsilon^{-1})$, так что $\bar{\Phi} = 0$ при $z = \varepsilon, 2 - \varepsilon$ и

$$d^2\bar{\Phi}/dz^2 \geq -2|\hat{F}(\alpha, \beta)| \geq -2C$$

ввиду леммы 2.10 и ограниченности $\hat{F}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим функцию $f_\varepsilon(z) = C(z - \varepsilon)(2 - \varepsilon - z)$. Имеем

$$\frac{d^2}{dz^2}(f_\varepsilon - \bar{\Phi}) \leq 0$$

и $f_\varepsilon - \bar{\Phi} = 0$ в концевых точках $\varepsilon, 2 - \varepsilon$. Поэтому в силу выпуклости $f_\varepsilon - \bar{\Phi} \geq 0$ на интервале $(\varepsilon, 2 - \varepsilon)$, откуда

$$\bar{\Phi}(z) \leq C(z - \varepsilon)(2 - \varepsilon - z) \leq C\varepsilon(2 - \varepsilon).$$

С л е д с т в и е 2.19. (а) Матричные функции $h_\varepsilon(z), h_\varepsilon^{-1}(z)$ ограничены равномерно по ε и z . Более того, для значений z , близких к нулю,

$$|h_\varepsilon(z) - 1| \leq \text{const} \cdot z.$$

(b) При $\varepsilon \rightarrow 0$ отображения h_ε сходятся в пространстве $C^\infty(0, 2)$ к непрерывному отображению $h: [0, 2] \rightarrow \mathcal{H}$ (гладкому на интервале $(0, 2)$), удовлетворяющему условиям

- (i) пара $(\alpha', \beta') = h^{1/2}(\alpha, \beta)$ задает решение вещественного уравнения $\tilde{F}(\alpha', \beta') = 0$;
- (ii) $h(2-z) = h^T(z)^{-1}$ и $h(0) = h(2) = 1$;
- (iii) $|h(z) - 1| \leq \text{const} \cdot z$.

Все эти утверждения немедленно вытекают из приведенной выше леммы с учетом того, что отображения h_ε удовлетворяют уравнению $\tilde{F}(h_\varepsilon^{1/2}(\alpha, \beta)) = 0$ (см. лемму 2.2). Относительно утверждения (a) заметим, что оценки функционалов $\Phi(h_\varepsilon)$, $\Phi(h_\varepsilon^{-1})$ из леммы 2.18 контролируют поведение собственных значений и, следовательно, нормы h_ε . По тем же соображениям собственные значения h_ε должны накапливаться к 1, когда z близко к ε . Имея эту равномерную оценку и учитывая, что матричные функции h_ε удовлетворяют эллиптическому уравнению, легко получить сходимость внутри интервала (ср. с леммой 2.20 ниже).

Остается только проверить поведение вблизи полюсов. Положим $g = h^{1/2}$, $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$.

Л е м м а 2.20. Нормы $|\alpha - \alpha'|$, $|\beta - \beta'|$ ограничены на интервале $(0, 2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Вся имеющаяся у нас информация содержится в оценке $|h - 1| \leq \text{const} \cdot z$, которой мы будем пользоваться неоднократно.

По определению

$$\alpha' = g \alpha g^{-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{dg}{dz} \right) g^{-1}, \quad \beta' = g \beta g^{-1}.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что производная $\frac{dg}{dz}$ или, эквивалентно, производная $\frac{dh}{dz}$ ограничена.

Но пара (α', β') удовлетворяет вещественному уравнению, поэтому (см. формулу (1.14) и лемму 2.2) выражение

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} + [\alpha, \cdot]\right) h^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} - [\alpha^*, \cdot]\right) h - [\beta, h^{-1}[\beta^*, h]] = 2\hat{F}(\alpha, \beta)$$

регулярно. Раскрывая скобки, получим, что выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{ds} \left(h^{-1} \frac{dh}{ds} \right) + \frac{1}{2} \left([\alpha, h^{-1} \frac{dh}{ds}] + h^{-1} \frac{dh}{ds} h^{-1} [\alpha^*, h] - \right. \\ & \left. - h^{-1} \left[\frac{d\alpha^*}{ds}, h \right] - h^{-1} \left[\alpha^*, \frac{dh}{ds} \right] \right) - [\alpha, h^{-1}[\alpha^*, h]] - [\beta, h^{-1}[\beta^*, h]] \end{aligned}$$

равномерно ограничено на интервале $(0, 2)$.

Пользуясь далее тем, что члены $[\alpha^*, h]$, $[\beta^*, h]$ ограничены и аналогично $[d\alpha^*/ds, h] \leq \text{const} \cdot s^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left(h^{-1} \frac{dh}{ds} \right) + 2 \left([\alpha, h^{-1} \frac{dh}{ds}] + h^{-1} \frac{dh}{ds} h^{-1} [\alpha^*, h] - h^{-1} \left[\alpha^*, \frac{dh}{ds} \right] \right) \leq \\ & \leq C s^{-1}. \quad (2.21) \end{aligned}$$

(Буквами M и C будут обозначаться всевозможные положительные константы, встречающиеся в этой и последующих формулах.)

Применяя аналогичные соображения к среднему члену в формуле (2.21) и пользуясь тем, что матричная функция $\alpha - \alpha^*$ ограничена, получим

$$\left| \frac{d}{ds} \left(h^{-1} \frac{dh}{ds} \right) \right| \leq M \left| \frac{dh}{ds} \right| + C s^{-1}. \quad (2.22)$$

Интегрируя это дифференциальное неравенство, получим для заданных $s_0 > 0$ и $s \in \left[\frac{1}{2} s_0, \frac{3}{2} s_0 \right]$, что

$$\left| \left(h^{-1} \frac{dh}{ds} \right)_{s=s_0} - \left(h^{-1} \frac{dh}{ds} \right)_{s=\frac{3}{2}s_0} \right| \leq (M s_0) G + C, \quad (2.23)$$

где $G = \sup_{[\frac{1}{2}z_0, \frac{3}{2}z_0]} \left| \frac{dh}{dz} \right|$. Выбирая, в частности, в качестве z точку,

в которой достигается верхняя грань в определении G , и вводя новые константы M и C , получим

$$\left| \left(\frac{dh}{dz} \right)_{z=z} - \left(\frac{dh}{dz} \right)_{z=z_0} \right| \leq M z_0 G + C.$$

Если, допустим, $z_0 \leq (1/2)M^{-1}$, то отсюда будет следовать, что

$$G \leq 2 \left| (dh/dz)_{z=z_0} \right| + C.$$

Возвращаясь тогда к формуле (2.23), будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{dh}{dz} \right)_{z=z} - \left(\frac{dh}{dz} \right)_{z=z_0} \right| &\leq \left| \left(h^{-1} \frac{dh}{dz} \right)_{z=z} - \left(h^{-1} \frac{dh}{dz} \right)_{z=z_0} \right| + \\ &+ M_1 z_0 \left| \frac{dh}{dz} \right|_{z=z_0} \leq M z_0 \left| \left(\frac{dh}{dz} \right)_{z=z_0} \right| + C \end{aligned}$$

для всех $z \in [\frac{1}{2}z_0, \frac{3}{2}z_0]$. Следовательно, после еще одного интегрирования и деления на z_0 получим

$$\left| \frac{h(\frac{3}{2}z_0) - h(\frac{1}{2}z_0)}{z_0} - \left(\frac{dh}{dz} \right)_{z=z_0} \right| \leq M z_0 \left| \left(\frac{dh}{dz} \right)_{z=z_0} \right| + C.$$

Отсюда, взяв z_0 достаточно малым по сравнению с M^{-1} , будем иметь

$$\left| (dh/dz)_{z=z_0} \right| \leq C,$$

так как

$$\left| h\left(\frac{3}{2}z_0\right) - h\left(\frac{1}{2}z_0\right) \right| \leq \text{const} \cdot z_0^*$$

согласно следствию 2.19 (а).

Возвращаясь теперь к доказательству предложения 2.17, перейдем вновь к "калибровке $T_0 = 0$ ". Другими словами, решим уравнение

$$\frac{du}{dz} = u(\alpha' - \alpha'^*) \quad \text{на интервале } (0, 2), \quad u(z) \in U(k), \quad (2.24)$$

с начальным условием $u(1) = 1$ (ср. с формулами (1.6), (1.7), (1.13)). Так как норма $|\alpha' - \alpha'^*|$ ограничена, матричная функция $u(z)$ непрерывно продолжается на отрезок $[0, 2]$. Легко видеть, что "вычеты" будут преобразовываться с помощью матрицы $u(0)$ и сохранится наша оценка для регулярной части. Таким образом, если положить

$$T_1 = u(\alpha' + \alpha'^*)u^{-1}, \quad T_2 = u(\beta' - \beta'^*)u^{-1}, \quad T_3 = u(\beta' + \beta'^*)u^{-1},$$

мы получим решение уравнений Нама. При этом для непрерывного комплексного калибровочного преобразования $u \circ \sigma$, связывающего пару (α, β) с матрицами $\{T_i\}$, норма разности $\left| T_i(z) - \frac{1}{3}u(0)\tau_i u(0)^{-1} \right|$ ограничена на интервале $(0, 1)$.

Для окончания доказательства нам необходимо следующее

Предложение 2.25. Предположим, что матричные функции $T_i(z)$ удовлетворяют условиям (i), (ii), (iii) предложения 1.1 (b), а вместо условий (iv), (v) выполняется следующее условие: для некоторого $u \in U(k)$ норма $|T_i(z) - (1/3)u\tau_i u^{-1}|$ ограничена на интервале $(0, 1)$. Тогда в действительности матричные функции T_i удовлетворяют всем условиям предложения 1.1(b).

Дополнительная регулярность матричных функций T_i , которая утверждается в предложении, может быть доказана непосредственно, но, избегая дальнейших отступлений, мы обойдем возникающие трудности, воспользовавшись результатами Нама и Хитчина. Напомним, что в рамках описания, данного Хитчином ([6], § 2), конструкция

Нама позволяет построить монополь по данным $\{T_i\}$. Основная теорема Хитчина утверждает при этом, что матричные функции T_i мероморфны и имеют простые полюсы.

Тем самым завершается доказательство предложения 2.17, которое вместе с предложением 2.16 показывает, что расслоение $\tilde{M}_k$ на пространстве модулей монополей естественным образом отождествляется с множеством классов эквивалентности комплексов Нама.

§ 3. Классификация комплексов Нама

Начнем с общего замечания. Как мы видели, решение (α, β) комплексного уравнения (1.9) локально тривиально в том смысле, что при помощи комплексного калибровочного преобразования мы можем привести его к виду $(0, \beta')$ с постоянной матричной функцией β' . Иначе говоря, $\beta(z) \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$ есть однопараметрическое семейство матриц, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности (ср. с [6], с. 88 настоящего сборника). Как указано в работе [4], орбита в пространстве линейного представления V в "хороших" случаях замкнута, но это, вообще говоря, неверно для ассоциированной орбиты в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$. В нашем случае задание поведения в концевых точках $z = 0, 2$ отвечает требованию сходимости траектории $[\beta(z)]$ в пространстве $\mathbb{P}(M_{k \times k}(\mathbb{C}))$ к данной точке $[\beta]$ вне орбиты, что возможно только при $|\beta(z)| \rightarrow \infty$. Искомая классификация определяется в действительности матрицей $\beta' \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$ и однопараметрической подгруппой p группы $GL(k, \mathbb{C})$, такой, что $[p(z)\beta'] \rightarrow \beta$ при $z \rightarrow 0$.

Перейдем к точным формулировкам.

Предложение 3.1. Имеется взаимно однозначное соответствие между

- (а) классами эквивалентности комплексов Нама;
- (б) классами эквивалентности пар (B, w) относительно действия группы $O(k, \mathbb{C})$, где
 - (i) B - симметричная $k \times k$ -матрица, $w \in \mathbb{C}^k$ - вектор-столбец;
 - (ii) вектор w порождает пространство $\mathbb{C}^k$ как $\mathbb{C}[B]$ -модуль (иначе говоря, w есть "циклический вектор" для матрицы B).

Предложение 3.2. Сопоставление паре (B, w) рационального отображения по правилу

$$(B, w) \mapsto f \in R_k, \quad f(z) = w^T (z \cdot I - B)^{-1} w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

индуцирует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности пар (B, w) (см. предложение 3.1 (b)) и пунктированными⁽⁵⁴⁾ рациональными отображениями степени k из пространства R_k .

Доказательство предложения 3.1. Построим сначала пару (B, w) , отвечающую комплексу Нама (α, β, v) . Положим $B = \beta(1)$; эта матрица симметрична (см. определение 1.21(ii)). Рассмотрим далее дифференциальный оператор $\bar{d}_\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} + \alpha$, действующий на $\mathbb{C}^k$ -значные функции от z . Напомним, что вблизи нуля $\alpha = \alpha/z$ + голоморфная часть, а вектор v лежит в собственном $-(k-1)/4$ -подпространстве матрицы α . В подходящем базисе $\{b^j v\}$ матрица α имеет вид

$$\alpha = \text{diag} \left(-\frac{k-1}{4}, \dots, \frac{k-1}{4} \right). \quad (3.3)$$

Следовательно, существует единственное решение $u(z)$ уравнения $\bar{d}_\alpha u = 0$, такое, что $z^{-(k-1)/2} u(z) \rightarrow v$ при $z \rightarrow 0$ (ср. с. 30-35 и 109 настоящего сборника). Положим теперь $w = u(1) \in \mathbb{C}^k$. После этого доказательство предложения 3.1 сводится к доказательству следующих четырех лемм.

Лемма 3.4. Пара (B, w) с точностью до действия группы $O(k, \mathbb{C})$ зависит только от класса эквивалентности комплекса Нама (α, β, v) .

Доказательство. Предположим, что $\varphi(\alpha, \beta, v) = (\alpha', \beta', v')$, где φ — преобразование из определения 1.22. Тогда матрица $\beta'(1) = B'$ по определению подобна матрице $\beta(1) = B$; подобие задается матрицей $q(1) \in O(k, \mathbb{C})$. Более того, $\bar{d}_{\alpha'} = \varphi \circ \bar{d}_\alpha \circ \varphi^{-1}$, поэтому функция $u(z)$, введенная выше, удовлетворяет уравнению $\bar{d}_{\alpha'}(\varphi(z)u(z)) = 0$. Далее, $\varphi(0)v = v'$ и ввиду непрерывности преобразования φ в концевых точках

$$z^{-(k-1)/2} (g(z)u(z)) \rightarrow g(0)v = v'$$

при $z \rightarrow 0$. Следовательно, $u'(z) = g(z)u(z)$ и, в частности, $w' = g(1)w$. Тем самым пара (B', w') эквивалентна паре (B, w) .

Л е м м а 3.5. Пара (B, w) , отвечающая некоторому комплексу Нама, удовлетворяет условиям предложения 3.1 (b), т.е. w является циклическим вектором для матрицы B .

Д о к а з а т е л ь с т в о . По предположению, v — циклический вектор для вычета b матричной функции β в нуле. Но это условие является открытым и

$$(z\beta(z), z^{-(k-1)/2}u(z)) \rightarrow (b, v) \text{ при } z \rightarrow 0.$$

Поэтому при малых z вектор $u(z)$ является циклическим для матрицы $\beta(z)$. Так как последнее свойство не зависит от z (т.е. сохраняется при "параллельном переносе" $\bar{d}_\infty$), то оно выполнено и для вектора w и матрицы B .

Л е м м а 3.6. Любой паре (B, w) , удовлетворяющей условиям предложения 3.1 (b), отвечает по крайней мере один комплекс Нама.

Д о к а з а т е л ь с т в о . По предположению векторы $\{B^j w\}_{j=0}^{k-1}$ порождают все пространство $\mathbb{C}^k$, поэтому мы можем представить матрицу B в этом базисе в виде

$$B = \Lambda \tilde{B} \Lambda^{-1}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . & -q_0 \\ 1 & 0 & & & & -q_1 \\ . & 1 & & & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & -q_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\phi(z)$ — гладкая функция при $z \in (0, 1)$, такая, что $\phi(z) = z$ в окрестности точки $z = 0$ и $\phi(z) = 1$ в окрестности точки $z = 1$. Положим

$$p(z) = \text{diag}(\phi^{(k-1)/2}, \phi^{(k-3)/2}, \dots, \phi^{-(k-1)/2}).$$

Тогда при $z \rightarrow 0$ выполняются соотношения

$$p(z) \tilde{B} p(z)^{-1} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & & & \\ \cdot & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix} + O(1)$$

и

$$-\frac{1}{2} p^{-1} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -\frac{k-1}{2} & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \frac{k-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матричные функции

$$\left. \begin{aligned} \beta(z) &= \Lambda p \tilde{B} p^{-1} \Lambda^{-1}, \\ \alpha(z) &= \frac{\Lambda}{2} \left(p^{-1} \frac{dp}{dz} \right) \Lambda^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad z \in (0, 1],$$

удовлетворяют комплексному уравнению, имеют нужные полюсы и приводят к правильному определению пары (B, w) , если положить $v = \Lambda w$. Продолжая матричные функции α, β на интервал $[1, 2)$ по симметрии, получим искомым комплекс Нама.

Л е м м а 3.7. Допустим, что для двух комплексов Нама (α, β, ν) , (α', β', ν') отвечающие им пары (B, w) , (B', w') эквивалентны (посредством преобразования из группы $O(k, \mathbb{C})$). Тогда комплекс (α, β, ν) эквивалентен комплексу (α', β', ν') .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Мы ввели матричную функцию $u(z)$ так, чтобы норма

$$|z^{-(k-1)/2} u(z) - \nu| = \varepsilon(z)$$

стремилась к нулю при $z \rightarrow 0$. Так как

$$|z\beta(z) - b| \leq C \cdot z,$$

то

$$|z^{1-(k-1)/2} u(z) - b\nu| \leq |z\beta - b| |z^{-(k-1)/2} u| + |b| |z^{-1} u| \leq C_1 \varepsilon(z),$$

и подобным же образом

$$|z^{i-(k-1)/2} u(z) - b^i \nu| \leq C_i \varepsilon(z) \quad (3.8)$$

для $i = 0, \dots, k-1$. Аналогичные соотношения имеют место в "штрихованном" случае.

Допустим теперь, что матрица $g_1 \in O(k, \mathbb{C})$ отображает пару (B, w) в пару (B', w') , т.е. $B' = \beta'(1) = g_1 \beta(1) g_1^{-1}$, $w' = g_1 w$. Матрица g_1 "продолжается" единственным образом на интервал $(0, 2)$ до преобразования g , такого, что

$$g \circ \bar{d}_\alpha \circ g^{-1} = \bar{d}_{\alpha'}, \quad g(1) = g_1.$$

Из условия $[\bar{d}_\alpha, \bar{d}_\beta] = 0$ следует, что при каждом i и всех z выполняются соотношения $g(\beta^i u(z)) = \beta'^i u'(z)$. Отсюда

$$g(z^{i-(k-1)/2} \beta^i u) = z^{i-(k-1)/2} \beta'^i u',$$

и из оценки (3.8) вытекает, что при $z \rightarrow 0$ преобразование $g(z)$ стремится к некоторому преобразованию Γ , однозначно определяемому условиями $\Gamma(b^i v) = b^i v'$. Аналогично преобразование g имеет предел при $z \rightarrow 2$ и, следовательно, задает эквивалентность между двумя комплексами Нама.

Этим завершается доказательство предложения 3.1. Нам осталось проверить справедливость предложения 3.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 3.2. Прежде всего ясно, что сопоставление

$$(B, w) \mapsto f, \quad f(z) = w^T(z - B)^{-1}w$$

зависит только от класса $O(k, \mathbb{C})$ -эквивалентности пары (B, w) . Для того чтобы убедиться в том, что функция f имеет степень k , рассмотрим ее разложение при больших z :

$$f(z) = w^T \left(\frac{1}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{B^2}{z^3} + \dots \right) w.$$

Если бы функция f имела степень строго меньше k , то для некоторого многочлена

$$q(z) = \sum_{i=0}^{k-1} q_i z^i$$

произведение $f(z)q(z)$ было бы снова многочленом. Тогда из равенства $f(z)q(z) = \sum_{i,j} q_i (w^T B^{i+j-1} w) z^{-j}$ вытекало бы, что ранг матрицы, элементы которой с номерами (i, j) имеют вид $w^T B^{i+j-1} w$, $0 \leq i, j \leq k-1$, был бы строго меньше k . Но эта матрица совпадает с матрицей Грама невырожденного скалярного произведения в базисе $\{B^i w\}_{i=0}^{k-1}$. Поэтому она обязательно неособая.

Для завершения доказательства предложения 3.2 осталось привести обратную конструкцию. По данной функции

$$f(z) = p(z)/q(z); \quad \deg q = k, \deg p \leq k-1,$$

с взаимно простыми многочленами p и q построим k -мерное векторное пространство $V = \mathbb{C}[t]/\langle q(t) \rangle$ (55). Зададим скалярное произведение на V формулой

$$(\pi, \sigma) = \sum_{\lambda \in Z(q)} \operatorname{res}_{\lambda} (f \pi \sigma dt)$$

($Z(q)$ = множество нулей многочлена q).

Оно корректно определено, поскольку функция qf регулярна. Более того, оно невырожденно. Действительно, рассмотрим примарное разложение

$$V \cong \bigoplus_{\lambda \in Z(q)} V_{\lambda}$$

с ортогональными слагаемыми V_{λ} . Если $\lambda \in Z(q)$ есть нуль порядка ℓ , то

$$V_{\lambda} = \{ \pi_0 + \pi_1(t-\lambda) + \dots + \pi_{\ell-1}(t-\lambda)^{\ell-1} \}$$

и сужение формы (π, σ) на пространство V_{λ} невырожденно (56):

$$((\pi_i), (\sigma_j)) = p(\lambda) \sum_{i=0}^{\ell-1} \pi_i \sigma_{\ell-i-1}.$$

Определим теперь преобразование $B: V \rightarrow V$, полагая $B(\pi) = t\pi$, и обозначим через w элемент пространства $V = \mathbb{C}[t]/\langle q \rangle$, отвечающий многочлену $1 \in \mathbb{C}[t]$. Тогда w автоматически является циклическим вектором для матрицы B , а преобразование $g(x)$, отвечающее набору $(V, (,), B, w)$, задается формулой

$$g(x) = (v, (x - B)^{-1} v) = \sum_{\lambda \in Z(q)} \operatorname{res}_{\lambda} \left(\frac{f(t)}{x - t} dt \right).$$

Но по интегральной формуле Коши, примененной в комплексной плоскости переменного t ,

$$\sum_{\lambda \in Z(q) \cup \{x\}} \operatorname{res}_{\lambda} \left(\frac{f(t)}{x - t} dt \right) = 0,$$

так как

$$\left| \frac{f(t)}{x - t} \right| = O(t^{-2}) \text{ при больших } t.$$

Следовательно,

$$g(x) = -\operatorname{res}_x \left(\frac{f(t)}{x - t} dt \right) = f(x).$$

Тем самым (с точностью до действия группы $O(k, \mathbb{C})$) эта конструкция дает правый обратный оператор к исходному сопоставлению. Похожим образом проверяется, что этот оператор является и левым обратным.

Приведенное доказательство указывает на то, что именно отображение f является первичным геометрическим объектом, а не "сопряженная" ему пара (B, w) , используемая для определения f .

Благодарность. Автор глубоко благодарен М.Ф. Атье, М.К. Мур-рею и И.К. Уртубизу за ценные замечания при обсуждении данной работы.

Литература

1. Atiyah M.F. Instantons in two and four dimensions.- *Commun. Math. Phys.* 93 (1984), 437-451. [Перевод в настоящем сборнике.]
2. Atiyah M.F., Bott R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces.- *Phil. Trans. R. Soc. London* 308 (1982), 523-615.
3. Donaldson S.K. Anti self dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles.- *Proc. London Math. Soc.* 50 (1985), 1-26.
4. Donaldson S.K. Instantons and geometric invariant theory.- *Commun. Math. Phys.* 93 (1984), 453-460. [Перевод в настоящем сборнике.]
5. Hitchin N.J. Monopoles and geodesics.- *Commun. Math. Phys.* 83 (1982), 579-602. [Перевод в настоящем сборнике.]
5. Hitchin N.J. On the construction of monopoles.- *Commun. Math. Phys.* 89 (1983), 145-190. [Перевод в настоящем сборнике.]
7. Hurtubise J.C. $SU(2)$ monopoles of charge 2.- *Commun. Math. Phys.* 92 (1983), 195-202. [Перевод в настоящем сборнике.]
8. Jaffe A., Taubes C.H. Vortices and monopoles.- Boston: Birkhäuser, 1980.
9. Kempf G., Ness L. On the lengths of vectors in representation spaces. In: *Lecture Notes in Math.*, Vol. 372.- Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1978.
10. Murray M.K. Monopoles and spectral curves for arbitrary Lie groups.- *Commun. Math. Phys.* 90 (1983), 263-271.
11. Murray M.K. D. Phil. Thesis, Oxford, 1983.
12. Nahm W. All self dual multimono poles for arbitrary gauge group. - Preprint TH 3172-CERN, 1981.
13. Nahm W. The algebraic geometry of multimono poles.- Preprint Physikalisches Institut, University of Bonn.

$SU(2)$ -МОНОПОЛИ ЗАРЯДА 2¹⁾

Жак Уртубиз

Département de Mathématiques UQAM, C.P. 8888, Succursale "A",
Montréal H3C 3P8, Canada

Резюме. С помощью методов Хитчина вычисляется пространство модулей $SU(2)$ -монополей заряда 2.

А. Введение и обозначения

Цель этой статьи состоит в вычислении пространства модулей $SU(2)$ -монополей заряда 2; мы находим, что это пространство есть $\mathbb{R}^3 \times T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))/\pm$, где $T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))/\pm$ — многообразие, полученное из касательного расслоения многообразия $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ путем отождествления всех касательных векторов v с противоположными к ним векторами $-v$.

Первые $SU(2)$ -монополи заряда 2 были построены Уордом [8]; они обладают осью симметрии и в пространстве модулей отвечают подмножеству $(\mathbb{R}^3 \times \text{нулевое сечение } T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})))$. Позднее Уорд построил $SU(2)$ -монополи более общего вида [9], однако ему удалось доказать их несингулярность только в случае решений, достаточно близких к осесимметричным. Следует отметить, что более общее утверждение о несингулярности, охватывающее и решения Уорда, вытекает из недавних работ Нама [7] и Хитчина [4].

Мы начнем с краткого изложения теории и попутно введем обозначения. Подробности можно найти в статьях [3, 4].

Пусть P — главное $SU(2)$ -расслоение над $\mathbb{R}^3$, P_g — присоединенное $\mathfrak{su}(2)$ -расслоение, Φ — сечение P_g , ∇ —

1) Hurtubise Jacques. $SU(2)$ monopoles of charge 2. — Communications in Mathematical Physics, 1983, v.92, pp.195-202.

связность на P и F - кривизна этой связности. Пара (∇, Φ) называется $SU(2)$ -монополем, если выполнены следующие условия:

- 1) $*F = \nabla \Phi$, где $*$ есть оператор Ходжа на 2-формах, определенных на пространстве $\mathbb{R}^3$. (Уравнения Богомольного; см. [1].)
- 2) $\int |F|^2 < \infty$ (конечное действие) и $|\Phi| = 1 - k/2r + O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$ (граничные условия). Норма в алгебре $\mathfrak{su}(2)$ задается формулой $-\text{tr}(x^2)/2$; такой выбор согласуется с работой Хитчина [3]. Число k в выражении $k/2r$ является целым и называется зарядом монополя.

Монополи можно изучать с помощью комплексной геометрии. Для этого используется пространство $\tilde{T}$ ориентированных прямых в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пространство $\tilde{T}$ имеет комплексную структуру, задаваемую внешним произведением в $\mathbb{R}^3$, и изоморфно комплексному касательному расслоению $T(P^1(\mathbb{C}))$ римановой сферы $P^1(\mathbb{C})$. Кроме того, пространство $\tilde{T}$ обладает естественной вещественной структурой τ , не имеющей неподвижных точек, которая задается обращением ориентации прямых. Далее, фиксируя некоторую точку p , получим сечение $z_p: P^1(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{T}$, задаваемое всеми прямыми, проходящими через p ; эти сечения τ -инвариантны и поэтому называются вещественными. Наконец, пусть x - локальная координата на сфере $P^1(\mathbb{C})$; тогда локальные координаты на пространстве $\tilde{T}$ задаются посредством $(w, x) \rightarrow w \partial/\partial x|_{x=x}$. В этих координатах вещественная структура τ определяется формулой $\tau(w, x) = (-\bar{w}/\bar{x}^2, -1/\bar{x})$.

Пусть E - комплексное векторное расслоение ранга 2, ассоциированное с главным расслоением P . Сопоставим каждой ориентированной прямой x пространство сечений z расслоения E над x , таких, что $(\nabla_u - i\Phi)z = 0$ вдоль x , где u - единичный направляющий вектор прямой x . Это определяет слой расслоения $\tilde{E}$ в точке $x \in \tilde{T}$. Если пара (∇, Φ) является решением уравнений Богомольного, то расслоение $\tilde{E}$ имеет естественную комплексную структуру (4). Пусть L - голоморфное линейное расслоение над $\tilde{T}$, задаваемое функцией перехода $\exp(-w/x)$, определенной на пересечении окрестности $\{x \neq \infty\}$ с окрестностью $\{x \neq 0\}$. Обозначим через $O(n)$ поднятие на $\tilde{T}$ расслоения $O(n)$ над $P^1(\mathbb{C})$ и положим $L(n) = L \otimes O(n)$. Если пара (∇, Φ) удовлетворяет еще и граничным условиям, то расслоение $\tilde{E}$ можно опре-

делить и как голоморфное расширение следующими двумя способами:

$$0 \rightarrow L(-k) \rightarrow \tilde{E} \rightarrow L^*(k) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow L^*(-k) \rightarrow \tilde{E} \rightarrow L(k) \rightarrow 0.$$

Эти точные последовательности переходят одна в другую под действием вещественной структуры. Пусть S — кривая, над точками которой расслоения $L(-k)$ и $L^*(-k)$ совпадают; S является кривой в линейной системе $|O(2k)|$ и называется спектральной кривой монополя. Имеет место

Т е о р е м а 1 [3, 4]. i) Кривая S компактна.

ii) Вещественная структура τ сохраняет S .

iii) Линейное расслоение L^2 голоморфно тривиально на S .

iv) Так как $\tau^* L^2 = L^{*2}$, то естественное спаривание сечений расслоения L^2 над S , задаваемое равенством $\langle z, z' \rangle = \tau^* z(z')$, является знакоопределенным (положительно определенным при нечетном k и отрицательно определенным в противном случае).

v) $H^0(S, L^t(k-2)) = 0$ для $t \in (0, 2)$.

Отметим, что из свойства i) вытекает, что кривая S задается уравнением $w^k + \alpha_1(z)w^{k-1} + \dots + \alpha_k(z) = 0$, где α_i — полином степени $2i$. Свойство iv) эквивалентно наличию вещественной структуры на расслоении $L(k-1)$, ограниченном на кривую S . Утверждение v) подобно теореме о тривиальности для инстантонов и является тем условием, которое обеспечивает несингулярность.

Более того, исходя из кривой S , удовлетворяющей спектральным условиям i) — v), можно восстановить расслоение $\tilde{E}$, а значит, и монополи, и потому можно параметризовать монополи заданного заряда с помощью пространства соответствующих спектральных кривых.

В. Случай заряда 2

В случае заряда 2 кривые S принадлежат линейной системе $|\mathcal{O}(4)|$; они либо являются гладкими и эллиптическими (57), либо задаются парами сечений $P^1(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{T}$ (т.е. кривых в линейной системе $|\mathcal{O}(2)|$). Действительно, если кривая S имеет особые точки (если нет, она эллиптическая), то ввиду наличия вещественной структуры на S они могут появляться только парами. Так как любое сечение пересекает кривую S в четырех точках, то сечение, проходящее через две различные особые точки S и еще одну точку этой кривой (такие сечения существуют), должно совпадать с компонентой кривой S . Поэтому кривая S обязана быть объединением двух сечений из системы $|\mathcal{O}(2)|$.

1. Редукция и симметрии

Евклидова группа пространства $\mathbb{R}^3$ действует на пространстве дивизоров $|\mathcal{O}(4)|$. Начнем с факторизации подпространства вещественных компактных кривых $W \cong \mathbb{R}^8$ по этому действию; иными словами, изучим множество орбит указанного действия на W .

Компактная вещественная кривая общего вида из $|\mathcal{O}(4)|$ задается уравнением

$$w'^2 + (c'_{10} + \kappa'_1 z' - \bar{c}'_{10} z'^2) w' + (c'_{20} + c'_{21} z' + \kappa'_2 z'^2 - \bar{c}'_{21} z'^3 + \bar{c}'_{20} z'^4) = 0, \quad (1)$$

где $c'_i \in \mathbb{C}$, $\kappa'_i \in \mathbb{R}$, а w', z' — наши стандартные координаты на $\tilde{T}$.

а) Сначала профакторизуем по действию трансляций с помощью выбора начала координат в $\mathbb{R}^3$. Это достигается отбрасыванием w -члена в уравнении (1). Получаем

$$w''^2 + (c''_{20} + c''_{21} z'' + \kappa''_{22} z''^2 - \bar{c}''_{21} z''^3 + \bar{c}''_{20} z''^4) = 0. \quad (2)$$

Обозначим подпространство таких центрированных дивизоров через W_c .

б) Теперь профакторизуем по оставшемуся действию группы вращений $SO(3)$. Рассмотрим полином по z'' в круглых

скобках в уравнении (2). Он имеет четыре корня $\alpha, \beta, -1/\alpha, 1/\beta$. Выполним вращение, переводящее один из корней в нуль (еще один корень уйдет при этом в бесконечность). Затем выполним вращение вокруг оси в $\mathbb{R}^3$, проходящей через точки $\{0, \infty\}$ римановой сферы $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{w'' = 0\}$. В результате уравнение (2) редуцируется к (корректно определенной) форме

$$w^2 = \kappa_1 z^3 - \kappa_2 z^2 - \kappa_1 z, \quad \kappa_i \in \mathbb{R}, \quad \kappa_1 \geq 0. \quad (3)$$

Обозначим пространство $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ таких редуцированных дивизоров через W_{red} ; таким образом, мы имеем отображение проекции $P: W \rightarrow W_{\text{red}}$, которое разлагается в композицию отображений $P = P_c \circ Q$, где $Q: W \rightarrow W_c$, $P_c: W_c \rightarrow W_{\text{red}}$.

Группой изотропии данного редуцированного уравнения является группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ при $\kappa_1 > 0$ и группа $S^1 \times \mathbb{Z}_2$ при $\kappa_1 = 0$ (осесимметричный случай); множители $\mathbb{Z}_2$ отвечают в пространстве $\mathbb{R}^3$ вращениям на угол π , которые переставляют корни $0, \infty, \alpha, -1/\alpha$ полинома $\kappa_1 z^3 - \kappa_2 z^2 - \kappa_1 z$ на сфере $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

Отметим кстати, что всякая симметрия спектральной кривой определяет симметрию монополя; таким образом, имеет место

Предложение 2. Подгруппой симметрии (группы собственных евклидовых движений) монополя заряда 2 является:

а) группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ в случае отсутствия осевой симметрии; элементы этой группы отвечают вращениям на угол π вокруг трех ортогональных осей, пересекающихся в одной точке;

б) группа $S^1 \times \mathbb{Z}_2$ в осесимметричном случае; элементы группы отвечают вращениям вокруг некоторой точки, отображающим некоторую ось, проходящую через эту точку, в себя.

2. Связь со стандартной формой эллиптической кривой

Рассмотрим кривую $S: w^2 = \kappa_1 z^3 - \kappa_2 z^2 - \kappa_1 z$, соответствующую точке (κ_1, κ_2) в пространстве W_{red} . Если $\kappa_1 = 0$, то S является объединением двух сечений; если $\kappa_1 > 0$, то эта кривая неособая и эллиптическая. Полагая

$$w = \tilde{w} \cdot (\nu_1/4)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{w} \cdot k_1,$$

$$x = \tilde{x} + (\nu_2/3\nu_1) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x} + k_2,$$

получаем нормальную форму эллиптической кривой (58):

$$\tilde{w}^2 = 4\tilde{x}^3 - g_2\tilde{x} - g_3,$$

где
$$g_2 = 12k_2^2 + 4, \quad g_3 = 8k_2^3 + 4k_2, \quad (4)$$

$$27g_3^2 = (g_2 - 4)(g_2 + 2)^2, \quad k_2 = 3g_3/(2g_2 + 4).$$

Таким образом, кривая S совпадает с образом тора $\mathbb{C}/\mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ — решетка в $\mathbb{C}$, при его вложении в $\tilde{T}$, задаваемом $\wp$ -функцией Вейерштрасса (59) и ее производной ($\tilde{w} = \wp'$, $\tilde{x} = \wp$). Так как кривая S вещественна, решетка $\mathcal{L}$ ромбическая или прямоугольная; поскольку вещественная структура не имеет неподвижных точек, $\mathcal{L}$ обязательно прямоугольна и имеет в качестве образующих положительный вещественный и положительный мнимый векторы l_x, l_i . (Подробности см. в [2] (58).)

Рассмотрим модулярную функцию $I(g_2, g_3) = 27g_3^2/g_2^3$ данной решетки как функцию переменной k_2^2 . Она является монотонно возрастающей функцией при $k_2^2 \geq 0$, причем $I = 0$ при $k_2 = 0$ (квадратная решетка). Далее, при каждом $I \neq 0$ имеются с точностью до изменения масштаба две прямоугольные решетки с вещественной и мнимой образующими, дающие одну и ту же функцию I ; одна — горизонтальная ($l_x > l_i$) (60), другая — вертикальная ($l_i > l_x$). Отношение l_i/l_x задается гладкой функцией от $I^{1/2}$ и, следовательно, от k_2 . Поэтому, если обозначить через $I(\nu_1/\nu_2)$ модуль кривой S , а через $H(\nu_1, \nu_2)$ — отношение l_i/l_x для кривой S , то найдутся гладкие диффеоморфизмы $\tilde{I}, \tilde{H}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

$$I(\nu_1, \nu_2) = \tilde{I}((\nu_2/\nu_1)^2), \quad H(\nu_1, \nu_2) = \tilde{H}(\nu_2/\nu_1).$$

3. Спектральные условия для кривой S в W_{red} а) Случай $\gamma_1 \neq 0$.Рассмотрим кривую S в редуцированной форме: $w^2 = \gamma_1 z^3 - \gamma_2 z^2 - \gamma_1 z$. Имеет местоПредложение 3. i) Расслоение L^2 тривиально на кривой $S \iff$ вектор $4k_1$ принадлежит решетке $\mathcal{L}$.ii) $H^0(S, L^t) = 0$, $t \in (0, 2)$, для кривой S , на которой расслоение L^2 тривиально $\iff$ вектор $4k_1$ совпадает с вещественной образующей решетки $\mathcal{L}$.iii) Если вектор $4k_1$ является вещественной образующей решетки $\mathcal{L}$, то спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ отрицательно определено.Доказательство. i) Тривиальность расслоения L^2 на S равносильна существованию голоморфных функций f_1, f_2 соответственно на $S \cap \{z \neq \infty\}$, $S \cap \{z \neq 0\}$, удовлетворяющих соотношению $f_2 = \exp(-2w/z)f_1$ на пересечении этих множеств. Применяя $d \ln$ к обеим частям последнего соотношения, получим эквивалентное соотношение

$$d \ln f_2 = d(-2w/z) + d \ln f_1, \quad (5)$$

в котором $d(-2w/z)$ есть 1-форма на S , имеющая двукратные полюсы с нулевыми вычетами при $z = 0$, $z = \infty$. Прообраз этой формы на торе $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ равен $d(-2w/z) = -2k_1 d(\wp/(\wp + k_2))$.Если u — стандартная координата на $\mathbb{C}$, то $d(-2w/z) = (-4k_1/u^2 + O(1))du$ вблизи нуля. В свою очередь форма $d \ln f_1$ должна иметь вид $(4k_1/u^2 + O(1))du$ вблизи нуля. Так как это ее единственный полюс на S , она равна

$$d \ln f_1 = (4k_1 \wp + c)du, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Далее, периоды формы $d \ln f_1$ равны $2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. для любого $l \in \mathcal{L}$ имеем

$$4k_1 \eta(l) + cl \stackrel{\text{def}}{=} \int_{u_0}^{u_0+l} (4k_1 \wp + c)du = 2\pi i n(l), \quad n(l) \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Но для l_n и l_i справедливо соотношение Лежандра [2]:

$$\eta(l_n)l_i - \eta(l_i)l_n = 2\pi i. \quad (7)$$

Сравнение равенств (6) и (7) дает:

$$n(l_n)l_i - n(l_i)l_n = 4k_1. \quad (8)$$

откуда $4k_1 \in \mathcal{L}$.

В обратную сторону, если $4k_1 \in \mathcal{L}$, то мы имеем равенство (8) для некоторых $n(l_n)$, $n(l_i)$. Поэтому мы можем выбрать s так, чтобы равенство (6) выполнялось для l_n . Тогда из равенства (7) вытекает, что (6) выполняется также для l_i и, следовательно, для всех l . После интегрирования и взятия экспоненты мы получаем искомое сечение расслоения L^2 над S .

ii) Как и в случае i), условие $H^0(S, L^t) = 0$ означает в точности, что $2tk_1 \notin \mathcal{L}$; так как $4k_1 \in \mathcal{L}$, вектор $4k_1$ должен совпадать с образующей.

iii) Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ отрицательно определено $\Leftrightarrow \langle f_1(x), f_2(\tau(x)) \rangle = n$ для некоторого вещественного отрицательного n . Если Γ - некоторый путь на S ,

соединяющий x с точкой $\tau(x)$, указанные условия эквивалентны равенству $\int_{\Gamma+\tau(\Gamma)} (4k_1\varphi + c) du = 2\pi ni$, n нечетно.

(Это свойство не зависит от выбора Γ .) Вещественная структура на торе $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ должна задаваться сохраняющим решетку отображением вида $u \rightarrow \alpha \bar{u} + b$, где $|\alpha| = 1$, b - полупериод ([2]). Отображение τ действует непрерывно на семействе вещественных эллиптических кривых в $\tilde{T}$. Ограничиваясь прямоугольными решетками, мы можем положить $\alpha = \pm 1$. Рассматривая только квадратные решетки ($k_2 = 0$) с действием τ на $\tilde{T}$, получим, что значения $\varphi(u)$ вещественны, а значения $\varphi'(\tau(u))$ - положительные мнимые. Отсюда следует, что значения $\varphi'(\tau(u))$ также положительные мнимые, а это, согласно [2], влечет за собой соотношения $\alpha = -1$, $b = (l_n + l_i)/2$. Тогда, взяв в качестве пути Γ сегмент $[0, (l_n + l_i)/2]$, получим (62) $l_i \cong \Gamma + \tau(\Gamma)$. Если вектор $4k_1$ является вещественной образующей решетки $\mathcal{L}$, то из равенства (8) будем иметь $n(l_i) = -1$. Таким образом,

$$\int_{\Gamma + \tau(\Gamma)} (4k_1 + c) du = -2\pi i.$$

б) Случай $\kappa_1 = 0$.

Предложение 4. Кривая $S: w^2 = -(\pi z/2)^2$ является единственной кривой с $\kappa_1 = 0$ в W_{red} , удовлетворяющей спектральным условиям.

Доказательство. Кривые из W_{red} с $\kappa_1 = 0$, на которых расслоение L^2 тривиально, задаются посредством $\kappa_2 = [(2n-1)\pi/2]^2$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [3] ⁽⁶³⁾). Пользуясь такими же рассуждениями, как и выше, из условия $H^0(S, L^t) = 0$ получаем, что $n = 1$. Наконец, при $n = 1$ мы можем взять $f_1(z) = 1$, $f_2(z) = -1$, и, следовательно, спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ отрицательно определено.

Объединяя предложения 3 и 4, получаем

Предложение 5. i) Множество C спектральных кривых в W_{red} есть гладкая кривая, трансверсально пересекающая прямую $\kappa_1 = 0$ в точке $\kappa_2 = \pi^2/4$.

ii) В окрестности этой точки кривая C описывается уравнением $f(\kappa_1, \kappa_2) = 0$, где f — гладкая функция, четная по κ_1 , причем $\partial f / \partial \kappa_2 \neq 0$.

Доказательство. Для $\kappa_1 > 0$ мы покажем, что C является графиком в полярных координатах (κ, θ) гладкой функции $\kappa = g(\theta)$. При $\kappa_1 > 0$ множество C есть множество эллиптических кривых, для которых вектор $4k_1$ является образующей решетки $\mathcal{L}$. Далее, для произвольной кривой из C функции $\tilde{H}(\kappa_2/\kappa_1)$, $g_2(\kappa_2/\kappa_1)$ являются гладкими функциями от θ . Но для фиксированной решетки $\mathcal{L}$ имеем $g_2(m\mathcal{L}) = m^{-4}g_2(\mathcal{L})$. Поэтому если $\mathcal{L}$ отвечает некоторой кривой из C , то вещественная образующая $4k_1$ данной решетки является гладкой корректно определенной функцией от κ_1/κ_2 . Но $4k_1^2 = \kappa_1$ и, таким образом, C имеет требуемый вид.

Рассмотрим теперь поведение C при $\kappa_2/\kappa_1 \rightarrow +\infty$. Из формул (4) имеем

$$\frac{\nu_2}{3\nu_1} = k_2 = \frac{3(4k_1)^{-6}}{2(4k_1)^{-4}} \cdot \frac{G_3(k_2)}{G_2(k_2) + 2(4k_1)^4},$$

где G_2, G_3 суть функции g_2, g_3 нашей решетки, нормированной так, что ее вещественная образующая равна 1. Отсюда получаем

$$\nu_2 = \frac{9}{8} \cdot \frac{G_3(k_2)}{G_2(k_2) + 32\nu_1^2},$$

причем если $k_2 \rightarrow \infty$, то $G_3(k_2) \rightarrow 8\pi^6/27$, $G_2(k_2) \rightarrow 4\pi^4/3$ ([5]). Кроме того, при $k_2 \rightarrow \infty$ также $g_2 \rightarrow \infty$. Таким образом, масштаб рассматриваемой решетки (которая вертикальна при $k_2 > 0$) стремится к нулю, и потому $\nu_1^2 = (2k_1)^4 \rightarrow 0$; следовательно,

$$\lim_{k_2 \rightarrow \infty} \nu_2 = \frac{\pi^2}{4},$$

т.е. кривая C стремится к осесимметричному случаю. Далее, разлагая в ряды ([5]), получаем

$$G_2(s) = \frac{(2\pi)^4}{12} \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \right),$$

$$G_3(s) = \frac{(2\pi)^6}{216} \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n \right),$$

$$(1 - I(s)) = \frac{G_2^3 - 27G_3^2}{G_2^3} = 1728 \left(q + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n q^n \right),$$

где $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, функции $G_2(s), G_3(s), 1 - I(s)$ вычислены для решетки с образующими $(1, s)$, $\text{Im}(s) > 0$, и $q = \exp(2\pi i s)$. Эти формулы позволяют выразить G_2, G_3 вблизи $q = 0$ в виде функций от $1 - I$. Но вблизи $I = 1$ функция I является гладкой функцией от $(\nu_1/\nu_2)^2$, поэтому вблизи $(\nu_1, \nu_2) = (0, \pi^2/4)$ кривая C определяется уравнением $F(\nu_1, \nu_2) = 0$, причем

$$F(\nu_1, \nu_2) = \nu_2 - \frac{9}{8} \frac{G_3((\nu_1/\nu_2)^2)}{G_2((\nu_1/\nu_2)^2) + 32\nu_1^2},$$

что доказывает утверждение ii).

З а м е ч а н и е. Можно показать, что $\kappa_2 \rightarrow -\infty$, $\kappa_1 \rightarrow 0$ при $\kappa_2 \rightarrow -\infty$ (используется случай $\kappa_2 \rightarrow +\infty$ и тот факт, что величины $\pm \kappa_2$ определяют одинаковые решетки, одна из которых горизонтальна, а другая вертикальна). Таким образом, спектральная кривая стремится к объединению двух далеко разнесенных вещественных сечений. Так как эти сечения являются спектральными кривыми монополей заряда $\bar{I}$, мы видим, что этот предельный случай согласуется с предложенным Таубсом [6] построением n -монополей путем "склеивания" далеко разнесенных монополей заряда $\bar{I}$.

4. Множество $P^{-1}(C)$, где C — кривая в W_{red}

Мы уже вычислили кривую C , которая описывает спектральные кривые (κ_1, κ_2) в W_{red} , удовлетворяющие нашим общим условиям и определяющие тем самым расслоения E , отвечающие монополям. Пространство M всех спектральных кривых в W совпадает с $P^{-1}(C)$, где $P: W \rightarrow W_{red}$ — отображение, введенное нами в п. 1. Докажем теперь критерий гладкости для $P^{-1}(C)$.

Предложение 6. Пусть C — гладкая кривая в W_{red} , трансверсально пересекающая ось $\{0\} \times \mathbb{R}$ в дискретном множестве точек, причем $(0, 0) \notin C$. Многообразие $P^{-1}(C)$ является гладким тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие (*): в окрестности каждой точки p из $C \cap \{0\} \times \mathbb{R}$ кривая C может быть задана уравнением $f(\kappa_1, \kappa_2) = 0$, где f — гладкая функция, четная по κ_1 , причем $\partial f / \partial \kappa_2 \neq 0$ в точке p .

Доказательство. Достаточность. Так как отображение P является композицией $P_c \circ Q$, где Q — факторизация по действию трансляций, то достаточно доказать гладкость многообразия $P_c^{-1}(C)$. Вне подмножества $\{0\} \times \mathbb{R}$ в W_{red} отображение P_c является субмерсией; нам нужно проверить гладкость только в тех точках C , которые лежат в $\{0\} \times \mathbb{R}$. Пусть $(\kappa_1, \kappa_2) = (0, x) \in C$; тогда точка

$(c_{20}, c_{21}, \nu_2) = (0, 0, x)$ лежит в $P_c^{-1}(C)$. Мы покажем, что многообразие $P_c^{-1}(C)$ является гладким в этой точке (с учетом действия группы этого будет достаточно).

i) Сужение отображения P_c на подмножество $W_i = \{(0, c_{21}, \nu_2) \in W_c\}$ совпадает с отображением $(0, c_{21}, \nu_2) \rightarrow (|c_{21}|, \nu_2)$, и, следовательно, многообразие $P_c^{-1}(C) \cap W_i$ гладко в точке $(0, 0, x)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (*).

ii) Многообразие $P_c^{-1}(C)$ является гладким тогда и только тогда, когда пересечение $P_c^{-1}(C) \cap W_i$ гладко в точке $(0, 0, x)$.

Действительно, в окрестности точки $(0, 0, x)$ с $x \neq 0$ имеем $W_c \cong S^2(U) \times I$, где U - окрестность нуля в $\mathbb{C}$, $S^2(U)$ - симметрическое произведение U на себя, а I - интервал на прямой $\mathbb{R}$. Точками $S^2(U)$ являются неупорядоченные пары корней α, β , определяющие пересечение $\{x = \alpha, \beta, -1/\bar{\alpha}, -1/\bar{\beta}\}$ дивизора с комплексной прямой $\{w = 0\}$, а $\nu \in I$ есть $SO(3)$ -инвариантный масштабный множитель. Вдоль прямой $\{(0, 0, y), y \in \mathbb{R}\}$ в W_c масштабный множитель можно взять равным y . Аналогично, $W_i \cong U \times I$.

Пусть $Sym: U \times U \times I \rightarrow S^2(U) \times I$ - естественная проекция; рассмотрим многообразие $(P_c \circ Sym)^{-1}(C)$. Определим отображение $T_\alpha(z): U \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ посредством $z \rightarrow (z - \alpha)/(\bar{\alpha}z + 1)$. Отметим, что если α и β - две точки в U , то существует вещественная константа c , такая, что $T_\alpha(\beta) = \exp(2\pi i c) T_\beta(\alpha)$. Пусть $F(\alpha, \nu): U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ - осесимметричная (т.е. $F(\alpha, \nu) = F(c\alpha, \nu)$, $|c| = 1$) гладкая функция, задающая пересечение $P_c^{-1}(C) \cap W_i$ в точке $(0, 0, x)$, причем $\partial F / \partial \nu \neq 0$ в $(0, 0, x)$. Определим гладкую композицию $\tilde{F}(\alpha, \beta, \nu) = F(T_\alpha(\beta), \nu)$. Эта функция локально задает многообразие $(P_c \circ Sym)^{-1}(C)$, и $\tilde{F}(\alpha, \beta, \nu) = \tilde{F}(\beta, \alpha, \nu)$. Поэтому $\tilde{F}$ есть гладкая функция на $S^2(U) \times I$, локально определяющая многообразие $P_c^{-1}(C)$, причем $\partial \tilde{F} / \partial \nu \neq 0$ в точке $(0, 0, x)$.

Необходимость. Множество W_{red} естественным образом вложено в W_c . В точке $(0, x) \in C$ вектор $\partial / \partial \nu_2$ по предположению трансверсален к кривой C в W_{red} . С другой стороны, вектор $\partial / \partial \nu_2$ трансверсален также по отношению к действию группы в точке $(0, 0, x)$ и, следовательно, трансверсален к многообразию $P_c^{-1}(C)$ в W_c . Таким образом, 2-плоскость, содержащая W_{red} , трансверсально пересекает многообразие $P_c^{-1}(C)$, и потому выполнено условие (*).

5. Пространство модулей

Пусть M есть многообразие $P^{-1}(C)$. Тогда M есть пространство модулей монополей заряда 2.

Т е о р е м а 7. i) M есть симметричное многообразие, гладко вложенное в пространство $W = \mathbb{R}^8$.

ii) Многообразие M диффеоморфно $\mathbb{R}^3 \times T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))/\pm$, где $T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))/\pm$ есть касательное расслоение вещественной проективной плоскости, в котором касательные векторы вида v и $-v$ отождествляются для всех v .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение i) есть следствие предложений 5 и 6. Для доказательства утверждения ii): $P^{-1}(C) \cong \mathbb{R}^3 \times T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))/\pm$ необходимо и достаточно показать, что $P_c^{-1}(C) \cong T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))/\pm$. Пространство W_c является пространством неприводимого пятимерного представления группы $SO(3)$, а W_{red} — его факторпространство. Реализуем W_c как пространство симметричных бесследовых вещественных 3×3 -матриц, а W_{red} — как пространство диагональных матриц в W_c с убывающими значениями по диагонали. Пусть точке $(0, \alpha)$ в W_{red} отвечает диагональная матрица с собственными значениями $\alpha/\sqrt{6}$, $\alpha/\sqrt{6}$, $-2\alpha/\sqrt{6}$. Кривая C диффеоморфна кривой, состоящей из единичных векторов в W_{red} , за исключением точки $(0, -1)$ (см. доказательство предложения 6). Прообразом точки $(0, -1)$ является множество матриц с нормой 1 в W_c , имеющих два равных отрицательных собственных значения. Это множество есть в точности проективная плоскость $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, так как матрица указанного вида определяется ее собственным вектором с положительным собственным значением. Следовательно, многообразие $P_c^{-1}(C)$ есть $S^4 - \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Чтобы показать, что это многообразие совпадает с $T(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))/\pm$, заметим, что произвольному элементу из $P_c^{-1}(C)$ отвечает матрица, которая определяется тремя ортогональными собственными подпространствами с собственными значениями $\alpha_1 \geq \alpha_2 > \alpha_3$, $\sum \alpha_i = 0$, $\sum \alpha_i^2 = 1$. Собственное подпространство, отвечающее α_3 , определяет некоторую точку x в $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Собственное подпространство, отвечающее α_2 , при $\alpha_1 > \alpha_2$ определяет некоторое направление в касательном пространстве T_x в точке x . Величину

$(1 - \alpha_2/\alpha_1)/(1 + 2\alpha_2/\alpha_1)$ в этом случае можно взять в качестве нормы матрицы. Таким образом, рассматриваемая матрица соответствует паре векторов $v, -v$ в касательном расслоении. Случай $\alpha_2 = \alpha_1$ отвечает нулевому сечению касательного расслоения.

Благодарности. Автор признателен доктору Н.Дж.Хитчину за помощь и поддержку.

Литература

1. Богомольный Е.Б. Устойчивость классических решений. - Ядерная физика, 24 (1976), 449-454.
2. Duval P. Elliptic functions and elliptic curves. - IMS Lect. Notes 9, C.U.P., 1973.
3. Hitchin N.J. Monopoles and geodesics. - Commun. Math. Phys. 83 (1982), 579-602. [Перевод в настоящем сборнике.]
4. Hitchin N.J. On the construction of monopoles. - Commun. Math. Phys. 89 (1983), 145-190. [Перевод в настоящем сборнике.]
5. Lang S. Elliptic functions. - Reading, M.A.: Addison-Wesley, 1973. [Имеется перевод: Ленг С. Эллиптические функции. - М.: Наука, 1984.]
6. Jaffe A., Taubes C.H. Vortices and monopoles. - Boston: Birkhäuser, 1980.
7. Nahm W. All self-dual multimonopoles for arbitrary gauge groups. - CERN preprint TH.3172 (1981).
8. Ward R. A Yang-Mills-Higgs monopoles of charge 2. - Commun. Math. Phys. 79 (1981), 317-325.
9. Ward R. Ansätze for self-dual Yang-Mills fields. - Commun. Math. Phys. 80(1981), 563-574.

МОНОПОЛИ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ: ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ ДОНАЛЬДСОНА¹⁾

Жак Уртубиз

Département de Mathématiques, UQAM, C.P. 8888, Succursale
"A", Montréal H3C 3P8, Canada

Резюме. В недавней статье Дональдсон дал описание пространства модулей $SU(2)$ -монополей в терминах рациональных отображений; это было сделано косвенным образом, через ассоциированное решение уравнений Нама. Мы даем здесь интерпретацию этих рациональных отображений в терминах спектральной кривой монополя, а затем как "данных рассеяния" для самого монополя.

1. Введение

В работе [1] Дональдсон при доказательстве гипотезы Атья и Моррея дал описание пространства M_k модулей $SU(2)$ -монополей (решений $SU(2)$ -уравнений Богомольного) заряда k , показав, что пространство R_k рациональных отображений $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ степени k , таких, что $f(\infty) = 0$, можно отождествить с расслоением над M_k со слоем "окружность". Это отождествление производится косвенным образом с использованием того факта ([3, 4]), что монополи можно получить (с помощью бесконечномерной ADHM-конструкции) из решений уравнений Нама, т.е. $k \times k$ -матричнозначных функций $T_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, $z \in (0, 2)$, таких, что

$$\frac{dT_i}{dz} + \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k] = 0, \quad (1)$$

¹⁾ Hurtubise Jacques. Monopoles and rational maps: a note on a theorem of Donaldson. - Communications in Mathematical Physics, 1985, v.100, pp.191-196. [Research supported in part by a FCAC grant from the Gouvernement du Québec.]

$$T_i^*(z) = -T_i(z), \quad (2)$$

$$T_i(2-z) = T_i(z)^T, \quad (3)$$

T_i аналитичны на интервале $(0, 2)$ и имеют простые полюсы в точках $0, 2$, (4)

вычеты T_i при $z = 0$ задают неприводимое представление алгебры $su(2)$. (5)

Каждому классу $O(k, \mathbb{C})$ -эквивалентности таких решений Дональдсон ставит в соответствие семейство рациональных отображений, параметризованных точками окружности.

С другой стороны, в работах [2, 3] Хитчин показал, как можно связать с каждым монополем спектральную кривую S в $TP^4(\mathbb{C})$; кроме того, он показал, как можно получить решения уравнений Нама в терминах потоков на якобиане кривой S .

Цель этой заметки состоит в том, чтобы описать рациональные отображения Дональдсона на языке спектральных кривых, связывая тем самым эти два ассоциированных с монополями алгебро-геометрических инварианта. Рациональные отображения интерпретируются тогда непосредственно в терминах монополей и, как обнаруживается, строятся по "данным рассеяния", ассоциированным с множеством k параллельных прямых, соответствующих точкам на S . Из результата Дональдсона тогда вытекает, что каждое такое множество данных определяет некоторый монополь.

2. Рациональное отображение

Напомним сначала, как Дональдсон строит рациональное отображение по решению системы (I) - (5). Положим $A_0 = T_1 + iT_2$, $A_1 = -2iT_3$, $A_2 = T_1 - iT_2$; имеем

$$\frac{dA_0}{dz} - \frac{1}{2}[A_1, A_0] = 0. \quad (6)$$

Из условия (5) находим, что вычет матричной функции A_1 при $z = 0$ имеет собственные значения $-(k-1), -(k-3), \dots, (k-1)$;

пусть p - собственный вектор с единичной нормой, отвечающий собственному значению $k-1$. Рассмотрим векторные функции $v: (0, 2) \rightarrow \mathbb{C}^k$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{dv}{dz} - \frac{1}{2} A_1 v = 0. \quad (7)$$

Существует единственное решение u этого уравнения, такое, что $z^{-(k-1)/2} u \rightarrow p$ при $z \rightarrow 0$. Положим $B = -A_0(1)$, $W = u(1)$; тогда формула

$$f(z) = W^T(zI - B)^{-1}W \quad (8)$$

определяет искомое рациональное отображение.

Отметим кстати, что если рассматривать пространство $\mathbb{C}^k \times (0, 2)$ как векторное расслоение E над интервалом $(0, 2)$, а матрицы A_i как сечения расслоения $\text{End}(E)$, то из уравнения (6) вытекает, что матрица A_0 постоянна по отношению к тривиализации E с помощью решений уравнения (7).

3. Уравнения Нама и спектральные кривые

Мы пользуемся обозначениями работы [3]. Покроем сферу $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ двумя стандартными аффинными множествами U_0, U_1 , и пусть ζ' - координата на U_0 . Тогда многообразие $T\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ имеет локальные координаты $(\eta, \zeta) \rightarrow \eta \frac{d\zeta'}{d\zeta} \Big|_{\zeta'=\zeta}$. Пространство $T\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ обладает вещественной структурой задаваемой посредством $\tau(\eta, \zeta) = (-\bar{\eta}/\bar{\zeta}^2, -1/\bar{\zeta})$. Если обозначить через π проекцию $T\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ и положить $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$, то над пространством $T\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ можно определить линейные расслоения L^s , $s \in \mathbb{C}$, и $\mathcal{O}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, с функциями перехода из $\tilde{U}_1$ в $\tilde{U}_0$ вида $\exp(z\eta/\zeta)$ и ζ^n соответственно. Положим $L^s(n) = L^s \otimes \mathcal{O}(n)$.

Каждому монополю заряда k Хитчин [2] ставит в соответствие спектральную кривую S рода $(k-1)^2$ в $T\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, задаваемую уравнением

$$\eta^k + \alpha_1(\zeta)\eta^{k-1} + \dots + \alpha_k(\zeta) = 0, \quad (9)$$

где α_i - полином степени $2i$. При этом кривая S вещественна (τ -инвариантна), расслоение L^2 тривиально на S и $H^0(S, L^s(k-2)) = 0$ для $s \in (0, 2)$.

Решения уравнений Нама описываются следующим образом [3, § 4]. Сначала определяем расслоение E ранга k над интервалом $(0, 2)$, полагая для $s \in (0, 2)$

$$E_s = H^0(S, L^s(k-1)). \quad (10)$$

Затем доказываем существование корректно определенных сечений $\tilde{A}_i$ расслоения $\text{End}(E)$, удовлетворяющих для всех $v \in E_s$ условию

$$(\eta + \tilde{A}_0 + \zeta \tilde{A}_1 + \zeta^2 \tilde{A}_2) v = 0. \quad (11)$$

Необходимо тривиализовать расслоение E_s , с тем чтобы записать эндоморфизмы $\tilde{A}_i$ в виде матричных функций A_i . Для этого выбирается базис $t = (t_1, \dots, t_k)$ сечений расслоения E , обладающий следующим свойством. Если задать сечение t в покрытии $\{\tilde{U}_0, \tilde{U}_1\}$ сечениями $h_0(s, \eta, \zeta)$, $h_1(s, \eta, \zeta)$, удовлетворяющими на пересечении $\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1$ условию $h_0 = \exp(s\eta/\zeta) \zeta^{k-1} h_1$, то для матриц A_i эндоморфизмов $\tilde{A}_i$ в этом базисе должно выполняться соотношение

$$\frac{dh_0}{ds} + h_0 \left(\frac{1}{2} A_1 + \zeta A_2 \right) = 0. \quad (12)$$

(У Хитчина матрицы A_i транспонированы по отношению к нашим.) По матрицам A_i можно построить решение $\{T_i\}$ системы (1), (4), (5) по формулам, приведенным в начале § 2. Чтобы удовлетворить условиям (2) и (3), Хитчин определяет эрмитову и вещественную структуры на расслоении E : отображение τ поднимается над кривой S до антилинейного отображения $\sigma: H^0(S, L^s(k-1)) \rightarrow H^0(S, L^{-s}(k-1))$. Таким образом, если $u, v \in E_s$, то $u\sigma(v) \in H^0(S, \mathcal{O}(2k-2))$. Однако такой элемент можно единственным образом разложить в сумму $C_0 \eta^{k-1} + C_1(\zeta) \eta^{k-2} + \dots + C_k(\zeta)$, где C_0 - константа. Определим внутреннее произведение по формуле

$$\langle u, v \rangle = C_0. \quad (13)$$

Более явным образом, представляя, как и выше, сечение u в покрытии $\{\tilde{U}_0, \tilde{U}_1\}$ функциями f_0, f_1 , а сечение v функциями g_0, g_1 , получим

$$\langle u, v \rangle = \text{коэффициент при } \eta^{k-1} \text{ в разложении } f_0(g_1 \circ \tau). \quad (14)$$

Это равенство определяет эрмитову структуру на расслоении E . Переходя к вещественной структуре, обозначим через α сечение расслоения L^2 над кривой S . Тогда $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ есть константа, которую можно положить равной единице [3, с. 106 настоящего сборника]. (Тем самым сечение α определяется с точностью до константы с единичной нормой; как мы увидим позднее, это приводит к фазовой неоднозначности в определении рационального отображения.)

Вещественная структура

$$\bar{\alpha}': H^0(S, L^3(k-1)) \rightarrow H^0(S, L^{2-k}(k-1)) \quad (15)$$

определяется равенством $\bar{\alpha}' = \alpha \bar{\alpha}$. При $k=1$ получаем ортогональную структуру

$$\langle u, v \rangle = \langle u, \bar{\alpha}' v \rangle = \text{коэффициент при } \eta^{k-1} \text{ в разложении } (\bar{\alpha}(\alpha) u v). \quad (16)$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы описать рациональное отображение в терминах спектральной кривой. Вначале заметим, что для тривиализации сечений $v(z)$ расслоения E , удовлетворяющих (7), нужно представить сечение $v(z)$ в покрытии $\{\tilde{U}_0, \tilde{U}_1\}$ функциями $g_0(z, \eta, \zeta), g_1(z, \eta, \zeta)$, удовлетворяющими условию $g_0(z, \eta, \zeta) = \exp(z\eta/\zeta) g_1(z, \eta, \zeta)$, и потребовать, чтобы сечение $g_0(z, \eta, 0)$ не зависело от z (см. (12)). Пусть $(\eta_i, 0)$, $i=1, \dots, k$, — точки пересечения кривой S с сечением $\zeta=0$, которые мы пока будем предполагать различными. Так как $H^0(S, L^3(k-2))=0$, можно выбрать базис сечений $v_i(z)$ расслоения E , задаваемых в покрытии $\{\tilde{U}_j\}$ функциями $g_{ji}(z, \eta, \zeta)$, такими, что

$$g_{0i}(z, \eta_i, 0) = \delta_{ij}. \quad (17)$$

Мы вычислим рациональное отображение по отношению к этому базису. Опишем сначала его составные части.

Матрица B . Из уравнения (11) имеем $A_0(z) = -\text{diag}(\eta_i)$, поэтому $B = \text{diag}(\eta_i)$.

Вектор W . Сначала заметим, что в окрестности $z = 0$ возможны три различных типа тривиализации расслоения E :

- 1) сечениями $v_i(z)$, которые непрерывно стремятся к ненулевым сечениям $v_i(0) \in H^0(S, \mathcal{O}(k-1))$;
- 2) сечениями $t_i(z)$, удовлетворяющими уравнению (12) ("тривиализация Нама");
- 3) сечениями $v_i(z)$, удовлетворяющими уравнению (7), с фиксированными "значениями" при $\zeta = 0$.

Как и в работе [3, с. 102 настоящего сборника], можно выбрать сечения v_i так, чтобы $v_i = z^{(k-1)/2} t_i$. С другой стороны, согласно работе [1], искомое сечение u (являющееся линейной комбинацией сечений v_i с постоянными коэффициентами) удовлетворяет соотношению $u(z) = z^{k-1} \sum \alpha_i(z) t_i(z)$, где $\alpha_i(0)$ конечны и не все равны нулю. Таким образом, $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-(k-1)/2} u(z) = \sum \alpha_i(0) v_i(0)$; однако все $v_i(0)$ как сечения из $H^0(S, \mathcal{O}(k-1))$ подняты с $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ посредством π^* (см. [3, предложение 5.1]). Следовательно, все значения $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-(k-1)/2} u(z)$ в точках $(\zeta_i, 0)$ одинаковы. То же самое справедливо для $u(1)$: в v_i -тривиализации

$$u(1) = C \cdot (1, 1, \dots, 1). \quad (18)$$

Остается вычислить C . Нужно, чтобы сечение $u(z)$ обладало свойством: $z^{-(k-1)} \langle u(z), u(z) \rangle \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$. Имея в виду определение (14), заметим, что функции $f_0(z, \eta, \zeta)$, $f_1(z, \eta, \zeta)$ представляют сечение u расслоения $L^3(k-1)$ над S тогда и только тогда, когда функции $\tilde{f}_0(z, \eta, \zeta) = f_0(z, z^{-1}\eta, \zeta)$, $\tilde{f}_1(z, \eta, \zeta) = f_1(z, z^{-1}\eta, \zeta)$ представляют сечение $\tilde{u}$ расслоения $L(k-1)$ над zS , где кривая zS задается уравнением

$$\eta^k + z\alpha_1(\zeta)\eta^{k-1} + \dots + z^k\alpha_k(\zeta) = 0. \quad (19)$$

Далее, число $\langle u, u \rangle$ совпадает с коэффициентом при η^{k-1} в разложении $f_0(f_1 \circ \tau)$, т.е. с коэффициентом при η^{k-1} в разложении $\tilde{f}_0(\tilde{f}_1 \circ \tau)$. Следовательно, нужно найти такое сечение $\tilde{u}(z)$, чтобы коэффициент при η^{k-1} в разложении $\tilde{f}_0(\tilde{f}_1 \circ \tau)$ был равен 1 при $z = 0$. При $z = 0$ функции $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ представляют сечение расслоения $L(k-1)$ над k -й формальной окрестностью $\{\eta^k = 0\}$ сечения $\{\eta = 0\}$. Из [3, с. 100 настоящего сборника] имеем $\tilde{f}_0 = C$, $\tilde{f}_1 = C \zeta^{k-1}$ над $\{\eta = 0\}$; из [3, лемма 5.4] выводим, что над $\{\eta^k = 0\}$ справедливы равенства $\tilde{f}_0 = C$, $\tilde{f}_1 = C \exp(-\eta/\zeta) \zeta^{-(k-1)}$. Тогда при $z = 0$ получаем $f_0(f_1 \circ \tau) = \frac{C^2}{(k-1)!} \eta^{k-1} + \dots$, откуда $C = ((k-1)!)^{1/2}$. Отметим, что постоянная C не зависит от кривой S .

Рациональное отображение. Если требовать, чтобы $(zI - B)^{-1}$ было эндоморфизмом, то формула (8) является только $O(k, \mathbb{C})$ -инвариантной. Для вычисления функции $f(z)$ в неортонормированном базисе имеем

$$f(z) = W^T g^T \cdot g(zI - B)^{-1} W, \quad (20)$$

где столбцы g являются компонентами векторов нашего базиса по отношению к ортонормированному базису. Таким образом, необходимо найти ортогональную структуру расслоения E при $z = 1$ относительно нашего базиса $\{v_i\}$.

Ввиду (16) скалярное произведение (v_i, v_j) равно коэффициенту при η^{k-1} в разложении $\delta(\alpha) v_i v_j$. Это определение корректно, как и в [3, предложение 4.5], причем искомый коэффициент совпадает с коэффициентом при главном члене интерполяционного многочлена Лагранжа по η , принимающего значения $\delta(\alpha) v_i v_j$ в точках η_h , $h = 1, \dots, k$. Таким образом,

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij} b_i \prod_{m \neq j} (\eta_i - \eta_m)^{-1}, \quad (21)$$

где b_i есть значение в точке $(\eta_i, 0)$ функции $b^0(\eta, \zeta)$ — представителя сечения $\delta(\alpha)$ на множестве $\tilde{U}_0$. Отсюда $g^T g = \text{diag}(b_i \prod_{m \neq j} (\eta_i - \eta_m)^{-1})$. Подставляя B, W и $g^T g$ в формулу (20), получаем, что функция f имеет полюсы при $z = \eta_i$ с вычетами $(k-1)! b_i \prod_{m \neq j} (\eta_i - \eta_m)^{-1}$. Пользуясь этим описанием, мы можем распространить определение f и на случай, когда η_i не являются различными.

(Нормировка делением на $(k-1)!.)$

Т е о р е м а . Пусть $SU(2)$ -монополи (V, Φ) имеет спектральную кривую S . Пусть $b(\alpha)$ - нормированное сечение расслоения L^{-2} над S , представляемое функциями b^i над $\tilde{U}_i \cap S$, $b^0(\eta, \zeta) = \exp(-2\eta/\zeta) b^1(\eta, \zeta)$. Пусть $g(\eta)$ - полином степени k с коэффициентом 1 при старшей степени, корни которого совпадают с точками пересечения $S \cap \{\zeta = 0\}$. Пусть $h(\eta)$ - полином степени $k-1$, такой, что $h(\eta) = b^0(\eta, 0)$ над $S \cap \{\zeta = 0\}$. Тогда $f(z) = h(z)/g(z)$ - рациональное отображение, отвечающее монополю (V, Φ) .

Еще раз отметим, что фазовая неоднозначность в определении данного рационального отображения связана с нормировкой сечений $b(\alpha)$.

4. Интерпретация в терминах монополей

Остается еще интерпретировать вышеизложенное непосредственно в терминах монополя (V, Φ) . Для этого воспользуемся результатами работы [2]; для простоты мы рассматриваем случай, когда все η_i различны.

Пространство TP^1 есть пространство ориентированных прямых в $\mathbb{R}^3$; подмножество $D = \{(\eta, 0) : \eta \in \mathbb{C}\}$ отвечает параллельным прямым $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (\operatorname{Re} \eta, \operatorname{Im} \eta, t)$, $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, если F является расслоением ранга 2 над $\mathbb{R}^3$, на сечениях которого связность ∇ и поле Хиггса Φ действуют обычным образом, то кривая S есть множество прямых C , на которых существует сечение z со свойством

$$(\nabla_t - i\Phi)z = 0, \quad z \text{ стремится к нулю при } t \rightarrow \pm\infty. \quad (22)$$

Отсюда определяются полюсы нашего рационального отображения: они суть комбинации $(x_1^j + ix_2^j)$ координат k параллельных оси x_3 прямых C_j , на которых существуют сечения, удовлетворяющие (22).

Остается дать интерпретацию вычетов или, что эквивалентно, функций b_i . Согласно [2, с. 31-37 настоящего сборника],

мы можем тривиализовать расслоение F сечениями, удовлетворяющими $\nabla_t z = 0$ вдоль прямых в $\mathcal{C}$, двумя различными способами:

(а) так, чтобы тривиализация была асимптотически плоской вдоль плоскости $\{(x_1, x_2, t): x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ при $t \rightarrow +\infty$ по крайней мере в конечной области данной плоскости;

(б) так, чтобы то же самое было справедливо при $t \rightarrow -\infty$. Кроме того, существуют сечения A, B расслоения F над $\mathbb{R}^3$, обладающие следующими свойствами:

(i) сечение A постоянно относительно тривиализации (а), т.е. является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами сечений из (а), тривиализующих расслоение F ; сечение B постоянно относительно тривиализации (б);

(ii) сечения A, B имеют единичную длину;

(iii) нормируя решения $z_i(t)$ уравнения (22) над C_i условием

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t-k} z_i(t) - A = 0,$$

будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t-k} z_i(t) - b_i B = 0. \quad (23)$$

(Воспользуйтесь определением расслоения L , приведенным в [2, с.26 настоящего сборника].) Итак, задание рационального отображения эквивалентно заданию

k параллельных оси x_3 прямых C_i , на которых существует решение задачи (22);
"данных рассеяния" b_i на C_i , заданных посредством (23).

Из результата Дональдсона тогда вытекает, что каждый такой набор данных определяет единственный монополю; эти наборы параметризуют пространство $SU(2)$ -монополей (если распространить нашу конструкцию на случай кратных прямых C_i с соответствующим определением данных рассеяния). Данные (C_i, b_i) и $(C_i, \varkappa b_i)$, где $\varkappa$ — константа с единичной нормой, отвечают одному и тому же монополю. Этот результат по существу совпадает с результатом Атьи [5] для гиперболических монополей.

Литература

1. Donaldson S.K. Nahm's equations and the classification of monopoles. - Commun.Math.Phys. 96 (1984), 387 - 408.
[Перевод в настоящем сборнике.]
2. Hitchin N.J. Monopoles and geodesics. - Commun. Math.Phys. 83 (1982), 579 - 602. [Перевод в настоящем сборнике.]
3. Hitchin N.J. On the construction of monopoles. - Commun. Math. Phys. 89 (1983), 145 - 190. [Перевод в настоящем сборнике.]
4. Nahm W. All self-dual multimonopoles for arbitrary gauge groups. - CERN preprint TH.3172 (1981).
5. Atiyah M.F. Magnetic monopoles in hyperbolic space. - Proceedings of International Colloquium on Vector Bundles. - Tata Institute, Bombay, 1984. [Перевод в настоящем сборнике.]

МАГНИТНЫЕ МОНОПОЛИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾

М.Ф. Атья

Mathematical Institute, University of Oxford, 24-29 St. Giles,
Oxford OX1 3LB, England

§1. Введение

В последние годы в физике широко и успешно применялось преобразование Пенроуза. Оно позволяет переформулировать некоторые физические задачи как задачи алгебраической геометрии [1]. Например, решения автодуальных уравнений Янга - Миллса на $\mathbb{R}^4$ (описывающие инстантоны) превращаются в голоморфные расслоения на трехмерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_3$. Аналогично, решения уравнения Богомольного на $\mathbb{R}^3$ (описывающие "магнитные монополи") превращаются в голоморфные расслоения на $T\mathbb{P}_1$ (касательном расслоении к $\mathbb{P}_1$) [7]. Здесь рассматривается подобная задача, но для магнитных монополей, заданных не на трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, а на трехмерном гиперболическом пространстве H^3 . Твисторные методы применимы и к этому случаю, и "гиперболические монополи" также могут быть описаны с помощью голоморфных расслоений.

Результаты оказываются проще, чем в евклидовом случае, и в то же время сохраняют все его основные черты. Это служит оправданием изучения гиперболических монополей. Кроме того, устремляя к нулю кривизну гиперболического пространства, мы получаем евклидов случай как естественный предел гиперболического. Детали этого предельного перехода довольно тонки и требуют гораздо более тщательного исследования, чем проводимое здесь. Поэтому кажется естественным принять гипотезу, что пространство модулей

¹⁾ Atiyah M.F. Magnetic Monopoles in Hyperbolic Space. In: Proceedings of the International Colloquium on Vector Bundles, - Tata Institute, Bombay, 1984 .

(пространство параметров) монополей не меняется при переходе к этому пределу. Эта гипотеза (для группы $SU(2)$) получила серьезное подтверждение в недавней работе Дональдсона [5] о пространстве модулей евклидовых монополей.

В § 2 объясняется, что гиперболические монополи, удовлетворяющие подходящим условиям убывания на бесконечности, можно, по существу, рассматривать как инстантоны, инвариантные относительно группы S^1 . Хотя этот прием работает в весьма общих условиях, для любой компактной группы Ли G и для любых асимптотических значений поля Хиггса, я ограничусь для простоты случаем группы $SU(2)$. Именно этот случай весьма подробно изучен для евклидова трехмерного пространства [7-10], поэтому у нас будет материал для сравнения. В частности, я покажу, что две процедуры расщепления (редукции к треугольной группе), Уорда [10] и Хитчина [7], имеют простые аналоги в гиперболическом случае.

Твисторный подход к S^1 -инвариантным инстантонам развивается в § 3. После этого в § 4 обсуждается "мини-твисторная" картина. Аналогом пространства Хитчина TP_1 (квадратичного конуса) служит теперь несингулярная квадратичная поверхность Q , а аналогом спектральной кривой Хитчина — кривая в Q . Однако в гиперболическом случае эта спектральная кривая имеет дополнительную интерпретацию в терминах прямых подскока инстантонного расслоения на трехмерном твисторном пространстве.

В § 5 обсуждается предельный переход к нулевой кривизне. В мини-твисторной картине это означает, что мы имеем дело с семейством $Q(t)$ несингулярных квадрик, которые вырождаются в квадратичный конус при $t \rightarrow 0$. Хотя общая ситуация вполне ясна, остается много технических вопросов, связанных с этим предельным переходом, в подробности которых я не вхожу и которые требуют тщательного исследования.

Наконец, в § 6 я покажу, используя недавний результат Дональдсона [4] о пространстве модулей инстантонов, что пространство модулей S^1 -инвариантных инстантонов (т.е. гиперболических монополей) можно отождествить с пространством рациональных функций (одной комплексной переменной). Этот результат был выведен также в работе [2] (в более общем контексте). Однако здесь мы предлагаем другое, в некотором смысле более элементарное, изложение. Кроме того, оно позволяет отождествить рациональные функции, соответствующие монополю, с частью матрицы рассеяния для дифференциального оператора Хитчина. Выглядит правдоподобным, что аналогичная интерпретация справедлива и для монополей в евклидовом пространстве.

Из этого введения ясно, что многие ключевые моменты основаны на результатах С.К. Дональдсона. Я благодарен ему и Н.Дж. Хитчину за очень ценные обсуждения этих вопросов.

§ 2. Инстантоны и гиперболические монополи

Для начала напомним автодуальные уравнения Янга - Миллса на $\mathbb{R}^4$:

$$*F = F \quad (2.1)$$

и уравнения Богомольного на $\mathbb{R}^3$:

$$D\varphi = *F. \quad (2.2)$$

Здесь F - кривизна связности, φ (поле Хиггса) - сечение присоединенного расслоения, $D\varphi$ - ковариантная производная этого сечения и $*$ - оператор дуальности (по отношению к евклидовой метрике). При подходящих условиях убывания на бесконечности решения уравнений (2.1) называются инстантонами, а решения уравнений (2.2) - монополями. Для таких решений L^2 -норма кривизны F конечна в обоих случаях (она называется действием в четырехмерной теории и энергией в трехмерной).

Хорошо известно, что всякое решение уравнений (2.1), не зависящее от координаты x_4 , можно интерпретировать как решение уравнений (2.2) с полем φ , равным x_4 -компоненте связности. Таким образом, монополь можно рассматривать как решение уравнений (2.1); однако это не будет решение инстантонного типа, так как ему отвечает бесконечное действие.

Вместо трансляционно-инвариантных решений можно рассматривать решения, инвариантные относительно вращений, например вращений в плоскости (x_3, x_4) . В этом случае удобно ввести в этой плоскости полярные координаты. Тогда евклидов метрический элемент dx^2 переписывается в виде

$$\begin{aligned} dx^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 = \\ &= r^2 \left\{ \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dr^2}{r^2} + d\theta^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Трехмерное гиперболическое пространство H^3 постоянной кривизны -1 можно отождествить с верхним полупространством

$z > 0$ в (x, y, z) -пространстве. Формула (2.3) показывает, что имеется конформная эквивалентность

$$\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^2 \sim H^3 \times S^1. \quad (2.4)$$

Это означает, что S^1 -инвариантные решения уравнения (2.1) на $\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^2$ соответствуют решениям уравнения (2.2) на H^3 . Поскольку группа S^1 компактна, это соответствие переводит решения с конечным действием на $\mathbb{R}^4$ в решения с конечной энергией на H^3 . В частности, S^1 -инвариантные инстантоны, определенные на всем $\mathbb{R}^4$ (т.е. на S^4), можно интерпретировать как решения уравнения (2.2) с конечной энергией, определенные на H^3 . Мы увидим, что разумно определить монополи на H^3 как решение уравнения (2.2), возникающее таким способом из S^1 -инвариантного инстантона. Это определение обходит стороной интересные, но технические вопросы о точных условиях убывания на бесконечности, накладываемых на монопольные решения.

На этой стадии мы должны внимательно рассмотреть понятие S^1 -инвариантности. Незвестной величиной в уравнении (2.1) служит связность A на главном расслоении P на $\mathbb{R}^4$, и S^1 -инвариантность означает, что действие группы S^1 поднимается до действия на P , сохраняющего A . Заметим, что выбор этого поднятия составляет часть данных.

До сих пор структурная группа G была произвольна. В дальнейшем мы выбираем для простоты $G = SU(2)$; мы часто будем работать с ассоциированным векторным расслоением E (со слоем $\mathbb{C}^2$). При этом действие группы S^1 определяет при ограничении на ось $\mathbb{R}^2$ (т.е. на плоскость (x_1, x_2)) представление группы S^1 на слоях расслоения E . Это представление (с точностью до сопряжения) не зависит от точки на оси и должно иметь вид

$$\lambda \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^p & 0 \\ 0 & \lambda^{-p} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

для некоторого целого $p \geq 0$. Целое число p совпадает с асимптотическим значением нормы $|\varphi|$ поля Хиггса. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что геометрически поле Хиггса есть разность между производной Ли и ковариантной производной вдоль орбит действия группы S^1 . В неподвижной (отно-

сительно этого действия) точке ковариантная производная равна нулю, а производная Ли есть просто инфинитезимальное действие на слое, определенное формулой (2.5).

Уже это показывает, что наше определение монополя в некотором смысле ограничено, поскольку мы требуем, чтобы величина $|\varphi|$ стремилась к целочисленному значению на бесконечности. Если мы ослабим это условие (но сохраним подходящие условия убывания), то наш монополю будет соответствовать не инстантону, а некоторому решению уравнения (2.1) с особенностью типа ветвления вдоль $S^2 \subset S^4$. Такие решения, с нетривиальной голономией около S^2 , были найдены в явном виде в [6]. Систематическое исследование гиперболических монополей должно, конечно, включать все такие решения, но в этой работе я буду обсуждать только "целочисленный" случай.

За исключением тривиального случая $p = 0$, мы можем определить подрасслоение расслоения E над S^2 , соответствующее положительному множителю λ^p в (2.5); оно имеет целочисленный первый класс Чжэня. Он равен (с точностью до знака) обычному магнитному заряду k монополя.

Чтобы правильно писать знаки, мы сначала должны договориться об ориентации. Используя действие окружности, ориентируем плоскость $\mathbb{R}^2$, в которой происходит вращение. После этого ориентация пространства $\mathbb{R}^4$ индуцирует ориентацию на плоскости $\mathbb{R}^2$ неподвижных точек. Поскольку границей пространства H^3 служит эта плоскость $\mathbb{R}^2$, оно тоже наследует ориентацию. Она оказывается противоположной ориентации, наследуемой с помощью (2.4) из ориентации пространства $\mathbb{R}^4$. Поэтому решения уравнения Богомольного на H^3 соответствуют антиавтодуальным связностям на $\mathbb{R}^4$ (не зависящим от θ).

С этими соглашениями о знаках целое число k , определенное выше, действительно оказывается положительным и совпадает с магнитным зарядом монополя. Более того, антиинстантонное число, т.е. второй класс Чжэня c_2 расслоения на S^4 , связано с k и p простой формулой

$$c_2 = 2kp. \quad (2.6)$$

Это легко доказать, используя эквивариантные когомологии (см. [3]). Эквивариантный класс c_2 расслоения E , ограниченного на фиксированную сферу $S^2 \subset S^4$, равен

$$-(kx - pu)^2,$$

где x порождает $H^2(S^2)$ и u порождает эквивариантное H^2 от точки. Поскольку эквивариантный класс c_1 нормально-го расслоения к S^2 в точности равен u , мы находим

$$c_2 = \text{коэффициент при } x \text{ в } -\frac{(kx - pu)^2}{u} = 2kp.$$

Можно вывести (2.6) иначе, приравнявая энергию монополя (умноженную на 2π) к действию антиинстантона и используя формулы

$$pk = \frac{1}{4\pi} \int |F|^2 dx^3,$$

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int |F|^2 dx^4.$$

Множитель 2 в (2.6) возникает потому, что член $|D\varphi|^2$ дает по (2.2) такой же вклад в энергию, как и $|F|^2$. Это рассуждение, использующее интегралы, является, конечно, явной дерамовской версией кохомологического рассуждения, приведенного выше (дальнейшие объяснения см. в [3]).

Теперь обсудим, какую информацию о гиперболических монополях можно извлечь из известных фактов об инстантонах.

§ 3. Твисторная картина

Напомним, что твисторным расслоением (см. [1]) называется расслоение

$$\mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \rightarrow S^4 \quad (3.1)$$

и что $SU(2)$ -антиинстантоны на S^4 поднимаются до голоморфных векторных расслоений F (ранга 2) на $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Более того, антиинволюция σ пространства $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, определенная формулой

$$\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-\bar{z}_2, \bar{z}_1, -\bar{z}_4, \bar{z}_3),$$

поднимается на F и определяет на нем вещественную структуру. Наконец, поскольку расслоение F поднимается с S^4 , оно тривиально на всех вещественных прямых (на слоях расслоения (3.1)).

S^4 -инвариантный антиинстантон на S^4 соответствует при этом некоторому расслоению F на $P_3(\mathbb{C})$, на котором действует S^1 . Обсудим подробно это действие.

Прежде всего действие группы S^1 на S^4 естественным образом поднимается (с помощью (3.1)) на $P_3(\mathbb{C})$. Комплексификация этого действия определяет действие группы $\mathbb{C}^*$. Оно имеет две неподвижные прямые, которые мы обозначим через P_1^+ и P_1^- . Проекция (3.1) переводит каждую из них в неподвижную относительно вращения сферу $S^2 \subset S^4$. Отображение $P_1^+ \rightarrow S^2$ сохраняет ориентацию, а $P_1^- \rightarrow S^2$ меняет. Кроме того, β переставляет P_1^+ и P_1^- . На нормальном расслоении к P_1^+ в P_3 группа $\mathbb{C}^*$ действует просто скалярным умножением, а на нормальном расслоении к P_1^- индуцируется дуальное (обратное) представление.

При ограничении расслоения F на P_1^+ оно разлагается в прямую сумму

$$F|_{P_1^+} \cong H^{-k} \otimes L^p \oplus H^k \otimes L^{-p}, \quad (3.2)$$

где H — положительное линейное расслоение Хопфа (с тривиальным $\mathbb{C}^*$ -действием) и L — стандартное одномерное представление группы $\mathbb{C}^*$. Это следует из обсуждения в § 2; поэтому k есть магнитный заряд и p — предельное значение нормы поля Хиггса. Поскольку β меняет ориентацию, мы получаем, что

$$F|_{P_1^-} \cong H^{-k} \otimes L^{-p} \oplus H^k \otimes L^p. \quad (3.3)$$

Разложения (3.2) и (3.3) индуцируют расщепления расслоения F , описываемые следующим образом:

Предложение 3.4. На $P_3 - P_1^-$ существует единственное голоморфное линейное подрасслоение L^+ расслоения F , такое, что

- (i) L^+ инвариантно относительно действия группы $\mathbb{C}^*$,
- (ii) ограничение расслоения L^+ на P_1^+ совпадает с первым слагаемым $H^{-k} \otimes L^p$ в (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейное подрасслоение расслоения F задается сечением ассоциированного проективного расслоения $P(F)$. Рассмотрим теперь действие группы $\mathbb{C}^*$ на $P(F)$. Имеются четыре неподвижные прямые α^+ , α^- , β^+ , β^- , соответствующие членам разложений (3.2) и (3.3); прямые α^+ , α^- (в указанном порядке) соответствуют членам в (3.2), прямые β^+ , β^- — членам в (3.3). Представление группы $\mathbb{C}^*$ в пространстве, нормальном к прямой α^+ , α^- , имеет следующие веса:

$$\begin{aligned}\alpha^+ &: (1, 1, -2p), \\ \alpha^- &: (1, 1, 2p).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Веса $\pm 2p$ отвечают направлениям слоя, а единичные веса — направлениям, нормальным к P_1^+ в P_3 . Рассмотрим теперь $\mathbb{C}^*$ -орбиты в $P(F)$, лежащие над $P_3 - (P_1^+ \cup P_1^-)$. При $t \rightarrow 0$ ($t \in \mathbb{C}^*$) мы получаем предельную точку на каждой такой орбите. Эти предельные точки лежат в α^+ или α^- . Поскольку все веса, соответствующие прямой α^- , положительны, большинство $\mathbb{C}^*$ -орбит стремятся к α^- . Рассмотрим выделенные $\mathbb{C}^*$ -орбиты, которые стремятся к α^+ . Поскольку α^+ имеет два положительных веса, нетрудно заключить, что эти $\mathbb{C}^*$ -орбиты определяют комплексное многообразие коразмерности 1, лежащее над $P_3 - P_1^-$ в $P(F)$. Это и есть требуемое сечение. Формальное доказательство может быть дано с использованием рассуждений из § 6.

Меняя местами подмногообразия P_1^+ и P_1^- в (3.4) (т.е. заменяя t на t^{-1} в $\mathbb{C}^*$), мы получаем аналогично линейное подрасслоение L^- над $P_3 - P_1^+$, продолжающее первый член $H^{-k} \otimes L^{-p}$ разложения (3.3).

Напомним теперь, что прямая в P_3 , на которой F нетривиально, называется прямой подскока. Эти прямые связаны с нашими линейными расслоениями следующим образом:

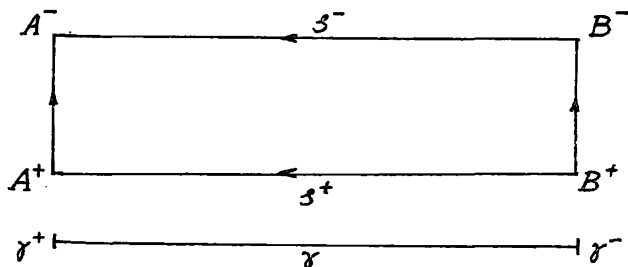
П р е д л о ж е н и е 3.6. Слои расслоений L^+ и L^- над точкой $x \in P_3 - (P_1^+ \cup P_1^-)$ совпадают тогда и только тогда, когда замыкание (в P_3) $\mathbb{C}^*$ -орбиты точки x является прямой подскока расслоения F .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим теми же символами L^+ , L^- сечения расслоения $P(F)$, задающие соответствующие линейные подрасслоения над подходящими частями прост-

ранства $\mathbb{P}_3$. Предположим сначала, что замыкание множества $\mathbb{C}^*x$ (обозначим его, скажем, через γ) не является прямой подскока, так что $\mathbb{P}(F)$ есть прямое произведение над γ . Тогда его сечения постоянны и определяются своими значениями в произвольной точке. Следовательно, действие группы $\mathbb{C}^*$ на этих сечениях совпадает с ее действием на слоях над двумя точками

$$\gamma^+ = \gamma \cap \mathbb{P}_1^+, \quad \gamma^- = \gamma \cap \mathbb{P}_1^-.$$

В частности, как указано на диаграмме, имеется ровно два неподвижных сечения:



Здесь A^+ — точка сечения z^+ над γ^+ и т.д., а стрелки указывают направление $\mathbb{C}^*$ -потока при $t \rightarrow 0$. Как видно из диаграммы, A^+ является седловой точкой над γ^+ , и поэтому z^+ должно совпадать с L^+ . Аналогично, B^- является седловой точкой над γ^- , так что z^- совпадает с L^- . Поскольку z^+ и z^- не пересекаются, откуда следует, что $L^+(x)$ и $L^-(x)$ не совпадают.

Обратно, если $L^+(x) \neq L^-(x)$, то мы получим такую же диаграмму, как выше, и заключим, что $\mathbb{P}(F)$ тривиально над γ . Для этого рассмотрим замыкание общей $\mathbb{C}^*$ -орбиты в $\mathbb{P}(F)|_\gamma$. Направление стрелок на диаграмме показывает, что это дает сечение δ , проходящее через A^- и B^+ . Кроме того, из (3.5) следует, что оба индекса пересечений $\delta \cdot z^+$ и $\delta \cdot z^-$ равны $2p$. Это показывает, что z^+ и z^- гомотогичны, и поэтому $\mathbb{P}(F)|_\gamma$ действительно является прямым произведением (если $\mathbb{P}_1$ -расслоение на $\mathbb{P}_1$ не является прямым произведением, то любые два непересекающихся сечения имеют противоположные индексы самопересечения).

Заметим, что вещественная структура расслоения F меняет местами L^+ и L^- и должна сохранять множество прямых подскока. Кроме того, поскольку F не имеет вещественных прямых

подскока, из предложения 3.6 следует, что L^+ и L^- не могут совпадать ни для каких точек $\mathcal{X}$, для которых прямая γ (замыкание орбиты $\mathbb{C}^*x$) вещественна.

Линейные расслоения L^+ и L^- являются на самом деле алгебраическими. Это можно доказать, заметив, что на $\mathbb{P}_3 - (\mathbb{P}_1^+ \cup \mathbb{P}_1^-)$ они спускаются на факторпространство, являющееся квадратичной поверхностью. Поскольку алгебраические линейные расслоения соответствуют алгебраическим классам дивизоров, а алгебраические дивизоры на $\mathbb{P}_3 - \mathbb{P}_1$ продолжаются единственным образом на $\mathbb{P}_3$, мы заключаем, что L^+ и L^- продолжаютсЯ до линейных расслоений на $\mathbb{P}_3$. Из того, что (с точностью до действия группы $\mathbb{C}^*$) L^+ совпадает с H^{-k} на $\mathbb{P}_1^+$, следует, что L^+ (и аналогично L^-) продолжается до H^{-k} на $\mathbb{P}_3$. Кроме того, поскольку $\mathbb{P}_1^-$ имеет коразмерность 2, гомоморфизм $L^+ \rightarrow F$ продолжается до гомоморфизма $H^{-k} \rightarrow F$. Другими словами, расслоение $F(k) = F \otimes H^k$ обладает сечением σ^+ , обращающимся в нуль на $\mathbb{P}_1^-$, и аналогично сечением σ^- , обращающимся в нуль на $\mathbb{P}_1^+$. Таким образом, при общем соответствии между расслоениями ранга 2 на $\mathbb{P}_3$ и (подходящими) алгебраическими кривыми расслоение F соответствует прямой с некоторой кратностью (т.е. пучком с нильпотентами).

Чтобы описать эту ситуацию подробнее, нужно рассмотреть действие группы $\mathbb{C}^*$. Прежде всего заметим, что действие группы $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{P}_3$ возникает из следующего представления в пространстве $\mathbb{C}^4$:

$$\lambda \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda^{1/2} & & & \\ & \lambda^{1/2} & & \\ & & \lambda^{-1/2} & \\ & & & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Квадратные корни показывают, что эта формула действительно задает представление двулистного накрытия группы $\mathbb{C}^*$: фактически $SO(5) \rightarrow SU(4)$ есть спинорное представление. Обозначим через $\mathcal{H}$ расслоение Хопфа, рассматриваемое как эквивариантное расслоение с этим действием группы $\mathbb{C}^*$. Тогда при ограничении на $\mathbb{P}_1^+$ и $\mathbb{P}_1^-$ мы получаем

$$\mathcal{H}|_{\mathbb{P}_1^+} \cong H \otimes L^{1/2}, \quad \mathcal{H}|_{\mathbb{P}_1^-} \cong H \otimes L^{-1/2}. \quad (3.7)$$

Кроме того, действия группы $\mathbb{C}^*$ на изоморфных над $P_3 - P_1^-$ расслоениях L^+ и $\mathcal{H}^{-k}$ могут отличаться только на характер группы $\mathbb{C}^*$ (поскольку все голоморфные функции на $P_3 - P_1^-$ постоянны). Далее, из (3.7) можно вывести следующие изоморфизмы эквивариантных расслоений:

$$L^+ \cong \mathcal{H}^{-k} \otimes L^{p+k/2}, \quad L^- \cong \mathcal{H}^{-k} \otimes L^{-p-k/2}. \quad (3.8)$$

Следовательно, гомоморфизм $L^+ \rightarrow F$, умноженный на $\mathcal{H}^k$, дает гомоморфизм $L^{p+k/2} \rightarrow F(k)$, показывающий, что сечение σ^+ расслоения $F(k)$, равное нулю на P_1^- , имеет вес $p+k/2$, т.е.

$$\lambda(\sigma^+) = \lambda^{p+k/2} \sigma^+, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*. \quad (3.9)$$

Чтобы исследовать поведение сечения σ^+ около P_1^- , воспользуемся разложением (3.3). После тензорного умножения на $\mathcal{H}^k$ и применения формулы (3.7) оно принимает вид

$$F(k) \Big|_{P_1^-} \cong L^{-p-k/2} \oplus H^{2k} \otimes L^{p-k/2}. \quad (3.10)$$

Каноническое расслоение N^* на P_1^- имеет вид

$$N^* = H^{-1} \otimes L \otimes \mathbb{C}^2.$$

Следовательно, члены веса $p+k/2$ в нормальном ряде Тейлора для σ^+ могут возникать только двумя способами, а именно из

$$S^k(N^*) \otimes H^{2k} \otimes L^{p-k/2} \quad \text{и} \quad S^{2p+k}(N^*) \otimes L^{-p-k/2}.$$

Это показывает, что локально σ^+ задается парой функций (f, g) , где

$$\deg g = k, \quad \deg f = 2p + k. \quad (3.11)$$

Поэтому P_1^- является нулем кратности $k(2p+k)$. Это доказывает, что

$$c_2(F(k)) = 2pk + k^2,$$

и поэтому $c_2(F) = 2pk$, как мы уже доказали другим способом.

Поскольку (3.10) продолжается как точная последовательность (а не как прямая сумма) на $P_3 - P_1^+$, функция α из (3.11) определена глобально (как сечение расслоения H^*), а f — только локально.

§ 4. Мини-твисторная картина

В предыдущем параграфе описана структура расслоений на твисторном пространстве P_3 , соответствующих S^4 -инвариантным инстантонам. Действие группы C^* позволяет спустить их до расслоений на факторпространстве

$$Q = (P_3 - (P_1^+ \cup P_1^-)) / C^*. \quad (4.1)$$

Любая точка x из $P_3 - (P_1^+ \cup P_1^-)$ лежит на единственной трансверсали к P_1^+ и P_1^- . Поэтому эта трансверсаль совпадает с замыканием C^* -орбиты, проходящей через точку x . Это показывает, что

$$Q \cong P_1^+ \times P_1^-.$$

Таким образом, Q является (абстрактно) квадратичной поверхностью. Кроме того, вещественная структура на P_3 индуцирует вещественную структуру на Q ; эта вещественная структура меняет местами два сомножителя, и вещественные точки образуют "антидиагональ" Q^b , состоящую из пар $(y, b(y))$. Следовательно, расслоение F на P_3 спускается до некоторого расслоения, скажем $\tilde{F}$, на Q , также обладающего вещественной структурой.

Поскольку P_1^+ и P_1^- имеют коразмерность 2 в P_3 , два расслоения на P_3 , изоморфные на $P_3 - (P_1^+ \cup P_1^-)$, автоматически изоморфны на Q . Таким образом, по $\tilde{F}$ однозначно восстанавливается F и при спуске на Q никакая информация не теряется. Перейдем теперь к интерпретации результатов из § 3 в терминах расслоений на Q .

Линейное подрасслоение L^+ расслоения F спускается до линейного подрасслоения $\mathcal{L}^+$ расслоения $\mathcal{F}$. Обозначим через H_+ и H_- обратный образ на Q (относительно разложения (4.2)) соответственно расслоений Хопфа на P_1^+ и P_1^- . Тогда расслоение $\mathcal{L}^+$ должно иметь вид $H_+^\alpha \otimes H_-^\beta$ для некоторых целых чисел α и β . Чтобы найти их, воспользуемся изоморфизмами (3.7), которые могут быть переписаны в виде

$$L^+ \cong \pi_+^*(H^{-k} \otimes L^p) \cong \pi_-^*(H^{-k} \otimes L^{p+k}), \quad (4.2)$$

где $\pi_\pm: P_3 - P_1^\mp \rightarrow P_1^\pm$ — естественные линейные проекции. Ограничивая L^+ на плоскость $\pi_+^{-1}(y)$ для некоторого $y \in P_1^+$ и используя первый изоморфизм (4.2), мы получаем, что

$$\mathcal{L}^+|_{y \times P_1^-} \cong H_-^p. \quad (4.3)$$

Поэтому $\beta = p$. Аналогично, второй изоморфизм (4.2) показывает, что $\alpha = -(p+k)$. Следовательно,

$$\mathcal{L}^+ \cong H_+^{-p-k} \otimes H_-^p. \quad (4.4)$$

Аналогично находим, что

$$\mathcal{L}^- \cong H_+^p \otimes H_-^{-p-k}. \quad (4.5)$$

Таким образом, расслоение $\mathcal{F}$ на Q расщепляется двумя различными способами:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{L}^+)^* \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{L}^- \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{L}^-)^* \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^-$ определены формулами (4.4) и (4.5). Кроме того, вещественная структура переставляет эти расщепления.

Эти два расщепления совпадают там, где равен нулю сквозной гомоморфизм

$$\mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{L}^-)^*.$$

Это определяется обращением в нуль сечения δ линейного расслоения

$$(\mathcal{L}^+ \otimes \mathcal{L}^-)^* \cong (H_+ \otimes H_-)^k. \quad (4.7)$$

Множество нулей сечения $\mathcal{L}$ является, следовательно, кривой S в Q бистепени (k, k) . Кривая S вещественна, и линейные расслоения $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^-$ совпадают над S . Поэтому

$$H_+^{2p+k}|_S \cong H_-^{2p+k}|_S. \quad (4.8)$$

В более геометрических терминах это означает, что если D_+ , D_- — дивизоры на S , определяемые двумя системами образующих поверхности Q , то

$$(2p+k)(D_1 - D_2) \approx 0, \quad (4.9)$$

где $\approx$ обозначает линейную эквивалентность на S .

Следуя Хитчину [7], мы назовем S спектральной кривой гиперболического монополя. Как и в [7], S однозначно определяет монополь. Действительно, рассмотрим точную последовательность пучков на Q :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2p-2k, 2p) \rightarrow \mathcal{O}(-2p-k, 2p+k) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$ — пучок сечений расслоения $H_+^\alpha \otimes H_-^\beta$ (здесь мы использовали (4.8)). Выбирая

$$\delta(1) \in H^1(Q, \mathcal{O}(-2p-2k, 2p)) = H^1(Q, (\mathcal{L}^+)^2),$$

где δ — кограничный оператор в когомологической точной последовательности, мы получаем элемент, определяющий первое расширение из (4.6), и таким образом восстанавливаем $\mathcal{F}$.

Наконец заметим, что ограничение расслоения $\mathcal{F}$ на образующую любой системы на Q имеет постоянный тип $H_+^p \otimes H_-^{-p}$. Это незамедлительно следует из расщеплений (4.6) и изоморфизмов (4.4) и (4.5). Действительно, ограничивая $\mathcal{F}$ на P_- -образующую и используя первое расширение (4.6), мы получаем расширение

$$0 \rightarrow H_-^p \rightarrow \mathcal{F}|_{P_-} \rightarrow H_-^{-p} \rightarrow 0.$$

Оно расщепляется, поскольку $p > 0$.

Тот факт, что расслоение $\mathcal{F}$ нетривиально на общей образующей, означает, что расширения (4.6) задаются классами весьма частного вида. Это подтверждается подсчетом параметров, который показывает, что пространство всех расширений вида (4.6) гораздо шире, чем пространство модулей монополей. Кроме того, поскольку разложение имеет постоянный тип, т.е. отсутствуют выделенные образующие, поднятие расслоения $\mathcal{F}$ на $P_3 - (P_1^+ \cup P_1^-)$ продолжается на P_3 . Если бы были выделенные образующие, то $\mathcal{F}$ продолжался бы лишь как пучок без кручения, имеющий конечное число выделенных точек на P_1^+, P_1^- , в которых он не является локально свободным.

При $k = 1$ спектральная кривая S имеет бистепень $(1, 1)$ и является коническим сечением. Поэтому она соответствует точке 0 в H^3 . Все геодезические, проходящие через эту точку, являются тогда "спектральными прямыми". Кроме того, поскольку монополю однозначно определяется кривой S , он обладает вращательной симметрией относительно точки 0. Поэтому мы можем называть 0 центром монополя. Эта ситуация вполне аналогична той, которую мы имели в случае евклидова трехмерного пространства.

§ 5. Предельный переход

Сравнение результатов из § 4 с результатами Хитчина [7] показывает, что мини-гвисторные картины гиперболических и евклидовых монополей вполне аналогичны. В каждом случае голоморфное расслоение на мини-гвисторном пространстве имеет два канонических расщепления (сопряженных друг с другом). Эти расщепления совпадают над спектральной кривой, которая полностью определяет монополю. Основное различие заключается в том, что в евклидовом случае расщепления определяются асимптотическим поведением, а в гиперболическом случае мы имеем дело с компактификацией, которая включает в себя бесконечность.

Чтобы провести это сравнение дальше, рассмотрим, следуя Хитчину, случай $U(1)$ -монополей на гиперболическом пространстве. Для них связность плоская, а поле Хиггса равно константе i . Это соответствует тривиальному линейному расслоению на S^4 (или на гвисторном пространстве P_3) со стандартным S^4 -действием. Как мы видели в § 4, оно спускается с P_3 до расслоения на квадрике Q , равного $H_+^{-1} \otimes H_-$. Следовательно, оно служит аналогом линейного расслоения Хитчина L на TP_1 (касательном расслоении к P_1). Сравнивая (4.4) и

(4.6) с теоремой 6.3 из [7], мы видим, что они имеют один и тот же вид.

До сих пор мы рассматривали только стандартное гиперболическое пространство с кривизной -1 . Теперь мы будем менять кривизну и изучать предельный переход, при котором кривизна стремится к нулю, а гиперболическое пространство превращается в плоское евклидово пространство. Перепишем (2.3) в виде

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \left\{ R^2 \left[\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{r^2} \right] + R^2 d\theta^2 \right\}, \quad (5.1)$$

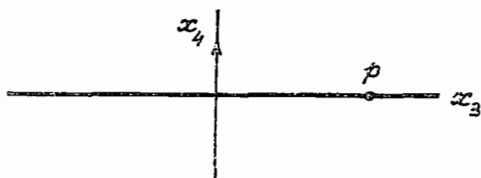
где R — некоторое положительное число. Это позволяет заменить (2.4) на другую конформную эквивалентность

$$\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^2 \sim H^3(R) \times S^1(R), \quad (5.2)$$

где $S^1(R)$ — окружность радиуса R , а $H^3(R)$ — гиперболическое пространство кривизны $-R^{-1}$. Теперь S^1 -инвариантный инстантон веса p на $\mathbb{R}^4$ определяет монополи на $H^3(R)$, для которого (из-за изменения масштаба на окружности) норма поля Хиггса стремится к $R^{-1}p$ на бесконечности. В частности, выбирая $R = p$, мы видим, что монополи на H^3 , для которых $|\varphi| \rightarrow p$ на бесконечности, эквивалентны монополям на $H^3(p^{-1})$, для которых $|\varphi| \rightarrow 1$ на бесконечности. Заметим, что в евклидовом пространстве мы всегда можем, из-за отсутствия абсолютной шкалы, перенормировать поле Хиггса так, что $|\varphi| \rightarrow 1$.

Наш замысел теперь заключается в том, что при $p \rightarrow \infty$ монополи на последовательности пространств $H^3(p^{-1})$ должны в некотором подходящем смысле сходиться к монополям на евклидовом пространстве. При этом поле Хиггса все время нормировано так, что $|\varphi| \rightarrow 1$ на бесконечности. Точнее говоря, реализуем $H^3(R)$ как шар радиуса R в евклидовом трехмерном пространстве. Легко показать, что при $R \rightarrow \infty$ гиперболические метрики на этих шарах сходятся на любом компактном множестве к евклидовой метрике. Теперь можно изучать последовательности гиперболических монополей, определенных каждый на своем $B(p)'$, сходящиеся к евклидову монополю при $p \rightarrow \infty$. Если последовательность сходится гладко, то ясно, что она действительно определяет евклидов монополи.

Если мы будем интерпретировать гиперболические монополи как S^1 -инвариантные инстантоны, то предельный переход будет выглядеть следующим образом. Рассмотрим вращения в плоскости (x_3, x_4) с центрами в точках $(0, 0, p, 0)$. В качестве параметра S^1 -вращения будем использовать деленную на 2π длину дуги орбиты, проходящей начало координат. Другими словами, векторное поле, порождающее вращение, нормировано так, что в начале координат оно имеет длину 1. При $p \rightarrow \infty$ эти векторные поля сходятся на любом компактном множестве к генератору сдвигов в направлении x_4 :



Эти векторные поля индуцируют голоморфные векторные поля ξ_p на P_3 , порождающие $\mathbb{C}^*$ -действия и сходящиеся при $p \rightarrow \infty$ к полю, порождающему $\mathbb{C}$ -действие.

Для стандартного S^1 -действия, рассмотренного в § 4, $\mathbb{C}^*$ -расслоение на Q , заданное формулой (4.1), определяет, как легко видеть (используя вычисления, аналогичные проведенным в § 4), линейное расслоение $H_+ \otimes H_-^{-1}$. Обращение ориентации окружности S^1 приводит к обратному расслоению $H_+^{-1} \otimes H_-$, а изменение масштаба приводит к замене расслоения на его степень. Следовательно, векторное поле ξ_p индуцирует стандартное действие группы $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ на расслоении $L_p = H_+^{-p} \otimes H_-^p$ на квадрике Q_p : главное расслоение для L_p можно отождествить с факторпространством $P_3 - (P_1^+(p) \cup P_1^-(p))$ по $\mathbb{Z}_p$ (где $P_1^\pm(p)$ обозначает множество нулей поля ξ_p). Обозначим через $\tilde{Q}_p$ дополнение к множеству вещественных точек в Q_p :

$$\tilde{Q}_p = Q_p - Q_p^{\mathbb{R}}. \quad (5.3)$$

Тогда L_p топологически тривиально на $\tilde{Q}_p$ и соответствует экспоненте элемента из $H^1(\tilde{Q}_p, \mathbb{C})$. Геометрически этот элемент можно рассматривать как $\mathbb{C}$ -расслоение, заданное действием $t \rightarrow \exp 2\pi i t \xi_p$ на универсальной накрывающей пространства $\tilde{P}_p$, где $\tilde{P}_p = \pi^{-1}(\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}_p^2)$, $\mathbb{R}_p^2$ - ось p -го вращения и $\pi: P_3 \rightarrow S^4$ - твисторное расслоение. Заметим, что пока p может быть произвольным положительным веще-

ственным числом; целочисленность требуется только тогда, когда мы имеем дело со всем Q_p , а не с открытым множеством $\tilde{Q}_p$.

При $p \rightarrow \infty$ квадратики Q_p стремятся к квадратичному конусу TP_1 ; это вырождение проще рассматривать, вложив все поверхности Q_p в фиксированное трехмерное проективное пространство. Сейчас я опишу эту конструкцию.

Вспомним сначала, что TP_1 параметризует ориентированные прямые в евклидовом трехмерном пространстве $V = \mathbb{R}^3$ и что точкам в $\mathbb{R}^3$ соответствуют вещественные сечения расслоения TP_1 . Вот один из способов описания этого соответствия. Рассмотрим аффинное двойственное пространство V' к V , т.е. пространство, параметризующее аффинные плоскости в V . Пусть проективное пространство P компактифицирует V , и пусть P' — его проективное двойственное. Тогда $V' \subset P'$ есть дополнение к одной точке. Если x, y, z — координаты в пространстве V , а t — четвертая однородная координата и

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \tau t = 0 \quad (5.4)$$

есть уравнение проективной плоскости, то (ξ, η, ζ, τ) служат однородными координатами в P' , а V' есть дополнение к точке $(0, 0, 0, 1)$. Далее, аффинная прямая $L \subset V'$ имеет двойственную прямую $L' \subset V$, а ее комплексификация пересекает комплексный квадратичный конус

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0 \quad (5.5)$$

в двух комплексно сопряженных точках. Ориентация прямой L определяет выбор одной из этих точек. Таким образом, аффинные прямые $L \subset V'$ параметризуются точками конуса (5.5), за исключением вершины $(0, 0, 0, 1)$. Заметим, что (5.5) двойственно к (чисто мнимой) конике в ∞ в P_C , заданной уравнениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0. \quad (5.6)$$

Она возникает из евклидовой метрической структуры пространства V .

Рассмотрим теперь гиперболическое пространство $H^3(R)$ и отождествим его, как и раньше, с шаром $B(R) \subset V$. Гиперболическая плоскость в $B(R)$ определяется своей "окружностью в бесконечности", т.е. на границе шара $B(R)$. Она высекается плоскостью в V , и поэтому аффинное двойственное прост-

пространство $B(R)'$ к $B(R)$ можно отождествить с подпространством в V' , представляющим те плоскости в V , которые удалены от начала координат меньше чем на R . Таким образом, $B(R)'$ задается неравенством

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - R^{-2}\tau^2 > 0. \quad (5.7)$$

Геометрическая в $B(R)$ определяется, следовательно, прямой L' , лежащей в области (5.7). Аналогом уравнения (5.5) служит уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - R^{-2}\tau^2 = 0. \quad (5.8)$$

Оно определяет комплексную квадрику в P_c' . Комплексификация границы пространства $B(R)$ задается двойственным уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 t^2 = 0. \quad (5.9)$$

Пересечение комплексифицированной L_c' с (5.8) состоит из пары сопряженных точек. Как и прежде, ориентация на геометрической определяет выбор одной из них. Заметим, что, так как L' лежит внутри области (5.7), она не пересекает квадрику (5.8). Поэтому наши точки не могут быть вещественными. Итак, ориентированные геометрические в $B(R)$ естественным образом параметризуются не вещественными точками (т.е. точками из $\tilde{Q}(R)$) квадрики $Q(R)$, заданной уравнением (5.8).

При $R \rightarrow \infty$ квадрика $Q(R)$ стремится к квадратичному конусу, заданному уравнением (5.5). Нетрудно видеть, что при этом параметризация (ориентированных) геометрических меняется непрерывным образом. Следовательно, если для каждого R задана ориентированная геометрическая α_R в $B(R)$ и при $R \rightarrow \infty$ геометрические α_R стремятся (на компактных множествах) к прямой, то соответствующие точки на $Q(R)$ стремятся к нужной точке конуса.

Опишем теперь семейство линейных расслоений L_R на $\tilde{Q}(R)$ и покажем, что они сходятся к описанному Хитчином линейному расслоению L на $\tilde{Q}(\infty) = TP_1$.

Обозначим через U открытое множество точек, для которых $\eta \neq i\xi$, а через V — открытое множество точек, для которых $\eta \neq -i\xi$. Их объединение покрывает $\tilde{Q}(R)$, поскольку недостающая прямая $\xi = \eta = 0$ пересекает $Q(R)$ в

вещественных точках $(0, 0, 1, \pm R)$. Функция перехода

$$g_{UV} = (\zeta + R^{-1}\tau)/(\zeta - R^{-1}\tau)$$

голоморфна и отлична от нуля на $U \cap V \cap Q_R$. Она определяет линейное расслоение на $\tilde{Q}_R$. На самом деле оно совпадает с ограничением линейного расслоения $H_+^{-1} \otimes H_-$ на Q_R .

Рассмотрим теперь линейное расслоение L_R на $\tilde{Q}(R)$, заданное функцией перехода $(g_{UV})^R$. При $R \rightarrow \infty$ эта функция стремится к пределу

$$g_{UV}^{\infty} = \exp(2\tau/\zeta), \quad (5.10)$$

который определяет линейное расслоение L_{∞} на $\tilde{Q}(\infty) = TP_1$. Остается проверить, что L_{∞} совпадает с линейным расслоением Хитчина L . В наших координатах точка $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ представлена плоскостью

$$a\xi + b\eta + c\zeta = \tau. \quad (5.11)$$

Параметризуем пространство P_1 , заданное уравнением (5.5), следующим образом:

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{\rho - \rho^{-1}}{2}, \quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{\rho + \rho^{-1}}{2i}.$$

Тогда (5.11) принимает вид

$$\tau/\zeta = \frac{1}{2} \{ (\alpha + ib)\rho^{-1} - 2c - (\alpha - ib)\rho \}. \quad (5.12)$$

Сравнение с формулой (3.2) из [7] показывает, что наши координаты связаны с хитчиновскими заменой

$$\rho \rightarrow \zeta, \quad \tau/\zeta \rightarrow -\eta/2.$$

Таким образом, формула (5.10) совпадает с формулой (5.4) из [7] и показывает, что наше L_{∞} есть требуемое L .

§ 6. Пространство модулей

В [2] я доказал, используя недавний результат Дональдсона [4], что пространство модулей отмеченных монополей с зарядом k на гиперболическом пространстве H^3 естественным образом отождествляется с пространством пунктированных голоморфных отображений $P_1 \rightarrow P_1$ степени k , т.е. с пространством рациональных функций

$$f(z) = \frac{\alpha_1 z^{k-1} + \alpha_2 z^{k-2} + \dots + \alpha_k}{z^k + \beta_1 z^{k-1} + \dots + \beta_k},$$

где числитель и знаменатель взаимно просты. В [2] это было получено как частный случай более общего результата для инстантонов. Сейчас я докажу это более прямым и простым способом, но только для монополей. Доказательство снова опирается на работу [4] и, по существу, не очень отличается от приведенного в [2], но рассуждения проще и позволяют глубже понять пространство модулей.

Инстантон на R^4 (или S^4) определяет голоморфное расслоение на твисторном пространстве P_3 , наделенное вещественной структурой (и, кроме того, удовлетворяющее условию невырожденности). Если мы выберем плоскость P_2 в P_3 и ограничим на нее наше расслоение, то получим голоморфное расслоение на P_2 , тривиальное на единственной вещественной прямой в P_2 . Результат Дональдсона [4] состоит в том, что при этом пространство модулей отмеченных инстантонов на S^4 отождествляется с пространством модулей пунктированных голоморфных расслоений на P_2 , тривиальных на P_1 . Здесь пунктированное расслоение означает расслоение с выделенной тривиализацией над некоторой отмеченной точкой. Важно, что в этом результате Дональдсона от расслоений на P_2 требуется лишь голоморфность — условия вещественности или унитарности отсутствуют и группа $SU(2)$ заменяется на $SL(2, \mathbb{C})$.

Для S^1 -инвариантного инстантона выберем P_2 так, чтобы оно содержало неподвижную прямую P_1^+ . В качестве отмеченной точки выберем пересечение A этой прямой с P_1^- . Тогда P_2 также S^1 -инвариантно, и из естественности конструкции в теореме Дональдсона следует, что пространство модулей отмеченных монополей на H^3 отождествляется с пространством модулей отмеченных S^1 -инвариантных расслоений на P_2 . За-

метим, что S^1 -действие не сохраняет тривиализацию над отмеченной точкой A . На самом деле представление группы S^1 на слое над A определяется полем Хиггса.

Действие группы S^1 комплексифицируется до действия группы $\mathbb{C}^*$, причем как расслоение на $\mathbb{P}_2$, так и $\mathbb{C}^*$ -действие с необходимостью алгебраичны. Как мы сейчас увидим, классификация таких объектов — довольно простое дело. В качестве первого шага будет доказана

Л е м м а 6.1. Пусть E — алгебраическое векторное расслоение ранга n над $\mathbb{C}^2$ с действием группы $\mathbb{C}^*$, накрывающим скалярное действие на $\mathbb{C}^2$. Тогда найдется $\mathbb{C}^*$ -изоморфизм расслоения E с произведением $\mathbb{C}^2 \times E_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . $\mathbb{C}^*$ -расслоения на $\mathbb{C}^2 - 0$ эквивалентны расслоениям на факторпространстве $\mathbb{P}_1$. По теореме Гротендика, любое векторное расслоение на $\mathbb{P}_1$ есть прямая сумма степеней расслоения Хопфа. Следовательно, на $\mathbb{C}^2 - 0$ любое $\mathbb{C}^*$ -векторное расслоение изоморфно расслоению вида $(\mathbb{C}^2 - 0) \times V$, где V — представление группы $\mathbb{C}^*$ (распадающееся в сумму одномерных представлений). Таким образом, на $\mathbb{C}^2 - 0$ имеется $\mathbb{C}^*$ -изоморфизм между нашим расслоением E и произведением $\mathbb{C}^2 \times V$. Этот изоморфизм с необходимостью продолжается на $\mathbb{C}^2$ и индуцирует, в частности, изоморфизм представлений E_0 и V группы $\mathbb{C}^*$.

Нас интересует случай, когда $n = 2$ и представления имеют веса $(p, -p)$, где $p > 0$. Доказательство леммы 6.1 показывает, что все $\mathbb{C}^*$ -автоморфизмы расслоения $E = \mathbb{C}^2 \times E_0$ имеют вид

$$(x_1, x_2; u, v) \rightarrow (x_1, x_2; \alpha u + c(x_1, x_2)v, \beta v), \quad (6.2)$$

где α, β — ненулевые константы и $c(x_1, x_2)$ — однородный полином степени $2p$. Здесь действие элемента $\lambda \in \mathbb{C}^*$ на E_0 задается формулой

$$(u, v) \rightarrow (\lambda^p u, \lambda^{-p} v).$$

Поднимая расслоение с $\mathbb{C}^1$ на $\mathbb{C}^2$ и применяя (6.1) и (6.2), получаем

С л е д с т в и е 6.3. Лемма 6.1 остается справедливой при замене пространства $\mathbb{C}^2$ на $\mathbb{C}^1$. При этом для $n = 2$

и весов $(p, -p)$ автоморфизмы имеют вид

$$(z; u, v) \rightarrow (z; \alpha u + c z^{2p}, b v), \text{ где } \alpha b \neq 0.$$

З а м е ч а н и е. Аналог леммы 6.1 справедлив для расслоений на $\mathbb{C}^m$ для произвольного m , но нам понадобятся только случаи $m = 1, 2$; доказательство для $m \geq 3$ чуть сложнее.

Предположим далее, что E есть $\mathbb{C}^*$ -векторное расслоение над $P_1 = \mathbb{C} \cup \infty$. Тогда мы имеем представления E_0 и E_∞ , которые в силу следствия 6.3 определяют ограничения расслоения E на два открытых подмножества $P_1 - \infty$ и $P_1 - 0$. Над их пересечением $\mathbb{C}^*$ -расслоения эквивалентны расслоениям над точкой, поэтому данными, необходимыми для построения расслоения E из E_0 и E_∞ , является лишь изоморфизм векторных пространств $T: E_0 \rightarrow E_\infty$ (не обязательно коммутирующий с действием группы $\mathbb{C}^*$). Чтобы задать T , например, достаточно рассмотреть слой над точкой $x = 1$. Мы можем изменить изоморфизм

$$E|_{P_1 - \infty} \cong (P_1 - \infty) \times E_0,$$

применив некоторый автоморфизм S произведения $(P_1 - \infty) \times E_0$. При этом T заменяется на TS . В нашем случае, когда $n = 2$ и веса представления E_0 равны $(p, -p)$, следствие

6.3 показывает, что S записывается (в стандартном базисе) треугольной матрицей. Пространство смежных классов группы треугольных матриц в $GL(2, \mathbb{C})$ есть в точности проективная прямая. В инвариантных терминах это звучит так. Изоморфизм T индуцирует проективный изоморфизм

$$P(T): P(E_0) \rightarrow P(E_\infty).$$

Пусть точке $p_0 \in P(E_0)$ соответствует вектор положительного веса. Это неподвижная точка автоморфизмов S . Следовательно, левый смежный класс определяется точкой

$$P(T)(p_0) \in P(E_\infty). \quad (6.4)$$

Итак, мы доказали следующее

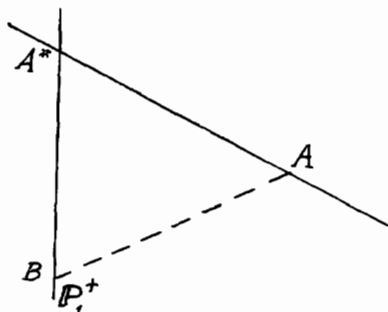
Предложение 6.5. Рассмотрим $\mathbb{C}^*$ -векторное расслоение E ранга 2 на $\mathbb{P}_1$. Предположим, что E_0 имеет веса $(p, -p)$ и задан $\mathbb{C}^*$ -изоморфизм

$$E|_{\mathbb{P}_1 - 0} \cong (\mathbb{P}_1 - 0) \times E_\infty.$$

Тогда E канонически соответствует точке в $\mathbb{P}(E_\infty)$.

З а м е ч а н и е. Определенную выше матрицу $T: E_0 \rightarrow E_\infty$ следует рассматривать как нечто вроде матрицы рассеяния, а точку в $\mathbb{P}(E_\infty)$ — как отношение коэффициента отражения к коэффициенту прохождения. Позже об этом будет сказано подробнее.

Теперь мы можем вернуться к $\mathbb{C}^*$ -расслоению E на $\mathbb{P}_2$, соответствующему по Дональдсону S^1 -инвариантному инстантону и тем самым гиперболическому монополю. Напомним, что $\mathbb{P}_2$ содержит неподвижную точку A и неподвижную прямую $\mathbb{P}_1^+$. Кроме того, $\mathbb{P}_2$ содержит единственную вещественную прямую, соединяющую A с сопряженной точкой A^* на $\mathbb{P}_1^+$:



Расслоение E тривиально на прямой AA^* и, следовательно, на всех близких прямых, проходящих через A^* . Применяя действие группы $\mathbb{C}^*$, мы получаем, что тогда E тривиально на всех прямых, проходящих через A^* , за исключением прямой $\mathbb{P}_1^+$. При этом тривиализация расслоения E на AA^* продолжается на все эти прямые. В частности, мы получаем выделенный $\mathbb{C}^*$ -изоморфизм

$$E|_{\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1^+} \cong (\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1^+) \times E_A.$$

Рассмотрим переменную прямую BA . Используя третью прямую, проходящую через A^* , для определения единичной точки, отожд-

действиями ВА со стандартной прямой P_1 . Ограничивая E на ВА и применяя (6.5), мы заключаем, что E канонически соответствует рациональному отображению

$$f: P_1^+ \rightarrow P(E_A). \quad (6.6)$$

На самом деле наша конструкция определяет f только на $P_1^+ - A^*$. Но, поскольку тривиализация определяется с помощью точки A^* , легко видеть, что f продолжается по непрерывности на всю прямую P_1^+ .

Сравним определение (6.6) с предложением 3.6. Мы увидим, что отображение f имеет полюсы в точности в тех k точках В, для которых ВА служит прямой подскока расслоения E . Точнее говоря, мы параметризуем $P(E_A) \cong P(E_{A^*})$ так, что ∞ соответствует вектору минимального веса, а 0 - вектору максимального веса. Заметим, что $f(A^*) = 0$.

Это завершает доказательство того, что пространство модулей отмеченных монополей с зарядом k на H^3 изоморфно пространству M_k пунктированных рациональных отображений $P_1 \rightarrow P_1$ степени k . Заметим, что пространство модулей не зависит от веса p , т.е. от нормы поля Хиггса на ∞ . Поэтому весьма правдоподобно, что при предельном переходе $p \rightarrow \infty$, описанном в § 5, пространства модулей сходятся к пространству модулей евклидовых монополей, которое, как показал Дональдсон [5], совпадает с M_k . Кроме того, рассматривая нецелые значения p , мы получаем непрерывное однопараметрическое семейство пространств модулей.

Мы определили рациональное отображение f (формула (6.6)), основываясь на чисто голоморфной точке зрения. В действительности оно имеет очень простую интерпретацию и с точки зрения самих монополей. Чтобы убедиться в этом, спроектируем твисторное пространство P_3 на исходное пространство S^4 . При этом наша плоскость P_2 отображается на S^4 так, что прямая AA^* переходит в точку ∞ , а $\mathbb{C}^2 = P_2 - (AA^*)$ отождествляется с $\mathbb{R}^4$. Это отождествление совместимо с действием группы $\mathbb{C}^*$. Неподвижная прямая P_1^+ (с выброшенной точкой A^*) отображается на ось $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^4$, а прямые ВА (с выброшенной точкой A) - на плоскости, перпендикулярные этой оси. Как и прежде, введем координаты (x, y, r, θ) .

Для определения значения соответствующего монополю рационального отображения f в точке $x_0 + iy_0$ рассмотрим $\mathbb{C}^*$ -

расслоение на проективной прямой $\mathbb{P}_1(x_0, y_0)$ (полученной компактификацией плоскости $x = x_0, y = y_0$) и применим предложение 6.5. В качестве комплексной координаты на $\mathbb{P}_1$ выберем $w = re^{i\theta}$. Значение $f(x_0 + iy_0)$ получается следующим образом.

Над $\mathbb{C} = \mathbb{P}_1 - \infty$ наше расслоение может быть описано как произведение $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ с координатами $(w; u, v)$ и с действием группы $\mathbb{C}^*$, заданном формулой

$$\lambda(w; u, v) = (\lambda w; \lambda^p u, \lambda^{-p} v).$$

Имеются два выделенных (инвариантных) сечения, а именно

$$z_+: u = w^p, \quad v = 0,$$

$$z_-: u = 0, \quad v = w^{-p}.$$

Заметим, что первое из них голоморфно на $\mathbb{C}$, а второе имеет полюс в 0. Аналогично, над $\mathbb{P}_1 - 0$ введем координаты $(w'; u', v')$. Снова имеются выделенные сечения z'_+, z'_- , причем z'_+ голоморфно в ∞ . Из этих данных мы можем построить "матрицу рассеяния" T , выражающую $z_{\pm}$ через $z'_{\pm}$ на $\mathbb{P}_1 - (0 \cup \infty)$:

$$z_+ = az'_+ + bz'_-,$$

$$z_- = cz'_+ + dz'_-,$$

где a, b, c, d — константы. Тогда значение $f(x_0 + iy_0)$ равно a/b . Заметим, что полюсы функции f , т.е. те точки, где $b = 0$, соответствуют прямым подскока.

Теперь выразим все это в терминах монополей на гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, заданном в виде верхнего полупространства

$$(x, y, r), \quad r > 0. \quad (6.7)$$

Если мы положим $\rho = \log r$, так что $\rho + i\theta = \log w$, то голоморфные сечения z расслоения E на $\mathbb{P}_1$ определяются как решения уравнения

$$\nabla_\rho z + i \nabla_\theta z = 0, \quad (6.8)$$

где ∇_ρ и ∇_θ — компоненты связности в направлениях ρ и θ . Если, как обычно, мы работаем в S^1 -инвариантной калибровке и предполагаем, что z не зависит от θ (т.е. S^1 -инвариантно), то уравнение (6.8) принимает вид

$$\nabla_\rho z + i \varphi z = 0, \quad (6.9)$$

где φ — поле Хиггса. Это уравнение (с точностью до знака) есть гиперболический аналог уравнения, введенного Хитчином. Сечения $z_\pm$ соответствуют тем решениям уравнения (6.9), которые при $\rho \rightarrow -\infty$ (т.е. при $r \rightarrow 0$) удовлетворяют асимптотическим условиям

$$z_+ \sim \exp(\rho\rho), \quad z_- \sim \exp(-\rho\rho).$$

Таким образом, z_+ — убывающее решение (единственное с точностью до константы). Аналогично, $z'_\pm$ соответствуют тем решениям уравнения (6.9), которые при $\rho \rightarrow \infty$ (т.е. при $r \rightarrow \infty$) удовлетворяют асимптотическим условиям

$$z'_+ \sim \exp(-\rho\rho), \quad z'_- \sim \exp(\rho\rho).$$

Снова z'_+ — убывающее решение.

Итак, процедура, позволяющая сопоставить монополю на H^3 рациональную функцию $f(x+iy)$, такова. Для фиксированных x и y рассмотрим прямую в H^3 с координатой r . Положим $\rho = \log r$. Рассмотрим решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения (6.9). Начнем с решения, которое экспоненциально убывает при $\rho \rightarrow -\infty$, и выразим его в виде линейной комбинации решений z'_+ и z'_- :

$$z_+ = a z'_+ + b z'_-.$$

После этого положим

$$f(x+iy) = a/b.$$

Заметим, что для корректности этого определения необходимо фиксировать решения $z'_\pm$ при $\rho \rightarrow \infty$. Именно здесь исполь-

зуется фиксация калибровки в бесконечности.

Ясно, что f имеет полюсы в точности тогда, когда $b = 0$, т.е. когда наше решение экспоненциально убывает в обе стороны. Это спектральные прямые, введенные Хитчином. Мы видим, что они соответствуют прямым подскока.

Таким образом, монополь определяется частью "данных рассеяния" в некотором фиксированном направлении. Заметим, однако, что в обычной теории рассеяния используются мнимые экспоненты, и аналог уравнения (6.9) есть самосопряженное уравнение.

Для монополя с зарядом 1 соответствующая рациональная функция f есть просто

$$f(z) = \alpha/(z - b), \quad (6.10)$$

причем $\alpha \neq 0$. Спектральная прямая задается уравнением $z = b$. Отсюда следует, что центр монополя в $H^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ есть точка вида (b, λ) , где λ — некоторое вещественное положительное число. Рассматривая действие мультипликативной группы $z \rightarrow cz$, можно показать, что λ пропорционально $|\alpha|$ (коэффициент пропорциональности зависит от выбора нормировки и может быть равен 1), а $\arg(\alpha)$ связан с фазой монополя.

В более общем случае рассмотрим рациональную функцию с простыми полюсами

$$f(z) = \sum_{i=1}^k \alpha_i / (z - b_i), \quad (6.11)$$

где точки $b_1, \dots, b_k$ находятся далеко друг от друга. Мы хотим привести аргументы в пользу того, что это соответствует суперпозиции k монополей типа (6.10). Будем рассуждать следующим образом. Выберем одну из точек b_i , скажем b_1 , и сдвинем ее в 0. Рассмотрим теперь семейство рациональных функций

$$f(z) = \alpha_1/z + \sum_{i=1}^k \alpha_i / (z - \lambda b_i).$$

Перейдем к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$. Возвращаясь к интерпретации этих функций как голоморфных расслоений на P_2 , мы видим, что это семейство сходится к пучку без кручения, локально свободному на $P_2 - (AA^*)$ и имеющему единственную прямую подскока AB (B — начало координат). Снова переходя к монополю картине, мы видим, что монополи, параметризованные семейством f , сходятся (на компактных подмножествах в H^3)

к монополю с зарядом 1 , соответствующему функции α_1/x . Это показывает, что если все ℓ_i ($i \geq 2$) достаточно велики, то монополю, соответствующий (6.11), выглядит около начала координат приблизительно так же, как монополю, соответствующий первому слагаемому. Повторяя те же рассуждения для каждого i , мы убеждаемся, что монополю, соответствующий (6.11), действительно является приближенно суперпозицией k простых монополей.

По-видимому, наша процедура сопоставления гиперболическому монополю рациональной функции имеет естественный аналог в случае евклидовых монополей. Нужно рассмотреть уравнение Хитчина (6.9), где ρ теперь — третья евклидова координата, и использовать тот же процесс рассеяния. Голоморфность (по $x + iy$) получающегося отображения есть следствие уравнений Богомольного. Было бы интересно сравнить это со способом построения рациональной функции, принадлежащим Дональдсону [5] (который использовал подход Нама). Выглядит правдоподобным, что эти две конструкции совпадают¹⁾ и что процесс рассеяния меняется непрерывно при стремлении кривизны гиперболического пространства к нулю. Это доказывало бы предположение Дональдсона о том, что рациональная функция (6.11) также является приближенно суперпозицией евклидовых монополей.

Литература

1. Atiyah M.F. The geometry of Yang-Mills fields. Fermi Lectures Scuola Normale Superiore, Pisa (1979).
2. Atiyah M.F. Instantons in two and four dimensions. — Commun. Math. Phys. 93(1984), 437-452. [Перевод в настоящем сборнике.]
3. Atiyah M.F. and Bott R. The moment map and equivariant cohomology. — Topology 23, No. 1 (1984), 1-28.
4. Donaldson S.K. Instantons and geometric invariant theory. — Commun. Math. Phys. 93(1984), 453-460. [Перевод в настоящем сборнике.]
5. Donaldson S.K. Nahm's equations and the classification of monopoles. — Commun. Math. Phys. 96(1984), 387-408. [Перевод в настоящем сборнике.]
6. Forgacs P., Horvath Z. and Palla L. An exact fractionally

¹⁾ Сейчас это уже установлено: см. Hurtubise J. — Commun. Math. Phys. 100 (1985), 191-196. [Перевод в настоящем сборнике.] — Прим. перев.

charged self-dual solution. - Hungarian Academy of Sciences, Preprint, KFKI 60 (1980).

7. Hitchin N.J. Monopoles and geodesics. - Commun. Math. Phys. 83 (1982), 579-602. [Перевод в настоящем сборнике.]
8. Hitchin N.J. On the construction of monopoles. - Commun. Math. Phys. 89(1983), 145-190. [Перевод в настоящем сборнике.]
9. Nahm W. All multimonopoles for arbitrary gauge groups. (Preprint) TH 3172-CERN (1982).
10. Ward R.S. A Yang-Mills-Higgs monopole of charge 2. - Commun. Math. Phys. 79 (1981), 317-325.

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ НЕАБЕЛЕВЫХ МАГНИТНЫХ МОНОПОЛЕЙ¹⁾

М. Атья, Н. Хитчин

Mathematical Institute, University of Oxford, 24-29
St. Giles, Oxford OX1 3LB

Уравнения Богомольного описывают статические конфигурации магнитных монополей для некоторой неабелевой группы, например $SU(2)$. Медленно движущиеся взаимодействующие монополи описываются движением вдоль геодезических в этом конфигурационном пространстве. Геометрия этого пространства используется для исследования рассеяния монополей. В результате обнаруживаются неожиданные свойства, такие, как рассеяние на 90° и превращение углового момента в электрический заряд.

I. Введение

Начнем с напоминания основных свойств солитонов. Так называются локализованные в пространстве решения некоторых нелинейных уравнений в частных производных, не изменяющиеся при "взаимодействии". По существу, все уравнения, допускающие солитонные решения, являются аппроксимациями некоторого более общего уравнения. Поэтому интерес к солитонам объясняется тем, что они служат приближенными решениями более общего уравнения. Заметим, наконец, что солитоны возникали, главным образом, в случае одной пространственной переменной; примерами служат уравнение КдФ (движение волны в канале) или нелинейное уравнение Шредингера (световые импульсы в оптическом волокне).

Здесь мы опишем трехмерную ситуацию, в которой возникают солитоны. Физически эти солитоны представляют "магнитные монополи" в приближении малых скоростей. Мы опишем взаимодействие

¹⁾ Atiyah M., Hitchin N.J. Low-energy scattering of non-Abelian magnetic monopoles. - Philosophical Transactions of the Royal Society, London, A315 (1985), 459-469.

или рассеяние таких монополей. Будет показано, что при таком рассеянии обнаруживаются поразительные геометрические свойства, не имеющие одномерных аналогов.

Задача о рассеянии монополей в том виде, в котором она обсуждается здесь, была предложена Мантоном [1982]. Мanton наметил общий ход рассуждений, но в то время слишком мало было известно и его замысел не мог быть осуществлен. Однако в последние годы был сделан важный шаг вперед в понимании общих уравнений, и сейчас этим можно воспользоваться для решения поставленной задачи.

Прежде чем перейти к монополям, полезно сделать несколько общих и элементарных замечаний о динамике. Предположим, что рассматривается классическая механическая система. Ее полная энергия $\mathcal{E}$ состоит, как обычно, из кинетической и потенциальной частей. Положения устойчивого равновесия строятся минимизацией потенциальной энергии. Эти положения равновесия могут зависеть от непрерывных параметров и составлять некоторое подмногообразие M полного конфигурационного пространства C . Если значение энергии $\mathcal{E}$ близко к такому минимальному значению потенциальной энергии, то эволюция системы происходит вблизи M и динамический поток приближенно задается свободным потоком на M . Геометрически M имеет риманову метрику (возникающую из кинетического члена), а свободный поток — это геодезический поток в этой метрике.

Этот же принцип применяется (по крайней мере формально) и к динамике полей. При этом нелинейное волновое уравнение относительно функции $f(x, t)$, где $x \in \mathbb{R}^3$, интерпретируется как поток на бесконечномерном конфигурационном пространстве C . В типичном случае при минимизации потенциальной энергии возникает эллиптическая вариационная задача, которая при подходящем выборе граничных условий приводит к конечномерному пространству решений M . При этом решения нелинейного волнового уравнения с энергией, близкой к минимальной, приближенно задаются геодезическим потоком на M . Конечно, в этой ситуации вследствие бесконечномерности пространства C возникают аналитические проблемы, и нужно их исследовать, прежде чем делать точные утверждения об аппроксимации. Однако, следуя Мантону [1982], мы не будем обращать внимания на эти трудности и попробуем просто понять структуру геодезического потока на M .

2. Магнитные монополи

Дадим теперь краткий обзор калибровочных теорий и связанных с ними классических уравнений. Основная идея современных фундаментальных физических теорий заключается в том, что электромагнитная сила является лишь одной компонентой некоторой более сложной сущности, включающей в себя также и ядерные силы. Подходящими уравнениями в этом более общем случае являются матричные обобщения уравнений Максвелла.

Такая теория отправляется от компактной группы Ли G , которая называется калибровочной группой. Мы будем иметь дело со случаем простейшей неабелевой группы $G = SU(2)$. Алгебра Ли $L(G)$ этой группы состоит из комплексных 2×2 -матриц T , для которых $T^* = -T$ и $\text{Tr}(T) = 0$. Нам понадобится естественная норма на $L(G)$:

$$|T|^2 = -\frac{1}{2} \text{Tr} T^2.$$

Основные поля теории — это калибровочный потенциал $A_\mu(x, t)$ и поле Хиггса $\varphi(x, t)$. Эти поля являются функциями от $x \in \mathbb{R}^3$ и времени t ; они принимают значения в $L(G)$. Индекс μ принимает четыре значения 0, 1, 2, 3, отвечающие временной и пространственным координатам соответственно. Ковариантная производная φ определяется следующим образом:

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + [A_\mu, \varphi],$$

где $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$ (и $x_0 = t$). Напряженность $F_{\mu\nu}$ есть, по определению, коммутатор $[D_\mu, D_\nu]$, или, более явно,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

По аналогии с обычным электромагнитным полем можно определить магнитную и электрическую части поля F :

$$(\text{магнитная часть } H_1) = -\frac{1}{2} F_{23} \text{ и т.д.};$$

$$(\text{электрическая часть } E_1) = -F_{01} \text{ и т.д.}$$

Полная энергия $\mathcal{E}$ такого поля Янга — Миллса — Хиггса есть

сумма кинетической энергии

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_i |E_i|^2 + |D_0 \varphi|^2 \right) dx$$

и потенциальной энергии

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_i |H_i|^2 + \sum_i |D_i \varphi|^2 \right) dx,$$

где i - пространственный индекс ($i = 1, 2, 3$).

Соответствующие уравнения движения (определяющие эволюцию системы) называются уравнениями Янга - Миллса - Хиттса. На самом деле в обычной модели потенциальная энергия содержит дополнительный член $\lambda(|\varphi|^2 - C^2)^2$; мы работаем в пределе Прасада - Зоммерфельда, в котором $\lambda = 0$. Этот предел можно рассматривать как приближение (при малых λ) к физически более осмысленной модели.

Можно показать, что для решений с конечной энергией $\mathcal{E}$ величина $|\varphi|$ стремится на бесконечности к постоянному значению C . Если $C \neq 0$, то мы можем, изменяя масштаб, считать, что $C = 1$. Рассмотрим отображение

$$\varphi: S^2_r \rightarrow S^2,$$

заданное ограничением поля φ на сферу большого радиуса r в $\mathbb{R}^3$; его значения лежат (приближенно) на единичной сфере в $L(G)$. Это позволяет определить топологический инвариант - степень k этого отображения. Он называется магнитным зарядом и определяет нижнюю грань потенциальной энергии. Можно показать, что

$$\text{потенциальная энергия} \geq 4\pi k.$$

Кроме того, равенство достигается тогда и только тогда, когда выполняются уравнения Богомольного

$$D_i \varphi = H_i.$$

Решения этих уравнений описывают статические магнитные монополи.

С точностью до калибровочных преобразований уравнения Богомольного действительно являются эллиптическими. Напомним, что всякая функция $g(x)$ на $\mathbb{R}^3$ со значениями в группе $SU(2)$ задает калибровочное преобразование полей A_μ и φ по формулам

$$A_\mu \rightarrow g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g, \quad \varphi \rightarrow g^{-1} \varphi g.$$

С физической (или геометрической) точки зрения истинное конфигурационное пространство $\mathcal{C}$ — это пространство полей A_μ, φ , рассматриваемых с точностью до калибровочных преобразований. Таким образом, мы ожидаем, что многообразие $M_k \subset \mathcal{C}$, параметризующее решения уравнений Богомольного с магнитным зарядом k , окажется конечномерным. Кроме того, на M_k имеется естественная риманова метрика, возникающая из кинетического члена.

Как объяснялось в § I, геодезический поток на M_k приближенно задает эволюцию системы Янга — Миллса — Хиттса для значений энергии $\mathcal{E}$, близких к $4\pi k$. В этом и состоит наблюдение Мантона [1982]. Для того чтобы воспользоваться им, необходимо решить следующие задачи:

- (1) найти многообразие M_k ;
- (2) найти метрику на M_k ;
- (3) найти геодезические на M_k ;
- (4) для каждой точки $m \in M_k$ найти соответствующее решение уравнений Богомольного;
- (5) используя (3) и (4), описать эволюцию решений.

В последующих параграфах мы опишем по крайней мере частичные решения всех этих задач. А сейчас остановимся на различии между пунктами (1) и (4). Лучше всего это иллюстрируется на примере линейной эллиптической задачи. Там аналогом пространства M_k служит конечномерное линейное пространство, и пункт (1) сводится к вопросу о размерности этого пространства. В то же время пункт (4) подразумевает нахождение явных решений, образующих базис в этом пространстве. В исследуемом случае нелинейных уравнений пространство M_k само нелинейно, и для ответа на пункт (1) надо не только найти его размерность, но и описать это многообразие, а в пункте (4) требуется явно построить решения как функции на $\mathbb{R}^3$.

3. Рассеяние монополей

Основное монополярное решение имеет топологический заряд $k = 1$. Оно было найдено в явном виде Прасадом и Зоммерфельдом [1975]. Этот монополь сферически симметричен относительно выбранного начала координат и называется BPS-монополем ("B" в честь Богомольного). Кроме того, плотность энергии имеет максимум в начале координат. Это побуждает нас рассматривать монополи как своего рода частицы и говорить об их "расположении". Поле Хиггса обращается в нуль лишь в начале координат; в других точках оно определяет одномерное подпространство алгебры Ли группы $SU(2)$. Проекцию поля $F_{\mu\nu}$ на это подпространство можно интерпретировать как обыкновенное электромагнитное поле; тогда асимптотически BPS-монополь выглядит как монополь Дирака. Однако вблизи начала координат эти два типа монополей различны. Монополь Дирака имеет особенность в начале координат, тогда как BPS-монополь всюду регулярен: это наш солитон.

Кроме местоположения BPS-монополь определяется еще и своей фазой. Фаза может быть устранена калибровочным преобразованием. Однако полезно учитывать ее и считать, что многообразие M_1 есть

$$M_1 = \mathbb{R}^3 \times S^1,$$

где S^1 — окружность, параметризующая фазу. Более того, естественная метрика на M_1 совпадает (с точностью до множителя) со стандартной метрикой на $\mathbb{R}^3 \times S^1$.

Предположим теперь, что наш монополь начинает двигаться. Тогда движение в $\mathbb{R}^3$ приводит к появлению импульса и углового момента, а движение в S^1 , т.е. изменение фазы, интерпретируется как электрический заряд. Частица, обладающая и магнитным, и электрическим зарядом, называется дионом.

При $k > 1$ многообразия M_k широко изучались. Основные результаты в этом направлении достигнуты в работе Дональдсона [1984]. Известно, в частности, что многообразие M_k несингулярно и имеет размерность $4k$. Кроме того, асимптотически M_k есть произведение k (неупорядоченных) копий многообразия M_1 . Для точки $m \in M_k$ из этой асимптотической области соответствующее решение уравнений Богомольного выглядит приближенно как суперпозиция k BPS-монополей: это наш k -солитон.

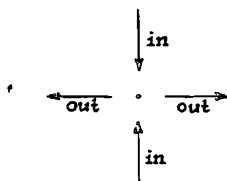
Рассмотрим теперь, следуя Мантону, динамику медленно движу-

щихся монополей. Возьмем исходную точку $m \in M_k$ асимптотической области и придадим ей малую начальную скорость v . Это означает, что наши k удаленных друг от друга BPS-монополей получили некоторые начальные скорости u_i и электрические заряды e_i . Эволюция такой системы соответствует, по Мантону, движению вдоль геодезической на M_k из точки m в направлении v .

Многообразие M_k асимптотически является произведением нескольких экземпляров многообразия M_1 , и естественная метрика на M_1 плоская. Отсюда следует, что многообразие M_k асимптотически плоское. Таким образом, асимптотически геодезические выглядят как прямые линии; внутри M_k геодезические должны искривиться в результате взаимодействия монополей. Мы не будем детально изучать геодезический поток. Нас будет интересовать лишь процесс "рассеяния". Это означает следующее. Зададим начальное состояние ("in-состояние") (m, v) . Спрашивается, каким будет "out-состояние" (m', v') , т.е. к какой прямой в M_k будет асимптотически стремиться геодезическая при $t \rightarrow +\infty$. Иными словами, мы хотим изучить асимптотические траектории и электрические заряды набора из k монополей после их "столкновения". Это определит рассеяние монополей (т.е. солитонов).

В оставшейся части этого параграфа мы опишем результаты рассеяния двух монополей для различных начальных данных. В следующем § 4 мы наметим доказательства этих результатов. Мы ограничимся случаем, когда начальные монополи не несут электрических зарядов. Кроме того, мы фиксируем начало координат в центре масс двух монополей.

Начнем с простейшего случая линейного столкновения. Это означает, что исходно монополи движутся по направлению к началу координат. Оказывается, что в этом случае после рассеяния монополи начинают двигаться под углом 90° к первоначальному направлению. Схематически это изображается следующей диаграммой:

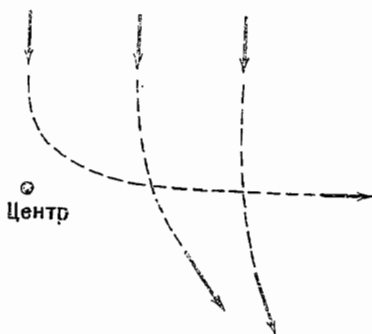


Это довольно неожиданно, поскольку естественно было бы предположить, что монополи останутся на той же прямой (отразившись от начала координат или пройдя через него). Кроме того, рассеяние происходит в некоторой плоскости, что нарушает очевидную симметрию ситуации; неясно, чем определяется выбор плоскости.

Объяснение этого удивительного факта заключается в том, что монополи, даже асимптотически, не являются просто точечными частицами; они обладают также внутренней структурой, задаваемой их фазами. Таким образом, плоскость рассеяния должна определяться относительными начальными фазами двух монополей. Это в свою очередь показывает, что переменные, описывающие внутреннюю фазовую структуру, связаны с обычными пространственными переменными. Эта связь возникает лишь в результате взаимодействия, поскольку для одного монополя фазовые и пространственные переменные полностью независимы.

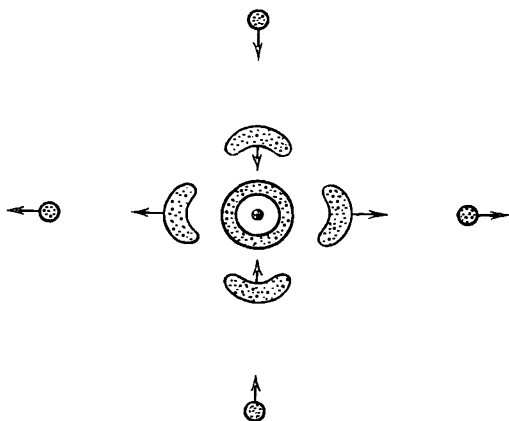
Как мы увидим впоследствии, относительная фаза в начальный момент вызывает лишь экспоненциально малые динамические эффекты, которые не обнаруживаются экспериментально. Поэтому результат рассеяния, включая нарушение симметрии, выглядит как случайный эффект. Тем не менее, процесс полностью детерминирован. Дело в том, что, как бы далеко ни были расположены два монополя вначале, их нельзя рассматривать как независимые частицы: их фазы связаны определенным образом, который и определяет результат столкновения.

Перейдем теперь к случаю плоского рассеяния, полученного заданием начальных движений в упомянутой плоскости. Этот тип рассеяния мы будем называть рассеянием типа I. Чтобы упростить рисунок, мы указали движение только одного из двух монополей. Движение второго получается по симметрии.

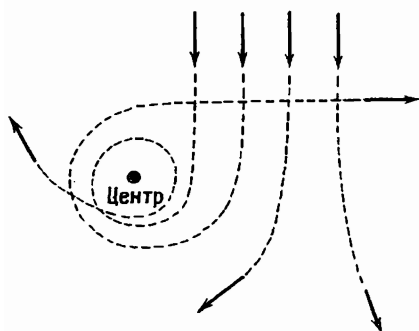


Угловой момент μ (выражающийся через прицельный параметр) сохраняется. Отклонение, или угол рассеяния, S есть функция от μ , монотонно возрастающая от 0° до 90° при убывании величины μ от ∞ до 0. Эффективные силы являются, следовательно, "отталкивающими". Для удаленных друг от друга монопольных траекторий (при большом μ) силы и отклонение невелики, а случай $\mu = 0$ (линейное столкновение) соответствует максимальному рассеянию на 90° , описанному выше.

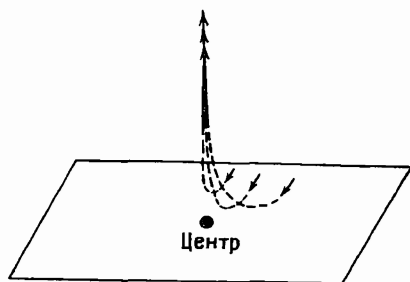
Вероятно, следует подчеркнуть, что пунктирные линии на рисунке просто указывают соответствие *in*- и *out*-состояний для различных значений μ . На далеких расстояниях они действительно приблизительно совпадают с траекториями монополей, но в области, где взаимодействие велико, монополи уже нельзя интерпретировать как частицы, и потому нельзя серьезно рассматривать траектории. Например, глядя на картинку, можно подумать, что монополи при сближении поворачивают налево. Но это неверно, в чем можно убедиться, взяв отрицательное μ . Более точное описание прямого столкновения ($\mu = 0$) показывает, что половина каждого монополя поворачивает налево, а другая половина — направо. Это подтверждается тем, что в момент столкновения (в следующем параграфе мы объясним это подробнее) плотность энергии сосредоточена в кольце вокруг начала координат. Если считать, что области максимальной плотности энергии соответствуют физическим частицам, то можно следующим образом изобразить схематически процесс столкновения:



Теперь опишем плоские взаимодействия типа II, в которых начальные движения перпендикулярны плоскости рассеяния линейного столкновения. На наших рисунках изображены процессы рассеяния для различных начальных угловых моментов μ . Заметим, что правый рисунок относится к трехмерному случаю.



Плоская диаграмма
рассеяния при $\mu > 1$.



Трехмерная диаграмма
рассеяния при $\mu \leq 1$.

При больших μ отклонение мало и приводит к отталкиванию, но при убывании μ отклонение меняет знак и монополи начинают притягиваться. Угол отклонения $S(\mu)$, соответствующий притяжению, безгранично возрастает при убывании μ до критического значения $\bar{1}$. При $\mu < 1$ монополи покидают плоскость и уходят на бесконечность вдоль перпендикуляра к ней, проходящего через начало координат. При этом орбитальный угловой момент пропадает, но взамен частицы приобретают противоположные и равные по абсолютной величине электрические заряды. Таким образом, после столкновения они становятся дионами. Такую возможность предвидел Мэнтон [1982]; она еще раз подчеркивает связь между пространственными и внутренними фазовыми переменными.

П. Годдард обратил наше внимание на следующее обстоятельство. Несмотря на то что орбитальный угловой момент пропадает, полный угловой момент (с учетом углового момента электромагнитного поля) по-прежнему сохраняется (см. Годдард и Олив [1978], § 2.2). В процессе столкновения типа II возникают дионы и орбитальный угловой момент превращается в угловой момент поля.

Величина критического значения ($\mu = 1$) связана с нашим выбором нормировки $|\varphi|$ в бесконечности. По существу это означает, что мы нормировали значение магнитного заряда. Это становится ясным после вычисления углового момента электромагнит-

ного поля.

Если μ чуть больше 1, то можно сказать, что в процессе взаимодействия монополи после столкновения покидают плоскость на время порядка $(\mu - 1)^{-3/2}$, после чего возвращаются на нее и разбегаются друг от друга.

4. Геометрия пространства M_2^0

Поясним теперь, как получаются результаты предыдущего параграфа. Прежде всего, отбрасывая сдвиги и общую фазу, можно свести многообразие M_2 (размерности 8) к многообразию M_2^0 (размерности 4). Асимптотически четыре параметра многообразия M_2^0 задают относительное расположение двух монополей и их относительную фазу.

Геометрия пространства M_2^0 подробно изучена Уртюбизом [1983]. Более общий случай пространств M_k^0 исследовал Дональдсон [1984]. Эти работы позволяют дать несколько описаний пространства M_2^0 . Простейшее из них, вероятно, следующее. Точка m из M_2^0 задается парой (неориентированных) векторов $\pm x, \pm y$ из $\mathbb{R}^3$, подчиненных условиям

$$x \cdot y = 0, \quad y^2 = 1.$$

Таким образом, y — это единичный вектор, перпендикулярный x , а изменение знака вектора x или y или их обоих дает ту же точку пространства M_2^0 .

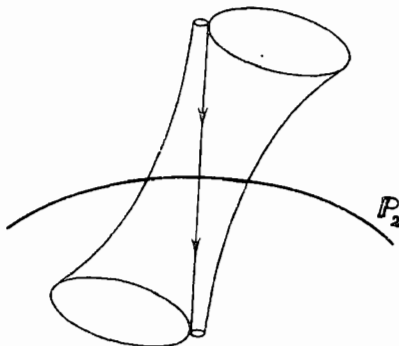
Точки $\pm x$ связаны со спектральными линиями монополя, введенными Хитчином [1982]. Две спектральные линии, параллельные вектору y , пересекают плоскость $y \cdot z = 0$ в двух точках $z = \pm x$. При $|x| \rightarrow \infty$ точки $\pm x$ определяют положения двух монополей, а вектор y — их относительную фазу. Отметим, что тут проявляется упомянутая выше геометрическая связь между фазовыми и пространственными переменными. При $x = 0$ направление вектора y произвольно, и 2-монополь осесимметричен относительно оси, задаваемой вектором y . Более того, два нуля поля Хиггса теперь совпадают и лежат в начале координат. Поэтому мы будем называть такие 2-монопольные конфигурации столкновениями. Совокупность этих конфигураций образует копию проективной плоскости $\mathbb{P}_2$ в M_2^0 . Топологически можно стянуть M_2^0 на $\mathbb{P}_2$ (просто устремляя x к 0), так

что пространство M_2^0 неодносвязно: его фундаментальная группа имеет порядок 2.

Если $x \neq 0$, то 2-монополь, параметризованный посредством $(\pm x, \pm y)$, допускает конечную группу симметрий, состоящую из отражений относительно трех осей, задаваемых векторами x , y и $x \wedge y$. Выберем теперь некоторое направление. Соответствующую ось, проходящую через начало координат, назовем осью z и рассмотрим отражение относительно этой оси. Оно индуцирует изометрию на пространстве M_2^0 , множество неподвижных точек которой состоит из двух вполне геодезических поверхностей. Одна поверхность (типа $\underline{I}$) состоит из пар $(\pm x, \pm y)$, таких, что $\pm y = z$, а другая (типа $\underline{II}$) состоит из таких пар, что $y \cdot z = 0$. Поверхность типа $\underline{I}$ пересекает P_2 только в одной точке и имеет топологический тип плоскости. Поверхность типа $\underline{II}$ пересекает P_2 по проективной прямой P_1 (т.е. по окружности) и имеет топологический тип проколотой плоскости. Поверхности обоих типов являются поверхностями вращения, поэтому геодезические на них легко описываются при известной метрике. Это приводит к диаграммам рассеяния типов $\underline{I}$ и $\underline{II}$ из § 3.

Поверхность типа $\underline{I}$ при фиксированном y параметризуется парой точек $\pm x$ в ортогональной плоскости. Рассмотрим x как комплексную переменную в этой плоскости. Тогда $\xi = x^2$ является естественным комплексным параметром на поверхности типа $\underline{I}$ в M_2^0 . Фиксируя аргумент комплексной переменной ξ , мы получаем геодезическую, проходящую через начало координат. Ясно, что, двигаясь вдоль этой геодезической, мы переходим от пары точек $\pm x$ (при $+\infty$) к паре $\pm ix$ (при $-\infty$). Этим объясняется рассеяние на 90° при прямом соударении.

Чтобы разобраться в геометрии поверхностей типа $\underline{II}$, посмотрим на рисунок.



Геодезическая, описывающая прямое соударение, обозначена линией со стрелками. Большие окружности соответствуют вращению в $\mathbb{R}^3$, а маленькие окружности — изменению фазы. Каждая из двух поверхностей напоминает воронку, приближающуюся к конусу на широком конце и к цилиндру — на узком. Геодезическая на такой поверхности, начинающаяся с широкого конца, при малом угловом моменте падает в цилиндрическое отверстие; если же угловой момент велик, то геодезическая сначала подходит к узкому концу, но потом возвращается обратно. Этим объясняется сложное поведение рассеяния типа II.

5. Метрика на M_2^0

Описанная в предыдущем параграфе геометрия пространства M_2^0 дает качественную картину рассеяния монополей. Для получения количественных результатов необходимо знать риманову метрику. Мы объясним сейчас, как найти явный вид этой метрики. Она обладает замечательными свойствами и представляет интерес сама по себе.

Ключевое наблюдение заключается в том, что по весьма общим соображениям все многообразия M_k и M_k^0 гамильтоновы (или гиперкэлеровы). Это означает, что их группа голономии редуцируется от $SO(4n)$ к симплектической группе $Sp(n)$, где $n = k$ или $k-1$ соответственно. Эквивалентное определение заключается в том, что должны существовать три ковариантно постоянных тензора I, J, K , действующих на касательном пространстве и удовлетворяющих соотношениям алгебры кватернионов

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K \quad \text{и т.д.}$$

Каждый из тензоров I, J, K (и любая их комбинация $\alpha I + \beta J + \gamma K$ с $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) задает комплексную кэлерову структуру. Стандартным примером служит, конечно, четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^3 \times S^1$, т.е. многообразие M_1 , параметризующее одномонопольные решения. Тензоры I, J, K на пространстве $\mathbb{R}^3 \times S^1$ индуцируют в свою очередь соответствующие ковариантно постоянные тензоры на пространствах M_k и M_k^0 . Ассоциированные комплексные структуры в явном виде встречаются в работе Дональдсона [1984]. Более общий подход к исследованию таких структур можно найти в работе Хитчина и др. [1987].

В размерности 4 гамильтоново многообразие — это просто автодуальное многообразие Эйнштейна⁽⁶⁴⁾. Значит, наше многообразие M_2^0 — это автодуальное многообразие Эйнштейна с группой симметрий $SO(3)$. Эта группа остается от группы симметрий евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ после того, как мы исключили сдвиги. Заметим, что $SO(3)$ не сохраняет комплексных структур. Кроме того, как мы видели в § 4, группа $SO(3)$ действует, вообще говоря, лишь с конечными группами изотропии (порядка 4). Имеется лишь одна исключительная орбита — проективная плоскость $\mathbb{P}_2$, точки которой отвечают столкновениям; для нее группой изотропии служит окружность. Все это означает, что автодуальные уравнения Эйнштейна сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае это было проделано Гиббонсом и Поупом [1979]. Результат заключается в следующем. Сначала запишем метрику в виде

$$ds^2 = (abc)^2 d\eta^2 + a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2 + c^2 \sigma_3^2, \quad (5.1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — стандартный ортонормированный базис алгебры Ли группы $SO(3)$. Здесь a, b, c — функции независимой переменной η . Они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{2}{a} \frac{da}{d\eta} = (b-c)^2 - a^2 \text{ и т.д.}, \quad (5.2)$$

где и т.д. означает циклическую перестановку букв a, b, c .

Оказывается, у этих дифференциальных уравнений существуют лишь два решения, приводящие к полным несингулярным четырехмерным многообразиям. Одно, уже давно известное решение есть решение Taub — NUT⁽⁶⁵⁾; для него две из величин a, b, c равны. Пусть, например, $a = b$. В этом случае все три величины a, b, c положительны и $c \rightarrow \text{const}$ на бесконечности, в то время как $a \rightarrow 0$ для единственной невырожденной орбиты группы $SO(3)$. Равенство $a = b$ означает, что кроме $SO(3)$ -симметрии имеется дополнительная $U(1)$ -симметрия.

Второе решение определяет метрику на M_2^0 . Для этого решения величины a, b, c различны и одна из них, скажем c , отрицательна. На бесконечности разность $a - b$ экспоненциально мала, и метрика выглядит асимптотически, как метрика Taub — NUT, за исключением того, что параметр, связанный с c , имеет противо-

положительный знак. Вырожденная орбита, т.е. P_2 , отвечает значению $\alpha = 0$.

Оказывается, уравнения (5.2) могут быть в некотором смысле линеаризованы. Точнее говоря, рассмотрим линейное дифференциальное уравнение для функции $u(\theta)$:

$$u'' + \frac{1}{4} u \operatorname{cosec}^2 \theta = 0. \quad (5.3)$$

Для любого решения $u(\theta)$ уравнения (5.3) определим $\eta(\theta)$ формулой

$$d\eta/d\theta = u^{-2}. \quad (5.4)$$

Наконец, определим α , b , c как функции от θ (а значит, неявно и от η) с помощью трех уравнений

$$\begin{aligned} bc &= -uu' - \frac{1}{2} u^2 \operatorname{cosec} \theta, \\ c\alpha &= -uu' + \frac{1}{2} u^2 \operatorname{ctg} \theta, \\ \alpha b &= -uu' + \frac{1}{2} u^2 \operatorname{cosec} \theta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Прямой подстановкой можно проверить, что такие α , b , c удовлетворяют исходным уравнениям (5.2). Поскольку уравнение (5.3) имеет два независимых решения, а (5.4) дает дополнительную постоянную интегрирования, мы получаем трехпараметрическое семейство решений уравнений (5.2). Следовательно, эта процедура дает общее решение. Метрика на M_2^0 строится по такому решению u уравнения (5.3), которое обладает свойством

$$u(\theta) \sim \theta^{1/2} \text{ при } \theta \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Оно единственно с точностью до постоянного множителя; явное решение дается формулой

$$u(\theta) = (2 \sin \theta)^{1/2} K(\sin \frac{1}{2} \theta), \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad (5.7)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}. \quad (5.8)$$

При $\theta = 0$ получаем вырожденную орбиту P_2 , а $\theta \rightarrow \pi$ соответствует асимптотической области в M_2^0 .

Используя эти явные формулы, можно вывести, например, что кривизна поверхности типа $\bar{I}$ положительна; это приводит к монотонному поведению угла рассеяния $S(\mu)$. С другой стороны, поверхность типа $\bar{II}$ имеет положительную кривизну на бесконечности, но потом на некотором критическом расстоянии кривизна меняет знак и после этого остается отрицательной. Это объясняет рассеяние типа $\bar{II}$, при котором начальное отталкивание переходит со временем в притяжение.

Следует, вероятно, отметить, что решение Taub - NUT возникает из некоторого "специального" решения уравнения (5.2): оно не может быть получено из описанного выше общего трехпараметрического семейства решений. Предположительно оно является предельным случаем такого общего решения.

6. Дальнейшие задачи

Мы описали геодезический поток и, следовательно, рассеяние монополей для некоторых специальных поверхностей в M_2^0 . Общая задача описания геодезического потока на M_2^0 требует дальнейших исследований. В частности, было бы интересно узнать, существуют ли замкнутые геодезические — они соответствовали бы "связанным состояниям" монополей. По-видимому, таких геодезических нет. Можно также предположить, что геодезическое рассеяние полно в том смысле, что любая геодезическая, приходящая с бесконечности, в конце концов возвращается на бесконечность. Поскольку мы знаем явный вид метрики и ее $SO(3)$ -симметрию, эти вопросы должны поддаваться изучению.

Другое направление исследований состоит в изучении пространств M_k^0 для $k > 2$. Хотя для них знания $SO(3)$ -симметрии уже недостаточно для получения метрики, имеется другая техника, основанная на теории твисторов, которая должна помочь в нахождении явного вида метрики. Кроме того, работа Дональдсона [1984] дает простую параметризацию пространств M_k^0 для всех k .

Литература

- Donaldson S.K. [1984]. Nahm's equations and the classification of monopoles. - Commun. Math. Phys. 96, 387-407. [Перевод в настоящем сборнике.]
- Gibbons G.W., Pope C.N. [1979]. The positive action conjecture and asymptotically Euclidean metrics in quantum gravity. - Commun. Math. Phys. 66, 267-290.
- Goddard D., Olive D.I. [1978]. Magnetic monopoles in gauge field theories. - Rep. Prog. Phys. 41, 1357-1437.
- Hitchin N.J. [1982]. Monopoles and geodesics. - Commun. Math. Phys. 83, 579-602.
- Hitchin N.J., Karlhede A., Lindström U., Roček M. [1987]. Algebraic constructions of hyperkähler manifolds. - Commun. Math. Phys. 108, 535-589.
- Hurtubise J. [1983]. $SU(2)$ monopoles of charge 2. - Commun. Math. Phys. 92, 137-162. [Перевод в настоящем сборнике.]
- Manton N. [1982]. Multimonopole dynamics. In: Monopoles in quantum field theory. - Singapore: World Scientific.
- Prasad M.K., Sommerfield G.M. [1975]. - Phys. Rev. Lett. 35, 760-762.

ИНСТАНТОНЫ В ДВУХ И ЧЕТЫРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ¹⁾

М.Ф. Атья

Mathematical Institute, University of Oxford, 24-29
St Giles. Oxford OX1 3LB, United Kingdom

Резюме. В работе показано, что янг-миллсовские инстантоны в четырехмерном пространстве можно естественным образом отождествить с инстантонами двумерной теории со значениями в группе петель.

1. Введение

Попытки квантования реалистических физических калибровочных теорий в четырехмерном пространстве-времени наталкиваются на устрашающие трудности. Поэтому значительное внимание привлекли к себе определенные двумерные (сокращенно 2D) модели, которые, как можно надеяться, обладают некоторыми важными качественными характеристиками четырехмерных (сокращенно 4D) теорий. Так, например, чистая теория Янга - Миллса в 4D сравнивается с CP_n -моделями в 2D. В обеих теориях есть конформная инвариантность и инстантоны; это и дает основания для очевидных аналогий.

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы усилить аналогию, касающуюся инстантонов в этих двух теориях. По существу, мы покажем (по крайней мере, если G - классическая группа, а может быть, и для всех G), что янг-миллсовские инстантоны в 4D можно естественным образом отождествить (т.е. они имеют такое же пространство параметров) с инстантонами в 2D для теории, в которой комплексное проективное

¹⁾ Atiyah M.F. Instantons in two and four dimensions. - Communications in Mathematical Physics, 1984, v.93, pp.437-451.

n -мерное пространство $\mathbb{C}P_n$ заменяется бесконечномерным многообразием ΩG петель на структурной группе G . Такая теория не является столь уж эксцентричной, как может показаться, так как хорошо известно, что ΩG обладает большинством важных свойств пространства $\mathbb{C}P_n$ и появляется естественным образом во многих ситуациях.

Естественное отождествление инстантонов в двух различных теориях подсказывает, что, быть может, имеется тесная связь между этими двумя полевыми теориями. Наш результат указывает поэтому, что полезно было бы изучить двумерную теорию для ΩG -значных полей и что это, вероятно, помогло бы перебросить мост между $\mathbb{C}P_n$ -моделями в 2D и теорией Янга - Миллса в 4D.

Хорошо известно, что $\mathbb{C}P_n$ -инстантоны задаются голоморфными (или рациональными) отображениями $\mathbb{C}P_1 \rightarrow \mathbb{C}P_n$, где $\mathbb{C}P_1 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$ - конформная компактификация $\mathbb{R}^2$. Это определяется тем фактом, что $\mathbb{C}P_n$ - калерово многообразие. Далее, ΩG - бесконечномерное калерово многообразие [15, 17], и поэтому ΩG -инстантоны также задаются голоморфными отображениями

$$f: \mathbb{C}P_1 \rightarrow \Omega G. \quad (1.1)$$

С другой стороны, янг-миллсовские инстантоны в $\mathbb{R}^4$ могут быть построены твисторными методами и описываются соответствующими голоморфными данными. Оказывается, эти голоморфные данные, по существу, равносильны голоморфному отображению f , появившемуся в (1.1). Более того, из недавнего результата Дональдсона [7], уточняющего предшествующие исследования янг-миллсовских инстантонов, следует, что таким образом возникают все отображения f . Фактически доказательство Дональдсона относится только к классическим группам, но представляется правдоподобным, что его результат верен для всех G .

В § 2 мы перечислим основные свойства многообразия ΩG и покажем, что голоморфные отображения f вида (1.1) соответствуют голоморфным расслоениям над $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$ с группой G^c (комплексификация G). В § 3 мы напомним, как янг-миллсовские инстантоны на $\mathbb{R}^4$ можно интерпретировать с помощью твисторных методов в терминах голоморфных расслоений с "вещественной структурой" на $\mathbb{C}P_3$ или, следуя Дональдсону, более простым образом, как голоморфные расслоения на $\mathbb{C}P_2$. Так как $\mathbb{C}P_2$ тесно связано с $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$ (и то и другое является компактификацией $\mathbb{C}^2$), то это сразу дает наш основной результат

(теорему 1) об отождествлении ΩG -инстантонов в $2D$ с янг-миллсовскими инстантонами в $4D$.

В § 4 мы применяем теорему 1 к осесимметричным инстантонам ("ось" — это $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$) и обнаруживаем (теорема 2), что такие инстантоны отвечают голоморфным отображениям $\mathbb{C}P_1$ в одно из (конечномерных) кэлеровых многообразий, являющихся однородными пространствами для G .

Если, например, $G = SU(2)$, мы получаем как раз голоморфные отображения $\mathbb{C}P_1 \rightarrow \mathbb{C}P_1$. Эти результаты интересны в связи с изучением магнитных монополей. Этот аспект и, в частности, связь с еще одним недавним результатом Дональдсона [8] обсуждается в § 5.

2. Голоморфная структура на ΩG

Мы начнем с краткого перечисления основных фактов об ΩG . Подробности можно найти в [17]; см. также [15, 16].

Для произвольной компактной группы Ли G пространство петель ΩG состоит из всех пунктированных отображений единичной окружности S^1 ($|z|=1$) в G , $f: S^1 \rightarrow G$ и $f(1)=1$. Точнее говоря, необходимо, конечно, задать класс используемых отображений f . Для многих вопросов несущественно, какой класс используется, если только предполагается достаточная дифференцируемость. Если f берется из пространства Соболева H^1 (первые производные квадратично интегрируемы), то ΩG становится гильбертовым многообразием, что иногда удобно. Для наших целей достаточно, чтобы f принадлежало классу C^∞ или даже было вещественно аналитическим.

Простейшим случаем является, конечно, $G = U(1)$. Тогда ΩG имеет компоненты, занумерованные числом обходов, и каждую компоненту можно отождествить (переходя к логарифмам) с пространством вещественнозначных функций $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1)=0$. Разложение в ряд Фурье такой функции имеет вид

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad \alpha_{-n} = \bar{\alpha}_n, \quad \sum \alpha_n = 0, \quad (2.1)$$

и, таким образом, полностью определяется коэффициентами Фурье $\{\alpha_n\}$ при $n > 0$. В результате каждая компонента ΩG становится бесконечномерным комплексным векторным пространством.

Для неабелевой группы G ситуация сложнее, так как ΩG уже не линейное пространство. Оно является, однако, бесконечномерным многообразием, и инфинитезимально опять можно использовать разложение в ряд Фурье, чтобы ввести комплексные координаты. Точнее говоря, касательное пространство к ΩG в отмеченной точке (постоянная петля $f(x) = 1$) образовано функциями на S^1 со значениями в алгебре Ли и может быть описано при помощи рядов Фурье

$$\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n x^n, \quad \alpha_{-n} = -\alpha_n^*, \quad \sum \alpha_n = 0, \quad (2.2)$$

где α_n принадлежат комплексификации алгебры Ли группы G . Так, если $G = U(m)$, коэффициенты α_n являются комплексными $m \times m$ -матрицами, а α_n^* обозначает транспонированную сопряженную матрицу. Таким образом, касательное пространство к ΩG в отмеченной точке превращается в комплексное линейное пространство. Теперь, используя очевидную групповую структуру на ΩG , мы можем перенести эту комплексную структуру на все касательные пространства. Оказывается, такая инфинитезимальная (или "почти") комплексная структура на самом деле интегрируема, так что ΩG является бесконечномерным комплексным многообразием. Вскоре мы укажем другое, более удобное описание комплексной структуры.

Чтобы определить эрмитову метрику на ΩG , опять-таки достаточно задать ее в одной точке, а затем разнести по этому многообразию с помощью действия группы. Можно ввести несколько естественных метрик, но в некотором отношении самая естественная — это метрика, задаваемая в терминах коэффициентов Фурье (2.2) выражением

$$\sum_{n>0} n \cdot \text{Tr}(\alpha_n \alpha_n^*), \quad (2.3)$$

где α_n рассматривается как матрица (или, более внутренним образом, след рассматривается как форма Киллинга). Причина, почему (2.3) — естественная метрика, состоит в том, что она является калеровой метрикой. Соответствующая симплектическая форма дается выражением

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \varphi', \psi \rangle d\theta, \quad (2.4)$$

где $\langle, \rangle$ — форма Киллинга, а $\varphi' = d\varphi/d\theta$.

Если G — простая односвязная группа Ли, то ее первые гомотопические группы таковы:

$$\pi_1(G) = \pi_2(G) = 0, \quad \pi_3(G) \cong \mathbb{Z}.$$

Так как $\pi_i(G) \cong \pi_{i-1}(\Omega G)$, то, следовательно,

$$\begin{aligned} \Omega G \text{ связна и односвязна,} \\ \pi_2(\Omega G) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Отсюда следует, в частности, что вторая группа гомологий $H_2(\Omega G)$ также изоморфна $\mathbb{Z}$. Более того, можно проверить, что интеграл от калеровой 2-формы по базисному 2-циклу не равен нулю (и может быть нормирован к 1).

Поэтому мы видим, что ΩG действительно обладает большинством важных свойств пространства $\mathbb{C}P_n$, исключая, разумеется, конечномерность.

Чтобы дальше проследить эту аналогию, полезно напомнить, что $\mathbb{C}P_{n-1}$ можно описать как однородное пространство для $U(n)$ или для $GL(n, \mathbb{C})$:

$$\mathbb{C}P_{n-1} = U(n)/U(1) \times U(n-1) = GL(n, \mathbb{C})/H,$$

где H состоит из всех матриц вида h_{ij} с $h_{ii} = 0$ при $i > 1$. Первое описание показывает, что оно компактно, в то время как второе выявляет его комплексную структуру. Унитарное описание естественно возникает, если рассмотреть орбиту матрицы

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha_i & \text{ вещественны,} \\ \alpha_2 & = \alpha_3 = \dots = \alpha_n \neq \alpha_1, \end{aligned} \tag{2.6}$$

относительно сопряжения элементами $U(n)$. Более общо, для любой компактной группы Ли G орбита произвольного вектора α в алгебре Ли группы G относительно присоединенного представления является однородным пространством M вида

$$M = G/G(\alpha), \quad (2.7)$$

где $G(\alpha)$ — централизатор α (элементы G , коммутирующие с α).

Это пространство также допускает комплексное описание:

$$M = G^c/P, \quad (2.8)$$

где P — подходящая комплексная подгруппа комплексификации G^c группы G . Все эти пространства имеют естественные кэлеровы метрики, а соответствующие им симплектические 2-формы получаются с помощью общей процедуры Кириллова [12]. Заметим, однако, что вторая группа гомологий $H_2(M)$, в отличие от случая пространства CP_n , может иметь несколько образующих; например, для общей диагональной матрицы (2.6) мы получаем $n-1$ образующих.

Вернемся теперь к нашему пространству петель ΩG и обсудим, каким образом оно получает два различных описания. Для этого введем группу $\mathcal{U}$ свободных петель на G , т.е. группу всех отображений $f: S^1 \rightarrow G$ без ограничения на отмеченные точки. Постоянные петли реализуют G как подгруппу в $\mathcal{U}$, а факторпространство, очевидно, можно отождествить с ΩG :

$$\Omega G = \mathcal{U}/G. \quad (2.9)$$

Это соотношение нужно рассматривать как аналог (2.7). Наилучшим оправданием такой аналогии является интерпретация $\mathcal{U}$ как группы калибровочных преобразований для G -расслоения над S^1 . Тогда $\mathcal{U}$ действует естественным образом на пространстве связностей (калибровочных потенциалов) $\mathcal{A}$, и ΩG оказывается орбитой тривиальной связности. Более того, это аффинное действие группы $\mathcal{U}$ на $\mathcal{A}$ можно интерпретировать в терминах коприсоединенного действия центрального расширения $\mathcal{U}$ [18]. Таким образом, ΩG получает с помощью процедуры Кириллова естественную симплектическую форму, которую можно отождествить с (2.4).

Комплексификация $\mathcal{U}^c$ группы $\mathcal{U}$ состоит из отображений $f: S^1 \rightarrow G^c$ и имеет подгруппу $\mathcal{P}$, образованную

отображениями f , которые продолжаются до голоморфных отображений замкнутого единичного диска $|z| \leq 1$ в G^c . Тогда имеет место аналог (2.8), а именно

$$\Omega G = \mathcal{U}^c / \mathcal{P}, \quad (2.10)$$

что наделяет ΩG комплексной структурой, определенной инфинитезимально с помощью (2.5). Отождествление (2.10) равносильно двум теоретико-групповым утверждениям:

$$(i) \quad \mathcal{U}\mathcal{P} = \mathcal{U}^c,$$

$$(ii) \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{P} = G.$$

Равенство (i), по существу, утверждает существование решения определенной нелинейной граничной задачи, в то время как (ii) дает его единственность с точностью до постоянных.

Из равенства (2.10) следует, что для любого (конечномерного) комплексного многообразия X голоморфное отображение $f: X \rightarrow \Omega G$ задается относительно некоторого открытого покрытия $\{U_i\}$ многообразия X голоморфными отображениями $f_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}^c$, согласованными по модулю $\mathcal{P}$, т.е. для каждой пары i, j имеем $f_i f_j^{-1}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathcal{P}$. Более того, условие голоморфности f_i означает просто, что соответствующее отображение $F_i: U_i \times S^1 \rightarrow G^c$, задаваемое равенством $F_i(x, z) = f_i(x)(z)$, является голоморфным (в некоторой окрестности в $U_i \times \mathbb{C}$).

Далее, голоморфные отображения $f: S^1 \rightarrow G^c$ определяют естественным образом голоморфные G^c -расслоения над $\mathbb{C}P_1$. Именно, представим $\mathbb{C}P_1$ в виде объединения двух дисков: D_0 ($|z| \leq 1$) и D_∞ ($|z| \geq 1$). Возьмем тривиальные G^c -расслоения над окрестностями дисков D_0, D_∞ и отождествим их над пересечением этих окрестностей с помощью f . Если f голоморфно зависит также и от точки пространства параметров X , то мы получим голоморфное расслоение над $X \times \mathbb{C}P_1$. Сформулируем это в более точном виде. Удобно задать отмеченные точки $x_0 \in X$, $\infty \in \mathbb{C}P_1$, $x_0 \times \infty \in X \times \mathbb{C}P_1$ и $1 \in \Omega G$. (Здесь 1 обозначает постоянную петлю $f(z) = 1$.) И последнее, пунктированное расслоение будет

означать расслоение с заданной тривиализацией слоя над отмеченной точкой (т.е. с отождествлением этого слоя со структурной группой). Интересующее нас точное утверждение состоит в следующем:

Предложение 2.11. Пусть X — компактное связное многообразие с отмеченной точкой. Тогда имеет место естественная эквивалентность между следующими объектами:

- (i) пунктированные голоморфные отображения $X \rightarrow \Omega G$,
 (ii) пунктированные голоморфные G^c -расслоения над $X \times \mathbb{C}P_1$, тривиальные над $x_0 \times \mathbb{C}P_1$ и над $X \times D_\infty$.

Доказательство. Имея такое голоморфное расслоение, как в (ii), мы можем указать открытое покрытие $\{U_i\}$ для X , такое, что это расслоение тривиально над каждым $U_i \times D_0$ (а также, по предположению, и над $X \times D_\infty$).

Различные выборы тривиализации над $X \times D_\infty$ отвечают разным голоморфным отображениям $X \times D_\infty \rightarrow G^c$, и так как X компактно и связно, эти отображения должны быть постоянны вдоль сомножителя X и зависеть только от D_∞ . Более того, тривиализация над отмеченной точкой $x_0 \times \infty$ единственным образом продолжается до тривиализации над $x_0 \times \mathbb{C}P_1$, ограничение которой дает определенную тривиализацию над $x_0 \times D_\infty$. Таким образом, мы имеем определенный выбор тривиализации на всем $X \times D_\infty$. Выберем на каждом $U_i \times D_0$ любую тривиализацию, согласованную с тривиализацией над $x_0 \times \mathbb{C}P_1$ (если $x_0 \in U_i$). Тогда голоморфное расслоение задается такими пунктированными голоморфными отображениями $f_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}^c$, которые согласованы по модулю $\mathcal{P}$ и, таким образом, определяют пунктированное голоморфное отображение $f: X \rightarrow \mathcal{U}^c/\mathcal{P} = \Omega G$. Легко видеть, что эта конструкция не зависит от выбора открытого покрытия $\{U_i\}$ и устанавливает естественное взаимно однозначное соответствие между (i) и (ii).

Нас интересует частный случай (2.11), когда $X = \mathbb{C}P_1$. Заметим, что в этом случае как объекты (i), так и объекты (ii) (для простой группы G) топологически классифицируются одним целым числом. В (i) это "степень" отображения f , определяемая как множитель, на который элемент группы $H_2(\Omega G)$, представленный отображением f , отличается от ее образующей,

или же, эквивалентно, как интеграл по $\mathbb{C}P_1$ от $f^*\omega$, где ω — нормированная кэлерова форма на ΩG . В (ii) целое число возникает как 4-мерный характеристический класс расслоения над $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$. Например, если $G = SU(n)$, это будет второй класс Чжэня.

Продолжая рассмотрение случая $X = \mathbb{C}P_1$, мы хотели бы ослабить предположение пункта (ii) о том, что расслоение тривиально на $X \times D_\infty$, заменив его предположением о тривиальности лишь на $X \times \infty$. Для расслоений над $\mathbb{C}P_1$ условие тривиальности является открытым условием, так что любое расслоение над $\mathbb{C}P_1 \times D_\infty$, тривиальное над $\mathbb{C}P_1 \times \infty$, автоматически является тривиальным и над $\mathbb{C}P_1 \times D'$ для некоторого диска D' , такого, что $\infty \in D' \subset D_\infty$. Это немедленно следует из "стратификации Биркгофа" для ΩG , описанной в [16, 17], так как единственный открытый страт отвечает тривиальным расслоениям.

Вследствие того, что масштабное преобразование переводит D' в D_∞ , мы возвращаемся к ситуации предложения 2.11. Чтобы формализовать это, введем следующие обозначения:

$$\mathcal{H}_k(\mathbb{C}P_1, \Omega G) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{пунктированные голоморфные отображения} \\ \mathbb{C}P_1 \rightarrow \Omega G & \text{степени } k \end{array} \right\},$$

$\mathcal{M}_k(\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1, \mathbb{C}P_1 \vee \mathbb{C}P_1; G^c) = \{ \text{классы пунктированного изоморфизма голоморфных } G^c\text{-расслоений над } \mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1, \text{ тривиальных над } \mathbb{C}P_1 \vee \mathbb{C}P_1 \text{ (объединение осей) и имеющих характеристический класс, равный } k \}.$

И $\mathcal{H}_k$ и $\mathcal{M}_k$ естественным образом являются комплексными многообразиями. На самом деле из общих результатов алгебраической геометрии [13] следует, что $\mathcal{M}_k$ является (некомпактным) алгебраическим многообразием (см. § 3), а предложение 2.11 отождествляет $\mathcal{H}_k$ с открытым подмножеством в $\mathcal{M}_k$. Более того, комплексная структура на $\mathcal{H}_k$, индуцированная этим отождествлением, совпадает с его естественной комплексной структурой как пространства голоморфных отображений $\mathbb{C}P_1 \times S^1 \rightarrow G^c$. Как отмечалось выше, любое голоморфное расслоение, отвечающее точке ξ из $\mathcal{M}_k$, тривиально на $\mathbb{C}P_1 \times D'$ для некоторого диска D' , заданного неравенством $|z| \geq \rho$. Точная нижняя грань множества таких ρ является на самом деле непрерывной

функцией ξ , что и определяет непрерывную неотрицательную функцию $\varphi: M_k \rightarrow \mathbb{R}$. Положим $M_k^\mu = \varphi^{-1}[0, \mu)$. Тогда M_k^μ — открытое подмножество M_k , и предложение 2.11 дает гомеоморфизм

$$M_k^1 \cong \mathcal{H}_k. \quad (2.12)$$

С другой стороны, преобразование $x \mapsto \mu x$ (с вещественным положительным μ) индуцирует действие мультипликативной группы на M_k , которое мы также обозначим как $\xi \mapsto \mu \xi$. Из определения φ видно, что это отображение эквивариантно относительно такого действия, т.е. $\varphi(\mu \xi) = \mu \varphi(\xi)$. Отсюда следует, что μ индуцирует гомеоморфизм $M_k^1 \cong M_k^\mu$. Мы можем теперь "растянуть" M_k^1 до M_k , используя отображение $\xi \mapsto (1 - \varphi(\xi))^{-1} \xi$, обратным к которому является отображение $\eta \mapsto (1 + \varphi(\eta))^{-1} \eta$. С учетом (2.12) это устанавливает гомеоморфизм

$$M_k \cong \mathcal{H}_k. \quad (2.13)$$

Замечание. Эквивалентность (2.12) является естественным образом комплексно аналитической, но растягивание, дающее (2.13), не является таковым. Мы могли бы сделать (2.13) диффеоморфизмом, сгладив непрерывную функцию φ , но голоморфные структуры на M_k и $\mathcal{H}_k$ все же существенно различны, подобно тому как комплексная плоскость отличается от единичного диска.

3. Янг-миллсовские инстантоны

В этом параграфе мы напомним известные результаты о янг-миллсовских инстантонах, включая недавний важный результат Дональдсона [7]. С использованием также и результатов § 2 это приведет нас к основному нашему заключению, теореме 1.

Янг-миллсовский инстантон на $\mathbb{R}^4$ с группой G представляет собой G -связность (или потенциал), кривизна (или напряженность) которого удовлетворяет условиям

$$*F = -F, \quad \int |F|^2 < \infty. \quad (3.1)$$

Мы выбрали здесь знак "минус" (дающий антиавтодуальные решения) для согласования со стандартной ориентацией, отвечающей комплексной структуре. Нормированное действие

$$\frac{1}{8\pi^2} \int |F|^2$$

оказывается равным в этом случае неотрицательному целому числу k , называемому инстантонным числом.

Если введены комплексные координаты (z_1, z_2) , что дает отождествление $\mathbb{R}^4$ с $\mathbb{C}^2$, то F можно разложить на компоненты двух типов:

$$F = F^{2,0} + F^{1,1} + F^{0,2}, \quad F^{2,0} = -(F^{0,2})^*.$$

Условие антиавтодуальности $*F = -F$ распадается тогда на две части:

$$(a) \quad F^{0,2} = 0,$$

$$(b) \quad F^{1,1} \wedge \omega = 0,$$

(3.2)

где $\omega = \sum_{i=1}^2 dz_i \wedge d\bar{z}_i$ — стандартная 2-форма. Условие (a) представляет собой не что иное, как условие интегрируемости для голоморфной структуры на G^c -расслоении, в то время как (b) — это дополнительное условие унитарности, равносильное, по существу, выбору некоторой подходящей метрики в слоях.

Локально существует много независимых решений (3.2), но глобально при некоторых подходящих условиях для каждого решения (a) имеется единственное решение (b). Это было доказано с помощью прямых аналитических методов Дональдсоном [6] в случае, когда $\mathbb{C}^2$ заменено на компактную кэлерову поверхность. Для случая $\mathbb{C}^2$, который нас сейчас интересует, Дональдсон [7] дал более алгебраическое доказательство, основанное на явной АДНМ-конструкции [1, 3] и пригодное для любой классической группы G . Чтобы дать точное описание результата Дональдсона, введем сначала следующие пространства параметров:

$$M_k(\mathbb{R}^4, G) - \text{пространство } k\text{-инстантонов на } \mathbb{R}^4 \text{ с}$$

группой G по модулю пунктированной калибровочной эквивалентности;

$\mathcal{M}_*(\mathbb{C}P_2, \mathbb{C}P_1; G^c)$ — пространство классов пунктированного изоморфизма голоморфных G^c -расслоений на $\mathbb{C}P_2$, тривиальных на $\mathbb{C}P_1$.

"Пунктированная калибровочная эквивалентность" означает, что разрешаются только такие калибровочные преобразования, которые стремятся к $\mathbb{I}$ на ∞ . Эквивалентно, если мы конформно компактифицируем $\mathbb{R}^4$ до S^4 , то $\infty \in S^4$ используется в качестве отмеченной точки. Подобным образом $\mathbb{C}P_2$ можно рассматривать как компактификацию $\mathbb{C}^2$, где $\mathbb{C}P_1$ — "прямая на бесконечности", и выбрать любую точку на $\mathbb{C}P_1$ в качестве отмеченной. Тогда результат Дональдсона состоит в следующем:

Предложение 3.3 (Дональдсон). Для любой классической группы G существует естественный диффеоморфизм

$$M_*(\mathbb{R}^4, G) \cong \mathcal{M}_*(\mathbb{C}P_2, \mathbb{C}P_1; G^c).$$

Замечания. (1) В этом результате особенно важно то, что $\mathcal{M}_*$ является чисто голоморфным (даже алгебраическим) объектом, не связанным ни с какой вещественной или унитарной структурой.

(2) Обычный твисторный подход к инстантам, как объясняется в [1], использует все комплексные отождествления $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ и приводит к описанию инстантов в терминах голоморфных расслоений на $\mathbb{C}P_3$ с дополнительными условиями вещественности.

(3) Отображение $M_* \rightarrow \mathcal{M}_*$ легко задать явно, и нетрудно убедиться, что оно инъективно. Вся сила результата Дональдсона в том, что это отображение сюръективно. С другой стороны, это только теорема существования, и обратное отображение $\mathcal{M}_* \rightarrow M_*$ не было построено явно. Это означает, что нет элементарного способа, позволяющего сопоставить явный инстант каждой точке пространства параметров $\mathcal{M}_*$.

(4) Само по себе M_* представляет собой гладкое многообразие, а $\mathcal{M}_*$ — комплексное многообразие. Предложение 3.3 наделяет M_* комплексной структурой. Так как последняя зависит от выбора отождествления $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, то на самом деле мы имеем целое 2-параметрическое семейство (параметризованное

точками S^2) таких комплексных структур на M_k .

(5) Если использовать все калибровочные преобразования на S^4 , а не только пунктированные, то получится меньшее пространство параметров, а именно M_k/G . Если, например, $G = SU(2)$, то $\dim M_k = 8k$, в то время как $\dim M_k/G = 8k - 3$. Более того, M_k является многообразием для общей группы G , а M_k/G имеет особенности, происходящие от приводимых инстантов.

(6) В алгебраической геометрии хорошие пространства параметров (или пространства модулей) алгебраических расслоений существуют только тогда, когда мы ограничиваемся стабильными расслоениями. Однако на $\mathbb{CP}_2$ условие, что расслоения тривиальны над $\mathbb{CP}_1$, по существу, обеспечивает стабильность.

Сравнивая предложение 3.3 с результатами § 2, мы замечаем, что здесь мы рассматривали голоморфные расслоения на $\mathbb{CP}_2$ (тривиальные на $\mathbb{CP}_1$), в то время как в § 2 мы рассматривали голоморфные расслоения на $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$ (тривиальные на $\mathbb{CP}_1 \vee \mathbb{CP}_1$). Далее, $\mathbb{CP}_2$ и $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$ бирационально эквивалентны (что устанавливается с помощью обычной стереографической проекции квадратичной поверхности $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$ на $\mathbb{CP}_2$). Точнее, имеется диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ \mathbb{CP}_2 & & \mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1 \end{array} \quad (3.4)$$

где Y — некоторая третья алгебраическая поверхность. Отображение α сжимает два непересекающихся экземпляра $\mathbb{CP}_1$ в Y , переводя их в две различные точки A, B на $\mathbb{CP}_1 \subset \mathbb{CP}_2$. Отображение β сжимает третье $\mathbb{CP}_1$ в Y , переводя его в точку C . На Y эти три экземпляра $\mathbb{CP}_1$ образуют такую конфигурацию:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \hline A & & B \end{array} \quad (3.5)$$

Здесь прямые помечены точками, в которые они сжимаются отображениями α и β . В такой ситуации совершенно общие алгебро-

геометрические соображения гарантируют, что голоморфное расслоение на Y с тривиализацией на конфигурации прямых (3.5) можно опустить при помощи α , что дает расслоение на CP_2 , тривиализованное в точках A и B . Точно так же его можно опустить посредством β , получив расслоение на $CP_1 \times CP_1$, тривиализованное в точке C . С теоретико-множественной точки зрения операция опускания очевидна. Единственным неочевидным моментом является тот факт, что получится локально тривиальное голоморфное расслоение, а это эквивалентно построению голоморфной тривиализации на Y в окрестности сжимаемой кривой. Доказательство возможности этого построения состоит из двух этапов. Сначала шаг за шагом строится формальный ряд Тейлора (по нормальным координатам), а затем используется общая теорема Гротендика (Grothendieck A., Dieudonné J. *Éléments de Géométrie Algébrique* III, Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes Sci., № II, 1961), утверждающая, что такие ряды Тейлора порождены алгебраическими функциями.

Таким образом, бирациональное соответствие (3.4) приводит к естественному отождествлению пространств параметров:

$$\mathcal{M}_k(CP_2, CP_1; G^c) \cong \mathcal{M}_k(CP_1 \times CP_1, CP_1 \vee CP_1; G^c). \quad (3.6)$$

Замечание. Более общо, те же рассуждения показывают, что мы можем заменить CP_2 на любую алгебраическую компактификацию C^2 . Таким образом, пространство $\mathcal{M}_k$ в (3.6) правильно рассматривать как пространство параметров алгебраических G^c -расслоений на C^2 с тривиализацией в ∞ .

Соединяя (2.13), предложение 3.3 и (3.6), приходим к нашему основному результату:

Т е о р е м а 1. Для любой классической группы G и любого положительного целого k следующие два пространства диффеоморфны:

(1) пространство параметров янг-миллсовских k -инстантов на R^4 с группой G по модулю пунктированных калибровочных преобразований;

(2) пространство параметров всех пунктированных голоморфных отображений $CP_1 \rightarrow \Omega G$ степени k .

Одним из возможных применений теоремы 1 было бы доказатель-

ство сделанной в [47] гипотезы относительно топологии пространства параметров инстантонов M_k при $k \rightarrow \infty$. Точнее, в [47] было высказано предположение, что естественное вложение $M_k \rightarrow \Omega^3 G$ индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп до размерности q , если $k > k_0(q)$. Здесь $\Omega^3 G$ обозначает пространство пунктированных отображений $S^3 \rightarrow G$. С другой стороны, теорема Сигала [19] утверждает, что пространство пунктированных голоморфных отображений $\mathbb{C}P_1 \rightarrow \mathbb{C}P_n$ степени k в том же смысле аппроксимирует пространство $\Omega^2(\mathbb{C}P_n)$ при $k \rightarrow \infty$. Более того, этот результат Сигала можно обобщить и на другие однородные пространства помимо $\mathbb{C}P_n$, и, по всей вероятности, те же методы распространяются и на случай ΩG . Вместе с теоремой 1 это дало бы доказательство гипотезы из [47], по крайней мере для классических групп.

Распространено убеждение, хотя этого никто еще не доказал, что для $G = SU(2)$ полные уравнения Янга-Миллса на S^4 не имеют других решений, кроме инстантонов (и антиинстантонов). Как подсказывает теорема 1, тогда того же можно ожидать и для гармонических отображений

$$\mathbb{C}P_1 \rightarrow \Omega(SU(2)). \quad (3.7)$$

Соответствующий результат для отображений $\mathbb{C}P_1 \rightarrow \mathbb{C}P_1$ несложен и хорошо известен, но в случае (3.7) задача кажется интригующе нетривиальной.

4. Осесимметричный случай

В этом параграфе мы применим теорему 1 в частном случае осесимметричных инстантонов. Это приводит к особенно простому ответу (теорема 2), который, как мы объясним в § 5, имеет интерпретацию в терминах магнитных монополей.

Начнем с еще нескольких замечаний о геометрии группы петель ΩG . Во-первых, на ΩG действует группа окружности S^1 посредством вращения петель. Так как ΩG состоит из пунктированных петель, это действие определяется соотношением

$$(\lambda f)(\mu) = f(\lambda\mu)f(\lambda)^{-1} \text{ для } \lambda \in S^1 \text{ и } f \in \Omega G.$$

В частности, f является неподвижной точкой тогда и только тогда, когда $f(\mu) = f(\lambda\mu)f(\lambda)^{-1}$, или $f(\mu)f(\lambda) = f(\lambda\mu)$, т.е. если f — гомоморфизм $S^1 \rightarrow G$. Если α — любой такой гомоморфизм, то множество всех сопряженных с ним гомоморфизмов естественным образом параметризовано однородным пространством $\Gamma_\alpha = G/G(\alpha)$, где $G(\alpha)$ — централизатор однопараметрической группы α . Таким образом, множество Γ неподвижных точек действия S^1 на ΩG является объединением непересекающихся подмножеств: $\Gamma = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$, где α пробегает множество Λ классов сопряженности гомоморфизмов S^1 в G . Это индексирующее множество Λ можно естественным образом отождествить с целочисленной решеткой в алгебре Ли группы G (ядром экспоненциального отображения) по модулю действия группы Вейля. Если, например, $G = SU(2)$, то Λ оказывается множеством неотрицательных целых чисел и Γ_0 — точка, $\Gamma_n = \mathbb{CP}_1$ при $n \geq 1$.

Как мы отмечали раньше, все однородные пространства $G/G(\alpha)$ являются кэлеровыми многообразиями. На самом деле они возникают естественно как кэлеровы подмногообразия Γ_α в ΩG . Отметим, что в качестве просто комплексного многообразия каждое из этих однородных пространств появляется в ΩG многократно. Различные α отвечают различным выборам кэлеровой метрики. Например, если $G = SU(2)$, то кэлерова метрика на Γ_n есть умноженная на n кэлерова метрика на Γ_1 . Для больших групп, однако, решетка имеет несколько образующих, и не все кэлеровы метрики пропорциональны друг другу.

Группа G естественно действует сопряжением на ΩG . При этом петля $f(\lambda)$ посредством $g \in G$ сопрягается с $g f(\lambda) g^{-1}$. В частности, для любого гомоморфизма $\alpha: S^1 \rightarrow G$ мы получаем индуцированное действие группы S^1 на ΩG , так что петля $f(\lambda)$ переходит под действием $\mu \in S^1$ в петлю $\alpha(\mu) f(\lambda) \alpha(\mu)^{-1}$. Рассмотрим теперь множество $\Gamma^\alpha \subset \Omega G$ таких петель, для которых это действие группы S^1 совпадает с обратным к другому действию S^1 , которое получается вращением петель. Тогда

$$f \in \Gamma^\alpha \iff \alpha(\mu)^{-1} f(\lambda) \alpha(\mu) = f(\mu\lambda) f(\mu)^{-1}. \quad (4.1)$$

Полагая $h(\mu) = \alpha(\mu) f(\mu)$ и вспоминая, что α — гомоморфизм, так что $\alpha(\lambda\mu) = \alpha(\lambda)\alpha(\mu)$, перепишем (4.1) сле-

дующим образом:

$$f \in \Gamma^\infty \Leftrightarrow h(\lambda) h(\mu) = h(\lambda\mu). \quad (4.2)$$

Значит, $h: S^1 \rightarrow G$ также является гомоморфизмом, т.е. $h \in \Gamma$. Поэтому из (4.2) следует, что

$$\Gamma^\infty = \alpha^{-1} \Gamma. \quad (4.3)$$

В частности, компонента $(\Gamma^\infty)_1$ множества Γ^∞ , содержащая отмеченную точку $1 \in \Omega G$, получается из однородного пространства Γ_∞ в результате левого сдвига:

$$(\Gamma^\infty)_1 = \alpha^{-1} \Gamma_\infty. \quad (4.4)$$

После этого отступления вернемся к рассмотрению янг-миллсовских инстантонов на $\mathbb{R}^4$. Фиксируем ортогональное разложение

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \quad (4.5)$$

и рассмотрим вращения вокруг начала координат во втором $\mathbb{R}^2$, продолженные тривиально на первое слагаемое. Таким образом, первое $\mathbb{R}^2$ становится "осью" вращения.

Под S^1 -инвариантной связностью над $\mathbb{R}^4$ (относительно этого действия S^1 на $\mathbb{R}^4$) будем понимать главное G -расслоение P со связностью A вместе с поднятием действия S^1 до действия на P , сохраняющего A . От изоморфизмов двух таких S^1 -инвариантных связностей всегда будем требовать, чтобы они коммутировали с действием S^1 в расслоениях. Так как два различных поднятия действия S^1 отличаются на автоморфизм расслоения, сохраняющий A , то поднятие определяется своим значением над любой отмеченной точкой на оси (включая ∞). В такой отмеченной точке действие S^1 определяет гомоморфизм $\alpha: S^1 \rightarrow G$. Если мы работаем с пунктированными расслоениями, то α — инвариант. В противном случае инвариантом является только его класс сопряженности. Для краткости будем называть α типом инвариантного инстантона.

Теперь мы хотели бы применить теорему I к S^1 -инвариантным инстантонам. Только следующие моменты требуют специальных замечаний.

1. Комплексные координаты мы выбираем в согласии с разложением (4.5).

2. Голоморфное расслоение над $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$, тривиальное на $\mathbb{C}P_1 \times \infty$ и инвариантное относительно действия S^1 на второй сомножитель, с необходимостью является тривиальным на всем $\mathbb{C}P_1 \times (\mathbb{C}P_1 - 0)$. Это следует из того, что комплексификация S^1 -инвариантности дает $\mathbb{C}^*$ -инвариантность, и тривиальность вблизи $\mathbb{C}P_1 \times \infty$ тогда разносится с помощью $\mathbb{C}^*$ до тривиальности на $\mathbb{C}P_1 \times (\mathbb{C}P_1 - 0)$. Это означает, что мы можем работать прямо с предложением 2.11 и не надо пользоваться "растягиванием", применявшимся в случае теоремы 1.

3. Так как действие α группы S^1 не сохраняет тривиализацию над отмеченной точкой, то S^1 -инвариантные инстантоны соответствуют отображениям $\mathbb{C}P_1$ не в Γ , а в Γ^∞ . Отметим, что в определении Γ^∞ мы использовали действие, обратное к вращению петель, потому что наша отмеченная точка — это ∞ , а не 0. В силу (4.4) перенос отмеченной точки ΩG из $\bar{1}$ в α заменяет Γ^∞ (его $\bar{1}$ -компоненту) на Γ_α .

С учетом этих замечаний рассуждения § 3 позволяют определить пространство параметров S^1 -инвариантных инстантонов:

Т е о р е м а 2. Для любой классической группы G и любого гомоморфизма $\alpha: S^1 \rightarrow G$ пространство параметров пунктированных S^1 -инвариантных k -инстантонов типа α естественно изоморфно пространству параметров пунктированных голоморфных отображений $f: \mathbb{C}P_1 \rightarrow G/G(\alpha)$ степени k .

Замечание. Мы вывели теорему 2 из теоремы 1. Можно также [2] дать непосредственное доказательство теоремы 2, не используя ΩG , но по-прежнему применяя результат Дональдсона 3.3.

Степень отображения $f: \mathbb{C}P_1 \rightarrow G/G(\alpha)$ определяется относительно калеровой формы на $G/G(\alpha)$, которая, как отмечалось ранее, зависит от α . Например, если $G = SU(2)$ и α — гомоморфизм

$$\alpha(z) = \begin{bmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{bmatrix},$$

то степень отображения $f: \mathbb{C}P_1 \rightarrow G/G(\alpha) = \mathbb{C}P_1$ равна

умноженной на $2n$ обычной степени (скажем, p). Это означает, что k должно делиться на $2n$:

$$k = 2np. \quad (4.6)$$

В общем случае вторая группа гомологий пространства $G/G(\alpha)$ имеет более одной образующей, так что класс гомологий f не определяется числом k . Это означает, что пространства параметров в теореме 2 при данных α и k имеют несколько компонент. Их можно охарактеризовать с помощью ограничения инстантона на ось симметрии в $\mathbb{R}^4$. С применением комплексного описания из § 3 это дает голоморфное расслоение ξ над $\mathbb{CP}_1$ (компактификацией $\mathbb{R}^2$ -оси). Так как действие S^1 , заданное гомоморфизмом α , сохраняет голоморфную структуру, то структурная группа расслоения редуцируется с G^c до $G(\alpha)^c$. Если, например, α — типичный гомоморфизм, то $G(\alpha)$ — максимальный тор T в G , и поэтому ξ является суммой линейных расслоений. Раз так, оно имеет l целочисленных инвариантов, где $l = \dim T = \text{rank } G$, которые более инвариантным образом можно рассматривать как элемент $\lambda \in H_1(T) \cong H_2(G/T)$. Он соответствует классу гомологий отображения $f: \mathbb{CP}_1 \rightarrow G/T$, сопоставляемого инстантону по теореме 2.

Гомоморфизм α (по-прежнему, в типичном случае, когда $G(\alpha) = T$) отображает S^1 в T и, следовательно, тоже может рассматриваться как элемент $H_1(T)$. Тогда степень k отображения f дается формулой

$$k = \langle \lambda, \alpha \rangle, \quad (4.7)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает внутреннее произведение в $H_1(T)$, индуцированное формой Киллинга на G (нормированной подходящим образом). Формула (4.7) является обобщением (4.6), справедливым для случая группы $SU(2)$. Более того, подобные результаты имеют место и в случае, когда α не типичен. Единственное отличие заключается в том, что T надо заменить на связную компоненту центра в $G(\alpha)$.

5. Магнитные монополи

Как хорошо известно (см., например, [10, 11]), решения автономных уравнений Янга - Миллса в $\mathbb{R}^4$, не зависящие от x_4 , сводятся к решениям уравнений Богомольного в $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla \varphi = *F. \quad (5.1)$$

Здесь поле Хиггса φ находится в присоединенном представлении, $\nabla \varphi$ обозначает его ковариантную производную (относительно некоторой связности A), F - кривизна A , а $*$ - оператор дуальности в $\mathbb{R}^3$. Решения уравнения (5.1), удовлетворяющие определенным граничным условиям на ∞ , называются магнитными монополями (Прасада - Зоммерфельда). При $x \rightarrow \infty$ предполагается, что предельные значения φ лежат в некоторой фиксированной G -орбите в алгебре Ли. Если α - точка на этой орбите, то для x , лежащих на сфере S^2 большого радиуса, определен класс гомологий λ асимптотического отображения $\varphi_\infty: S^2 \rightarrow G/G(\alpha)$, называемый магнитным зарядом. Для $G = SU(2)$ он задается одним целым числом, но в общем случае для его определения надо указать несколько целых чисел. При фиксированных α и λ можно изучать пространство параметров всех магнитных монополей типа α с зарядом λ . В этом направлении многое было сделано, особенно в случае группы $SU(2)$ [10, 14].

Подобную переформулировку можно осуществить и тогда, когда трансляционная инвариантность заменена на вращательную инвариантность. Однако сначала нужно заменить евклидово разложение

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 \quad (5.2)$$

конформной эквивалентностью

$$\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^2 \sim S^1 \times H^3, \quad (5.3)$$

где H^3 - трехмерное гиперболическое пространство (постоянной кривизны, равной -1). Если для разложения $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ использовать декартовы координаты (x, y) в первой плоскости и полярные координаты (r, θ) во второй плоскости, то евклидова метрика в $\mathbb{R}^4$ принимает следующий вид:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 = r^2 \left\{ d\theta^2 + \frac{dx^2 + dy^2 + dr^2}{r^2} \right\}. \quad (5.4)$$

Так как гиперболическое 3-пространство H^3 в координатах (x, y, z) можно представить как верхнее полупространство $z > 0$ с метрикой

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2},$$

то (5.4) устанавливает конформную эквивалентность (5.3) с конформным множителем r^2 .

Так как автодуальные уравнения Янга – Миллса конформно инвариантны, то из (5.3) следует, что решения этих уравнений на $\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^2$, не зависящие от θ , сводятся к решениям уравнений Богомольного (5.1) на гиперболическом 3-пространстве H^3 . Отметим, что метрика базового многообразия входит в (5.1) через $*$ -оператор.

Так как S^1 компактна (в отличие от $\mathbb{R}^1$), любое решение (5.1) с конечной энергией на H^3 отвечает решению с конечным действием для уравнений автодуальности на $\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^2$. Поэтому S^1 -инвариантные инстантоны на всем $\mathbb{R}^4$ (или S^4), которые мы изучали в § 4, можно интерпретировать как магнитные монополи на H^3 . Более того, имея в виду это сопоставление, мы выбрали обозначения так, чтобы тип α и гомотопический инвариант λ для S^1 -инвариантного инстантона на самом деле соответствовали типу α (предел поля Хиггса) и магнитному заряду λ для магнитного монополя на H^3 (они определяются так же, как и в евклидовом случае).

Отличительным свойством монополей на H^3 , которые происходят из S^1 -инвариантных инстантонов на $\mathbb{R}^4$, является то, что α – целое. Этот факт имеет место потому, что такие решения продолжаются на $\mathbb{R}^2$ -ось в $\mathbb{R}^4$. Ранее были построены [9] решения с нецелым α (для $SU(2)$), имеющие особенности на $\mathbb{R}^2$ -оси.

Весьма правдоподобно, что все магнитные монополи на H^3 с целым типом α и с правильным асимптотическим поведением возникают из S^1 -инвариантных инстантонов. Если это так, то по теореме 2 соответствующее пространство параметров для монополей на H^3 можно отождествить с подходящим пространством голоморфных отображений $f: \mathbb{CP}_1 \rightarrow G/G(\alpha)$. В частности,

для $G = SU(2)$ мы получаем как раз пространство рациональных отображений $f: \mathbb{CP}_1 \rightarrow \mathbb{CP}_1$, т.е. рациональные функции одной комплексной переменной.

Так как $G(\alpha)$ не меняется при замене α на любое целое кратное, то из теоремы 2 следует также, что пространство параметров монополей на H^3 типа $p\alpha$ (p целое) с зарядом λ такое же, как пространство параметров для типа α и заряда λ . В евклидовом пространстве всегда можно изменить масштаб для поля Хиггса, используя дилатации в $\mathbb{R}^3$. В гиперболическом пространстве это невозможно: кривизна задает абсолютную шкалу. Однако монополи типа $p\alpha$ на H^3 можно интерпретировать как монополи типа α на $H^3(p^{-1})$, где $H^3(c)$ обозначает гиперболическое пространство постоянной кривизны $-c$ (т.е. H^3 с метрикой, деленной на c). В этом можно убедиться, возвращаясь к $\mathbb{R}^4$ и замечая, что (5.3) можно заменить на конформную эквивалентность

$$\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^2 \sim S^1(c) \times H^3(c), \quad (5.5)$$

где $S^1(c)$ — теперь окружность радиуса c^{-1} .

Таким образом, монополи типа α с зарядом λ имеют одинаковое пространство параметров для всех гиперболических пространств $H^3(p^{-1})$ с $p = 1, 2, 3$. При $p \rightarrow \infty$ гиперболическое пространство $H^3(p^{-1})$ стремится к плоскому пространству $\mathbb{R}^3$. Это подсказывает, что, быть может, то же самое пространство параметров годится и для монополей на $\mathbb{R}^3$. Эта гипотеза сейчас уже доказана Дональдсоном [8] для $G = SU(2)$, хотя его доказательство непосредственное и не использует гиперболического пространства.

Гипотеза, которую мы только что выдвинули, означала бы, что каждый монополь на $\mathbb{R}^3$ естественным образом представляет собой предел k -инстантонов (инвариантных относительно S^1) при $k \rightarrow \infty$. Все явные формулы для инстантонов рациональны, в то время как в формулы для монополей входят экспоненциальные функции. Поэтому предельная процедура предполагает представление экспоненты в виде предела рациональных функций возрастающих степеней. Чакрабартти [5] выводил такие формулы для монополей как пределов инстантонов, и было бы интересно связать его числительный подход с нашим более теоретическим. Похоже, что основной механизм в обоих подходах один и тот же.

Более детальное изучение монополей на гиперболическом пространстве, параллельное подходу Хитчина, представлено в [27].

В заключение полезно, быть может, дать некоторые общие пояснения о связи между монополями и рациональными отображениями. Еще в § 3 мы упоминали теорему Сигала [19] о топологии пространств рациональных отображений, а именно, что в пределе при степени, стремящейся к ∞ , это пространство имеет гомотопический тип соответствующего пространства непрерывных отображений. (В работе [19] рассмотрены отображения $\mathbb{C}P_1 \rightarrow \mathbb{C}P_n$, но использованные в ней методы были обобщены и на другие случаи, отличные от $\mathbb{C}P_n$.) Отсюда следует, что и пространство параметров монополей обладает (предположительно) теми же свойствами. В таком случае этот результат, быть может, допускает прямое аналитическое доказательство с помощью теории Морса. На самом деле Таубс [20] уже предпринял некоторые шаги в этом направлении, показав, что (для $SU(2)$) существуют неминимальные решения уравнений Янга – Миллса – Хиггса. В противоположность этому известно, что не существует неминимальных гармонических отображений $\mathbb{C}P_1 \rightarrow \mathbb{C}P_1$: теория Морса здесь как раз не работает. Поэтому уравнения Янга – Миллса – Хиггса в $\mathbb{R}^3$, по-видимому, можно рассматривать как своего рода "регуляризацию" уравнения для гармонических отображений на S^2 . В результате это могло бы дать аналитическое объяснение теореме Сигала. Кроме того, вследствие аналогии между инстантонами в 2D и 4D, что было основной темой этой статьи, соблазнительно поразмышлять о возможных уравнениях в $\mathbb{R}^5$, которые могли бы подобным образом "регуляризовать" уравнения Янга – Миллса на S^4 .

Благодарности. Я благодарен С.К. Дональдсону и Н.Дж.Хитчину за многочисленные полезные обсуждения. Идею рассматривать ΩG в связи с инстантонами мне подал, по существу, Х. Гарланд.

Литература

1. Atiyah M.F. Geometry of Yang-Mills fields. Lezioni Fermiane. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.
2. Atiyah M.F. Magnetic monopoles on hyperbolic space. — Proc. International Colloquium on vector bundles (Tata Institute, Bombay, 1984). [Перевод в настоящем сборнике.]

3. Atiyah M.F., Drinfeld V.G., Hitchin N.J., Manin Yu.I. Construction of instantons. - *Phys.Lett.* 65A(1978), 185-187.
4. Atiyah M.F., Jones J.D.J. Topological aspects of Yang-Mills theory. - *Commun. Math. Phys.* 61(1978), 97-118.
5. Chakrabarti A. Instanton chains with multimonopole limits: lax pairs for non-axially-symmetric cases. - *Phys.Rev.* D28 (1983), 989.
6. Donaldson S.K. Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles. - *Proc. Lond. Math. Soc.* 50 (1985), 1-26.
7. Donaldson S.K. Instantons and geometric invariant theory. - *Commun. Math. Phys.* 93 (1984), 453-460. [Перевод в настоящем сборнике.]
8. Donaldson S.K. Nahm's equations and the classification of monopoles. - *Commun.Math. Phys.* 96(1984), 387-407. [Перевод в настоящем сборнике.]
9. Forgacs P., Horvath Z., Palla L. An exact fractionally charged self-dual solution. - *Hungarian Academy of Sciences. Preprint KFKI 60* (1980).
10. Hitchin N.J. Monopoles and geodesics. - *Commun. Math. Phys.* 83 (1982), 579-602.
11. Jaffe A., Taubes C.H. Vortices and monopoles. - Boston: Birkhäuser, 1980.
12. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. - М.: Наука, 1978.
13. Maruyama M. Stable vector bundles on an algebraic surface. - *Nagoya Math. J.* 58 (1975), 25-68.
14. Nahm W. All self-dual multimonopoles for arbitrary gauge groups. - *CERN, Preprint TH. 3172* (1981).
15. Pressley A.N. The energy flow on the loop space of a compact Lie group. - *J. London Math.Soc.* (to appear).
16. Pressley A.N. Decompositions of the space of loops on a Lie group. - *Topology* 19 (1980), 65-79.
17. Pressley A.N., Segal G.B. Loop groups. - Oxford: Oxford University Press, 1984.
18. Segal G.B. Unitary representations of some infinite-dimensional groups. - *Commun. Math. Phys.* 80 (1981), 301-342.
19. Segal G.B. The topology of spaces of rational functions. - *Acta Math.* 143(1979), 39-72.
20. Taubes C.H. The existence of non-minimal solutions to the $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs equations in R^3 . - *Commun.Math.Phys.* 86 (1982), 257-298, 299-320.

ИНСТАНТОНЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ¹⁾

С.К. Дональдсон

All Souls College, Oxford, United Kingdom and
The Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

Резюме. Мы показываем, что янг-миллсовские инстантоны могут быть описаны в терминах определенных голоморфных расслоений на проективной плоскости. В доказательстве используется явное матричное описание, возникающее из монад, и анализ соответствующих групп симметрий.

В этой заметке мы покажем, что пространства параметров инстантонов на $\mathbb{R}^4$ допускают чисто комплексное алгебраическое описание. Именно, пусть G — одна из классических групп $SU(l)$, $SO(l)$, $Sp(l)$, а $k \geq 0$ — число Понтрягина со знаком минус (мы работаем с антиавтодуальными связностями) для некоторого G -расслоения P над $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$. Обозначим через $\tilde{M}(G, k)$ пространство модулей, точки которого представляют собой классы изоморфизма пар

(антиавтодуальная G -связность на P , изоморфизм $P_\infty \cong G$).

Эти "оснащенные" пространства модулей в определенном отношении более естественны, чем обычные модули одних только связностей: $M(G, k) = \tilde{M}(G, k)/G$, и являются многообразиями размерности $4lk$, $4(l-2)k$, $4(l+1)k$ соответственно при достаточно большом k .

Фиксируем теперь комплексную структуру на $\mathbb{R}^4$, совместимую с метрикой, и рассмотрим другую компактификацию, до комплексной

¹⁾ Donaldson S.K. Instantons and Geometric Invariant Theory. — Communications in Mathematical Physics, 1984, v.93, pp.453-460.

проективной плоскости:

$$\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}^2 \cup \ell_\infty.$$

Аналогично рассмотрим пространство модулей

$$\mathcal{OM}(G^{\mathbb{C}}, k)$$

голоморфных расслоений на $\mathbb{C}P^2$ для соответствующей комплексной группы, тривиальных на прямой ℓ_∞ в ∞ и снабженных голоморфной тривиализацией на ней. Мы докажем следующее:

Т е о р е м а. Существует естественное взаимно однозначное соответствие

$$\tilde{M}(G, k) \xrightarrow{\cong} \mathcal{OM}(G^{\mathbb{C}}, k).$$

(Одним из следствий этого соответствия является то, что, производя обмен очевидными группами симметрии, мы получаем действие $SO(4)$ на $\mathcal{OM}$ и действие $SL_2(\mathbb{C})$ на $\tilde{M}$.)

Отображение R можно определить с помощью расслоения Пенроуза:

$$\mathbb{C}P^3 \xrightarrow{\pi} S^4.$$

Фиксация комплексной структуры на $\mathbb{R}^4$ отвечает фиксации комплексной плоскости P в $\mathbb{C}P^3$, проходящей через слой $\ell_\infty = \pi^{-1}(\infty)$. Ограничение проекции π дает тогда изоморфизм $P \setminus \ell_\infty \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^4$. Антиавтотдуальная связность на S^4 , согласно соответствию Уорда, поднимается до голоморфного расслоения на $\mathbb{C}P^3$, а тривиализация в $\infty \in S^4$ поднимается до тривиализации над ℓ_∞ . Тогда R определяется посредством ограничения этого голоморфного расслоения на плоскость P . Используя этот подход, Атья показал в [1], что такое ограничение дает вложение открытым подмножеством в $\mathcal{OM}$.

Первое, что заставляет подумать о том, что должно быть верно нечто большее, — это аналитические, не зависящие от твисторов методы. В [4] было показано, что антиавтотдуальные связности, скажем, на $\mathbb{C}P^2$ с его стандартной метрикой отвечают определенным голоморфным расслоениям, и вполне вероятно, что подобная техника применима и для доказательства настоящей нашей теоремы, если рассматривать плоскую метрику на $\mathbb{C}^2$ как

метрику на $\mathbb{CP}^2$, сингулярную вдоль ℓ_∞ , а тривиализацию там — как задание граничных условий для дифференциального уравнения, обсуждавшегося в [4]. Такой подход, однако, не был нами развит, так как стало ясно, что можно дать элементарное доказательство, исходя из хорошо известной "ADHM-конструкции". Действительно, после обзора этой конструкции (§ 1) и изложения общего принципа (§ 2) наше доказательство заключается по сути в одном-единственном наблюдении.

Это комплексное описание инстантонов в некоторых отношениях удобнее, чем обычная вещественно-алгебраическая формулировка ADHM-классификации. Так, например, можно видеть, что (по крайней мере для групп $SU(\ell)$) пространства модулей инстантонов связны. Это следует из доказательств Барта и Хулека связности пространств модулей M_S стабильных расслоений на $\mathbb{CP}^2$ ($\sqrt{3}$, 5, 10, 4.2). В самом деле, эти доказательства начинаются с редукции к расслоениям, тривиальным над некоторой фиксированной прямой. Существуют плотные открытые в топологии Зариского подмножества

$$U \in \mathcal{O}\tilde{M}, \quad V \in M_S,$$

отвечающие стабильным расслоениям, тривиальным на ℓ_∞ , такие, что U расслаивается над V со связным слоем $SL(\ell, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_\ell$, а значит, из связности M_S следует связность $\mathcal{O}\tilde{M}$. Таубс [11] доказал недавно связность $\mathcal{O}\tilde{M}$ (для групп $SU(2)$, $SU(3)$) более прямыми методами. Обратно, результат Таубса дает тогда новое доказательство связности некоторых определенных пространств модулей стабильных расслоений.

1. Монады и ADHM-конструкция

Здесь мы напомним некий стандартный материал, главным образом чтобы установить наши обозначения. Мы работаем со связностями для группы $G = SU(\ell)$ и соответственно с голоморфными $SL(\ell, \mathbb{C})$ -расслоениями.

Расслоения на $\mathbb{CP}^2$. Для проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ введем однородные координаты $[X] = (x; y; z)$, так что $z = 0$ определяет прямую на ∞ . Монадой будем называть линейные отображения (при каждом $X \in \mathbb{C}^3$)

$$H \xrightarrow{A_X} K \xrightarrow{B_X} L$$

между комплексными векторными пространствами размерностей k , $2k+l$, k соответственно, причем только такие отображения, которые линейно зависят от X :

$$A_X = A_x x + A_y y + A_z z,$$

$$B_X = B_x x + B_y y + B_z z$$

и при каждом X удовлетворяют условию, что композиция $B_X A_X: H \rightarrow L$ равна нулю. Это дает шесть уравнений для отображений $A_x, A_y, A_z; B_x, B_y, B_z$. Будем говорить, что монада невырождена, если при каждом X , не равном нулю, A_X инъективно, а B_X сюръективно. В этом случае монада определяет голоморфное расслоение на $\mathbb{CP}^2$, слоем которого в точке $[X]$ является векторное пространство $\text{Ker } B_X / \text{Im } A_X$. Известно, что любое расслоение на $\mathbb{CP}^2$, тривиальное на какой-нибудь прямой, происходит из такой монады, единственной с точностью до действия группы $GL(H) \times GL(K) \times GL(L)$ (см. [10, с.176–177 рус.перев. и лемма 4.1.3; 3, 5]).

Рассмотрим теперь расслоения, тривиальные на фиксированной прямой $z = 0$. Условие на монаду в этом случае заключается в том, что композиция $B_x A_y = -B_y A_x$ есть изоморфизм ([10, лемма 4.2.3]).

Для таких расслоений симметрию монады можно понизить, выбрав базисы для H, K, L так, чтобы $B_x A_y = 1_k =$ единичная матрица. Далее, из трех условий:

$$B_x A_y = -B_y A_x, \quad B_y A_y = 0, \quad B_x A_x = 0$$

следует, что мы можем так нормировать базисы, чтобы отображения имели вид

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow k \\ \updownarrow k \\ \updownarrow l \end{matrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\xleftrightarrow{k}$

$$B_x = (0 \ 1 \ 0), \quad B_y = (-1 \ 0 \ 0).$$

Два уравнения $B_z A_y = -B_y A_z$, $B_z A_x = -B_x A_z$ означают, что, скажем,

$$A_z = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad B_z = (-\alpha_2 \ \alpha_1 \ b),$$

и остается последнее матричное уравнение

$$B_z A_z = 0 \Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2] + b\alpha = 0.$$

Ограничение расслоения на прямую $x = 0$ имеет естественную тривиализацию, заданную последними l векторами базиса в $K \cong \mathbb{C}^{2k+l}$, и мы имеем поэтому описание Барта:

Предложение I. Пространство $\mathcal{OM}(SL(l, \mathbb{C}), k)$ является факторпространством множества матриц $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)$, удовлетворяющих условиям

$$(i) \quad [\alpha_1, \alpha_2] + b\alpha = 0,$$

$$(ii) \quad \text{для всех } (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2: \begin{bmatrix} \alpha_1 + \lambda \\ \alpha_2 + \mu \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{инъективно,}$$

$$\text{а } (-\alpha_2 - \mu \quad \lambda + \alpha_1 \quad b) \quad \text{сюръективно,}$$

по естественному действию группы $GL(k, \mathbb{C})$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &\mapsto p \alpha_i p^{-1} \\ \alpha &\mapsto \alpha p^{-1} \\ b &\mapsto p b \end{aligned} \right\} p \in GL(k, \mathbb{C}).$$

Расслоения на $\mathbb{CP}^2$ и АННМ-конструкция. (Подробности см. в [1, 2].)

Будем рассматривать теперь $\mathbb{CP}^2$ как плоскость в $\mathbb{CP}^3$, введя четвертую координату w . Аналогично рассмотрим монады для расслоений на $\mathbb{CP}^3$, тривиализованных на прямой $\ell_\infty = \{z = w = 0\}$. Положим

$$A_x = A_x x + A_y y + A_z z + A_w w \text{ и т.д.,}$$

где отображения в матричном представлении имеют вид

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_z = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad A_w = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix},$$

$$B_x = (0 \ 1 \ 0), \quad B_y = (-1 \ 0 \ 0), \quad B_z = (-\alpha_2 \ \alpha_1 \ b), \quad B_w = (-\hat{\alpha}_2 \ \hat{\alpha}_1 \ \hat{b}),$$

удовлетворяют условиям невырожденности и трем уравнениям:

$$(a) \quad [\alpha_1, \alpha_2] + b\alpha = 0,$$

$$(b) \quad [\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2] + \hat{b}\hat{\alpha} = 0,$$

$$(c) \quad [\alpha_1, \hat{\alpha}_2] + [\hat{\alpha}_1, \alpha_2] + b\hat{\alpha} + \hat{b}\alpha = 0.$$

И последнее. Введем "вещественные" расслоения, отвечающие инстантонам. Кватернионы $\mathbb{R}(1, I, J, K = IJ)$ действуют на $\mathbb{C}^4$:

$$I(x, y, z, w) = (ix, iy, iz, iw),$$

$$J(x, y, z, w) = (\bar{y}, -\bar{x}, \bar{w}, -\bar{z}),$$

и нам нужны монады для таких расслоений на $\mathbb{CP}^3$, которые имеют изоморфизм $\overline{J^*(\mathcal{E})} \cong \mathcal{E}^*$ и тривиальны на всех вещественных прямых. Тогда пространство K получает эрмитову метрику, а L становится изоморфным пространству $\bar{H}^*$, так что сопряженное отображение A^* мы можем рассматривать как отображение из K в L и определить при каждом $X \in \mathbb{C}^4$ комплексно линейное отображение

$$\mathcal{A}_X = A_X^* \oplus B_X: K \rightarrow L \oplus L.$$

Кватернионы следующим образом действуют на $L \oplus L$:

$$I \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -il \\ im \end{bmatrix}, \quad J \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m \\ l \end{bmatrix}.$$

Потребуем, чтобы $\mathcal{A}$ коммутировало с кватернионами, т.е.

$$\mathcal{A}_{qX}(v) = q \mathcal{A}_X(v) \text{ для } v \in K, q \in \mathbb{H}.$$

Отсюда следует, что ядро $\mathcal{A}_X$ постоянно вдоль слоев отображения Пенроуза

$$\pi: \mathbb{CP}^3 \rightarrow \mathbb{HP}^1 \cong S^4$$

и при спуске дает слой расслоения над S^4 , несущего анти-автотуальную связность.

В нашем матричном описании мы предполагаем, что базисы выбраны очевидным образом, совместимым с вещественной структурой (так что, в частности, индуцированная система координат на ∞ является ортонормированной). Условие вещественности тогда принимает вид

$$\begin{bmatrix} -B_z z - B_w w \\ A_z^* \bar{z} + A_w^* \bar{w} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} A_z^* \bar{z} + A_w^* \bar{w} \\ B_z z + B_w w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z^* w - A_w^* z \\ B_z \bar{w} - B_w \bar{z} \end{bmatrix},$$

$$\text{т.е. } A_w^* = B_z, \quad A_z^* = -B_w.$$

Следовательно, мы можем избавиться от переменных со шляпкой " $\wedge$ ":

$$\hat{\alpha}_1 = -\alpha_2^*, \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_1^*, \quad \hat{\alpha} = b^*, \quad \hat{b} = -\alpha^*.$$

Более того, условия невырожденности для монады этого типа на $\mathbb{C}P^3$ такие же, как и для ограничения на $\mathbb{C}P^2$ (пункт (ii) предложения I), потому что $\mathcal{A}_X$ сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективно $\mathcal{A}_{qX} = q\mathcal{A}_X$ (для $q \in \mathbb{H}^*$), а $\mathbb{C}P^2$ под действием $\mathbb{H}^*$ замечает всё $\mathbb{C}P^3$. После подстановки в уравнения (а), (б), (с) два из них, (а) и (б), становятся сопряженными, а (с) принимает вид

$$[\alpha_1, \alpha_1^*] + [\alpha_2, \alpha_2^*] + bb^* - \alpha^*\alpha = 0.$$

Все построение инвариантно относительно $U(k)$; и мы можем теперь сформулировать описание Атьи, Дринфельда, Хитчина и Манина:

Предложение 2. Пространство $\tilde{M}(SU(l), k)$ является факторпространством множества комплексных матриц $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)$, удовлетворяющих условиям (i), (ii) предложения I, а также условию

$$(iii) \quad [\alpha_1, \alpha_1^*] + [\alpha_2, \alpha_2^*] + bb^* - \alpha^*\alpha = 0$$

по действию группы $U(k)$.

2. Геометрическая теория инвариантов и ближайшие точки

Теперь мы опишем общий механизм, который немедленно приведет к доказательству нашей теоремы. Мы сообщаем здесь минимальную информацию и отсылаем читателя к двум статьям [7, 9], содержащим подробные обсуждения и приложения этих идей. Точное утверждение, которое мы используем, принадлежит Кемпфу и Несс [6].

Пусть группа $GL(k, \mathbb{C})$ действует на $\mathbb{C}^N$ в некотором линейном представлении так, что подгруппа $U(k)$ действует изометрически. В этом случае у Мамфорда [8] имеется определение "стабильной точки" ("строго стабильной" по терминологии [8]) в

$\mathbb{C}^N$. Грубо говоря, фактормножество множества стабильных точек по $GL(k)$ имеет хорошую структуру. Определение таково:

Точка x в $\mathbb{C}^N$ стабильна относительно $GL(k, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда отображение $GL(k) \rightarrow \mathbb{C}^N$, $g \mapsto gx$ является собственным.

В частности, $GL(k)$ -орбита стабильной точки x замкнута в $\mathbb{C}^N$ и потому содержит вектор, скажем сам x , ближайший к началу координат. Записав это в инфинитезимальном виде, получаем уравнение, которому удовлетворяет x : $\mu(x) = 0$, где $\mu: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathcal{U}(k)$. Рассмотрим, например, присоединенное представление $GL(k)$. Тогда если матрица α в своей орбите $\{g\alpha g^{-1}\}$ является ближайшей к началу координат, то

$$\delta \|g\alpha g^{-1}\|^2 = 2\langle \delta(g\alpha g^{-1}), \alpha \rangle = 2\langle [\delta g, \alpha], \alpha \rangle =$$

$$= 2\langle \delta g, [\alpha, \alpha^*] \rangle = 0 \text{ при всех } \delta g,$$

т.е. $\mu(\alpha) = [\alpha, \alpha^*] = 0$.

Более того, можно показать [6], что эта ближайшая точка $GL(k)$ -орбиты единственна с точностью до действия унитарной группы $U(k)$, как читатель может проверить для приведенного выше примера. Таким образом, мы имеем следующий общий принцип Кемпфа и Несс:

Предложение 3. Для любого такого же, как и выше, представления и любого $GL(k)$ -инвариантного подмножества $W \subset \mathbb{C}^N$, все точки которого стабильны относительно действия $GL(k)$, факторпространство $W/GL(k)$ естественным образом эквивалентно факторпространству $(\mu^{-1}(0) \cap W)/U(k)$.

Практически стабильность точки можно проверить с помощью следующего критерия:

Критерий Гильберта ([8, теорема 2.1, предложение 2.2]). Точка x стабильна относительно $GL(k, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда она стабильна для всех однопараметрических подгрупп, иначе говоря, когда для всех $g \in GL(k)$ и целых чисел $\{w_i\}_{i=1}^k$ (не равных одновременно нулю)

$$g \operatorname{diag}(t^{w_1}, \dots, t^{w_k}) g^{-1} \cdot x \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Применим теперь эти идеи к нашей задаче. Пусть $GL(k, \mathbb{C})$ действует на векторном пространстве матриц $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)$, как в предложении I. Унитарная группа сохраняет очевидную норму; вычисляя, как раньше, величину $\mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)$, мы неожиданно получаем

$$\begin{aligned} \delta \|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)\|^2 &= \delta \|\alpha_1\|^2 + \delta \|\alpha_2\|^2 + \delta \|\alpha\|^2 + \delta \|b\|^2 = \\ &= 2 \langle \delta g, [\alpha_1, \alpha_1^*] + [\alpha_2, \alpha_2^*] + b b^* - \alpha^* \alpha \rangle, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b) = [\alpha_1, \alpha_1^*] + [\alpha_2, \alpha_2^*] + b b^* - \alpha^* \alpha.$$

Более того, имеет место следующая

Л е м м а. Пусть матрицы $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)$ отвечают некоторому элементу из $\mathcal{O} \tilde{M}(SL(\ell, \mathbb{C}), k)$, т.е. удовлетворяют двум условиям (i), (ii) предложения I. Тогда точка $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b) \in GL(k, \mathbb{C})$ стабильна относительно действия

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что, наоборот, некоторая точка $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)$ не стабильна. Тогда, согласно критерию Гильберта и вследствие $GL(k)$ -инвариантности, можно считать, что

$$p_t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b) = (p_t \alpha_1 p_t^{-1}, p_t \alpha_2 p_t^{-1}, \alpha p_t^{-1}, p_t b)$$

ограничено при $t \rightarrow \infty$; здесь $p_t = \operatorname{diag}(t^{w_1} t^{w_2} \dots t^{w_k})$, $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_k$. Предположим сначала, что какое-то w_i положительно, скажем $w_1 > 0$, и $w_1 = w_2 = \dots = w_3 > w_{3+1}$. Тогда, рассматривая действие на b , мы обнаруживаем, что первые 3 строк должны тождественно равняться нулю:

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ * \end{bmatrix} \uparrow^3, \quad \text{и, следовательно,} \quad b\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ * \end{bmatrix}.$$

Подобным образом, p действует на (i, j) -й элемент матриц α как $t^{w_i - w_j}$, так что, скажем,

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad [\alpha_1, \alpha_2] = \begin{bmatrix} [M_1, M_2] & 0 \\ * & * \end{bmatrix}.$$

Предположим теперь, что $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)$ удовлетворяют условию (i): $[\alpha_1, \alpha_2] + b\alpha = 0$. Тогда M_1, M_2 , а значит, и M_1^T, M_2^T коммутируют и, следовательно, имеют общий собственный вектор v : $(\lambda + M_1^T)v = (M_2^T + \mu)v = 0$. Тогда вектор-строка $(v^T \ 0)$ аннулирует образ отображения $(-\alpha_2 - \mu \quad \lambda + \alpha_1 \quad b)$, что противоречит условию (ii).

Если какое-то w_i отрицательно, то точно таким же образом мы получаем вектор из ядра отображения

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \lambda \\ \alpha_2 + \mu \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Следовательно, каждая точка, удовлетворяющая (i), (ii), стабильна. (На самом деле для точек в замкнутом многообразии, удовлетворяющем (i), стабильность эквивалентна условию (ii).)

После этой небольшой леммы доказательство теоремы для $G = SU(l)$ уже у нас в руках. Действительно, пусть W — множество матриц $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b)$, удовлетворяющих условиям (i), (ii); подставим предложения 1 и 2 в предложение 3 и воспользуемся тем фактом, что уравнение $\mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, b) = 0$ — это дополнительное условие (iii).

Для симплектических и ортогональных групп можно воспользоваться тем же методом, работая с соответствующими автодуальными монадами. Иначе можно рассуждать, рассматривая симплектическое или ортогональное голоморфное расслоение как расслоение $\mathcal{E}$ с

заданным изоморфизмом $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E}^*$. При каждой тривиализации на ℓ_∞ оба расслоения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ несут унитарные антиавтอดуальные связности, и если тривиализации согласованы с f , то вследствие единственности согласованы и связности, т.е. в этом случае связность редуцируется до соответствующей компактной группы.

3. Заключительные замечания

Наш способ доказательства имел откровенно вычислительный, координатный характер. Интересно отметить, однако, что рассмотрение в § 2 можно перевести на абстрактный язык, и тогда отображение μ появится в качестве отображения моментов для действия $U(k)$ ([7, 9]). С другой стороны, уравнения антиавтодуальности, как объясняется в [4], тоже можно интерпретировать в контексте голоморфных расслоений как условие равенства нулю отображения моментов, только на этот раз — для бесконечномерной калибровочной группы. Возможно, что геометрическая причина такого совпадения содержится в идеях Корригана и Нама [12] о дуальной природе АНМ-конструкции, преобразующей коммутационные уравнения для дифференциальных операторов в формально похожие на них коммутационные уравнения для матриц.

Литература

1. Atiyah M.F. The geometry of Yang-Mills fields. - In: Fermi Lectures. Scuola Normale Pisa 1979.
2. Atiyah M.F., Drinfeld V.G., Hitchin N.J., Manin Yu. I. Construction of instantons. - Phys.Lett. 65A (1978), 185.
3. Barth W. Moduli of vector bundles on the projective plane. - Invent. Math. 42 (1977), 63-91.
4. Donaldson S.K. Anti-self-dual Yang-Mills connections on complex algebraic surfaces and stable vector bundles. - Proc. Lond. Math. Soc., (3), 50 (1985), 1-26.
5. Hulek K. On the classification of stable rank- r vector bundles on the projective plane. - In: Proc. Nice conference on vector bundles and differential equations. Hirschowitz A. (ed.). Boston: Birkhäuser, 1983, p. 113-142.
6. Kempf G., Ness L. Lengths of vectors in representation spaces. - In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 732. Ber-

- lin, Heidelberg, New York: Springer, 1978, p.233-244.
7. Kirwan F.C. The cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry. - Math. Notes, Princeton Univ. Press, 1985.
 8. Mumford D. Geometric invariant theory. - Erg. Math. 34. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1965. [Имеется перевод: Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. - В кн.: Дьедонне Ж., Керолл Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. - М.: Мир, 1974, с. 125-256.]
 9. Ness L. A stratification of the null cone via the moment map. - Am.J. Math. 106 (1984), 1281-1327.
 10. Okonek C., Schneider M., Spindler H. Vector bundles on complex projective spaces. - Boston: Birkhäuser, 1980. [Имеется перевод: ОконеК К., Шнейдер М., Шпиндлер Х. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. - М.: Мир, 1984.]
 11. Taubes C.H. Path connected Yang-Mills moduli spaces. UC Berkeley preprint.
 12. Corrigan E., Goddard P. Construction of Instanton and Monopole Solutions and Reciprocity. - Ann. Phys. 154 (1984), 253 - 279.

ТЕОРИЯ МОРСА И МОНОПОЛИ: ТОПОЛОГИЯ В ТЕОРИЯХ С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМИ СИЛАМИ¹⁾

Клиффорд Генри Таубс

Department of Mathematics, University of California,
Berkeley, CA 94720

1. Силы между монополями

Рассмотрим монополь т'Хофта - Полякова [1]. Это статическое решение с конечной энергией эволюционных уравнений, описывающих неабелеву модель Хиггса с хиггсовскими полями, лежащими в присоединенном представлении. Для простоты возьмем $G = SU(2)$, хотя аналогичный анализ может быть проведен для любой группы.

Рассмотрим конфигурацию (A, Φ) , состоящую из статического калибровочного поля $A = (A_i)_{i=1}^3 = (A_i^\alpha \cdot \frac{1}{2} \tau^\alpha)_{i=1}^3$ и поля Хиггса $\Phi = \Phi^\alpha \cdot \frac{1}{2} \tau^\alpha$, где $\{\tau^\alpha\}_{i=1}^3$ - антиэрмитовы матрицы Паули, $\tau^\alpha \tau^\beta = -\delta^{\alpha\beta} - \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \tau^\gamma$. Напомним, что энергия такой конфигурации задается выражением

$$\mathcal{A}(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \{ |B_A|^2 + |\nabla_A \Phi|^2 + \lambda V(\Phi) \}. \quad (1.1)$$

Здесь B_A - магнитное поле,

$$B_A = (B_{A_i} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j + [A_j, A_k]))_{i=1}^3,$$

а $\nabla_A \Phi$ - ковариантная производная поля Φ (взаимодействие введено минимальным образом),

¹⁾ Taubes C.H. Morse theory and monopoles: topology in long range forces. In: Progress in Gauge Field Theory. - Plenum Publ. Corp., 1984, pp. 563-587.

$$\nabla_A \Phi = (\nabla_{A_i} \Phi = \partial_i \Phi + [A_i, \Phi])_{i=1}^3.$$

Хиггсовский потенциал есть $V(\Phi) = (1 - |\Phi|^2)^2$ и $\lambda \geq 0$.
Наконец, все нормы здесь определяются формулой $|\alpha|^2 = 2 \operatorname{tr}(\alpha^+ \alpha)$.

Монополь т*Хоффа - Полякова удовлетворяет вариационным уравнениям, определяемым функционалом $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk} \nabla_{A_i} B_{A_j} + [\Phi, \nabla_{A_k} \Phi] &= 0, \\ \nabla_{A_i} \nabla_{A_i} \Phi + \lambda(1 - |\Phi|^2) \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

(при $\lambda = 0$ мы приходим к BPS-пределу [2]). Монополь т*Хоффа - Полякова - это решение уравнений (1.2), обладающее минимальной энергией при единичном магнитном заряде Q :

$$Q(A, \Phi) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty^2} \operatorname{tr}(\Phi B_{A_k}) d^2 \Sigma_k = 1.$$

Антимонополь т*Хоффа - Полякова получается из соответствующего монополя заменой поля Φ на $-\Phi$; в этом случае $Q = -1$.

Вопрос: Существуют ли заряженные или незаряженные решения уравнений (1.2) с большей энергией? Образуют ли монополи и антимонополи (неустойчивые) связанные состояния?

Рассмотрим сначала силы между монополями и антимонополями. Неабелева модель Хиггса предназначена для описания спонтанного нарушения симметрии, от группы $SU(2)$ до группы $U(1)$. Для монополя, расположенного в начале координат, поля становятся абелевыми на больших расстояниях, $|\mathbf{x}| \gg 1$. Абелево направление в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ задается вектором $\Phi(\mathbf{x})$ из алгебры Ли группы $SU(2)$. Поэтому монополь и антимонополь связаны дальнедействующей притягивающей кулоновской силой (напомним, что для векторных сил противоположные заряды притягиваются):

$$\mathcal{E}_{\text{Coul}}(r) = -\frac{1}{r} + O(e^{-r}).$$

Член $\mathcal{O}(e^{-\tau})$ возникает из-за массивного промежуточного векторного бозона; масса I обусловлена эффектом Хиггса.

Кроме того, имеется дальнедействующее скалярное поле, поле Хиггса; оно создает притяжение как между подобными зарядами, так и между противоположными:

$$\xi_{\text{Higgs}} = -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\tau}}{\tau} + \mathcal{O}(e^{-\tau}). \quad (1.3)$$

Итак, суммарная потенциальная энергия, связанная с дальнедействующими силами, действующими на пару, состоящую из монополя и антимонополя ($m - \bar{m}$), равна

$$\xi_{\text{e.r.}} = -\frac{1}{\tau} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\tau}}{\tau} + \mathcal{O}(e^{-\tau}). \quad (1.4)$$

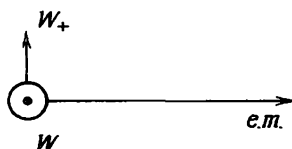
Заметим, что монополь-монопольный потенциал равен

$$\xi_{\text{e.r.}} = +\frac{1}{\tau} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\tau}}{\tau} + \mathcal{O}(e^{-\tau}).$$

Из уравнения (1.4) мы заключаем, что на большом расстоянии монополь и антимонополь притягиваются при любом значении λ . Заметим, что, за исключением случая $\lambda = 0$ (BPS-предел), монополи отталкиваются друг от друга при больших τ [3].

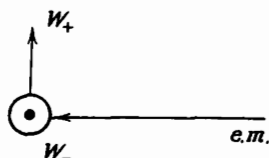
Дальнедействующее притяжение пары $m - \bar{m}$ было бы полезно, если бы удалось найти связанные пары; однако для этого необходим механизм, предохраняющий их от аннигиляции.

Промежуточные векторные бозоны W_+ и W_- также переносят векторные силы. И снова для векторных сил подобные отталкиваются, а противоположные притягиваются. Поэтому монополь при учете $(e^{-\tau})$ -поправок выглядит как



Здесь $e.m.$ есть магнитная кулоновская сила, убывающая как $1/\tau$, а W_+ , W_- расположены под прямыми углами к ней и друг к другу в изосолиновом пространстве и убывают как $e^{-\tau}$.

Стрелки обозначают три ортогональных направления в изоспиновом пространстве, причем символ $\odot$ означает "направление от листа", а $\oplus$ — "в лист". Антимонополи имеет вид



Заметим, что направления (W_+, W_-) в плоскости изоспинового пространства, перпендикулярной $e.m.$, не определены, так как калибровочные $U(1)$ -преобразования вращают их; калибровочное преобразование $g = \exp(i\pi\Phi(x))$ действует так:

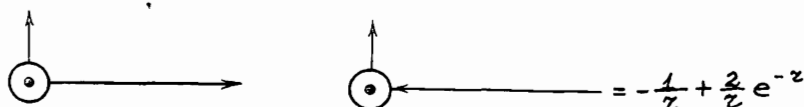


Но если имеются монополи и антимонополи, то относительная ориентация пар (W_+^m, W_-^m) и $(W_+^{\bar{m}}, W_-^{\bar{m}})$ калибровочно инвариантна: калибровочные $U(1)$ -преобразования одинаково поворачивают каждую пару. Таким образом, конфигурационное пространство для $m - \bar{m}$ имеет дополнительный параметр, а именно относительный угол $\theta \in [-\pi, \pi]$.

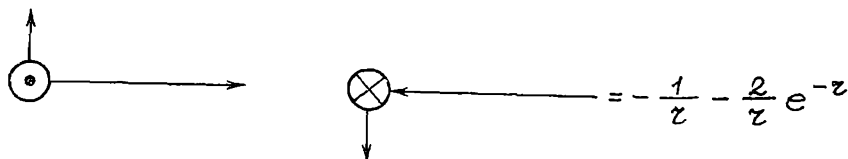
Потенциальная энергия как функция от θ задается выражением

$$\mathcal{E}_{\text{Gauge}}(r, \theta) = -\frac{1}{r} + \frac{2}{r} e^{-r} \cos \theta.$$

Это поправка к $\mathcal{E}_{\text{Coul}}(r)$. Случай, когда $\theta = 0$, выглядит так:



а $\theta = \pi$ — так:



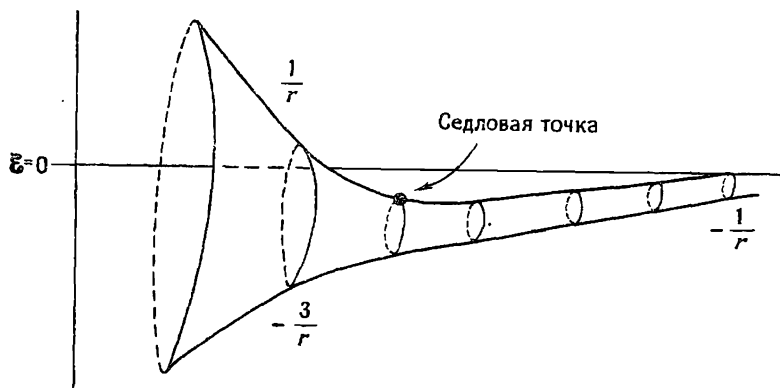
Необходимо также учитывать поведение силы Хиггса на малых расстояниях. На малых расстояниях симметрия восстанавливается, так как все три силы $e.m.$, W_+ , W_- становятся одинаковыми по величине. Поле Хиггса (которое играет роль параметра порядка) обращается в нуль в центре монополя. Значит, схематически

$$\xi_{\text{Higgs}}(r, \theta) = -\frac{1}{r} e^{-\sqrt{\lambda} r} (1 - e^{-r}).$$

Полную потенциальную энергию проще всего выписать в BPS-пределе, когда $\lambda = 0$:

$$\xi_T^{\text{BPS}}(r, \theta) = -\frac{2}{r} (1 - e^{-r} (\frac{1}{2} + \cos \theta)).$$

График зависимости энергии ξ_T от (r, θ) имеет вид



При $\lambda > 0$ седловая точка отодвигается в сторону большего радиуса. Однако, за исключением того, что хиггсовская сила обеспечивает спонтанное нарушение симметрии, она не влияет на наши рассуждения. Действительно, выражение

$$\mathcal{E}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{\kappa} + \frac{2}{\kappa} e^{-\kappa} \cos \theta$$

содержит все существенные члены.

Важный факт заключается в том, что седловая точка существует при $\theta = 0$, $\kappa \sim O(1) = \text{масса бозона}$.

Итак, мы заключаем, что существование неустойчивых решений с большей энергией вполне возможно.

2. Действительно ли они существуют?

В заголовке этого раздела стоит важный вопрос: можно ли строго доказать существование таких решений? Для $\lambda = 0$ это было сделано автором [4], а для $\lambda > 0$ — Д. Гройсером [5].

Идея заключается в переформулировке задачи о решении дифференциального уравнения в частных производных в задачу вариационного исчисления. Под этим мы понимаем следующее: $c = (A, \Phi)$ есть решение уравнений Янга — Миллса — Хиггса тогда и только тогда, когда энергия $\mathcal{A}$ стационарна по отношению ко всем инфинитезимальным (но с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$) вариациям полей, т.е. тогда и только тогда, когда

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(c + t\psi) \right|_{t=0} = 0$$

для всех $\psi = (\alpha_i, \varphi)$ с компактным носителем.

Энергию $\mathcal{A}$ следует рассматривать как функционал на конфигурационном пространстве, т.е. пространстве орбит группы калибровочных преобразований $\mathcal{C}/\mathcal{G}$. Здесь

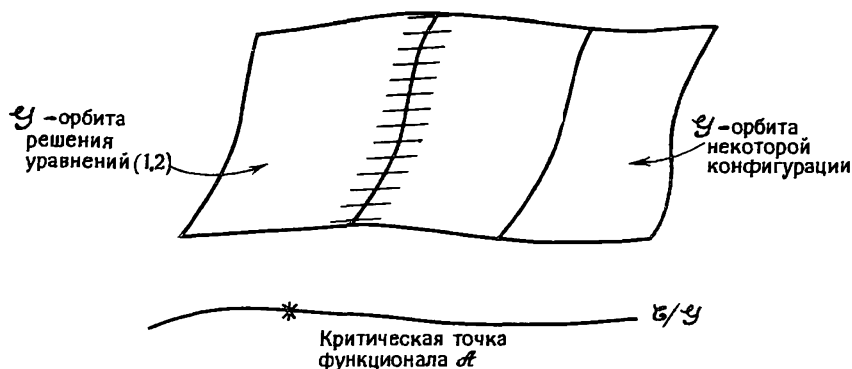
$$\mathcal{C} = \left\{ \text{гладкие } c = (A, \Phi): \mathcal{A}(c) < \infty \text{ и } \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\Phi| = 1 \right\},$$

$$\mathcal{G} = \left\{ \text{гладкие отображения из } \mathbb{R}^3 \text{ в } SU(2) \right\}. \quad (2.1)$$

Тогда $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}$ есть решение уравнений (1.2) тогда и

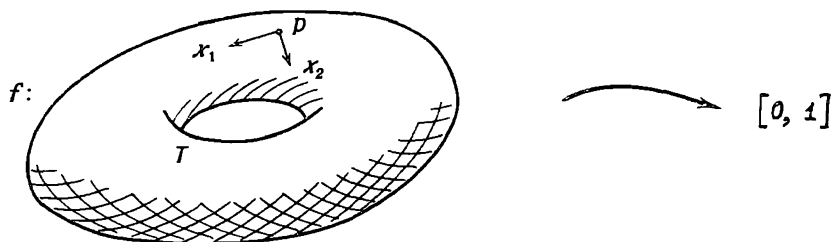
только тогда, когда $[c] \in \mathcal{C}/\mathcal{G}$ есть критическая точка функционала $\mathcal{A}$.

В теории Морса критические точки функционала $\mathcal{A}$ связываются с топологией пространства $\mathcal{C}/\mathcal{G}$. Если $\mathcal{A}$ — хороший функционал (в математическом смысле, см. [6]), то из топологической нетривиальности действия группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{C}$ следует, что $\mathcal{A}$ имеет много критических точек — решений уравнений (1.2).



Вероятно, полезно сначала разобрать конечномерный пример. Пусть T — тор в $\mathbb{R}^3$, и пусть $f: T \rightarrow [0, 1]$ — функция класса C^2 на T . Мы интересуемся критическими точками функции f , т.е. точками $p \in T$, для которых

$$\vec{\nabla} f|_p = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^2 = 0.$$



Здесь T служит аналогом пространства $\mathcal{C}/\mathcal{G}$, f — аналогом функционала $\mathcal{A}$, а точка $p \in T$, для которой $\vec{\nabla} f|_p = 0$, — аналогом решения уравнений (1.2).

Утверждение. Любая функция f имеет по меньшей мере три критические точки.

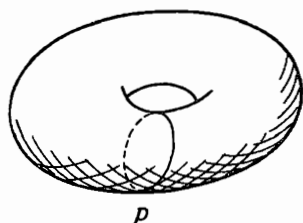
Прежде всего точки, в которых f достигает максимума и минимума, являются критическими. Например, пусть p — точка минимума. Тогда напишем разложение Тейлора функции f вблизи точки p :

$$f(x) = f(p) + \nabla f|_p \cdot (\vec{x} - \vec{p}) + O(|x - p|^2).$$

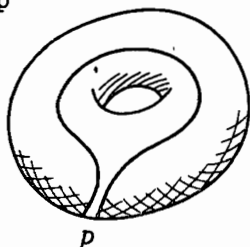
Если $\nabla f|_p \neq 0$, то рассмотрим точку $x = \vec{p} - \epsilon \nabla f|_p$ при малом ϵ . Тогда из формулы Тейлора следует, что $f(x) < f(p)$, а это противоречит тому, что p — точка минимума.

Заметим, что если f достигает минимума (максимума) не в одной точке, то один из дополнительных минимумов дает требуемую третью критическую точку. Поэтому без потери общности мы можем предположить, что множество $f^{-1}(0) = \{p\}$ состоит ровно из одной точки.

В этом случае для нахождения третьей критической точки воспользуемая нестягиваемыми петлями на T . Хорошо известно, что такие петли на T существуют, например



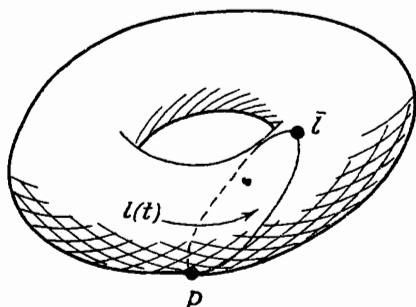
или



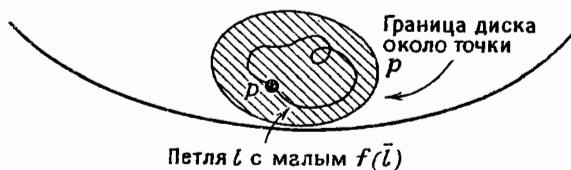
Пусть $\Lambda = \{\text{непрерывные нестягиваемые петли на } T \text{ с началом и концом в точке } p\}$.

Идея заключается в применении к пространству Λ метода минимакса. Это нелинейный вариант вариационного метода Рэлея — Ритца для нахождения собственных значений квадратичной формы.

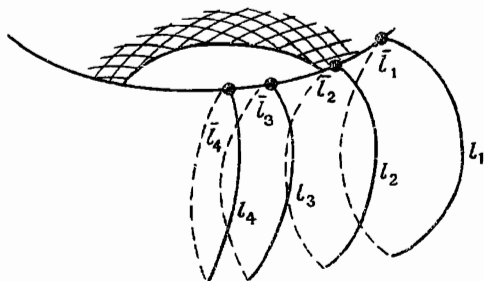
Каждой петле $\ell \in \Lambda$ сопоставим точку $\bar{\ell} \in \ell$, в которой f достигает максимума, т.е. $f(\bar{\ell}) \geq f(\ell(t))$ при всех $t \in [0, 1]$. Если f достигает максимума в нескольких точках на ℓ , то выберем $\bar{\ell}$ с наименьшим $|\nabla f|_{\bar{\ell}}$.



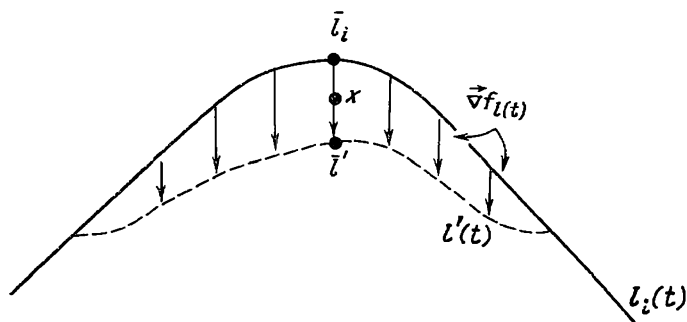
Свяжем с Λ число $f_\Lambda = \inf_{\bar{l} \in \Lambda} f(\bar{l})$. Заметим, что $f_\Lambda > 0$. Действительно, поскольку f есть C^2 -функция и p - точка изолированного минимума, из $f_\Lambda = 0$ следовало бы, что Λ содержит петли, целиком лежащие в малой окрестности точки p . Но такие петли обязательно стягиваемы, так как малые окрестности точки p имеют вид дисков.



Далее мы утверждаем, что существует точка $x \in T$, в которой $f(x) = f_\Lambda$ и $\nabla f|_x = 0$. Чтобы найти ее, рассмотрим последовательность петель $\{\bar{l}_i\} \subset \Lambda$, такую, что $f(\bar{l}_i) \geq f(\bar{l}_{i+1}) \rightarrow f_\Lambda$.



Поскольку T компактно, последовательность $\{\bar{l}_i\}$ имеет предельную точку $x \in T$ и $f(x) = f_\Lambda$. Если $|\nabla f_x| > \delta$, то $|\nabla f_{\bar{l}_i}| > \delta$ при всех достаточно больших i . Возникает следующая картинка:



Пусть $l'(t) = l_i(t) - \varepsilon \vec{\nabla} f|_{l_i(t)}$. Тогда петля $l'(t)$ есть непрерывная деформация петли $l(t)$, и поэтому $l'(t)$ лежит в Λ . Если $\vec{\nabla} f|_x \neq 0$, то для больших i и малых ε имеем $f(l') < f_\Lambda$, но это невозможно (по определению величины f_Λ).

3. Топология пространства $\mathcal{C}/\mathcal{G}$

Из обсуждения примера, связанного с тором, можно извлечь следующие важные уроки. Во-первых, априорным указанием на существование дополнительных, неминимальных, критических точек должна быть нетривиальная топология. Во-вторых, для сходимости минимаксных последовательностей требуется компактность.

Заметим, что эта минимаксная техника, известная как теория Люстерника - Шнирельмана (ЛШ) [7], [8] ⁽⁶⁷⁾, применима в гораздо более общей ситуации. Пусть дано пространство X и пространство Λ нестягиваемых отображений некоторого другого пространства Y в X . Тогда теорию ЛШ можно использовать для того, чтобы попытаться доказать, что функция $f: X \rightarrow [0, \infty)$ имеет критическую точку $x \in X$ с критическим значением

$$f(x) = f_\Lambda = \inf_{Y \in \Lambda} \sup_{y \in Y} f(Y(y)).$$

Для монополей конфигурационным пространством служит пространство $\mathcal{C}/\mathcal{G}$. Оно имеет сложную топологическую структуру. Прежде всего $\mathcal{C}$ имеет счетное число связных компонент: $\mathcal{C} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_n$. В самом деле, n есть хорошо известное монопольное число или топологический заряд в модели. Напомним, что для его определения требуется, чтобы $|\Phi| \rightarrow 1$ при $|x| \rightarrow \infty$ для

каждой конфигурации $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$. Поэтому для каждого Φ найдется радиус $R(\Phi)$, такой, что $|\Phi(x)| > 1/2$ при $|x| > R(\Phi)$. Рассмотрим сферу $S_{|x|=\nu}$ при $\nu > R(\Phi)$. Ее можно отобразить в единичную сферу, лежащую в алгебре Ли группы $SU(2)$:

$$\frac{\Phi}{|\Phi|} \Big|_{|x|=\nu} : S^2_\nu \rightarrow S^2.$$

Это отображение имеет корректно определенное число вращения, которое не зависит от $\nu > R(\Phi)$. Пространство $\mathcal{C}_n$ состоит по определению из тех конфигураций (A, Φ) , для которых число вращения отображения $\Phi/|\Phi|$ на достаточно больших сферах равно n .

Это число $\mathcal{U}$ -инвариантно, поэтому $\mathcal{C}/\mathcal{U} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_n/\mathcal{U}$.

Число n можно найти и другим способом. Как показал Гройсер [9], для любой конфигурации (A, Φ) с конечным действием величина

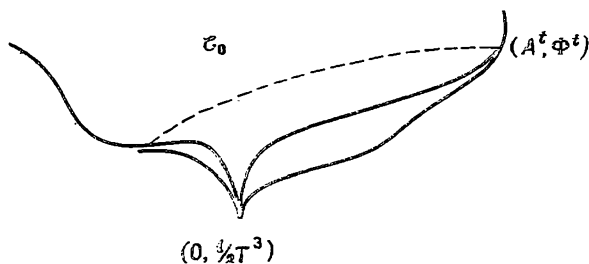
$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{|x|=\nu} \text{tr}(\Phi B_{A_i}) d\Sigma^i$$

равна целому числу. Это и есть топологический заряд.

На самом деле асимптотика поля Φ наделяет пространство $\mathcal{C}_n/\mathcal{U}$ более богатой структурой, чем можно было бы предполагать [4]. Рассмотрим однопараметрическое семейство $(A^t, \Phi^t) \in \mathcal{C}_0$, т.е. сопоставим каждому $t \in [0, 2\pi]$ конфигурацию, состоящую из калибровочного поля и поля Хиггса. Предположим, что эти конфигурации непрерывно зависят от t и что

$$(A^0(x), \Phi^0(x)) = (A^{2\pi}(x), \Phi^{2\pi}(x)) = (0, 1/2 \tau^3).$$

Таким образом, семейство (A^t, Φ^t) задает петлю в $\mathcal{C}_0$, отмеченная точка которой совпадает с тривиальной конфигурацией.



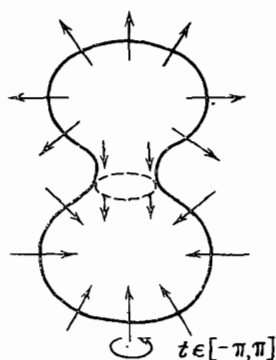
Вопрос: Для каких (A^t, Φ^t) соответствующая петля нестягиваема? Ответ выражается через асимптотику полей $\Phi^t(x)$. Определим S^1 -семейство отображений $\hat{\Phi}^t(\theta, \varphi)$ из S^2 в S^2 формулой

$$\hat{\Phi}^t(\theta, \varphi) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi^t(|x|, \theta, \varphi).$$

Другими словами, $\hat{\Phi}^t(\theta, \varphi)$ есть отображение из S^1 в $M_0(S^2; S^2)$ — пространство отображений степени нуль из S^2 в S^2 .

Предположим, что $\hat{\Phi}^t(\theta, \varphi)$ не стягивается к постоянному отображению из S^1 в $M_0(S^2; S^2)$, т.е. отображению, переводящему все $t \in S^1$ в $1/2 \tau^3$. Тогда (A^t, Φ^t) нестягиваемо в $\mathcal{C}_0$ к постоянному отображению из S^1 в $\mathcal{C}_0$, переводящему все $t \in S^1$ в $(0, 1/2 \tau^3)$. Верно и обратное утверждение.

Гомотопические группы пространства $M_0(S^2; S^2)$ в принципе известны ⁽⁶⁸⁾. В частности, $\pi_1(M_0(S^2; S^2)) \simeq \mathbb{Z}$. Образующая этой группы устроена следующим образом:



(3.1)

Эту деформированную сферу S^2 следует окружить большой круглой сферой. Стрелки показывают, как точки деформированной сферы отображаются в большую сферу. Когда t пробегает отрезок $[-\pi, \pi]$, нижняя полусфера внутренней сферы поворачивается (вместе со стрелками) против часовой стрелки. Это однопараметрическое семейство нестягиваемо.

После факторизации по действию группы $\mathcal{U}$ получаем, что $\pi_1(\mathcal{C}_0/\mathcal{U}) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathcal{C}_n/\mathcal{U}) \simeq \mathbb{Z}_{|n|}$ при $n \neq 0$ и $\pi_\ell(\mathcal{C}_n/\mathcal{U}) \simeq \pi_{\ell+2}(S^2)$. Например, $\pi_2(\mathcal{C}_0/\mathcal{U}) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_3(\mathcal{C}_0/\mathcal{U}) \simeq \mathbb{Z}_2$ и $\pi_4(\mathcal{C}_0/\mathcal{U}) \simeq \mathbb{Z}_{12}$.

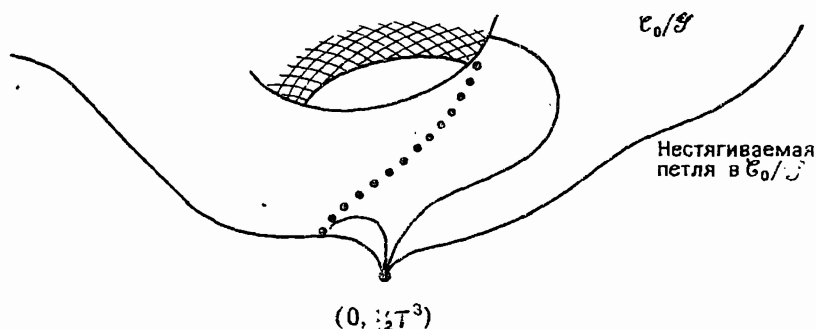
Здесь достаточно много топологии для применения теории Лустерника - Ширельмана.

4. Применение минимакса к $\mathcal{C}_0/\mathcal{Y}$ (день второй)

Напомним, что, как мы выяснили, пространство $\mathcal{C}_0/\mathcal{Y}$ неодносвязно, $\pi_1(\mathcal{C}_0/\mathcal{Y}) \simeq \mathbb{Z}$. Далее, $\mathcal{A}^{-1}(0)$ есть точка в $\mathcal{C}_0/\mathcal{Y}$, а именно $\mathcal{Y}$ -орбита конфигурации $(0, 1/2 \tau^3)$. Образующая группы $\tilde{\pi}_1$ есть некоторая петля $\ell(t) = (A^t, \Phi^t)$, где $(A^0, \Phi^0) = (A^{2\pi}, \Phi^{2\pi}) = (0, 1/2 \tau^3)$.

Применяя метод минимакса, мы будем следовать конечномерному примеру. Положим

$\Lambda = \{ \text{непрерывные нестягиваемые отображения из } S^1 \text{ в } \mathcal{C}_0/\mathcal{Y}, \text{ начинающиеся и кончающиеся в } \mathcal{Y}\text{-орбите конфигурации } (0, 1/2 \tau^3) \}$.



Каждой петле $\ell(t) = (A^t, \Phi^t) \in \Lambda$ сопоставим конфигурацию $\bar{\ell} = (A, \Phi) \in \ell([0, 2\pi])$, на которой $\mathcal{A}$ достигает максимума, а величина $\|\nabla \mathcal{A}_{\bar{\ell}}\|_*$ принимает наименьшее значение среди всех точек максимума на $\ell([0, 2\pi])$. Здесь

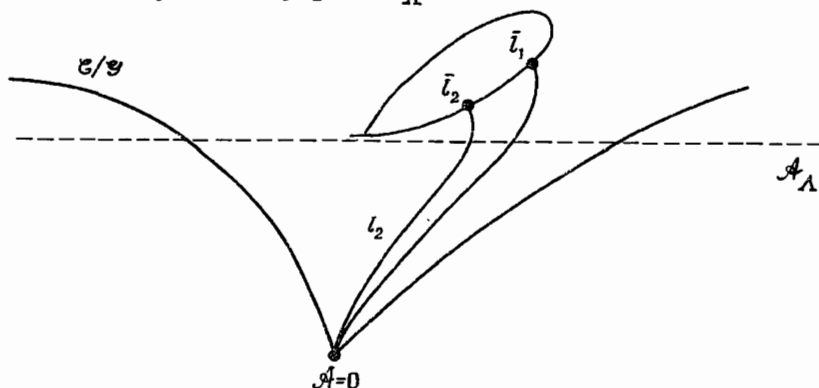
$$\|\nabla \mathcal{A}_{\bar{\ell}}\|_* = \sup \frac{\left| \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\bar{\ell} + t\psi) \right|_{t=0}}{\int (|\nabla_A \psi|^2 + |\Phi, \psi|^2)},$$

причем супремум берется по всем ψ с компактным носителем в $\mathfrak{m}_3$

Как и в примере с тором, положим

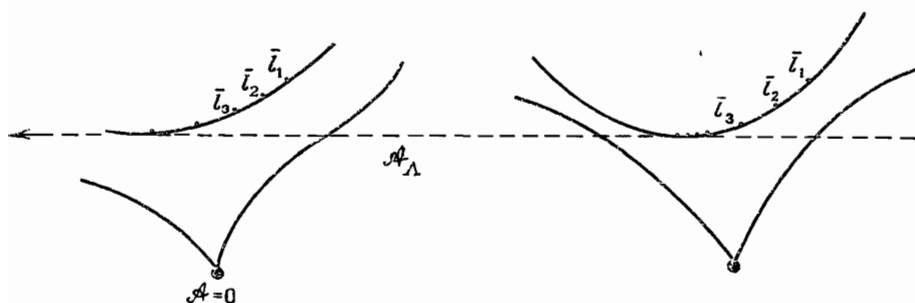
$$\mathcal{A}_\Lambda = \inf_{t \in \Lambda} \sup_{t \in [0, 2\pi]} \mathcal{A}(\ell(t)).$$

Выберем минимаксную последовательность $\{\ell_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty \in \Lambda$, такую, что $\mathcal{A}(\bar{\ell}_i) \geq \mathcal{A}(\bar{\ell}_{i+1}) \searrow \mathcal{A}_\Lambda$:



Теперь нужно доказать, что последовательность $\{\bar{\ell}_i = (A^i, \Phi^i)\}$ максимумов сходится к нетривиальному решению уравнений (1.2), лежащему в $\mathcal{C}_0$.

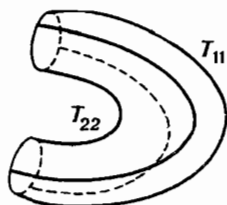
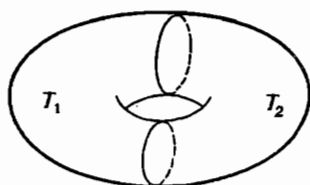
Здесь нужно различать следующие две картинки для $\mathcal{C}_0/\mathcal{C}$:



Здесь главное — вопрос о сходимости, требующий хитроумных рассуждений. Статистически большинство последовательностей не сходятся.

На двумерном торе каждая последовательность точек содержит сходящуюся подпоследовательность. Это хорошо известный, но все

же весьма удивительный результат, справедливый для любого компактного пространства. Он может быть без труда доказан следующим рассуждением. Пусть дана последовательность $\{x_i\}$. Разобьем T на половинки (T_1, T_2) . Либо T_1 , либо T_2 содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_{i_1}\} \subset \{x_i\}$. Для определенности предположим, что это T_1 . Теперь разобьем T_1 на половинки (T_{11}, T_{12}) , и так до бесконечности.



Получится последовательность множеств $\{T_1, \dots\}$, пересечение которых состоит из одной точки $x \in T$. Любая окрестность точки x содержит точки последовательности $\{x_i\}$. Значит, x — предельная точка.

Между пространствами T и $\mathcal{C}_0/\mathcal{U}$ имеется фундаментальное различие: T компактно, а $\mathcal{C}_0/\mathcal{U}$ — нет. Рассмотрим последовательность $\{x_i\}$ точек $\mathbb{R}^2$. Повторяя рассуждения для тора, можно прийти к следующему заключению: либо $\{x_i\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in \mathbb{R}^2$, либо для всякого $R < \infty$ существует такое $i_R < \infty$, что $|x_i| > R$ при всех $i > i_R$. Таким образом, последовательность либо содержит сходящуюся подпоследовательность, либо уходит на бесконечность.

Основной урок. Чтобы последовательность на некомпактном пространстве сходилась, нужно, чтобы она по каким-то причинам оставалась в ограниченной области.

Возникает вопрос: каковы подходящие ограниченные области в бесконечномерных пространствах? Рассмотрим, например, гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ квадратично интегрируемых функций на $\mathbb{R}^3$. Оно имеет счетный базис $\{v_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$, в качестве которого можно выбрать полиномы Эрмита (собственные функции оператора $-\Delta + |x|^2$).

Классическая, но тем не менее удивительная, теорема заключается в том, что шары в $L^2(\mathbb{R}^3)$ слабо компактны. (Ниже мы кратко объясним различие между слабой и сильной компактностью.)

Этот результат доказывается довольно просто. Пусть дана последовательность $\{h_i\}$, причем $\|h_i\| < B$ для всех i . Тогда последовательность чисел $\{\langle h_i, v_1 \rangle\} \subset [-B, B] \subset \mathbb{R}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, поскольку отрезок $[-B, B]$ компактен. Итак, найдется подпоследовательность $\{h_{i_1}\}$, такая, что $\langle h_{i_1}, v_1 \rangle \rightarrow \beta_1 \in [-B, B]$. Далее, рассмотрим последовательность чисел $\{\langle h_{i_1}, v_2 \rangle\} \subset [-B, B]$. Она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{h_{i_2}\} \subset \{h_{i_1}\}$. Таким образом, $\langle h_{i_2}, v_1 \rangle \rightarrow \beta_1$ и $\langle h_{i_2}, v_2 \rangle \rightarrow \beta_2$. Повторяя эту процедуру бесконечное число раз и выбирая по члену из каждой подпоследовательности (это называется диагональным процессом), мы построим подпоследовательность $\{h_{i_\infty}\} \subset \{h_i\}$ и числа $\{\beta_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$, являющиеся пределами последовательностей $\langle h_{i_\infty}, v_\alpha \rangle$. Слабый предел последовательности $\{h_{i_\infty}\}$ есть по определению $h = \sum_\alpha \beta_\alpha v_\alpha$. Легко проверить, что

$$1) \|h\| = \sqrt{\sum_\alpha \beta_\alpha \beta_\alpha} < \lim_{i \rightarrow \infty} \|h_i\| < B.$$

$$2) \text{ Для любого заданного } v \in L^2$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle h_{i_\infty}, v \rangle = \langle h, v \rangle.$$

Вернемся теперь к минимаксной последовательности $\{(A^i, \Phi^i)\} \subset \mathcal{C}_0$. Поскольку $\mathcal{A}(A^i, \Phi^i) < B$, последовательности $\{(B_A)^i\}$, $\{(\nabla_A \Phi)^i\}$ и $\{1 - |\Phi^i|^2\}$ лежат в шарах в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и, значит, слабо сходятся при подходящем выборе подпоследовательности последовательности $\{(A^i, \Phi^i)\}$.

В очень важной теореме К. Уленбек [10] утверждается следующее. Пусть дана последовательность $\{(A^i, \Phi^i)\}$. Предположим, что кривизны $\{(B_A)^i\}$ и ковариантные производные $\{(\nabla_A \Phi)^i\}$ сходятся в L^2 . Тогда найдется последовательность $\{g^i\} \subset \mathcal{G}$ калибровочных преобразований, такая, что последовательность $\{g^i(A^i, \Phi^i)\}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой конфигурации (A, Φ) . Кроме того, если

$$\|\nabla \mathcal{A}_{(A^i, \Phi^i)}\|_* \rightarrow 0,$$

то $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ и эта конфигурация служит решением уравнений (1.2).

Для наших минимаксных последовательностей условие $\|\nabla \mathcal{A}\|_* \searrow 0$ всегда выполняется. Следовательно, минимаксная процедура приводит к решению уравнений (1.2) с конечным действием. Трудная часть состоит в доказательстве того, что полученное так решение не является

- 1) тривиальным решением $(0, 1/2 \tau^3)$;
- 2) монополем (антимONOПОЛЕМ) т'Хоффа - Полякова;
- 3) автодуальным монополем в пределе Богомольного - Прасада - Зоммерфельда (т.е. решением уравнения Богомольного).

Как и в конечномерном примере (и, по существу, по тем же причинам), $\mathcal{A}_A > 0$.

Случаи 1) и 2) демонстрируют ловушки, скрытые в понятии слабой сходимости. Рассмотрим $\{g^i(A^i, \Phi^i)\}$ как последовательность конфигураций в $\mathbb{R}^3$. Полезно ввести последовательность плотностей энергии:

$$s_i(x) = |(B_A)^i|^2(x) + |(\nabla_A \Phi)^i|^2(x) + \frac{\lambda}{2} (1 - |\Phi^i|^2(x))^2.$$

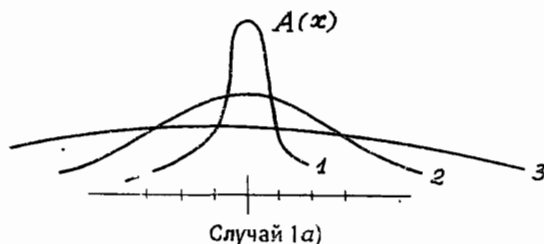
Напомним, что для всех i выполнено неравенство $\int s_i(x) dx \geq \mathcal{A}_A > 0$.

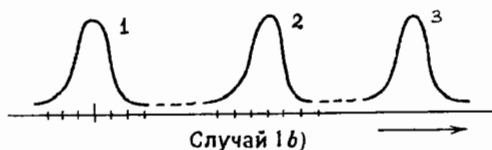
Разберем сначала вариант 1). Предельная конфигурация (A, Φ) могла бы быть тривиальной, когда

1а) плотности действия расплываются, $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} s_i(x) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$;

1б) $\sup_x s_i(x) > \delta$ для всех i , но последовательность точек $\{x_i\}$, на которых достигается $\sup$, не имеет предела в $\mathbb{R}^3$.

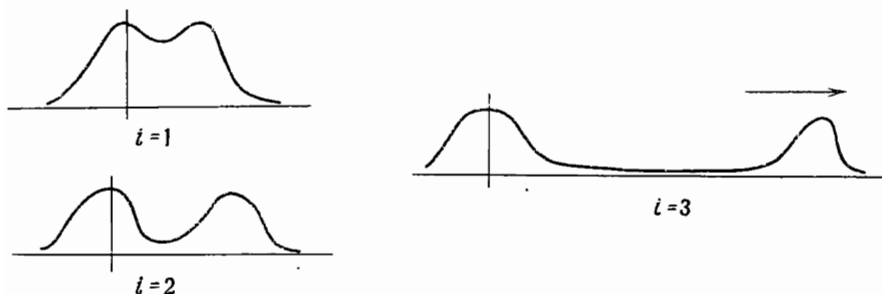
Вот иллюстрация этих двух возможностей:





Расплывание (случай 1а)) невозможно. Действительно, если $\sup z_i(x)$ достаточно мал, то, разлагая в ряд по возмущениям около $(0, 1/2 \tau^3)$, можно убедиться, что петля лежит в круге сходимости этого ряда. Как и в случае тора, это противоречило бы тому, что петли нестягиваемы. Условия $\mathcal{A}_\Lambda > 0$, $\lim \|\nabla \mathcal{A}_i\|_* = 0$ и $\lim (\sup_x z_i(x)) = 0$ несовместны.

Предположим теперь, что встретился случай 1б). Используя трансляционную инвариантность, поместим для каждого i точку, в которой $z_i(\cdot)$ максимально, в начало координат в $\mathbb{R}^3$. При этом остальные точки, в которых сконцентрировано $z_i(\cdot)$, по-прежнему могут уходить в бесконечность при $i \rightarrow \infty$. Тем не менее, поместив в центр точки максимума величин z_i , мы получаем в пределе нетривиальное решение. Возможное поведение в случае 1б) можно изобразить так:



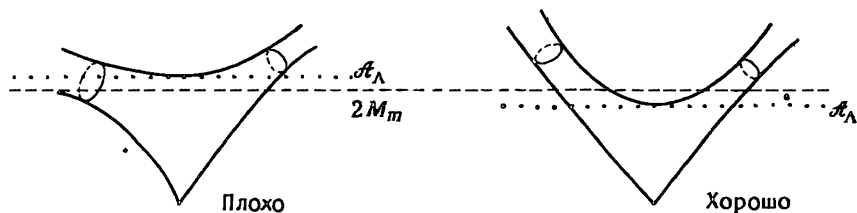
Задача теперь в том, чтобы показать, что оставшееся в начале координат не является монополем т'Хофта - Полякова (или монополем с высшим зарядом [11]). Действительно, тот пузырек плотности, который остается в пределе при $i \rightarrow \infty$, может иметь заряд $\neq 0$, если для больших, но конечных i образовались пузырьки с локальными зарядами $+$ и $-$, которые были отделены друг от друга с ростом i . Это случай 2).

Заметим, что в этом случае рождается пара монополей - антимонполей (или происходит процесс рождения большего числа частиц), которые затем разбегаются на бесконечность. Поэтому ясно, что для того, чтобы реализовался случай 2), должно быть

$$\mathcal{A}_\Lambda \geq 2 \times (\text{масса одного монополя}).$$

Кроме того, m и $\bar{m}$ притягиваются на больших расстояниях и, по построению, последовательность значений действия на (A^i, Φ^i) стремится к $\mathcal{A}_\Lambda$, убывая. Поэтому не следует ожидать появления случая 2): разбегание пары m и $\bar{m}$ приводит к последовательностям с возрастающим действием.

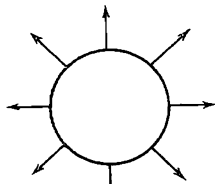
Чтобы доказать, что случай 2) не возникает, нужно только проверить, что $\mathcal{A}_\Lambda < 2 \times (\text{масса одного монополя } M_m)$. Для этого достаточно явно построить пробную петлю $\ell(t) \in \Lambda$, такую, что $\mathcal{A}(\ell) < 2M_m$. Здесь следует различать две возможности:



Задача. Как выбрать удобную пробную петлю в $\mathcal{C}_0$? Она должна обладать двумя важными качествами:

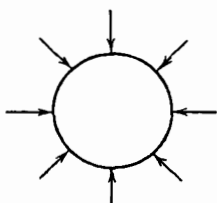
- 1) быть нестягиваемой;
- 2) быть достаточно простой, чтобы можно было легко вычислять действие.

Чтобы построить пробную петлю (A^t, Φ^t) , напомним, что Φ^t при $|x| = \infty$ задает однопараметрическое семейство отображений из S^2 в S^2 , как в (3.1). Далее, при $|x| = \infty$ поле Φ для монополя т'Хофта - Полякова задает конфигурацию



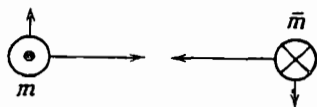
(4.1)

На соответствующей картинке для антимонополя стрелки перевернуты:

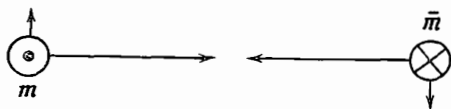


(4.2)

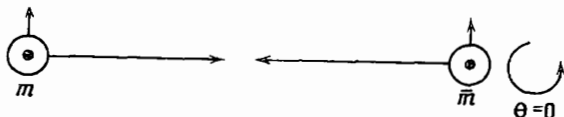
Нестягиваемая петля $\ell(t) = (A^t, \Phi^t)$ возникает в результате вращения антимонополя при неподвижном монополе. Сравним (3.1) с (4.1) и (4.2). В физических терминах это означает, что из вакуума $(0, 1/2 \tau^3)$ рождается пара $m - \bar{m}$. Система $m - \bar{m}$ описывается относительными координатами (r, θ) , как в § 1 (расстояние и относительный угол в изоспиновом пространстве). Разделим пару $m - \bar{m}$, т.е. перейдем от $(r = 0, \theta = -\pi)$ к $(r = d, \theta = -\pi)$ для некоторого большого $d \gg 1$. Теперь повернем $\bar{m}$ относительно m , т.е. при неизменном $r = d$ перейдем от $\theta = -\pi$ к $\theta = \pi$. После того как θ стало равным π , снова соближим m и $\bar{m}$. Вот схематическое описание пробной петли:



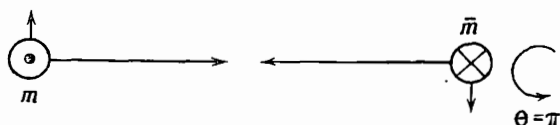
момент времени 0



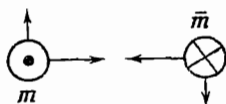
момент времени 1



момент времени 2



момент времени 3



момент времени 4

Эту петлю можно построить явно, используя явный вид монополя т'Хофта - Полякова, описанный в § 1 [4, 5]. Как функция от χ , θ энергия для больших χ не зависит от θ с точностью до членов второго порядка:

$$\mathcal{A}(\chi, \theta) = 2M_m - \frac{1}{\chi} + O(\chi^{-2}).$$

В частности, если d - максимальное расстояние, то для этой петли

$$\mathcal{A}_{\max} \leq 2M_m - \frac{1}{d} + O(d^{-2}).$$

Итак, $\mathcal{A}_\Delta < 2M_m$ и, следовательно, существует неминимальное решение уравнений Янга - Миллса (с калибровочной группой $SU(2)$) с нулевым монопольным числом.

5. Новые результаты

Используя эти и аналогичные оценки для дальнедействующих сил, полученные с помощью вариационного исчисления, можно получить новые, более сильные результаты в этой задаче и в четырехмерной теории Янга - Миллса. Вот две недавние теоремы:

Теорема 5.1 (Таубс [12, 13]). В каждом монопольном секторе существует бесконечно много калибровочно неэквивалентных гладких и имеющих конечное действие решений $SU(2)$ -уравнений Янга - Миллса - Хиггса в пределе BPS. В каждом монопольном секторе среди этих решений существуют решения с произвольно большим действием. За исключением решений уравнений Богомольного (автодуальных монополей), все они неустойчивы.

Теорема 5.2 (Таубс [14]). Для групп $SU(2)$ и $SU(3)$ пространства модулей инстантонных решений уравнений Янга - Миллса (автодуальных связностей) на S^4 - линейно связанные многообразия.

6. Ложное $\mathbb{R}^4$ (день третий)

Основная цель этой работы — описание некоторых математических фактов, далеких от настоящей физики (чем бы она ни была), но связанных с ней. Точнее говоря, я сосредоточился на тех фактах, которые можно доказать, если знать кое-что о междумонопольных или, скорее, междуйнстантонных силах.

Здесь будет рассказано об открытом недавно новом четырехмерном многообразии. Оно называется ложным или экзотическим $\mathbb{R}^4$ [15]. Сейчас найдено по крайней мере три экзотических $\mathbb{R}^4$ [16]. Возможно, их бесконечно много⁽⁹⁷⁾.

Открытие ложного $\mathbb{R}^4$ было полной неожиданностью — подобное впечатление мог бы произвести заголовок "В ЦЕРНе обнаружены свободные кварки" в завтрашнем номере "Le Figaro".

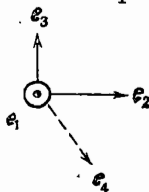
Эти экзотические $\mathbb{R}^4$ — нечто сверхъестественное, и я подозреваю, что потребуется недюжинная изобретательность, чтобы найти им применение в физике. Может быть, их существование поднимает некоторые философские вопросы, а, может быть, и нет.

Я был связан с этими вещами лишь отдаленно. Тем, кто захочет больше узнать о ложном $\mathbb{R}^4$, рекомендуем обратиться к книге [15].

Существование ложного $\mathbb{R}^4$ было доказано топологами М.Фридманом из Калифорнийского университета в Санта Барбаре и А. Кассоном из Техасского университета в Остине. Оно доказывается от противного и логически следует из одной замечательной теоремы Саймона Дональдсона [17].

Последующий рассказ опирается на два источника. Первый — это записи Фрида, Фридмана и Уленбек, легшие в основу книги [15], а второй — рукопись Р. Кирби из Калифорнийского университета в Беркли [18], где кратко изложены необходимые понятия и идеи.

Ложное $\mathbb{R}^4$, обозначим его $\mathbb{R}_\Sigma^4$, есть гладкое четырехмерное многообразие, гомеоморфное четырехмерному векторному пространству $\mathbb{R}^4$ с базисом (e_1, e_2, e_3, e_4) :



но не диффеоморфное ему. Это означает, что существует непрерывное взаимно однозначное отображение $f: \mathbb{R}_\Sigma^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

такое, что обратное к нему $f^{-1}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_\Sigma^4$ тоже не-прерывно, однако не существует гладкого взаимно однозначного отображения $\mathbb{R}_\Sigma^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, такого, что обратное к нему тоже гладко. На самом деле имеет место

Свойство 1. Не существует гладких взаимно однозначных отображений между $\mathbb{R}_\Sigma^4$ и $\mathbb{R}^4$.

Существо, которое не в состоянии обнаружить гладкую структуру (не умеет дифференцировать производные), не сможет отличить $\mathbb{R}_\Sigma^4$ от $\mathbb{R}^4$. Но существо, которое умеет вычислять производные, поймет, что это два различных объекта.

Философский вопрос. Действительно ли люди берут производные? Понимают ли они разницу?

7. Гладкие структуры

Рассмотрим прямую $\mathbb{R}$ с параметром t . Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |f(t + \varepsilon) - f(t)| = 0$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. Функция дифференцируема на интервале $(0, 1)$, если

$$f'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (f(t + \varepsilon) - f(t))$$

непрерывна при всех $t \in (0, 1)$.

Пространство дифференцируемых функций на $(0, 1)$ есть по определению множество непрерывных функций, дифференцируемых на интервале $(0, 1)$.

Функция f называется бесконечно дифференцируемой (гладкой), если все ее производные дифференцируемы (высшие производные определяются индуктивно, $f'' = (f')'$ и т.д.).

Дiffeоморфизм $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ есть взаимно однозначное бесконечно дифференцируемое отображение, обратное к которому также бесконечно дифференцируемо.

Гладкая структура Σ на $\mathbb{R}$ задается следующим набором данных: (1) покрытие множества $\mathbb{R}$ открытыми множествами $\{(-1/2, t_0), (t'_1, t_1), (t'_2, t_2), \dots$ и $(t'_{-1}, 1/2), (t'_{-2}, t_{-2}), \dots\}$, причем $0 < t'_1 < t_0 < t_1 \dots$ и $0 > t_{-2} > t'_{-1} > t_{-2} \dots$; (2) гладкие функции перехода

$$f_{i,i+1}: (t'_{i+1}, t_i) \rightarrow (t'_{i+1}, t_i) \text{ при } i \geq 0,$$

$$f_{-1,0}: (-1/2, 1/2) \rightarrow (-1/2, 1/2),$$

$$f_{i-1,i}: (t'_i, t_{i-1}) \rightarrow (t'_i, t_{i-1}) \text{ при } i < 0.$$

Эти функции взаимно однозначны и оставляют на месте граничные точки. Обратные к ним функции также должны быть гладкими.

Заметим, что из условия взаимной однозначности и обратимости функции $f_{i,i+1}$ следует, что $f'_{i,i+1} \neq 0$. Значит, каждая $f_{i,i+1}$ — монотонно возрастающая функция.

Множество $\mathbb{R}$ с гладкой структурой Σ обозначается через $\mathbb{R}_\Sigma$. Чтобы многообразие $\mathbb{R}_\Sigma$ было диффеоморфно $\mathbb{R}$, должно существовать гладкое взаимно однозначное отображение $g: \mathbb{R}_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ с гладким обратным.

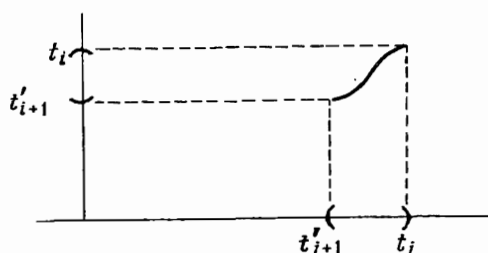
В физике не различают диффеоморфные гладкие структуры — они сводятся друг к другу преобразованием координат.

Такое отображение g задается набором отображений $\{g_i: (t'_i, t_i) \rightarrow (t'_i, t_i)\}$, где каждое g_i есть диффеоморфизм, т.е. $\partial g_i / \partial t > 0$. (Здесь мы предполагаем, что g сохраняет ориентацию.) Кроме того, требуется, чтобы $g_{i+1}(f_{i,i+1}(g_i^{-1}(t))) = t$ на интервале (t'_{i+1}, t_i) . Это необходимо для самосогласованности определения.

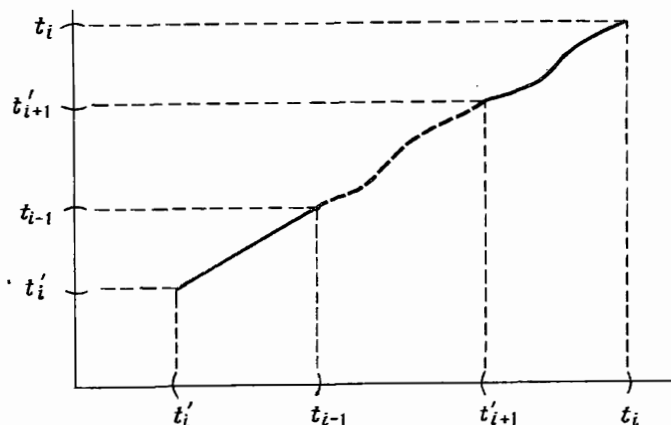
Например, если $f_{i,i+1}(t) = t$ для всех i , то $\mathbb{R}_\Sigma = \mathbb{R}$. Сохраняющий ориентацию диффеоморфизм многообразия $\mathbb{R}$ есть просто монотонная функция на $\mathbb{R}$ (скажем, $t \mapsto \sinh t$).

Основная теорема в одномерном случае. Любая ориентируемая гладкая структура на $\mathbb{R}$ диффеоморфна стандартной. Имеется только одна гладкая прямая.

Вот набросок доказательства. Напомним, что на интервале (t'_{i+1}, t_i) гладкая функция $f_{i,i+1}$ строго монотонна и переводит t'_{i+1} в t'_{i+1} , а t_i в t_i . Ее график имеет вид



Далее, на интервале (t'_i, t_i) выберем функцию $g_i(t)$ следующим образом. Пусть она равна $f_{i,i+1}(t)$, когда $t \in (t'_{i+1}, t_i)$, и t , когда $t \in (t'_i, t'_{i+1})$. Между t'_{i-1} и t'_{i+1} функция $g_i(t)$ должна быть произвольной гладкой монотонной интерполяцией между t и $f_{i,i+1}(t)$. В существовании такой интерполяции проще всего убедиться, взглянув на рисунок:



Таким образом, каждая $g_i(\cdot): (t'_i, t_i) \rightarrow (t'_i, t_i)$ есть гладкая монотонно возрастающая функция. По построению $g_{i+1}(f_{i,i+1}(g_i^{-1}(t))) = t$ для $t \in (t'_{i+1}, t_i)$. Это завершает доказательство.

В качестве упражнения докажите, что S^1 имеет только одну гладкую структуру (с точностью до диффеоморфизма).

8. Гладкие структуры на многообразиях

Гладкое N -мерное многообразие задается следующими данными. Во-первых, имеется основное топологическое пространство M_{top} , являющееся точечным множеством с заданной на нем системой открытых подмножеств. Во-вторых, M_{top} покрыто открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, причем для каждого U_α задан гомеоморфизм $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^N$. Здесь $N = [0, 1, \dots, \infty)$. Функции перехода $g_{\alpha\beta} = h_\alpha(h_\beta^{-1}(\cdot))$ переводят $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^N$ в $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^N$.

Пространство M_{top} называется топологическим N -мерным многообразием, если все $g_{\alpha\beta}$ непрерывны, т.е. если все они являются гомеоморфизмами между $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, и гладким, если все $g_{\alpha\beta}$ бесконечно дифференцируемы.

Например, $\mathbb{R}_\Sigma$ из предыдущего раздела есть гладкое одномерное многообразие.

Основная теорема для $\mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3, 5, 6, \dots, \infty$. Любая ориентируемая гладкая структура на $\mathbb{R}^N$ диффеоморфна его стандартной структуре (в которой $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1$).

Доказательство основной теоремы для $\mathbb{R}^N$ при $N \neq 1$ довольно сложно (см. [19]).

Теперь известно, что основная теорема для $N = 4$ неверна. Экзотическое $\mathbb{R}^4$, а именно $\mathbb{R}_\Sigma^4$ (отличное от $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$) определяется локально конечным покрытием пространства $\mathbb{R}^4$ открытыми шарами $\{U_\alpha\}$ и набором гомеоморфизмов $\{h_\alpha: U_\alpha \rightarrow U_\alpha\}$ со свойствами:

1) отображения $\{g_{\alpha\beta}: h_\alpha(h_\beta^{-1}(\cdot)): U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta\}$ являются диффеоморфизмами;

2) не существует набора диффеоморфизмов $\{\eta_\alpha: U_\alpha \rightarrow U_\alpha\}$, такого, что $\{g_{\alpha\beta} = \eta_\alpha(\eta_\beta^{-1}(\cdot))\}$.

В том, что касается непрерывных данных, $\mathbb{R}_\Sigma^4$ и $\mathbb{R}^4$ совпадают. Но в том, что касается гладких данных, они совершенно различны.

9. Свойства многообразия $\mathbb{R}_\Sigma^4$ [18]

Явной конструкции многообразия $\mathbb{R}_\Sigma^4$ сейчас еще не существует. Все его известные свойства были выведены от противного. Другими словами, если бы $\mathbb{R}^4$ не обладало этими свойствами, то возникали бы противоречия с различными установленными фактами.

1) Существует компактное множество $K \subset \mathbb{R}_\Sigma^4$, которое не может содержаться внутри гладко вложенной трехмерной сферы. Поскольку $\mathbb{R}_\Sigma^4$ гомеоморфно $\mathbb{R}^4$, существуют, конечно, окружающие K сферы, допускающие топологическое вложение, т.е. сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R$ для достаточно больших R . Здесь $\{x_i\}_{i=1}^4$ — координатные функции на стандартном $\mathbb{R}^4$. В самом деле, каждая координатная функция x_i непрерывна на $\mathbb{R}_\Sigma^4$, но не является гладкой.

2) $\mathbb{R}_\Sigma^4$ нельзя гладко вложить в стандартную четырехмерную сферу. Но, поскольку $\mathbb{R}_\Sigma^4$ гомеоморфно $\mathbb{R}^4$, его можно вложить в S^4 непрерывно (как S^4 без точки).

3) $\mathbb{R}_\Sigma^4$ можно гладко вложить в $S^2 \times S^2$. Следовательно, оно обладает комплексно аналитической структурой. Существует также нестандартное $\mathbb{C}^2$.

4) Не существует гомеоморфизма $\alpha: \mathbb{R}_\Sigma^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, который был бы гладким или имел бы гладкий обратный.

5) Существует гладкая структура на $\mathbb{R}^4 \times [0, 1]$, которая совпадает с $\mathbb{R}^4$ при сужении на $\mathbb{R}^4 \times \{0\}$ и с $\mathbb{R}_\Sigma^4$ при сужении на $\mathbb{R}^4 \times \{1\}$.

6) Это свойство связано с 1). Не существует гладкой метрики на $\mathbb{R}_\Sigma^4$, которая бы была асимптотически плоской. Существует ли на $\mathbb{R}_\Sigma^4$ полная эйнштейнова метрика?

7) Это свойство также связано с 1). Не существует трехмерно-го многообразия, которое допускало бы гладкие и гомотопически одинаковые вложения в $\mathbb{R}^4$ и в $\mathbb{R}_\Sigma^4$.

Вот несколько вопросов, которые хотелось бы разрешить:

1) Существует ли полезный дифференциальный инвариант, различающий $\mathbb{R}_\Sigma^4$ и $\mathbb{R}^4$, например индекс какого-нибудь оператора?

2) Существует ли достаточно прямая конструкция многообразия $\mathbb{R}_\Sigma^4$?

Физиков должен был бы заинтересовать вопрос: как учитывать различные гладкие структуры в квантовой гравитации? На самом деле существуют четырехмерные многообразия, не имеющие вообще ни одной гладкой структуры [20], [17]. Имеют ли они какое-нибудь отношение к квантовой гравитации?

10. Доказательство существования

Саймон Дональдсон доказал [17], что, за исключением S^4 , не существует гладкого компактного ориентированного односвязного спинного четырехмерного многообразия, второе число Бетти которого равнялось бы (с точностью до знака) его сигнатуре Хирцебруха. Другими словами, не существует гладкого ориентированного... четырехмерного многообразия, которое имело бы только автодуальные или только антиавтодуальные гармонические 2-формы в качестве представителей классов когомологий Де Рама. Он доказал это от противного. Противоречие получалось при изучении пространства параметров одноинстантонных решений уравнений Янга - Миллса с группой $SU(2)$ на гипотетическом многообразии (снабженном римановой метрикой), удовлетворяющем всем перечисленным выше ограничениям.

С другой стороны, Майк Фридман [21] показал, что существуют топологические четырехмерные многообразия, которые удовлетворяли бы всем перечисленным выше ограничениям, если бы допускали хотя бы одну гладкую структуру. Следовательно, многообразия Фридмана не имеют гладких структур. (Ранее Фридман доказал существование топологических четырехмерных многообразий, которые не обладают ни одной гладкой структурой [20].)

Фридман и Кассон вернулись к этой теореме Фридмана, чтобы найти, в каком именно месте теряется дифференцируемость. Они пришли к выводу, что только ложное $\mathbb{R}^4$ со всеми перечисленными выше свойствами объясняет отсутствие дифференцируемой структуры на многообразиях Фридмана.

Литература

1. 't-Hooft G. - Nucl. Phys. B79(1974), 276; Поляков А.М. - Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430.
2. Богомольный Е.Б. - Ядерная физика, 1976, т. 24, с. 449.
3. Manton N.S. - Nucl. Phys. B135(1978), 319.

4. Taubes C.H. - Commun. Math. Phys. 86 (1982), 257; Commun. Math. Phys. 86(1982), 299.
5. Groisser D. SU(2) Yang-Mills-Higgs theory on $\mathbb{R}^3$. - Harvard Univ. preprint.
6. Palais R. - Proc. Symp. Pure Math. 15 (1970), 185.
7. Palais R. - Topology 5 (1966), 115.
8. Berger M. Nonlinearity and functional analysis. - Academic Press, New York, 1977; Люстерник Л.А. Topology of the calculus of Variations in the Large (Amer. Math.Soc.Transl. 16), Amer. Math.Soc., Providence, RI (1976).
9. Groisser D. Integrability of the monopole number in SU(2) Yang-Mills-Higgs theory on $\mathbb{R}^3$. - Commun.Math.Phys. 93 (1984), 367-378.
10. Uhlenbeck K.K. - Commun. Math. Phys. 83 (1981), 31.
11. Jaffe A. and Taubes C.H. Vortices and Monopoles. - Birkhäuser, Boston, 1980.
12. Taubes C.H. On the Yang-Mills-Higgs equations. - Bull. AMS, 10, № 2 (1984), 295-297.
13. Taubes C.H. (готовится к печати).
14. Taubes C.H. Path connected Yang-Mills moduli spaces. - Univ. of Calif. (Berkeley) preprint, 1983.
15. Freed D., Uhlenbeck K. Instantons and four manifolds. - Springer-Verlag, 1984. [Имеется перевод: Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия. - М.: Мир, 1988.]
16. Gompf R. - J. Diff. Geom. 18 (1983), 317.
17. Donaldson S.K. - J. Diff. Geom. 18 (1983), 279.
18. Kirby R. (частное сообщение).
19. Moise E. - Ann. of Math. 54 (1951), 506; 55 (1952), 172; 203; 215; 56 (1952), 96; Stallings J. - Proc. Camb. Phil.Soc. 58 (1962), 481.
20. Freedman M. - Ann. of Math. 110 (1979), 177.
21. Freedman M. - J. Diff. Geom. 17 (1982), 357.

МОНОПОЛИ И ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ S^2 В S^2 ; ТОПОЛОГИЯ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА¹⁾

К.Г. Таубс

Department of Mathematics, University of California,
Berkeley, CA 94720, USA

Резюме. Показано, что конфигурационное пространство для $SU(2)$ -уравнений Янга - Миллса - Хиггса на $\mathbb{R}^3$ гомотопно пространству гладких отображений из S^2 в S^2 . Точки конфигурационного пространства параметризуют семейство подкрученных операторов Дикара. Это семейство используется для доказательства того, что конфигурационное пространство не допускает ретракции ни на какое подпространство, на котором $SU(2)$ -функционал Янга - Миллса - Хиггса ограничен.

А1. Введение

В работе [1] автор анонсировал теорему, в которой утверждалось, что $SU(2)$ -уравнения Янга - Миллса - Хиггса на $\mathbb{R}^3$ в пределе Прасада - Зоммерфельда имеют бесконечное число неминимальных (и калибровочно неэквивалентных) решений в каждой линейно связной компоненте конфигурационного пространства (в монопольном секторе). Утверждалось также, что в каждой такой компоненте существуют решения с произвольно большим действием. Эти утверждения были доказаны в последующей работе [2] с привлечением вариационных методов.

Вариационное исчисление можно использовать для нахождения решений дифференциального уравнения в том случае, если это уравнение является вариационным уравнением Эйлера - Лагранжа для

¹⁾ Taubes C.H. Monopoles and Maps from S^2 to S^2 ; the Topology of the Configuration Space. - Communications in Mathematical Physics, 1984, v. 95, pp. 345-391.

некоторого функционала f на топологическом пространстве M . Если пара (f, M) в подходящем смысле "хорошая", то определенные топологические свойства M обеспечивают существование решений рассматриваемого дифференциального уравнения. Для конкретизации этого утверждения необходимо изучить функционал f и топологию пространства M .

Целью данной статьи является исследование тех топологических свойств конфигурационного пространства Янга - Миллса - Хиггса, которые существенны при доказательстве теоремы существования, приведенной в работе [1].

Это исследование приводит помимо прочего к изучению топологии семейства операторов Дирака, параметризованных указанным конфигурационным пространством; здесь особый интерес представляют характеристические классы семейства операторов Дирака. Как отмечается в § 2, эти когомологические классы позволяют доказать существование решений с произвольно большим действием в каждой компоненте связности конфигурационного пространства.

Данная работа опирается на предварительное исследование этой топологии, проведенное в [3, § 3]. Используются в основном та же терминология и обозначения, что и в [3].

Напомним для непосвященных, что $SU(2)$ -уравнения Янга - Миллса - Хиггса - это дифференциальные уравнения в частных производных на $\mathbb{R}^3$ относительно неизвестной $s = (A, \Phi)$. Здесь A - связность в главном $SU(2)$ -расслоении $P = \mathbb{R}^3 \times SU(2)$ над $\mathbb{R}^3$, а Φ - сечение ассоциированного векторного расслоения $Ad P = \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{su}(2)$, слоем которого является алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ группы $SU(2)$.

Уравнения Янга - Миллса - Хиггса имеют вид

$$D_A * F_A + [\Phi, * D_A \Phi] = 0, \quad (A1.1a)$$

$$D_A * D_A \Phi = 0, \quad (A1.1b)$$

с граничным условием $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\Phi|(x) = 1$.

В уравнениях (A1.1) F_A - форма кривизны связности A , D_A - внешнее ковариантное дифференцирование на расслоении $Ad P$, а $[\cdot, \cdot]$ - естественная градуированная скобка на расслоении $\mathfrak{su}(2)$. Она определена так, что для $Ad P$ -значных p -форм ω и q -форм η выполняется соотношение $[\omega, \eta] = \omega \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$. В уравнении (1.1)

символ $*$ обозначает оператор Ходжа на расслоении ΛT^* , построенный по евклидовой метрике на $\mathbb{R}^3$. Наконец, норма $|\cdot|$ на расслоении $\Lambda T^* \otimes \text{Ad } P$ индуцирована евклидовой метрикой на T^* и Ad -инвариантной метрикой $|\phi|^2 = -2 \text{Tr}_{\mathbb{C}^2}(\phi^2)$ на алгебре $\mathfrak{su}(2)$.

Уравнение (AI.1) представляет собой вариационное уравнение для функционала действия

$$\mathcal{U}(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \{ |F_A|^2 + |D_A \Phi|^2 \} d^3 x, \quad (\text{AI.2})$$

который следует рассматривать как функционал, определенный на множестве

$$\mathcal{C} = \{ \text{гладкие } c = (A, \Phi): \mathcal{U}(A, \Phi) < \infty \text{ и } (1 - |\Phi|) \in L^6(\mathbb{R}^3) \}. \quad (\text{AI.3})$$

Множество $\mathcal{C}$ является конфигурационным пространством и наделено следующей топологией. Пусть θ обозначает плоскую связность на прямом произведении $\mathbb{R}^3 \times \text{SU}(2)$. Тогда топологией на $\mathcal{C}$ оказывается топология, индуцированная отображением $\mathcal{C}$ в произведение $\times C^\infty(\mathbb{R}^3) \times [0, \infty)$ двенадцати копий пространства $C^\infty(\mathbb{R}^3) \times [0, \infty)$, переводящим (A, Φ) в $(A - \theta, \Phi, \mathcal{U}(A, \Phi))$.

На множестве $\mathcal{C}$ действует топологическая группа $\mathcal{G} = \text{Aut } P \simeq C^\infty(\mathbb{R}^3; \text{SU}(2))$. Это действие непрерывно и сохраняет функционал $\mathcal{U}$.

Подгруппа $\mathcal{G}_0 = \{ g \in \mathcal{G}: g(x=0) = 1 \}$ действует на $\mathcal{C}$ свободно. Функционал $\mathcal{U}$ опускается до непрерывного функционала на факторпространстве $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{G}_0$, если $\mathcal{B}$ наделено фактортопологией. В дальнейшем орбита $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ под действием $\mathcal{G}_0$ будет обозначаться также через (A, Φ) .

На множестве $\mathcal{B}$ определено действие группы $\text{SU}(2)$, сохраняющее функционал $\mathcal{U}$. Инвариантность относительно группы $\text{SU}(2)$ можно частично учесть путем построения слоения множества $\mathcal{B}$ над S^2 со слоем $\hat{\mathcal{B}}$. Группа $\text{SU}(2)$ действует на S^2 вращениями, а слоение $\hat{\mathcal{N}}: \mathcal{B} \rightarrow S^2$ является эквивариантным. Следовательно, без потери общности можно ограничить функционал $\mathcal{U}$ на слой $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{N}}^{-1}$ над северным полюсом.

Указанное слоение строится в § B.5. Идея состоит в том, что отображение $\hat{\mathcal{N}}$ переводит $(A, \Phi) \in \mathcal{B}$ в единичный вектор $\Phi/|\Phi|$ в слое $\text{Ad } P$ над подходяще выбранной точкой $x(A, \Phi) \in \mathbb{R}^3$. Практически реальная конструкция оказывается более сложной.

Как отмечалось в работе [3], пространство $\mathcal{B}$ тесно связано с пространством $\text{Maps}(S^2, S^2)$ гладких отображений из S^2 в S^2 . Фиксирование значения в отмеченной точке приводит к расслоению $\text{Maps}(S^2, S^2)$ над S^2 со слоем $\Omega(S^2, S^2)$ — пространством отображений, сохраняющих отмеченную точку. Конструкция пространства $\hat{\mathcal{B}}$ указывает на связь с $\Omega(S^2, S^2)$.

Эта связь исследуется в первой части статьи; доказывается следующая теорема:

Т е о р е м а А I . I . Существует вложение пространства отображений $\text{Maps}(S^2, S^2)$ в множество $\mathcal{B}$, индуцирующее следующую коммутативную диаграмму. Вертикальные стрелки в которой обозначают гомотопические эквивалентности:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{B}} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega(S^2, S^2) & \longrightarrow & \text{Maps}(S^2, S^2) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \\ S^2 \end{array}$$

Линейно связными компонентами пространства $\Omega(S^2, S^2)$ являются пространства $\{\Omega_n(S^2, S^2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ отображений фиксированной степени. Соответственно $\hat{\mathcal{B}} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\mathcal{B}}_n$. (Пространство $\hat{\mathcal{B}}_n$ представляет n -монополярный сектор.)

Известно, что если $c \in \hat{\mathcal{B}}_n$, то

$$\mathcal{U}(c) \geq 4\pi |n|. \quad (\text{AI.4})$$

Для $c \in \mathcal{E}_n$ равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c = (A, \Phi)$ удовлетворяет уравнению Богомольного [4]

$$F_A = \text{sign}(n) * D_A \Phi. \quad (\text{AI.5})$$

Решения уравнений Богомольного существуют в каждом $\hat{\mathcal{B}}_n$ [5, гл. IV; 6].

Конфигурации, удовлетворяющие уравнению (1.5), реализуют минимумы функционала $\mathcal{U}$ на пространстве $\hat{\mathcal{B}}$. Вновь открытые критические точки функционала $\mathcal{U}$ — решения уравнений (AI.1), анонсированные в [1], — все неминимальны и неустойчивы.

Они находятся с помощью процедуры минимакса. Она заключается в следующем [7]. Пусть M — гладкое многообразие. Семейство $\mathcal{F}$ компактных подмножеств в M называется гомотопически инвариантным, если для любой непрерывной гомотопии $\varphi: [0, 1] \times M \rightarrow M$, для которой $\varphi(0, \cdot)$ — тождественное отображение, условие $F \in \mathcal{F}$ влечет за собой $\varphi(1, F) \in \mathcal{F}$.

Например, пусть $H^l(M; \mathbb{Z})$ обозначает l -ю группу когомологий многообразия M с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Пусть $[\bar{x}] \in H^l(M; \mathbb{Z})$ и

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}([\bar{x}]) = \{F \in M: \text{отображение сужения } i_F^*: H^l(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^l(F; \mathbb{Z})$$

$$\text{не обращается в нуль на } [\bar{x}]\} \}. \quad (\text{A1.6})$$

Семейство $\mathcal{F}$ гомотопически инвариантно.

Пусть $\mathcal{U}: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$ — тот же функционал, что в уравнении (A1.2). Поставим в соответствие гомотопически инвариантному семейству $\mathcal{F}$ число

$$\mathcal{U}_{\mathcal{F}} = \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{c \in F} \mathcal{U}(c). \quad (\text{A1.7})$$

Основной результат работы [7] состоит в том, что любое число $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$, задаваемое уравнением (A1.7), является критическим значением функционала $\mathcal{U}$. Для того чтобы установить этот сильный результат, необходимо понять, что означает "компактность" на пространстве $\mathcal{C}$.

Топология пространства $\hat{\mathcal{B}}_n$ оказывает косвенное воздействие на функционал $\mathcal{U}$, не связанное ни с какими условиями компактности. Она влияет на априорное расположение множества

$$\text{Crit}_n = \{\mathcal{U}_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \text{ — гомотопически инвариантное семейство} \\ \text{компактных подмножеств в } \hat{\mathcal{B}}_n\} \quad (\text{A1.8})$$

на полуинтервале $[0, \infty)$.

Множество $\text{Crit}_n \subset [0, \infty)$ исследуется во второй части работы, где доказана

Т е о р е м а A1.2. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ определим множество $\text{Crit}_n \subset [4\pi|n|, \infty)$ для функционала $\mathcal{U}$ на пространстве $\hat{\mathcal{B}}_n$ формулой (A1.8). Это множество не ограничено.

Теорема A1.1 следует из предложений B1.1 и B5.1, и ее доказательство составляет большую часть § B1 – B5. Мы построим вложение $I: \text{Maps}(S^2, S^2) \rightarrow \mathcal{B}$, обладающее тем свойством, что $I(\text{Maps}(S^2, S^2))$ есть деформационный ретракт множества $\mathcal{B}$. Отображение I определяется в § B1, его смысл состоит в следующем. Отождествим образ сферы S^2 с единичной сферой в пространстве $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$. Тогда отображение $e \in \text{Maps}(S^2, S^2)$ определяет асимптотическую (при больших $|x|$ в $\mathbb{R}^3$) модель для $\Phi \in \Gamma(\text{Ad } P)$. Существует способ гладкого продолжения отображения e на все пространство $\mathbb{R}^3$, задающий глобальное сечение $\Phi(e) \in \Gamma(\text{Ad } P)$: продолжение осуществляется по радиусам, но так, чтобы в окрестности начала координат оно равнялось нулю. Существует связность $A(e)$, такая, что $I(e) = (A(e), \Phi(e)) \in \mathcal{B}$.

Непосредственное построение ретракции пространства $\mathcal{B}$ на образ $I(\text{Maps})$ осложняется тем, что заданная (A, Φ) может оказаться неподходящей в том смысле, что сечение Φ может не иметь предела при $|x| \rightarrow \infty$, определяющего гладкое отображение из сферы S^2 "на бесконечности" в пространстве $\mathbb{R}^3$ в единичную сферу S^2 в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$.

Эту трудность можно обойти, решая уравнение (A1.1b) вне единичного шара для нового сечения $\Phi_2(A, \Phi)$. Так как сечение $\Phi_2(A, \Phi)$ удовлетворяет эллиптическому дифференциальному уравнению, то справедливы априорные оценки, следующие из неравенства Като и обычных неравенств Соболева на пространстве $\mathbb{R}^3$. В удобной для наших целей форме эти неравенства воспроизводятся в § A4. Все априорные оценки, используемые в данной работе, основываются на идеях, изложенных в § A4.

В § B3 показано, что сопоставление паре (A, Φ) пары $(A, \Phi_2(A, \Phi))$ задает непрерывное отображение пространства $\mathcal{B}_n$ в себя. Этот результат является центральным; с его помощью легко построить искомую деформационную ретракцию, используя естественную аффинную структуру пространства $\mathcal{E}$. Указанная конструкция приводится в § B4.

Слоение $\hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\hat{\pi}} S^2$ строится в § B5. Строго говоря, отображение $\hat{\pi}$ не является значением $\Phi/|\Phi|$, а представляет собой значение $\Phi_2(A, \Phi)/|\Phi_2(A, \Phi)|$ в подходяще выбранной точке $x(A, \Phi) \in \mathbb{R}^3$. Ретракция пространства $\mathcal{B}$ на множество $\Omega(S^2, S^2)$ строится в § B5, чем завершается доказательство теоремы A1.1.

При изучении функционала $\mathcal{U}$ на пространстве $\mathcal{B}$ приходится иметь дело с семействами линейных дифференциальных операторов, параметризуемыми конфигурациями из $\mathcal{B}$. Подобные примеры обсуждались в работе [9]. Удобный формализм возникает, если рассматривать сопоставление: конфигурация из $\mathcal{B} \rightarrow$ оператор — как гомоморфизм между двумя гильбертовыми векторными расслоениями над пространством $\mathcal{B}$.

Гильбертовы векторные расслоения над $\mathcal{B}$, построенные по образцу соболевских пространств сечений над $\mathbb{R}^3$ расслоения $\mathbb{R}^3 \times$ (конечномерное векторное пространство), вводятся в § B6.

Отчасти конструкция таких векторных расслоений опирается на локальную теорему вложения (предложение B6.1), обеспечивающую вложение открытых окрестностей из множества $\mathcal{B}$ в пространство сечений расслоения $(T^* \otimes \text{Ad } P) \oplus \text{Ad } P$. Это локальное утверждение о вложении доказывается в § B7.

Линейные дифференциальные операторы, параметризуемые конфигурациями из множества $\mathcal{B}$, возникают при доказательстве теоремы A1.2 следующим образом. Для того чтобы установить методом минимакса неограниченность множества критических значений функционала $\mathcal{U}$ на множестве $\mathcal{B}_n$, необходима априорная информация об относительных гомотопиях или гомотопиях пары

$$(\hat{\mathcal{B}}_n, \mathcal{U}^{-1}([4\pi|n|, 4\pi|n| + \varepsilon]))$$

для каждого $\varepsilon \in (0, \infty)$. В частности, для каждого такого ε множество $\hat{\mathcal{B}}_n$ не допускает ретракции на множество $(\mathcal{U}^{-1}([4\pi|n|, 4\pi|n| + \varepsilon]))$. Здесь достаточно знать, что для каждого $\varepsilon > 0$ должно существовать гомотопически инвариантное семейство $\mathcal{F}(n, \varepsilon)$ подмножеств множества $\mathcal{B}_n$, для которых справедливо неравенство $\mathcal{U}_{\mathcal{F}(n, \varepsilon)} > 4\pi|n| + \varepsilon$.

Такие семейства $\mathcal{F}(n, \varepsilon)$ получаются в результате естественной стратификации множества $\mathcal{B}_n$, которая возникает из семейства подкрученных операторов Дирака. Эти операторы Дирака описаны в § C1.

Сопоставление оператору Дирака конфигурации $c \in \hat{\mathcal{B}}_n$ определяет отображение δ множества $\hat{\mathcal{B}}_n$ в пространство фредгольмовых операторов. Его непрерывность доказывается в § C2.

Пространство фредгольмовых операторов гомотопно $\mathbb{Z} \times BU$, где BU является классифицирующим пространством бесконечномерной унитарной группы $U = U(\infty)$. Как указано в работе Кошорке [10],

а также в работе [11], отображение δ позволяет поднять на множество $\hat{\mathcal{B}}_n$ универсальные классы Чжэня, определенные на пространстве BU . Эти "поднятые" классы задаются элементами кольца когомологий $H^*(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z})$.

Стратегия доказательства теоремы A1.2 заключается в том, чтобы показать, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon < \infty$ существует класс $\omega \in H^*(BU; \mathbb{Z})$, такой, что для $\delta^* \omega \in H^*(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z})$ гомотопически инвариантное семейство $\mathcal{F}(\delta^* \omega)$ в уравнении (A1.6) удовлетворяет условию $2l_{\mathcal{F}(\delta^* \omega)} > 4\pi|n| + \varepsilon$.

Эта программа реализуется путем применения идей Котворке в интересующей нас ситуации, подобно тому как это делалось в работе Атьи и Джонса [12] в случае семейства подкрученных операторов Дирака над S^4 .

Для $p, q \geq 0$ Котворке определяет характеристические классы $\chi^{p,q} \in H^{2pq}(BU; \mathbb{Z})$ со следующим свойством: класс $\delta^* \chi^{p,q} = \chi^{p,q}(\delta)$ равен нулю в группе $H^{2pq}(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z})$, если для любого $s \in \hat{\mathcal{B}}_n$ размерность ядра рассматриваемого оператора Дирака не превосходит p или размерность его коядра не превосходит q (класс $\chi^{p,q}$ представляет собой специальный детерминант классов Чжэня).

Следуя Атье и Джонсу, в § C2, C3 мы доказываем, что существуют сколь угодно большие числа p и q , такие, что $\chi^{p,q}(\delta) \neq 0$ в кольце $H^*(\hat{\mathcal{B}}_\ell; \mathbb{Z})$ при достаточно большом ℓ . Для этого оператор Дирака сужается на конечномерное подпространство пространства $\hat{\mathcal{B}}_\ell$, гомеоморфное конфигурационному пространству C_ℓ , состоящему из неупорядоченных наборов по ℓ точек в $\mathbb{R}^3$. Указанное конфигурационное пространство параметризует центры ℓ далеко разнесенных монополей Прасада - Зоммерфельда. Сужение класса $\chi^{p,q}(\delta)$ на подгруппу $H^{2pq}(C_\ell; \mathbb{Z})$ является характеристическим классом естественного C_ℓ -векторного расслоения над пространством C_ℓ . Характеристический класс этого расслоения был вычислен в работе Атьи и Джонса [12].

Пространства $\hat{\mathcal{B}}_n$, где $n \in \mathbb{Z}$, гомотопны друг другу; это соответствует хорошо известному утверждению о взаимной гомотопности пространств отображений $\Omega_n(S^2, S^2)$, где $n \in \mathbb{Z}$. В § C5 доказывается, что отображение, индуцирующее гомотопию между пространствами $\hat{\mathcal{B}}_n$ и $\hat{\mathcal{B}}_{n+1}$, обладает тем свойством, что следующая диаграмма гомотопически коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{\mathfrak{B}}_{n+1} & \xrightarrow{\delta} & BU \\
 \uparrow & \nearrow \delta & \\
 \hat{\mathfrak{B}}_n & &
 \end{array}$$

Отсюда следует, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ в группе $H^{2pq}(\hat{\mathfrak{B}}_n; \mathbb{Z})$ имеются ненулевые классы $\chi^{p,q}(\delta)$ при сколь угодно больших значениях p и q .

Для доказательства теоремы А1.2 остается показать, что функционал $\mathcal{U}_{\mathfrak{F}(\chi^{p,q}(\delta))}$ возрастает с ростом p и q . Здесь применяется утверждение Кошорке о том, что подмножество F пространства $\hat{\mathfrak{B}}_n$ лежит в $\mathfrak{F}(\chi^{p,q}(\delta))$ только тогда, когда существует $s \in F$, такое, что оператор Дирака, отвечающий s , имеет ядро размерности $\geq p$. Но исходя из формулы Вейтценбёка для оператора Дирака (см. § С2) можно предположить, что кривизны $(F_A, D_A \Phi)$ должны быть велики при больших p . Заметим, что квадрат оператора Дирака строго положителен с точностью до эндоморфизма, линейного на $(F_A, D_A \Phi)$. Это предположение строго доказывается в § С2. Полное доказательство теоремы А1.2 приводится в § С1 – С5.

А3. Обозначения и соглашения

Поскольку предметом исследования в данной работе является топология бесконечномерного функционального пространства, важно с самого начала ввести основные топологии на пространствах гладких функций в $\mathbb{R}^3$. Исходным является пространство Фреше $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^3$. Окрестность $\mathfrak{N}(f)$ функции f из $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ определяется компактным множеством $K \subset \mathbb{R}^3$ и последовательностью положительных чисел $\{\varepsilon_j > 0\}_{j=0}^\infty$:

$$\mathfrak{N}(f) = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^3) : (\|f - g\|_{C^j; K} < \varepsilon_j)_{j=0}^\infty\}.$$

Здесь $\|\cdot\|_{C^k; K}$ обозначает обычную C^k -норму на K .

Обозначим через $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ подпространство функций с компактным носителем в пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Пространства Соболева $L^p_k(\mathbb{R}^3)$ при $p \geq 0$ и $k \geq 1$ определяются обычным образом [13]; функция f принадлежит $L^p_k(\mathbb{R}^3)$, если она измерима и все ее производные до k -го порядка принадлежат $L^p(\mathbb{R}^3)$. Пространство $L^p(\mathbb{R}^3)$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|_p = \left[\int \alpha^3 x |f|^p \right]^{1/p}$; пространство $L^p_k(\mathbb{R}^3)$ при $k > 0$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{p,k} = \left[\sum_{j=0}^k \sum_{(j)} \|\nabla^{(j)} f\|_p^p \right].$$

В этой формуле внутреннее суммирование ведется по всем мульти-индексам $(j) = (i_1, \dots, i_j) \in \times_j \{1, 2, 3\}$.

Если Ω есть область в пространстве $\mathbb{R}^3$, то норма пространства $L^p_k(\Omega)$ обозначается через $\|\cdot\|_{p,k;\Omega}$. Например,

$$\|f\|_{p;\Omega} = \left[\int_{\Omega} \alpha^3 x |f|^p \right]^{1/p}.$$

Пространство $L^p_{k,loc}(\mathbb{R}^3)$ при $p \geq 2$ и $k \geq 0$ по определению состоит из измеримых функций f , принадлежащих $L^p_k(\Omega)$ для любой ограниченной области Ω в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пространство $L^p_{k,loc}(\mathbb{R}^3)$ является пространством Фреше; открытая окрестность $\mathfrak{N}(f)$ функции $f \in L^p_{k,loc}(\mathbb{R}^3)$ определяется ограниченной областью Ω в пространстве $\mathbb{R}^3$ и числом $\varepsilon > 0$:

$$\mathfrak{N}(f) = \{g \in L^p_{k,loc}(\mathbb{R}^3) : \|f - g\|_{p,k;\Omega} < \varepsilon\}.$$

Наконец, необходимо ввести пространство $\bar{C}^{0,1/2}(\mathbb{R}^3)$. Это банахово пространство, являющееся пополнением пространства $C^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ по норме

$$\|f\|_{0,1/2} = \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{1/2}}.$$

Функции из $\bar{C}^{0,1/2}(\mathbb{R}^3)$ равномерно стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Пусть теперь V — конечномерное гильбертово пространство и $E = \mathbb{R}^3 \times V$ — векторное расслоение. Пространство гладких сечений V обозначается символом $\Gamma(E)$; оно наделяется топологией с помощью проекции $E \rightarrow V$, отождествляющей

пространство $\Gamma(E)$ с пространством

$$C^\infty(\mathbb{R}^3; V) \simeq [C^\infty(\mathbb{R}^3)]^{\dim V}.$$

Аналогичным образом введем пространства $\Gamma_0(E)$, $L_k^p(E)$ и $L_{k;loc}^p(E)$; при этом L^p -нормы определяются в терминах метрики $(\cdot, \cdot)$, заданной на слоях расслоения E (см. [13]).

Полезным примером является $T^* \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ — кокасательное расслоение евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим гладкое многообразие M с изометрическим вложением $M \subseteq \mathbb{R}^N$ для некоторого $N \geq 1$; например, $SU(2) \simeq S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Обозначим через $C^\infty(\mathbb{R}^3, M)$ пространство гладких отображений из $\mathbb{R}^3$ в M . Оно наделяется топологией путем включения его в пространство $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^N) \simeq \times C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (см., например, [13]).

Пусть $|\cdot|$ есть метрика на расслоении E и $\alpha(E)$ обозначает пространство гладких связностей на расслоении E , согласованных с метрикой. Фиксированная проекция $E \rightarrow V$ задает стандартную связность θ на произведении $E = \mathbb{R}^3 \times V$; при этом $\alpha(E) = \theta + \Gamma(\text{End } E \otimes T^*)$. Пространства связностей $\alpha_{k;loc}^p(E)$ при $p \geq 1$ и $k \geq 0$ определяются аналогичным образом.

Сводка основных топологических пространств теперь завершена; в оставшейся части этого параграфа будут введены некоторые специальные обозначения. Прежде всего удобно зафиксировать начало координат $0 \in \mathbb{R}^3$ и декартовы координаты $\{x^i\}_{i=1}^3$ с началом в точке 0. В этих координатах $|x| = \left(\sum_i x^i x^i\right)^{1/2}$.

Символом d обозначается внешняя производная $d: \Gamma(\Lambda T^*) \rightarrow \Gamma(\Lambda T^*)$. Лапласиан обозначается Δ и всегда равен $\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Если $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть векторное расслоение со связностью A , то $\nabla_A: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*)$ обозначает ковариантную производную, а $D_A: \Gamma(E \otimes \Lambda T^*) \rightarrow \Gamma(E \otimes \Lambda T^*)$ — оператор внешнего ковариантного дифференцирования.

Если $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}$, то $A(c) = A$ и $\Phi(c) = \Phi$, а также $F(c) = F_A$ и $(D_A \Phi)(c) = D_A \Phi$.

Удобно ввести фиксированную сглаживающую функцию β из C^∞ . Эта функция удовлетворяет следующим условиям: $\beta(x) = \beta(|x|)$ и

$$\beta(t) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1/2,$$

$$\beta(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 3/4, \quad (\text{A3.1})$$

$$1 \geq \beta(t) \geq 0, \quad \partial\beta/\partial t \leq 8 \quad \text{при всех} \quad t \in [0, \infty).$$

Если $\eta \in (0, \infty)$, то $\beta_\eta(x) = \beta(x/\eta)$. Это определение распространяется на пополненную полуось $[0, \infty]$, если положить $\beta_0(x) \equiv 0$ и $\beta_\infty(x) \equiv 1$.

Наконец, условимся о константах. В этой статье символами ζ и $\varkappa$ обозначаются числа на полуоси $(0, \infty)$, конкретное значение которых может меняться от строки к строке. Это соглашение устраняет необходимость введения индексов для констант в длинных вычислениях.

А4. Неравенство Като

Доказательства, приведенные в последующих параграфах, опираются на неравенства для норм на функциональных пространствах, которые представляют собой стандартные неравенства Соболева на $\mathbb{R}^3$ в ковариантной форме. Пусть $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное расслоение, а $|\cdot|$ обозначает невырожденную метрику на E .

Идея заключается в том, чтобы получить L^p -оценки для функций $\psi \in L^2_{1;1\text{oc}}(E)$, зная лишь, что $A \in \alpha^2_{1;1\text{oc}}(E)$ и $\nabla_A \psi \in L^2(E)$. Эти оценки вытекают из следующего неравенства:

Н е р а в е н с т в о К а т о . Пусть $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть векторное расслоение с гладкой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на слоях. Пусть $A \in \alpha^2_{1;1\text{oc}}(E)$ и $\psi \in L^2_{1;1\text{oc}}(E)$. Тогда почти всюду $|\nabla_A \psi| \geq |\alpha| |\psi|$.

Доказательство приведено в [5, гл. IV].

Первым следствием неравенства Като является

Л е м м а А4.1. Пусть $A \in \alpha^2_{1;1\text{oc}}(E)$ и $\delta \in (-1, \infty)$. Предположим, что $\psi \in L^2_{1;1\text{oc}}(E)$ и $(1+|x|)^\delta \nabla_A \psi \in L^2(E \otimes T^*)$. Тогда существует постоянная $c \in [0, \infty)$, такая, что для любого $\eta \in [0, \infty)$

$$\int_{|x|>\varepsilon} d^3x (1+|x|)^{2\delta} |\nabla_A \psi|^2 \geq \varepsilon \int_{|x|>\varepsilon} d^3x (1+|x|)^{2\delta-2} (c-|\psi|)^2 \quad (A4.1)$$

и

$$\|(1+|x|)^\delta |\nabla_A \psi|\|_2 \geq \varepsilon \|(1+|x|)^\delta (c-|\psi|)\|_6. \quad (A4.2)$$

Далее, положительная константа ε в этих выражениях не зависит от $A \in \mathcal{A}_{1,loc}^2(E)$, метрики на E и самого расслоения E . Константа ε является функцией только от δ .

Прежде чем перейти к доказательству леммы A4.1, полезно ввести банаховы пространства K^δ , параметризованные переменной $\delta \in (-1, \infty)$. Пространство K^δ является пополнением пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ по норме $\|v\| = \|(1+|x|)^\delta dv\|_2$. Оно обладает тем свойством, что существует константа $\varepsilon(\delta) > 0$, такая, что для любых $v \in K^\delta$ и $\varepsilon \in [0, \infty)$ справедливы неравенства

$$\int_{|x|>\varepsilon} d^3x (1+|x|)^{2\delta} |dv|^2 \geq \varepsilon(\delta) \int_{|x|>\varepsilon} d^3x (1+|x|)^{2\delta-2} v^2$$

и

$$\|v\| \geq \varepsilon(\delta) \|(1+|x|)^\delta v\|_6. \quad (A4.3)$$

Доказательство первого из приведенных неравенств повторяет доказательство леммы 5.2 работы [14] для $\delta \neq 0$. Второе неравенство (A4.3) следует из классического неравенства Соболева [15], которое утверждает, что если $u \in K^0$, то $\|du\|_2 \geq \varepsilon(0) \|u\|_6$. Для применения этого неравенства Соболева в случае $\delta \neq 0$ необходимо использовать первое из неравенств в (A4.3) и следующее тождество для функций из $L_{1,loc}^2$:

$$d(1+|x|)^\delta f = (1+|x|)^\delta df + \delta(1+|x|)^{\delta-1} f d|x|$$

при почти всех x .

Доказательство леммы A4.1. Исходя из неравенства Като, достаточно доказать лемму в случае, когда роль ψ играет функция $f \in L^2_{1;loc}(\mathbb{R}^3)$, для которой $(1+|x|)^\delta df \in L^2$.

Учитывая вышеуказанные свойства пространств K^δ , достаточно доказать, что из любой функции $f \in L^2_{1;loc}$ с $(1+|x|)^\delta df \in L^2$ можно вычесть константу так, чтобы результат принадлежал пространству K^δ . Доказательство последнего утверждения проводится последовательным применением леммы 4.12 из работы [14] для $\delta \neq 0$. Детали доказательства оставляем читателю.

Вторым полезным следствием неравенства Като является "ковариантная" форма соболевского вложения $L^6_1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \bar{C}^{0,1/2}(\mathbb{R}^3)$ (см. [15]).

Лемма A4.2. Пусть $A \in \alpha^2_1(E)$ и $\psi \in L^2_{1;loc}(E)$. Предположим, что

$$\nabla_A \psi \in L^2(E \otimes T^*), \quad c - |\psi| \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

для некоторого $c \in [0, \infty)$ и $\nabla_A(\nabla_A \psi) \in L^2(E \otimes T^* \otimes T^*)$. Тогда

$$\psi \in L^2_{2;loc}(E), \quad c - |\psi| \in \bar{C}^{0,1/2}(\mathbb{R}^3) \quad \text{и норма}$$

$$c - |\psi| \in \bar{C}^{0,1/2}(\mathbb{R}^3) \quad \text{зависит от} \quad A \in \alpha^2_{1;loc}(E),$$

метрики на E и самого расслоения E только через численные значения $\|\nabla_A(\nabla_A \psi)\|_2$ и $\|\nabla_A \psi\|_2$.

Доказательство. Из леммы A4.1 можно заключить, что $\nabla_A \psi \in L^p$ для $p \in [2, 6]$. В частности, $\nabla_A \psi \in L^4$. Пользуясь представлением $\nabla_A \psi = d\psi + \rho(A)$, в котором $\rho(A)$ есть матричная 1-форма связности A , и неравенством Гельдера, получим, что $d\psi \in L^4_{loc}$ и, следовательно, $\psi \in C^0(E)$. (Это неравенство Соболева, см. [15].) Обращаясь затем к выражению $\nabla_A(\nabla_A \psi)$, в котором $\nabla_A = d + \rho(A)$, заключаем, что $\psi \in L^2_{2;loc}(E)$. Вследствие неравенства Като $|d\psi| \in L^6$, и потому $c - |\psi| \in L^6_1(\mathbb{R}^3)$. Откуда вытекает, что $c - |\psi| \in \bar{C}^{0,1/2}(\mathbb{R}^3)$ [15].

Эти неравенства соболевского типа позволяют установить некоторые свойства непрерывности, отмеченные в следующей лемме.

Лемма A4.3. Пусть последовательность $\{A_i\} \in \alpha^2_{1;loc}(E)$

сходится к связности $A \in \alpha^2_{1;10c}(E)$. Пусть, далее, последовательность $\{\varphi_i\} \in L^2_{1;10c}(E)$ сильно сходится в L^2_{10c} к некоторой функции $\varphi \in L^2_{10c}$. Предположим, что последовательность $\{\nabla_{A_i} \varphi_i\} \in L^2$ слабо сходится к функции $G \in L^2$, причем последовательность норм $\{\|\nabla_{A_i} \varphi_i\|_2\}$ сходится к $\|G\|_2$. Тогда $\varphi \in L^2_{1;10c}$ и φ является сильным пределом последовательности $\{\varphi_i\}$ в $L^2_{1;10c}$. Кроме того, $\nabla_A \varphi \in L^2$ и является сильным в смысле $L^2_{1;10c}$ пределом последовательности $\{\nabla_{A_i} \varphi_i\}$. Далее, существует число ε и последовательность $\{c_i\} \subset [0, \infty)$, имеющая предел $c \in [0, \infty)$, такая, что последовательность $\{c_i - |\varphi_i|\}$ сходится к $c - |\varphi|$ в K^0 , а значит, и в L^6 .

Л е м м а А4.4. В условиях леммы А4.3 предположим дополнительно, что последовательность $\{\varphi_i\} \in L^2_{2;10c}$ и последовательность $\{\nabla_{A_i}(\nabla_{A_i} \varphi_i)\} \in L^2$ слабо сходится в L^2 к функции $G' \in L^2$, причем нормы $\{\|\nabla_{A_i}(\nabla_{A_i} \varphi_i)\|_2\}$ сходятся к норме $\|G'\|_2$. В обозначениях леммы А4.3 последовательность $\{\varphi_i\}$ сильно сходится в $L^2_{2;10c}$ к функции φ , а $\nabla_A(\nabla_A \varphi) \in L^2$ является сильным пределом последовательности $\{\nabla_{A_i}(\nabla_{A_i} \varphi_i)\}$. Более того, последовательность $\{c_i - |\varphi_i|\}$ сильно сходится к $c - |\varphi|$ в $L^6_1(\mathbb{R}^3)$, а следовательно, и в $C^{0,1/2}(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство леммы А4.3 будет вскоре приведено. Доказательство леммы А4.4 аналогично, поэтому мы предоставляем его читателю. Для доказательства леммы А4.3 потребуются следующие утверждения:

Л е м м а А4.5. Пусть последовательность $\{f_i\} \subset L^2$ слабо сходится к функции $f \in L^2$ так, что последовательность норм $\{\|f_i\|_2\}$ сходится к норме $\|f\|$. Тогда последовательность $\{f_i\}$ сильно сходится к функции f .

Л е м м а А4.6. Пусть последовательность $\{f_i\} \subset L^2$ сильно сходится в L^2_{10c} и обладает тем свойством, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta < \infty$, что для всех i справедливо неравенство $\int_{|x| > \eta} |f_i|^2 < \varepsilon$. Тогда последовательность $\{f_i\}$ сильно сходится в L^2 .

Доказательство лемм A4.5 и A4.6. Для доказательства леммы A4.5 обозначим через f слабый предел последовательности $\{f_i\}$. Утверждение леммы следует из тождества

$$\|f - f_i\|_2 = -\|f\|_2 + \|f_i\|_2 + 2\langle f, f - f_i \rangle_2.$$

Доказательство леммы A4.6 проводится с помощью простого "ε/3-приема", и мы оставляем его читателю.

Доказательство леммы A4.3. Лемма A4.5 гарантирует, что последовательность $\{\nabla_{A_i} \phi_i\}$ сильно сходится к функции G . Используя пробное сечение $\eta \in \Gamma_c(E \otimes T^*)$, находим, что последовательность $\{\langle \eta, \nabla_{A_i} \phi_i \rangle_2\}$ сходится к $\langle \nabla_A \eta, \phi \rangle_2$, так как последовательность $\{\phi_i\}$ сильно сходится в $L^2_{4,1oc}$ к функции ϕ , а последовательность $\{A_i\}$ сходится к A в пространстве $L^2_{4,1oc}$. Но это означает, что $\phi \in L^2_{4,1oc}$, $\nabla_A \phi \in L^2$ и $G = \nabla_A \phi$. Действительно, ввиду того, что

$$\begin{aligned} \langle \eta, \alpha(\phi - \phi_i) \rangle_2 &= \langle \eta, \nabla_A \phi - \nabla_{A_i} \phi_i \rangle_2 - \langle \eta, (p(A) - p(A_i)) \phi_i \rangle_2 - \\ &\quad - \langle \eta, p(A)(\phi - \phi_i) \rangle_2, \end{aligned}$$

последовательность $\{\phi_i\}$ слабо сходится в $L^2_{4,1oc}$ к функции ϕ и, значит, сильно сходится к функции ϕ в пространстве L^4_{1oc} . Далее, вследствие того, что

$$|\alpha(\phi - \phi_i)| \leq |\nabla_A \phi - \nabla_{A_i} \phi_i| + |p(A) - p(A_i)| |\phi_i| + |p(A)| |\phi - \phi_i|,$$

получаем сильную сходимость в пространстве $L^2_{4,1oc}$ последовательности $\{\phi_i\}$ к функции ϕ . Из лемм A4.1 и A4.6 следует, что существует числовая последовательность $\{c_i\} \subset [0, \infty)$, такая, что последовательность $\{(1 + |\alpha|)^{-1}(c_i - |\phi_i|)\}$ сильно сходится в L^2 . Поскольку последовательность $\{\phi_i\}$ сильно сходится к функции ϕ в пространстве L^2_{1oc} , последовательность $\{c_i\}$ сходится к некоторой константе $c \in [0, \infty)$, а величина $(1 + |\alpha|)^{-1}(c - |\phi|)$ является пределом последовательности $\{c_i - |\phi_i|\}$ в L^2 . Тогда последовательность $\{\alpha(c_i - |\phi_i|)\}$ сильно сходится в L^2 к $\alpha(c - |\phi|)$ ввиду сходимости последовательности $\{\phi_i\}$ к ϕ и вследствие лемм A4.1 и A4.6.

ВІ. Гомотопическая эквивалентность пространств $\mathbb{C}$ и $\text{Maps}(S^2, S^2)$

Начнем исследование пространства $\mathbb{B}$. Так как оно является факторпространством пространства $\mathbb{C}$, рассмотрим сначала топологию пространства $\mathbb{C}$. Глобальное сечение расслоения $P = \mathbb{R}^3 \times SU(2)$, переводящее $x \in \mathbb{R}^3$ в $(x, 1) \in \mathbb{R}^3 \times SU(2)$, позволяет отождествить $\mathbb{C}$ с подмножеством пространства $\Gamma(\text{Ad } P \otimes T^*) \times \Gamma(\text{Ad } P)$. Это отождествление будет подразумеваться всюду на протяжении данной статьи. В частности, пространство $\mathbb{C}$ наделяется топологией с помощью отображения из $\mathbb{C}$ в $\Gamma(\text{Ad } P \otimes T^*) \times \Gamma(\text{Ad } P) \times [0, \infty)$, переводящего точку $c = (A, \Phi)$ в $(A, \Phi, \mathcal{U}(c))$.

Упомянутое выше фиксированное сечение расслоения P позволяет отождествить калибровочную группу $\mathcal{G} = \text{Aut } P$ с пространством $C^\infty(\mathbb{R}^3; SU(2))$; топология на $\mathcal{G}$ вводится с помощью этого отождествления. Действие группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathbb{C}$ задается отображением, переводящим точку $(g, c = (A, \Phi))$ в точку $gc = (gAg^{-1} + g dg^{-1}, g\Phi g^{-1})$. Это действие непрерывно (см. [3, § 3]).

Подгруппа $\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G}: g(0) = 1\}$ действует свободно в пространстве $\mathbb{C}$. Рассмотрим факторпространство $\mathbb{B} = \mathbb{C}/\mathcal{G}_0$ и наделим его фактортопологией. Проекция $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ задает главное $\mathcal{G}_0$ -расслоение, изоморфное $\mathbb{B} \times \mathcal{G}_0$, так как подгруппа $\mathcal{G}_0$ стягиваема [3, § 3]. Следовательно, пространства $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ гомотопически эквивалентны. Фактически пространство $\mathbb{B}$ вкладывается в $\mathbb{C}$ [3, § 3] в виде

$$\mathbb{B} = \left\{ (A, \Phi) \in \mathbb{C}: A(0) = 0 \text{ и } x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner A = 0 \right\},$$

и ретракция пространства $\mathbb{C}$ на $\mathbb{B}$ осуществляется путем сжатия подгруппы $\mathcal{G}_0$ в 1.

Связь между пространством $\mathbb{B}$ и пространством $\text{Maps}(S^2, S^2)$ существует благодаря тому, что единичная сфера в пространстве $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$ совпадает со сферой S^2 . Можно установить эту связь явно, если рассмотреть пространство $\text{Maps}(S^2, S^2)$ как подмножество в $\text{Maps}(S^2, \mathfrak{su}(2))$, отождествляя $\mathfrak{su}(2)$ с $\mathbb{R}^3$. Введем теперь отображение $I: \text{Maps}(S^2, S^2) \rightarrow \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$,

переводящее элемент $e \in \text{Maps}(S^2, S^2)$ в

$$I(e) = (-(1-\beta(|x|))[e(x/|x|), de(x/|x|)], (1-\beta(|x|))e(x/|x|)). \quad (\text{B1.1})$$

Здесь пространство $\text{Maps}(S^2, S^2)$ отождествлено с пространством $\text{Maps}(\{x \in \mathbb{R}^3: |x|=1\}, \{\sigma \in \mathfrak{su}(2): |\sigma|=1\})$. Функция $\beta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ есть гладкая неотрицательная сглаживающая функция, равная тождественно единице при $t \leq 1/2$ и нулю при $t \geq 3/4$.

Предложение B1.1. Отображение I , задаваемое формулой (B1.1), определяет гомотопическую эквивалентность между пространством $\mathcal{B}$ и пространством $\text{Maps}(S^2, S^2)$. Фактически $I(\text{Maps})$ является сильным деформационным ретрактом пространства $\mathcal{C}$.

Это следует из предложения B2.1, которое приводится ниже.

Линейно связанные компоненты пространства $\text{Maps}(S^2, S^2)$ представляют собой пространства $\text{Maps}_n(S^2, S^2)$, которые нумеруются индексом $n \in \mathbb{Z}$. Это пространства отображений степени n . Соответственно $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_n$ и $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_n$, где $\mathcal{B}_n = \mathcal{C}_n / \mathcal{G}_0$.

Гройсер [16] показал, что если $(A, \Phi) \in \mathcal{C}_n$, то

$$\frac{1}{4\pi} \langle *F_A, D_A \Phi \rangle_2 = n. \quad (\text{B1.2})$$

Из предложения B1.1 видно, что как пространство $\mathcal{B}$, так и пространство $\mathcal{C}$ глобально являются "хорошими". Поскольку эти пространства задаются неявным образом, стоит отметить, что локально они также являются "хорошими".

Предложение B1.2. Пространства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ паракомпактны.

Доказательство предложения B1.2. Пространство $\Gamma(T^*) \times \mathfrak{su}(2) \times \Gamma(\text{Ad } P)$ паракомпактно, так же как и полуось $[0, \infty)$. Согласно лемме A4.1, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — замкнутые подмножества в $\Gamma(T^*) \times \mathfrak{su}(2) \times \Gamma(\text{Ad } P) \times [0, \infty)$. Отсюда следует, что они также паракомпактны. Действительно, если $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства $\mathcal{C}$, то по опреде-

лению существуют открытые в $\Gamma(T^*) \times \mathfrak{su}(2) \times \Gamma(\text{Ad } P) \times [0, \infty)$ множества U'_α , такие, что $U_\alpha = U'_\alpha \cap \mathbb{C}$ для каждого α . Дополним теперь покрытие $\{U'_\alpha\}$ до открытого покрытия пространства $\Gamma(T^*) \times \mathfrak{su}(2) \times \Gamma(\text{Ad } P) \times [0, \infty)$, добавляя дополнение пространства $\mathbb{C}$. Выберем локально конечное подпокрытие. Сужение этого подпокрытия на пространство $\mathbb{C}$ приводит к локально конечному измельчению исходного покрытия $\{U_\alpha\}$.

Заканчивая этот параграф, заметим, что у нас имеется еще остаточная подгруппа $SU(2)$ группы $\mathfrak{G}$, действие которой на пространстве $\mathbb{C}$ задается с помощью вложения группы $SU(2)$ в группу $\mathfrak{G}$ в виде постоянных отображений из $\mathbb{R}^3$ в $SU(2)$. Указанная группа $SU(2)$ действует также на пространстве $\text{Maps}(S^2, S^2)$ вращениями в образе S^2 . Оба эти действия группы $SU(2)$ эквивариантны относительно цепочки отображений $\text{Maps}(S^2, S^2) \xrightarrow{I} \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{C}$.

Группа $SU(2)$ действует на пространстве $\mathfrak{B}$ не свободно: в линейно связанной компоненте $\mathfrak{B}_0$ пространства $\mathfrak{B}$, содержащей образ I (отображения $S^2 \rightarrow S^2$ нулевой степени), имеются неподвижные точки. Указанное действие группы $SU(2)$ обсуждается далее в § B5.

B2. Вспомогательные топологии на пространствах $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{B}$

В процессе доказательства сходимости минимальных последовательностей для функционала $\mathcal{U}$ на пространстве $\mathbb{C}$ удобно ввести в $\mathbb{C}$ дополнительные топологии. Рассмотрим топологию пространства $\mathbb{C}$, индуцированную функционалом $\mathcal{U}^\delta$, $\delta \in [0, 1/2)$, имеющим вид

$$\mathcal{U}^\delta(A, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^3} [(1 + |x|^2)^\delta |F_A|^2(x) + |\nabla_A \Phi|^2(x)].$$

Областью определения функционала $\mathcal{U}^\delta$ является множество $\mathbb{C}^\delta = \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{U}^\delta(c) < \infty\}$. Так как функционал $\mathcal{U}^\delta$ инвариантен относительно группы $\mathfrak{G}$, то множество $\mathfrak{B}^\delta = \mathbb{C}^\delta / \mathfrak{G}_0$ корректно определено для каждого $\delta \in [0, 1/2)$. Множество $\mathbb{C}^\delta$ наделается индуцированной топологией с помощью отображения множества $\mathbb{C}^\delta$ в $\mathbb{C} \times [0, \infty)$, которое переводит элемент c

в элемент $(c, \mathcal{U}^\delta(c))$. Это же отображение задает топологию и на пространстве $\mathcal{B}^\delta$.

Заметим прежде всего, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ пересечение $\mathcal{C}_n^\delta = \mathcal{C}^\delta \cap \mathcal{C}_n$ не пусто. Это следует из того, что отображение I можно пропустить через $\mathcal{C}^\delta$ при $\delta \in [0, 1/2)$.

Связь между пространствами $\mathcal{C}^\delta$ и $\mathcal{C}$ устанавливается в следующих двух предложениях, описывающих образ вложения пространства $\mathcal{C}^\delta$ в пространство $\mathcal{C}$.

Предложение В2.1. Существуют непрерывные отображения $c_2: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $\hat{e}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Maps}(S^2, S^2)$ и $j: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}_0$, обладающие следующими свойствами:

(1) на пространстве $\text{Maps}(S^2, S^2)$ выполняются соотношения $c_2 \circ I = I$, $\hat{e} \circ I = \text{id}$ и $j \circ I = 1 \in \mathcal{G}_0$;

(2) отображение, ставящее в соответствие элементу $(t, c) \in [0, 1] \times \mathcal{C}^\delta$ элемент

$$r(t, c) = \begin{cases} c - 2t[c - c_2(c)] & \text{для } t \in [0, 1/2], \\ c_2(c) - (2t - 1)[c_2(c) - j(c)I(\hat{e}(c))] & \text{для } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

задает непрерывное отображение из $[0, 1] \times \mathcal{C}^\delta$ в $\mathcal{C}^\delta$ для любого $\delta \in [0, 1/2)$.

Предложение В2.2. Существует непрерывное отображение $\tau: [0, 1] \times [0, 1] \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, обладающее следующими свойствами: (1) τ непрерывно отображает пространство $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathcal{C}^\delta$ в $\mathcal{C}^\delta$ при любом $\delta \in [0, 1/2)$; (2) для любых $\varepsilon \in (0, 1]$ и $c \in \mathcal{C}$ имеем $\tau(\varepsilon, 0, c) = c$ и $\tau(\varepsilon, 1, c) \in \mathcal{C}^\delta$ при каждом $\delta \in [0, 1/2)$. На самом деле если $(A, \Phi) = \tau(\varepsilon, 1, c)$, то

$$|F_A|(x) + |V_A \Phi|(x) \leq \varepsilon(\varepsilon, c)(1 + |x|)^{-2};$$

(3) для любого $(\varepsilon, t, c) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathcal{C}$ справедлива оценка

$$|\mathcal{U}(\tau(\varepsilon, t, c)) - \mathcal{U}(c)| < \varepsilon$$

и при всяком $(t, c) \in [0, 1] \times \mathbb{C}$ имеем $\tau(0, t, c) = c$.

Доказательства этих предложений мы приведем в § В.4. Отображение τ будет определено в терминах отображений c_2 , $\hat{e}$ и j из предложения В2.1.

Доказательство предложения В1.1 на основе предложения В2.1. Из предложения В2.1 следует, что для $\delta \in [0, 1/2)$ каждое пространство $\mathbb{C}^\delta$ допускает ретракцию на подмножество множества $I(\text{Maps})$. Действительно, если $c \in \mathbb{C}$, то $r(1, c)$ равно $j(c)I(e(c))$, где $j(c) \in \mathfrak{G}_0$. Далее подгруппу $\mathfrak{G}_0$ можно деформировать в $1 \in \mathfrak{G}_0$; обозначим эту ретракцию через $G: [0, 1] \times \mathfrak{G}_0$. Тогда деформационная ретракция пространства $\mathbb{C}^\delta$ на множество $I(\text{Maps})$ задается следующим образом:

$$\begin{cases} r(2t, c) & \text{при } t \in [0, 1/2]; \\ G(t, j(c))I(e(c)) & \text{при } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Читатель заметит, что в предложении В2.2 описана деформационная ретракция пространства $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}^\delta$. Фактически в нем утверждается, что при $\delta \in [0, 1/2)$ пространство $\mathbb{C}^\delta$ плотно в $\mathbb{C}$, и (по крайней мере в том, что касается функционала $\mathcal{U}$) пространство $\mathbb{C}^\delta$ гомотопически аппроксимирует пространство $\mathbb{C}$ с любой желаемой точностью.

В3. Непрерывные отображения пространства $\mathbb{C}$

Основная цель этого параграфа состоит в доказательстве априорных оценок и свойств непрерывности для некоторых отображений пространства $\mathbb{C}$. Первое утверждение состоит в следующем.

Предложение В3.1. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$. Тогда отображение из пространства $\mathbb{C}^\delta$ в пространство

$$L^2(\text{Ad } P \otimes (\wedge_2 T^2 \oplus T^*)) \times L^6(\mathbb{R}^3).$$

ставящее в соответствие паре $c \in (A, \Phi)$ тройку

$((1 + |x|)^\delta F_A, \nabla_A \Phi, 1 - |\Phi|)$, непрерывно.

В последующих параграфах нам придется решать уравнение для $\bar{\Phi}$ с различной степенью точности. При этом возникают отображения из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, свойства которых составляют очередной предмет для исследования.

В предложении 4.8 работы [3] для каждого $c = (A, \bar{\Phi}) \in \mathbb{C}$ были установлены существование и единственность решения $c_0(c) = (A, \bar{\Phi}_0(c)) \in \mathbb{C}$, такого, что

$$\nabla_A^2 \bar{\Phi}_0(c) = 0 \quad (\text{ВЗ.1})$$

и $\bar{\Phi}_0(c) - \bar{\Phi} \in L^6(\text{Ad } P)$. При доказательстве сходимости процесса минимакса использовалось отображение $c_0(\cdot)$.

Повторяя доказательство предложения 4.8 работы [3], можно получить единственное решение $c_1(c) = (A, \bar{\Phi}_1(c))$, обладающее следующими свойствами:

$$\nabla_A^2 \bar{\Phi}_1(c) - [\bar{\Phi}, [\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_1(c)]] = 0 \quad (\text{ВЗ.2})$$

и $\bar{\Phi}_1(c) - \bar{\Phi} \in L^6(\text{Ad } P)$. Указанное решение $\bar{\Phi}_1(c)$ получается путем минимизации функционала

$$\|\nabla_A(\bar{\Phi} + (\cdot))\|_2^2 + \|[\bar{\Phi}, (\cdot)]\|_2^2$$

в классе сечений $\{\eta \in \Gamma(\text{Ad } P) : \|\nabla_A \eta\|_2^2 + \|[\bar{\Phi}, \eta]\|_2^2 < \infty \text{ и } |\eta| \in L^6(\mathbb{R}^3)\}$. Отображение $c_1(c)$ понадобится нам при доказательстве результатов в § 7.

С помощью аналогичных рассуждений устанавливается существование единственного гладкого решения $\bar{\Phi}_0'(c) \in L_{1;10c}^2(\text{Ad } P)$ уравнения (ВЗ.1) на множестве $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > 1\}$, которое удовлетворяет условию $\bar{\Phi}_0'(c) - \bar{\Phi} \in L^6(\text{Ad } P)$ и равно $\bar{\Phi}$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$. Указанное решение получается минимизацией функционала $\|\nabla_A(\bar{\Phi} + (\cdot))\|_2^2$ на множестве

$$\{\eta \in \Gamma(\text{Ad } P) : \|\nabla_A \eta\|_2^2 < \infty, |\eta| \in L^6(\mathbb{R}^3) \text{ и } \eta(x) = 0 \text{ при } |x| \leq 1\}.$$

Пусть β является срезавшей функцией, введенной в § АЗ. Положим

$$\bar{\Phi}_2(c)(x) = (1 - \beta(x/2))\bar{\Phi}_0'(c)(x) + \beta(x/2)\bar{\Phi}(x).$$

Определим отображение $c_2(c) = (A, \Phi_2(c))$ из пространства $\mathbb{C}$ в себя. Оно будет использоваться в § В5.

Предложение В3.2. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$. При каждом $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ отображение, сопоставляющее элементу $c \in \mathbb{C}^\delta$ элемент $c_\lambda(c) \in \mathbb{C}^\delta$, непрерывно.

Ввиду того что сечение $\Phi_\lambda(c)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, методом бутстрапа можно получить оценки для его вторых производных.

Предложение В3.3. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$. Пусть далее $\lambda = 0, 2$ и $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}^\delta$. Отображение, переводящее $c \in \mathbb{C}^\delta$ в сечение $(1 + |\alpha|)^\delta \nabla_A \nabla_A \Phi_\lambda(c) \in \Gamma(\text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*)$, является непрерывным отображением из $\mathbb{C}^\delta$ в $L^2(\text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*)$. Более того, априорная оценка L^2 -нормы сечения $(1 + |\alpha|)^\delta \nabla_A \nabla_A \Phi_0(c)$ целиком определяется значением функционала $\mathcal{Q}^\delta(A, \Phi_0(c))$.

Предложение В3.4. Пусть $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}$ и функционал $\Phi_1(c)$ определяется уравнением (В3.2). Отображение, переводящее элемент $c \in \mathbb{C}$ в сечение $\nabla_A \nabla_A \Phi_1(c)$, непрерывно в смысле L^2 с нормой, ограниченной априори значением функционала $\mathcal{Q}(c)$.

Следствие В3.5. Пусть $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}$. Пусть далее сечение $\Phi_\lambda(c)$ при $\lambda = 0, 1, 2$ удовлетворяет уравнению (В3.1). Отображение, сопоставляющее элементу c величину $1 - |\Phi_\lambda(c)| \in L^6(\mathbb{R}^3)$, является непрерывным отображением пространства $\mathbb{C}$ в пространство $L^6_1(\mathbb{R}^3)$ и, следовательно, в пространство $\bar{\mathbb{C}}^{0, 1/2}(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство предложения В3.1. По лемме А4.5 отображение, сопоставляющее элементу $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}^\delta$ пару $((1 + \alpha^2)^{\delta/2} F_A, \nabla_A \Phi) \in L^2$, непрерывно. Для доказательства непрерывности отображения $(A, \Phi) \in \mathbb{C} \rightarrow (1 - |\Phi|) \in L^6(\mathbb{R}^3)$ достаточно воспользоваться леммой А4.3.

Доказательство предложения В3.2. Это утверждение не зависит от значения $\delta \in [0, 1/2)$. Докажем сначала, что функционал $\mathcal{Q}(c_\lambda(c))$ непрерывно зависит от $c \in \mathbb{C}$. Непрерывность отображения $\Phi_\lambda(\cdot)$ в $\Gamma(\text{Ad } P)$ выводится методом бутстрапа.

Необходимо рассмотреть последовательности $\{c_i = (A_i, \Phi_i)\} \subset \mathbb{C}$. Удобно ввести обозначения $\nabla_i = \nabla_{A(c_i)}$, где $b = c_i$, и $\Phi_\lambda^i = \Phi_\lambda(c_i)$, $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Первый шаг состоит в доказательстве леммы:

Л е м м а ВЗ.6. Отображение $\mathcal{U}(c_\lambda(\cdot)): \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ непрерывно

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}$ положим $\Psi(c) = \Phi_0(c)$, $\Phi_1(c)$ или $\Phi'_0(c)$, когда $\lambda = 0, 1$ или 2 соответственно. Положим $\varphi(c) = \Psi(c) - \Phi$. По построению (см. предложение 4.8 работы [3]) $\varphi(c) \in L^6(\text{Ad } P)$ и $\nabla_A \varphi(c) \in L^2$. При $\lambda = 2$ сечение φ равно нулю в единичном шаре. Положим $\sigma = 0$, если $\lambda = 0$ или 2 , и $\sigma = 1$ при $\lambda = 1$.

Определим функцию $s(c) = \frac{1}{2} \|\nabla_A(\Phi + \varphi(c))\|_2^2 + \frac{1}{2} \sigma \|\Phi, \varphi(c)\|_2^2$. По построению (снова в силу предложения 4.8 работы [3]) выполняется неравенство

$$s(c) \leq \inf_{\eta \in \hat{\Gamma}} \left\{ \frac{1}{2} \|\nabla_A(\Phi + \eta)\|_2^2 + \frac{1}{2} \sigma \|\Phi, \eta\|_2^2 \right\},$$

где $\hat{\Gamma} = \Gamma_0(\text{Ad } P)$, если $\lambda = 0$ или 1 , и $\hat{\Gamma} = \{\eta \in \Gamma_0(\text{Ad } P): \eta(x) = 0 \text{ при } |x| \leq 1\}$, если $\lambda = 2$.

Для $\tau \in [1, \infty)$ положим $\beta_\tau(x) = \beta(x/\tau)$, где $\beta(x)$ — стандартная сглаживающая функция, введенная в § АЗ. Ввиду того что $\varphi(c) \in L^6$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau(\varepsilon) < \infty$, что

$$\|\nabla_A(\Phi + \beta_\tau \varphi(c))\|_2^2 + \lambda \|\Phi, \beta_\tau \varphi(c)\|_2^2 < s(c) + \varepsilon.$$

Так как $\beta_\tau \varphi(c) \in \hat{\Gamma}$, то существует некоторая окрестность $\mathcal{N}(\varepsilon) \subset \mathbb{C}$ элемента c , такая, что для всех $b \in \mathcal{N}(\varepsilon)$ имеем

$$s(b) \leq \|\nabla_{A(b)}(\Phi(b) + \beta_\tau \varphi(c))\|_2^2 + \lambda \|\Phi(b), \beta_\tau \varphi(c)\|_2^2 < s(c) + \varepsilon.$$

Следовательно, функция $s(\cdot): \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ полунепрерывна сверху.

Рассмотрим далее последовательность $\{c_i\} \subset \mathbb{C}$, которая сходится к c . Положим $\Psi^i = \Phi_0(c^i)$, $\Phi_1(c^i)$ или $\Phi'_0(c^i)$ при $\lambda = 0, 1$ или 2 . Последовательность $\{\nabla_i \varphi^i, \sigma[\Phi, \Psi^i]\}$ ограничена в L^2 , поэтому без потери общности можно считать, что она слабо сходится в L^2 к некоторой паре $(G_1, G_2) \in L^2((T^* \otimes \mathbb{R}) \otimes \text{Ad } P)$.

Так как L^2 -норма слабо полунепрерывна снизу, то

$$\|G_1\|_2 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla_i \Psi^i\|_2 \quad \text{и} \quad \|G_2\|_2 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma \|[\Phi_i, \Psi_i]\|_2. \quad (\text{ВЗ.3})$$

Если бы удалось показать, что $G_1 = \nabla_A \Psi(c)$ и $G_2 = \sigma [\Phi, \Psi(c)]$, то из неравенств (ВЗ.3) следовало бы, что функция $s: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ непрерывна. Но это означает (так как L^2 -нормы слабо полунепрерывны снизу), что оба отображения $\|\nabla_{A(\cdot)} \Psi(\cdot)\|_2$ и $\sigma \|[\Phi(\cdot), \Psi(\cdot)]\|_2$ из пространства $\mathbb{C}$ в полупрямую $[0, \infty)$ непрерывны. При $\lambda = 0, 1$ отсюда вытекает утверждение леммы ВЗ.6. При $\lambda = 2$ утверждение леммы можно получить путем использования леммы А4.1 для доказательства непрерывности отображения $\Phi_2(\cdot) - \Phi(\cdot)$ по норме пространства $L^6(\text{Ad } P)$.

Подводя итог предыдущих рассуждений, докажем лемму, из которой следует лемма ВЗ.6:

Л е м м а ВЗ.7. Если последовательность $\{c_i\} \subset \mathbb{C}$ сходится к $c \in \mathbb{C}$, то последовательность $(\nabla_i \Psi^i, \sigma [\Phi_i, \Psi^i])$ слабо сходится в L^2 к $(\nabla_A \Psi, \sigma [\Phi, \Psi])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varphi^i = \Psi^i - \Phi_i$. Так как справедливо неравенство $\|\nabla_i \varphi^i\|_2^2 \leq 2\mathcal{U}(c_i)$, то последовательность $\{\nabla_i \varphi^i\}$ равномерно ограничена на L^2 и, значит, последовательность $\{\varphi^i\}$ равномерно ограничена в L^6 (ср. с леммой А4.1). Поэтому последовательность $\{\varphi^i\}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся в L^6 к некоторому сечению η , принадлежащему пространству $L^6 \cap L^2_{1, \text{loc}}$ (так как последовательность связностей A_i сходится к связности A в C^∞ на любой компактной области в $\mathbb{R}^3$). Таким образом, для любого $\xi \in \Gamma_0(T^* \otimes \text{Ad } P)$ последовательность $\{\langle \xi, \nabla_{A_i} \varphi^i \rangle_2\}$ имеет предел, равный $\langle \xi, \nabla_A \eta \rangle_2$. Следовательно, производная $\nabla_A \eta$ является слабым L^2 -пределом последовательности $\{\nabla_i \varphi^i\}$. Аналогично можно доказать, что сечение $\sigma [\Phi, \eta]$ является слабым L^2 -пределом последовательности $\sigma [\Phi_i, \varphi^i]$.

Из сходимости последовательности $\{\varphi^i\}$ к сечению η с учетом равенства

$$0 = \langle \nabla_i \xi, \nabla_i \Psi^i \rangle_2 + \sigma \langle [\Phi_i, \xi], [\Phi_i, \Psi^i] \rangle_2$$

вытекает, что

$$0 = \langle \nabla_A \xi, \nabla_A (\Phi + \eta) \rangle_2 + \sigma \langle [\Phi, \psi], [\Phi, \eta] \rangle_2.$$

Ввиду того что сечение $\varphi(c)$ определяется единственным образом, из последнего равенства вытекает, что $\eta = \varphi(c)$. Этим доказывается утверждение леммы ВЗ.7.

В качестве следующего шага рассмотрим свойство непрерывности отображения $\Phi_\lambda(\cdot)$ в пространство $\Gamma(\text{Ad } P)$ при $\lambda = 0, 1, 2$.

Л е м м а ВЗ.8. Для $\lambda = 0, 1, 2$ отображение $\Phi_\lambda(\cdot): \mathcal{C} \rightarrow \Gamma(\text{Ad } P)$ непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из непрерывности функционала $\mathcal{U}(c_\lambda(\cdot)): \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ и лемм А4.5 и ВЗ.7 следует, что отображение $(\nabla_A \Phi_\lambda)(\cdot): \mathcal{C} \rightarrow L^2$ непрерывно. Тем самым отображение $(\nabla_A \varphi)(\cdot)$ непрерывно в L^2 . Вследствие леммы А4.1 функция $(1+|x|)^{-1}|\varphi(\cdot)|$ равномерно ограничена в L^2 . Тогда из лемм А4.1 и А4.5 следует, что отображение $(1+|x|)^{-1}\varphi(\cdot)$ непрерывно в L^2 , и, значит, отображение $\varphi(\cdot)$ непрерывно в L^2_{loc} . По лемме А4.3 отображение $\varphi(\cdot)$ непрерывно в $L^2_{1, \text{loc}}$. Непрерывность отображения $\varphi(\cdot)$ в пространстве $\Gamma(\text{Ad } P)$ следует теперь из бутстрапных рассуждений, приведенных в [17, гл.6]. Этой леммой завершается доказательство предложения ВЗ.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения ВЗ.3. Доказательства для $\Phi_0(\cdot)$ и $\Phi_2(\cdot)$ проводятся аналогично, поэтому рассмотрим только случай $\Phi_0(\cdot)$.

В соответствии с предложением 4.8 работы [3] норма $\|\Phi_0\|_\infty = 1$, поэтому применима теорема В8.1 из работы [5]. Эта теорема утверждает, что сечение $\nabla_A \nabla_A \Phi_0 \in L^2(\text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*)$ и априорная оценка нормы целиком определяются значением функционала $\mathcal{U}((A, \Phi_0))$. Указанная оценка доказывается дифференцированием уравнения (ВЗ.1), что приводит к соотношению

$$\nabla_A^* \nabla_A (\nabla_A \Phi_0) = -[*F_A, \nabla_A \Phi_0] + *D_A [*F_A, \Phi_0]. \quad (\text{ВЗ.4})$$

Пусть β_χ — срезанная функция из § А.3, $\chi < \infty$. Положим $\sigma = (1 + \beta_\chi x^2)$. Предположим, что $c_0 = (A, \Phi_0) \in \mathcal{C}^\sigma$, где $\sigma \in [0, 1/2)$. Тогда из (ВЗ.4) получаем

$$\begin{aligned} \nabla_A^* \sigma^{\delta} \nabla_A (\nabla_A \Phi_0) = & -\sigma^{\delta} * [F_A, \nabla_A \Phi_0] + * D_A [\sigma^{\delta} F_A, \Phi_0] + \\ & + \delta \sigma^{\delta-1} (d\sigma, \nabla_A) \nabla_A \Phi_0 - \delta \sigma^{\delta-1} * (d\sigma \wedge [F_A, \Phi_0]). \quad (B3.5) \end{aligned}$$

Умножая далее обе части равенства (B3.5) на $\nabla_A \Phi_0$ и интегрируя по пространству $\mathbb{R}^3$, получим уравнение

$$\begin{aligned} \|\sigma^{\delta/2} \nabla_A \nabla_A \Phi_0\|_2^2 = & -\langle \sigma^{\delta} F_A, [\nabla_A \Phi_0, \nabla_A \Phi_0] \rangle_2 + \|\sigma^{\delta/2} [F_A, \Phi_0]\|_2^2 + \\ & + \delta \langle \nabla_A \Phi_0, \sigma^{\delta-1} (d\sigma, \nabla_A) \nabla_A \Phi_0 \rangle_2 - \delta \langle \sigma^{\delta-1} F_A, [\Phi_0, \nabla_A \Phi_0] \wedge d\sigma \rangle_2. \quad (B3.6) \end{aligned}$$

Все члены, стоящие в правой части этого уравнения, за исключением первого, равномерно ограничены при $\varkappa \rightarrow \infty$; действительно, при $\delta < 1/2$ справедлива оценка $|d\sigma| \sigma^{\delta-1} < \varkappa$, не зависящая от $\varkappa$.

Для получения оценки первого члена заметим, во-первых, что в силу неравенства Гёльдера

$$|\langle \sigma^{\delta} F_A [\nabla_A \Phi_0, \nabla_A \Phi_0] \rangle_2| \leq \|\sigma^{\delta/2} F_A\|_2 \|\nabla_A \Phi_0\|_2^{1/2} \|\sigma^{\delta/3} \nabla_A \Phi_0\|_2^{3/2}.$$

Во-вторых, по лемме 4.1 для некоторого $\varkappa^{-1}(\delta) < \infty$ справедливо неравенство

$$\|\sigma^{\delta/3} \nabla_A \Phi_0\|_2^{3/2} \leq \varkappa^{-1} \|\nabla_A \sigma^{\delta/3} \nabla_A \Phi_0\|_2^{3/2}.$$

В-третьих, поскольку $|d\sigma^{\delta/3}| \leq \varkappa(\delta)$ при некотором $\varkappa(\delta)$, имеет место неравенство

$$\|\nabla_A \sigma^{\delta/3} \nabla_A \Phi_0\|_2^{3/2} \leq \varkappa' (\|\sigma^{\delta/3} \nabla_A \nabla_A \Phi_0\|_2^{3/2} + \|\nabla_A \Phi_0\|_2^{3/2}).$$

Наконец, пользуясь тем, что $\sigma^{\delta/3} \leq \sigma^{\delta/2}$, получаем

$$\begin{aligned} |\langle \sigma^{\delta} F_A, [\nabla_A \Phi_0, \nabla_A \Phi_0] \rangle_2| \leq & \frac{1}{2} \|\sigma^{\delta/2} \nabla_A \nabla_A \Phi_0\|_2^2 + \\ & + \varkappa(\delta) (\|\nabla_A \Phi_0\|_2^2 + \|\sigma^{\delta/2} F_A\|_2^4 \|\nabla_A \Phi_0\|_2^2). \quad (B3.7) \end{aligned}$$

Из неравенств (B3.6) и (B3.7) вытекает, что сечение $\sigma^{\delta/2} \nabla_A \nabla_A \Phi_0$ равномерно ограничено в $L^2(\text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*)$ независимо от значе-

ния γ и, следовательно, $(1+x^2)^{\delta/2} \nabla_A \nabla_A \Phi_0 \in L^2$.

Для доказательства непрерывности соответствия между $s = (A, \Phi) \in \mathcal{C}$ и $(1+x^2)^{\delta/2} \nabla_A \nabla_A \Phi_0 \in L^2$ нужно воспользоваться леммами А4.5 и А4.6. С помощью леммы А4.6 прямым рассуждением (воспользовавшись леммой А4.1) можно показать, что предел правой части неравенства (В3.6) при $\gamma \rightarrow \infty$ является непрерывной функцией. Тогда норма $\|(1+x^2)^{\delta/2} \nabla_A \nabla_A \Phi_0\|_2$ также непрерывна, и из леммы А4.5 следует, что сечение $(1+x^2)^{\delta/2} \nabla_A \nabla_A \Phi_0$ непрерывно зависит в L^2 -норме от пары $(A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$.

Доказательство предложения В3.4. Доказательство проводится по существу теми же рассуждениями, что и в предложении В3.3. Потребуется одно дополнительное утверждение. Оно состоит в том, что соответствие между s и $\|[\Phi, [\Phi, \Phi_1(s)]]\|_2$ является непрерывным. Для того чтобы доказать этот факт, необходимо проверить прежде всего непрерывность функции $\|[\Phi, \Phi_1(\cdot)]\|_2: \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$. (Она была установлена при доказательстве леммы В3.6.)

Этот факт используется для доказательства непрерывности $\|[\Phi, \Phi_1(\cdot)]\|_6$. Приведем соответствующее рассуждение. Пусть задана область $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Тогда

$$\begin{aligned} \|[\Phi, \Phi_1]\|_{6; \Omega} &\leq \| |\Phi|^2 [\Phi, \Phi_1] \|_{2; \Omega}^{1/3} \leq \\ &\leq 2 \|[\Phi, \Phi_1]\|_{2; \Omega}^{1/3} + 2 \|(1-|\Phi|)^2 [\Phi, \Phi_1]\|_{2; \Omega}^{1/3} \leq \\ &\leq 2 \|[\Phi, \Phi_1]\|_{2; \Omega}^{1/3} + 2 \|(1-|\Phi|)\|_{6; \Omega}^{2/3} \|[\Phi, \Phi_1]\|_{6; \Omega}^{1/3}. \quad (\text{В3.8}) \end{aligned}$$

(Мы воспользовались тем, что $\|\Phi_1\|_\infty = 1$.) С помощью неравенства Минковского из (В3.8) получаем окончательное неравенство

$$\|[\Phi, \Phi_1]\|_{6; \Omega} \leq 6 \|[\Phi, \Phi_1]\|_{2; \Omega}^{1/3} + 4 \|(1-|\Phi|)\|_{6; \Omega}. \quad (\text{В3.9})$$

Таким образом, выбирая в качестве области Ω последовательно шары в $\mathbb{R}^3$ радиусов 1, 2, ... и т.д., выведем равномерную оценку нормы $\|[\Phi, \Phi_1]\|_6$ величиной $\mathcal{U}(s)$. Выбирая в качестве области Ω внешность шара радиуса $r < \infty$, получим с помощью леммы А4.6, что функция $\|[\Phi, \Phi_1(\cdot)]\|_6: \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ также непрерывна.

Заметим далее, что для любой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \|[\Phi, [\Phi, \Phi_1]]\|_{2; \Omega} &\leq \|[\Phi, \Phi_1]\|_{2; \Omega} + \|(1 - |\Phi|)|[\Phi, \Phi_1]|\|_{2; \Omega} \leq \\ &\leq \|[\Phi, \Phi_1]\|_{2; \Omega} + \|1 - |\Phi|\|_{6; \Omega} \|[\Phi, \Phi_1]\|_{6; \Omega}^{1/2} \|[\Phi, \Phi_1]\|_{2; \Omega}^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому, применяя к функции $\|[\Phi, [\Phi, \Phi_1]]\|_2$ те же рассуждения, что и для функции $\|[\Phi, \Phi_1]\|_6$, докажем равномерную оценку и непрерывность функции $\|[\Phi, [\Phi, \Phi_1(\cdot)]]\|_2$ на пространстве $\mathbb{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия ВЗ.5. В предложениях ВЗ.3 и ВЗ.4 утверждается, что при $\lambda = 0, 1$ соответствие между $s = (A, \Phi) \in \mathbb{C}$ и $\nabla_A \nabla_A \Phi_\lambda(s) \in L^2$ непрерывно. Поэтому для доказательства следствия можно воспользоваться предложением ВЗ.2 и леммой А4.4.

В4. Ретракция пространства $\mathbb{C}$

В этом параграфе доказываются предложения В2.1 и В2.2 путем построения отображений e, j и r , упомянутых в § В2. Начнем с отображения e . Для его определения воспользуемся отображением $c_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ из предложения ВЗ.2. Согласно этому предложению, c_2 непрерывно отображает пространство $\mathbb{C}^\delta$ в пространство

$$\mathcal{L}^\delta = \{s \in \mathbb{C}^\delta: (1 + |x|)^\delta \nabla_A (\nabla_A \Phi) \in L^2(\text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*)\}. \quad (\text{В4.1})$$

При этом топология пространства $\mathcal{L}^\delta$ вводится с помощью отображения, сопоставляющего элементу $(A, \Phi) \in \mathcal{L}^\delta$ тройку

$$(A, \Phi, (1 + |x|)^\delta |\nabla_A (\nabla_A \Phi)|) \in \mathbb{C}^\delta \times L^2(\mathbb{R}^3).$$

Пространство $\mathcal{L}^\delta$ обладает рядом важных свойств, заслуживающих того, чтобы, отвлекаясь на время от основной темы, перечислить их здесь. Первое содержится в следующей лемме.

Л е м м а В4.1. Отображение, сопоставляющее паре $(A, \Phi) \in \mathcal{L}^\delta$ величину $(1 - |\Phi|)$, является непрерывным отображением из $\mathcal{L}^\delta$ в $\bar{C}^{0, 1/2}(\mathbb{R}^3)$, причем его норма ограничена априори величиной, определяемой нормами $\|\nabla_A(\nabla_A \Phi)\|_2$ и $\|\nabla_A \Phi\|_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По сути лемма является следствием леммы А4.4.

Если пара $(A, \Phi) \in \mathcal{L}^\delta$, то в силу леммы В4.1 функция $1 - |\Phi|(\cdot)$ равномерно стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Следовательно, существует число $R(A, \Phi) \in [1, \infty)$, обладающее тем свойством, что $|\Phi(x)| > 1/2$ при $|x| > R(A, \Phi)$. Если пара $(A', \Phi') \in \mathcal{L}^\delta$ достаточно близка к паре (A, Φ) , это же неравенство справедливо и для Φ' при $|x| > R(A, \Phi)$. Нам хотелось бы, чтобы константа $R(\cdot)$ непрерывно зависела от точки $\mathcal{L}^\delta$. Следующая лемма утверждает, что этого легко добиться подходящим выбором $R(\cdot)$.

Л е м м а В4.2. Существует непрерывная $\mathcal{G}$ -эквивариантная функция $R(\cdot): \mathcal{L}^\delta \rightarrow [1, \infty)$, такая, что при $|x| > R(A, \Phi)$ выполняется неравенство $|\Phi|(x) > 1/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы В4.2. Нам понадобится следующее утверждение.

Л е м м а В4.3. Пусть X -топологическое пространство. Предположим, что функция $f: [0, 1] \times X \rightarrow [0, 1]$ непрерывна и обладает тем свойством, что при фиксированном $y \in X$ функция $f(\cdot, y)$ не убывает на интервале $[0, 1]$ и $f(0, y) = 0$. Тогда существует непрерывная функция $\rho: [0, 1] \times X \rightarrow [0, 1]$, которая при каждом $y \in X$ удовлетворяет следующим условиям: $\rho(0, y) = 0$, функция $\rho(\cdot, y)$ возрастает и $f(\rho(\varepsilon, y), y) < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы В4.2 с применением леммы В4.3. Применим предыдущую лемму к функции $f: [0, 1] \times \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$, задаваемой выражением

$$f(\rho, (A, \Phi)) = 1 - \min \left(\inf_{|x| > 1/\rho} |\Phi|(x), 1 \right).$$

Ее непрерывность следует из леммы В4.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы В4.3. Пусть ρ обозначает сглаживающую функцию из § А3. Положим тогда

$$\rho(\epsilon, y) = \int_0^\epsilon dt \, \rho(\epsilon^{-1} f(t, y)).$$

Функция ρ обладает требуемыми свойствами по следующим соображениям. Во-первых, $\rho(\epsilon, y) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$ и предел локально равномерен по y . Во-вторых, носитель функции $\rho(\epsilon^{-1} f(t, y))$ содержится в открытом связном множестве $\{t \in [0, 1]: f(t, y) < \epsilon\}$, содержащем точку 0. Так как $\rho \leq 1$, то значения функции $\rho(\epsilon, y)$ принадлежат этому множеству. Наконец, $\rho(\cdot, y) \neq 0$ и $(\partial \rho / \partial \epsilon)(\epsilon, y) \geq 0$.

При $c = (A, \Phi) \in \mathcal{L}^\delta$ функция $|\Phi|(x)$ равномерно стремится к 1 при $|x| \rightarrow \infty$. Следовательно, каждое такое сечение Φ задает расщепление расслоения $\text{Ad } P$ над множеством $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| > R(c)\}$ в прямую сумму подрасслоений $L \oplus \mathbb{R}$, где образ вложения $\mathbb{R}$ в слой $\text{Ad } P_x$ порождается вектором $\Phi(x)$. Полезно разложить связность A в соответствии с этим расщеплением. С этой целью положим $\kappa = \kappa(c) = 2R(c)$, $\hat{\Phi} = \Phi/|\Phi|$ и запишем A в виде

$$A = \alpha \hat{\Phi} + \alpha^T - (1 - \beta_\kappa) [\hat{\Phi}, d\hat{\Phi}] + \beta_\kappa A, \quad (\text{В4.2})$$

где

$$\alpha^T(c) = (1 - \beta_\kappa) [\hat{\Phi}, [A, \hat{\Phi}]] + (1 - \beta) [\hat{\Phi}, d\hat{\Phi}], \quad (\text{В4.3})$$

$$\alpha(c) = (1 - \beta_\kappa) (-2 \text{Tr}_{\mathfrak{g}_2}(\hat{\Phi} A)).$$

В силу лемм В4.1-2 отображение, сопоставляющее элементу $c \in \mathcal{L}^\delta$ пару

$$(\alpha(c), \alpha^T(c)) \in \Gamma(T^*) \otimes \Gamma(\text{Ad } P \otimes T^*),$$

непрерывно. $\text{Ad } P$ -значная 1-форма α^T обладает перечисленными ниже свойствами.

Л е м м а В4.4. Отображение, сопоставляющее элементу $(A, \Phi) \in \mathcal{L}^\delta$ пару $(\alpha^T, (1 + |x|)^\delta \nabla_A \alpha^T)$ и задаваемое формулами (В4.2,3).

является непрерывным отображением из пространства $\mathcal{L}^\delta$ в пространство

$$[\Gamma(\text{Ad } P \otimes T^*) \cap L^2(\text{Ad } P \otimes T^*)] \times L^2(\text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*).$$

Доказательство. Заметим вначале, что при $|x| > \varkappa$ выполняется равенство

$$|\Phi|^{-2} [\Phi, \nabla_A \Phi] = \alpha^T. \quad (\text{B4.4})$$

Поэтому из лемм A4.6 и B4.1,2 следует, что отображение $(A, \Phi) \rightarrow \alpha^T$ из пространства $\mathcal{L}^\delta$ в пространство $L^2(\text{Ad } P \otimes T^*)$ непрерывно.

Дифференцируя равенство (B4.4), получаем

$$\begin{aligned} -2|\Phi|^{-4} (-2 \text{Tr}_{\mathbb{C}^2} (\Phi \nabla_A \Phi)) [\Phi, \nabla_A \Phi] + |\Phi|^{-2} [\nabla_A \Phi, \nabla_A \Phi] + \\ + |\Phi|^{-2} [\Phi, \nabla_A (\nabla_A \Phi)] = \nabla_A \alpha^T. \end{aligned} \quad (\text{B4.5})$$

Для некоторой области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ из неравенства Гёльдера следует, что

$$\|(1+|x|)^\delta |\nabla_A \Phi|^2\|_{2;\Omega}^2 \leq \|\nabla_A \Phi\|_{2;\Omega} \|(1+|x|)^\delta \nabla_A \Phi\|_{6;\Omega}.$$

Из последнего неравенства, пользуясь леммами A4.1, A4.4 и A4.6, получаем, что сечение $(1+|x|)^\delta \nabla_A \alpha^T$ непрерывно по норме $L^2(\text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*)$.

Для того чтобы проследить за сечением $\alpha(A, \Phi)$ из формулы (B4.3), необходимо выбрать калибровку. Это можно сделать ввиду стягиваемости подгруппы $\mathcal{G}_0$. При этом калибровку можно выбрать так, чтобы выполнялись свойства, перечисленные в следующей лемме.

Л е м м а B4.5. Существует непрерывное отображение $g: \mathcal{L}^\delta \rightarrow \mathcal{G}_0$, обладающее следующими свойствами:

(1) на множестве $I(\text{Maps})$ функция $g = 1 \in \mathcal{G}_0$;

(2) пусть $c = (A, \Phi) \in \mathcal{L}^\delta$. Тогда в области $|x| > 2R(c)$ справедливо соотношение

$$\hat{\Phi}(g(c) \cdot c)(x) = (g(c) \hat{\Phi}(c) g^{-1}(c))(x) = \hat{\Phi}(2R(c) \hat{x});$$

(3) отображение, сопоставляющее элементу $c \in \mathcal{L}^\delta$ вещественную 1-форму $\alpha(g(c) \cdot c)$ из формулы (B4.3), порождает посредством

$$c \mapsto (1 + |x|)^\delta (\alpha(g(c) \cdot c), \nabla \alpha(g(c) \cdot c))$$

непрерывное отображение пространства $\mathcal{L}^\delta$ в пространство $[\Gamma(T^*) \cap L^6(T^*)] \times L^2(T^* \otimes T^*)$.

Доказательство. Задавая C^∞ -топологию на соответствующих функциональных пространствах, получим, что отображение

$$\begin{array}{c} \text{Maps}(S^2, SU(2)) \times \text{Maps}(S^2, S^2) \\ \downarrow \tau \\ \text{Maps}(S^2, S^2) \times \text{Maps}(S^2, S^2) \end{array} \quad (B4.3)'$$

определяет главное расслоение со слоем $\text{Maps}(S^2, S^1)$. Отображение T переводит пару (h, ϕ) в пару $(h\phi h^{-1}, \phi)$. Множество $\text{Maps}(S^2, S^1)$ отождествляется со слоем над точкой (ϕ, ϕ) посредством отображения, сопоставляющего элементу

$$\exp(\sqrt{-1} \phi) \in \text{Maps}(S^2, S^1)$$

пару $(\exp(\phi), \phi)$ в пространстве $\text{Maps}(S^2, SU(2)) \times \text{Maps}(S^2, S^2)$.

Непрерывное отображение (ℓ, ℓ') пространства $\mathcal{L}^\delta$ в пространство, участвующие в диаграмме (B4.3)', задается диаграммой соответствия для элемента $c = (A, \Phi)$:

$$\begin{array}{ccc} & (1, \hat{\Phi}(2R(c)\hat{x})) & \\ \nearrow \ell' & \downarrow \tau & \\ \mathcal{L}^\delta \xrightarrow{\ell} & (\hat{\Phi}(2R(c)\hat{x}), \hat{\Phi}(2R(c)\hat{x})) & \end{array} \quad (B4.4)'$$

где $\hat{\Phi} = \Phi/|\Phi|$, $\hat{x} = x/|x|$ и $T \circ \ell' = \ell$. Отметим, что эта диаграмма коммутативна.

Определим гомотопию отображения l , т.е. отображение $\varphi: [1, \infty) \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \text{Maps}(S^2, S^2) \times \text{Maps}(S^2, S^2)$, сопоставляя паре $(t, c = (A, \Phi))$ пару

$$(\hat{\Phi}(tR(c)\hat{x}), \hat{\Phi}(R(c)\hat{x})). \quad (B4.5)'$$

Существование поднятия φ' гомотопии φ , коммутирующего с отображением T , гарантируется свойством накрывающей гомотопии расслоения [18]. Нет никаких препятствий к тому, чтобы выбрать гомотопию φ' , так, чтобы она удовлетворяла соотношению $\varphi'(t, I(e)) = (1, e(\hat{x}))$ при $e \in \text{Maps}(S^2, S^2)$ и $t \in [1, \infty)$.

Пусть $\pi_1: \text{Maps}(S^2, SU(2)) \times \text{Maps}(S^2, S^2) \rightarrow \text{Maps}(S^2, SU(2))$ — проекция на первый сомножитель. Тогда $g' = \pi_1 \circ \varphi'$ непрерывно отображает $[1, \infty) \times \mathbb{R}^5$ в $\text{Maps}(S^2, SU(2))$ и удовлетворяет условию $g'(1, c) = 1 \in SU(2)$.

Свойство накрывающей гомотопии позволяет продолжить отображение g' до отображения $g_1: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathfrak{G}_0$, удовлетворяющего при $|x| \geq 2R(c)$ условию

$$g_1(c)(x) = g'\left(\frac{|x|}{2R(c)}, c\right)\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

и обладающего свойством $g_1(c) = 1 \in \mathfrak{G}_0$, когда $c \in I(\text{Maps})$.

Отображение g , фигурирующее в лемме, будет иметь вид $g = h \cdot g_1$. Для того чтобы определить функцию h , нам потребуется следующее утверждение:

Л е м м а В4.6. Отображение, сопоставляющее элементу $c \in \mathbb{R}^5$ сечение $\alpha(g_1(c) \cdot c) \in \Gamma(T^*)$, порождает непрерывное отображение

$$c \mapsto (1 + |x|)^5 d\alpha(g_1(c) \cdot c)$$

из пространства $\mathbb{R}^5$ в пространство $L^2(\wedge T^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $|x| \geq 2R(c)$ сечение $\hat{\Phi}(g_1(c) \cdot c)(x) = b(x)$ зависит только от отношения $\hat{x} = x/|x|$. Следовательно, $|db| \leq \text{const}|x|^{-1}$. Пусть $\alpha_1^T = \alpha^T(g_1(c) \cdot c)$. Положим $g_1(c) \cdot c = (A, \Phi)$. Тогда при $|x| \geq 2R(c)$

$$d\alpha(g_1(c) \cdot c) = (\sigma, F_A) + 4 \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^2} (d\sigma \wedge \alpha_1^T) + \\ + (\sigma, d\sigma \wedge d\sigma) - (\sigma, \alpha_1^T \wedge \alpha_1^T),$$

где $(\alpha, \beta) = -2 \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^2}(\alpha, \beta)$ для $\alpha, \beta \in \mathfrak{su}(2)$.

Непрерывность отображения $(1 + |\alpha|)^{\delta} d\alpha(g_1(c) \cdot c)$ следует теперь из лемм А4.5 и В4.4.

Для завершения построения отображения g из леммы В4.5 воспользуемся доказанной леммой. Заметим, что по теореме Ходжа для пространства $\mathbb{R}^3$ (см. предложение 7.6 из [4] или [19]) существует единственное сечение $A^L \in \Gamma(T^*) \cap L^6$ с $\nabla A^L \in L^2(T^* \otimes T^*)$, удовлетворяющее условиям $d * A^L = 0$ и $dA^L = d\alpha(g_1(c) \cdot c)$. В доказательстве существования неявно содержится утверждение о непрерывной зависимости сечения $A^L \in \Gamma(T^*) \cap L^6$ и его производной $\nabla A^L \in L^2(T^* \otimes T^*)$ от точки $c \in \mathcal{L}^{\delta}$. Если воспользоваться леммой В4.6 и рассуждениями, примененными при доказательстве предложения В3.2, можно убедиться в том, что соответствие $c \in \mathcal{L}^{\delta} \rightarrow (1 + |\alpha|)^{\delta} (A^L(c), \nabla A^L(c))$ определяет непрерывное отображение из $\mathcal{L}^{\delta}$ в $L^6(T^*) \cap L^2(T^* \otimes T^*)$.

Применение леммы Пуанкаре в пространстве $\mathbb{R}^3$ позволяет построить функцию $\Lambda(c) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющую соотношению $d\Lambda(c) = \alpha(g_1(c) \cdot c) - A^L(c)$. При условии что $\Lambda(c)(0) = 0$, функция $\Lambda(c)$ однозначно определяется элементом $c \in \mathcal{L}^{\delta}$ и отображение $c \in \mathcal{L}^{\delta} \rightarrow \Lambda(c) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ непрерывно.

Положим теперь

$$h(c) = \exp\left(\frac{1}{2} \Lambda(c)(1 - \beta_{K(c)}) \hat{\Phi}(g_1(c) \cdot c)\right). \quad (\text{В4.6})$$

Тогда по определению $g(c) = h(c) \cdot g_1(c)$. Отображение g является непрерывным отображением из $\mathcal{L}^{\delta}$ в группу $\mathfrak{G}_0$ и удовлетворяет условиям леммы В4.5. Действительно, $\alpha(g(c) \cdot c) = A^L(c)$ в области $|\alpha| \geq 2R(c)$. Следовательно, условия (2) и (3) леммы В4.5 выполнены. Что касается условия (1), то напомним, что отображение g_1 тождественно равно $\mathbb{I}$ на множестве $I(\text{Maps})$, в то время как $\alpha(\cdot)$ на $I(\text{Maps})$ тождественно равно нулю. Следовательно, $\Lambda|_{I(\text{Maps})} = 0$ и $g|_{I(\text{Maps})} = \mathbb{I}$, как и требовалось.

Прежде чем доказывать предложение В2.2, дадим определения отображений e и j . Зададим отображение $\hat{e}: \mathbb{C} \rightarrow \text{Maps}(S^2, S^2)$, полагая

$$\hat{e}(c)(\hat{x}) = \hat{\Phi}(c_2(c))(2R(c_2(c))\hat{x}). \quad (\text{В4.7})$$

Отображение $j: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{G}_0$ зададим формулой

$$j(c) = g^{-1}(c_2(c)), \quad (\text{В4.8})$$

где $g(\cdot): \mathcal{X}^{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{G}_0$ определено леммой В4.5.

Доказательство предложения В2.1. Для доказательства условия (1) заметим, что по построению $c_2(I(e)) = I(e)$, так как производная $(\nabla_A \Phi)(I(e))$ равна нулю на $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| \geq 1\}$. По этой причине при всех $\hat{x} \in S^2$ выполняется равенство

$$\hat{e}(I(e))(\hat{x}) = \hat{\Phi}(I(e))(2R(I(e))\hat{x}) = e(\hat{x}).$$

Кроме того, по лемме В4.5 $j(I(e)) = g^{-1}(I(e)) = 1 \in \mathfrak{G}_0$. Для доказательства условия (2) заметим, что

$$c - c_2(c) = (0, \Phi(c) - \Phi_2(c)). \quad (\text{В4.9})$$

Тем самым из предложений В3.1 и В3.2 следует, что отображение $\mathfrak{r}(\cdot)$ является непрерывным отображением из пространства $[0, 1/2] \times \mathbb{C}^{\mathfrak{g}}$ в пространство $\mathbb{C}^{\mathfrak{g}}$. Для доказательства непрерывности $\mathfrak{r}$ на множестве $[1/2, 1] \times \mathbb{C}^{\mathfrak{g}}$ заметим, что при $t \in [1/2, 1]$

$$\mathfrak{r}(t, c) = j(c)[g \cdot c_2 - (2t - 1)(g \cdot c_2 - I(\hat{e}))],$$

где $c_2 = c_2(c)$, $\hat{e} = \hat{e}(c)$ и $g = g(c_2(c))$. Необходимо помнить, что $c_2(c_2(c)) = c_2(c)$, поэтому $\hat{e}(c_2(c)) = \hat{e}(c)$. При $|x| > 2R(c_2)$ выполняется соотношение

$$g \cdot c_2 - I(\hat{e}) = (\alpha(g \cdot c_2)\hat{e} + \alpha^T(g \cdot c_2), (|\Phi(c_2)| - 1)\hat{e}). \quad (\text{В4.10})$$

Следовательно, непрерывность $\hat{c}$ как отображения из $[1/2, 1] \times \mathbb{C}^\delta$ в $\mathbb{C}^\delta$ следует из неравенства Гёльдера и лемм В4.2, В4.4 и В4.5. Читатель может проделать необходимые выкладки.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения В2.2. Для элемента $(\rho, t, c) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{C}$ положим

$$\hat{c}(\rho, t, c) = \begin{cases} c - 2t(1 - \beta_{1/\rho})[c - c_2] & \text{при } t \in [0, 1/2], \\ c_2 - (2t - 1)(1 - \beta_{2/\rho})[c_2 - j(c)I(\hat{e})] + \beta_{1/\rho}[c - c_2] & \text{при } t \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (\text{В4.11})$$

Ввиду того что функция $(1 - \beta_{1/\rho})$ имеет носитель в области $|x| > 1/\rho$, при $\rho \rightarrow 0$ сечение $\hat{c}(\rho, t, c)$ сходится к c в пространстве $C^\infty(\Omega)$ для любой ограниченной области Ω в $\mathbb{R}^3$. Эта сходимость локально равномерна относительно $(t, c) \in [0, 1] \times \mathbb{C}$. Независимо от значения ρ выполняется равенство $\hat{c}(\rho, 0, c) = c$.

На множестве $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| > 2/\rho\}$ имеем $\hat{c}(\rho, 1, c) = j(c)I(\hat{e}(c))$, поэтому при $\rho > 0$ и $(A, \Phi) = \hat{c}(\rho, 1, c)$ справедливо неравенство

$$|F_A|(x) + |\nabla_A \Phi|(x) \leq \text{const}(c, \rho)(1 + |x|)^{-2}.$$

Таким образом, $\hat{c}(\rho, 1, c) \in \mathbb{C}^\delta$ для любого $\rho \in (0, 1]$ и при каждом $c \in \mathbb{C}$ и каждом значении $\delta \in [0, 1/2)$.

Поскольку при $\delta \in [0, 1/2)$ отображение I непрерывно отображает пространство $\text{Maps}(S^2, S^2)$ в $\mathbb{C}^\delta$, а отображение $\hat{e}$ непрерывно, то $\hat{c}(\rho, 1, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\delta$ непрерывно при любых $\rho \in (0, 1]$ и $\delta \in [0, 1/2)$.

Из (В4.9) и предложений В3.1, В3.2 вытекает, что при любых $\rho \in (0, 1]$ и $\delta \in [0, 1/2)$ отображение $\hat{c}(\rho, \cdot): [0, 1/2] \times \mathbb{C}^\delta \rightarrow \mathbb{C}^\delta$ непрерывно. Пользуясь леммой А4.1 и тем, что $|\alpha \beta_{1/\rho}| \in L^3(\mathbb{R}^3)$ и норма этой функции не зависит от ρ , получим, что для любого $c \in \mathbb{C}^\delta$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, 1/2]} |\mathcal{U}^\delta(\hat{c}(\rho, t, c)) - \mathcal{U}^\delta(c)| = 0. \quad (\text{В4.12})$$

Из леммы А4.3 и предложения В3.2 следует, что этот предел является локально равномерным на $\mathbb{C}^\delta$. Следовательно, отображение $\hat{c}(\cdot)$ продолжается до непрерывного отображения из $[0, 1] \times [0, 1/2] \times \mathbb{C}^\delta$ в $\mathbb{C}^\delta$ для любого $\delta \in [0, 1/2)$.

Из лемм В4.2, В4.4 и В4.5 и формулы (В4.10) вытекает, что для любых $\rho \in (0, 1]$ и $\delta \in [0, 1/2)$ отображение $\hat{c}(\rho, \cdot): [1/2, 1] \times \mathbb{C}^\delta \rightarrow \mathbb{C}^\delta$ непрерывно.

Согласно предложению В3.1 и леммам В4.4 и В4.5, для любого $c \in \mathbb{C}^\delta$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{t \in [1/2, 1]} |\mathcal{U}^\delta(\hat{c}(\rho, t, c)) - \mathcal{U}^\delta(c)| = 0. \quad (\text{В4.13})$$

Это равенство доказывается путем разбиения интегралов в сумму интегралов по множествам $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| < \rho/2\}$, $\{x \in \mathbb{R}^3: \rho/2 < |x| < 1/\rho\}$ и $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| > 1/\rho\}$ и применения неравенства Гёльдера и вышеуказанных лемм; восполнение деталей мы предоставляем читателю. В процессе этого доказательства устанавливается также, что предел в формуле (В4.13) является локально равномерным относительно $c \in \mathbb{C}^\delta$.

Из этого обсуждения следует, что отображение $\hat{c}$ продолжается до непрерывного отображения из $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{C}^\delta$ в $\mathbb{C}^\delta$ при любом $\delta \in [0, 1/2)$.

Используя формулы (В4.12) и (В4.13), с помощью леммы В4.3 строим непрерывную функцию $\rho(\cdot): [0, 1] \times \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$, которая обладает следующими свойствами: (1) равна 0 на множестве $\{0\} \times \mathbb{C}$ и отображает интервал $(0, 1)$ в $(0, 1)$ при фиксированном c ; (2) для любого $c \in \mathbb{C}$ справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\mathcal{U}(\hat{c}(\rho(\varepsilon, c), t, c)) - \mathcal{U}(c)| < \varepsilon.$$

Отображение $\mathcal{U}$, описанное в предложении В2.2, по определению сопоставляет элементу

$$(\varepsilon, t, c) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{C}$$

сечение $\hat{c}(\rho(\varepsilon, c), t, c)$.

В5. Действие группы $SU(2)$ на пространстве $\mathcal{B}$

Как отмечалось в § В1, действие группы $SU(2)$ на пространстве $\mathcal{B}$ задается действием постоянных матричных функций в $\mathcal{U}$. Эта группа действует на пространстве $\text{Maps}(S^2, S^2)$ вращением образа S^2 ; при этом I — эквивариантное отображение. Действие группы $SU(2)$ может быть редуцировано до действия группы S^1 , если фиксировать значение Φ в некоторой точке. Эта редукция строится следующим образом. Пусть $n \in S^2$ — северный полюс. Пусть далее пространство $\Omega(S^2, S^2) \hookrightarrow \text{Maps}(S^2, S^2)$ является подпространством отображений, оставляющих точку n неподвижной. Подгруппа S^1 группы $SU(2)$, которая оставляет неподвижной точку n , действует на пространстве $\Omega(S^2, S^2)$, в то время как орбита пространства $\Omega(S^2, S^2)$ в $\text{Maps}(S^2, S^2)$ под действием всей группы $SU(2)$ совпадает со всем пространством $\text{Maps}(S^2, S^2)$.

Имеется расслоение

$$\Omega(S^2, S^2) \rightarrow \text{Maps}(S^2, S^2) \xrightarrow{\hat{n}} S^2,$$

где $\hat{n}(e) = e(n)$. Указанная выше подгруппа S^1 действует на этом расслоении эквивариантно, причем $\Omega/S^1 \simeq \text{Maps}/SU(2)$.

Соответствующее расслоение возникает и для пространства $\mathcal{B}^\delta$ при $\delta \in [0, 1/2)$. Оно задается с помощью отображения $c_2(\cdot): \mathcal{C}^\delta \rightarrow \mathcal{C}^\delta$ из § В3 и отображения $R: \mathcal{C}^\delta \rightarrow [1, \infty)$ из леммы В4.2. Непрерывное отображение $\hat{n}: \mathcal{B}^\delta \rightarrow S^2$ определяется следующим образом. Пусть точка $n \in S^2$ совпадает с $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Тогда положим образ $\hat{n}(c)$ равным $(\Phi_2(c)/|\Phi_2(c)|)(2R(c_2(c))n) \in S^2$. Построенное отображение $\hat{n}$ порождает расслоение

$$\hat{\mathcal{B}}^\delta \rightarrow \mathcal{B}^\delta \xrightarrow{\hat{n}} S^2, \quad (\text{В5.1})$$

где слоем над точкой $n \in S^2$ является множество

$$\hat{\mathcal{B}}^\delta = \{c \in \mathcal{B}^\delta: (\Phi_2(c)/|\Phi_2(c)|)(2R(c_2(c))n) = n\}. \quad (\text{В5.2})$$

Предложение В3.2 и лемма В4.2 гарантируют, что множество $\hat{\mathcal{B}}^\delta$ замкнуто в $\mathcal{B}^\delta$.

Орбита пространства $\hat{\mathcal{B}}^\delta$ в $\mathcal{B}^\delta$ под действием группы $SU(2)$ совпадает со всем $\mathcal{B}^\delta$. Однако подгруппа S^1 группы $SU(2)$, оставляющая неподвижной точку $n \in S^2$, действует на пространстве $\mathcal{B}^\delta$. Это действие группы S^1 эквивариантно относительно следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{B}}^\delta & \longrightarrow & \mathcal{B}^\delta \\ \uparrow I & & \uparrow I \\ \Omega(S^2, S^2) & \longrightarrow & \text{Maps}(S^2, S^2) \end{array} \quad (B5.3)$$

Здесь уместно отметить, что функционал $\mathcal{U}^\delta$, будучи $\mathcal{G}$ -эквивариантным, "чувствителен" только к топологии пространства $\mathcal{B}^\delta$, по крайней мере в том, что касается метода минимакса.

Предложение B5.1. Для любого $\delta \in [0, 1/2)$ отображение I является вложением пространства $\Omega(S^2, S^2)$ в $\hat{\mathcal{B}}^\delta$, и образ $\Omega(S^2, S^2)$ при этом отображении является деформационным ретрактом $\hat{\mathcal{B}}^\delta$.

Доказательство этого предложения будет дано ниже. Отметим, что теорема A1.1 вытекает из предложений B1.1 и B5.1.

Предложение B5.2. Существует непрерывное отображение $q: [0, 1] \times [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$, такое, что

(1) для каждого $\delta \in [0, 1/2)$ отображение $q: [0, 1] \times [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}^\delta \rightarrow \hat{\mathcal{B}}^\delta$ непрерывно;

(2) для $\varepsilon \in (0, 1]$ отображение $q(\varepsilon, 0, \cdot)$ является тождественным отображением на $\hat{\mathcal{B}}$;

(3) для любого $\delta \in [0, 1/2)$ и любого $\varepsilon \in (0, 1)$ отображение $q(\varepsilon, 1, \cdot)$ из $\hat{\mathcal{B}}$ в $\hat{\mathcal{B}}^\delta$ непрерывно;

(4) для любого $t \in [0, 1]$ отображение $q(0, t, \cdot)$ является тождественным отображением на $\hat{\mathcal{B}}$;

(5) наконец, для любого $\varepsilon \in [0, 1]$ и для всех $c \in \hat{\mathcal{B}}$

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\mathcal{U}(q(\varepsilon, t, c)) - \mathcal{U}(c)| < \varepsilon.$$

Доказательство предложения В5.1. Пусть $r(\cdot): [0, 1] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ есть отображение из предложения В2.1 и $\Pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}$ — проекция. Ограничивая r на множество $[0, 1] \times \mathcal{B}$, рассмотрим композицию $\Pi \circ r: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Сопоставляя каждой точке $c \in \mathcal{B}$ точку $\hat{n}(c) \in S^2$, получаем непрерывное отображение $(t, \hat{n})$ пространства $\mathcal{B}$ в расслоение

$$\begin{array}{ccc} & S^1 & \\ & \downarrow & \\ & SU(2) \times S^2 & \\ \nearrow \hat{n} & \downarrow \tau & \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\ell} & S^2 \times S^2 \end{array} \quad (B5.4)$$

Здесь отображение τ переводит элемент (g, σ) в $(g\sigma g^{-1}, \sigma)$ и $\ell(\cdot) = (\hat{n}(\cdot), \hat{n}(\cdot))$, в то время как $\hat{n}(\cdot) = (1, \hat{n}(\cdot))$.

Гомотопия отображения ℓ задается отображением $\varphi: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow S^2 \times S^2$, переводящим элемент (t, c) в пару $(\hat{n}(\Pi \circ r(t, c)), \hat{n}(c))$. Свойство накрывающей гомотопии дает нам непрерывное отображение $k: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow SU(2)$, такое, что $k(0, \cdot) = 1$ и для всех $(t, c) \in [0, 1] \times \mathcal{B}$ справедливо соотношение

$$k(t, c) \hat{n}(c) k^{-1}(t, c) = \hat{n}(\Pi \circ r(t, c)).$$

Без потери общности можно предполагать, что $k(t, \cdot)|_{I(\text{Maps})} = 1$ для всех $t \in [0, 1]$. Действительно, если это не так, следует заменить отображение k на

$$k'(t, c) = k(t, c) k^{-1}(t, I(\hat{e}(c))),$$

где $\hat{e}: \mathbb{C} \rightarrow \text{Maps}(S^2, S^2)$ — отображение, фигурирующее в предложении В2.1.

Определим ретракцию множества $\hat{\mathcal{B}}^\delta$ на $I(\Omega(S^2, S^2))$, сопоставляя элементу $(t, c) \in [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}^\delta$ элемент

$$k^{-1}(t, c) \cdot (\Pi \circ r)(t, c).$$

Доказательство предложения В5.2. Это доказательство совпадает во многом с доказательством предложения В5.1. Заменим отображение τ на отображение τ из предложения В2.2. Тогда отображения $(\ell, \hat{\ell})$ отображают $[0, 1] \times \mathfrak{B}$ в расслоение из диаграммы (В5.4), сопоставляя паре (ϵ, c) элемент $\ell(\epsilon, c) = (\hat{n}(\tau(\epsilon, 0, c)), \hat{n}(\tau(\epsilon, 0, c))) = (\hat{n}(c), \hat{n}(c))$, где $\hat{\ell}(\epsilon, c) = (1, \hat{n}(c))$. Гомотопия φ переводит элемент $(t, \epsilon, c) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathfrak{B}$ в точку $(\hat{n}(\Pi \circ \tau(\epsilon, t, c)), \hat{n}(c))$. В остальном доказательство проходит без изменений.

В6. Гильбертовы пространства

Гильбертовы векторные расслоения над $\mathfrak{B}$ играют решающую роль в этой статье, и особенно одно из них, связанное с важной локальной теоремой вложения для $\mathfrak{B}$ (см. предложение В6.1).

Пусть сначала V — конечномерное гильбертово пространство, являющееся пространством ортогонального представления ρ группы $SU(2)$. Обозначим индуцированное представление через $\rho_*: su(2) \rightarrow \text{End } V$. Положим $E = P \times_{\rho} V$. Каждая пара $c = (A, \Phi)$, состоящая из $L^2_{1;1oc}$ -связности на P и $L^2_{1;1oc}$ -сечения расслоения $\text{Ad } P$, задает метрику на пространстве $\Gamma_0(E)$ вида

$$\langle \psi, \eta \rangle_c = \langle \nabla_A \psi, \nabla_A \eta \rangle_2 + \langle \rho_*(\Phi) \psi, \rho_*(\Phi) \eta \rangle_2.$$

По лемме А4.1 метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ является невырожденной.

Гильбертово пространство $H_c(E)$ получается путем пополнения пространства $\Gamma_0(E)$ по норме $\| \cdot \|_c^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_c$. Отметим, что если паре $c = (L^2_{1;1oc}$ -связность на P , $L^2_{1;1oc}$ -сечение $\text{Ad } P$) сопоставляется пространство $H_c(E) \subset L^2_{1;1oc}(E)$, то это соответствие $\mathfrak{G}$ -эквивариантно; если $g \in \mathfrak{G}$, то $H_{g \cdot c}$ и $g \cdot H_c$ в $L^2_{1;1oc}(E)$ совпадают.

Особенно важен случай, когда $E \equiv Q = \text{Ad } P \oplus (T^* \oplus \mathbb{R})$. В этом случае для каждого $c \in \mathfrak{C}$ определим пространство $\Gamma^c = H_c(Q) \cap \Gamma(Q)$, которое наделяется топологией с помощью вложений в $H_c(Q)$ и $\Gamma(Q)$.

Предложение В6.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и $c \in \mathfrak{B}_n$. Для каждого элемента $b \in \mathfrak{B}_n$ существуют его окрестность

$\mathcal{N}(b)$ и непрерывное отображение $h(b)(\cdot): \mathcal{N}(b) \rightarrow \mathfrak{G}_0$ такие, что отображение, переводящее элемент $b' \in \mathcal{N}(b)$ в элемент $m_b(b') = h(b)(b') \cdot b' - c$, является вложением окрестности $\mathcal{N}(b)$ в пространство Γ^c .

Предложение В6.1 и следующее за ним предложение В6.2 будут использованы в этом параграфе для задания структуры C^0 -векторного расслоения над $\mathfrak{B}$ на множестве $\{H_b(E), b \in \mathfrak{B}\}$.

Предложение В6.2. Пусть $c \in \mathbb{C}$ и $\psi \in H_c(Q)$. Пусть отображение $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть векторное расслоение, ассоциированное с главным расслоением $P \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тожественное отображение на пространстве $\Gamma_0(E)$ индуцирует изоморфизм между пространствами $H_{c+\psi}(E)$ и $H_c(E)$, обладающий тем свойством, что для любого $\eta \in H_{c+\psi}$ выполняется оценка

$$|\|\eta\|_{c+\psi} - \|\eta\|_c| \leq \chi \cdot \|\eta\|_c \|\psi\|_c,$$

где константа $\chi < \infty$ не зависит от выбора ψ, η , а зависит только от значения функционала $\mathcal{H}(c)$.

Предложение В6.1 доказывается в § В.7, а предложение В6.2 будет доказано ниже в этом параграфе.

Пусть $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное расслоение, ассоциированное с расслоением P . Структура C^0 -векторного расслоения на пространстве

$$H(E) = \bigcup_{b \in \mathfrak{B}} H_b(E)$$

определяется следующим образом. Пусть $n \in \mathbb{Z}$; выберем $c \in \mathfrak{B}_n$. Для каждого элемента $b \in \mathfrak{B}_n$ существуют окрестность $\mathcal{N}(b)$ и изоморфизм гильбертовых пространств $\rho(l_b(b')): H_{b'}(E) \rightarrow H_c(E)$, который задает для произвольного элемента $b' \in \mathcal{N}(b)$ последовательность отображений

$$H_{b'}(E) \rightarrow \rho(h(b)(b')) \cdot H_{b'}(E) \rightarrow H_{h(b)(b') \cdot b'}(E) \rightarrow H_c(E).$$

Участвующее здесь отображение $h(b)(\cdot): \mathcal{N}(b) \rightarrow \mathfrak{G}_0$ определено в предложении В6.1, а два последних отображения порождены тождественным отображением пространства $L^2_{1,loc}(E)$.

Пусть отображение $p: H(E) \rightarrow \mathfrak{B}$ — естественная проекция. Наделим пространство $H(E)$ топологией, потребовав, чтобы для каждого элемента $b \in \mathfrak{B}$ послойное отображение из $p^{-1}(\mathfrak{N}(b))$ в $\mathfrak{N}(b) \times H_c(E)$, переводящее пару $(b' \in \mathfrak{N}(b), \varphi \in H_{b'}(E))$ в пару

$$L_b(b', \varphi) = (b', p(l_b(b')) \cdot \varphi), \quad (B6.1)$$

было гомеоморфизмом. Следующее ниже предложение B6.3 подтверждает, что это требование корректно определяет топологию на $H(E)$, в которой при каждом $n \in \mathbb{Z}$ отображение $p: H(E) \rightarrow \mathfrak{B}_n$ является C^0 -векторным расслоением над $\mathfrak{B}_n$ (см. [20]).

Необходимо также ввести структуру C^0 -векторного расслоения на множестве $L(E) = \bigcup_{b \in \mathfrak{B}} L^2(E)$ с канонической проекцией $p: L(E) \rightarrow \mathfrak{B}$. Наделим пространство $L(E)$ топологией, потребовав, чтобы для каждого элемента $b \in \mathfrak{B}$ отображение из $p^{-1}(\mathfrak{N}(b))$ в $\mathfrak{N}(b) \times L^2(E)$, переводящее (b', φ) в $L_b(b', \varphi)$ из формулы (B6.1), было гомеоморфизмом. В следующем ниже предложении B6.3 утверждается, что эта процедура задает корректно определенную топологию на $L(E)$, такую, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ проекция $p: L(E) \rightarrow \mathfrak{B}_n$ является C^0 -векторным расслоением над $\mathfrak{B}_n$.

Предложение B6.3. Для каждого числа $n \in \mathbb{Z}$ выберем точку $c \in \mathfrak{B}_n$. Множества $H(E)$ и $L(E)$ с проекцией p на $\mathfrak{B}_n$ наделяются естественной структурой C^0 -векторных расслоений над $\mathfrak{B}_n$ с корректно определенной топологией, базис локальных тривиализаций которой задается открытым покрытием $\{\mathfrak{N}(b): b \in \mathfrak{B}_n\}$ и послойными отображениями $\{L_b: p^{-1}(\mathfrak{N}(b)) \rightarrow \mathfrak{N}(b) \times H_c(E) \text{ и } \mathfrak{N}(b) \times L^2(c)\}$, задаваемыми формулой (B6.1). При данной структуре векторного расслоения вложения пространств $\mathfrak{B}_n \times \Gamma_0(E)$ в пространства $H(E)$ и $L(E)$ непрерывны. Более того, сопоставление элементу $b \in \mathfrak{B}_n$ метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ на слоях определяет непрерывное сечение расслоения $\text{Sym}_2(H(E)^*)$. Наконец, два различных выбора точки $c \in \mathfrak{B}_n$ задают изоморфные пространства $H(E)$ и $L(E)$.

Остальная часть параграфа посвящена доказательству предложения B6.2. Предложение B6.3 будет доказано в конце § B7.

Доказательство предложения В6.2. Это предложение представляет собой прямое и несложное следствие такой леммы:

Лемма В6.4. Пусть $c \in \mathfrak{B}$ и $\varphi \in H_c(Ad P)$, $\eta \in H_c(E)$. Тогда

$$\|\rho_*(\varphi)\eta\|_2 \leq \zeta(1 + \mathcal{U}(c))\|\varphi\|_c\|\eta\|_c, \quad (B6.2)$$

где константа $\zeta < \infty$ не зависит от c , φ и η .

Доказательство. Эта лемма является обобщением леммы 6.6 из работы [3]. Пусть $c = (A, \Phi)$; положим $\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^3: |\Phi|(x) < 3/4\}$. Тогда множество Ω открыто и ввиду неравенства Като и леммы А4.1 получаем, что

$$\mathcal{U}(c) \geq \frac{1}{2} \|d(1 - |\Phi|)\|_2^2 \geq \frac{1}{2} \zeta \cdot \|(1 - |\Phi|)\|_6^2 \geq \frac{3}{8} \zeta \cdot (\text{vol } \Omega)^{1/3}. \quad (B6.3)$$

В этой формуле константа $\zeta < \infty$ не зависит от $c \in \mathfrak{C}$. Следовательно, множество Ω имеет конечный объем. Пусть теперь $\beta \in C^\infty[0, \infty)$ есть сглаживающая функция из § А3. Положим $b(x) = \beta(|\Phi|(x))$; тогда $\text{supp } b \subset \Omega$. Представим заданное сечение $\eta \in H_c(E)$ в виде $\eta = \eta^L + \eta^T + \eta^\Omega$, где $\eta^\Omega = b\eta$, $\eta^T = -(1-b)|\Phi|^{-2}\rho_*(\Phi)\rho_*(\Phi)\eta$ и $\eta^L = (1-b)\eta - \eta^T$.

Тогда вследствие леммы А4.1 будем иметь

$$\begin{aligned} \|\eta^\Omega\|_2 + \|\eta^\Omega\|_6 &\leq \zeta^{-1}(1 + (\text{vol } \Omega)^{1/3})\|\eta\|_c, \\ \|\eta^L\|_6 &\leq \zeta^{-1}\|\eta\|_c, \\ \|\eta^T\|_2 + \|\eta^T\|_6 &\leq (2 + \zeta^{-1})\|\eta\|_c, \end{aligned} \quad (B6.4)$$

где константа $\zeta < \infty$ не зависит от $c \in \mathfrak{C}$ и $\eta \in H_c(E)$. Для доказательства леммы воспользуемся следующими двумя фактами: во-первых, если $\eta \in H_c(E)$ и $\varphi \in H_c(Ad P)$, то

$$\rho_*(\varphi^L) \cdot \eta^L = 0. \quad (B6.5)$$

Во-вторых, если $v \in L^6$ и $u \in L^2 \cap L^6$, то

$$\|vu\|_2 \leq \|v\|_6 \|u\|_6^{1/2} \|u\|_2^{1/2}. \quad (B6.6)$$

Утверждение леммы B6.4 следует теперь из формул (B6.3)–(B6.6).

B7. Локальная структура пространства $\mathcal{B}$

Целью этого параграфа является доказательство предложения B6.1, локальной теоремы вложения для областей в пространстве $\mathcal{B}$ и доказательство предложения B6.3. Прежде чем приступить к доказательству предложения B6.1, полезно более детально изучить пространство $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0$, определяемое формулой (B4.1). Во-первых, заметим, что существует непрерывное отображение $\mathcal{L} \rightarrow \text{Maps}(S^2, S^2)$, которое сопоставляет элементам $b \in \mathcal{L}$ и $\hat{x} \in S^2$ отображения $\hat{\Phi}(b)(2R(b)\hat{x})$, где $\hat{\Phi} = \Phi/|\Phi|$, а отображение $R: \mathcal{L} \rightarrow [1, \infty)$ определено в лемме B4.2. Положим $\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \cap \mathcal{G}_n$ при $n \in \mathbb{Z}$. Тогда b отображает $\mathcal{L}_n$ на $\text{Maps}_n(S^2, S^2)$.

Во-вторых, заметим, что если $b_1, b_0 \in \text{Maps}_n(S^2, S^2)$, то существуют открытая окрестность $\mathcal{D}(b_1)$ и непрерывное отображение $h: \mathcal{D} \rightarrow \text{Maps}(S^2, SU(2))$, такое, что для каждого элемента $b_2 \in \mathcal{D}$ имеет место равенство

$$h(b_2)b_2h^{-1}(b_2) = b_0. \quad (B7.1)$$

Это утверждение означает в точности, что отображение (B4.3)' является расслоением.

Из этих двух замечаний следует

Л е м м а B7.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и $b, c \in \mathcal{L}_n$. Существуют окрестность $\mathcal{D}(b, c)$ элемента b из $\mathcal{L}_n$ и непрерывное отображение $q: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{G}_0$, обладающие тем свойством, что для любого $b' \in \mathcal{D}$ выполняется равенство $q(b')b(b')q^{-1}(b') = b(c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в множестве $\text{Maps}_n(S^2, S^2)$ стягиваемую окрестность $\mathcal{D}$ элемента $b(b)$, для которой

выполняется равенство (B7.1) с $\sigma_0 = \sigma(c)$. Ввиду того что окрестность Ω стягиваема и по свойству покрывающей гомотопии для расслоенного отображения h из формулы (B7.1) имеет продолжение $h': \Omega \rightarrow \mathcal{G}_c$, удовлетворяющее при $|x| \geq 1/2$ равенству $h'(x) = h(x/|x|)$. Выберем тогда $q(b')$ равным $h'(\sigma(b'))$.

Фиксируем теперь отображение $\omega \in \text{Maps}_n(S^2, S^2)$ и определим пространство $\mathcal{L}[\omega] = \{b \in \mathcal{L} : \sigma(b) = \omega\}$. Пусть отображение $g: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}_0$ задается леммой B4.5.

Л е м м а B7.2. Сопоставление элементу $b \in \mathcal{L}[\omega]$ сечения $g(b) \cdot b - I(\omega) \in \Gamma(Q)$ определяет непрерывное отображение пространства $\mathcal{L}[\omega]$ в $\Gamma^{I(\omega)}(Q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что на множестве $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \geq 2R(b)\}$ выполнено равенство

$$g \cdot b - I(\omega) = (\alpha(g \cdot b)\omega + \alpha^T(g \cdot b), (|\Phi(b)| - 1)\omega),$$

где $g = g(b)$. Следовательно, по предложению B3.1 и леммам B4.4 и B4.5 элемент $g \cdot b - I(\omega)$ принадлежит Γ^b . Тогда вследствие предложения B6.2 имеем $g \cdot b - I(\omega) \in \Gamma^{I(\omega)}$. Непрерывность соответствия $b \mapsto g(b) \cdot b - I(\omega) \in \Gamma^{I(\omega)}$ следует из предложения B3.1 и лемм B4.4 и B4.5.

Прежде чем привести доказательство предложения B6.1, необходимо отметить, что отображение $c_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ из § B3 непрерывно отображает пространство $\mathcal{C}$ в $\mathcal{L}$ (предложение B3.4) и для всех $c \in \mathcal{C}$ имеет место соотношение

$$c_1(c) - c \in \Gamma^{c_1(c)} \cap \Gamma^c. \quad (\text{B7.2})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения B6.1. Для данных $b, c \in \mathcal{B}_n$ обозначим через $\Omega(c_1(b), c_1(c))$ окрестность элемента $c_1(b)$ в лемме B7.1. Положим $\mathcal{N}(b) = c_1^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{B}_n$. Определим отображение $h(b)(\cdot): \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G}_0$, сопоставляя элементу $b' \in \mathcal{N}$ элемент

$$h(b)(b') = g^{-1}(c_1(c)) \cdot g(q(c_1(b'))) \cdot c_1(b') \cdot q(c_1(b')),$$

где отображение $q: \Omega \rightarrow \mathfrak{G}_0$ определяется леммой В7.1, а отображение $q: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{G}_0$ определяется леммой В4.5. Первое утверждение состоит в том, что отображение $m_b(b') = h(b)(b')b' - c$ окрестности $\mathcal{N}(b)$ в пространство Γ^c непрерывно. Действительно,

$$\begin{aligned} q(c_1(c))(h(b)(b') \cdot b' - c) &= q(q(c_1(b')) \cdot c_1(b')) \cdot q(c_1(b')) \cdot b' - q(c_1(c)) \cdot c = \\ &= [q' \cdot q \cdot (b' - c_1(b'))] + [q' \cdot q \cdot c_1(b') - I(\sigma)] - \\ &\quad - [q_c \cdot (c - c_1(c))] - [q_c \cdot c_1(c) - I(\sigma)]. \end{aligned} \quad (B7.3)$$

Здесь $q' = q(q(c_1(b')) \cdot c_1(b'))$, $q_c = q(c_1(c))$, $q = q(c_1(b'))$ и $\sigma = \sigma(c_1(c)) = \sigma(q \cdot c_1(b'))$. Согласно лемме В7.2 и свойству (В7.2), каждая скобка в выражении (В7.3) принадлежит $\Gamma^I(\sigma)$. Следовательно, из (В7.2) вытекает, что $h(b)(b')b' - c$ принадлежит Γ^c . Непрерывность этого отображения также вытекает непосредственно из леммы В7.2 и предложения В3.4.

Второе утверждение состоит в том, что отображение $m_b(\cdot): \mathcal{N} \rightarrow \Gamma^c$ является гомеоморфизмом на его образ. Для доказательства этого утверждения потребуется

Л е м м а В7.3. Пусть $c \in \mathfrak{C}$ и пространство Γ^c определено как в § В6. Сопоставление сечению $\phi \in \Gamma^c$ сечения $c + \phi$ определяет непрерывное отображение из Γ^c в $\mathfrak{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно провести прямое вычисление с использованием леммы В6.4 и неравенства Гёльдера. Читателю следует обратиться к работе [3, предложение 5.17].

Теперь для завершения доказательства предложения В6.1 достаточно заметить, что отображение $m_b(\cdot)$ имеет непрерывное обратное, а именно, отображение $\hat{\ell}$, переводящее сечение $\phi \in \Gamma^c$ в элемент $\Pi(c + \phi) \in \mathfrak{B}$, где $\Pi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$ — проекция. Действительно, пусть $b, b' \in \mathcal{N}(b)$. Предположим, что $(\hat{\ell} \circ m_b)(b') = (\hat{\ell} \circ m_b)(b'')$. Тогда для некоторого $h \in \mathfrak{G}_0$ имеет место равенство $b' = h \cdot h_b(b')^{-1} \cdot h_b(b'') \cdot b''$. Но так как образ отображения $h_b(\cdot)$ принадлежит группе $\mathfrak{G}_0$, то элемент b' должен быть равен b'' .

Доказательство предложения В6.3. Так как рассуждения для пространств $H(E)$ и $L(E)$ одинаковы, то рассмотрим только первый случай. Для того чтобы показать, что пространство $H(E)$ наделено корректно определенной топологией, достаточно установить, что для любой пары точек b_1 и $b_2 \in \mathcal{B}_n$ с пересекающимися окрестностями $\mathcal{N}(b_1)$ и $\mathcal{N}(b_2)$ функция перехода, переводящая элемент $b \in \Omega = \mathcal{N}(b_1) \cap \mathcal{N}(b_2)$ в элемент (см. уравнение (В6.1))

$$\ell(b) = \ell_{b_1}(b) \ell_{b_2}(b)^{-1} \in \mathfrak{G}_0, \quad (\text{В7.4})$$

задает непрерывное отображение $b \mapsto \rho(\ell(b))$ окрестности Ω в банахово пространство ограниченных линейных эндоморфизмов пространства $H_c(E)$ (см. [20, гл. I]). Отсюда немедленно следует [20, гл. III], что $\rho: H(E) \rightarrow \mathcal{B}$ является C^0 -векторным расслоением с требуемым базисом локальных тривиализаций. Если допустить на время, что это утверждение доказано, то остальные утверждения будут следовать непосредственно из предложений В6.1 и В6.2; детали предоставляем читателю. Таким образом, предложение В6.3 вытекает из следующей леммы:

Лемма В7.4. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и $c \in \mathcal{B}_n$. Если $\Omega = \mathcal{N}(b_1) \cap \mathcal{N}(b_2) \neq \emptyset$ для $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_n$, то можно определить отображение $\ell: \Omega \rightarrow \mathfrak{G}_0$ по формуле (В7.4). Тогда $\rho(\ell(b))$ — ограниченный линейный автоморфизм пространства $H_c(E)$ для каждого $b \in \Omega$. Более того, для заданных $b \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность $\Omega' \subset \Omega$ точки b , такая, что для всех $b' \in \Omega'$ и всех сечений $\psi \in H_c(E)$ выполняется неравенство

$$\|\rho(\ell(b))\psi - \rho(\ell(b'))\psi\|_c \leq \varepsilon \|\psi\|_c. \quad (\text{В7.5})$$

Доказательство. Пусть сначала $m: \mathcal{N}(b_1) \rightarrow H_c(Q)$ и $j: \mathcal{N}(b_2) \rightarrow H_c(Q)$ являются вложениями из предложения В6.1. Если $\psi \in \Gamma_0(E)$ и $b \in \Omega$, то

$$\begin{aligned} \|\rho(\ell(b))\psi\|_c &\leq z_1(b) \|\rho(\ell(b))\psi\|_{c+m(b)} \leq \\ &\leq z_1(b) \|\psi\|_{c+j(b)} \leq z \|\psi\|_c. \end{aligned} \quad (\text{В7.6})$$

Мы воспользовались предложением В6.2 и $\mathfrak{G}$ -эквивариантностью нормы $\|\cdot\|_c$. Константа $z < \infty$ не зависит от ψ , и

оценка равномерна в окрестности точки b . Таким образом, для каждой точки $b \in \Omega$ отображение $\rho(\ell(b))$ продолжается до ограниченного линейного автоморфизма пространства $H_c(E)$, обратным к которому является эндоморфизм $\rho(\ell(b)^{-1})$.

Для доказательства неравенства (B7.5) необходима следующая

Л е м м а B7.5. В тех же предположениях, что и в лемме B7.4, пусть $b \in \Omega$. Найдется окрестность Ω' точки b в Ω , такая, что сопоставление точке $b' \in \Omega'$ числа $d(b, b') = \|\ell(b) - \ell(b')\|_{\tilde{C}^0(\mathbb{R}^3)}$ задает непрерывное отображение окрестности Ω' в отрезок $[0, 2]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы B7.4 на основе леммы B7.5. Для $s = (A, \Phi) \in \mathcal{C}$ и $\psi \in \Gamma(E)$ положим

$$\nabla'_c \psi = (\nabla_A \psi, [\Phi, \psi]) \in \Gamma(E \otimes Q).$$

Согласно предложению B6.2, достаточно проверить, что для заданного $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\Omega' \subseteq \Omega$, такая, что для всех $b' \in \Omega'$ и $\psi \in H_c(E)$ выполняется оценка

$$\|\rho(\ell(b))\psi - \rho(\ell(b'))\psi\|_{c+m(b)} \leq \varepsilon \|\psi\|_{c+m(b)}.$$

Для сокращения обозначений положим $(\ell, \ell') = (\ell(b), \ell(b'))$ и аналогично определим (m, m') и (j, j') . Заметим, что для любого сечения $\psi \in H_c(E)$ имеет место равенство $\|\psi\|_c = \|\nabla'_c \psi\|_2$. Используя $\mathcal{G}$ -инвариантность, получим, что

$$\nabla'_{c+m} \rho(\ell) \psi = \rho(\ell) \nabla'_{c+j} \psi, \quad (B7.7)$$

в то время как

$$\begin{aligned} \nabla'_{c+m} \rho(\ell') \psi &= \nabla'_{c+m} \rho(\ell') \psi + \rho(m-m') \rho(\ell') \psi = \\ &= \rho(\ell') \nabla'_{c+j'} \psi + \rho(m-m') \rho(\ell') \psi = \\ &= \rho(\ell') \nabla'_{c+j} \psi + \rho(\ell') \rho(j'-j) \psi + \rho(m-m') \rho(\ell') \psi. \end{aligned} \quad (B7.8)$$

Из формул (B7.6–8), предложения B6.2 и леммы B6.4 следует, что

$$\| \rho(\ell(b))\psi - \rho(\ell(b'))\psi \|_c \leq \varkappa \{ d(b, b') + \|j - j'\|_c + \|m - m'\|_c \} \|\psi\|_c,$$

где константа $\varkappa$ не зависит от точки b' в достаточно малой окрестности точки b . Из последнего неравенства с учетом предложения B6.1 и леммы B7.5 выводим лемму B7.4.

Доказательство леммы B7.5. По построению отображение $\ell: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{G}_0$ непрерывно. Рассмотрим отображение $c_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, определенное в § B3, и положим $c_1(c) = (A, \Phi)$. По лемме B4.2 существует число $R < \infty$, такое, что для всех b' из окрестности $\mathcal{D}'$ точки $b \in \mathcal{D}$ при $|x| > R$ выполняются оценки $|\Phi(c_1(b'))|(x) > 1/2$ и $|\Phi|(x) > 1/2$. Для $b' \in \mathcal{D}'$ и $|x| > R$ положим

$$\hat{\Phi}(b') = \Phi(c_1(b'))/|\Phi(c_1(b'))|.$$

По построению существует такое $\tau \in [R, \infty)$, что для всех b' из (быть может, меньшей) окрестности $\mathcal{D}'$ точки b

$$(h(b_1)(b')\hat{\Phi}(b')h(b_1)(b')^{-1})(x) = \hat{\Phi}(x) \text{ при } |x| > \tau. \quad (\text{B7.9})$$

Кроме того, равенству (B7.9) удовлетворяют все $b' \in \mathcal{D}'$ с заменой $h(b_1)(\cdot)$ на $h(b_2)(\cdot)$. Следовательно, для всех $b' \in \mathcal{D}'$ при $|x| > \tau$ выполняется равенство $(\ell(b')\hat{\Phi}\ell(b')^{-1})(x) = \hat{\Phi}(x)$. Из него следует, что для $b' \in \mathcal{D}'$ при $|x| > \tau$ имеем

$$\ell(b')(x) = \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(b')\hat{\Phi}(x)\right]. \quad (\text{B7.10})$$

Доказательство леммы B4.5 (см. (B4.6)) показывает, что λ непрерывно отображает (быть может, меньшую) окрестность $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ точки b в пространство $C^\infty(\{x \in \mathbb{R}^3: |x| > \tau\})$. Далее, существует такое число $\tau' \in [\tau, \infty)$, что для всех $b' \in \mathcal{D}'$

$$\Delta\lambda(b')(x) = 0 \text{ при } |x| > \tau', \quad (\text{B7.11})$$

$$|\nabla\lambda(b')|(\cdot) \in L^6(\{x \in \mathbb{R}^3: |x| > \tau'\}). \quad (\text{B7.12})$$

Из (B7.11), (B7.12) следует, что для каждой точки $b' \in D'$ существует число $\mu(b') \in \mathbb{R}$, такое, что

$$|\lambda(b')(x) - \mu(b')| < M(b)|x|^{-1} \quad \text{при } |x| > r', \quad (\text{B7.13})$$

где константа $M(b) < \infty$ зависит только от b . Из неравенства (B7.13) вытекает, что сопоставление точке $b' \in D'$ числа $\mu(b') \in \mathbb{R}$ задает непрерывное отображение. Отсюда, из соотношений (B7.10), (B7.13) и из непрерывности отображения $l: D \rightarrow \mathcal{G}_0$ следует лемма B7.5.

С1. Распределение критических значений

Так как функционал $\mathcal{U}$ "чувствует" только топологию пространства $\hat{\mathcal{B}}$, то принцип минимакса для $\mathcal{U}$ связан с гомотопически инвариантными семействами компактных подмножеств пространства $\hat{\mathcal{B}}$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и $\mathcal{F}$ — такое семейство в пространстве $\hat{\mathcal{B}}_n$. Как отмечалось в § A1 и A2, семейству $\mathcal{F}$ можно сопоставить число $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ по формуле (A1.7). Совокупность таких чисел $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ образует множество $\text{Crit}_n \subset [4\pi|n|, \infty)$ (см. (A1.8)), которое неограничено по теореме A1.2.

Доказательство теоремы A1.2 состоит из ряда утверждений, приведенных в § C2, касающихся топологии семейства операторов Дирака на пространстве $S = (P \times_{SU(2)} \mathbb{C}^2) \otimes S$. Здесь $S \rightarrow \mathbb{R}^3$ — спинорное расслоение над $\mathbb{R}^3$. Иными словами, рассмотрим расслоение базисов в $\mathbb{R}^3$, которое канонически отождествляется с $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Его двукратным накрытием служит $\mathbb{R}^3 \times SU(2)$, и S есть по определению

$$\mathbb{R}^3 \times SU(2) \times_{SU(2)} \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2.$$

Оператор Дирака на $\Gamma_0(S)$ — это эллиптический оператор первого порядка, переводящий сечение $\psi \in \Gamma_0(S)$ в сечение

$$\partial \psi = \sum_{i=1}^3 dx^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \psi, \quad (\text{C1.1})$$

где умножение понимается в смысле клиффордовой алгебры. Поскольку пространство S плоское, мы можем без потери общности отождествить $\{dx^i\}^3$ на $\mathbb{C}^2$ с фиксированным

набором матриц:

$$\left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Каждой паре $c = (A, \Phi) \in \mathfrak{C}$ поставим в соответствие оператор δ_c на $\Gamma_0(S)$, переводящий сечение $\psi \in \Gamma_0(S)$ в сечение

$$\sum_{i=1}^3 dx^i \cdot \nabla_{A_i} \psi + \Phi \psi. \quad (C1.2)$$

Заметим, что соответствие между $(c, \psi) \in \mathfrak{C} \times \Gamma_0(S)$ и $\delta_c \psi \in \Gamma_0(S)$ является $\mathfrak{G}$ -эquivариантным, поэтому мы получаем семейство операторов $\{\delta_c: c \in \mathfrak{C}\}$ на $\Gamma_0(S)$.

Теорема Аты — Зингера об индексе для семейства (см. [21, 12 и 8, 10]) дает топологическую характеристику непрерывных семейств эллиптических операторов. Доказательство теоремы A1.2 является приложением подобных идей, а именно, здесь используется подход, разобранный в статье [12]. Для того чтобы его применить, необходимы некоторые технические подробности. Они будут изложены в следующем параграфе.

C2. Операторы, параметризованные пространством $\mathfrak{B}$

Пусть V — конечномерное векторное пространство и ρ — представление группы $SU(2)$ в пространстве V . Пусть V' — другое векторное пространство, на котором задано точное представление алгебры $\{\tau^i\}_{i=1}^3 \subset \text{End } V'$ мнимых кватернионов (т.е. $\tau^i \tau^j = -\delta^{ij} - \epsilon^{ijk} \tau^k$). Введем пространство $E = V \otimes V'$. Для каждой пары $c = (A, \Phi) \in \mathfrak{C}$ обозначим через δ_c оператор, действующий в пространстве $\Gamma_0(E)$, переводящий сечение ψ в сечение

$$\delta_c \psi = \tau^i \nabla_{A_i} \psi + \rho_*(\Phi) \psi. \quad (C2.1)$$

Обозначим, как в § B6, через $H_c(E)$ гильбертово пространство, пополнение пространства $\Gamma_0(E)$ по норме

$$\|\psi\|_c^2 = \langle \nabla_A \psi, \nabla_A \psi \rangle_2 + \langle \rho_*(\Phi) \psi, \rho_*(\Phi) \psi \rangle_2. \quad (C2.2)$$

В следующей лемме суммируются результаты, полученные в [9, § 6,7] для подобных операторов δ_c на H_c .

Л е м м а C2.1. Пусть $c \in \mathbb{C}$, $a \in E$ и $\delta_c \in \text{End}(\Gamma_0(E))$ такие, как сказано выше. Тогда δ_c продолжается как ограниченный фредгольмов оператор из $H_c(E)$ в $L^2(E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [9, лемма 7.4] подробно рассмотрен частный случай доказываемой леммы. Оператор δ_c общего вида анализируется аналогично, если воспользоваться леммой B6.4.

Пусть $H(E), L(E) \rightarrow \mathcal{B}$ обозначают C^0 -векторные расслоения со слоями $H_c(E), L^2(E)$ в точке $c \in \mathcal{B}$ соответственно, определенные в § B6. Благодаря тому что сопоставление точке $c \in \mathbb{C}$ оператора δ_c , рассматриваемого как линейный оператор из $H_c(E)$ в $L^2(E)$, является $\mathcal{G}$ -эквивариантным, оно определяет сечение расслоения $\text{Hom}(H(E), L(E))$ над $\mathcal{B}$.

Л е м м а C2.2. Сопоставление точке $c \in \mathcal{B}$ оператора $\delta_c \in \text{Hom}(H_c(E), L^2(E))$ задает непрерывное сечение расслоения $\text{Hom}(H_c(E), L(E))$, которое является в действительности фредгольмовым морфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь локальными тривиализациями расслоений $H(E)$ и $L(E)$, определенными в § B6, достаточно проверить, что для фиксированной точки $c \in \mathbb{C}$ сопоставление сечению $\varphi \in H_c(Q) \cap \Gamma(Q)$ оператора $\delta_{c+\varphi} \in \text{Hom}(H_c(E), L^2(E))$ непрерывно. Действительно, $\delta_{c+\varphi} - \delta_c$ есть компактный оператор, линейный по φ . Это было установлено в лемме 7.4 работы [9] для конкретных представлений группы $SU(2)$ и алгебры кватернионов; общий случай рассматривается аналогично.

Будучи оператором Фредгольма, δ_c при $c \in \mathcal{B}$ имеет конечномерное ядро. Решающим обстоятельством для теоремы A1.2 является то, что $\dim(\ker \delta_c)$ допускает оценку, зависящую только от значения $\mathcal{U}(c)$.

Предложение С2.3. Для заданных представлений группы $SU(2)$ и алгебры кватернионов на векторных пространствах V и V' соответственно определим расслоение $E(V, V') \rightarrow \mathbb{R}^3$, как выше. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}_n$. Определим, как и выше, оператор $\delta_c: H_c(E) \rightarrow L^2(E)$. Тогда существует непрерывная функция $\varkappa: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, такая, что

$$\dim(\ker \delta_c) \leq \varkappa(\|*F_A - \nabla_A \Phi\|_2) \cdot \|*F_A - \nabla_A \Phi\|_2.$$

Это предложение вытекает из более общего утверждения, касающегося билинейных форм на $H_c(E)$. Оно содержится в предложении С2.5 ниже.

Рассматриваемые билинейные формы имеют следующий вид. Пусть $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ — расслоение, определенное выше. Для $c \in \mathbb{C}$ обозначим через J ограниченную симметричную билинейную форму на $H_c(E)$. Имея в виду нижеследующее предложение С2.5, мы ограничимся формами J вида

$$J(\psi, \eta) = \langle \psi, \eta \rangle_c + \langle \psi, [\rho_*(\mathfrak{R}_0) + \tau^i \rho_*(\mathfrak{R}_i)] \eta \rangle_2, \quad (\text{С2.3})$$

где $\psi, \eta \in H_c(E)$, а сечения $\{\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_i\}_{i=1}^3 \subset \Gamma(\text{Ad } P)$ обладают тем свойством, что эндоморфизм $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \tau^i \mathfrak{R}_i$ принадлежит $L^2(\text{Ad } P \otimes \text{End } V')$.

Форма такого типа обладает свойством (*) относительно метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ на $H_c(E)$, сформулированным в § 6 работы [9]. Этот факт доказывается для трех примеров в лемме 6.7 работы [9], а более общий случай рассматривается аналогично (см. лемму С2.10). Из свойства (*) вытекает, что формы J указанного типа ограничены снизу.

Как и в [9], собственным вектором формы J с собственным значением $\lambda \in \mathbb{R}$ называется ненулевое сечение $\psi \in H_c(E)$, такое, что для всех $\eta \in H_c(E)$

$$J(\psi, \eta) = \lambda \langle \psi, \eta \rangle_c. \quad (\text{С2.4})$$

Из результатов § 6 работы [9] относительно билинейных форм на $H_c(E)$ следует

Л е м м а C2.4. Пусть J - симметричная билинейная форма на $H_c(E)$, обладающая свойством (*) относительно метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$. Пусть собственное значение $\lambda < 1$. Тогда существует конечное число $N(\lambda, J)$ собственных векторов $\{\psi_i\}_{i=1}^N \in H_c(E)$ формы J , таких, что форма J ограничена снизу числом λ на ортогональном дополнении к $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ в пространстве $H_c(E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим лемму 6.6 из работы [9] к билинейной форме $J(\cdot, \cdot) - \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle_c$ на $H_c(E)$.

Для форм J , заданных выражением (C2.3), можно получить также оценку сверху числа $N(\lambda, J)$ из предыдущей леммы.

П р е д л о ж е н и е C2.5. Пусть $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть векторное расслоение, введенное в § C1. Пусть $c \in \mathbb{C}$ и $J \in \text{Sym}_2 H_c(E)^*$ - форма, заданная выражением (C2.3). Положим

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_i \tau^i \in L^2(\text{Ad } P \otimes \text{End } V'),$$

как и в (C2.3). Для $\lambda < 1$ пусть $N(\lambda, J)$ обозначает число собственных векторов формы J с собственными значениями $\leq \lambda$. Тогда $N(\lambda, J)$ ограничено сверху величиной $z(\lambda, \mathfrak{U}(c), \|\mathfrak{R}\|_2) \cdot \|\mathfrak{R}\|_2$, где $z(\cdot) \in [1, \infty)$ зависит, как указано, только от точки c , формы J и числа λ и функция $z(\cdot)$ непрерывна на множестве $(-\infty, 1) \times [0, \infty) \times [0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения C2.3 на основе предложения C2.5. Результат вытекает из формулы Вейтценбёка для оператора δ_c , которая показывает, что билинейная форма $\langle \delta_c \cdot, \delta_c \cdot \rangle_2$ на $H_c(E)$ относится к типу, рассматриваемому в предложении C2.5. В указанной формуле Вейтценбёка эндоморфизм $\mathfrak{R}$ из формул (C2.2), (C2.3) переводит сечение $\phi \in \Gamma(E)$ в сечение

$$\sum_{i=1}^3 \tau^i (\rho_* (\nabla_A \Phi - *F_A)_i) \phi. \quad (\text{C2.5})$$

Следовательно, $\|\mathfrak{R}\|_2 \leq \zeta \cdot \|*F_A - \nabla_A \Phi\|_2$, где константа $\zeta < \infty$ не зависит от c . Более того, в работе [16] показано (см.

также $[4/7]$, что если $c \in \mathfrak{C}_n$, то $\mathcal{U}(c) = \frac{1}{2} \|F_A - * \nabla_A \Phi\|_2^2 + 4\pi n$, и, таким образом, из предложения C2.5 мы получаем требуемую оценку на $\dim(\ker \delta_c)$.

Доказательство предложения C2.5 опирается на доказательство теоремы 3.2 из работы $[22/]$. Его идея состоит в том, чтобы рассмотреть вектор $v \in H_c(E)$, являющийся линейной комбинацией ортонормированных собственных векторов $\{\psi_i\}$ формы J , собственные значения которых не превосходят $\lambda (< 1)$. Предположим, что $\|v\|_c = 1$, так что

$$v = \sum_i \alpha_i \psi_i \quad \text{и} \quad \sum_i \alpha_i^2 = 1. \quad (C2.6)$$

Заметим, что

$$J(v, v) = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2 < \lambda.$$

Но из (C2.3) следует сверх того, что

$$1 - \lambda \leq |\langle v, \rho_*(\mathfrak{R})v \rangle|. \quad (C2.7)$$

Наша цель заключается в том, чтобы прийти к противоречию с неравенством (C2.7), предполагая, что число $N(\lambda, J)$ слишком велико.

Пусть $\psi \in H_c(E)$ — собственный вектор формы J с собственным значением $\lambda < 1$. Тогда формула (C2.4) дает нам эллиптическое дифференциальное условие на сечение ψ . Поэтому из стандартных теорем о регулярности (ср. $[17/]$, гл. 6) вытекает, что сечение $\psi \in \Gamma(E)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_A^2 \psi + \rho_*(\Phi)^2 \psi + \mathfrak{R}' \cdot \psi = 0, \quad (C2.8)$$

где $\mathfrak{R}' = (1 - \lambda)^{-1} \rho_*(\mathfrak{R})$.

Заметим, во-первых, что норма $\|\psi\|_\infty$ допускает априорную оценку.

Л е м м а C2.6. Пусть точка $c \in \mathfrak{C}$ и сечение $\psi \in H_c(E)$ удовлетворяют уравнению (C2.8), причем $\|\psi\|_c = 1$. Предположим, что эндоморфизм $\mathfrak{R}' \in L^2(\text{End } E) \cap \Gamma(\text{End } E)$. Тогда

$\|\psi\|_\infty \leq \varkappa(1 + \|\mathcal{R}'\|_2)$, где число $\varkappa < \infty$ не зависит от выбора $c, \mathcal{R}'$ и ψ .

Доказательство. Если сечение ψ удовлетворяет уравнению (C2.8), то почти всюду на $\mathbb{R}^3$

$$-\Delta|\psi| \leq |\mathcal{R}'||\psi|. \quad (\text{C2.9})$$

Функция Грина оператора $-\Delta$ совпадает с ядром $(4\pi|x-y|)^{-1} \in (\Gamma_0(\mathbb{R}^3) \times \Gamma_0(\mathbb{R}^3))^*$. Зададим функцию $\beta^x(y) = \beta(|x-y|)$, где $\beta(t) \in C^\infty([0, \infty))$ — обычная сглаживающая функция (см. § A3). Умножим обе части неравенства (C2.9) на $\beta^x(y)(4\pi|x-y|)^{-1}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^3$. После двух интегрирований по частям получаем неравенство

$$|\psi|(x) \leq \frac{1}{4\pi} \int \frac{\beta^x}{|x-(\cdot)|} |\mathcal{R}'||\psi| + \varkappa \int_{|x-(\cdot)| < 1} |\psi|.$$

Здесь $\varkappa < \infty$ — фиксированная константа. Тогда в силу неравенства Гёльдера и леммы A4.1

$$|\psi|(x) \leq \varkappa \left(\|\mathcal{R}'\|_2 \left\| \frac{\psi}{x-(\cdot)} \right\|_2 + \|\psi\|_6 \right) \leq \varkappa(1 + \|\mathcal{R}'\|),$$

что и требовалось доказать.

Второй шаг в доказательстве предложения C2.5 обеспечивается равномерной оценкой $\overline{C}^{0,1/2}$ -нормы $\|\psi\|_{0,1/2}$ сечения ψ .

Л е м м а C2.7. При тех же предположениях, что и в лемме C2.6,

$$\|\psi\|_{0,1/2} \leq \varkappa(1 + \|\mathcal{R}'\|_2)(1 + \mathcal{U}(c) + \|\mathcal{R}'\|_2), \quad (\text{C2.10})$$

$$\|\nabla_A \psi\|_c \leq \varkappa(1 + \|\mathcal{R}'\|_2)(1 + \mathcal{U}(c) + \|\mathcal{R}'\|_2).$$

где константа $\varkappa < \infty$ не зависит от c, ψ и $\mathcal{R}'$.

Доказательство. Из формулы (С2.8) и предыдущей леммы следует, что

$$\|\nabla_A^2 \psi\|_2 \leq \|p_*(\Phi)^2 \psi\|_2 + \varkappa(1 + \|\mathfrak{K}'\|_2) \|\mathfrak{K}'\|_2.$$

Интегрируя по частям, получаем, так же как в [5, гл. 5], что

$$\|\nabla_A(\nabla_A \psi)\|_2 \leq \varkappa [\|\nabla_A^2 \psi\|_2 + (\|\psi\|_\infty + \|\nabla_A \psi\|_2) \|F_A\|_2],$$

где константа $\varkappa < \infty$ не зависит от ψ . Применяя еще раз лемму С2.6, приходим к неравенству

$$\|\nabla_A(\nabla_A \psi)\|_2 \leq \varkappa [\|p_*(\Phi)^2 \psi\|_2 + (1 + \|\mathfrak{K}'\|_2)(\mathfrak{U}(c)^{1/2} + \|\mathfrak{K}'\|_2)]. \quad (\text{С2.11})$$

Теперь, так же как при доказательстве леммы В6.4, рассмотрим множество $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3: |\Phi|(x) < 3/4\}$. Как и там, положим $\ell(x) = \beta(|\Phi|(x))$. Положим далее $\hat{\Phi} = \Phi/|\Phi|$ на $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ и заметим, что при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$

$$\begin{aligned} p_*(\Phi)^2 \psi &= p_*(\hat{\Phi}) p_*(\Phi) \psi + (|\Phi| - 1) p_*(\hat{\Phi})^2 \psi + \\ &\quad + (|\Phi| - 1)^2 p_*(\hat{\Phi})^2 \psi. \end{aligned} \quad (\text{С2.12})$$

Поскольку $|p_*(\hat{\Phi})\psi| \leq |\psi|$ и $x \notin \Omega$, то $|p_*(\hat{\Phi})\psi| \leq 2|p_*(\Phi)\psi|$. Используя эти два факта, формулу (С2.12), неравенство Гёльдера, оценку (В6.3) и лемму А4.1, получаем априорную оценку

$$\begin{aligned} \|p_*(\Phi)^2 \psi\|_2 &\leq \|\ell \psi\|_2 + \|p_*(\Phi)\psi\|_2 + \|(1 - \ell)(1 - |\Phi|) p_*(\hat{\Phi})\psi\|_2 + \\ &\quad + \|(1 - \ell)(1 - |\Phi|)^2 \psi\|_2 \leq \\ &\leq \varkappa [(V_{01} \Omega)^{1/3} + 1 + \|1 - |\Phi|\|_6^2] \leq \varkappa [\mathfrak{U}(c) + 1]. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (С2.12) вытекает априорная оценка

$$\|\nabla_A(\nabla_A \psi)\|_2 \leq \varkappa(1 + \|\mathfrak{K}'\|_2)(1 + \mathfrak{U}(c) + \|\mathfrak{K}'\|_2). \quad (\text{С2.13})$$

Теперь первое утверждение леммы C2.7 следует из леммы A4.2. Второе утверждение леммы C2.7 вытекает из дополнительной цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \|\rho_*(\Phi)\nabla_A\psi\|_2 &\leq \|b\nabla_A\psi\|_2 + \|(1-b)\rho_*(\hat{\Phi})\nabla_A\psi\|_2 + \|(1-b)(1-|\Phi|)\rho_*(\hat{\Phi})\nabla_A\psi\|_2 \leq \\ &\leq \kappa \left[\|\nabla_A\psi\|_2 + \|\nabla_A\psi\|_2^{1/2} \|\nabla\psi\|_6^{1/2} \|1-|\Phi|\|_6 \right] \leq \\ &\leq \kappa (1 + \|\mathfrak{A}'\|_2) (1 + \mathcal{U}(c) + \|\mathfrak{A}'\|_2). \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использована оценка (C2.13) и лемма A4.1.

Для того чтобы применить лемму C2.7 к доказательству предложения C2.5, нужно ввести множество $U \subseteq \mathbb{R}^3$, на котором L^2 -норма эндоморфизма $\mathfrak{A}$ велика.

О п р е д е л е н и е C2.8. Пусть $\beta^x(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ обозначает функцию $\beta(|x - (\cdot)|)$, где β — сглаживающая функция из § A3. Пусть $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}$; определим для каждого $x > 0$ множество

$$\hat{U}(x) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \int_{\mathbb{R}^3} \beta^x |\mathfrak{A}|^2 \geq x^2 \right\}.$$

и множество

$$U(x) = \bigcup_{x \in \hat{U}(x)} \{y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| < 1\}. \quad (C2.14)$$

В следующей лемме собраны нужные нам свойства множества $U(x)$:

Л е м м а C2.9. Пусть эндоморфизм $\mathfrak{A}$ принадлежит L^2 , и пусть $U(x)$ — множество, введенное в определении C2.8. Тогда

(1) $U(x)$ ограничено;

(2) число линейно связанных компонент множества $U(x)$ не превосходит $x^{-2} \|\mathfrak{A}\|_2^2$;

(3) если точки $x, y \in \mathbb{R}^3$ лежат в одной линейно связной компоненте множества $U(x)$, то $|x - y| < 4x^{-2} \|\mathfrak{A}\|_2^2$;

(4) $\text{Vol } U(x) \leq 4^4 (\pi/3) x^{-6} \|\mathfrak{A}\|_2^6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) очевидно, так как $\mathcal{R} \in L^2$. Утверждение (2) следует из того, что для каждой линейно связной компоненты $q \in U(\mathcal{X})$ выполняется оценка

$$\mathcal{X}^2 \leq \int_q |\mathcal{R}|^2 \leq \|\mathcal{R}\|_2^2.$$

Утверждение (3) справедливо потому, что если точки x и y лежат в линейно связной компоненте q множества $U(\mathcal{X})$, то внутри q найдется по крайней мере $|x-y|/4$ непересекающихся шаров радиуса 1, а интеграл от $|\mathcal{R}|^2$ по каждому из них больше $\mathcal{X}^2$. С другой стороны, интеграл от $|\mathcal{R}|^2$ по q меньше $\|\mathcal{R}\|_2^2$. Утверждение (4) следует из (3).

Для завершения доказательства предложения C2.5 зададим сечение $v \in H_c(E)$, как в формуле (C2.6). Для данного $\mathcal{X} > 0$ из оценки (C2.7) следует, что

$$1 - \lambda \leq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus U(\mathcal{X})} |(v, \rho(\mathcal{R})v)| + \zeta \cdot \int_{U(\mathcal{X})} |\mathcal{R}| |v|^2, \quad (C2.15)$$

где константа $\zeta < \infty$ зависит только от $SU(2)$ -представления ρ .

Л е м м а C2.10. Существует непрерывная функция
 $\nu: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, такая, что для любых $c \in \mathbb{C}$,
 $\mathcal{X} \in (0, \infty)$ и для всех сечений $\psi \in H_c(E)$

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus U(\mathcal{X})} |(\psi, \rho(\mathcal{R})\psi)| \leq \nu(\mathcal{U}(c)) \mathcal{X}^{1/3} \|\mathcal{R}\|_2^{2/3} \|\psi\|_c^2.$$

Доказательство этой леммы будет дано в конце этого параграфа.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения C2.5 на основе леммы C2.10. Предположим, что для данного $\mathcal{X} > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $|v|(x) < \varepsilon$ при $x \in U(\mathcal{X})$. Тогда по лемме C2.10 и неравенству (C2.15)

$$1 - \lambda \leq \zeta \left[(1 + \mathcal{U}(c)) \mathcal{X}^{1/3} \|\mathcal{R}\|_2^{2/3} + \varepsilon^2 \|\mathcal{R}\|_2 (V \circ 1_{U(\mathcal{X})})^{1/2} \right].$$

Пользуясь леммой C2.9, получаем

$$1 - \lambda \leq \zeta_1 [(1 + \mathfrak{U}(c)) \varepsilon^{1/3} \| \mathfrak{R} \|_2^{2/3} + \| \mathfrak{R} \|_2^4 \varepsilon^2 \varepsilon^{-3}]. \quad (C2.16)$$

Положим $N = N(J, \lambda)$ и определим величину $d = \dim V \cdot \dim V'$. Для заданных N/d точек в $\mathbb{R}^3$ существует линейная комбинация собственных векторов $v = \sum_i \alpha_i \psi_i$ (см. (C2.6)), такая, что вектор v равен нулю в этих точках. Из неравенства (C2.10) получаем, что

$$\| v \|_{0, 1/2} \leq \zeta_1 \cdot (1 - \lambda)^{-2} (1 + \| \mathfrak{R} \|_2) (1 + \mathfrak{U}(c) + \| \mathfrak{R} \|_2). \quad (C2.17)$$

Следовательно, если вектор v равен нулю в точке x , то $|v(y)| < \varepsilon$ для точек $y \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию

$$|x - y| < \| v \|_{0, 1/2}^{-2} \varepsilon^2.$$

Поэтому можно найти совокупность из $N' = [Vol \cdot U(\varepsilon)] (3/4) \pi \cdot d \cdot \| v \|_{0, 1/2}^6 \cdot \varepsilon^{-6}$ точек в $U(\varepsilon)$, таких, что если вектор v равен нулю во всех этих точках, то норма $|v(\cdot)|$ не превосходит ε на $U(\varepsilon)$.

Выберем теперь число ε , удовлетворяющее условию $\varepsilon^{1/3} \leq (1/4)(1 - \lambda) \zeta_1^{-1} (1 + \mathfrak{U}(c))^{-1} (1 + \| \mathfrak{R} \|_2^{2/3})^{-1}$, и положим $\varepsilon^2 = (1/4) \zeta_1^{-1} \varepsilon^3 \| \mathfrak{R} \|_2^{-4} (1 - \lambda)$. Тогда из (C2.16) следует, что

$$N < d \cdot [Vol U(\varepsilon)] \cdot \frac{3}{4} \pi \cdot \| v \|_{0, 1/2}^6 \varepsilon^{-6}. \quad (C2.18)$$

Предложение C2.5 вытекает непосредственно из неравенств (C2.17) и (C2.18) и леммы C2.9.

Доказательство леммы C2.10. Эту лемму достаточно доказать, взяв вместо c элемент $c_1(c)$, определенный в § ВЗ. Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться формулой (B7.2) и предложением B6.2, а также неравенством $\| c_1(c) - c \|_c^2 \leq 4 \mathfrak{U}(c)$ (чтобы его вывести, нужно умножить уравнение (B3.2) на $\Phi_1(c) - \Phi(c)$, проинтегрировать по $\mathbb{R}^3$ и воспользоваться формулой интегрирования по частям). Пусть $c_1(c) = (A, \Phi)$. Доказательство основано на использовании приема Морри (см. [17, лемма 5.2.17]). Представим сечение $\psi \in H_{c_1}(E)$ в виде $\psi = \psi^L + \psi^T + \psi^{\Omega}$, как при доказательстве леммы B6.4.

Заметим, что если сечения $\eta, \phi \in H_{c_1}(E)$ и $\sigma \in \Gamma(\text{Ad } P)$, то

$$(\eta^L, \rho_*(\sigma) \phi^L) = 0. \quad (C2.19)$$

Действительно, это следует из равенств

$$\rho_*(\sigma) \phi^L = -\rho_*([\hat{\Phi}, [\hat{\Phi}, \sigma]]) \phi^L = -\rho_*(\hat{\Phi})^2 \rho_*(\sigma) \phi^L.$$

Поэтому

$$|(\phi, \rho_*(\mathcal{R}) \psi)| \leq \zeta_1 |\mathcal{R}| |\phi| |\psi'|, \quad (C2.20)$$

где $|\psi'| = |\psi^T| + |\psi^{\text{sa}}|$. Здесь $\zeta_1 < \infty$ — фиксированная константа. Заметим, что в силу (B6.3), (B6.4)

$$\|\psi\|_6 \leq \zeta_1 \|\psi\|_{c_1} \text{ и } \|\psi^T\|_2 + \|\psi^{\text{sa}}\|_2 \leq \zeta_1 (1 + \mathcal{U}(c)) \|\psi\|_{c_1}. \quad (C2.21)$$

Теперь, для того чтобы применить прием Морри, покроем пространство $\mathbb{R}^3$ равномерной сеткой шаров единичного радиуса $\{B_\alpha\}$. Пусть $\{\omega_\alpha^2\}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы, для которого модули $|d\omega_\alpha|$ ограничены константой, не зависящей от α . Примем во внимание, что

$$\int_{B_\alpha \cap (\mathbb{R}^3 \setminus U(\alpha))} |\mathcal{R}|^2 < \infty. \quad (C2.22)$$

Из неравенства Гёльдера и оценки (C2.20) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus U(\alpha)} (\phi, \rho_*(\mathcal{R}) \psi) \leq \zeta_1 \|\phi\|_6 \cdot \|\mathcal{R}\|_2^{2/3} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^3 \setminus U(\alpha)} |\mathcal{R}|^{2/3} |\psi'|^2 \right]^{1/2}. \quad (C2.23)$$

Далее, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus U(\alpha)} |\mathcal{R}|^{2/3} |\psi'|^2 &\leq \sum_{\alpha} \int_{B_\alpha \cap (\mathbb{R}^3 \setminus U(\alpha))} \omega_\alpha^2 |\mathcal{R}|^{2/3} |\psi'|^2 \leq \\ &\leq \zeta_1 \cdot \infty^{2/3} \sum_{\alpha} \|\omega_\alpha |\psi'|\|_6^\infty \leq \\ &\leq \zeta_1 \cdot \infty^{2/3} \sum_{\alpha} \int [\omega_\alpha^2 |d|\psi'||^2 + |d\omega_\alpha|^2 |\psi'|^2] \leq \\ &\leq \infty^{2/3} \nu'(\mathcal{U}(c)) \|\phi\|_{c_1}. \end{aligned} \quad (C2.24)$$

Второе из них получено при помощи неравенства Гёльдера с учетом оценки (С2.22). Третье есть неравенство Соболева (см. лемму А4.1), а в четвертом использованы лемма А4.1, предложение В3.4 и оценки (С2.21). Значение постоянной ζ изменяется от строки к строке, но во всех случаях не зависит от s и ϕ ; функция $\nu'(\cdot) \in C^0([0, \infty), (0, \infty))$. Теперь лемма следует непосредственно из оценок (С2.23) и (С2.24).

С3. Топология семейства операторов Дирака

Пространства $H(S)$ и $L(S)$, введенные в § С1 и В6, являются векторными расслоениями над паракомпактным пространством $\mathcal{B}$. Согласно лемме С2.2, семейство операторов Дирака, заданных формулой (С1.2) и параметризованных точками пространства $\mathcal{B}$, определяет фредгольмов морфизм $\delta: H(S) \rightarrow L(S)$. Как указано в работах [8] и [10], оператор δ естественным образом определяет характеристические классы

$$\chi^{p,q}(\delta) \in H^{2pq}(\hat{\mathcal{B}}; \mathbb{Z}) \text{ для } p, q \in (0, 1, \dots).$$

Здесь через $H^l(\cdot; \mathbb{Z})$ обозначена l -я группа когомологий с компактными носителями и коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Классы $\chi^{p,q}(\delta)$ представляют собой детерминанты классов Чжэня "виртуального" векторного расслоения $\text{Ind } \delta = [\ker \delta] - [\text{coker } \delta]$ в K -функторе пространства $\mathcal{B}$.

Предложение С3.1. Существует неограниченное множество $\Lambda \subseteq [0, 1, \dots) \times [0, 1, \dots)$, такое, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ и $(p, q) \in \Lambda$ выполняются условия $0 \neq \chi^{p,q}(\delta) \in H^{2pq}(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z})$.

С помощью предложений С3.1 и С2.3 мы немедленно получаем

Доказательство теоремы А2.1. Для фиксированного $n \in \mathbb{Z}$ пусть пара $(p, q) \in \Lambda$ такова, что $\chi^{p,q}(\delta) \neq 0$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ компактных подмножеств $F \subseteq \hat{\mathcal{B}}_n$, для которых ограничение элемента $\chi^{p,q}(\delta)$ на F с помощью отображения ограничения $H^{2pq}(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2pq}(F; \mathbb{Z})$ не равно нулю. Как указывалось в § А1, это семейство гомотопически инвариантно. Определим с помощью формулы (А1.7) функционал

$\mathcal{U}_{p,q}^n = \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$. В соответствии с предложением 5.3 работы Кошорке [10] характеристический класс $\chi^{p,q}(\delta)$ равен нулю в группе $H^{2p,q}(F; \mathbb{Z})$, если для всех $c \in F$ справедливы неравенства $\dim(\ker \delta_c) < p$, $\dim(\operatorname{coker} \delta_c) < q$. Следовательно, каждое подмножество $F \in \mathcal{F}$ должно включать конфигурацию c , для которой $\dim(\ker \delta_c) \geq p$. В действительности, поскольку индекс оператора δ_c равен $-n$ (см. [9], а также [23]), но воспользуемся леммой C2.2), каждое подмножество $F \in \mathcal{F}$ должно содержать также конфигурацию c , для которой $\dim(\ker \delta_c) \geq q - n$. Тогда предложение C2.3 дает нижнюю границу для функционала $\mathcal{U}_{p,q}^n$. Так как множество Λ неограничено, то из предложения C2.3 следует, что множество $\{\mathcal{U}_{p,q}^n : (p, q) \in \Lambda\} \subset \operatorname{Crit}_n \subset [0, \infty)$ также неограничено. Это доказывает теорему A2.1.

Доказательство предложения C3.1 близко следует рассуждениям Атки и Джонса из работы [12], и особенно их доказательству теоремы 4.6.

Начнем с небольшого отступления. Для чисел $t \in [0, \infty)$ и $0 < n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $C_{n,t}$ пространство неупорядоченных наборов из n точек пространства $\mathbb{R}^3$, отстоящих друг от друга больше чем на t . Следовательно, $C_{n,t}$ является факторпространством по симметрической группе Σ_n пространства

$$\tilde{C}_{n,t} = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n : \inf_{\alpha \neq \beta} |x_\alpha - x_\beta| > t\}.$$

При $t > 0$ пространства $C_{n,t}$ являются сильными деформационными ретрактами пространства C_n неупорядоченных наборов из n различных точек в $\mathbb{R}^3$.

Конструкция, приведенная в работе [5, гл. 4], дает совокупность приближенных решений в пространстве $\hat{\mathcal{B}}_n$ при $n > 0$ уравнения Богомольного (A1.5). Это множество решений $V_n \subset \hat{\mathcal{B}}_n$ описывается ниже (см. определение C4.2). Оно параметризует конфигурации, являющиеся композициями n далеко разнесенных решений типа Прасада – Зоммерфельда уравнения (A1.5). (Эти решения были найдены в работе [24] и приведены в формуле (C4.8).)

Л е м м а C3.2. Существует семейство конфигураций $V_n = \{c(n, t; \{x_\alpha\}_{\alpha=1}^n)\} \subset \hat{\mathcal{B}}_n$, параметризованное числом $t \in [1, \infty)$ и набором $\{x_\alpha\}_{\alpha=1}^n \in C_{n,t}$, которое обладает следующими свойствами:

(1) Для каждого n существует такое $t_n \in (1, \infty)$, что для каждого $t \in [t_n, \infty)$ отображение, сопоставляющее набору $\{x_\alpha\} \in C_{n,t}$ конфигурацию $c(n, t, \{x_\alpha\}) \in \mathcal{B}_n$, является вложением $J: C_{n,t} \rightarrow \mathcal{B}_n$.

(2) Для фиксированных $t \in [t_n, \infty)$ и $y = \{x_\alpha\} \in C_{n,t}$ существует такое $g_y \in \mathcal{G}$, что $g_y c(n, t; y)(x) = c^1(x - x_\alpha)$, если точка $x \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям $|x - x_\alpha| < \ln t$. Здесь через $c^1 = (A^1, \Phi^1) \in \mathcal{C}_1$ обозначено единственное (с точностью до действия группы $\mathcal{G}$) решение типа Прасала - Зоммерфельда уравнения (A1.5), удовлетворяющее условию $\Phi^1(x=0) = 0$.

(3) Существуют постоянная ζ , не зависящая от $n \in \mathbb{Z}$, число $t \in [t_n, \infty)$ и конфигурация $y \in C_{n,t}$, обладающие следующим свойством: положим $c(n, t; y) = (A, \Phi)$, тогда

$$||\Phi| - 1| \leq \zeta \sum_{\alpha} (1 + |x - x_{\alpha}|)^{-1},$$

$$|*F_A + \nabla_A \Phi| \leq \zeta \sum_{\alpha} (1 + |x - x_{\alpha}|)^{-2}.$$

(4) Если точка $x \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию $\inf_{\alpha} |x - x_{\alpha}| < \ln t$, то $*F_A - \nabla_A \Phi = 0$. Если $\inf_{\alpha} |x - x_{\alpha}| \geq \ln t$, то $|*F_A - \nabla_A \Phi| \leq \zeta t^{-1/2} \sum_{\alpha} |x - x_{\alpha}|^{-2}$.

Доказательство этой леммы, а также леммы C3.4 приводится в § C4.

Первый шаг при доказательстве предложения C3.1 заключается в исследовании зависимости ядра и коядра оператора δ_c от решения $c \in V_n$; задача состоит в вычислении сужения характеристического класса $\chi^{p,q}(\delta)$ на $H^*(V_n; \mathbb{Z})$.

Л е м м а C3.3. Для каждого числа $0 < n \in \mathbb{Z}$ существует такое $t(n) \in [t_n, \infty)$, что для любых $t > t(n)$ и $c \in J(C_{n,t})$ имеют место соотношения $\ker \delta_c = \emptyset$ и $\dim(\operatorname{coker} \delta_c) = n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение вытекает из предложения C2.3 и свойства (4) множества V_n .

Теперь, используя лемму C2.2 и свойство (I) множества V_n , можно установить прямым рассуждением, что сопоставление при $t > t(n)$ точке $c(n, t; y) \in J(C_{n,t})$ слоя, совпадающего с векторным пространством $\operatorname{coker} \delta_c \simeq \mathbb{C}^n$, задает C^0 -векторное расслоение над $J(C_{n,t})$. Это расслоение обозначается через N_n .

Рассмотрим расслоение $N_n \rightarrow J(C_{n,t})$.

Л е м м а С3.4. Пусть заданы $0 < n \in \mathbb{Z}$ и $t > t(n)$, а расслоение $N_n \rightarrow J(C_{n,t})$ определено, как выше. Существует такое $t'(n) < \infty$, что для $t > t'(n)$ расслоение над $C_{n,t}$, являющееся обратным образом расслоения N_n , изоморфно векторному расслоению, ассоциированному со стандартным представлением σ_n группы $\pi_1(C_{n,t}) \approx \Sigma_n$.

Доказательство леммы С3.4 вынесено в § С4. Отметим здесь только, что конструкция, приведенная в § С4, ставит в соответствие каждой конфигурации $s(n, t, \{x_\infty\})$ совокупность из n приближенных "нулевых мод" оператора δ_c^* , каждая из которых сосредоточена вблизи точки x_∞ . Тогда предложение С2.3 дает возможность изоморфно спроектировать пространство $C^n \subset H_c(E)$, совпадающее с этим приближенным коядром, на коядро оператора δ_c .

Для $0 < n \in \mathbb{Z}$ пусть число $t'(n)$ такое, как в лемме С3.4. Предположим, что $t > t'(n)$. Классы Чжэня расслоения $J^{-1}(N_n) \rightarrow C_{n,t}$ вычислены Атьей и Джонсом в предложении 4.5 работы [12].

Ввиду того что расслоение $J^{-1}(N_n) \rightarrow C_{n,t}$ является обратным образом виртуального расслоения $\text{Ind } \delta \in K(\hat{\mathcal{B}}_n)$, из вычислений, проведенных в [12], следует, что некоторые конкретные классы Чжэня расслоения $\text{Ind } \delta$ не обращаются в нуль в кольце $H^*(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z})$. В частности, из [12] вытекает следующая

Л е м м а С3.5. Для любого заданного $k \geq 0$ выберем простое число $p > k+1$. Тогда в кольце $H^*(\hat{\mathcal{B}}_{p(p-1-k)}; \mathbb{Z})$ класс $\chi^{p-1-k, p-1}(\delta) \neq 0 \pmod p$.

Второй шаг при доказательстве предложения С3.1 заключается в установлении связи между классами $\chi^{p,q}(\delta)$ в $H^*(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z})$ и $\chi^{p,q}(\delta)$ в $H^*(\hat{\mathcal{B}}_l; \mathbb{Z})$ при $l \neq n$. Атья и Джонс [12] столкнулись с аналогичной проблемой; наши рассуждения заимствованы из их работы.

Положим $\Omega_n = \Omega_n(S^2, S^2)$. Отметим, что отображение I индуцирует изоморфизм с помощью взятия обратного образа между кольцом $H^*(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z})$ и кольцом $H^*(\Omega_n; \mathbb{Z})$ (см. предложение В5.1). Чтобы избежать путаницы, обозначим через $\chi_n^{p,q}$ класс $I^* \chi^{p,q}(\delta)$ в группе $H^{2p,q}(\Omega_n; \mathbb{Z})$.

Характеристические классы $\{\chi_n^{p,q}\}$ можно описать следующим образом. Во-первых, прямое рассуждение, аналогичное доказательству предложения В6.3, показывает, что вложения пространства $H(S)$ в $\hat{\mathcal{B}} \times L_{4,loc}^2(S)$ и пространства $L(S)$ в $\hat{\mathcal{B}} \times L^2(S)$ индуцируют изоморфизмы векторных расслоений

$$I^*H(S) \simeq \Omega(S^2, S^2) \times L_1^2(S),$$

$$I^*L(S) \simeq \Omega(S^2, S^2) \times L^2(S)$$

(см. [9, § 6,7], а также [23]). Следовательно, $I^*\delta$ задает непрерывное отображение

$$\begin{aligned} I^*\delta: \Omega(S^2, S^2) &\rightarrow \text{Fred}(L_1^2(S), L^2(S)) \\ &\downarrow \\ &\mathbb{Z} \times BU \end{aligned}$$

Кольцо когомологий классифицирующего пространства BU является кольцом полиномов от универсальных классов Чжэня, причем каждый класс $\chi_n^{p,q}(\delta)$ является обратным образом некоторого такого полинома при отображении $I^*\delta$.

Как хорошо известно, все Ω_n попарно гомотопны. Гомотопия пространства Ω_n на Ω_{n+1} индуцируется коммутативной операцией сложения на группе $\pi_2(S^2, n)$. Действие этой операции сложения на $\chi_n^{p,q}$ описано в следующей лемме.

Л е м м а 3.6. Существует отображение $t: \Omega_n \rightarrow \Omega_{n+1}$, индуцирующее гомотопическую эквивалентность, такое, что для каждой пары неотрицательных целых чисел (p, q) классы $t^*\chi_{n+1}^{p,q}$ и $\chi_n^{p,q}$ когомологичны в группе $H^{2pq}(\Omega_n; \mathbb{Z})$.

Доказательство леммы 3.6 приведено в § 5.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 3.1 на основе лемм 3.2, 3.3 и 3.6. В лемме 3.5 утверждается, что существуют произвольно большие неотрицательные числа p, q и целое $n > 0$, такие, что $\chi_n^{p,q}(\delta) \neq 0$ в $H^{2pq}(\hat{\mathcal{B}}_n; \mathbb{Z})$. Но тогда $\chi_n^{p,q}(\delta) \neq 0$ в $H^*(\Omega_n; \mathbb{Z})$, и из леммы

С3.6 следует, что $\chi_n^{p,q} \neq 0$ в $H^{2pq}(\hat{\mathcal{B}}_l; \mathbb{Z})$ при любых $l \in \mathbb{Z}$.

Отметим в скобках, что оператор Дирака определяет второе отображение из $\Omega(S^2, S^2)$ в $\mathbb{Z} \times BU$, задаваемое полным символом. Действительно, сопоставление отображению $e \in \Omega(S^2, S^2)$ полного символа $\sigma(\delta_{I(e)})$ задает после ограничения на единичную сферу S^5 в T^* (т.е. на множество $\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3: |x|^2 + |\xi|^2 = 1\}$) следующее непрерывное отображение из S^5 в $U(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) = U(4)$. [25]:

$$\hat{\sigma}(e)(x, \xi) = i\xi \cdot \otimes 1 + |x|1 \otimes e,$$

где символ $\xi \cdot$ обозначает клиффордово умножение на элемент ξ .

Изменяя e в пространстве $\Omega(S^2, S^2)$, получим непрерывное отображение $\hat{\sigma}: \Omega(S^2, S^2) \rightarrow \Omega^5(U(4))$. Так как при $n > 4$ группа $U(4)$ вкладывается в $U(n)$ как

$$\left(\begin{array}{c|c} U(4) & 0 \\ \hline 0 & 1_{n-4} \end{array} \right),$$

то, переходя к прямому пределу, получим непрерывное отображение $\hat{\sigma}: \Omega(S^2, S^2) \rightarrow \Omega^5(U)$, где U — группа унитарных автоморфизмов сепарабельного комплексного гильбертова пространства (например, $L^2(S)$).

Следуя работе Атьи — Джонса [12], можно воспользоваться теоремой Ботта о периодичности для отождествления (с точностью до гомотопии) пространства $\Omega^5(U)$ с $\mathbb{Z} \times BU$. Следовательно, $\hat{\sigma}$ непрерывно отображает $\Omega(S^2, S^2)$ в $\mathbb{Z} \times BU$.

Теорема Атьи — Зингера об индексе для семейств утверждает, что два отображения $I^*\delta$ и $\hat{\sigma}$ гомотопны как отображения из $\Omega(S^2, S^2)$ в $\mathbb{Z} \times BU$.

С4. Оператор Дирака для мультимонополей

Этот параграф содержит доказательства лемм С3.2 и С3.4. Вместе с леммой С3.6 они образуют, так сказать, суперструктуру, которая лежит в основе несколько формальной связи между операторами Дирака и когомологиями пространства $\hat{\mathcal{B}}$.

Доказательство леммы С3.2. Конфигурации в пространствах V_n были построены в работе [5, гл.4.7], хотя использованный там язык был больше предназначен физикам, чем в данной работе. По этой причине приведем здесь краткое изложение указанной конструкции. Положим $y = (n, t, \{x_\alpha\})$. Конфигурация $c(y) \in V_n$ определяется следующими кохомологическими данными: конечным открытым покрытием $\{U_i(y)\}$ пространства $\mathbb{R}^3$; функциями перехода $\{g_{ij}(y): U_i \cap U_j \rightarrow SU(2)\}$; полями $\{c_j(y) = (A_j, \Phi_j)(y)\}$ на $U_j(y)$, удовлетворяющими на пересечениях $U_i \cap U_j$ коциклическому условию $c_i(y) = g_{ij}(y) \cdot c_j(y)$. Поля $\{c_j\}$ и функции перехода $\{g_{ij}\}$ предполагаются C^∞ -гладкими.

Данные $\{U_i(y), g_{ij}(y)\}$ при фиксированном y определяют главное $SU(2)$ -расслоение $P(y) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Данные $\{c_j(y)\}$ задают пару $c'(y)$, состоящую из гладкой связности на расслоении $P(y)$ и сечения присоединенного расслоения $\text{Ad } P(y)$.

Изоморфизм $\eta: P \rightarrow P(y)$ определяет (с помощью взятия обратного образа) элемент $\eta^* c'(y) \in \mathcal{C}_n$. Так как два любых таких изоморфизма отличаются на элемент из группы $\mathcal{G} = \text{Aut } P$, то, сопоставляя набору $y = (n, t, \{x_\alpha\})$ данные $(P(y), c'(y))$, мы получим однозначно определенный элемент $[c'(y)] \in \mathcal{C}_n / \mathcal{G} = \mathcal{B}_n / SU(2) = \hat{\mathcal{B}}_n / S^1$.

Для удобства читателя в определении С4.2 в конце этого параграфа приводится явное описание кохомологических данных $\{U_i(y), g_{ij}(y), c_j(y)\}$, отвечающих паре $(P(y), c'(y))$. По ходу последующего обсуждения читателю следует обращаться к этому определению за уточнениями.

Утверждения (2) – (4) леммы С3.2 следуют из прямого вычисления, проведенного для пары $(P(y), c'(y))$. Подробности читатель найдет в работе [5, гл. 47].

Пусть на пространстве $\hat{\mathcal{B}}_n / S^1$ задана топология факторпространства. Для фиксированного $t \in [t_n, \infty)$ можно проверить непосредственно непрерывность отображения $[c'(\cdot)]$ из $C_{n,t}$ в $\hat{\mathcal{B}}_n / S^1$. Для этого нужно выбрать подпокрытие $\{U'_j\}$ покрытия $\{U_j(y)\}$, такое, что для каждой точки $y' \in C_{n,t}$, достаточно близкой к y , $\{U'_j\}$ является также подпокрытием покрытия $\{U_j(y')\}$. Это позволит нам непосредственно сравнить данные для наборов y и y' из определения С4.2. Детали мы оставляем читателю.

Заметим, что при фиксированном $t \in [t_n, \infty)$ отображение

$[c'(\cdot)]$ является вложением пространства $C_{n,t}$ в $\hat{\mathcal{B}}_n/S^1$. Действительно, сопоставление элементу $[c = (A, \Phi)] \in \hat{\mathcal{B}}_n/S^1$ множества

$$Z([c]) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x) = 0\}$$

определяет после сужения на $\text{Im}[c'(\cdot)]$ непрерывное обратное к $[c'(\cdot)]$ отображение.

Наконец, нам осталось показать, что при фиксированном $t \in [t_n, \infty)$ отображение $[c'(\cdot)]$ поднимается до вложения $J: C_{n,t} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}_n$. Пусть $y = (n, t, \{x_\alpha\})$. отождествим расслоение $P(y)$ над $U_{(1)} \subset \mathbb{R}^3$ с прямым произведением $U_{(1)} \times SU(2)$. Мы пользуемся здесь, в соответствии с определением С4.2, обозначением $(1) = (1, 1, \dots) \times \{-1, 1\}$. Положим $x(y) = (4 \sum_\alpha |x_\alpha|, 0, 0) \in U_{(1)}$. Обозначим точку в $P(y)|_{x(y)}$ через $p(y) = (x(y), 1)$.

Пусть $q(y) \in P(y)|_0$ — параллельный перенос с помощью связности, входящей в $c'(y)$, точки $p(y)$ в слой над точкой $0 \in \mathbb{R}^3$ вдоль отрезка прямой, соединяющего точки $x(y)$ и 0 .

Возвращаясь к $[c'(\cdot)]$, заметим, что сопоставление конфигурации $y = (n, t, \{x_\alpha\})$ набора $(P(y), c'(y), q(y))$ при фиксированном $t \in [t_n, \infty)$ определяет непрерывное вложение пространства $C_{n,t}$ в $(\mathcal{C}_n \times P_0)/\mathcal{G}$, которое обозначается через $[c'(\cdot), q(\cdot)]$.

Пусть $(c, q) \in \mathcal{C}_n \times P_0$. Параллельный перенос элемента q с помощью связности $A(c)$ вдоль лучей, исходящих из точки $0 \in \mathbb{R}^3$, задает непрерывное сечение расслоения $(\mathcal{C}_n \times P_0) \times_\mathcal{G} \Gamma(P)$ над пространством $(\mathcal{C}_n \times P_0)/\mathcal{G}$. Обозначим это сечение через s .

Сопоставляя элементу $(c, q) \in \mathcal{C}_n \times P_0$ элемент $s^*(c, q) \cdot c \in \hat{\mathcal{B}}_n$, получим непрерывное отображение из $(\mathcal{C}_n \times P_0)/\mathcal{G}$ на $\hat{\mathcal{B}}_n$. Пусть $j: C_{n,t} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}_n$ — образ $[c'(\cdot), q(\cdot)]$ в $\hat{\mathcal{B}}_n$. Так как $j(\cdot)$ переходит в $[c'(\cdot)]$ при проекции $\hat{\mathcal{B}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{B}}_n/SU(2)$, то отсюда вытекает, что отображение $j(\cdot)$ является вложением. Для набора $z = \{x_\alpha\} \in C_{n,t}$ положим $j(z) = (A(z), \Phi(z))$ и $x(z) = (4 \sum_\alpha |x_\alpha|, 0, 0)$. По построению $\Phi(z)(x(z)) = |\Phi(z)|(x(z)) \cdot \mathfrak{e}^3$.

С помощью определения С4.2 можно проверить, что $j(z) \in \mathcal{L}^0$ (см. определение (В4.1)). Пусть $R(\cdot)$ — отображение, фигурирующее в лемме В4.2. Отметим, что функция $|\Phi(z)|$ не обра-

падает в нуль на отрезке прямой между точками $x(z)$ и $(2R(j(z)), 0, 0)$. Таким образом, свойство накрывающей гомотопии для расслоения $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ дает нам непрерывное отображение $g(\cdot): C_{n,t} \rightarrow SU(2)$, такое, что для всех наборов $y \in C_{n,t}$ выполняется равенство

$$g_1(z)(\Phi(z)/|\Phi(z)|)(R(j(z))n)g_1^{-1}(z) = \sigma^3.$$

Наконец, отображения $j(\cdot)$ и $c_2(j(\cdot))$ гомотопны как отображения из $C_{n,t}$ в $\mathbb{R}^0$. Тем самым из свойства накрывающей гомотопии следует существование непрерывного отображения $g(\cdot): C_{n,t} \rightarrow SU(2)$, такого, что для всех $y \in C_{n,t}$

$$g(z)(\Phi_2(j(z))/|\Phi_2(j(z))|)(R(c_2(j(z)))n)g^{-1}(z) = \sigma^3.$$

Следовательно, $J(\cdot) = g(\cdot)j(\cdot)$ непрерывно отображает $C_{n,t}$ в $\hat{B}_n$, а так как оно накрывает отображение $[c'(\cdot)]$, то $J(\cdot)$ — вложение.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы СЗ.4. Решение Прасада — Зоммерфельда c_1 из формулы (С4.9) обладает тем свойством, что $\dim(\ker \delta_{c_1}^*) = 1$. Пусть сечение $\psi \in \Gamma(S)$ является $L^2(S)$ -нормированной образующей ядра оператора $\delta_{c_1}^*$. Явный вид сечения ψ , приведенный в [16], показывает, что для всех $x \in \mathbb{R}^3$

$$|\psi(x)| \leq \zeta e^{-|x|}. \quad (\text{С4.1})$$

Для фиксированных $t \in [t_n, \infty)$ и $z = \{x_\alpha\} \in C_{n,t}$ определим при каждом $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ сечение

$$\psi_\alpha(z)(x) = \beta_{1nt}(\alpha)(x) g_\alpha^{-1}(x) \psi(x - x_\alpha) g_\alpha(x). \quad (\text{С4.2})$$

Здесь отображение $g_\alpha(\cdot) \in \mathcal{G}$ определено в утверждении (2) леммы СЗ.2. Кроме того, $\beta_\rho(\alpha)(x) = \beta(|x - x_\alpha|/\rho)$.

Используя неравенство (С4.1) и утверждение (2) леммы СЗ.2, находим, что существует константа $\zeta \in [0, \infty)$, не зависящая от $t \in [t_n, \infty)$ и $z \in C_{n,t}$, такая, что для каждого значения параметров $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ справедлива оценка

$$|\langle \psi_\alpha(z), \psi_\beta(z) \rangle_2 - \delta_{\alpha\beta}| \leq \zeta t^{-1/2}. \quad (C4.3)$$

Таким образом, при $t > t(n) \gg \zeta^2$ подпространство $\text{Span}\{\psi_1(z), \dots, \psi_n(z)\}$, натянутое на $\psi_1, \dots, \psi_n$ в $L^2(S)$, является n -мерным.

С помощью определения C4.2 можно непосредственно проверить, что при $t > t(n)$ сопоставление подпространства

$$\text{Span}\{\psi_1(z), \dots, \psi_n(z)\} \subset L^2(S)$$

конфигурации $z \in C_{n,t}$ определяет непрерывное отображение пространства $C_{n,t}$ в грассманиан n -мерных подпространств пространства $L^2(S)$. График этого отображения является C^n -векторным расслоением $N'_n \rightarrow C_{n,t}$. Поскольку перестановка точек x_γ, x_β в наборе $\{x_1, \dots, x_n\} \in \tilde{C}_{n,t}$ индуцирует перестановку функций ψ_γ и ψ_β , расслоение N'_n совпадает с расслоением $\tilde{C}_{n,t} \times_{\tilde{C}_n} C^n$.

Векторное расслоение $N'_n \times_{\tilde{C}_n} C^n \rightarrow C_{n,t}$ из леммы C3.4 также задается посредством отображения из $C_{n,t}$ в грассманиан n -мерных подпространств пространства $L^2(S)$; в этом случае набор z переходит в сокет $\delta_{J(z)}$. Непрерывное сечение над $C_{n,t}$ расслоения $\text{Hom}(N'_n, N_n)$ задается посредством $L^2(S)$ -ортогональной проекции пространства $\text{Span}\{\psi_\alpha(z)\}_{\alpha=1}^n$ на сокет $\delta_{J(z)}$. Обозначим эту проекцию через Π . Тогда лемма C3.4 вытекает из следующей леммы:

Л е м м а C4.1. Существует такое $t'(n) \in [t_n, \infty)$, что при $t > t'(n)$ $L^2(S)$ -ортогональная проекция $\Pi: N'_n \rightarrow N_n$ является изоморфизмом расслоений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $t \in [t(n), \infty)$ и $z \in C_{n,t}$ обозначим через $\delta_{J(z)}^*: L^2(S) \rightarrow H_{J(z)}(S)$ оператор, сопряженный оператору $\delta_{J(z)}$. Из леммы C2.2 следует, что $\delta_{J(z)}^*$ задает непрерывное фредгольмово сечение расслоения $\text{Hom}(L^2(S); J^*H(S))$ над $C_{n,t}$. Воспользовавшись формулой (C4.3), утверждением (2) леммы C3.2 и леммой A4.1, находим, что при каждом $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ справедлива оценка

$$\langle \delta_{J(z)}^* \psi_\alpha(z), \delta_{J(z)}^* \psi_\alpha(z) \rangle_2 \leq \zeta \cdot t^{-1/2}. \quad (C4.4)$$

Число $\zeta \in [0, \infty)$ не зависит от t , $z \in C_{n,t}$ и α .

Рассмотрим теперь сечение $\psi \in \text{Span}\{\psi_\alpha(z)\}$, такое, что $\Pi(z)\psi = 0$. Тогда из альтернативы Фредгольма следует, что $\psi = \delta_{J(z)}\mu$ для некоторого $\mu \in H_{J(z)}(S)$.

Из формулы (C2.21) и утверждений (3) и (4) леммы C3.2 видно, что $H_{J(z)}(S)$ вкладывается в $L^2(S)$ и константа ν в неравенстве, связывающем нормы этих пространств, не зависит от $t \in [t(n), \infty)$ и $z \in C_{n,t}$.

Тем самым, поскольку

$$\delta_{J(z)}^* \delta_{J(z)} \mu = \delta_{J(z)}^* \psi,$$

из формулы (C4.4) следует, что

$$\|\delta_{J(z)} \mu\|_2^2 \leq \zeta \cdot \|\mu\|_2^2 t^{-1/4} \|\psi\|_2. \quad (C4.5)$$

Но по формуле Вейтценбёка для оператора $\delta_{J(z)}$ (см. (C2.3) и (C2.5)) с учетом леммы A4.1 и утверждения (4) леммы C3.4 получаем, что существует такое $t''(n) \in [t(n), \infty)$, что для $t \geq t''(n)$ и $z \in C_{n,t}$

$$\|\delta_{J(z)} \mu\|_2 \geq \frac{1}{2} \|\mu\|_{J(z)} \geq \frac{\nu}{2} \|\mu\|_2. \quad (C4.6)$$

Далее, формулы (C4.5) и (C4.6) дают оценку $\|\psi\|_2^2 \leq 2\zeta \nu^{-1} t^{-1/4} \|\psi\|_2^2$. Таким образом, если $t > t'(n) = \max(16\zeta^4 \nu^{-4}, t''(n))$, то $\ker \Pi(z) = \emptyset$ для любого $z \in C_{n,t}$.

Завершим этот параграф определением пространства V_n . Для этого введем для каждого значения параметра $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ полярные координаты $(r_\alpha, \theta_\alpha, \chi_\alpha)$ в $\mathbb{R}^3$, где $r_\alpha = |x - x_\alpha|$, полярный угол θ_α задан так, что $\{\theta_\alpha = 0\}$ отвечает лучу в $\mathbb{R}^3$ с началом x_α в направлении вектора $\hat{n} = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, а угол χ_α выбран так, чтобы луч $(\theta_\alpha = \pi/2, \chi_\alpha = 0)$ в $\mathbb{R}^3$ выходил из точки x_α в направлении вектора $(0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

При $\rho > 0$ и $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через $B_\rho(x)$ открытый шар в $\mathbb{R}^3$ с центром x_α и радиусом ρ . Положим $\beta_\rho(\alpha)(x) = \beta(|x - x_\alpha|/\rho)$ и

$$w_p(\alpha)(x) = \prod_{\gamma \neq \alpha} (1 - \beta_p(\gamma)(x)).$$

Пусть $\{\sigma^i\}_{i=1}^3$ — фиксированный базис в алгебре $\mathfrak{su}(2)$, удовлетворяющий условию $[\sigma^i, \sigma^j] = -2\epsilon^{ijk}\sigma^k$.

О п р е д е л е н и е С4.2. Когомологические данные для конфигурации $c(n, t, \{x_\alpha\})$ при $t_n = 8n$ состоят из

(А) покрытия $\{U_j\}$:

- (i) для $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ положим $U_\alpha = B_{21nt}(\alpha)$;
 (ii) для $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ и $\epsilon \in \{-1, 1\}$ положим

$$U_{\alpha, \epsilon} = (B_{31nt}(\alpha) \setminus B_{1nt}(\alpha)) \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : \epsilon(\theta_\alpha(x) - \pi/2) < \pi/4\};$$

- (iii) для каждой из 2^n точек $(\epsilon) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \prod_{n} \{-1, 1\}$ положим

$$U_{(\epsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \epsilon_\alpha(\theta_\alpha(x) - \pi/2) < \pi/4 \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\}\} \setminus \bigcup_{\alpha} \bar{B}_{31nt}(\alpha); \quad (C4.7)$$

(В) функций перехода $\{g_{ij}\}$:

- (i) на $U_\alpha \cap U_{\alpha, 1}$ положим

$$g_{(\alpha, 1)\alpha} = \cos \frac{1}{2} \theta_\alpha + \sin \frac{1}{2} \theta_\alpha (-\sin \chi_\alpha \sigma^1 + \cos \chi_\alpha \sigma^2);$$

- (ii) на $U_\alpha \cap U_{\alpha, -1}$ положим

$$g_{(\alpha, -1)\alpha} = \sin \frac{1}{2} \theta_\alpha \sigma^2 + \cos \frac{1}{2} \theta_\alpha (\cos \chi_\alpha + \sin \chi_\alpha \sigma^3);$$

- (iii) на $U_{\alpha, 1} \cap U_{\alpha, -1}$ положим

$$g_{(\alpha, -1)(\alpha, 1)} = \exp \chi_\alpha \sigma^3;$$

- (iv) на $U_{(\alpha, \epsilon')} \cap U_{(\epsilon)}$ положим

$$g_{(\alpha, \epsilon')(\epsilon)} = \exp \left(\frac{1}{2} (\epsilon_\alpha - \epsilon') \chi_\alpha \sigma^3 \right);$$

- (v) на $U_{(\epsilon')} \cap U_{(\epsilon)}$ положим

(C) конфигурации $\{c_j\}$:(i) для $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ зададим пару $c_\alpha = (A_\alpha, \Phi_\alpha)$ на U_α формулами

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &= \frac{1}{2}(\operatorname{cth} \tau_\alpha - 1/\tau_\alpha)(\cos \theta_\alpha \sigma^3 + \sin \theta_\alpha (\cos \chi_\alpha \sigma^1 + \sin \chi_\alpha \sigma^2)), \\ A_\alpha &= \frac{1}{2}(1 - \tau_\alpha/\operatorname{sh} \tau_\alpha)(\sin^2 \theta_\alpha d\chi_\alpha \sigma^3 + (\cos \chi_\alpha \sigma^2 - \sin \chi_\alpha \sigma^1)d\theta_\alpha - \\ &\quad - (\cos \chi_\alpha \sigma^1 + \sin \chi_\alpha \sigma^2)\sin \theta_\alpha \cos \theta_\alpha d\chi_\alpha); \end{aligned} \quad (C4.9)$$

(ii) для $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ и $\epsilon \in \{-1, 1\}$ зададим пару $c_{\alpha, \epsilon} = (A_{\alpha, \epsilon}, \Phi_{\alpha, \epsilon})$ на $U_{\alpha, \epsilon}$ формулами

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, \epsilon} &= (1 - 1/\tau_\alpha + \beta_{2 \ln t}(\alpha)(\operatorname{cth} \tau_\alpha - 1)) \frac{1}{2} \sigma^3, \\ A_{\alpha, \epsilon} &= \frac{1}{2} \left\{ (\epsilon - \cos \theta_\alpha) d\chi_\alpha \sigma^3 + \beta_{2 \ln t}(\alpha) \exp\left(\frac{1}{2}(1 - \epsilon)\chi_\alpha \sigma^3\right) \times \right. \\ &\quad \times [(\sin \chi_\alpha \sigma^1 - \cos \chi_\alpha \sigma^2) d\theta_\alpha + (\cos \chi_\alpha \sigma^2 + \sin \chi_\alpha \sigma^1) \sin \theta_\alpha d\chi_\alpha] \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}(1 - \epsilon)\chi_\alpha \sigma^3\right) \Big\}; \end{aligned}$$

(iii) при $(\epsilon) \in \times_{\alpha=1}^n [-1, 1]$ зададим элемент $c_{(\epsilon)} = (A_{(\epsilon)}, \Phi_{(\epsilon)})$ на $U_{(\epsilon)}$ формулами

$$\begin{aligned} \Phi_{(\epsilon)} &= \left(1 - \sum_{\alpha=1}^n w_{4 \ln t}(\alpha) \frac{1}{\tau_\alpha}\right) \frac{1}{2} \sigma^3, \\ A_{(\epsilon)} &= \sum_{\alpha=1}^n w_{4 \ln t}(\alpha) (\epsilon_\alpha - \cos \theta_\alpha) d\chi_\alpha \frac{1}{2} \sigma^3. \end{aligned} \quad (C4.10)$$

C5. Индекс и групповая структура пространства Ω

Отображение $I^* \sigma$ из $\Omega(S^2, S^2)$ в $\operatorname{Fred}(L_1^2(S), L^2(S))$ переводит Ω_n в множество F_{-n} Фредгольмовых операторов из $L_1^2(S)$ в $L^2(S)$ с индексом $-n$.

Обозначим операцию гомотопического сложения на $\Omega(S^2, S^2)$ через $\#$ (см. (C5.4) ниже). Гомотопическая эквивалентность пространства $\Omega_n(S^2, S^2)$ с $\Omega_{n+1}(S^2, S^2)$ индуцируется отображением $t: \Omega_n \rightarrow \Omega_{n+1}$, которое переводит $e \in \Omega_n$ в $t(e) = e_1 \# e \in \Omega_{n+1}$, где $e_1 \in \Omega$ — тождественное отображение сферы S^2 на себя. С помощью t получаем непрерывное отображение

$$t^* I^* \delta: \Omega_n \rightarrow F_{-n-1}. \quad (C5.1)$$

Каждое пространство F_n гомотопно любому другому [10]. Композиция с фиксированным оператором $l \in \text{Fred}(L_1^2(S), L_1^2(S))$ индекса -1 (см. формулу (C5.4) ниже) индуцирует гомотопическую эквивалентность между F_n и F_{n-1} . Таким образом, мы получаем непрерывное отображение

$$I^* \delta(\cdot) \cdot l: \Omega_n \rightarrow F_{-n-1}. \quad (C5.2)$$

Для доказательства леммы C3.6 достаточно показать, что при каждом n два отображения $t^* I^* \delta$ и $I^* \delta \cdot l$ гомотопны как отображения из Ω_n в F_{-n-1} . Тем самым лемма C3.6 следует из приведенной ниже леммы C5.1, в которой именно это и утверждается.

Более подробно, выберем ортонормированный базис $\{\tau^i\}_{i=1}^3$ алгебры $\mathfrak{su}(2) \subset \text{End } \mathbb{C}^2$, удовлетворяющий условию $(\tau^i)^2 = -1/4$. Зададим на сфере $S^2 \subset \mathfrak{su}(2)$ координаты (θ, χ) , где $\theta \in [0, \pi]$ — угол по меридиану, а $\chi \in [0, 2\pi]$ — угол по экватору. Потребуем, чтобы $\theta = 0$ соответствовало точке $\tau^3/2$.

Рассмотрим C^∞ -отображения $\sigma_\pm \in \Omega_0$ со следующими свойствами: $\sigma_+^*(\theta, \chi) = (\theta^+, \chi)$, причем $d\theta^+/d\theta \geq 0$; $\theta^+(\theta) = 2\theta$ при $\theta \in [0, \pi/4]$ и $\theta^+ = \pi$ при $\theta \in [3\pi/8, \pi]$. Для отображения σ_- имеем $\sigma_-^*(\theta, \chi) = (\theta^-, \chi) = (\pi - \theta^+(\pi - \theta), \chi)$.

Выберем произвольное $e \in \Omega_n$ и положим $(\theta_e, \chi_e) = e^*(\theta, \chi)$. Положим также $(\theta_e^-, \chi_e^-) = e^*(\theta^-, \chi)$. Пусть $e_1 \in \Omega_1$ — тождественное отображение.

Определим теперь отображение $t(e)$, полагая

$$t(e) = \begin{cases} \cos \theta^+ \tau^3 + \sin \theta^+ (\cos \chi \tau^1 + \sin \chi \tau^2) & \text{при } \theta \in [0, \pi/2], \\ -\cos \theta^- \tau^3 + \sin \theta^- (\cos \chi^- \tau^1 - \sin \chi^- \tau^2) & \text{при } \theta \in [\pi/2, \pi]. \end{cases} \quad (C5.3)$$

читатель может убедиться в том, что $t(e) \in \Omega_{n+1}$, если $e \in \Omega_n$.

Для задания гомотопической эквивалентности между пространствами F_n и F_{n-1} введем псевдодифференциальный оператор $l: \Gamma_0(S) \rightarrow \Gamma_0(S)$, полагая

$$l\psi = (\phi - \tau^3) \cdot \delta_{I(e_1)} \cdot [(-\Delta + 1/4)^{-1} \psi], \quad (C5.4)$$

где оператор ϕ определен формулой (C1.1).

Оператор l является эллиптическим фредгольмовым оператором из $L^2(S)$ в $L^2(S)$. Действительно, $(-\Delta + 1/4)^{-1}$ является с точностью до константы изоморфизмом из $L^2_1(S)$ в $L^2_3(S)$. Тогда $\delta_{I(e_1)}$ — фредгольмов оператор порядка -1 из $L^2_3(S)$ в $L^2_2(S)$ (см. [9, § 6, 7] или [23] и [25]). Аналогично, оператор $\phi - \tau^3$ является изоморфизмом из $L^2_2(S)$ в $L^2_1(S)$, поскольку

$$(\phi - \tau^3)^*(\phi - \tau^3) = -\Delta + 1/4. \quad (C5.5)$$

Л е м м а C5.1. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ отображение $t^* I^* \delta: \Omega_n \rightarrow F_{n-1}$, определенное формулами (C1.2) и (C5.3), и отображение $I^* \delta \cdot l: \Omega_n \rightarrow F_{n-1}$, определенное формулами (C1.2) и (C5.4), гомотопны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $e \in \Omega(S^2, S^2)$, то для всех $k \in (0, 1, 2, \dots)$ справедлива оценка

$$|\partial^k A(I(e))| \leq \alpha(e, k) (1 + |\alpha|)^{-k-1}.$$

Отсюда следует, что умножение на $A(I(e))$ задает компактный оператор из $L^2_{k+1}(S)$ в $L^2_k(S)$. Поэтому отображение $t^* I^* \delta$ гомотопно отображению, переводящему элемент $e \in \Omega(S^2, S^2)$ в фредгольмов оператор

$$\hat{t}(e) = \phi + (1 - \beta)t(e). \quad (C5.6)$$

Кроме того, отображение $I^* \delta \cdot l$ гомотопно отображению, переводящему $e \in \Omega(S^2, S^2)$ в

$$\hat{l}(e) = (\phi + (1-\beta)e)(\phi - \tau^3)(\phi + (1-\beta)e_1)(-\Delta + 1/4)^{-1}. \quad (C5.7)$$

Тождественное отображение сферы S^2 гомотопно отображениям $\sigma_{\pm}: S^2 \rightarrow S^2$, а также отражению $\nu: S^2 \rightarrow S^2$, переводящему точку (θ, χ) в точку $(\pi - \theta, -\chi)$. Беря композицию с этими двумя гомотопиями, получаем, что $\hat{l}(\cdot)$ гомотопно отображению $l_1: \Omega_n \rightarrow F_{n-1}$, переводящему e в $l_2(e)(-\Delta + 1/4)^{-1}$, где

$$l_2(e) = (\phi + (1-\beta)\nu \cdot e \cdot \sigma_-)(\phi - \tau_3)(\phi + (1-\beta)e_1 \cdot \sigma_+). \quad (C5.8)$$

Чтобы исследовать отображение $l_2(e)$, введем в $\mathbb{R}^3$ сферические координаты (r, θ, χ) . При $\theta \in [0, 5\pi/8]$ оператор $l_2(e)$ имеет вид

$$l_2(e) = [-\beta\tau^3(\phi - \tau^3) + (-\Delta + 1/4)](\phi + (1-\beta)t(e)). \quad (C5.9)$$

При $\theta \in [3\pi/8, \pi]$ он равен

$$l_2(e) = (\phi + (1-\beta)t(e))(-\tau^3(\phi - \tau^3)(\beta \cdot) + (-\Delta + 1/4)). \quad (C5.10)$$

Легко проверить, что в силу (C5.9) и (C5.10)

$$l_2(e) = (\phi + (1-\beta)t(e))(-\Delta + 1/4) + \mathfrak{K}(e), \quad (C5.11)$$

где $\mathfrak{K}(e): L^2_3(S) \rightarrow L^2(S)$ — компактный оператор. Отсюда вытекает, что отображение $l_1(\cdot)$ гомотопно отображению $\hat{l}(\cdot)$.

Литература

1. Taubes C.H. On the Yang-Mills-Higgs equations. - Bull. Am. Math. Soc. 10 (1984), 295.
2. Taubes C.H. Min-max theory for the Yang-Mills-Higgs equations. - Commun. Math. Phys. 97 (1985), 473-540. [Перевод в настоящем сборнике.]
3. Taubes C.H. The existence of a non-minimal solution to the $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs equations on R^3 , Part I. - Commun. Math. Phys. 86 (1982), 257. Part II. - Commun. Math. Phys. 86 (1982), 299.
4. Богомольный И.Б. Устойчивость классических решений. - Ядерная физика, 24 (1976), 449-454.
5. Jaffe A., Taubes C.H. Vortices and monopoles. - Boston: Birkhäuser, 1980.
6. Hitchin N. Monopoles and geodesics. - Commun. Math. Phys. 83 (1982), 579. [Перевод в настоящем сборнике.]
7. Palais R. Critical point theory and mini-max principles. - Proc. Symp. Pure Math., Vol. 15, Providence, RI: American Math. Society, 1970.
8. Atiyah M.F., Singer I.M. The index of elliptic operators. IV. - Ann. Math. 93 (1971), 119. [Имеется перевод: Атья М., Зингер И. Индекс эллиптических операторов. - УМН, 27 (1972), 161-178.]
9. Taubes C.H. Stability in Yang-Mills theory. - Commun. Math. Phys. 91 (1983), 235.
10. Koschorke U. Infinite dimensional K-theory. - Proc. Symp. Pure Math., Vol. 15, Providence, RI: American Math. Society, 1970.
11. Atiyah M.F. K-theory. - New York: Benjamin, 1967. [Имеется перевод: Атья М. К-теория. - М.: Мир, 1967.]
12. Atiyah M.F., Jones J.D.S. Topological aspects of Yang-Mills Theory. - Commun. Math. Phys. 61 (1978), 97.
13. Palais R. Foundations of global geometry. - New York: Benjamin, 1968.
14. Parker T., Taubes C.H. On Witten's proof of the positive energy theorem. - Commun. Math. Phys. 84 (1982), 224.
15. Adams R.A. Sobolev spaces. - New York: Academic Press, 1975.
16. Groisser D. Integrality of the monopole number in $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory on R^3 . - Commun. Math. Phys. 93 (1984), 367-378.
17. Morrey C.B. Multiple integrals in the calculus of variations. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1966.

18. Spanier E.H. Algebraic topology. - New York: McGraw-Hill, 1966. [Имеется перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. - М.: Мир, 1971.]
19. Ладженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970.
20. Lang S. Differential manifolds. - Reading, MA: Addison-Wesley, 1972.
21. Atiyah M.F., Singer I.M. Dirac operators coupled to vector potentials. - Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Phys. Sci. 81 (1984), 2597-2600.
22. Gromov M., Lawson H.B., Blaine Jr. Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds. - Publ. Math. IHES, 1983, № 58, p.83-196.
23. Callias C. Axial anomalies and index theorems on open spaces. - Commun. Math. Phys. 62 (1978), 213.
24. Prasad M.K., Sommerfield C. Exact classical solutions for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon. - Phys.Rev.Lett. 35 (1975), 760.
25. Bott R., Seeley R. Some remarks on the paper of Callias. - Commun. Math. Phys. 62 (1978), 235.
26. Jackiw R., Rebbi C. Solitons with fermion number $1/2$. - Phys. Rev. D13 (1976), 3398.

ТЕОРИЯ МИНИМАКСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЯНГА - МИЛЛСА - ХИГГСА¹⁾

К.Г. Таубс

Department of Mathematics, University of California, Berkeley,
CA 94720, USA

Резюме. В каждом монопольном секторе существует бесконечное число решений $SU(2)$ -уравнений Янга - Миллса - Хиггса на $\mathbb{R}^3$ в пределе Прасада - Зоммерфельда, обладающих конечной энергией, превосходящей любое наперед заданное число.

Содержание

A1. Введение	380
A2. Стратегия доказательства сходимости	385
A3. Терминология	394
A4. Вариационная задача	396
B1. Регуляризованная задача	400
B2. Минимизирующие множества для функционала $\mathcal{U}^\delta$	404
B3. Сходимость минимаксных последовательностей для $\mathcal{U}^\delta$	412
B4. Заключительные замечания о функционале $\mathcal{U}^\delta$	419
C1. Априорные оценки	421
C2. Оценки экспоненциального убывания	428
C3. Степенные оценки для Φ	432
C4. Степенные оценки для A	436
D1. Токдество для тензора напряжений	445
D2. Кластерное разложение	450
D3. Взаимодействие кластеров	456
D4. Сходимость минимаксной последовательности для функционала $\mathcal{U}$	467

¹⁾ Taubes C.H. Min-Max theory for the Yang-Mills-Higgs equations. - Communications in Mathematical Physics, 1985, v.97, pp.473-540.

- Е1. Окрестность пространства модулей
 Е2. Принцип минимакса и пунктирные гомотопии . . .

А1. Введение

Дифференциальные уравнения классической калибровочной теории во многих случаях являются формальными вариационными уравнениями для функционала (действия) на топологически нетривиальном пространстве. Исходя из этого, в работах [1, 2] было выдвинуто предположение, что теория Морса (или какой-либо ее ослабленный вариант) может оказаться полезной при установлении существования нетривиальных решений. Имеются стандартные условия, при выполнении которых можно установить связь между топологией пространства и критическими точками функции на этом пространстве [3, 4]; одним из таких условий является условие С Пале – Смейла. Однако функционал Янга – Миллса – Хиггса на $\mathbb{R}^3$ не удовлетворяет ни одному из указанных условий.

С одной стороны, отсюда можно было бы заключить, что этот функционал подобен функционалу энергии для гармонических C^∞ -отображений сферы S^2 в себя. Функционал энергии для гармонических отображений достигает своего минимума на каждой из счетного числа линейно связанных компонент пространства $\text{Maps}(S^2, S^2)$, и его минимумы совпадают с голоморфными и антиголоморфными отображениями. Однако эти локальные минимумы являются его единственными критическими точками [5], несмотря на богатую топологическую структуру пространства $\text{Maps}(S^2, S^2)$.

С другой стороны, можно представить себе, что функционал Янга – Миллса – Хиггса ведет себя как "хорошая" функция Морса, несмотря на то, что условие Пале – Смейла не выполняется. Это предположение подкрепляется тем, что существует неминимальное решение $SU(2)$ -уравнений Янга – Миллса – Хиггса на $\mathbb{R}^3$, связанное с фундаментальной группой π_1 функционального пространства [6, 7].

В данной работе будет доказано, что $SU(2)$ -функционал Янга – Миллса – Хиггса на $\mathbb{R}^3$ в пределе Богомольного – Прасада – Зоммерфельда ведет себя как хорошая функция Морса (теорема А1.2). Одним из следствий этого факта, которое также установлено в работе, является то, что в каждой линейно связанной компоненте (монопольном секторе) функционального пространства существует бес-

конечное число калибровочно неэквивалентных решений соответствующих вариационных уравнений и даже бесконечное число решений, для которых действие больше любого фиксированного числа (теорема А1.3). Как следует из результатов работы [8], все эти новые критические точки функционала действия неустойчивы.

Эту работу следует рассматривать как продолжение работы [9], к которой мы будем часто адресовать читателя. Результаты данной работы были ранее анонсированы в [10].

Указанные $SU(2)$ -уравнения Янга - Миллса - Хиггса представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных на $\mathbb{R}^3$ относительно пары неизвестных (A, Φ) , где A - связность на главном $SU(2)$ -расслоении $P = \mathbb{R}^3 \times SU(2)$ над $\mathbb{R}^3$, а Φ - сечение присоединенного расслоения $Ad P = \mathbb{R}^3 \times SU(2)$. Это уравнения

$$D_A * F_A + * [\Phi, D_A \Phi] = 0, \quad (A1.1a)$$

$$D_A * D_A \Phi = 0 \quad (A1.1b)$$

с граничным условием $1 - |\Phi| \in L^6(\mathbb{R}^3)$. Здесь F_A - кривизна связности A (сечение расслоения $\wedge^2 T^* \otimes Ad P$); D_A - внешнее ковариантное дифференцирование на расслоении $\wedge T^* \otimes Ad P$, задаваемое связностью A ; отображение $*$: $\wedge T^* \rightarrow \wedge T^*$ является евклидовым дуальным оператором Ходжа и $[\cdot, \cdot]$ - градуированная скобка на $\wedge T^* \otimes Ad P$. Норма $|\cdot|$ на $\wedge T^* \otimes Ad P$ является произведением метрик: (евклидова метрика на $\wedge T^*$) $\otimes$ (метрика вида $-2 \text{Tr}_{\mathbb{C}^2}(\cdot, \cdot)$ на $SU(2)$). Непосвященным рекомендуем обратиться к работам [9, §A1-A3] и [11, гл. 1 и 4].

Уравнения (A1.1) представляют собой вариационные уравнения для функционала действия

$$\mathcal{U}(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \{ |F_A|^2(x) + |D_A \Phi|^2(x) \} dx. \quad (A1.2)$$

Функционал $\mathcal{U}$ нужно рассматривать как функционал на множестве

$$\mathcal{C} = \{ \text{гладкие } c = (A, \Phi): \mathcal{U}(c) < \infty \text{ и } 1 - |\Phi| \in L^6(\mathbb{R}^3) \}. \quad (A1.3)$$

Множество $\mathcal{C}$ наделяется топологией так же, как в [9, § B1].

Пространство $\mathcal{C}$ гомотопически совпадает с $\text{Maps}(S^2, S^2)$ [9, предложение A1.1]. Следовательно, оно также имеет счетный набор линейно связанных компонент $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Д. Груассе [12] показал, что для пары $(A, \Phi) \in \mathcal{C}_n$ число

$$n = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \{-2 \text{Tr}_{\mathbb{C}^2} (F_A \wedge D_A \Phi)\} \quad (\text{A1.4})$$

корректно определено и является целым. В этом случае из неравенства треугольника следует, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место оценка

$$|\mathcal{U}|_{\mathcal{C}_n} \geq 4\pi |n|. \quad (\text{A1.5})$$

Для $s \in \mathcal{C}_n$ равенство в формуле (A1.5) имеет место тогда и только тогда, когда пара $s = (A, \Phi)$ удовлетворяет уравнениям Богомольного [13]:

$$F_A = \text{sgn}(n) * D_A \Phi. \quad (\text{A1.6})$$

В каждой компоненте $\mathcal{C}_n$ существуют решения уравнений Богомольного [14, 11, 15]. При $n = 0$ для любой пары $s = (A, \Phi)$, удовлетворяющей уравнению (A1.6), выполнены тождества $F_A = 0$ и $D_A \Phi = 0$.

На каждой компоненте $\mathcal{C}_n$ непрерывно действует топологическая группа преобразований — калибровочная группа [9, §13.1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \{\text{гладкие автоморфизмы пространства } \mathbb{R}^3 \times \text{SU}(2)\} = \\ &\approx C^\infty(\mathbb{R}^3; \text{SU}(2)). \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

Функционал $\mathcal{U}$ инвариантен относительно действия группы $\mathcal{G}$, а решения уравнений (A1.1) и уравнений (A1.6) переходят под действием группы снова в решения этих уравнений. Подгруппа

$$\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G}: g(x=0) = 1 \in \text{SU}(2)\} \quad (\text{A1.8})$$

действует свободно на пространстве $\mathcal{C}$, и функционал $\mathcal{U}$ спускается до функционала на факторпространстве $\mathcal{B}$ по этому действию. Ввиду того что подгруппа $\mathcal{G}_0$ стягиваема, пространство $\mathcal{B}$ вкладывается в $\mathcal{C}$ в виде подмножества

$$\mathfrak{B} = \{c = (A, \Phi) \in \mathcal{C} : A(x=0) = 0 \text{ и } x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner A = 0\}. \quad (\text{A1.9})$$

В этой формуле и в формуле (A1.8) мы считаем расслоение P наделенным структурой прямого произведения $\mathbb{R}^3 \times SU(2)$. На пространстве $\mathfrak{B}$ имеется остаточное действие группы $SU(2)$, оставляющее функционал $\mathcal{U}$ инвариантным. Удобно редуцировать это действие группы $SU(2)$ до действия группы S^1 , построив новое пространство $\hat{\mathfrak{B}}$, которое вкладывается в $\mathfrak{B}$ (а, следовательно, и в $\mathcal{C}$) в виде слоя расслоения [9, §A1, B5]

$$\hat{\mathfrak{B}} \rightarrow \mathfrak{B} \xrightarrow{\hat{n}} S^2. \quad (\text{A1.10})$$

Группа $SU(2)$ действует на S^2 вращениями, и расслоение в формуле (A1.10) $SU(2)$ -эквивариантно. Поэтому S^1 -подгруппа в $SU(2)$, которая оставляет на месте северный полюс $p \in S^2$, оставляет неподвижным и пространство $\hat{\mathfrak{B}} = \hat{n}^{-1}(p)$. Тем самым $\hat{\mathfrak{B}}$ совпадает с орбитой пространства $\hat{\mathfrak{B}}$ под действием группы $SU(2)$. Это построение, а также отображение $\hat{n}$ объясняются в работе [9, §B5].

Одним из следствий предшествующих рассуждений является то, что функционал $\mathcal{U}$ "чувствует" только топологию пространства $\hat{\mathfrak{B}}$ (т.е. S^1 -эквивариантную топологию). Это свойство полезно, поскольку пространство $\hat{\mathfrak{B}}$ допускает простую интерпретацию.

Т е о р е м а A1.1 (см. [9]). Пространство $\hat{\mathfrak{B}}$ гомотопически эквивалентно пространству $\Omega(S^2)$ отображений из S^2 в S^2 , сохраняющих отмеченную точку в S^2 .

Топологию пространства $\hat{\mathfrak{B}}$ удастся связать с критическими точками функционала $\mathcal{U}$ при помощи теории минимакса (см. [3]), краткий обзор которой следует ниже. Пусть M - гладкое многообразие. Говорят, что семейство $\mathcal{F}$ непустых компактных подмножеств многообразия M гомотопически инвариантно, если для любого непрерывного отображения $\varphi: [0, 1] \times M \rightarrow M$, для которого $\varphi(0, \cdot) = \text{id}$, из условия $F \in \mathcal{F}$ следует, что $\varphi(1, F) \in \mathcal{F}$.

Например, пусть $\{H^k(M; \mathbb{Z}), k \geq 0\}$ - когомологии M с компактными носителями и с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Пусть

$$[z] \in H^k(M; \mathbb{Z}) \quad \text{и}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}([z]) = \{F \in M: \text{ для отображения включения } i: F \rightarrow M \\ \text{имеем } i^*[z] \neq 0 \in H^k(F; \mathbb{Z})\}.$$

Это семейство гомотопически инвариантно.

Пусть $f: M \rightarrow [0, \infty)$ — гладкая функция. Гомотопически инвариантному семейству $\mathcal{F}$ поставим в соответствие число

$$f_{\mathcal{F}} = \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{c \in F} f(c). \quad (\text{A1.11})$$

Для того чтобы функция f на многообразии M была хорошей, необходимо, чтобы она имела критическую точку, отвечающую критическому значению $f_{\mathcal{F}}$.

В следующей теореме утверждается, что функционал $\mathcal{U}$ на пространстве $\mathcal{B}$ является хорошим.

Т е о р е м а А1.2. Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантное семейство. Существует решение $c \in \mathcal{B}$ уравнения (A1.1), на котором $\mathcal{U}(c) = \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$.

Теорема А1.2 работы [9] утверждает, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ множество

$$\text{Crit}_n = \{\mathcal{U}_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \text{ — гомотопически инвариантное семейство}$$

$$\text{компактных подмножеств пространства } \mathcal{C}_n\} \quad (\text{A1.12})$$

представляет собой неограниченное подмножество в $\mathbb{R}$. Следовательно, имеет место

Т е о р е м а А1.3. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ уравнение (A1.1) имеет бесконечное число решений в пространстве $\mathcal{B}_n$ с действием, превосходящим любое конечное значение.

Подходящая модификация теоремы А1.2 позволяет также получить информацию о топологии пространств $\hat{\mathcal{M}}_n \subset \hat{\mathcal{B}}_n$ решений уравнений (A1.6). Здесь оказывается важным замечание, сделанное в [8], о том, что подходящим образом определенный гессиан функционала $\mathcal{U}$ в неминимальной критической точке в $\mathcal{B}_n$ должен иметь индекс $|n| + 1$ или больше.

Т е о р е м а А1.4. Для каждого n включение $\widehat{\mathcal{M}}_n \subset \widehat{\mathcal{B}}_n$ индуцирует изоморфизм пунктированных групп гомотопий $\pi_\ell(\cdot)$ при $\ell < |n|$ и эпиморфизм при $\ell = |n|$.

Недавно С.К. Дональдсон [16] доказал замечательный результат, состоящий в том, что при каждом $n \in \mathbb{Z}$ пространство $\widehat{\mathcal{M}}_n$ гомеоморфно пространству рациональных отображений степени n из S^2 в S^2 , сохраняющих отмеченную точку. Таким образом, из теорем А1.1 и А1.4 с использованием работы [17] вытекает теорема Сигала: включение указанного пространства рациональных отображений в пространство $\Omega_n(S^2)$ (всех гладких отображений степени n , сохраняющих отмеченную точку) индуцирует изоморфизм гомотопических групп $\pi_\ell(\cdot)$ при $\ell < |n|$ и эпиморфизм групп $\pi_{|n|}(\cdot)$.

Доказательство теоремы А1.2 потребовало от автора изобретения новых вариационных методов. По этой причине в §А2 дается детальный обзор стратегии и логической структуры этого доказательства.

А2. Стратегия доказательства сходимости

Для того чтобы понять, почему для функционала $\mathcal{U}$ на пространстве $\widehat{\mathcal{B}}$ существуют сходящиеся минимаксные последовательности, необходимо сначала уяснить причину, по которой нарушается стандартное условие С Пале - Смейла. Условие С выполнено для гладкой функции $f: M \rightarrow [0, \infty)$ на гладком базисном многообразии M , если верно следующее утверждение: каждая последовательность $\{c_i\} \subset M$, для которой последовательность $\{f(c_i)\}$ ограничена, а последовательность $\{\|df_{c_i}\|_*\}$ стремится к нулю, содержит сходящуюся подпоследовательность. Здесь через $\|\cdot\|_*$ обозначена норма на T^*M (см. [3, 4]).

Если бы условие С выполнялось для функционала $\mathcal{U}$ на пространстве $\widehat{\mathcal{B}}$, то теорема А1.2 была бы практически стандартным результатом [3]. Технические трудности при доказательстве возникают из-за того, что условие С не выполняется ввиду некомпактности пространства $\mathbb{R}^3$ (отсутствует лемма Реллиха).

Но условие С не является последним словом вариационного исчисления. Даже функция на вещественной прямой $\mathbb{R}$ может быть хорошей функцией Морса (в том смысле, что ее критические точки

задают клеточное разбиение $\mathbb{R}$ (см. [18])), но не удовлетворяют при этом условию С. Рассмотрим, например, функцию φ на $\mathbb{R}$, переводящую точку t в $\varphi(t) = t^2/(1+t^2)$. Заметим, что $d\varphi = 2t dt/(1+t^2)^2$. Следовательно, φ имеет только одну критическую точку $t = 0$, в которой гессиан $\partial^2 \varphi / \partial t^2$ положителен. Это как раз ожидаемое поведение для хорошей функции Морса. Рассмотрим, однако, последовательность целых чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Она обладает тем свойством, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ значение $\varphi(k)$ меньше 1 и $|d\varphi(k)| \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$. Но последовательность целых не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$, и, значит, функция φ не удовлетворяет условию С.

Важный принцип заключается в следующем: для того чтобы доказать, что критические точки функции $f: M \rightarrow [0, \infty)$ отражают топологию многообразия M , необходимо рассматривать только те последовательности $\{c_i\}$, для которых последовательности $\{f(c_i)\}$ являются убывающими.

Теория минимакса для функции f на банаховом многообразии M иллюстрирует этот принцип. Например, пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантное семейство компактных подмножеств многообразия M . Можно попытаться установить, что $f_{\mathcal{F}}$ из (A1, II) является критическим значением функции f , рассматривая минимаксные последовательности в пространстве

$$Y(\mathcal{F}, f) = \{(F, c) \in \mathcal{F} \times M : c \in F \text{ и } f(c) = \sup_F f\}.$$

Для минимаксной последовательности $\{(F_i, c_i)\} \subset Y$ последовательность $\{f(c_i)\}$ убывает к значению $f_{\mathcal{F}}$:

$$f(c_i) \geq f(c_{i+1}) \rightarrow f_{\mathcal{F}}.$$

Важный вопрос заключается в следующем: можно ли выбрать минимаксную последовательность $\{(F_i, c_i)\} \subset Y$ так, чтобы последовательность $\{c_i\}$ сходилась в M к критической точке функции f ?

Следует отметить, что это тонкий вопрос, и для ответа на него требуется детальное знание исследуемой функции. Например, когда $M = \mathbb{R}$, необходимо различать между собой функционалы $\{f^\delta(\cdot) : \delta \in [0, 1]\}$, задаваемые формулой

$$f^\delta(t) = e^t + \delta t/(1+t^2).$$

При $\delta = 0$ функционал $f^0(\cdot)$ не является хорошей функцией Морса на $\mathbb{R}$, так как не имеет критических точек. Но при любом $\delta > 0$, несмотря на нарушение условия C, функционал $f^\delta(\cdot)$ является хорошей функцией Морса на $\mathbb{R}$.

Для задачи Янга - Миллса - Хиггса из теоремы К. Уленбек [19] о компактности вытекает, что последовательность $\{c_i\} \subset \mathcal{B}$ может сходиться только в том случае, если последовательность $\{\mathcal{U}(c_i)\}$ ограничена и если кривизны $\{(F_A, D_A \Phi): c_i = (A, \Phi)\}$ достаточно равномерно убывают при $|x| \rightarrow \infty$ на $\mathbb{R}^3$, независимо от индекса i .

Это свойство является основанием для изучения функции от $c = (A, \Phi) \in \mathcal{B}$, равной максимальному расстоянию между подмногообразиями в $\mathbb{R}^3$, на которых велика норма $|F_A|^2(x) + |D_A \Phi|^2(x)$. Поставим в соответствие каждому $c \in \mathcal{B}$ число $\rho(c)$, описывающее это максимальное расстояние. Точнее, число $\rho(c)$ определяется следующим образом. Рассмотрим локальное действие элемента c на единичных шарах. Это отображение $s: \mathcal{B} \rightarrow C^0(\mathbb{R}^3)$, задаваемое формулой

$$s(c)(x) = \frac{1}{2} \int_{|x-y| < 1} d^3 y \{ |F_A|^2 + |D_A \Phi|^2 \}. \quad (\text{A2.1})$$

Для подходящего $\varepsilon > 0$ определим множества

$$\hat{U}(c) = \{x \in \mathbb{R}^3: s(c)(x) > \varepsilon\} \text{ и } U(c) = \{x \in \mathbb{R}^3: \text{dist}(x, \hat{U}(c)) < 1\}.$$

На дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus U(c)$ кривизны достаточно малы, так что они в главном линейны по основному полю $c = (A, \Phi)$. В области $U(c)$ кривизны велики, и решающую роль играют нелинейности.

Заметим, что множество $U(c)$ не может быть совсем плоским. Действительно, оно ограничено и имеет не более чем $\mathcal{U}(c)/\varepsilon$ линейно связанных компонент, а сумма диаметров этих компонент не превышает $4\mathcal{U}(c)/\varepsilon$ (см. лемму C1.2).

Отображение $\rho(\cdot): \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$ сопоставляет элементу c максимальное расстояние между линейно связными компонентами множества $U(c)$ (формула (D1.1)).

Принципиально важно установить, что последовательность $\{c_i\} \subset \mathcal{B}$ может сходиться в $\mathcal{B}$ только тогда, когда последовательности $\{\rho(c_i)\}$ и $\{\mathcal{U}(c_i)\}$ сходятся на полуоси $[0, \infty)$ (см. §C4 и D4).

Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантное семейство компактных подмножеств пространства $\mathcal{B}$. Мы хотим построить минимаксные последовательности $\{(F_i, c_i)\} \subset Y(\mathcal{F})$, для которых последовательность $\{\rho(c_i)\}$ ограничена. Возникает деликатный вопрос — а существуют ли такие последовательности? Для обоснования доказательства их существования рассмотрим следующую конструкцию. Сопоставляя каждому элементу $c \in \mathcal{B}$ совокупность центров линейно связанных компонент множества $U(c)$, мы получим точку $\Psi(c)$ в одном из конфигурационных пространств $C_\ell(\mathbb{R}^3)$, где $\ell \in \{0, 1, \dots, [\mathcal{U}(c)/\varepsilon]\}$. Здесь $C_\ell(\mathbb{R}^3)$ — пространство, состоящее из наборов ℓ различных точек в $\mathbb{R}^3$. Тем самым функция Ψ определяет отображение из $\mathcal{B}$ в $\bigcup_{\ell=0}^{\infty} C_\ell(\mathbb{R}^3)$, обладающее тем свойством, что для любого $E \in [0, \infty)$ функция Ψ отображает множество $\mathcal{U}^{-1}([0, E])$ в конечномерное пространство $\bigcup_{\ell=0}^E C_\ell(\mathbb{R}^3)$. Можно переформулировать задачу минимакса для семейства $\mathcal{F}$ как задачу о нахождении минимаксной последовательности $\{(F_i, c_i)\} \subset Y(\mathcal{F})$, такой, что последовательность точек $\{\Psi(c_i)\} \subset \bigcup_{\ell=0}^{\Lambda} C_\ell(\mathbb{R}^3)$, где $\Lambda = [2\mathcal{U}_{\mathcal{F}}/\varepsilon]$, ограничена. Ввиду того что некомпактность в этом пункте отражает некомпактность пространства $C_\ell(\mathbb{R}^3)$, рассмотрим для прояснения модельную вариационную задачу на самом $C_\ell(\mathbb{R}^3)$. Можно представлять себе физическую систему из ℓ частиц в $\mathbb{R}^3$ с парным потенциалом взаимодействия. Тогда энергия точки $\{x_1, \dots, x_\ell\} \in C_\ell(\mathbb{R}^3)$ дается выражением

$$\mathcal{E}(\{x_1, \dots, x_\ell\}) = \text{const} + \sum_{i < j} v(x_i - x_j),$$

где $v(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ — потенциал. Если потенциал таков, что при некотором $x \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(tx) < \infty,$$

то энергия $\mathcal{E}$ может не удовлетворять условию С на $C_\ell(\mathbb{R}^3)$. Однако если при всех $x \neq 0$ и достаточно больших t

$$v(tx) < \lim_{s \rightarrow \infty} v(sx), \quad (\text{A2.2})$$

то можно ожидать, что функция $\mathcal{E}$ действительно является хо-

рошей функцией Морса на пространстве $C_2(\mathbb{R}^3)$, так как, согласно формуле (A2.2), для раздвигания двух частиц необходимо затратить энергию (конечно, при малых $|x|$ потенциал $v(\cdot)$ должен быть отталкивающим).

Приведенный выше анализ наводит на мысль о том, что следует попытаться записать действие $\mathcal{U}(c_i)$ для каждого элемента c_i минимаксной последовательности $\{(F_i, c_i)\} \subset Y(\mathcal{F})$ в виде суммы двух слагаемых: вклада от каждой линейно связанной компоненты $U(c_i)$ и вклада от $\mathbb{R}^3 \setminus U(c_i)$. Последний хотелось бы интерпретировать как "энергию взаимодействия" между линейно связанными компонентами множества $U(c_i)$, и тогда возникает вопрос: требуется ли затратить энергию для раздвигания указанных компонент. После этого анализ можно было бы проводить, по крайней мере на эвристическом уровне, так, как будто вариационная задача поставлена на некотором пространстве $C_2(\mathbb{R}^3)$.

Эта процедура имеет смысл только в том случае, если можно получить достаточно сильные априорные оценки для кривизн каждого из c_i в области малых полей $\mathbb{R}^3 \setminus U(c_i)$. Существование априорных оценок объясняется тем, что уравнения Янга - Миллса - Хиггса полulinейны, а $\mathbb{R}^3 \setminus U(c_i)$ - это, по определению, именно та область, где справедливо линейное приближение. Действительно, можно ожидать, что при больших i пары c_i задают приближенные решения уравнения (A1.1). Точное решение с этого уравнения в области $\mathbb{R}^3 \setminus U(c)$ удовлетворяет линеаризованным уравнениям с ошибкой порядка $\exp(-\text{dist}(x, U(c)))$ с некоторыми граничными условиями на $\partial U(c)$ (см. §C1-C4; [24] и [11, гл. 4]). Это подтверждает тот факт, уже давно признанный физиками, что с большого расстояния неабелев монополяр выглядит как абелев (т.е. как монополяр Дирака [21]).

Наш прием состоит в том, чтобы построить минимаксные последовательности $\{(F_i, c_i)\}$ для семейства $\mathcal{F}$, такие, что каждый элемент c_i удовлетворяет в главном априорным оценкам для решения уравнения (A1.1) в области $\mathbb{R}^3 \setminus U(c_i)$. Автор располагает двумя методами получения минимаксных последовательностей, удовлетворяющих таким оценкам. Менее изящный из них проще технически. Он включает в себя построение последовательности регуляризованных функционалов $\{\mathcal{U}^\delta: \delta \in [0, 1/2)\}$ (где $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U}$) на пространстве $\hat{\mathcal{B}}$:

$$\mathcal{U}^\delta(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \{(1 + |x|^2)^\delta |F_A|^2(x) + |D_A \Phi|^2(x)\} d^3x. \quad (\text{A2.3})$$

Множество $\{\mathcal{U}^\delta: \delta \in [0, 1/2]\}$ обладает следующими свойствами (лемма В1.2):

- (1) если $\delta > \delta'$, то $\mathcal{U}_\mathcal{F}^\delta \geq \mathcal{U}_\mathcal{F}^{\delta'}$;
- (2) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{U}_\mathcal{F}^\delta = \mathcal{U}_\mathcal{F}$.

Весьма важно, что для любого $\delta \in (0, 1/2)$ и любого гомотопически инвариантного семейства $\mathcal{F}$ из $\hat{\mathcal{B}}$ существуют минимаксные последовательности $\{(F_i^\delta, c_i^\delta)\} \subset Y^\delta(\mathcal{F})$ для функционала $\mathcal{U}^\delta$, такие, что последовательность $\{c_i^\delta\}$ сходится в $\hat{\mathcal{B}}$ к $c^\delta(\mathcal{F})$ — решению вариационных уравнений для функционала $\mathcal{U}^\delta$; при этом $\mathcal{U}^\delta(c^\delta(\mathcal{F})) = \mathcal{U}_\mathcal{F}^\delta$. Этот факт устанавливается в предложении В1.3.

Вариационные уравнения для функционала $\mathcal{U}^\delta$ используются для доказательства того, что каждое решение $c^\delta(\mathcal{F})$ удовлетворяет требуемым оценкам (см. §С1-С4). Подобная техника была развита в работе [24] (см. также [11]). Нужные нам минимаксные последовательности для функционала $\mathcal{U}$ могут быть построены диагональным методом при помощи двойной последовательности $\{(F_i^\delta, c_i^\delta): i \in \{1, \dots\} \text{ и } \delta \in (0, 1/2)\}$.

Другой метод получения априорных оценок для минимаксных последовательностей состоит в том, чтобы деформировать пару $(F, c) \in Y(\mathcal{F})$ в пару $(F'(F), c')$, где $F'(\delta)$ получается из $\delta \in F$ с помощью решения уравнения (А1.1) в области малых полей $\mathbb{R}^3 \setminus U(\delta)$ (где эти уравнения практически линейны). Эта процедура технически сложна, но имеет приложения к другим вариационным эллиптическим полунелинейным задачам, находящимся на границе выполнения условия С. Она будет приведена в другой работе.

Для каждого $c^\delta(\mathcal{F})$ ($\delta > 0$) решения в области малых полей определяются из линейной в главном системе уравнений по основным значениям на границе $\partial U(c^\delta(\mathcal{F}))$. Это позволяет разложить действие $\mathcal{U}^\delta(c^\delta(\mathcal{F}))$ в сумму вклада, отвечающего области $U(c^\delta(\mathcal{F}))$, и остальной части. Этот остаток в главном порядке представляет собой энергию взаимодействия системы точечных частиц, по одной в каждой линейно связной компоненте множества $U(c^\delta(\mathcal{F}))$. Взаимодействие этих частиц задается дальнедействующими полями, удовлетворяющими линеаризованным уравнениям Янга — Миллса — Хиггса с источниками в виде δ -функций, сосредоточенных в точках расположения частиц. Коэффициент при δ -функции определяется граничными значениями решения $c^\delta(\mathcal{F})$ на этой компоненте $U(c^\delta(\mathcal{F}))$, которая ос-

держит данную частицу. Это определяет чисто потенциальную теорию, задаваемую, по существу, уравнениями Лапласа во внешней области. Ряд технических лемм, описывающих эту картину для $c^\delta(\mathcal{F})$, доказаны в § D1 - D3.

Располагая указанными априорными оценками, можно продолжить доказательство, пользуясь методом от противного. Именно, предположим, что линейаризованные уравнения дают, посредством потенциальной теории, энергию взаимодействия, определяющую силы притяжения между линейно связанными компонентами множества $U(c^\delta(\mathcal{F}))$. Предположим далее, что максимальное расстояние между компонентами велико. В этом случае мы могли бы методом "разрезания и склеивания" построить однопараметрическое семейство конфигураций, начальная конфигурация которого совпадает с решением $c^\delta(\mathcal{F})$, а в последующих конфигурациях далеко разнесенные компоненты $c^\delta(\mathcal{F})$ жестким образом сдвигаются навстречу друг другу. Силы притяжения обеспечат, что функционал $\mathcal{U}^\delta$ не будет стационарным на $c^\delta(\mathcal{F})$ при движении вдоль этого однопараметрического семейства.

На самом деле явной деформации решения $c^\delta(\mathcal{F})$ не требуется. Критическая точка $c = (A, \Phi)$ функционала $\mathcal{U}^\delta$ удовлетворяет "теореме вириала", которую можно вывести из дифференциального уравнения (см. следствие D1.5 и [11, гл. 2]). Теорема вириала заключается в следующем интегральном равенстве:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3y \{ |D_A \Phi|^2 - (1 - 2\delta |y|^2 (1 + |y|^2)^{-1}) (1 + |y|^2)^\delta |F_A|^2 \} = 0. \quad (A2.4)$$

Это позволяет получить равномерную оценку функции $\rho(c)$. По-путем заметим, что это равенство может быть получено путем выбора подходящей деформации для c с учетом того, что c - критическая точка функционала $\mathcal{U}^\delta$. Равенство (A2.4) дает прямой путь, позволяющий избежать построения явной деформации.

Для того чтобы им воспользоваться, оценим интеграл, вычисляя отдельно вклады от областей больших и малых полей. Априорные оценки из (A2.4) приводят к следующему неравенству (предложение D3.2):

$$0 \geq \sum_{\mu, \lambda} \frac{(\alpha(\mu)\alpha(\lambda) - n(\mu)n(\lambda))}{\text{dist}(\mu, \lambda)} + \delta \varepsilon_0 (\mathcal{U}^\delta(c)) - \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \rho(c)^{-1/2}. \quad (A2.5)$$

Суммирование в этой формуле ведется по соответствующим парам

(μ, λ) , состоящим из наборов (кластеров) компонент множества $U(c)$, разделенных расстоянием $\text{dist}(\mu, \lambda) = O(\rho(c))$ (см. § D2). Функции $\alpha_0(\cdot)$ и $\zeta(\cdot)$ положительны и непрерывны. Число $\alpha(\mu)$ есть действие, ассоциированное с кластером μ . Точный смысл этому действию придает лемма D2.2, но в главном

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mu} d^3x ((1 + |x|^2)^{\delta} |F_A|^2 + |D_A \Phi|^2).$$

Число $n(\mu)$ есть локальное "монопольное число" для кластера μ ; а именно

$$n(\mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mu} d^3x (F_A * D_A \Phi). \quad (\text{A2.6})$$

Уравнение (A2.4) имеет аналогию в ранее упомянутой модельной задаче об l частицах в $\mathbb{R}^3$, взаимодействующих посредством парного потенциала $v(x_i - x_j)$. Для критических конфигураций l частиц, находящихся в точках $\{x_1, \dots, x_l\}$ пространства $\mathbb{R}^3$, соответствующая теорема вириала имеет вид

$$\sum_{i < j} \sum_{\alpha=1}^3 (x_i - x_j)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} v \right) (x_i - x_j) = 0. \quad (\text{A2.7})$$

Уравнение (A2.7) выводится с использованием того факта, что энергия критической конфигурации $\{x_1, \dots, x_l\}$ стационарна в точке $t=1$ вдоль кривой $t \mapsto \{tx_1, \dots, tx_l\}$.

Попутно заметим, что парный потенциал $v(x(\mu) - x(\lambda))$, для которого тождество вириала (A2.7) представляет собой в точности первый член в выражении (A2.5), является кулоновским потенциалом:

$$v(x(\mu) - x(\lambda)) = - \frac{(\alpha(\mu)\alpha(\lambda) - n(\mu)n(\lambda))}{|x(\mu) - x(\lambda)|}. \quad (\text{A2.8})$$

Этот потенциал описывает "силу", действующую между далеко отстоящими компонентами множества $U(c)$. Такой потенциал взаимодействия в точности совпадает с потенциалом, который физики ожидали получить для монополей в пределе Прасада - Зоммерфельда [20, 21].

Рассмотрим неравенство (A2.5). Если пренебречь членом взаимодействия (первый член), то из второго и третьего членов получим оценку функции $\rho(c)$, зависящую от δ . Такого типа оценки и следовало ожидать, так как весовая функция $(1 + |x|^2)^\delta$ в $\mathcal{U}^\delta$ специально предназначена для того, чтобы удерживать вместе компоненты множества $U(c)$.

Если все "заряды" в выражении (A2.5) удовлетворяют условию

$$\alpha(\mu)\alpha(\lambda) - n(\mu)n(\lambda) \geq O(\delta, \rho^{-1/2}), \quad (A2.9)$$

и если по крайней мере один из них больше некоторого $\varepsilon > 0$, то из (A2.5) получается не зависящая от δ оценка функции $\rho(c)$, вытекающая из первого и третьего членов, а именно:

$$\rho(c) \leq \zeta'_2(\mathcal{U}^\delta(c)) \cdot \varepsilon^{-2}. \quad (A2.10)$$

Здесь функция $\zeta'_2(\cdot)$ непрерывна по своему аргументу. В этом случае между кластерами действуют силы притяжения. Поэтому очень важно получить информацию о числах $\{\alpha(\mu), n(\mu)\}$, фигурирующих в (A2.5).

Основные свойства чисел $\{\alpha(\mu), n(\mu)\}$ выводятся в § D2. Эти свойства таковы:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha(\mu) \geq \varepsilon + O(\delta, \rho^{-1/2}), \\ (2) \quad & |n(\mu)| \leq \alpha(\mu) + O(\delta, \rho^{-1/2}), \\ (3) \quad & 4\pi \sum_{\mu} \alpha(\mu) = \mathcal{U}^\delta(c) + O(\delta, \rho^{-1/2}), \\ (4) \quad & \sum_{\mu} n(\mu) = n(c) + O(\delta, \rho^{-1/2}). \end{aligned} \quad (A2.11)$$

Здесь $n(c)$ — "монопольное число" из (A1.4) (см. леммы D2.2 и D2.3). Соотношения (A2.11) не вызывают удивления, если иметь в виду формулу (A2.6).

Заметим, что из неравенства (A2.11)(2) следует неравенство (A2.9). Далее, если (A2.9) представляет собой равенство для всех пар кластеров (μ, λ) , то из (A2.11) (2) следует, что для каждого кластера выполнено соотношение $\alpha(\mu) = |n(\mu)| + O(\delta, \rho^{-1/2})$, и все числа $n(\mu)$ имеют одинаковый знак. В этом случае из (A2.11)(3) и (4) с необходимостью вытекает, что крити-

ческое значение удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{U}^{\delta}(c) = 4\pi |n(c)| + O(\delta, \rho^{-1/2}). \quad (A2.12)$$

Обращаясь к следствиям неравенства (A2.5), рассмотрим гомотопически инвариантное семейство $\mathcal{F}$ компактных подмножеств пространства $\mathcal{C}_n$ для некоторого целого n . Пусть $\{c^{\delta}(\mathcal{F}): \delta \in (0, 1/2)\}$ — множество критических точек функционала $\mathcal{U}^{\delta}$ с критическими значениями $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^{\delta}$. Возможны два случая. В первом $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} > 4\pi |n|$. Тогда для достаточно малых δ из соотношений (A2.11) следует, что существует хотя бы одна пара (μ, λ) в первом члене (A2.5), для которой

$$\alpha(\mu) \alpha(\lambda) - n(\mu) n(\lambda) \geq \zeta(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})(\mathcal{U}_{\mathcal{F}} - 4\pi |n|) + O(\delta, \rho^{-1/2}). \quad (A2.13)$$

Здесь $\zeta(\cdot)$ — строго положительная непрерывная функция своего аргумента. Таким образом, если $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} > 4\pi |n|$, то априорная оценка функции $\rho(c^{\delta}(\mathcal{F}))$ при $\delta > 0$ вытекает из неравенств (A2.13) и (A2.10) (при $\varepsilon = \mathcal{U}_{\mathcal{F}} - 4\pi |n|$). (См. предложение D1.1 и начало § D3.) В случае $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} > 4\pi |n|$ доказательство теоремы A1.2 завершается в § D4.

Если же $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} = 4\pi |n|$, то неравенство (A2.5) не дает априорных оценок величины $\rho(c^{\delta}(\mathcal{F}))$. Это не удивительно, поскольку пространства модулей решений уравнения (A1.6), как известно, некомпактны; и действительно, они содержат сколь угодно далеко разнесенные области больших полей [11, 14]. В случае $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} = 4\pi |n|$ теорема A1.1 доказана в § E1, где показано (предложение E1.1), что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует такое $\varepsilon > 0$, что множество $\mathcal{U}^{-1}([4\pi |n|, 4\pi |n| + \varepsilon)) \cap \mathcal{B}_n$ допускает ретракцию на пространство $\widehat{\mathcal{M}}_n$.

Что касается теоремы A1.4, то практически это есть следствие теоремы A1.2 и теоремы 1.2 работы [8]. В этой теореме требуется аналог для уравнений Янга — Миллса — Хиггса одного результата из [22, § 5], который подчеркивает роль гессияна функционала $\mathcal{U}$ в процедуре минимакса. Детали приводятся в § E2.

A3. Терминология

Большая часть терминов, используемых в данной работе, была введена в § A3 работы [9]. Однако здесь нам понадобятся и новые обозначения и соглашения. Пусть $P = \mathbb{R}^3 \times SU(2)$. Неиз-

но на P фиксирована структура прямого произведения. Таким образом, пара $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ есть пара (связность на P , сечение $\text{Ad } P$), но ее же можно рассматривать как пару $(\text{su}(2)$ -значная 1-форма на $\mathbb{R}^3$, отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\text{su}(2)$), где $\text{su}(2)$ — алгебра Ли группы $SU(2)$. Топология пространства $\mathcal{C}$ индуцирована отображением $\mathcal{C}$ в пространство $\times C^\infty(\mathbb{R}^3) \times [0, \infty)$, которое сопоставляет элементу (A, Φ) совокупность $\{\text{компоненты } A \text{ и } \Phi\} \times \{\mathcal{U}(A, \Phi)\}$. Утверждение о сходимости в пространстве $\mathcal{C}$ или в пространстве $\mathcal{B}$ всегда означает сходимость в смысле этой топологии. В качестве вспомогательного средства для установления такой сходимости мы будем пользоваться вспомогательной топологией. Это топология пространства $L_{1;10c}^2$. Будем говорить, что последовательность $\{(A_i, \Phi_i)\} \in \mathcal{C}$ сильно сходится в топологии $L_{1;10c}^2$ к элементу $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$, если числовая последовательность $\{\mathcal{U}(A_i, \Phi_i)\}$ сходится к $\mathcal{U}(A, \Phi)$ и если для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ последовательность $\{(A_i, \Phi_i)|_\Omega\}$ сильно сходится в топологии соболевского пространства $L_{1;10c}^2$ к элементу $(A, \Phi)|_\Omega$. Иначе говоря, должно выполняться условие

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} d^3 y \{ |\nabla(A - A_i)|^2 + |(A - A_i)|^2 \} = 0$$

и аналогичное условие для $\Phi - \Phi_i$. Здесь ∇ — плоская связность на пространстве $\mathbb{R}^3 \times SU(2)$. Заметим, что если последовательность $\{(A_i, \Phi_i)\}$ лежит в $\mathcal{C}_n$ и сходится в топологии $L_{1;10c}^2$ на $\mathcal{C}_n$ к элементу $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$, то $(A, \Phi) \in \mathcal{C}_n$. Это следует из формулы (A1.4) и предложения ВЗ.1 работы [9].

Необходимо ввести еще некоторую терминологию, употребляемую на протяжении данной работы. Векторное расслоение $\text{Ad } P \otimes \otimes (T^* \otimes \mathbb{R})$ над $\mathbb{R}^3$ обозначается через Q . Если $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ — какое-либо векторное расслоение, то $\Gamma_0(E)$ есть пространство C^∞ -сечений расслоения E с компактными носителями, а $\Gamma(E)$ — пространство C^∞ -сечений расслоения E . Если расслоение E ассоциировано с расслоением $\mathbb{R}^3 \times SU(2)$ с помощью представления ρ и A — некоторая связность на $\mathbb{R}^3 \times SU(2)$, то $\nabla_A: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*)$ обозначает индуцированное ковариантное дифференцирование на пространстве $\Gamma(E)$. Плоская $SU(2)$ -инвариантная полейная метрика на расслоении E обозначается через $(\cdot, \cdot)$. На расслоении T^* рассматривается всегда только евклидова метрика. Полей-

ная метрика расслоения E индуцирует L^2 -метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ на пространстве $\Gamma_0(E)$ и L^p -нормы $\|\cdot\|_p$. Оператор, формально сопряженный относительно L^2 к оператору ∇_A , обозначается через ∇_A^* .

Начало координат в пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксировано, так же как и декартовы координаты $\{x\}$. Необходимо иметь в своем распоряжении сглаживающую функцию β класса C^∞ , $\beta \in C^\infty([0, \infty); [0, 1])$, которая тождественно равна 1 на интервале $[0, 1/2]$ и тождественно равна 0 на полуоси $[3/4, \infty)$. Функцию β мы будем также рассматривать как функцию на пространстве $\mathbb{R}^3$, задаваемую соответствием $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \beta(|x|)$. Если $\tau \in (0, \infty)$, то $\beta_\tau(x) = \beta(x/\tau)$.

Наконец, мы будем строго придерживаться важного соглашения относительно констант. Буква $\varkappa$ будет обозначать численную константу, не зависящую ни от каких внешних параметров, если только это не указано явно. В каждом конкретном вычислении точное значение $\varkappa$ может меняться от строки к строке. Сходным образом, буква ζ будет всегда обозначать непрерывную функцию из $[0, \infty)$ в $(0, \infty)$, также не зависящую от внешних параметров, если только это не указано явно. Конкретный вид функции может меняться от строки к строке.

A4. Вариационная задача

Формула (A2.3) при каждом $\delta \in [0, 1/2)$ задает функционал $\mathcal{U}^\delta$ с областью определения

$$\mathcal{C}^\delta = \{c \in \mathcal{C} : \mathcal{U}^\delta(c) < \infty\}. \quad (\text{A4.1})$$

Как следует из обсуждения в §B2 работы [9], пересечение $\mathcal{C}_n^\delta = \mathcal{C}^\delta \cap \mathcal{C}_n$ непусто ни для каких $n \in \mathbb{Z}$ и $\delta \in (0, 1/2)$.

В силу $\mathcal{G}$ -инвариантности функционала $\mathcal{U}^\delta$ с помощью конструкции из §B5 работы [9] можно построить для каждого $\delta \in [0, 1/2)$ пространство $\hat{\mathcal{B}}^\delta = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}^\delta$ и для каждого $n \in \mathbb{Z}$ - пространство $\hat{\mathcal{B}}_n^\delta = \hat{\mathcal{B}}_n \cap \mathcal{C}^\delta$. В [9, §B2] на $\mathcal{C}^\delta$ была введена топология, в которой каждое пространство $\mathcal{C}_n^\delta$ гомотопически эквивалентно пространству $\mathcal{C}_n$, а каждое $\hat{\mathcal{B}}_n^\delta$ гомотопически эквивалентно пространству $\hat{\mathcal{B}}_n$. По построению функция $\mathcal{U}^\lambda$ на $\mathcal{C}^\delta$ или $\hat{\mathcal{B}}^\delta$ непрерывна, если $1/2 > \delta \geq \lambda \geq 0$.

Для того чтобы заниматься вариационным исчислением на пространстве $\mathcal{B}^\delta$, необходимо ввести дифференцирование.

О п р е д е л е н и е А4.1. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$ и $c \in \mathcal{C}^\delta$. Градиентом $\nabla \mathcal{U}_c^\delta$ функции $\mathcal{U}^\delta$ в точке c называется линейный функционал на $\Gamma_0(Q)$, переводящий $\psi = (\alpha, \varphi)$ в

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{U}_c^\delta(\psi) = \frac{d}{dt} \mathcal{U}^\delta(c + t\psi) \Big|_{t=0} = \langle (1 + |x|^2)^\delta D_A \alpha, F_A \rangle_2 + \\ + \langle [\alpha, \Phi], D_A \Phi \rangle_2 + \langle D_A \varphi, D_A \Phi \rangle_2. \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

Гессиан $\nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta$ функции $\mathcal{U}^\delta$ в точке c представляет собой квадратичный функционал на $\Gamma_0(Q)$, переводящий $\psi = (\alpha, \varphi)$ в

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta(\psi) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{U}^\delta(c + t\psi) \Big|_{t=0} = \langle (1 + |x|^2)^\delta D_A \alpha, D_A \alpha \rangle_2 + \\ + \langle (1 + |x|^2)^\delta [\alpha, \alpha], F_A \rangle_2 + \langle [\alpha, \Phi], [\alpha, \Phi] \rangle_2 + \\ + 2 \langle [\alpha, \varphi], D_A \Phi \rangle_2 + 2 \langle [\alpha, \Phi], D_A \varphi \rangle_2 + \langle D_A \varphi, D_A \varphi \rangle_2. \end{aligned} \quad (\text{A4.3})$$

Для оценки величины $\nabla \mathcal{U}_c^\delta$ и $\nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta$ удобно ввести на пространстве $\Gamma_0(Q)$ новые нормы.

О п р е д е л е н и е А4.2. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$ и $c \in \mathcal{C}^\delta$. Зададим норму $\|\cdot\|_{c,\delta}$ на $\Gamma_0(Q)$, сопоставляя паре $\psi = (\alpha, \varphi)$ число

$$\|\psi\|_{c,\delta}^2 = \langle (1 + |x|^2)^\delta \nabla_A \alpha, \nabla_A \alpha \rangle_2 + \langle \nabla_A \varphi, \nabla_A \varphi \rangle_2 + \langle [\Phi, \psi], [\Phi, \psi] \rangle_2.$$

П р е д л о ж е н и е А4.3. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$. Существует непрерывная возрастающая функция $\varkappa(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, обладающая следующим свойством. Для элемента $c \in \mathcal{C}^\delta$ положим $\varkappa_c = \varkappa(\mathcal{U}^\delta(c))$ и для удобства обозначим $\|\cdot\|_{c,\delta}$ через $\|\cdot\|$. Тогда для любых $\psi, \eta \in \Gamma_0(Q)$ выполняются оценки

$$(1) \quad |\mathcal{U}^\delta(c + \psi) - \mathcal{U}^\delta(c)| \leq \varkappa_c \|\psi\| (1 + \|\psi\|)^\delta,$$

$$(2) \quad |\mathcal{U}^\delta(c+\psi) - \mathcal{U}^\delta(c) - \nabla \mathcal{U}_c^\delta(\psi)| \leq \varepsilon_c \|\psi\|^2 (1 + \|\psi\|)^2,$$

$$(3) \quad |\mathcal{U}^\delta(c+\psi) - \mathcal{U}^\delta(c) - \nabla \mathcal{U}_c^\delta(\psi) - \frac{1}{2} \nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta(\psi)| \leq \varepsilon_c \|\psi\|^3 (1 + \|\psi\|),$$

$$(4) \quad |\nabla \mathcal{U}_{c+\psi}^\delta(\eta) - \nabla \mathcal{U}_c^\delta(\eta)| \leq \varepsilon_c \|\eta\| \|\psi\| (1 + \|\psi\|)^2,$$

$$(5) \quad |\nabla^2 \mathcal{U}_{c+\psi}^\delta(\eta) - \nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta(\eta)| \leq \varepsilon_c \|\eta\|^2 \|\psi\| (1 + \|\psi\|).$$

Доказательство. Это простое упражнение на применение неравенства Гёльдера, но сначала нужно воспользоваться леммами A4.1 и B6.4 из работы [9]. Детали мы оставляем читателю. (См. предложение 5.2 работы [6, ч. I].)

По построению $\nabla \mathcal{U}_c^\delta$ удовлетворяет равномерной оценке

$$|\nabla \mathcal{U}_c^\delta(\psi)| \leq \|\psi\|_{c,\delta} (\mathcal{U}^\delta(c))^{1/2}, \quad (A4.4)$$

а $\nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta$ — оценке

$$|\nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta(\psi)| \leq \zeta_c(\mathcal{U}^\delta(c)) \|\psi\|_{c,\delta}^2. \quad (A4.5)$$

(Для получения оценки (A4.5) нужно воспользоваться леммами A4.1 и B6.4 из [9].) Следующим шагом введем норму, характеризующую величину этих двух функционалов.

Определение A4.4. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$ и $c \in \mathbb{C}^\delta$. Положим

$$\|\nabla \mathcal{U}_c^\delta\|_* = \sup_{0 \neq \psi \in \Gamma_0(Q)} \frac{|\nabla \mathcal{U}_c^\delta(\psi)|}{\|\psi\|_{c,\delta}}.$$

Для каждого числа $\ell > 0$ положим

$$\gamma_c^\delta(\ell) = \inf_{E \in \Gamma_0(Q)} \left[\sup_{0 \neq \psi \in E} \frac{\nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta(\psi)}{\|\psi\|_{c,\delta}^2} \right],$$

где нижняя грань берется по всем ℓ -мерным подпространствам E в пространстве $\Gamma_0(Q)$.

Конфигурация $c \in \mathbb{C}^\delta$ является критической для функционала $\mathcal{U}_c^\delta$ тогда и только тогда, когда

$$\|\nabla \mathcal{U}_c^\delta\|_* = 0. \quad (A4.6)$$

Смысл $\gamma_c^\delta(\ell)$ в том, что это число отрицательно тогда и только тогда, когда существует ℓ -мерное линейное подпространство пространства $\Gamma_0(Q)$, на котором $\nabla^2 \mathcal{U}_c^\delta(\cdot)$ отрицательно.

Величины $\|\nabla \mathcal{U}_c^\delta\|_*$ и $\gamma_c^\delta(\ell)$ $\mathcal{G}$ -инвариантны, поэтому их можно рассматривать как S^1 -эквивариантные функции на пространстве $\mathcal{B}^\delta$.

Этот параграф завершается доказательством следующего предложения.

Предложение A4.5. Пусть $\delta \in [0, 1/2]$ и $i \in \{1, 2, \dots\}$. Сопоставление конфигурации $c \in \mathcal{C}^\delta$ числа $\|\nabla \mathcal{U}_c^\delta\|_*$ или $\gamma_c^\delta(\ell)$ определяет непрерывную функцию на $\mathcal{C}^\delta$.

Доказательство. При $\delta = 0$ из неравенства (A4.4) следует, что функционал $\nabla \mathcal{U}_{(\cdot)}$ задает непрерывное сечение векторного расслоения $H(Q)^*$ над пространством $\mathcal{B}$ (см. [9, §B6]). Аналогично, функционал $\nabla^2 \mathcal{U}_{(\cdot)}$ задает непрерывное сечение расслоения $\text{Sym}_2 H(Q)^*$ над $\mathcal{B}$. Поскольку $\|\cdot\|_{(\cdot)}$ — непрерывная посылная норма на расслоении $H(Q)$ над $\mathcal{B}$ (предложение B6.2 работы [9]), то утверждения предложения A4.5 выполняются автоматически.

При $\delta > 0$ можно приспособить к данной ситуации доказательства лемм 6.2 и 6.3 из работы [6, ч. I]. Здесь будет рассмотрен только случай функционала $\nabla \mathcal{U}_{(\cdot)}^\delta$. Ради удобства обозначений мы будем писать $\nabla \mathcal{U}_i$ и $\|\cdot\|_i$ вместо $\nabla \mathcal{U}_c^\delta$ и $\|\cdot\|_{c,\delta}$ при $c = c_i$, где $\{c_i = (A_i, \Phi_i)\} \in \mathcal{C}^\delta$. Мы будем также писать ∇_i и F_i вместо ∇_A и F_{A_i} при $A = A_i$. В случае когда верхние и нижние индексы δ не важны, они будут опускаться.

Рассмотрим последовательность конфигураций $\{c_i = (A_i, \Phi_i)\} \in \mathcal{C}$, сходящуюся к элементу $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}$. При заданном $\varepsilon > 0$ существует сечение $\psi \in \Gamma_0(Q)$, такое, что $\|\psi\|_c = 1$ и

$$\nabla \mathcal{U}_c(\psi) > \|\nabla \mathcal{U}_c\|_* - \varepsilon.$$

Но ψ имеет компактный носитель, поэтому $\lim \|\psi\|_i = 1$ и $\lim \nabla \mathcal{U}_i(\psi) = \nabla \mathcal{U}_c(\psi)$. Следовательно, $\lim \|\nabla \mathcal{U}_i\|_* \geq \|\nabla \mathcal{U}_c\|_*$. Обратно, для данного $\varepsilon > 0$ при каждом i существует сечение $\psi_i \in \Gamma_0(Q)$ с нормой $\|\psi_i\|_i = 1$, для которого $\nabla \mathcal{U}_i(\psi_i) > \|\nabla \mathcal{U}_i\|_* - \varepsilon$. Ввиду того что последо-

вательность $\{(A_i, \Phi_i)\}$ сходится в пространствах C^∞ на ограниченных областях, диагональным методом (как в [23]) можно извлечь из последовательности $\{\Phi_i\}$ слабо сходящуюся в пространстве $L^2_{1;10c}$ подпоследовательность (см. [9, §A3.4]), предел которой равен $\psi = (\alpha, \varphi) \in L^2_{1;10c}$. Для этой подпоследовательности запишем $\psi_i = (\alpha_i, \varphi_i)$. Тогда последовательность элементов вида $y_i = ((1+|x|)^\delta \nabla_i \alpha_i, \nabla_i \varphi_i, [\Phi_i, \psi_i])$ слабо сходится в L^2 к некоторому элементу $y \in L^2$. Поскольку элемент y должен быть равен $y_c = ((1+|x|)^\delta \nabla_A \alpha, \nabla_A \varphi, [\Phi, \psi])$ на ограниченных областях в пространстве $\mathbb{R}^3$, заключаем отсюда, что $y = y_c$ и, таким образом, $y_c \in L^2$. Далее, последовательность сечений $(1+|x|)^\delta |\psi_i| \in L^6$ равномерно ограничена (см. лемму A4.1 работы [9]), и аналогичные рассуждения показывают, что $(1+|x|)^\delta |\varphi| \in L^6(\mathbb{R}^3)$. Подводя итог, заключаем, что последовательность $\{\psi_i\}$ имеет слабый предел ψ , причем $(1+|x|)^\delta \psi \in L^2_{1;10c} \cap L^6(Q)$ и $\|\psi\|_{c,\delta} = \|y\|_2 \leq \lim \|y_i\|_2 = 1$.

Определим банахово пространство $H_{c,\delta}(Q)$ как пополнение пространства $\Gamma_0(Q)$ по норме $\|\cdot\|_{c,\delta}$. Используя слаживатели и лемму A4.1 работы [9], можно непосредственно показать, что $\psi \in H_{c,\delta}(Q)$.

Из неравенства (A4.4) следует, что функционал $\nabla \mathcal{U}_c^\delta$ задает ограниченный линейный функционал на пространстве $H_{c,\delta}(Q)$, норма которого в точности равна $\|\nabla \mathcal{U}_c^\delta\|_*$.

Как следует из предложения B4.1 работы [9], последовательность $\{((1+|x|)^\delta F_i, \nabla_i \Phi_i)\}$ сильно сходится в L^2 к $\{((1+|x|)^\delta F_A, \nabla_A \Phi)\}$. Следовательно, из слабой сходимости в L^2 элементов y_i к y_c получаем, что $\lim \nabla \mathcal{U}_i^\delta(\psi_i) = \nabla \mathcal{U}_c^\delta(\psi)$. Поскольку $\|\psi\|_{c,\delta} \leq 1$, приходим к выводу, что

$$\|\nabla \mathcal{U}_c^\delta\|_* \geq \frac{1}{\|\psi\|_{c,\delta}} \nabla \mathcal{U}_c^\delta(\psi) \geq \lim \|\nabla \mathcal{U}_i^\delta\|_* - \varepsilon.$$

Следовательно, норма $\|\nabla \mathcal{U}_{(\cdot)}^\delta\|_*$ непрерывна.

VI. Регуляризованная задача

Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантное семейство подмногожеств пространства $\mathcal{B}$. Регуляризованная задача заключается

в том, чтобы, пользуясь семейством $\mathcal{F}$, найти критическую точку функционала $\mathcal{U}^\delta$ на пространстве $\hat{\mathcal{B}}^\delta$. С этой целью определим семейство

$$\mathcal{F}^\delta = \{F \in \mathcal{F}: F \subset \hat{\mathcal{B}}^\delta\}. \quad (\text{В1.1})$$

Решающим является следующее наблюдение.

Л е м м а В1.1. Пусть $\mathcal{F}$ - семейство, указанное выше. Тогда при любом $\delta \in (0, 1/2)$ семейство $\mathcal{F}^\delta$, определенное формулой (В1.1), непусто.

Доказательство этой леммы и следующей леммы В1.2 откладывается до конца параграфа.

Каждому гомотопически инвариантному семейству $\mathcal{F}$ и числу $\delta \in (0, 1/2)$ поставим в соответствие число

$$\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta = \inf_{F \in \mathcal{F}^\delta} \max_{c \in F} \mathcal{U}^\delta(c). \quad (\text{В1.2})$$

Относительно $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta$ заметим, что $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta \geq \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$, и имеет место

Л е м м а В1.2. Величина $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta$ как функция от $\delta \in [0, 1/2)$ не убывает и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta = \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$.

Смысл величины $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta$ проясняет следующее предложение В1.3, относящееся к семейству

$$Y^\delta(\mathcal{F}) = \{(F, c) \in \mathcal{F}^\delta \times \hat{\mathcal{B}}^\delta: c \in F \text{ и } \mathcal{U}^\delta(c) = \sup_F \mathcal{U}^\delta\}.$$

П р е д л о ж е н и е В1.3. Пусть $\mathcal{F}$ - гомотопически инвариантное семейство компактных подмножеств пространства $\hat{\mathcal{B}}$. Тогда для каждого $\delta \in (0, 1/2)$ существует последовательность $\{(F_i, c_i)\} \subset Y^\delta(\mathcal{F})$, обладающая тем свойством, что последовательность $\{c_i\}$ сходится в пространстве $\hat{\mathcal{B}}^\delta$ (определенном в §А.3) к элементу $c^\delta(\mathcal{F})$, который является критической точкой функционала $\mathcal{U}^\delta$ с критическим значением $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta$.

Доказательство предложения В1.3 занимает §В2 - В4. Для него потребуются следующие леммы технического характера.

Л е м м а ВІ.4. Пусть $\Psi: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное отображение. Предположим, что $\Psi(0, \cdot)$ — тождественное отображение. Тогда существует непрерывное отображение $h: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$, такое, что $h(0, \cdot) = 1$, а отображение $(h\Psi)(\cdot)$ непрерывно отображает пространство $[0, 1] \times \mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$.

Л е м м а ВІ.5. Пусть $F \subset \mathcal{B}$ — компактное множество. Предположим, что для некоторого $\delta \in [0, 1/2)$ множество $F \subset \mathcal{B}^\delta$. Для заданной окрестности V множества F в пространстве $\mathcal{B}$ и числа $\varepsilon > 0$ существует гомотопия $\tau: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, такая, что $\tau(1, \cdot)$ непрерывно отображает пространство $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}^\delta$, $\tau(t, F) \subset V$ при всех $t \in [0, 1]$, и для всех $b \in F$ выполняется условие $\mathcal{U}^\delta(\tau(1, b)) < \varepsilon + \sup_F \mathcal{U}^\delta$.

Остальная часть параграфа посвящена доказательству лемм ВІ.1, ВІ.2 и ВІ.4, ВІ.5.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы ВІ.1. Из предложения В5.2 работы [9] получаем непрерывное отображение $q: [0, 1] \times [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ с тем свойством, что для каждого $\varepsilon \in (0, 1]$ отображение $q(\varepsilon, \cdot, \cdot): [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ удовлетворяет условиям: $q(\varepsilon, 0, \cdot)$ — тождественное отображение, а $q(\varepsilon, 1, \cdot)$ непрерывно отображает $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}^\delta$ при каждом $\delta \in [0, 1/2)$. Если $F \in \mathcal{F}$, то при $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем $q^\varepsilon(1, F) = q(\varepsilon, 1, F) \in \mathcal{F}^\delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы ВІ.2. Утверждение о том, что $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta \geq \mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\gamma$ при $1/2 > \delta > \gamma \geq 0$, следует из того, что для любого $c \in \mathbb{C}^\delta$ при $\delta \geq \gamma$ выполняется соотношение $\mathcal{U}^\delta(c) \geq \mathcal{U}^\gamma(c)$. Чтобы доказать второе утверждение, выберем $\varepsilon > 0$ и $F \in \mathcal{F}$ так, чтобы выполнялось соотношение $\max_F \mathcal{U} \leq \mathcal{U}_{\mathcal{F}} + \frac{1}{3}\varepsilon$. Как следует из предложения В5.2 работы [9], множество $F(\varepsilon) = q^{\varepsilon/3}(1, F)$ обладает тем свойством, что $F(\varepsilon) \subset \bigcap_{\delta} \mathcal{B}^\delta$, и максимум функционала $\mathcal{U}$ на $F(\varepsilon)$ не превосходит $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} + \frac{2}{3}\varepsilon$. Из включения $F(\varepsilon) \subset \bigcap_{\delta} \mathcal{B}^\delta$ вытекает, что функционал $\mathcal{U}^\delta$ непрерывен на $F(\varepsilon)$ при всех $\delta \in [0, 1/2)$. Далее, для любого фиксированного $b \in \mathcal{B}^\delta$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{U}^\delta(b) = \mathcal{U}(b),$$

причем сходимость равномерна на компактных подмножествах в $\bigcap_{\delta} \mathcal{B}^\delta$. Тем самым найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$\delta \in [0, \delta(\varepsilon))$ и всех $b \in F(\varepsilon)$ имеем $\mathcal{U}^\delta(b) < \mathcal{U}_{\mathcal{F}} + \varepsilon$.
Для таких δ также $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta < \mathcal{U}_{\mathcal{F}} + \varepsilon$.

Доказательство леммы В1.4. Проекция $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ (см. [9, §B1]) задает непрерывное отображение $q: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{C}_0$, такое, что $(q \cdot \Psi): [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$. В §B5 работы [9] определяется $\mathcal{G}$ -эквивариантное отображение $\hat{n}: \mathcal{B} \rightarrow S^2$ с тем свойством, что $\hat{\mathcal{B}} = \hat{n}^{-1}$ (северный полюс) (формула (B5.2) работы [9]). Свойство накрывающей гомотопии для расслоения $S^1 \rightarrow SU(2) \xrightarrow{\pi} S^2$ приводит к непрерывному отображению $\ell: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow SU(2)$, такому, что $\ell(0, \cdot) = 1 \in SU(2)$ и

$$\pi \cdot \ell = \hat{n}(q \cdot \Psi). \quad (\text{В1.3})$$

Используя вложение группы $SU(2)$ в группу $\mathcal{G} (= C^\infty(\mathbb{R}^3; SU(2)))$ в виде подгруппы, состоящей из постоянных отображений, получаем, что $\ell^{-1}q: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{G}$. Согласно (В1.3), $(\ell^{-1}q \cdot \Psi): [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$, а отображение $(\ell^{-1}q \cdot \Psi)(0, \cdot)$ совпадает с тождественным.

Доказательство леммы В1.5. Для данного семейства F и окрестности V из предложения В5.2 работы [9] следует, что существует такое число $\lambda_0 \in (0, 1)$, что для всех $0 < \lambda < \lambda_0$ гомотопия $q(\lambda, \cdot, \cdot): [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ удовлетворяет условию $q(\lambda, t, F) \subset V$ при всех $t \in [0, 1]$, а $q(\lambda, 1, \cdot)$ непрерывно отображает $\hat{\mathcal{B}}$ в $\hat{\mathcal{B}}^\delta$. Поскольку сужение гомотопии $q(\cdot, \cdot, \cdot)$ на пространство $\hat{\mathcal{B}}^\delta$ является непрерывным отображением из $[0, 1] \times [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}^\delta$ в $\hat{\mathcal{B}}^\delta$, то для каждого элемента $b \in F$ найдется такое $\lambda(b) > 0$, что при всех $0 < \lambda < \lambda(b)$ имеем $\mathcal{U}^\delta(q(\lambda, 1, b)) < \sup_F \mathcal{U}^\delta + \varepsilon$. В силу непрерывности функционала $\mathcal{U}^\delta$ на $\hat{\mathcal{B}}^\delta$, существует такая окрестность $N_\varepsilon \subset \hat{\mathcal{B}}^\delta$ точки $q(\lambda, 1, b)$, что при всех $b' \in N_\varepsilon$ справедливо неравенство $\mathcal{U}^\delta(b') < \sup_F \mathcal{U}^\delta + \varepsilon$. Поскольку множества $\bigcup_{b \in F} q^{-1}(\lambda(b), 1, \cdot)(N_\varepsilon \cap F)$, $b \in F$, задают открытое покрытие множества F , а F компактно, это покрытие имеет конечное подпокрытие. Значит, найдется такое $\lambda(F, \varepsilon) > 0$, что при любом $0 < \lambda < \lambda(F, \varepsilon)$ гомотопия $\tau = q(\lambda, \cdot, \cdot)$ удовлетворяет требованиям леммы В1.5.

В2. Минимизирующие множества для функционала $\mathcal{U}^\sigma$

Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантное семейство компактных подмножеств пространства $\hat{\mathcal{B}}$. Цель этого параграфа заключается в построении минимаксных последовательностей $\{(F_i, c_i)\}$ в пространстве $Y^\sigma(\mathcal{F})$, обладающих специальными свойствами, которые облегчат доказательство предложения В1.3. Пользуясь подходящими "псевдоградиентными" гомотопиями пространства $\hat{\mathcal{B}}$, мы хотим построить последовательности $\{(F_i, c_i)\}$, в которых каждое c_i удовлетворяет априорным оценкам и потому похоже на решение вариационного уравнения для функционала $\mathcal{U}^\sigma$.

Предложение В2.1. Пусть множество $\mathcal{F}$ такое как сказано выше. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$. Для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ существует пара $(F, c) \in Y^\delta(\mathcal{F})$ со следующими свойствами:

$$(1) \mathcal{U}^\delta(c) < \mathcal{U}^\sigma(\mathcal{F}) + \varepsilon;$$

$$(2) \|\nabla \mathcal{U}_c^\delta\|_* < \varepsilon;$$

$$(3) \text{ каждый элемент } \mathcal{C} = (A, \Phi) \in F' \text{ удовлетворяет уравнению } \nabla_A^* \nabla_A \Phi = 0;$$

$$(4) \text{ каждый элемент } \mathcal{C} = (A, \Phi) \in F' \text{ удовлетворяет равенству}$$

$$\begin{aligned} \langle (1 + |\cdot|^2)^\delta F_A, F_A \rangle_2 &= (1 - 2\delta)^{-1} \langle \nabla_A \Phi, \nabla_A \Phi \rangle_2 - \\ &- 2\delta \langle (1 + |\cdot|^2)^{-1+\delta} F_A, F_A \rangle_2. \end{aligned} \quad (B2.1)$$

Доказательство состоит из четырех шагов. На первом шаге получаем гомотопию пространства $\hat{\mathcal{B}}$, переводящую заданное множество $G \in \mathcal{F}$ в множество $G_1 \in \mathcal{F}$, удовлетворяющее условию (3). На втором шаге строится гомотопия пространства $\hat{\mathcal{B}}$, сохраняющая свойство (3) и переводящая множество G_1 в множество $F' \in \mathcal{F}$ со свойствами (3) и (4). Обе эти гомотопии уменьшают функционал $\mathcal{U}^\sigma$. Для третьего шага выберем $G \in \mathcal{F}^\delta$ так, чтобы оно удовлетворяло условию $\max \mathcal{U}^\delta < \mathcal{U}_\mu^\sigma$ при подходящем $\mu \in (0, 1)$. Полученное множество F' деформируется с помощью псевдоградиентного векторного поля для функционала $\mathcal{U}^\sigma$ в множество $F'' \in \mathcal{F}^\delta$, причем так, что в точках множества F'' , где функционал $\mathcal{U}^\sigma$ принимает максимальные

значения, выполняются свойства (1)–(4). После этого еще раз применяются первые две гомотопии и получается множество $F \in \mathcal{F}^\delta$, точки которого, где функционал $\mathcal{U}^\delta$ принимает максимальное значение, лежат на той же орбите группы $\mathcal{G}$, что и точки множества F'' , где функционал $\mathcal{U}^\delta$ максимален. Такое F обладает всеми свойствами (1)–(4). Аналогичная техника использовалась при доказательстве предложения 5.2 в работе [6, ч. I] (см. также [22, §5]).

Остальная часть параграфа посвящена доказательству предложения В2.1. Первый шаг заключается в использовании предложения В3.2 работы [9]. Из него получаем для каждого $\delta \in [0, 1/2)$ непрерывное отображение $c_0: \hat{\mathcal{B}}^\delta \rightarrow \mathcal{B}^\delta$, переводящее $c = (A, \Phi)$ в $c_0(c) = (A, \Phi_0(c))$, где $\nabla_A^* \nabla_A \Phi_0(c) = 0$.

Лемма В2.2. Пусть $\mathcal{F}$ и δ такие же, как в предложении В2.1, и заданы $\varepsilon > 0$ и $G \in \mathcal{F}^\delta$. Тогда существует гомотопия $\tau_1: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$, такая, что множество $F = \tau_1(1, G) \in \mathcal{F}^\delta$ обладает следующими свойствами:

$$(1) \max_F \mathcal{U}^\delta < \max_G \mathcal{U}^\delta + \varepsilon;$$

(2) F удовлетворяет утверждению (3) предложения В2.1.

Доказательство. Выберем открытую окрестность $V \subset \hat{\mathcal{B}}$, содержащую G , и построим отображение $\tau: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ для G, V и ε , как указано в лемме В1.5. Положим $F_1 = \tau(1, G)$. Тогда F_1 обладает свойством (1) леммы В2.2. Рассмотрим теперь отображение $\hat{c}: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$, переводящее (t, c) в

$$\hat{c}(t, c) = c + t(c_0(c) - c). \quad (\text{В2.2})$$

Предложение В3.2 из работы [9] гарантирует, что отображение $\hat{c}$ и его ограничение на $\hat{\mathcal{B}}^\delta: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}^\delta \rightarrow \mathcal{B}^\delta$ непрерывны. Для фиксированного $c \in \hat{\mathcal{B}}^\delta$ функция $\mathcal{U}^\delta(\hat{c}_0(\cdot, c))$, а также функция $\mathcal{U}(\hat{c}_0(\cdot, c))$ не возрастают на интервале $[0, 1]$ в силу их выпуклости по Φ . Пусть $\tau': [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ определено так, что оно переводит пару (t, b) в

$$\tau'(t, b) = \begin{cases} \tau(2t, b) & \text{при } t \in [0, 1/2], \\ \hat{c}(2t-1, \tau(1, b)) & \text{при } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

По лемме В1.4 имеем непрерывное отображение $h: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{G}$, такое, что $\tau_1 = h\tau'$ — непрерывная гомотопия пространства $\mathcal{B}^\delta$ для каждого $\delta \in [0, 1/2)$. Указанная гомотопия τ_1 удовлетворяет утверждениям леммы В2.2.

Л е м м а В2.3. Пусть $\mathcal{F}$ и δ определены как в предложении В2.1 и заданы $\varepsilon > 0$ и $G \in \mathcal{F}^\delta$. Тогда существует гомотопия $\tau_2: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, такая, что $F = \tau_2(1, G) \in \mathcal{F}^\delta$ обладает следующими свойствами:

$$(1) \max_F \mathcal{U}^\delta < \max_G \mathcal{U}^\delta + \varepsilon;$$

(2) для него выполнены утверждения (3) и (4) предложения В2.1.

Доказательство леммы В2.3 мы пока отложим, так как оно требует построения специальной гомотопии пространства $\mathcal{B}$. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$ и $\lambda: \mathcal{B}^\delta \rightarrow (0, \infty)$ — непрерывная функция. Тогда λ порождает непрерывную функцию $\hat{\lambda}: \mathcal{B}^\delta \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, значение которой на элементе $c \in \mathcal{B}^\delta$ в точке $x \in \mathbb{R}^3$ равно $\hat{\lambda}(c)(x) = \lambda(c) \cdot x$. Следовательно, любая функция $\lambda: \mathcal{B}^\delta \rightarrow (0, \infty)$ задает отображение, обозначим его λ^* , из $\mathcal{B}^\delta$ в $\mathcal{B}^\delta$, переводящее $c = (A, \Phi)$ в

$$\lambda^*(c) = (\hat{\lambda}^*(c)A, \hat{\lambda}^*(c)\Phi), \quad (B2.3)$$

где $(\hat{\lambda}^*\Phi)(x) = \Phi(\lambda x)$ и $(\hat{\lambda}^*A)(x) = \lambda A(\lambda x)$.

Л е м м а В2.4. Пусть отображение $\lambda: [0, 1] \times \mathcal{B}^\delta \rightarrow (0, \infty)$ непрерывно. Для каждого $t \in [0, 1]$ зададим отображение $\lambda^*(t, \cdot): \mathcal{B}^\delta \rightarrow \mathcal{B}^\delta$ как указано выше. Тогда отображение, сопоставляющее элементу $(t, c) \in [0, 1] \times \mathcal{B}^\delta$ элемент $\lambda^*(t, c) \in \mathcal{B}^\delta$, непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Фиксированная структура прямого произведения на расслоении $P = \mathbb{R}^3 \times SU(2)$ позволяет отождествить пространство $\mathcal{B}^\delta$ с подмножеством пространства $\times C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (см. [9, §B5]). Отображение $\lambda^*(\cdot, \cdot)$ непрерывно относительно индуцированной топологии. Читатель может проверить это, используя определения, данные в [9, §A3, В1, В2]. Остается показать, что отображение $\mathcal{U}^\delta(\lambda^*(\cdot, \cdot)): [0, 1] \times \mathcal{B}^\delta \rightarrow$

$\rightarrow [0, \infty)$ непрерывно. Заметим, что $\mathcal{U}^\delta(\lambda^*(\cdot, \cdot))$ является композицией следующих отображений. Вначале определим отображение $\ell: \mathcal{B}^\delta \rightarrow C^\infty((0, \infty))$, которое сопоставляет элементу $c \in \mathcal{B}^\delta$ и числу $t \in (0, \infty)$ элемент

$$\ell(c, t) = t \langle (1+t^{-2}|\cdot|^2)^\delta F_A, F_A \rangle_2 + t^{-1} \langle D_A \Phi, D_A \Phi \rangle_2. \quad (\text{B2.4})$$

Отображение ℓ непрерывно, и рассматривая его как непрерывное отображение $\mathcal{B}^\delta \times [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, получаем, что композиция $\mathcal{U}^\delta(\lambda^*(\cdot, \cdot))$ является непрерывным отображением $\ell(\cdot, \lambda(\cdot, \cdot))$.

Определим теперь для каждого $\delta \in [0, 1/2)$ множество $\mathcal{P}^\delta = \{(A, \Phi) \in \mathcal{B}^\delta: F_A \neq 0 \text{ и } D_A \Phi \neq 0\}$. Это открытое плотное множество в пространстве $\mathcal{B}^\delta$.

Л е м м а B2.5. Для фиксированного $c \in \mathcal{P}^\delta$ C^∞ -функция $\ell(c, \cdot): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, заданная формулой (B2.4), имеет в точности одну критическую точку, а именно точку минимума $z(c)$. Сопоставляя элементу c точку $z(c)$, получаем непрерывное отображение из $\mathcal{P}^\delta$ в $(0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Прежде всего заметим, что для $c \in \mathcal{P}^\delta$ функция $\ell(c, t)$ стремится к ∞ при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$, а тем самым функция $\ell(c, \cdot)$ имеет по крайней мере одну критическую точку в $(0, \infty)$. Если z - критическая точка функции $\ell(c, \cdot)$, то

$$0 = \frac{d}{dt} \ell(c, \cdot) \Big|_z = (1-2\delta) \langle (1+z^{-2}|\cdot|^2)^\delta F_A, F_A \rangle_2 + \\ + 2\delta \langle (1+z^{-2}|\cdot|^2)^{-1+\delta} F_A, F_A \rangle_2 - z^{-2} \langle D_A \Phi, D_A \Phi \rangle_2. \quad (\text{B2.5})$$

Прямым вычислением с использованием (B2.5) можно проверить, что

$$\frac{d^2}{dt^2} \ell(c, \cdot) \Big|_z > 0. \quad (\text{B2.6})$$

Тем самым функция $\ell(c, \cdot)$ может иметь только минимумы и, следовательно, единственный минимум. Из (B2.6) и теоремы о неявной функции следует, что этот единственный минимум $z(c)$ является непрерывной функцией от c .

Из двух последних получается следующая

Л е м м а В2.6. Пусть задано открытое множество $V \subset \mathcal{B}^\delta$, такое, что $\mathcal{B}^\delta \setminus \mathcal{P}^\delta \subset V$. Тогда существует непрерывное отображение $m: [0, 1] \times \mathcal{B}^\delta \rightarrow \mathcal{B}^\delta$ со следующими свойствами: (1) $m(0, \cdot)$ — тождественное отображение; (2) m оставляет неподвижным множество $\mathcal{B}^\delta \setminus \mathcal{P}^\delta$; (3) для всех $c \in \mathcal{B}^\delta$ функция $\mathcal{U}^\delta(m(\cdot, c))$ не возрастает; (4) для $c \in \mathcal{B}^\delta \setminus V$ имеем $m(1, c) = z^*(c)$, где $z^*(\cdot)$ построено по функции $z(\cdot)$ из леммы В2.5 с помощью формулы (В2.3). Следовательно, для таких c элемент $m(1, c)$ удовлетворяет равенству (В2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку пространство $\mathcal{B}^\delta$ паракомпактно, существует функция $\rho \in C^0(\mathcal{B}^\delta; [0, 1])$, тождественно равная 1 на $\mathcal{B}^\delta \setminus V$ и нулю на $\mathcal{B}^\delta \setminus \mathcal{P}^\delta$. Рассмотрим отображение из $[0, 1] \times \mathcal{B}^\delta$ в $(0, \infty)$, переводящее (t, c) в $\lambda(t, c) = 1 + \rho(c)t(z(c) - 1)$, где функция $z(c)$ задается леммой В2.5. Указанное отображение $\lambda(\cdot, \cdot)$ непрерывно в своей области определения. При $c \in \mathcal{B}^\delta \setminus V$ справедливо соотношение $\lambda(1, c) = z(c)$, а при $c \in \mathcal{B}^\delta \setminus \mathcal{P}^\delta$ — соотношение $\lambda(t, c) = 1$ для всех $t \in [0, 1]$. Тогда определим отображение m так: оно переводит элемент $(t, c) \in [0, 1] \times \mathcal{B}^\delta$ в $\lambda^*(t, c) \in \mathcal{B}^\delta$, где отображение $\lambda^*(\cdot, \cdot)$ задается леммой В2.4.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы В2.3. При заданном $\varepsilon > 0$ легко построить гомотопию $\tau_0: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, такую, что множество $G' = \tau_0(1, G)$ удовлетворяет условиям

$$(1) \quad \max_G \mathcal{U}^\delta < \max_{G'} \mathcal{U}^\delta + \varepsilon/2;$$

(В2.7)

$$(2) \quad G' \cap \mathcal{B}^\delta \setminus \mathcal{P}^\delta = \emptyset.$$

При необходимости можно потребовать, чтобы множество G' было сколь угодно близким к G . Действительно, поскольку G компактно, можно найти сечение $\alpha \in \Gamma_0(\text{Ad } P \otimes T^*)$ с произвольно малыми C^k -нормами, $k \geq 0$, и L^2_1 -нормами, такое, что $c + (\alpha, 0) \in \mathcal{P}^\delta$ при всех $c \in G$. Тогда для $(t, b) \in [0, 1] \times \mathcal{B}$ можно положить $\tau_0(t, b) = b + t(\alpha, 0)$.

Заменяя в лемме В2.2 пару (G, ε) на пару $(G', \varepsilon/2)$, построим гомотопию $\tau_1: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Пусть $F' = \tau_1(1, G')$. Отметим, что $F' \subset \mathcal{P}^\delta$, и поэтому в силу компактности F'

существует открытое множество $V \in \hat{\mathcal{B}}^\delta$, такое, что $V \cap F' = \emptyset$ и $\hat{\mathcal{B}}^\delta \setminus \mathcal{F}^\delta \subset V$. Воспользуемся множеством V и леммой В2.6 для построения отображения $m: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}^\delta \rightarrow \mathcal{B}^\delta$ из указанной леммы. Отметим, что для всех элементов $c \in \hat{\mathcal{B}}^\delta$ справедливо неравенство

$$\mathcal{U}^\delta(m(1, c)) \leq \mathcal{U}^\delta(c). \quad (\text{В2.8})$$

Наконец, для элементов $(t, b) \in [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}$ положим

$$\tau'_2(t, b) = \begin{cases} \tau_0(3t, b) & \text{при } t \in [0, 1/3], \\ \tau_1(3t-1, \tau_0(1, b)) & \text{при } t \in [1/3, 2/3], \\ m(3t-2, \tau_1(1, b)) & \text{при } t \in [2/3, 1]. \end{cases} \quad (\text{В2.9})$$

Таким образом, τ'_2 — непрерывное отображение из $[0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}$ в $\mathcal{B}$, причем отображение $\tau'_2(0, \cdot)$ тождественно. Из леммы В1.4 получаем отображение $h: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{G}$, такое, что $\tau_2 = h\tau'_2$ непрерывно отображает $[0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}$ в $\hat{\mathcal{B}}$. Вследствие неравенства (В2.8) и леммы В2.2 множество $\tau_2(1, G)$ удовлетворяет утверждению (1) леммы В2.3. Утверждение (2) выполняется ввиду того, что для $c \in \mathcal{B}^\delta \setminus V$ по лемме В2.6 элемент $m(1, c)$ удовлетворяет уравнению (В2.1). Если дополнительно $c = (A, \Phi)$ удовлетворяет условию $\nabla_A^* \nabla_A \Phi = 0$, то $m(1, c) = (A', \Phi')$ удовлетворяет условию $\nabla_{A'}^* \nabla_{A'} \Phi' = 0$.

Доказательство предложения В2.1. Фиксируем $\mu > 0$. Для данного ε выберем $G \in \mathcal{F}^\delta$ так, чтобы $\max_G \mathcal{U}^\delta < \mathcal{U}_G^\delta + \mu\varepsilon$. Пользуясь леммой В2.3 с данными G и $\mu\varepsilon$, построим гомотопию τ_2 и положим $F' = \tau_2(1, G)$. Это множество удовлетворяет утверждениям (3) и (4) предложения В2.1, а также утверждению (1) с заменой ε на $2\mu\varepsilon$. Теперь наша цель заключается в построении гомотопии τ_4 пространства $\hat{\mathcal{B}}$, удовлетворяющей утверждениям (1)–(4). Определим множества

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{b \in \hat{\mathcal{B}}^\delta: \mathcal{U}^\delta(b) > \mathcal{U}_G^\delta\}, \\ \Omega_1 &= \{b \in \Omega_0: \|\nabla \mathcal{U}_b^\delta\|_*^2 (1 + \|\nabla \mathcal{U}_b^\delta\|_*)^{-1} > 4(1 + 8\varepsilon(\mathcal{U}^\delta(b))) \cdot (\mathcal{U}^\delta(b) - \mathcal{U}_G^\delta)\}, \end{aligned} \quad (\text{В2.10})$$

где $z(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — непрерывная функция из предложения А4.3. Зададим также число

$$\mathcal{U}_*^\delta = \max_{b \in \partial(\Omega_1 \cap F')} \mathcal{U}^\delta(b). \quad (\text{B2.11})$$

Далее потребуется псевдоградиентное "векторное поле" для функционала $\mathcal{U}^\delta$. Для его построения заметим, что для каждого элемента $b \in \mathcal{B}^\delta$ существует сечение $\phi_b \in \Gamma_0(Q)$, такое, что $\|\phi_b\|_\delta = \|\nabla \mathcal{U}_b^\delta\|_*$ и $\nabla \mathcal{U}_b^\delta(\phi_b) \leq -\frac{1}{2} \|\nabla \mathcal{U}_b^\delta\|_*$. Поскольку пространство $\mathcal{B}^\delta$ паракомпактно (см. [9, §B1-B2]), то, пользуясь совокупностью $\{\phi_b, b \in \mathcal{B}^\delta\}$ и локально конечным разбиением единицы, можно построить непрерывное отображение $\psi: \mathcal{B}^\delta \rightarrow \Gamma_0(Q)$, обладающее тем свойством, что для каждого $b \in \mathcal{B}^\delta$

$$\begin{aligned} |\|\psi(b)\|_\delta - \|\nabla \mathcal{U}_b^\delta\|_*| &< \mu\epsilon, \\ \nabla \mathcal{U}_b^\delta(\psi(b)) &\leq -\frac{1}{2} \|\nabla \mathcal{U}_b^\delta\|_* + \mu\epsilon. \end{aligned} \quad (\text{B2.12})$$

Пусть $\theta(\cdot)$ — стандартная ступенчатая функция на $\mathbb{R}$: $\theta(t) = 1$ при $t > 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$. Отображение $v: \mathcal{B}^\delta \rightarrow \Gamma_0(Q)$ определяется следующим образом. В $\mathcal{B}^\delta \setminus \Omega_1$ положим $v = 0$, а в Ω_1 положим

$$v(b) = 4 \|\nabla \mathcal{U}_b^\delta\|_*^{-2} (\mathcal{U}^\delta(b) - \mathcal{U}_*^\delta) \theta(\mathcal{U}^\delta(b) - \mathcal{U}_*^\delta) \phi(b). \quad (\text{B2.13})$$

Заметим, что отображение v непрерывно и $\|v(b)\|_\delta < 1$.

Определим непрерывное отображение $\hat{v}: [0, 1] \times \mathcal{B}^\delta \rightarrow \mathbb{C}^\delta$, переводящее (t, b) в

$$\hat{v}(t, b) = b + t v(b). \quad (\text{B2.14})$$

При $b \notin \Omega_1$ имеем $\hat{v}(t, b) = b$ для всех $t \in [0, 1]$. Но если $b \in \Omega_1$, то с помощью утверждения (2) предложения А4.3 можно получить, что

$$\mathcal{U}^\delta(v(1, b)) \leq \mathcal{U}^\delta(b) - (\mathcal{U}^\delta(b) - \mathcal{U}_*^\delta) \theta(\mathcal{U}^\delta(b) - \mathcal{U}_*^\delta) \leq \mathcal{U}_*^\delta. \quad (\text{B2.15})$$

Определим теперь отображение $\tau'_3: [0, 1] \times \mathcal{B}^\delta \rightarrow \mathbb{C}$, переводящее (t, b) в

$$\tau'_3(t, b) = \begin{cases} \tau_2(2t, b) & \text{при } t \in [0, 1/2], \\ \nu(2t-1, \tau_2(1, b)) & \text{при } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Это отображение непрерывно, а $\tau_3(0, \cdot)$ тождественно. Из леммы В1.4 получаем непрерывное отображение $h: [0, 1] \times \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{G}$, такое, что $\tau_3 = h\tau'_3$ непрерывно отображает $[0, 1] \times \widehat{\mathcal{B}}$ в $\widehat{\mathcal{B}}$, а на самом деле в $\widehat{\mathcal{B}}^\delta$. Положим $F'' = \tau_3(1, G)$.

Л е м м а В2.7. Зададим отображение τ_3 и множество F'' как указано выше. Тогда

$$(1) F'' \in \mathcal{F}^\delta.$$

Если $c \in F''$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{U}^\delta(c) = \max_{F''} \mathcal{U}^\delta$, то

$$(2) \mathcal{U}^\delta(c) < \mathcal{U}_{\mathcal{F}}^\delta(c) + 2\mu\epsilon;$$

$$(3) \|\nabla \mathcal{U}^\delta(c)\|_* \leq \max \left[16(1 + 8z(\mathcal{U}^\delta(b)))\mu\epsilon, (16(1 + 8z(\mathcal{U}^\delta(b)))\mu\epsilon)^{1/2} \right];$$

$$(4) c = (A, \Phi) \text{ удовлетворяет уравнению } \nabla_A^* \nabla_A \Phi = 0 \text{ и } \underline{(B2.1)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) справедливо, поскольку отображение $\tau_3(1, \cdot): \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}^\delta$ непрерывно. Утверждение (2) выполнено, так как оно справедливо для $F' = \tau_2(1, G)$ и $\max_{F''} \mathcal{U}^\delta \leq \max_{F'} \mathcal{U}^\delta$. Утверждение (3) имеет место ввиду неравенства (B2.15). Каждый элемент $c \in F''$, на котором функционал $\mathcal{U}^\delta$ принимает максимальное значение, лежит на орбите множества $F' \setminus (F' \cap \Omega_1)$ под действием группы $\mathcal{G}$. По этой причине справедливо и утверждение (4).

Чтобы завершить доказательство предложения В2.1, нужно учесть, что отображение $\hat{c}: [0, 1] \times \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ из формулы (B2.2) и отображение $m: [0, 1] \times \widehat{\mathcal{B}}^\delta \rightarrow \mathcal{B}^\delta$ из леммы В2.6 имеют следующие свойства. Ни одно из них не увеличивает значения $\mathcal{U}^\delta$ как функции от $t \in [0, 1]$ при фиксированном $b \in \widehat{\mathcal{B}}^\delta$; если $b = (A, \Phi) \in \widehat{\mathcal{B}}^\delta$ удовлетворяет уравнению $\nabla_A^* \nabla_A \Phi = 0$, то при всех $t \in [0, 1]$ имеем $\hat{c}(t, b) = b$; если b удовлетворяет уравнению (B2.1), то при всех $t \in [0, 1]$ справедливо равенство

$m(t, b) = b$; если b удовлетворяет уравнению $\nabla_A^* \nabla_A \Phi = 0$, то $m(1, b) = (A', \Phi')$ также удовлетворяет уравнению $\nabla_A^* \nabla_A \Phi' = 0$.

Построим отображение $\tau_4: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ следующим образом:

$$\tau_4(t, b) = \begin{cases} \tau_3(3t, b) & \text{при } t \in [0, 1/3], \\ h_1 \hat{c}(3t-1, \tau_3(1, b)) & \text{при } t \in [1/3, 2/3], \\ h_2 m(3t-2, h_1 \hat{c}(1, \tau_3(1, b))) & \text{при } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Здесь h_1 и h_2 — отображения $[0, 1] \times \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{G}$, заданные леммой В1.4. Определим множество $F = \tau_4(1, G)$. Тогда в силу замечаний предыдущего абзаца F удовлетворяет утверждениям (1) — (4) леммы В2.7. Это множество удовлетворяет также утверждениям (3) и (4) предложения В2.1. Выбирая параметр $\mu = [16(1+8\kappa(\mathcal{U}_{\frac{\delta}{2}}+1))]^{-1}(1+\varepsilon)^{-2}\varepsilon^2$, из утверждений (2) и (3) леммы В2.7 получим, что указанное множество F удовлетворяет утверждениям (1) — (4) предложения В2.1.

В3. Сходимость минимаксных последовательностей для $\mathcal{U}^\delta$

Для доказательства предложения В1.3 требуется достаточное условие того, что последовательность в пространстве $\mathcal{U}^\delta$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Это условие, приведенное в следующем предложении, является, по существу, модификацией условия С для $\mathcal{U}^\delta$ на $\mathcal{U}^\delta$.

Предложение В3.1. Пусть $\delta \in (0, 1/2)$ и $n \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $\{c_i\} \subset \mathcal{U}_n^\delta$ — последовательность со следующими свойствами:

$$(1) \mathcal{U}^\delta(c_i) \geq \mathcal{U}^\delta(c_{i+1}) \rightarrow \mathcal{U}_\infty^\delta;$$

$$(2) \|\nabla \mathcal{U}_i^\delta\|_* \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty;$$

$$(3) \text{при каждом } i \text{ положим } c_i = (A, \Phi); \text{ тогда } \nabla_A^* \nabla_A \Phi = 0;$$

$$(4) \text{пара } (A, \Phi) \text{ удовлетворяет уравнению (В2.1).}$$

Тогда существуют последовательность $\{g_i\} \subset \mathcal{G}$ и подпоследовательность $\{g_i c_i\}$, которая сильно сходится в $L^2_{1;10c}$ -топологии на пространстве $\mathcal{C}^\delta_n$ к критической точке c функционала $\mathcal{U}^\delta$ на пространстве $\mathcal{C}^\delta_n$, причем $\mathcal{U}^\delta(c) = \mathcal{U}^\delta_\infty$.

Доказательство этого утверждения занимает оставшуюся часть параграфа. Оно состоит из двух частей. В первой части устанавливается существование последовательности $\{g_i\} \subset \mathcal{G}$, подпоследовательность $\{g_i c_i = (A_i, \Phi_i)\}$ которой обладает тем свойством, что последовательность $\{A_i\}$ сильно сходится в $L^2_{1;10c}$ к пределу A , а последовательность $\{\Phi_i\}$ сильно сходится в $L^2_{2;10c}$ к пределу Φ . В итоге получаем, что пара $(A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$ является критической точкой функционала $\mathcal{U}^\delta$.

Во второй части доказываем, что для локально сходящейся подпоследовательности $\{(A_k, \Phi_k)\}$ из предыдущего абзаца последовательность кривизн $\{((1 + |\alpha|)^\delta F_{A_k}, D_{A_k} \Phi_k)\}$ сильно сходится в пространстве L^2 .

Первая часть содержится в следующей лемме:

Лемма ВЗ.2. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$ и последовательность $\{c_i\} \subset \mathcal{C}^\delta$ удовлетворяет предположениям (1) – (3) предложения ВЗ.1. Существуют последовательность $\{g_i\} \subset \mathcal{G}$ и подпоследовательность $\{g_i c_i\}$ последовательности $\{g_i c_i\}$ со следующими свойствами. Пусть $\{g_i c_i = (A_k, \Phi_k)\}$; тогда последовательность $\{A_k\}$ сильно сходится в $L^2_{1;10c}(T^* \times \text{su}(2))$ к $A \in L^2_{1;10c}(T^* \times \text{su}(2))$, а последовательность $\{\Phi_k\}$ сильно сходится в $L^2_{2;10c}(\text{Ad } P)$ к $\Phi \in L^2_{2;10c}(\text{Ad } P)$. Далее, $(A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$, и этот элемент является критической точкой функционала $\mathcal{U}^\delta$.

Следует подчеркнуть, что лемма ВЗ.2 выполняется и при $\delta = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы ВЗ.2. В случае $\delta = 0$ из теоремы 5.6 работы [6, ч. I] и рассуждений, формально совпадающих с рассуждениями из приложения к работе [22], следует, что можно выбрать последовательность $\{g_i\} \subset \mathcal{G}$ так, чтобы последовательность $\{g_i c_i\}$ содержала подпоследовательность $\{g_i c_i = (A_k, \Phi_k)\}$ со следующими свойствами: $\{A_k\}$ сильно сходится в $L^2_{1;10c}$ к некоторому A ; аналогично, последовательность $\{\Phi_k\}$ сильно сходится в $L^2_{2;10c}$ к некоторому Φ . Далее, $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$,

и этот элемент является критической точкой функционала $\mathcal{U}$. Указанное рассуждение очевидным образом обобщается на случай $\delta > 0$. Сходимость $\{\Phi_k\}$ в $L^2_{2;10c}$ следует из предложения ВЗ.3 работы [9] (см. доказательство леммы А4.4 в [9]). Детали мы оставляем читателю.

Доказательство предложения ВЗ.1. Теперь это предложение является прямым следствием леммы ВЗ.2 и следующей леммы.

Лемма ВЗ.3. Пусть $\delta \in (0, 1/2)$. Пусть $\{c_i = (A_i, \Phi_i)\} \subset \mathcal{C}^\delta$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (1) — (4) предложения ВЗ.1. Предположим дополнительно, что последовательность $\{A_i\}$ сильно сходится в $L^2_{1;10c}$, а $\{\Phi_i\}$ сильно сходится в $L^2_{2;10c}$. Тогда последовательность $\{c_i\}$ сильно сходится в топологии $L^2_{1;10c}$ на $\mathcal{C}^\delta$.

В соответствии с леммой ВЗ.2 указанная последовательность $\{(A_i, \Phi_i)\}$ слабо сходится в пространстве $L^2_{1;10c} \times L^2_{2;10c}$ к элементу $c = (A, \Phi)$, который в пространстве $\mathcal{C}^\delta$ является критической точкой функционала $\mathcal{U}^\delta$. Для доказательства леммы ВЗ.3 необходимо показать только, что $\lim \mathcal{U}^\delta(c_i) = \mathcal{U}^\delta(c)$ (см. §А3). Отметим, что лемма А4.5 работы [9] гарантирует в этом случае сильную сходимость последовательности кривизн $\{((1 + |x|)^\delta F_{A_i}, D_{A_i} \Phi_i)\}$ в пространстве L^2 .

Доказательство леммы ВЗ.3. Удобно ввести следующие обозначения. Для каждого i будем обозначать через $(F_i, G_i, V_i, \nabla \mathcal{U}^\delta_i, \|\cdot\|_{i,\delta})$ набор $(F_A, D_A \Phi, \nabla_A, \nabla \mathcal{U}^\delta_c, \|\cdot\|_{c,\delta})$, отвечающий $c = (A, \Phi) = c_i$. Положим $y_i = ((1 + |x|)^\delta F_i, G_i)$.

Первое наблюдение заключается в том, что последовательность $\{y_i\}$ слабо сходится в L^2 и сильно сходится в L^2_{10c} . Условие (3) предложения ВЗ.3 и лемма А4.1 работы [9] гарантируют, что последовательности $\{(1 + |x|)^\delta \nabla_i G_i\}$ в L^2 и $\{(1 + |x|)^\delta G_i\}$ в L^6 сходятся слабо, но они же сходятся сильно в L^2_{10c} и L^6_{10c} соответственно.

Для получения сильной L^2 -сходимости из сильной L^2_{10c} -сходимости главным инструментом будет служить лемма А4.6 из работы [9]. Первым шагом будет следующая

Л е м м а ВЗ.4. Пусть последовательность $\{c_i = (A_i, \Phi_i)\} \subset \mathbb{C}^\delta$ определена так же, как в лемме ВЗ.3. Тогда последовательность $\{((1+|x|)^\delta [\Phi_i, F_i], [\Phi_i, G_i])\}$ сильно сходится в L^2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы ВЗ.4. Пусть $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$ — сглаживающая функция из §АЗ. Для каждого $R \in (1, \infty)$ положим $\beta_R(\cdot) = \beta(\cdot/R)$.

При каждом i пусть $\psi_i = ([\Phi_i, G_i], 0) \in \Gamma(Q)$. Из условия (З) и принципа максимума следует, что $|\Phi_i| < 1$. Таким образом, $\psi_i \in L^2(Q)$. Далее, $\nabla_i \psi_i = ([\Phi_i, \nabla_i G_i], 0) + ([G_i, G_i], 0)$, и поэтому нормы сечений $(1+|x|)^\delta \nabla_i \psi_i$ также равномерно ограничены в L^2 . Действительно,

$$|(1+|x|)^\delta [G_i, G_i]| \leq 2(1+|x|)^{\delta/2} |G_i|^{1/2} \cdot ((1+|x|)^\delta |G_i|)^{3/2}, \quad (\text{ВЗ.1})$$

поэтому, согласно неравенству Гёльдера, норма $\|(1+|x|)^\delta \cdot [G_i, G_i]\|_2^2$ ограничена числом $4\|G_i\|_2 \cdot \|(1+|x|)^\delta G_i\|_6^3$.

Пусть $R \in [1, \infty)$. Тогда, хотя функция $(1-\beta_R)\psi_i$ и не имеет компактного носителя, она является пределом функции с компактным носителем по норме $\|\cdot\|_{i,\delta}$, и, кроме того, нормы $\|(1-\beta_R)\psi_i\|_{i,\delta}$ равномерно ограничены по R и i . Следовательно, из условия (2) и оценки (А4.5) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\nabla \mathcal{U}_i^\delta((1-\beta_R)\psi_i)| = 0. \quad (\text{ВЗ.2})$$

В подробной записи $\nabla \mathcal{U}_i^\delta((1-\beta_R)\psi_i)$ есть

$$\begin{aligned} & \langle (1+|x|^2)^\delta (1-\beta_R)[G_i, G_i], F_i \rangle_2 - \langle (1+|x|^2)^\delta d\beta_R \wedge [\Phi_i, G_i], F_i \rangle_2 + \\ & + \langle (1+|x|^2)^\delta (1-\beta_R)[\Phi_i, [F_i, \Phi_i]], F_i \rangle_2 + \\ & + \langle (1-\beta_R)[[\Phi_i, G_i], \Phi_i], G_i \rangle_2. \end{aligned} \quad (\text{ВЗ.3})$$

При выводе формулы (ВЗ.3) использовалось тождество $D_A D_A \Phi = [F_A, \Phi]$. Из соотношений (ВЗ.1)–(ВЗ.3) после перегруппировки вытекает следующее утверждение. Для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $i(\varepsilon) < \infty$, не зависящее от R , что при всех $i > i(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} & \langle (1-\beta_R)(1+|x|^2)^\delta [\Phi_i, F_i], [\Phi_i, F_i] \rangle_2 + \langle (1-\beta_R) [\Phi_i, G_i], [\Phi_i, G_i] \rangle_2 < \\ & < \varepsilon + \varkappa \cdot (R^{-\delta/2} \|G_i\|_2 \|(1+|x|)^\delta G_i\|_6 \|(1+|x|)^\delta F_i\|_2 + \\ & + R^{-1+2\delta} \|G_i\|_2 \|F_i\|_2). \quad (B3.4) \end{aligned}$$

Поскольку $\delta \in (0, 1/2)$, из неравенства (B3.4) и равномерных оценок функций $\{\|(1+|x|)^\delta F_i\|_2, \|G_i\|_2, \|(1+|x|)^\delta G_i\|_6\}$ получаем, применяя лемму A4.6 из [9], утверждение о сходимости леммы B3.4.

Вторым шагом в доказательстве леммы B3.3 будет следующая

Л е м м а B3.5. Пусть последовательность $\{c_i = (A_i, \Phi_i)\} \subset \mathbb{C}^\delta$ определена, как в лемме B3.3. Тогда последовательность функций $\{(1-|\Phi_i|)\}$ сильно сходится в $\bar{C}^0(\mathbb{R}^3)$. В частности, для данного $\varepsilon > 0$ существуют такие $R < \infty$ и $i(\varepsilon) < \infty$, что при всех $i > i(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\sup_{|x| > R} |1-|\Phi_i|| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы B3.5. Поскольку последовательность $\{(1+|x|)^\delta G_i\}$ равномерно ограничена в L^6 , последовательность $\{G_i\}$ сильно сходится в L^6 (лемма A4.6 работы [9]), и поэтому последовательность $\{\alpha(1-|\Phi_i|)\}$ сильно сходится в $L^6(T^*)$ (неравенство Като, см. [9, §A4]). Утверждение леммы следует из сильной сходимости последовательности $\{(1-|\Phi_i|)\}$ в L^p для некоторого $1 \leq p < \infty$ (см. [9, лемма A4.4]). Далее, вследствие равномерной ограниченности последовательности $\{\|G_i\|_2\}$ (условие (I)), этим же свойством обладают последовательности $\{\|\alpha(1-|\Phi_i|)\|_2\}$ и $\{\|(1-|\Phi_i|)\|_6\}$ [9, лемма A4.1]. Так как $\alpha(1-|\Phi_i|)^3 = 3(1-|\Phi_i|)^2 \alpha(1-|\Phi_i|)$, то из леммы A4.1 работы [9] следует, что для любого $R \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} \|(1-\beta_R)(1-|\Phi_i|)^3\|_6 & \leq \varkappa [\|(1-|\Phi_i|)^2(1-\beta_R)\alpha(1-|\Phi_i|)\|_2 + \\ & + \|(1-|\Phi_i|)^6 \alpha \beta_R\|_2]. \end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает оценка

$$\|(1-\beta_R)(1-|\Phi_i|)^3\|_6 \leq \varkappa [\|(1-\beta_R)\alpha(1-|\Phi_i|)\|_6 + R^{-1}]. \quad (B3.5)$$

Наконец, из сильной сходимости последовательности $d(1 - |\Phi_i|)$ в L^6 и неравенства (ВЗ.5) вместе с леммой А4.6 работы [9] следует сильная сходимость последовательности $\{(1 - |\Phi_i|)\}$ в $L^{18}(\mathbb{R}^3)$. Как отмечено выше, последовательность $\{(1 - |\Phi_i|)\}$ сильно сходится в $C^0(\mathbb{R}^3)$. Отсюда вытекает второе утверждение леммы ВЗ.

Третьим шагом в доказательстве леммы ВЗ.3 является

Л е м м а ВЗ.6. Пусть последовательность $\{c_i = (A_i, \Phi_i)\} \subset \mathbb{C}^8$ задана как в лемме ВЗ.3. Тогда последовательность $\{(\Phi_i, \nabla_A \Phi_i)\}$ сильно сходится в пространстве $L^2(T^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого i положим $w_i = \frac{1}{2}(1 - |\Phi_i|^2)$. По условию (З) предложения ВЗ.1

$$-\Delta w_i = |G_i|^2. \quad (\text{ВЗ.6})$$

Кроме того, последовательность $\{dw_i\}$ равномерно ограничена в $L^2(T^*)$, а последовательность $\{w_i\}$ равномерно ограничена в $L^6(T^*)$. Поэтому можно умножить обе части формулы (ВЗ.6) на функцию w_i и затем проинтегрировать обе части по $\mathbb{R}^3$. Левую часть можно преобразовать с помощью интегрирования по частям, при этом не возникает граничных членов. Получаем равенство

$$\langle dw_i, dw_i \rangle_2 = \langle w_i G_i, G_i \rangle_2. \quad (\text{ВЗ.7})$$

Пусть пара $(A, \Phi) \in \mathbb{C}^8$ является пределом последовательности $\{(A_i, \Phi_i)\}$ в смысле, указанном в лемме ВЗ.2. Поскольку $\nabla_A \Phi = 0$, то, полагая $w = \frac{1}{2}(1 - |\Phi|^2)$ и $G = \nabla_A \Phi$, придем к равенству

$$\langle dw, dw \rangle = \langle wG, G \rangle_2. \quad (\text{ВЗ.8})$$

Ввиду того, что последовательность $\{G_i\}$ сильно сходится в L^2_{loc} к G , и по лемме ВЗ.5 получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle w_i G_i, G_i \rangle_2 = \langle wG, G \rangle_2. \quad (\text{ВЗ.9})$$

Так как $dw_i = -(\Phi_i, G_i)$, то из (ВЗ.7) – (ВЗ.9) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(\Phi_i, G_i)\|_2 = \|(\Phi, G)\|_2. \quad (\text{ВЗ.10})$$

Сильная сходимость последовательности $\{(\Phi_i, G_i)\}$ к элементу (Φ, G) в пространстве L^2 является теперь прямым следствием леммы А4.5 из работы [9] и соотношения (ВЗ.10).

Чтобы закончить доказательство леммы ВЗ.3, остается заметить, что по леммам ВЗ.4 – ВЗ.6 последовательность $\{G_i\}$ сильно сходится в L^2 к элементу G . Так как $\{F_i\}$ сильно сходится в L^2 к F_A , нами установлена сходимость последовательности $\{c_i\}$ в топологии пространства $L^2_{1;10c}$ на $\mathbb{C}$. Для доказательства сходимости в топологии $L^2_{1;10c}$ на $\mathbb{C}^\delta$ нужно воспользоваться условием (4) предложения ВЗ.1. Для этого понадобятся

Л е м м а ВЗ.7. Для $\delta \in [0, 1/2)$ пусть $(A, \Phi) \in \mathbb{C}^\delta$ – критическая точка функционала $\mathcal{U}^\delta$. Тогда пара (A, Φ) удовлетворяет уравнению (В2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $\delta = 0$ содержится в следствии П.2.2 работы [11]. Случай $\delta \in (0, 1/2)$ доказан в следствии Д1.5. Некоторые априорные оценки для критических точек функционала $\mathcal{U}^\delta$ на пространстве $\mathbb{C}^\delta$, необходимые для этого доказательства, содержатся в §С2 – С4. (Внимание! Определение критической точки, приведенное в §А4, не позволяет вывести данную лемму непосредственно из леммы В2.5.)

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы ВЗ.3 (окончание). Из леммы ВЗ.7 и сильной L^2 -сходимости последовательности $\{(F_i, G_i)\}$ к $(F_A, \nabla_A \Phi)$ с учетом условия (4) предложения ВЗ.1 следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(1 + |\alpha|)^\delta F_i\|_2 = \|(1 + |\alpha|)^\delta F_A\|_2.$$

Тем самым $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{U}^\delta(c_i) = \mathcal{U}^\delta(c)$, и последовательность $\{c_i\}$ сильно сходится в топологии пространства $L^2_{1;10c}$ на пространстве $\mathbb{C}^\delta$.

В4. Заключительные замечания о функционале $\mathcal{U}^\delta$

Целью данного параграфа является завершение доказательства предложения В1.3 путем объединения утверждений предложений В2.1 и В3.1.

Доказательство предложения В1.3. Предположим, что семейство $\mathcal{F}$ определено как в предложении В1.3 и $\delta \in (0, 1/2)$. Пусть для каждого $m \in \{1, 2, \dots\}$ пара $(F_m, c_m) \in Y^\delta(\mathcal{F})$ удовлетворяет условиям предложения В2.1 с $\varepsilon = m^{-1}$.

Рассмотрим последовательность $\{c_m\} \subset \mathcal{B}^\delta$. Согласно предложению В2.1, эта последовательность удовлетворяет условиям (1) - (4) предложения В3.1 с $\mathcal{U}_\infty^\delta = \mathcal{U}_\mathcal{F}^\delta$. В предложении В3.1 утверждается, что эта последовательность содержит подпоследовательность $\{c_i\}$, для которой найдется такая последовательность $\{g_i\} \subset \mathcal{G}$, что последовательность $\{g_i c_i\}$ сильно сходится в топологии пространства $L^2_{1,10c}$ на пространстве $\mathcal{C}^\delta$ к критической точке с функционала $\mathcal{U}^\delta$. Эта критическая точка должна удовлетворять равенству $\mathcal{U}^\delta(c) = \mathcal{U}_\mathcal{F}^\delta$.

Сформулируем теперь лемму.

Лемма В4.1. Пусть даны последовательности $\{(F_i, c_i)\} \subset Y^\delta(\mathcal{F})$ и $\{g_i\} \subset \mathcal{G}$ и элемент $c \in \mathcal{C}^\delta$, такие, что $\{g_i c_i\}$ сходится к c в топологии $L^2_{1,10c}$ на $\mathcal{C}^\delta$. Тогда существуют последовательности $\{(F'_i, b_i)\} \subset Y^\delta(\mathcal{F})$ и $\{h_i\} \subset \mathcal{G}$, такие, что $\{h_i b_i\}$ сходится к c в C^∞ -топологии на $\mathcal{C}^\delta$.

Для завершения доказательства предложения В1.3 с учетом леммы В4.1 достаточно заметить, что в силу непрерывности проекции $\pi: \mathcal{C}^\delta \rightarrow \mathcal{B}^\delta$ последовательность $\{\pi(h_i b_i)\}$ сходится к $\pi(c)$ в $\mathcal{B}^\delta$. Но для каждого i существует такой элемент $l_i \in SU(2)$, что $l_i \cdot \pi(h_i b_i) = b_i$. Поскольку группа $SU(2)$ компактна, последовательность $\{l_i\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность, предел которой равен l . Тогда $l \cdot \pi(c) \equiv c^\delta(\mathcal{F}) \in \mathcal{B}^\delta$, и соответствующая подпоследовательность последовательности $\{b_i\}$ сходится к $c^\delta(\mathcal{F})$ в $\mathcal{B}^\delta$.

Доказательство леммы В4.1. Пусть $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ есть сглаживающая функция из §А3; для каждого $n \in \{1, 2, \dots\}$ положим $\beta_n(\cdot) = \beta(\cdot/n)$.

Сходимость последовательности $\{g_i c_i\}$ в смысле $L_{1,10c}^2$ к элементу c означает, что для каждого i можно выбрать целое число $n(i)$, такое, что последовательность $\{g_i(c_i + g_i^{-1} \beta_{n(i)}(c - g_i c_i))\}$ сходится к c в C^∞ -топологии на пространстве $\mathbb{C}^s$, причем для каждого i и $t \in [0, 1]$ (см. предложение A4.3) справедливо неравенство

$$|\mathcal{U}^s(c_i + g_i^{-1} t \beta_{n(i)}(c - g_i c_i)) - \mathcal{U}^s(c_i)| < \frac{1}{2} i^{-1}.$$

Для каждого i существуют окрестность $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{B}$ элемента c_i и функция $f_i: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$, такие, что (1) $f_i \equiv 0$ в дополнении $\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}_i$, (2) $f_i(c_i) = 1$ и (3) при всех $(t, b) \in [0, 1] \times \mathcal{U}_i$ справедлива оценка

$$|\mathcal{U}^s(b + g_i^{-1} t f_i(b) \beta_{n(i)}(c - g_i c_i)) - \mathcal{U}^s(b)| < \frac{1}{2} i^{-1}.$$

Выпуклость функционала $\mathcal{U}^s$ относительно вариаций сечения Φ с компактными носителями позволяет добавить к каждому c_i сечение $\psi_i = (0, \varphi_i)$ с компактным носителем, обладающее следующими свойствами. Во-первых, последовательность $\{\psi_i\}$ сходится к нулю в $L_1^2(\text{Ad } P) \cap C^\infty(\text{Ad } P)$, а во-вторых, справедлива оценка

$$\mathcal{U}^s(c_i) + \frac{1}{2} i^{-1} < \mathcal{U}^s(c_i + \psi_i + g_i^{-1} \beta_{n(i)}(c - g_i c_i)) < \mathcal{U}^s(c_i) + i^{-1}.$$

Выбирая подходящим образом функцию $f'_i: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ с $f'_i(c_i) = 1$, имеющую носитель в множестве $\mathcal{U}_i$, можно добиться того, чтобы для всех элементов $b \in F_i$ выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^s(b + f'_i(b) \psi_i + g_i^{-1} f_i(b) \beta_{n(i)}(c - g_i c_i)) < \\ < \mathcal{U}^s(c_i + \psi_i + g_i^{-1} \beta_{n(i)}(c - g_i c_i)). \end{aligned} \quad (\text{B4.1})$$

Определим теперь для каждого i отображение $L_i: [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$, переводящее (t, b) в

$$L_i(t, b) = b + t f'_i(b) \psi_i + g_i^{-1} t f_i(b) (c - g_i c_i).$$

Заметим, что $L_i(0, \cdot)$ совпадает с тождественным отображением пространства $\mathcal{B}$, а L_i переводит пространство $[0, 1] \times \mathcal{B}$ в $\mathbb{C}^s$.

Положим множество F_i' равным $(h \cdot L_i)(1, F_i)$ с отображением h , задаваемым леммой В1.4. Вследствие (В4.1) элемент $(F_i', h \cdot (c_i + \psi_i + g_i^{-1} \beta_{n(i)}(c - g_i c_i))) \in Y^\delta(\mathcal{F})$ удовлетворяет по построению условиям леммы В4.1.

С1. Априорные оценки

Для доказательства теоремы А1.2 необходимо установить следующее

Предложение С1.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантное семейство компактных подмножеств из $\mathcal{B}_n$. Пусть последовательность конфигураций $\{c^\delta(\mathcal{F}) \in \mathcal{B}_n^\delta; \delta \in (0, 1/2)\}$ задана предложением В1.3. Если $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} > 4\pi|n|$, то существует убывающая последовательность $\Lambda = \{\delta_1, \delta_2, \dots\} \subset (0, 1/2)$, имеющая нулевой предел, такая, что последовательность $\{c^{\delta}(\mathcal{F}); \delta \in \Lambda\}$ сходится в $\mathcal{B}_n$ к $c(\mathcal{F})$, являющемуся критической точкой функционала $\mathcal{U}$ с критическим значением $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$.

Доказательство этого предложения составляет содержание § С1-Д4, а в § Д4 суммируются все наши рассуждения. Решающей частью доказательства является получение хороших априорных оценок для конфигураций $c^\delta(\mathcal{F})$. Эти оценки выводятся из вариационных уравнений для функционала $\mathcal{U}^\delta$. Если элемент $(A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$ является критической точкой функционала $\mathcal{U}^\delta$, то

$$*D_A * (1 + |x|^2)^\delta F_A + [\Phi, D_A \Phi] = 0, \quad (\text{С1.1a})$$

$$D_A * D_A \Phi = 0. \quad (\text{С1.1b})$$

Если рассматривать (С1.1) как уравнения для кривизн $(F_A, D_A \Phi)$, то полезно также иметь в виду тождества

$$D_A F_A = 0, \quad (\text{С1.2a})$$

$$D_A D_A \Phi + [\Phi, F_A] = 0. \quad (\text{С1.2b})$$

Вместе уравнения (С1.1)–(С1.2) образуют систему эллиптических уравнений для кривизн $(F_A, D_A \Phi)$. Этот факт становится очевидным, если перейти от этих уравнений к следующим уравнени-

ям второго порядка для кривизн $(F_A, D_A \Phi)$. Для удобства обозначений положим $\sigma = (1 + |x|^2)^{1/2}$ и $(f, g) = (\sigma^\delta F_A, D_A \Phi) \in \times_2 \Gamma(\text{Ad } P \otimes T^*)$. Обозначим также $x = \frac{1}{2} d|x|^2$. Тогда указанные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} & -\nabla_A^* \nabla_A f + \sigma^{-2\delta} [\Phi, [\Phi, f]] - \sigma^{-\delta} * ([f, f] + [g, g]) + \\ & + \delta * D_A * (\sigma^{-2} x \wedge f) - \delta D_A * (\sigma^{-2} x \wedge * f) + \delta \sigma^{-2-\delta} * (x \wedge [\Phi, g]) = 0, \\ & -\nabla_A^* \nabla_A g + \sigma^{-2\delta} [\Phi, [\Phi, g]] - \sigma^{-\delta} * ([f, g] + [g, f]) + \\ & + \delta \sigma^{-2-\delta} * (x \wedge [\Phi, f]) = 0. \end{aligned} \quad (\text{CI.3})$$

Эти уравнения выводятся так же, как в случае $\delta = 0$, изложенном в [II, гл. IV.9].

Оценки, требуемые в предложении CI.1, формально аналогичны оценкам, полученным для решений уравнения (AI.1) в [9]. Различие в том, что в данном случае необходима более конкретная информация. С этой целью введем для каждого $x > 0$ и $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}$ множество $U[c](x)$ (см. определение C2.8 в [9]). Сначала зададим множество

$$\hat{U}[c](x) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \int_{|x-y| < 1} d^3 y (|F_A|^2 + |D_A \Phi|^2) > x \right\},$$

а затем положим

$$U[c](x) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \hat{U}[c](x)) < 1 \}.$$

Три важных, но очевидных свойства множества $U[c](x)$ сформулированы в следующей лемме.

Л е м м а CI.2. Для каждого $c \in \mathbb{C}$ и $x > 0$ зададим множество $U[c](x)$ как указано выше. Тогда

- (1) $U[c](x)$ ограничено;
- (2) число $n[c](x)$ линейно связанных компонент множества $U[c](x)$ ограничено числом $x^{-1} \mathcal{U}(c)$;
- (3) диаметр каждой компоненты множества $U[c](x)$ огра-

нечислом $4\kappa^{-1}n[c](\kappa)^{-1}\mathcal{U}(c)$.

Доказательство. См. доказательство леммы C2.9 из работы [9].

Для доказательства предложения C1.1 нам потребуется ряд оценок двух разных типов. К первому типу относятся оценки в равномерной норме, содержащиеся в следующей лемме.

Лемма C1.3. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$, и пусть $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$ является решением системы (C1.1). Тогда нормы $\|f\|_\infty$ и $\|g\|_\infty$ равномерно ограничены по δ , причем их оценки зависят только от априорной оценки функционала $\mathcal{U}^\delta(c)$.

Оценки второго типа устанавливают, что функции f и g поточечно малы вне множества $U[c](\kappa)$.

Лемма C1.4. Существуют непрерывные функции $\lambda: [0, \infty) \times (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ и $R: [0, \infty) \times (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ со следующими свойствами. Пусть $\delta \in [0, 1/4)$ и элемент $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$ является решением системы (C1.1). Для заданного $\varepsilon \in (0, 1]$ положим $U = U[c](\lambda(\mathcal{U}^\delta(c), \varepsilon))$. В каждой точке $x \in \mathbb{R}^3$, для которой $\text{dist}(x, U) > R(\lambda(\mathcal{U}^\delta(c), \varepsilon))$, выполняются неравенства

- (1) $\sigma^{2\delta}(|f| + |g|)(x) < \varepsilon$,
- (2) $\sigma^{2\delta}(|\nabla_A f| + |\nabla_A g|)(x) < \varepsilon$,
- (3) $1 - |\Phi|(x) < \varepsilon$.

Остальная часть параграфа посвящена доказательствам лемм C1.3 и C1.4.

Доказательство леммы C1.3. Случай $\delta = 0$ содержится в предложении IV.10.6 книги [11]. Доказательство в случае $\delta > 0$ проводится так же, как в случае $\delta = 0$. Доказательства практически одинаковы, поэтому детали мы опускаем. В итоге получаем равномерную оценку

$$\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2 < \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)), \quad (\text{C1.4})$$

где функция $\zeta(\cdot)$ непрерывна и не зависит от $c \in \mathcal{C}^\delta$ и $\delta \in [0, 1/2)$.

Для доказательства леммы СІ.4 введем обозначение $\Psi = (f, g) \in \Gamma(\oplus_2 (Ad P \times T^*))$.

Доказательство утверждения (І) леммы СІ.4. Заметим, что свертка обеих частей уравнений (СІ.3) с сечением Ψ приводит к скалярному уравнению

$$d^*d \frac{|\Psi|^2}{2} + (|\nabla_A \Psi|^2 + \sigma^{-2\delta} |[\Phi, \Psi]|^2) \leq \\ \leq z \{ \sigma^{-\delta} |\Psi|^3 + \delta \sigma^{-1-\delta} |\Psi|^2 + \delta \sigma^{-1} |\Psi| |\nabla_A \Psi| \}, \quad (СІ.5)$$

где константа $z < \infty$ не зависит от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, 1/2)$. Заменяя z другой константой, не зависящей от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, 1/2)$, получаем

$$d^*d (\sigma^{4\delta} |\Psi|^2 / 2) + \frac{1}{2} (\sigma^{4\delta} |\nabla_A \Psi|^2 + \sigma^{2\delta} |[\Phi, \Psi]|^2) \leq \\ \leq z \{ \sigma^{3\delta} |\Psi|^3 + \delta \sigma^{-1+3\delta} |\Psi|^2 \}. \quad (СІ.6)$$

Для каждого $R \in [1, \infty)$ введем функцию $\beta_R(\cdot) = \beta(\langle \cdot \rangle / R)$, где β — сглаживающая функция из §АЗ. Рассмотрим для оператора d^*d функцию Грина $(4\pi |(\cdot) - y|)^{-1}$ с особенностью в точке $y \in \mathbb{R}^3$.

Умножим обе части неравенства (СІ.6) на функцию $\beta_R^2(4\pi |(\cdot) - y|)^{-1}$ и проинтегрируем по пространству $\mathbb{R}^3$. Интегрируя по частям, получаем неравенство

$$\beta_R^2 \sigma^{4\delta} \frac{|\Psi|^2}{2} (y) + \frac{1}{8\pi} \int \frac{\beta_R^2}{|(\cdot) - y|} (\sigma^{4\delta} |\nabla_A \Psi|^2 + \sigma^{2\delta} |[\Phi, \Psi]|^2) \leq \\ \leq \frac{z}{4\pi} \left[\int \frac{1}{|(\cdot) - y|} \beta_R^2 (\sigma^{3\delta} |\Psi|^3 + \delta \sigma^{-1+3\delta} |\Psi|^2) + \right. \\ \left. + \int \left(\frac{|d^*d \beta_R^2|}{|(\cdot) - y|} + \frac{|d\beta_R|}{|(\cdot) - y|^2} \right) \sigma^{4\delta} |\Psi|^2 \right]. \quad (СІ.7)$$

Правая часть этого неравенства оценивается следующим образом. Поскольку $|d^*d \beta_R^2| \sigma^{4\delta} \leq R^{-2+4\delta}$ и $|d\beta_R| \sigma^{4\delta} < R^{-1+4\delta}$, ее последний член ограничен выражением

$$\begin{aligned} \varkappa \cdot R^{-1+4\delta} \int \left(\frac{1}{|\cdot - y|} + \frac{1}{|\cdot - y|^2} \right) |\Psi|^2 \leq \\ \leq \varkappa \cdot R^{-1+4\delta} (\mathcal{U}^\delta(c) + \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))), \quad (\text{CI.8}) \end{aligned}$$

где множитель $\zeta(\mathcal{U}^\delta(c))$ возникает вследствие неравенства (CI.4). Чтобы оценить первый член в правой части (CI.7), разобьем интеграл на части, где $|\cdot - y| > 1$ и $|\cdot - y| < 1$. Это приводит к равномерной оценке

$$\zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) (1 + \|\beta_R \sigma^{2\delta} \Psi\|_\infty)^{7/4}. \quad (\text{CI.9})$$

Как следует из оценок (CI.8), (CI.9), правая часть формулы (CI.7) ограничена независимо от $y \in \mathbb{R}^3$. Возьмем верхнюю грань по $y \in \mathbb{R}^3$ левой части (CI.7). В первом слагаемом получаем выражение $\|\beta_R \sigma^{2\delta} \Psi\|_\infty^2$, а во втором — выражение $\|\beta_R \sigma^{2\delta} \Psi\|_\infty^{7/4}$. Отсюда получаем равномерную оценку с непрерывной функцией $\zeta(\cdot)$, не зависящей от R , $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, 1/4]$:

$$\begin{aligned} \|\beta_R \sigma^{2\delta} \Psi\|_\infty^2 + \frac{1}{16\pi} \sup_y \int \beta_R^2 \frac{1}{|\cdot - y|} \times \\ \times (\sigma^{4\delta} |\nabla_A \Psi|^2 + \sigma^{2\delta} |\Phi, \Psi|^2) \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)). \quad (\text{CI.10}) \end{aligned}$$

Поскольку правая часть неравенства (CI.10) не зависит от R , получаем, во-первых, оценку

$$\|\sigma^{2\delta} \Psi\|_\infty^2 < \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \quad (\text{CI.11})$$

и, во-вторых, для каждой точки $y \in \mathbb{R}^3$ оценку

$$\begin{aligned} \sigma^{4\delta} |\Psi|^2(y) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\cdot - y|} \sigma^{4\delta} |\nabla_A \Psi|^2 \leq \\ \leq \varkappa \cdot \int \frac{1}{|\cdot - y|} (\sigma^{3\delta} |\Psi|^3 + \delta \sigma^{-1+3\delta} |\Psi|^2). \quad (\text{CI.12}) \end{aligned}$$

Для доказательства утверждения (I) леммы CI.4 фиксируем $\varkappa > 0$ и рассмотрим при $R \in (0, \infty)$ точку $y \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условию

$$\text{dist}(y, U[c](x)) > R. \quad (\text{CI.13})$$

Для такой точки y правая часть формулы (CI.12) ограничена величиной

$$\begin{aligned} & \varepsilon R^{-1/4} (\|\sigma^{2\delta} \Psi\|_{\infty}^{3/2} + 1) \mathcal{U}^{\delta}(c)^{3/4} + \\ & + \varepsilon \cdot (\|\sigma^{2\delta} \Psi\|_{\infty}^2 + 1) \int_{|x-y| < R} d^3x \frac{1}{|x-y|} (|F_A|(x) + |D_A \Phi|(x)), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \sigma^{4\delta} |\Psi|^2(y) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|(\cdot) - y|} \sigma^{4\delta} |\nabla_A \Psi|^2 \leq \\ & \leq \zeta(\mathcal{U}^{\delta}(c)) (R^{-1/4} + \varepsilon R^2). \quad (\text{CI.14}) \end{aligned}$$

Здесь $\zeta(\cdot)$ — непрерывная функция, не зависящая от точки y , удовлетворяющей условию (CI.13), величины R , элемента $c \in \mathbb{G}^{\delta}$ и числа $\delta \in [0, 1/4)$. Для доказательства утверждения (1) леммы CI.4 следует взять $\lambda(\mathcal{U}^{\delta}(c), \varepsilon) = \left[\frac{1}{2} \varepsilon^2 \zeta(\mathcal{U}^{\delta}(c))^{-1} \right]^9$ и положить $R(\mathcal{U}^{\delta}(c), \varepsilon) = \lambda^{-4/9}$.

Доказательство утверждения (2) леммы CI.4.
Возьмем ковариантную производную от обеих частей уравнений (CI.3). После перестановки ковариантных производных получаем

$$-\nabla_A^* \nabla_A (\nabla_A \Psi) + \Lambda(\Psi) \nabla_A \Psi + \nabla_A Q = 0. \quad (\text{CI.15})$$

Здесь $\Lambda(\Psi)$ обозначает сечение расслоения $\text{End}(\oplus_2 (\text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*))$, коэффициенты которого являются линейными комбинациями компонент сечения Ψ . Сечение Q расслоения $\oplus_2 (\text{Ad } P \otimes T^*)$ задается левой частью уравнений (CI.3) за вычетом выражения $(-\nabla_A^* \nabla_A \Psi)$. Сворачивая обе части уравнения (CI.15) с $\nabla_A \Psi$, получаем уравнение

$$\begin{aligned} & d^* d \frac{|\nabla_A \Psi|^2}{2} + |\nabla_A (\nabla_A \Psi)|^2 - (\nabla_A \Psi, \Lambda(\Psi) \nabla_A \Psi) - \\ & - (\nabla_A \Psi, \nabla_A Q) = 0. \quad (\text{CI.16}) \end{aligned}$$

Умножая теперь обе части (CI.16) на $\sigma^{4\delta}$, получаем неравенст-

во

$$d^* d \left(\sigma^{4\delta} \frac{|\nabla_A \Psi|^2}{2} \right) \leq + \sigma^{4\delta} (\nabla_A \Psi, \nabla_A Q) - \sigma^{4\delta} \frac{1}{2} |\nabla_A (\nabla_A \Psi)|^2 + \\ + \varkappa (\sigma^{4\delta} |\Psi| |\nabla_A \Psi|^2 + \delta \sigma^{-2+4\delta} |\nabla_A \Psi|^2). \quad (\text{CI.17})$$

Пусть $y \in \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\beta^y(\cdot)$ сглаживающую функцию $\beta(|(\cdot) - y|)$. Умножим обе части неравенства (CI.17) на $\beta^y(\cdot) (4\pi |(\cdot) - y|)^{-1}$ и проинтегрируем их по шару $B^y = \{x \in \mathbb{R}^3: |x - y| < 1\}$. В итоге получим

$$\sigma^{4\delta} \frac{|\nabla_A \Psi|^2}{2}(y) \leq - \int_{B^y} \beta^y \frac{\sigma^{4\delta}}{|(\cdot) - y|} (\nabla_A \Psi, \nabla_A Q) - \\ - \frac{1}{2} \int_{B^y} \beta^y \sigma^{4\delta} \frac{|\nabla_A (\nabla_A \Psi)|^2}{|(\cdot) - y|} + \varkappa \int_{B^y} \frac{\beta^y \sigma^{4\delta}}{|(\cdot) - y|} (|\Psi| + \delta \sigma^{-2}) |\nabla_A \Psi|^2 + \\ + \varkappa \int_{B^y} \sigma^{4\delta} |\nabla_A \Psi|^2. \quad (\text{CI.18})$$

При выводе последнего члена в правой части мы воспользовались тем, что выражение

$$\frac{|d^* d \beta^y|}{|(\cdot) - y|} + \frac{2 |d \beta^y|}{|(\cdot) - y|^2}.$$

равномерно ограничено вне зависимости от точки $y \in \mathbb{R}^3$.

Выберем теперь некоторое $\rho \in (0, 1]$ (чуть ниже этот выбор будет конкретизирован). Предположим, что $\varkappa = \left[\frac{1}{2} \rho \varepsilon^2 \zeta_1 (2I^\delta(c))^{-1} \right]^9$ и $R = \varkappa^{-4/9}$, где $\zeta_1(\cdot)$ такое же, как в неравенстве (CI.14). Потребуем, чтобы для точки y выполнялось условие (CI.13). Тогда

$$\sigma^{4\delta} |\Psi|^2(y) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma^{4\delta}}{|(\cdot) - y|} |\nabla_A \Psi|^2 < \rho \varepsilon^2. \quad (\text{CI.19})$$

Пользуясь в формуле (CI.18) неравенством (CI.19), находим, что существует постоянная $\varkappa < \infty$, не зависящая от точки y , удовлетворяющей условию (CI.13), от элемента $c \in \mathbb{C}^\delta$ и числа $\delta \in [0, 1/4)$, такая, что

$$\sigma^{4\delta} |\nabla_A \Psi|^2(y) \leq \varkappa \rho \varepsilon^2. \quad (\text{CI.20})$$

Утверждения (1) и (2) леммы C1.4 следуют из (C1.14) и (C1.20).

Выберем $\rho = (z+1)^{-1}$ и положим $\lambda(\mathcal{U}^\delta(c), \varepsilon) = \left[\frac{1}{2}(z+1)^{-1} \varepsilon^2 \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))^{-1} \right]^9$, где $\zeta(\cdot)$ такое же, как в (C1.14), а также $R(\mathcal{U}^\delta(c), \varepsilon) = \lambda^{-4/9}$.

Доказательство утверждения (3) леммы C1.4. Введем функцию $w = \frac{1}{2}(1 - |\Phi|^2)$. Она удовлетворяет условиям

$$d^*dw = |g|^2 \quad (\text{C1.21})$$

и $w \in C^6(\mathbb{R}^3)$. Таким образом, в каждой точке $y \in \mathbb{R}^3$ выполняется равенство

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{|g|^2}{|(\cdot) - y|}. \quad (\text{C1.22})$$

Предположим, что задано $\varepsilon > 0$. Для $\rho \in (0, 1]$, которое мы вскоре определим, зададим $\lambda'(\mathcal{U}^\delta(c), \rho\varepsilon)$ и $R'(\mathcal{U}^\delta(c), \rho\varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялись утверждения (1) и (2) леммы C1.4. При заданном $\tau \in (1, \infty)$ потребуем, чтобы $y \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяло условию (C1.13) с $\varkappa = \lambda'(\mathcal{U}^\delta(c), \rho\varepsilon)$ и $R = \tau + R'(\mathcal{U}^\delta(c), \rho\varepsilon)$. Для такой точки y из равенства (C1.22) следует оценка

$$w(y) < \frac{1}{2} \varepsilon^2 \rho^2 \tau^2 + \frac{1}{4\pi} \frac{\mathcal{U}(c)}{\tau}. \quad (\text{C1.23})$$

Возьмем $\tau = (1 + \mathcal{U}(c))\varepsilon^{-1}$ и положим $\rho = \varepsilon(1 + \mathcal{U}(c))^{-1}$. Тогда $w(y) < \varepsilon$. Тем самым все утверждения леммы C1.4 будут выполнены, если выбрать $\lambda = \lambda'(\mathcal{U}^\delta(c), \varepsilon^2(1 + \mathcal{U}(c))^{-1})$ и положить $R = R'(\mathcal{U}^\delta(c), \varepsilon) + \varepsilon^{-1}(1 + \mathcal{U}(c))$.

C2. Оценки экспоненциального убывания

Для доказательства предложения C1.1 потребуются не зависящие от δ оценки решения с системы (C1.1), которые позволяют аппроксимировать поля (f, g) на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus U[c](\varkappa)$ решениями линейных уравнений. Это позволяет получить для подходящего значения $\varkappa$ многополюсные разложения этих кривизн на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus U[c](\varkappa)$. Первый шаг состоит в доказательстве следующей ниже леммы C2.1, утверждающей, что указанные поля абелевы в главном на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus U[c](\varkappa)$.

Пусть $c = (A, \Phi)$ — решение системы (C1.1). Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{U_j: j \in \{1, \dots, n[c](\varepsilon)\}\}$ — линейно связанные компоненты множества $U[c](\varepsilon)$. Сопоставим каждой компоненте U_j ее центр масс

$$x_j = \left(\int_{U_j} x d^3x \right) \left(\int_{U_j} d^3x \right)^{-1}. \quad (C2.1)$$

Л е м м а C2.1. Существуют число $\delta_0 \in [0, 1/4)$ и непрерывные функции $\varepsilon_0: [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ и $m: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ со следующими свойствами. Пусть $\delta \in [0, \delta_0)$ и $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$ — решение системы (C1.1). Положим $\varepsilon = \varepsilon_0(\mathcal{U}^\delta(c))$. Обозначим через $\{U_j\}$ совокупность линейно связанных компонент пространства $U[c](\varepsilon)$ и зададим множество точек $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^3$ посредством формулы (C2.1). Если $x \in \mathbb{R}^3$, то

$$\sigma^\delta(x) |[\Phi, F_A](x) + [\Phi, D_A \Phi](x)| \leq m(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j (1 + |x - x_j|)^{-5/2}.$$

Оставшуюся часть параграфа занимает доказательство этой леммы.

Доказательство леммы C2.1. Положим $\Psi' = \sigma^{2\delta}[\Phi, \Psi]$, где пара $\Psi = (\mathcal{f}, \mathcal{g})$ определена в §C1. Идея состоит в том, чтобы вывести из системы (C1.3) уравнение на сечение Ψ' , показывающее, что при подходящих значениях $\varepsilon_0(\mathcal{U}^\delta(c))$ и $R(\mathcal{U}^\delta(c))$ сечение Ψ' удовлетворяет следующему неравенству в точке $x \in \mathbb{R}^3$ со свойством $\text{dist}(x, U[c](\varepsilon_0)) > R$:

$$d^* d |\Psi'|^2 + \sigma^{-2\delta} |\Psi'|^2 < 0. \quad (C2.2)$$

Тогда утверждение леммы C2.1 получается применением теорем сравнения к неравенству (C2.2) при соответствующем выборе функции сравнения.

Для того чтобы получить неравенство (C2.2), возьмем коммутатор обеих частей системы (C1.3) с сечением Φ и умножим их на $\sigma^{2\delta}$. После перестановки ковариантных производных получаем следующее уравнение на сечение Ψ' :

$$\begin{aligned}
& -\nabla_A^* \nabla_A \Psi' + \frac{4\delta}{\sigma^2} (x, \nabla_A) \Psi' + \frac{\delta}{\sigma^2} * D_A * x \wedge \left(\begin{bmatrix} \Phi, \Psi' \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\
& + \sigma^{2\delta} [\Psi, \nabla_A \Psi]_1 + \sigma^{2\delta} [\Psi, \Psi]_2 + \sigma^{-2\delta} [\Phi, [\Phi, \Psi']] + \\
& + \delta \sigma^{-2\delta} \Lambda(\Psi') = 0. \quad (C2.3)
\end{aligned}$$

Здесь через $[\cdot, \cdot]_1$ обозначено специальное продолжение коммутатора $[\cdot, \cdot]: \bigoplus_2 \text{Ad } P \rightarrow \text{Ad } P$ до билинейного спаривания на пространстве $(\bigoplus_2 \text{Ad } P \otimes T^* \otimes T^*) \oplus (\bigoplus_2 \text{Ad } P \otimes T^*)$ со значениями в пространстве $\bigoplus_2 \text{Ad } P \otimes T^*$. Это означает, что если рассматривать сечения $\nabla_A \Psi$ и Ψ как $\text{Ad } P$ -значные тензоры на пространстве $\mathbb{R}^3$, то их коммутатор $[\Psi, \nabla_A \Psi]_1$ будет $\text{Ad } P$ -значным тензором, компоненты которого представляют собой линейные комбинации коммутаторов компонент сечений $\nabla_A \Psi$ и Ψ . Коэффициенты этих линейных комбинаций являются фиксированными вещественными числами. Аналогично, коммутатор $[\Psi, \Psi]_2$ есть $\text{Ad } P$ -значный тензор на $\mathbb{R}^3$, компоненты которого являются линейными комбинациями коммутаторов компонент сечения Ψ друг с другом. Коэффициенты этих комбинаций зависят от точки x , но они ограничены сверху независимо от x фиксированным числом $\varkappa < \infty$, которое не зависит от $c \in \mathbb{C}$ и δ . Далее, в (C2.3) через Λ обозначено зависящее от x сечение расслоения $\text{End}(\bigoplus_2 \text{Ad } P \otimes T^*)$, удовлетворяющее оценке, не зависящей от x , $c \in \mathbb{C}^\delta$ и δ .

Сворачивая теперь обе части (C2.3) с сечением Ψ' , получим

$$\begin{aligned}
& d^* d \frac{|\Psi'|^2}{2} + |\nabla_A \Psi'|^2 + \sigma^{-2\delta} |[\Phi, \Psi']|^2 \leq \\
& \leq \varkappa \delta \sigma^{-2\delta} (|\Psi'|^2 + |\Psi'| |\nabla_A \Psi'|) + |(\Psi', \sigma^{2\delta} [\Psi, \nabla_A \Psi]_2)| + \\
& + |(\Psi', \sigma^{2\delta} [\Psi, \Psi]_1)|. \quad (C2.4)
\end{aligned}$$

Константа $\varkappa < \infty$ в (C2.4) не зависит от x , $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, 1/4)$.

Положим $\varkappa = \lambda(\mathcal{U}^\delta(c), 1/8)$ и $R = R(\mathcal{U}^\delta(c), 1/8)$, где λ и R определены в лемме C1.4. Поскольку диаметр множества $U[c](\varkappa)$ не превосходит $2\mathcal{U}(c)/\varkappa$, то по лемме C1.4 множество

$$V[c](\varkappa) = \{x \in \mathbb{R}^3: |x - x_j| > R + 4\mathcal{U}(c)\varkappa^{-1}$$

при всех $j = 1, \dots, n[c](\infty)\}$ (C2.5)

обладает тем свойством, что

$$|\Phi| > 7/8 \quad \text{на } V[c](\infty). \quad (\text{C2.6})$$

Далее, на множестве $V[c](\infty)$ выполнены следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} (1) \quad \Psi' &= |\Phi|^{-2} [\Phi, [\Psi', \Phi]], \\ (2) \quad \sigma^{2\delta} [\Phi, \nabla_A \Psi] &= \nabla_A \Psi' - \sigma^{2\delta} [q, \Psi] - 2\delta \sigma^{-2} x \Psi', \\ (3) \quad |\sigma^{2\delta} [\Psi, \Psi]_2| &\leq x |\Psi'| |\Psi|, \\ (4) \quad |\Psi'| &< 1/8. \end{aligned} \quad (\text{C2.7})$$

Из (C2.6, 7) сразу получаем, что левая часть неравенства (C2.4) ограничена на множестве $V[c](\infty)$ величиной

$$x \delta \sigma^{-2\delta} (|\Psi'|^2 + |\nabla_A \Psi'|^2) + x |\Psi| (|\Psi'|^2 + |\Psi'| |\nabla_A \Psi'|) + x |\nabla_A \Psi| |\Psi'|^2. \quad (\text{C2.8})$$

Постоянная $x < \infty$ не зависит от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, 1/4)$. Из (C2.6-8) вместе с неравенством (C2.4) следует, что на $V[c](\infty)$

$$d^* d |\Psi'|^2 + \sigma^{-2\delta} (3/2 - x(\delta + \sigma^{2\delta} |\Psi| + \sigma^{2\delta} |\nabla_A \Psi|) |\Psi'|^2) \leq 0. \quad (\text{C2.9})$$

Здесь постоянная $x < \infty$ тоже не зависит от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, 1/4)$.

Выберем $\delta_1 = 16^{-1} (1+x)^{-1}$. Положим $x_0(\mathcal{U}^\delta(c))$ равным $\lambda(\mathcal{U}^\delta(c), (1+16x)^{-1})$, где функция λ определена в лемме C1.4. Положим $R = R(\mathcal{U}^\delta(c), 16^{-1}(1+x)^{-1})$, как в лемме C1.4. Если $\text{dist}(x, U[c](x_0)) > R$, то по лемме C1.4 и неравенству (C2.9) при $\delta \in [0, \delta_1]$ выполняется оценка (C2.2).

Оценка (C2.2) представляет собой дифференциальное неравенство, к которому применимы теоремы сравнения. При $\delta \in [0, \delta_1]$ рассмотрим функцию

$$u_{\delta}(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-x_j|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (1+|x|^2 + |x-x_j|^2)^{-\delta/2} |x-x_j| \right\}. \quad (\text{C2.10})$$

Пользуясь тем, что

$$|d(1+|x|^2+|x-x_j|^2)^{-\delta/2}| \leq \delta(1+|x|^2+|x-x_j|^2)^{-\delta/2}|x-x_j|^{-1},$$

$$|d^*d(1+|x|^2+|x-x_j|^2)^{-\delta/2}| \leq 6\delta(1+|x|^2+|x-x_j|^2)^{-\delta/2}|x-x_j|^{-2},$$

а также оценкой $\sigma(x) \leq (1+|x|^2+|x-x_j|^2)$, заключаем, что существует такое $\delta_0 \in (0, \delta_1]$, что при всех $\delta \leq \delta_0$ и всех $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_j\}$ выполняется неравенство

$$-d^*d u_j - \sigma^{-2\delta} u_j \leq 0. \quad (C2.11)$$

Применение леммы C1.4 и теоремы сравнения дает для всех $\delta \in [0, \delta_0]$ и всех $x \in \mathbb{R}^3$ со свойством $\text{dist}(x, U[c](\infty)) \geq R$ оценку

$$|\Psi'|^2(x) \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j u_j. \quad (C2.12)$$

Здесь $\zeta(\cdot)$ — непрерывная функция на $[0, \infty)$, не зависящая от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и δ . Таким образом, лемма C2.1 вытекает из оценки (C2.12) и следующей леммы.

Л е м м а C2.2. Определим функцию u_j формулой (C2.10). Тогда $(\sigma^{-4\delta} u_j)(x) \leq \kappa |x-x_j|^{-5}$, где константа $\kappa < \infty$ не зависит от точек x и x_j пространства $\mathbb{R}^3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что существует постоянная $\kappa < \infty$, такая, что при $t \geq 0$ выполнено неравенство $\exp(-\frac{1}{4} t^{1/9}) \leq \kappa (1+t)^{-5}$. Следовательно, если $|x-x_j| \geq (1+|x|+|x-x_j|)^{9\delta/8}$, то $\sigma^{-4\delta}(x) u_j(x) \leq \sigma^{-4\delta}(x) (1+|x-x_j|)^{-5}$. С другой стороны, при $2 < |x-x_j| < (1+|x|+|x-x_j|)^{9\delta/8}$ справедлива оценка

$$\sigma^{-4\delta} u_j \leq \kappa \sigma^{-4\delta} |x-x_j|^{-1} (1+\sigma^{-\delta}(|x-x_j|))^{-4} \leq \kappa (1+|x-x_j|)^{-5}.$$

C3. Степенные оценки для Φ

Равномерные оценки, полученные в лемме C2.1, указывают на то, что поля на $\mathbb{R}^3 \setminus U[c](\infty)$ при подходящем выборе ∞ почти абелевы, если элемент $c \in \mathbb{C}^\delta$ удовлетворяет системе (C1.1),

а число δ достаточно мало. В данном параграфе будет показано, что поле $|\Phi|$ выглядит как решение уравнения Лапласа на $\mathbb{R}^3 \setminus U[c](\infty)$. Точное утверждение дает следующая

Л е м м а СЗ.1. Существует функция $m_1 \in C^0([0, \infty); [0, \infty))$ со следующими свойствами. Пусть δ_0 и ∞_0 такие же, как в лемме С2.1. Для $\delta \in [0, \delta_0)$ пусть $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$ является решением системы (С1.1). Обозначим через $\{U_j\}$ совокупность линейно связанных компонент множества $U[c](\infty)$ при $\infty = \infty_0(\mathcal{U}^\delta(c))$ и определим точки $\{x_j\}$ как в (С2.1). Существуют вещественные числа $\{\alpha_j; j = 1, \dots, n[c](\infty)\}$, удовлетворяющие условию $|\alpha_j| < m_1(\mathcal{U}^\delta(c))$ и такие, что в точке $x \in \mathbb{R}^3$ выполняются неравенства

$$(1) \left| |\Phi|(x) - 1 + \sum_j \alpha_j |x - x_j|^{-1} \right| \leq m_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j |x - x_j|^{-2},$$

$$(2) \left| (\Phi, D_A \Phi)(x) + \sum_j \alpha_j d|x - x_j|^{-1} \right| \leq m_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j |x - x_j|^{-3}.$$

Числа $\{\alpha_j\}$ будут найдены в § D2. Остальную часть данного параграфа занимает доказательство леммы СЗ.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения (1) леммы СЗ.1. Пусть $\lambda(\mathcal{U}^\delta(c), 1/8)$ и $R(\mathcal{U}^\delta(c), 1/8)$ определены как в лемме С1.4. На множестве

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3: \text{dist}(x; U[c](\infty) \cup U[c](\lambda(\mathcal{U}^\delta(c), 1/8))) > R(\mathcal{U}^\delta(c), 1/8) + 1\} \quad (\text{СЗ.1})$$

имеем $|\Phi|(x) > 7/8$, а функция $1 - |\Phi|$ удовлетворяет уравнению

$$d^* d(1 - |\Phi|) = |\Phi|^{-1} |[\Phi, D_A \Phi]|^2. \quad (\text{СЗ.2})$$

Пусть функция $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$ тождественно равна 1 на множестве V , тождественно равна 0 на множестве $\{x \in \mathbb{R}^3: \text{dist}(x, V) > 1\}$ и удовлетворяет условию $|d\eta| + |d^* d\eta| < 4$. Тогда функция $\eta(1 - |\Phi|)$ удовлетворяет в $x \in \mathbb{R}^3$ уравнению

$$(1 - |\Phi|) \eta(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\cdot - x|} \left\{ \eta |\Phi|^{-1} |[\Phi, D_A \Phi]|^2 + \right. \\ \left. + (1 - |\Phi|) d^* d\eta + 2(d|\Phi|, d\eta) \right\}. \quad (\text{СЗ.3})$$

Многополюсное разложение для функции $1 - |\Phi|$ будет получено из (СЗ.3). Обозначим через G член в фигурных скобках в подынтегральном выражении в формуле (СЗ.3). Из лемм С1.3 и С2.1 вытекает существование непрерывной функции $\zeta(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, не зависящей от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_0)$ и такой, что для всех $x \in \text{supp } \eta$

$$|G(x)| \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j (1 + |x - x_j|)^{-5}.$$

Удобно положить $\psi_j = (1 + |x - x_j|)^{-5}$ и

$$G_j = \left(\sum_k \psi_k \right)^{-1} \psi_j G. \quad (\text{СЗ.4})$$

Заметим, что из уравнений (СЗ.3), (СЗ.4) следует, что

$$\begin{aligned} \left| (1 - |\Phi|) \eta(x) - \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{1}{|x - x_j|} \int_{\mathbb{R}^3} G_j \right| \leq \\ \leq \frac{1}{4\pi} \sum_j \left| \int_{\mathbb{R}^3} G_j \left(\frac{1}{|x - (\cdot)|} - \frac{1}{|x - x_j|} \right) \right|. \quad (\text{СЗ.5}) \end{aligned}$$

Для доказательства утверждения (I) леммы СЗ.1 требуется показать, что числа $\alpha_j = \int_{\mathbb{R}^3} G_j$ ограничены некоторой константой $m_1(\mathcal{U}^\delta(c))$, и получить для правой части неравенства (СЗ.5) оценку вида

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} G_j \left(\frac{1}{|x - (\cdot)|} - \frac{1}{|x - x_j|} \right) \right| \leq \varkappa \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) |x - x_j|^{-2}, \quad (\text{СЗ.6})$$

где $\varkappa < \infty$ — постоянная, не зависящая от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_0)$. По поводу чисел α_j заметим, что из (СЗ.4) следует неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} G_j \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (1 + |x - x_j|)^{-5} \leq 2\pi \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)).$$

Для доказательства неравенства (СЗ.6) воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x - x_j|} = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \frac{1}{|x - x_j - t(y - x_j)|}. \quad (\text{СЗ.7})$$

Это позволяет оценить левую часть неравенства (СЗ.6) величиной

$$(4\pi)^{-1} \int_0^1 dt \int d^3 y |G_j(y)| |y - x_j| |x - x_j - t(y - x_j)|^{-2}. \quad (C3.8)$$

Для завершения доказательства утверждения (1) леммы C3.1 разобьем интеграл в (C3.8) на две части I_1 и I_2 , где I_1 — интеграл по $L = \{y \in \mathbb{R}^3: |x - x_j - t(y - x_j)| > \frac{1}{2}|x - x_j|\}$, а I_2 — интеграл по $\mathbb{R}^3 \setminus L$. По поводу I_1 заметим, что из формулы (C3.4) следует оценка

$$I_1 \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{|x - x_j|^2} \int_{\mathbb{R}^3} |G_j(y)| |y - x_j| \leq 4 \cdot \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) |x - x_j|^{-2}.$$

Что касается I_2 , то на $\mathbb{R}^3 \setminus L$ имеем $|y - x_j| \geq t^{-1} \frac{1}{2} |x - x_j|$, поэтому из формул (C3.4, 8) следует, что

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \approx \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \int_0^1 dt \int d^3 y |x - x_j| \left(t + \frac{1}{2} |x - x_j|\right)^{-4} \leq \\ &\leq \approx \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) |x - x_j|^{-3}. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения (2) леммы C3.1. Поскольку $d|\Phi| = |\Phi|^{-1}(\Phi, D_A \Phi)$, для доказательства этого утверждения нужно установить, что разложение, полученное в утверждении (1), дифференцируемо. Из (C3.3) выводим оценку

$$\begin{aligned} \left| d(|\Phi| \eta) + \frac{1}{4\pi} \sum_j d|x - x_j|^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} G_j \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y |G_j| |d|x - y|^{-1} - d|x - x_j|^{-1}|. \quad (C3.9) \end{aligned}$$

Поэтому достаточно установить, что

$$\int d^3 y |G_j| \left| \frac{(x - y)}{|x - y|^3} - \frac{(x - x_j)}{|x - x_j|^3} \right| \leq \approx \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) |x - x_j|^{-3}, \quad (C3.10)$$

где константа $\approx < \infty$ не зависит от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_0)$.

Для получения оценки (C3.10) удобно воспользоваться оценкой

$$\int d^3 y |\psi_j| |y - x_j| |y - x|^{-1} \leq \kappa |x - x_j|^{-1}, \quad (\text{СЗ.11})$$

где константа $\kappa < \infty$ не зависит от x и x_j . И, наконец, последняя оценка, необходимая для доказательства неравенства (СЗ.10):

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-y}{|x-y|^3} - \frac{x}{|x|^3} \right| &\leq \left| \frac{x-y}{|x-y|^3} - \frac{x}{|x|^2|x-y|} \right| + \frac{1}{|x|} \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|x|} \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|} \right| + \frac{|y|}{|x|^2} \frac{1}{|x-y|} + \left| \frac{1}{|x-y|^2} - \frac{1}{|x|^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{|x|} \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|} \right| + \frac{|y|}{|x|^2} \frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{|x-y|} \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|} \right|. \quad (\text{СЗ.12}) \end{aligned}$$

Из формул (СЗ.4, 6, 11, 12) сразу находим, что левая часть (СЗ.10) ограничена величиной

$$\kappa \zeta_r(\mathcal{U}^s(c)) \left\{ |x - x_j|^{-3} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \psi_j(y) \frac{1}{|x-y|} \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-x_j|} \right| \right\}. \quad (\text{СЗ.13})$$

Последний член в (СЗ.13) с помощью формулы (СЗ.7) оценивается величиной

$$\int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \psi_j(y) |y - x_j| \frac{1}{|x-y|} \frac{1}{|x-x_j-t(y-x_j)|^2}. \quad (\text{СЗ.14})$$

Эта величина оценивается так же, как и раньше, посредством разбиения интеграла на части I_1 и I_2 , где интеграл I_1 берется по множеству L , а I_2 — по множеству $\mathbb{R}^3 \setminus L$. С помощью (СЗ.11) для I_1 получаем $I_1 \leq \kappa |x - x_j|^{-3}$. Что касается I_2 , то для него получаем оценку

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \kappa |x - x_j|^{-4} \int_0^1 dt t^2 \int_0^1 d\tau (\tau(1-t))^{-1} \min(\tau, (1-t)) \leq \\ &\leq \kappa |x - x_j|^{-4}. \end{aligned}$$

С4. Степенные оценки для A

В этом параграфе предстоит доказать, что если $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}^s$

есть решение системы (С1.1), то при $x = x_0(\mathcal{U}^\delta)$ вещественная 2-форма (Φ, F_A) на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus U[c](x)$ является приближенно 2-формой кривизны для абелевой связности монополя Дирака. Точное утверждение приводится в следующей лемме.

Л е м м а С4.1. Пусть δ_0 и x_0 такие же, как в лемме С2.1. Существуют $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ и непрерывная функция $m_2: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ со следующими свойствами. Пусть $\delta \in [0, \delta_1)$ и $c \in \mathcal{C}^\delta$ — решение системы (С1.1). Положим $x = x_0(\mathcal{U}^\delta(c))$ и определим последовательность $\{x_j\}$ как в лемме С3.1. Существуют вещественные числа $\{n_j: j = 1, \dots, n[c](x)\}$ и векторы $\{\ell_j: j = 1, \dots, n[c](x)\}$, удовлетворяющие неравенству $|\ell_j| < m_2(\mathcal{U}^\delta(c))$ и такие, что в каждой точке $x \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} & \left| (\Phi, F_A) + \sum_j n_j d|x - x_j|^{-1} + \sum_j *(\ell_j \wedge d|x - x_j|^{-1}) \right| \leq \\ & \leq m_2(\mathcal{U}^\delta(c)) \cdot \sum_j \left\{ |x - x_j|^{-3} + \delta |x - x_j|^{-2} (1 + |x|)^{1/32} \cdot \max \left(1, \left(\frac{1 + |x - x_j|}{1 + |x|} \right)^{1/16} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Величины $\{n_j, \ell_j\}$ будут найдены в § D2. Этот параграф содержит доказательство леммы С4.1. Указанные априорные оценки получаются для решения $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$ системы (С1.1) в результате исследования уравнений для (Φ, F_A) :

$$\begin{aligned} d * \sigma^{2\delta}(\Phi, F_A) - \sigma^{2\delta}(D_A \Phi \wedge * F_A) &= 0, \\ d(\Phi, F_A) - (D_A \Phi \wedge F_A) &= 0. \end{aligned} \tag{С4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы С4.1. Как и при доказательстве утверждения (1) леммы С3.1, введем множество V и сглаживающую функцию η . Для точек $x \in V$ выполняется неравенство $|\Phi|(x) > 7/8$. Зададим для таких x сечения

$$g^T(x) = |\Phi|^{-2}[\Phi, [g, \Phi]], \quad f^T(x) = |\Phi|^{-2}[\Phi, [f, \Phi]].$$

Определим вещественную 1-форму формулой

$$*\tau = \exp(-\eta |\Phi|)(\Phi, F_A). \tag{С4.2}$$

Эта 1-форма удовлетворяет уравнениям

$$d\sigma^{2\delta}\tau = e^{-\eta|\Phi|} \sigma^{2\delta} \left\{ (1-\eta)(g \wedge f) + \eta(g^T \wedge f^T) - \right. \\ \left. - |\Phi| d\eta \wedge (\Phi, f) \right\} = * \sigma^{2\delta} q, \quad (C4.3)$$

$$d*\tau = e^{-\eta|\Phi|} \left\{ (1-\eta)(g \wedge *f) + \eta(g^T \wedge *f^T) - \right. \\ \left. - |\Phi| d\eta \wedge *(\Phi, f) \right\} = *p. \quad (C4.4)$$

Для получения оценок формы τ потребуется теорема Ходжа для пространства $\mathbb{R}^3$.

Л е м м а C4.2. Пусть для $\delta \in [0, \delta_0)$ элемент $c \in \mathbb{C}^\delta$ является решением системы (C1.1). Определим 1-форму τ как в (C4.2). Существует единственная пара $(u, \omega) \in \Gamma(\mathbb{R} \oplus T^*) \cap L^6$, для которой $\nabla(u, \omega) \in L^2(\mathbb{R} \oplus T^* \otimes T^*)$, $d*\omega = 0$ и $\sigma^{2\delta}\tau = du + *d\omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку можно показать, что $\tau \in L^2(T^*)$, то утверждение леммы C4.2 является стандартным результатом (см. [25] и [6, предложение I.7.6]).

Функция u удовлетворяет уравнению

$$\nabla^* \nabla u = p. \quad (C4.5)$$

Для того чтобы получить оценки из этого уравнения, введем для каждого $j \in \{1, \dots, n[c](x)\}$ функцию $\psi_j = (1 + |x - x_j|)^{-5}$. Из леммы C2.1 следует, что

$$|p| \leq \zeta(\mathcal{U}(c)) \sum_j \psi_j(x), \quad (C4.6)$$

где $\zeta(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — непрерывная функция, не зависящая от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_0)$. Положим

$$p_j = \left(\sum_k \psi_k \right)^{-1} \psi_j p.$$

Тогда $u = \sum_j u_j$, где каждая функция $u_j \in \Gamma(T^*) \cap L^6$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^* \nabla u_j = p_j. \quad (C4.7)$$

Л е м м а С4.3. При тех же предположения, что и в лемме С4.1, зададим функцию p_j формулами (С4.3, 5, 7). Существуют функция $\zeta(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, не зависящая от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_0)$, и число n_j со свойством $|n_j| < \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))$, такие, что в точке $x \in \mathbb{R}^3$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} |u_j + n_j |x - x_j|^{-1}| &\leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) |x - x_j|^{-2}, \\ |du_j + n_j dx |x - x_j|^{-1}| &\leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) |x - x_j|^{-3}. \end{aligned} \quad (\text{С4.8})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (С4.7) следует, что

$$u_j(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y |x - y|^{-1} p_j(y). \quad (\text{С4.9})$$

Повторим теперь доказательство леммы С3.1, заменив функцию G_j на p_j и пользуясь оценкой (С4.6).

Получив оценку функции u , обратимся к I-форме ω . Из уравнения (С4.3) следует, что

$$*d\sigma^{2\delta} * d\omega = \sigma^{2\delta} q - 2\delta \sigma^{-1+2\delta} * (d\sigma \wedge u). \quad (\text{С4.10})$$

Для каждого $j \in \{1, \dots, n[c](x)\}$ рассмотрим опять функцию $\psi_j = (1 + |x - x_j|)^{-5}$. По лемме С2.1

$$q_j \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j \psi_j(x), \quad (\text{С4.11})$$

где $\zeta(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — непрерывная функция, не зависящая от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_0)$. Для каждого j положим $q_j = \left(\sum_k \psi_k\right)^{-1} \psi_j q$ и определим функцию

$$h_j = q_j - 2\delta \sigma^{-1} * (d\sigma \wedge du_j), \quad (\text{С4.12})$$

где функция u_j определена и оценена в лемме С4.3. В этих обозначениях $\omega = \sum \omega_j$, где каждая форма $\omega_j \in \Gamma(T^*\mathbb{R}^3) \cap L^6$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^* \nabla \omega_j + 2\delta \sigma^{-1} * (d\sigma \wedge * d\omega_j) = h_j. \quad (\text{С4.13})$$

Из этого уравнения следует, что форма $v = d\omega_j \in \Gamma(\wedge_2 T^*\mathbb{R}^3) \cap L^2$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 y \{ d|x-y|^{-1} \wedge h_j - 2\delta d|x-y|^{-1} \wedge (\delta^{-1} d\delta \wedge v) \}. \quad (C4.14)$$

Отсюда мы выведем оценки формы $v(\cdot)$, пользуясь принципом сжимающих отображений на соответствующем банаховом пространстве непрерывных 1-форм на пространстве $\mathbb{R}^3$. При этом функция v будет получаться как предел последовательности $\{v^\alpha\}_{\alpha=0}$, где

$$v^0(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 y d|x-y|^{-1} \wedge h_j \quad (C4.15)$$

и $v^\alpha = v^0 - \delta T(v^{\alpha-1})$ при $\alpha > 0$, причем

$$T(v)(x) = (2\pi)^{-1} \int d^3 y d|x-y|^{-1} \wedge (\delta^{-1} d\delta \wedge v). \quad (C4.16)$$

Рассмотрим вначале функцию v^0 .

Л е м м а C4.4. В предположениях леммы C4.1 пусть функция v^0 задана формулой (C4.15). Существует непрерывная функция $\zeta(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, не зависящая от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_0)$ и обладающая следующим свойством. Пусть

$$\ell_j = (4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y q_j$$

есть вектор в пространстве $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$|v^0(x) + \ell_j \wedge d|x-x_j|^{-1}| \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) (|x-x_j|^{-3} + \delta |x-x_j|^{-2} \ln(1+|x-x_j|)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию v^0 в виде $v^0 = v_1^0 + v_2^0$, где

$$v_1^0 = \frac{1}{4\pi} \int d^3 y d|x-y|^{-1} \wedge q_j,$$

$$v_2^0 = -\frac{\delta}{2\pi} \int d^3 y d|x-y|^{-1} \wedge (\delta \delta \wedge du_j).$$

Анализ 1-формы v_1^0 проводится так же, как анализ $(\Phi, D_A \Phi)$ в доказательстве утверждения (2) леммы СЗ.1 (см. формулы (СЗ.11-14)). Доказательство в нашем случае дословно повторяет доказательство указанного утверждения, так как функции q_j удовлетворяют тем же оценкам, что и функции G_j из формулы (СЗ.4).

Для v_2^0 определим функцию $\tau(x) = \sigma^{-1} * (d\sigma \wedge d\mu_j)$. По лемме С4.3 она удовлетворяет оценке

$$|\tau(x)| \leq \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \sigma^{-1}(1 + |x - x_j|)^{-2}.$$

Тем самым

$$v_2^0 \leq \delta \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \int d^3 y |x - y|^{-2} (1 + |y|)^{-1} |y - x_j|^{-2}. \quad (\text{С4.17})$$

Оценка (С4.17) вместе с утверждением (1) из следующей леммы С4.5 завершит доказательство леммы С4.4.

Л е м м а С4.5. Существует постоянная $\varkappa < \infty$ со следующими свойствами. Для любых двух точек $x, \xi \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$(1) \int d^3 y (|y| + 1)^{-1} |y - x|^{-2} (|y - \xi| + 1)^{-2} \leq \varkappa |x - \xi|^{-2} \ln(|x - \xi| + 1);$$

$$(2) \text{ для любого } \varepsilon \in (0, 1/4) \text{ положим}$$

$$\eta_\varepsilon(y; \xi) = (1 + |y - \xi|)^{-2} (1 + |y|)^\varepsilon \cdot \max(1, (1 + |y|)^{-2\varepsilon} (1 + |y - \xi|)^{2\varepsilon});$$

$$\text{тогда } \int d^3 y |y - x|^{-2} (1 + |y|)^{-1} \eta_\varepsilon(y; \xi) \leq \varkappa \varepsilon^{-1} \eta_\varepsilon(x; \xi);$$

$$(3) (|y - \xi| + 1)^{2-\varepsilon} \leq \eta_\varepsilon(y; \xi).$$

Доказательство леммы С4.5 отложим до конца параграфа.

Вернемся теперь к последовательности $\{v^\varepsilon\}$, определенной в (С4.16). Для того чтобы исследовать ее сходимость, определим банахово пространство $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_j)$ как пополнение пространства

$$\mathcal{L}_0 = \{x \eta(x; x_j) + \varphi : x \in \mathbb{R}, \varphi \in \Gamma_0(\wedge_2 T^*) \text{ и } \eta = \eta_\varepsilon \text{ для } \varepsilon = 1/32\} \quad (\text{С4.18})$$

по норме

$$\|\ell\| = \|\eta^{-1}(\cdot; x_j) \ell(\cdot)\|_\infty. \quad (\text{С4.19})$$

Необходимые свойства пространства $\mathcal{L}$ собраны в двух следующих леммах.

Л е м м а С4.6. Пространство $\mathcal{L}$ непрерывно вкладывается в пространство ${}_3\overline{C^0}(\mathbb{R}^3)$. Если $b \in \mathcal{L}$, то для некоторого $z \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $b = z\eta(x; x_j) + o(\eta(x; x_j))$.

Л е м м а С4.7. Существует такое $\delta_1 > 0$, что если $\delta \in [0, \delta_1)$, то

(1) существует единственное сечение $v \in \mathcal{L}$, удовлетворяющее уравнению (С4.16);

(2) существует функция $\zeta \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$, не зависящая от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_1)$ и такая, что для всех сечений $v^0 \in \mathcal{L}$, являющихся решением уравнения (С4.15), справедлива оценка $\|v - v^0\| \leq \delta \zeta(2I^\delta(c))$.

Заметим, что лемма С4.1 является прямым следствием лемм СЗ.1 и С4.3 – 7 и следующей леммы, в которой утверждается, что уравнение (С4.3) имеет единственное L^2 -решение.

Л е м м а С4.8. Существует число $\delta_1 \in (0, 1/2]$, такое, что если $\delta \in [0, \delta_1)$, а форма $\omega \in \Gamma(T^*\mathbb{R}^3) \cap L^6$ удовлетворяет уравнению $\nabla^* \nabla \omega + 2\delta \sigma^{-1} * (d\sigma \wedge * d\omega) = 0$, то $\omega = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы С4.6. Непрерывность вложения пространства $\mathcal{L}$ в ${}_3\overline{C^0}(\mathbb{R}^3)$ следует из того, что норма $\|\cdot\|$ сильнее нормы $\|\cdot\|_{C^0}$. Переходя к доказательству второго утверждения, предположим, что последовательность $\{b_\alpha = z_\alpha \eta(x, \xi) + \varphi_\alpha\} \in \mathcal{L}_0$ с $z_\alpha \in \mathbb{R}$ и $\varphi_\alpha \in \Gamma_0(T^*)$ сходится в $\mathcal{L}$ к элементу b . Из сходимости по норме $\|\cdot\|$ вытекает, что последовательность $\{z_\alpha\} \in \mathbb{R}$ сходится к некоторому $z \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} |\eta(x; \xi)^{-1}| b - z\eta(x; \xi) = 0,$$

так как иначе норма $\|b_\alpha - b\|$ не стремилась бы к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы С4.7. Утверждение (1) сразу следует из лемм С4.4, 6 и уравнений (С4.15), (С4.16), если удастся установить, что существует такое $\delta' > 0$, что при

всех $\delta \in [0, \delta')$ отображение δT , определенное формулой (С4.16), задает сжимающее отображение пространства $\mathcal{L}$ в себя с нормой, не зависящей от точки x_j . Поскольку T не зависит от δ , данное свойство будет выполняться, если удастся доказать, что T определяет на $\mathcal{L}$ ограниченный линейный оператор с операторной нормой, не зависящей от $x_j \in \mathbb{R}^3$. Это свойство T следует из утверждения (2) леммы С4.5, поскольку

$$|Tb(x)| \leq \kappa \|b\| \int_{\mathbb{R}^3} d^3y |x-y|^{-2} (1+|y|)^{-1} \eta(y; x_j).$$

Вернемся теперь к доказательству утверждения (2) леммы С4.7. Пусть для $\delta \in [0, \delta')$ сечение $v \in \mathcal{L}$ является решением уравнения (С4.16), полученным из утверждения (1). Если сечение v_0 задается формулой (С4.15), то

$$v = v_0 + \delta T(v). \quad (\text{С4.20})$$

Поскольку норма отображения $T: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ допускает оценку, не зависящую от точки x_j , то из формулы (С4.20) следует, что существует такое $\delta_1 \in (0, \delta')$, что при всех $\delta \in [0, \delta_1)$ справедливо неравенство $\|v\| \leq 2\|v_0\|$. Теперь результат сразу следует из леммы С4.4, утверждения (3) леммы С4.5 и формулы (С4.20).

Доказательство леммы С4.8. С помощью стандартных рассуждений, использующих "срезки", устанавливаем, что $\forall \omega \in L^2(T^*\mathbb{R}^3)$ и $\|\nabla \omega\|_2 \leq 4\delta \|\sigma^{-1}\omega\|_2$. Лемма А4.1 из [9] завершает доказательство.

Доказательство леммы С4.5. Для доказательства утверждения (1) вначале предположим, что $\kappa = |x - \xi| > 1$. Тогда интеграл из утверждения (1) допускает оценку сверху величиной

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3y |x-y|^{-2} |\xi-y|^{-2} (1+|y|)^{-1}. \quad (\text{С4.21})$$

Разобьем интеграл (С4.21) на две части: интеграл I_1 по множеству $\{y: |y| > \frac{1}{2}|y-\xi| \text{ или } \frac{1}{2}|y-x|\}$ и интеграл I_2 по оставшемуся множеству. Предположим, что $|y| > \frac{1}{2}|y-x|$ в интеграле I_1 ; тогда после замены $y \rightarrow y+x$ получим

$$I_1 \leq \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y |y|^{-2} (1 + |y|)^{-1} |y - \xi + x|^{-2}.$$

После растяжения $y \rightarrow \tau y$ получим оценку

$$I_1 \leq \tau^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y |y|^{-2} (\tau^{-1} + |y|)^{-1} |y - \hat{n}|^{-2} \leq \tau \tau^{-2} \ln \tau.$$

Здесь $\hat{n} = (\xi - x)\tau^{-1}$ — единичный вектор. Для оценки интеграла I_2 заметим, что по крайней мере одна из величин $|y - \xi|$ или $|y - x|$ больше или равна $\tau/2$ (по неравенству треугольника) и, следовательно,

$$I_2 \leq \tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y (\tau + |y|)^{-2} (1 + |y|)^{-1} |y|^{-2} \leq \tau \tau^{-2} \ln \tau.$$

Для доказательства утверждения (2) разобьем интеграл из этого утверждения на два интеграла: I_1 по множеству $\{y: |y| > |y - \xi|\}$ и I_2 по оставшемуся множеству. Для I_1 имеем оценку

$$I_1 \leq \int_{|y| > |y - \xi|} d^3 y |x - y|^{-2} (1 + |y|)^{-1+\epsilon} |y - \xi|^{-2}.$$

Сделаем замену $y \rightarrow y + x$ и воспользуемся тем, что в области интегрирования $(1 + |y|)^{-1} < |y - \xi|^{-1}$; получим оценку

$$I_1 \leq \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y |y|^{-2} |y - \xi + x|^{-3+\epsilon} \leq \tau \epsilon^{-1} \tau^{-2+\epsilon}. \quad (C4.22)$$

Для интеграла I_2 имеем

$$I_2 \leq \int_{|y| < |y - \xi|} d^3 y |x - y|^{-2} (1 + |y|)^{-1-\epsilon} (|y - \xi| + 1)^{-2+2\epsilon}. \quad (C4.23)$$

Разобьем интеграл I_2 в сумму интеграла I_3 по части множества $\{y: |y - \xi| > \tau/2\}$, содержащейся в области интегрирования I_2 , и интеграла I_4 по оставшемуся множеству. Для I_3 справедлива оценка

$$I_3 \leq x \tau^{-2+2\epsilon} \int d^3 y |x-y|^{-2} (1+|y|)^{-1-\epsilon} \leq x \epsilon^{-1} \tau^{-2+2\epsilon} (1+|x|)^{-\epsilon}. \quad (C4.24)$$

Что касается интеграла I_4 , заметим, что $|x-y| > \tau/2$ и $|y| \leq |x-y|$. Тогда получаем оценку

$$I_4 \leq x \int d^3 y (\tau+|y|)^{-2} |y|^{-3+\epsilon} \leq x \epsilon^{-1} \tau^{-2+\epsilon}. \quad (C4.25)$$

Наконец, поскольку либо $1+|x| \geq 1+|x-\xi|$, либо $1+|x| \leq 1+|x-\xi|$, то из (C4.22 - 25) получаем утверждение (2), а также утверждение (3).

DI. Тожество для тензора напряжений

Для решения $s \in \mathbb{C}^\delta$ системы (CI.1) априорные оценки, полученные в §C2 - C4, позволяют вычислить "силы", действующие между линейно связными компонентами области сильных полей $U[s](x_0(\mathcal{U}^\delta(s)))$. Цель этого параграфа заключается в том, чтобы установить, что эти компоненты лежат в области фиксированного диаметра.

Предложение DI.1. Определим число $\delta_1 \in (0, 1/4)$ как в лемме C4.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $\delta \in [0, \delta_1)$, и предположим, что $s \in \mathbb{C}^\delta$ - решение системы (CI.1), такое, что при некотором $\epsilon > 0$ выполняется соотношение $\mathcal{U}^\delta(s) \geq 4\pi|n| + \epsilon$. Определим функцию $x_0(\cdot)$ как в лемме C2.1. Тогда $\text{diam } U[s](x_0(\mathcal{U}^\delta(s))) \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(s))(1+\epsilon^{-2})$, где функция $\zeta \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от ϵ , $s \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_1)$.

Остальная часть этого параграфа и § D2, D3 посвящены доказательству предложения DI.1. Для этого достаточно получить оценку расстояния между линейно связными компонентами множества $U[s](x_0)$, поскольку диаметр любой из компонент ограничен величиной $4\mathcal{U}(s)/x_0^{-1}$ (лемма CI.2). Эта оценка выводится в два этапа. Первый этап оодержится в лемме DI.2; он уотанаавливает, что указанное максимальное расстояние можно оценить величиной $\zeta(\mathcal{U}^\delta(s))\delta^{-2}$. На основе информации, полученной в § D2, в § D3 выводится оценка, не зависящая от δ .

Пусть функция x_0 определена как в лемме C2.1, и пусть $s = (A, \Phi) \in \mathbb{C}^\delta$ является решением системы (CI.1). Обозначим через $U[s]$ множество $U[s](x_0(\mathcal{U}^\delta(s)))$, и пусть множе-

отва $\{U_j, j = 1, \dots, n[c](x_0)\}$ являются его компонентами. Зададим для каждого j точку x_j формулой (С2.1); точка x_j - центр множества U_j . Поставим в соответствие каждому элементу c два числа

$$d_* = \max\{|x_j|: j = 1, \dots, n[c](x_0)\}, \quad (D1.1)$$

$$\rho = \rho(c) = \max\{|x_i - x_j|: i, j = 1, \dots, n[c](x_0)\}.$$

Л е м м а D1.2. Пусть число δ_1 определено как в лемме С4.1. Пусть $\delta \in (0, \delta_1)$, а элемент $c \in \mathbb{C}^\delta$ является решением охотмы (С1.1). Зададим d_* и ρ по порядку формул (D1.1). Тогда

$$d_* \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))(\rho + 1) \leq \zeta'(\mathcal{U}^\delta(c))\delta^{-2},$$

где $\zeta, \zeta' \in C^0([0, \infty), (0, \infty))$ не зависят от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_1)$.

Доказательство леммы D1.2 будет приведено ниже. Необходимые для него оценки выводятся из тождества для тензора напряжений, устанавливаемого в оледующей лемме.

Л е м м а D1.3. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$ и $c = (A, \Phi) \in \mathbb{C}^\delta$ - решение охотмы (С1.1). Пусть $(f_\alpha, g_\alpha)_{\alpha=1}^3$ суть Ad P-значные компоненты пары $(f, g) = (\sigma^* F_A, D_A \Phi)$ относительно базиса $\{dy^\alpha\}_{\alpha=1}^3$ пространства T^* . Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} (|f|^2 - |g|^2) - \frac{\partial}{\partial y^\beta} ((f_\alpha, f_\beta) - (g_\alpha, g_\beta)) + \delta \sigma^{-2} y^\alpha |f|^2 = 0. \quad (D1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свернем уравнения (С1.1а) и (С1.2а) о оценением f и затем оложим их. После этого овернем уравнения (С1.1б) и (С1.2б) с оценением $*g$ и вычтем их друг из друга. В результате после некоторых преобразований получим равенство (D1.2).

Ниже перечислены некоторые оледствия леммы D1.3, называемые "теоремами вириала".

С л е д о в и е D1.4. Пусть $\delta \in [0, 1/2)$ и $c \in \mathbb{C}^\delta$ - решение охотмы (С1.1). Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ - открытый шар радиу-

са $R > 0$ о центром в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Обозначим через $n = \sum_{\alpha} n^{\alpha} dy^{\alpha}$ внешнюю нормаль к ∂B . Тогда

$$\int_B d^3 y [|g|^2 - |f|^2 + 2\delta\epsilon^{-2} (|y|^2 - (y, x)) |f|^2] = \\ = R \int_{\partial B} *n [|g|^2 - |f|^2 + 2|f_n|^2 - 2|g_n|^2], \quad (DI.3)$$

где $(y, x) = \sum_{\alpha} y^{\alpha} x^{\alpha}$ и $f_n = \sum_{\alpha} n^{\alpha} f_{\alpha}$, $g_n = \sum_{\alpha} n^{\alpha} g_{\alpha}$.

С л е д о в т в и е DI.5. При тех же предположениях, что и в лемме DI.3, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 y [|g|^2 - |f|^2 + 2\delta\epsilon^{-2} |y|^2 |f|^2] = 0, \quad (DI.4)$$

а если $\delta > 0$, то при каждом $\alpha = 1, 2, 3$ оправедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 y y^{\alpha} \epsilon^{-2} |f|^2 = 0. \quad (DI.5)$$

Предложение DI.1 доказывается о помощью не зависящей от δ оценки величины $\rho(c)$, полученной из равенства (DI.4). Явное вычисление левой части (DI.4) в терминах чисел $\{a_j, n_j\}$, введенных соответственно в леммах C3.1 и C4.1, проводится в § D3. Результат этого вычисления, сформулированный в предложении D3.2, и приводит к оценке величины $\rho(c)$. Последнее, что мы сделаем в этом параграфе — докажем лемму DI.2 и оледотвия DI.4 и DI.5.

Д о к а з а т е л ь с т в о оледотвия DI.4. Чтобы вывести (DI.3), овернем (DI.2) с вектором $y - x = (y^{\alpha} - x^{\alpha})_{\alpha=1}^3$ и проинтегрируем результат по шару B . После интегрирования по частям (т.е. применения теоремы Стокса) получаем (DI.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о оледотвия DI.5. Чтобы вывести (DI.4), возьмем предел выражения (DI.3) по оледовательности шаров B возрастающего целочисленного радиуса о центром в точке $0 \in \mathbb{R}^3$. По леммам C2.1, C3.1 и C4.1 граничный член в правой части (DI.3) равномерно отремится к нулю. Для получения

формулы (DI.5) нужно проинтегрировать (DI.2) по $\mathbb{R}^3$, а затем выполнить интегрирование по частям.

Доказательство леммы DI.2. Рассмотрим вначале левое неравенство. Предположим для простоты, что $d_* > 16(p+1)$. Выберем точку $x \in \{x_j\}$ так, чтобы $|x| = d_*$. Для некоторого $R \in [\frac{1}{4}d_*, \frac{1}{8}d_*]$ положим $B = \{y \in \mathbb{R}^3: |y-x| \leq R\}$. Тогда $\text{dist}(\{x_j\}, \mathbb{R}^3 \setminus B) > \frac{1}{16}d_*$. Свернем теперь обе части (DI.5) с $x = (x_\alpha)_{\alpha=1}^3$. Вклад, отвечающий шару B , удовлетворяет неравенству

$$\int_B d^3y (x, y) b^{-2} |f|^2 \geq \frac{1}{10} \int_B d^3y |f|^2, \quad (\text{DI.6})$$

поскольку для $y \in B$ имеем

$$(x, y) b^{-2}(y) \geq 1/10. \quad (\text{DI.7})$$

В то же время леммы C2.I и C4.I позволяют оценить вклад, отвечающий множеству $\mathbb{R}^3 \setminus B$, величиной

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} d^3y (x, y) b^{-2} |f|^2 \right| &\leq |x| \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \int_{|x-y| > R} d^3y |y|^{-1+2\delta} (1+|y-x|)^{-4+1/16} \leq \\ &\leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) d_*^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{DI.8})$$

Далее, для $y \in \partial B$ по леммам C2.I, C3.I и C4.I имеем

$$(|f|^2 + |g|^2)(y) \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) d_*^{-4+2\delta+1/16}, \quad (\text{DI.9})$$

и поэтому из следствия DI.4 получаем оценку

$$\int_B d^3y \{|g|^2 - 2|f|^2\} \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) d_*^{-1/2}. \quad (\text{DI.10})$$

При получении предыдущих неравенств использовалось условие $\delta_1 < 1/4$. Из (DI.6, 8, 10) вместе с (DI.5) следует, что

$$\int_B d^3y \{|g|^2 + |f|^2\} \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) d_*^{-1/2}. \quad (\text{DI.11})$$

Но по построению шар B содержит центры x_j всех компонент U_j ; таким образом, справедлива оценка

$$\alpha_0(\mathcal{U}^\delta(c)) \leq \int_B d^3 y (|g|^2 + |f|^2). \quad (\text{DI.12})$$

Тем самым, если $d_* \geq 8(\rho + 1)$, то из (DI.11, 12) следует, что

$$d_* \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)). \quad (\text{DI.13})$$

Этим устанавливается левое неравенство из леммы DI.2.

При установлении правого неравенства решающим является тот факт, что найдется такое $R \in [d_*/4, d_*/2]$, что шар $B = \{y \in \mathbb{R}^3: |y - x| \leq R\}$ обладает следующим свойством: при всех $j \in \{1, \dots, n[c](x_0)\}$

$$\text{dist}(x_j, \partial B) \geq (10 n[c](x_0))^{-1} d_*. \quad (\text{DI.14})$$

Действительно, множество радиусов $R \in [d_*/4, d_*/2]$, таких, что при некотором x_j не выполняется (DI.14), имеет меру меньше $d_*/5$ (и не более чем $n[c](x_0)$ линейно связанных компонент).

Сворачивая обе части уравнения (DI.2) с x и интегрируя полученный результат по шару B , после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x \cdot n) (|f|^2 - |g|^2) - \int_{\partial B} ((f_n, f_x) - (g_n, g_x)) + \\ + \delta \int_B d^3 y \, b^{-2}(x, y) |f|^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{DI.15})$$

Здесь $n = (n^\alpha)_{\alpha=1}^3$ — внешняя нормаль к ∂B и $f_n = \sum_{\alpha} v^\alpha f_\alpha$, $g_n = \sum_{\alpha} v^\alpha g_\alpha$ для $v = x$ или n . В совокупности формулы (DI.7, 9 и 15) приводят к неравенству

$$\delta \int_B d^3 y |f|^2 \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) d_*^{-3/4+2\delta} \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) d_*^{-1/2}. \quad (\text{DI.16})$$

Здесь использовано условие $\delta < \delta_1 < 1/4$. Из неравенств (DI.10, 16) следует, что $\delta \int_B d^3 y (|f|^2 + |g|^2) \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) d_*^{-1/2}$. Но

по построению в шаре B содержится по крайней мере одна линейно связная компонента множества $U[c](x_0)$. Поэтому из последнего неравенства следует, что $\delta x_0(\mathcal{U}^\delta(c)) \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) d_*^{-1/2}$, откуда $d_* \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \delta^{-2}$, где функция $\zeta \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от $c \in \mathcal{C}^\delta$ и $\delta \in (0, \delta_1)$. Из последнего неравенства следует правое неравенство в лемме D1.2, поскольку в силу неравенства треугольника

$$2\rho \leq d_*. \quad (D1.17)$$

D2. Кластерное разложение

Для доказательства предложения D1.1 полезно сгруппировать сравнительно близкие друг к другу точки $\{x_j, j = 1, \dots, n[c](x_0)\}$ в наборы (кластеры). Каждому такому кластеру сопоставляются два заряда. Физически один из зарядов следует интерпретировать как константу взаимодействия кластера с полем "Ф", а другой — как константу взаимодействия кластера с полем "А".

Пусть число δ_1 такое же, как в лемме C4.1, и $\delta \in [0, \delta_1)$. Пусть $c = (A, \Phi) \in \mathcal{C}^\delta$ есть решение системы (C1.1) и число $n = n[c](x_0(\mathcal{U}^\delta(c)))$ определено по функции x_0 как в лемме C2.1. Положим $\Lambda = \Lambda(c) = \{x_j: j = 1, \dots, n\}$. Для каждого кластера $\lambda \subset \Lambda$ обозначим через $m = m(\lambda)$ число его элементов. Пусть $\rho = \rho(c)$ — число из формулы (D1.1). Предположим, что $\rho \geq 2$.

Для $\tau \in (0, 1/16)$ определим τ -кластер как непустое подмножество $\lambda \subset \Lambda$ со следующими свойствами:

$$(a) \text{diam } \lambda < \rho^{1/2} \tau^{n-m+1}, \quad (D2.1)$$

(b) λ не содержится строго ни в каком $\lambda' \subset \Lambda$, удовлетворяющем (a).

Величина τ будет вычислена в § D3 как функция от $\mathcal{U}^\delta(c)$.

Для τ -кластера λ определим число

$$\rho(\lambda) = \text{dist}(\lambda, \Lambda \setminus \lambda). \quad (D2.2)$$

τ -кластеры из множества Λ обладают следующими свойствами.

Л е м м а D2.1. Каждая точка $x \in \Lambda$ содержится только в одном τ -кластере; кроме того, поскольку $\rho \geq 2$, множество Λ содержит по крайней мере два τ -кластера. Если λ — некоторый τ -кластер, то

$$\rho(\lambda) \geq \frac{1}{2} \rho^{1/2} \tau^{n-m}. \quad (D2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \Lambda$. Сначала докажем, что точка x содержится по крайней мере в одном τ -кластере. Для этого назовем подмножество $\mu \subset \Lambda$, удовлетворяющее требованию (D2.1a), группировкой. Тогда точка x содержится в группировке $\mu = \{x\}$. Предположим, что существуют группировки μ_1, μ_2 с $m = m(\mu_1) \geq m(\mu_2)$ и $\mu_2 \not\subset \mu_1$ и точка $x \in \mu_1 \cap \mu_2$. Положим $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$. Если $z, w \in \mu$, то

$$|z - w| \leq |z - x| + |w - x| < 2\rho^{1/2} \tau^{n-m+1} < \frac{1}{2} \rho^{1/2} \tau^{n-m} < \rho^{1/2} \tau^{n-m(\mu)+1}.$$

Следовательно, μ также является группировкой. Тем самым множество группировок, содержащих точку x , частично упорядочено (по включению) и, значит, существует максимальная группировка, содержащая точку x . По определению эта максимальная группировка является τ -кластером, и по построению он определяется единственным образом. Из формулы (D2.1) вытекает, что каждый τ -кластер $\lambda \subset \Lambda$ удовлетворяет условию $\text{diam}(\lambda) \leq \frac{1}{4} \rho^{1/2}$, поэтому множество Λ должно содержать по крайней мере два таких τ -кластера, так как $\text{diam} \Lambda = \rho$. Наконец, если бы соотношение (D2.3) не выполнялось для τ -кластеров λ, μ с $m = m(\lambda) \geq m(\mu)$, то $\tau = \lambda \cup \mu$ было бы группировкой, содержащей оба кластера λ и μ . Действительно, для любых точек $x, y \in \tau$ выполнялось бы неравенство

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq \text{diam} \lambda + \text{diam} \mu + \text{dist}(\lambda, \mu) < \\ &< 2\rho^{1/2} \tau^{n-m+1} + \frac{1}{2} \rho^{1/2} \tau^{n-m} < \rho^{1/2} \tau^{n-m} < \rho^{1/2} \tau^{n-m(\tau)+1} \end{aligned}$$

Поставим в соответствие каждому кластеру $\lambda \subset \Lambda$ числа

$$\alpha(\lambda) = \sum_{x_j \in \lambda} \alpha_j \quad \text{и} \quad n(\lambda) = \sum_{x_j \in \lambda} n_j, \quad (D2.4)$$

где числа α_j и n_j определены соответственно в леммах C3.1, C4.1. Кроме того, сопоставим каждому кластеру его центр

$$X(\lambda) = m^{-1} \sum_{x \in \lambda} x \quad (\text{D2.5})$$

и открытый шар

$$B(\lambda) = \{y \in \mathbb{R}^3: |y - X(\lambda)| < \rho(\lambda) \tau^{1/3}\}. \quad (\text{D2.6})$$

Из леммы D2.1 следует, что для различных τ -кластеров λ , μ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \text{diam}(\lambda) &< 2\rho(\lambda)\tau, \quad \text{dist}(\lambda, \partial B(\lambda)) \geq \frac{1}{2}\rho(\lambda)\tau^{1/3}, \\ \text{dist}(\mu, \partial B(\lambda)) &\geq \frac{1}{2}\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{D2.7})$$

Важный шаг в доказательстве предложения D1.1 состоит в отождествлении чисел $\alpha(\lambda)$, $n(\lambda)$ с интегралами по шару $B(\lambda)$ билинейных функционалов от кривизн элементов $c = (A, \Phi)$. Это сделано в леммах D2.2 и D2.3.

Л е м м а D2.2. Пусть δ_1 такое, как в лемме C4.1. Пусть $\delta \in [0, \delta_1)$, и пусть $c \in \mathcal{C}^\delta$ — решение системы (C1.1). Пусть λ — некоторый τ -кластер. Определим числа $\alpha(\lambda)$ и $n(\lambda)$ с помощью формул (D2.4). Тогда

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left| \alpha(\lambda) - \frac{1}{8\pi} \int_{B(\lambda)} \{|g|^2 + |f|^2\} \right| \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))(\delta + \rho(\lambda)^{-1/2} \tau^{-1/3}), \\ (2) \quad & |n(\lambda)| \leq \alpha(\lambda) + \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))(\delta + \rho(\lambda)^{-1/2} \tau^{-1/3}), \end{aligned}$$

где функция $\zeta \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от кластера λ , элемента $c \in \mathcal{C}^\delta$ и числа $\delta \in [0, \delta_1)$.

Л е м м а D2.3. Пусть $n \in \mathbb{Z}$, а δ_1, δ такие же, как в лемме D2.2, и пусть $c \in \mathcal{C}_n^\delta$ — решение системы (C1.1). Определим наборы $\{\alpha_j\}$ и $\{n_j\}$ с помощью лемм соответственно C3.1 и C4.1. Тогда

$$4\pi \sum_j \alpha_j = \mathcal{U}^\delta(c) - \delta \int d^3y \sigma^{-2} |y|^2 |f|^2 \quad \text{и} \quad \sum_j n_j = n.$$

Доказательство леммы D2.2. Пусть $c = (A, \Phi)$. Для доказательства утверждения (1) свернем обе части формулы

(C1.1b) с сечением Φ , а затем проинтегрируем по шару $B(\lambda)$. Из теоремы Стокса следует тождество

$$\int_{B(\lambda)} |g|^2 = \int_{\partial B(\lambda)} * (\Phi, g). \quad (D2.8)$$

Положим $R = \rho(\lambda)^{1/2} \tau^{1/3}$. Заметим, что для $y \in \partial B(\lambda)$ из леммы C3.1 и неравенств (D2.7) следует, что

$$|(\Phi, g) - \sum_j \alpha_j |y - x_j|^{-2} d|y - x_j| < \zeta_7(\mathcal{U}^\delta(c)) R^{-3}. \quad (D2.9)$$

Из соотношений (D2.8 - 9) вытекает неравенство

$$\left| \int_{B(\lambda)} |g|^2 - \sum_j \alpha_j \int_{\partial B(\lambda)} |y - x_j|^{-2} * d|y - x_j| \right| < \zeta_7(\mathcal{U}^\delta(c)) R^{-4}. \quad (D2.10)$$

Из неравенства (D2.10) по теореме Стокса получаем

$$\left| \int_{B(\lambda)} |g|^2 - 4\pi\alpha(\lambda) \right| < \zeta_7(\mathcal{U}^\delta(c)) R^{-4}. \quad (D2.11)$$

Далее, из следствия D1.4 и лемм C2.1, C3.1 и C4.1 находим оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(\lambda)} \{|g|^2 - |f|^2\} \right| &< \zeta_7(\mathcal{U}^\delta(c)) \{ \delta(1 + (\rho + R)^{1/16} R^{-1}) + \\ &+ (\rho^{2\delta} + R^{2\delta} + 1) R^{-1} \}. \end{aligned} \quad (D2.12)$$

Однако по лемме D1.2

$$(\rho + R)^{1/16} R^{-1} + R^{2\delta} + \rho^{2\delta} < 1 + \zeta_7(\mathcal{U}^\delta(c)) \delta^{3/4}, \quad (D2.13)$$

а поскольку $\delta < 1/4$, то неравенство (D2.12) в действительности означает, что

$$\left| \int_{B(\lambda)} \{|g|^2 - |f|^2\} \right| \leq \zeta_7(\mathcal{U}^\delta(c)) (\delta + R^{-1}). \quad (D2.14)$$

Наконец, из неравенств (D2.11, 14) вытекает утверждение (1) леммы D2.2.

Для того чтобы доказать утверждение (2), воспользуемся вначале тем, что для $y \in \partial B(\lambda)$ из лемм C4.1 и C4.2 и формулы (D2.7) следует, что

$$\left| (\Phi, F_A) - \sum_j n_j |y - x_j|^{-2} * d|y - x_j| - d\omega \right| \leq \leq \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c))(R^{-3} + \delta R^{-2}). \quad (D2.15)$$

Отсюда по теореме Стокса и формуле (D2.15) получаем, что

$$\left| \int_{\partial B(\lambda)} (\Phi, F_A) - 4\pi n(\lambda) \right| \leq \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c))(\delta + R^{-1}). \quad (D2.16)$$

Далее по теореме Стокса и формуле (C1.2a) получаем тождество

$$\int_{\partial B(\lambda)} (\Phi, F_A) = \int_{B(\lambda)} (g, *F_A). \quad (D2.17)$$

Но в силу неравенства треугольника

$$\left| \int_{B(\lambda)} (g, *F_A) \right| \leq \frac{1}{2} \int_{B(\lambda)} \{|g|^2 + |f|^2\}. \quad (D2.18)$$

Таким образом, утверждение (2) леммы D2.2 следует из формул (D2.16 - 18) и утверждения (1).

Доказательство леммы D2.3. Для доказательства первого утверждения заметим, что из формулы (C1.1b) и леммы C3.1 следует равенство

$$4\pi \sum_j \alpha_j = \int_{\mathbb{R}^3} |g|^2,$$

и остается воспользоваться следствием D1.5. Для доказательства второго утверждения заметим, что из формул (A1.4) и (C1.2a) следует, что

$$4\pi n = \int_{\mathbb{R}^3} (g, *F_A) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} (\Phi, F_A).$$

Отсюда с учетом лемм С3.1, С4.2, 3, 7 вытекает второе утверждение леммы D2.3.

Наконец, необходимо интерпретировать векторные заряды $\{\ell_j\}$ из леммы С4.1. Для κ -кластера λ определим его заряд как $\ell(\lambda) = \sum_{j \in \lambda} \ell_j$. Заряды $\ell(\lambda)$ обладают следующими свойствами.

Л е м м а D2.4. При тех же предположениях, что и в лемме D2.2, пусть λ — некоторый κ -кластер. Тогда

$$|\ell(\lambda)| \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) [\rho(\lambda)^{-3/2} + \delta],$$

где функция $\zeta \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от кластера λ , элемента $c \in \mathcal{C}^\delta$ и числа $\delta \in [0, \delta_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в разд. С, определим функции $\phi_j = (1 + |x - x_j|)^{-5}$ и положим $\pi_j = \phi_j \left(\sum_k \phi_k \right)^{-1}$. Зададим сечение $q \in \Gamma(T^*)$ с помощью формулы (С4.3). Отметим, что $d * \sigma^{2\delta} q = 0$. Кроме того,

$$d\pi_j = 5 \sum_{k: k \neq j} \pi_j \pi_k \left(\frac{d|x - x_k|}{1 + |x - x_k|} - \frac{d|x - x_j|}{1 + |x - x_j|} \right). \quad (D2.19)$$

Запишем заряд $\ell(\lambda)$ в виде $\ell(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^3 \ell_\alpha dx^\alpha$. Тогда для любого фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$\ell^\alpha(\lambda) = * \int_{\mathbb{R}^3} d(y - \xi)^\alpha \wedge * \sum_{j \in \lambda} \pi_j q = - * \int_{\mathbb{R}^3} (y - \xi)^\alpha d * \sum_{j \in \lambda} \pi_j q. \quad (D2.20)$$

Правую часть (D2.20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \ell(\lambda) = & - \int_{\mathbb{R}^3} (y - \xi)^\alpha \sum_{j \in \lambda} d\pi_j \wedge * q + \\ & + 2\delta \int_{\mathbb{R}^3} (y - \xi)^\alpha \sigma^{-1} d\sigma \wedge * \sum_{j \in \lambda} \pi_j q. \end{aligned} \quad (D2.21)$$

Наконец, заметим, что из уравнения (D2.19) следует, что

$$\sum_{j \in \lambda} d\pi_j = \sum_{j \in \lambda} \sum_{k \neq j} \pi_j \pi_k \left(\frac{d|x - x_k|}{1 + |x - x_k|} - \frac{d|x - x_j|}{1 + |x - x_j|} \right). \quad (D2.22)$$

Оценим выражение (D2.21), рассмотрев две возможности: $|X(\lambda)| < \rho(\lambda) \tau^{1/3}$ и противоположное неравенство. В первом случае выберем $\xi_i = 0$. Во втором случае возьмем $\xi_i = X(\lambda)$. В обоих случаях из неравенства (C4.11) и формулы (D2.22) вытекает неравенство

$$\left| \sum_{j \in \lambda} d\pi_j \wedge * q \right| \leq \zeta_i(\mathfrak{A}^\delta(c)) \sum_{j \in \lambda} \sum_{k \neq j} (1 + |x - x_j|)^{-5/2} (1 + |x - x_k|)^{-5/2} \times \\ \times ((1 + |x - x_j|)^{-1} + (1 + |x - x_k|)^{-1}).$$

Остальные детали доказательства очевидны, и мы оставляем их читателю.

D3. Взаимодействие кластеров

Чтобы получить из формулы (D1.4) не зависящую от δ оценку числа $\rho(c)$, необходимо рассмотреть наборы точек множества Λ , находящихся на расстояниях порядка $O(\rho(c))$, а также кластеры размеров порядка $O(\rho^{1/2}(c))$. Копируя определение τ -кластера, определим τ -молекулу как подмножество $\Theta \subset \Lambda$ со следующими свойствами:

(a) $\text{diam } \Theta < 2\rho\tau^{n-m+1}$, $m = m(\Theta)$ — число элементов Θ ;

(b) Θ не содержится строго ни в каком $\Theta' \subset \Lambda$, удовлетворяющем (a).

Для τ -молекулы Θ введем число

$$\rho(\Theta) = \text{dist}(\Theta, \Lambda \setminus \Theta). \quad (\text{D3.2})$$

По аналогии с леммой D2.1 имеет место

Л е м м а D3.1. Каждый τ -кластер $\mu \subset \Lambda$ содержится в единственной τ -молекуле. Поскольку $\rho > 0$, существуют по крайней мере две τ -молекулы. Если Θ есть τ -молекула, то $\rho(\Theta) \geq \rho\tau^{n-m(\Theta)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторите доказательство леммы D2.1.

Для получения оценки, играющей решающую роль в доказательстве предложения D1.1, нам потребуется следующая априорная оценка.

Предложение D3.2. Пусть δ_1 такое же, как в лемме C4.1. Пусть $\delta \in [0, \delta_1)$ и $c \in \mathbb{C}^\delta$ — решение системы (C1.1). Пусть $\rho = \rho(c)$ определено формулой (D1.1) и $\tau \in (0, 1/2)$. Для τ -кластера $\lambda \in \Lambda(c)$ определим числа $\alpha(\lambda)$, $n(\lambda)$ формулами (D2.4), а число $X(\lambda)$ — формулой (D2.5). Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^3} \alpha^3 y [|g|^2 - |f|^2 + 2\delta b^{-2} |f|^2] \geq -\rho^{-3/2} \tau^{-2n} \zeta(\mathfrak{U}^\delta(c)) +$$

$$+ 4\pi [1 - \tau^{1/3} \zeta(\mathfrak{U}^\delta(c))] \sum' \frac{\alpha(\mu)\alpha(\lambda) - n(\mu)n(\lambda)}{|X(\mu) - X(\lambda)|} +$$

$$+ \delta \varkappa_0(\mathfrak{U}^\delta(c)) (1 - \zeta(\mathfrak{U}^\delta(c)) \rho^{-1/2} \tau^{-2n}). \quad (D3.3)$$

Здесь функция $\zeta(\cdot) \in C^\infty([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, 1)$, а суммирование в $\sum'$ ведется по всем упорядоченным парам (μ, λ) τ -кластеров, принадлежащих разным τ -молекулам.

Этот результат будет доказан ниже.

Доказательство предложения D1.1 на основе предложения D3.2. Следствие D1.5 утверждает, что левая часть (D3.3) равна нулю. Выберем $\tau = [4 + 4\zeta(\mathfrak{U}^\delta(c))]^{-3}$. Тогда в силу (D3.3)

$$0 \geq -\rho^{-3/2} \zeta(\mathfrak{U}^\delta(c)) + 2\pi \sum' \frac{\alpha(\mu)\alpha(\lambda) - n(\mu)n(\lambda)}{|X(\mu) - X(\lambda)|} +$$

$$+ \delta \varkappa_0(\mathfrak{U}^\delta(c)) (1 - \zeta(\mathfrak{U}^\delta(c)) \rho^{-1/2}). \quad (D3.4)$$

По лемме D2.3 имеем

$$4\pi \sum_j \alpha_j \geq (1 - \delta) \mathfrak{U}^\delta(c) \geq (1 - \delta) 4\pi |\tau| + \frac{1}{2} \varepsilon,$$

откуда

$$4\pi \sum_i \alpha_i \geq 4\pi \left| \sum_i n_i \right| + \frac{1}{2} \varepsilon - \mathfrak{U}^\delta(c) \delta. \quad (D3.5)$$

Поскольку каждая точка $x_j \in \Lambda$ содержится только в одном τ -кластере, из (D3.5) получаем оценку

$$4\pi \sum_{\tau\text{-кластеры}} \alpha(\lambda) \geq 4\pi \left| \sum_{\tau\text{-кластеры}} n(\lambda) \right| + \frac{1}{2} \varepsilon - 2\mathcal{U}^\delta(c)\delta. \quad (\text{D3.6})$$

На основании второго утверждения леммы D2.2 и неравенства (D3.6) теперь имеются только две возможности. Первая заключается в том, что существует τ -кластер λ , для которого

$$\alpha(\lambda) \geq \frac{1}{2} n(c)(x_0)^{-1} \varepsilon + |n(\lambda)| - \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))(\delta + \rho^{-1/2}). \quad (\text{D3.7})$$

Если же оценка (D3.7) не выполняется, то по неравенству (D3.6) и лемме D2.2 не все числа $n(\lambda)$ имеют один и тот же знак. Так как из леммы D2.1 вытекает, что

$$\alpha(\lambda) \geq \frac{1}{8\pi} x_0(\mathcal{U}^\delta(c)) - \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))(\delta + \rho^{-1/2}), \quad (\text{D3.8})$$

то в каждом из этих двух случаев неравенство (D3.4) и лемма D2.2 дают оценку

$$0 \geq -\rho^{-3/2} \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) + \pi \rho^{-1} (n(c)(x_0) + 4\pi)^{-1} x_0 \min(\varepsilon, x_0) + \delta x_0(\mathcal{U}^\delta(c))(1 - \zeta(\mathcal{U}^\delta(c))\rho^{-1/2}). \quad (\text{D3.9})$$

Из этой формулы получаем не зависящую от δ оценку величины $\rho(c)$: $\rho(c) \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \max(1, \varepsilon^{-2})$, где $\zeta \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_1)$, что и требовалось доказать.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству предложения D3.2. Нам потребуются некоторые дополнительные определения. Во-первых, определим для τ -молекулы Θ ее центр $x(\Theta) \in \mathbb{R}^3$ следующим образом: положим $w = \{y \in \mathbb{R}^3: \text{dist}(y, \Theta) < \rho(\Theta)\tau\}$ и

$$x(\Theta) = \left(\int_w \sigma^{-2} |f|^2 \right)^{-1} \left(\int_w \sigma^{-2} y |f|^2 \right). \quad (\text{D3.10})$$

Далее положим

$$B(\Theta) = \{y \in \mathbb{R}^3: |y - x(\Theta)| < \rho(\Theta)\tau^{1/3}\}. \quad (\text{D3.11})$$

Заметим, что в силу неравенства

$$\text{diam } \Theta \leq 2\rho(\Theta)r \quad (\text{D3.12})$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{dist}(\Theta, \partial B(\Theta)) &\geq \frac{1}{3} \rho(\Theta) r^{1/3}, \\ \text{dist}(\Lambda \setminus \Theta, \partial B(\Theta)) &\geq \frac{1}{2} \rho(\Theta). \end{aligned} \quad (\text{D3.13})$$

Каждой r -молекуле Θ поставим в соответствие число

$$s(\Theta) = \int_{B(\Theta)} \{|g|^2 - |f|^2 + 2\delta\sigma^{-2}|y|^2|f|^2\}. \quad (\text{D3.14})$$

Определим множество $T = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{\Theta} B(\Theta)$ и положим

$$s(T) = \int_T \{|g|^2 - |f|^2 + 2\delta\sigma^{-2}|y|^2|f|^2\}. \quad (\text{D3.15})$$

Числа $s(\Theta)$ находятся с помощью леммы D1.3. С этой целью для каждого $j \in \{1, \dots, n[c](x_0)\}$ зададим функции

$$\varphi_j(y) = -\alpha_j |y - x_j|^{-1} \quad \text{и} \quad \eta_j(y) = -n_j |y - x_j|^{-1}. \quad (\text{D3.16})$$

Из лемм C2.1 и C3.1 следует, что для каждой точки $y \in T$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |g - \Phi(\Phi, g)|(y) &\leq \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j |y - x_j|^{-3}, \\ |(\Phi, g) - \sum_j \alpha \varphi_j|(y) &< \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j |y - x_j|^{-3}. \end{aligned} \quad (\text{D3.17})$$

Кроме того, определяя для каждого $j = 1, \dots, n[c](x_0)$ Γ -форму ω_j формулой (C4.13), получим, пользуясь леммами C2.1, C3.1 и C4.3, следующие оценки:

$$\begin{aligned} |f - \Phi(\Phi, f)|(y) &\leq \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j |y - x_j|^{-3}, \\ |(\Phi, f) - \sigma^{-\delta} \sum_j \alpha \eta_j - \sigma^\delta \sum_j *d\omega_j|(y) &\leq \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \sum_j |y - x_j|^{-3}. \end{aligned} \quad (\text{D3.18})$$

Для удобства обозначений введем вещественные Γ -формы

$$q = \sum_j dq_j \text{ и } p = \sum_j d\eta_j. \quad (\text{D3.19})$$

Первым шагом в доказательстве предложения D3.2 будет следующая

Л е м м а D3.3. При тех же предположениях, что и в предложении D3.2, пусть $\Theta \in \Lambda(c)$ есть γ -молекула. Тогда

$$s(\Theta) \geq \rho(\Theta) \gamma^{1/3} \int_{\partial B(\Theta)} *n(|q|^2 - \sigma^{2\delta} |p|^2 + 2(\sigma^{2\delta} p_n^2 - q_n^2)) + \\ + \int_{B(\Theta)} d^3y(y, x(\Theta)) \sigma^{-2} |f|^2 - \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) [\rho^{-3/2} \gamma^{-2n} + \delta \rho^{-1/2} \gamma^{-2n}],$$

где $\zeta \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся следствием D1.4 с $x = x(\Theta)$ и $B = B(\Theta)$. Из этого следствия и формул (D3.13, 17, 18) вытекает доказываемое неравенство с дополнительным членом в правой части вида

$$\rho(\Theta) \gamma^{1/3} \int_{\partial B(\Theta)} *n(-2(p \cdot v) - |v|^2 + 2p_n v_n + 2|v_n|^2), \quad (\text{D3.20})$$

где $v = \sigma^\delta \sum_j *d\omega_j$.

Для оценки выражения (D3.20) отметим, что при $x \in \Gamma$ и $x_j \in \lambda$ (где λ есть γ -кластер), верно неравенство

$$|d|x - x_j|^{-1} - d|x - X(\lambda)|^{-1}| \leq \varkappa \cdot \rho^{-1/2} \gamma^{-n} |x - X(\lambda)|^{-2},$$

где константа $\varkappa$ не зависит от x, x_j и λ . Тем самым для точки $x \in \Gamma$ форма v оценивается с помощью леммы C4.1:

$$|v + \sum_\lambda *l(\lambda) \wedge d|x - X(\lambda)|^{-1}| \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \left[\rho^{-1/2} \gamma^{-n} \sum_\lambda |x - X(\lambda)|^{-2} + \right. \\ \left. + \delta(1 + |x|)^{1/32} \sum_\lambda |x - X(\lambda)|^{2-1/16} \right], \quad (\text{D3.21})$$

где $\zeta(\cdot) \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от $c \in \mathbb{C}^\delta$ и $\delta \in [0, \delta_1)$. Используя формулу (D3.21) вместе с леммами D1.2 и D2.4, можно показать, что дополнительный член (D3.20) ограничен величиной $-\zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \cdot [\rho^{-3/2} \gamma^{-2n} + \delta \rho^{-1/2} \gamma^{-2n}]$, как и требуется в лемме.

Для того чтобы изучать дальше числа $z(\Theta)$, удобно ввести для каждой τ -молекулы Θ вещественные 1-формы

$$q(\Theta) = \sum_{j: x_j \in \Theta} d\varphi_j, \quad p(\Theta) = \sum_{j: x_j \in \Theta} d\eta_j. \quad (D3.22)$$

Отметим, что если $y \notin \Theta$, то

$$dq(\Theta) = 0, \quad d * q(\Theta) = 0 \quad (D3.23a)$$

и

$$dp(\Theta) = 0, \quad d * p(\Theta) = 0. \quad (D3.23b)$$

Второй шаг в доказательстве предложения D3.2 состоит в том, чтобы выделить вклад в число $z(\Theta)$ от каждой τ -молекулы Θ . Для этого нам понадобятся следующие ниже леммы D3.4 - 5.

Л е м м а D3.4. При тех же предположениях, что и в предложении D3.2, пусть Θ, Π - две различные τ -молекулы. Пусть $v(\cdot)$ обозначает форму $q(\cdot)$ или $p(\cdot)$ из формулы (D3.22), а $\{b_j\}$ обозначает соответственно множество $\{a_j\}$ или $\{n_j\}$. Тогда

$$(1) \rho(\Theta) \tau^{1/3} \int_{\partial B(\Theta)} *n(|v(\Pi)|^2 - 2v_n(\Pi)^2) = \int_{B(\Theta)} d^3y |v(\Pi)|^2,$$

$$(2) \rho(\Theta) \tau^{1/3} \int_{\partial B(\Theta)} *n((v(\Pi), v(\Theta)) - 2v_n(\Pi)v_n(\Theta)) =$$

$$= \int_{B(\Theta)} d^3y (v(\Pi), v(\Theta)) - 4\pi \sum' \frac{b_j b_k}{|x_j - x_k|^3} (x_j - x(\Theta), x_j - x_k),$$

где $\sum'$ обозначает суммирование по всем точкам $x_j \in \Theta$ и $x_k \in \Pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (D3.23a, b) следует, что для τ -молекул Θ, Π и точки $y \notin \Theta \cup \Pi$ выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} (v(\Theta), v(\Pi)) - \frac{\partial}{\partial y^\beta} (v_\alpha(\Theta) v_\beta(\Pi) + v_\beta(\Theta) v_\alpha(\Pi)) = 0. \quad (D3.24)$$

Вывод формулы (D3.24) формально совпадает с выводом формулы (D1.2). Для доказательства утверждения (1) положим в предыдущем выражении $\Theta = \Pi$, а затем свернем формулу (D3.24) с функцией $y - x(\Theta)$. Проинтегрируем далее полученное выражение по шару $B(\Theta)$. Интегрирование по частям дает нужный нам результат. Для доказательства утверждения (2) свернем выражение (D3.24) с функцией $y - x(\Theta)$, а затем при каждом $\varepsilon > 0$ проинтегрируем по множеству $B(\Theta) \setminus \{y \in \mathbb{R}^3: \text{dist}(y, \Theta) < \varepsilon\}$. Применим далее интегрирование по частям и заметим, что предел $\varepsilon \rightarrow 0$ достигается равномерно. Это приводит к утверждению (2).

Чтобы воспользоваться леммой D3.3 для оценки числа $z(\Theta)$, необходимо устранить множители $\sigma^{2\delta}$.

Л е м м а D3.5. При тех же предположениях, что и в предложении D3.2, пусть Θ есть γ -молекула. Определим формулу p по формуле (D3.19). Тогда

$$\rho(\Theta) \gamma^{1/3} \int_{B(\Theta)} |1 - \sigma^{2\delta}| |p|^2 \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) (\delta \rho^{-1/2} \gamma^{-2n} + \rho^{-3/2} \gamma^{-2n}),$$

$$\int_T |1 - \sigma^{2\delta}| |p|^2 \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) (\delta \rho^{-1/2} \gamma^{-2n} + \rho^{-3/2} \gamma^{-2n}).$$

Здесь функция $\zeta(\cdot) \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от элемента $c \in \mathbb{C}^\delta$ и числа $\delta \in [0, \delta_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой (D3.16) вместе с леммой D1.2. Из этой леммы следует, что если точка $y \in \mathbb{R}^3$ такова, что $|y| \leq 4d_*^2$, то

$$|1 - \sigma^{2\delta}(y)| \leq \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) \delta^{7/8}. \quad (\text{D3.25})$$

Третьим шагом в доказательстве предложения D3.2 является оценка величины $z(T)$. Для этого требуется

Л е м м а D3.6. При тех же предположениях, что и в предложении D3.2, справедливо неравенство

$$z(T) > \int_T d^3 y (|q|^2 - |p|^2 + 2\delta \sigma^{-2} |y|^2 |p|^2) - \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) [\rho^{-3/2} \gamma^{-2n} + \delta \rho^{-1/2} \gamma^{-2n}],$$

где функция $\zeta(\cdot) \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от элемента $s \in \mathbb{C}^{\delta}$ и точки $\delta \in [0, \delta_1)$.

Доказательство. Данная лемма является непосредственным следствием формул (D3.17, 18, 21).

Четвертый шаг доказательства заключается в выделении вклада в $\mathfrak{z}(T)$ от каждой ν -молекулы $\odot$.

Лемма D3.7. При тех же предположениях, что и в предложении D3.2, пусть $\odot$ есть ν -молекула. Определим формы $p(\odot)$, $q(\odot)$ как в (D3.22). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(\odot)} d^3y (|q(\odot)|^2 - |p(\odot)|^2) = \\ = -p(\odot) \nu^{1/3} \int_{\partial B(\odot)} *n (|q(\odot)|^2 - |p(\odot)|^2 + 2(p_n(\odot)^2 - q_n(\odot)^2)). \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (D3.24), где $\odot = \Pi$. Свернем ее с функцией $y - x(\odot)$ и затем проинтегрируем по множеству $\mathbb{R}^3 \setminus B(\odot)$. Проделаем это для формы $\nu = q$, а затем для формы $\nu = p$ и вычтем одно уравнение из другого. Остается проинтегрировать полученное равенство по частям.

Пятый и решающий шаг в доказательстве предложения D3.2 заключается в вычислении энергии взаимодействия между ν -молекулами. Ответ дает следующая

Лемма D3.8. При тех же предположениях, что и в предложении D3.2, пусть $\odot$, Π — различные ν -молекулы. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (q(\odot), q(\Pi)) &= 4\pi \sum' \frac{\alpha_j \alpha_k}{|x_j - x_k|}, \\ \int_{\mathbb{R}^3} (p(\odot), p(\Pi)) &= 4\pi \sum' \frac{n_j n_k}{|x_j - x_k|}, \end{aligned}$$

где $\sum'$ обозначает суммирование по всем точкам $x_j \in \odot$ и $x_k \in \Pi$.

Доказательство. Нужно воспользоваться определяющими уравнениями (D3.16, 22) и тем фактом, что $4\pi|x-y|^{-1}$ является функцией Грина для оператора d^*d .

Из лемм D3.3 - 8 следует неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \{ |g|^2 - |f|^2 + 2\delta\sigma^{-2} |y|^2 |f|^2 \} &\geq 4\pi \sum' \frac{(\alpha_j \alpha_k - n_j n_k)}{|x_j - x_k|} + \\ &+ 4\pi \sum_{\odot} \sum_{\odot}' \frac{(\alpha_j \alpha_k - n_j n_k)}{|x_j - x_k|^3} (x_j - x(\odot), x_j - x_k) + \\ &+ \delta \sum_{\odot} \left\{ \int_{B(\odot)} d^3 y \sigma^{-2}(y, x(\odot)) |f|^2 \right\} - \\ &- \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) (\delta \rho^{-1/2} \tau^{-2n} + \rho^{-3/2} \tau^{-2n}). \quad (D3.26) \end{aligned}$$

Здесь $\sum'$ обозначает суммирование по всем точкам x_j, x_k , лежащим в разных τ -молекулах, $\sum_{\odot}$ обозначает суммирование по всем τ -молекулам, а $\sum_{\odot}'$ - суммирование по всем точкам $x_j \in \odot$ и $x_k \in \Lambda \setminus \odot$.

Для дальнейшего продвижения требуется

Лемма D3.9. При тех же предположениях, что и в предложении D3.2, пусть $\odot$ есть τ -молекула. Тогда

$$(1) \quad \int_{B(\odot)} d^3 y \sigma^{-2}(y, x(\odot)) |f|^2 \geq -\zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) (\rho^{-1/2} \tau^{-2n} + \delta \rho^{-1/4} \tau^{-2n}).$$

Если $|x(\odot)| > \rho(\odot) \tau^{1/3}$, то

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{B(\odot)} d^3 y \sigma^{-2}(y, x(\odot)) |f|^2 &\geq \frac{1}{8} \kappa_0(\mathcal{U}^\delta(c)) - \\ &- \zeta(\mathcal{U}^\delta(c)) (\rho^{-1/2} \tau^{-2n} + \delta \rho^{-1/4} \tau^{-2n}). \end{aligned}$$

Здесь функция $\zeta(\cdot) \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ не зависит от элемента $c \in \mathbb{C}^\delta$ и числа $\delta \in [0, \delta_1)$. Функция κ_0 определена в лемме C2.1.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (1), заметим, что, согласно леммам C4.1 и D1.2 и формулам (D3.10, 13, 25),

$$\int_{B(\Theta)} d^3y \sigma^{-2}(y, x(\Theta)) |f|^2 \geq |x(\Theta)|^2 \int_{B(\Theta)} d^3y \sigma^{-2} |f|^2 - \\ - \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) (\rho^{-1/2} \tau^{-2n} + \delta \rho^{-1/4} \tau^{-2n}). \quad (D3.27)$$

Для доказательства утверждения (2) заметим, что если $|x(\Theta)| \geq \rho(\Theta) \tau^{1/3}$, то

$$\int_{B(\Theta)} \sigma^{-2} |f|^2 \geq \frac{1}{2} \sigma^{-2}(x(\Theta)) \int_{B(\Theta)} d^3y |f|^2.$$

Кроме того, из следствия D1.4 с формулами (D3.17, 18, 21) и леммами D2.2 и D2.4 вытекает, что

$$\frac{1}{2} \int_{B(\Theta)} d^3y |f|^2 \geq \frac{1}{4} \int_{B(\Theta)} d^3y (|f|^2 + |g|^2) - \delta \int_{B(\Theta)} d^3y \sigma^{-2}(y, x(\Theta)) |f|^2 - \\ - \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \rho^{-1/2} \tau^{-2n}.$$

Тем самым, поскольку $|x(\Theta)| \geq 1$, имеем

$$\int_{B(\Theta)} d^3y \sigma^{-2}(y, x(\Theta)) |f|^2 \geq \frac{1}{8} \int_{B(\Theta)} d^3y (|f|^2 + |g|^2) - \\ - \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \rho^{-1/2} \tau^{-2n}.$$

Ввиду того что шар $B(\Theta)$ содержит по крайней мере одну точку $x_j \in \Lambda$, из последнего неравенства следует утверждение (2).

Доказательство предложения D3.2 (окончание). Вследствие формулы (D3.13) существует по крайней мере одна τ -молекула Θ , для которой $|x(\Theta)| > \rho(\Theta) \tau^{1/3}$.

Из (D3.26) и (D3.27) вместе с леммой D3.9 вытекает неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3y \{ |g|^2 - |f|^2 + 2\delta\sigma^{-2} |y|^2 |f|^2 \} > \\ > 4\pi \sum' \frac{(\alpha_j \alpha_k - n_j n_k)}{|x_j - x_k|} + 4\pi \sum_{\odot} \sum_{\odot} \frac{(\alpha_j \alpha_k - n_j n_k)}{|x_j - x_k|^3} (x_j - x(\odot), x_j - x_k) + \\ + \delta x_0 (\mathcal{U}^\delta(c)) - \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) (\delta \rho^{-1/2} \tau^{-2n} + \rho^{-3/2} \tau^{-2n}). \quad (D3.28)$$

Для того чтобы получить наконец предложение D3.2, необходимо сгруппировать суммы в формуле (D3.28) в суммы по τ -кластерам. Пусть λ есть τ -кластер и $x_j \in \lambda$. Тогда

$$|x_j - X(\lambda)| < \rho^{1/2} \tau. \quad (D3.29)$$

Если другой τ -кластер μ принадлежит τ -молекуле, не содержащей кластера λ , и $x_k \in \mu$, то

$$|x_j - x_k| - |X(\lambda) - X(\mu)| < 2\rho^{1/2} \tau. \quad (D3.30)$$

Перепиcывая суммы в выражении (D3.28) в виде двойных сумм: вначале по τ -кластерам, а затем по точкам в τ -кластерах, с учетом оценки (D3.30) получаем

$$\sum' \frac{(\alpha_j \alpha_k - n_j n_k)}{|x_j - x_k|} \geq \sum'' \frac{\alpha(\lambda) \alpha(\mu) - n(\lambda) n(\mu)}{|X(\lambda) - X(\mu)|} - \\ - \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) \rho^{-3/2} \tau^{-2n}. \quad (D3.31)$$

Здесь $\sum''$ обозначает суммирование по парам (λ, μ) τ -кластеров, лежащих в разных τ -молекулах. Кроме того, справедлива оценка

$$\sum_{\odot} \sum_{\odot}' \frac{(\alpha_j \alpha_k - n_j n_k)}{|x_j - x_k|^3} (x_j - x(\odot), x_j - x_k) \geq \\ \geq -\tau^{1/3} \sum'' \frac{(\alpha(\lambda) \alpha(\mu) - n(\lambda) n(\mu))}{|X(\lambda) - X(\mu)|} - \\ - \zeta_1(\mathcal{U}^\delta(c)) (\rho^{-3/2} \tau^{-2n} + \delta \rho^{-1/2} \tau^{-2n}). \quad (D3.32)$$

Здесь было использовано утверждение (2) леммы D2.2. Предложение D3.2 является прямым следствием формул (D3.28, 31 - 32).

D4. Сходимость минимаксной последовательности для функционала $\mathcal{U}$

Априорная оценка, полученная в предложении D1.1, является ключом к доказательству предложения C1.1, которое приводится в этом параграфе.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения C1.1. Допустим, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} > 4\pi|n| + \varepsilon$. Из леммы B1.2 следует, что $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}^{\delta} \geq \mathcal{U}_{\mathcal{F}} > 4\pi|n| + \varepsilon$. Далее, по предложению D1.1 если $\delta \in (0, \delta_1)$, то $\rho(c^{\delta}(\mathcal{F}))$ из формулы (D1.1) ограничено независимо от $\delta \in [0, \delta_1)$. Лемма D1.2 позволяет получить не зависящую от δ оценку для $\alpha_*(c^{\delta}(\mathcal{F}))$ из формулы (D1.1). Далее, по леммам C2.1, C3.1 и C4.1 найдется константа $\varkappa = \varkappa(\mathcal{U}_{\mathcal{F}} - 4\pi|n|) < \infty$ о том свойством, что кривизны элемента $c^{\delta}(\mathcal{F}) = (A, \Phi)$ удовлетворяют при $\delta \in [0, \delta_1)$ оценке

$$(|F_A| + |D_A \Phi|)(x) \leq \varkappa(1 + |x|)^{-2+1/16}. \quad (D4.1)$$

Из формулы (D4.1) следует, что числа $\{\|\nabla \mathcal{U}_c\|_* : c = c^{\delta}(\mathcal{F}) \text{ и } \delta \in (0, \delta_1)\}$ равномерно стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Это позволяет воспользоваться леммой B3.2 и построить подпоследовательность $\{c_i = c^{\delta_i}(\mathcal{F}) : \delta_i < i^{-1}\} \subset \{c^{\delta}(\mathcal{F})\}$ и последовательность $\{g_i\} \subset \mathcal{G}$, такие, что последовательность $(A_i, \Phi_i) = g_i c_i$ сильно сходится в $L^2_{1;10c}(T^* \times \mathfrak{su}(2)) \times L^2_{2;10c}(\text{Ad } P)$ к $c = (A, \Phi) \in L^2_{1;10c}(T^* \times \mathfrak{su}(2)) \times L^2_{2;10c}(\text{Ad } P)$, где $c \in \mathcal{C}$ является критической точкой функционала $\mathcal{U}$. Однако из (D4.1) и леммы A4.6 из работы [9] видно, что последовательность кривизн $\{(F_{A_i}, D_{A_i} \Phi_i)\}$ сильно сходится в L^2 к $(F_A, D_A \Phi)$. Это означает, что последовательность $\{g_i c_i\}$ сходится к c в топологии $L^2_{1;10c}$ на $\mathcal{C}$. Указанная $L^2_{1;10c}$ -сходимость вместе с леммой B1.2 гарантирует, что $\mathcal{U}(c) = \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$.

Можно предполагать далее, что последовательность $\{g_i c_i\}$ сходится к c в топологии C^{∞} на $\mathcal{C}$. Для этого воспользуемся следующим рассуждением. Поскольку множество $\{\mathcal{U}(c_i)\}$ ограничено, пространство $\mathbb{R}^3$ может быть покрыто равномерной сеткой открытых шаров $\{B_{\alpha}\}$ фиксированного радиуса, таких, что во всяком шаре B_{α} для каждого числа i

найдется преобразование $h_{\alpha i} \in C^\infty(B_\alpha; SU(2))$, которое задает связность A_i в калибровке Ходжа в B_α . То есть, если положить $(A_{\alpha i}, \Phi_{\alpha i}) = h_{\alpha i}(A_i, \Phi_i)$, то

$$d^* A_{\alpha i} = 0 \text{ в } B_\alpha \text{ и } (n_\alpha, A_{\alpha i}) = 0 \text{ на } \partial B_\alpha, \quad (D4.2)$$

где через n_α обозначена единичная нормаль к B_α . Далее,

$$\|A_{\alpha i}\|_{2,1;B_\alpha} \leq \varkappa \|F_{A_i}\|_{2;B_\alpha}, \quad (D4.3)$$

где константа $\varkappa$ не зависит от i и α . Этот факт является прямым следствием теоремы Уленбек о компактности [19]. Указанные теоремы позволяют также построить для каждого α преобразование $h_\alpha \in C^\infty(B_\alpha; SU(2))$, такое, что в шаре B_α пара $h_\alpha(A, \Phi) = (A_\alpha, \Phi_\alpha)$ также удовлетворяет условиям (D4.2, 3). Так как последовательность $\{(A_i, \Phi_i)\}$ сильно сходится в $L^2_{1,loc}$ к паре (A, Φ) , то по теореме о неявной функции из [19] можно без потери общности предполагать, что в каждом шаре B_α последовательность $\{(A_{\alpha i}, \Phi_{\alpha i})\}$ сильно сходится в L^2_1 к (A_α, Φ_α) . Преимущество калибровки Ходжа, задаваемой формулой (D4.2), в том, что в каждом шаре B_α для всякого i система (CI.1) является системой эллиптических уравнений для пары $(A_{\alpha i}, \Phi_{\alpha i})$. Эти уравнения зависят от i , но применимы теоремы бутотрапа из [26, гл. 6], и можно убедиться, что в каждом шаре B_α пара $(A_{\alpha i}, \Phi_{\alpha i})$ сходится к (A_α, Φ_α) в смысле C^∞ . Отсюда следует, что последовательность функций перехода $\{g_{\alpha\beta i} = h_{\alpha i} h_{\beta i}^{-1}\} \subset C^\infty(B_\alpha \cap B_\beta; SU(2))$ сходится в C^∞ к $g_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$. Теперь с помощью обобщения конструкции из [19], предложенного в добавлении к [22], можно показать, что при каждом i существует C^∞ -изоморфизм расслоений, задаваемый преобразованиями $\{\eta_{\alpha i}: B_\alpha \rightarrow SU(2)\}$ и такой, что: (1) для каждого i и каждой пары (α, β) имеем $\eta_{\alpha i} g_{\alpha\beta i} \eta_{\beta i}^{-1} = g_{\alpha\beta}$ на $U_\alpha \cap U_\beta$; (2) при каждом фиксированном α последовательность $\{\eta_{\alpha i}\} \subset C^\infty(B_\alpha)$ сходится. Определим теперь для каждого i сечение $g'_i \in \mathcal{G}$, полагая $g'_i(y) = (h_\alpha^{-1} \eta_{\alpha i} h_{\alpha i} g_i)(y)$, где $y \in B_\alpha$. Суммируя предыдущие рассуждения, можно утверждать, что каждое сечение g'_i корректно определено и последовательность $\{g'_i c_i\}$ сильно сходится к c в $\mathcal{G}$.

Пусть теперь $\Pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}$ — естественная проекция. Тогда последовательность $\{\Pi(g'_i c_i)\}$ сильно сходится к элементу $\Pi(c)$ в пространстве $\mathcal{B}$. Для каждого i существует элемент $q_i \in SU(2) \subset \mathcal{G}$, такой, что $q_i \Pi(g'_i c_i) = c_i$. Поскольку группа $SU(2)$ компактна, последовательность $\{q_i\}$ содержит подпоследовательность $\{q_{i_j}\}$, сходящуюся в группе $SU(2)$ к элементу $q \in SU(2)$. Тогда соответствующая подпоследовательность $\{c_{i_j}\}$ сходится в пространстве $\mathcal{B}$ к элементу $q^{-1} \Pi(c) \equiv c(\mathcal{F})$. Этим завершается доказательство предложения Е1.1.

Е1. Окрестность пространства модулей

Нижняя грань функционала $\mathcal{U}$ на пространстве $\hat{\mathcal{B}}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, равна $4\pi|n|$, причем $\mathcal{U}(c) = 4\pi|n|$ тогда и только тогда, когда $c \in \hat{\mathcal{M}}_n = \{(A, \Phi) \in \hat{\mathcal{B}}_n: F_A = \text{sign}(n) * D_A \Phi\}$. Целью этого параграфа является доказательство следующего предложения.

Предложение Е1.1. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существуют $\varepsilon > 0$ и гомотопия $m: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{B}}_n$ со следующими свойствами:

(1) для всех значений $t \in [0, 1]$ сужение гомотопии $m(t, \cdot)$ на пространство $\hat{\mathcal{M}}_n$ совпадает с тождественным отображением;

(2) гомотопия $m(1, \cdot)$ переводит пространство $\hat{\mathcal{B}}_n \cap \mathcal{U}^{-1}([4\pi|n|, 4\pi|n| + \varepsilon))$ в $\hat{\mathcal{M}}_n$.

Следствие Е1.2. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что если $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантное множество компактных подмножеств множества $\hat{\mathcal{B}}_n$, для которого $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} < 4\pi|n| + \varepsilon$, то обязательно $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} = 4\pi|n|$ и существует такое $F \in \mathcal{F}$, что $F \subset \hat{\mathcal{M}}_n$.

Доказательство предложения Е1.1 близко к доказательству существования для $\hat{\mathcal{M}}_n$ данному автором в книге [11]. Аналог предложения Е1.1 для функционала Янга — Миллса на сфере S^4 доказан в [22]. Приводимое здесь доказательство построено по образцу доказательства из [22]. Мы ограничиваемся случаем $n \geq 0$, поскольку случай $n < 0$ получается из него изменением ориентации пространства $\mathbb{R}^3$.

Пусть $c \in \hat{\mathcal{B}}_n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Так как (см. [12, 13])

$$\mathcal{U}(c) = \frac{1}{2} \|*F_A - D_A \Phi\|_2^2 + 4\pi n,$$

близость элемента c к множеству $\hat{\mathcal{M}}_n$ можно оценить с помощью L^2 -нормы оечения

$$G(c) = (*F_A - D_A \Phi, 0) \in L^2(Q). \quad (\text{Е1.1})$$

Для $c \in \mathcal{C}$ определим оечение $G(c) \in L^2(Q)$ также по формуле (Е1.1).

Предложение Е1.1 доказывается в два этапа. Первый шаг состоит

Л е м м а Е1.3. Для заданного $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ существуют число $\epsilon > 0$, непрерывная гомотопия $m_1: [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{B}}_n$ и непрерывное отображение $R: \hat{\mathcal{B}}_n \rightarrow [0, \infty)$, такие, что

(1) если $c \in \hat{\mathcal{M}}_n$, то $m_1(t, c) = c$ при всех $t \in [0, 1]$;

(2) если $c \in \hat{\mathcal{B}}_n$ и $\mathcal{U}(c) < 4\pi n + \epsilon$, то оечение $G(m_1(1, c))$ имеет компактный носитель, оодержащийся в $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| < R(c)\}$, и $\|G(m_1(1, c))\|_2 \leq \|G(c)\|_2$.

Для описания второго шага доказательства введем при каждом $n \in \mathbb{Z}$ пространство $\mathcal{C}_n = \{c \in \hat{\mathcal{B}}_n: \|G\|_{6/5} < \infty\}$. Наделим $\mathcal{C}_n$ топологией с помощью вложения $\mathcal{C}_n \subset \hat{\mathcal{B}}_n \times [0, \infty)$, которое переводит элемент c в пару $(c, \|G(c)\|_{6/5})$. Положим $\hat{\mathcal{C}}_n = \mathcal{C}_n \cap \hat{\mathcal{B}}_n$.

Л е м м а Е1.4. Пусть $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Существуют число $\epsilon > 0$ и гомотопия $m_2: [0, 1] \times \hat{\mathcal{C}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_n$, такие, что

(1) если $c \in \hat{\mathcal{M}}_n$, то $m_2(t, c) = c$ при всех $t \in [0, 1]$;

(2) если $c \in \hat{\mathcal{C}}_n$ и $\mathcal{U}(c) < 4\pi n + \epsilon$, то как функция параметра $t \in [0, 1]$ оечение $G(m_2(t, c))$ равно $(1-t)G(c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения Е1.1 на основе лемм Е1.3 и Е1.4. Пусть ϵ такое, как в лемме Е1.3. Отметим, что гомотопия $m_1(1, \cdot)$ непрерывно отображает множество $\{c \in \hat{\mathcal{B}}_n: \mathcal{U}(c) < 4\pi n + \epsilon\}$ в $\{c \in \hat{\mathcal{C}}_n: \mathcal{U}(c) < 4\pi n + \epsilon\}$.

Положим δ равным половине наименьшего из чисел ε , заданных в леммах Е1.3 и Е1.4. Определим гомотопию m следующим образом. Положим $\alpha(c) = \beta(\delta^{-1}(\mathcal{U}(c) - 4\pi n))$, где функция $\beta \in C_0^\infty([0, \infty); [0, 1])$ тождественно равна 1 при $t \leq 1/2$ и нулю при $t \geq 3/4$. Пусть $(t, c) \in [0, 1] \times \hat{\mathcal{B}}_n$. Положим

$$m(t, c) = \begin{cases} m_1(2t, c) & \text{при } t \in [0, 1/2], \\ m_2(\alpha(c)(2t-1), m_1(1, c)) & \text{при } t \in [1/2, 1] \text{ и } \alpha(c) > 0, \\ m_1(1, c) & \text{при } t \in [1/2, 1] \text{ и } \alpha(c) = 0. \end{cases}$$

Доказательства лемм Е1.3 и Е1.4 занимают оставшуюся часть параграфа. Приведем сначала некоторые дополнительные факты из работы [8]. С каждым элементом $c \in \mathcal{C}$ связаны дифференциальные операторы первого порядка $\mathcal{D}_c, \mathcal{D}_c^*: \Gamma_0(Q) \rightarrow \Gamma_0(Q)$, переводящие пару $\psi = (\alpha, \varphi) \in \Gamma_0(Q)$ в сечения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c \psi &= (*D_A \alpha + [\Phi, \alpha] - D_A \varphi, D_A^* \alpha + [\Phi, \varphi]), \\ \mathcal{D}_c^* \psi &= (*D_A \alpha - [\Phi, \alpha] - D_A \varphi, *D_A^* \alpha - [\Phi, \varphi]). \end{aligned} \quad (\text{Е1.2})$$

Эти операторы формально сопряжены друг с другом в L^2 и относятся к тому же типу, что и операторы из §С2 работы [9]. Поставим в соответствие каждому элементу $c \in \mathcal{C}$ гильбертово пространство $H_c(Q)$, как в §В6 работы [9]. Это пополнение пространства $\Gamma_0(Q)$ по норме $\|\cdot\|_c$, определяемой внутренним произведением $\langle \psi, \eta \rangle_c = \langle \nabla_A \psi, \nabla_A \eta \rangle_2 + \langle [\Phi, \psi], [\Phi, \eta] \rangle_2$. Тогда, согласно лемме С2.1 из [9], оба оператора $\mathcal{D}_c$ и $\mathcal{D}_c^*$ продолжаются до ограниченных фредгольмовых операторов из $H_c(Q)$ в $L^2(Q)$. Фактически справедливо более общее утверждение. А именно, пространства $H(Q) = \{H_c(Q) : c \in \mathcal{B}\}$ и $L(Q) = \{(c, \varphi) \in \mathcal{B} \times L^2(Q)\}$ наделяются структурами C^0 -векторных расслоений согласно предложению В6.3 из [9]. Из леммы С2.2 работы [9] следует, что сопоставление элементу $c \in \mathcal{B}$ операторов $\mathcal{D}_c$ и $\mathcal{D}_c^*$ задает непрерывные сечения $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ расслоения $\text{Hom}(H(Q), L(Q))$ над $\mathcal{B}$. Пусть $\overline{\mathcal{D}}_c$ и $\overline{\mathcal{D}}_c^*$ обозначают соответственно операторы, послойно сопряженные к $\mathcal{D}_c$ и $\mathcal{D}_c^*$. Они задают непрерывные сечения $\overline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{D}}^*$ расслоения $\text{Hom}(L(Q), H(Q))$ над $\mathcal{B}$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ определим при каждом $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ пространство $\mathcal{B}_{n,\varepsilon} = \{b \in \mathcal{B}_n: \mathcal{U}(b) < 4\pi n + \varepsilon\}$. Аналогично определим пространство $\widehat{\mathcal{B}}_{n,\varepsilon}$.

Л е м м а Е1.5. Для каждого $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ существуют константы $\varepsilon, \mu > 0$ и функция $\nu \in C^0(\mathcal{B}_{n,\varepsilon}; (0, 1))$, такие, что для любого $c \in \mathcal{B}_{n,\varepsilon}$

$$\|\mathcal{D}_c^*\| \geq \mu \text{ и } \|\overline{\mathcal{D}}_c\| \geq \nu(c).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 9.1 работы [8] векторное пространство $\ker \overline{\mathcal{D}}_c$ изоморфно $\ker \mathcal{D}_c^*$. Из предложения С2.3 работы [9] следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что если $c \in \mathcal{B}_{n,\varepsilon}$, то $\ker \mathcal{D}_c^* = \emptyset$. Существование константы μ следует из леммы С2.10 и формулы Вейтценбёка для $\mathcal{D}_c^*$ (см. [8, (6.13)]). Существование функции $\nu(c) > 0$, такой, что $\|\overline{\mathcal{D}}_c\| > \nu(c)$, следует из того, что образ оператора $\overline{\mathcal{D}}_c$ замкнут в $H_c(Q)$ (см. [27, теорема IV.5.2]). Из непрерывности отображения, сопоставляющего элементу $c \in \mathcal{B}$ оператор $\overline{\mathcal{D}}_c$, следует, что функцию $\nu(\cdot)$ можно выбрать непрерывной на $\mathcal{B}_{n,\varepsilon}$.

Для каждого $c \in \mathcal{B}$ введем пространство $\Gamma^c = H_c(Q) \cap \Gamma(Q)$, наделенное индуцированной топологией. Оно является пространством Фреше.

Л е м м а Е1.6. Фиксируем $c \in \mathcal{B}$. Сопоставление сечению $\varphi \in \Gamma^c$ элемента $c + \varphi$ задает непрерывное отображение из Γ^c в $\mathcal{C}$. Сопоставление паре $(\varphi, \eta) \in \Gamma^c \times \Gamma^c$ сечения $\mathcal{D}_{c+\varphi}^* \eta$ или $\mathcal{D}_{c+\varphi} \eta \in L^2(Q) \cap \Gamma^c$ задает гладкое отображение; сопоставление паре $(\varphi, \eta) \in \Gamma^c \times (L^2(Q) \cap \Gamma(Q))$ сечения $\mathcal{D}_{c+\varphi}^* \eta \in H_c(Q)^* \cap \Gamma(Q)$ и сечения $\mathcal{D}_{c+\varphi} \eta \in \Gamma^c$ задает гладкие отображения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы следует из предложения А4.3. Второе можно получить, воспользовавшись леммой В6.4 работы [9]. В третьем утверждении говорится о том, что отображение, переводящее пару $(\varphi, \eta) \in \Gamma^c \times (L^2(Q) \cap \Gamma(Q))$ в линейный функционал $\langle \eta, \mathcal{D}_{c+\varphi}^*(\cdot) \rangle_2: H_c(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, принадлежит классу C^∞ . Это вытекает из леммы В6.4 работы [9], в которой утверждается, что отображение, сопоставляющее паре $(\sigma, \tau) \in {}_2 H_c(\text{Ad } P)$ линейный функционал $\langle [\sigma, \tau], \cdot \rangle_2$:

$\Gamma_0(\text{Ad } P) \rightarrow \mathbb{R}$, может быть продолжено до гладкого отображения пространства $\times_2 H_c(\text{Ad } P)$ в $H_c(\text{Ad } P)^*$. Для доказательства последнего утверждения определим отображение из $\Gamma^c \times \Gamma^c \times (L^2(Q) \cap \Gamma(Q))$ в $H_c(Q)^* \cap \Gamma(Q)$, сопоставляя элементу (ψ, u, η) линейный функционал $\langle u, \cdot \rangle_{c+\psi} - \langle \eta, \mathcal{D}_{c+\psi}(\cdot) \rangle_2$. Это задает гладкое отображение в пространство $H_c(Q)^*$, и требуемое утверждение следует из теоремы о неявной функции.

Для $c \in \mathcal{C}$ и $\psi = (\alpha, \varphi) \in \Gamma^c$ имеем $G(c+\psi) = G(c) + \text{Im } \mathcal{D}_c \psi + \frac{1}{2} \{\psi, \psi\}$, где

$$\{\psi, \psi\} = (*[\alpha, \alpha] - 2[\alpha, \varphi], 0) \in \Gamma(Q), \quad (\text{Е1.3})$$

$$\text{Im}(\alpha, \varphi) = (\alpha, 0) \in \Gamma(Q). \quad (\text{Е1.4})$$

Из леммы В6.4 работы [9] следует, что сопоставление сечению $\psi \in \Gamma^c$ сечения $\{\psi, \psi\}$ и функционала $\langle \{\psi, \psi\}, \cdot \rangle_2$ задает гладкие отображения из Γ^c в $L^2(Q) \cap \Gamma(Q)$ и в $H_c(Q)^* \cap \Gamma(Q)$ соответственно. В частности, это означает, что сопоставление сечению $\psi \in \Gamma^c$ сечения $G(c+\psi) \in L^2(Q) \cap \Gamma(Q)$ задает гладкое отображение.

Пусть ε такое же, как в лемме Е1.5, и $c \in \mathcal{B}_{n, \varepsilon}$. Определим множество

$$\bar{\Gamma}^c = \{\psi \in \Gamma^c: \mathcal{U}(c+\psi) < 4\pi n + \varepsilon\}.$$

По лемме Е1.6 множество $\bar{\Gamma}^c$ открыто в Γ^c .

Л е м м а Е1.7. Пусть ε и $\nu \in C^0(\mathcal{B}_{n, \varepsilon}; (0, 1))$ такие же, как в лемме Е1.5. Пусть $\Pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ — естественная проекция. Существует непрерывное отображение $\delta: \mathcal{B}_{n, \varepsilon/2} \rightarrow (0, \infty)$ со следующими свойствами. Для каждого $c \in \mathcal{B}_{n, \varepsilon/2}$ зададим множество $\mathcal{D}'_c = \{u \in L^2(Q) \cap \Gamma(Q): \|u\|_2 < \delta(c)\}$. Тогда для каждого $c \in \mathcal{B}_{n, \varepsilon/2}$ найдутся открытая окрестность $\mathcal{D}_c$ нуля в множестве $\bar{\Gamma}^c$ и единственное гладкое отображение $\tau_c: \mathcal{D}_c \times \mathcal{D}'_c \rightarrow L^2(Q) \cap \Gamma(Q)$, переводящее точку $(0, 0)$ в 0 и удовлетворяющее на каждом элементе $(\psi, u) \in \mathcal{D}_c \times \mathcal{D}'_c$ следующим условиям:

$$(1) \quad G(c+\psi + \bar{\mathcal{D}}_{c+\psi} \tau_c(\psi, u)) = G(c+\psi) + u;$$

(2) $\|\tau_c(\psi, u)\|_2 \leq \varkappa \nu(\Pi(c + \psi))^{-2} \|u\|_2$, где число $\varkappa < \infty$ не зависит от c, ψ и u .

Доказательство. Для каждого сечения $\psi \in \bar{\Gamma}^c$ рассмотрим отображение $T(\psi, \cdot)$, переводящее сечение $\eta \in L^2(Q)$ в сечение $T(\psi, \eta) = \mathfrak{D}_{c+\psi} \bar{\mathfrak{D}}_{c+\psi} \eta + \frac{1}{2} \{\bar{\mathfrak{D}}_{c+\psi} \eta, \bar{\mathfrak{D}}_{c+\psi} \eta\}$, как отображение пространства $L^2(Q)$ в себя. Отметим, что отображение $T(\psi, \cdot)$ принадлежит классу C^∞ , $T(\psi, 0) = 0$, а дифференциал отображения $T(\psi, \cdot)$ в точке $0 \in L^2(Q)$ переводит $\eta \in L^2(Q)$ в $\mathfrak{D}_{c+\psi} \bar{\mathfrak{D}}_{c+\psi} \eta$. По лемме Е1.5 это дифференцирование сюръективно, поэтому по теореме о неявной функции существует единственное гладкое обратное отображение $T^{-1}(\psi, \cdot)$ к $T(\psi, \cdot)$, отображающее окрестность точки $0 \in L^2(Q)$ в $L^2(Q)$. Из леммы В6.4 работы [9] следует, что

$$\|T(\psi, \eta) - \mathfrak{D}_{c+\psi} \bar{\mathfrak{D}}_{c+\psi} \eta\|_2 \leq \varkappa \|\eta\|_2^2, \quad (\text{Е1.5})$$

где константа $\varkappa$ не зависит от $c \in \mathfrak{B}_{n, \varepsilon/2}$, а $\psi \in \bar{\Gamma}^c$. Поскольку функция $\nu(\cdot)$ из леммы Е1.5 непрерывна на $\mathfrak{B}_c$, из (Е1.5) следует, что $T^{-1}(\psi, \cdot)$ является гладким отображением из $\mathfrak{D}_{c, \psi} = \{u \in L^2(Q) : \|u\|_2 < \delta(\Pi(c + \psi))\}$ в $L^2(Q)$, где функция $\delta: \mathfrak{B}_{n, \varepsilon/2} \rightarrow (0, \infty)$ непрерывна. Заменяя δ на $\delta/2$, сразу получаем, что для допустимых пар (c, ψ) и сечения $u \in \mathfrak{D}_{c, \psi}$ справедливо неравенство

$$\|T^{-1}(\psi, u)\|_2 \leq \varkappa \nu(\Pi(c + \psi))^{-2} \|u\|_2. \quad (\text{Е1.6})$$

Кроме того, если некоторое сечение η удовлетворяет равенству $T(\psi, \eta) = u$ и условию (Е1.6) (в котором $T^{-1}(\psi, u)$ заменено на η), то $\eta = T^{-1}(\psi, u)$. Далее, учитывая, что сопоставление паре $(\psi, \eta) \in \bar{\Gamma}^c \times (L^2(Q) \cap \Gamma(Q))$ сечения $T(\psi, \eta) \in L^2(Q) \cap \Gamma(Q)$ задает C^∞ -отображение с равномерными оценками, и применяя теорему Гамильтона об обратной функции [28], получим, что для каждого элемента $c \in \mathfrak{B}_{n, \varepsilon/2}$ существует окрестность $\mathfrak{D}_c \subset \bar{\Gamma}^c$ точки $0 \in \bar{\Gamma}^c$, такая, что $T^{-1}(\psi, \cdot)$ есть гладкое отображение на $\mathfrak{D}_c$ для любого $\psi \in \mathfrak{D}_c$. Положим $\mathfrak{D}'_c = \mathfrak{D}_c \cap \Gamma(Q)$. Тогда из той же теоремы об обратной функции следует, кроме того, что сопоставление паре $(\psi, u) \in \mathfrak{D}_c \times \mathfrak{D}'_c$ отображения $\tau_c(\psi, u) =$

$\equiv T^{-1}(\varphi, u)$ задает, как и требовалось, гладкое отображение в пространство $L^2(Q) \cap \Gamma(Q)$.

Применим лемму Е1.7 к конкретному сечению $u \in L^2(Q) \cap \Gamma(Q)$. Для этого понадобится

Л е м м а Е1.8. Пусть число ε такое же, как в лемме Е1.5, и $\delta \in C^0(\mathfrak{B}_{n,\varepsilon}; (0, 1))$. Тогда существует функция $\rho \in C^0(\mathfrak{B}_{n,\varepsilon}; (0, 1))$, такая, что для всех $c \in \mathfrak{B}_{n,\varepsilon}$ и всех $\eta > \rho(c)$

$$\|(1 - \beta_\eta)G(c)\|_2 < \delta(c), \quad (\text{Е1.7})$$

где функция $\beta_\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ была определена в §А3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если неравенство (Е1.7) справедливо в некоторой точке $c \in \mathfrak{B}$ при некотором $\rho < \infty$, то оно справедливо и в открытой окрестности $\mathcal{L}(c)$ элемента c в пространстве $\mathfrak{B}_{n,\varepsilon}$ при том же значении ρ . Поскольку $\mathfrak{B}_{n,\varepsilon}$ паракомпактно (предложение В1.2 работы [9]), существует локально конечное открытое покрытие $\{\mathcal{L}(c_i): i \in \Lambda\}$ вместе с подчиненным ему разбиением единицы $\{\alpha_i: i \in \Lambda\}$, такое, что если $c \in \mathcal{L}(c_i)$, то условие (Е1.7) выполняется для всех значений $\rho_i < \eta < \infty$. Положим $\rho(c) = 2 \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i(c) \rho_i$. Тогда $\rho(c) > 2 \min\{\rho_i: \alpha_i(c) > 0\}$, и условие (Е1.7) выполнено.

Пусть теперь функция $\delta \in C^0(\mathfrak{B}_{n,\varepsilon/2}; (0, 1))$ задана как в лемме Е1.7, а функция $\rho \in C^0(\mathfrak{B}_{n,\varepsilon/2}; [0, \infty))$ построена по $\delta/2$, как описано в лемме Е1.8. Тогда с помощью леммы Е1.7 для каждого $c \in \mathfrak{B}_{n,\varepsilon/2}$ можно построить сечение

$$\eta(c) = \tau_c(0, (1 - \beta_{\rho(c)})G(c)) \in L^2(Q) \cap \Gamma(Q), \quad (\text{Е1.8})$$

для которого $G(c + \mathfrak{D}_c \eta(c)) = \beta_{\rho(c)} G(c)$. Функция $\beta_\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$ была введена в §А3.

Л е м м а Е1.9. Пусть ε такое же, как в лемме Е1.5. Для каждого $c \in \mathfrak{B}_{n,\varepsilon/2}$ зададим функцию $\eta(c)$ формулой (Е1.8). Сопоставление паре $(t, c) \in [0, 1] \times \mathfrak{B}_{n,\varepsilon/2}$ элемента $\Pi(c + t \mathfrak{D}_c \eta(c)) \in \mathfrak{B}$ задает непрерывное отображение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из предложения В6.1 работы [9], для каждого элемента $c \in \mathfrak{B}$ можно построить открытую окрестность $\mathfrak{N}(c)$ и непрерывное отображение $h[c]: \mathfrak{N}(c) \rightarrow \mathfrak{G}_0$, такие, что сопоставление элементу $b \in \mathfrak{N}(c)$ элемента $m_c(b) = h(b) \cdot b - c$ задает вложение окрестности $\mathfrak{N}(c)$ в Γ^c , переводящее c в точку $0 \in \Gamma^c$. Из $\mathfrak{G}$ -эквивариантности следует, что для $b \in \mathfrak{N}(c)$

$$G(c + m_c(b) + \bar{\mathfrak{D}}_{c+m_c(b)} h[c](b) \cdot \eta(b)) = \beta_{\rho(b)} G(c + m_c(b)). \quad (\text{ЕI.9})$$

Далее, в лемме ЕI.7 утверждается, что

$$\|h[c](b) \cdot \eta(b)\|_2 \leq \kappa \nu(b)^{-2} \|(1 - \beta_{\rho(b)}) G(c + m_c(b))\|_2.$$

С другой стороны, из лемм ЕI.7 и ЕI.8 следует существование окрестности $\mathfrak{D} \subset \bar{\Gamma}^c$ элемента $0 \in \bar{\Gamma}^c$ и единственного непрерывного отображения $\xi: \mathfrak{D} \rightarrow L^2(Q) \cap \Gamma(Q)$, таких, что для $\varphi \in \mathfrak{D}$

$$G(c + \varphi + \bar{\mathfrak{D}}_{c+\varphi} \xi(\varphi)) = \beta_{\rho(\Pi(c+\varphi))} G(c + \varphi),$$

$$\|\xi(\varphi)\|_2 \leq \kappa \nu(\Pi(c + \varphi))^{-2} \|(1 - \beta_{\rho(\Pi(c+\varphi))}) G(c + \varphi)\|_2.$$

Поскольку отображение ξ единственно, то в $\mathfrak{D} \cap m_c(\mathfrak{N}(c))$ с необходимостью должно быть $\xi(m_c(b)) = h[c](b) \eta(b)$. Значит, поскольку m_c — вложение, отображение, сопоставляющее элементу $b \in \mathfrak{N}_c(b) \cap m_c^{-1}(\mathfrak{D})$ сечение $h[c](b) \eta(b) \in L^2(Q) \cap \Gamma(Q)$, непрерывно. Так как

$$\Pi(c + m_c(b) + \bar{\mathfrak{D}}_{c+m_c(b)} h[c](b) \eta(b)) = \Pi(b + \bar{\mathfrak{D}}_b \eta(b)),$$

мы получаем утверждение леммы ЕI.9.

Для окончания доказательства леммы ЕI.3 определим отображение $m_1: \mathfrak{B}_n \rightarrow \mathfrak{B}_n$, полагая

$$m_1(t, c) = \alpha(t, c) \Pi[c + t\beta(2\varepsilon^{-1}(\mathcal{U}(c) - 4\pi n)) \eta(c)],$$

где отображение $\alpha: [0, 1] \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{G}$ строится по лемме ВI.4, а $\beta \in C_0^\infty([0, \infty); [0, 1])$ является гладкой функцией, тождественно равной 1 на интервале $[0, 1/2]$ и нулю на $[3/4, \infty]$.

Зададим функцию R , сопоставив элементу $c \in \mathcal{B}_n$ величину

$$R(c) \equiv \rho(c) \beta(2\epsilon^{-1}(\mathcal{U}(c) - 4\pi n)) + 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы Е1.4. Выберем ϵ таким же, как в лемме Е1.5, и построим для каждого $c \in \mathcal{C}_{n, \epsilon/2} \equiv \{c \in \mathcal{C}_n: \mathcal{U}(c) < 4\pi n + \epsilon/2\}$ отображение $\alpha_c: [0, \infty] \rightarrow \Gamma^c$, такое, что норма $\|G(c + \alpha_c(\cdot))\|_2$ стремится к нулю. Здесь пополненная полуось $[0, \infty]$ наделяется топологией посредством ее отображения $t \rightarrow 1 - e^{-t}$ в отрезок $[0, 1]$. Непрерывность отображения, сопоставляющего паре (t, c) сечение $\alpha_c(t)$, доказывается с использованием локальных вложений из предложения В6.1 работы [9].

Начнем построение с того, что введем линейное пространство $\Omega^c = \{\psi \in \Gamma^c: \text{Im } \mathcal{D}_c \psi \in H_c(Q)^*\}$. Пространство Ω^c естественным образом является пространством Фреше, наделенным топологией с помощью отображения, переводящего $\psi \in \Omega^c$ в $(\psi, \text{Im } \mathcal{D}_c \psi) \in \Gamma^c \times H_c(Q)^*$. Для $c \in \mathcal{C}_{n, \epsilon/2}$ сечение $G(c)$ принадлежит $L^{5/5}(Q)$, и тем самым по лемме А4.1 из [9] имеем $G(c) \in H_c(Q)^*$. Более того, сопоставляя сечению $\psi \in H_c(Q)$ сечение $\{\psi, \psi\}$ по формуле (Е1.3), получим, пользуясь скалярным произведением в пространстве L^2 , гладкое отображение $\psi \mapsto \langle \{\psi, \psi\}, \cdot \rangle \in H_c(Q)^*$ пространства $H_c(Q)$ в $H_c(Q)^*$. Следовательно, сопоставление сечению $\psi \in \Omega^c$ сечения $G(c + \psi) = G(c) + \text{Im } \mathcal{D}_c \psi + \frac{1}{2} \{\psi, \psi\}$ задает гладкое отображение пространства Ω^c в $H_c(Q)^* \cap \Gamma(Q)$.

Для ϵ из леммы Е1.5 и $c \in \mathcal{C}_{n, \epsilon/2}$ определим множество $\overline{\Omega}^c = \{\psi \in \Omega^c: \mathcal{U}(c + \psi) < 4\pi n + \epsilon\}$. Отметим, что множество $\overline{\Omega}^c$ открыто в пространстве Ω^c .

Л е м м а Е1.10. Пусть ϵ такое же, как в лемме Е1.5, и $c \in \mathcal{C}_{n, \epsilon/2}$. Для каждого сечения $\psi \in \overline{\Omega}^c$ существует единственное сечение $u_c(\psi) \in \Gamma^c$ со следующими свойствами:

$$(1) \mathcal{D}_{c+\psi} \mathcal{D}_{c+\psi}^* u_c(\psi) = -G(c + \psi),$$

$$(2) \|u_c(\psi)\|_{c+\psi} \leq \alpha(\|G(c + \psi)\|_2 + \|G(c + \psi)\|_{*c+\psi}),$$

$$(3) \quad \|\mathcal{D}_{c+\psi}^* u_c(\psi)\|_{c+\psi} \leq \alpha (\|G(c+\psi)\|_2 + \|G(c+\psi)\|_{*c+\psi}),$$

$$(4) \quad \mathcal{D}_{c+\psi}^* u_c(\psi) \in \Omega_c.$$

Здесь через $\|\cdot\|_{*c+\psi}$ обозначена дуальная норма на про-
странстве $H_{c+\psi}(Q)^*$. Константа $\alpha < \infty$ не зависит
от $c \in \mathbb{C}_{n, \varepsilon/2}$ и сечения $\psi \in \overline{\Omega}^c$. Кроме того,
отображения, сопоставляющие сечению $\psi \in \overline{\Omega}^c$ сечение $u_c(\psi) \in \Gamma^c$ и сечение $\mathcal{D}_{c+\psi}^* u_c(\psi) \in \Omega_c$, непрерывны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим отображение $T: \overline{\Omega}^c \times \Gamma^c \rightarrow \overline{\Omega}^c \times (H_c(Q)^* \cap \Gamma(Q))$, которое переводит пару (ψ, u) в пару $T(\psi, u) = (\psi, \mathcal{D}_{c+\psi}^* \mathcal{D}_{c+\psi}^* u + G(c+\psi))$. В соответствии с леммой Е1.6 это гладкое отображение. По лемме Е1.5 дифференциал отображения T в точке $(\psi, u) \in \overline{\Omega}^c \times \Gamma^c$ является сюръективным отображением, и, следовательно, по теореме Гамильтона об обратной функции [28] существует гладкое отображение $u_c: \overline{\Omega}^c \rightarrow \Gamma^c$, удовлетворяющее утверждению (1) леммы Е1.10. Утверждение (2) следует из утверждения (1) и леммы Е1.5. Утверждение (3) следует из утверждений (1), (2) и формулы Вейтценбёка для оператора $\mathcal{D}_{c+\psi}$ (см. формулу (6.13) работы [8]). Все вычисления очевидны, и мы адресуем заинтересованного читателя к §ВЗ работы [9], где были получены подобные же оценки. Утверждение (4) является прямым следствием утверждения (1). Проверка дифференцируемости отображения, сопоставляющего сечению $\psi \in \overline{\Omega}^c$ сечение $\mathcal{D}_{c+\psi}^* u_c(\psi) \in \Omega_c$, также осуществляется путем непосредственного вычисления, которое мы предоставляем читателю.

Касательным пространством к пространству $\overline{\Omega}^c$ является $\overline{\Omega}_c \times \Omega_c$, и, следовательно, сопоставление элементу $\psi \in \overline{\Omega}^c$ сечения $\mathcal{D}_{c+\psi}^* u_c(\psi) \in \Omega_c$ задает гладкое векторное поле v на $\overline{\Omega}_c$. Из результатов работы [28] следует, что существуют однозначно определяемые интегральные кривые поля v . Иными словами, справедлива следующая

Л е м м а Е1.11. Пусть ε такое же, как в лемме Е1.5, и
 $c \in \mathbb{C}_{n, \varepsilon/2}$. Для каждого $\psi \in \overline{\Omega}_c$ существуют его ок-
рестность $D(\psi) \subset \overline{\Omega}^c$, число $t(\psi) > 0$ и однозначно
определенное гладкое отображение $\alpha_c: [0, t(\psi)) \times D(\psi) \rightarrow \overline{\Omega}^c$,
такие, что для любого фиксированного $\eta \in D(\psi)$ и каждого
 $s \in (0, t(\psi))$

$$\left(\frac{d\alpha_c}{dt}\right)(z, \eta) = (\mathcal{D}^* u_c)(\alpha_c(z, \eta)) \text{ и } \alpha_c(0, \eta) = \eta. \quad (\text{Е1.10})$$

В этой лемме утверждается, что интегральные кривые для поля α существуют при малых временах. В следующей лемме область их существования расширяется до пополненной полуоси $[0, \infty]$.

Л е м м а Е1.12. Пусть ε такое же, как в лемме Е1.5, и $c \in \mathbb{C}_{n, \varepsilon/2}$. Существует окрестность $\mathcal{O}$ точки $0 \in \overline{\Omega}^c$, такая, что отображение α_c из (Е1.10) имеет единственное продолжение, для которого сопоставление паре $(z, \eta) \in [0, 1] \times \mathcal{O}$ оечения $\alpha_c(-\ln(1-z), \eta)$ задает непрерывное отображение из $[0, 1] \times \mathcal{O}$ в $\overline{\Omega}^c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы Е1.11 следует, что если $\psi \in \overline{\Omega}^c$, $\eta \in \mathcal{O}(\psi)$ и $z \in [0, t(\psi))$, то для $\alpha = \alpha_c$

$$\left(\frac{dG}{dz}\right)(c + \alpha(z, \eta)) = -G(c + \alpha(z, \eta)). \quad (\text{Е1.11})$$

Таким образом, если $z \in [0, t(\psi))$, то

$$G(c + \alpha(z, \eta)) = e^{-z} G(c + \eta), \quad (\text{Е1.12})$$

$$\|G(c + \alpha(z, \eta))\|_2 = e^{-z} \|G(c)\|_2. \quad (\text{Е1.13})$$

Первым шагом в доказательстве леммы Е1.12 является следующая

Л е м м а Е1.13. Пусть ε и $c \in \mathbb{C}_{n, \varepsilon/2}$ такие же, как в лемме Е1.12, а отображение α_c такое же, как в лемме Е1.11. Тогда $\alpha_c(-\ln(1-z), 0)$ корректно определено для всех $z \in [0, 1]$, а сопоставление чiolу z значения $\alpha_c(-\ln(1-z), 0)$ задает непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в $\overline{\Omega}^c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме Е1.11 $\alpha(t, 0)$ существует для всех $t \in [0, t(0))$, где $t(0) > 0$. Предположим, что $\alpha(\cdot, 0)$ продолжено до непрерывного отображения ин-

тервала $[0, T)$ в пространство $\overline{\Omega}_c$ при некотором $T < \infty$. Тогда, показав, что это отображение продолжается единственным образом до непрерывного отображения отрезка $[0, T]$ в $\overline{\Omega}_c$, можно было бы вывести лемму Е1.13 из леммы Е1.11. Заметим теперь, что если $c \in \mathcal{C}_{n, \varepsilon/2}$, то $G(c) \in L^{6/5}(Q)$, и, значит, при $z \in [0, T)$ из (Е1.12) следует, что

$$\|G(c + \alpha(z, 0))\|_{6/5} = e^{-z} \|G(c)\|_{6/5}. \quad (\text{Е1.14})$$

В лемме А4.1 работы [9] утверждается, что пространство $L^{6/5}(Q)$ непрерывно вкладывается в $H_c(Q)^*$, причем константа $\kappa < \infty$ в оценке оператора вложения может быть выбрана не зависящей от $c \in \mathcal{C}$. Отсюда

$$\|G(c + \alpha(z, 0))\|_{*c + \alpha(z, 0)} \leq \kappa e^{-z} \|G(c)\|_{6/5}. \quad (\text{Е1.15})$$

Для любого $\varphi \in \overline{\Omega}_c$ и $z \in (0, t(\varphi))$ из предложения В6.2 работы [9] следует, что если φ имеет вид $\varphi = c + \alpha(z, \varphi)$, то

$$\left| \frac{d}{dz} \|\alpha(z, \varphi)\|_g \right| \leq \kappa \cdot \left\| \frac{d\alpha}{dz}(z, \varphi) \right\|_g (1 + \|\alpha(z, \varphi)\|_g), \quad (\text{Е1.16})$$

где $\kappa < \infty$ не зависит от c, φ и z . Применительно к данному случаю из формул (Е1.13, 5, 6) и леммы Е1.10 находим оценку

$$\left| \frac{d}{dz} \ln(1 + \|\alpha(z, 0)\|_g) \right| < \kappa e^{-z} (1 + \|G(c)\|_{6/5}),$$

откуда после интегрирования получаем оценку

$$\|\alpha(z, 0)\|_{c + \alpha(z, 0)} < \xi_z(c), \quad (\text{Е1.17})$$

где $\xi_z(c)$ зависит от c только через норму $\|G(c)\|_{6/5}$. На основе предложения В6.2 работы [9] из оценки (Е1.17) следует также, что

$$\|\alpha(z, 0)\|_c < \xi_z(c) \quad (\text{Е1.18})$$

о другой функцией $\xi_z(c)$. Если далее $[z, t] \subset [0, T)$, то

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, 0) - \alpha(s, 0)\|_c &\leq \int_s^t d\tau \left\| \frac{d\alpha}{d\tau}(\tau, 0) \right\|_c \leq \\ &\leq \int_s^t d\tau \left\| \frac{d\alpha}{d\tau}(\tau, 0) \right\|_{c+\alpha(\tau, 0)} (1 + \xi_1(c)) < e^{-\delta} \alpha \xi_1(c) \quad (\text{ЕI.19}) \end{aligned}$$

о другой функцией $\xi_1(c)$. Вторая строка в этой формуле следует из первой, если воспользоваться неравенством (ЕI.7) и предложением В6.2 из [9]. При переходе к третьей строке используются лемма ЕI.10 и формулы (ЕI.13, 15). Из неравенств (ЕI.19) вытекает, что последовательность $\{\alpha(s, 0): s \in [0, T]\}$ сильно сходится в $H_c(Q)$ при $s \rightarrow T$. При помощи бутотрапа убеждаемся в сходимости последовательности $\{\alpha(s, 0)\}$ и в Γ^c (см. [28]). Из формулы (ЕI.13) получаем, что этот предел $\alpha(T, 0)$ лежит в $\bar{\Gamma}^c$. Далее, неравенство (ЕI.15) позволяет заключить, что последовательность $\{G(c + \alpha(s, 0))\}$ сильно сходится в $L^{6/5}(Q)$ к пределу, который обязан совпадать с решением $G(c + \alpha(T, 0))$. Таким образом, последовательность $\{G(c + \alpha(s, 0))\}$ сильно сходится в $H_c(Q)^*$. Отсюда с учетом сходимости последовательности $\{\alpha(s, 0)\}$ в $H_c(Q)$ получаем, что и последовательность функционалов $D_{c+\alpha(s, 0)}\alpha(s, 0)$ сильно сходится в $H_c(Q)^*$. Поэтому последовательность $\{\alpha(s, 0): s \in [0, T]\}$ сходится к $\alpha(T, 0)$ в $\bar{\Omega}_c$.

Второй шаг в доказательстве леммы ЕI.12 состоит в установлении существования отображения α из леммы ЕI.11 на пространстве $[0, \infty) \times D$, где D — некоторая окрестность точки $0 \in \bar{\Omega}_c$. С этой целью предположим, что найдутся $T < \infty$ и окрестность $D(T)$ точки 0 в пространстве $\bar{\Omega}_c$, такие, что отображение α существует и непрерывно на $[0, T) \times D$. По лемме ЕI.13 значения $\alpha(T, 0) \in \bar{\Omega}_c$ корректно определены и найдутся окрестность D' элемента $\alpha(T, 0)$ в $\bar{\Omega}_c$ и число $t > 0$, такие, что отображение α существует и непрерывно на множестве $[0, t) \times D'$. Снова по лемме ЕI.13 найдется число $s \in [T, T + t/2)$, такое, что $\alpha(s, 0) \in D'$, и поэтому существует окрестность $D'' \subseteq D$, такая, что $\alpha(s, \eta) \in D'$ при всех $\eta \in D''$. Тогда в силу утверждения о единственности леммы ЕI.11 отображение α продолжается до непрерывного отображения множества $[0, T + t/2) \times D''$ в $\bar{\Omega}_c$. Следовательно, для заданного $T < \infty$ существует окрестность $D(T)$ точки 0 в $\bar{\Omega}_c$, такая, что отображение

$\alpha: [0, T) \times D(T) \rightarrow \overline{\Omega}_c$ непрерывно. Далее, из сходимости последовательности $\{\alpha(t, 0): t > 0\}$ к $\alpha(\infty, 0) \in \overline{\Omega}_c$ вытекает, что для заданной окрестности Q элемента $\alpha(\infty, 0)$ в пространстве $\overline{\Omega}_c$ найдутся число $T < \infty$ и окрестность $D(Q) \subset D(T)$ точки 0 в $\overline{\Omega}_c$, такие, что $\alpha(T, \eta) \in Q$ для всех $\eta \in D(Q)$. Тем самым лемма Е1.12 есть следствие утверждения о единственности леммы Е1.11, а также следующей леммы.

Л е м м а Е1.14. Пусть ε и c такие же, как в лемме Е1.12. Пусть $\alpha(\infty, 0) \in \overline{\Omega}_c$ такое же, как в лемме Е1.13. В пространстве $\overline{\Omega}_c$ существует такая окрестность Q элемента $\alpha(\infty, 0)$, что α непрерывно отображает множество $[0, \infty] \times Q$ в пространство $\overline{\Omega}_c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $G(c + \alpha(\infty, 0)) = 0$, для каждого $\delta > 0$ существует выпуклая окрестность $Q(\delta)$ элемента $\alpha(\infty, 0)$ в $\overline{\Omega}_c$, такая, что для всех $\eta \in Q(\delta)$

$$\|G(c + \eta)\|_2 + \|G(c + \eta)\|_{*c+\eta} < \delta. \quad (\text{Е1.20})$$

Согласно лемме Е1.11, можно без потери общности предполагать, что для некоторого $t \in (0, \infty)$ существует непрерывное отображение α , определенное на множестве $[0, t) \times Q(\delta)$. Мы покажем, что при достаточно малом $\delta > 0$ отображение α продолжается на множество $[0, \infty] \times Q(\delta)$. Вначале заметим, что по предложению В6.2 из [9] существует такое $\varkappa < \infty$, что для любых $c \in \mathbb{C}$, $\varphi \in H_c(Q)$ и $G \in H_c(Q)^*$

$$\|G\|_{*c+\varphi} \leq \varkappa \|G\|_{*c} (1 + \|\varphi\|_{*c+\varphi}). \quad (\text{Е1.21})$$

Таким образом, для любой пары $(z, \eta) \in [0, t) \times Q(\delta)$ из формул (Е1.13, 21) следует оценка

$$\|G(c + \alpha(z, \eta))\|_{*c+\alpha(z, \eta)} \leq \varkappa e^{-z} \|G(c + \eta)\|_{*c+\eta} (1 + \|\alpha(z, \eta) - \eta\|_{c+\eta}),$$

откуда, применяя (Е1.20), получаем неравенство

$$\|G(c + \alpha(z, \eta))\|_{*c+\alpha(z, \eta)} < \varkappa \delta e^{-z} (1 + \|\alpha(z, \eta) - \eta\|_{c+\alpha(z, \eta)}). \quad (\text{Е1.22})$$

Теперь в силу (Е1.13, 16, 22) и леммы Е1.10 имеем

$$\left| \frac{d}{ds} \|\alpha(s, \eta) - \eta\|_{c+\alpha(s, \eta)} \right| < \kappa \delta e^{-s} (1 + \|\alpha(s, \eta) - \eta\|_{c+\alpha(s, \eta)}^2). \quad (\text{ЕI.23})$$

Принтегрировав предыдущее неравенство, получим, что если $(s, \eta) \in [0, t) \times Q(\delta)$, то

$$\|\alpha(s, \eta) - \eta\|_{c+\alpha(s, \eta)} < \frac{\kappa \delta (1 - e^{-s})}{1 - \kappa \delta (1 - e^{-s})}. \quad (\text{ЕI.24})$$

Читатель должен проверить, что константа κ не зависит от s , η , s и δ . Как видно из (ЕI.24), если $\delta < \kappa^{-1}/2 = \delta_0$, то

$$\|\alpha(s, \eta) - \eta\|_{c+\alpha(s, \eta)} < 1, \quad (\text{ЕI.25})$$

и поэтому норма $\|\alpha(s, \eta) - \eta\|_{c+\eta}$ равномерно ограничена на множестве $[0, t) \times Q(\delta)$ при $\delta < \delta_0$.

Заметим далее, что если $[\tau, s] \subset [0, t)$ и $\eta \in Q(\delta)$, то

$$\begin{aligned} \|\alpha(s, \eta) - \alpha(\tau, \eta)\|_{c+\eta} &\leq \int_{\tau}^s d\tau \left\| \frac{d\alpha}{d\tau}(\tau, \eta) \right\|_{c+\eta} \leq \\ &\leq 2\kappa \int_{\tau}^s d\tau \left\| \frac{d\alpha}{d\tau}(\tau, \eta) \right\|_{c+\alpha(\tau, \eta)} \leq \\ &\leq 2\kappa \delta e^{-\tau}. \end{aligned} \quad (\text{ЕI.26})$$

Чтобы получить вторую строку из первой, нужно воспользоваться формулой (ЕI.25) и предложением В6.2 работы [9]. Третья строка выводится из второй с помощью формул (ЕI.13, 22, 25) и леммы ЕI.10. Из (ЕI.26) видно, что $\{\alpha(s, \eta): s \in [0, t)\}$ при фиксированном $\eta \in Q(\delta)$ является последовательностью Коши в пространстве $H_c(Q)$ и сходится равномерно относительно $\eta \in Q(\delta)$ к некоторому $\alpha(t, \eta) \in Q(\delta)$. При помощи бутстрапа, как и при доказательстве леммы ЕI.13, получаем равномерную сходимость (относительно точек пространства $Q(\delta)$) последовательности $\{\alpha(s, \eta): s \in [0, t)\}$ в $\overline{\Omega}^c$ к $\alpha(t, \eta)$. Указанная равномерная сходимость позволяет непрерывно продолжить α до отображения из $[0, t) \times Q(\delta)$ в $\overline{\Omega}^c$ при $\delta < \delta_0$. Отсюда и из локального утверждения о существовании в лемме ЕI.11 получаем лемму ЕI.14.

Окончание доказательства леммы Е1.4. Пусть β — функция из $C_0^\infty([0, \infty); [0, 1])$, тождественно равная 1 на отрезке $[0, 1/2]$ и нулю на $[3/4, \infty)$. Пусть $\Pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}$ — проекция. Зададим ε как в лемме Е1.5, а отображение α — как в лемме Е1.12. Определим отображение $m_2: [0, 1] \times \hat{\mathbb{C}}_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_n$, положив

$$m_2(t, c) = \alpha(t, c) \Pi [c + \beta(2\varepsilon^{-1}(\mathcal{U}(c) - 4\pi n)) \alpha_c(-\ln(1-t), 0)]. \quad (\text{Е1.27})$$

В этой формуле отображение α_c то же, что и в леммах Е1.11 и Е1.12, а $\alpha \in C^0(\hat{\mathbb{C}}_n, \mathcal{B})$ строится путем замены пространства $\mathcal{B}_n$ на $\mathbb{C}_n$ в доказательстве леммы Е1.4. Формула (Е1.12) гарантирует, что m_2 удовлетворяет утверждениям (1) и (2) леммы Е1.4. Осталось проверить только его непрерывность. Поскольку это локальное свойство, можно поступить так же, как в случае отображения m_1 из леммы Е1.3, рассмотрев локальные вложения из предложения В6.1 работы [9]. Пусть $c \in \hat{\mathbb{C}}_n$, и пусть $\mathcal{N}(c)$ — открытая окрестность элемента c в $\mathcal{B}_n$, а непрерывное отображение $h_c: \mathcal{N}(c) \rightarrow \mathcal{G}_0$ построено в соответствии с предложением В6.1 работы [9]. Тогда отображение, сопоставляющее элементу $b \in \mathcal{N}(c)$ элемент $m_c(b) = h_c(b) \cdot b \cdot c$, является вложением окрестности $\mathcal{N}(c)$ в Γ^c , переводящим c в $0 \in \Gamma^c$. Если бы удалось установить, что m непрерывно отображает множество $\mathcal{N}(c) \cap \hat{\mathbb{C}}_n$ в Γ^c , то из единственности и непрерывности отображения α_c на $[0, \infty) \times \{\text{открытая окрестность точки } 0 \text{ в пространстве } \Omega^c\}$ следовала бы непрерывность отображения m_2 . Мы применяем те же рассуждения, что и при доказательстве непрерывности отображения m_1 в лемме Е1.3. Таким образом, непрерывность m_2 вытекает из непрерывности отображения, сопоставляющего элементу $b \in \mathcal{N}(c) \cap \hat{\mathbb{C}}_n$ элемент $\text{Im } \mathcal{D}_c m_c(b) \in H_c(Q)^*$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что сопоставление элементу $b \in \mathcal{N}(c) \cap \hat{\mathbb{C}}_n$ элемента $G(c + m_c(b)) \in L^{6/5}(Q)$ является непрерывным отображением (воспользуйтесь леммой А4.6 работы [9]). Таким образом, в соответствии с леммой А4.1 работы [9] сопоставление элементу $b \in \mathcal{N}(c) \cap \hat{\mathbb{C}}_n$ элемента $G(c + m_c(b))$ задает непрерывное отображение в $H_c(Q)^*$. Далее, сопоставление элементу $\psi = (\alpha, \varphi) \in H_c(Q)$ элемента $\frac{1}{2}\{\psi, \psi\}$ из формулы (Е1.3) задает (посредством скалярного произведения в L^2) непрерывное отображение из $H_c(Q)$ в $H_c(Q)^*$. Следовательно, из фор-

мулы (Е1.13) вытекает, что $\text{Im } \mathcal{D}_c m_c(\ell)$ определяет непрерывное отображение из $\mathcal{N}(c) \cap \mathcal{E}_n$ в $H_c(Q)^*$, что и требовалось доказать.

Е2. Принцип минимакса и пунктированные гомотопии

В этом параграфе будут завершены доказательства теорем А1.2 и А1.4. При этом теорема А1.2 окажется прямым следствием предложения С1.1 и следствия Е1.2. Чтобы доказать теорему А1.4, нужно рассмотреть только те семейства подмножеств пространства $\mathcal{B}_n$, которые инвариантны относительно гомотопий, оставляющих неподвижным некоторое выбранное подмножество множества $\mathcal{B}_n$. Для заданных $n \in \mathbb{Z}$ и $\ell = 0, 1, \dots$ пусть $\varphi \in C^0(S^\ell; \mathcal{M}_n)$. Для доказательства теоремы А1.4 нужно уметь отвечать на вопрос, когда данная линейно связная компонента $\mathcal{C} = \{\psi \in C^0(B^{\ell+1}; \mathcal{B}_n) : \psi|_{\partial B^{\ell+1}} = \varphi\}$ содержит отображение, образ которого лежит в $\mathcal{M}_n$. Здесь $B^{\ell+1}$ — стандартный единичный шар в $\mathbb{R}^{\ell+1}$ с границей S^ℓ . Чтобы применить к доказательству теоремы А1.4 принцип минимакса, введем для каждой такой компоненты $\mathcal{C}$ число

$$\mathcal{U}_{\mathcal{C}} = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}} \sup_{\psi \in B^{\ell+1}} \mathcal{U}(\psi(y)).$$

Исходя из теории минимакса мы можем сформулировать следующее

Предложение Е2.1. Пусть для $n \in \mathbb{Z}$ и $\ell \in \{0, 1, \dots\}$ задано отображение $\varphi \in C^0(S^\ell; \mathcal{M}_n)$. Обозначим через $\mathcal{C}$ линейно связную компоненту множества $\{\psi \in C^0(B^{\ell+1}; \mathcal{B}_n) : \psi|_{S^\ell} = \varphi\}$. Существует критическая точка $c(\mathcal{C}) \in \mathcal{B}_n$ функционала $\mathcal{U}$ с критическим значением $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$, для которой числа $\gamma_{c(\mathcal{C})}(\ell+2)$ из определения А4.4 неотрицательны.

Доказательство теоремы А1.4 на основе предложения Е2.1. Фиксируем $n \in \mathbb{Z}$ и $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Выберем в качестве φ отображение, переводящее сферу S^ℓ в точку $* \in \mathcal{M}_n$. Тогда линейно связная компонента $\mathcal{C} = \{\psi \in C^0(B^{\ell+1}; \mathcal{B}_n) : \psi|_{S^\ell} = *\}$ является в точности элементом гомотопической группы $\pi_{\ell+1}(\mathcal{B}_n)$. По теореме 1.2 работы [8] если критическая точка $c \in \mathcal{B}_n$ функционала $\mathcal{U}$ не

принадлежит $\hat{\mathfrak{M}}_n$, то $\gamma_c(|n|+1) < 0$. Таким образом, если $l+1 < |n|$ и $\odot \in \pi_{l+1}(\hat{\mathfrak{B}}_n)$, то по предложению Е2.1 критическая точка $c(\odot)$ принадлежит $\hat{\mathfrak{M}}_n$ и значение функционала в ней равно $\mathcal{U}(c(\odot)) = \mathcal{U}_\odot$. Предложение Е1.1 утверждает, что существует отображение $\psi = \odot$, для которого $\text{Im } \psi \in \hat{\mathfrak{M}}_n$. Значит, гомоморфизм вложения $\pi_k(\hat{\mathfrak{M}}_n) \rightarrow \pi_k(\hat{\mathfrak{B}}_n)$ сюръективен при $k \leq |n|$. Обозначим его ядро через $Z_{k,n}$. Пусть при $k < |n|$ класс функций $[\varphi] \in Z_{k,n}$ представлен функцией $\varphi \in C^0(S^k; \hat{\mathfrak{M}}_n)$. Отображение $\varphi \in C^0(B^{l+1}; \hat{\mathfrak{B}}_n)$, где $\varphi|_{S^l} = \varphi$, является гомотопией φ в постоянное отображение. По предложениям Е1.1 и Е2.1 и теореме 1.2 работы [8] существует отображение ψ , для которого $\text{Im } \psi \in \hat{\mathfrak{M}}_n$; тем самым гомоморфизм вложения $\pi_k(\hat{\mathfrak{M}}_n) \rightarrow \pi_k(\hat{\mathfrak{B}}_n)$ инъективен при $k < |n|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения Е2.1. Оно, по существу, совпадает с доказательством теоремы А1.2, за исключением двух модификаций. Первая возникает из-за того, что при заданном φ компонента $\odot$ задает, вообще говоря, не гомотопически инвариантное семейство подмножеств множества $\hat{\mathfrak{B}}_n$, а семейство компактных подмножеств, инвариантных только относительно гомотопий, которые при ограничении на $\text{Im } \varphi$ дают тождественное отображение при всех t . Вторая модификация нужна для получения априорной оценки числа $\gamma(l+2)$. Она состоит в прямом переносе на наш случай конструкции из §5 работы [22]. Поскольку обе модификации несложны, рассуждение будет коротким.

Фиксируем $n \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon > 0$ и отображение $m: [0, 1] \times \hat{\mathfrak{B}}_n \rightarrow \hat{\mathfrak{B}}_n$, как в предложении Е1.1. Предложение В5.2 работы [9] позволяет построить непрерывную гомотопию $q(\varepsilon/2, \cdot, \cdot): [0, 1] \times \hat{\mathfrak{B}} \rightarrow \hat{\mathfrak{B}}$, такую, что гомотопия $q(\varepsilon/2, 1, \cdot)$ непрерывно отображает $\hat{\mathfrak{B}}_n$ в $\hat{\mathfrak{B}}_n^\delta$ при всех $\delta \in [0, 1/2)$ и что при всех $t \in [0, 1]$ и $y \in S^l$ выполняется оценка

$$\mathcal{U}(q(\varepsilon/2, t, \varphi(y))) < 4\pi|n| + \varepsilon/2. \quad (\text{Е2.1})$$

Для каждого $\delta \in [0, 1/2)$ положим $\hat{\varphi} = q(\varepsilon/2, 1, \varphi(\cdot)) \in C^0(S^l; \hat{\mathfrak{B}}_n^\delta)$. Пусть

$$\odot = \{\varphi \in C^0(B^{l+1}; \hat{\mathfrak{B}}_n): \varphi|_{S^l} = \hat{\varphi}\}$$

есть некоторая линейно связная компонента. Она определяет линейно связную компоненту $\odot^\delta$ множества $\{\psi \in C^0(B^{\ell+1}; \mathfrak{B}_n^\delta): \psi|_{S^\ell} = \hat{\varphi}\}$ путем сопоставления каждому отображению $\psi \in \odot$ отображения $\hat{\psi} = q(\varepsilon/2, 1, \psi(\cdot))$. Отметим, что если $\psi_1 \sim \psi_2$ относительно S^ℓ , то $\hat{\psi}_1 \sim \hat{\psi}_2$ относительно S^ℓ . (Здесь символ " $\sim$ " обозначает гомотопическую эквивалентность.) Обратно, каждая линейно связная компонента $\odot^\delta$ множества $\{\psi \in C^0(B^{\ell+1}; \mathfrak{B}_n^\delta): \psi|_{S^\ell} = \hat{\varphi}\}$ задает линейно связную компоненту множества $\{\psi \in C^0(B^{\ell+1}; \mathfrak{B}_n): \psi|_{S^\ell} = \varphi\}$ следующим образом. Введем в шаре $B^{\ell+1}$ сферические координаты, обозначая через t расстояние до начала координат, а через y — точку на сфере S^ℓ . Если $\psi \in \odot^\delta$, то определим ψ^0 формулой

$$\psi^0(t, y) = \begin{cases} \psi(2t, y) & \text{при } t \in [0, 1/2], \\ q(\varepsilon/2, 2-2t, \psi(y)) & \text{при } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Отметим, что если $\psi_1, \psi_2 \in \odot^\delta$ и $\psi_1 \sim \psi_2$ относительно S^ℓ , то $\psi_1^0 \sim \psi_2^0$ относительно S^ℓ . Кроме того, если $\psi \in \odot$, то $(\hat{\psi})^0 \sim \psi$ относительно S^ℓ . Обратно, если $\psi \in \odot^\delta$, то $(\psi^0)^1 \sim \psi$ относительно S^ℓ . Таким образом, линейно связные компоненты множеств $\{\psi \in C^0(B^{\ell+1}; \mathfrak{B}_n^\delta): \psi|_{S^\ell} = \hat{\varphi}\}$ и $\{\psi \in C^0(B^{\ell+1}; \mathfrak{B}_n): \psi|_{S^\ell} = \varphi\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии.

Предположим теперь, что для некоторой компоненты $\odot$ справедливо неравенство $\mathcal{U}_\odot > 4\pi|n|$. Тогда из предложения Е1.1 следует, что $\mathcal{U}_\odot \geq 4\pi|n| + \varepsilon$. Для такой компоненты $\odot$ зададим число

$$\mathcal{U}_\odot^\delta = \inf_{\psi \in \odot^\delta} \sup_{y \in B^{\ell+1}} \mathcal{U}^\delta(\psi(y)).$$

Л е м м а Е2.2. Величина $\mathcal{U}_\odot^\delta$ как функция параметра $\delta \in [0, 1/2)$ не убывает и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{U}_\odot^\delta = \mathcal{U}_\odot$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторите доказательство леммы В1.2, воспользовавшись отображением $q: [0, 1] \times [0, 1] \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ из предложения В5.2 работы [9]. При этом следует учесть, что в силу неравенства $\mathcal{U}_\odot \geq 4\pi|n| + \varepsilon$ для каждого $\psi \in \odot$ существует число $\tau \in [0, 1)$, такое, что при $x \in B^\ell$ и

$|x| > \tau$ справедливо неравенство $\mathcal{U}(\psi(x)) > 4\pi|n| + \varepsilon$.
Детали мы оставляем читателю.

Для линейно связной компоненты $\odot$, такой, что $\mathcal{U}_{\odot} \geq 4\pi|n| + \varepsilon$, и для каждого $\delta \in [0, 1/2)$ зададим множество

$$Y^{\delta}(\odot) = \{(\psi, c) \in \odot^{\delta} \times \hat{\mathcal{B}}_n^{\delta} : c \in \text{Im} \psi \text{ и } \mathcal{U}^{\delta}(c) \geq \mathcal{U}_{\odot}^{\delta}\}.$$

Для таких множеств вместо предложения В2.1 справедливо

Предложение Е2.3. Пусть $\odot$ такая же, как выше, и $\mathcal{U}_{\odot} \geq 4\pi|n| + \varepsilon$. Существует такое $\delta(\odot) \in (0, 1/2)$, что для заданных $\delta \in [0, \delta(\odot))$ и $\rho > 0$ найдется элемент $(\psi, c) \in Y^{\delta}(\odot)$ со следующими свойствами:

$$(1) \max \{\mathcal{U}^{\delta}(\psi(y)) : y \in B^{l+1}\} < \mathcal{U}_{\odot}^{\delta} + \rho,$$

$$(2) \|\nabla \mathcal{U}_c^{\delta}\|_* < \rho,$$

$$(3) \gamma_c^{\delta}(l+2) > -\rho,$$

(4) если $c = (A, \Phi)$, то $\nabla_A^* \nabla_A \Phi = 0$ и для данного c выполняется (В2.1).

Доказательство предложения Е2.1 на основе предложения Е2.3. Повторяя доказательство предложения В1.3 (см. предложение В3.1), получаем для каждого $\delta \in (0, \delta(\odot))$ критическую точку $c^{\delta}(\odot)$ функционала $\mathcal{U}^{\delta}$ в пространстве $\hat{\mathcal{B}}_n^{\delta}$ с критическим значением $\mathcal{U}_{\odot}^{\delta}$. При этом для построения хорошей последовательности, обладающей свойствами, перечисленными в предложении В3.1, мы пользуемся условиями (1), (2) и (4) предложения Е2.3. Из утверждения о сходимости из предложения В3.1 и утверждения (3) предложения Е2.3 следует, что $\gamma_{l+2}^{\delta}(c(\odot)) \geq 0$ (см. предложение 4.13 работы [6, ч. II] и его доказательство). Далее, если $\mathcal{U}(\odot) < 4\pi|n| + \varepsilon$, то предложение Е2.1 следует из предложения Е1.1. Если же $\mathcal{U}(\odot) > 4\pi|n| + \varepsilon$, то дословно копируя доказательство предложения С1.1, выведем существование подпоследовательности $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \{c^{\delta}(\odot) : \delta \in (0, \delta(\odot))\}$, сходящейся в $\hat{\mathcal{B}}_n$ к критической точке $c(\odot)$ функционала $\mathcal{U}$ с критическим значением $\mathcal{U}_{\odot}$. Из сходимости этой последовательности вытекает, что $\gamma_{l+2}(c(\odot)) \geq 0$ (см. опять предложение 4.13 работы [6, ч. II]).

Доказательство предложения Е2.3. Поскольку $\mathcal{U}_\odot \geq 4\pi|n| + \varepsilon$, существует такое $\delta(\odot) \in (0, 1/2]$, что при всех $\delta < \delta(\odot)$ выполняется неравенство $\max\{\mathcal{U}^\delta(\hat{\varphi}(\psi)) : \psi \in S^l\} < \mathcal{U}_\odot^\delta - \varepsilon/4$. Для данных $\delta \in [0, \delta(\odot))$ и $\rho \in (0, 1)$, модифицируя доказательство предложения В2.1, несложно построить пару $(\psi, \hat{b}) \in Y^\delta(\odot)$, для которой выполняются утверждения (1), (2) и (4) предложения Е2.3. Действительно, гомотопии из §В2 могут быть изменены таким образом, чтобы каждая оставляла неподвижным множество $\{c \in \hat{\mathcal{B}}_\pi^\delta : \mathcal{U}^\delta(c) < \mathcal{U}_\odot^\delta - \varepsilon/8\}$ при всех $t \in [0, 1]$, а, следовательно, и множество $\varphi(S^l)$. На самом деле гомотопии из §3 позволяют по заданному $\rho > 0$ построить пару $(\psi, \hat{b}) \in Y^\delta(\odot)$, для которой выполнены утверждения (1) и (2), а утверждение (4) выполняется не только для $\hat{b}$, но и для всех $c \in \text{Im } \psi$, удовлетворяющих условию $\mathcal{U}^\delta(c) > \mathcal{U}_\odot^\delta - \varepsilon/16$. Доказательство существования $c \in \text{Im } \psi$, удовлетворяющего условию $\mathcal{U}^\delta(c) \geq \mathcal{U}_\odot^\delta$ и такого, что величины $\|\nabla \mathcal{U}_c^\delta\|_* + \max(0, -\gamma_c^\delta(l+2))$ малы (порядка $O(\rho^{1/3})$), проводится методом от противного. Действительно, если бы это число было равномерно большим на множестве $\text{Im } \psi \cap (\mathcal{U}^\delta)^{-1}([\mathcal{U}_\odot^\delta, \infty))$, то, применяя к данной задаче конструкцию из §5 и в особенности леммы 5.1 – 5.3 из [22], можно было бы построить отображение $\psi' \in \odot$, такое, что $\max\{\mathcal{U}^\delta(\psi'(\psi)) : \psi \in B^{l+1}\} < \mathcal{U}_\odot^\delta$. При этом нужно воспользоваться равномерными оценками из предложения А4.3 и непрерывностью $\gamma_c^\delta(l)$ как функции переменного $c \in \hat{\mathcal{B}}^\delta$ (предложение А4.5).

Литература

1. Atiyah M.F., Bott R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. — Philos. Trans. R. Soc. London A308 (1982), 523.
2. Bott R. Morse theoretic aspects of Yang-Mills theory. In: Recent developments in gauge theories, Cargèse, France, New York: Plenum Press, 1980.
3. Palais R. Critical point theory and mini-max principle. — Proc. Symp. Pure Math., Vol. 15, Providence, RI: American Math. Society, 1970.
4. Berger M. Nonlinearity and functional analysis. — New York: Academic Press, 1977.
5. Woo G. Pseudo-particle configurations in two-dimensional fragments. — J. Math. Phys. 18 (1977), 1264.

6. Taubes C.H. The existence of a non-minimal solution to the $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs equations on $\mathbb{R}^3$, Part I. - Commun. Math. Phys. 86 (1982), 257; Part II. - Commun. Math. Phys. 86 (1982), 299.
7. Groisser D. $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory on $\mathbb{R}^3$. - Harvard University Ph.D. Thesis, 1983.
8. Taubes C.H. Stability in Yang-Mills theories. - Commun. Math. Phys. 91 (1983), 235.
9. Taubes C.H. Monopoles and maps from S^2 to S^2 ; the topology of the configuration space. - Commun. Math. Phys. 95 (1984), 345. [Перевод в настоящем сборнике.]
10. Taubes C.H. On the Yang-Mills-Higgs equations. - Bull. Am. Math. Soc. 10 (1984), 295.
11. Jaffe A., Taubes C.H. Vortices and monopoles. - Boston: Birkhäuser, 1980.
12. Groisser D. Integrality of the monopole number in $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theories on $\mathbb{R}^3$. - Commun. Math. Phys. 93 (1984), 367-378.
13. Богомольный И.Б. Устойчивость классических решений. - Ядерная физика, 24 (1976), 449-454.
14. Taubes C.H. The existence of multi-monopole solutions to the non-abelian Yang-Mills-Higgs equations for arbitrarily simple gauge groups. - Commun. Math. Phys. 80 (1981), 343.
15. Hitchin N. Monopoles and geodesics. - Commun. Math. Phys. 83 (1982), 579. On the construction of monopoles. - Commun. Math. Phys. 89 (1983), 145. [Перевод в настоящем сборнике.]
16. Donaldson S.K. Nahm's equation and classification of monopoles Institute for Advanced Study, Princeton, Preprint, 1984. [См. статью Дональдсона в настоящем сборнике, с. 123.]
17. Segal G. Topology of spaces of rational functions. - Acta Math. 143 (1979), 39.
18. Milnor J. Morse theory. - Princeton: Princeton University Press, 1963. [Имеется перевод: Милнор Дж. Теория Морса. - М.: Мир, 1965.]
19. Uhlenbeck K.K. Connections with L^p -bounds on curvature. - Commun. Math. Phys. 83 (1981), 31.
20. Manton N.S. Complex structure of monopoles. - Nucl. Phys. B135 (1978), 319.
21. Coleman S. The magnetic monopole, fifty years later. - Harvard University Preprint, 1982.

22. Taubes C.H. Path connected Yang-Mills moduli spaces. - J.Diff. Geom. 19(1984), 337-392.
23. Sedlacek S. A direct method for minimizing the Yang-Mills functional over 4-manifolds. - Commun. Math. Phys. 86 (1982), 515.
24. Taubes C.H. The structure of static Euclidean gauge fields.- Harvard University Ph.D. Thesis, 1980.
25. Ладженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970.
26. Morrey C.B. Multiple integrals in the calculus of variations. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1966.
27. Kato T. Perturbation theory for linear operators. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980. [Имеется перевод: Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.: Мир, 1972.]
28. Hamilton R. Nash-Moser inverse function theorem. - Bull.Am. Math.Soc. 7 (1983), 65.

А.Г. Сергеев

Последние годы стали для теории классических калибровочных полей годами интенсивного роста и привели к ее оформлению в самостоятельную область математической физики. Такой прогресс объясняется в первую очередь широким внедрением методов комплексной алгебраической геометрии, которое стало возможным прежде всего благодаря открытию твисторного подхода. "Твисторная тема" является центральной в данной статье, однако мы не ставили себе цели дать максимально полный обзор приложений твисторов в теории калибровочных полей. Скорее, это попытка выделить основные, "идеологические" направления теории, базирующиеся на твисторном подходе. В то же время мы были вынуждены ограничиться результатами, так или иначе связанными с материалом сборника, поэтому ряд интересных тем остался за пределами статьи. Указанный пробел частично восполняется перечислением в конце параграфов отдельных важных работ, не освещенных в тексте.

§ 1. Исходные понятия твисторной геометрии

1. Твисторная модель пространства Минковского. Пусть M есть пространство Минковского, т.е. 4-мерное аффинное пространство с псевдоевклидовой метрикой, имеющей сигнатуру $(+, -, -, -)$. В системе координат, отнесенной к фиксированному началу отсчета $0 \in M$, лоренцева норма вектора $x = (x^\mu)_{\mu=0}^3 \in M$ равна $|x|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Обозначим через $L = SO(1, 3)$ группу Лоренца линейных преобразований M , сохраняющих начало отсчета и норму $|x|^2$. Вектор x называется световым (изотропным), если $|x|^2 = 0$; прямая в M называется световой, если ее направляющий вектор — световой. Световые прямые, проходящие через 0, заполняют световой конус $\{x \in M: |x|^2 = 0\}$ с вершиной в 0. Группа конформных преобразований пространства M обозначается через $C = C(1, 3)$.

Комплексификация M есть 4-мерное комплексное аффинное пространство $\mathbb{CM}$. В системе координат, привязанной к началу отсчета 0, вектор $z \in \mathbb{CM}$ задается координатами $(z^\mu)_{\mu=0}^3$, при этом $|z|^2 = (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2$. Как и в случае пространства M , вектор z называется световым, если $|z|^2 = 0$; комплексная прямая называется световой, если ее касательные векторы — световые. Комплексный световой конус с вершиной в точке $z_0 \in \mathbb{CM}$ задается уравнением $|z - z_0|^2 = 0$. Евклидово пространство E является вещественным подпространством $\mathbb{CM}$, определяемым условиями $z^0 = x^0$, $z^1 = ix^1$, $z^2 = ix^2$, $z^3 = ix^3$, где x^0, x^1, x^2, x^3 вещественны. Важную роль играют конусы $\mathbb{CM}_+$ и $\mathbb{CM}_-$ в $\mathbb{CM}$, называемые соответственно трубой будущего и трубой прошлого: $\mathbb{CM}_\pm = \{z = x + iy \in \mathbb{CM} : |y|^2 > 0, \pm y^0 > 0\}$.

Отображение Паули

$$x \mapsto X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \sigma_\mu,$$

где $\sigma_0 = I$ — единичная 2×2 -матрица, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

реализует пространство Минковского M в виде пространства $\text{Herm}(2)$ эрмитовых 2×2 -матриц. При этом $|x|^2$ переходит в $\det X$. Группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует в пространстве $\text{Herm}(2)$ по правилу $X \rightarrow AXA^*$, где $A \in SL(2, \mathbb{C})$, $X \in \text{Herm}(2)$, и это действие сохраняет норму $\det X$. Поэтому любое преобразование $\text{Herm}(2)$, задаваемое матрицей $A \in SL(2, \mathbb{C})$, порождает лоренцево преобразование пространства Минковского M , причем матрицы $\pm A \in SL(2, \mathbb{C})$ порождают одно и то же преобразование M . Группа $SL(2, \mathbb{C})$ является двукратным накрытием связной компоненты единицы L_+ группы Лоренца L , состоящей из преобразований, сохраняющих ориентацию времени, т.е. оси (x^0) .

Комплексификация отображения Паули $x \rightarrow Z = \sum x^\mu b_\mu$ реализует комплексное пространство Минковского $\mathbb{CM}$ в виде пространства $\mathbb{C}[2 \times 2]$ всех комплексных 2×2 -матриц. Труба будущего $\mathbb{CM}_+$ переходит при этом в обобщенную верхнюю полуплоскость $H_+ \subset \mathbb{C}[2 \times 2]$, состоящую из матриц Z с положительно определенной мнимой частью $\text{Im } Z = (Z - Z^*)/2i$. Если применить к обобщенной верхней полуплоскости H_+ , по аналогии со скалярным случаем, преобразование Кэли $Z \rightarrow (I - iZ)^{-1}(I + iZ)$, обобщенная верхняя полуплоскость H_+ перейдет в обобщенный единичный круг B , состоящий из матриц $W \in \mathbb{C}[2 \times 2]$, для которых матрица $I - WW^*$ положительно определена. Это классическая область Картана I типа [2], т.е. однородная симметрическая ограниченная область. Пространство $\text{Herm}(2)$ под действием преобразования Кэли отображается в остоу (границу Шилова) области B , совпадающий с группой унитарных матриц $U(2)$. Так как группа $U(2)$ компактна, то, пользуясь сквозным отображением из M в $U(2)$, мы можем определить компактификацию M пространства Минковского [2] (так называемую конформную компактификацию M). Эта компактификация совпадает с компактификацией M , получаемой из твисторной модели M (см. ниже).

Пространство спиноров $\mathbb{C}^2$, в котором группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует как группа матриц, можно определить более инвариантным образом как пространство фундаментального представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, универсальной накрывающей группы Лоренца. Можно аналогичным образом определить пространство твисторов $\mathbb{C}^4$ как пространство фундаментального представления группы $SL(4, \mathbb{C})$, универсальной накрывающей комплексифицированной конформной группы. Ниже мы еще вернемся к этому определению.

Перейдем к построению твисторной модели пространства Минковского. Обозначим через T векторное пространство $\mathbb{C}^4$, элементы которого $x \in \mathbb{C}^4$ удобно задавать парами двумерных комплексных векторов $x = (\omega, \pi)$, $\omega, \pi \in \mathbb{C}^2$. Сопоставим матрице $Z \in \mathbb{C}[2 \times 2]$ двумерное комплексное подпространство в T , задаваемое системой уравнений $\omega = Z\pi$. Тем самым определено вложение $\mathbb{C}[2 \times 2]$ в грассманово многообразие $G_2(T)$ двумерных комплексных подпространств в T . Взяв композицию этого отображения с отображением Паули, получим вложение

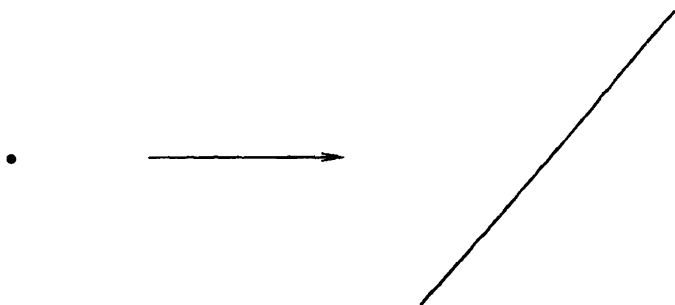
$$\mathbb{C}M \rightarrow \mathbb{C}[2 \times 2] \rightarrow G_2(T) \quad (I)$$

пространства Минковского в грассманиан $G_2(T)$. Воспользуемся вложением (I) для определения компактификации пространства Минковского $\mathbb{C}M$. Именно, назовем компактифицированным комплексным пространством Минковского $\mathbb{C}M$ грассманиан $G_2(T)$ (правильнее называть $G_2(T)$ твисторной моделью компактного комплексного пространства Минковского). Само пространство T называется пространством твисторов. Грассманиан $G_2(T)$ можно рассматривать также как многообразие $G_1(PT)$ проективных прямых в трехмерном комплексном проективном пространстве $PT = \mathbb{C}P^3$.

Рассмотрим "идеальные элементы" $\mathbb{C}M$, т.е. точки $G_2(T)$, не принадлежащие образу (I). Обозначим через P_∞ "бесконечно удаленное" подпространство T , задаваемое уравнением $\pi = 0$. Ясно, что к дополнению $\mathbb{C}M \setminus \mathbb{C}M$ образа (I) принадлежат 2-подпространства в T , имеющие ненулевое пересечение с P_∞ . Любое 2-подпространство в T задается системой уравнений $Z_1 \omega = Z_2 \pi$, где матрицы Z_1, Z_2 определены с точностью до умножения слева на невырожденную 2×2 -матрицу. Оно имеет ненулевое пересечение с P_∞ , если $\det Z_1 = 0$. Поскольку уравнение $\det Z_2 = 0$ в $\mathbb{C}M$ описывает комплексный световой конус в нуле, то естественно отождествить "идеальное множество" $\mathbb{C}M \setminus \mathbb{C}M$ с комплексным световым конусом "в бесконечности".

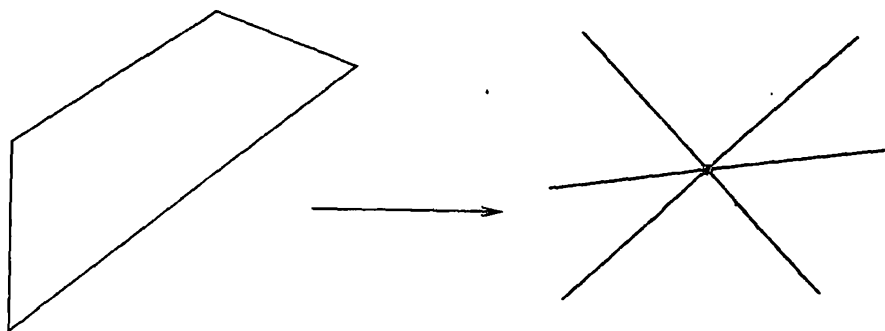
Опишем теперь геометрические свойства отображения $\mathbb{C}M \rightarrow G_2(T) \rightarrow G_1(PT)$, называемого твисторным соответствием или соответствием Пенроуза.

2. Твисторное соответствие. По самому определению твисторного соответствия



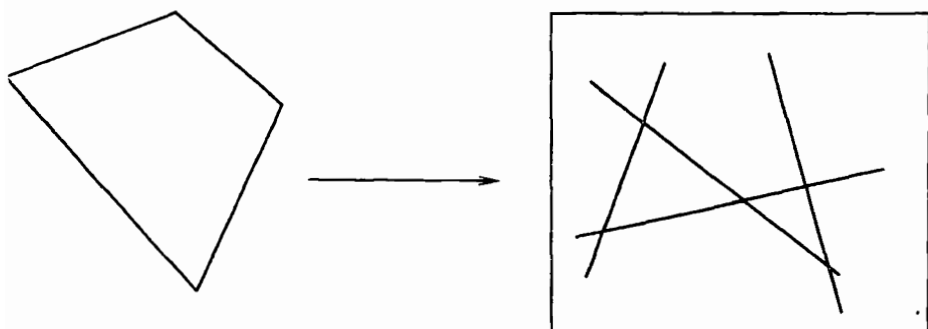
$\{\text{точка } \mathbb{C}M\} \longrightarrow \{\text{проективная прямая в } \mathbb{P}^1\}.$

Отождествляя точку $\mathbb{P}^1$ с пучком проективных прямых, проходящих через эту точку, получим



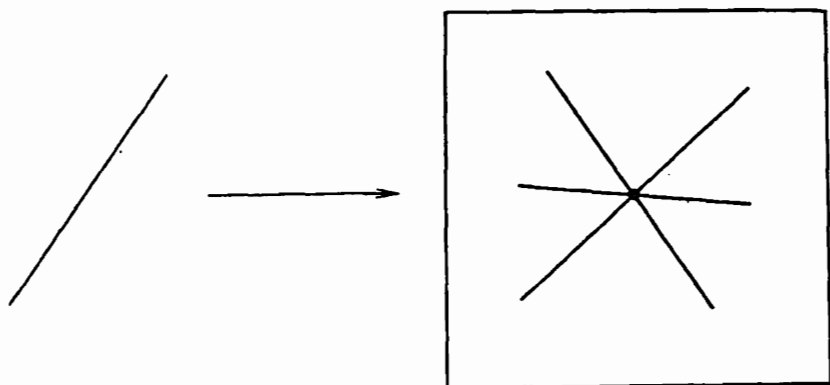
$\left\{ \begin{array}{l} \text{2-мерная комплексная} \\ \text{изотропная плоскость} \\ \text{в } \mathbb{C}M \equiv \alpha\text{-плоскость} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{точка } \mathbb{P}^2 \equiv \text{пучок} \\ \text{проективных прямых,} \\ \text{проходящих через эту} \\ \text{точку} \end{array} \right\}.$

Плоскость в CM называется изотропной, если все ее касательные векторы световые (см. п. I). Изотропные комплексные 2-плоскости в CM , отвечающие точкам PT , Пенроуз предложил называть α -плоскостями. Двойственный тип изотропных плоскостей в CM (β -плоскости) отвечает двойственному объекту в PT - проективной плоскости, которую можно отождествить с комплексом лежащих в этой плоскости проективных прямых:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{2-мерная комплексная} \\ \text{изотропная плоскость} \\ \text{в } CM = \beta\text{-плоскость} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{проективная плоскость в } PT = \\ \text{комплекс проективных прямых,} \\ \text{лежащих в этой плоскости} \end{array} \right\}$$

"Пересечение" двух последних диаграмм позволяет охарактеризовать твисторные образы комплексных световых прямых

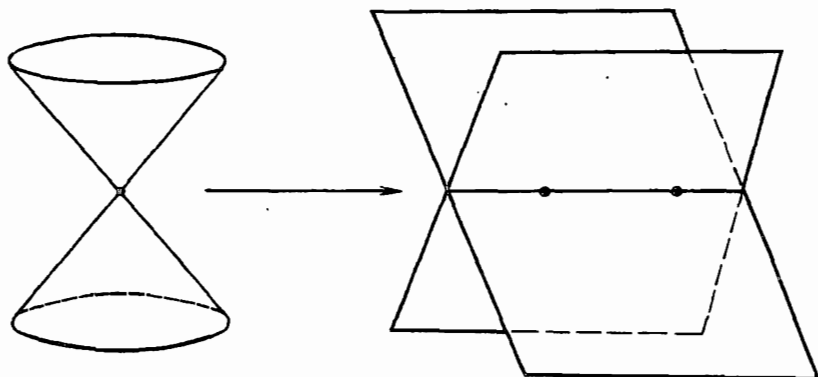


{ комплексная световая
прямая в CM }



{ $(0,2)$ -флаг в $PT = (\text{точка } PT; \text{ проективная плоскость, содержащая эту точку}) = \text{пучок проективных прямых, лежащих в данной проективной плоскости и проходящих через данную точку}$ }

Из последнего утверждения вытекает, что



{ комплексный световой
конус в $CM = \text{пучок комплексных световых прямых, проходящих через фиксированную точку } CM$ }



{ проективная прямая в $PT = \{(0,1,2)\}$ -флаги в PT с фиксированной проективной прямой }

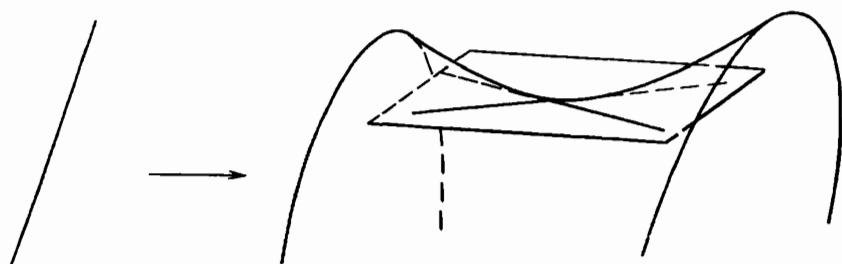
Таковы основные геометрические свойства твисторного соответствия в случае комплексного пространства Минковского $\mathbb{CM}$.

Обратимся теперь к случаю вещественного пространства Минковского M . Введем твисторную норму элемента $z = (\omega, \pi) \in T$, полагая $\Phi(z) = 2 \operatorname{Im} \langle \omega, \pi \rangle$, где $\langle \omega, \pi \rangle$ — эрмитово скалярное произведение векторов $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ в $\mathbb{C}^2$: $\langle \omega, \pi \rangle = \omega_1 \bar{\pi}_1 + \omega_2 \bar{\pi}_2$. Обозначим через N квадратичку в T , задаваемую уравнением $\Phi(z) = 0$, и через PN — соответствующую ей проективную квадратичку. Нетрудно проверить, что при твисторном соответствии точки M переходят в проективные прямые, целиком лежащие на PN :



$$\left\{ \text{точка } M \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{проективная прямая, лежащая} \\ \text{на } PN \end{array} \right\}.$$

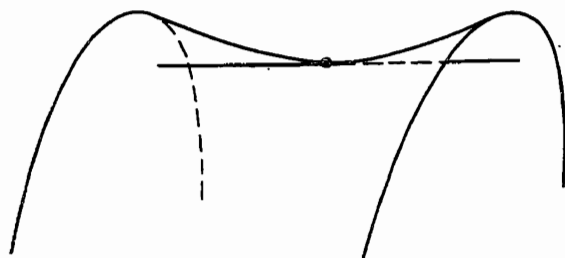
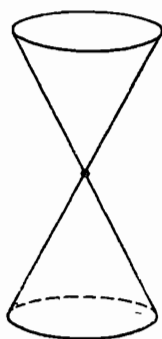
Образом световой прямой в M будет точка PN , которая отождествляется с пучком проективных прямых, лежащих в пересечении комплексной касательной плоскости к PN в рассматриваемой точке с самой квадратичкой PN :



{ световая прямая
в M }



{ точка $PN = (\text{точка } PN; \text{ комплексная касательная плоскость к } PN \text{ в этой точке}) \equiv \text{пучок проективных прямых, лежащих в комплексной касательной плоскости и проходящих через данную точку}$ }



{ световой конус в $M \equiv \text{пучок световых прямых, проходящих через фиксированную точку } M$ }



{ проективная прямая в $PN \equiv \text{пересечение } PN \text{ с комплексной касательной плоскостью к } PN \text{ в любой точке фиксированной проективной прямой}$ }

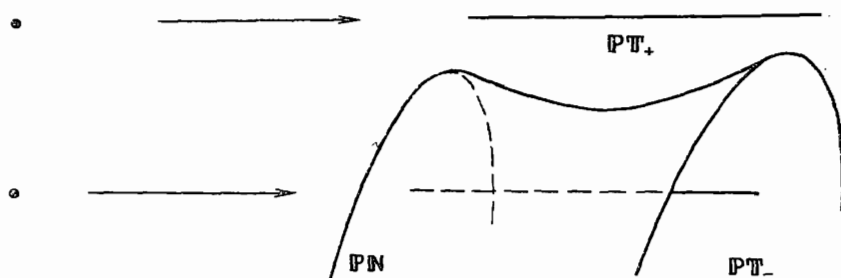
Тем самым в случае вещественного пространства Минковского мы имеем следующую двойственность при твисторном соответствии:

$$\begin{aligned} \{ \text{точки } M \} &\longrightarrow \{ \text{проективные прямые на } \mathbb{P}N \}, \\ \{ \text{световые лучи } M \} &\longrightarrow \{ \text{точки } \mathbb{P}N \}. \end{aligned}$$

Следовательно, световые лучи в пространстве Минковского M , которые могут пересекаться друг с другом в M , распадаются на отдельные точки $\mathbb{P}N$. Этот факт имеет важное значение в теории твисторов. "Идеальное множество" $M \setminus M$ можно, как и в случае комплексного пространства Минковского, отождествить со световым конусом "в бесконечности".

Квадрика N делит пространство твисторов T на две части — область положительных твисторов $T_+ = \{x \in T: \Phi(x) > 0\}$ и область отрицательных твисторов $T_- = \{x \in T: \Phi(x) < 0\}$. Ограничение твисторного соответствия на трубы будущего и прошлого CM_+ , CM_- дает

$$\{ \text{точка } CM_+ \} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{проективная прямая,} \\ \text{лежащая в } \mathbb{P}T_+ \end{array} \right\}$$



$$\{ \text{точка } CM_- \} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{проективная прямая,} \\ \text{лежащая в } \mathbb{P}T_- \end{array} \right\},$$

т.е. точка $CM_{\pm}$ переходит в проективную прямую, лежащую в $\mathbb{P}T_{\pm}$.

Таким образом, твисторная интерпретация вещественного пространства Минковского M связана с квадратикой $N = \{\tilde{\Phi}(x) = 0\}$ в T , задаваемой эрмитовой формой $\tilde{\Phi}$ сигнатуры $(2, 2)$. В подходящем базисе пространства T эту квадратичку можно записать в виде $\tilde{\Phi}(x) = |x_1|^2 + |x_2|^2 - |x_3|^2 - |x_4|^2 = 0$. Группа преобразований $SU(2, 2)$ пространства T сохраняет квадратичку N и потому индуцирует линейные преобразования пространства Минковского, переводящие световые прямые в световые прямые и световые конусы в световые конусы. Иначе говоря, преобразования из $SU(2, 2)$ индуцируют конформные преобразования пространства Минковского M , причем матрицы $\pm A, \pm iA \in SU(2, 2)$ порождают одно и то же преобразование M . Тем самым мы можем определить пространство твисторов T как пространство фундаментального представления группы $SU(2, 2)$, 4-кратной накрывающей связной компоненты единицы C_+ конформной группы C , состоящей из конформных преобразований, сохраняющих ориентацию оси (x^0) в M . Комплексный вариант этого утверждения был отмечен выше в п.1.

Остановимся подробнее на групповой структуре твисторной модели $G_2(T)$ пространства Минковского. Группа $G = SL(4, \mathbb{C})/\{\pm I, \pm iI\}$, где I — единичная 4×4 -матрица, естественным образом действует на пространстве $G_2(T)$. Фиксируем базис $\{e_i\}$ векторного пространства T , в котором квадратика N имеет вид $\tilde{\Phi}(x) = 0$. Запишем произвольное линейное преобразование T в виде блочной 4×4 -матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A, B, C, D — комплексные 2×2 -матрицы. Если обозначить через $P_0 = \{x \in T: x_3 = x_4 = 0\}$ фиксированное подпространство из $G_2(T)$, то подгруппа изотропии G_0 группы G в точке P_0 задается блочными матрицами, в которых $C = 0$, $\det A \cdot \det D = 1$. Поэтому пространство $G_2(T)$ является однородным пространством G/G_0 группы G по подгруппе G_0 . Обозначим теперь через G^R вещественную форму группы G , совпадающую с подгруппой G вида $G^R = SU(2, 2)/\{\pm I, \pm iI\}$. Ее подгруппа изотропии G_0^R в точке P_0 совпадает с $G_0 \cap G^R$. Однородное пространство G^R/G_0^R является твисторной моделью трубы будущего

$\mathbb{C}M_+$. Действительно, твисторный образ $\mathbb{C}M_+$, как было указано, совпадает с многообразием двумерных подпространств, лежащих целиком в T_+ . Такие 2-подпространства в T будем называть положительными, а многообразие всех положительных подпространств обозначать через $G_2^+(T)$. Так как подпространство P_0 положительно относительно $\tilde{\Phi}$, а группа G^R сохраняет это свойство, то однородное пространство G^R/G_0^R совпадает с $G_2^+(T) \cong \mathbb{C}M_+$. Вообще, назовем подпространство $P \in G_2(T)$ (p, q) -подпространством, если ограничение формы $\tilde{\Phi}$ на P имеет сигнатуру (p, q) , где $p, q = +, -, 0$. Обозначим многообразие всех (p, q) -подпространств в T через $G_2^{p, q}(T)$, так что $G_2^+(T) = G_2^{++}(T)$. В силу твисторного соответствия имеем следующие отождествления: $G_2^{++}(T) \cong G_2^+(T) \cong \mathbb{C}M_+$, $G_2^{--}(T) \cong G_2^-(T) \cong \mathbb{C}M_-$, $G_2^{00}(T) \cong G_2^0(T) \cong M$. Пространства $G_2^{++}(T)$, $G_2^{--}(T)$, $G_2^{+-}(T)$, $G_2^{+0}(T)$, $G_2^{-0}(T)$, $G_2^{00}(T)$ исчерпывают различные орбиты в пространстве $G_2(T)$ группы G^R ; первые две из этих орбит открыты, последняя замкнута.

Рассмотрим теперь твисторное соответствие в случае евклидова пространства E . Тогда

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \text{---} \end{array}$$

$$\{ \text{точка } E \} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{проективная прямая в } \mathbb{P}T, \\ \text{инвариантная относительно} \\ \text{отображения } j: [z_1, z_2, z_3, z_4] \rightarrow \\ \rightarrow [-\bar{z}_2, \bar{z}_1, -\bar{z}_4, \bar{z}_3] \end{array} \right\}.$$

Указанные j -инвариантные проективные прямые не пересекаются друг с другом. Более того, в рассматриваемом случае твисторное соответствие совпадает с расслоением Хопфа

$$\begin{array}{c} \mathbb{CP}^3 \\ \pi \downarrow \mathbb{CP}^1 \\ \mathbb{E} \end{array}$$

Здесь $\mathbb{E}$ — компактифицированное евклидово пространство, которое совпадает со сферой S^4 (так что множество "идеальных элементов" $\mathbb{E} \setminus \mathbb{E}$ состоит в данном случае из одной точки). Его можно отождествить также с кватернионной проективной прямой $\mathbb{HP}^1$, точками которой являются пары кватернионов⁽²⁷⁾

$[q_1, q_2]$, определенные с точностью до умножения на ненулевой кватернион. Отображение $\pi: \mathbb{CP}^3 \rightarrow \mathbb{HP}^1$ задается тавтологической формулой: $\pi([z_1, z_2, z_3, z_4]) = [z_1 + z_2 j, z_3 + z_4 j]$, где четверка $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ определена с точностью до умножения на ненулевое комплексное число, а пара $[z_1 + z_2 j, z_3 + z_4 j]$ — с точностью до умножения на ненулевой кватернион. Отображению $j: [z_1, z_2, z_3, z_4] \rightarrow [-\bar{z}_2, \bar{z}_1, -\bar{z}_4, \bar{z}_3]$ отвечает умножение пары $[z_1 + z_2 j, z_3 + z_4 j]$ на кватернион j , поэтому слои расслоения π являются j -инвариантными проективными прямыми и твисторное соответствие приобретает в рассматриваемом случае наиболее простой вид.

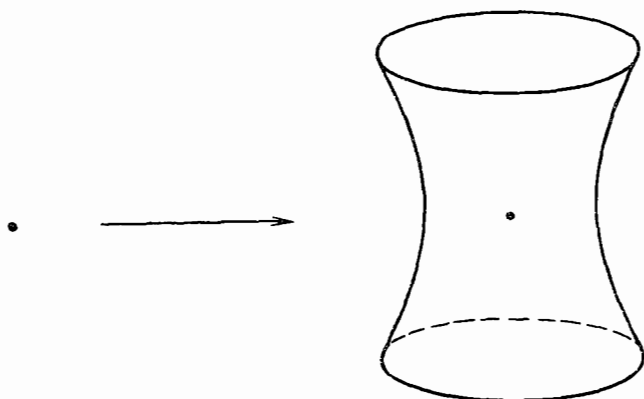
3. Клейнова модель пространства Минковского. Вернемся к твисторной модели $G_2(\mathbb{T})$ пространства Минковского. Любое подпространство из $G_2(\mathbb{T})$ задается (с точностью до умножения на ненулевое комплексное число) бивектором $p = p_1 \wedge p_2$, где p_1, p_2 — линейно независимые векторы в рассматриваемом подпространстве. Если $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, — стандартный базис пространства $\mathbb{T}$, то бивекторы $e_i \wedge e_j$, $i < j$, образуют базис внешнего квадрата $\wedge^2 \mathbb{T}$. Разлагая бивектор p по базису $\{e_i \wedge e_j\}$: $p = \sum_{i < j} p_{ij} e_i \wedge e_j$, мы можем сопоставить любому подпространству из $G_2(\mathbb{T})$ набор его плюккеровых координат $[p_{ij}]$, определенных с точностью до умножения на ненулевое комплексное число. Плюккеровы координаты удовлетворяют соотношению

которое вытекает из очевидного условия $p \wedge p = 0$. Пользуясь построенным соответствием, мы можем отождествить пространство $G_2(T)$ с проективной квадрикой PQ в пространстве CP^5 , задаваемой уравнением (2). Указанная модель PQ комплексного пространства Минковского CM называется моделью Клейна CM .

В подходящих координатах $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ пространства C^6 квадрику Q можно записать в виде

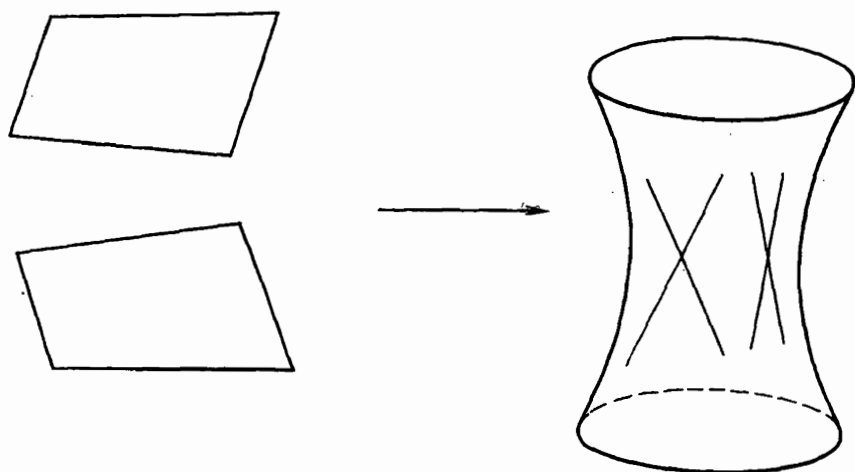
$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \quad (3)$$

или, коротко, $u^2 = v^2$, где $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in C^3$. В терминах модели Клейна основные объекты геометрии пространства Минковского получают следующую интерпретацию:

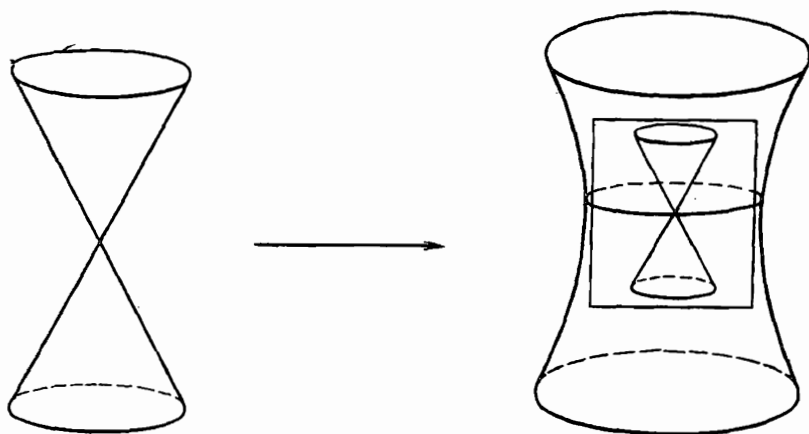


$\{ \text{точка } CM \} \longrightarrow \{ \text{точка квадрики } PQ \}.$

Квадрика Q с уравнением (3) имеет два семейства прямолинейных образующих — β -подпространств, задаваемых уравнениями $u = Av$, где $A \in O(3, C)$. Группа $O(3, C)$ состоит из двух связных компонент, выделяемых знаком $\det A$. Прямолинейные образующие $\{u = Av\}$ с $\det A = 1$ отвечают в силу твисторного соответствия α -плоскостям, образующие $\{u = Av\}$ с $\det A = -1$ отвечают β -плоскостям:



Аналогично,



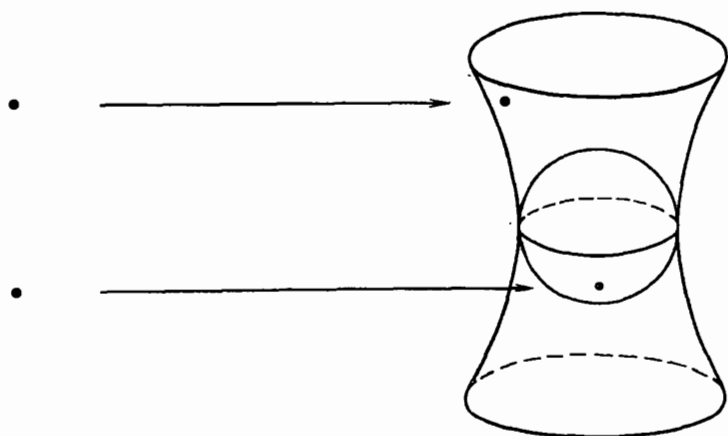
{ комплексный световой
конус в CM }



{ касательный конус PQ = пере-
сечение касательного простран-
ства к PQ с квадрикой PQ }.

Вещественное пространство Минковского и евклидово пространство получают следующую интерпретацию в терминах квадрики PQ :

$$\{ \text{точка } M \} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{точка вещественной квадрики} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0, \\ \text{лежащей в } PQ \end{array} \right]$$



$$\{ \text{точка } E \} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{точка вещественной квадрики} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 = 0, \\ \text{лежащей в } PQ \end{array} \right]$$

Рассмотрим приведенные результаты с групповой точки зрения. Преобразования из группы $G = SL(4, \mathbb{C})/\{\pm I, \pm iI\}$, действующие на пространстве $G_2(T)$, порождают проективные преобразования $\mathbb{CP}^5$, сохраняющие квадратичную форму PQ , т.е. преобразования из группы $O(6, \mathbb{C})/\{\pm I\}$. Тем самым имеется гомоморфизм $G \rightarrow O(6, \mathbb{C})/\{\pm I\}$, согласованный с известным изоморфизмом $SL(4, \mathbb{C}) \cong Spin(6, \mathbb{C})$. Аналогично, клейнова интерпретация вещественного пространства Минковского связана с локальным изоморфизмом $SU(2, 2) \cong SO(4, 2)$, а в евклидовом случае имеем локальный изоморфизм $SL(2, \mathbb{H}) \cong SO(5, 1)$.

"Твисторная программа" Пенроуза состоит в том, чтобы, пользуясь твисторным соответствием, переводить конформно инвариантные поля (т.е. решения конформно инвариантных уравнений), заданные на подмножествах комплексного пространства Минковского, в объекты комплексной алгебраической геометрии (такие, как гомоморфные расслоения, когомологии с коэффициентами в аналитических пучках), определенные на подмножествах твисторного пространства $\mathbb{PT}$. В работах Пенроуза и других авторов, представленных в сборнике [3], эта программа была реализована для калибровочных полей, т.е. решений линейных безмассовых уравнений на пространстве Минковского. Здесь мы покажем, как твисторный метод работает для нелинейных уравнений Янга - Миллса и двумерных σ -моделей.

Более подробное изложение твисторной геометрии см. в упомянутом сборнике и книге [4].

4. Твисторные многообразия. Здесь излагается обобщение твисторного расслоения $\pi: \mathbb{CP}^3 \rightarrow \mathbb{E}$, предложенное в работе Атьи - Хитчина - Зингера [5]. Пусть X - ориентируемое риманово многообразие размерности 4. На расслоении $\Omega^2 = \Omega^2(X)$ внешних 2-форм многообразия X действует $*$ -оператор Ходжа, который сопоставляет 2-форме u 2-форму $*u$, дополняющую форму u до формы объема vol на X , так что для любой 2-формы $v \in \Omega^2$ выполняется равенство $v \wedge *u = (v, u) \text{vol}$, где (v, u) - естественное скалярное произведение на Ω^2 , индуцированное римановой метрикой X . Определение оператора $*$ инвариантно относительно конформных преобразований X и $*^2 = 1$. Разлагая Ω^2_x в прямую сумму собственных (± 1) -подпространств оператора $*$, представим расслоение Ω^2 в виде прямой суммы

$$\Omega^2 = \Omega_+^2 \oplus \Omega_-^2 \quad (4)$$

подрасслоений Ω_+^2 , Ω_-^2 , называемых соответственно расслоениями автодуальных и антиавтодуальных форм на X . На языке алгебр Ли разложение (4) отвечает изоморфизму $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, который порождает изоморфизм групп Ли

$$\text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) * \text{SU}(2). \quad (5)$$

Последнее соотношение является одним из удивительных изоморфизмов, возникающих в малых размерностях, и играет важную роль в твисторном подходе к полям Янга – Миллса. (Стоит отметить, что группа $\text{SO}(n)$, универсальной накрывающей которой служит группа $\text{Spin}(n)$, проста для всех n , кроме $n = 4$. Это выделяет размерность 4 среди других размерностей в теории калибровочных полей, см. [6].)

Предположим, что многообразие X допускает спинорную структуру⁽⁸¹⁾ или наше рассмотрение является локальным (как мы увидим ниже, эти предположения на самом деле несущественны). Спинорное расслоение $S = S(X)$ разлагается в прямую сумму $S = S_+ \oplus S_-$ расслоений правых и левых спиноров (на языке групп Ли это разложение отвечает изоморфизму (5)). Проективизация $Z = \mathbb{P}(S_+) \rightarrow X$ расслоения правых спиноров и называется твисторным расслоением многообразия X . Это определение нуждается в пояснении, раскрывающем его значение.

Рассмотрим расслоение $\Omega^1 = \Omega^1(X)$ внешних 1-форм на многообразии X . Пусть $x \in X$. Рассмотрим комплексифицированную клиффордову алгебру⁽⁸¹⁾ $C_x \otimes \mathbb{C}$, построенную по пространству Ω_x^1 . Алгебра $C_x \otimes \mathbb{C}$ действует на пространстве S_x посредством спинорного представления; при этом пространство эндоморфизмов $\text{Hom}(S_+, S_-)_x$ отождествляется с комплексифицированным пространством $\Omega_x^1 \otimes \mathbb{C}$. Если фиксировать ненулевой спинор $\phi \in (S_+)_x$, то клиффордово умножение $v \mapsto v \cdot \phi$ задает изоморфизм вещественного пространства Ω_x^1 с комплексным векторным пространством $(S_-)_x$. Пользуясь этим изоморфизмом, мы можем наделить касательное пространство TX_x комплексной структурой⁽⁴⁾, совместимой с метрикой и ориентацией. Так как умножение спино-

ра ψ на ненулевое комплексное число не меняет комплексной структуры, получаем отсюда, что пространство $Z_x = P(S_+)_x$ параметризует различные комплексные структуры на TX_x , совместимые с метрикой и ориентацией. Подгруппа группы $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$, действующей на S_x , оставляющая на месте спинор ψ с точностью до ненулевого множителя, совпадает с $S^1 \times SU(2)$. Поэтому Z_x можно отождествить с $SU(2)/S^1 \cong S^2$. С другой стороны, множество комплексных структур на TX_x , согласованных с метрикой и ориентацией, можно получить, действуя на фиксированную структуру сопряжениями с помощью матриц из $SO(4)$. При этом комплексные структуры в TX_x , отличающиеся на преобразование из $U(2)$, изоморфны. Значит, множество различных комплексных структур в TX_x совпадает с $SO(4)/U(2) \cong [SU(2) \times SU(2)]/[U(1) \times SU(2)] = SU(2)/U(1)$. Тем самым пространство Z_x параметризует все различные комплексные структуры на TX_x , совместимые с метрикой и ориентацией, и расслоение $Z \rightarrow X$ есть расслоение совместимых комплексных структур.

Вернемся к случаю $X = E \approx S^4$ и покажем, как изложенная схема согласуется с приведенным выше определением твисторного расслоения $CP^3 \rightarrow E$. Воспользуемся отмеченным в п.3 изоморфизмом $SL(2, \mathbb{H}) \cong SO(5, 1)$, из которого, переходя к максимальным компактным подгруппам, получим $Sp(2) \cong SO(5)$, где $Sp(2)$ — подгруппа $SL(2, \mathbb{H})$, состоящая из кватернионных унитарных 2×2 -матриц. Заметим, далее, что группа $Sp(2)$ действует на пространстве CP^3 таким образом, что CP^3 является однородным пространством

$$CP^3 = Sp(2)/[U(1) \times Sp(1)]$$

относительно этого действия. С другой стороны, сферу S^4 мы можем отождествить с однородным пространством

$$S^4 = SO(5)/SO(4) \cong Sp(2)/[Sp(1) \times Sp(1)],$$

поскольку $Sp(1) \cong SU(2)$. Твисторное расслоение в рассматриваемом случае совпадает с расслоением $\pi: CP^3 \rightarrow S^4$, задаваемым посредством

$$Sp(2)/[U(1) \times Sp(1)] \rightarrow Sp(2)/[Sp(1) \times Sp(1)].$$

Слоем этого расслоения над точкой $x \in S^4$ является пространство $Sp(1)/U(1)$ различных совместимых комплексных структур в TS_x^4 . Твисторное многообразие Z в этом случае совпадает с комплексным многообразием CP^3 . Оказывается, и в общем случае твисторное многообразие Z можно снабдить почти комплексной структурой⁽⁴⁾, которая в некоторых важных случаях является интегрируемой (см. п. 2.4).

В нашем построении твисторного расслоения $Z \rightarrow X$ мы формально пользовались наличием на X спинорной структуры. Имеется, однако, другое, не использующее спинорной структуры, определение твисторного расслоения, опирающееся на разложение (4). Пусть $S(\Omega_+^2)_x$ — единичная сфера в пространстве автодуальных 2-форм $(\Omega_+^2)_x$ в точке $x \in X$. Если $\mu \in S(\Omega_+^2)_x$, то, выбирая подходящий ориентированный ортонормированный базис $\{e_i\}$ в пространстве TX_x , мы можем записать μ в виде $\mu = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. отождествляя Ω_x^2 с пространством эндоморфизмов касательного пространства TX_x , сопоставим μ комплексную структуру J_x в TX_x , т.е. изоморфизм пространства TX_x , действующий по формулам $J_x e_1 = e_2$, $J_x e_3 = e_4$, $J_x^2 = -I$. Это рассуждение показывает, что пространство комплексных структур в TX_x , совместимых с метрикой и ориентацией, можно канонически отождествить со сферой $S(\Omega_+^2)_x$. Поэтому твисторное расслоение $Z \rightarrow X$ можно иначе определить как сферическое под-расслоение $S(\Omega_+^2) \rightarrow X$ расслоения автодуальных 2-форм $\Omega_+^2 \rightarrow X$.

§ 2. Автодуальные поля Янга — Миллса

1. Исходные понятия. Пусть X — компактное ориентируемое риманово 4-мерное многообразие (мы ограничиваемся евклидовой теорией полей Янга — Миллса, поскольку основные результаты, излагаемые ниже, относятся именно к этому случаю). Пусть, далее, G — компактная группа Ли, называемая также калибровочной группой. Калибровочным потенциалом A называется связность в главном G -расслоении P над X , задаваемая $\mathfrak{f}$ -формой A на P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Обозначая через⁽⁸⁰⁾ $ad P = P \times_G \mathfrak{g}$ присоединенное расслоение главного расслоения P , можно задать потенциал $\mathfrak{f}$ -формой $A \in \Omega^1(X, ad P)$.

Основным примером калибровочной группы для нас будет группа $SU(2)$; в этом случае калибровочный потенциал A задается в локальных координатах (x^0, x^1, x^2, x^3) формой $A \sim \sum_{\mu=0}^3 A_\mu(x) dx^\mu$, где $A_\mu(x)$ — комплексные косоэрмитовы 2×2 -матрицы с нулевым следом. В частном случае $G = U(1)$ калибровочный потенциал совпадает с обычным электромагнитным 4-потенциалом. Кривизна F связности A называется калибровочным полем и задается 2-формой F на P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ или 2-формой $F \in \Omega^2(X, \text{ad } P)$, равной

$$F = DA = dA + \frac{1}{2} [A, A],$$

где D — оператор ковариантного внешнего дифференцирования $D: \Omega^p(X, \text{ad } P) \rightarrow \Omega^{p+1}(X, \text{ad } P)$, порожденный связностью A . В локальных координатах (x^μ) калибровочное поле F задается формой $F \sim \sum_{\mu, \nu=0}^3 F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$, где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. В частном случае $G = U(1)$ тензор $(F_{\mu\nu})$ совпадает с тензором Максвелла электромагнитного поля.

Калибровочным преобразованием называется послыйный диффеоморфизм $g: P \rightarrow P$ расслоения P , который G -эквивариантен, т.е. $g(hp) = hg(p)$ для любых $h \in G$, $p \in P$. Иначе говоря, g есть сечение расслоения $P \times_G G$. Калибровочное преобразование локально задается гладкой функцией $g(x)$ со значениями в группе G , а ее действие на калибровочный потенциал A и поле F определяется формулами

$$A_g = g^{-1} dg + (\text{Ad } g^{-1})A, \quad F_g = (\text{Ad } g^{-1})F.$$

В частности, для группы $G = SU(2)$ получаем

$$A_g = g^{-1} dg + g^{-1} A g, \quad F_g = g^{-1} F g.$$

В электромагнитном случае $G = U(1)$ калибровочное преобразование совпадает с фазовым преобразованием $g(x) = e^{i\theta(x)}$, действие которого на потенциал A сводится к градиентному преобразованию $A \rightarrow A - i d\theta$, при котором электромагнитное поле не изменяется.

Функционал действия Янга - Миллса определяется формулой

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_X \|F\|^2 \text{vol},$$

где норма задается обычным скалярным произведением в пространстве форм, порождаемым римановой метрикой на X , и формой Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В случае $G = SU(2)$ эту формулу можно переписать, используя $*$ -оператор Ходжа (см. п. 1.4), в виде

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_X \text{tr}(F \wedge *F).$$

Критические точки функционала Янга - Миллса называются полями Янга - Миллса. Они удовлетворяют уравнению Эйлера - Лагранжа

$$D^*F = 0,$$

где $D^* = *D*$: $\Omega^{p+1}(X, \text{ad } P) \rightarrow \Omega^p(X, \text{ad } P)$ - оператор, сопряженный оператору D . Это уравнение называется уравнением Янга - Миллса; чаще его записывают в виде

$$D(*F) = 0. \quad (6)$$

Калибровочное поле F называется автодуальным (соотв. анти-автодуальным), если $*F = F$ (соотв. $*F = -F$). В силу тождества Бьянки $DF = 0$ (вытекающего из соотношения $F = DA$), калибровочные поля - решения уравнений дуальности

$$*F = \pm F \quad (7)$$

автоматически являются полями Янга - Миллса, т.е. удовлетворяют (6). Полагая $F_{\pm} = \frac{1}{2}(*F \pm F)$, представим поле F в виде $F = F_+ + F_-$, где $*F_{\pm} = \pm F_{\pm}$ (заметим, что поля $F_{\pm}$ не обязаны удовлетворять тождеству Бьянки, а потому и уравнению Янга - Миллса). Выражение для

действия Янга - Миллса можно переписать в виде

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_X (\|F_+\|^2 + \|F_-\|^2) \text{vol}.$$

Пусть теперь E - векторное расслоение над X , ассоциированное с главным расслоением $P \rightarrow X$. Тогда i -й класс Понтрягина, топологический инвариант E , может быть вычислен по формуле

$$p_1(E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_X (\|F_+\|^2 - \|F_-\|^2) \text{vol} = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \text{tr}(F \wedge F).$$

Отсюда следует, что всегда

$$S_{YM}(A) \geq 4\pi^2 |p_1(E)|,$$

причем равенство достигается только для решений уравнений дуальности. Число $p_1(E)$ называется топологическим зарядом поля F . Таким образом, абсолютный минимум действия Янга - Миллса достигается на (анти)автодуальных полях. Автодуальные поля Янга - Миллса называются также инстантонами (антиавтодуальные - антиинстантонами). До сих пор остается открытым вопрос - существуют ли другие критические точки функционала Янга - Миллса помимо абсолютных минимумов. Доказано только, что для однородных многообразий X у действия Янга - Миллса нет других локальных минимумов, помимо абсолютных (см. [7]). Пространство модулей инстантонов, т.е. пространство классов инстантонов по модулю калибровочной эквивалентности, является основным объектом изучения в классической теории полей Янга - Миллса.

Обратимся теперь к наиболее важному частному случаю $X = S^4$. Его значение определяется тесной связью с евклидовой теорией полей Янга - Миллса. Пусть задано поле Янга - Миллса на $\mathbb{R}^4$ с конечным действием $S_{YM}(A) < \infty$. Тогда по теореме Уленбек [8] это поле можно продолжить до поля Янга - Миллса в некотором главном расслоении $P \rightarrow S^4$. Точнее, существует поле Янга - Миллса в расслоении $P \rightarrow S^4$, ограничение которого на $\mathbb{R}^4$ калибровочно эквивалентно исходному. Поскольку метрика на $S^4 \setminus \{\infty\}$ конформно эквивалентна евклидовой метрике $\mathbb{R}^4$ с помощью стереографической проекции,

то вопрос о продолжении поля Янга – Миллса на S^4 сводится к нахождению подходящих асимптотических условий на бесконечности, которые и определяют искомое главное расслоение P . Таким образом, изучение полей Янга – Миллса на S^4 эквивалентно изучению полей Янга – Миллса на $\mathbb{R}^4$, обладающих конечным действием. Приведем способ вычисления топологического заряда полей последнего типа, использующий их асимптотическое поведение. Для конечности действия

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F \wedge * F) \quad (8)$$

предположим, что при $|x| \rightarrow \infty$ калибровочный потенциал A стремится к тривиальному: $A(x) \sim g(x)^{-1} dg(x)$ (тривиальным или чисто калибровочным называется потенциал A_0 , калибровочно эквивалентный нулю, т.е. имеющий вид $A_0(x) = g(x)^{-1} dg(x)$, где g – калибровочное преобразование). Ограничивая калибровочное преобразование $g(x)^{-1}$ на сферу "в бесконечности", т.е. на сферу S_R^3 достаточно большого радиуса R , получим гладкое отображение $g^{-1}: S_R^3 \rightarrow G$, которое определяет гомотопический класс $[S^3, G]_R$. Если потребовать, чтобы $g(x_0) = 1$ в некоторой фиксированной точке $x_0 \in S_R^3$, то g будет однозначно определяться по A и задавать элемент гомотопической группы $\pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$, совпадающий с введенным выше топологическим зарядом. В частном случае $G = SU(2)$ топологический заряд потенциала A совпадает со степенью отображения $g^{-1}: S_R^3 \rightarrow SU(2) \approx S^3$.

Конечность действия (8) для инстантона на $\mathbb{R}^4$ означает, на "физическом" языке, что инстантон "локализован" в пространстве $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ и во "времени" $(x^0) \subset \mathbb{R}^4$, откуда и происходит его название.

2. Явные решения. Мы ограничимся здесь случаем евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ и калибровочной группы $G = SU(2)$. Размерность пространства $\mathcal{M}_k$ модулей инстантонов с топологическим зарядом k (т.е. размерность факторпространства пространства автодуальных полей Янга – Миллса на $\mathbb{R}^4$ с конечным действием и зарядом k по модулю калибровочных преобразований) равна $8k - 3$ (см. [5]).

Начнем со случая $k = 1$. Отождествим $\mathbb{R}^4$ с пространством кватернионов⁽²⁷⁾ $\mathbb{H}$, а группу $SU(2)$ с группой $Sp(1)$ кватернионов, по модулю равных 1. Алгебра Ли этой группы совпадает с алгеброй чисто мнимых кватернионов, поэтому калибровочный потенциал на $\mathbb{R}^4$ задается гладкой 1-формой на $\mathbb{H}$, коэффициенты которой являются чисто мнимыми кватернионами. Первый пример инстантона был построен в работе [9]. Для нас удобнее начать с антиинстантона заряда -1 , который в кватернионных обозначениях задается калибровочным потенциалом вида

$$A(x) = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{x} \cdot dx}{1 + |x|^2} \right\} = \frac{\bar{x} dx - d\bar{x} \cdot x}{2(1 + |x|^2)},$$

где $x = x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3$, а Im обозначает взятие чисто мнимой части кватерниона. Калибровочное поле имеет вид

$$F(x) = \frac{d\bar{x} \wedge dx}{(1 + |x|^2)^2} = \text{Im} \left\{ \frac{d\bar{x} \wedge dx}{(1 + |x|^2)^2} \right\}$$

и, как нетрудно проверить, антиавтодуально. Поясним, почему заряд равен -1 . При $|x| \rightarrow \infty$ имеем $A(x) \sim \text{Im} \{x \cdot d\bar{x} / |x|^2\} = \text{Im} \{x^{-1} dx\}$. Но при $|x| \neq 0$ последний потенциал является чисто калибровочным, так как

$$\text{Im} \{x^{-1} dx\} = g(x)^{-1} dg(x),$$

где $g(x) = x/|x|$. Поэтому топологический заряд поля F совпадает со степенью отображения $g^{-1}: S^3 \rightarrow S^3$, задаваемого формулой $x \rightarrow \bar{x}/|x|$. Степень этого отображения равна -1 . Следовательно, потенциал A определяет 1-антиинстантон на $\mathbb{R}^4$.

Поясним в этой простой ситуации, как сопоставить 1-антиинстантону главное расслоение с антиавтодуальной связностью на S^4 , не прибегая к теореме Карен Уленбек. Для этого применим калибровочное преобразование $g(x)^{-1}$ к потенциалу $A(x)$. Полученный потенциал $A_{g^{-1}}(x)$ равен $A(y)$, где $y = x^{-1}$. Рассмотрим теперь стандартное покрытие кватернионной проективной прямой $\mathbb{HP}^1$ открытыми множествами $U_0 = \{[x, y] \in \mathbb{HP}^1: y \neq 0\}$, $U_\infty = \{[x, y] \in \mathbb{HP}^1: x \neq 0\}$ и определим функцию перехода $g_{0\infty}: U_0 \cap U_\infty \rightarrow Sp(1)$, полагая

$g_{0\infty}(x) = g(x)^{-1}$. Функция перехода $g_{0\infty}$ определяет главное расслоение P над S^4 , а форма A , равная $A(x)$ на U_0 (x — локальная координата на U_0) и $A(y)$ на U_∞ ($y = x^{-1}$ — локальная координата на U_∞), определяет антиавтотдуальную связность в расслоении P .

Формула для $\bar{I}$ -инстантона имеет вид

$$A(x) = \text{Im} \left\{ \frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2} \right\}.$$

Произвольный $\bar{I}$ -инстантон можно получить, исходя из калибровочного потенциала вида

$$A(x) = \text{Im} \left\{ \frac{(x - x_0) d\bar{x}}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} \right\},$$

где $x_0 \in \mathbb{H}$, λ вещественно, т.е. определение A зависит от пяти вещественных параметров.

Обобщая метод, использованный для построения $\bar{I}$ -антиинстантона, мы можем искать формулу для произвольного калибровочного потенциала в виде

$$A(x) = \text{Im} \left\{ \varphi(x)^{-1} \partial \varphi(x) \right\}, \quad (9)$$

где $\varphi(x)$ — вещественная функция от $x \in \mathbb{H}$, а $\partial \varphi(x) = (\partial \varphi / \partial x) dx$. Для антиавтотдуальности A нужно потребовать, чтобы выполнялось дифференциальное уравнение $\varphi^{-1} \partial \bar{\partial} \varphi = \varphi^{-1} \Delta \varphi = 0$. Первое нетривиальное решение (решение т'Хофта) получается, если взять в качестве φ функцию

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j^2}{|x - x_j|^2}.$$

Подставляя φ в формулу (9), получим выражение для калибровочного потенциала A , которое будет содержать особенности вида $\text{Im} \left\{ (x - x_j)^{-1} dx \right\}$ в точках x_j , т.е. такого же типа, как и в случае $\bar{I}$ -антиинстантона. Если, как и в случае $\bar{I}$ -антиинстантона, применить к $A(x)$ калибровочное преобразование $g_j(x) = (\bar{x} - \bar{x}_j) / |x - x_j|$, мы получим калибровочно эквивалентный потенциал

$$A_j(x) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{(\bar{x} - \bar{x}_j) dx}{\lambda_j^2 + |x - x_j|^2} \right\} + \dots,$$

который уже не имеет особенностей вблизи x_j . По построению потенциал A антиавтотдуален вне точек $\{x_j\}$. Чтобы сопоставить ему антиинстантон на S^4 , нужно, как и выше, рассмотреть открытое покрытие S^4 , задаваемое шарами U_j с центрами в точках x_j и дополнением U_∞ к объединению этих точек в S^4 . Искомое расслоение на S^4 задается функциями перехода $g_j(x)$ в покрытии $\{U_j, U_\infty\}$, а формы $\{A_j, A\}$ определяют антиавтотдуальную связность в этом расслоении. Аналогичным образом можно построить k -инстантон на S^4 , применяя сопряжение в формуле (9).

Построенное решение допускает естественную геометрическую интерпретацию (см. ниже). Заметим, что оно зависит от $5k$ вещественных параметров, а если учесть, что в наших рассуждениях мы фиксировали $\infty \in S^4$, то от $5k + 4$ параметров. Следовательно, при $k \geq 3$ имеются инстантоны, не охваченные предъявленными формулами. Их описание дается АДНМ-конструкцией.

3. Теорема Уорда и АДНМ-конструкция. Начнем с твисторной интерпретации полей Янга – Миллса в главном $SU(2)$ -расслоении $P \rightarrow S^4$. Пусть $E \rightarrow S^4$ – векторное расслоение ранга 2, ассоциированное с расслоением P . Пусть, далее, A – антиавтотдуальная связность в расслоении P и ∇ – отвечающая ей ковариантная производная, определенная на сечениях расслоения E . Рассмотрим твисторное расслоение $\pi: \mathbb{CP}^3 \rightarrow S^4$, построенное в п. 1.2, и обозначим через $\tilde{E} = \pi^*E$ подъем расслоения E на $\mathbb{CP}^3$ с помощью отображения π . Оказывается, если связность A была антиавтотдуальной, расслоение $\tilde{E}$ будет голоморфным. Кроме того, оно по построению голоморфно тривиально на j -инвариантных проективных прямых в $\mathbb{CP}^3$ -слоях отображения π и обладает также симплектической и кватернионной структурами (см. в этом сборнике статью Хитчина "Монополи и геодезические", § 4).

Верно и обратное, т.е. имеется взаимно однозначное соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{SU}(2)\text{-антиинстан-} \\ \text{тоны на } S^4 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные расслоения ранга 2} \\ \text{на } \mathbb{CP}^3, \text{ голоморфно три-} \\ \text{виальные на } j\text{-инвариантных} \\ \text{проективных прямых и обла-} \\ \text{дающие симплектической и} \\ \text{кватернионной структурами} \end{array} \right\}$$

(по модулю калибровоч-
ной эквивалентности) (с точностью до изоморфизма)

Первая теорема такого типа была установлена Уордом (см. ниже).

Остановимся на различных обобщениях сформулированного результата. Он переносится почти без изменений на антиавтотдуальные $\text{Sp}(n)$ -поля Янга - Миллса, которым будут отвечать голоморфные расслоения ранга $2n$ на $\mathbb{CP}^3$. Для $U(n)$ -полей, т.е. для эрмитовых векторных расслоений E над S^4 , отвечающие им голоморфные расслоения $\tilde{E}$ над $\mathbb{CP}^3$ обладают следующим свойством вещественности: на $\tilde{E}$ существует положительная вещественная форма, т.е. антиголоморфный изоморфизм $b: \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}^*$, накрывающий отображение $j: \mathbb{CP}^3 \rightarrow \mathbb{CP}^3$ и задающий положительно определенную эрмитову форму в пространстве голоморфных сечений $\tilde{E}$ над любой j -инвариантной проективной прямой. Иначе говоря, в этом случае теорема Уорда принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{U}(n)\text{-антиин-} \\ \text{стантоны на } S^4 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные расслоения} \\ \text{ранга } n \text{ на } \mathbb{CP}^3, \text{ голо-} \\ \text{морфно тривиальные на } j\text{-ин-} \\ \text{вариантных проективных пря-} \\ \text{мых и обладающие положи-} \\ \text{тельной вещественной формой} \end{array} \right\}$$

(по модулю калибро-
вочной эквивалентности) (с точностью до изоморфизма)

Теорема Уорда допускает и чисто комплексное обобщение (именно в этой форме она была предложена Уордом [11]). Рассмотрим это обобщение сначала в случае трубы будущего CM_+ . Пусть E — голоморфное векторное расслоение над CM_+ и V — голоморфная ковариантная производная в E , ассоциированная

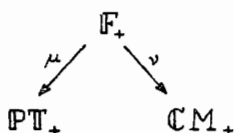
с голоморфной связностью A . Назовем связность A антиавто-
дуальной, если ее кривизна равна нулю на α -плоскостях
(см. п.1.2). Комплексный вариант теоремы Уорда утверждает, что
имеется взаимно однозначное соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные антиавто-} \\ \text{дуальные связности} \\ \text{на } \mathcal{CM}_+ \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные векторные рас-} \\ \text{слоения на } \mathbb{PT}_+, \text{ голо-} \\ \text{морфно тривиальные на проек-} \\ \text{тивных прямых, лежащих в } \mathbb{PT}_+ \end{array} \right\}$$

(по модулю калибровоч-
ной эквивалентности) (с точностью до изоморфизма)

Конструкция соответствия, устанавливаемого теоремой Уорда, ввиду своей простоты и естественности заслуживает того, чтобы привести ее здесь (близкая конструкция использована Хитчином в статье "Монополи и геодезические", § 4). Именно, если $\tilde{E}$ — голоморфное векторное расслоение над $\mathbb{PT}_+$, голоморфно тривиальное на проективных прямых $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{PT}_+$, то определим слой расслоения E_x , где x — точка $\mathcal{CM}_+$, следующим образом. Слой E_x состоит по определению из голоморфных сечений расслоения $\tilde{E}$ над проективной прямой $\mathbb{CP}_x^1$, отвечающей точке x . Если, далее, проективные прямые $\mathbb{CP}_x^1$ и $\mathbb{CP}_{x'}^1$ пересекаются, то мы можем отождествить слои E_x и $E_{x'}$ друг с другом. Поскольку условие $\mathbb{CP}_x^1 \cap \mathbb{CP}_{x'}^1 \neq \emptyset$ означает, что точки x и x' лежат на одной комплексной световой прямой (см. п. 1.2), мы можем, пользуясь этим отождествлением, определить параллельный перенос вдоль комплексных световых прямых в $\mathcal{CM}_+$. Можно показать, что так определенный параллельный перенос порождает голоморфную связность в расслоении E . Поскольку α -плоскость в $\mathcal{CM}$ отвечает пучку проективных прямых, проходящих через фиксированную точку $\mathbb{CP}^3$ (см. п.1.2), указанная связность автоматически будет антиавтодуальной.

Для обратной конструкции $E \rightarrow \tilde{E}$ удобно воспользо-
ваться двойной диаграммой



где F_+ — пространство $(0, 1)$ -флагов в PT_+ , т.е. пар (точка PT_+ , содержащая ее проективная прямая в PT_+). Пространство CM_+ отождествляется при этом с грассмановым многообразием $G_1(PT_+)$ проективных прямых, лежащих в PT_+ ; μ, ν — естественные проекции. Обозначим через E' и V' подъемы расслоения E и связности ∇ на F_+ и определим слой расслоения $\tilde{E}$ в точке $Z \in PT_+$ как пространство сечений $z' \in \Gamma(\mu^{-1}(Z), E')$, удовлетворяющих уравнению $\nabla'_\mu z' = 0$, где ∇'_μ — составляющая V' , действующая вдоль слоев отображения μ . Иными словами, слой $\tilde{E}_Z$ состоит из горизонтальных сечений расслоения E' над $\mu^{-1}(Z)$. Корректность этого определения обеспечивается антиавтодуальностью V .

Мы сформулировали комплексную теорему Уорда для трубы будущего CM_+ , чтобы избежать дальнейших оговорок. На самом деле теорема остается справедливой, если заменить в ней PT_+ на область $\tilde{D}$ в CP^3 , такую, что лежащие в ней проективные прямые отвечают точкам некоторой области D в CM и область D обладает тем свойством, что пересечение с ней любой комплексной световой прямой связно и односвязно.

Автодуальные поля Янга — Миллса можно аналогичным образом описать в терминах двойственного пространства $(CP^3)^*$, состоящего из проективных плоскостей в CP^3 . Именно, назовем голоморфную связность A в области D в CM автодуальной, если ее кривизна равна нулю на β -плоскостях. Тогда

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные автодуальные} \\ \text{связности на} \\ D \subset CM \end{array} \right\}}{\left(\text{по модулю калибровочной} \right. \\ \left. \text{эквивалентности} \right)} \longleftrightarrow \frac{\left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные векторные рас-} \\ \text{слоения на } \tilde{D} \subset (CP^3)^*, \\ \text{голоморфно тривиальные на} \\ \text{проективных прямых, лежа-} \\ \text{щих в } \tilde{D} \end{array} \right\}}{\left(\text{с точностью до изоморфизма} \right)}.$$

Вернемся к евклидову случаю. Теорема Уорда сводит задачу описания (анти)инстантонов на S^4 к задаче классификации голоморфных векторных расслоений на CP^3 , голоморфно тривиальных на 4-параметрическом семействе проективных прямых и обладающих симплектической структурой. Эту задачу удастся решить

на основе метода монад, разработанного в работах Хоррокса, Барта и др. (см. статью Дональдсона "Инстантоны и геометрическая теория инвариантов" в этом сборнике). Соответствующая конструкция, называемая ADHM-конструкцией, предложенная в работе Агьи - Дринфельда - Хитчина - Манина [12], дает описание всех инстантонов на S^4 . К изложению этой конструкции мы теперь переходим.

Мы ограничимся изложением указанной конструкции для $Sp(n)$ -инстантонов (в случае калибровочной группы $U(n)$ требуются оговорки типа тех, что были сделаны в теореме Уорда для $U(n)$ -инстантонов). Итак, нужно построить кватернионное векторное расслоение E над S^4 со слоем $\mathbb{H}^n$ вместе с антиавтодуальной ковариантной производной ∇ в этом расслоении, число Понтрягина которого $p_1(E)$ равно $-k$. Обозначим через $[x, y]$ однородные кватернионные координаты на $S^4 = \mathbb{H}P^1$ и рассмотрим однородную матричную функцию на $\mathbb{H}^2$ вида

$$\Delta(x, y) = xC + yD,$$

где C и D - кватернионные $k \times (k+n)$ -матрицы (здесь умножение на кватернионы производится слева, а матричное умножение - справа). Предположим, что матрица $\Delta(x, y)$ имеет максимальный ранг при всех $(x, y) \neq (0, 0)$. Мы можем рассматривать $\Delta(x, y)$ как невырожденное линейное преобразование $\Delta: \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{R}} W \rightarrow V$, где V есть $(k+n)$ -мерное кватернионное векторное пространство, наделенное эрмитовым скалярным произведением, W - его вещественное k -мерное подпространство. Тогда пространство $E_{(x,y)} = \text{Ker } \Delta^*(x, y)$ имеет кватернионную размерность n и является слоем искомого кватернионного векторного расслоения E . Обозначим через $P_{(x,y)}: V \rightarrow E_{(x,y)}$ оператор ортогонального проектирования и наделим расслоение E стандартной ковариантной производной Леви-Чивита. Если ограничить E на евклидово пространство $\mathbb{R}^4 \subset S^4$ (заменяя $[x, y]$ на $x = [x, 1]$), то ковариантная производная ∇ в расслоении E будет задаваться формулой $\nabla = P d/dx$. Кривизна F связности, определяемой ∇ , равна

$$F = PC^* d\bar{x} [\Delta(x) \Delta^*(x)]^{-2} dx CP.$$

Если $\Delta(x)\Delta^*(x)$ является вещественной матрицей при всех $x \in \mathbb{H}$, то матрица в квадратных скобках будет коммутировать с кватернионом $d\bar{x}$ и в выражение для F будет входить только антиавтодуальная форма $d\bar{x} \wedge dx$, т.е. F антиавтодуальна. Нетрудно показать, что топологический заряд построенного поля равен $-k$. Аналогичным образом можно описывать k -инстантоны, исходя из матричной функции $\Delta(x, y) = Cx + Dy$, где C, D — кватернионные $(k+n) \times k$ -матрицы.

Построенное расслоение E над S^4 в силу теоремы Уорда отвечает некоторому голоморфному векторному расслоению $\tilde{E}$ ранга $2n$ над $\mathbb{CP}^3$, наделенному симплектической и кватернионной структурами. Расслоение $\tilde{E}$ определяется следующим образом. Обозначим через V', W' комплексные векторные пространства размерностей $2k+2n$ и k соответственно и предположим, что V' наделено симплектической структурой. Пусть $A(z) = \sum_{i=1}^4 A_i z_i: W' \rightarrow V'$ — однородная матричная функция однородных координат $z = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ на $\mathbb{CP}^3$. Предположим, что образ $U_z = \text{Im } A(z)$ есть k -мерное подпространство V' при любых $z \neq 0$ и это подпространство изотропно относительно симплектической структуры на V' . Тогда полярное к U_z пространство $\tilde{U}_z$ содержит U_z и имеет размерность $k+2n$. Поэтому факторпространство $\tilde{E}_z = \tilde{U}_z/U_z$ есть $2n$ -мерное комплексное векторное пространство, наделенное симплектической структурой. Оно и является слоем искомого голоморфного расслоения $\tilde{E}$ в точке z . Для того чтобы $\tilde{E}$ удовлетворяло условиям вещественности из теоремы Уорда, необходимо ввести на V' кватернионную структуру $\mathfrak{b}$ так, чтобы W' было вещественным подпространством относительно $\mathfrak{b}$, и потребовать, чтобы структура $\mathfrak{b}$ была совместима с симплектической структурой, а функция $A(z)$ удовлетворяла соотношению $\mathfrak{b}(A(z)w) = A(jz)(\mathfrak{b}w)$. Тогда расслоение $\tilde{E}$ будет обладать совместимыми симплектической и кватернионной структурами, а его ограничение на j -инвариантные проективные прямые будет голоморфно тривиальным.

Приведенная конструкция инстантонов на S^4 допускает простую геометрическую интерпретацию, а именно, построенное расслоение E со связностью над S^4 является прообразом классифицирующего расслоения при подходящем отображении f из S^4 в грассманово многообразие. Подробнее, рассмотрим на грассмановом многообразии $G_n(\mathbb{H}^{n+k})$ n -мерных подпространств в $\mathbb{H}^{n+k}$

стандартное тавтологическое расслоение. Оно наделяется канонической $\mathrm{Sp}(n+k)$ -инвариантной связностью, задаваемой ортогональным проектированием. Построенное расслоение E со связностью ∇ является прообразом указанного классифицирующего расслоения с канонической связностью при отображении $f: S^4 \rightarrow G_n(\mathbb{H}^{n+k})$, определяемом матричной функцией $\Delta(x, y)$. В частности, решение т'Хофта на S^4 , приведенное в п.2, можно в этих терминах определить как $\mathrm{Sp}(1)$ -расслоение со связностью на S^4 , которое совпадает с обратным образом классифицирующего $\mathrm{Sp}(1)$ -расслоения над кватернионным проективным пространством $\mathbb{H}P^k$ при следующем отображении. Его ограничение на $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ задается формулой $x \mapsto [1, (x - x_1)^{-1}, \dots, (x - x_k)^{-1}]$. Чтобы доопределить это отображение при $x \rightarrow x_j$, нужно домножить его компоненты на кватернион $x - x_j$, что не меняет образа в однородных кватернионных координатах. (Решение т'Хофта допускает естественную интерпретацию и в терминах твисторов, см. [5].)

В статье Дональдсона "Инстантоны и геометрическая теория инвариантов", § 1, отмечено, что условия, наложенные выше на матричную функцию $A(x)$ (или на $\Delta(x)$), можно записать в виде коммутационных соотношений для блочных компонент матриц A_i . С другой стороны, уравнения дуальности на $\mathbb{R}^4$ также являются коммутационными соотношениями, наложенными на компоненты связности, т.е. дифференциальный оператор $\nabla(x)$. Таким образом, ADHM-конструкцию можно рассматривать как преобразование, связывающее коммутационные соотношения для матриц с коммутационными соотношениями для дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^4$.

4. Обобщение на твисторные многообразия. Теорема Уорда для инстантонов на S^4 допускает обобщение на 4-мерные римановы многообразия широкого класса и ассоциированные с ними твисторные многообразия. Сформулируем это обобщение, доказанное в работе [5]. Пусть X - ориентируемое 4-мерное риманово многообразие и $Z \rightarrow X$ - твисторное расслоение, построенное в п.1.4. Определим на Z почти комплексную структуру, пользуясь определением Z как пространства $S(\Omega_+^2)$ сферического расслоения $\pi: S(\Omega_+^2) \rightarrow X$. Для этого заметим, что риманова связность на X порождает разложение касательного пространства к $S(\Omega_+^2)$ в произвольной точке w в

прямую сумму горизонтального подпространства $\mathcal{H}_w$ и вертикального подпространства $\mathcal{V}_w$. Точка $w \in S(\Omega_+^2)$ есть пара (x, u) , где $x \in X$, $u \in S(\Omega_+^2)_x$. Горизонтальное подпространство $\mathcal{H}_w$ изоморфно касательному пространству TX_x посредством отображения π_* ; вертикальное подпространство $\mathcal{V}_w$ является касательным к слою отображения π . Комплексная структура⁽⁴⁾ на $T[S(\Omega_+^2)]_w = \mathcal{H}_w \oplus \mathcal{V}_w$ определяется следующим образом: на $\mathcal{V}_w$ это стандартная комплексная структура в слое, совпадающем с римановой сферой; на $\mathcal{H}_w \cong TX_x$ комплексная структура задается формой $u \in S(\Omega_+^2)_x$ (напомним, что слой $\pi^{-1}(x)$ по определению состоит из комплексных структур на пространстве TX_x).

В работе [5] получен критерий интегрируемости указанной почти комплексной структуры на пространстве Z , для формулировки которого нам потребуется ввести понятие (анти)автодуального многообразия. Рассмотрим оператор кривизны⁽³⁾ R многообразия X как линейный оператор $R: \Omega^2 \rightarrow \Omega^2$, задаваемый в локальном ортонормированном базисе $\{e_i\}$ расслоения TM формулой $R(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} e_k \wedge e_l$. В соответствии с разложением (4) из п.1.4 $\Omega^2 = \Omega_+^2 \oplus \Omega_-^2$, мы можем записать оператор R в блочном виде

$$R = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix},$$

где $B \in \text{Hom}(\Omega_-^2, \Omega_+^2)$ — бесследовый тензор Риччи, $\text{tr } A = \text{tr } C = \frac{1}{4}$ (скалярная кривизна), а операторы $W_+ = A - \frac{1}{3} \text{tr } A$, $W_- = C - \frac{1}{3} \text{tr } C$ являются компонентами конформно инвариантного тензора Вейля $W = W_+ + W_-$. Многообразие X называется автодуальным (соотв. антиавтодуальным), если $W_- = 0$ (соотв. $W_+ = 0$). С учетом этого определения упомянутый выше критерий состоит в следующем: почти комплексная структура на $Z = S(\Omega_+^2)$ интегрируема $\Leftrightarrow X$ антиавтодуально. Двойственный результат (который и приведен в [5]) утверждает, что аналогичная почти комплексная структура на $Z_- = S(\Omega_-^2)$ интегрируема $\Leftrightarrow X$ автодуально.

Сформулируем теперь обобщенную теорему Уорда для $U(n)$ -антиинстантонов на антиавтодуальных многообразиях. Пусть E — эрмитово векторное расслоение над антиавтодуальным многообразием X и $\pi: Z \rightarrow X$ — соответствующее твисторное расслоение. Обозначим через $\tilde{E} = \pi^* E$ подъем расслоения E на твисторное многообразие Z . Расслоение $\tilde{E}$ будет обладать теми же свойствами, что и в случае $X = S^4$, нужно только определить аналог послойного отображения j . Для этого воспользуемся определением Z как проективизации $P(S_+)$ спинорного расслоения $S_+(X)$ и рассмотрим отображение $j: S_+ \rightarrow S_+$, задаваемое умножением на кватернион j после отождествления $S_{+,x}$ с $\mathbb{H}$. Указанное отображение индуцирует послойный эндоморфизм $j: Z \rightarrow Z$. С учетом сказанного имеется взаимно однозначное соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} U(n)\text{-анти-} \\ \text{инстантоны на анти-} \\ \text{автодуальном много-} \\ \text{образии } X \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные векторные расслоения} \\ \text{ранга } n \text{ над } Z, \text{ голоморфно} \\ \text{тривиальные на слоях } \pi \text{ и обла-} \\ \text{дающие положительной веществен-} \\ \text{ной формой} \end{array} \right\}$$

(по модулю калибровоч-
ной эквивалентности) (с точностью до изоморфизма)

В заключение упомянем некоторые темы, относящиеся к 4-мерным уравнениям Янга — Миллса и их твисторной интерпретации, которые не вошли в наш обзор: 1) общие (неавтодуальные) поля Янга — Миллса [14]; 2) автодуальные поля Янга — Миллса на неавтодуальных многообразиях [13]; 3) неоднородные уравнения Янга — Миллса и поля Янга — Миллса, спаренные с безмассовыми полями [15, 16]; 4) гомотопические свойства пространства модулей Янга — Миллса [10]; 5) инстантоны и стабильные векторные расслоения [17]; 6) связь с методом интегрирования обратной задачи [18]; 7) связь с алгебрами Каца — Мути [19]; 8) инстантоны и 4-мерная топология [20]; 9) кватернионные структуры на пространстве модулей [21]; 10) супертвисторы [22].

Более подробное изложение материала этого параграфа см. в книгах [4, 15].

§ 3. Монополи и уравнения Нама

1. Исходные понятия. Вернемся к ситуации, рассмотренной в п. 2.1. Пусть G — компактная группа Ли и A — (анти)автодуальная G -связность на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, т.е. кривизна F связности A является решением уравнений дуальности (7) на $\mathbb{R}^4$ (мы пока не накладываем условия конечности действия). Предположим, что связность A является статической, т.е. сдвиг по "времени" x^0 порождает калибровочное преобразование связности A или, иначе говоря, связность A калибровочно инвариантна относительно сдвигов по времени. Тогда с точностью до калибровочной эквивалентности статическая связность A задается 1-формой $\Phi dx^0 + \sum_{i=1}^3 A_i dx^i$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G , коэффициенты которой Φ, A_1, A_2, A_3 не зависят от x^0 . Уравнения дуальности для этой формы принимают вид

$$D'\Phi = \pm *F',$$

где A' есть G -связность на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, F' — ее кривизна, D' — оператор ковариантного дифференцирования, порожденный A' , а $*$ — оператор Ходжа на $\mathbb{R}^3$. В этом параграфе рассматриваются только связности на $\mathbb{R}^3$, поэтому в дальнейшем штрих будет опускаться. Итак, A есть связность в главном расслоении P над $\mathbb{R}^3$ с калибровочной группой G , Φ — сечение присоединенного к P расслоения $\text{ad } P$, и мы интересуемся решениями уравнения

$$D\Phi = \pm *F, \quad (10)$$

которое называется уравнением Богомольного. Обозначая через B форму $*F$, мы можем записать уравнение Богомольного в виде

$$D\Phi = \pm B.$$

На "физическом" языке F есть калибровочное поле, Φ называется полем Хиггса, а форма B является матричным аналогом магнитного поля.

Введем функционал действия Янга - Миллса - Хиггса формулой

$$S_{\text{YMH}}(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\|F\|^2 + \|D\Phi\|^2) d^3x.$$

Если вспомнить связь со статическими полями Янга - Миллса, то это выражение отличается от действия Янга - Миллса в $\mathbb{R}^4$ (которое, конечно, теряет смысл для статических полей) только тем, что интегрирование ведется по $\mathbb{R}^3$. Критические точки действия Янга - Миллса - Хиггса называются полями Янга - Миллса - Хиггса и удовлетворяют уравнению Эйлера - Лагранжа для S_{YMH} , которое имеет вид

$$\begin{aligned} *D(*F) &= [D\Phi, \Phi], \\ \square\Phi &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\square\Phi \equiv *D(*D\Phi)$. Для конечности действия S_{YMH} будем накладывать следующие асимптотические условия (предел Прасада - Зоммерфельда):

$$\|\Phi\| \rightarrow 1, \quad \|D\Phi\| \rightarrow 0, \quad \|F\| \rightarrow 0 \tag{12}$$

равномерно при $|x| \rightarrow \infty$. Мы ограничимся в дальнейшем случаем $G = SU(2)$. Сопоставим полю Янга - Миллса - Хиггса, т.е. решению уравнений (11) с граничными условиями (12), топологический инвариант, называемый топологическим зарядом и определяемый по формуле

$$k = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \text{tr}(F \wedge D\Phi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_R^2} \text{tr}(\Phi F).$$

Топологический заряд поля Янга - Миллса - Хиггса можно определить также как степень отображения сферы S_R^2 достаточно большого радиуса R в алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$, задаваемого полем Хиггса Φ :

$$\Phi: S_R^2 \rightarrow \{\Phi \in \mathfrak{su}(2): \|\Phi\| = 1\} = S^2.$$

Пользуясь последним определением, мы можем вычислить топологический заряд также по формуле

$$k = -\frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R^2} \text{tr}(\Phi d\Phi \wedge d\Phi).$$

Действие Янга - Миллса - Хиггса можно представить в виде

$$S_{\text{YMН}}(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|*F \mp D\Phi\|^2 dx \pm 4\pi k,$$

откуда следует, что

$$S_{\text{YMН}}(A, \Phi) \geq 4\pi |k|,$$

причем равенство достигается только для решений уравнений Богомольного (10). Таким образом, решения уравнений Богомольного с конечным действием $S_{\text{YMН}}$ реализуют минимумы действия $S_{\text{YMН}}$. Эти решения называются монополями (или BPS-монополями) ввиду их тесной связи с монополями Дирака (см. примечание (98)). Для монополей заряда k первое асимптотическое условие в (12) можно переписать в виде

$$\|\Phi\| = 1 - |k|/\nu + O(1/\nu^2).$$

Кроме монополей имеются и другие критические точки функционала $S_{\text{YMН}}$, обладающие конечным действием. Все эти критические точки, найденные Таубсом [23], неустойчивы, причем их индекс достаточно велик (а именно, индекс μ критической точки функционала $S_{\text{YMН}}(A, \Phi)$ с топологическим зарядом k удовлетворяет неравенству $\mu \geq |k| + 1$). Более подробное обсуждение неминимальных критических точек действия $S_{\text{YMН}}$ и их свойств см. в работе [24], а также в статьях Таубса из этого сборника.

Мы воспользовались в этом пункте связью монополей со статическими решениями уравнений дуальности в $\mathbb{R}^4$. Другая интересная связь между уравнениями дуальности в $\mathbb{R}^4$ и монополями возникает при рассмотрении осесимметричных инстантонов в $\mathbb{R}^4$. Монополь при этом можно отождествить с пределом таких k -инстантонов при $k \rightarrow \infty$. Указанный подход исследован в

статье Аты "Магнитные монополи ..." в этом сборнике.

2. Примеры монополей. Воспользуемся обозначениями из п.2.2, а именно, отождествим точку $x \in \mathbb{R}^3$ с чисто мнимым кватернионом $x = x^1 i + x^2 j + x^3 k$. Тогда монополи с зарядом ± 1 , построенный в [25] и называемый также BPS-монополем, можно задать формулами

$$A = \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\operatorname{sh}|x|} \right) \operatorname{Im} \left\{ \frac{dx \cdot x}{|x|} \right\},$$

$$\Phi = \pm \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\operatorname{th}|x|} \right) \frac{x}{|x|}. \quad (13)$$

Непосредственным вычислением проверяется, что указанная пара (A, Φ) удовлетворяет уравнениям Богомольного и заряд построенного монополя равен ± 1 . Произвольный (± 1) -монополи можно получить, совершив в формуле (13) замену $x \rightarrow x - x_0$, где x_0 - произвольная точка $\mathbb{R}^3$. Полученное решение будет зависеть от трех вещественных параметров.

Можно показать (см. [26]), что размерность пространства $\mathcal{M}_k$ модулей монополей заряда k (т.е. размерность факторпространства пространства монополей заряда k по модулю калибровочных преобразований) равна $4k - 1$. Мы только что описали пространство монополей заряда ± 1 . При $|k| > 1$ эта задача становится гораздо более трудной. Прасад и Росси (см. [27]) построили для каждого k осесимметричный монополи заряда k . Корриган и Годлард [28] предложили конструкцию монополей заряда k , зависящую от $4|k| - 1$ вещественных параметров. Главной трудностью в задаче построения монополей является проверка несингулярности полученных решений (с аналогичной трудностью для инстантонов мы уже встретились в п.2.2). Несингулярность решения Прасада - Росси установлена в работе Хитчина "О построении монополей" в этом сборнике.

С другой стороны, имеется хотя и неявная, но очень естественная конструкция Таубса [29], дающая семейство монополей заряда k , зависящее от $3k$ вещественных параметров. Приведем эту конструкцию. Существуют константы d, R , $0 < d, R < \infty$, такие, что для любого набора точек $\{x_1, \dots, x_k\}$ пространства $\mathbb{R}^3$, расстояние между которыми больше d , найдется

монополю (A, Φ) , т.е. решение уравнений Богомольного $D\Phi = *F$ с граничным условием (12), имеющий топологический заряд $-k$. (Чтобы получить отсюда решение с зарядом k , достаточно перейти от пары (A, Φ) к $(A, -\Phi)$.) Решение Таубса устроено приближенно как сумма BPS-монополей в том смысле, что нули поля Хиггса Φ близки к точкам $x_1, \dots, x_k$ и локальный топологический заряд Φ в нулях равен -1 . Точнее, взяв объединение непересекающихся шаров $B_R(x_1), \dots, B_R(x_k)$ радиуса R ($R \sim \alpha^{-1/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$), можно утверждать следующее: а) все нули Φ содержатся в $\bigcup B_R(x_i)$; б) степень отображения $\hat{\Phi}: \partial B_R(x_i) \rightarrow \{\hat{\Phi} = \Phi/\|\Phi\|: \Phi \in \mathfrak{su}(2)\} = S^2$ равна -1 .

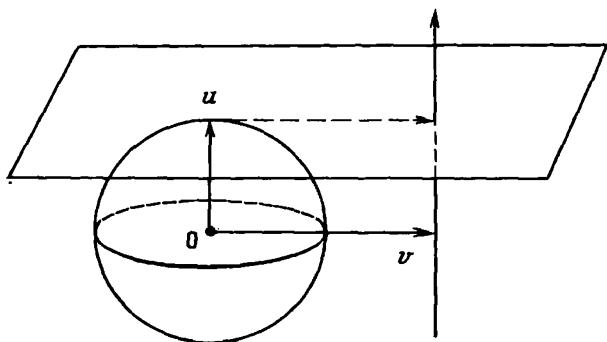
Более подробное изложение материала п.1, 2 см. в книге [29].

3. Конструкция Нама – Хитчина. Эта конструкция подробно излагается в двух статьях Хитчина в сборнике, поэтому остановимся здесь только на ее основных моментах. В указанных статьях построена следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \{\text{Спектральные кривые}\} \\
 & \nearrow & \\
 \{\text{Монополи}\} & & \\
 & \nwarrow & \\
 & & \{\text{Уравнения Нама}\}
 \end{array}
 \quad (14)$$

$\updownarrow$

Переход от монополей к спектральным кривым основан на твисторных идеях. Роль твисторного пространства играет в этом случае касательное расслоение $TP^1 = T(\mathbb{CP}^1)$ к римановой сфере, которое можно отождествить с пространством ориентированных прямых в $\mathbb{R}^3$, задавая прямую вектором направления u и вектором кратчайшего расстояния v



Сопоставим точке $x \in \mathbb{R}^3$ пучок проходящих через нее ориентированных прямых. Его можно отождествить с голоморфным вещественным (относительно вещественной структуры⁽⁵⁾), задаваемой изменением ориентации каждой прямой в $\mathbb{R}^3$ на противоположную) сечением касательного расслоения $TP^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Тем самым в рассматриваемом случае имеется аналог твисторного соответствия

$$\left\{ \text{точка } \mathbb{R}^3 \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{пучок ориентированных прямых,} \\ \text{проходящих через данную точку} \\ \mathbb{R}^3 \equiv \text{голоморфное веще-} \\ \text{ственное сечение } TP^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \end{array} \right\}.$$

Комплексификация этого построения дает

$$\left\{ \text{точка } \mathbb{C}^3 \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфное сечение рас-} \\ \text{слоения } TP^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \end{array} \right\}.$$

Задавая точку TP^1 пучком проходящих через нее голоморфных сечений, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{вырожденная} \\ \text{плоскость в } \mathbb{C}^3 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{точка } TP^1 \equiv \text{пучок} \\ \text{проходящих через нее голо-} \\ \text{морфных сечений} \end{array} \right\}.$$

Термин "вырожденная плоскость" означает в данном случае, что вырожденна комплексная метрика на плоскости, задаваемая ограничением комплексифицированной евклидовой метрики в $\mathbb{C}^3$ на эту плоскость. С другой стороны, по определению

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ориентированная} \\ \text{прямая в } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{ \text{точка } T\mathbb{P}^1 \}.$$

Соответствие между двумя последними утверждениями устанавливается следующим образом. Если Π - вырожденная плоскость, отвечающая точке $T\mathbb{P}^1$, и $\bar{\Pi}$ - плоскость, полученная из Π комплексным сопряжением, то $\Pi \cap \bar{\Pi}$ есть ориентированная прямая в $\mathbb{R}^3$ (ориентация фиксируется тем, что мы рассматриваем упорядоченные пары $\{\Pi, \bar{\Pi}\}$, прямая с противоположной ориентацией отвечает паре $\{\bar{\Pi}, \Pi\}$). Эта прямая задает точку $T\mathbb{P}^1$ по исходному определению.

В отличие от твисторного пространства $\mathbb{CP}^3$ пространство $T\mathbb{P}^1$ некомпактно. Для того чтобы получить компактное пространство $\widehat{T\mathbb{P}^1}$, нужно заменить линейное расслоение $T\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ на расслоение проективных прямых $\widehat{T\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ со слоями $\mathbb{P}^1$. Пространство $\widehat{T\mathbb{P}^1}$ играет роль компактифицированного твисторного пространства.

Построенное твисторное соответствие позволяет применить к монополям идеи и методы, разработанные для инстантонов. В частности, теорема Уорда из п. 2.3 немедленно переносится на этот случай (см. статью Хитчина "Монополи и геодезические"):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{решения } (A, \Phi) \text{ урав-} \\ \text{нения Богомольного} \\ D\Phi = *F \text{ на } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные векторные рас-} \\ \text{слоения ранга 2 на } T\mathbb{P}^1, \\ \text{голоморфно тривиальные на} \\ \text{вещественных голоморфных} \\ \text{сечениях, с симплектической} \\ \text{и кватернионной структурами} \end{array} \right\}.$$

(по модулю калибровочной эквивалентности) (с точностью до изоморфизма)

Конструкция указанного соответствия близка к исходной конструкции Уорда. Пусть $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ - векторное расслоение ранга 2, ассоциированное с главным расслоением $P \rightarrow \mathbb{R}^3$,

и ∇ - ковариантная производная, отвечающая связности A , действующая на гладких сечениях E . Тогда слой $\tilde{E}_x$ расслоения ранга 2 на TP^1 в точке $x \in TP^1$, отвечающей ориентированной прямой γ_x в R^3 , состоит по определению из гладких сечений $z \in \Gamma(\gamma_x, E)$ расслоения E над прямой γ_x , удовлетворяющих уравнению

$$(\nabla_\gamma - i\Phi)z = 0, \quad (15)$$

где ∇_γ - ограничение ковариантной производной ∇ на прямую γ_x . Таким образом, уравнения Богомольного сводятся к нелинейному семейству обыкновенных дифференциальных уравнений на прямой (15). Главной характеристикой этого семейства является спектральная кривая, состоящая из точек $x \in TP^1$, таких, что уравнение (15) имеет L^2 -решение вдоль прямой γ_x . Иначе говоря, спектральная кривая есть спектр нелинейного семейства уравнений (15).

Мы описали переход от монополей к спектральным кривым. Переход от уравнений Нама к монополям в диаграмме (14) задается бесконечномерным вариантом ADHM-конструкции, предложенным Намом. Уравнения Нама - это система обыкновенных дифференциальных уравнений для матричных функций T_1, T_2, T_3 переменного $t \in (0, 2)$:

$$\frac{dT_1}{dt} = [T_2, T_3], \quad \frac{dT_2}{dt} = [T_3, T_1], \quad \frac{dT_3}{dt} = [T_1, T_2]. \quad (16)$$

По каждому решению этих уравнений, задаваемому матричными функциями $T_i(t)$, которые продолжаются до мероморфных матричных функций в комплексной окрестности отрезка $[0, 2]$ с единственными простыми полюсами в точках $t = 0, 2$ и удовлетворяют естественным условиям вещественности и невырожденности (см. статью Хитчина "О построении монополей"), Нам определяет, так же как в ADHM-конструкции (см. п. 2.3), оператор $\Delta(x, y)$ с кватернионными переменными x, y , коэффициенты которого в данном случае являются обыкновенными дифференциальными операторами. Приведенная конструкция, называемая часто ADHMN-конструкцией, позволяет построить по специальным решениям уравнений Нама монополь, т.е. решение уравнений Богомольного. Выше (п. 3.1) было отмечено, что уравнения Богомольного совпа-

Дают с уравнениями дуальности для статических полей Янга - Миллса, не зависящих от переменной x^0 . С другой стороны, уравнения Нама (16) эквивалентны уравнениям дуальности для связности $\sum_{\mu=0} T_{\mu} dx^{\mu}$, где $T_0 = 0$, а коэффициенты T_1, T_2, T_3 зависят только от переменной $x^0 = t$ (см. статью Дональдсона "Уравнения Нама и классификация монополей"). Таким образом, ADHMN-конструкцию можно рассматривать как преобразование, связывающее решения уравнений дуальности, зависящие от одной переменной, с решениями уравнений дуальности, зависящими от трех переменных. Напомним (см. п.2.3), что ADHM-конструкция также является преобразованием, связывающим матрицы - решения системы коммутационных соотношений с решениями уравнений дуальности. Таким образом, ADHM-конструкция в обоих случаях является нетривиальным преобразованием двойственности, при котором (на уровне решений) одни типы коммутационных соотношений переходят в другие. Это наблюдение принадлежит Корригану и Наму (см. [44]).

Рассмотрим теперь связь между уравнениями Нама и спектральными кривыми, основанную на лаксовом представлении для уравнений Нама (16). Если положить в этих уравнениях $A_0 = T_1 + iT_2$, $A_1 = -2iT_3$, $A_2 = T_1 - iT_2$ и $A(\zeta) = A_0 + \zeta A_1 + \zeta^2 A_2$, $B(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{dA}{d\zeta} = \frac{1}{2} A_1 + \zeta A_2$, то уравнения Нама переписутся в лаксовой форме (43)

$$dA/dt = [A, B]. \quad (17)$$

Отсюда следует, что спектр матрицы A не зависит от t , поэтому характеристическое уравнение $\det(\eta I + A(\zeta, t)) = 0$, которое определяет кривую в твисторном пространстве $\mathbb{TP}^1$, является инвариантом уравнения (17). Эта кривая совпадает с введенной выше спектральной кривой монополя. Мы хотим восстановить решение уравнений Нама, исходя из спектральной кривой. Подобный метод решения уравнений лаксова типа был разработан С.П. Новиковым и его учениками [30]. В конструкции Хитчина используется близкий метод линеаризации потока на якобиане спектральной кривой, предложенный в работе [31]. Изложим кратко суть этого метода для общего уравнения типа Лакса, следуя работе [32].

Рассмотрим уравнение

$$dA/dt = [A, B], \quad (18)$$

где

$$A(t, \zeta) = \sum_{k=0}^n A_k \zeta^k, \quad B(t, \zeta) = \sum_{l=0}^N B_l \zeta^l$$

суть матричные функции вещественного параметра t и комплексного параметра ζ , являющегося координатой $\zeta = \zeta_1/\zeta_0$ на аффинной части пространства $\mathbb{P}^1$ с однородными координатами $[\zeta_0, \zeta_1]$. Коэффициенты A_k, B_l — это $m \times m$ -матрицы, зависящие от t и действующие в комплексном векторном пространстве V размерности m . Обозначим через S спектральную кривую системы (18); задаваемую характеристическим уравнением системы. Это комплексная алгебраическая кривая, являющаяся m -кратным разветвленным накрытием $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ римановой сферы $\mathbb{P}^1$.

В точке $p = (\zeta, \eta) \in S$ общего положения матрица $A(\zeta, t)$ имеет единственный (с точностью до ненулевого множителя) собственный вектор $v(p, t) \in V$:

$$A(\zeta, t) v(p, t) = \eta v(p, t). \quad (19)$$

Сопоставляя точке p комплексную прямую $Cv(p, t)$, натянутую на вектор v , введем семейство голоморфных отображений

$$f_t: S \rightarrow \mathbb{P}V$$

кривой S в комплексное проективное пространство $\mathbb{P}V$. Определим теперь поток на якобиане⁽⁴¹⁾ $J_{ac}(S)$ кривой S , отвечающий системе (18). Пусть $\mathcal{O}(1)$ есть расслоение гиперплоскости⁽¹⁶⁾ на $\mathbb{P}V$. Обозначим через L_t линейное расслоение над S , равное

$$L_t = f_t^*(\mathcal{O}(1)).$$

Если S — кривая степени d , то L_t — голоморфное линейное расслоение степени $(7) d$, т.е. элемент компоненты $\text{Pic}^d(S)$ группы Пикара $(35) \text{Pic}(S)$. Поскольку $\text{Pic}^d(S)$ отождествляется (41) с якобианом $\text{Jac}(S)$, мы получаем поток L_t на якобиане $\text{Jac}(S)$.

Найдем уравнение для потока L_t , вытекающее из (18). Для этого продифференцируем соотношение (19) по t :

$$\frac{dA}{dt} v + A \frac{dv}{dt} = \eta \frac{dv}{dt},$$

откуда, в силу уравнения (18), получим

$$A \left(\frac{dv}{dt} - Bv \right) = \eta \left(\frac{dv}{dt} - Bv \right).$$

Отсюда в точке $p \in S$ общего положения будем иметь

$$Bv = \frac{dv}{dt} + \lambda v. \quad (20)$$

Мы получили соотношение (20), проводя вычисления в аффинных координатах $(\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^2$. Чтобы записать его в инвариантной форме, представим $B(\zeta, t)$ в виде $B(\zeta, t) = B/\zeta_0^N$, где B — однородный полином по ζ_0, ζ_1 . Обозначим через D дивизор $(35) (\zeta_0^N)$ на S , равный $N\pi^{-1}(\infty)$. Тогда компоненты матрицы B/ζ_0^N являются мероморфными функциями из пространства $\mathcal{L}(D) = H^0(S, \mathcal{O}(D))$ голоморфных сечений расслоения $[D]$. Вектор-функция $v(p, 0)$ отождествляется с голоморфным сечением расслоения $V \otimes L$, где $L = L_0$,

а $\frac{dv}{dt}(p, 0)$ — с голоморфным сечением расслоения $f^*\mathcal{T}$, где $f = f_0$, $\mathcal{T}$ — касательное расслоение пространства $\mathbb{P}V$. В этих терминах уравнение (20) означает, что $dv/dt = \tau \left(\frac{B}{\zeta_0^N} v \right)$, где $\frac{B}{\zeta_0^N} v$ рассматривается как сечение расслоения

$V \otimes L(D) = V \otimes L \otimes [D]$, а τ — естественное отображение, индуцированное отображением $V \otimes L(D) \rightarrow f^*\mathcal{T}(D)$ из точной последовательности Эйлера $0 \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow V \otimes L(D) \rightarrow f^*\mathcal{T}(D) \rightarrow 0$.

Вернемся к выводу уравнения для L_t и введем одно дополнительное понятие. Для произвольного эффективного⁽³⁵⁾ дивизора $D = \sum n_i p_i$ на кривой S назовем лорановским хвостом в точке p_i выражение

$$\varphi_i = \frac{\alpha_{i,n_i}}{z_i^{n_i}} + \dots + \frac{\alpha_{i,1}}{z_i},$$

где z_i — локальная координата в точке p_i . Набор лорановских хвостов $\{\varphi_i\}$ можно отождествить с сечением пучка $\mathcal{O}_D(D)$, который определяется точной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow \mathcal{O}_D(D) \rightarrow 0. \quad (21)$$

Обратимся к соотношению (20). В нем v и dv/dt голоморфны в окрестности дивизора $D = (\zeta_0^N)$, поэтому λ задает корректно определенное сечение $\rho(B)$ пучка $\mathcal{O}_D(D)$, которое можно отождествить с набором лорановских хвостов. Заметим теперь, что касательное пространство к якобиану $\text{Jac}(S) = H^1(S, \mathcal{O})/H^1(S, \mathbb{Z})$ в точке L отождествляется с $H^1(S, \mathcal{O})$, поэтому $dL/dt \in H^1(S, \mathcal{O})$. Воспользовавшись кограничным отображением δ из точной когомологической последовательности, порожденной (21), получим элемент $\delta(\rho(B)) \in H^1(S, \mathcal{O})$. Поэтому уравнение

$$dL/dt = \delta(\rho(B)) \quad (22)$$

корректно определено. Это и есть уравнение потока на якобиане, отвечающее уравнению Лакса (18). Линеаризуемость потока L_t означает, что $d^2 L_t / dt^2 = \mu_t dL/dt$. Пользуясь уравнением (22), условие линеаризуемости можно записать в виде

$$d\rho(B)/dt = 0 \bmod \ell,$$

где ℓ — векторное подпространство в $H^0(S, \mathcal{O}_D(D))$, натянутое на $\rho(B)$ и образ $H^0(S, \mathcal{O}(D))$ в $H^0(S, \mathcal{O}_D(D))$.

В случае уравнений Нама обозначим через $D = \sum_{i=1}^r p_i$ дивизор, составленный из точек S , лежащих над точкой $\infty \in \mathbb{P}^1$.

Пусть z_i — локальная координата ($z_i = \zeta_i^{-1}$) вблизи p_i . Тогда вблизи p_i

$$A = A_0 + \frac{A_1}{z_i} + \frac{A_2}{z_i^2}, \quad B = \frac{1}{2} A_1 + \frac{A_2}{z_i}.$$

Рассмотрим собственный вектор v_i матрицы A вблизи p_i , удовлетворяющий

$$A v_i = \eta_i v_i,$$

где собственное значение η_i вблизи p_i имеет представление вида $\eta_i = \frac{\lambda_i}{z_i^2} + \frac{1}{z_i} + \text{голоморфная часть}$. Отсюда $A_2 v_i(p_i) = \lambda_i v_i(p_i)$ и $\rho(B) = \sum_i \frac{\lambda_i}{z_i}$. Так как $\frac{d\rho(B)}{dt} = 0$,

то поток на якобиане $Jac(S)$ линеаризуем.

Мы завершили описание диаграммы (14) или конструкции Нама — Хитчина. Пользуясь этой конструкцией, Дональдсону удалось получить описание пространства модулей монополей заряда k как пространства рациональных функций степени k . Точная формулировка приводится в статье Дональдсона "Уравнения Нама и классификация монополей".

В заключение укажем некоторые темы, относящиеся к уравнениям Янга — Миллса — Хиггса, которые не вошли в этот обзор: 1) неавтодуальные поля Янга — Миллса — Хиггса (см. [23, 24], а также статьи Таубса в этом сборнике); 2) неавтодуальные уравнения Нама [33]; 3) обобщения монополей на другие классические группы [26, 34].

§ 4. Двумерные модели

1. Двумерные уравнения дуальности. Рассмотрим модель Янга — Миллса — Хиггса (см. п. 3.1) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, но в отличие от п. 3.1 заменим функционал действия Янга — Миллса — Хиггса S_{YMH} на функционал вида

$$S_{YMH}^\lambda(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [\|F\|^2 + \|D\Phi\|^2 + \frac{\lambda}{4} (\|\Phi\|^2 - 1)^2] d^2x, \quad \lambda \geq 0.$$

Как и в п. 3.1, наложим асимптотические условия

$$\|\Phi\| \rightarrow 1, \quad \|D\Phi\| \rightarrow 0$$

равномерно при $\|x\| \rightarrow \infty$. Ограничимся вначале абелевым случаем, т.е. будем предполагать, что $A = -iA_0 dx^0 - iA_1 dx^1$ — электромагнитный потенциал, т.е. связность в линейном расслоении над $\mathbb{R}^2$, Φ — комплексное скалярное поле, т.е. сечение линейного расслоения над $\mathbb{R}^2$. Определим топологический заряд формулой

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F.$$

Как и в п. 3.1, топологический заряд можно определить как степень отображения окружности S_R^1 достаточно большого радиуса в единичную окружность на комплексной плоскости, задаваемого полем Φ .

Уравнения Эйлера — Лагранжа для действия $S_{\text{УМН}}^\lambda$ имеют вид

$$*d(*F) = \bar{\Phi} D\Phi - \Phi \bar{D}\bar{\Phi},$$

$$\square \Phi = \frac{\lambda}{2} (|\Phi|^2 - 1) \Phi.$$

Нас будет интересовать случай $\lambda = 1$, поскольку при этом условии в рассматриваемой модели существуют решения типа инстантонов. В случае $\lambda = 1$ функционал $S_{\text{УМН}}^1$ можно представить в виде

$$S_{\text{УМН}}^1(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [\|D\Phi \mp i * D\Phi\|^2 + *F \pm \frac{1}{2} (|\Phi|^2 - 1)^2] d^2x \pm \pi k,$$

откуда следует, что

$$S_{\text{УМН}}^1(A, \Phi) \geq \pi |k|,$$

причем равенство достигается только тогда, когда подынтегральное выражение в последней формуле равно нулю. Запишем полученные уравнения в комплексной форме, полагая $x = x^0 + ix^1$, $\alpha = \frac{1}{2}(A_0 - iA_1)$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(A_0 + iA_1)$. Тогда при $k \geq 0$ минимумы $S_{\text{УМН}}^1$ удовлетворяют уравнению

$$\bar{\partial}_\alpha \Phi = 0, \quad F_{01} + \frac{1}{2} (|\Phi|^2 - 1) = 0, \quad (23a)$$

где $F_{01}' = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0$, $\bar{\partial}_\alpha = \bar{\partial} - i\alpha$, $\bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z}$. Аналогично, при $k < 0$ получаем уравнение

$$\partial_\alpha \Phi = 0, \quad F_{01} - \frac{1}{2}(|\Phi|^2 - 1) = 0. \quad (236)$$

Решения уравнения (23а) называются вихрями, решения (23б) — антивихрями. В отличие от уравнений Янга — Миллса — Хиггса из § 3 решения уравнений (23), реализующие минимумы действия S_{YM}^1 , исчерпывают все критические точки функционала S_{YM}^1 с конечным действием (см. [29]). Иными словами, любое решение уравнений Эйлера — Лагранжа для S_{YM}^1 с конечным действием является решением уравнений (23).

Описание решений уравнений (23) получено Таубсом [29] на основе вариационных методов. Пусть сначала $k \geq 0$ и $\{z_1, \dots, z_k\}$ — произвольный набор из k точек на комплексной плоскости, среди которых могут быть и совпадающие. Обозначим через k_j кратность, с которой точка z_j входит в набор $\{z_1, \dots, z_k\}$. Тогда существует единственное с точностью до калибровочной эквивалентности C^∞ -гладкое решение (A, Φ) уравнений (23а), которое обладает следующими свойствами:

а) нули поля Φ совпадают в точности с точками $z_1, \dots, z_k$, причем в окрестности z_j

$$\Phi \sim c_j (z - z_j)^{k_j}, \quad c_j \neq 0;$$

б) топологический заряд k решения (A, Φ) равен сумме $\sum k_j$ по различным точкам z_j .

Для $k < 0$ формулировка утверждения аналогична, нужно только заменить в условии а) Φ на $\bar{\Phi}$ и положить $-k = \sum k_j$ в условии б). Любое решение уравнений (23) с конечным действием калибровочно эквивалентно описанному k -(анти)вихревому решению.

Приведем теперь некоторые общие свойства решений (см. [29]) уравнений Эйлера — Лагранжа для исходного $SU(2)$ -функционала Янга — Миллса — Хиггса $S_{YM}^\lambda(A, \Phi)$ на $\mathbb{R}^d$, задаваемого той же формулой, что и выше, с заменой $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^d$. Уравнения Эйлера — Лагранжа для этого функционала имеют вид

$$D(*F) = *[D\Phi, \Phi],$$

$$\square \Phi = \frac{\lambda}{2} \Phi (\|\Phi\|^2 - 1).$$

Рассмотрим сначала функционал Янга - Миллса (т.е. $\lambda = 0$, $\Phi = 0$) и соберем в следующей таблице общие сведения о гладких решениях уравнений Янга - Миллса на $\mathbb{R}^d$, обладающих конечным действием:

решения размерность	нетривиальные решения	минимумы	неминимальные решения
$d > 4$	нет	нет	нет
$d = 4$	есть	инстантоны	?
$d < 4$	нет	нет	нет

Конечно, приведенные здесь утверждения допускают распространение на более общие классы римановых многообразий и калибровочных групп. Отметим, в частности, что все утверждения о тривиальности справедливы для G -уравнений Янга - Миллса на $\mathbb{R}^d$, где G - компактная группа Ли (относительно аналогичных утверждений для более общих многообразий см., например, [35]).

Рассмотрим теперь $SU(2)$ -уравнения Янга - Миллса - Хиггса для функционала S_{YM}^λ на $\mathbb{R}^d$. Что известно об общих свойствах гладких решений этих уравнений, обладающих конечным действием? При $d > 4$ нетривиальных решений нет, в размерности $d = 4$ любое решение калибровочно эквивалентно чистому полю Янга - Миллса. Приведем таблицу для решений уравнений Янга - Миллса - Хиггса с $\lambda = 0$:

решения размерность	нетривиальные решения	минимумы	неминимальные решения
$d > 4$	нет	нет	нет
$d = 4$	есть	инстантоны	?

$d = 3$	есть	монополи	есть
$d = 2$	нет	нет	нет

Случай $\lambda = 1$ был рассмотрен выше, что касается общего случая $\lambda > 0$, то в книге [29] высказана гипотеза, что для абелевой модели $S_{\text{УМН}}^\lambda$ на $\mathbb{R}^2$ в случае $\lambda < 1$ для каждого заряда k должна существовать единственная (с точностью до калибровочной эквивалентности и сдвигов на $\mathbb{R}^2$) критическая точка $S_{\text{УМН}}^\lambda$, которая является минимумом; при этом весь заряд сосредоточен в одной точке, нуле функции Φ , и решение (A, Φ) центрально симметрично. При $\lambda > 1$ функционал $S_{\text{УМН}}^\lambda$,

согласно гипотезе, должен иметь единственную критическую точку, которая неустойчива при $|k| > 1$ и устойчива при $k = 0, \pm 1$.

Рассмотрим теперь другую двумерную модель. Напомним, что монополи, которые были введены в предыдущем параграфе, являются решениями уравнений Богомольного в $\mathbb{R}^3$. Уравнения Богомольного получаются из уравнений дуальности в $\mathbb{R}^4$ при условии, что связность на $\mathbb{R}^4$ является статической, т.е. ее коэффициенты не зависят от одной переменной x^0 . Поэтому естественно рассмотреть уравнения дуальности в $\mathbb{R}^2$, которые получаются из уравнений дуальности в $\mathbb{R}^4$ при условии, что коэффициенты связности в $\mathbb{R}^4$ не зависят от двух переменных, например x^2, x^3 . Пусть $A_\pm$ — такая связность на $\mathbb{R}^4$, т.е. A задается 1-формой $\sum_{j=0}^3 A_j dx^j$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ компактной группы G , причем коэффициенты A_j не зависят от переменных x^2, x^3 . Положим по определению $\varphi_1 = A_2, \varphi_2 = A_3$ и $\varphi = \varphi_1 - i\varphi_2$. Обозначая снова через A связность на $\mathbb{R}^2$, задаваемую формой $A_0 dx^0 + A_1 dx^1$, получим, что уравнения дуальности для исходной связности в $\mathbb{R}^4$ можно переписать в виде

$$F = \frac{i}{2} [\varphi, \varphi^*], \quad [\nabla_0 + i\nabla_1, \varphi] = 0,$$

где F — кривизна связности A в $\mathbb{R}^2$, ∇ — ковариантная производная, ассоциированная со связностью A . Введем комплексную координату $z = x^0 + ix^1$ в $\mathbb{R}^2$ и положим $\Phi = \frac{1}{2} \varphi dz, \quad \Phi^* = \frac{1}{2} \varphi^* d\bar{z}$. Тогда уравнения дуальности в $\mathbb{R}^2$ можно будет переписать в виде

$$F + [\Phi, \Phi^*] = 0, \quad \bar{\partial}_A \Phi = 0. \quad (24)$$

Здесь A есть связность в главном G -расслоении P над $\mathbb{C}$, Φ - гладкая $(1, 0)$ -форма на $\mathbb{C}$ со значениями в комплексифицированном присоединенном расслоении $\text{ad } P \otimes \mathbb{C}$, так что Φ^* есть $(0, 1)$ -форма со значениями в $\text{ad } P \otimes \mathbb{C}$ (мы предполагаем, что G - компактная вещественная форма комплексной группы Ли и сопряжение берется в соответствующей комплексной алгебре Ли). Далее, $\bar{\partial}_A$ есть $\bar{\partial}$ -оператор ковариантного внешнего дифференцирования, порожденный связностью A . Поскольку уравнения (24) конформно инвариантны, мы можем рассмотреть их как уравнения, заданные на произвольной римановой поверхности M . Именно в такой постановке эти уравнения исследованы Хитчином в недавней работе [36].

Пусть $G = SU(2)$ и E - ассоциированное с P векторное расслоение ранга 2. Тогда, как показано в упомянутой работе, решение уравнений (24) сводится к описанию пар, состоящих из голоморфного расслоения E над римановой поверхностью M и голоморфного сечения Φ расслоения $\text{End } E \otimes K$ (K - каноническое расслоение⁽¹⁴⁾ M), обладающих свойством стабильности. Для $\Phi = 0$ это обычное свойство стабильности голоморфных векторных расслоений (см. [37]), т.е. расслоение E стабильно, если для любого линейного подрасслоения L в E степень⁽⁷⁾ L меньше половины степени расслоения E : $\deg L < \frac{1}{2} \deg E$. Если $\Phi \neq 0$ и $SU(2)$ -решение (A, Φ) не сводится к $U(1)$ -решению, то пара (E, Φ) стабильна, когда указанное неравенство выполняется только для Φ -инвариантных подрасслоений L , т.е. таких, что $\Phi(L) \subseteq L \otimes K$. (Для $U(1)$ -решений (A, Φ) неравенство превращается в равенство.)

Пользуясь приведенной характеристикой решений уравнений (24), нетрудно показать, что для поверхностей M рода 0 и 1 нетривиальные решения отсутствуют. С этим обстоятельством, по-видимому, связан тот факт, что уравнения (24) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ не имеют прямого физического смысла в отличие от уравнений дуальности в $\mathbb{R}^4$ и уравнений Богомольного. В то же время, если род $g > 1$, нетривиальные решения существуют. В частности, если расслоение E имеет нечетную степень (в этом случае $G = SO(3)$), то пространство модулей решений (по модулю калибровочной эквивалентности) является гладким многообразием

размерности $12(g-1)$, которое допускает гиперкэлерову (и, в частности, комплексную) структуру.

Если род M больше 1, то в частном случае разложимого расслоения $E = L \oplus L^*$, где L — линейное голоморфное расслоение степени $g-1$, уравнение (24) сводится к уравнению вихрей (23а), точнее, принимает вид

$$F_1 + 2(1 - \|\alpha\|^2)\omega = 0,$$

где $\alpha \in H^0(M, K^2)$ — квадратичный дифференциал на M , ω — кэлерова форма метрики M , F_1 — кривизна $U(1)$ -связности, отвечающей расслоению L . Единственное (для данного α) решение этого уравнения определяет на M метрику постоянной отрицательной кривизны -4 . Более того, пространство $H^0(M, K^2)$, параметризующее множество всех решений указанного вида, естественно диффеоморфно пространству Тейхмюллера метрик постоянной отрицательной кривизны на M .

2. Двумерные б-модели. Начнем с наиболее простого примера — так называемой $O(3)$ -модели. Допустим, что на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ задано гладкое отображение $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$, т.е. в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2$ задан вектор $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ единичной нормы, гладко зависящий от x . Определим действие или энергию отображения φ формулой

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \|\text{grad } \varphi\|^2 d^2x, \quad (25)$$

где $\|\text{grad } \varphi\|^2 = |\partial\varphi/\partial x^0|^2 + |\partial\varphi/\partial x^1|^2$. Наложим асимптотическое условие: $\varphi(x) \rightarrow \varphi_0$ равномерно при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда отображению φ можно сопоставить топологический заряд, а именно степень отображения $\varphi: S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow S^2$, которую можно вычислить по формуле

$$k = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^* \omega,$$

где ω — стандартная форма объема на S^2 , $\varphi^* \omega$ — ее прообраз при отображении φ . Отображение φ естественно рассматривать в комплексных координатах. Положим $z = x^0 + ix^1$

и введем комплексную координату w в образе $S^2 \setminus \{\infty\}$ с помощью стереографической проекции. В этих координатах выражение для действия примет вид

$$S(\varphi) = \int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w / \partial z|^2 + |\partial w / \partial \bar{z}|^2}{(1 + |w|^2)^2} dz \wedge d\bar{z},$$

а форма $\omega = 4 \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2}$. Поэтому $S(\varphi)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= 2 \int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w / \partial \bar{z}|^2}{(1 + |w|^2)^2} dz \wedge d\bar{z} + 4\pi k = \\ &= 2 \int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w / \partial z|^2}{(1 + |w|^2)^2} dz \wedge d\bar{z} - 4\pi k, \end{aligned}$$

откуда $S(\varphi) \geq 4\pi|k|$, причем равенство достигается при $k \geq 0$ на голоморфных функциях от w , а при $k \leq 0$ — на антиголоморфных. Таким образом, голоморфные и антиголоморфные отображения φ реализуют минимумы энергии $S(\varphi)$. Можно показать (см. [38]), что других критических точек с конечным действием у функционала $S(\varphi)$ нет. Примерами голоморфных отображений степени $k > 0$ являются рациональные функции $w(z) = \sum_{j=1}^k \frac{c_j}{z - z_j}$ степени k .

Можно было с самого начала рассматривать поле φ как отображение $\varphi: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ с естественной модификацией (см. формулу (26) ниже) энергии (25). Это подсказывает направление обобщения $O(3)$ -модели. Среди известных ее обобщений укажем прежде всего $\mathbb{C}P^N$ -модель, в которой изучаются отображения $\varphi: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^N$ с функционалом энергии (26). Рассматриваются также грассмановы модели, когда отображения принимают значения в комплексных грассмановых многообразиях $G_n(\mathbb{C}^N)$. Все указанные модели объединяются единым классом двумерных Б-моделей, которые в наиболее общей постановке описываются гладкими отображениями $\varphi: M \rightarrow F$, где M — компактная риманова поверхность, F — комплексное многообразие флагов, т.е. однородное пространство комплексной матричной группы Ли по параболической (треугольной) подгруппе. В статье

Атти "Инстантоны в двух и четырех измерениях" из этого сборника показано, что G -инстантоны на $\mathbb{R}^4$, где G — компактная группа Ли, можно рассматривать также как решения двумерной $\bar{\partial}$ -модели, описываемой гладкими отображениями

$$\varphi: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \Omega G,$$

где ΩG — пространство петель группы G , состоящее из гладких отображений $S^1 \rightarrow G$, переводящих $1 \in S^1$ в единицу группы. Пространство ΩG можно рассматривать как бесконечномерное комплексное многообразие флагов, поскольку (см. статью) оно является однородным пространством $\Omega G = \mathcal{U}^c / \mathcal{P}$ комплексной группы $\mathcal{U}^c$ гладких отображений $S^1 \rightarrow G^c$ в комплексификацию G^c группы G по "треугольной" подгруппе $\mathcal{P}$ отображений, продолжающихся до голоморфных отображений единичного круга в G^c . Тогда, согласно результату Атти — Дональдсона из указанной статьи, пространство модулей G -инстантонов на $\mathbb{R}^4$ можно отождествить с пространством голоморфных отображений $f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \Omega G$. При этом заряду инстантона k будет отвечать степень отображения f , которая определяется

как $\int_{\mathbb{C}P^1} f^* \omega$, где ω — естественная нормированная калерова форма на пространстве ΩG .

Дальнейшее обобщение $\bar{\partial}$ -моделей приводит к киральным полям, т.е. к полям, которые локально задаются отображениями в некоторое нелинейное многообразие F , а глобально являются сечениями расслоений со слоем F . В качестве F наиболее часто выступают однородные пространства групп Ли. Как указано в п.2.3, мы можем рассматривать и поля Янга — Миллса на 4-мерных многообразиях X как киральные поля со значениями в грассмановых многообразиях. При этом поле Янга — Миллса на X возникает как обратный образ классифицирующего расслоения над грассмановым многообразием, снабженного канонической связностью, при отображении X в грассманово многообразие.

Вернемся к двумерным моделям. Математически задача состоит в изучении гладких отображений

$$\varphi: M \rightarrow N,$$

где M — компактная риманова поверхность с метрикой g , N — компактное риманово многообразие с метрикой h , и мы интересуемся критическими точками функционала энергии, имеющего вид

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M \|\mathrm{d}\varphi\|^2 \mathrm{vol} = \frac{1}{2} \int_M \mathrm{tr}(\varphi^* h) \mathrm{vol}. \quad (26)$$

В этой формуле $\mathrm{d}\varphi$ рассматривается как сечение расслоения $E = T^*M \otimes \varphi^*TN$, метрика на котором индуцирована метриками g и h . В локальных координатах (x^i) на M и (y^α) на N подынтегральное выражение в (26) принимает вид

$$\sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} g^{ij} h_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j},$$

где $\varphi(x) = (\varphi^\alpha(x))$, $g = \sum g_{ij} dx^i dx^j$, $h = \sum h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, (g^{ij}) — матрица, обратная к (g_{ij}) . Критические точки функционала (26) называются гармоническими отображениями и удовлетворяют уравнению Эйлера — Лагранжа

$$\mathrm{tr} \nabla(\mathrm{d}\varphi) = 0,$$

где ∇ — ковариантная производная (связность) на расслоении E , индуцированная римановыми связностями на многообразиях M и N . В тех же локальных координатах, что и выше, это уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{i,j} \left\{ g^{ij} \left[\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k M \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \right] + g^{ij} \left[\sum_{\alpha,\beta} (N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \varphi) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \right] \right\} = 0, \quad (27)$$

где $M \Gamma_{ij}^k$, $N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ — символы Кристоффеля римановых связностей на M и N соответственно, а первый член в фигурных скобках совпадает с оператором Лапласа — Бельтрами многообразия M . В частности, для $N = \mathbb{R}^n$ уравнение (27) превращается в уравнение Лапласа — Бельтрами на M . Таким образом, задача об описании критических точек функционала энергии (26) связана с классической математической задачей об описании минимальных поверхностей на римановых многообразиях.

Рассмотрим случай, когда N — кэлерово многообразие с кэлеровой метрикой h . Риманову поверхность M будем рассматривать как одномерное комплексное многообразие с эрмитовой метрикой g . Комплексификация отображения $d\varphi$ определяет обычным образом отображения $\partial\varphi$, $\bar{\partial}\varphi$ (например, $\partial\varphi: T^{(1,0)}M \rightarrow T^{(1,0)}N$), в терминах которых энергию $S(\varphi)$ можно переписать в виде

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\partial\varphi|^2 \text{vol} + \frac{1}{2} \int_M |\bar{\partial}\varphi|^2 \text{vol} = S'(\varphi) + S''(\varphi).$$

Нетрудно проверить, что выражение $S'(\varphi) - S''(\varphi)$ зависит только от (гладкого) гомотопического класса отображения φ , т.е. является топологическим инвариантом, который мы обозначим через $k(\varphi)$. Тогда $S(\varphi)$ можно представить в виде

$$S(\varphi) = 2S''(\varphi) + k(\varphi) = 2S'(\varphi) - k(\varphi).$$

Отсюда следует, что $S(\varphi) \geq |k(\varphi)|$, причем равенство достигается при $k(\varphi) \geq 0$ на голоморфных отображениях φ , при $k < 0$ — на антиголоморфных. Следовательно, так же как в рассмотренной выше $O(3)$ -модели, голоморфные и антиголоморфные отображения реализуют в случае кэлерова многообразия N минимумы энергии $S(\varphi)$. Однако в общем случае (в отличие от $O(3)$ -модели) могут существовать и другие критические точки функционала $S(\varphi)$.

К изучению гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow X$ в 4-мерные ориентированные римановы многообразия X удалось с успехом применить твисторные методы. Пусть $\pi: Z \rightarrow X$ — твисторное расслоение многообразия X , построенное в п.1.4, 2.3. Твисторное многообразие Z имеет почти комплексную структуру J^1 , введенную в п.2.3, которая определялась так. Твисторное многообразие Z отождествляется со сферическим подрасслоением $S(\Omega_+^2)$ расслоения автодуальных 2-форм на X . Пользуясь разложением $TZ_w = \mathcal{H}_w \oplus \mathcal{V}_w$ касательного пространства в точке $w \in Z$ на горизонтальное и вертикальное подпространства, мы полагаем $J_w^1 = J_w^h \oplus J_w^v$, где J_w^v — стандартная комплексная структура в слое, проходящем через w , J_w^h — комплексная структура на горизонтальном подпространстве, задаваемая точкой w . Введем теперь на Z новую почти комплексную структуру J^2 , полагая $J_w^2 = J_w^h \oplus (-J_w^v)$, $w \in Z$.

В отличие от J^1 , которая интегрируема тогда и только тогда, когда X антиавтодуально, структура J^2 никогда не интегрируема [39]. (Определение J^2 выглядит несколько искусственным. Не имея возможности подробно останавливаться здесь на его мотивировке, укажем только, что его отправной точкой служит теорема Чжэня [40], описывающая конформные гармонические отображения $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ в терминах их гауссовых поднятий.) Тем самым почти комплексное многообразие (Z, J^2) никогда не является комплексным. Однако именно это многообразие возникает в твисторном описании гармонических отображений $M \rightarrow X$. Мы привели определение J^2 для твисторного многообразия $Z = Z_+ = S(\Omega_+^2)$; аналогичным образом структура J^2 определяется для многообразия $Z_- = S(\Omega_-^2)$, и многообразие (Z_-, J^2) также никогда не является комплексным.

Прежде чем переходить к формулировке основного утверждения, напомним, что гладкое отображение $\varphi: M \rightarrow X$ римановых многообразий называется конформным, если прообраз φ^*h метрики h на X является метрикой на M , конформно эквивалентной исходной метрике g . (В терминах локальной комплексной координаты z на M конформность φ означает, что $(2, 0)$ -компонента метрики φ^*h на M равна нулю.) Следующая ниже теорема Илса - Саламона [41] дает твисторное описание конформных иммерсий (т.е. локальных вложений) $\varphi: M \rightarrow X$. А именно, утверждается, что имеется взаимно однозначное соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{непостоянные конформные} \\ \text{гармонические иммерсии} \\ \varphi: M \rightarrow X \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{невертикальные } J^2\text{-го-} \\ \text{ломорфные отображения} \\ \varphi_{\pm}: M \rightarrow Z_{\pm} \end{array} \right\},$$

где невертикальность отображений $\varphi_{\pm}$ означает по определению, что отображения $\varphi_{\pm} = \pi \circ \varphi_{\pm}: M \rightarrow X$ непостоянны, а голоморфность отображения $\varphi: M \rightarrow Z_{\pm}$ относительно почти комплексной структуры J^2 означает, что его дифференциал $d\varphi: TM \rightarrow TZ_{\pm}$ коммутирует с почти комплексными структурами на пространствах M и $Z_{\pm}$, т.е. $d\varphi \circ J = J^2 \circ d\varphi$, где J - комплексная структура на римановой поверхности M . Соответствие, указанное в теореме, задается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 & & Z_{\pm} \\
 & \nearrow \psi_{\pm} & \downarrow \pi \\
 M & \xrightarrow{\varphi} & X
 \end{array}$$

т.е. $\varphi = \pi \circ \psi_{\pm}$. Поднятия $\psi_{\pm}$ определяются по φ с помощью гауссова поднятия. Таким образом, в соответствии с "программой" Пенроуза, конформные гармонические отображения $\varphi: M \rightarrow X$ удается описать в терминах почти голоморфных отображений в твисторное многообразие. Подробное изложение затронутых вопросов см. в работах [39, 41, 42]. Статьи [43] развивают некоторые затронутые здесь темы, относящиеся к двумерным β -моделям и гармоническим отображениям.

Литература

1. Cartan E. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes. - Abhand. Math. Sem. Univ. Hamburg 11(1935) 116-162.
2. Владимиров В.С., Сергеев А.Г. Комплексный анализ в трубе будущего. Совр. проблемы матем. Фунд. направления, т. 8. - М.: ВИНТИ, 1985, с. 191-266.
3. Твисторы и калибровочные поля. - М.: Мир, 1983.
4. Atiyah M.F. Geometry of Yang-Mills fields. Lezioni Fermiane. - Pisa, 1979.
5. Atiyah M.F., Hitchin N.J., Singer I.M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. - Proc. R. Soc. London 362 (1978), 425-461.
6. Atiyah M.F. Real and complex analysis in four dimension. In: Proc. Symp. Diff. Geom. in honour of S.S. Chern. New York e.a., 1980, 1-10.
7. Bourguignon J.P., Lawson H.B. Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields. - Commun. Math. Phys. 79(1981), 189-230.
8. Uhlenbeck K.K. Removable singularities in Yang-Mills fields. - Commun. Math. Phys. 83(1982), 11-29.
9. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwarz A.S., Tyupkin Yu.S. Pseudo-particle solutions of the Yang-Mills equations. - Phys. Lett. 59B (1975), 85-87.

10. Atiyah M.F., Jones J.S.D. Topological aspects of Yang-Mills theory. - *Commun. Math. Phys.* 61(1978), 97-118. Taubes C.H. Path-connected Yang-Mills moduli spaces. - *J.Diff. Geom.* 19(1984), 337-392.
11. Ward R.S. On self-dual gauge fields. - *Phys.Lett.* 61A (1977), 81-82.
12. Atiyah M.F., Drinfeld V.G., Hitchin N.J., Manin Yu.I. Construction of instantons. - *Phys.Lett.* 65A(1978), 185-187.
13. Taubes C.H. Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds. - *J.Diff.Geom.* 17(1982), 139-170. Taubes C.H. Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix. - *J.Diff.Geom.* 19(1984), 517-560.
14. Witten E. An interpretation of classical Yang-Mills theory. - *Phys.Lett.* 77B(1978), 462-464. Isenberg J., Yasskin Ph.B., Green P.S. Non-self-dual gauge fields. - *Phys.Lett.* 78B(1978), 185-187. Buchdahl N.P. Analysis on analytic spaces and non-self-dual Yang-Mills fields. - *Trans. Amer.Math.Soc.* 288 (1985), 431-470.
15. Манин Ю.И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. - М.: Наука, 1984.
16. Henkin G.M., Manin Yu.I. Twistor description of classical Yang-Mills-Dirac fields. - *Phys.Lett.* 95B(1980), 405-408. Манин Ю.И., Хенкин Г.М. Уравнения Янга - Миллса - Дирака как уравнения Коши - Римана на пространстве твисторов. - *Яд. физ.* 35 (1982), 1610-1626.
17. Donaldson S.K. Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles. - *Proc. London Math.Soc.* 50(1985), 1-26.
18. Belavin A.A., Zakharov V.E. Yang-Mills equations as inverse scattering problem. - *Phys.Lett.* 73B(1978), 53-57. Chau L.L., Prasad M.K., Sinha A. Some aspects of the linear systems for self-dual Yang-Mills fields. - *Phys.Rev.* D24(1981), 1574-1580. Ward R.S. Completely solvable gauge-field equations in dimension greater than four. - *Nucl. Phys.* B236(1984), 381-396.
19. Chau L.L., Ge M.L., Wu Y.S. Kac-Moody algebra in the self-dual Yang-Mills equations. - *Phys.Rev.* D25(1982), 1086-1094. Dolan L. A new symmetry group of real self-dual Yang-Mills theory. - *Phys.Lett.* 113B(1982), 387-390. Ueno K., Nakamura Y. Transformation theory for antiself dual equation and the

- Riemann-Hilbert problem. - *Phys.Lett.* 109B (1982), 273-278.
- Crane L. Action of the loop group on the self-dual Yang-Mills equation. - *Commun.Math.Phys.* 110(1987), 391-414.
20. Donaldson S.K. An application of gauge theory to 4-dimensional topology. - *J.Diff.Geom.* 18(1983), 279-315.
- Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия. - М.: Мир, 1988.
- Lawson H.B. The theory of gauge fields in four dimensions. *Region.Conf.series in Math.*, v.58. - Providence: AMS, 1984.
21. Itoh M. Quaternion structure on the moduli space of Yang-Mills connections. - *Math.Ann.* 276(1987), 581-593. Hitchin N.J., Karlhede A., Lindström U., Roček M. Hyperkähler metrics and supersymmetry. - *Commun. Math. Phys.* 108(1987), 535-589.
22. Ferber A. Supertwistors and conformal supersymmetry. - *Nucl. Phys.* B132(1978), 55-64. Niederle J. From twistors to supertwistors. - Trieste: SISSA, 1986, preprint 58/86/E.P.
23. Taubes C.H. The existence of a non-minimal solution to the SU(2) Yang-Mills-Higgs equations on $\mathbb{R}^3$. - *Commun. Math. Phys.* 86(1982), 257-298; 299-320.
24. Taubes C.H. Stability in Yang-Mills theories. - *Commun. Math. Phys.* 91(1983), 235-263.
25. Богомольный Е.Б. Устойчивость классических решений. - *Яд. физ.* 24 (1976), 449-454.
- Prasad M.K., Sommerfield C.M. Exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon. - *Phys.Rev. Lett.* 35 (1975), 760-762.
26. Weinberg E.J. Parameter counting for multi-monopole solutions. - *Phys.Rev.* D20 (1976), 936-944.
27. Prasad M.K. Yang-Mills-Higgs monopole solutions of arbitrary topological charge. - *Commun. Math. Phys.* 80(1981), 137-149.
28. Corrigan E., Goddard P. A $4n$ -monopole solution with $4n-1$ degrees of freedom. - *Commun. Math. Phys.* 80(1981), 575-587.
29. Jaffe A., Taubes C.H. Vortices and monopoles. - Boston: Birkhäuser, 1980.
30. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. Интегрируемые системы I. Совр. проблемы матем. Фунд. направления, т. 4. - М.: ВИНТИ, 1985, 179-285.
31. Adler M., van Moerbeke P. Linearization of Hamiltonian systems. Jacobi varieties and representation theory. - *Adv. Math.* 38 (1980), 318-379.

32. Griffiths Ph.A. Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations. - Berkeley: MSRI, 1984, preprint 054-84-5.
33. Corrigan E., Wainwright P.R., Wilson S.M.J. Some comments on the non-self-dual Nahm equations. - Commun. Math. Phys. 98 (1985), 259-272.
34. Murray M.K. Monopoles and spectral curves for arbitrary Lie groups. - Commun. Math. Phys. 90(1983), 263-271. Murray M.K. Non-Abelian magnetic monopoles. - Commun. Math. Phys. 96(1984), 539-565. Horvathy P.A., Rawnsley J.H. Monopole charges for arbitrary compact gauge groups and Higgs fields in any representation. - Commun. Math. Phys. 99(1985), 517-540.
35. Kobayashi S., Ohnita Y., Takeuchi M. On instability of Yang-Mills connections. - Math. Z. 193(1986), 165-189.
36. Hitchin N.J. Self-duality equations on a Riemann surface. - Proc. London Math. Soc. 55(1987), 59-126.
37. Оконец К., Шнейдер М., Шлиндлер Х. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. - М.: Мир, 1984.
38. Eells J., Wood J.C. Restrictions on harmonic maps of surfaces. - Topology 15 (1976), 263-266.
39. Salamon S. Harmonic and holomorphic maps. - Lect. Notes Math. 1164(1985), 161-224.
40. Chern S.S. Minimal surfaces in Euclidean space of N dimensions. In: Diff. Comb. Topology. Symp. in honour of M. Morse. - Princeton Univ. Press, 1965, 187-198.
41. Eells J., Salamon S. Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds. - Ann. Sc. norm. super. Pisa. Cl. sci. 12(1985), 589-640.
42. Wood J.C. Twistor constructions for harmonic maps. - Lect. Notes Math. 1255(1987), 130-159.
43. Bryant R.L. Lie groups and twistor spaces. - Duke Math. J. 52 (1985), 223-261. Killingback T.P. Non-linear σ -models on compact Riemann surfaces. - Commun. Math. Phys. 100(1985), 481-494. O'Brian N.R., Rawnsley J.H. Twistor spaces. - Ann. Glob. Anal. Geom. 3(1985), 29-58. Burstall F.E., Wood J.C. The construction of harmonic maps of surfaces into complex Grassmanians. - J. Diff. Geom. 23 (1986), 255-297. Kirwan F. On spaces of maps from Riemann surfaces to Grassmanians and applications to the cohomology of moduli of vector bundles. - Ark. mat. 24(1986), 221-275.

44. Corrigan E., Goddard P. Construction of instanton and monopole solutions and reciprocity. - Ann. Phys. 154(1984), 253-279.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

(Звездочкой отмечены работы из списка литературы, данного после предисловия.)

- (1) Подробнее о полях Якоби см. [9*, гл. 8].
- (2) Поле U ковариантно постоянно, если $\nabla U = 0$.
- (3) Тензор кривизны. Оператор кривизны R на римановом многообразии M определяется формулой $R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z$, где X, Y, Z — векторные поля на M , ∇ — ковариантная производная, построенная по римановой связности на M . В локальном базисе $\{e_i\}$ расслоения TM оператор R задается тензором кривизны R_{ijkl} . След этого тензора $R_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} R_{ijkl}$, где g_{kl} — метрический тензор M , (g^{kl}) — матрица, обратная к матрице (g_{kl}) , называется тензором Риччи, а след тензора Риччи $\sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}$ — скалярной кривизной M . Бесследовым тензором Риччи называется тензор $R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}$, где n — размерность M .
- (4) Почти комплексные структуры и $\bar{\partial}$ -операторы. Пусть M — гладкое многообразие четной размерности. Почти комплексной структурой на M называется изоморфизм $J: TM \rightarrow TM$ касательного расслоения TM , такой, что преобразование $J_p: TM_p \rightarrow TM_p$, $p \in M$, задает комплексную структуру в TM_p , т.е. $J_p^2 = -I$ (I — тождественное отображение). Пусть (M, J) — почти комплексное многообразие, т.е. многообразие с почти комплексной структурой. Имея в каждом касательном пространстве TM_p комплексную структуру J_p , мы можем определить обычным образом комплекснозначные дифференциальные формы типа (p, q) на M и сопоставить оператору внешнего дифференцирования d операторы ∂ и $\bar{\partial}$, переводящие формы типа (p, q) в формы типа $(p+1, q)$ и $(p, q+1)$ соответственно. Почти комплексная структура J называется интегрируемой, если $\bar{\partial}^2 = 0$. Теорема Ньюлендера — Ниренберга утверждает, что почти комплексное многообразие с интегрируемой почти комплексной структурой обладает комплексной структурой, которая индуцирует исходную почти комплексную структуру.

- (5) Вещественной структурой на (почти) комплексном многообразии M называется антиголоморфный диффеоморфизм τ многообразия M на себя, такой, что $\tau^2 = \text{id}$. Аналогично, вещественной структурой на расслоении $E \rightarrow M$ называется антиголоморфный автоморфизм $\tau: E \rightarrow E$, такой, что $\tau^2 = \text{id}$.
- (6) Индекс пересечения. Пусть A и B — два компактных кусочно гладких цикла на ориентированном n -мерном многообразии M размерностей k и $n-k$ соответственно, которые трансверсально пересекаются друг с другом. Определим локальный индекс пересечения $i_p(A \cdot B)$ циклов A, B в точке $p \in A \cap B$. Пусть $u_1, \dots, u_k$ — базис TA_p , согласованный с ориентацией A , а $v_1, \dots, v_{n-k}$ — подобный же базис TB_p . Положим $i_p(A \cdot B)$ равным 1, если $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ образуют базис TM_p , согласованный с ориентацией M , и -1 в противном случае. Определим индекс пересечения $A \cdot B$ циклов A, B по формуле $A \cdot B = \sum i_p(A \cdot B)$, где суммирование ведется по всем точкам $p \in A \cap B$. Индекс пересечения $A \cdot B$ зависит только от классов гомологий циклов A, B , поэтому можно определить индекс пересечения классов гомологий $\alpha \in H^k(M, \mathbb{Z})$ и $\beta \in H^{n-k}(M, \mathbb{Z})$. Для этого выбираются представители $A \in \alpha, B \in \beta$, которые являются кусочно гладкими циклами, пересекающимися трансверсально, и тогда можно положить $\alpha \cdot \beta$ равным $A \cdot B$.
- (7) Степень расслоения. Пусть L — комплексное линейное расслоение над компактным комплексным многообразием M . Тогда степень $\deg L$ линейного расслоения L называется его 1-й класс Чжэня $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Если, в частности, M — компактная риманова поверхность, то $H^2(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и степень L является целым числом. Если E — комплексное векторное расслоение ранга r на M , то его степень $\deg E$ называется степенью детерминантного линейного расслоения $\det E$, функции перехода которого задаются детерминантами функций перехода расслоения E .
- (8) См. статью А.Г. Сергеева, § I.
- (9) См. статью А.Г. Сергеева.
- (10) Симплектическая структура. Векторное пространство V четной размерности $2n$ называется симплектическим, если на нем задана внешняя 2-форма ω (симплектическая структура), которая невырождена в том смысле, что форма $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ на V имеет максимальный ранг. Гладкое многообразие M

размерности $2n$ является симплектическим, если на нем задана дифференциальная 2-форма ω , такая, что для любой точки $p \in M$ форма ω_p задает симплектическую структуру на $T_p M$. Симплектическая структура на векторном расслоении $E \rightarrow M$ определяется заданием в каждом слое E_p , $p \in M$, симплектической структуры ω_p , которая гладко зависит от p . В рассматриваемом в теореме 4.2 случае расслоение E является голоморфным и обладает голоморфной симплектической структурой ω_p , голоморфно зависящей от $p \in M$.

(11) См. также [10*, § 5.7].

(12) Имеется в виду стандартная кватернионная структура на $SU(2)$ -расслоении, которая задается действием элемента $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$.

(13) См. статью А.Г. Сергеева.

(14) Каноническое расслоение и фундаментальный класс. Пусть M есть n -мерное комплексное многообразие. Обозначим через $(T^*M)^* = T^*$ его голоморфное кокасательное расслоение. Каноническим расслоением многообразия M называется n -я внешняя степень $K = \wedge^n T^*$ расслоения T^* . Голоморфные сечения расслоения K являются голоморфными n -формами на M . Если многообразие M компактно, то по двойственности Серра⁽²³⁾ группа $H^n(M, K)$ изоморфна $\mathbb{C}$ и фундаментальным классом M по определению называется образующая этой группы. Если A — аналитическое подмножество M размерности k , его фундаментальный класс $[A] \in H_{2k}(M, \mathbb{R})$ задается линейным функционалом $\omega \rightarrow \int_A \omega$ на группе $H^{2k}(M, \mathbb{R})$ в представлении де Рама. По двойственности Пуанкаре ему отвечает некоторый класс $\eta_A \in H^{2n-2k}(M, \mathbb{R})$, также называемый фундаментальным классом.

(15) См. также статью М.К. Прасада в сборнике [11*, с. 64–96].

(16) Голоморфные линейные расслоения над проективным пространством. Рассмотрим стандартное покрытие комплексного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ открытыми множествами U_i , определяемыми в однородных координатах $[z_0, \dots, z_n]$ на $\mathbb{P}^n$ как $U_i = \{[z_0, \dots, z_n] : z_i \neq 0\}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Зададим голоморфное линейное расслоение $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}^n$ функциями перехода относительно покрытия $\{U_i\}$

$$g_{ij}([z_0, \dots, z_n]) = z_j / z_i \text{ на } U_i \cap U_j.$$

Расслоение $\mathcal{O}(1)$ иначе называется расслоением гиперплоскости (или расслоением гиперплоского сечения) на $\mathbb{P}^n$. Обозначим далее через $\mathcal{O}(-1)$ двойственное расслоение $\mathcal{O}(1)^*$. Это расслоение называется также тавтологическим (или универсальным) линейным расслоением на $\mathbb{P}^n$. Оно совпадает с расслоением $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$, слой которого над точкой $[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n$ является комплексной прямой $\{(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n): 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}\}$ в $\mathbb{C}^{n+1}$, отвечающей точке $[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n$. Определим теперь для любого $k \in \mathbb{Z}$ голоморфное линейное расслоение $\mathcal{O}(k)$ над $\mathbb{P}^n$ как тензорную степень $\mathcal{O}(1)^k$ при $k \geq 0$ и $\mathcal{O}(-1)^{|k|}$ при $k \leq 0$. Расслоение $\mathcal{O}(k)$ в покрытии $\{U_i\}$ задается степенями g_{ij}^k введенных выше функций перехода. Определенное ранее каноническое линейное расслоение ⁽¹⁴⁾ на $\mathbb{P}^n$ совпадает с расслоением $\mathcal{O}(-n-1)$.

(17) Расширения голоморфных расслоений. Пусть E, F, G — голоморфные векторные расслоения над комплексным многообразием M (мы отождествляем ниже голоморфное векторное расслоение с пучком ростков его голоморфных сечений). Расслоение E называется расширением расслоения G при помощи расслоения F , если имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 0.$$

В частности, это означает, что F есть подрасслоение E . Два расширения E и E' расслоения G при помощи F называются эквивалентными, если существует изоморфизм соответствующих точных последовательностей, индуцирующий тождественные отображения на F и G . Классы изоморфных расширений параметризуются элементами группы $\text{Ext}^1(G, F) \cong H^1(M, \text{Hom}(G, F)) \cong H^1(M, G^* \otimes F)$. В рассматриваемом случае $F = L(-k)$, $G = L^*(k)$, $G^* \otimes F = L^2(-2k)$.

(18) Расслоение M было введено выше в замечании к условиям (6.1).

(19) Инфинитезимальные окрестности. Пусть M — комплексное многообразие, A — его замкнутое аналитическое подмногообразие, $\mathcal{I}$ — пучок идеалов в пучке $\mathcal{O}_M$ ростков голоморфных функций на M , определяющий подмногообразие A . Назовем k -й инфинитезимальной (формальной) окрестностью A в M пространство A , снабженное пучком $\mathcal{O}_M / \mathcal{I}^{k+1}$, т.е. окольцованное пространство $(A, \mathcal{O}_M / \mathcal{I}^{k+1})$. Грубо говоря, переход от исходного пространства $(A, \mathcal{O}_A)$ к его k -й инфинитезималь-

ной окрестности $(A, \mathcal{O}_M/\mathcal{I}^{k+1})$ означает, что мы рассматриваем вместо исходного пространства голоморфных функций на A (голоморфных сечений пучка $\mathcal{O}_A$) пространство голоморфных сечений пучка $\mathcal{O}_M/\mathcal{I}^{k+1}$, зависящих не только от координат на A , но и от нормальных производных вплоть до k -го порядка. Если N — нормальное расслоение многообразия A , а $N^* = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ — двойственное к нему конормальное расслоение, то имеется точная последовательность пучков на A

$$0 \rightarrow \mathcal{I}^{k+1} \rightarrow \mathcal{I}^k \rightarrow (N^*)^k \rightarrow 0.$$

Эта последовательность придает смысл предыдущему утверждению и позволяет вычислять препятствия к продолжению сечений с подмногообразия A на его инфинитезимальные окрестности.

(20) Пусть C — гладкая неприводимая кривая на алгебраической поверхности (т.е. двумерном комплексном многообразии, вложенном в проективное пространство) M . Обозначим через K_C (соотв. K_M) каноническое линейное расслоение⁽¹⁴⁾ на C (соотв. на M). Тогда по формуле Римана — Гурвица (см. [12*]) род кривой C равен $g = \frac{1}{2} \deg K_C + 1$, где $\deg K_C$ — степень расслоения⁽⁷⁾ K_C . По формуле присоединения $K_C = (K_M + C)|_C$, поэтому формулу для рода кривой C можно переписать, пользуясь индексами пересечения⁽⁶⁾ в виде $g = \frac{1}{2}(K_M \cdot C + C \cdot C) + 1$.

(21) Определим индекс пересечения голоморфного линейного расслоения L на алгебраической поверхности M с дивизором⁽³⁵⁾ D на M как значение класса Чженя $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ на фундаментальном классе⁽¹⁴⁾ $[D] \in H_2(M, \mathbb{Z})$. Это определение согласуется с определением индекса в примечании (6). Именно, если расслоение L отвечает дивизору D' , то $L \cdot D = D' \cdot D$. В рассматриваемом случае индекс самопересечения $S \cdot S = S^2$ равен $\mathcal{O}(2k) \cdot S = c_1(\mathcal{O}(2k))[S]$. Пользуясь тем, что для расслоения $\mathcal{O}(2k)$ над $\mathbb{P}^1$ класс Чженя $c_1(\mathcal{O}(2k))[\mathbb{P}^1] = 2k$, и учитывая, что S является k -кратным накрытием $\mathbb{P}^1$, получим отсюда, что $S^2 = 2k^2$.

(22) Для вычисления K_T следует воспользоваться его определением⁽¹⁴⁾ и описанием канонического расслоения над $\mathbb{P}^1$ в примечании (16).

(23) Двойственность Серра. Пусть M есть n -мерное комплексное компактное многообразие. Обозначим через Ω^p пучок

ростков голоморфных p -форм на M . Тогда

$$H^q(M, \Omega^p)^* \cong H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}).$$

Более общим образом, если обозначить через K каноническое расслоение⁽¹⁴⁾ многообразия M , то для любого голоморфного векторного расслоения E над M имеет место изоморфизм

$$H^q(M, E)^* \cong H^{n-q}(M, E^* \otimes K)$$

(мы отождествляем голоморфное расслоение с пучком ростков его голоморфных сечений).

(24) См. также статью Дональдсона "Инстантоны и теория инвариантов" в этом сборнике.

(25) В оригинале "osculating section".

(26) Относительно уравнений дуальности и автодуальных связностей см. статью А.Г. Сергеева.

(27) Кватернионы. Пространство кватернионов $\mathbb{H}$ состоит из элементов вида $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — произвольные вещественные числа, а i, j, k — мнимые единицы, т.е. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, связанные между собой соотношениями $i \cdot j = -j \cdot i = k$. Как вещественное векторное пространство $\mathbb{H}$ изоморфно $\mathbb{R}^4$, а с точки зрения алгебраической структуры $\mathbb{H}$ является телом. Определим сопряженный к кватерниону x и норму x формулами

$$\bar{x} = x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4, \quad |x|^2 = x\bar{x} = \bar{x}x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Произвольный ненулевой кватернион x обладает обратным x^{-1} , равным $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$. Кватернион x можно также записать в виде $x = z_1 + z_2j$, где $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$ — комплексные числа. Следовательно, как комплексное векторное пространство $\mathbb{H}$ изоморфно $\mathbb{C}^2$. Мы можем реализовать кватернионы также в виде комплексных 2×2 -матриц. Для этого сопоставим кватерниону $z_1 + z_2j$ матрицу

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

При этом "единичная окружность" в $\mathbb{H}$, т.е. $Sp(1) = \{x \in \mathbb{H} : |x|^2 = 1\}$, отождествляется с группой $SU(2)$ унитарных 2×2 -матриц с детерминантом, равным 1, а мнимые единицы i, j, k переходят в матрицы

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(28) Представление S^k . Обозначим через V_k пространство однородных многочленов степени k от двух комплексных переменных: $w = (z_1, z_2)$. Определим представление S^k группы $SU(2)$ в пространстве V_k по формуле $(S^k(A)p)(w) = p(wA)$, где $p(w)$ — однородный многочлен из V_k , $A \in SU(2)$. Представление S^k является единственным (с точностью до изоморфизма) неприводимым $(k+1)$ -мерным представлением группы $SU(2)$.

(29) Приведем общее определение оператора (элемента) Казимира. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, ρ — ее точное (т.е. инъективное) представление в векторном пространстве V . Пусть, далее, $e_1, \dots, e_n$ — базис в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $f_1, \dots, f_n$ базис в $\mathfrak{g}$, двойственный базису $\{e_i\}$ относительно формы Киллинга $B_\rho(e, f) = \text{Tr}(\rho(e)\rho(f))$, $e, f \in \mathfrak{g}$. Оператор Казимира представления ρ по определению равен $C(\rho) = \sum_{i=1}^n \rho(e_i)\rho(f_i)$. Он не зависит от выбора базиса $\{e_i\}$ и коммутирует со всеми операторами представления. Если представление ρ неприводимо, то оператор $C(\rho)$ является ненулевым скалярным оператором.

(30) См., например, [13*, гл. 9].

(31) Иначе говоря, уравнение $\tilde{\Delta}f = 0$ имеет $k-1$ решений, принадлежащих пространству W .

(32) Весы и весовые пространства. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ — двойственное к ней пространство, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V . Пусть линейная форма $\lambda \in \mathfrak{g}^*$; обозначим

$$V_m^\lambda = \{\xi \in V : (\rho(x) - \lambda(x))^m \xi = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Пространство $V_m^\lambda \neq \{0\}$, являющееся объединением подпространств V_m^λ по всем $m = 0, 1, \dots$, называется весовым

подпространством представления ρ , отвечающим весу λ . Собственные векторы $\xi \in V_1^\lambda$, $\xi \neq 0$, называются весовыми векторами представления, отвечающими весу λ . Представления алгебры Ли $su(2)$, рассматриваемой в данной статье, продолжают единственным образом до представлений ее комплексификации — алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$. Весовые пространства и веса представлений $sl(2, \mathbb{C})$ описаны, например, в книге [13*, гл. 7].

(33) См. статью А.Г. Сергеева.

(34) Определение кватернионной структуры см. в условии (iii) теоремы 4.2 из статьи Хитчина "Монополи и геодезические".

(35) Дивизоры и линейные расслоения. Пусть M — комплексное многообразие. Дивизором D на M называется локально конечная формальная линейная комбинация $D = \sum \alpha_i A_i$ неприводимых аналитических гиперповерхностей A_i в M . Дивизоры на M образуют абелеву группу $\text{Div}(M)$ по сложению. Дивизор D называется эффективным, $D \geq 0$, если все $\alpha_i \geq 0$. Каждой аналитической гиперповерхности A в M сопоставляется эффективный дивизор $\sum A_i$, где A_i — неприводимые компоненты A .

Дивизоры можно отождествить с мероморфными функциями следующим образом. Пусть A — неприводимая аналитическая гиперповерхность и f — голоморфная функция, определяющая A в окрестности точки $p \in A$. Для функции g , голоморфной в окрестности точки p , определим ее порядок $\text{ord}_{A,p}(g)$ вдоль A в точке p как наибольшее целое число k , такое, что $g = f^k h$ в окрестности p , где h — голоморфная функция в окрестности p . Если функция g голоморфна на M , ее порядок вдоль A не зависит от выбора точки p , поэтому определено число $\text{ord}_A(g)$. Пусть f — мероморфная функция на M ; ее можно представить локально в виде $f = g/h$, где функции g, h голоморфны и взаимно просты. Положим $\text{ord}_A(f) = \text{ord}_A(g) - \text{ord}_A(h)$ и сопоставим мероморфной функции f дивизор

$$(f) = \sum_A \text{ord}_A(f) A.$$

Обозначим через $\mathcal{M}^*$ мультипликативный пучок ростков мероморфных функций на M , не равных тождественно нулю, через $\mathcal{O}^*$ — его подпучок, состоящий из ростков голоморфных функций, не обра-

шающихся в нуль. Тогда дивизоры на M можно отождествить с глобальными сечениями факторпучка $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$. Действительно, глобальное сечение $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ задается открытым покрытием $\{U_\alpha\}$ многообразия M и мероморфными на U_α функциями $f_\alpha \neq 0$, такими, что $f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Поэтому $\text{ord}_A f_\alpha = \text{ord}_A f_\beta$ для любой гиперповерхности A , $A \cap U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Сопоставим сечению $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ дивизор $D = \sum_A \text{ord}_A(f_\alpha) A$, где индекс α выбирается так, чтобы $U_\alpha \cap A \neq \emptyset$. Обратно, если $D = \sum \alpha_i A_i$ — дивизор на M , построим открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M так, чтобы на множестве U_α гиперповерхность A_i задавалась определяющей функцией $g_{\alpha i} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. Определим мероморфную функцию $f_\alpha = \prod g_{\alpha i}^{\alpha_i} \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$. Это задает глобальное сечение пучка $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$. Функции $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ называются локальными определяющими функциями дивизора D .

Множество голоморфных линейных расслоений на M естественно отождествляется с группой $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ (см., например, [12*, гл. I, §1]). Эта группа называется группой Пикара $\text{Pic}(M)$ многообразия M . Сопоставим дивизору D линейное расслоение на M . Пусть $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ — локальные определяющие функции дивизора D относительно покрытия $\{U_\alpha\}$. Функции $g_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ являются функциями перехода для некоторого линейного расслоения на M , которое мы сопоставим дивизору D и обозначим через $[D]$. Заметим, что линейное расслоение $[D]$ тривиально тогда и только тогда, когда D является дивизором (f) некоторой мероморфной функции f на M . Будем говорить, что дивизоры D и D' на M линейно эквивалентны, $D \sim D'$, если $D = D' + (f)$ для некоторой мероморфной функции $f \in \mathcal{M}^*(M)$. Имеем $D \sim D' \Leftrightarrow [D] = [D']$.

Сформулированные утверждения содержатся в точной когомологической последовательности

$$H^0(M, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{j_*} H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M, \mathcal{O}^*),$$

ассоциированной с точной последовательностью пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{j} \mathcal{M}^* \xrightarrow{\delta} \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \rightarrow 0,$$

где $j_* f = (f)$, $\delta D = [D]$.

Рассмотрим теперь мероморфное сечение z некоторого линейного расслоения L на M , задаваемого функциями перехода $\{g_{\alpha\beta}\}$ в покрытии $\{U_\alpha\}$. Сечение z задается мероморфными функциями $z_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$, такими, что $z_\alpha = g_{\alpha\beta} z_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$, т.е. $z_\alpha / z_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Следовательно, для любой гиперповерхности A на M , для которой $A \cap U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, имеем $\text{ord}_A(z_\alpha) = \text{ord}_A(z_\beta)$, и можно положить $\text{ord}_A(z) = \text{ord}_A(z_\alpha)$ для любого α , такого, что $U_\alpha \cap A \neq \emptyset$. Сопоставим мероморфному сечению z дивизор

$$(z) = \sum_A \text{ord}_A(z) A.$$

Сечение z является голоморфным тогда и только тогда, когда его дивизор (z) эффективен. Если дивизор D задан локальными определяющими функциями $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$, то они определяют мероморфное сечение z расслоения $[D]$, причем $(z) = D$. Обратно, если z — мероморфное сечение расслоения L , то $[(z)] = L$. Таким образом, расслоение L отвечает некоторому дивизору D на $M \Leftrightarrow L$ имеет нетривиальное глобальное мероморфное сечение. Аналогично, расслоение L отвечает некоторому эффективному дивизору на $M \Leftrightarrow$ оно имеет нетривиальное глобальное голоморфное сечение.

Пусть D — некоторый дивизор на M . Обозначим через $\mathcal{L}(D)$ пространство мероморфных на M функций f , таких, что $D + (f) \geq 0$, а через $|D|$ — множество эффективных дивизоров, линейно эквивалентных D . Если $L = [D]$, то положим по определению $|L| = |D|$. Обозначим через z_0 глобальное мероморфное сечение расслоения $[D]$, такое, что $(z_0) = D$. Если z — глобальное голоморфное сечение расслоения $[D]$, то $f_z = z/z_0$ есть мероморфная функция на M , причем $(f_z) + D = (z) \geq 0$, т.е. $f_z \in \mathcal{L}(D)$. Тем самым умножение на z_0 задает отождествление $\mathcal{L}(D)$ с пространством $H^0(M, \mathcal{O}([D]))$ голоморфных сечений расслоения $[D]$. Если многообразие M компактно, то для любого дивизора $D' \in |D|$ функция $f \in \mathcal{L}(D)$ в представлении $D' = D + (f)$ определяется однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу. Поэтому множество $|D|$ можно отождествить в этом случае с проективизацией $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \cong \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}([D])))$.

Назовем линейной системой дивизоров для линейного расслоения $L \rightarrow M$ семейство эффективных дивизоров на M , отвечающее некоторому проективному подпространству в $\mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}(L)))$.

Линейная система называется полной, если она совпадает с $|D|$ для любого дивизора из этой системы. Размерностью линейной системы называется размерность параметризующего ее проективного пространства. Более подробное изложение затронутых в этом примечании вопросов см. в [12*, гл. I].

(36) Теорема Кодаиры. Голоморфное линейное расслоение L на компактном кэлеровом многообразии M называется положительным, если на L существует метрика с формой кривизны F , такая, что соответствующая ей $(1, 1)$ -форма $\frac{i}{2\pi} F$ положительна (т.е. для любого $p \in M$ и любого голоморфного касательного вектора $v \in T^c M_p$ значение этой формы на паре векторов v и $\bar{v}$ положительно). Расслоение L положительно $\iff$ его класс Чженя задается положительной формой в представлении де Рама. Расслоение L называется отрицательным, если L^* положительно. Дивизор D называется положительным, если расслоение $[D]$ положительно. Основным примером положительного расслоения является расслоение гиперплоскости $\mathcal{O}(1)$ на P^n .

Теорема Кодаиры утверждает, что для положительного линейного расслоения L его группы когомологий тривиальны: $H^q(M, \Omega^p(L)) = 0$ в размерностях $q > n - p$. Для отрицательного расслоения тривиальны группы когомологий $H^q(M, \Omega^p(L)) = 0$ в размерностях $q < n - p$.

(37) Теорема Римана - Роха. Пусть M - компактное комплексное многообразие, $E \rightarrow M$ - голоморфное векторное расслоение. Определим его голоморфную эйлерову характеристику как $\chi(E) = \sum (-1)^i \dim H^i(M, \mathcal{O}(E))$. Обозначим через $\chi(\mathcal{O}_M)$ голоморфную эйлерову характеристику тривиального линейного расслоения на M , равную $\chi(\mathcal{O}_M) = \sum (-1)^i \dim H^i(M, \mathcal{O})$. Если $M = S$ есть риманова поверхность рода g и L - линейное расслоение над S , то теорема Римана - Роха утверждает, что

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + c_1(L) = 1 - g + c_1(L).$$

Если же M есть 2-мерное комплексное многообразие и L - линейное расслоение над M , то по теореме Римана - Роха

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_M) + \frac{1}{2}(c_1^2(L) + c_1(L) \cdot c_1(M)).$$

Так как по формуле Нётера $\chi(\mathcal{O}_M) = \frac{1}{12}(c_1^2(M) + c_2(M))$, то формулу Римана – Роха в этом случае можно переписать в виде

$$\chi(L) = \frac{1}{12}(c_1^2(M) + c_2(M)) + \frac{1}{2}(c_1^2(L) + c_1(L) \cdot c_1(M)).$$

Если поверхность M рациональна (т.е. бирационально изоморфна $\mathbb{P}^2$), то $\chi(\mathcal{O}_M) = 1$.

(38) Индекс пересечения линейных расслоений $L_1 = [D_1]$ и $L_2 = [D_2]$ на M равен индексу пересечения $D_1 \cdot D_2$ отвечающих им дивизоров (см. примечания (6), (2I)). Индекс пересечения произвольных линейных расслоений L_1, L_2 на M определяется как значение $\cup$ -произведения (см. [17*, гл. 5, § 6]) классов Чженя на фундаментальном классе (14) : $L_1 \cdot L_2 = (c_1(L_1) \cup c_1(L_2)) [M]$.

(39) См. [7] в литературе к этой статье.

(40) Используется следующий вариант теоремы Гартогса. Пусть A – аналитическое подмножество коразмерности ≥ 2 на комплексном многообразии M . Тогда любая функция, голоморфная вне множества A , продолжается до голоморфной функции на M .

(4I) Якобианы и тета-дивизоры. Пусть S – кривая рода g , т.е. компактная риманова поверхность рода g . Существует канонический базис $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, b_1, \dots, b_g\}$ группы гомологий $H_1(S, \mathbb{Z})$, такой, что индексы пересечений (6) равны $\alpha_\alpha \cdot \alpha_\beta = b_\alpha \cdot b_\beta = 0$, $\alpha_\alpha \cdot b_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Выберем базис голоморфных 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_g$ в группе $H^0(S, \Omega^1)$, такой, что $\int \omega_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Якобиан $\text{Jac}(S)$ римановой поверхности S определяется как тор $\mathbb{C}^g / \Lambda$, где Λ – решетка в $\mathbb{C}^g$, порожденная векторами $\lambda_\alpha = e_\alpha = \left(\int_{\alpha_\alpha} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_\alpha} \omega_g \right)$, $\alpha = 1, \dots, g$, и $\lambda_{g+\alpha} = \left(\int_{b_\alpha} \omega_1, \dots, \int_{b_\alpha} \omega_g \right)$.

Естественное отображение $\mu: S \rightarrow \text{Jac}(S)$ задается формулой

$$\mu: p \mapsto \left(\int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_g \right),$$

где p_0 – произвольная фиксированная точка S . Отображение μ не зависит от выбора базисной точки p_0 и пути, соединяющего эту точку с точкой p . Более общо, можно определить отображение $\mu: \text{Div}^0(S) \rightarrow \text{Jac}(S)$ группы дивизоров степени 0 в якобиане, полагая

$$\mu\left(\sum p_i - \sum q_i\right) = \left(\sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega_1, \dots, \sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega_g\right).$$

В примечании (35) было построено отображение из группы дивизоров $\text{Div}(S)$ в группу Пикара $\text{Pic}(S)$ линейных расслоений на S . Если обозначить через $\text{Pic}^0(S)$ подгруппу $\text{Pic}(S)$, состоящую из расслоений с нулевым классом Чжэня, то отображение $\mu: \text{Div}^0(S) \rightarrow \text{Jac}(S)$ можно будет разложить в композицию отображений $\text{Div}^0(S) \rightarrow \text{Pic}^0(S) \xrightarrow{\mu} \text{Jac}(S)$. Отображение $\tilde{\mu}$ является изоморфизмом. Это вытекает из теоремы обращения Якоби, которая состоит в следующем. Обозначим через $S^{(g)}$ g -ю симметрическую степень кривой S , т.е. множество неупорядоченных наборов из g точек на S , и определим отображение $\mu_g: S^{(g)} \rightarrow \text{Jac}(S)$, полагая

$$\mu_g: (p_1, \dots, p_g) \mapsto \left(\sum_i \int_{p_0}^{p_i} \omega_1, \dots, \sum_i \int_{p_0}^{p_i} \omega_g\right).$$

Теорема Якоби утверждает, что это отображение сюръективно. Отсюда следует, в частности, что $\text{Jac}(S)$ можно отождествить с компонентой $\text{Pic}^g(S)$ группы Пикара $\text{Pic}(S)$, состоящей из расслоений степени g . Сопоставляя дивизору $p_1 + \dots + p_g$ дивизор $\sum p_i - gp_0$, получим, что $\tilde{\mu}$ также является изоморфизмом, т.е. $\text{Jac}(S) \cong \text{Pic}^0(S)$.

Из точной последовательности

$$H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}),$$

порожденной точной последовательностью пучков $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$, вытекает, что группа $\text{Pic}^0(S)$ совпадает с факторгруппой $H^1(S, \mathcal{O})/H^1(S, \mathbb{Z})$, которая тем самым совпадает с $\text{Jac}(S)$ и является g -мерным комплексным тором. В представлении Дольбо элементы $H^1(S, \mathcal{O})$ задаются $(0, 1)$ -формами на S , а решетка $H^1(S, \mathbb{Z})$ состоит из вещественных $\bar{1}$ -форм на S с целочисленными периодами (т.е. с целочисленными интегралами от u по циклам $\{\alpha_\infty, b_\infty\}$).

Матрица $\Omega = (I, Z)$ размера $g \times 2g$, строки которой имеют вид

называется матрицей периодов кривой S . Обозначим через $x_1, \dots, x_{2g}$ вещественные координаты на $\mathbb{C}^g$ относительно базиса $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$; они связаны со стандартными комплексными координатами $(z_1, \dots, z_g)$ на $\mathbb{C}^g$ соотношением ${}^t(z_1, \dots, z_g) = \Omega \cdot {}^t(x_1, \dots, x_{2g})$. Важную роль играет форма $\omega = \sum_{\alpha} dx_{\alpha} \wedge dx_{n+\alpha}$. В координатах $(z_1, \dots, z_g)$ она является замкнутой положительной $(1, 1)$ -формой на $\mathbb{C}^g$, которая определяет форму с целочисленными периодами на $\text{Jac}(S)$. Ее класс когомологий $[\omega]$ называется главной поляризацией якобиана $\text{Jac}(S)$. Положительные (36) линейные расслоения L на торе $\text{Jac}(S)$ являются факторами тривиального расслоения $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$, а глобальные сечения L задаются целыми голоморфными функциями на $\mathbb{C}^g$, удовлетворяющими некоторым функциональным уравнениям. Эти функции называются тета-функциями. Рассмотрим, в частности, положительное линейное расслоение L на $\text{Jac}(S)$, класс Чжэня которого $c_1(L)$ совпадает с главной поляризацией $[\omega]$. Тогда пространство сечений $H^0(S, \mathcal{O}(L))$ одномерно и порождается сечением $\tilde{\theta}$, задаваемым целой θ -функцией Римана: $\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp[\pi i \langle n, Zn \rangle] \exp[2\pi i \langle n, z \rangle]$, которая удовлетворяет функциональным соотношениям

$$\theta(z + e_{\alpha}) = \theta(z), \quad \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) = \exp\left[-2\pi i \left(z_{\alpha} + \frac{Z_{\alpha\alpha}}{2}\right)\right] \theta(z), \quad \theta(z) = \theta(-z).$$

Дивизор $\Theta = (\tilde{\theta})$ сечения $\tilde{\theta}$ называется тета-дивизором $\text{Jac}(S)$. Дивизор Θ однозначно определяется расслоением L , и в то же время он определяется главной поляризацией $[\omega]$ с точностью до сдвига. Иными словами, дивизор Θ_{λ} , задаваемый тета-функцией $\theta_{\lambda}(z) = \theta(z - \lambda)$ с $\lambda \in \text{Jac}(S)$, определяет линейное расслоение L_{λ} на $\text{Jac}(S)$ с тем же классом Чжэня $c_1(L_{\lambda}) = [\omega]$.

Тета-дивизор Θ позволяет построить явное отображение $\mu_g: S^{(g)} \rightarrow \text{Jac}(S)$. А именно, для любого $\lambda \in \text{Jac}(S)$ дивизор Θ_{λ} либо содержит образ $\mu(S)$ отображения $\mu: S \rightarrow \text{Jac}(S)$, либо пересекает его ровно в g точках (с учетом кратностей). Иначе говоря, ограничение функции $\theta_{\lambda}(\mu(p))$ на $\mu(S)$ либо тождественно равно нулю, либо имеет ровно g нулей. В последнем случае обозначим эти нули через $p_1(\lambda), \dots, p_g(\lambda)$ и положим $p = (p_1, \dots, p_g) \in S^{(g)}$. Тогда $\mu_g(p) = \lambda - x$, где x — фиксированная точка $\text{Jac}(S)$, которая зависит только от самой кривой, выбора базисных циклов и начальной точки p_0 . Сформулированный результат позволяет

дать геометрическое определение тета-дивизора. А именно, по теореме Римана $\Theta = W_{g-1} + \alpha$, где $W_{g-1} = \mu_{g-1}(S^{(g-1)})$, а μ_{g-1} и $S^{(g-1)}$ определяются по аналогии с μ_g и $S^{(g)}$. (Подробнее о якобианах см. [12*, гл. 2].)

Поясним теперь содержание последнего абзаца §3. Группу Пикара $\text{Pic}^0(S)$, как было указано, можно отождествить с якобианом $\text{Jac}(S)$. С другой стороны, $\text{Pic}^0(S)$ можно отождествить в рассматриваемом случае с компонентой $\text{Pic}^{g-1}(S)$ группы $\text{Pic}(S)$, отвечающей линейным расслоениям степени $g-1$, сопоставляя расслоению $L \in \text{Pic}^0(S)$ расслоение $L(k-2)$ степени k (см. примечание (21)). Согласно теореме Римана, дивизор $\Theta - \alpha$ можно отождествить с множеством эффективных дивизоров на S степени $g-1$, т.е. с множеством линейных расслоений, допускающих нетривиальные голоморфные сечения (см. примечание (35)). Поскольку расслоение $L^{\otimes(k-2)}$ при $\alpha \in (0, 2)$ не имеет глобальных сечений, то образ дивизора $\Theta - \alpha$ в $H^1(S, \mathcal{O})/H^1(S, \mathbb{Z}) \cong \text{Pic}^{g-1}(S)$ пересекается с $h(S^1)$ в единственной точке $h(1)$.

(42) Поскольку для рациональной поверхности $\chi(\mathcal{O}) = 1$ (см. примечание (37)).

(43) Уравнение Лакса. Приведем общее определение уравнений Лакса. Пусть M — гладкое многообразие, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, v — векторное поле на M . Если заданы гладкие отображения $L, A: M \rightarrow \mathfrak{g}$, причем L — вложение, то уравнением Лакса (его же называют иногда уравнением Эйлера) называется уравнение $dL/dt = [L, A]$, где dL/dt — производная L вдоль векторного поля v . Из уравнения вытекает, что при изменении во времени, т.е. при движении вдоль векторного поля v , образ L остается в одной и той же орбите присоединенного действия алгебры Ли. Отсюда следует, что инварианты орбиты не зависят от времени. Если, в частности, L и A — матричные (или дифференциальные) операторы на прямой, то коэффициенты характеристического многочлена L и его собственные числа не зависят от времени.

(44) Нужно воспользоваться точными когомологическими последовательностями, порожденными точными последовательностями пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(m-2l) \rightarrow L^{(l)}(m) \rightarrow L^{(l-1)}(m) \rightarrow 0$$

при $l = 0, 1, \dots, k$.

(45) Расслоения джетов. Обозначим через $\mathcal{O}_p(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ пространство ростков голоморфных отображений $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ в точке $p \in \mathbb{C}^m$. Будем считать два ростка $f, g \in \mathcal{O}_p(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ k -эквивалентными в точке p , если все частные производные f и g порядков $\leq k$ в точке p совпадают. Пространством k -джетов $J_p^k(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ голоморфных отображений $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ называется факторпространство $\mathcal{O}_p(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ по отношению k -эквивалентности в точке p . Имеется естественное отображение $j_p^k: \mathcal{O}_p(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \rightarrow J_p^k(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, сопоставляющее ростку f в точке p его отрезок ряда Тейлора $j_p^k f$ k -й степени в точке p . Пусть теперь E — голоморфное векторное расслоение над комплексным многообразием M . Обозначим через $\Gamma_p(\mathcal{O}(E))$ пространство ростков голоморфных сечений расслоения E в точке p и построим по нему пространство $J_p^k(\mathcal{O}(E))$ k -джетов сечений из $\Gamma_p(\mathcal{O}(E))$ в точке p . Пространство $J^k(E) = \bigcup_{p \in M} J_p^k(\mathcal{O}(E))$ наделяется естественной структурой голоморфного векторного расслоения и называется расслоением k -джетов расслоения E . Имеется естественное отображение $j^k: \Gamma(M, \mathcal{O}(E)) \rightarrow \Gamma(M, J^k(E))$, такое, что $(j^k f)(p) = (j_p^k f)(p)$ для любой точки $p \in M$.

(46) Эрмитова структура на векторном расслоении $E \rightarrow M$ над гладким многообразием M определяется заданием в каждом слое E_p над точкой $p \in M$ эрмитовой формы g_p , гладко зависящей от $p \in M$.

(47) Нужно воспользоваться определением вещественной структуры в начале §3.

(48) Действительно, любой вектор $f \in \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^2$ мы можем задать парой векторов ${}^t(f_1, f_2)$, где f_1 (соотв. f_2) — собственный вектор оператора e_3 с собственным значением i (соотв. $-i$). В этом представлении оператор e_3 будет задаваться матрицей $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, а операторы e_1, e_2 — матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ соответственно. Ядро $\text{Ker } \Delta^*$ будет при этом описываться формулами (7.6).

(49) Хотя уравнения Нама (2.4) при $k = 2$ и напоминают внешние уравнения Эйлера вращающегося твердого тела, они все же отличаются от них. Чтобы убедиться в этом, запишем матрицы T_i из уравнений (2.4) в виде $T_i(x) = u_i(x) \sigma_i$, $i = 1, 2, 3$, где $u_i(x)$ — скалярные функции, а σ_i — стандартные $\text{su}(2)$ -матрицы, отвечающие кватернионам i, j, k (см. примечание (27)).

Тогда система Нама (2.4) перейдет в систему

$$\frac{du_1}{dz} = 2u_2u_3, \quad \frac{du_2}{dz} = 2u_1u_3, \quad \frac{du_3}{dz} = 2u_1u_2.$$

С другой стороны, уравнения Эйлера в таких же обозначениях имеют вид

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{I_2 - I_3}{I_1} u_2 u_3, \quad \frac{du_2}{dz} = \frac{I_3 - I_1}{I_2} u_1 u_3, \quad \frac{du_3}{dz} = \frac{I_1 - I_2}{I_3} u_1 u_2.$$

Эти системы совпадают при условии, что $I_2 - I_3 = 2I_1$, $I_3 - I_1 = 2I_2$, $I_1 - I_2 = 2I_3$. Последнее возможно только при $I_1 = I_2 = I_3 = 0$.

(50) По поводу линеаризации потоков на якобианах кривых см. статью А.Г. Сергеева, п. 3.3.

(51) См. статью А.Г. Сергеева.

(52) См. статью Хитчина "Построение монополей", §8, замечание 4.

(53) Сплетающий оператор. Пусть ρ_1, ρ_2 — представления группы G в векторных пространствах V_1, V_2 соответственно. Линейный оператор $C \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ называется сплетающим для ρ_1, ρ_2 , если $C\rho_1(g) = \rho_2(g)C$ для всех $g \in G$.

(54) В оригинале "based".

(55) Через $\langle q(t) \rangle$ обозначен главный идеал в кольце многочленов, порожденный многочленом $q(t)$.

(56) Точнее, если $q(t) = (t - \lambda)^l q_0(t)$, где $q_0(\lambda) \neq 0$, то

$$(\pi, \sigma) | V_\lambda = \frac{p(\lambda)}{q_0(\lambda)} \sum_{i=0}^{l-1} \pi_i \sigma_{l-i-1}.$$

(57) Эллиптической кривой называется алгебраическая кривая (компактная риманова поверхность) рода 1.

(58) См., например, [20*, гл. I].

(59) $\wp$ -функция Вейерштрасса на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ относительно решетки $\mathcal{L}$ задается рядом

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{L} \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right],$$

который сходится для всех $x \notin \mathcal{L}$ и определяет мероморфную функцию на $\mathbb{C}$ с двойными полюсами в точках решетки. Функция $\wp(x)$ является четной двоякопериодической функцией относительно решетки $\mathcal{L}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$.

(60) Имеется в виду, что $|l_n| > |l_i|$. Автор в зависимости от контекста понимает под l_n и l_i то векторы — образующие решетки, то длины этих векторов.

(61) Необходимо также, чтобы функции f_1 и f_2 не имели нулей в своих областях определения.

(62) То есть петля $[0, l_i]$ гомотопна петле $\Gamma + \tau(\Gamma)$.

(63) См. пример (7.8) в статье Хитчина "Монополи и геодезические".

(64) Многообразие M с метрикой g называется многообразием Эйнштейна, если его тензор Риччи⁽³⁾ пропорционален метрическому тензору g_{ij} .

(65) Решение Тауб- NUT — это пространственно-однородное решение уравнений Эйнштейна в пустом пространстве с топологией $\mathbb{R} \times S^3$ и метрикой

$$ds^2 = -u^{-1}dt^2 + (2l)^2 u (d\varphi + \cos\theta d\psi)^2 + (t^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где

$$u(t) \equiv -1 + \frac{2(mt + l^2)}{t^2 + l^2}.$$

Здесь m, l — положительные константы, θ, φ, ψ — эйлеровы координаты на сфере S^3 ($0 \leq \varphi \leq 4\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$). Указанное решение было найдено Таубом в 1951 г. Метрика имеет особенность при $t = t_{\pm} = (m \pm (m^2 + l^2)^{1/2})$ (при этом $u = 0$). Однако ее можно продолжить через особые гиперповерхности. Получаемое таким образом пространство было построено Ньюменом, Тамбурино и Унти. Подробности и ссылки см. в книге: Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.

(66) См. по этому поводу статью А.Г. Сергеева, п. 3.3.

(67) См. также Лустерник Л.А., Шнирельман Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах. Тр. Научно-исслед. ин-та матем. и мех. при МГУ. — М.: ГИТТЛ, 1930, и книгу [19*], где имеются

ссылки и на другие работы Л.А. Люстерника и Л.Г. Шнирельмана.

(68) Эта задача подробно рассматривается в статье Таубса "Монополи и отображения из S^2 в S^2 " в этом сборнике. См. также работу [12] в списке литературы к этой статье.

(69) Пространство $\Omega_n(S^2, S^2)$ состоит, по определению, из отображений $f \in \Omega(S^2, S^2)$ степени n . Любое отображение $f \in \Omega(S^2, S^2)$ задает элемент гомотопической группы $[f] \in \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Целое число, отвечающее $[f]$ в силу последнего изоморфизма, называется степенью отображения f . Пространство $\mathcal{B}_n$ состоит из элементов $c = (A, \Phi) \in \mathcal{B}$, имеющих заряд (монопольное число), равный n (см. статью А.Г. Сергеева, п. 3.1).

(70) В этой статье используется следующее понятие деформационного ретракта, называемого также сильным деформационным ретрактом. Подпространство A топологического пространства X называется деформационным ретрактом X , если существует гомотопия $F: X \times [0, 1] \rightarrow X$, обладающая следующими свойствами: 1) $F(x, 0) = x$ при $x \in X$; 2) $F(X \times \{1\}) \subset A$; 3) $F(\alpha, t) = \alpha$ для всех $\alpha \in A$ и всех $t \in [0, 1]$.

(71) См. также [14*, 15*].

(72) О фактах, относящихся к теоремам вложения, см. [16*]. Аналогии для пространств сечений расслоений приводятся в книгах, упомянутых выше (71).

(73) Знаком $X \lrcorner \omega$ обозначается внутреннее произведение дифференциальной формы ω и векторного поля X . Напомним его определение. Пусть ΛT^*M — внешняя алгебра дифференциальных форм гладкого многообразия M , X — гладкое векторное поле на M . Внутренним произведением на вектор X называется дифференцирование $X \lrcorner$ алгебры ΛT^*M (т.е. линейный эндоморфизм ΛT^*M в себя, удовлетворяющий равенству $(X \lrcorner)(\omega \wedge \omega') = (X \lrcorner \omega) \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge (X \lrcorner \omega')$ для любых форм $\omega \in \Lambda^r T^*M$, $\omega' \in \Lambda^s T^*M$), которое переводит r -формы в $(r-1)$ -формы и однозначно определяется следующими условиями: (а) $X \lrcorner f = 0$ для любой функции $f \in \Lambda^0 T^*M$; (б) $X \lrcorner \omega = \omega(X)$ для любой формы $\omega \in \Lambda^1 T^*M$. Операция внутреннего умножения двойственна по отношению к операции внешнего умножения и представляет собой нечто вроде "частной производной по X ".

(74) В оригинале "boot-strap". Этот термин обычно переводится на русский язык как "бутстрап" или "зашнуровка".

(75) Ввиду того, что в оригинале в этом месте произошел сбой нумерации формул, мы снабдили номера этой и двух последующих формул штрихами.

(76) Свойство накрывающей гомотопии. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — непрерывное отображение топологических пространств. Оно обладает свойством накрывающей гомотопии, если для любого топологического пространства X и непрерывной гомотопии $F: X \times [0, 1] \rightarrow B$ найдется накрывающая ее непрерывная гомотопия $F': X \times [0, 1] \rightarrow E$. Иначе говоря, при любом $x \in X$ выполняется равенство $F(x, t) = \pi F'(x, t)$ для любого $t \in [0, 1]$. Можно слегка изменить приведенное определение, дополнительно потребовав, чтобы для отображения $f(x) = F(x, 0)$ и произвольного его поднятия f' , $\pi \circ f' = f$, существовала гомотопия F' с "начальным условием" $f': F'(x, 0) = f'(x)$. Расслоения, встречающиеся в статьях Таубса, удовлетворяют обоим сформулированным свойствам накрывающей гомотопии (см. [17*]).

(77) Напомним формулировку леммы Пуанкаре. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, ω — гладкая дифференциальная форма степени p в области $\mathcal{D}$. Если она замкнута, т.е. $d\omega = 0$, то найдется гладкая форма ω' степени $p-1$ в $\mathcal{D}$, удовлетворяющая уравнению $d\omega' = \omega$. Отображение $\omega \mapsto \omega'$ является линейным непрерывным отображением из пространства гладких замкнутых p -форм в $\mathcal{D}$ в пространство гладких $(p-1)$ -форм в $\mathcal{D}$.

(78) Отображение $f: X \rightarrow Y$ двух G -пространств X, Y (т.е. пространств, на которых действует группа G) называется G -эквивариантным, если для любых $x \in X, g \in G$ справедливо соотношение $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$, где $\cdot$ обозначает действие группы.

(79) Символ $\text{Sym}_2 E$, где E — векторное расслоение над топологическим пространством X , обозначает симметрический квадрат расслоения E . Напомним его определение. Пусть V — векторное пространство, $V^p = V \otimes \dots \otimes V$ — его p -я тензорная степень. Обозначим через $f_s: V^p \rightarrow V^p$ линейное отображение, задаваемое на элементах вида $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$, $v_i \in V$, формулой $f_s(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = v_{s(1)} \otimes \dots \otimes v_{s(p)}$, где s — перестановка множества $\{1, \dots, p\}$. Симметрическая p -я степень $\text{Sym}_p V = S^p V$ пространства V совпада-

ет, по определению, с подпространством V^p , состоящим из элементов $v \in V^p$, инвариантных относительно f_σ : $f_\sigma(v) = v$ для любых перестановок σ . Тем самым в категории векторных пространств определен непрерывный функтор $\text{Sym}_p: V \rightarrow \text{Sym}_p V$. Он продолжается обычным образом до функтора Sym_p , определенного на категории векторных расслоений.

(80) Расслоение $X \times_G F$. Пусть G — топологическая группа, X — топологическое пространство, на котором группа G действует справа без неподвижных точек (т.е. $xg = x$ влечет $g = 1$, где $x \in X$, $g \in G$). Если F — топологическое пространство с левым действием группы G , то пространство $X \times F$ можно снабдить правым действием группы G по формуле $(x, f)g = (xg, g^{-1}f)$, где $x \in X$, $f \in F$, $g \in G$. Проекция на первый сомножитель порождает отображение $\pi: X \times F \rightarrow X \rightarrow X/G$, где X/G — пространство орбит действия группы G на X . Обозначим через $X \times_G F$ пространство орбит действия группы G на $X \times F$. Отображение π индуцирует отображение $X \times_G F \rightarrow X/G$, которое определяет расслоение со структурной группой G и слоем F .

(81) Приведем основные факты, относящиеся к спинорам, алгебрам Клиффорда и операторам Дирака. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — фиксированный базис вещественного n -мерного векторного пространства V , $n \geq 2$. Клиффордова алгебра C_n есть вещественная алгебра с единицей 1 и образующими $e_1, \dots, e_n$, причем образующие e_i , $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям $e_i^2 = -1$, $e_i e_j = -e_j e_i$. Обозначим через C_n^+ (соотв. C_n^-) подпространство C_n , порожденное произведениями четного (соотв. нечетного) числа элементов из V . Пусть β — канонический антиавтоморфизм алгебры C_n , который определяется формулой $\beta(v_1 \dots v_k) = v_k \dots v_1$. Так как $V \subset C_n$, мы можем ввести группу $\text{Pin}(n)$, состоящую из обратимых элементов u алгебры C_n , таких, что $uVu^{-1} = V$. Положим также $\text{Pin}^+(n) = \text{Pin}(n) \cap C_n^+$. Спинорная группа $\text{Spin}(n)$ определяется следующим образом: $\text{Spin}(n) = \{u \in \text{Pin}^+(n): u\beta(u) = 1\}$. Формула $\rho(u)v = uvu^{-1}$ задает линейное представление группы $\text{Spin}(n)$ в пространстве V , при котором $\rho(\text{Spin}(n))$ совпадает с $\text{SO}(n)$. Гомоморфизм ρ является двукратным накрытием, а группа $\text{Spin}(n)$ — универсальной накрывающей группы $\text{SO}(n)$. Для малых n имеем $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2)$, $\text{Spin}(4) = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$. Если n четно, то комплексификация

$C_n \otimes \mathbb{C}$ алгебры C_n обладает неприводимым представлением в пространстве $S = \mathbb{C}^k$ размерности $k = 2^{n/2}$, которое определяет спинорное представление группы $Spin(n)$ в пространстве $\mathbb{C}^k$, называемом пространством спиноров. Относительно действия комплексифицированной алгебры $C_n \otimes \mathbb{C}$ пространство спиноров S расщепляется в прямую сумму инвариантных подпространств $S = S_+ \oplus S_-$, элементы которых называются соответственно правыми и левыми спинорами. Алгебра $C_n \otimes \mathbb{C}$ переводит S_+ в S_- и наоборот. При этом подпространство $V \otimes \mathbb{C} \subset C_n \otimes \mathbb{C}$ можно отождествить с пространством эндоморфизмов $\text{Hom}(S_+, S_-)$.

Пусть теперь $\pi: P \rightarrow M$ — расслоение ортонормированных базисов n -мерного риманова многообразия M , являющееся главным $SO(n)$ -расслоением. Спинорной структурой на M называется главное $Spin(n)$ -расслоение $\tilde{\pi}: \tilde{P} \rightarrow M$, накрывающее расслоение $\pi: P \rightarrow M$. Спинорная структура на M порождает естественным образом спинорное расслоение $\pi_S: S(M) \rightarrow M$, а риманова связность на M — спинорную связность на расслоении $S(M)$. В пространстве $\Gamma(S)$ гладких сечений (спинорных полей) ψ расслоения $S(M)$ действует оператор Дирака, т.е. линейный дифференциальный оператор 1-го порядка, который в локальном ортонормированном базисе касательного расслоения TM , состоящем из векторных полей $v_1, \dots, v_n$, задается формулой

$$\partial \psi = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \nabla_i \psi,$$

где ∇_i — ковариантная производная по направлению v_i , а умножение векторов из TM_x на спиноры из $S(M)_x$ задается представлением алгебры $C_n \otimes \mathbb{C}$ в пространстве $S(M)_x$. Это определение не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{v_i\}$. Если ввести, как и выше, подрасслоения $S_+(M)$ и $S_-(M)$, так что $S = S_+ \oplus S_-$, то $\partial: \Gamma(S_+) \rightarrow \Gamma(S_-)$ и, наоборот, $\partial: \Gamma(S_-) \rightarrow \Gamma(S_+)$.

(82) Свойство (*). Пусть $\xi \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторное расслоение, снабженное римановой метрикой, и $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ — скалярное произведение в $L^2(\xi)$. Рассмотрим квадратичную форму J на пространстве $\Gamma(\xi)$ вида

$$\begin{aligned} J(\psi, \eta) &= \langle \psi, \eta \rangle_\alpha + \langle \psi, \mathfrak{M} \eta \rangle_2, \text{ где } \langle \psi, \eta \rangle_\alpha = \\ &= \langle \nabla_A \psi, \nabla_A \eta \rangle_2 + \langle q\psi, q\eta \rangle_2, \end{aligned}$$

и $\mathfrak{M}, q \in \Gamma(\text{End } \xi)$, $\psi, \eta \in \Gamma_0(\xi)$, $\alpha = (A, q)$. Форма J удовлетворяет свойству $(*)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\nu = \nu(\varepsilon) < \infty$, такое, что

$$|\langle (1 - \chi_\nu)\psi, \mathfrak{M}\eta \rangle_2| \leq \varepsilon \langle \psi, \psi \rangle_\alpha^{1/2} \langle \eta, \eta \rangle_\alpha^{1/2},$$

где χ_ν — характеристическая функция шара $\{x \in \mathbb{R}^n: |x| < \nu\}$.

(83) Когомологии с компактными носителями. Одно из определений группы когомологий $H^q(X, \mathcal{F})$ топологического пространства X с коэффициентами в пучке абелевых групп $\mathcal{F}$ состоит в следующем. Рассмотрим каноническую (мягкую) резольвенту пучка $\mathcal{F}$: $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \dots$; когомологии $H^q(X, \mathcal{F})$ совпадают с когомологиями коцепного комплекса $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}^0) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}^1) \rightarrow \dots$, где $\Gamma(X, \mathcal{F})$ — пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над X . Тогда когомологии $H_c^q(X, \mathcal{F})$ с компактными носителями по определению совпадают с когомологиями комплекса $0 \rightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{E}^0) \rightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{E}^1) \rightarrow \dots$, где $\Gamma_c(X, \mathcal{F})$ — пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над X с компактными носителями. В случае, если $\mathcal{F} = G$ — постоянный пучок, получаем определение когомологий $H_c^q(X, G)$ с компактными носителями с коэффициентами в группе G .

(84) По поводу основных понятий K -теории и интерпретации индекса фредгольмовых операторов см. [18*].

(85) Классифицирующее пространство. Топологическое пространство BG называется классифицирующим для группы G , если для любого топологического пространства X множество классов эквивалентности $k_G(X)$ локально тривиальных расслоений над X со структурной группой G совпадает с множеством гомотопических классов $[X, BG]$ отображений из X в BG . При этом над BG можно построить так называемое универсальное расслоение $EG \rightarrow BG$, так что любое расслоение из $k_G(X)$ с точностью до эквивалентности может быть получено как обратный образ универсального расслоения при некотором отображении $X \rightarrow BG$. Классифицирующее пространство BU есть по определению $\bigcup_{n=1}^\infty BU(n)$, наделенное топологией прямого предела, или, что то же самое, классифицирующее пространство группы $U(\infty) = \bigcup_{n=1}^\infty U(n)$.

(86) Теорема Ботта о периодичности. Гомотопические группы $\pi_i(U(n))$ при фиксированном i и достаточно большом n не зависят от n , поэтому естественно определить $\pi_i(U(\infty)) =$

$\equiv \pi_i(U(n))$, где n достаточно велико. Теорема Ботта утверждает, что гомотопические группы $\pi_i(U(\infty))$ периодичны с периодом 2, иными словами, $\pi_i(U(\infty)) \cong \pi_{i+2}(U(\infty))$.

(87) В качестве матриц β_i , $i = 1, 2, 3$, можно взять матрицы, выписанные после формулы (G1.1).

(88) Имеется в виду обычная операция сложения в гомотопической группе $\pi_2(S^2)$, см. [17*, гл. 7, §2].

(89) См. также [19*].

(90) Этот факт доказан также в работе [38] из списка литературы к статье А.Г. Сергеева.

(91) Пунктированные гомотопические группы. Топологическое пространство X с отмеченной в нем точкой $(\cdot)$ называется пунктированным. Морфизмами категории пунктированных пространств являются отображения пространств, сохраняющие отмеченные точки. Элементами пунктированной гомотопической группы $\pi_i(X, \cdot)$ являются гомотопические классы пунктированных отображений $(S^i, \cdot) \rightarrow (X, \cdot)$.

(92) Хорошая функция Морса. Гладкая функция f на гладком многообразии M называется (хорошей) функцией Морса, если все ее критические точки на M невырождены. Иначе говоря, если p -критическая точка, то ограничение гессиана f на касательное пространство TM_p невырождено.

(93) Если в формуле (A2.6) заменить μ на R^3 , то получим определение заряда монополя (монопольного числа), приведенное в формуле (A1.4).

(94) Символ $\times_k X$ означает прямое произведение k экземпляров пространства X .

(95) В оригинале "mollifiers".

(96) Отображение Im определено в формуле (E1.4).

(97) Недавно было показано, что существует целый континуум неэквивалентных гладких структур на R^4 (см. Taubes C.H. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. - J. Diff. Geom. 25(1987), № 3, 363-430).

(98) Название "монополь" указывает на связь рассматриваемых решений со знаменитым монополем Дирака. Монополь Дирака является решением общих статических уравнений Максвелла, которые совпадают с (неоднородными) $U(1)$ -уравнениями Янга - Миллса - Хиг-

гса на $\mathbb{R}^3$ (см. статью А.Г. Сергеева, п. 3.1), т.е. имеют вид

$$d(*F) = 0, \quad dF = 4\pi(*q_m), \quad -\Delta\Phi = 4\pi q_e,$$

где q_m (соотв. q_e) — плотность магнитного (соотв. электрического) заряда. В обычной электростатике $q_m = 0$. Дирак рассмотрел решение этих уравнений в случае, когда $q_e = 0$, $q_m = \delta$ (дельта-функция в начале координат). Решение Дирака, отвечающее единичному магнитному заряду, в сферических координатах (r, θ, χ) на $\mathbb{R}^3$ задается формулами

$$A = (1 - \cos \theta) d\chi, \quad B = *F = dr/r^2, \quad \Phi = 0.$$

Оно сингулярно при $r = 0$ и вдоль "дираковской струны" $\cos \theta = 1$.

Поскольку $U(1)$ является подгруппой $SU(2)$, естественно поставить вопрос, какие решения статических уравнений Максвелла могут возникать при редукции $SU(2)$ -полей Янга — Миллса — Хиггса. Покажем, что в подходящей калибровке одна из компонент потенциала A в BPS-монополе заряда -1 , которую можно рассматривать как электромагнитный потенциал, совпадает с потенциалом Дирака. (Аналогичное утверждение имеет место и для общего монополя т'Хофта — Полякова, см. [4*, п. 3.4].) В обозначениях из п. 3.2 статьи А.Г. Сергеева (см. формулу (13)) рассмотрим калибровочное преобразование g , приводящее поле Хиггса Φ BPS-монополя к полю $\hat{\Phi} = g\Phi g^{-1}$, имеющему постоянное направление, например так, чтобы поле $\hat{\Phi}$ было пропорционально кватерниону i . Если положить $g(r, \theta, \chi) = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (-\sin \chi \cdot k + \cos \chi \cdot j)$, то пара (A, Φ) , задаваемая вышеупомянутой формулой (13), под действием калибровочного преобразования g преобразуется к виду

$$\hat{\Phi} = (\operatorname{cth} r - \frac{1}{r}) \frac{i}{2}, \quad \hat{A} = (1 - \cos \theta) d\chi \cdot \frac{i}{2} + \frac{r}{2 \sinh r} [(\sin \chi \cdot k - \cos \chi \cdot j) d\theta + (\cos \chi \cdot k + \sin \chi \cdot j) \sin \theta \cdot d\chi].$$

Тем самым компонента $\hat{A}$ в направлении поля $\hat{\Phi}$, отвечающая кватерниону i , совпадает с потенциалом Дирака.

Содержание

Предисловие	5
<u>Н.Дж. Хитчин</u> . Монополи и геодезические. Перевод В.К. Кривошекова под редакцией А.Г. Сергеева	II
<u>Н.Дж. Хитчин</u> . О построении монополей. Перевод В.К. Кривошекова под редакцией А.Г. Сергеева	49
<u>С.К. Дональдсон</u> . Уравнения Нама и классификация монополей. Перевод А.В. Воронина под редакцией А.Г. Сергеева	123
<u>Ж. Уртьюбиз</u> . $SU(2)$ -монополи заряда 2. Перевод А.В. Воронина под редакцией А.Г. Сергеева	160
<u>Ж. Уртьюбиз</u> . Монополи и рациональные отображения; замечание к теореме Дональдсона. Перевод А.В. Воронина под редакцией А.Г. Сергеева	174
<u>М.Ф. Атья</u> . Магнитные монополи в гиперболическом пространстве. Перевод О.В. Огиевского под редакцией М.И. Монастырского	184
<u>М. Атья, Н. Хитчин</u> . Низкоэнергетическое рассеяние неабелевых магнитных монополей. Перевод О.В. Огиевского под редакцией М.И. Монастырского	214
<u>М.Ф. Атья</u> . Инстантоны в двух и четырех измерениях. Перевод А.А. Рослого под редакцией М.И. Монастырского	231
<u>С.К. Дональдсон</u> . Инстантоны и геометрическая теория инвариантов. Перевод А.А. Рослого под редакцией М.И. Монастырского	255
<u>К.Г. Таубс</u> . Теория Морса и монополи: топология в теориях с дальнедействующими силами. Перевод О.В. Огиевского под редакцией М.И. Монастырского	268
<u>К.Г. Таубс</u> . Монополи и отображения из S^2 в S^2 ; топология конфигурационного пространства. Перевод В.К. Кривошекова под редакцией А.Г. Сергеева	297
<u>К.Г. Таубс</u> . Теория минимакса для уравнений Янга-Миллса-Хиггса. Перевод В.К. Кривошекова под редакцией А.Г. Сергеева	379

<u>А.Г. Сергеев. Теория твисторов и классические калибровочные поля: обзор</u>	492
Примечания редакторов перевода	556