

Чес Коспёвски

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ;

Вводный курс алгебраической топологии, написанный английским математиком. Изложение сопровождается большим количеством примеров и рисунков, дано около 350 упражнений для самостоятельной проработки.

Для математиков различных специальностей, аспирантов и студентов, желающих познакомиться с основными понятиями алгебраической топологии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	6
Глава 0. Множества и группы	8
Глава 1. Истоки; метрические пространства	14
Глава 2. Топологические пространства	20
Глава 3. Непрерывные функции	26
Глава 4. Индуцированная топология	31
Глава 5. Фактортопология (и группы, действующие на пространствах)	38
Глава 6. Произведения пространств	52
Глава 7. Компактные пространства	57
Глава 8. Хаусдорфовы пространства	64
Глава 9. Связные пространства	73
Глава 10. Задачи о блинах	79
Глава 11. Многообразия и поверхности	84
Глава 12. Пути и линейно связные пространства	112
Приложение к главе 12. Теорема Жордана	120
Глава 13. Гомотопия непрерывных отображений	132
Глава 14. Умножение путей	140
Глава 15. Фундаментальная группа	147
Глава 16. Фундаментальная группа окружности	157
Глава 17. Накрывающие пространства	166
Глава 18. Фундаментальная группа накрывающего пространства	175
Глава 19. Фундаментальная группа пространства орбит	178
Глава 20. Теорема Борсука—Улама и теорема о сэндвиче с ветчиной	181
Глава 21. Еще о накрывающих пространствах: теоремы о поднятии	186
Глава 22. Еще о накрывающих пространствах: —теоремы существования	195
Глава 23. Теорема Зейферта—ван Кампена. I.Образующие.	202
Глава 24. Теорема Зейферта—ван Кампена. II. Соотношения	214
Глава 25. Теорема Зейферта—ван Кампена. III. Вычисления	221
Глава 26. Фундаментальная группа поверхности	231
Глава 27. Узлы. I. Предварительные сведения и торические узлы	239
Глава 28. Узлы. II. Ручные узлы	253
Приложение к гл. 28. Таблица узлов	266
Глава 29. Сингулярные гомологии: введение	272

Глава 30. Рекомендации для дальнейшего чтения	294
Рекомендуемая литература	295
Указатель	297

УКАЗАТЕЛЬ

- | | |
|---|---|
| Абелева (коммутативная) группа 12 | График функции 53 |
| Аксиомы отделимости 64—65 | Группа 10 |
| Алгебраическая топология 150 | — гомологии 276 |
| Алфавит 203 | — скольжений покрытия 192 |
| Антидискретная топология 21 | — слов 203 |
| Антиподальные точки 80 | — узла 244 |
| Ассоциативность групповой операции 10 | Двойная точка узла 243, 253 |
| Бабушкин узел 260, 261 | Действие группы на множестве 47, 48 |
| База покрытия 166 | Декартово (прямое) произведение множеств 8 |
| Биективная функция 9 | Деформационный ретракт 137 |
| Бинарная операция на множестве 10 | — — сильный 137 |
| Блоха и гребенка 115 | — — слабый 139 |
| Борсук К. 181 | Дикий узел 253 |
| <i>Барсука</i> — Улама теорема 181 | Диск 84 |
| <i>Брауэра</i> теорема о неподвижной точке 164, 289 | Дискретная метрика 15 |
| Ван Кампен Э. 202 | — топология 21 |
| Вещественное проективное пространство 38 | Евклидова (обычная) метрика 15 |
| Взаимно однозначная функция 9 | Единичный элемент группы 10 |
| Внутренность множества 22 | Ёнэяма К. 121 |
| Восьмерка 218, 222 | Жордан К. 122 |
| Выпуклое множество 113 | <i>Жордана</i> теорема 122 |
| <i>Гейте</i> — <i>Бореля</i> теорема 62 | Жорданова кривая 122 |
| Гомеоморфизм 29 | Жорданов многоугольник 122 |
| Гомеоморфные топологические пространства 29 | Задачи о блинах 80, 82 |
| Гомоморфизм групп 11 — | Замкнутое множество в топологическом пространстве 23 |
| надстройки 292 | — отображение 28 |
| Гомотопическая группа 155 | Замкнутый путь 147 |
| — эквивалентность 136 | Замыкание множества 24 |
| Гомотопический тип 136 | Зейферт Х. 202 |
| Гомотопия 132 | <i>Зейферта</i> — <i>ван Кампена</i> теорема 202, 208, 209, 214, 218, 221, 222, 287 |
| — относительно подмножества 133 | |
| Гомотопные отображения 132 | Изоморфизм групп 11 |
| Граница 274 | Индукцированная топология 31 |
| Граничный оператор 274 | Индукцированный гомоморфизм 150 |

- — групп гомологии 278
- Интервалы 13, 77
- Инъективная функция 9
- Классификационная теорема для поверхностей 99
- Класс эквивалентности 10
- Классы эквивалентности слов 204
- Клейна* бутылка 42—44, 99, 107, 172—173
- Коммутант 12
- Коммутативная (абелева) группа 12
- Коммутатор 12
- Компактное множество 58
- Компактно-открытая топология 63
- Композиция функций 9
- Компонента 120
- Конечное покрытие 57
- Конечно порожденная группа 12
- Конус отображения 291
- Копредставление группы 202, 204
- Кратная точка узла 243, 253
- Крендель 91, 99
- Кривая 112
- Кривые, заполняющие пространство 120
- Лебега* число покрытия 63
- Лемма о склейке 113
- Линейно связное пространство 113
- Линзовое пространство 168
- Локально компактное пространство 63
- линейно связное пространство 119, 186
- Манера* — *Вьеториса* последовательность 287
- Мёбиуса* лист (лента) 39, 100
- Метризуемое топологическое пространство 21
- Метрика 14
- Метрическая (обычная) топология 20
- Метрическое пространство 14
- Многолистное накрытие 173
- Многообразие 84
- с краем 111
- Надстройка 291
- Накрывающее отображение 166
- пространство 166
- Накрытие 166
- Незаузленный узел 239
- Несептируемая поверхность 101
- Непрерывная функция 14
- — на метрическом пространстве 16
- — на топологическом пространстве 26
- Непрерывное действие группы на топологическом пространстве 49—50
- Неравенство треугольника 14
- Несобственная двойная точка узла 243, 253
- Нормальная подгруппа 11
- Образ 8
- Образующие группы 12, 205
- Обратная функция 9
- Обратный элемент в группе 10
- Обычная (евклидова) метрика 15
- (метрическая) топология 20
- Ограничение функции 9
- Ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ 62
- Односвязное топологическое пространство 153
- Одноточечная компактификация 63
- Озера Вады 121
- Окрестность 25
- Оператор призмы 279
- Орбита 48
- Ориентируемая поверхность 100
- — с краем 111
- Основная теорема алгебры 163
- Открытое множество в метрическом пространстве 16
- — в топологическом пространстве 20

- отображение 27
- покрытие 58
- Относительная топология 31
- Отношение на множестве 10
- эквивалентности 10
- Отображение вычисления 63
- множеств 8
- Пеано Дж. 120
- Первая теорема об изоморфизме 11
- Поверхности 97
- Поверхность в краях 111
- — — пятиугольная на узел 263—264
- Подгруппа 10
- порожденная элементом 11
- Поднятие 157
- отображения 169
- Подпокрытие 57
- Подпространство топологического пространства 31
- Покрытие 57
- Полулокально односвязное пространство 196
- Польская окружность 190
- Постоянная функция на топологическом пространстве 26
- Правильно накрытое множество 166
- Приведенная теория гомологии 290, 292
- — — обобщенная в коэффициентами 293
- Приведенный конус 291
- Приклеивание листа Мёбиуса 100
- ручки 99
- цилиндра 99
- Произведение путей 140
- Прокоммутированная группа 235
- Прообраз 9
- Простая замкнутая кривая 107, 120, 173
- цепь 119
- Простой узел 262
- Пространство орбит 49
- Прямая сумма групп 11
- Прямое произведение групп 11
- — множеств 8
- Пустое слово 203
- Путь 112
- Равномерно непрерывное отображение метрических пространств 124
- Регулярное накрытие 177
- Редуцированное слово 203
- Ретракт 137
- слабый 138
- Рефлексивность отношения 10
- Род поверхности 101
- узла 265
- Ручной узел 253
- Свободная абелева группа ранга n 12
- группа, порожденная множеством символов 203
- — с n образующими 203
- Свободное действие группы 88, 168
- Свойство универсальности отображения произведений 54
- — — факторпространств 39
- Связная сумма поверхностей 97
- — узлов 262
- Связное топологическое пространство 73
- Связывающие гомоморфизмы 287
- Сильный деформационный ретракт 137
- Симметричность отношения 10
- Сингулярная n -мерная цепь 272—273
- Сингулярный n -мерный симплекс 272
- Сквер-узел 260, 261
- Скольжение накрытия 174
- Слабый деформационный ретракт 139
- ретракт 138
- Следствие (соотношений группы)

Слова 203

Смежные классы в группе 10

Собственно разрывное действие
группы 167

Соотношения 205

Сохраняющий ориентацию
гомеоморфизм 242

Стабилизатор 48

Стандартная неориентируемая
поверхность рода m 101— ориентируемая поверхность рода n
101Стандартный n -мерный симплекс 272

Степень пути 161

Стереографическая проекция 85

Стирод Н. 290

Стирода — *Эйленберга* аксиомы
291—293Строго эквивалентные узлы 242—
243Структурная теорема для конечно
порожденных абелевых групп
12

Стягиваемое пространство 136

Сюръективная функция 9

Тверберг Х. 122

Теорема о волосатом шаре 290

— о гомотопической инвариантности
279

— о монодромии 162

— о накрывающей гомотопии для
путей 171

— о накрывающем пути 159

— о неподвижной точке 79

— о промежуточном значении 79

— о сэндвича а ветчиной 184

Титце преобразования 207Тождественная функция на
топологическом пространстве
26

Тождественное отображение

множества 8

Топологическая группа 154

— инвариантность размерности 290

Топологическое отождествление 41
— произведение топологических
пространств 52

— пространство 20

Топология 20

— конечных дополнений 21

Тор 42

Торический узел 247

Точная последовательность 287

Транзитивное действие группы 176

Транзитивность отношения 10

Тривиальная группа 10

Трилистник 242, 260

Уайтхеда теорема 156

Узел 239

Улам Q. 180

Универсальное покрытие 195

Факторгруппа 11

Фактортопология 38

Фундаментальная группа 147

— — бутылки Клейна 180, 223

— — восьмерки 219

— — линзового пространства 180,
213

— — листа Мёбиуса 180

— — одноточечного пространства
222

— — окружности 157, 222

— — поверхности 231

— — проективной плоскости 223—
227, 231— — — в выброшенной точкой
220

— — проективного пространства 213

— — пространства орбит 178— 180

— — тора 163, 220—223, 231

— — — G выброшенной точкой 220

Функтор 150, 279

Функция 8

Хаусдорфово пространство 64
Хопф Х. 155
Хорда 129
Центр группы 149
Цепно-гомотопные гомоморфизмы
279
Цикл 274
Циклическая группа 12
Шеифлиса теорема 241
Шрейер О. 251

Эйленберг С. 290
Эквивалентные накрытия 191
— пути 140
— узлы 242
Эквивариантное отображение 49
Ядро гомоморфизма 11
G-пространство 50
H-пространство 155
T_k-пространство 65

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателя книга освещает в основном те разделы топологии, которые непосредственно примыкают к понятию фундаментальной группы. Вместе с тем она дает и довольно полное представление о наиболее типичных идеях и методах алгебраической топологии.

Материал книги в большинстве своем уже нашел отражение в литературе по топологии на русском языке. Однако здесь он изложен более элементарно, менее формально, и в то же время достаточно лаконично и полно. Новым понятиям и определениям обычно предшествуют наводящие соображения, которые раскрывают их сущность. В ряде мест, в том числе и при изложении основ общей топологии, ощущается оригинальный стиль автора.

Стремление к наглядности и простоте проявляется в наличии большого числа рисунков—автор иногда опускает аналитические формулы, описывающие те или иные построения, предпочитая апеллировать к геометрическому воображению. Там, где это полезно (например, при описании некоторых основных гомеоморфизмов в теории поверхностей или методов вычисления фундаментальной группы), обычно приводится несколько типичных способов рассуждений. Отличительной чертой книги является и наличие большого количества упражнений (всего их около 350), в основном не выше средней трудности. Их назначение не только в том, чтобы контролировать читателя: в форме упражнений в книге сообщается также много дополнительной информации.

Книга адресована начинающему читателю и будет служить хорошим источником для изучения основ алгебраической (а также общей) топологии. Она будет полезна математикам разных специальностей, интересующимся топологией.

Е. Г. Скляренко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга содержит материал нескольких отдельных вводных курсов алгебраической топологии для студентов со средней подготовкой. Она написана в геометрическом духе и *обильно иллюстрирована* (в конце концов, топология—это ветвь геометрии). Насколько это возможно, мы избегали абстракции и вообще при введении новых понятий предпочитали непритязательный подход. Предварительные требования сведены к минимуму; не предполагается никаких знаний из общей топологии, что делает эту книгу особенно подходящей для первоначального курса топологии с упором на алгебраическую топологию. На основе этой книги преподаватель сможет достаточно свободно построить свой курс для начинающих.

Книга изобилует многими упражнениями разной сложности, которые помогут читателю усвоить материал и проверить себя. Рекомендуются, конечно, выполнить этих упражнений как можно больше, однако мы не считаем это обязательным. Мы редко предполагаем, что читатель проделал упражнения, а если решение используется в тексте, оно обычно приводится.

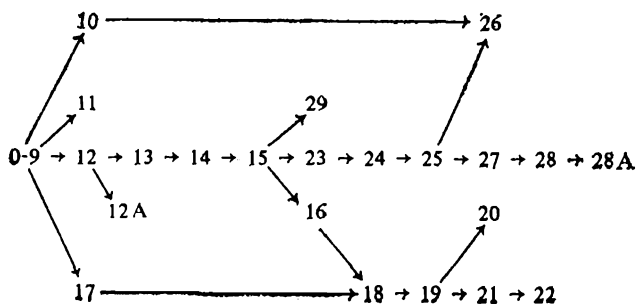
Книга содержит элементы общей и алгебраической топологии, отобранные по принципу их доступности. Возможно, это и наиболее изящные разделы предмета. В последней главе даны обширные рекомендации для дальнейшего чтения.

Примерно четверть книги отведена общей топологии и три четверти алгебраической. Общетопологическая часть не содержит обычных патологий. Излагается лишь материал, достаточный для того, чтобы читатель мог быстро перейти к «интересной» части топологии.

В части, посвященной алгебраической топологии, основное внимание уделено фундаментальной группе пространства. Студенты обычно легко схватывают понятие фундаментальной группы, и это позволяет им быстро понять, чем занимается алгебраическая топология. Подробно изложены теория накрывающих пространств и теорема Зейферта—ван Кампена, а также их применение для вычисления фундаментальных групп. Из других тем упомянем многообразия и поверхности, теорему Жордана (в качестве приложения к гл. 12), теорию узлов и начальные сведения о сингулярных гомологиях.

Так как эта книга посвящена топологии, а не истории топологии, имена и даты упоминаются не всегда.

Эту книгу не обязательно читать подряд. Следующая схема показывает примерную зависимость глав. Например, чтобы полностью понять гл. 18, нужно прочесть главы 0—9, 12—16 и 17.



Чес Коснёвски

Ньюкасл-апон-Тайн

МНОЖЕСТВА И ГРУППЫ

В этой главе мы приводим некоторые основные определения и результаты теории множеств и теории групп, используемые в книге. При дальнейшем чтении лучше всего возвращаться к этой главе по мере необходимости.

Для множеств X, Y запись $Y \subset X$ означает, что Y — подмножество X . Если $Y \subset X$, мы обозначаем через $X \setminus Y$ множество элементов из X , не принадлежащих Y . Пустое множество обозначается символом $\emptyset$.

Декартово, или *прямое*, произведение двух множеств X и Y — это множество упорядоченных пар вида (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$, т. е.

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}.$$

Аналогично можно определить декартово произведение конечной совокупности множеств $\{X_i: i = 1, 2, \dots, n\}$:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Функция, или *отображение*, $f: X \rightarrow Y$ одного множества в другое — это соответствие, сопоставляющее каждому элементу x из X единственный элемент $f(x)$ из Y . *Тождественное отображение* множества X — это функция $1: X \rightarrow X$, такая, что $1(x) = x$ для всех $x \in X$. *Образ* функции $f: X \rightarrow Y$ определяется как

$$\text{Im}(f) = f(X) = \{y \in Y: y = f(x) \text{ для некоторого } x \in X\}.$$

Заметим, что если W, W' — два подмножества X , то

$$f(W \cup W') = f(W) \cup f(W'), \quad f(W \cap W') \subset f(W) \cap f(W').$$

Вообще, если есть семейство подмножеств X , скажем $\{W_j: j \in J\}$, где J — некоторое *индексирующее* множе-

ство, то

$$f\left(\bigcup_{i \in J} W_i\right) = \bigcup_{i \in J} f(W_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in J} W_i\right) \subset \bigcap_{i \in J} f(W_i).$$

Мы часто сокращаем $f: X \rightarrow Y$ просто до f , если не может возникнуть недоразумений. Функция $f: X \rightarrow Y$ определяет функцию, отображающую X на $f(X)$, которая также обозначается через f . Если A — подмножество X , то *ограничение* функции f на A обозначается $f|A$; функция $f|A: A \rightarrow Y$ определена равенством $(f|A)(a) = f(a)$ при $a \in A$.

Если Z — подмножество Y и $f: X \rightarrow Y$ — некоторая функция, то *прообраз* Z при f называется множество

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X: f(x) \in Z\}.$$

Заметим, что для семейства $\{Z_i: i \in J\}$ подмножеств Z_i из Y

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} Z_i\right) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(Z_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in J} Z_i\right) = \bigcap_{i \in J} f^{-1}(Z_i),$$

$$f^{-1}(Y \setminus Z_i) = X \setminus f^{-1}(Z_i).$$

Функция $f: X \rightarrow Y$ *взаимно однозначна*, или *инъективна*, если из $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. Функция $f: X \rightarrow Y$ является отображением X на Y , или *сюръективна*, если $f(X) = Y$. Функция $f: X \rightarrow Y$, которая инъективна и сюръективна, называется *биективной*. В этом случае существует *обратная функция* $f^{-1}: Y \rightarrow X$, определенная соотношением

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — некоторые функции, их *композиция* $gf: X \rightarrow Z$ определяется равенством

$$gf(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

Если $f: X \rightarrow Y$ — биективная функция, то $ff^{-1}: Y \rightarrow Y$ и $f^{-1}f: X \rightarrow X$ — тождественные отображения. Обратно, если $gf: X \rightarrow X$ и $fg: Y \rightarrow Y$ — тождественные отображения, то f и g — биективные функции, каждая из которых обратна к другой. Из того что $gf: X \rightarrow X$ — тождественная функция, следует, что f инъективна и g сюръективна.

Отношение на множестве X —это подмножество $\sim$ в $X \times X$. Обычно пишут $x \sim y$, если $(x, y) \in \sim$. Отношение $\sim$ на X называется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

- (i) Рефлексивность: $x \sim x$ для всех $x \in X$.
- (ii) Симметричность: если $x \sim y$, то $y \sim x$.
- (iii) Транзитивность: если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

Класс эквивалентности элемента x —это множество

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

Если $\sim$ —отношение эквивалентности на X , то каждый элемент из X принадлежит в точности одному классу эквивалентности.

Бинарная операция на множестве X —это функция $f: X \times X \rightarrow X$. Мы сокращаем $f(x, y)$ до xy (мультипликативное обозначение) или иногда до $x + y$ (аддитивное обозначение).

Группа—это множество G вместе с бинарной операцией, удовлетворяющей трем условиям:

- (1) Существует элемент $1 \in G$, называемый *единичным элементом*, такой, что $g1 = 1g = g$ для всех $g \in G$.
- (2) Для любого $g \in G$ найдется элемент $g^{-1} \in G$, обратный к g , такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$.
- (3) Для всех $g_1, g_2, g_3 \in G$ имеет место *ассоциативность*, т. е. $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$.

В аддитивных групповых обозначениях единичный элемент обозначается символом 0, а обратный к g —символом $-g$. Группа, единственным элементом которой является единичный,—это *тривиальная группа* $\{1\}$ или $\{0\}$.

Подмножество H группы G называется *подгруппой*, если H —группа относительно бинарной операции на G . Если H —подгруппа G и $g \in G$, то *левый смежный класс* группы G по H , определяемый элементом g ,—это подмножество

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Правые смежные классы определяются аналогично. Два левых смежных класса $gH, g'H$ по подгруппе H либо не пересекаются, либо совпадают.

Прямое произведение $G \times H$ групп G и H — это множество $G \times H$ с бинарной операцией, определенной равенством $(g, h)(g', h') = (gg', hh')$. В аддитивном случае мы говорим о *прямой сумме* и обозначаем ее $G \oplus H$.

Гомоморфизм $f: G \rightarrow H$ группы G в группу H — это функция, для которой при всех $g, g' \in G$

$$f(gg') = f(g)f(g').$$

Если гомоморфизм $f: G \rightarrow H$ биективен, то мы называем f *изоморфизмом*, а группы G и H *изоморфными* и пишем $G \cong H$ или $f: G \cong H$. *Ядро* гомоморфизма $f: G \rightarrow H$ — это множество

$$\ker f = \{g \in G \mid f(g) = 1_H\},$$

где 1_H — единичный элемент в H . Ядро изоморфизма состоит только из единичного элемента группы G .

Подгруппа K группы G называется *нормальной*, если $gkg^{-1} \in K$ для всех $g \in G, k \in K$. Ядро любого гомоморфизма $f: G \rightarrow H$ — нормальная подгруппа в G . Гомоморфизм $f: G \rightarrow H$ инъективен тогда и только тогда, когда $\ker f = \{1\}$.

Если K — нормальная подгруппа G , то левый смежный класс gK совпадает с правым смежным классом Kg , и множество G/K всех левых смежных классов по K является группой относительно операции

$$(gK)(g'K) = (gg')K.$$

Мы называем G/K *факторгруппой* G по K .

Первая теорема об изоморфизме утверждает, что если $f: G \rightarrow H$ — сюръективный гомоморфизм из группы G на группу H с ядром K , то H изоморфна факторгруппе G/K .

Если $g \in G$, то *подгруппа, порожденная элементом g* , — это подмножество G , состоящее из всех целых степеней g :

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

где $g^n = \overbrace{gg \dots g}^n$ при $n \geq 0$ и $g^n = \overbrace{g^{-1}g^{-1} \dots g^{-1}}^{-n}$ при $n < 0$.

В аддитивных обозначениях имеем

$$\langle g \rangle = \{ng : n \in \mathbb{Z}\},$$

где $ng = \underbrace{g + g + \dots + g}_n$ при $n \geq 0$ и $ng = \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{-n}$ при $n < 0$. Если $G = \langle g \rangle$ для некоторого g , то мы говорим, что G — *циклическая группа* с образующим элементом g . Вообще, *множество образующих* группы G — это подмножество S в G , такое, что каждый элемент из G является произведением элементов из S . Если S конечно, то мы говорим, что G *конечно порождена*.

Группа G называется *абелевой* или *коммутативной*, если $gg' = g'g$ для всех $g, g' \in G$. Например, множество целых чисел $\mathbb{Z}$ — абелева группа (обозначения аддитивные), более того, она является циклической группой с образующей $+1$ или -1 .

Свободная абелева группа ранга n — это группа, изоморфная $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (n экземпляров).

Структурная теорема для конечно порожденных абелевых групп утверждает: если G — конечно порожденная абелева группа, то G изоморфна группе

$$H_0 \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_m,$$

где H_0 — свободная абелева группа и H_i , $i = 1, 2, \dots, m$, — циклические группы, порядки которых являются степенями простых чисел. Ранг группы H_0 и порядки циклических подгрупп $H_1, H_2, \dots, H_m$ определены однозначно.

Коммутатор в группе G — это элемент вида $ghg^{-1}h^{-1}$. *Коммутант* группы G — это подмножество G , состоящее из всех конечных произведений коммутаторов в G (оно является подгруппой). Коммутант K — нормальная подгруппа G и в действительности наименьшая подгруппа G , для которой G/K абелева.

Мы используем буквы $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ для обозначения множеств вещественных, комплексных, целых, натуральных (или целых положительных) и рациональных чисел соответственно. Часто мы называем $\mathbb{R}$ вещественной прямой, а $\mathbb{C}$ комплексной плоскостью.

Множество $\mathbb{R}^n$ — это декартово произведение n экземпляров $\mathbb{R}$. Мы используем следующие обозначения для некоторых подмножеств $\mathbb{R}$ (называемых *интервалами*):

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Смысл подмножеств $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$ и (a, ∞) очевиден. Заметим, что $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Отметим, что (a, b) может означать пару элементов, например точку в $\mathbb{R}^2$, а также интервал в $\mathbb{R}$. Что имеется в виду в каждом частном случае, должно быть ясно из контекста.

Глава 1

ИСТОКИ: МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В топологии изучаются множества с определенной «структурой», которая позволяет придать смысл вопросу непрерывна или нет функция $f: X \rightarrow Y$? В этой главе мы выясним, что это за «структура», на примере евклидовых и метрических пространств.

Напомним, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке x* , если для любого $\varepsilon_x > 0$ существует такое $\delta_x > 0$, что $|f(y) - f(x)| < \varepsilon_x$, как только $|y - x| < \delta_x$. Функция называется *непрерывной*, если она непрерывна во всех точках $x \in \mathbb{R}$. Это определение непрерывности можно расширить на функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ простой заменой знака модуля на евклидово расстояние. Вообще, если у нас есть множества с «функциями расстояния», то можно определить непрерывность при помощи этих функций. «Функция расстояния», или метрика, должна удовлетворять некоторым очевидным условиям; они приводят к следующему определению.

1.1. Определение. Пусть A — некоторое множество. Функция $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

(i) $d(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$,
(ii) $d(a, b) + d(a, c) \geq d(b, c)$ для всех $a, b, c \in A$,
называется *метрикой* на A . Множество A с определенной на нем метрикой называется *метрическим пространством* и обозначается (A, d) или просто M .

Второе свойство известно как *неравенство треугольника*.

1.2. Упражнение. Покажите, что если d — метрика на A , то $d(a, b) \geq 0$ и $d(a, b) = d(b, a)$ для всех $a, b \in A$.

Если взять $A = \mathbb{R}$ и $d(x, y) = |x - y|$, то нетрудно видеть, что d — метрика. Вообще, возьмем $A = \mathbb{R}^n$ и опре-

делим d равенством

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Снова нетрудно показать, что d — метрика на $\mathbb{R}^n$. Эта метрика называется *евклидовой* или *обычной* метрикой.

Два других примера метрик на $A = \mathbb{R}^n$ задаются равенствами

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Проверку того, что это действительно метрики, мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Наконец, если A — любое множество, на нем можно определить метрику по правилу: $d(x, y) = 0$ при $x = y$ и $d(x, y) = 1$ при $x \neq y$. Полученная метрика называется *дискретной метрикой* на A .

1.3. Упражнения. (а) Покажите, что каждая из следующих функций является метрикой на $\mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|; \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y; \end{cases}$$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|; \quad d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

(b) Покажите, что $d(x, y) = (x - y)^2$ не определяет метрику на $\mathbb{R}$.

(c) Покажите, что $d(x, y) = \min_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ не определяет метрику на $\mathbb{R}^n$.

(d) Пусть d — метрика и r — положительное число. Покажите, что функция d_r , определенная равенством $d_r(x, y) = rd(x, y)$, также является метрикой.

(e) Пусть d — метрика. Покажите, что $d'(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$ также является метрикой.

(f) Определим $d(x, y)$ в $\mathbb{R}^2$ как наименьшее целое число, большее или равное обычному расстоянию между x и y . Является ли d метрикой на $\mathbb{R}^2$?

Теперь легко определить непрерывность отображений метрических пространств.

1.4. Определение. Пусть $(A, d_A), (B, d_B)$ — метрические пространства. Функция $f: A \rightarrow B$ называется *непрерывной в точке* $x \in A$, если для любого $\varepsilon_x > 0$ существует такое $\delta_x > 0$, что $d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon_x$, как только $d_A(x, y) < \delta_x$. Функция называется *непрерывной*, если она непрерывна во всех точках $x \in A$.

1.5. Упражнения. (а) Пусть A — метрическое пространство с метрикой d . Пусть $y \in A$. Покажите, что функция $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, определенная равенством $f(x) = d(x, y)$, непрерывна, если $\mathbb{R}$ снабжено обычной метрикой.

(б) Пусть M — метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$, где d — обычная евклидова метрика. Пусть M_0 — метрическое пространство $(\mathbb{R}, d_0)$, где d_0 — дискретная метрика, т. е.

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

Покажите, что все функции $f: M_0 \rightarrow M$ непрерывны. Покажите, что не существует инъективной непрерывной функции из M в M_0 .

Часто оказывается, что при изменении метрики на A или B множество всех непрерывных функций, отображающих A в B , не меняется. Примеры такого рода приводятся в следующих упражнениях.

1.6. Упражнения. (а) Пусть A, B — метрические пространства с метриками d и d_B соответственно. Пусть d_r — метрика на A , введенная в упр. 1.3 (д) (т. е. $d_r(x, y) = rd(x, y)$). Пусть f — функция, отображающая A в B . Докажите, что f тогда и только тогда непрерывна относительно метрики d на A , когда она непрерывна относительно метрики d_r на A .

(б) Докажите то же, что и в (а), с замной d_r на метрику d' из упр. 1.3 (е).

Итак, метрика не является определяющим критерием того, будет ли функция непрерывной. Главным здесь оказывается понятие открытого множества.

1.7. Определение. Подмножество U метрического пространства (A, d) называется *открытым*, если для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon_x > 0$, что из $y \in A$ и $d(y, x) < \varepsilon_x$ следует $y \in U$.

Другими словами, U открыто, если для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon_x > 0$, что $B_{\varepsilon_x}(x) = \{y \in A: d(y, x) < \varepsilon_x\} \subset U$.

Примером открытого множества в $\mathbb{R}$ является интервал $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 1\}$. В $\mathbb{R}^2$ открытыми являются следующие множества:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 > 1\}, \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

1.8. Упражнения. (а) Покажите, что $B_\varepsilon(x)$ — открытое множество для всех x и всех $\varepsilon > 0$.

(б) Какие из следующих подмножеств $\mathbb{R}^2$ (с обычной метрикой) открыты:

$$\{(x, y): x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}, \quad \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ \{(x, y): |x| < 1\}, \quad \{(x, y): x + y < 0\}, \\ \{(x, y): x + y \geq 0\}, \quad \{(x, y): x + y = 0\}?$$

(с) Покажите, что если $\mathcal{F}$ — совокупность всех открытых подмножеств метрического пространства, то (i) пустое множество $\emptyset$ и все пространство принадлежит $\mathcal{F}$; (ii) пересечение двух элементов $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$; (iii) объединение любого числа элементов $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$.

(д) Приведите пример бесконечного семейства открытых множеств в $\mathbb{R}$ (с обычной метрикой), пересечение которых не открыто.

Используя понятие открытого множества, мы получаем следующий ключевой результат.

1.9. Теорема. *Функция $f: M_1 \rightarrow M_2$ из одного метрического пространства в другое тогда и только тогда непрерывна, когда для любого открытого множества U в M_2 множество $f^{-1}(U)$ открыто в M_1 .*

Этот результат утверждает, что f непрерывна в том и только в том случае, когда прообразы открытых множеств открыты. Он не утверждает, что образы открытых множеств открыты.

Доказательство. Пусть d_1 и d_2 — метрики на M_1 и M_2 соответственно. Предположим, что f непрерывна, и пусть U — открытое подмножество M_2 . Пусть $x \in f^{-1}(U)$, так что $f(x) \in U$. Поскольку U открыто, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Непрерывность f гарантирует существование такого $\delta > 0$, что

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

или, другими словами, что $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Это означает, что $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$. Так как это верно для

всех $x \in f^{-1}(U)$, то $f^{-1}(U)$ — открытое подмножество M_1 .

Обратно, пусть $x \in M_1$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $B_\varepsilon(f(x))$ есть открытое подмножество M_2 , так что $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ — открытое подмножество M_1 . Поскольку $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, найдется $\delta > 0$, для которого $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, т. е. $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Другими словами, найдется такое $\delta > 0$, что $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только $d_1(x, y) < \delta$, а это означает непрерывность f . $\square$

Эта теорема говорит нам, в частности, что если две метрики на множестве порождают одну и ту же совокупность открытых множеств, то любая функция, непрерывная относительно одной метрики, автоматически непрерывна и относительно другой. Таким образом, упр. 1.6 можно перефразировать так: покажите, что метрики d , d_r и d' порождают одну и ту же совокупность открытых множеств.

1.10. Упражнение. Какая из метрик $d(x, y) = \sum |x_i - y_i|$, $d(x, y) = \max |x_i - y_i|$ на $\mathbb{R}^n$ порождает то же семейство открытых множеств, что и обычная метрика $\mathbb{R}^n$?

Из сказанного выше мы видим, что для изучения непрерывности функций на метрических пространствах важна именно совокупность открытых множеств в каждом из них, а не сама метрика. Это приводит к следующей идее: на заданном множестве X выберем некоторую совокупность $\mathcal{F}$ его подмножеств и назовем их открытыми. Это даст нам некий объект $(X, \mathcal{F})$, состоящий из множества X вместе с совокупностью $\mathcal{F}$ его подмножеств. Непрерывность отображений таких объектов $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{F}')$ можно определить, назвав функцию $f: X \rightarrow Y$ непрерывной, если $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$, как только $U \in \mathcal{F}'$. Конечно, если бы мы допустили произвольные совокупности, то не получили бы никакой интересной математики. Поэтому мы потребуем, чтобы совокупность $\mathcal{F}$ открытых множеств подчинялась нескольким простым правилам, тем самым, которым подчиняется совокупность открытых множеств в метрическом пространстве (упр. 1.8 (с)). Эти правила таковы:

- (i) (для удобства) пустое множество $\emptyset$ и все множество принадлежат $\mathcal{F}$;

- (ii) пересечение двух элементов $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$;
- (iii) объединение *любого* числа элементов $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Под «структурой», связанной с множеством X , о которой говорилось в начале этой главы, понимается просто совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств X , удовлетворяющая этим трем условиям. Это и есть исходный пункт топологии.

Глава 2

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Топологическое пространство — это множество вместе с некоторой совокупностью его подмножеств (которые называются открытыми), удовлетворяющей трем условиям.

2.1. Определение. Пусть X — множество и $\mathcal{U}$ — совокупность его подмножеств, удовлетворяющая условиям

- (i) $\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$,
- (ii) пересечение двух множеств из $\mathcal{U}$ принадлежит $\mathcal{U}$,
- (iii) объединение любой совокупности множеств из $\mathcal{U}$ принадлежит $\mathcal{U}$.

Такая совокупность $\mathcal{U}$ подмножеств X называется *топологией* на X . Множество X вместе с $\mathcal{U}$ называется *топологическим пространством* и обозначается $(X, \mathcal{U})$, что часто сокращается до T или просто X . Множества $U \in \mathcal{U}$ называются *открытыми множествами* топологического пространства T . Элементы множества X называются *точками* пространства T .

Заметим, что из условия (ii) следует, что пересечение любого конечного числа множеств из $\mathcal{U}$ принадлежит $\mathcal{U}$. Если обозначить множество всех подмножеств X через $\mathcal{S}(X)$, то топология на X — это выбор совокупности $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}(X)$, удовлетворяющей приведенным выше условиям (i), (ii) и (iii). Различные выборы $\mathcal{U}$ дают различные топологии на X .

Важно иметь много примеров топологических пространств. Из результатов предыдущей главы немедленно получаем, что любое метрическое пространство определяет топологическое пространство, о котором говорят, что оно имеет *метрическую* или *обычную топологию*. Обратное неверно, т. е. существуют топологи-

ческие пространства, которые не возникают ни из какого метрического пространства (см. упр. 2.2 (с)). Топологические пространства, возникающие из метрических, называются *метризуемыми*. Заметим, что два метрических пространства могут определять одно и то же топологическое пространство.

Следующие два примера топологических пространств мы получим, рассмотрев крайние случаи возможных совокупностей подмножеств X , удовлетворяющих аксиомам топологии. Первый из них получается, когда $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$. Это семейство определяет топологию на любом множестве X , называемую *антидискретной* топологией. Другой крайний случай — когда $\mathcal{U}$ совпадает с множеством $\mathcal{S}(X)$ всех подмножеств X ; этот случай дает топологию на X , называемую *дискретной*.

2.2. Упражнения. (а) Покажите, что если X имеет дискретную топологию, то оно метризуемо. (Указание: рассмотрите дискретную метрику.)

(б) Пусть X — метризуемое топологическое пространство. Докажите, что для любой пары a, b различных точек из X найдутся открытые множества U_a и U_b , содержащие a и b соответственно и такие, что $U_a \cap U_b = \emptyset$.

(с) Воспользуйтесь (б) для доказательства того, что если пространство X содержит не менее двух точек и имеет антидискретную топологию, то оно неметризуемо.

Интересный пример топологии на множестве X известен под названием *топологии конечных дополнений*. Здесь $\mathcal{U}$ состоит из $\emptyset$, X и тех подмножеств X , дополнения которых конечны. Если X само конечно, то это в точности дискретная топология на X . Если X бесконечно, то нужно проверить, что совокупность $\mathcal{U}$ удовлетворяет трем аксиомам топологии. Первая из них выполняется тривиально. Для проверки второй предположим, что $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, так что $X \setminus U_1$ и $X \setminus U_2$ конечны. Тогда $(X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ тоже конечно, но оно равно $X \setminus (U_1 \cap U_2)$, и, таким образом, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. Для проверки третьей аксиомы воспользуемся тем, что $X \setminus (\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j)$.

Если X состоит из двух точек $\{a, b\}$, то имеется

всего четыре различные топологии на X , а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\emptyset, X\}; & \mathcal{U}_2 &= \{\emptyset, \{a\}, X\}; \\ \mathcal{U}_3 &= \{\emptyset, \{b\}, X\}; & \mathcal{U}_4 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}. \end{aligned}$$

То, что $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_4$ — топологии, уже доказано; проверку того, что $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{U}_3$ — тоже топологии, мы оставляем читателю. Заметим, что $(X, \mathcal{U}_2)$ и $(X, \mathcal{U}_3)$ неметризуемы.

Другие примеры топологических пространств даны в следующих упражнениях.

2.3. Упражнения. В каждом из случаев (а), (б), (с) покажите, что $\mathcal{U}$ — топология на X .

(а) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(б) $X = \mathbb{N}$ = положительные целые = натуральные числа, $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{O_n : n \geq 1\}$, где $O_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$.

(с) $X = \mathbb{R}$, $U \in \mathcal{U}$ в том и только в том случае, если U — подмножество $\mathbb{R}$ и для любого $s \in U$ найдется такое $t > s$, что $[s, t) \subset U$, где $[s, t) = \{x \in \mathbb{R} : s \leq x < t\}$.

(д) Найдите число различных топологий на множестве из трех элементов.

(е) Покажите, что ни одна из следующих совокупностей подмножеств $\mathbb{R}$ не является топологией:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}; \\ \mathcal{U}_2 &= \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}. \end{aligned}$$

Для любого подмножества Y топологического пространства X можно рассмотреть наибольшее содержащееся в Y открытое множество; оно обозначается $\dot{Y}$ и называется *внутренностью* Y . Другими словами, $\dot{Y} = \bigcup_{i \in J} U_i$, где $\{U_i : i \in J\}$ — семейство всех открытых

множеств, лежащих в Y . Очевидно, что $x \in \dot{Y}$ в том и только в том случае, если найдется открытое множество $U \subset Y$, такое, что $x \in U$.

Пусть, например, I^n — следующее подмножество $\mathbb{R}^n$:

$$I^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Если $\mathbb{R}^n$ снабжено обычной топологией (т. е. метрической топологией, определяемой евклидовой метрикой

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2},$$

то внутренность I^n есть

$$\dot{I}^n = \{x : 0 < x_i < 1, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Чтобы убедиться в этом, возьмем $x \in I^n$, и пусть $\varepsilon = \min \{1 - x_i, x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$. Открытый шар $B_\varepsilon(x)$ (т. е. $\{y \in \mathbb{R}^n: d(y, x) < \varepsilon\}$) радиуса ε с центром в точке x содержится в I^n , и потому I^n открыто. С другой стороны, если $x_i = 1$ или 0 для некоторого i , то любой шар $B_r(x)$ радиуса r с центром в x содержит точки, не лежащие в I^n , как бы ни было мало r . Следовательно, такие точки не содержатся во внутренней I^n .

Дополнения открытых множеств имеют специальное название.

2.4. Определение. Подмножество C топологического пространства X называется *замкнутым*, если $X \setminus C$ открыто.

Следующее утверждение легко следует из теоретико-множественных результатов о дополнениях пересечений и объединений.

2.5. Теорема. (i) $\emptyset, X$ замкнуты;

(ii) объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто;

(iii) пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.

Понятие замкнутого множества можно использовать для определения топологических пространств.

2.6. Упражнения. (а) Пусть X — некоторое множество и $\mathcal{V}$ — совокупность его подмножеств, удовлетворяющая условиям (i) $\emptyset, X \in \mathcal{V}$, (ii) объединение любых двух множеств из $\mathcal{V}$ принадлежит $\mathcal{V}$, (iii) пересечение любой совокупности множеств из $\mathcal{V}$ принадлежит $\mathcal{V}$. Покажите, что $\mathcal{U} = \{X \setminus V: V \in \mathcal{V}\}$ — топология на X .

(b) Докажите, что в дискретном топологическом пространстве всякое подмножество одновременно открыто и замкнуто.

(c) Покажите, что если топологическое пространство состоит из конечного числа точек, каждая из которых замкнута, то оно имеет дискретную топологию.

(d) Покажите, что в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ определено в упр. 2.3 (c), каждое из множеств $[s, t)$ открыто и замкнуто.

Для любого подмножества Y топологического пространства X можно рассмотреть наименьшее содержа-

щее Y замкнутое множество; оно обозначается $\bar{Y}$ и называется замыканием Y . Другими словами, $\bar{Y} = \bigcap_{j \in J} F_j$, где $\{F_j: j \in J\}$ — семейство всех замкнутых множеств, содержащих Y . Следующий результат дает другое описание $\bar{Y}$.

2.7. Лемма. $x \in \bar{Y}$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества U , содержащего x , $U \cap Y \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $x \in \bar{Y}$, и предположим, что найдется содержащее x открытое множество U , для которого $U \cap Y = \emptyset$. Множество $X \setminus U$ замкнуто и $Y \subset X \setminus U$, так что $\bar{Y} \subset X \setminus U$ (упр. 2.9 (а)). Но тогда предположение $x \in \bar{Y}$ противоречит тому, что $x \in U$.

Обратно, допустим, что $x \notin \bar{Y}$, т. е. $x \in X \setminus \bar{Y}$. Но $X \setminus \bar{Y}$ открыто и $(X \setminus \bar{Y}) \cap \bar{Y} = \emptyset$, откуда $(X \setminus \bar{Y}) \cap Y = \emptyset$, так что указанное в лемме условие $U \cap Y \neq \emptyset$ не выполнено для $U = X \setminus \bar{Y}$. $\square$

В пространстве $\mathbb{R}$ с обычной топологией замыканием множеств (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ и $[a, b]$ будет $[a, b]$.

2.8. Упражнения. (а) Пусть X есть $\mathbb{R}$ с обычной топологией. Найдите замыкания следующих подмножеств X :

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad B = \{x: x \text{ рационально}\}, \\ C = \{x: x \text{ иррационально}\}.$$

(б) Пусть X — множество $\mathbb{R}$ с топологией упр. 2.3 (с). Найдите замыкания следующих подмножеств X :

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b].$$

Дальнейшие свойства замыкания множества даются в качестве упражнений.

2.9. Упражнения. Докажите следующие утверждения.

(а) Если Y — подмножество топологического пространства X , причем $Y \subset F \subset X$ и F замкнуто, то $\bar{Y} \subset F$.

(б) Y замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \bar{Y}$.

(с) $\overline{\bar{Y}} = \bar{Y}$.

(д) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

(е) $X \setminus \bar{Y} = \overline{(X \setminus Y)}$.

- (f) $\bar{Y} = Y \cup \partial Y$, где $\partial Y = \bar{Y} \cap (\overline{X \setminus Y})$ (∂Y называется *границей* Y).
 (g) Y тогда и только тогда замкнуто, когда $\partial Y \subset Y$.
 (h) $\partial Y = \emptyset$ тогда и только тогда, когда Y открыто и замкнуто одновременно.
 (i) $\partial (\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}) = \partial (\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}) = \{a, b\}$.
 (j) Докажите, что Y тогда и только тогда является замыканием некоторого открытого множества, когда Y совпадает с замыканием своей внутренней части.

В дальнейшем нам пригодится следующее важное понятие.

2.10. Определение. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $N \subset X$, содержащее точку $x \in X$, называется ее *окрестностью*, если найдется открытое множество U , такое, что $x \in U \subset N$.

В частности, всякое открытое множество является окрестностью любой своей точки. Вообще, всякое множество A , для которого $\dot{A} \neq \emptyset$, является окрестностью каждой точки из $\dot{A}$. Некоторые простые свойства окрестностей содержатся в следующем упражнении (его результаты можно использовать для определения топологий).

2.11. Упражнение. Пусть X — топологическое пространство. Докажите следующие утверждения. (i) Для любой точки $x \in X$ существует хотя бы одна ее окрестность. (ii) Если N — окрестность x и $N \subset M$, то M — тоже окрестность x . (iii) Если M и N — окрестности x , то $M \cap N$ — тоже окрестность x . (iv) Для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности N найдется такая окрестность U точки x , что $U \subset N$ и U — окрестность каждой из своих точек.

Глава 3

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. Определение. Функция $f: X \rightarrow Y$, где X и Y — топологические пространства, называется *непрерывной*, если для любого открытого множества $U \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в X .

Самые простые примеры непрерывных функций — это тождественная функция $1_X: X \rightarrow X$ и постоянная функция $X \rightarrow Y$, переводящая любую точку из X в некоторую фиксированную точку из Y .

Если взять пространство X с дискретной топологией, то любая функция $f: X \rightarrow Y$, отображающая X в произвольное топологическое пространство Y , непрерывна. Это очевидно, поскольку прообраз любого подмножества Y открыт в X . С другой стороны, если взять Y с антидискретной топологией, то всякая функция $f: X \rightarrow Y$, отображающая произвольное топологическое пространство X в Y , также непрерывна. На самом деле справедливы и обратные утверждения, помещенные далее в упражнениях.

Теперь приведем пример функции, не являющейся непрерывной. Пусть $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$, где $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$, и пусть $f: X \rightarrow X$ определена равенством $f(x) = x^2$. Функция f не непрерывна, потому что $f^{-1}((-\infty, y^2)) = (-y, y)$ не принадлежит $\mathcal{U}$. Описание всех непрерывных функций, отображающих X в X , дается в упр. 3.2 (d).

3.2. Упражнения. (a) Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ — топологии на X . Докажите, что тождественное отображение $(X, \mathcal{U}) \rightarrow (X, \mathcal{U}')$ непрерывно в том и только в том случае, если $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$.

(b) Пусть X — топологическое пространство, обладающее тем свойством, что для любого топологического пространства Y вся-

кая функция $f: X \rightarrow Y$ непрерывна. Докажите, что топология пространства X дискретна. (Указание: возьмите в качестве Y множество X с дискретной топологией.)

(с) Пусть Y — топологическое пространство с тем свойством, что для любого топологического пространства X всякая функция $f: X \rightarrow Y$ непрерывна. Докажите, что Y имеет антидискретную топологию. (Указание: возьмите в качестве X множество Y с антидискретной топологией.)

(d) Пусть X — множество вещественных чисел с топологией $\{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x): x \in \mathbb{R}\}$. Докажите, что функция $f: X \rightarrow X$ в том и только в том случае непрерывна, если она не убывает (т. е. из $x > x'$ следует $f(x) \geq f(x')$) и непрерывна справа в классическом смысле (т. е. для каждого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $x \leq x' < x + \delta$ следует $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$).

Можно охарактеризовать непрерывные отображения и в терминах замкнутых множеств.

3.3. Теорема. *Функция $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда непрерывна, когда $f^{-1}(C)$ замкнуто для любого замкнутого подмножества $C \subset Y$.*

Доказательство. Предположим, что f непрерывна. Если C замкнуто, то $Y \setminus C$ открыто, и потому $f^{-1}(Y \setminus C)$ открыто. Но $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$, следовательно, $f^{-1}(C)$ замкнуто. Обратно, допустим, что U открыто в Y , так что $Y \setminus U$ замкнуто и, стало быть, $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ замкнуто; но это означает, что $f^{-1}(U)$ открыто, и потому f непрерывна. $\square$

Отображение, переводящее открытые множества в открытые, называется *открытым*. Открытые отображения не обязательно непрерывны. В качестве примера возьмем Y , состоящее из двух точек $\{a, b\}$ с дискретной топологией, и пусть X — множество вещественных чисел с обычной топологией. Отображение $f: X \rightarrow Y$, определенное равенством

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{при } x \geq 0, \\ b & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

открыто, но не является непрерывным, потому что $f^{-1}(\{a\})$ не открыто в X . Всякое отображение произвольного топологического пространства в дискретное пространство открыто.

Назовем отображение $f: X \rightarrow Y$ *замкнутым*, если образ любого замкнутого множества замкнут. Замкнутые отображения не обязательно непрерывны; описанное выше открытое разрывное отображение является также и замкнутым. Вообще, непрерывное отображение может быть (i) неоткрытым и незамкнутым, (ii) открытым, но незамкнутым, (iii) замкнутым, но неоткрытым, (iv) и замкнутым, и открытым. Примеры таковы: (i) X — множество A с дискретной топологией, Y — множество A с антидискретной топологией и f — тождественное отображение; (ii) $X = \{a, b\}$ с дискретной топологией и $Y = \{a, b\}$ с топологией $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$; тогда постоянное отображение, переводящее X в $a \in Y$, открыто и непрерывно, но не замкнуто; (iii) $X = \{a, b\}$ с дискретной топологией и $Y = \mathbb{R}$ с обычной топологией; тогда отображение $f: X \rightarrow Y$, заданное равенствами $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, непрерывно и замкнуто, но не открыто; (iv) $X = Y$ — любое топологическое пространство и f — тождественное отображение. Конечно, если на f наложить дальнейшие ограничения, то некоторые из четырех случаев станут невозможными.

3.4. Упражнение. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Если оно: (а) инъективно, (б) сюръективно, (с) биективно, какие из названных четырех случаев могут на самом деле возникнуть?

Следующий результат показывает, что композиция двух непрерывных функций непрерывна. Доказательство замечательно своей простотой.

3.5. Теорема. Пусть X , Y и Z — топологические пространства. Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — непрерывные функции, то их композиция $h = gf: X \rightarrow Z$ также непрерывна.

Доказательство. Если U открыто в Z , то $g^{-1}(U)$ открыто в Y и, таким образом, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыто в X . Но $(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. $\square$

Следующее определение указывает, при каких условиях два топологических пространства считаются эквивалентными; для выражения эквивалентности в данном случае используется слово «гомеоморфизм».

3.6. Определение. Пусть X и Y — топологические пространства. Говорят, что X и Y *гомеоморфны*, если существуют взаимно обратные непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ (т. е. $fg = 1_Y$, $gf = 1_X$). Мы пишем $X \cong Y$ и называем f и g *гомеоморфизмами* пространств X и Y .

Эквивалентное определение получится, если потребовать, чтобы отображение $f: X \rightarrow Y$ было (i) биективным, (ii) непрерывным и (iii) обратное к нему отображение f^{-1} также было непрерывным. Итак, гомеоморфизм между пространствами X и Y — это биекция между точками и открытыми множествами этих пространств.

Некоторые примеры гомеоморфизмов легко получить из гл. 1. Например, если X — топологическое пространство, возникающее из метрического пространства M с метрикой d , и если Y возникает из M с метрикой d' , заданной равенством $d'(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$, то X и Y гомеоморфны. Другой пример получится, если положить X равным $\mathbb{R}^n$ с обычной метрической топологией, а Y — равным $\mathbb{R}^n$ с метрической топологией, полученной из метрики $d(x, y) = \max |x_i - y_i|$. Снова X и Y гомеоморфны. С другой стороны, если $X = \mathbb{R}^n$ с обычной топологией, а $Y = \mathbb{R}^n$ с дискретной топологией, то X и Y не гомеоморфны.

3.7. Упражнения. (а) Приведите примеры пространств X , Y и непрерывной биекции $f: X \rightarrow Y$, такой, что f^{-1} разрывно¹⁾.

(б) Пусть X и Y — топологические пространства. Докажите, что X и Y в том и только в том случае гомеоморфны, если существует такое отображение $f: X \rightarrow Y$, что (i) f биективно и (ii) подмножество $U \subset X$ тогда и только тогда открыто, когда $f(U)$ открыто.

(с) Пусть метрики d_1 и d_2 на множестве Y таковы, что для некоторых положительных m и M

$$md_1(y, y') \leq d_2(y, y') \leq Md_1(y, y')$$

при всех $y, y' \in Y$. Покажите, что два топологических пространства, определяемые этими метриками, гомеоморфны. (Указание: рассмотрите тождественное отображение множества Y .)

(d) Пусть X — топологическое пространство и $\bar{G}(X)$ — множе-

¹⁾ См. примеры к теореме 8.8. — *Прим. ред.*

ство всех гомеоморфизмов $f: X \rightarrow X$. Докажите, что $G(X)$ — группа. Для $x \in X$ определим $G_x(X) = \{f \in G(X): f(x) = x\}$. Докажите, что $G_x(X)$ — подгруппа $G(X)$.

Гомеоморфность является отношением эквивалентности, и топология есть изучение классов этой эквивалентности. В следующих трех главах описываются способы построения новых топологических пространств из уже известных.

Глава 4

ИНДУЦИРОВАННАЯ ТОПОЛОГИЯ

Пусть S — подмножество топологического пространства X . Топология пространства X определяет некоторую топологию на S .

4.1. Определение. Топологией на S , индуцированной топологией пространства X , называется совокупность множеств вида $U \cap S$, где U — открытое множество в X .

Другими словами, если $\mathcal{U}$ — совокупность всех открытых множеств в X , то $\mathcal{U}_S = \{U \cap S : U \in \mathcal{U}\}$ — совокупность всех открытых множеств в S . Чтобы доказать, что $\mathcal{U}_S$ является топологией на S , мы должны проверить три аксиомы топологии. Так как $\emptyset = \emptyset \cap S$ и $S = X \cap S$, то первая аксиома выполнена. Для проверки второй рассмотрим множества $U_1 \cap S$ и $U_2 \cap S$ из $\mathcal{U}_S$. Их пересечение $(U_1 \cap S) \cap (U_2 \cap S) = (U_1 \cap U_2) \cap S$ также принадлежит $\mathcal{U}_S$. Наконец, если $\{U_j \cap S : j \in J\}$ — произвольное семейство множеств из $\mathcal{U}_S$, то $\bigcup_{j \in J} (U_j \cap S) = (\bigcup_{j \in J} U_j) \cap S$ принадлежит $\mathcal{U}_S$.

Индуцированную топологию иногда называют *относительной* топологией. Подмножество $S \subset X$, снабженное индуцированной топологией, называется *подпространством* X .

Например, если взять подмножество $[a, b]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ (с обычной топологией) и задать на нем индуцированную топологию, то множества

$$\begin{aligned} [a, c), & \quad a < c < b, \\ (d, b], & \quad a < d < b, \\ (d, c), & \quad a \leq d < c \leq b, \end{aligned}$$

будут открытыми в $[a, b]$. Заметим, что открытое подмножество подпространства $[a, b]$ не обязательно открыто в $\mathbb{R}$.

В качестве другого примера можно взять единичную окружность S^1 в $\mathbb{R}^2$ с топологией, индуцированной обычной топологией в $\mathbb{R}^2$. Тогда открытые множества в S^1 —это объединения открытых дуг, т. е. дуг без концевых точек. Вообще, определим на стандартной n -мерной сфере

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

топологию, индуцированную обычной топологией в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Рассмотрим подмножество S пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, заданное уравнением $x_{n+1} = 0$. Если наделять S индуцированной топологией (используя обычную топологию в $\mathbb{R}^{n+1}$), то S будет гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Читатель может доказать это самостоятельно или заглянуть в гл. 6.

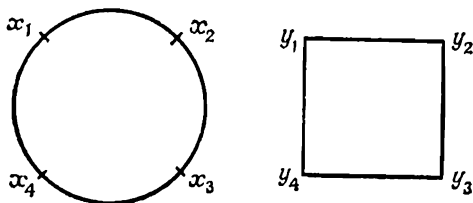


Рис. 4.1

Интересно рассмотреть некоторые подпространства $\mathbb{R}^3$ и найти среди них гомеоморфные между собой. Например, гомеоморфны отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ в $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Один из гомеоморфизмов задается равенством

$$f(x) = c + (d - c)(x - a)/(b - a).$$

Нетрудно построить обратное отображение f^{-1} и показать, что f и f^{-1} непрерывны (см. также упр. 4.5 (g)). Мы, так сказать, растягиваем или сжимаем один отрезок в другой.

В качестве другого примера рассмотрим окружность и замкнутую ломаную, ограничивающую квадрат

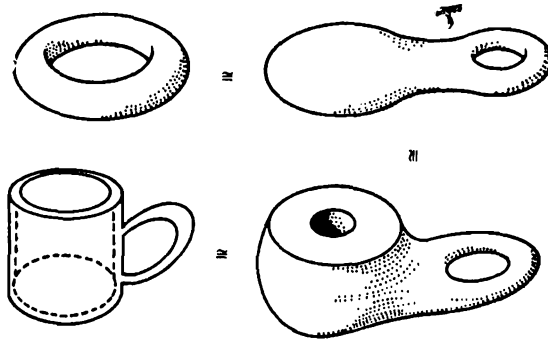


Рис.4.2

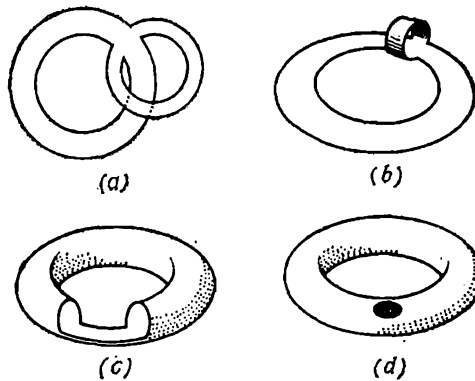


Рис.4.3

(рис. 4.1). Отображение, которое переводит дуги $x_i x_{i+1}$ окружности в стороны $y_i y_{i+1}$ ломаной, является гомеоморфизмом окружности и ломаной. Если $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ — окружность и $\{(x, y): x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1\}$ или $-1 \leq x \leq 1, y = \pm 1\}$ — ломаная, то гомеоморфизмы имеют вид

$$\begin{array}{ll} \text{окружность} \rightarrow \text{ломаная} & \text{ломаная} \rightarrow \text{окружность} \\ (x, y) \mapsto (x/m, y/m) & (x, y) \mapsto (x/r, y/r) \end{array}$$

где $m = \max(|x|, |y|)$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Мы как бы изгибаем окружность в ломаную. Вообще, два подпро-

пространства в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$ гомеоморфны, если, образно говоря, их можно получить одно из другого при помощи скручивания, изгибания, сжатия или растяжения, но без склеивания точек и разрезания. Так, например, бублик гомеоморфен чайной чашке с ручкой (рис. 4.2).

Другой пример гомеоморфных пространств дан на рис. 4.3 (a) и (d) с промежуточными гомеоморфными пространствами, изображенными на рис. 4.3 (b) и (c).

Если $h: X \cong Y$ — гомеоморфизм, то для любой точки $x \in X$ гомеоморфны пространства $X \setminus \{x\}$ и $Y \setminus \{h(x)\}$. Это свойство иногда позволяет доказать, что некоторые пространства негомеоморфны. Приведем пример такого рассуждения (пока чисто интуитивного). Подпространства $[0, 1]$ и $(0, 1)$ пространства $\mathbb{R}$ не гомеоморфны, потому что если выбросить точку 0 из $[0, 1]$, то получится промежуток $(0, 1]$, который (интуитивно) состоит из одного куска, тогда как при отбрасывании любой точки из $(0, 1)$ получится (интуитивно) два куска, или, точнее, дизъюнктивное объединение двух непустых открытых множеств. Но один кусок (интуитивно) не может быть гомеоморфен двум, так как соответствующее отображение содержало бы разрезание и не было бы непрерывным. Таким образом, отрезок $[0, 1]$ не гомеоморфен интервалу $(0, 1)$. (Понятия «один кусок» и «два куска» будут строго определены в гл. 9.) Эту идею можно обобщить, удаляя две или более точек. Читателю предлагается исследовать дальнейшие возможности, которые открывает этот метод, при выполнении следующего упражнения.

4.2. Интуитивное упражнение на гомеоморфизмы. Рассортируйте подпространства $\mathbb{R}^3$ (и $\mathbb{R}^2$), изображенные на рис. 4.4, по принципу их гомеоморфности.

Рассмотрим окружность и «заузленную окружность» в $\mathbb{R}^3$ (рис. 4.5); между ними легко построить гомеоморфизм. Нужно разделить каждое из этих пространств, скажем, на девять частей и отобразить дугу окружности $x_i x_{i+1}$ на дугу $y_i y_{i+1}$ «заузленной окружности». Если сделать рассматриваемые подпространства из тонкой веревки, то легко обнаружить, что при помощи изгибания и скручивания без разрезов и склеива-

ний невозможно превратить одно из них в другое. Однако если разрезать узел, развязать его и склеить концы, то уже можно получить окружность. Это наводит на мысль видоизменить наше интуитивное представление о гомеоморфизмах подпространств $\mathbb{R}^3$, допустив временные разрезания. Идея состоит в том, что

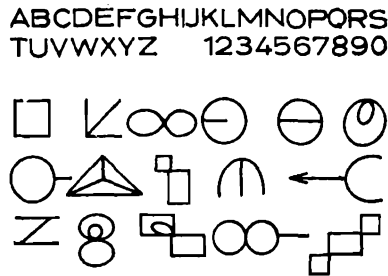


Рис.4.4

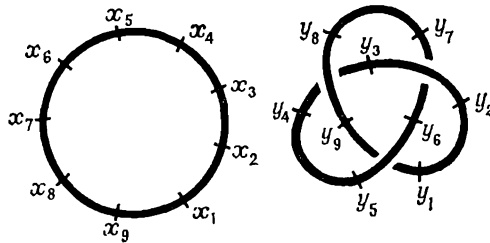


Рис.4.5

можно временно сделать разрез, выполнить некоторые гомеоморфизмы (изгибание, скручивание и т. д.), а затем этот разрез заклеить. Начальное и конечное пространства будут тогда гомеоморфными. Этой идее позднее будет придана строгость при помощи понятия факторпространства (см. гл. 5 и, в частности, теорему 5.5).

4.3. Упражнение. Покажите, что подпространства $\mathbb{R}^3$, изображенные на рис. 4.6, гомеоморфны. Первое подпространство получено приклеиванием трех скрученных полосок бумаги к двум бумажным кружочкам. Второе получено склеиванием двух длинных полос бумаги. (Указание: разрежьте первое из этих пространств в двух

местах, а именно перережьте две скрученные полоски, затем разверните и склейте полоски заново.)

Мы уже отметили, что если S — подпространство X , то открытые множества в S не обязательно открыты

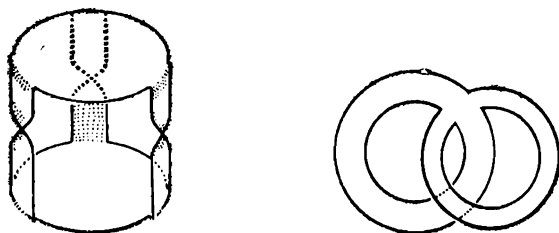


Рис.4.6

в X . Но если S открыто в X , то открытые подмножества S открыты также и в X .

4.4. Лемма. (i) Если S открыто в X , то подмножества S , открытые в индуцированной топологии, открыты в X .

(ii) Если S замкнуто в X , то подмножества S , замкнутые в индуцированной топологии, замкнуты в X .

Доказательство. Так как (i) и (ii) доказываются более или менее одинаково, докажем только (i). Предположим, что S открыто в X , и пусть U — открытое подмножество S . По определению, $U = V \cap S$, где V открыто в X . Но так как S открыто в X , то $U = V \cap S$ также открыто в X .

4.5. Упражнения. (а) Покажите, что если Y — подпространство X , а Z — подпространство Y , то Z — подпространство X .

(б) Докажите, что подпространство метризуемого пространства метризуемо.

(в) Предположим, что S — подпространство X . Покажите, что отображение включения $S \rightarrow X$ непрерывно. Более того, покажите, что топология S является наименьшей (имеющей меньше всего открытых множеств) среди топологий, относительно которых включение $S \rightarrow X$ непрерывно.

(д) Пусть X — топологическое пространство, S — его подмножество и $i: S \rightarrow X$ — включение. Предположим, что на S задана такая топология, что для любого пространства Y и отображения $f:$

$Y \rightarrow S$ это отображение тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывна композиция $if: Y \rightarrow X$. Докажите, что эта топология на S совпадает с топологией, индуцированной топологией на X .

(е) Пусть Y — подпространство в X и A — подмножество в Y . Обозначим через $\text{Cl}_X(A)$ замыкание A в X , а через $\text{Cl}_Y(A)$ замыкание A в Y . Докажите, что $\text{Cl}_Y(A) \subset \text{Cl}_X(A)$, но, вообще говоря, $\text{Cl}_Y(A) \neq \text{Cl}_X(A)$.

(f) Покажите, что подмножество (a, b) в $\mathbb{R}$ с индуцированной топологией гомеоморфно $\mathbb{R}$. (Указание: используйте функцию типа $x \mapsto \lg [x(cx+d)]$ при подходящих c и d .)

(g) Пусть X, Y — топологические пространства и S — подпространство в X . Докажите, что если $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, то и $f|_S: S \rightarrow f(S)$ непрерывно.

(h) Покажите, что подпространства $(1, \infty)$ и $(0, 1)$ в $\mathbb{R}$ с обычной топологией гомеоморфны. (Указание: $x \mapsto 1/x$.)

(i) Докажите, что $S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ в обычной топологии. (Указание: определите $\varphi: S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right),$$

а $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ формулой

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1).$$

(j) Пусть $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ и S^n снабжены топологией, индуцированной обычной топологией пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что отображение $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$, определенное равенством $f(x) = x/\|x\|$, непрерывно.

Глава 5

ФАКТОРТОПОЛОГИЯ (И ГРУППЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПРОСТРАНСТВАХ)

В предыдущей главе мы рассматривали, по существу, множество S , топологическое пространство X и инъективное отображение S в X . Это отображение определяло на S индуцированную топологию. В этой главе мы рассмотрим топологическое пространство X , множество Y и сюръективное отображение X на Y . Это отображение определит некоторую топологию на Y , а именно так называемую фактортопологию.

5.1. Определение. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — сюръективное отображение топологического пространства X на множество Y . *Фактортопологией* на Y относительно f называется совокупность множеств

$$\mathcal{U}_f = \{U: f^{-1}(U) \text{ открыто в } X\}.$$

Легко проверить, что $\mathcal{U}_f$ удовлетворяет аксиомам топологии: очевидно, что $\emptyset \in \mathcal{U}_f$ и $Y \in \mathcal{U}_f$, а остальные условия легко следуют из того, что $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ и $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$. Заметим, что если Y снабжено фактортопологией, то отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно.

Хорошим примером является множество $\mathbb{R}P^n = \{\{x, -x\}: x \in S^n\}$ неупорядоченных пар точек из S^n . Имеется очевидное сюръективное отображение $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, при котором $x \mapsto \{x, -x\}$. Множество $\mathbb{R}P^n$ с фактортопологией относительно отображения π называется *вещественным проективным n -мерным пространством*.

В качестве другого примера рассмотрим сначала пространство

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

с индуцированной топологией (цилиндр). Пусть M — множество неупорядоченных пар точек из C вида $\{p, -p\}$, т. е.

$$M = \{\{p, -p\} \mid p \in C\}.$$

Так как имеется естественное сюръективное отображение пространства C на 1 , то можно снабдить M фактортопологией. Полученное пространство называется *листом* (или *лентой*) *Мёбиуса*.

Рассмотрим отображение $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида

$$\{p, -p\} \mapsto ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz),$$

где $p = (x, y, z) \in C \subset \mathbb{R}^3$. Нетрудно проверить, что f инъективно. Образ $f(M)$ пространства M при отображении f изображен на рис. 5.1. В действительности

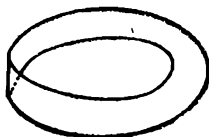


Рис. 5.1

M гомеоморфно $f(M) \subset \mathbb{R}^3$ с индуцированной топологией; непрерывность f следует из непрерывности отображения $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, определенного равенством

$$F(x, y, z) = ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz),$$

и свойства универсальности отображения факторпространств (см. ниже теорему 5.2). Доказательство непрерывности f^{-1} предоставляется читателю; оно легко следует из результатов, доказываемых в гл. 8.

Сформулируем и докажем *свойство универсальности отображения факторпространств*.

5.2. Теорема. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — некоторое отображение, и предположим, что Y снабжено фактортопологией относительно f . Отображение $g: Y \rightarrow Z$ пространства Y в произвольное топологическое пространство Z тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывна композиция $gf: X \rightarrow Z$.

Доказательство. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, и если g непрерывно, то композиция gf также непрерывна. Обратно, предположим, что gf непрерывно. Если V открыто в Z , то $(gf)^{-1}(V)$ открыто в X , т. е. $f^{-1}(g^{-1}(V))$ открыто в X . По определению фактортопологии на Y , множество $g^{-1}(V)$ открыто в Y , а потому g непрерывно.

5.3. Упражнения. (а) Пусть на Y задана фактортопология относительно отображения $f: X \rightarrow Y$. Докажите, что это наибольшая топология на Y , относительно которой f непрерывно¹⁾.

(б) Пусть на Y задана фактортопология относительно отображения $f: X \rightarrow Y$. Покажите, что подмножество A замкнуто в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(A)$ замкнуто в X .

(с) Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ($S^1 \subset \mathbb{R}^2$) определено равенством $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что фактортопология $\mathcal{U}_f$ на S^1 относительно отображения f совпадает с топологией $\mathcal{U}$, индуцированной из $\mathbb{R}^2$ (т. е. покажите, что $(S^1, \mathcal{U}_f) \cong (S^1, \mathcal{U})$).

(д) Пусть X, Y, Z — топологические пространства и $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ — сюръективные отображения. Докажите, что если топологии на Y и Z являются фактортопологиями относительно отображений f и g соответственно, то топология на Z есть фактортопология относительно композиции $gf: X \rightarrow Z$.

(е) Докажите, что $\mathbb{R}P^1$ и S^1 гомеоморфны.

(f) Покажите, что отображение $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ вида $\{x, -x\} \mapsto (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$ непрерывно и инъективно.

(г) Пусть X — топологическое пространство и $f: X \rightarrow Y$ — сюръективное отображение. Пусть $\mathcal{U}_f$ — фактортопология на Y . Предположим, что $\mathcal{U}$ — топология на Y , относительно которой $f: X \rightarrow Y$ непрерывно. Докажите, что если f — замкнутое или открытое отображение, то $(Y, \mathcal{U})$ гомеоморфно $(Y, \mathcal{U}_f)$. Приведите пример неоткрытого и незамкнутого отображения f , для которого $(Y, \mathcal{U}) \not\cong (Y, \mathcal{U}_f)$.

(h) Предположим, что $f: X \rightarrow Y$ — сюръективное отображение топологического пространства X на множество Y . Пусть Y наделено фактортопологией относительно f , и пусть A — подпространство X . Обозначим через $\mathcal{U}_1$ топологию на $B = f(A) \subset Y$, индуцированную из Y , а через $\mathcal{U}_2$ — фактортопологию относительно отображения $f|A: A \rightarrow B$. Покажите, что $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$. Приведите пример, показывающий, что, вообще говоря, $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$. (Указание: рассмотрите отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, заданное равенством $f(t) = \exp(2\pi i t)$.) Покажите также, что если либо A замкнуто в X и f — замкнутое отображение, либо A открыто в X и f — открытое отображение, то $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

Пример сюръективного отображения можно получить, рассмотрев классы эквивалентности для некото-

¹⁾ Ср. с упр. 4.5 (с). — *Прим. ред.*

рого отношения эквивалентности. Если X — топологическое пространство и $\sim$ есть отношение эквивалентности на X , обозначим через $X/\sim$ множество классов эквивалентности и определим $f: X \rightarrow X/\sim$ равенством $f(x)=[x]$, где $[x]$ — содержащий x класс эквивалентности. О пространстве $X/\sim$ с фактортопологией говорят, что оно получено из X при помощи *топологического отождествления*. Например, если $\sim$ есть отношение эквивалентности на S^n , для которого $x \sim y$ в том и только в том случае, если $x = \pm y$, то $S^n/\sim$ — это, конечно, RP^n . То же самое отношение эквивалентности на цилиндре C дает в качестве факторпространства $C/\sim$ лист Мёбиуса.

Если взять единичный квадрат $X = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq 1\}$ в $\mathbb{R}^2$ с индуцированной топологией и определить отношение эквивалентности на нем условием

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \text{ или } \{x, x'\} = \{0, 1\} \\ \text{и } y = y',$$

то $X/\sim$ с фактортопологией гомеоморфно цилиндру. Скучное доказательство этого факта можно было бы дать сейчас, но гораздо проще оно получится в гл. 8, сам же факт интуитивно ясен. Мы будем изображать X вместе с заданным на нем отношением эквивалентности так, как это сделано на рис. 5.2 (а). Стрелки показывают, какие точки и в каком порядке отождествляются.

Таким же способом можно построить лист Мёбиуса. Соответствующая картинка изображена на рис. 5.2 (б); отношение эквивалентности на квадрате X определяется как

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \text{ или } \{x, x'\} = \{0, 1\} \\ \text{и } y = 1 - y'.$$

Два других примера, полученных из единичного квадрата при помощи топологического отождествления, даны на рис. 5.3.

Нетривиальные эквивалентности на рис. 5.3 (а) имеют вид $(0, y) \sim (1, y)$, $(x, 0) \sim (x, 1)$, а на рис. 5.3 (б) $(0, y) \sim (1, y)$, $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$. В дальней-

шем будет очевидно (а читатель может попытаться доказать это уже сейчас), что тор (пространство на рис. 5.3 (а)) гомеоморфен следующему подпространству в $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

Гомеоморфизм задается, например, соответствием

$$(x, y) \mapsto ((2 + \cos 2\pi x) \cos 2\pi y, (2 + \cos 2\pi x) \sin 2\pi y, \sin 2\pi x).$$

Это приводит к традиционному изображению тора в виде поверхности бублика (рис. 5.4).

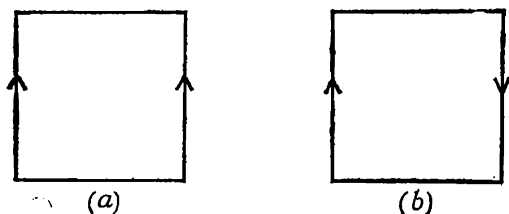


Рис.5.2. (а) Цилиндр. (б) Лист Мёбиуса

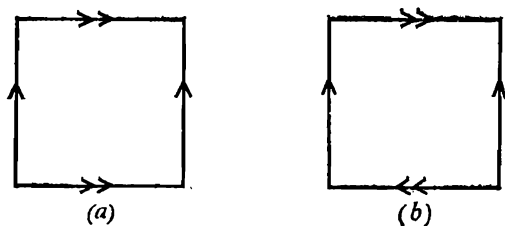


Рис.5.3. (а) Тор. (б) Бутылка Клейна

Если взять квадрат из гибкого материала и склеить его граничные точки в соответствии с рис. 5.3 (а), то мы снова придем к этому изображению (рис. 5.5).

Аналогичный процесс для бутылки Клейна труднее, потому что мы вынуждены проводить отождествления в $\mathbb{R}^4$. Первое отождествление (рис. 5.6 (b)) выполнить просто. Для следующего (рис. 5.6 (с)) нам нужно четыре измерения. Графически мы изображаем его, как

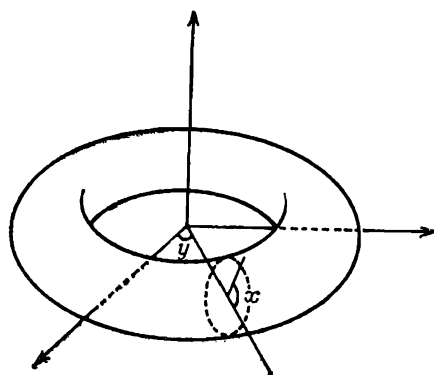


Рис.5.4

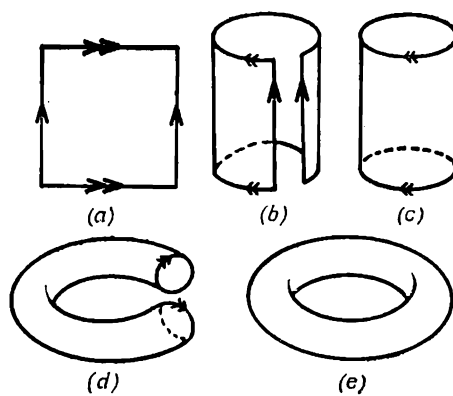


Рис.5.5

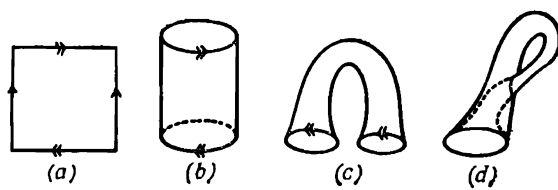


Рис.5.6

на рис. 5.6 (d). Окружность самопересечения на самом деле отсутствует; она возникла на рисунке только потому, что мы живем в трехмерном мире.

Рассекая плоскостью пространство на рис. 5.6 (d), мы видим (рис. 5.7 (a), (b)), что бутылка Клейна представляет собой два листа Мёбиуса, склеенных по об-

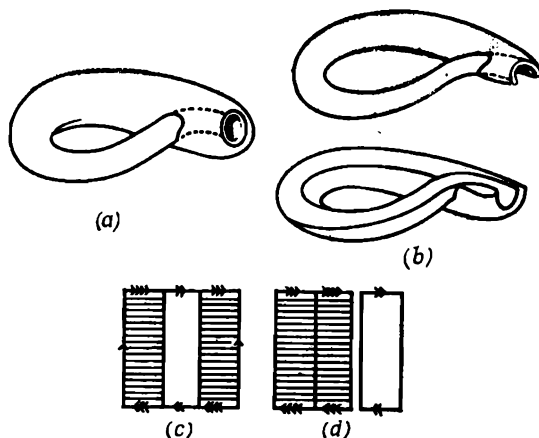


Рис. 5.7

щей границе. По-другому иллюстрируют этот факт рис. 5.7 (c), (d).

Для облегчения дальнейших наглядных представлений напомним, что вещественная проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ определена как $S^2/\sim$, где

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = \pm x'.$$

В этом случае северное полушарие отождествляется с южным, и можно ограничиться северным полушарием, которое гомеоморфно диску $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ посредством проекции $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ для $(x, y, z) \in S^2$ с $z \geq 0$. Таким образом, $\mathbb{R}P^2$ можно представить как $D^2/\sim$, где

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = x' \text{ или } x, x' \in S^1 \subset D^2 \text{ и } x = -x'.$$

Это изображено на рис. 5.8 (b) или на эквивалентном

рис. 5.8 (с). Конечно, это нельзя считать строгим доказательством.

Если выбросить из $\mathbb{R}P^2$ маленький диск, мы получим лист Мёбиуса (рис. 5.9). Таким образом, вещественную проективную плоскость можно представлять себе как лист Мёбиуса с приклеенным диском.

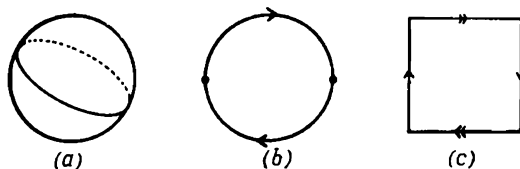


Рис. 5.8

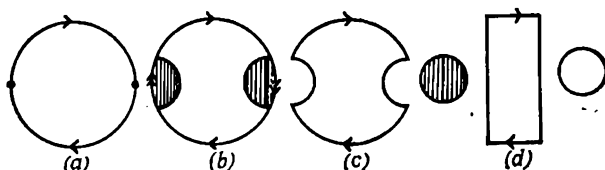


Рис. 5.9

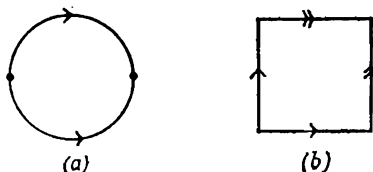


Рис. 5.10

Сферу тоже можно представить в виде фактор-пространства, как показано на рис. 5.10 (а) или (б). Интуитивно можно представлять себе круг и квадрат как кошельки с молниями. Застегнув молнию, мы получим сферу.

В предыдущих примерах наши рассуждения носили интуитивный характер. Можно было бы дать строгие доказательства, но лучше оставить их до того времени, когда у нас будет немного более развитая теория.

Читателю рекомендуется вернуться к этой главе после гл. 8 и восполнить детали приведенных выше наглядных соображений.

Одномерные аналоги диска и сферы—это отрезок и окружность. Если отождествить концы единичного отрезка, мы получим окружность. Интуитивно это ясно. Читателю следует попытаться дать строгое доказательство этого факта.

5.4. Упражнения. (а) Покажите, что если $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ и $\sim$ — отношение эквивалентности, при котором $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда $\{x, x'\} = \{0, 1\}$ или $x = x'$, то $I/\sim$ гомеоморфно S^1 .

(б) Лист Мёбиуса обладает по сравнению с цилиндром некоторыми интересными свойствами. Сделайте модели цилиндра и листа Мёбиуса из полосок бумаги размером около 40×4 см. Проведите карандашом линию посередине между краями цилиндра и листа Мёбиуса. Теперь разрежьте вдоль этой линии. Что получится в каждом случае? Что получится, если разрезать вдоль линии, проведенной на расстоянии от края, равном $1/3$ расстояния между краями?

Следующий результат дает достаточные условия того, чтобы факторпространства гомеоморфных пространств были гомеоморфными.

5.5. Теорема. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение топологических пространств, и предположим, что на X и Y заданы отношения эквивалентности $\sim_X$ и $\sim_Y$ соответственно, такие, что $x \sim_X x'$ в том и только в том случае, если $f(x) \sim_Y f(x')$. Если f — гомеоморфизм, то $X/\sim_X$ и $Y/\sim_Y$ гомеоморфны.

Доказательство. Определим отображение $F: X/\sim_X \rightarrow Y/\sim_Y$, равенством $F[x] = [f(x)]$, где квадратные скобки обозначают классы эквивалентности. Это определение корректно, так как если $[x] = [x']$, то $x \sim_X x'$, а тогда $f(x) \sim_Y f(x')$ и $[f(x)] = [f(x')]$. Докажем, что F — гомеоморфизм. Чтобы показать, что F инъективно, предположим, что $F[x] = F[x']$, так что $[f(x)] = [f(x')]$, т. е. $f(x) \sim_Y f(x')$. Но тогда $x \sim_X x'$ и $[x] = [x']$. Сюръективность F очевидна. Чтобы доказать его непрерывность, рассмотрим естественные проекции $\pi_X: X \rightarrow X/\sim_X$ и $\pi_Y: Y \rightarrow Y/\sim_Y$, непрерывные по определению фактортопологии. Ясно, что $F\pi_X = \pi_Y f$, и так как f непрерывно, то $F\pi_X$ непрерывно и, следовательно,

F непрерывно в силу свойства универсальности отображения факторпространств. Тот факт, что F^{-1} непрерывно, аналогичным образом следует из равенства $F^{-1}\pi_Y = \pi_X f^{-1}$. $\square$

В качестве примера рассмотрим $\mathbb{R}^+ = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ с таким отношением эквивалентности: $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда найдется целое n , такое, что $x' = 3^n x$. Рассмотрим также $\mathbb{R}$ с отношением эквивалентности: $x \sim x'$ в том и только в том случае, если найдется целое n , такое, что $x' = n + x$. Функция $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, определенная равенством $f(x) = \log_3 x$, является гомеоморфизмом, и $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) \sim f(x')$; следовательно, пространства $\mathbb{R}^+/\sim$ и $\mathbb{R}/\sim$ гомеоморфны. На самом деле оба они гомеоморфны окружности.

Теорема 5.5 уточняет интуитивное представление о гомеоморфизмах, использованное в гл. 4. Начнем с пространства W . Сделав разрезы, получим X и отношение $\sim_X$, которое показывает, как нужно склеить точки X , чтобы получить W . Теперь применим к пространству X гомеоморфизм f , чтобы получить пространство Y с отношением эквивалентности $\sim_Y$. Естественно, мы требуем, чтобы

$$x \sim_X x' \Leftrightarrow f(x) \sim_Y f(x').$$

Склеивая Y согласно $\sim_Y$, получим $Z = Y/\sim_Y$. По теореме 5.5 пространство Z гомеоморфно X .

В дальнейшем полезным будет понятие действия группы G на множестве X . Оно приводит к новым примерам пространств с фактортопологией.

5.6. Определение. Пусть X — множество и G — группа. Будем говорить, что G *действует* на X и что X является G -*множеством*, если задано отображение множества $G \times X$ в X , которое обозначается $(g, x) \mapsto g \cdot x$ и обладает следующими свойствами:

(i) $1 \cdot x = x$ для всех $x \in X$, где 1 — единичный элемент G ,

(ii) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ для всех $x \in X$ и $g, h \in G$.

В качестве примера рассмотрим группу G всех гомеоморфизмов топологического пространства X в себя (см. упр. 3.7 (d)) и положим $g \cdot x = g(x)$ для $g \in G$.

Этим задается действие G на X , так как, очевидно, $1 \cdot x = 1(x) = x$ и $g \cdot (h \cdot x) = g \cdot h(x) = g(h(x)) = (gh) \cdot x$. В качестве следующего примера возьмем $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ — группу порядка 2 и $X = S^n$. Легко проверить, что равенство $\pm 1 \cdot x = \pm x$ определяет действие $\mathbb{Z}_2$ на S^n . Если взять в качестве G группу целых чисел $\mathbb{Z}$, то равенство $n \cdot x = n + x$, где $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, определяет некоторое действие $\mathbb{Z}$ на $X = \mathbb{R}$. Этот пример можно обобщить, определив действие $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}^2$ формулой $(m, n) \cdot (x, y) = (m + x, n + y)$. В обоих случаях мы оставляем читателю проверку того, что получается в самом деле действие группы в смысле определения 5.6. Наш последний пример — действие $\mathbb{Z}$ на бесконечной полосе

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1/2 \leq y \leq 1/2\},$$

заданное равенством $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

Наше определение G -действия — это, строго говоря, определение *левого* G -действия. Существует также понятие *правого* G -действия, т. е. отображения $X \times G \rightarrow X$, обозначаемого $(x, g) \mapsto x \cdot g$ и такого, что $x \cdot 1 = x$ и $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$. Под G -действием мы будем всюду понимать левое G -действие.

5.7. Упражнения. (а) Предположим, что X — правое G -множество. Для $x \in X$ и $g \in G$ положим $g \cdot x = x \cdot (g^{-1})$. Покажите, что этим задается левое действие G на X . Почему не годится определение $g \cdot x = x \cdot g$?

(б) Пусть H — подгруппа группы G . Для $h \in H$, $g \in G$ определим $h \cdot g$ как hg . Покажите, что этим определяется действие H на G .

(с) Пусть G — группа и $\mathcal{S}(G)$ — множество всех ее подмножеств. Покажите, что равенство $g \cdot U = gU = \{gh; h \in U\}$, $g \in G$, $U \in \mathcal{S}(G)$, определяет действие G на $\mathcal{S}(G)$.

(д) Пусть G действует на X . Определим *стабилизатор* точки $x \in X$ как множество $G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\}$. Докажите, что G_x — подгруппа в G .

(е) Пусть G действует на X . Определим *орбиту* точки $x \in X$ как подмножество $G \cdot x = \{g \cdot x; g \in G\}$ множества X . Докажите, что две орбиты $G \cdot x$, $G \cdot y$ либо не пересекаются, либо совпадают. Выведите отсюда, что G -множество X разлагается в объединение непересекающихся орбит.

Важным следствием определения G -множества X

является тот факт, что G действует на X при помощи биекций.

5.8. Теорема. Пусть X есть G -множество. Для любого $g \in G$ отображение $\theta_g: X \rightarrow X$, переводящее x в $g \cdot x$, биективно.

Доказательство. Из определения G -множества видно, что $\theta_g \theta_h = \theta_{gh}$ и $\theta_1 = 1_X$. Таким образом, $\theta_g \theta_{g^{-1}} = 1_X = \theta_{g^{-1}} \theta_g$ и θ_g биективно. $\square$

Если G действует на X , можно определить на X отношение эквивалентности $\sim$ условием

$x \sim y \Leftrightarrow$ найдется элемент $g \in G$, такой, что $g \cdot x = y$,

или, другими словами, $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $y \in G \cdot x$, т. е. x и y принадлежат одной орбите, см. упр. 5.7 (е). Обозначим теперь множество классов эквивалентности через X/G ; это — множество орбит действия G на X . Имеется очевидное сюръективное отображение $X \rightarrow X/G$. Если X — топологическое пространство с действием G , то можно определить на X/G фактортопологию. Множество X/G с фактортопологией называется *пространством орбит* действия G на X .

Если, например, $\mathbb{Z}_2$ действует на S^n как $\pm 1 \cdot x = \pm x$, то $S^n/\mathbb{Z}_2$ — это в точности $\mathbb{R}P^n$. Если $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}$ сдвигами $n \cdot x = n + x$, то $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ совпадает с S^1 .

5.9. Упражнения. (а) Пусть X — бесконечная полоса $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ в $\mathbb{R}^2$, и пусть группа $\mathbb{Z}$ действует на ней по формуле $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$. Покажите, что пространство орбит $X/\mathbb{Z}$ гомеоморфно листу Мёбиуса.

(б) Пусть X и Y — два G -множества. Будем называть отображение $f: X \rightarrow Y$ *G -эквивариантным*, если $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ для всех $x \in X$ и $g \in G$. Докажите, что если X и Y — топологические пространства, а f есть G -эквивариантный гомеоморфизм, то X/G и Y/G гомеоморфны.

(в) Постройте примеры, показывающие, что если X и Y — топологические пространства, на которых действует группа G , причем $X/G \cong Y/G$, то X и Y необязательно гомеоморфны.

(г) Пусть X есть G -множество. Для каждого $x \in X$ стабилизатор G_x действует на G и определено множество орбит G/G_x . Покажите, что G/G_x — в точности множество левых смежных классов G по подгруппе G_x . Покажите, что существует G -эквивариантная биекция между орбитой $G \cdot x$ точки x и множеством G/G_x .

В приведенных примерах действий групп на топологических пространствах эти группы действовали непрерывно. Для пространств с такими действиями есть особое название.

5.10. Определение. Пусть G — группа. Топологическое пространство X называется G -пространством, если G действует на X и отображение θ_g , переводящее x в $g \cdot x$, непрерывно для всех $g \in G$.

5.11. Упражнение. Пусть X есть G -пространство. Докажите, что отображение θ_g , определенное соответствием $x \mapsto g \cdot x$, является гомеоморфизмом X в себя для всех $g \in G$. Выведите отсюда, что непрерывное действие G на X задает гомоморфизм $g \mapsto \theta_g$ группы G в группу всех гомеоморфизмов X .

Ввиду последнего упражнения будем иногда говорить, что G — группа гомеоморфизмов G -пространства X . Используя этот факт, докажем следующий результат.

5.12. Теорема. Пусть X есть G -пространство. Тогда каноническая проекция $\pi: X \rightarrow X/G$ является открытым отображением.

Доказательство. Для открытого $U \subset X$ рассмотрим множество

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X: \pi(x) \in \pi(U)\} = \\ &= \{x \in X: G \cdot x = G \cdot y \text{ для некоторого } y \in U\} = \\ &= \{x \in X: x = g \cdot y \text{ для некоторых } y \in U, g \in G\} = \\ &= \{x \in X: x \in g \cdot U \text{ для некоторого } g \in G\} = \\ &= \bigcup_{g \in G} g \cdot U. \end{aligned}$$

Действие каждого g из G — гомеоморфизм, поэтому если U открыто, то $\pi^{-1}(\pi(U))$ также открыто, и $\pi(U)$ открыто в X/G по определению фактортопологии.

Первое из следующих упражнений указывает свойство отображений пространств орбит, аналогичное свойству универсальности отображения факторпространств. Второе аналогично теореме 5.12 (в частном случае).

5.13. Упражнения. (а) Пусть X есть G -пространство и $\pi: X \rightarrow X/G$ — каноническая проекция. Предположим, что g — отображение пространства орбит X/G в некоторое топологическое пространство Z . Докажите, что g тогда и только тогда открыто, когда $g\pi$ — открытое отображение.

(б) Пусть X есть G -пространство с конечной группой G . Докажите, что естественная проекция $\pi: X \rightarrow X/G$ является замкнутым отображением.

(с) Пусть X есть G -пространство и H — нормальная подгруппа в G . Покажите, что X/H является (G/H) -пространством и что $(X/H)/(G/H) \cong X/G$.

Глава 6

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

Наш последний общий метод построения новых топологических пространств из уже известных — это образование прямого произведения. Напомним, что прямое произведение $X \times Y$ двух множеств X, Y — это множество упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$. Если X и Y — топологические пространства, то при помощи топологий на X и Y можно ввести топологию на $X \times Y$. Первое, что приходит на ум, — взять в качестве открытых множеств в $X \times Y$ произведения множеств, открытых в X и Y соответственно. Но это не совсем правильно (подумайте, какая аксиома топологии не выполняется?).

6.1. Определение. Пусть X и Y — топологические пространства. Их *топологическим произведением* $X \times Y$ называется множество $X \times Y$ с топологией $\mathcal{U}_{X \times Y}$, состоящей из всех множеств, являющихся объединениями произведений открытых подмножеств X и Y .

Типичное множество из $\mathcal{U}_{X \times Y}$ имеет вид $\bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$, где J — некоторое индексирующее множество и при каждом j множества U_j и V_j открыты соответственно в X и Y . Нетрудно проверить, что $\mathcal{U}_{X \times Y}$ — топология. Действительно, $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$ и $X \times Y = X \times Y$, так что первая аксиома выполнена. Если $W, W' \in \mathcal{U}_{X \times Y}$, то $W = \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$ и $W' = \bigcup_{k \in K} U'_k \times V'_k$ для некоторых индексирующих множеств J, K , причем U_j, U'_k открыты в X и V_j, V'_k открыты в Y . Так как

$$W \cap W' = \bigcup_{(j, k) \in J \times K} (U_j \cap U'_k) \times (V_j \cap V'_k),$$

то мы видим, что выполнена вторая аксиома топологии. Третья аксиома выполняется тривиально.

Понятие топологического произведения двух пространств X и Y можно очевидным образом обобщить на случай произведения любого конечного числа топологических пространств.

6.2. Упражнения. (а) Покажите, что если $X_1 \cong X_2$ и $Y_1 \cong Y_2$, то $X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2$.

(б) Пусть X, Y — метризуемые пространства с метриками соответственно d_X, d_Y . Покажите, что функция d , определенная формулой

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\},$$

является метрикой на $X \times Y$, определяющей на нем топологию произведения пространств. Выведите отсюда, что топология произведения на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (где $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ имеют обычную топологию) совпадает с обычной топологией на $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

(с) *Графиком* функции $f: X \rightarrow Y$ называется множество точек произведения $X \times Y$ вида $(x, f(x))$ при $x \in X$. Покажите, что если f — непрерывное отображение топологических пространств, то график f гомеоморфен X .

(д) Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R} \times S^1$. (Указание: рассмотрите $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ как $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.)

Возможно и другое описание топологии на $X \times Y$.

6.3. Теорема. Пусть $X \times Y$ — произведение топологических пространств. Множество $W \subset X \times Y$ тогда и только тогда открыто, когда для любого $w \in W$ найдутся такие множества U_w, V_w , что U_w открыто в X , V_w открыто в Y , $U_w \times V_w \subset W$ и $w \in U_w \times V_w$.

Доказательство. Пусть W открыто; тогда $W = \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$, где J — некоторое индексирующее множество и U_j, V_j открыты соответственно в X и Y . Итак, если $w \in W$, то $w \in U_i \times V_i$ для некоторого $i \in J$. Обратно, множество $\bigcup_{w \in W} U_w \times V_w$ открыто в $X \times Y$ и, очевидно, совпадает с W . $\square$

Существуют естественные проекции $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ вида $(x, y) \mapsto x$ и $(x, y) \mapsto y$. Так как $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ и $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$, то очевидно, что отображения π_X и π_Y непрерывны.

6.4. Теорема. Для любого $y \in Y$ подпространство $X \times \{y\} \subset X \times Y$ гомеоморфно X .

Доказательство. Рассмотрим отображение $f: X \times \{y\} \rightarrow X$ вида $(x, y) \mapsto x$. Очевидно, оно биективно. Можно записать f в виде композиции включения $X \times \{y\} \rightarrow X \times Y$ и проекции $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$, которые являются непрерывными отображениями. Поэтому f непрерывно. Далее, пусть W — открытое подмножество $X \times \{y\}$, так что $W = \left(\bigcup_{j \in J} U_j \times V_j \right) \cap X \times \{y\}$, где U_j, V_j открыты соответственно в X и Y . Можно переписать W в виде $\bigcup_{j \in J'} U_j \times \{y\}$, где $J' = \{j \in J \mid y \in V_j\}$, и потому $f(W) = \bigcup_{j \in J'} U_j$ открыто в X . Отсюда f — открытое отображение и, следовательно, гомеоморфизм. $\square$

Если $f: A \rightarrow X$ и $g: A \rightarrow Y$ — отображения топологических пространств, то можно определить отображение $h: A \rightarrow X \times Y$ формулой $h(a) = (f(a), g(a))$. Ясно, что h — единственное отображение, для которого $\pi_X h = f$ и $\pi_Y h = g$. Соотношение между непрерывностью f, g и непрерывностью h называется *свойством универсальности отображения произведений*.

6.5. Теорема. Пусть A, X и Y — топологические пространства. Для любой пары отображений $f: A \rightarrow X, g: A \rightarrow Y$ отображение $h: A \rightarrow X \times Y$, определенное формулой $h(a) = (f(a), g(a))$, тогда и только тогда непрерывно, когда f и g непрерывны.

Доказательство. Если h непрерывно, то таковы же $\pi_X h = f$ и $\pi_Y h = g$. Обратно, пусть f и g непрерывны. Пусть U, V — открытые подмножества соответственно X и Y . Тогда $h^{-1}(U \times V) = \{a \mid f(a) \in U, g(a) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$, но так как $f^{-1}(U)$ и $g^{-1}(V)$ открыты, то и $h^{-1}(U \times V)$ открыто. Рассмотрим теперь открытое множество W в $X \times Y$. Если $x \in W$, то $x \in U \times V \subset W$, где U, V открыты в X, Y . Таким образом, $h^{-1}(x) \subset f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset h^{-1}(W)$, и потому $h^{-1}(W)$ открыто. $\square$

6.6. Упражнения. (а) Покажите, что топология произведения на

$X \times Y$ является наименьшей топологией, относительно которой π_X и π_Y непрерывны¹⁾.

(b) Пусть X есть G -пространство, а Y есть H -пространство. Докажите, что пространство $(X \times Y)/(G \times H)$ гомеоморфно $(X/G) \times (Y/H)$.

(c) Для $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ определим $(n, m) \cdot (x, y) = (n+x, m+y)$. Покажите, что это определение превращает $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -пространство. Докажите, что $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ гомеоморфно $S^1 \times S^1$.

(d) Докажите, что тор (см. рис. 5.3 (a) и 5.4) гомеоморфен $S^1 \times S^1$.

(e) Для $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ определим $n \cdot z$ как $n \cdot z = 2^n z$. Покажите, что это определение превращает $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ в $\mathbb{Z}$ -пространство. Докажите, что $(\mathbb{C} \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ гомеоморфно $S^1 \times S^1$. (Указание: воспользуйтесь упр. 6.2 (d), 6.6 (b) и тем фактом, что $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \{1\}$.)

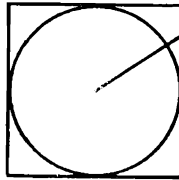


Рис.6.1

(f) То же, что и в (e), но при $n \cdot z = (2\omega)^n z$, где $\omega = \exp(2\pi i/3)$. Что будет пространством орбит $(\mathbb{C} \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$?

(g) Докажите, что пространства $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ гомеоморфны. (Указание: рассмотрите отображение $f: S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, заданное формулой $f(x, t) = 2^t x$.)

(h) Докажите, что подмножество $S_{p,q} \subset \mathbb{R}^n$ вида

$$S_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^n: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = 1\},$$

где $p+q \leq n$, гомеоморфно $S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-q}$. (Указание: рассмотрите отображение $f: S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \rightarrow S_{p,q}$, заданное формулой

$$f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{n-p}) = (x_1 z, x_2 z, \dots, x_p z, y_1, y_2, \dots, y_{n-p}),$$

где $z = \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-p}^2}$.

(i) Пусть G — группа гомеоморфизмов вида $\{T^i: i \in \mathbb{Z}\}$, где $T: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ определено формулой $Tx = 2x$. Покажите, что $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/G$ гомеоморфно $S^{n-1} \times S^1$.

(j) Докажите, что следующие два подмножества $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией гомеоморфны:

$$I^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq 1\}.$$

¹⁾ Ср. с упр. 4.5 (c). — Прим. ред.

(Указание: сначала покажите, что $I^n \cong ([-1, 1])^n = X$, затем определите $\varphi: X \rightarrow D^n$ и $\psi: D^n \rightarrow X$ равенствами

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}}{\|x\|} (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\|x\|}{\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}} (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\psi(0) = 0.$$

Интуитивно: сожмите каждый прямолинейный отрезок от 0 до ∂X линейно, так чтобы его длина стала равной 1; рис. 6.1.)

(k) Докажите, что $\hat{D}^n \cong \mathbb{R}^n$. (Указание: $\hat{D}^n \cong \hat{I}^n = (\hat{I})^n$.)

(l) Найдите пространство X , содержащее более одной точки и такое, что $X \cong X \times X$. (Указание: попробуйте взять бесконечное множество с дискретной топологией. Сделав это, попытайтесь найти пример такого пространства с неметризуемой топологией.)

Глава 7

КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой и двух следующих главах мы рассмотрим свойства пространств, сохраняющиеся при гомеоморфизмах. Такие свойства позволяют судить о гомеоморфности рассматриваемых пространств: если одно из них обладает таким свойством, а другое — нет, то эти пространства не могут быть гомеоморфными. Первое из этих свойств — компактность. В основе его определения лежит следующее свойство отрезка: любое семейство $\{U_j; j \in J\}$ открытых подмножеств единичного отрезка $[0, 1]$ (с индуцированной топологией), такое, что $\bigcup_{j \in J} U_j = [0, 1]$, содержит конечное подсемейство, объединение которого уже дает весь отрезок $[0, 1]$ (см. теорему 7.7).

7.1. Определение. *Покрытием* подмножества S множества X называется семейство подмножеств $\{U_j; j \in J\}$ множества X , такое, что $S \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. Если вдобавок индексирующее множество J конечно, то $\{U_j; j \in J\}$ называется *конечным покрытием*.

Например, семейство $\{[1/n, 1 - 1/n]; n \in \mathbb{N}\}$ является покрытием подмножества $(0, 1)$ пространства $\mathbb{R}$. Конечно, если $S = X$, то семейство $\{U_j; j \in J\}$, обладающее свойством $\bigcup_{j \in J} U_j = X$, является покрытием X . Например, если $\bigcup_{i \in J} U_i = (n, n + 3) \subset \mathbb{R}$, то $\{U_n; n \in \mathbb{Z}\}$ — покрытие $\mathbb{R}$.

7.2. Определение. Пусть $\{U_j; j \in J\}$ и $\{V_k; k \in K\}$ — покрытия подмножества $S \subset X$. Если для любого $j \in J$ найдется такое $k \in K$, что $U_j \subset V_k$, то говорят, что $\{U_j; j \in J\}$ — подпокрытие покрытия $\{V_k; k \in K\}$.

Например, $\{V_r: r \in \mathbb{R}\}$, где $V_r = (r, r+3) \subset \mathbb{R}$, является покрытием $\mathbb{R}$, и $\{U_n: n \in \mathbb{Z}\}$, где $U_n = (n, n+3)$, — его подпокрытие.

7.3. Определение. Пусть X — топологическое пространство и S — его подмножество. Покрытие $\{U_j: j \in J\}$ называется *открытым покрытием* S , если каждое U_j , $j \in J$, открыто в X .

7.4. Определение. Подмножество S топологического пространства X называется *компактным*, если всякое открытое покрытие S обладает конечным подпокрытием.

В частности, топологическое пространство X компактно, если всякое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Пространство $\mathbb{R}$ с обычной топологией некомпактно, потому что открытое покрытие $\{(n, n+2): n \in \mathbb{Z}\}$ не имеет конечных подпокрытий. Пространство X с дискретной топологией тогда и только тогда компактно, когда оно конечно. Так как каждая точка дискретного пространства X является открытым множеством, то для бесконечного X открытое покрытие, состоящее из всех одноточечных множеств, не имеет конечного подпокрытия. С другой стороны, если X конечно, то оно имеет только конечное число открытых подмножеств. Скоро мы покажем, что единичный отрезок $[0, 1]$ является компактным подмножеством $\mathbb{R}$.

7.5. Упражнения. (а) Пусть на X задана топология конечных дополнений. Покажите, что X компактно. Покажите, что любое его подмножество компактно.

(б) Докажите, что топологическое пространство компактно в том и только в том случае, если любое семейство $\{C_j: j \in J\}$ замкнутых множеств, для которого $\bigcap_{j \in J} C_j = \emptyset$, содержит конечное подсемейство $\{C_k: k \in K\}$, такое, что $\bigcap_{k \in K} C_k = \emptyset$.

(с) Пусть $\mathcal{F}$ — топология на $\mathbb{R}$, определенная следующим образом: $U \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда для любого $s \in U$ найдется такое $t > s$, что $[s, t) \subset U$. Докажите, что подмножество $[0, 1]$ пространства $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ некомпактно.

Подмножество S топологического пространства можно снабдить индуцированной топологией, и мы получим для S два понятия компактности: как под-

множества X и как самостоятельного пространства. Эти два понятия совпадают.

7.6. Теорема. *Подмножество S пространства X компактно тогда и только тогда, когда оно компактно как пространство с индуцированной топологией.*

Доказательство. Это очевидно, так как подмножества S , открытые в индуцированной топологии, имеют вид $U \cap S$, где U — открытое подмножество X . Детали рассуждения мы оставляем читателю.

Таким образом, можно определить компактное подмножество S как пространство, компактное в индуцированной топологии.

Следующий результат дает важный пример компактного пространства.

7.7. Теорема. *Единичный отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\{U_j: j \in J\}$ — открытое покрытие отрезка $[0, 1]$, и предположим, что оно не имеет конечного подпокрытия. Это означает, что хотя бы один из отрезков $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ нельзя покрыть конечным подсемейством из $\{U_j: j \in J\}$. Обозначим его через $[a_1, b_1]$. Далее, по крайней мере один из отрезков $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$ нельзя покрыть конечным подсемейством из $\{U_j: j \in J\}$; обозначим его через $[a_2, b_2]$. Продолжая таким же образом, получим последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, такую, что никакое конечное подсемейство из $\{U_j: j \in J\}$ не покрывает ни один из них. Далее, $b_n - a_n = 2^{-n}$ и $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ для всех n . Из последнего условия следует, что $a_m \leq b_n$ для любой пары целых чисел m и n , так что b_n ограничивает сверху множество $\{a_1, a_2, \dots\}$. Пусть a — верхняя грань этого множества. Так как $a \leq b_n$ для всех n , то a ограничивает снизу множество $\{b_1, b_2, \dots\}$. Пусть b — нижняя грань этого множества. По определению имеем $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ для всех n . Но так как $b_n - a_n = 2^{-n}$, то $b - a \leq 2^{-n}$ для всех n , откуда $a = b$.

Так как $\{U_j: j \in J\}$ покрывает $[0, 1]$ и $a = b \in [0, 1]$, то $a \in U_j$ для некоторого $j \in J$. Так как U_j открыто,

для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_j$. Выберем натуральное N так, чтобы $2^{-N} < \varepsilon$ и, следовательно, $b_N - a_N < \varepsilon$. Но $a \in [a_N, b_N]$ и $a - a_N < 2^{-N} < \varepsilon$, $b - b_N < 2^{-N} < \varepsilon$, так что $[a_N, b_N] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_j$, а это противоречит тому, что $[a_N, b_N]$ нельзя покрыть конечным подсемейством из $\{U_j: j \in J\}$. $\square$

Можно обобщить эти рассуждения и показать, что единичный n -мерный куб $I^n = I \times I \times \dots \times I \subset \mathbb{R}^n$, где $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, является компактным пространством. Однако позже мы приведем другое доказательство этого факта.

7.8. Теорема. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Если $S \subset X$ — компактное подпространство, то $f(S)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_j: j \in J\}$ — открытое покрытие $f(S)$; тогда $\{f^{-1}(U_j): j \in J\}$ — открытое покрытие S . Так как S компактно, найдется конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_k): k \in K\}$, K конечно. Но $f(f^{-1}(U_k)) \subset U_k$, и потому $\{U_k: k \in K\}$ — покрытие $f(S)$, являющееся конечным подпокрытием покрытия $\{U_j: j \in J\}$.

7.9. Следствие. (а) Всякий отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.

(б) Пусть X и Y — гомеоморфные топологические пространства. Тогда X компактно в том и только в том случае, если Y компактно.

(с) Если X компактно и Y имеет фактортопологию, индуцированную некоторым отображением $f: X \rightarrow Y$, то Y компактно.

(d) S^1 компактно.

Доказательство очевидно. Заметим, что, как следует из (б), некомпактное пространство не может быть гомеоморфным компактному.

Не любое подмножество компактного пространства компактно; например, интервал $(0, 1)$ является некомпактным подмножеством компактного пространства $[0, 1]$. В этом легко убедиться, рассмотрев покрытие

$\{(1/n, 1-1/n): n \in \mathbb{N}\}$. Но замкнутое подмножество компактного пространства всегда компактно.

7.10. Теорема. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_j: j \in J\}$ — открытое покрытие подмножества $S \subset X$. Так как $\bigcup_{j \in J} U_j \supset S$, то $\{U_j: j \in J\} \cup \{X \setminus S\}$ является открытым покрытием X , а так как X компактно, то оно имеет конечное подпокрытие. Это конечное подпокрытие X имеет вид $\{U_k: k \in K\}$ или $\{U_k: k \in K\} \cup \{X \setminus S\}$, где K конечно. Следовательно, $\{U_k: k \in K\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\{U_j: j \in J\}$ множества S . $\square$

Мы исследовали компактность относительно индуцированной топологии и фактортопологии. Рассмотрим теперь топологию произведения.

7.11. Теорема. *Пусть X и Y — топологические пространства. Они оба компактны тогда и только тогда, когда $X \times Y$ компактно.*

Доказательство. Предположим, что X и Y компактны. Пусть $\{W_j: j \in J\}$ — открытое покрытие $X \times Y$. По определению каждое W_j имеет вид $\bigcup_{k \in K} (U_{j,k} \times V_{j,k})$, где $U_{j,k}$ открыто в X и $V_{j,k}$ открыто в Y . Таким образом, $\{U_{j,k} \times V_{j,k}: j \in J, k \in K\}$ — открытое покрытие $X \times Y$. Для любого $x \in X$ подпространство $\{x\} \times Y$ компактно (оно гомеоморфно Y), и, так как $\{U_{j,k} \times V_{j,k}: j \in J, k \in K\}$ покрывает также $\{x\} \times Y$, найдется конечное подпокрытие $\{U_i(x) \times V_i(x): i = 1, 2, \dots, n(x)\}$ пространства $\{x\} \times Y$. Обозначим через $U'(x)$ множество $U'(x) = \bigcap_{i=1}^{n(x)} U_i(x)$. Семейство $\{U'(x): x \in X\}$ является открытым покрытием X и потому имеет конечное подпокрытие $\{U'(x_i): i = 1, 2, \dots, m\}$. Очевидно, что $\{U'(x_i) \times V_{k_i}(x_i): i = 1, 2, \dots, m; k_i = 1, 2, \dots, n(x_i)\}$ — конечное открытое покрытие $X \times Y$. Для любого i и k_i найдутся такие $j \in J$ и $k \in K$, что $U'(x_i) \times V_{k_i}(x_i) \subset$

$\subset U_{j,k} \times V_{j,k} \subset W_j$. Следовательно, существует конечное подпокрытие покрытия $\{W_j: j \in J\}$ пространства $X \times Y$.

Обратно, если $X \times Y$ компактно, то X и Y компактны, так как проекции π_X и π_Y непрерывны. $\square$

Вообще, если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — компактные топологические пространства, то их произведение $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ также компактно. В частности, компактен единичный n -мерный куб I^n . Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если найдется такое $K > 0$, что для любой точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ справедливы неравенства $|x_i| \leq K$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Другими словами, S содержится в n -мерном кубе с ребром $2K$. Так как он гомеоморфен единичному n -мерному кубу, то мы получаем следующую теорему.

7.12. Теорема (Гейне — Бореля). *Всякое замкнутое и ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно.*

Справедлива также теорема, обратная к теореме 7.12 (см. упр. 8.14 (п)). Из предыдущих результатов можно теперь вывести компактность каждого из следующих пространств:

S^n (замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$);

$S^n \times S^n \times \dots \times S^n$;

$\mathbb{R}P^n$ (сюръективный образ S^n);

лист Мёбиуса (замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^3$).

7.13. Упражнения. (а) Какие из следующих пространств компактны:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq 1\}; \quad \dot{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < 1\};$$

$$\{(s, t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 4\};$$

$$\{(s, t, u) \in \mathbb{R}^3: s^2 + t^2 \leq 1\} \cap \{(s, t, u) \in \mathbb{R}^3: t^2 + u^2 \leq 1\}.$$

(b) Докажите, что всякое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ ограничено.

(с) Докажите, что график функции $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ компактен тогда и только тогда, когда f непрерывна. Приведите пример разрывной функции $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, график которой замкнут, но не компактен.

(d) Пусть X, Y — топологические пространства. Пусть $\mathcal{F}(X, Y)$ — множество всех непрерывных отображений X в Y . Если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то пусть $F(A, B)$ обозначает подмножество отображений из $\mathcal{F}(X, Y)$, которые переводят A в B :

$$F(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(X, Y): f(A) \subset B\}.$$

Пусть $\mathcal{S}$ — следующее множество:

$\mathcal{S} = \{F(A, B): A \text{ — компактное подмножество } X, B \text{ открыто в } Y\}$.
Определим совокупность множеств $\mathcal{U}$ так: $\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{F}(X, Y):$ если $f \in U$, то найдутся такие элементы $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{S}$, что $f \in F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \subset U\}$. Докажите, что $\mathcal{U}$ является топологией на $\mathcal{F}(X, Y)$ (она называется *компактно-открытой топологией*).

(е) Пусть X — компактное метризуемое топологическое пространство. Предположим, что Y — метрическое пространство с метрикой d , и определим d^* на $\mathcal{F}(X, Y)$ формулой

$$d^*(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Покажите, что d^* — метрика на $\mathcal{F}(X, Y)$ и определяемая ею топология на $\mathcal{F}(X, Y)$ совпадает с компактно-открытой топологией.

(f) Пространство X называется *локально компактным*, если для любой точки $x \in X$ всякая ее окрестность содержит компактную окрестность x . Покажите, что если X локально компактно, то отображение вычисления $e: \mathcal{F}(X, Y) \times X \rightarrow Y$, заданное формулой $e(f, x) = f(x)$, непрерывно.

(g) Пусть X — компактное топологическое пространство, возникающее из некоторого метрического пространства с метрикой d . Докажите, что если $\{U_j: j \in J\}$ — открытое покрытие X , то найдется такое $\delta > 0$ (называемое числом Лебега этого покрытия), что любое подмножество X диаметра меньше δ целиком содержится в некотором множестве $U_j, j \in J^1$.

(h) Пусть X — топологическое пространство; определим X^∞ как $X \cup \{\infty\}$, где ∞ — некоторый элемент, не принадлежащий X . Если $\mathcal{U}$ — топология на X , определим $\mathcal{U}^\infty$ как $\mathcal{U}$ вместе со всеми множествами вида $V \cup \{\infty\}$, где $V \subset X$ и $X \setminus V$ компактно и замкнуто в X . Докажите, что $\mathcal{U}^\infty$ — топология на X^∞ . Докажите также, что X — подпространство X^∞ и что X^∞ компактно (X^∞ называется *одноточечной компактификацией* X^2).

¹⁾ См. теорему 23.4. — *Прим. ред.*

²⁾ Обычно расширение X^∞ называют одноточечной компактификацией X при условии, что пространство X локально компактно и хаусдорфово (см. гл. 8). Легко показать, что компактное пространство X^∞ является хаусдорфовым только при этом условии. — *Прим. ред.*

Глава 8

ХАУСДОРФОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Исходный пункт этой главы — упр. 2.2 (b), в котором требовалось доказать, что если топологическое пространство X метризуемо, то для любой пары различных точек $x, y \in X$ найдутся открытые множества U_x и U_y , содержащие соответственно x и y и такие, что $U_x \cap U_y = \emptyset$. Доказательство проводится непосредственно: так как $x \neq y$, то $d(x, y) = 2\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где d — произвольная метрика на X , определяющая данную топологию. Множества $B_\varepsilon(x) = \{z \in X: d(x, z) < \varepsilon\}$ и $B_\varepsilon(y)$ удовлетворяют нужным условиям.

8.1. Определение. Пространство X называется *хаусдорфовым*, если для любой пары различных точек $x, y \in X$ существуют открытые множества U_x, U_y , содержащие соответственно x и y и такие, что $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Таким образом, все метризуемые пространства хаусдорфовы, в частности $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией и любое дискретное пространство. Пространство с антидискретной топологией не хаусдорфово, если оно содержит не менее двух точек.

8.2. Упражнения. (a) Пусть X — пространство с топологией конечных дополнений. Докажите, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда оно конечно.

(b) Пусть $\mathcal{F}$ — топология на $\mathbb{R}$, для которой $U \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда для любого $s \in U$ найдется такое $t > s$, что $[s, t) \subset U$. Докажите, что $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ хаусдорфово.

(c) Пусть X и Y — гомеоморфные топологические пространства. Докажите, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда Y хаусдорфово.

Условие Хаусдорфа — один из примеров аксиом *отделимости*. Рассмотрим некоторые другие аксиомы отде-

лимости, хотя, за исключением нескольких следующих страниц, мы будем широко использовать только аксиому Хаусдорфа.

8.3. Определение. Пусть k —одно из чисел 0, 1, 2, 3 или 4. Пространство X называется T_k -пространством, если оно удовлетворяет приведенному ниже условию T_k .

T_0 : для любой пары различных точек найдется открытое множество, содержащее одну из этих точек и не содержащее другую.



T_1 : для любой пары x, y различных точек найдутся открытые множества, одно из которых содержит x , но не содержит y , а другое содержит y , но не содержит x .



T_2 : для любой пары x, y различных точек найдутся два непересекающихся открытых множества, одно из которых содержит x , а другое y .



T_3 : X удовлетворяет T_1 , и для любого замкнутого подмножества F и любой точки $x \notin F$ найдутся два непересекающихся открытых множества, одно из которых содержит F , а другое x .



T_4 : X удовлетворяет T_1 , и для любой пары F_1, F_2 непересекающихся замкнутых множеств найдутся два непересекающихся открытых множества, одно из которых содержит F_1 , а другое F_2 .



T_2 -пространство—это хаусдорфово пространство. T_3 -пространство иногда называют регулярным.

Очевидно, что $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Причина, по которой условие T_1 включено в условия T_3 и T_4 , прояснится в теореме 8.5, из которой будет следовать, что $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

8.4. Упражнения. (а) Пусть X и Y — гомеоморфные пространства. Докажите, что X есть T_k -пространство тогда и только тогда, когда Y есть T_k -пространство ($k=0, 1, 2, 3, 4$).

(б) Постройте топологические пространства X_0, X_1, X_2 и X_3 , такие, что X_k является T_k -пространством, но не является T_j -пространством при $j > k$.

(с) Докажите, что компактное хаусдорфово пространство является T_4 -пространством. (Указание: загляните в доказательство теоремы 8.7, а в крайнем случае — в доказательство теоремы 8.11.)

8.5. Теорема. *Пространство X тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме T_1 , когда каждая точка в нем замкнута.*

Доказательство. Пусть X есть T_1 -пространство. Пусть $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Тогда найдется открытое множество U_y , содержащее y и не содержащее x . Следовательно, $\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y = X \setminus \{x\}$, т. е. $X \setminus \{x\}$ — объединение открытых множеств и потому открыто. Таким образом, $\{x\}$ замкнуто.

Обратно, если $\{x\}$ и $\{y\}$ замкнуты, то $X \setminus \{x\}$ и $X \setminus \{y\}$ открыты, одно из них содержит x , но не содержит y , а другое содержит y , но не содержит x , т. е. X есть T_1 -пространство. $\square$

Отсюда вытекает следующий результат.

8.6. Следствие. *В хаусдорфовом пространстве каждая точка является замкнутым множеством.*

На самом деле имеет место намного более общее утверждение.

8.7. Теорема. *Компактное подмножество A хаусдорфова пространства X замкнуто.*

Доказательство. Можно считать, что $A \neq \emptyset$ и $A \neq X$, так как в противном случае оно уже замкнуто и доказывать нечего. Выберем точку $x \in X \setminus A$. Для любой точки $a \in A$ найдутся непересекающиеся открытые множества U_a и V_a , такие, что U_a содержит x , а V_a содержит a . Семейство $\{V_a \mid a \in A\}$ покрывает A , и, так как A компактно, существует конечное подпокрытие, скажем $\{V_{a(1)}, V_{a(2)}, \dots, V_{a(n)}\}$. Множество $U = U_{a(1)} \cap U_{a(2)} \cap \dots \cap U_{a(n)}$ открыто, содержит x и не пере-

секается ни с одним $V_{a(i)}$. Следовательно, $U \subset X \setminus A$. Итак, каждая точка $x \in X \setminus A$ содержится в некотором открытом множестве, лежащем в $X \setminus A$, и потому $X \setminus A$ открыто, а A замкнуто. $\square$

Теорема 8.7 приводит к важному результату.

8.8. Теорема. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y . Тогда f является гомеоморфизмом в том и только в том случае, если оно биективно.

Доказательство. Очевидно, что если f гомеоморфизм, то оно биективно. Интереснее обратное утверждение. Предположим, что f биективно; тогда существует обратное отображение f^{-1} . Оно непрерывно тогда и только тогда, когда $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$ замкнуто для всякого V , замкнутого в X . Если V замкнуто в X , то V компактно по 7.10, откуда $f(V)$ компактно по 7.8 и $f(V)$ замкнуто по 8.7. Таким образом, f^{-1} непрерывно. $\square$

В доказанной теореме существенны оба условия: и компактности, и хаусдорфовости. Если, например, X — множество вещественных чисел с дискретной топологией (и, следовательно, некомпактно), а Y — это $\mathbb{R}$ с обычной топологией (следовательно, хаусдорфово), то тождественное отображение непрерывно и биективно, но не является гомеоморфизмом. С другой стороны, если $X = \{x, y\}$ с дискретной топологией (следовательно, компактно), а $Y = \{x, y\}$ с топологией $\{\emptyset, Y, \{x\}\}$ (следовательно, не хаусдорфово), то тождественное отображение также непрерывно и биективно, но не является гомеоморфизмом¹⁾.

При помощи последней теоремы легко установить многие гомеоморфизмы, о которых говорилось в гл. 5. Например, образ $f(X)$ компактного пространства X

¹⁾ Другие типичные примеры: наложение полуинтервала длины 2π на окружность радиуса 1, наложение интервала на компактное пространство, имеющее вид цифры 8, отображение открытого круга с единственной точкой на его границе на сферу и т. п. — Прим., ред.

в хаусдорфовом пространстве при непрерывном инъективном отображении гомеоморфен X .

Изучим теперь, как аксиома Хаусдорфа переносится на подпространства, прямые произведения и факторпространства.

8.9. Теорема. *Подпространство S хаусдорфова пространства X хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные точки из S . Существуют непересекающиеся открытые в X множества U_x и U_y , причем U_x содержит x , а U_y содержит y . Множества $U_x \cap S$ и $U_y \cap S$ — непересекающиеся открытые подмножества S , причем $x \in U_x \cap S$ и $y \in U_y \cap S$. Следовательно, S хаусдорфово. $\square$

В частности, всякое подмножество $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией хаусдорфово.

8.10. Теорема. *Пусть X и Y — топологические пространства. Тогда X и Y хаусдорфовы в том и только в том случае, если $X \times Y$ хаусдорфово.*

Доказательство. Предположим, что X и Y хаусдорфовы, и пусть $\omega_1 = (x_1, y_1)$ и $\omega_2 = (x_2, y_2)$ — две различные точки из $X \times Y$. Если $x_1 \neq x_2$, то можно найти два непересекающихся открытых множества U_1, U_2 в X , $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$. Множества $U_1 \times Y$ и $U_2 \times Y$ открыты и не пересекаются в $X \times Y$, причем $\omega_1 \in U_1 \times Y$ и $\omega_2 \in U_2 \times Y$. Если $x_1 = x_2$, то $y_1 \neq y_2$, и аналогичное рассуждение показывает, что в $X \times Y$ найдутся открытые непересекающиеся множества $X \times V_1$ и $X \times V_2$, для которых $\omega_1 \in X \times V_1$ и $\omega_2 \in X \times V_2$.

Обратно, если $X \times Y$ хаусдорфово, то таковы же подпространства $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times Y$, а следовательно, X и Y . $\square$

Таким образом, пространства типа $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ хаусдорфовы.

Хотя подпространства и произведения хаусдорфовых пространств хаусдорфовы, факторпространство хаусдорфова пространства, вообще говоря, не хаусдорфово. Для примера рассмотрим хаусдорфово простран-

ство X и его незамкнутое подмножество A (скажем, $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$). Пусть $Y = X/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности на X , при котором $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ или $\{x, x'\} \subset A$ (интуитивно, Y — это X со стянутым в точку подмножеством A ; мы будем обозначать $Y = X/\sim$ через X/A). Если снабдить Y фактортопологией относительно естественной проекции $g: X \rightarrow Y$, то прообраз точки $[x_0] \in Y$, где $x_0 \in A$, есть множество A , не замкнутое в X . Следовательно, точка $[x_0]$ незамкнута в Y , и Y не хаусдорфово.

Чтобы обеспечить хаусдорфовость факторпространства Y хаусдорфова пространства X , нужно наложить на X дальнейшие ограничения. В качестве примера приведем следующий результат.

8.11. Теорема. Пусть Y — факторпространство топологического пространства X , определенное при помощи сюръективного отображения $f: X \rightarrow Y$. Если X компактно и хаусдорфово, а f замкнуто, то Y компактно и хаусдорфово.

Доказательство. Точки пространства Y являются образами точек из X , которые замкнуты в X , и потому точки из Y замкнуты. Пусть y_1 и y_2 — две различные точки из Y . Их прообразы $f^{-1}(y_1)$ и $f^{-1}(y_2)$ — непересекающиеся замкнутые подмножества X . Для любой точки $x \in f^{-1}(y_1)$ и любой точки $a \in f^{-1}(y_2)$ найдутся непересекающиеся открытые множества $U_{x,a}$ и $V_{x,a}$, для которых $x \in U_{x,a}$ и $a \in V_{x,a}$. Так как $f^{-1}(y_2)$ замкнуто, то оно компактно, и найдется конечное подпокрытие покрытия $\{V_{x,a}: a \in f^{-1}(y_2)\}$ этого множества, скажем $\{V_{x,a}: a \in A\}$, где A — конечное подмножество $f^{-1}(y_2)$. В частности, найдутся непересекающиеся открытые множества U_x и V_x с $x \in U_x$ и $f^{-1}(y_2) \subset V_x$, а именно $U_x = \bigcap_{a \in A} U_{x,a}$, $V_x = \bigcup_{a \in A} V_{x,a}$. Далее, $\{U_x: x \in f^{-1}(y_1)\}$ — открытое покрытие компактного множества $f^{-1}(y_1)$, и потому найдется конечное подпокрытие $\{U_x: x \in B\}$, где B — конечное подмножество $f^{-1}(y_1)$. Итак, множества $U = \bigcup_{x \in B} U_x$, $V = \bigcap_{x \in B} V_x$ открыты, не пересекаются и $f^{-1}(y_1) \subset U$, $f^{-1}(y_2) \subset V$.

Так как по предположению f замкнуто, то $f(X \setminus U)$ и $f(X \setminus V)$ замкнуты в Y , поэтому $W_1 = Y \setminus f(X \setminus U)$ и $W_2 = Y \setminus f(X \setminus V)$ — открытые подмножества Y , причем $y_1 \in W_1$ и $y_2 \in W_2$. Наконец, осталось проверить, что $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Поэтому предположим, что $y \in W_1 \cap W_2$; тогда $y \notin f(X \setminus U)$ и $y \notin f(X \setminus V)$. Следовательно, $f^{-1}(y) \cap (X \setminus U) = \emptyset$ и $f^{-1}(y) \cap (X \setminus V) = \emptyset$, откуда $f^{-1}(y) \subset U \cap V = \emptyset$, и потому $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. $\square$

Из этой теоремы вытекает следующий результат.

8.12. Следствие. Если X — компактное хаусдорфово G -пространство с конечной группой G , то X/G — компактное хаусдорфово пространство.

Доказательство. Пусть C — замкнутое подмножество X . Тогда $\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot C$, где $\pi: X \rightarrow X/G$ — естественная проекция. Так как действие $g \in G$ на X — гомеоморфизм, то множества $g \cdot C$ замкнуты для всех $g \in G$. Значит, $\pi^{-1}(\pi(C))$ замкнуто, а следовательно, $\pi(C)$, замкнуто, т. е. π — замкнутое отображение. $\square$

Так, например, $\mathbb{R}P^n$ — компактное хаусдорфово пространство.

Чтобы вывести другое следствие теоремы 8.11, рассмотрим пространство X вместе с подмножеством $A \subset X$. Напомним, что X/A обозначает $X/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности на X , при котором $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ или $x, x' \in A$.

8.13. Следствие. Если X — компактное хаусдорфово пространство и A — его замкнутое подмножество, то X/A — компактное хаусдорфово пространство.

Доказательство. Пусть C — замкнутое подмножество X и $p: X \rightarrow X/A$ — естественная проекция. Если $C \cap A = \emptyset$, то $p(C) = C$ замкнуто. Если $C \cap A \neq \emptyset$, то $p(C) = p(C \setminus A) \cup p(C \cap A)$ тоже замкнуто, потому что $p^{-1}(p(C \setminus A) \cup p(C \cap A)) = (C \setminus A) \cup A = C \cup A$. Итак, p — замкнутое отображение. $\square$

Другие ограничения на хаусдорфово пространство, обеспечивающие хаусдорфовость факторпространства, устанавливаются в следующих упражнениях, среди которых содержится и теорема, обратная к 8.11.

8.14. Упражнения. (а) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное сюръективное отображение компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y . Докажите, что подмножество $U \subset Y$ тогда и только тогда открыто, когда $f^{-1}(U)$ открыто в X . (Указание: докажите, что подмножество C тогда и только тогда замкнуто в Y , когда $f^{-1}(C)$ замкнуто в X .) Выведите отсюда, что топология Y совпадает с фактортопологией, определяемой отображением f .

(б) Докажите, что пространство Y тогда и только тогда хаусдорфово, когда диагональ $D = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y: y_1 = y_2\}$ замкнута в $Y \times Y$.

(с) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Докажите, что если Y хаусдорфово, то множество $\{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) = f(x_2)\}$ замкнуто в $X \times X$.

(д) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное, сюръективное и открытое отображение. Докажите, что Y тогда и только тогда хаусдорфово, когда множество $\{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) = f(x_2)\}$ замкнуто в $X \times X$.

(е) Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и Y — факторпространство, определенное отображением $f: X \rightarrow Y$. Докажите, что Y тогда и только тогда хаусдорфово, когда f — замкнутое отображение. Далее докажите, что Y тогда и только тогда хаусдорфово, когда множество $\{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) = f(x_2)\}$ замкнуто в $X \times X$.

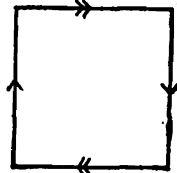


Рис. 8.1

(ф) Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на $S^1 \times I$, при котором $(x, t) \sim (y, s)$ тогда и только тогда, когда $xt = ys$ (здесь имеется в виду, что $S^1 \subset \mathbb{C}$ и $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$). Докажите, что $(S^1 \times I)/\sim$ гомеоморфно единичному диску $D^2: \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{C}: |x| \leq 1\}$ с индуцированной топологией.

(г) Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на замкнутом единичном квадрате $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x, y \leq 1\}$, при котором $(x, y) \sim (x', y')$ тогда и только тогда, когда $(x, y) = (x', y')$, или $\{x, x'\} = \{1, 0\}$ и $y = 1 - y'$ или $\{y, y'\} = \{1, 0\}$ и $x = 1 - x'$ (рис. 8.1). Докажите, что факторпространство $X/\sim$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^2$.

(д) Пусть S_+^n — подмножество $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданное как $S_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: \|x\| = 1, x_{n+1} \geq 0\}$. Докажите, что отображение $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное формулой $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, задает гомеоморфизм S_+^n на замкнутый n -мерный диск $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq 1\}$.

(е) Определим $\sim$ на $\mathbb{R}$ условием: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x - y$ рационально. Покажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности и что пространство $\mathbb{R}/\sim$ с фактортопологией не хаусдорфово.

(ж) Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, U — открытое подмножество X , не совпадающее с X . Докажите, что $^1) U^\infty \cong X/(X \setminus U)$. (Указание: рассмотрите $h: U^\infty \rightarrow X/(X \setminus U)$, такое, что $h(u) = p(u)$ при $u \in U$ и $h(\infty) = p(X \setminus U)$, где p :

¹⁾ См. упр. 7.13 (h). — Прим. ред.

$X \rightarrow X/(X \setminus U)$ — естественная проекция.) Выведите отсюда, что если $x \in X$ (и X — компактное хаусдорфово пространство), то $(X \setminus \{x\})^* \cong X$.

(к) Докажите, что $S^n \cong (\mathbb{R}^n)^* \cong D^n/S^{n-1} \cong I^n/\partial I^n$. (Указание: $S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \cong \mathbb{R}^n \cong D^n \setminus S^{n-1} \cong I^n \setminus \partial I^n$.)

(l) (Обобщение теоремы 8.11.) Пусть Y — факторпространство пространства X , определенное сюръективным отображением $f: X \rightarrow Y$. Предположим, что X — хаусдорфово пространство, f — замкнутое отображение и $f^{-1}(y)$ компактно для всех $y \in Y$. Докажите, что Y — хаусдорфово пространство.

(m) Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и A — его замкнутое подпространство. Предположим далее, что A есть G -пространство с конечной группой G . Определим отношение $\sim$ на X условием, что $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ или обе точки x, x' принадлежат A и $x = g \cdot x'$ для некоторого $g \in G$. Докажите, что $\sim$ — отношение эквивалентности на X и что пространство $X/\sim$ хаусдорфово.

(n) Докажите, что подмножество $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда компактно, когда оно замкнуто и ограничено. (Указание: воспользуйтесь теоремой 7.12, упр. 7.13(b) и теоремой 8.7.)

Глава 9

СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Интуитивно, пространство X связно, если оно состоит из «одного куска», но как топологически истолковать «кусок»? Разумно потребовать, чтобы открытые и замкнутые подмножества «куска» были соответственно открытыми и замкнутыми во всем пространстве X . Тогда по лемме 4.4 нужно ожидать, что «кусок» открыт и замкнут в X . Это приводит к следующему определению.

9.1. Определение. Топологическое пространство X называется *связным*, если единственными подмножествами X , открытыми и замкнутыми одновременно, являются $\emptyset$ и X . Подмножество пространства X связно, если оно связно как пространство с индуцированной топологией.

Равносильное определение связности X состоит в том, что X не является объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств. Этот факт составляет содержание следующей теоремы.

9.2. Теорема. *Пространство X тогда и только тогда связно, когда оно не является объединением двух своих непересекающихся непустых открытых подмножеств.*

Доказательство. Пусть X связно, и предположим, что $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — непересекающиеся открытые подмножества X . Тогда $X \setminus X_1 = X_2$, так что X_1 открыто и замкнуто одновременно, откуда $X_1 = \emptyset$ или $X_1 = X$ и соответственно $X_2 = X$ или $\emptyset$. В обоих случаях X не является объединением двух непересекающихся непустых открытых подмножеств.

Обратно, пусть X не есть объединение двух непе-

ресекающихся непустых открытых подмножеств, и пусть $U \subset X$. Если U открыто и замкнуто одновременно, то $X \setminus U$ также открыто и замкнуто. Но в этом случае X является объединением непересекающихся открытых множеств U и $X \setminus U$, поэтому одно из них должно быть пустым, т. е. $U = \emptyset$ или $U = X$. $\square$

Например, подмножество $S^0 = \{\pm 1\}$ пространства $\mathbb{R}$ несвязно, потому что $\{+1\}$ — одновременно и открытое, и замкнутое подмножество S^0 , или, эквивалентно, S^0 есть объединение своих непересекающихся открытых подмножеств $\{+1\}$ и $\{-1\}$. Примером связного подмножества $\mathbb{R}$ является $[a, b]$, но это нужно еще доказать. Перед доказательством рассмотрим еще несколько примеров. Они показывают, что не следует слишком доверять интуитивным представлениям.

Пусть X — множество вещественных чисел с топологией $\{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$; тогда любое подмножество X связно. Для доказательства рассмотрим произвольное подмножество $S \subset X$. Пусть F — непустое подмножество S , открытое и замкнутое в S . Тогда можно записать F как $U \cap S = C \cap S$, где U открыто в X , а C замкнуто в X , т. е. $U = (-\infty, b)$ для некоторого b , а $C = [a, \infty)$ для некоторого a . Так как $F = U \cap S = C \cap S$, то для любого $x \in S$ выполнены неравенства $x < b$ и $x \geq a$ (если найдется значение $x \geq b$, то $C \cap S \neq U \cap S$; аналогично, если найдется значение $x < a$, то $U \cap S \neq C \cap S$). Итак, $S \subset [a, b]$ и $F = S$, откуда следует, что S связно.

Пусть теперь X — множество вещественных чисел с топологией $\mathcal{F}$, определенной следующим образом: $S \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда для любого $s \in S$ найдется такое $t > s$, что $[s, t) \subset S$. В этом случае единственные непустые связные подмножества X — это точки. Чтобы доказать это, предположим, что T — непустое связное подмножество X и x — точка из T . Подмножество $[x, x + \varepsilon)$ пространства X открыто и замкнуто для всех $\varepsilon > 0$ (упр. 2.6(d)). Таким образом, $[x, x + \varepsilon) \cap T$ — открытое и замкнутое подмножество T . Так как T связно и $[x, x + \varepsilon) \cap T \neq \emptyset$, то $[x, x + \varepsilon) \cap T = T$ для всех $\varepsilon > 0$. Но это возможно только при

$T = \{x\}$. Очевидно, что одноточечные множества связны, и потому они являются единственными связными непустыми подмножествами X .

Перейдем теперь к доказательству того, что подмножество $[a, b]$ пространства $\mathbb{R}$ (с обычной топологией) связно.

9.3. Теорема. *Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связан.*

Доказательство. Предположим, что $[a, b]$ является объединением двух своих непересекающихся открытых подмножеств U и V . Пусть $a \in U$. Заметим, что U и V замкнуты в $[a, b]$ и, так как отрезок $[a, b]$ замкнут в $\mathbb{R}$, замкнуты и в $\mathbb{R}$. Пусть h — верхняя грань множества

$$\{u \in U \mid u < v \text{ для всех } v \in V\}$$

(это множество непусто, ибо оно содержит точку a). Так как U замкнуто, то $h \in U$. Но $(h - \varepsilon, h + \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ для всех $\varepsilon > 0$ (иначе h не было бы верхней гранью), и по лемме 2.7 $h \in V$. Но V замкнуто, так что $h \in V$ и потому $h \in U \cap V$; мы получили противоречие, доказывающее, что отрезок $[a, b]$ связан. $\square$

9.4. Теорема. *Образ связного пространства при непрерывном отображении связан.*

Доказательство. Предположим, что X связно и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное сюръективное отображение. Если U открыто и замкнуто в Y , то $f^{-1}(U)$ открыто и замкнуто в X ; но тогда $f^{-1}(U) = \emptyset$ или X и $U = \emptyset$ или Y . Значит, Y связно. $\square$

9.5. Следствие. *Если X и Y — гомеоморфные топологические пространства, то X связно тогда и только тогда, когда Y связно.*

Из теоремы 9.4 получаем, что окружность S^1 связна, так как имеется непрерывное сюръективное отображение $f: [0, 1] \rightarrow S^1$, заданное формулой $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

Чтобы доказать, что интервалы в $\mathbb{R}$ вида $[a, b)$, $(a, b]$ и (a, b) связны, воспользуемся следующим результатом.

9.6. Теорема. Пусть $\{Y_j; j \in J\}$ — семейство связанных подмножеств пространства X . Если $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$, то $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$ связно.

Доказательство. Пусть U — непустое открытое и замкнутое подмножество Y . Тогда $U \cap Y_i \neq \emptyset$ для некоторого $i \in J$ и $U \cap Y_i$ открыто и замкнуто в Y_i . Но Y_i связно, так что $U \cap Y_i = Y_i$ и, следовательно, $Y_i \subset U$. Множество Y_i пересекается с любым другим Y_j , $j \in J$, и потому U также пересекается с любым Y_j , $j \in J$. Повторяя предыдущее рассуждение, получим, что $Y_j \subset U$ для всех $j \in J$ и потому $U = Y$. $\square$

Связность интервалов $[a, b]$, $(a, b]$ и (a, b) в $\mathbb{R}$ следует из теоремы 9.3, следствия 9.5 и того факта, что

$$[a, b) = \bigcup_{n \geq 1} [a, b - (b - a)/2^n]$$

и т. д. Аналогично получаем, что связны само $\mathbb{R}$, а также интервалы вида $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, (a, ∞) .

Последний результат, который мы докажем здесь, относится к произведениям связанных пространств.

9.7. Теорема. Пусть X и Y — топологические пространства. X и Y тогда и только тогда связны, когда $X \times Y$ связно.

Доказательство. Предположим, что X и Y связны. Так как $X \cong X \times \{y\}$ и $Y \cong \{x\} \times Y$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, то $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times Y$ связны. Далее, $(X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, y)\} \neq \emptyset$, и, таким образом, $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ связно по теореме 9.6. Теперь можно записать $X \times Y$ в виде

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y))$$

для некоторого фиксированного $y \in Y$. Так как $\bigcap_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)) \neq \emptyset$, то $X \times Y$ связно.

Обратно, пусть $X \times Y$ связно. Связность X и Y следует из теоремы 9.4 и того факта, что $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ — непрерывные сюръективные отображения. $\square$

Из этих результатов следует, что $\mathbb{R}^n$ связно. В упражнениях мы увидим, что сфера S^n при $n \geq 1$ и проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ также связны.

9.8. Упражнения. (а) Докажите, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ несвязно. Каковы его связные подмножества?

(б) Докажите, что подмножество $\mathbb{R}$ тогда и только тогда связно, когда оно является интервалом или одной точкой. (Подмножество A пространства $\mathbb{R}$ называется *интервалом*, если A содержит по крайней мере две различные точки и для $a, b \in A, a < b$, из $a < x < b$ следует $x \in A$.)

(с) Пусть X — множество, состоящее не менее чем из двух элементов. Докажите, что (i) в дискретной топологии единственные связные подмножества X — это одноточечные множества; (ii) в антидискретной топологии любое подмножество X связно.

(d) Какие из следующих подмножеств $\mathbb{R}^3$ связны:

$$\{x: \|x\| < 1\}, \quad \{x: \|x\| > 1\}, \quad \{x: \|x\| \neq 1\}?$$

Какие из следующих подмножеств $\mathbb{R}^3$ связны:

$$\{x: x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}, \quad \{x: x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}, \quad \{x: x_1 \neq 1\}?$$

(е) Докажите, что топологическое пространство X тогда и только тогда связно, когда любое непрерывное отображение X в дискретное пространство (состоящее не менее чем из двух точек) является постоянным.

(f) Пусть A — связное подпространство X и $A \subset Y \subset \bar{A}$. Докажите, что Y связно.

(g) Пусть Y_i и $\{Y_j: j \in J\}$ — связные подмножества пространства X . Докажите, что если $Y_0 \cap Y_j \neq \emptyset$ для всех $j \in J$, то $Y = Y_0 \cup \left(\bigcup_{j \in J} Y_j \right)$ связно.

(h) Докажите, что $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ связно при $n \geq 1$. Выведите отсюда, что S^n и $\mathbb{R}P^n$ связны при $n \geq 1$. (Указание: рассмотрите отображение $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$, заданное формулой $f(x) = x/\|x\|$.)

(i) Пусть A и B — подмножества $\mathbb{R}^2$ вида

$$A = \{(x, y): x=0, -1 \leq y \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y): 0 < x \leq 1, y = \cos \pi/x\}.$$

Докажите, что $X = A \cup B$ связно. (Указание. Докажите, что A и B связны. Затем рассмотрите $X = U \cup V$, где U и V открыты и замкнуты в X , и предположите, что некоторая точка из A принадлежит U .)

(j) Пусть A и B — подмножества $\mathbb{R}^2$ вида

$$A = \{(x, y): 1/2 \leq x \leq 1, y=0\},$$

$$B = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, y=x/n, \text{ где } n \in \mathbb{N}\}.$$

Докажите, что $X = A \cup B$ связно.

(k) Первые шаги в алгебраической топологии. Пусть X — топологическое пространство. Определим $H(X)$ как множество всех

непрерывных отображений X в $\mathbb{Z}_2$ (топологическое пространство, состоящее из двух точек $\{0, 1\}$ с дискретной топологией). Если $f, g \in H(X)$, определим сумму $f+g$ формулой

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \pmod{2} \quad (x \in X).$$

Докажите, что $f+g$ непрерывно и $H(X)$ — абелева группа относительно этой операции. Докажите, что X тогда и только тогда связно, когда $H(X)$ изоморфна циклической группе порядка 2. Постройте примеры топологических пространств X_k с группами $H(X_k)$, изоморфными $(\mathbb{Z}_2)^k$.

Глава 10

ЗАДАЧИ О БЛИНАХ

В этой главе мы приведем некоторые довольно легкомысленные приложения результатов предыдущих глав к так называемым «задачам о блинах». Грубо говоря, первая задача такова: допустим, что на тарелке лежат два блина (произвольной формы); нужно показать, что можно разрезать оба блина точно пополам одним взмахом ножа. Вторая задача — показать, что можно разделить блин на четыре равные части двумя перпендикулярными разрезами. Доказательства основаны на некоторой форме *теоремы о промежуточном значении*.

10.1. Лемма. Если $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой произведение $f(0)f(1) \leq 0$, то найдется такая точка $t \in I$, что $f(t) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(t) \neq 0$ для всех $t \in I$ и, в частности, $f(0)f(1) < 0$. Определим функцию $g: I \rightarrow \{\pm 1\} = S^0$ формулой $g(t) = f(t)/|f(t)|$. Очевидно, что она непрерывна и сюръективна (потому что $f(0)f(1) < 0$). Но отрезок I связан, а множество S^0 — нет. Это противоречит тому, что непрерывный образ связанного пространства связан. $\square$

Как следствие получаем *теорему о неподвижной точке*.

10.2. Следствие. Пусть $f: I \rightarrow I$ — непрерывная функция; тогда существует такая точка $t \in I$, что $f(t) = t$.

Доказательство. Если $f(0) = 0$ или $f(1) = 1$, доказывать нечего. Поэтому предположим, что $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$, и рассмотрим функцию $g(t) = f(t) - t$. Она непрерывна и удовлетворяет условию $g(0)g(1) < 0$.

По лемме 10.1 имеем $g(t) = 0$ для некоторого $t \in I$ и, следовательно, $f(t) = t$ для некоторого $t \in I$. $\square$

10.3. Следствие. *Всякое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.*

Доказательство. Пусть $f(t) \neq f(-t)$ для всех $t \in S^1$; определим функцию $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $h(t) = f(t) - f(-t)$. Пусть $e: I \rightarrow S^1$ задано формулой $e(t) = \exp lit$. Очевидно, что функция he непрерывна. Далее, $he(0) = h(1) = f(1) - f(-1)$, $he(1) = h(-1) = f(-1) - f(1) = -he(0)$. Итак, по лемме 10.1 найдется такая точка $t \in I$, что $he(t) = 0$, и потому найдется такая точка $x \in S^1$, что $h(x) = 0$, т. е. $f(x) = f(-x)$. $\square$

Имеется физическая интерпретация следствия 10.3.

10.4. Следствие. *В данный момент времени на данной большой окружности земного шара найдется пара антиподальных точек с одинаковой температурой.*

Антиподальные точки — это диаметрально противоположные точки. Этот результат можно обобщить, см. гл. 20.

Перейдем теперь к точной формулировке первой задачи о блинах.

10.5. Теорема. *Пусть A и B — ограниченные множества на евклидовой плоскости¹⁾. Тогда в этой плоскости найдется прямая, которая делит каждое из множеств на две части равной площади.*

Заметим, что эти множества могут пересекаться, т. е. блины могут налагаться один на другой. Более того, множества могут не быть связными, т. е. блины могут быть разорваны на несколько кусков.

Доказательство. Пусть S — окружность с центром $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, которая содержит внутри себя A и B (она существует, так как A и B ограничены). Изменяя

¹⁾ Предполагается, что множества A и B имеют площадь. — Прим. перев.

масштаб, можно считать, что диаметр S равен 1. Для любого $x \in S$ рассмотрим диаметр D_x окружности S , проходящий через x , и пусть L_t — перпендикуляр к D_x , проходящий через точку на D_x , расстояние которой от x равно t ($t \in I$), см. рис. 10.1.

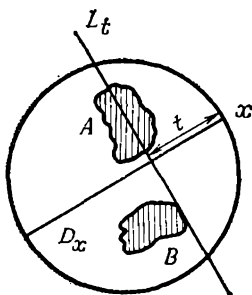


Рис.10.1

Пусть $g_1(t)$ — площадь части A , лежащей с той же стороны от L_t , что и x , а $g_2(t)$ — площадь другой части. Заметим, что $g_1(0) = g_2(1) = 0$. Ясно, что g_1 и g_2 — непрерывные функции, отображающие I в $\mathbb{R}^1$. Определим $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $f(t) = g_2(t) - g_1(t)$. Эта функция непрерывна и удовлетворяет условию $f(0) = -f(1)$, т. е. $f(0)f(1) \leq 0$. По лемме 10.1 найдется такая точка $t \in I$, что $f(t) = 0$. Эта точка может не быть единственной. Так как g_2 и $-g_1$ — невозрастающие функции (это очевидно), то $f = g_2 - g_1$ тоже не возрастает. Таким образом, $f(t) = 0$ либо на целом отрезке $[a, b]$, либо в единственной точке c . В первом случае определим $h_A(x) = (a + b)/2$, а во втором $h_A(x) = c$. Другими словами, перпендикуляр к D_x , проходящий через точку на D_x , расстояние которой от x равно $h_A(x)$, делит площадь A пополам. Заметим, что $h_A(-x) = 1 - h_A(x)$. Заметим также, что $h_A: S^1 \rightarrow I$ — непрерывная функция (обычный прием: слегка подвинуть x и посмотреть, что произойдет с $h_A(x)$).

¹⁾ Доказательство см. в указанной в гл. 30 книге Стиррода и Чинна, с. 101. — Прим. перев.

Определим таким же образом функцию $h_B: S^1 \rightarrow I$, используя B вместо A . Затем определим $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $h(x) = h_A(x) - h_B(x)$. Так как h_A и h_B непрерывны, то и h непрерывна. Далее, $h(x) = -h(-x)$ для всех $x \in S^1$. Но, согласно следствию 10.3, существует такая точка $y \in S^1$, что $h(y) = h(-y)$. Значит, $h(y) = 0$, $h_A(y) = h_B(y)$, и перпендикуляр к D_y , проходящий через точку на D_y , расстояние которой до y равно $h_A(y)$, делит пополам площади A и B . $\square$

Эта теорема обобщается на высшие размерности, т. е. на n ограниченных множеств в $\mathbb{R}^n$. Случай $n=3$ см. в гл. 20.

Приведем теперь точную формулировку второй задачи о блинах.

10.6. Теорема. *Если A — ограниченное множество на плоскости, то существуют две перпендикулярные прямые, разделяющие A на четыре части одинаковой площади.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 10.5, заключим A внутрь окружности S с центром

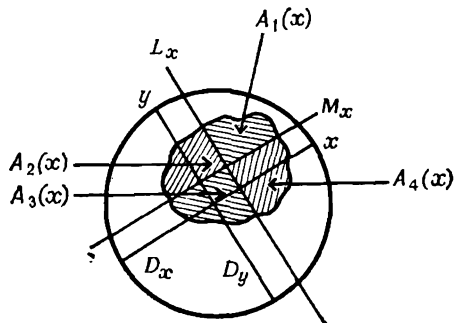


Рис. 10.2

в $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ единичного диаметра. Для любого $x \in S$ пусть L_x — перпендикуляр к D_x , пересекающий D_x на расстоянии $h_A(x)$ от x (в частности, L_x делит площадь A пополам). Пусть y — точка на S , полученная из x поворотом на прямой угол против часовой стрелки (т. е. $y = ix = x \sqrt{-1}$). Пусть теперь M_x — перпенди-

куляр к D_y , пересекающий D_y на расстоянии $h_A(y)$ от $y(M_x)$ тоже делит площадь A пополам). Обозначим четыре части A в порядке обхода против часовой стрелки через $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$, $A_4(x)$ (рис. 10.2). Заметим, что если обозначить площадь $A_i(x)$ через $g_i(x)$, то

$$g_1(x) + g_2(x) = g_3(x) + g_4(x), \quad g_4(x) + g_1(x) = g_2(x) + g_3(x),$$

откуда $g_1(x) = g_3(x)$ и $g_2(x) = g_4(x)$. Конечно, каждая из функций g_1 , g_2 , g_3 и g_4 , отображающих S в $\mathbb{R}$, непрерывна. Пусть f — непрерывная функция, определенная формулой

$$f(x) = g_1(x) - g_2(x) = g_3(x) - g_4(x).$$

Заметим, что $f(ix) = g_1(ix) - g_2(ix) = g_2(x) - g_3(x) = -g_2(x) - g_1(x) = -f(x)$. Применим теперь лемму 10.1 к функции $f\sqrt{e} : I \rightarrow \mathbb{R}$, где $\sqrt{e} : I \rightarrow S^1$ определена формулой $\sqrt{e}(t) = \exp(\pi it/2)$, и получим нужный результат. $\square$

Решения задач о блинах — это теоремы существования; они утверждают, что существуют разрезы нужного вида, но не указывают, как их сделать. Вообще говоря, точное положение разреза найти трудно. В упражнении мы приведем пример, когда это сделать легко.

10.7. Упражнения. (а) Допустим, что на тарелке лежат два блина. Как сделать одним взмахом ножа разрез, делящий оба блина точно пополам, если один блин имеет форму правильного $2n$ -угольника, а другой — правильного $2m$ -угольника?

(б) (Другое доказательство теоремы 10.5.) Используя обозначения теоремы 10.5, покажите сначала, что для $x \in S^1$ найдется прямая L_x , перпендикулярная D_x , которая делит A пополам. Эта прямая разделит B на две части. Пусть $k_1(x)$, $k_2(x)$ — площади соответственно ближайшей к точке x и дальней от нее частей B . Положим $k(x) = k_1(x) - k_2(x)$. Покажите, что $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, и выведите отсюда теорему 10.5.

Глава 11

МНОГООБРАЗИЯ И ПОВЕРХНОСТИ

В этой главе мы рассмотрим класс топологических пространств, локально устроенных как евклидовы пространства.

11.1. Определение. Пусть n — неотрицательное целое число. Хаусдорфово пространство, каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому n -мерному диску $\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < 1\}$, называется n -мерным многообразием. Заметим, что $\mathring{D}^n \cong \mathbb{R}^n$, так что с равным успехом можно потребовать, чтобы каждая точка имела окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$.

Так как $\mathbb{R}^0$ — одна точка, то любое пространство с дискретной топологией является нульмерным многообразием. (Пространство с дискретной топологией хаусдорфово, и для $x \in X$ в качестве открытого множества, содержащего x и гомеоморфного $\mathbb{R}^0$, можно взять $\{x\}$.) Кроме нульмерных простейшими примерами n -мерных многообразий являются, пожалуй, $\mathbb{R}^n$ или само $\mathring{D}^n$. Любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ тоже является n -мерным многообразием: если U открыто в $\mathbb{R}^n$ и $u \in U$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $u \in B_\varepsilon(u) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ и, конечно, $B_\varepsilon(u) \cong \mathring{D}^n$.

Окружность S^1 — одномерное многообразие. Чтобы проверить это, предположим, что $S^1 \subset \mathbb{C}$ задана как $\{\exp 2\pi i t: t \in I\}$. Если $x = \exp 2\pi i \theta \in S^1$, то

$$\begin{aligned} x \in S^1 \setminus \{-x\} &= S^1 \setminus \{\exp 2\pi i (\theta - 1/2)\} = \\ &= \{\exp 2\pi i t: \theta - 1/2 < t < \theta + 1/2\} \cong \\ &\cong (\theta - 1/2, \theta + 1/2) \cong (0, 1) \cong \mathring{D}^1, \end{aligned}$$

так что каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную $\dot{D}^1$. Очевидно, что S^1 хаусдорфово и, следовательно, является одномерным многообразием. Вообще, n -мерная сфера S^n является n -мерным многообразием. Чтобы установить это, введем понятие стереографической проекции, которая является гомеоморфизмом пространства $S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ на $\mathbb{R}^n$. Определим ее следующим образом: для $x \in S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ проведем в $\mathbb{R}^{n+1}$ прямую через точки $(0, \dots, 0, 1)$ и x до пересечения с $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: x_{n+1} = 0\}$. Обозначим точку пересечения через $\varphi(x)$ (рис. 11.1).

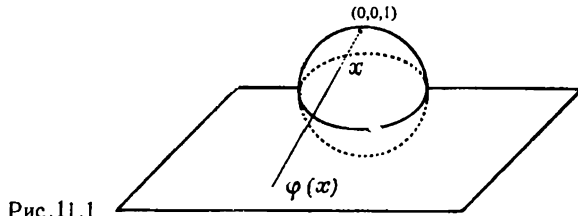


Рис.11.1

Нетрудно усмотреть (интуитивно это понятно), что φ непрерывно и биективно. Легко определить $\psi = \varphi^{-1}$ и убедиться, что оно непрерывно. Нетрудно получить для φ точную формулу: написать уравнения прямой в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящей через $(0, \dots, 0, 1)$ и x , и найти на ней точку, в которой $x_{n+1} = 0$. Читатель может быстро сосчитать, что

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right).$$

Обратное отображение $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ задается формулой

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1).$$

Мы оставляем читателю проверку того, что φ и ψ непрерывны и $\varphi\psi = 1$, $\psi\varphi = 1$.

Отсюда следует, что любая точка $x \in S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ имеет окрестность, а именно само множество $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$, гомеоморфную $\dot{D}^n$. Наконец, точка $(0, \dots, 0, 1)$ имеет окрестность $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$ при отображении φ^1 , заданном фор-

мулой

$$\varphi'(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right).$$

Следовательно, S^n в самом деле есть n -мерное многообразие.

Другой способ удостовериться, что S^n является n -мерным многообразием, состоит в том, что сначала рассматриваются точка $(0, \dots, 0, 1) \in S^n$ и ее окрестность U вида

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n: x_{n+1} > 0\}.$$

Эта окрестность гомеоморфна $\dot{D}^n$ при ортогональной проекции, т. е. отображении $U \rightarrow \dot{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ вида $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$. В общем случае для $x \in S^n$ возьмем в качестве U_x множество

$$U_x = \{y \in S^n: \|x - y\| < \sqrt{2}\},$$

которое, очевидно, является открытой окрестностью точки $x \in S^n$. Ортогональная проекция на n -мерное подпространство в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящее через O ортогонально прямой, соединяющей O и x , дает гомеоморфизм между U_x и $\dot{D}^n$ и показывает, что S^n есть n -мерное многообразие.

Заметим, что по определению n -мерное многообразие хаусдорфово. Можно спросить: а не будет ли хаусдорфовым всякое пространство X , каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$? Как показывает простой пример, ответ отрицателен. Пусть

$$X = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x \leq 2\}$$

с топологией $\mathcal{U}$, для которой $U \in \mathcal{U}$, если $U = \emptyset$, $U = X$ или U — произвольное объединение множеств вида

$$\begin{aligned} &(\alpha, \beta), \quad -1 \leq \alpha < \beta \leq 2, \\ &(\alpha, 0) \cup (\beta, 2], \quad -1 \leq \alpha < 0, \quad 0 \leq \beta < 2. \end{aligned}$$

Заметим, что топология X не совпадает с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$, потому что множества вида $(\beta, 2]$ не открыты в X . Правильное наглядное изобра-

жение X дано на рис. 11.2. Такое изображение объясняется тем, что точка $\{2\}$ сколь угодно близка к точке $\{0\}$ (т. е. любое открытое множество, содержащее $\{2\}$, содержит $(\alpha, 0)$ для некоторого α). Ясно, что X нехаусдорфово, так как любая открытая окрестность точки $\{2\}$ пересекается с каждой открытой

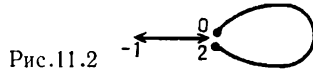


Рис. 11.2

окрестностью точки $\{0\}$. С другой стороны, любая точка из X имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^1$. Если $x \in X$ и $x \neq 2$, это очевидно. Если $x = 2$, то $N = (-1/2, 0) \cup (3/2, 2]$ является окрестностью точки $\{2\}$, гомеоморфной $\dot{D}^1$ при отображении $f: N \rightarrow (-1, 1) = \dot{D}^1$, где

$$f(y) = \begin{cases} 2y & \text{при } -1/2 < y < 0, \\ 4 - 2y & \text{при } 3/2 < y \leq 2. \end{cases}$$

Читатель должен проверить непрерывность и биективность f и непрерывность обратного отображения $g: (-1, 1) \rightarrow N$, заданного формулой

$$g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{при } -1 < x < 0, \\ 2 - x/2 & \text{при } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Итак, условие хаусдорфовости в определении 11.1 отнюдь не является излишним. Оно устраняет пространства вроде изображенного на рис. 11.2, которые наша интуиция отказывается считать локально похожими на евклидовы. Другая возможная причина включения этого условия состоит в том, что нам хочется представлять себе n -мерные многообразия как подпространства некоторого евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ (с большим N), локально устроенные наподобие $\mathbb{R}^n$. В этом случае хаусдорфовость наследуется из объемлющего пространства $\mathbb{R}^N$. И действительно, имеет место теорема, которая утверждает, что если M — какое-нибудь «хорошее» n -мерное многообразие (напри-

мер, компактное), то оно гомеоморфно подпространству некоторого евклидова пространства $\mathbb{R}^N$. В случае компактного многообразия см. упр. 11.2 (f) и (g).

Для получения дальнейших примеров многообразий заметим, что если M есть m -мерное многообразие, а N есть n -мерное многообразие, то произведение $M \times N$ представляет собой $(m+n)$ -мерное многообразие, потому что $\dot{D}^m \times \dot{D}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n} \cong \dot{D}^{m+n}$ и произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово. Значит, $S^1 \times S^1$ — двумерное многообразие, и вообще $\underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n$ есть n -мерное многообразие.

Пространство $\mathbb{R}P^n$ также является n -мерным многообразием. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим отображение $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, переводящее $x \in S^n$ в пару $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$. Пусть U_x — открытая окрестность точки $x \in S^n$, гомеоморфная $\dot{D}^n$, диаметр которой меньше $\sqrt{2}$. В этом случае $p(U_x)$ — открытая окрестность точки $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$, гомеоморфная $\dot{D}^n$. В самом деле, p — непрерывное открытое отображение (теорема 5.12), и если U — достаточно малая область в S^n , то $p|_U: U \rightarrow p(U)$ биективно. Вообще, пусть X — некоторое G -пространство с конечной группой G . Говорят, что G действует на X *свободно*, если $g \cdot x \neq x$ для всех $x \in X$ и всех $g \in G$, $g \neq 1$. Если G свободно действует на X и X — компактное n -мерное многообразие, то таково же и X/G . Обратно, если X/G есть n -мерное многообразие, то X — также n -мерное многообразие. Детали доказательства мы оставляем читателю.

В качестве следующего примера рассмотрим факторпространство M , изображенное на рис. 11.3, которое образовано из восьмиугольной области X при помощи указанных отождествлений сторон. Пусть $p: X \rightarrow M$ — естественная проекция.

Если $x \in M$ — такая точка, что $p^{-1}(x)$ лежит внутри X , то очевидно, что x имеет окрестность, гомеоморфную $\dot{D}^2$; такой окрестностью будет $p(\dot{X})$. Если $x \in M$ — такая точка, что $p^{-1}(x)$ лежит на стороне X , но не содержит вершин, то, как нетрудно видеть,

x снова имеет окрестность, гомеоморфную $\mathring{D}^2$; см. рис. 11.4.

Наконец, если $p^{-1}(x)$ содержит вершины X , то окрестность N_x точки x , гомеоморфная $\mathring{D}^2$, изображена на рис. 11.5 ($p^{-1}(N_x)$ состоит из точек X , находящихся

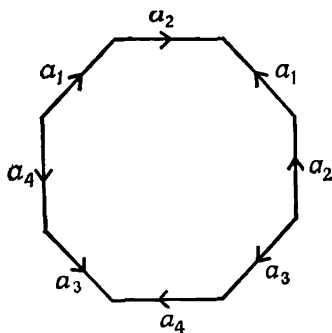


Рис. 11.3

на расстоянии меньше ε от $p^{-1}(x)$ при некотором подходящем $\varepsilon > 0$).

Интуитивно вполне ясно, что M хаусдорфово, и читатель без труда в этом убедится. Для «алгебраически» мыслящего читателя мы дадим следующее доказательство. Пусть A обозначает «край» X . Запишем A в виде $\bigcup_{i=1}^8 A_i \cup Y$, где A_i — замкнутые стороны X , а Y — множество вершин X . Пусть C — замкнутое подмножество X . Тогда

$$\begin{aligned} p^{-1}p(C) &= p^{-1}p\left((C \setminus A) \cup (C \cap Y) \cup \bigcup_{i=1}^8 (C \cap A_i)\right) = \\ &= (C \setminus A) \cup p^{-1}p(C \cap Y) \cup \bigcup_{i=1}^8 p^{-1}p(C \cap A_i) = \\ &= (C \setminus A) \cup \varepsilon Y \cup \bigcup_{i=1}^8 ((C \cap A_i) \cup B_i), \end{aligned}$$

где $\varepsilon Y = Y$, если $C \cap Y$ непусто, и $\varepsilon Y = \emptyset$, если $C \cap Y$ пусто. Через B_i в последнем равенстве обозначены множества, определяемые следующим образом. Если сторона A_i отождествлена при образовании факторпро-

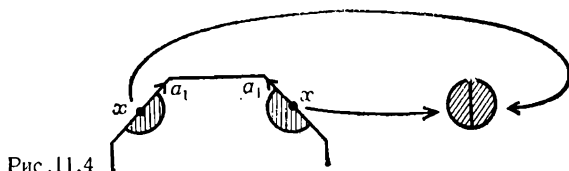


Рис. 11.4

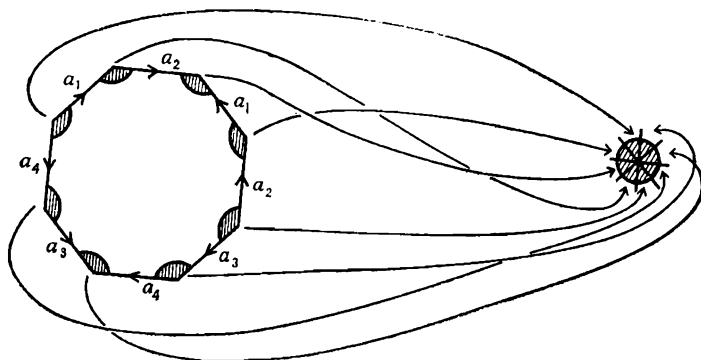


Рис. 11.5

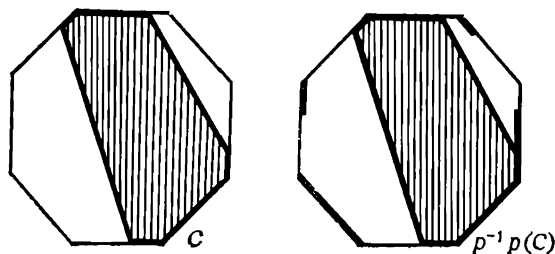


Рис. 11.6

странства M со стороной A_j , то B_i —это множество всех точек из A_j , с которыми отождествлены точки множества $C \cap A_i$. Очевидно, что B_i гомеоморфно $C \cap A_i$ и $p(B_i) = p(C \cap A_i)$. Заметим, что $p^{-1}p(C \cap A_i) \cap A_j = B_i \cup (\varepsilon Y \cap A_j)$. Итак (рис. 11.6),

$$p^{-1}p(C) = C \cup \varepsilon Y \cup \bigcup_{i=1}^{\delta} B_i.$$

Отождествление множеств A_i и A_j является гомеоморфизмом, переводящим $C \cap A_i$ в B_j . Так как $C \cap A_i$ замкнуто в A_i , то B_j замкнуто в A_j , и так как A_j замкнуто в X , то B_j замкнуто в X . Поэтому $p^{-1}p(C)$ замкнуто и $p(C)$ замкнуто по определению фактортопологии. Итак, $p: X \rightarrow M$ — замкнутое отображение. Так как X — компактное хаусдорфово пространство, то по теореме 8.11 M также компактно и хаусдорфово, т. е. является двумерным многообразием.

Отождествления, изображенные на рис. 11.3, можно провести в нашем трехмерном пространстве, как показано на рис. 11.7. Конечный результат называется *кренделем*.

Другой способ реализации многообразия M изображен на рис. 11.8. Сначала нужно выбросить открытый диск, являющийся окрестностью точки многообразия M , полученной склеиванием вершин восьмиугольника X , как показано на рис. 11.8 (а). Затем отождествим стороны, обозначенные через a_1 , и получим (с). Рассмотрим темную область Y на (d). Она гомеоморфна подпространству $\mathbb{R}^2$, изображенному на (е). Отображение f , определенное равенствами

$$f(x, y) = \begin{cases} (x(a + 2y(b - a))/b, y) & \text{при } 0 \leq x \leq b \text{ и } y \leq 0, \\ \left(\frac{(x - b)(1 - a - 2y(b - a))}{1 - b} + a + 2y(b - a), y \right) & \text{при } b \leq x \leq 1 \text{ и } y \leq 0, \\ (xa/b, y) & \text{при } y \geq 0 \end{cases}$$

(где $0 < a \leq b < 1$), является гомеоморфизмом пространств, изображенных на рис. 11.8 (е) и (f). Заметим, что f тождественно на трех сторонах этой области, не имеющих выступа. Итак, мы получили гомеоморфизм пространства Y на себя, тождественный на трех сторонах Y , не содержащих a_2 . Используя этот гомеоморфизм пространства Y и тождественное отображение незатемненной части (d), получим гомеоморфизм между (d) и (g). Итак, (с) и (h) гомеоморфны. Подобным же способом можно убедиться, что гомеоморфны (h) и (k), пользуясь для построения гомеоморфизма темными областями на (i) и (j). Отождествление сторон, обозна-

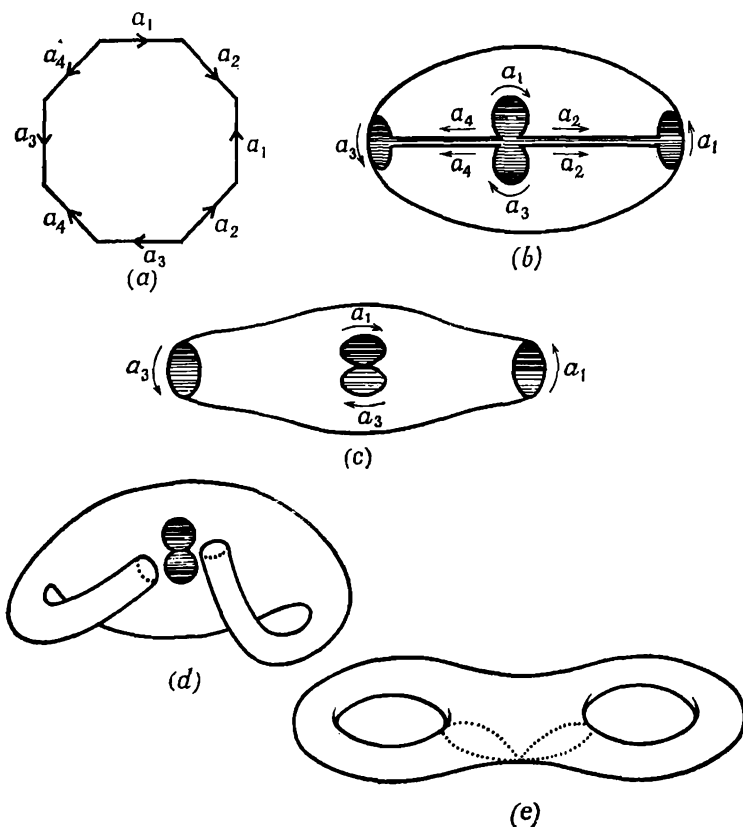


Рис.11.7

ченных на (к) через a_2 , дает (л). Аналогично получаем (м), гомеоморфное исходному пространству (а).

Далее перейдем к рис. 11.9 и после простых растягивающих гомеоморфизмов получим пространство на рис. 11.9(с). Наконец, вклеивая обратно выброшенный ранее диск, получим крендель, изображенный на рис. 11.9(д).

Оказывается, все компактные двумерные многообразия можно получить как факторпространства неко-

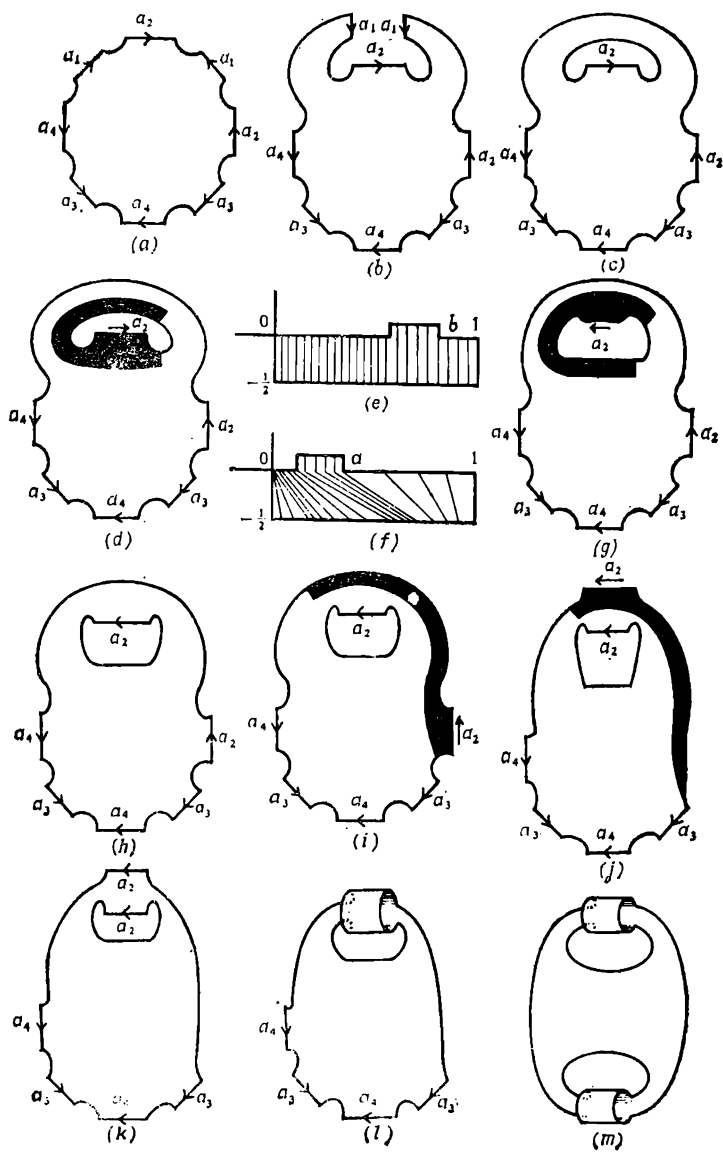


Рис.11.8

торых многоугольных областей. Далее в этой главе мы вернемся к соответствующему построению.

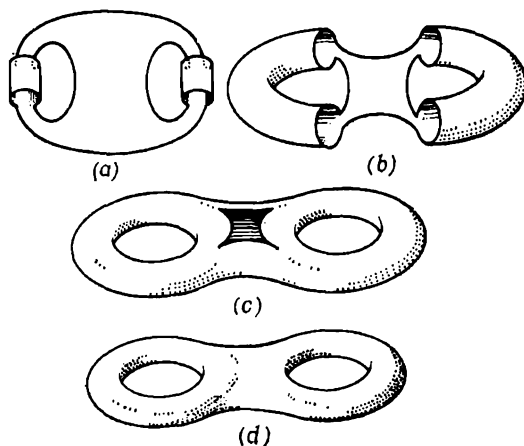


Рис.11.9

11.2. Упражнения. (а) Покажите, что открытое подмножество n -мерного многообразия также является n -мерным многообразием.

(б) Пусть $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности на $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, при котором

$$x \sim y \Leftrightarrow x = (\exp 2\pi i t) y \text{ для некоторого } t \in I.$$

Докажите, что $\mathbb{C}P^n$ есть $2n$ -мерное многообразие. (Заметим, что $\sim$ стягивает окружности в S^{2n+1} в точки; например, множество $\{(\exp 2\pi i t, 0, \dots, 0) : t \in I\}$ представляет одну точку в $\mathbb{C}P^n$.)

(с) Пусть p — натуральное число и $L_p = S^{2n+1}/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности на $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, при котором

$$x \sim y \Leftrightarrow x = (\exp 2\pi i n/p) y, \quad n=0, 1, \dots, p-1.$$

Докажите, что L_p является $(2n+1)$ -мерным многообразием. ($L_p = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Z}_p$ очевидным образом свободно действует на S^{2n+1} .)

(d) Пусть X — некоторое G -пространство, причем группа G конечна и действует на X свободно. Докажите, что если X — компактное n -мерное многообразие, то таково же пространство орбит X/G . Кроме того, докажите, что если X/G — многообразие, то X — тоже многообразие.

(е) Докажите, что если M есть n -мерное многообразие, то каждая точка M имеет окрестность, гомеоморфную замкнутому n -мерному диску D^n .

(f) Пусть M — компактное n -мерное многообразие. Докажите, что M гомеоморфно подпространству некоторого евклидова пространства $\mathbb{R}^N$. (Указание. Так как M компактно, то найдется конечное покрытие $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ многообразия M и гомеоморфизмы $h_i: D_i \rightarrow \dot{D}_n$. Воспользуйтесь упр. 8.14 (j) и (k) для получения гомеоморфизмов $M/(M \setminus D_i) \cong (D_i)^n \cong (\dot{D}_n)^n \cong S^n$. Так как M компактно и хаусдорфово, а $M \setminus D_i$ замкнуто, то проекция $p_i: M \rightarrow M/(M \setminus D_i)$ непрерывна, и мы получаем непрерывные отображения $f_i: M \rightarrow S^n$. Определим $f: M \rightarrow (S^n)^m$ формулой $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$. Наконец, $(S^n)^m \subset (\mathbb{R}^{n+1})^m = \mathbb{R}^{(n+1)m}$.)

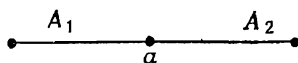
(g) Пусть M есть n -мерное многообразие и D — подпространство M , гомеоморфное $\dot{D}^n$. Так как $\dot{D}^n \cong \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$, то имеется гомеоморфизм $g: D \rightarrow S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$. Определим $f: M \rightarrow S^n$ условием

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \in D, \\ (0, \dots, 0, 1) & \text{при } x \in M \setminus D. \end{cases}$$

Докажите, что f непрерывно. Воспользуйтесь этим результатом для нового доказательства утверждения п. (f).

В первую очередь нас интересуют компактные связные многообразия. Все компактные связные нульмерные многообразия гомеоморфны между собой. Окружность S^1 является компактным связным одномерным многообразием. В действительности S^1 — единственное с точностью до гомеоморфизма компактное связное одномерное многообразие. Доказательство этого факта не очень трудно, и мы дадим его набросок. Первый шаг (вероятно, самый трудный, но вполне наглядный) состоит в использовании компактности для доказательства того, что если M — компактное связное одномерное многообразие, то оно допускает «хорошее» разбиение на конечное число подмножеств, гомеоморфных единичному отрезку I . Если назвать гомеоморфные образы отрезка I *дугами*, а образы точек $\{0, 1\}$ *вершинами* этих дуг, то под «хорошим» разбиением мы понимаем такое, при котором ни одна дуга не пересекает саму себя, а две дуги могут пересекаться только по одной или двум вершинам. (Идея доказательства следующая: (i) покрыть M открытыми окрестностями всех его точек, гомеоморфными $\dot{D}^1 \cong I$, (ii) выделить из этого покрытия конечное, что возможно в силу компактности M , (iii) вписать в полученное конечное покрытие замкну-

тое покрытие множествами, гомеоморфными I , и, наконец, (iv) воспользоваться определением одномерного многообразия и показать, что M имеет «хорошее» разбиение.) Очевидно, что в хорошем разбиении M на дуги и вершины каждая вершина является вершиной точно двух различных дуг, а каждая дуга имеет две различные вершины. (Если некоторая вершина является вершиной только одной или более чем двух дуг, то у нее нет окрестности, гомеоморфной $\dot{D}^1$.) Предположим, что



M состоит более чем из двух дуг. Пусть A_1, A_2 — две дуги в M , пересекающиеся по общей вершине a . Пусть $h_1: A_1 \rightarrow I, h_2: A_2 \rightarrow I$ — гомеоморфизмы, определяющие A_1 и A_2 как дуги. Можно считать, что $h_1(a) = 1$ и $h_2(a) = 0$; иначе нужно взять композицию h_1 и (или) h_2 с гомеоморфизмом $f: I \rightarrow I$, определенным формулой $f(t) = 1 - t$. Определим $g: A_1 \cup A_2 \rightarrow I$ условиями

$$g(x) = \begin{cases} h_1(x)/2 & \text{при } x \in A_1, \\ (1 + h_2(x))/2 & \text{при } x \in A_2. \end{cases}$$

Это отображение определено корректно и, как легко видеть, является биективным. Чтобы установить его непрерывность, заметим сначала, что A_1 и A_2 замкнуты в $A_1 \cup A_2$ и в M . Пусть C — замкнутое подмножество I ; тогда множество

$$g^{-1}(C) = h_1^{-1}([0, 1/2] \cap C) \cup h_2^{-1}([1/2, 1] \cap C)$$

очевидным образом замкнуто в $A_1 \cup A_2$ и, следовательно, g непрерывно. Отсюда легко вытекает, что g — гомеоморфизм. Значит, мы можем заменить дуги A_1, A_2 одной дугой A . Теперь мы имеем разбиение M , в котором одной дугой и одной вершиной меньше. Продолжая этот процесс, мы придем к разбиению M , состоящему из двух дуг и, следовательно, имеющему две вершины. Таким образом, M гомеоморфно двум экземплярам I , склеенным своими концами. Поэтому M гомеоморфно окружности S^1 .

Компактные связные двумерные многообразия называются *поверхностями*. Примерами поверхностей являются сфера S^2 , тор $T = S^1 \times S^1$, вещественная проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ и описанный выше крендель.

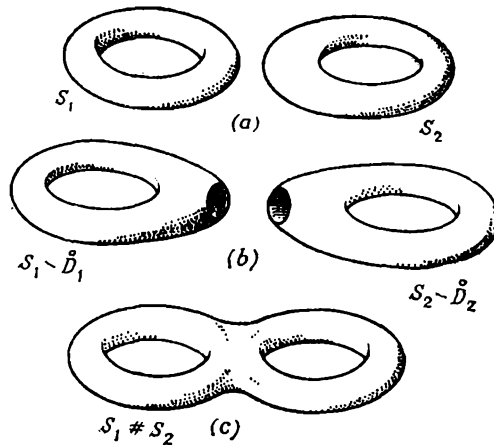


Рис. 11.10

Первые три примера — основные в том смысле, что из них можно получить любую поверхность при помощи «связной суммы». Пусть S_1 и S_2 — две непересекающиеся поверхности; их *связная сумма* $S_1 \# S_2$ получается выбрасыванием малого открытого диска на каждой поверхности и склеиванием по границам образовавшихся дырок (рис. 11.10).

Чтобы получить более строгое определение, выберем сначала $D_1 \subset S_1$ и $D_2 \subset S_2$, гомеоморфные D^2 . Легко видеть, что такие области существуют. В самом деле, пусть x — точка на какой-нибудь поверхности; она имеет окрестность N , для которой существует гомеоморфизм $h: N \rightarrow D^2$. Подпространство $h^{-1}(D_{1/2}^2) \subset N$, где $D_{1/2}^2 \subset D^2$ — замкнутый диск радиуса $1/2$, гомеоморфно D^2 при гомеоморфизме $y \mapsto 2h(y)$.

Итак, пусть $D_1 \subset S_1$ и $D_2 \subset S_2$ — подпространства, гомеоморфные D^2 , и пусть $h_1: D_1 \rightarrow D^2$, $h_2: D_2 \rightarrow D^2$ —

соответствующие гомеоморфизмы. Определим $S_1 \# S_2$, полагая

$$S_1 \# S_2 = ((S_1 \setminus \dot{D}_1) \cup (S_2 \setminus \dot{D}_2)) / \sim,$$

где $\sim$ — отношение эквивалентности, нетривиальное только на $\partial(S_1 \setminus \dot{D}_1) \cup \partial(S_2 \setminus \dot{D}_2) = \partial D_1 \cup \partial D_2$, где оно

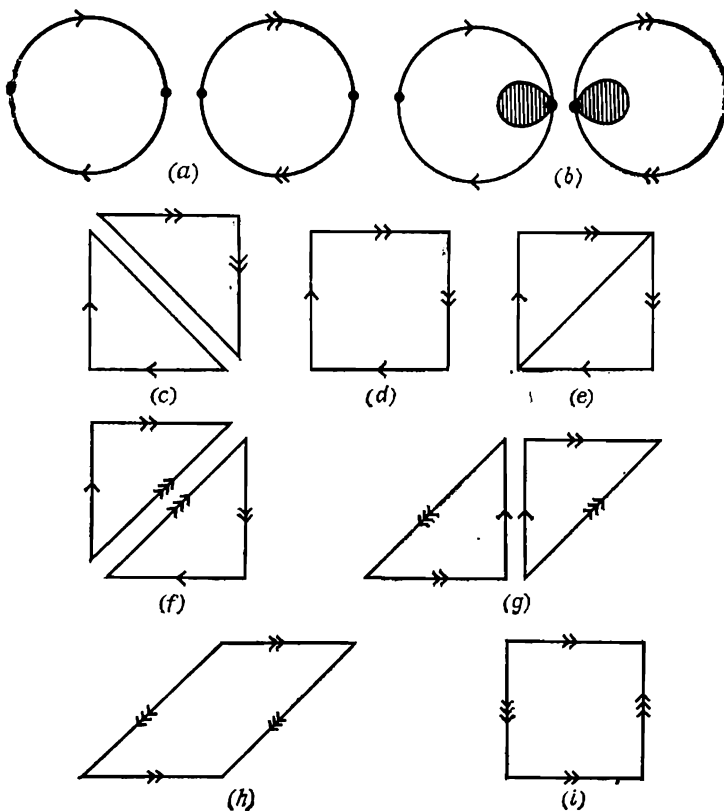


Рис.11.11

задается соотношением $x \sim h_2^{-1}h_1(x)$ при $x \in \partial D_1$. Можно показать, что это определение связной суммы не зависит от выбора дисков D_1, D_2 и гомеоморфизмов h_1, h_2 . Нетрудно видеть, что $S_1 \# S_2$ — поверхность: единст-

венные точки, окрестности которых нужно рассмотреть, это точки из ∂D_1 и ∂D_2 . Детали мы оставляем читателю.

Крендель является связной суммой двух торов (рис. 11.10). Бутылка Клейна—связная сумма двух проективных плоскостей. Это легко следует из гл. 5, а геометрическое доказательство изображено на рис. 11.11. Начнем с двух проективных плоскостей на рис. 11.11 (а), затем выбросим два открытых диска, заштрихованных на (б). Получим пространство, гомеоморфное (с). Склеивание (т. е. образование связной суммы) дает (д). Сделав разрез, как указано на (е), получим факторпространство (f); переместив треугольники, получим (g); отождествление вертикальных сторон дает (h) и простой гомеоморфизм приводит к (i), которое является бутылкой Клейна.

Тот факт, что все поверхности можно получить из сферы S^2 , тора $T = S^1 \times S^1$ и вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ при помощи связных сумм, составляет содержание так называемой *классификационной теоремы для поверхностей*.

11.3. Теорема. *Всякая поверхность S гомеоморфна точно одной из следующих поверхностей:*

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \quad (m \geq 0),$$

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_n \quad (n \geq 1).$$

Доказательство распадается на две части. В первой части доказываемся, что всякая поверхность гомеоморфна хотя бы одной из поверхностей, перечисленных в теореме 11.3. Мы не будем входить во все подробности этой части, а дадим лишь краткий набросок далее в этой же главе. Во второй части доказываемся, что никакие две поверхности, перечисленные в теореме, не гомеоморфны; это мы строго докажем в гл. 26.

Взятие связной суммы с тором часто называют *приклеиванием ручки* (где *ручка*—это тор с выброшенным открытым диском); причина такого названия очевидна (см., например, рис. 11.12 (е), (f)). Иногда мы будем говорить о *приклеивании цилиндра*: в таком

случае из поверхности выбрасывают два открытых диска и приклеивают цилиндр, как показано на рис. 11.12 (а). Важно сделать это правильно. Неправильное приклеивание цилиндра (т. е. обращение стрелки на одной из граничных окружностей) эквивалентно взятию связной суммы с бутылкой Клейна.

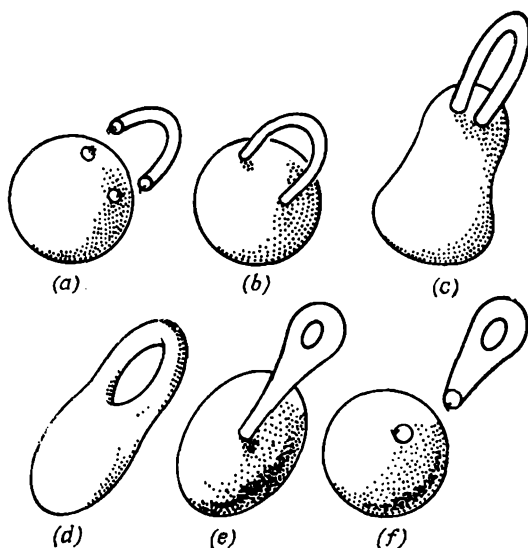


Рис. 11.12 (а) — (с) Приклеивание цилиндра. (d) — (f) Приклеивание ручки

Взятие связной суммы с вещественной проективной плоскостью часто называют *приклеиванием листа Мёбиуса* (рис. 11.13). Это вызвано тем, что проективная плоскость с выброшенным открытым диском есть в точности лист Мёбиуса (см. гл. 5).

Поверхности, полученные взятием связной суммы с $\mathbb{R}P^2$, отличаются тем, что они являются односторонними. Это объясняется тем, что они содержат лист Мёбиуса, который, как мы видели в гл. 5, обладает некоторыми странными свойствами. Назовем поверхность *ориентируемой*, если она не содержит в себе

листа Мёбиуса. Если же поверхность содержит лист Мёбиуса, то она называется *неориентируемой*.

Таким образом, бутылка Клейна и вещественная проективная плоскость — неориентируемые поверхности,

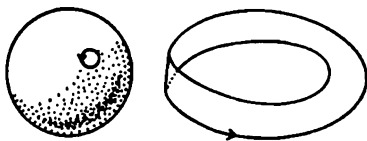


Рис.11.13. Приклеивание листа Мёбиуса

тогда как сфера, тор и крендель ориентируемы. Поверхность

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \quad (m \geq 0),$$

которую мы будем записывать сокращенно в виде $S^2 \# mT$, называется *стандартной ориентируемой поверхностью рода m* . Поверхность

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_n \quad (n \geq 1),$$

сокращенно $S^2 \# n\mathbb{R}P^2$, называется *стандартной неориентируемой поверхностью рода n* .

Возникает естественный вопрос: какие поверхности получатся, если взять связные суммы торов и проективных плоскостей? Другими словами, какой стандартной поверхности гомеоморфна поверхность

$$\underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \# \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_n = \\ = mT \# n\mathbb{R}P^2$$

при $m, n \geq 1$? Такая поверхность, очевидно, неориентируема, и если предположить справедливость теоремы 11.3, то $mT \# n\mathbb{R}P^2$ гомеоморфна поверхности $k\mathbb{R}P^2$ при некотором k . Мы найдем значение k в случае $m=n=1$ и оставим общий случай в качестве (легкого) упражнения.

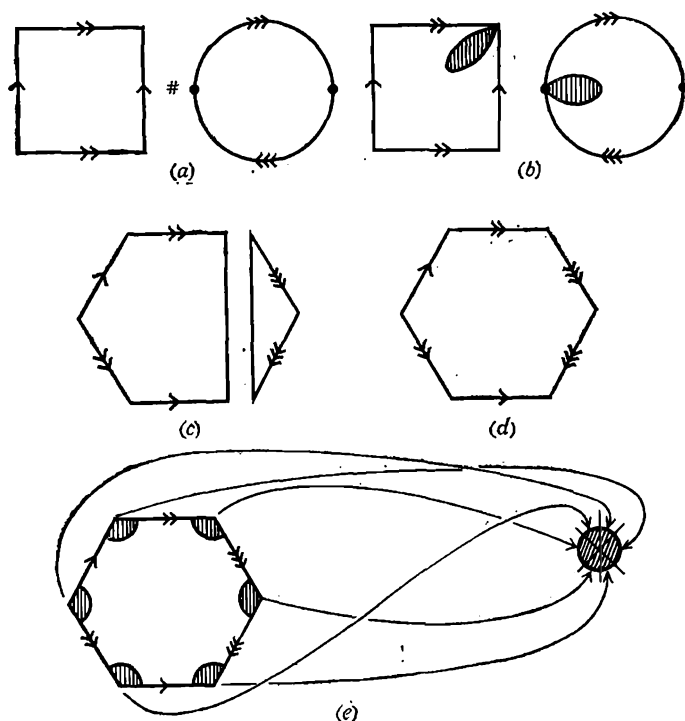


Рис.11.14

11.4. Лемма. $T \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Доказательство. Обозначим $T \# \mathbb{R}P^2$ через S_1 , а $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ через S_2 . Представим сначала S_1 и S_2 в виде факторпространств. S_1 — факторпространство шестиугольной области X (рис. 11.14).

Заметим, что все вершины X отождествляются с одной точкой из S_1 , и найдется окрестность $\dot{D}_1$ этой точки в S_1 , гомеоморфная $\dot{D}^2$ (рис. 11.14 (e)). Выбрасывание этой окрестности (рис. 11.15 (a)) и проведение нужных отождествлений дает пространство рис. 11.15 (c), которое после подходящего гомеоморфизма превращается в (d) на том же рисунке. Опишем последовательность гомеоморфизмов, преобразующих 11.15 (d) в

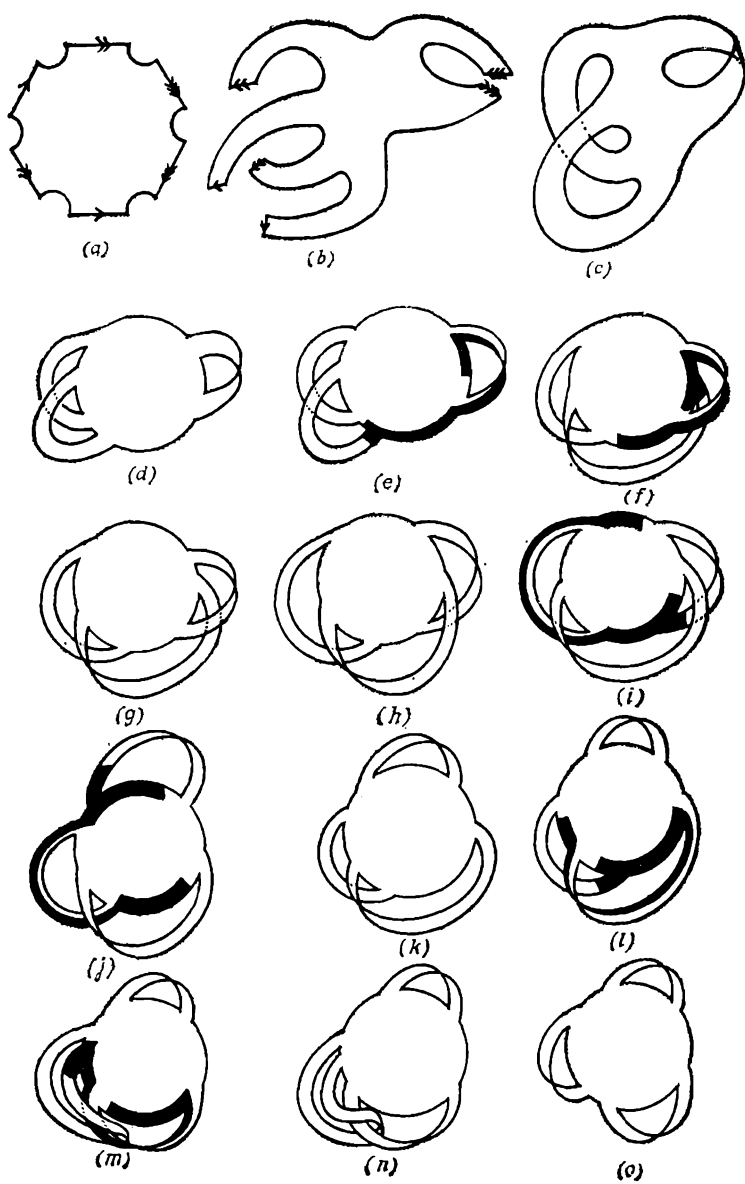


Рис. 11.15

11.15 (о). Чтобы перейти от (d) к (g), рассмотрим темную область на (е) и (f). Используя те же соображения, что и раньше в связи с рис. 11.8, нетрудно описать гомеоморфизм между (d) и (g). То, что (g) и (h) гомеоморфны, ясно. Чтобы убедиться в гомеоморфности (h) и (k), используем темные области на (i) и (j). Аналогично для выявления гомеоморфности (k) и (п) используем темные области на (l) и (m). Наконец, легко видеть, что (п) и (о) гомеоморфны. Таким образом, $S_1 \setminus \dot{D}_1$ гомеоморфно пространству, изображенному на рис. 11.15 (о).

С другой стороны, S_2 имеет представление в виде факторпространства, изображенное на рис. 11.16 (с). Выбрасывание заштрихованной на (d) окрестности $\dot{D}_2$, которая гомеоморфна открытому диску, и проведение необходимых отождествлений даст нам пространство на рис. 11.16 (g). Очевидно существование гомеоморфизма

$$h: S_1 \setminus \dot{D}_1 \cong S_2 \setminus \dot{D}_2.$$

Более того, ясно, что h индуцирует гомеоморфизм

$$\partial(S_1 \setminus \dot{D}_1) \cong \partial(S_2 \setminus \dot{D}_2).$$

Этот гомеоморфизм границ может быть продолжен до гомеоморфизма между D_1 и D_2 . Если $h: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ — этот гомеоморфизм и $h_1: D_1 \cong D^2$, $h_2: D_2 \cong D^2$, запишем $x \in D^2$ в полярных координатах в виде $x = (r, t)$, где $0 \leq r \leq 1$ и $t \in \partial D^2 = S^1$. Определим $H: D_1 \rightarrow D_2$ формулой $H(y) = h_2^{-1}(r, h_2 h h_1^{-1}(t))$, где $h_1(y) = (r, t) \in D^2$. Очевидно, что $H|_{\partial D_1} = h$ и что H — гомеоморфизм. Таким образом,

$$S_1 = (S_1 \setminus \dot{D}_1) \cup D_1 \cong (S_2 \setminus \dot{D}_2) \cup D_2 = S_2. \quad \square$$

Есть и другой способ наглядного представления гомеоморфизма между S_1 и S_2 . Начнем с представления связной суммы $T \# \mathbb{R}P^2$ как ручки (т. е. тора с дыркой) вместе с листом Мёбиуса, который должен быть к ней приклеен. Это представление изображено на рис. 11.17 (a) и очевидным образом гомеоморфно пространству на рис. 11.17 (b). Выполнив гомеоморфизмы (c) — (f), мы придем к рис. 11.17 (g).

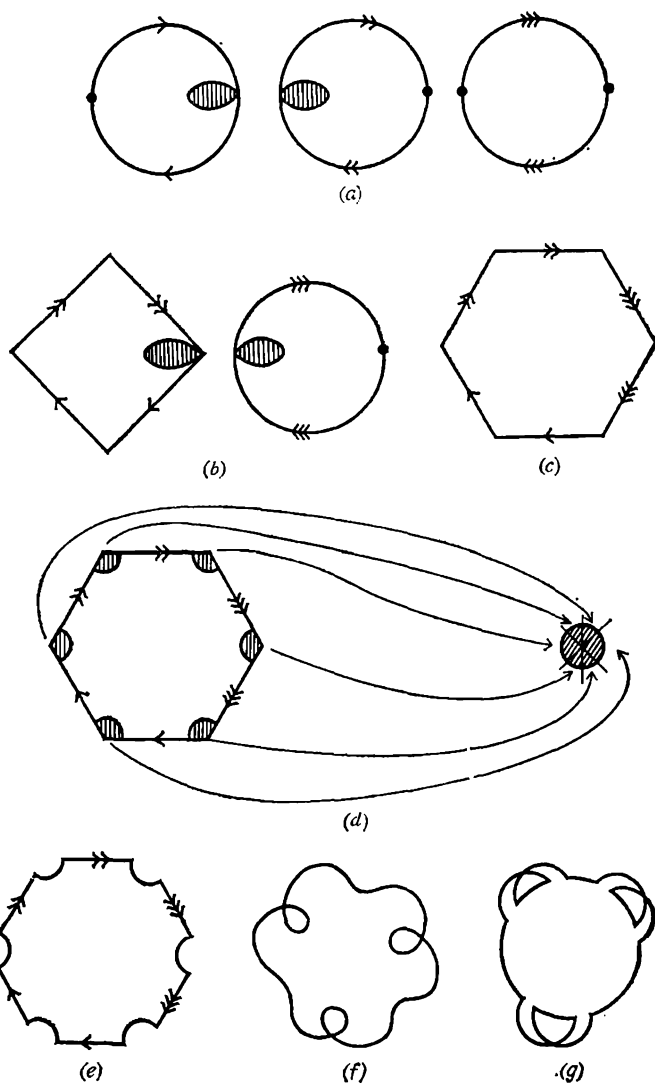


Рис. 11.16

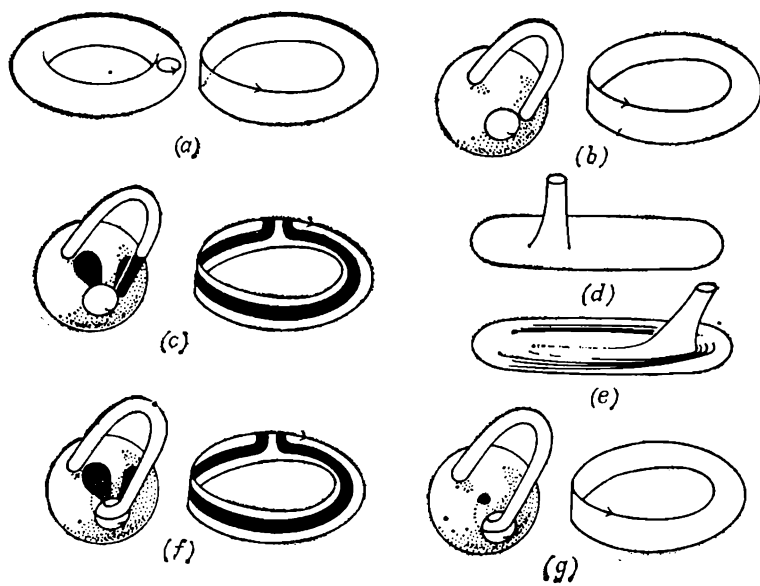


Рис.11.17

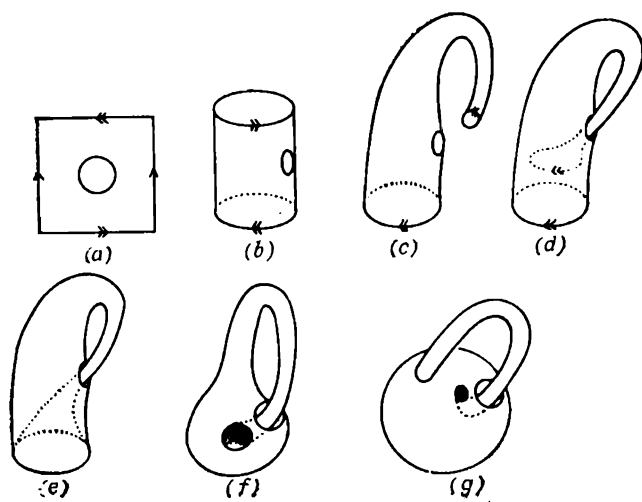


Рис.11.18

Рассмотрим бутылку Клейна с выброшенным диском. Как выглядит это пространство, показано на рис. 11.18.

Сравнивая рис. 11.17 (g) и 11.18 (g), мы видим, что $S_1 \cong K \# \mathbb{R}P^3$, где K — бутылка Клейна. Но $K \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^3$, откуда $S_1 \cong S_2$, что и требовалось показать.

11.5. Упражнения. (а) Пусть S_1, S_2 и S_3 — поверхности. Покажите, что $S_1 \# S_2 \cong S_2 \# S_1$, $(S_1 \# S_2) \# S_3 \cong S_1 \# (S_2 \# S_3)$, $S^2 \# S_1 \cong S_1$. Образует ли группа множество гомеоморфных поверхностей относительно операции связной суммы? Почему нет?

(б) Пусть M_1, M_2 — непересекающиеся связные n -мерные многообразия. Пусть D_1 и D_2 — подмножества M_1 и M_2 соответственно, гомеоморфные D^n при отображениях h_1, h_2 . Определим связную сумму $M_1 \# M_2$ многообразий M_1 и M_2 как факторпространство $((M_1 \setminus D_1) \cup (M_2 \setminus D_2)) / \sim$, где $\sim$ отождествляет точку $x \in \partial(M_1 \setminus D_1)$ с точкой $h_2^{-1}h_1(x)$. Докажите, что $M_1 \# M_2$ есть n -мерное многообразие.

(с) Пусть $S = mT \# n\mathbb{R}P^2$ при $m, n \geq 1$. Какой стандартной поверхности гомеоморфна S ?

(d) Пусть S — поверхность. Докажите, что S гомеоморфна ровно одной из следующих поверхностей: $S^2 \# nT$, $\mathbb{R}P^2 \# nT$, $K \# nT$, где K — бутылка Клейна и $n \geq 0$.

(е) Допустим, что поверхность S является G -пространством, где $G = \mathbb{Z}_{2n+1}$ — циклическая группа нечетного порядка. Докажите, что S/G — поверхность. Заметим, что действие G на S не предполагается свободным.

Дадим теперь набросок первого шага в доказательстве классификационной теоремы для поверхностей. Подпространство некоторого пространства называется *простой замкнутой кривой*, если оно гомеоморфно окружности S^1 . Если C — простая замкнутая кривая на поверхности S , то будем говорить, что C *разделяет* S , если $S \setminus C$ несвязно, т. е. разрезание вдоль C делает S несвязной (рис. 11.19).

Пусть S — поверхность, содержащая простую замкнутую кривую C , не разделяющую S . Можно доказать, что C имеет окрестность, гомеоморфную либо цилиндру, либо листу Мёбиуса (рис. 11.20). Интуитивно это должно быть ясно.

Выбросим теперь из S внутренность этого цилиндра или листа Мёбиуса. В первом случае получатся две дырки, и мы заклеим их двумя дисками, а во втором случае получится одна дырка, которую мы тоже заклеим диском. Мы приходим к поверхности S , получен-

ной из S либо приклеиванием цилиндра (правильным или неправильным), либо приклеиванием листа Мёбиуса. Иначе говоря,

$$S = S_1 \# T, \quad S = S_1 \# K \quad \text{или} \quad S = S_1 \# \mathbb{R}P^2.$$

Рассмотрим теперь S_1 , найдем на ней простую замкнутую кривую, не разделяющую ее (если такая существует), и повторим описанный выше процесс; получим

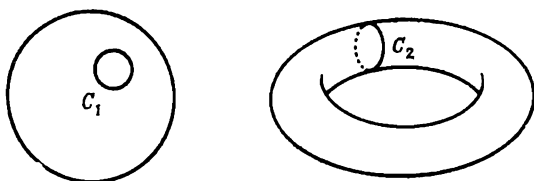


Рис.11.19. C_1 разделяет S^2 , а C_2 не разделяет T

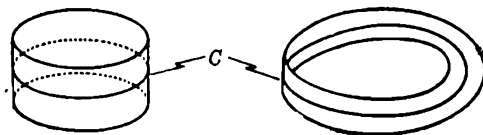


Рис.11.20

поверхность S_2 , для которой $S_1 = S_2 \# T$, $S_1 = S_2 \# K$ или $S_1 = S_2 \# \mathbb{R}P^2$. Продолжая таким же образом далее, после i шагов получим поверхность S_i , для которой

$$S = S_i \# i_1 T \# i_2 K \# i_3 \mathbb{R}P^2,$$

где $i_1 + i_2 + i_3 = i$. Оказывается, после конечного числа шагов (обозначим его через $k \geq 0$) этот процесс обрывается, т. е. всякая простая замкнутая кривая в S_k разделяет S_k . Наконец, воспользуемся теоремой, согласно которой поверхность S_k , которую разделяет любая простая замкнутая кривая на ней, гомеоморфна сфере S^2 .

С точностью до недоказанных утверждений¹⁾ мы

¹⁾ Оба последних утверждения нетрудно доказать при дополнительном предположении, что поверхность S триангулируема.

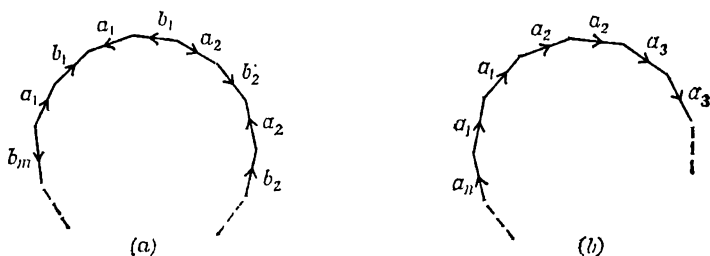


Рис.11.21

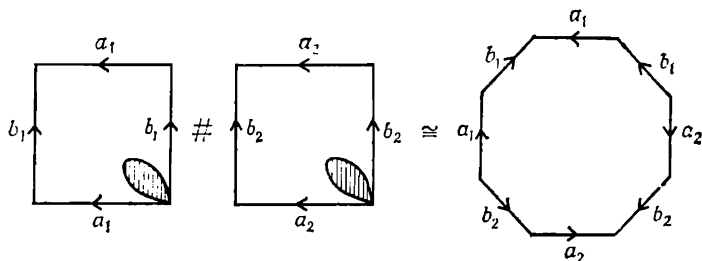


Рис.11.22

видим, что поверхность S гомеоморфна $S^2 \# lT \# mK \# n\mathbb{R}P^2$ для некоторых $l, m, n \geq 0$ ($l + m + n = k$). При помощи леммы 11.4 легко установить, что поверхность $S^2 \# lT \# mK \# n\mathbb{R}P^2$ гомеоморфна

$$\begin{aligned} S^2 \# lT & \quad \text{при } m + n = 0, \\ S^2 \# (2l + 2m + n)\mathbb{R}P^2 & \quad \text{при } m + n > 0. \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство классификационной теоремы, осталось показать, что никакие две поверхности, перечисленные в теореме 11.3, не гомеоморфны. Это будет сделано в гл. 26.

11.6. Упражнения. (а) Покажите, что на торе T найдутся две различные (но пересекающиеся) простые замкнутые кривые C_1, C_2 , такие, что $T \setminus (C_1 \cup C_2)$ связно.

Поскольку строгое доказательство этого факта довольно утомительно, триангулируемость поверхностей обычно предполагается с самого начала (см., например, Спеньер Э., Алгебраическая топология. Пер. с англ. — М.: Мир, 1971, с. 195, или Масси У., Столлингс Дж., Алгебраическая топология. Введение. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977, с. 30). — *Прим. ред.*

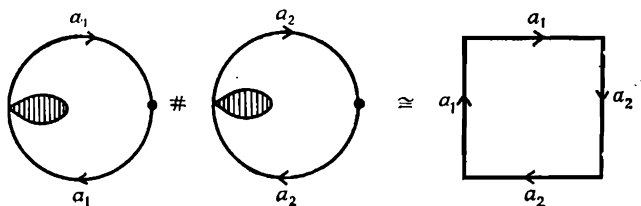


Рис.11.23

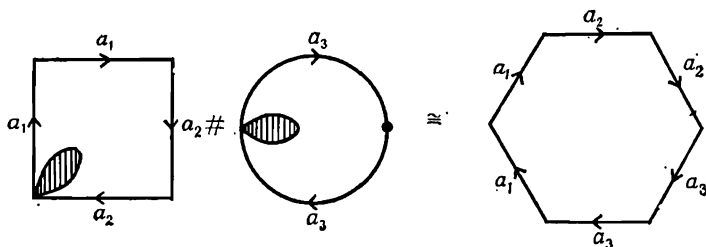


Рис.11.24

(b) Покажите, что на торе T не существует трех различных простых замкнутых кривых C_1, C_2, C_3 , таких, что $T \setminus (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$ связно.

(c) Обобщите (a) и (b) на другие поверхности.

Мы закончим эту главу результатом, уже упоминавшимся ранее: всякую поверхность можно представить в виде факторпространства некоторой многоугольной области в $\mathbb{R}^2$.

11.7. Теорема. Если S — ориентируемая поверхность рода $m \geq 1$, то S является факторпространством $4m$ -угольника с отождествлениями, указанными на рис. 11.21 (a).

Если S — неориентируемая поверхность рода $n \geq 1$, то S является факторпространством $2n$ -угольника с отождествлениями, указанными на рис. 11.21 (b).

Чтобы доказать этот результат, достаточно показать, что mT и $n\mathbb{R}P^2$ имеют указанный вид. Мы просто иллюстрируем случай $m \leq 2, n \leq 3$. Как показано на рис. 11.22, $T \# T$ имеет нужный вид. Ясно, как про-

должить это построение, чтобы получить результат в ориентируемом случае. Неориентируемому случаю соответствуют рис. 11.23 для $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ и рис. 11.24 для $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$. Снова должно быть ясно, как продолжить построение.

11.8. Упражнения. (а) n -мерным многообразием с краем называется хаусдорфово пространство M , каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную либо $\mathbb{R}^n$, либо его верхнему полупространству, т. е. множеству $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_n \geq 0\}$. Множество всех точек M , имеющих окрестности, гомеоморфные верхнему полупространству, но не имеющих окрестностей, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$, называется *краем* многообразия M . Докажите, что край n -мерного многообразия с краем является $(n-1)$ -мерным многообразием (без края).

(б) Компактное связное двумерное многообразие с краем называется *поверхностью с краем*. Докажите, что край поверхности с краем является объединением конечного числа непересекающихся окружностей. Выведите отсюда, что приклеиванием конечного числа дисков можно из каждой поверхности с краем получить поверхность без края.

(с) Поверхность с краем называется *ориентируемой*, если она не содержит листа Мёбиуса. Докажите, что поверхность с краем ориентируема тогда и только тогда, когда ориентируема соответствующая ей поверхность без края (см. (б) выше).

Глава 12

ПУТИ И ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В гл. 9 мы изучали связность. В этой главе мы изучим похожее, но все же несколько отличающееся от прежнего понятие связности: линейную связность. Сначала введем необходимое для этого понятие пути. *Путь* в пространстве X называется непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow X$. Тогда $f(0)$ называется *началом*, а $f(1)$ — *концом* пути. Говорят, что f соединяет $f(0)$ и $f(1)$ и что f — путь из $f(0)$ в $f(1)$.

Заметим, что путь — это именно отображение f , а не его образ $f([0, 1])$, который называется *кривой* в X .

Обычно мы представляем себе $t \in [0, 1]$ как время, и тогда $f(t)$ — положение в момент t .

Простейший пример пути — постоянный путь $e_x: [0, 1] \rightarrow X$, определенный равенством $e_x(t) = x$ для всех $t \in [0, 1]$, где x — некоторая точка из X . На этом пути мы находимся все время в одной точке $x \in X$.

Имеется два простых, но важных способа получения новых путей из старых. Они приведены в следующей лемме. Первый сопоставляет пути f путь $\bar{f}$, получаемый прохождением пути f в обратном направлении. Второй соединяет два пути f и g (если это возможно), чтобы получить новый путь $f * g$.

12.1. Лемма. (а) Если f — путь в X , а $\bar{f}$ определено равенством $\bar{f}(t) = f(1-t)$, то $\bar{f}$ — также путь в X .

(б) Если f и g — два пути в X , причем конец f совпадает с началом g , то функция $f * g: [0, 1] \rightarrow X$, определенная равенствами

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t-1) & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

является путем в X .

Доказательство. Часть (а) очевидна, а часть (b) получается из следующего результата, называемого *леммой о склейке*. $\square$

12.2. Лемма. Пусть W, X — топологические пространства, причем $W = A \cup B$, где A и B замкнуты в W . Если $f: A \rightarrow X$ и $g: B \rightarrow X$ — непрерывные отображения, причем $f(w) = g(w)$ для всех $w \in A \cap B$, то отображение $h: W \rightarrow X$, определенное равенствами

$$h(w) = \begin{cases} f(w) & \text{при } w \in A, \\ g(w) & \text{при } w \in B, \end{cases}$$

непрерывно.

Доказательство. Заметим, что h определено корректно. Пусть C — замкнутое подмножество X ; тогда

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap (A \cup B) = \\ &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Так как f непрерывно, то $f^{-1}(C)$ замкнуто в A и, следовательно, в W , поскольку A замкнуто в W . Аналогично $g^{-1}(C)$ замкнуто в W . Следовательно, $h^{-1}(C)$ замкнуто в W , и h непрерывно. $\square$

12.3. Определение. Пространство X называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ найдется соединяющий их путь в X .

Заметим, что, в силу леммы 12.1, достаточно фиксировать $x_0 \in X$ и потребовать, чтобы для любого $x \in X$ нашелся путь в X , соединяющий x_0 с x .

Например, $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией линейно связно, так как для любой пары точек $a, b \in \mathbb{R}^n$ отображение $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $f(t) = tb + (1-t)a$, является путем из a в b . Вообще, всякое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ линейно связно. Подмножество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми точками $a, b \in E$ оно содержит множество $\{tb + (1-t)a: 0 \leq t \leq 1\}$, т. е. E выпукло, если прямолинейный отрезок, соединяющий любую пару точек из E , сам лежит в E . Примеры выпуклого и невыпуклого подмножеств $\mathbb{R}^2$ см. на рис. 12.1.

В частности, всякий интервал в $\mathbb{R}^1$ линейно связан. Несколько следующих результатов 12.4—12.7 аналогичны результатам 9.4—9.7.



Рис.12.1. Слева — выпуклое множество, справа — невыпуклое множество

12.4. Теорема. *Образ линейно связанного пространства при непрерывном отображении линейно связан.*

Доказательство. Пусть X линейно связано и $g: X \rightarrow Y$ — непрерывное сюръективное отображение. Если a, b — две точки из Y , то найдутся точки $a', b' \in X$, для которых $g(a') = a$ и $g(b') = b$. Так как X линейно связано, найдется путь f из a' в b' . Но тогда gf — путь из a в b . $\square$

12.5. Следствие. *Если X и Y — гомеоморфные топологические пространства, то X линейно связано тогда и только тогда, когда Y линейно связано.*

Из теоремы следует, что окружность S^1 линейно связна. Пользуясь этим, можно показать, что линейно связны $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, S^n и $\mathbb{R}P^n$ при $n \geq 1$ (для $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ это следует из того, что любые две его точки лежат на некоторой окружности, не проходящей через 0; для S^n и $\mathbb{R}P^n$ — из того, что они являются непрерывными образами $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$).

11.6. Теорема. *Пусть $\{Y_j: j \in J\}$ — семейство линейно связанных подмножеств пространства X . Если $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$, то $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$ линейно связано.*

Доказательство. Пусть $a, b \in Y$; тогда $a \in Y_k$ и $b \in Y_l$ для некоторых $k, l \in J$. Пусть c — любая точка из $\bigcap_{j \in J} Y_j$. Так как Y_k линейно связано и $a, c \in Y_k$, то найдется путь f из a в c . Аналогично, найдется путь

g из c в b . Путем, соединяющим a с b , будет тогда $h = f * g$, т. е.

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t-1) & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

Этот результат дает другой способ доказательства линейной связности пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (а следовательно, S^n и $\mathbb{R}P^n$) при $n \geq 1$.

12.7. Теорема. *Топологические пространства X и Y тогда и только тогда линейно связны, когда $X \times Y$ линейно связно.*

Доказательство, совпадающее с доказательством теоремы 9.7 (с заменой связности на линейную связность), мы оставляем читателю.

Предыдущие результаты не должны вводить читателя в заблуждение, будто между связностью и линейной связностью нет никакой разницы. Как показывает следующая теорема, это не так.

12.8. Теорема. *Всякое линейно связанное пространство связно. Однако не всякое связанное пространство линейно связно.*

Доказательство. Пусть X — линейно связанное пространство. Докажем, что X связно. Пусть $X = U \cup V$ с открытыми и непустыми U, V . Так как X линейно связно и U, V непусты, то найдется путь $f: [0, 1] \rightarrow X$, для которого $f(0) \in U$ и $f(1) \in V$. Отрезок $[0, 1]$ связан, поэтому $f([0, 1])$ связно, и, значит, $U \cap f([0, 1])$ и $V \cap f([0, 1])$ должны пересекаться. Но тогда U и V пересекаются, так что X связно. $\square$

Чтобы показать, что не все связанные пространства линейно связны, приведем пример, известный как «блоха и гребенка» (рис. 12.2). Рассмотрим подмножество $X \subset \mathbb{C}$, где $X = A \cup B$, причем

$$A = \{i\} \text{ (блоха),}$$

$$B = [0, 1] \cup \{1/n + yi : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\} \text{ (гребенка).}$$

Мы утверждаем, что X связно, но не линейно связно. Чтобы доказать, что X связно, заметим сначала, что B линейно связно (применяем теорему 12.6 к семейству

множеств $B_n = [0, 1] \cup \{1/n + yi: 0 \leq y \leq 1\}$ при $n \in \mathbb{N}$ и потому связно. Пусть U — открытое и замкнутое подмножество X . Можно считать, что $A \subset U$ (иначе дополнение к U было бы открытым и замкнутым подмножеством X , содержащим A). Так как U открыто

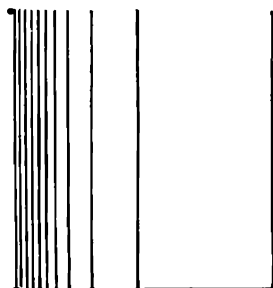


Рис.12.2. Блоха и гребенка

и $i \in U$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\{x: |i - x| < \varepsilon\} \cap X \subset U$. Существует натуральное n , для которого $1/n + i \in U$; в частности, $U \cap B \neq \emptyset$. Но B связно и $U \cap B$ — непустое открытое и замкнутое подмножество B . Таким образом, $U \cap B = B$, т. е. $B \subset U$. Но $X = A \cup B$ и $A \subset U$, поэтому $U = X$ и X связно. (В сущности, мы доказали, что $B \subset X \subset \bar{B}$, и связность X следует из упр. 9.8 (f).)

Чтобы доказать, что X не является линейно связным, мы покажем, что единственный путь в X с началом в точке $i \in X$ — это постоянный путь. Пусть f — путь в X с началом в точке i . Так как эта точка замкнута в X , то $f^{-1}(i)$ замкнуто в $[0, 1]$ и, более того, $f^{-1}(i) \neq \emptyset$, так как $0 \in f^{-1}(i)$. Пусть U — открытое подмножество X , определенное как

$$U = X \cap \{z \in \mathbb{C}: |z - i| < 1/2\}.$$

Если $t_0 \in f^{-1}(i)$, то, в силу непрерывности f , найдется такое $\varepsilon > 0$, что $f(t) \in U$ при $|t - t_0| < \varepsilon$. Мы утверждаем, что $f((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]) = i$. Для доказательства предположим, что $|t_1 - t_0| < \varepsilon$ и $f(t_1) \in B$.

Множество $U \cap B$ является объединением непересекающихся интервалов, высекаемых из него прямыми

$x = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Всякий такой интервал открыт в U , так как совпадает с множеством $\{x + yi: 1/(n+1) < x < 1/(n-1)\} \cap U$, и замкнут в U , поскольку равен $\{1/n + yi: 0 \leq y \leq 1\} \cap U$. В частности, интервал V , содержащий $f(t_1)$, открыт и замкнут в U , и его пересечение с множеством $W = f((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]) \subset U$ открыто и замкнуто в W , а так как W связно и содержит $i = f(t_0) \notin V$, то $V \cap W = \emptyset$, что противоречит предположению $f(t_1) \in V$. Этим доказано, что если $t_0 \in f^{-1}(i)$, то $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subset f^{-1}(i)$, и потому $f^{-1}(i)$ открыто. Но $f^{-1}(i)$ также и замкнуто, а отрезок $[0, 1]$ связан, поэтому $f^{-1}(i) = [0, 1]$, т. е. $f([0, 1]) = i$. Следовательно, не существует пути, соединяющего $i \in X$ с какой-либо другой точкой из $B \subset X$. Итак, X не является линейно связным. $\square$

Имеется много других (похожих) примеров связных, но не линейно связных пространств¹⁾; см. упражнения ниже.

Последний результат, который мы докажем в этой главе, относится к открытым связным подмножествам $\mathbb{R}^n$.

12.9. Теорема. *Всякое непустое открытое связное подмножество E пространства $\mathbb{R}^n$ линейно связно.*

Доказательство. Пусть $p \in E$, и пусть F — подмножество E , состоящее из всех точек, которые можно соединить с p путем, лежащим в E . Мы утверждаем, что F открыто. Чтобы доказать это, возьмем $q \in F \subset E$. Так как E открыто, найдется открытый n -мерный диск $D \subset E$ с центром в точке q , т. е.

$$q \in D = \{x: \|q - x\| < \varepsilon\} \subset E$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Открытый диск D линейно связан (он гомеоморфен $\mathbb{R}^n$), поэтому любую его точку можно соединить с q путем, лежащим в D . Следовательно, любую точку из D можно соединить с p путем, лежащим в E , и потому $q \in D \subset F$. Итак, F открыто.

¹⁾ Связным, но не линейно связным может быть пространство компактной группы. Типичным примером такой группы служит 2-адический соленоид (см. указанную в гл. 30 книгу Стиррода и Эйленберга, с. 286). — *Прим. ред.*

Мы также утверждаем, что F замкнуто. Чтобы установить это, положим $G = E \setminus F$, т. е. G состоит из тех точек множества E , которые нельзя соединить с p путем, лежащим в E . Рассуждения, аналогичные проведенным выше, позволяют показать, что G открыто, и потому F замкнуто. Итак, подмножество F непусто, открыто и замкнуто в E ; но E связно, поэтому $E = F$ и, значит, E линейно связно.

12.10. Упражнения. (а) Докажите, что любое пространство с антидискретной топологией линейно связно.

(б) Какие из следующих подмножеств $\mathbb{O}$ линейно связны:

$$\{z: |z| \neq 1\}, \quad \{z: |z| \geq 1\}, \quad \{z: z^2 \text{ вещественно}\}?$$

(с) Докажите лемму 12.2 в случае, когда A и B открыты в W .

(д) Пусть $X = A \cup B$ — подпространство $\mathbb{R}^2$, где

$$A = \{(x, y): x = 0, -1 \leq y \leq 1\}, \\ B = \{(x, y): 0 < x \leq 1, y = \cos \pi/x\}.$$

Покажите, что X связно, но не линейно связно.

(е) Пусть $X = A \cup B$ — подпространство $\mathbb{R}^2$, где

$$A = \{(x, y): x = 0, -1 \leq y \leq 1\}, \\ B = \{(x, y): 0 < x \leq 1, y = \sin 1/x\}.$$

Покажите, что X связно, но не линейно связно.

(f) Рассмотрим следующие подмножества $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, y = x/n \text{ при } n \in \mathbb{N}\}, \\ B = \{(x, y): 1/2 \leq x \leq 1, y = 0\}.$$

Докажите, что $A \cup B$ связно, но не линейно связно.

(g) Допустим, что A — линейно связное подмножество пространства X и $\{A_j: j \in J\}$ — семейство линейно связных подмножеств X , каждое из которых пересекается с A . Докажите, что $A \cup \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j \right\}$ линейно связно.

(h) Пусть $S^n = S_+^n \cup S_-^n$, где

$$S_+^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: \|x\| = 1, x_{n+1} \geq 0\}, \\ S_-^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: \|x\| = 1, x_{n+1} \leq 0\}.$$

Используя упр. 8.14 (h), докажите, что S^n линейно связно при $n > 0$.

(i) Пусть $\sim$ — отношение на множестве точек пространства X , при котором $x \sim y$ тогда и только тогда, когда найдется путь в X , соединяющий x и y . Докажите, что $\sim$ — отношение эквивалентности и что X тогда и только тогда линейно связно, когда факторпространство $X/\sim$ состоит из одной точки.

(j) Открытая окрестность точки $x \in X$ — это открытое множество U , содержащее эту точку. Пространство X называется *локально линейно связным*, если для любой точки $x \in X$ любая ее

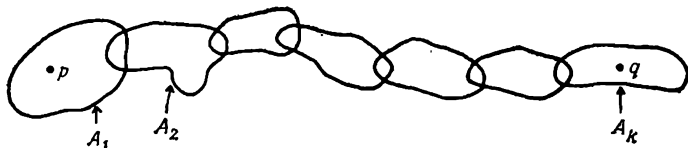


Рис.12.3

открытая окрестность содержит линейно связную открытую окрестность x . Докажите, что если X локально линейно связно и $U \subset X$ открыто, то U локально линейно связно. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ локально линейно связно (и потому любое его открытое подмножество локально линейно связно). Докажите, что если X связно и локально линейно связно, то оно линейно связно (тем самым заново будет доказана теорема 12.9).

(к) Пусть $p, q \in X$. Говорят, что подмножества $A_1, A_2, \dots, A_k$ пространства X образуют *простую цепь*, соединяющую p и q , если $p \in A_1, q \in A_k, A_i \cap A_j = \emptyset$ при $|i-j| > 1$ и $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ при $i=1, 2, \dots, k-1$ (рис. 12.3). Докажите, что если X связно и если $\{U_j: j \in J\}$ — открытое покрытие X , то любую пару точек из X можно соединить простой цепью, состоящей из элементов этого покрытия. (Указание: для $p \in X$ рассмотрите множество точек из X , которые можно соединить с p некоторой простой цепью, состоящей из элементов покрытия $\{U_j: j \in J\}$.)

(л) Используя (к), получите еще одно доказательство теоремы 12.9.

(м) Докажите, что связное n -мерное многообразие линейно связно.

(н) Докажите, что n -мерное многообразие локально линейно связно.

(о) Докажите, что пространство $Y \subset \mathbb{R}^2$, заданное как $Y = A \cup B \cup C$, где

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}, \\ B &= \{(x, y): -1 \leq x \leq 0, y = 0\}, \\ C &= \{(x, y): 0 < x \leq 1, y = (1/2) \sin \pi/x\}, \end{aligned}$$

линейно связно, но не локально линейно связно.

(р) Пусть $Z = Y \cup D \subset \mathbb{R}^2$, где Y — пространство из (о) и D — окружность $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\}$. Докажите, что Z линейно связно, но не локально линейно связно.

Закончим эту главу примером необычного пути. Этот путь $f: I \rightarrow I^2$ сюръективен. О таких примерах

говорят как о «кривых, заполняющих пространство». Впервые они были получены Дж. Пеано около 1890 г. Путь f определен как предел путей $f_n: I \rightarrow I^2$. Первые

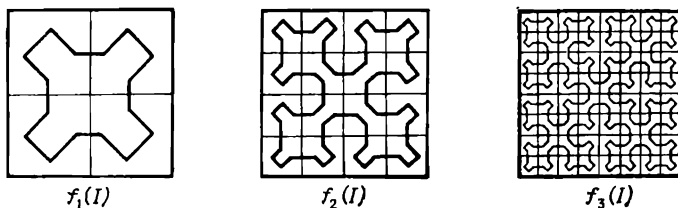


Рис.12.4

три из них изображены на рис. 12.4. Читатель без труда наглядно представит себе n -й шаг. После n шагов любая точка квадрата I^2 лежит на расстоянии не более $(1/2)^n$ от некоторой точки образа $f_n(I)$. В пределе получаем непрерывное сюръективное отображение $f: I \rightarrow I^2$. Заметим, что на любом шаге инъективность непрерывного отображения $f_n: I \rightarrow I^2$ нарушается только в точках $\{0\}$ и $\{1\}$ из I . В действительности I и $f_n(I)$ гомеоморфны. В пределе это, конечно, неверно.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ 12. ТЕОРЕМА ЖОРДАНА

12А.1. Определение. Простая замкнутая кривая C — это гомеоморфный образ окружности. Компонента — это максимальное связанное подпространство.

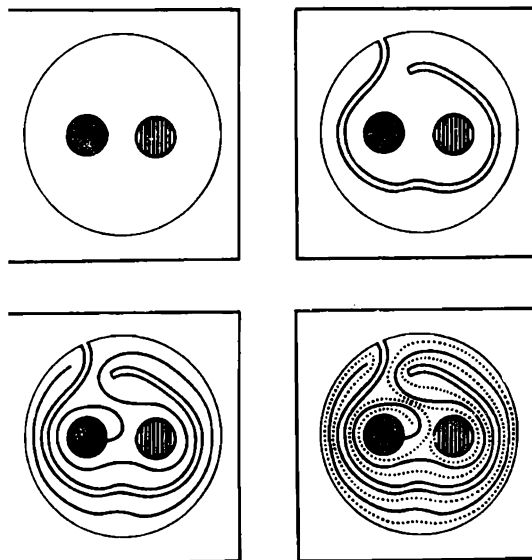
Из двух следующих утверждений одно верно, а другое — нет.

(А) Пусть C — простая замкнутая кривая на евклидовой плоскости. Тогда $\mathbb{R}^2 \setminus C$ несвязно и состоит из двух компонент, общей границей которых является C . В точности одна из этих компонент ограничена.

(В) Пусть D — подмножество евклидовой плоскости. Если D является границей каждой компоненты своего дополнения и если $\mathbb{R}^2 \setminus D$ имеет ограниченную компоненту, то D — простая замкнутая кривая.

Построим теперь пример, показывающий, что оба

ерждения не могут быть верными одновре
известен под названием *озер Вады*. В
исал К. Ёнэяма в 1917 г. Рассмотрим с
двойного кольца (рис. 12А.1). Представи



1. Озера Вады

остров посреди моря, на котором имеются
добства воду в озерах изобразим по-ра
лим три открытых связных множества, г
юве каналы от моря и озер. В момент $t =$
анал от моря, доставляющий морскую во
ние не более 1 от любой точки острова. В
выроем канал от первого озера, доставл
ду на расстояние не более $1/2$ от любой
и. В момент $t = 3/4$ выроем канал, доставл
того озера на расстояние не более $1/4$ от
уши. Продолжая этот процесс, построим
 $-(1/2)^n$ канал, доставляющий воду соо
о водоема на расстояние не более $(1/2)^n$ от
уши. Эти каналы, конечно, не должны i

каться. Два озера с их каналами и море со своим каналом образуют три открытых связных множества, а остаток суши D служит их общей границей.

Если верно (B), то множество D в озерах Вады является простой замкнутой кривой, и потому (A) неверно. Поэтому, если верно (A), то (B) должно быть неверным. Тем самым доказано, что из двух утверждений (A), (B) справедливо не более одного.

На самом деле (A) истинно, а (B) ложно. Утверждение (A) называется *теоремой Жордана* по имени К. Жордана, который в начале 90-х годов прошлого века указал, что, несмотря на интуитивную очевидность (A), требуется строгое доказательство этого утверждения. Такое доказательство дал в начале века О. Веблен. Приводимое здесь доказательство основано на недавно открытом «элементарном» доказательстве, которым мы обязаны Хельге Тверберг.

Простую замкнутую кривую называют также *жордановой кривой*. Жорданова кривая C на плоскости — это подпространство $\mathbb{R}^2$, гомеоморфное $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Будем говорить, что жорданова кривая *вадана* отображением $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, если $C = f(S^1)$. Конечно, f не единственно. Жорданова кривая называется *жордановым многоугольником*, если она состоит из конечного числа прямолинейных отрезков.

Мы всегда представляем окружность S^1 как подмножество комплексной плоскости, и $\mathbb{R}^2$ удобно представлять как комплексную плоскость. Таким образом, расстояние между точками x, y из $\mathbb{R}^2$ или S^1 будет обозначаться $|x - y|$. Если A и B — два непересекающихся компактных подмножества, определим $d(A, B)$ как

$$d(A, B) = \inf \{|a - b| \mid a \in A, b \in B\}.$$

В частности, если A состоит из одной точки, скажем $\{x\}$, то

$$d(x, B) = \inf \{|x - b| \mid b \in B\}.$$

Покажем прежде всего, что теорема Жордана справедлива для жордановых многоугольников.

12A.2. Теорема. *Теорема Жордана выполняется для жордановых многоугольников, т. е. если C — жорданов*

многоугольник, то $\mathbb{R}^2 \setminus C$ состоит из двух компонент, имеющих C в качестве общей границы, и в точности одна из этих компонент ограничена.

Доказательство. Покажем сначала, что если C — жорданов многоугольник, то $\mathbb{R}^2 \setminus C$ имеет не менее двух компонент. Пусть $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$; рассмотрим любой луч, исходящий из точки p . Пусть $P(r, p)$ обозначает число

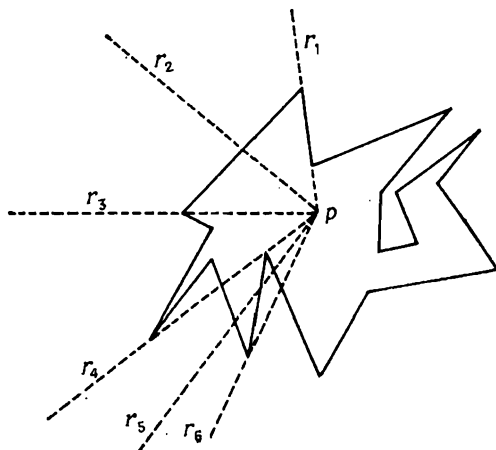


Рис. 12А.2

пересечений луча r с многоугольником C , подсчитанное с учетом следующего соглашения. Если r проходит через вершину V или содержит целую сторону L многоугольника C , то считаем такое пересечение дважды, когда стороны, смежные с V или L , лежат по одну сторону от луча r ; в противном случае пересечение считается однократно. Например, на рис. 12А.2 имеем $P(r_1, p) = 1$, $P(r_2, p) = 1$, $P(r_3, p) = 1$, $P(r_4, p) = 5$, $P(r_5, p) = 3$, $P(r_6, p) = 3$.

При вращении луча r вокруг точки p значение $P(r, p)$, вообще говоря, меняется, но его четность остается неизменной. Поэтому мы можем определить понятие четной или нечетной точки p в зависимости от того, четно или нечетно число $P(r, p)$ для любого луча, ис-

ходящего из точки p . Свойство точки p быть четной или нечетной назовем *четностью*.

Таким образом, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ распадается на множества четных и нечетных точек, обозначаемые соответственно $X_{\text{ч}}$ и $X_{\text{н}}$. Очевидно, что $\mathbb{R}^2 \setminus C = X_{\text{ч}} \cup X_{\text{н}}$ и $X_{\text{ч}} \cap X_{\text{н}} = \emptyset$. Покажем, что $X_{\text{ч}}$ и $X_{\text{н}}$ открыты в $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Пусть $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ и $d(p, C) = \varepsilon$. Это означает, что $B_{\varepsilon}(p) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$. Четность всех точек из $B_{\varepsilon}(p)$ совпадает с четностью p : для $x \in B_{\varepsilon}(p)$ нужно рассмотреть луч с началом в p , проходящий через x . Итак, $X_{\text{ч}}$ и $X_{\text{н}}$ открыты, так что $\mathbb{R}^2 \setminus C$ несвязно и состоит не менее чем из двух компонент.

Множества $X_{\text{ч}}$ и $X_{\text{н}}$ линейно связны. Чтобы доказать это, выберем любой отрезок на C и две точки a, b из $\mathbb{R}^2 \setminus C$, близкие к C , но находящиеся по разные стороны от выбранного отрезка, так что, скажем, $a \in X_{\text{ч}}$ и $b \in X_{\text{н}}$. Далее, если p — любая точка из $\mathbb{R}^2 \setminus C$, то, очевидно, в $\mathbb{R}^2 \setminus C$ существует путь, соединяющий p с некоторой точкой, близкой к C (но не обязательно к выбранному отрезку на C). Продолжив этот путь вдоль C так, чтобы он оставался в $\mathbb{R}^2 \setminus C$ и вблизи C , можно достичь точки a или b . Это рассуждение показывает, что $X_{\text{ч}}$ и $X_{\text{н}}$ линейно связны и потому связны, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится понятие равномерной непрерывности и тот факт, что непрерывное отображение $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ равномерно непрерывно.

12А.3. Определение. Пусть M_1, M_2 — метрические пространства с метриками соответственно d_1, d_2 . Отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех x, y из M_1 , для которых $d_1(x, y) < \delta$.

Заметим, что это условие сильнее обычной непрерывности.

12А.4. Теорема. Пусть M_1, M_2 — метрические пространства с метриками соответственно d_1, d_2 . Если $f: M_1 \rightarrow M_2$ — непрерывное отображение и M_1 компактно, то f равномерно непрерывно.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Для любого $x \in M_1$ найдется такое $\delta(x) > 0$, что если $y \in M_1$ и $d_1(x, y) < 2\delta(x)$, то $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. Множества $\{B_{\delta(x)}(x) : x \in M_1\}$ образуют открытое покрытие M_1 . Так как M_1 компактно, то найдется конечное подпокрытие

$$\{B_{\delta(x_1)}(x_1), B_{\delta(x_2)}(x_2), \dots, B_{\delta(x_n)}(x_n)\}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta(x_1), \delta(x_2), \dots, \delta(x_n)\}$. Если $x, y \in M_1$ и $d_1(x, y) < \delta$, то $x \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$ при некотором i ($1 \leq i \leq n$), и потому $d_2(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/2$, так как $\delta \leq \delta(x_i)$. Далее,

$$d_1(y, x_i) \leq d_1(y, x) + d_1(x, x_i) < \delta + \delta(x_i) \leq 2\delta(x_i),$$

так что $d_2(f(y), f(x_i)) < \varepsilon/2$. Итак, $d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_i)) + d_2(f(x_i), f(y)) < \varepsilon$. $\square$

12А.5. Следствие. Всякое непрерывное отображение $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ равномерно непрерывно.

Доказательство очевидно.

12А.6. Следствие. Пусть M_1, M_2 — метрические пространства с метриками соответственно d_1, d_2 . Если $f: M_1 \rightarrow M_2$ — непрерывное отображение, причем M_1 компактно и $f: M_1 \rightarrow f(M_1)$ является гомеоморфизмом, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $d_2(f(x), f(y)) < \delta$ будет выполнено неравенство $d_1(x, y) < \varepsilon$.

Доказательство. $f^{-1}: f(M_1) \rightarrow M_1$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства. $\square$

12А.7. Теорема. Пусть C — жорданова кривая, заданная отображением $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется жорданов многоугольник C' , задаваемый отображением $f': S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $|f(x) - f'(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in S^1$.

Доказательство. Так как f равномерно непрерывно на S^1 , то найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$|x - y| < \varepsilon_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2.$$

Так как $f: S^1 \rightarrow C$ — гомеоморфизм, то, согласно следствию 12А.6, найдется такое $\varepsilon_2 > 0$, что

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon_2 \Rightarrow |x - y| < \min(\varepsilon_1, \sqrt{3}).$$

(Причина появления $\sqrt{3}$ в том, что для подмножества A окружности S^1 диаметра меньше $\sqrt{3}$ найдется наименьшая замкнутая дуга, в которой оно содержится.)

Пусть $\delta = \min(\varepsilon/2, \varepsilon_2)$. Покроем C квадратами $S_1, S_2, \dots, S_n$ диаметра δ , которые могут пересекаться только по сторонам. Так как $\delta \leq \varepsilon_2$, то существует наименьшая замкнутая дуга $A_1 \neq S^1$, содержащая $f^{-1}(S_1)$. Спрявим теперь $f(A_1)$, образовав жорданову кривую C_1 , т. е. определим $f_1: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулами

$$f_1(e(t)) = \begin{cases} f(e(t)) & \text{при } e(t) \notin A_1, \\ \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) f(e(a)) + \frac{t-a}{b-a} f(e(b)) & \text{при } e(t) \in A_1, \end{cases}$$

где $A_1 = \{e(t): a \leq t \leq b\}$ и $e(t) = \exp 2\pi i t$, а затем положим $C_1 = f_1(S^1)$. Это, очевидно, жорданова кривая. Заметим, что $f(A_1)$ не обязательно содержится в S_1 и что $f_1^{-1}(S_i) \subset f^{-1}(S_i)$ при $i = 2, 3, \dots, n$.

Спрявим теперь $f_1(A_2)$, где A_2 — наименьшая дуга, содержащая $f_1^{-1}(S_2)$. Получим жорданову кривую C_2 , заданную отображением $f_2: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (если $f_1^{-1}(S_2) = \emptyset$, положим $f_2 = f_1$ и $C_2 = C_1$). Снова заметим, что $f_2^{-1}(S_i) \subset f^{-1}(S_i)$ при $i = 3, 4, \dots, n$. Продолжая таким же образом, получим жорданов многоугольник C_n , заданный отображением $f_n: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Нужно проверить, что C_n ε -близок к C .

Пусть $x \in S^1$ и $f_n(x) \neq f(x)$. Тогда $f_n(x) = f_j(x) \neq f_{j-1}(x)$ для некоторого $j \geq 1$, где $f_0 = f$. По построению, x принадлежит дуге A_j , концы которой обозначим через y, z . Также по построению $f_j(y) = f(y)$ и $f_j(z) = f(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |f(x) - f(y) + f_j(y) - f_j(x)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(y)| + \delta \leq |f(x) - f(y)| + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Так как $|f(z) - f(y)| \leq \delta \leq \varepsilon_2$, то $|z - y| \leq \varepsilon_1$. Но $|x - y| < |z - y|$, так что $|x - y| < \varepsilon_1$ и, следовательно, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Итак,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \square$$

12А.8. Теорема. Пусть C — жорданов многоугольник, заданный отображением $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Тогда ограничен-

ная компонента $\mathbb{R}^2 \setminus C$ содержит открытый диск, в пересечении границы которого с C найдутся две точки $f(a)$, $f(b)$ с $|a-b| \geq \sqrt{3}$.

Доказательство. Пусть D — открытый диск, лежащий в ограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C$ и такой, что найдутся две точки $f(a)$, $f(b) \in \partial D$ с максимальным $|a-b|$. Такой диск существует. Предположим, что $|a-b| < \sqrt{3}$. Тогда a и b должны быть концами некоторой дуги A длины больше $4\pi/3$. Граничная окружность диска D не может пересекаться с множеством $f(A) \setminus \{f(a), f(b)\}$, потому что $\max\{|a-c|, |b-c|\} > |a-b|$ для всех $c \in A \setminus \{a, b\}$.

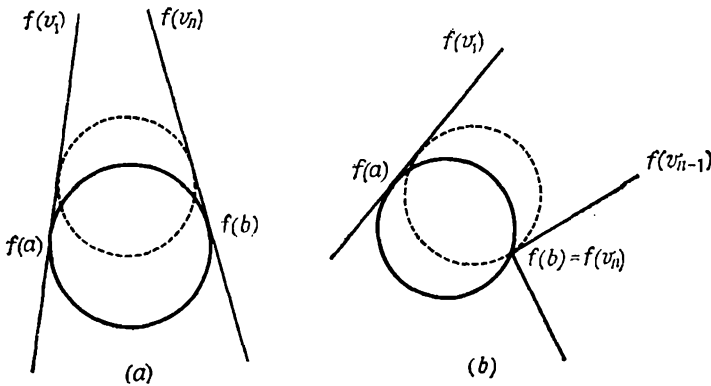


Рис. 12А.3

Пусть $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ — вершины C , принадлежащие $f(A)$, в порядке обхода от $f(a)$ к $f(b)$. Имеются четыре возможности: (i) $v_1 \neq a, v_n \neq b$, (ii) $v_1 \neq a, v_n = b$, (iii) $v_1 = a, v_n \neq b$ и (iv) $v_1 = a, v_n = b$. В первом случае окружность ∂D касается прямых $f(a)f(v_1)$ и $f(b)f(v_n)$ и найдется диск $D' \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$, близкий к D и такой, что окружность $\partial D'$ касается C в точках $f(a')$ и $f(b')$, близких к $f(a)$ и $f(b)$ и лежащих соответственно на отрезках $f(a)f(v_1)$ и $f(b)f(v_n)$ (рис. 12А.3 (а)). Так как $|a'-b'| > |a-b|$, получаем противоречие. В случае (ii) окружность ∂D касается прямой $f(a)f(v_1)$ и найдется диск $D' \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$, такой, что $\partial D'$ касается C вблизи $f(a)$ на стороне $f(a)f(v_1)$ и прохо-

дит через некоторую точку стороны $f(b)f(v_{n-1})$ (рис. 12A.3 (b)). Это приводит к противоречию. Случай (iii) аналогичен (ii). В случае (iv) рассмотрим область R , ограниченную дугой $f(A)$ и радиусами $\overline{D}$, проведенными в точки $f(a)$ и $f(b)$. Проведем из центра D луч, перпендикулярный отрезку $f(a)f(b)$ и направленный внутрь области R . Для любой точки x этого луча существует единственная окружность S_x с центром в x , проходящая через $f(a)$ и $f(b)$. Непрерывно перемещая x от центра D вдоль этого луча, мы получим при x , близких к центру D , окружности S_x , ограничивающие диски D_x , лежащие в $\mathbb{R}^2 \setminus C$. В конце концов для некоторого x окружность S_x либо пересечет $f(A)$ в некоторой точке, отличной от $f(a)$ и $f(b)$, либо станет касательной к одной из прямых $f(a)f(v_2)$ или $f(b)f(v_{n-1})$. Невозможность первого случая была уже доказана, а второй приводит к противоречию тем же методом, что и случай (ii). Все эти противоречия оставляют только одну возможность, а именно что $|a-b| \geq \sqrt{3}$. $\square$

Докажем теперь часть теоремы Жордана.

12A.9. Теорема. *Если C — жорданова кривая, то $\mathbb{R}^2 \setminus C$ имеет не менее двух компонент.*

Доказательство. Очевидно, что существует неограниченная компонента. Покажем, что существует также и ограниченная компонента. Пусть $C_1, C_2, \dots$ — последовательность жордановых многоугольников, сходящаяся к C в смысле теоремы 12A.7, где ε пробегает последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, сходящуюся к нулю. Пусть $C, C_1, C_2, \dots$ заданы соответственно отображениями $f, f_1, f_2, \dots$ так, что $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$. По теореме 12A.8 для каждого C_n найдется диск D_n , лежащий в ограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$, граница которого пересекается с C_n по множеству, содержащему точки $f_n(a_n)$ и $f_n(b_n)$ с $|a_n - b_n| \geq \sqrt{3}$. Обозначим центр диска D_n через z_n . Существует диск D_0 , содержащий все жордановы кривые C_n и C и, следовательно, все D_n .

и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность. Поэтому можно считать, что сама последовательность z_n , $n \geq 1$, сходится к z при $n \rightarrow \infty$.

Для больших n точки z и z_n лежат в одной и той же компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$. Мы покажем это следующим образом. Найдется такое $\delta > 0$, что если $|x - y| \geq \sqrt{3}$, то $|f(x) - f(y)| \geq \delta$. Тогда $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \delta$ при всех $n \geq 1$, и потому $|f_n(a_n) - f_n(b_n)| > \delta/2$ при $n \geq N$, где N настолько велико, что $\varepsilon_N < \delta/2$. Это означает, что диаметр S_n при $n \geq N$ больше $\delta/2$, и потому $d(z_n, C_n) > \delta/4$. Но для достаточно больших n имеем $|z - z_n| < \delta/4$, так что z и z_n должны лежать в одной и той же компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$, а именно в ограниченной компоненте, так как по определению z_n лежит в ограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$. Покажем, что z не может лежать в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Предположим, что z лежит в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Тогда в $\mathbb{R}^2 \setminus C$ найдется путь g из z в некоторую точку вне D_0 (по теореме 12.9 открытое связное подмножество $\mathbb{R}^2$ линейно связно). Пусть $d(g(I), C) = \delta$. Для больших n имеем $|f_n(x) - f(x)| < \delta/2$ и, следовательно, $d(g(I), C_n) > \delta/2$, а это означает, что для больших n точка z лежит в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$. Но это противоречит доказанному ранее факту, что z лежит в ограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$. Отсюда заключаем, что z не лежит в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C$, и потому $\mathbb{R}^2 \setminus C$ имеет также ограниченную компоненту. $\square$

Чтобы доказать вторую часть теоремы Жордана, нам понадобятся еще одно определение и лемма.

12A.10. Определение. Хордой Γ жордановой кривой C называется прямолинейный отрезок, пересекающийся с C только в своих концах. Таким образом, за исключением концов, Γ лежит в $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Заметим, что если C — жорданов многоугольник и Γ — его хорда, то $\Gamma \subset X \cup C$, где X — одна из компонент $\mathbb{R}^2 \setminus C$, и, более того, $X \setminus \Gamma$ состоит из двух компонент.

12A.11. Лемма. Пусть C — жорданов многоугольник и a, b — две точки одной и той же компоненты X множества $\mathbb{R}^2 \setminus C$, причем $d(\{a, b\}, C) \geq \delta$ при некотором $\delta > 0$. Предположим, что для любой хорды Γ , лежащей в $X \cup C$ и имеющей длину меньше 2δ , обе точки a и b лежат в одной и той же компоненте множества $X \setminus \Gamma$. Тогда в X найдется такой путь g , что $d(g(I), C) \geq \delta$.

Доказательство. Идея состоит в том, чтобы взять открытый диск радиуса δ с центром в точке a и протащить его в точку b , оставаясь все время внутри X . Единственное, что может помешать такому перемещению диска (диаметр которого равен 2δ), — это наличие хорды длины меньше 2δ в $X \cup C$. Но предположения леммы исключают такую возможность. $\square$

12A.12. Теорема. Пусть C — жорданова кривая; тогда $\mathbb{R}^2 \setminus C$ имеет не более двух компонент.

Доказательство. Предположим, что $\mathbb{R}^2 \setminus C$ имеет три или более компонент, и пусть p, q, r — точки из трех различных компонент. Пусть $d(\{p, q, r\}, C) = \varepsilon$ и $C_1, C_2, \dots$ — последовательность жордановых многоугольников, сходящаяся к C . Предположим, что $C, C_1, C_2, \dots$ заданы отображениями $f, f_1, f_2, \dots$ соответственно. Для больших n имеем $d(C_n, C) < \varepsilon/2$, и потому $d(\{p, q, r\}, C_n) > \varepsilon/2$. Теорема 12A.2 показывает, что для любого достаточно большого n две из трех точек p, q, r лежат в одной и той же компоненте X_n множества $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что p и q содержатся в X_n для всех n .

Допустим, что найдется $\delta, 0 < \delta < \varepsilon$, и бесконечно много значений n , для которых точки p и q соединены путем g_n в X_n с $d(g_n(I), C_n) \geq \delta$. Для больших n имеем $d(C_n, C) < \delta/2$ и потому $d(g_n(I), C) > \delta/2$, откуда видно, что p и q лежат в одной и той же компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Это противоречие означает, что такого δ не существует. Применяя лемму 12A.11, получаем, что для бесконечно многих n найдутся хорды Γ_n длины δ_n , такие, что p и q лежат в разных компонен-

тах $X_n \setminus \Gamma_n$ и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим эти n в возрастающем порядке через $n(1), n(2), \dots$. Пусть концами $\Gamma_{n(i)}$ являются точки $f_{n(i)}(a_i)$ и $f_{n(i)}(b_i)$. Так как $\delta_{n(i)} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, имеем $f_{n(i)}(a_i) - f_{n(i)}(b_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, и, следовательно, $f(a_i) - f(b_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, откуда $a_i - b_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Так как p и q лежат в разных компонентах $X_{n(i)} \setminus \Gamma_{n(i)}$, то для бесконечно многих значений i одна из этих точек, например p , принадлежит компоненте множества $X_{n(i)} \setminus \Gamma_{n(i)}$, ограниченной хордой $\Gamma_{n(i)}$ и дугой $f_{n(i)}(A_i)$, где A_i — меньшая из дуг в S^1 с концами в a_i и b_i . Так как $a_i - b_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то диаметр этой компоненты при достаточно большом i станет меньше ε . В частности, $|p - f(a_i)| < \varepsilon$, что дает противоречие, доказывающее теорему. $\square$

Теорема Жордана следует теперь из 12А.9—12А.12.

12А.13. Упражнения. (а) Докажите, что если A — образ в $\mathbb{R}^2$ инъективного непрерывного отображения $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, то $\mathbb{R}^2 \setminus A$ связно.

(б) Пусть C — жорданова кривая, заданная отображением $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Определим δ , полагая

$$\delta = \min \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in S^1 \text{ и } |x - y| \geq \sqrt{3} \}.$$

Докажите, что ограниченная компонента $\mathbb{R}^2 \setminus C$ содержит открытый диск диаметра δ .

(с) В $\mathbb{R}^2$ можно расположить несчетное множество непересекающихся простых замкнутых кривых, например $\{C_r: r \in \mathbb{R}_+\}$, где $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = r\}$. Восьмеркой называется пространство, гомеоморфное множеству $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x \pm 1)^2 + y^2 = 1\}$. Докажите, что если $\{E_j: j \in J\}$ — семейство непересекающихся восьмерок в $\mathbb{R}^2$, то J не более чем счетно.

Глава 13

ГОМОТОПИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В этой главе мы введем отношение эквивалентности для непрерывных отображений топологических пространств. Оно будет играть основную роль в следующих главах, особенно в применении к путям.

Грубо говоря, два непрерывных отображения $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ называются гомотопными, если существует семейство промежуточных непрерывных отображений $f_t: X \rightarrow Y$, где $0 \leq t \leq 1$, непрерывно зависящих от t (рис. 13.1 (a)). На рис. 13.1 (b) изображены два негомотопных отображения. Здесь $X = S^1$, а Y — кольцо в $\mathbb{R}^3$.

Более точное определение таково.

13.1. Определение. Два непрерывных отображения $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $F: X \times I \rightarrow Y$, такое, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$.

Пример см. на рис. 13.2.

Отображение F называется *гомотопией* между f_0 и f_1 . Мы пишем $f_0 \simeq f_1$ или $F: f_0 \simeq f_1$. Для каждого $t \in [0, 1]$ мы обозначаем $F(x, t)$ через $f_t(x)$, и отображение $f_t: X \rightarrow Y$ непрерывно.

Заметим, что если $f: I \rightarrow Y$ — путь, то f гомотопен постоянному пути $e_{f(0)}$ посредством гомотопии $F: I \times I \rightarrow Y$, где $F(x, t) = f((1-t)x)$. Если мы хотим избежать таких ситуаций, мы пользуемся более общим понятием гомотопии — гомотопией относительно подмножества A . При этом требуется, чтобы гомотопия оставляла на месте все точки A .

13.2. Определение. Пусть A — подмножество X и f_0, f_1 — непрерывные отображения X в Y . Назовем f_0 и f_1

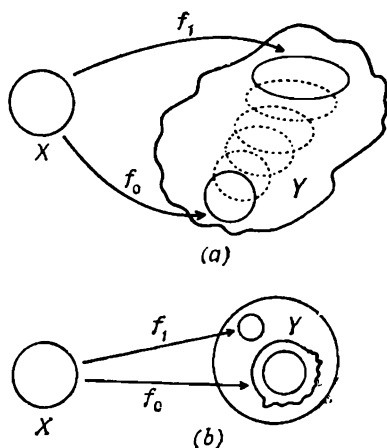


Рис.13.1. (а) Гомотопные отображения. (б) Негомотопные отображения

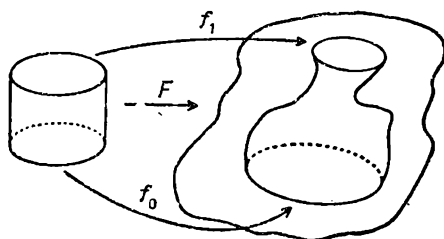


Рис.13.2

гомотопными относительно A , если существует гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$ между f_0 и f_1 , такая, что $F(a, t)$ не зависит от t при $a \in A$. Другими словами, $F(a, t) = f_0(a)$ для всех $a \in A$ и всех $t \in I$.

Заметим, что в этом случае $f_0(a) = f_1(a)$ для всех $a \in A$. Гомотопия F называется *гомотопией относительно A* и записывается в виде $f_0 \simeq f_1 \text{ (rel } A)$ или $f_0 \simeq_{\text{rel } A} f_1$.

Пример см. на рис. 13.3, где $X = I$ и $A = \{0\} \subset X$.

В качестве другого примера рассмотрим рис. 13.4,

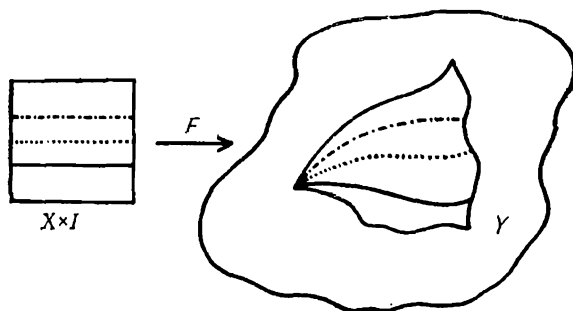


Рис.13.3

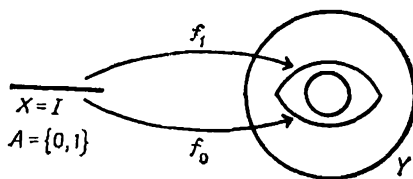


Рис.13.4

где $X = I$, $A = \{0, 1\}$ и Y — кольцо в $\mathbb{R}^2$. Отображения f_0, f_1 негомотопны относительно A , хотя они и гомотопны в абсолютном смысле.

Конечно, при $A = \emptyset$ гомотопия относительно A превращается в обыкновенную гомотопию. Следующий результат показывает, что гомотопия относительно A является отношением эквивалентности.

13.3. Лемма. *Отношение $\simeq_{\text{rel } A}$ на множестве непрерывных отображений X в Y является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Отношение рефлексивно, потому что $F(x, t) = f(x)$ — гомотопия относительно A между f и f . Оно симметрично, так как если $F: f \simeq_{\text{rel } A} g$, то $G: g \simeq_{\text{rel } A} f$, где G задано равенством $G(x, t) = F(x, 1 - t)$. Наконец, это отношение транзитивно, потому что если $F: f \simeq_{\text{rel } A} g$ и $G: g \simeq_{\text{rel } A} h$, то $H: f \simeq_{\text{rel } A} h$,

где H задано равенствами

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, 2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Лемма о склейке показывает, что H непрерывно. $\square$

13.4. Упражнения. (а) Пусть X — пространство, $f: S^1 \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Покажите, что f гомотопно нулю (т. е. постоянному отображению) тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение $g: D^2 \rightarrow X$, для которого $g|_{S^1} = f$. (Указание: если c — постоянное отображение и $F: c \simeq f$, положите $g(rx) = F(x, r)$ при $x \in S^1, r \in I$ и воспользуйтесь упр. 8.14(г).)

(б) Пусть $x, y \in X$. Обозначим через $P(x, y)$ множество классов эквивалентности путей в X из x в y по отношению гомотопности относительно $\{0, 1\}$. (Другими словами, два пути $p, q: I \rightarrow X$ из x в y эквивалентны тогда и только тогда, когда $p \simeq q$ (rel $\{0, 1\}$).) Покажите, что между $P(x, y)$ и $P(y, x)$ тогда и только тогда существует взаимно однозначное соответствие, когда $P(x, y) \neq \emptyset$.

(с) Пусть $0 < s < 1$. Для данных путей p и q с $p(1) = q(0)$ определим h формулами

$$h(t) = \begin{cases} p(t/s), & 0 \leq t \leq s, \\ q((t-s)/(1-s)), & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Докажите, что h и $p * q$ гомотопны относительно $\{0, 1\}$.

(д) Для данного пути f обозначим через $\bar{f}$ путь, определенный формулой $\bar{f}(t) = f(1-t)$. Докажите, что $f \simeq g$ (rel $\{0, 1\}$) тогда и только тогда, когда $\bar{f} \simeq \bar{g}$ (rel $\{0, 1\}$).

(е) Покажите, что если $f_0 \simeq_{\text{rel } A} f_1: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — непрерывное отображение, то $gf_0 \simeq_{\text{rel } A} gf_1: X \rightarrow Z$.

(ф) Пусть $f_0 \simeq f_1: X \rightarrow Y$ и $g_0 \simeq g_1: Y \rightarrow Z$. Докажите, что $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1: X \rightarrow Z$. (Указание: воспользуйтесь сначала (е), чтобы показать, что $g_0 f_0 \simeq g_0 f_1$, а затем покажите, что $g_0 f_1 \simeq g_1 f_1$.)

(г) Пусть X, Y — топологические пространства и $\mathcal{F}(X, Y)$ — множество непрерывных отображений X в Y с компактно-открытой топологией (см. упр. 7.13 (д)). Докажите, что если $f \simeq g: X \rightarrow Y$, то найдется путь из f в g в пространстве $\mathcal{F}(X, Y)$. Допустим, что X компактно и хаусдорфово. Докажите, что путь из f в g в пространстве $\mathcal{F}(X, Y)$ существует в том и только в том случае, если $f \simeq g: X \rightarrow Y$. (Для справедливости последнего результата достаточно, чтобы X было локально компактным и хаусдорфовым.)

Понятие гомотопных отображений можно использовать для определения отношения эквивалентности топологических пространств.

13.5. Определение. Говорят, что пространства X и Y имеют один и тот же гомотопический тип, если существуют непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$, такие, что $gf \simeq 1: X \rightarrow X$, $fg \simeq 1: Y \rightarrow Y$. Отображения f и g называются в этом случае гомотопическими эквивалентностями. Говорят также, что X и Y гомотопически эквивалентны.

Очевидно, гомеоморфные пространства имеют одинаковый гомотопический тип, но обратное не верно. Например, при $n > 0$ n -мерный диск $D^n \subset \mathbb{R}^n$ не гомеоморфен одной точке (скажем, $\{y\} \subset D^n$), но имеет гомотопический тип точки. Чтобы показать, что эти пространства гомотопически эквивалентны, рассмотрим отображение включения $f: \{y\} \rightarrow D^n$ (заданное равенством $f(y) = y$) и постоянное отображение $g: D^n \rightarrow \{y\}$. Очевидно, что $gf = 1$, тогда как $F: D^n \times I \rightarrow D^n$, определенное формулой $F(x, t) = tx + (1-t)y$, является гомотопией между fg и $1: D^n \rightarrow D^n$. Пространства, гомотопически эквивалентные точке, носят специальное название.

13.6. Определение. Пространство X , гомотопически эквивалентное точке, называется *стягиваемым*.

Таким образом, диск D^n стягиваем. Вообще, всякое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ стягиваемо. Говоря нестрого, пространство стягиваемо, если его можно продеформировать по себе в точку (например, с окружностью этого нельзя сделать).

Другой пример пары гомотопически эквивалентных пространств представляют цилиндр C и окружность S^1 . Чтобы в этом убедиться, представим C и S^1 в виде

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\},$$

$$S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Определим $i: S^1 \rightarrow C$ как включение и $r: C \rightarrow S^1$ при помощи равенства $r(x, y, z) = (x, y, 0)$. Очевидно, $ri = 1: S^1 \rightarrow S^1$, тогда как отображение $F: C \times I \rightarrow C$, определенное формулой $F((x, y, z), t) = (x, y, tz)$, является гомотопией между ir и $1: C \rightarrow C$.

Рассмотренные примеры приводят к новым определениям.

13.7. Определение. Подмножество A топологического пространства X называется *ретрактом* пространства X , если существует непрерывное отображение $r: X \rightarrow A$, такое, что $ri = 1: A \rightarrow A$ (или, эквивалентно, $r|_A = 1$), где $i: A \rightarrow X$ — включение. Отображение r называется *ретракцией*.

13.8. Определение. Подмножество A пространства X называется *деформационным ретрактом* X , если существует такая ретракция $r: X \rightarrow A$, что $ir \simeq 1: X \rightarrow X$, где $i: A \rightarrow X$ — включение.

Другими словами, A является деформационным ретрактом X , если существует такая гомотопия $F: X \times I \rightarrow X$, что $F(x, 0) = x$ для всех $x \in X$ и $F(x, 1)$ — ретракция X на A .

Таким образом, окружность — деформационный ретракт цилиндра. Заметим, что если A — деформационный ретракт X , то A и X гомотопически эквивалентны. В примере с окружностью и цилиндром отображение ir на самом деле гомотопно тождественному относительно окружности. Это приводит к еще одному определению.

13.9. Определение. Подмножество A пространства X называется *сильным деформационным ретрактом*, если существует такая ретракция $r: X \rightarrow A$, что $ir \simeq_{\text{rel } A} 1: X \rightarrow X$.

Другими словами, A — сильный деформационный ретракт X , если существует такая гомотопия $F: X \times I \rightarrow X$, что $F(x, 0) = x$ для всех $x \in X$, $F(a, t) = a$ для всех $a \in A$, $t \in I$, и $F(x, 1) \in A$ для всех $x \in X$.

Сильный деформационный ретракт является, очевидно, деформационным ретрактом. Понятие сильного деформационного ретракта будет полезно в дальнейшем. Предостережение: в некоторых книгах сильный деформационный ретракт называют просто деформационным ретрактом. Мы воздержимся от применения этой терминологии. Говоря нестрого, A является сильным деформационным ретрактом пространства X , если X можно продеформировать по себе в A , оставляя точки из A неподвижными.

Приведем следующий пример, иллюстрирующий понятие сильного деформационного ретракта. Рассмотрим подмножество $Y = C_1 \cup C_2$ пространства $\mathbb{R}^2$, где

$$C_1 = \{x = (x_1, x_2): (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\},$$

$$C_2 = \{x = (x_1, x_2): (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Таким образом, Y — это восьмерка, т. е. две окружности с одной общей точкой. Пусть $X = Y \setminus \{(2, 0), (-2, 0)\}$; тогда точка $x_0 = (0, 0)$ является сильным деформационным ретрактом X . Чтобы это установить, рассмотрим очевидные отображения $i: \{x_0\} \rightarrow X$ и $r: X \rightarrow \{x_0\}$. Ясно, что $ri = 1$. Чтобы убедиться, что $ir \simeq 1 \text{ (rel } \{x_0\})$, используем следующую гомотопию $F: X \times I \rightarrow X$:

$$F(x, s) = (1-s)x / \|(1-s)x_1 + (-1)^i, (1-s)y_2\|$$

при $x \in C_i, i = 1, 2$.

Заметим, что $((1-s)x_1 + (-1)^i, (1-s)y_2) \neq (0, 0)$ при $x \in X$. Легко проверить, что F непрерывно. Так как $F(x_0, s) = x_0$, $F(x, 0) = x$ и $F(x, 1) = x_0$, то $ir \simeq 1 \text{ (rel } \{x_0\})$ и, таким образом, $\{x_0\}$ — сильный деформационный ретракт X .

13.10. Упражнения. (а) Покажите, что на листе Мёбиуса найдется окружность, являющаяся его сильным деформационным ретрактом. Выведите отсюда, что лист Мёбиуса и цилиндр гомотопически эквивалентны.

(б) Докажите, что пространство X тогда и только тогда стягиваемо, когда тождественное отображение $1: X \rightarrow X$ гомотопно постоянному отображению.

(с) Докажите, что ретракция $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ существует тогда и только тогда, когда S^{n-1} стягиваема¹⁾. (Указание. Пусть $F: S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1}$ — гомотопия между постоянным и тождественным отображениями. Воспользуйтесь естественным отображением $S^{n-1} \times I \rightarrow D^n$ вида $(x, t) \mapsto tx$ и тем фактом, что $F(S^{n-1} \times \{0\})$ — одна точка.)

(д) Докажите, что если X связно и имеет тот же гомотопический тип, что и Y , то Y также связно.

(е) Подмножество $A \subset X$ называется *слабым ретрактом* пространства X , если существует непрерывное отображение $r: X \rightarrow A$, такое, что $ri \simeq 1: A \rightarrow A$, где $i: A \rightarrow X$ — включение. Ретракт, очевидно, является слабым ретрактом. Приведите пример слабого ретракта, не являющегося ретрактом.

¹⁾ Нестягиваемость сферы S^{n-1} вытекает, например, из предложений 29.8 и 29.19. — *Прим. ред.*

(f) Приведите пример деформационного ретракта, не являющегося сильным деформационным ретрактом.

(g) Подмножество $A \subset X$ называется *слабым деформационным ретрактом* пространства X , если отображение включения $i: A \rightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью. Таким образом, деформационный ретракт является и слабым деформационным ретрактом. Приведите пример слабого деформационного ретракта, не являющегося деформационным ретрактом.

(h) Пусть A — подпространство X , и пусть Y — непустое топологическое пространство. Докажите, что $A \times Y$ тогда и только тогда является ретрактом пространства $X \times Y$, когда A — ретракт X .

(i) Докажите, что отношение «быть ретрактом» транзитивно (т. е. если A — ретракт B , а B — ретракт C , то A — ретракт C).

(j) Докажите, что подмножество $S^1 \times \{x_0\}$ является ретрактом пространства $S^1 \times S^1$, но не является его сильным деформационным ретрактом ни для какой точки $x_0 \in S^1$. Является ли оно деформационным ретрактом? Слабым деформационным ретрактом?

(k) Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Найдите окружность в $\mathbb{R}^2$, являющуюся сильным деформационным ретрактом пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$.

(l) Пусть T — тор, а X — дополнение к некоторой его точке. Найдите подмножество X , гомеоморфное восьмерке и являющееся сильным деформационным ретрактом пространства X .

(m) Докажите, что S^n — сильный деформационный ретракт пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

(n) Покажите, что ретракт хаусдорфова пространства замкнут.

(o) Пусть Y — подпространство $\mathbb{R}^n$ и $f, g: X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения. Докажите, что если для всякого $x \in X$ точки $f(x)$ и $g(x)$ можно соединить прямолинейным отрезком в Y , то $f \simeq g$. Выведите отсюда, что любые два отображения $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомотопны.

(p) Пусть X — произвольное пространство и $f, g: X \rightarrow S^n$ — непрерывные отображения, для которых $f(x) \neq -g(x)$ при всех $x \in X$. Докажите, что $f \simeq g$. (Указание: рассмотрите отображение $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ вида $x \mapsto x/\|x\|$ и примените (o).) Выведите отсюда, что всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow S^n$, не являющееся сюръективным, гомотопно постоянному отображению.

Глава 14

УМНОЖЕНИЕ ПУТЕЙ

Если f и g — пути в X , причем $f(1) = g(0)$, то под *произведением* f и g мы понимаем путь $f * g$, определенный в гл. 12 формулами

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Далее в этой главе мы подробнее изучим это «умножение» путей. Точнее, мы рассмотрим умножение путей с точностью до гомотопии относительно $\{0, 1\}$ и увидим, в какой степени это умножение удовлетворяет аксиомам группы.

14.1. Определение. Два пути f, g в X мы называем *эквивалентными* и пишем $f \sim g$, если они гомотопны относительно $\{0, 1\}$.

Заметим, что пути f_0, f_1 в X эквивалентны, если существует непрерывное отображение $F: I \times I \rightarrow X$, такое, что

$$\begin{array}{ll} F(t, 0) = f_0(t) & \text{и} \quad F(t, 1) = f_1(t) \quad \text{при} \quad t \in I, \\ F(0, s) = f_0(0) & \text{и} \quad F(1, s) = f_0(1) \quad \text{при} \quad s \in I \end{array}$$

(рис. 14.1). В этом случае мы будем писать $F: f_0 \sim f_1$. Как показывает лемма 13.3, $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве путей в X . Обозначим класс эквивалентности пути f через $[f]$. Наш первый результат показывает, что произведение классов эквивалентности путей корректно определено условием $[f][g] = [f * g]$.

14.2. Лемма. Пусть f_0, f_1, g_0, g_1 — пути в X , причем $f_0(1) = g_0(0)$ и $f_1(1) = g_1(0)$. Если $f_0 \sim f_1$ и $g_0 \sim g_1$, то $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.

Доказательство. Пусть $F: f_0 \sim f_1$ и $G: g_0 \sim g_1$ — гомотопии относительно $\{0, 1\}$, реализующие эти эквивалентности. Определим $H: I \times I \rightarrow X$ формулами

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(2t-1, s), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

По лемме о склейке H непрерывно, так как $F(1, s) = f_1(s) = g_1(s) = G(0, s)$. Легко видеть, что H является

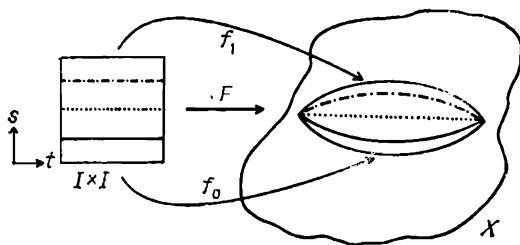


Рис.14.1

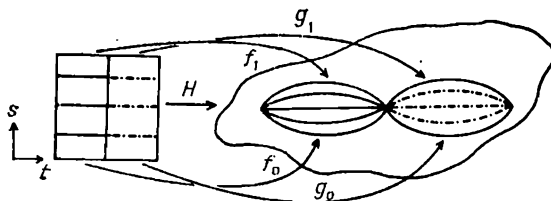


Рис.14.2

гомотопией относительно $\{0, 1\}$ между $f_0 * g_0$ и $f_1 * g_1$ (рис. 14.2). $\square$

Следующий результат устанавливает ассоциативность умножения классов путей, иными словами, $([f][g])[h] = [f]([g][h])$, когда эти произведения имеют смысл (т. е. при $f(1) = g(0)$ и $g(1) = h(0)$). Заметим, что, вообще говоря, $(f * g) * h \neq f * (g * h)$ (см. упр. 14.6 (а)).

14.3. Лемма. Пусть f, g, h — три пути в X , для которых $f(1) = g(0)$ и $g(1) = h(0)$. Тогда $(f * g) * h \sim$

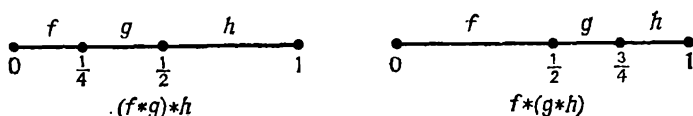
$\sim f * (g * h)$.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ g(4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ h(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(4t-2), & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ h(4t-3), & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Изобразим эти пути диаграммами



Эти диаграммы можно использовать для очень простого алгебраического описания наших путей. Рассмотрим, например, $(f * g) * h$. При $1/4 \leq t \leq 1/2$ используем g

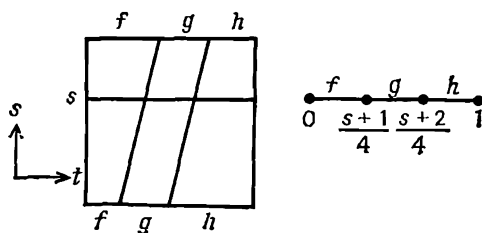


Рис.14.3

в композиции с линейной функцией, переводящей отрезок $[1/4, 1/2]$ в $[0, 1]$, а именно $t \mapsto 4t - 1$. На самом деле можно использовать любую непрерывную функцию, отображающую $[1/4, 1/2]$ в $[0, 1]$, которая переводит $1/4$ в 0 , а $1/2$ в 1 (см. упр. 14.6 (с)), но обычно проще всего выбрать линейную функцию.

Чтобы построить гомотопию между $(f * g) * h$ и $f * (g * h)$, рассмотрим рис. 14.3. При данном значении s

используем f на отрезке $[0, (s+1)/4]$, g на отрезке $[(s+1)/4, (s+2)/4]$ и h на отрезке $[(s+2)/4, 1]$. Методом, описанным выше, мы приходим к определению $F: I \times I \rightarrow X$ равенствами

$$F(t, s) = \begin{cases} f(4t/(1+s)), & 0 \leq t \leq (s+1)/4, \\ g(4t-s-1), & (s+1)/4 \leq t \leq (s+2)/4, \\ h((4t-s-2)/(2-s)), & (s+2)/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Отображение F непрерывно и

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= (f * g * h)(t), \\ F(0, s) &= f(0) = ((f * g) * h)(0), \\ F(t, 1) &= (f * (g * h))(t), \\ F(1, s) &= h(1) = ((f * g) * h)(1). \end{aligned}$$

Итак, F является нужной гомотопией. $\square$

Для $x \in X$ был определен постоянный путь $e_x: I \rightarrow X$, $e_x(t) = x$. Класс эквивалентности постоянного пути ведет себя как (левая или правая) единица, т. е. $[e_x][f] = [f] = [f][e_y]$, если путь f начинается в x и кончается в y .

Это доказывается в следующей лемме.

14.4. Лемма. Если f — путь в X с началом в x и концом в y , то $e_x * f \sim f$ и $f * e_y \sim f$.

Доказательство. Докажем только, что $e_x * f \sim f$. Доказательство того, что $f * e_y \sim f$, проводится аналогично. Рассмотрим рис. 14.4. Определим $F: I \times I \rightarrow X$ формулами

$$F(t, s) = \begin{cases} x, & 0 \leq t \leq (1-s)/2, \\ f((2t-1+s)/(1+s)), & (1-s)/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $F(t, 0) = e_x * f$, $F(t, 1) = f(t)$ и F — гомотопия относительно $\{0, 1\}$. $\square$

Рассмотрим, наконец, обратные пути (с точностью до эквивалентности). Напомним, что для пути f через $\bar{f}$ обозначается путь, определенный равенством $\bar{f}(t) = f(1-t)$. Заметим, что $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $\bar{f} \sim \bar{g}$ (доказать это легко). Следующий результат показывает, что класс эквивалентности $\bar{f}$ играет роль

обратного для класса эквивалентности f , т. е. $[f][\bar{f}] = [e_x]$, $[\bar{f}][f] = [e_y]$ для пути f с началом в x и концом в y .

14.5. Лемма. Пусть f — путь в X с началом в x и концом в y . Тогда $f * \bar{f} \sim e_x$ и $\bar{f} * f \sim e_y$.

Доказательство. Докажем только, что $f * \bar{f} \sim e_x$. Путь $f * \bar{f}$ задан формулами

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ f(2-2t), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Он представляет собой путь, по которому мы движемся первую половину времени вдоль f , а вторую половину — вдоль f в обратном направлении. Чтобы пройти за единицу времени из x в y и обратно в x , мы движемся

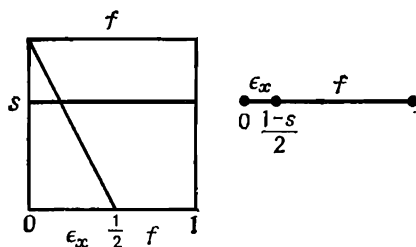


Рис.14.4

со скоростью 2 (т. е. с удвоенной «нормальной» скоростью). Если теперь менять скорость пропорционально $(1-s)$ при $s \in I$, то для любого s мы получим путь, который начинается в x , идет до $f(2(1-s))$ и затем возвращается в x . При $s=0$ получим $f * \bar{f}$, а при $s=1$ получим e_x . Поэтому определим $F: I \times I \rightarrow X$ формулами

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t(1-s)), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ f((2-2t)(1-s)), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, F непрерывно и

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= (f * \bar{f})(t), & F(t, 1) &= f(0) = e_x(t), \\ F(0, s) &= f(0) = (f * \bar{f})(0), & F(1, s) &= f(0) = (f * \bar{f})(1), \end{aligned}$$

так что $f * \bar{f} \sim e_x$. $\square$

Другая гомотопия между $f * \bar{f}$ и e_x задается отображением $G: I \times I \rightarrow X$, где

$$G(t, s) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq (1-s)/2, \\ f(1-s), & (1-s)/2 \leq t \leq (1+s)/2, \\ f(2-2t), & (1+s)/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Идея состоит в том, что время, в течение которого мы движемся вдоль f , пропорционально $(1-s)$. Таким образом, первую часть времени, равную $(1-s)/2$, мы идем вдоль f , затем ждем в точке $f(1-s)$ и, наконец, возвращаемся вдоль f за последнюю часть времени, равную $(1-s)/2$. Итак, при $s=0$ этот путь совпадает с $f * \bar{f}$, а при $s=1$ мы все время проводим в точке x , т. е. проходим путь e_x .

В следующей главе мы вернемся к классам эквивалентности путей и их произведениям.

14.6. Упражнения. (а) Приведите примеры путей f, g, h в некотором пространстве X , для которых $f(1)=g(0)$, $g(1)=h(0)$ и (i) $(f*g)*h \neq f*(g*h)$, (ii) $(f*g)*h = f*(g*h)$.

(б) Дайте прямое доказательство того, что $e_{f(0)} * f \sim f * e_{f(1)}$.

(с) Пусть f — путь в X , и пусть $h: I \rightarrow I$ — непрерывное отображение, для которого $h(0)=0$, $h(1)=1$. Докажите, что $f \sim fh$.

(д) Используйте (с) для прямого доказательства того, что $f \sim e_x * f$, где f — путь с началом в x .

(е) Пусть $f, g: I \rightarrow X$ — пути в X из x в y . Докажите, что $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f * \bar{g} \sim e_x$.

(ф) Пусть $h: I \rightarrow I$ — непрерывная функция, для которой $h(0)=1$ и $h(1)=0$. Докажите, что если f — путь, то $\bar{f} \sim fh$.

(г) Пусть $0=t_0 \leq t_1 \leq t_2=1$ и $f: I \rightarrow X$ — некоторый путь. Определим пути f_1, f_2 равенствами

$$f_1(t) = f((1-t)t_0 + tt_1), \quad f_2(t) = f((1-t)t_1 + tt_2).$$

Докажите, что $f_1 * f_2 \sim f$. (Указание: примените (с).)

(h) Пусть $0=t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q=1$ и $f: I \rightarrow X$ — некоторый путь. Определим пути $f_1, f_2, \dots, f_q$ равенствами $f_i(t) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i)$. Докажите, что $[f] = [f_1][f_2] \dots [f_q]$.

(i) Пусть X — пространство, представленное в виде $X = U \cup V$, где U и V — открытые подмножества. Покажите, что если f — путь в X , то $[f]$ можно представить в виде $[f] = [f_1][f_2] \dots [f_q]$, где каждое f_j — либо путь в U , либо путь в V . (Указание. Рассмотрите открытое покрытие $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ отрезка I , запишите

$f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ в виде объединения непересекающихся открытых интервалов и воспользуйтесь компактностью I , или можно применить упр. 7.13 (g). Наконец, примените (h).)

(j) (i) Докажите, что если $h: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ — гомеоморфизм, то существует гомеоморфизм $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, при котором $f|(0, 1) = h$. Докажите единственность такого гомеоморфизма.

(Указание: рассмотрите интервал $(0, a]$, замкнутый в I , и покажите, что $h((0, a])$ имеет вид $(0, b]$ или $[c, 1)$ для некоторого b или c .) (ii) Докажите, что если $h: I \rightarrow I$ — гомеоморфизм, то $h(\partial I) = \partial I$. (Указание: воспользуйтесь связностью.) (iii) Пусть $f, g: I \rightarrow X$ — пути в X , такие, что $f: I \rightarrow f(I)$ и $g: I \rightarrow g(I)$ — гомеоморфизмы. Докажите, что если $f(I) = g(I)$, то либо $f \sim g$,

либо $f \sim \bar{g}$. (Указание: используйте (ii).) (iv) Пусть $f, g: I \rightarrow X$ — замкнутые пути в X , такие, что $f: \dot{I} \rightarrow f(\dot{I})$ и $g: \dot{I} \rightarrow g(\dot{I})$ — гомеоморфизмы. Докажите, что если $f(I) = g(I)$ и $f(\partial I) = g(\partial I)$,

то либо $f \sim g$, либо $f \sim \bar{g}$.

Глава 15

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

В предыдущей главе мы видели, что классы эквивалентности путей (пути эквивалентны, если они гомотопны относительно $\{0, 1\}$) в пространстве X почти удовлетворяют аксиомам группы. Проблема только в том, что умножение не всегда определено, а единица «плавает». Обойти эти трудности позволяет использование замкнутых путей.

15.1. Определение. Путь называется *замкнутым*, если $f(0) = f(1)$. Если $f(0) = f(1) = x$, то говорят, что f — замкнутый путь в точке x .

В некоторых книгах замкнутый путь называют петлей.

Заметим, что произведение $f * g$ определено для любой пары замкнутых путей в некоторой точке $x \in X$. Обозначим множество классов эквивалентности замкнутых путей в точке $x \in X$ через $\pi(X, x)$. Это множество наделено умножением: $[f][g] = [f * g]$ при $[f], [g] \in \pi(X, x)$, которое определено корректно по лемме 14.2. Следующий результат устанавливает, что $\pi(X, x)$ — группа; она называется *фундаментальной группой* пространства X в точке x .

15.2. Теорема. $\pi(X, x)$ является группой.

Это следует из гл. 14. Произведение уже было определено. Единичным элементом является $[e_x]$ (см. лемму 14.4.), обратные элементы задаются равенством $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ (см. лемму 14.5), а ассоциативность следует из леммы 14.3.

Ввиду ассоциативности умножения классов эквивалентности путей мы часто будем вместо $[(f*g)*h]$ писать $[f*g*h]$. Заметим, однако, что писать $f*g*h$ вместо $(f*g)*h$ нельзя.

Прежде чем двигаться дальше, предлагаем читателю следующие упражнения.

15.3. Упражнения. (а) Почему нельзя описать $\pi(X, x)$ без привлечения точки x ?

(б) Покажите, что если X — конечное топологическое пространство с дискретной топологией, то $\pi(X, x) = 0$.

(с) Вычислите $\pi(Q, 0)$, где Q — множество рациональных чисел с топологией, индуцированной обычной топологией $\mathbb{R}$.

(d) Пусть X — пространство, для которого $\pi(X, x) = 0$. Покажите, что если f, g — два пути в X , причем $f(0) = g(0) = x$ и $f(1) = g(1)$, то $f \sim g$. (Указание: воспользуйтесь упр. 14.6 (е).)

Если выбрать две различные точки $x, y \in X$, то заранее не видно причин, по которым $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ должны быть связаны друг с другом. Но если найдется путь из x в y , то такая связь имеется.

15.4. Теорема. Пусть $x, y \in X$. Если в X найдется путь из x в y , то группы $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ изоморфны.

Доказательство. Пусть f — путь из x в y . Если g — замкнутый путь в точке x , то $(\bar{f}*g)*f$ — замкнутый путь в точке y . Поэтому можно определить отображение $u_f: \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$ равенством $u_f[g] = [\bar{f}*g*f]$. Это отображение — гомоморфизм групп, потому что

$$\begin{aligned} u_f([g][h]) &= u_f[g*h] = [\bar{f}*g*h*f] = \\ &= [\bar{f}*g*f*\bar{f}*h*f] = [\bar{f}*g*f][\bar{f}*h*f] = u_f[g]u_f[h]. \end{aligned}$$

Используя путь $\bar{f}$ из y в x , можно определить $u_{\bar{f}}: \pi(X, y) \rightarrow \pi(X, x)$ равенством $u_{\bar{f}}[h] = [f*h*\bar{f}]$. Как показывает простая проверка, тогда $u_{\bar{f}}u_f[g] = [g]$ и $u_fu_{\bar{f}}[h] = [h]$, так что u_f биективно и потому является изоморфизмом. $\square$

15.5. Следствие. Если X — линейно связанное пространство, то для любых $x, y \in X$ группы $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ изоморфны.

Этот результат не будет верным, если опустить условие линейной связности X , и если X только связно, он, вообще говоря, тоже не имеет места. После того как мы вычислим несколько фундаментальных групп (в последующих главах), читатель сумеет построить примеры связных пространств, для которых $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ не изоморфны для некоторых пар точек $x, y \in X$.

Ввиду следствия 15.5 возникает искушение опустить x в $\pi(X, x)$, если X линейно связно. Это опасно, так как канонического изоморфизма между $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ не существует, поскольку различные пути из x в y могут определять различные изоморфизмы.

15.6. Упражнения. (а) Докажите, что два пути f, g из x в y тогда и только тогда определяют один и тот же изоморфизм между $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ (т. е. $u_f = u_g$), когда $[g*f]$ принадлежит центру $\pi(X, x)$. Центр $Z(G)$ группы G определяется как

$$Z(G) = \{a \in G: ab = ba \text{ для всех } b \in G\}.$$

(б) Пусть $u_f: \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$ — изоморфизм, определенный некоторым путем f из x в y . Докажите, что u_f тогда и только тогда не зависит от f , когда $\pi(X, x)$ — абелева группа.

В оставшейся части главы мы будем изучать, как ведет себя фундаментальная группа при непрерывном отображении топологических пространств. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение; следующие три факта очевидны.

(i) Если f, g — пути в X , то $\varphi f, \varphi g$ — пути в Y .

(ii) Если $f \sim g$, то $\varphi f \sim \varphi g$.

(iii) Если f — замкнутый путь в X в точке $x \in X$, то φf — замкнутый путь в Y в точке $\varphi(x)$.

Итак, если $[f] \in \pi(X, x)$, то $[\varphi f]$ — корректно определенный элемент группы $\pi(Y, \varphi(x))$. Поэтому определим $\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$ равенством $\varphi_*[f] = [\varphi f]$.

15.7. Лемма. φ_* — гомоморфизм групп.

В самом деле, $\varphi_*([f][g]) = \varphi_*[f*g] = [\varphi(f*g)] = [\varphi f * \varphi g] = [\varphi f][\varphi g] = \varphi_*[f] \varphi_*[g]$.

15.8. Определение. Гомоморфизм $\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$, определенный равенством $\varphi_*[f] = [\varphi f]$,

где $\varphi: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, называется гомоморфизмом, индуцированным отображением φ .

Доказательство следующих двух результатов просто и предоставляется читателю.

15.9. Теорема. (i) Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ и $\psi: Y \rightarrow Z$ — непрерывные отображения; тогда $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$.

(ii) Если $1: X \rightarrow X$ — тождественное отображение, то 1_* — тождественный гомоморфизм группы $\pi(X, x)$.

15.10. Следствие. Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, то $\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$ — изоморфизм.

Итак, фундаментальная группа дает средство перехода от топологии к алгебре. Для этого процесса характерны следующие черты.

(i) Каждому топологическому пространству (с отмеченной точкой) сопоставляется некоторая группа (в данном случае фундаментальная группа).

(ii) Каждому непрерывному отображению топологических пространств сопоставляется некоторый (в данном случае индуцированный) гомоморфизм групп.

(iii) Композиции непрерывных отображений сопоставляется композиция индуцированных гомоморфизмов.

(iv) Тожественному отображению отвечает тождественный гомоморфизм.

(v) Гомеоморфизму отвечает изоморфизм.

Описанный процесс перехода от топологии к алгебре дает хороший пример, показывающий, что такое *алгебраическая топология*. Мы заменяем топологию алгеброй и используем наше знание алгебры, чтобы узнать кое-что о топологии. Конечно, если фундаментальные группы двух пространств изоморфны, это не означает, что пространства гомеоморфны. Но если фундаментальные группы не изоморфны, то пространства заведомо не гомеоморфны.

Замечание. Отмеченные выше свойства (i) — (v) дают пример *функтора*. Итак, фундаментальная группа — это функтор из топологии (совокупности топологических пространств с отмеченными точками и непрерывных отображений, переводящих отмеченную точку в отме-

ченную) в алгебру (совокупность групп и их гомоморфизмов).

15.11. Упражнения. (а) Приведите пример непрерывного инъективного отображения $\varphi: X \rightarrow Y$, для которого φ_* не инъективно (предполагая известным¹⁾, что $\pi(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$, $\pi(D^2, x) = 0$).

(б) Приведите пример непрерывного сюръективного отображения $\varphi: X \rightarrow Y$, для которого φ_* не сюръективно.

(с) Докажите, что если $\varphi: X \rightarrow Y$ непрерывно и f — путь из x в y , то $\varphi_* u_f = u_{\varphi f} \varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(y))$, где u_f и $u_{\varphi f}$ — изоморфизмы фундаментальных групп, определяемые путями f и φf .

(д) Докажите, что два непрерывных отображения $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$, гомотопные относительно некоторой точки $x_0 \in X$ и обладающие свойством $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, индуцируют один и тот же гомоморфизм группы $\pi(X, x_0)$ в $\pi(Y, \varphi(x_0))$.

(е) Пусть A — ретракт X и $r: X \rightarrow A$ — ретракция. Докажите, что $i_*: \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ — мономорфизм (где $i: A \rightarrow X$ — включение) и что $r_*: \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$ — эпиморфизм для любой точки $a \in A$.

(ф) В обозначениях (е) предположим, что $i_* \pi(A, a)$ — нормальная подгруппа $\pi(X, a)$. Докажите, что $\pi(X, a)$ — прямое произведение подгрупп $\text{im } i_*$ и $\ker r_*$.

(г) Докажите, что если A — сильный деформационный ретракт X , то отображение включения $i: A \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм $i_*: \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ для любой точки $a \in A$.

(h) Покажите, что если $\varphi: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение, гомотопное тождественному, то $\varphi_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, \varphi(x_0))$ — изоморфизм для любой точки $x_0 \in X$ (в случае затруднения загляните в доказательство теоремы 15.12).

Следующий результат обобщает упр. 15.11 (д).

15.12. Теорема. Пусть $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения топологических пространств и $F: \varphi \simeq \psi$ — гомотопия. Если $f: I \rightarrow Y$ — путь из $\varphi(x_0)$ в $\psi(x_0)$, определенный равенством $f(t) = F(x_0, t)$, то гомоморфизмы $\varphi_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x_0))$ и $\psi_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, \psi(x_0))$ связаны соотношением $\psi_* = u_f \varphi_*$, где u_f — изоморфизм групп $\pi(Y, \varphi(x_0))$ и $\pi(Y, \psi(x_0))$, определенный путем f .

Доказательство. Нужно показать, что если $[g] \in \pi(X, x_0)$, то $[\psi g] = [\bar{f} * \varphi g * f]$. Другими словами, нужно показать, что пути $(\bar{f} * \varphi g) * f$ и ψg эквивалентны. Заме-

¹⁾ См. следующую главу. — Прим. ред.

тим, что

$$((\bar{f} * \varphi g) * f)(t) = \begin{cases} f(1-4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \varphi g(4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ f(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Это можно переписать в виде

$$((\bar{f} * \varphi g) * f)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1-4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ F(g(4t-1), 0), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ F(x_0, 2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Между тем $\psi g(t) = F(g(t), 1)$. Чтобы усмотреть гомотопию между $(\bar{f} * \varphi g) * f$ и ψg , заметим, что путь ψg эквивалентен пути $(e_x * \psi g) * e_x$, где $x = \psi(x_0)$. Путь $(e_x * \psi g) * e_x$ имеет вид

$$((e_x * \psi g) * e_x)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ F(g(4t-1), 1), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ F(x_0, 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому определим отображение $H: I \times I \rightarrow Y$ формулами

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x_0, 1-4t(1-s)), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ F(g(4t-1), s), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ F(x_0, 1+2(t-1)(1-s)), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Отображение H , очевидно, непрерывно и

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= ((\bar{f} * \varphi g) * f)(t), & H(t, 1) &= ((e_x * \psi g) * e_x)(t), \\ H(0, s) &= F(x_0, 1) = \psi(x_0), & H(1, s) &= F(x_0, 1) = \psi(x_0). \end{aligned}$$

Следовательно, $(\bar{f} * \varphi g) * f \sim (e_x * \psi g) * e_x \sim \psi g$, откуда $u_f \varphi_* = \psi_*$. $\square$

Эту теорему можно сформулировать по-другому, сказав, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y, \varphi(x_0)) \\ & \searrow \psi_* & \downarrow u_f \\ & & \pi(Y, \psi(x_0)) \end{array}$$

Следующие два результата относятся к гомотопически эквивалентным пространствам.

15.13. Теорема. Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$ — изоморфизм для любой точки $x \in X$.

Доказательство. Так как φ — гомотопическая эквивалентность, то существует непрерывное отображение $\psi: Y \rightarrow X$, для которого $\varphi\psi \simeq 1: Y \rightarrow Y$ и $\psi\varphi \simeq 1: X \rightarrow X$. По теореме 15.12 имеем $u_*(\varphi\psi)_* = 1_*$, и так как u_* и 1_* — изоморфизмы, то $(\varphi\psi)_* = \psi_*\varphi_*$ — тоже изоморфизм. Это означает, что ψ_* — эпиморфизм, а φ_* — мономорфизм. Аналогично, $\varphi_*\psi_*$ — изоморфизм, откуда φ_* — эпиморфизм, а ψ_* — мономорфизм. $\square$

15.14. Следствие. Стягиваемое пространство имеет тривиальную фундаментальную группу.

15.15. Определение. Топологическое пространство X называется *односвязным*, если оно линейно связно и $\pi(X, x) = \{1\}$ для некоторой (и, следовательно, любой) точки $x \in X$.

Таким образом, стягиваемое пространство односвязно. Обратное, как читатель в дальнейшем убедится, неверно.

15.16. Упражнения. (а) Пусть A — слабый ретракт X (см. упр. 13.10 (е)). Что можно сказать о гомоморфизмах $i_*: \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$, $r_*: \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$ при $a \in A$?

(б) Говорят, что пространство X обладает свойством C , если для любого замкнутого пути $f: I \rightarrow X$ существует такая гомотопия $F: I \times I \rightarrow X$, что $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1)$ — постоянное отображение, $F(0, s) = F(1, s)$ для всех $s \in I$. Заметим, что F не обязательно является гомотопией относительно $\{0, 1\}$. Докажите, что если X обладает свойством C , то X односвязно.

(с) Пусть $X = U \cup V$, где U, V открыты и односвязны, и $U \cap V$ линейно связно. Докажите, что X односвязно. Следовательно, сфера S^n при $n \geq 2$ односвязна. (Указание: воспользуйтесь упр. 14.6 (i) и (е).)

Последний результат этой главы относится к фундаментальной группе топологического произведения пространств. Он мог быть получен в этой главе и раньше.

15.17. Теорема. Пусть X, Y — два линейно связных топологических пространства. Фундаментальная группа произведения $X \times Y$ изоморфна произведению фундаментальных групп пространств X и Y .

Доказательство. Пусть $p: X \times Y \rightarrow X$, $q: X \times Y \rightarrow Y$ — проекции. Определим $\varphi: \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ равенством $\varphi[f] = (p_*[f], q_*[f]) = ([pf], [qf])$.

Проверим сначала, что φ корректно определено. Если $f \sim g$, то имеется непрерывное отображение $F: I \times I \rightarrow X \times Y$, такое, что $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$ и $F(0, s) = F(1, s) = (x_0, y_0)$. Непрерывные отображения $pF: I \times I \rightarrow X$ и $qF: I \times I \rightarrow Y$ определяют эквивалентности $pf \sim pg$ и $qf \sim qg$, так что $\varphi[f] = \varphi[g]$ и φ корректно определено.

Чтобы установить сюръективность φ , предположим, что $([f_1], [f_2]) \in \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$. Рассмотрим отображение $f: I \rightarrow X \times Y$, определенное равенством $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Очевидно, что $\varphi[f] = ([f_1], [f_2])$.

Чтобы показать инъективность φ , предположим, что $\varphi[f] = \varphi[g]$. Это означает, что $pf \sim pg$ и $qf \sim qg$. Если $F_1: I \times I \rightarrow X$ и $F_2: I \times I \rightarrow Y$ задают эти эквивалентности, то $F: I \times I \rightarrow X \times Y$, определенное равенством $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$, дает эквивалентность $f \sim g$.

Наконец, гомоморфность φ следует из того очевидного факта, что если $f, g: I \rightarrow X \times Y$ — пути с $f(1) = g(0)$, то $p(f * g) = pf * pg$ и $q(f * g) = qf * qg$. $\square$

Другие способы доказательства теоремы 15.17 содержатся в упражнениях.

15.18. Упражнения. (а) Докажите, что произведение двух односвязных пространств односвязно.

(б) Пусть $f: I \rightarrow X$, $g: I \rightarrow Y$ — замкнутые пути в точках $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ соответственно. Пусть $i: X \rightarrow X \times Y$ и $j: Y \rightarrow X \times Y$ — включения, определенные равенствами $i(x) = (x, y_0)$ и $j(y) = (x_0, y)$. Покажите, что пути $(if) * (jg)$ и $(jg) * (if)$ в $X \times Y$ эквивалентны.

(с) В обозначениях (б) покажите, что отображение произведения $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ в $\pi(X \times Y, (x_0, y_0))$ вида $([f], [g]) \mapsto [(if) * (jg)]$ является изоморфизмом групп.

(д) Топологической группой G называется группа, которая является также топологическим пространством, причем отображе-

ния $\mu: G \times G \rightarrow G$ и $\nu: G \rightarrow G$, определенные равенствами $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ и $\nu(g) = g^{-1}$, непрерывны. Пусть f, h — замкнутые пути в G в точке $e \in G$. Определим $f \cdot h$ равенством $(f \cdot h)(t) = \mu(f(t), h(t))$, $t \in I$. Докажите, что $f * h \sim f \cdot h \sim h * f$, и выведите отсюда, что фундаментальная группа $\pi(G, e)$ абелева. Покажите далее, что гомоморфизм $\nu_*: \pi(G, e) \rightarrow \pi(G, e)$ удовлетворяет условию $\nu_*[f] = [f]^{-1}$.

(е) Определим на окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$ умножение $\mu: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ равенством $\mu(z_1, z_2) = z_1 z_2$ и отображение $\nu: S^1 \rightarrow S^1$ равенством $\nu(z) = z^{-1}$. Докажите, что S^1 — топологическая группа. Выведите отсюда, что $\pi(S^1, 1)$ — абелева группа.

(f) Обобщим результат упр. (d). Пусть x_0 — точка пространства X . Предположим, что существует непрерывное отображение $\mu: X \times X \rightarrow X$, такое, что $\mu(x, x_0) = \mu(x_0, x) = x$ для всех $x \in X$. Докажите, что если $f, g: I \rightarrow X$ — замкнутые пути в точке $x_0 \in X$ и $i, j: X \rightarrow X \times X$ — включения $i(x) = (x, x_0)$, $j(x) = (x_0, x)$, то $\mu((if) * (jg)) = f * g$. Выведите из (b), что $\pi(X, x_0)$ — абелева группа.

(g) Обобщим результат упр. (f). Пространство X называется *H-пространством* (в честь Хайнца Хопфа), если существуют непрерывное отображение $\mu: X \times X \rightarrow X$ и точка $x_0 \in X$, такие, что $\mu i \simeq 1(\text{rel } x_0)$ и $\mu j \simeq 1(\text{rel } x_0)$, где i и j — те же включения, что и в (f). Заметим, что $\mu(x_0, x_0) = x_0$. Докажите, что фундаментальная группа $\pi(X, x_0)$ *H-пространства* абелева. (Указание: покажите, что $\mu((if) * (jg)) \sim f * g$.)

Фундаментальную группу $\pi(X, x_0)$ часто обозначают $\pi_1(X, x_0)$, где индекс 1 напоминает о том, что при определении фундаментальной группы использовались пути (отображения отрезка $I \subset \mathbb{R}^1$). В общем случае можно определить $\pi_n(X, x_0)$, используя отображения куба $I^n \subset \mathbb{R}^n$ в X . Эта группа называется *n-й гомотопической группой* пространства X в точке x_0 . Мы наметим кратко соответствующие определения; читатель, которого это не интересует, может перейти прямо к следующей главе.

Пусть ∂I^n означает, как обычно, край I^n , т. е.

$$\partial I^n = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in I^n: t_i = 0 \text{ или } 1 \text{ для некоторого } i\}.$$

Множество $\pi_n(X, x_0)$ состоит из гомотопических классов относительно ∂I^n непрерывных отображений $f: I^n \rightarrow X$, для которых $f(\partial I^n) = x_0$. Произведение определяется как $[f][g] = [f * g]$, где

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Можно проверить, что произведение определено корректно и задает на $\pi_n(X, x_0)$ структуру группы. Конечно, при $n = 1$ мы получаем фундаментальную группу. Фундаментальная группа, как мы увидим далее, не обязательно абелева, но $\pi_n(X, x_0)$ при $n \geq 2$ всегда абелева.

15.19. Упражнения. (а) Докажите, что $\pi_n(X, x_0)$ — группа.

(б) Докажите, что если в X существует путь из x_0 в x_1 , то $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$ изоморфны.

(с) Для непрерывного отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ определите $\varphi_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ и докажите, что φ_* — гомоморфизм. Докажите также теорему 15.9 для n -х гомотопических групп. Выведите, что гомеоморфные пространства имеют изоморфные гомотопические группы.

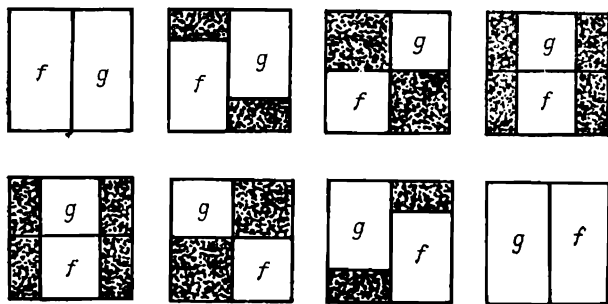


Рис. 15.1

(д) Докажите, что гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные гомотопические группы.

(е) Докажите, что при $n \geq 2$ группа $\pi_n(X, x_0)$ абелева. (Указание: гомотопия между $f * g$ и $g * f$ изображена на рис. 15.1.)

Примечание. Имеет место результат, в некотором смысле обратный к (д). Это — теорема Уайтхеда, которая утверждает, что если X и Y — топологические пространства определенного типа (так называемые линейно связанные клеточные комплексы) и $\varphi: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, индуцирующее изоморфизмы $\varphi_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ при всех $n \geq 1$, то φ — гомотопическая эквивалентность.

Глава 16

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА ОКРУЖНОСТИ

За исключением нескольких тривиальных случаев, мы до сих пор не вычислили фундаментальной группы ни одного пространства. В этой главе мы вычислим фундаментальную группу окружности S^1 и в результате получим группу $\mathbb{Z}$ целых чисел. Интуитивно этот результат можно объяснить следующим образом. Всякий замкнутый путь f в S^1 в точке $1 \in S^1$ наворачивается некоторое число раз на окружность; это число называется числом оборотов или степенью отображения f . (Начнем с $f(0) = 1$ и рассмотрим $f(t)$ по мере возрастания t ; каждый обход окружности против часовой стрелки считаем за $+1$, а каждый обход по часовой стрелке за -1 . Сумма полученных чисел есть число оборотов или степень f .) Итак, каждому замкнутому пути f в точке 1 мы сопоставили целое число. Оказывается, два замкнутых пути тогда и только тогда эквивалентны (т. е. гомотопны относительно $\{0, 1\}$), когда их степени совпадают. Наконец, для любого целого n существует замкнутый путь степени n .

Чтобы получить более строгое определение степени замкнутого пути, рассмотрим следующее отображение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на S^1 : $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp 2\pi it$. Геометрически мы представляем прямую в виде спирали, а отображение e — как проекцию (рис. 16.1). Заметим, что $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Идея состоит в том, что если дано отображение $f: I \rightarrow S^1$, для которого $f(0) = f(1) = 1$, то существует единственное отображение $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$, для которого $\tilde{f}(0) = 0$ и $e\tilde{f} = f$ (отображение $\tilde{f}$ называется *поднятием* f). Так как $f(1) = 1$, то $\tilde{f}(1) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$; это целое число и называется степенью f . Далее мы

покажем, что если f_0 и f_1 — эквивалентные пути в S^1 , то $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$. Это приводит к отображению $\pi(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, которое, как мы покажем, является изоморфизмом групп.

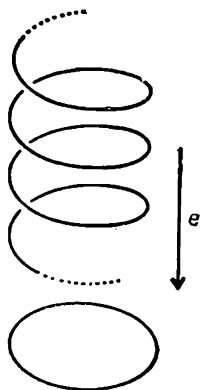


Рис. 16.1

Этот метод вычисления $\pi(S^1, 1)$ обобщается на некоторые другие пространства; см. гл. 17—19. Следующая лемма является исходным пунктом для основного определения, приведенного в гл. 17.

16.1. Лемма. Пусть U — какое-нибудь открытое подмножество $S^1 \setminus \{1\}$ и $V = I \cap e^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$. Тогда $e^{-1}(U)$ есть дизъюнктное объединение открытых множеств $V + n = \{v + n, v \in V\}$, $n \in \mathbb{Z}$, каждое из которых e гомеоморфно отображает на U .

Доказательство. Предположим, что U — открытый интервал, т. е.

$$U = \{\exp 2\pi it : 0 \leq a < t < b \leq 1\}$$

для некоторых a, b . Тогда $V = (a, b)$ и $V + n = (a + n, b + n)$. Очевидно, что $e^{-1}(U)$ — дизъюнктное объединение открытых множеств $V + n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Пусть e_n обозначает ограничение e на $(a + n, b + n)$. Очевидно, что e_n непрерывно и биективно. Для проверки того, что e_n^{-1} непрерывно, рассмотрим точку $x \in (a + n, b + n)$ и заключим ее в отрезок $W = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $W \subset (a + n, b + n)$. Так как отрезок W

компактен, а окружность S^1 хаусдорфова, то по теореме 8.8 e_n определяет гомеоморфизм $W \rightarrow e_n(W)$. Точка $e_n(x)$ не может быть концом дуги $e_n(W)$, так как в этом случае образом связного множества $e_n(W) \setminus e_n(x)$ при гомеоморфизме e_n^{-1} было бы несвязное множество $W \setminus \{x\}$. Поэтому $e_n(W)$ — окрестность точки $e_n(x)$ в S^1 и в U , и так как отображение e_n^{-1} , ограниченное на эту окрестность, является гомеоморфизмом, то оно непрерывно в точке $e_n(x)$, а так как точка $x \in (a+n, b+n)$ произвольна, то e_n^{-1} непрерывно на всем множестве $e_n(a+n, b+n) = U$, и потому e_n — гомеоморфизм. $\square$

16.2. Упражнение. Покажите, что лемма справедлива для $S^1 \setminus \{x\}$, где x — произвольная точка S^1 .

16.3. Следствие. Если $f: X \rightarrow S^1$ не сюръективно, то f гомотопно нулю.

Доказательство. Если x не принадлежит образу f , то $S^1 \setminus \{x\}$ гомеоморфно стягиваемому пространству $(0, 1)$ ($x = \exp 2\pi is$ при некотором s и $S^1 = \{\exp 2\pi it: s \leq t < 1+s\}$). $\square$

Перейдем теперь к первому основному результату этой главы: так называемой *теореме о накрывающем пути* (для $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$).

16.4. Теорема. Всякое непрерывное отображение $f: I \rightarrow S^1$ имеет поднятие $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$. Более того, если $x_0 \in \mathbb{R}$ — точка, в которой $e(x_0) = f(0)$, то существует единственное поднятие $\tilde{f}$, для которого $\tilde{f}(0) = x_0$.

Доказательство. Для любого $x \in S^1$ пусть U_x — такая открытая окрестность x , что $e^{-1}(U_x)$ — дизъюнктное объединение открытых подмножеств $\mathbb{R}$, каждое из которых гомеоморфно отображается на U_x при помощи e . Множество $\{f^{-1}(U_x): x \in S^1\}$ можно записать в виде открытого покрытия $\{(x_j, y_j) \cap I: j \in J\}$ отрезка I . Так как отрезок I компактен, то найдется конечное подпокрытие вида $[0, t_1 + \varepsilon_1), (t_2 - \varepsilon_2, t_2 + \varepsilon_2), \dots, (t_n - \varepsilon_n, 1]$, где $t_i + \varepsilon_i > t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$. Выберем теперь $a_i \in (t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, t_i + \varepsilon_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$ так, чтобы $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$. Очевидно,

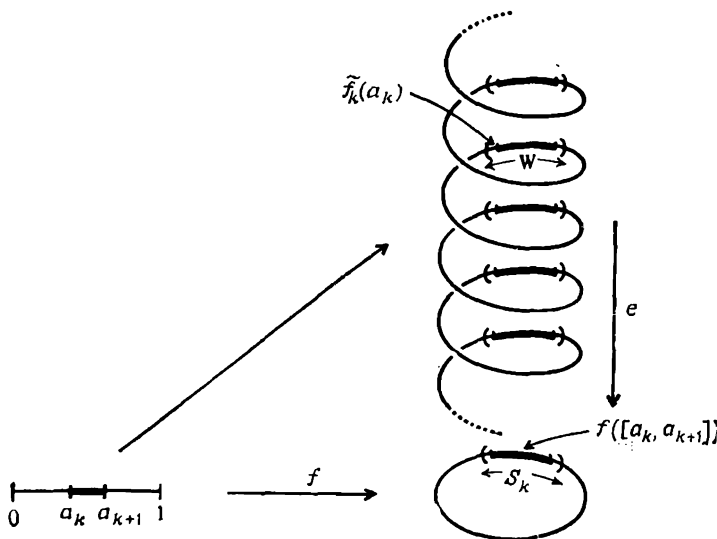


Рис. 16.2

что $f([a_i, a_{i+1}])$ содержится в некотором открытом подмножестве S_i окружности S^1 , таком, что $e^{-1}(S_i)$ является дизъюнктивным объединением открытых подмножеств $\mathbb{R}$, каждое из которых гомеоморфно отображается на S_i при помощи e .

Определим поднятия $\tilde{f}_k$ над $[0, a_k]$ по индукции при $k=0, 1, \dots, n$ так, чтобы $\tilde{f}_k(0)=x_0$. При $k=0$ это тривиально: $\tilde{f}_0(0)=x_0$, и другого выбора нет. Предположим, что $\tilde{f}_k: [0, a_k] \rightarrow \mathbb{R}$ определено и единственно. Напомним, что $f([a_k, a_{k+1}]) \subset S_k$ и $e^{-1}(S_k)$ — дизъюнктивное объединение множеств $\{W_j: j \in J\}$, для которых $e|W_j: W_j \rightarrow S_k$ — гомеоморфизм при любом $j \in J$. Далее, $\tilde{f}_k(a_k) \in W$ для некоторого однозначно определенного множества W из $\{W_j: j \in J\}$ (рис. 16.2). Любое продолжение $\tilde{f}_{k+1}$ должно отображать $[a_k, a_{k+1}]$ в W , так как отрезок $[a_k, a_{k+1}]$ линейно связан. Но ограничение $e|W: W \rightarrow S_k$ является гомеоморфизмом, поэтому существует единственное отображение $\rho: [a_k, a_{k+1}] \rightarrow W$.

такое, что $e\rho = f| [a_k, a_{k+1}]$ (на самом деле $\rho = (e|W)^{-1}f$). Определим теперь $\tilde{f}_{k+1}$ как

$$\tilde{f}_{k+1}(s) = \begin{cases} \tilde{f}_k(s), & 0 \leq s \leq a_k, \\ \rho(s), & a_k \leq s \leq a_{k+1}. \end{cases}$$

Это отображение непрерывно по лемме о склейке, так как $\tilde{f}_k(a_k) = \rho(a_k)$, и единственно по построению. По индукции получаем поднятие $\tilde{f}$. $\square$

Эта теорема позволяет определить степень замкнутого пути в S^1 . Пусть f — замкнутый путь в S^1 в точке 1 и $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ — единственное его поднятие, для которого $\tilde{f}(0) = 0$. Так как $e^{-1}(f(1)) = e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$, то $\tilde{f}(1)$ — целое число; назовем его *степенью* f . Чтобы показать, что эквивалентные пути имеют одинаковые степени, покажем сначала, что эквивалентные пути имеют эквивалентные поднятия. Для этого заменим в предыдущей теореме I на I^2 и получим следующую лемму.

16.5. Лемма. *Всякое непрерывное отображение $F: I^2 \rightarrow S^1$ имеет поднятие $\tilde{F}: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Более того, если $x_0 \in \mathbb{R}$ — точка, в которой $e(x_0) = F(0, 0)$, то существует единственное поднятие $\tilde{F}$, для которого $\tilde{F}(0, 0) = x_0$.*

Доказательство. Рассуждаем точно так же, как при доказательстве теоремы 16.4. Так как квадрат I^2 компактен, можно выбрать

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1, \quad 0 = b_0 < b_1 < \dots < b_m = 1$$

так, чтобы $F(R_{ij}) \subset S_{ij}$, где R_{ij} — прямоугольник

$$R_{ij} = \{(t, s) \in I^2: a_i \leq t \leq a_{i+1}, \quad b_j \leq s \leq b_{j+1}\},$$

а S_{ij} — открытое подмножество S^1 , для которого $e^{-1}(S_{ij})$ — дизъюнктное объединение открытых подмножеств $\mathbb{R}$, каждое из которых гомеоморфно отображается на S_{ij} при помощи e . Поднятие $\tilde{F}$ определяется индуктивно над прямоугольниками $R_{00}, R_{01}, \dots, R_{0m}, R_{10}, R_{11}, \dots$ при помощи процесса, аналогичного использованному в доказательстве теоремы 16.4. Детали мы оставляем читателю. $\square$

В качестве следствия получаем так называемую *теорему о монодромии* для $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, которая утверждает, что эквивалентные пути имеют одну и ту же степень.

16.6. Следствие. Пусть f_0 и f_1 — эквивалентные пути в S^1 в точке 1. Если $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_1$ — их поднятия, для которых $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$, то $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$.

Доказательство. Пусть F — гомотопия относительно $\{0, 1\}$ между f_0 и f_1 . Она однозначно поднимается до $\tilde{F}: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ с $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$. Так как $F(t, 0) = f_0(t)$ и $F(t, 1) = f_1(t)$, то $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{f}_0(t)$ и $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{f}_1(t)$. Далее, $\tilde{F}(1, t)$ — путь из $\tilde{f}_0(1)$ в $\tilde{f}_1(1)$, поскольку $F(1, t) = f_0(1) = f_1(1)$. Но $\tilde{F}(1, t) \in e^{-1}(f_0(1)) \cong \mathbb{Z}$; это означает, что $\tilde{F}(1, t)$ — постоянный путь, и потому $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$. Заметим, что на самом деле $\tilde{F}$ — гомотопия относительно $\{0, 1\}$ между $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_1$. $\square$

Теперь мы в состоянии вычислить фундаментальную группу окружности.

16.7. Теорема. $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. Определим $\varphi: \pi(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ равенством $\varphi([f]) = \deg f$, где $\deg f$ — степень f . Напомним, что $\deg f = \tilde{f}(1)$, где $\tilde{f}$ — единственное поднятие f , для которого $\tilde{f}(0) = 0$. Отображение φ определено корректно согласно следствию 16.6. Покажем, что φ — изоморфизм групп.

Покажем сначала, что φ — гомоморфизм. Пусть $l_a(f)$ — поднятие f с началом в точке $a \in e^{-1}(f(0))$. Таким образом, $l_0(f) = \tilde{f}$ и $l_a(f)(t) = \tilde{f}(t) + a$ для некоторого пути в S^1 с началом в 1. Очевидно, что $l_a(f * g) = l_a(f) * l_b(g)$, где $b = \tilde{f}(1) + a$. Итак, если $[f], [g] \in \pi(S^1, 1)$, то

$$\begin{aligned} \varphi([f][g]) &= \varphi([f * g]) = \tilde{f * g}(1) = l_0(f * g)(1) = (l_0(f) * l_b(g))(1) = \\ &= l_b(g)(1) = b + \tilde{g}(1) = \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) = \varphi([f]) + \varphi([g]), \end{aligned}$$

где $b = \tilde{f}(1)$. Следовательно, φ — гомоморфизм.

Легко показать, что φ сюръективно. Для $n \in \mathbb{Z}$ пусть $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ определено равенством $g(t) = nt$; тогда $eg: I \rightarrow S^1$ — замкнутый путь в точке 1. Так как g — поднятие eg , для которого $g(0) = 0$, то $\varphi([eg]) = \deg(eg) = = \varphi(1) = n$, откуда следует, что φ сюръективно.

Чтобы показать, что φ инъективно, предположим, что $\varphi([f]) = 0$, т. е. $\deg f = 0$. Это означает, что поднятие $\tilde{f}$ пути f удовлетворяет условию $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$. Так как $\mathbb{R}$ стягиваемо, то $\tilde{f} \simeq e_0(\text{rel } \{0, 1\})$. Другими словами, найдется отображение $F: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которого $F(0, t) = \tilde{f}(t)$, $F(1, t) = 0$ и $F(t, 0) = F(t, 1) = 0$. На самом деле $F(s, t) = (1-s)\tilde{f}(t)$. Но $eF: I^2 \rightarrow S^1$ удовлетворяет условиям $eF(0, t) = f(t)$, $eF(1, t) = 1$, $eF(t, 0) = eF(t, 1) = 1$, поэтому $f \simeq e_1(\text{rel } \{0, 1\})$, т. е. $[f] = 1 \in \pi(S^1, 1)$, что и доказывает инъективность φ . Следовательно, φ — изоморфизм. $\square$

Этим завершается доказательство основного результата настоящей главы. Отсюда немедленно получаем

16.8. Следствие. *Фундаментальная группа тора есть $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Завершим эту главу двумя приложениями. Первое из них известно под названием *основной теоремы алгебры*.

16.9. Следствие. *Всякий непостоянный комплексный многочлен имеет корень.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что многочлен имеет вид

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k$$

при $k \geq 1$. Допустим, что p не имеет нулей (или корней). Определим функцию $G: I \times [0, \infty) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ формулой

$$G(t, r) = \frac{p(r \exp 2\pi i t)}{|p(r \exp 2\pi i t)|} \frac{|p(r)|}{p(r)}$$

при $0 \leq t \leq 1$ и $r \geq 0$. Очевидно, G непрерывна. Опре-

делим отображение $F: I^2 \rightarrow S^1$ равенствами

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, s/(1-s)), & 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s < 1, \\ \exp 2\pi i k t, & 0 \leq t \leq 1, \quad s = 1. \end{cases}$$

Оно непрерывно, так как

$$\lim_{s \rightarrow 1} F(t, s) = \lim_{s \rightarrow 1} G(t, s/(1-s)) = \lim_{r \rightarrow \infty} G(t, r) = (\exp 2\pi i t)^k.$$

Кроме того, F — гомотопия относительно $\{0, 1\}$ между $f_0(t) = F(t, 0)$ и $f_1(t) = F(t, 1)$. Но $f_0(t) = 1$ и $f_1(t) = \exp 2\pi i k t$, так что $\deg f_0 = 0$, тогда как $\deg f_1 = k$, что приводит к противоречию при $k \geq 1$. $\square$

Второе приложение известно под названием *теоремы Брауэра о неподвижной точке на плоскости*. Напомним, что в гл. 10 мы доказали теорему о неподвижной точке для отрезка I . Следующий результат — аналогичная теорема для D^2 . Результат справедлив и в высших размерностях, однако для доказательства требуются уже другие средства.

16.10. Следствие. *Всякое непрерывное отображение $f: D^2 \rightarrow D^2$ имеет неподвижную точку, т. е. такую точку x , в которой $f(x) = x$.*

Доказательство. Предположим противное, что $x \neq f(x)$ для всех $x \in D^2$. Тогда можно определить отображение $\varphi: D^2 \rightarrow S^1$, полагая $\varphi(x)$ равным точке пересечения луча, проведенного из $f(x)$ в x , с окружностью S^1

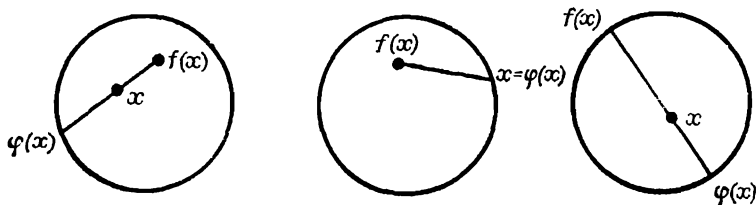
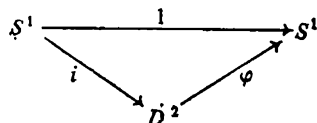
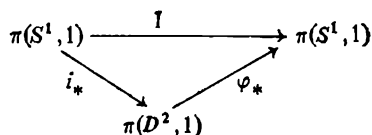


Рис. 16.3

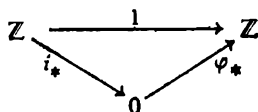
(рис. 16.3). Непрерывность φ очевидна. Пусть $i: S^1 \rightarrow D^2$ — включение; тогда $\varphi i = 1$ и мы имеем коммутативную диаграмму



Из нее следует коммутативность диаграммы



Но $\pi(D^2, 1) = 0$, так как диск D^2 стягиваем, и мы получаем коммутативную диаграмму



которая невозможна. $\square$

16.11. Упражнения. (а) Для $[f] \in \pi(S^1, 1)$ пусть γ — контур $\{f(t) : t \in I\} \subset O$. Положим $\omega(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$. Докажите, что (i) $\omega(f)$ — целое число, (ii) $\omega(f)$ не зависит от выбора $f \in [f]$, (iii) $\omega(f) = \deg f$.

(б) Пусть $f: S^1 \rightarrow S^1$ — отображение, определенное формулой $f(z) = z^k$ при некотором целом k . Опишите $f_*: \pi(S^1, 1) \rightarrow \pi(S^1, 1)$ в терминах изоморфизма $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

(в) Пусть α, β — следующие замкнутые пути в $S^1 \times S^1$: $\alpha(t) = (\exp 2\pi i t, 1)$, $\beta(t) = (1, \exp 2\pi i t)$. Покажите при помощи диаграмм, что $\alpha * \beta \sim \beta * \alpha$.

(г) Вычислите $\pi(\underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n, (1, 1, \dots, 1))$.

(д) Используя упр. 15.16 (с), выведите, что тор не гомеоморфен сфере S^2 .

(е) Докажите, что множество точек $z \in D^2$, для которых $D^2 \setminus \{z\}$ односвязно, есть в точности S^1 . Выведите отсюда, что если $f: D^2 \rightarrow D^2$ — гомеоморфизм, то $f(S^1) = S^1$.

(ж) Найдите фундаментальные группы следующих пространств: (i) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; (ii) $\mathbb{C}^*/G$, где G — группа гомеоморфизмов вида $\{\varphi^n: n \in \mathbb{Z}\}$ при $\varphi(z) = 2z$; (iii) $\mathbb{C}^*/H$, где $H = \{\psi^n: n \in \mathbb{Z}\}$ при $\psi(z) = 2z$; (iv) $\mathbb{C}^*/\{e, a\}$, где e — тождественный гомеоморфизм и $a(z) = -\bar{z}$.

Глава 17

НАКРЫВАЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой и нескольких следующих главах мы изучим обобщения результатов и понятий гл. 16.

Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что открытое подмножество $U \subset X$ *правильно накрыто* отображением p , если $p^{-1}(U)$ — дизъюнктное объединение открытых подмножеств $\tilde{U}$, каждое из которых гомеоморфно отображается на U при помощи p . Непрерывное отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется *накрывающим отображением*, если любая точка $x \in X$ имеет открытую окрестность, правильно накрытую отображением p . В этом случае мы говорим, что $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — *накрытие*, $\tilde{X}$ — *накрывающее пространство* для X и X — *база накрытия* $p: \tilde{X} \rightarrow X$.

Другими словами, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ является накрытием, если

- (i) p сюръективно и
- (ii) для любого $x \in X$ найдется открытая окрестность U точки x , такая, что $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in J} U_i$ для некоторого семейства $\{U_j: j \in J\}$ подмножеств $\tilde{X}$, удовлетворяющих условиям $U_j \cap U_k = \emptyset$ при $j \neq k$ и $p|_{U_j}: U_j \rightarrow U$ — гомеоморфизм для всех $j \in J$.

Из гл. 16 мы знаем, что $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ — накрытие. Очевидно, что всякий гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$ является накрывающим отображением. Другой тривиальный пример накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ получится, если положить $\tilde{X}$ равным $X \times Y$, где Y — дискретное пространство, и взять в качестве p каноническую проекцию. Интересным примером является накрытие $p_n: S^1 \rightarrow S^1$, где $p_n(z) = z^n$ ($n \neq 0$, окружность S^1 считаем вложенной в $\mathbb{C}$). Чтобы

убедиться, что это на самом деле накрывающее отображение, достаточно заметить, что для любого $x \in S^1$ множество $S^1 \setminus \{x\}$ правильно накрыто отображением p_n .

К накрытиям приводят также некоторые G -пространства. Пусть X есть G -пространство. Будем говорить, что действие G на X *собственно разрывно*, если для любой точки $x \in X$ найдется ее открытая окрестность V , такая, что $g \cdot V \cap g' \cdot V = \emptyset$ при всех $g, g' \in G$, $g \neq g'$. Заметим, что если действие собственно разрывно, то $g \cdot x \neq x$ при всех $g \in G$, $g \neq 1$, и всех $x \in X$, так как из $x \in V$ следует $g \cdot x \in g \cdot V$. Прежде чем рассмотреть примеры, мы докажем теорему, которая объяснит причину введения собственно разрывных действий.

17.1. Теорема. Пусть X есть G -пространство. Если действие G на X собственно разрывно, то $p: X \rightarrow X/G$ — накрытие.

Доказательство. Заметим сначала, что $p: X \rightarrow X/G$ — непрерывное сюръективное отображение. По теореме 5.12 отображение p открыто. Пусть U — открытая окрестность точки $x \in X$, удовлетворяющая условию собственной разрывности. Так как p — открытое отображение, то $p(U)$ — открытая окрестность точки $G \cdot x = p(x)$ и $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ (см. доказательство теоремы 5.12), причем $\{g \cdot U: g \in G\}$ — непересекающиеся открытые подмножества X . Далее, $p|_{g \cdot U}: g \cdot U \rightarrow p(U)$ — непрерывное открытое биективное отображение и, следовательно, гомеоморфизм. $\square$

Действие группы $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}$ вида $x \mapsto x + n$ собственно разрывно, так как если $x \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon < 1/2$, то $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ — открытая окрестность x , удовлетворяющая нужному условию. Так как это действие $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}$ превращает $\mathbb{R}$ в $\mathbb{Z}$ -пространство, мы видим, что $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — накрывающее отображение (читатель должен проверить, что этот пример совпадает с $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$).

Следующий пример показывает, что естественное отображение $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ является накрытием. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$ -пространство S^n , где $\mathbb{Z}_2$ действует по формуле $\pm 1 \cdot x = \pm x$. При $x \in S^n$ множество $\{y \in S^n: \|y - x\| < 1/2\}$

является открытой окрестностью x , удовлетворяющей условию из определения собственной разрывности. Иначе, так как $x \neq -x$ и S^n — хаусдорфово пространство, найдутся непересекающиеся открытые окрестности V и W соответственно точек x и $-x$. Окрестность $V \cap (-W)$ точки x удовлетворяет условию собственной разрывности. Этот пример допускает обобщение. Напомним, что группа G действует на X свободно, если $g \cdot x \neq x$ для всех $x \in X$ и $g \in G$, $g \neq 1$.

17.2. Теорема. Если G — конечная группа, свободно действующая на хаусдорфовом пространстве X , то действие G на X собственнo разрывно.

Доказательство. Пусть $G = \{1 = g_0, g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Так как X хаусдорфово, найдутся открытые окрестности $U_0, U_1, \dots, U_n$ точек $g_0 \cdot x, g_1 \cdot x, \dots, g_n \cdot x$ соответственно, для которых $U_0 \cap U_j = \emptyset$ при $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть U — пересечение $\bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j$, которое, очевидно, является открытой окрестностью x . Имеем $g_i \cdot U = \bigcap_{j=0}^n g_i \cdot (g_j^{-1} U_j) \subset U_i$ и $g_i \cdot U \cap g_j \cdot U = g_j \cdot (g_i^{-1} g_i \cdot U) \cap U = g_j \cdot (g_k U \cap U) = \emptyset$ при некотором k , так как $g_k \cdot U \subset U_k$ и $U \subset U_0$. Поэтому действие G на X собственнo разрывно. $\square$

Хороший пример свободного действия дает действие циклической группы $\mathbb{Z}_p$ на 3-мерной сфере $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2: |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$. Для q , взаимно простого с p , определим $h: S^3 \rightarrow S^3$ формулой

$$h(z_0, z_1) = (\exp(2\pi i/p) z_0, \exp(2\pi i q/p) z_1).$$

Тогда h — гомеоморфизм S^3 , причем $h^p = 1$. Определим действие $\mathbb{Z}_p$ на S^3 , полагая

$$n \cdot (z_0, z_1) = h^n(z_0, z_1), \quad n \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Это действие свободно и S^3 хаусдорфово, поэтому $S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_p$ — накрытие. Пространство орбит $S^3/\mathbb{Z}_p$ называется *линзовым пространством* и обозначается $L(p, q)$. Заметим, что $L(2, 1)$ — это $\mathbb{R}P^3$. Имеется очевидное

обобщение этого примера — действие Z_p на $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$; детали мы оставляем читателю.

Пора приступить к доказательству некоторых общих результатов о накрытиях. Заметим, что в примерах, связанных с действием групп, накрывающее отображение открыто, а база имеет фактортопологию относительно накрывающего отображения. На самом деле это верно для всех накрытий.

17.3. Теорема. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрывающее отображение. Тогда

- (i) p — открытое отображение;
- (ii) X имеет фактортопологию относительно p .

Доказательство. Пусть U — открытое подмножество X и $x \in p(U)$. Так как p — накрывающее отображение, то имеется правильно накрытая открытая окрестность V точки x . Пусть $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap U$. Так как $\tilde{x} \in p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in J} V_i$, то найдется открытое множество V_j в $\tilde{X}$, содержащее $\tilde{x}$. Так как $V_j \cap U$ открыто в V_j и $p|_{V_j}$ — гомеоморфизм V_j на V , то $p(V_j \cap U)$ открыто в V . Но V открыто в X , поэтому $p(V_j \cap U)$ открыто в X . Так как $x \in p(V_j \cap U) \subset p(U)$, то $p(U)$ открыто и потому p — открытое отображение.

Вторая часть теоремы следует из того, что p — непрерывное открытое отображение, и потому подмножество V пространства X тогда и только тогда открыто, когда $p^{-1}(V)$ открыто. $\square$

Многие результаты, полученные в предыдущей главе для накрытия $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, обобщаются на другие накрытия. Если $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие и $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, то *поднятием* f называется непрерывное отображение $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$, для которого $p\tilde{f} = f$. Следующий результат показывает, что если поднятие существует, то оно (в существенном) единственно.

17.4. Лемма. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие и $\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}: Y \rightarrow \tilde{X}$ — два поднятия отображения $f: Y \rightarrow X$. Если Y

связно и $\tilde{f}(y_0) = \tilde{\tilde{f}}(y_0)$ для некоторой точки $y_0 \in Y$, то $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$.

Доказательство. Определим Y' как множество $\{y \in Y: \tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y)\}$. Оно не пусто, поскольку $y_0 \in Y'$. Покажем, что Y' открыто и замкнуто. Пусть $y \in Y'$; тогда найдется открытая окрестность V точки $\tilde{f}(y)$, правильно накрытая отображением p , т. е. $p^{-1}(V)$ — дизъюнктное объединение множеств $\{V_j: j \in J\}$ и $p|_{V_j}: V_j \rightarrow V$ — гомеоморфизм для любого $j \in J$. Если $y \in Y'$, то $\tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y) \in V_k$ при некотором $k \in J$ и $\tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \tilde{\tilde{f}}^{-1}(V_k)$ — открытая окрестность точки y , лежащая в Y' . Чтобы убедиться в этом, возьмем $x \in \tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \tilde{\tilde{f}}^{-1}(V_k)$; тогда $\tilde{f}(x) \in V_k$ и $\tilde{\tilde{f}}(x) \in V_k$, а также $p\tilde{f}(x) = p\tilde{\tilde{f}}(x)$. Так как $p|_{V_k}$ — гомеоморфизм, то $\tilde{f}(x) = \tilde{\tilde{f}}(x)$. Значит, каждая точка из Y' имеет открытую окрестность, лежащую в Y' , и потому Y' открыто. С другой стороны, если $y \notin Y'$, то $\tilde{f}(y) \in V_k$ и $\tilde{\tilde{f}}(y) \in V_l$ при некоторых $k, l, k \neq l$. Следовательно, $\tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \tilde{\tilde{f}}^{-1}(V_l)$ — открытая окрестность y , лежащая в дополнении к Y' (доказывается, как и прежде). Итак, Y' замкнуто. Поскольку Y связно, то $Y = Y'$ и $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$. $\square$

Отсюда вытекает забавное следствие.

17.5. Следствие. *Предположим, что $\tilde{X}$ линейно связно и $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ — непрерывное отображение, для которого $p\varphi = p$. Если $\varphi(x_1) = x_1$ для некоторой точки $x_1 \in \tilde{X}$, то $\varphi(x) = x$ для всех $x \in \tilde{X}$ (т. е. φ — тождественное отображение).*

Доказательство. Пусть x — любая точка из $\tilde{X}$ и $\alpha: I \rightarrow \tilde{X}$ — путь из x_1 в x . Так как $\varphi(x_1) = x_1$, то пути α и $\varphi\alpha$ начинаются в точке x_1 . Далее, $p\alpha = p\varphi\alpha$, так что α и $\varphi\alpha$ — поднятия пути $p\alpha: I \rightarrow X$. По последней лемме $\alpha = \varphi\alpha$; в частности, концы путей α и $\varphi\alpha$ совпадают, т. е. $\varphi(x) = x$. $\square$

Следующий результат, известный как теорема о накрывающей гомотопии для путей, доказывается так же, как теорема 16.4 и лемма 16.5.

17.6. Теорема. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие.

(i) Для пути $f: I \rightarrow X$ и точки $a \in \tilde{X}$, такой, что $p(a) = f(0)$, найдется единственный путь $\tilde{f}: I \rightarrow \tilde{X}$, для которого $p\tilde{f} = f$ и $\tilde{f}(0) = a$.

(ii) Для непрерывного отображения $F: I \times I \rightarrow X$ и точки $a \in \tilde{X}$, такой, что $p(a) = F(0, 0)$, найдется единственное непрерывное отображение $\tilde{F}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$, для которого $p\tilde{F} = F$ и $\tilde{F}(0, 0) = a$.

Как следствие получаем теорему о монодромии, доказательство которой совпадает с доказательством следствия 16.6.

17.7. Следствие. Пусть f_0 и f_1 — эквивалентные пути в X . Если $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$, то $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$.

Продолжая обобщение результатов гл. 16, получаем следующий результат.

17.8. Теорема. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие с односвязным пространством $\tilde{X}$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множествами $\pi(X, p(a))$ и $p^{-1}(p(a))$, где $a \in \tilde{X}$.

Доказательство в основном содержится в доказательстве теоремы 16.7. Приведем его существенные моменты. Сначала определяем $\varphi: \pi(X, p(a)) \rightarrow p^{-1}(p(a))$ равенством $\varphi([f]) = \tilde{f}(1)$, где $\tilde{f}$ — поднятие f , для которого $\tilde{f}(0) = a$. Отображение φ определено корректно согласно следствию 17.7.

Далее определяем $\psi: p^{-1}(p(a)) \rightarrow \pi(X, p(a))$. Чтобы сделать это, выбираем $x \in p^{-1}(p(a))$ и некоторый путь f из a в x . Так как $\tilde{X}$ односвязно, любые два таких пути

⁴⁾ См. также упр. 18.4 (с). — Прим. ред.

эквивалентны, поэтому $[pf]$ — корректно определенный элемент $\pi(X, p(a))$. Положим $\psi(x) = [pf]$. Легко проверить, что $\phi\psi = 1$ и $\psi\phi = 1$, так что ϕ и ψ — биекции. $\square$

Смысл этого результата в том, что для вычисления $\pi(X, x_0)$ нужно найти накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ с односвязным накрывающим пространством $\tilde{X}$, а затем найти групповую структуру на $p^{-1}(x_0)$ так, чтобы биекция $\phi: \pi(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ стала изоморфизмом групп. Этим мы, в сущности, и занимались в гл. 16. Вообще говоря, сделать это не просто. Некоторые частные случаи появятся в последующих главах (см. также гл. 21).

17.9. Упражнения. (а) Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрывающее отображение, X_0 — подмножество X и $\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$. Докажите, что $p_0: \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$, определенное равенством $p_0(x) = p(x)$, является накрывающим отображением.

(б) Пусть $\tilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \text{ или } y \text{ целое}\}$ и $X = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1: z_1 = 1 \text{ или } z_2 = 1\}$. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ определено равенством $p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$. Покажите, что $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрывающее отображение.

(с) Какие из следующих отображений являются накрывающими: (i) $p: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, заданное как $p(z) = z^n$ при фиксированном целом n ; (ii) $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; (iii) $p: U \rightarrow \mathbb{C}^*$, заданное формулой $p(z) = (1 - z)^m z^n$, где m, n — фиксированные целые числа и $U = \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$?

(d) Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ и $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$ — накрывающие отображения. (i) Докажите, что $p \times q: \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$ — накрывающее отображение. (ii) Докажите, что если $X = Y$ и $\tilde{W} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{X} \times \tilde{Y}: p(\tilde{x}) = q(\tilde{y})\}$, то отображение $f: \tilde{W} \rightarrow X$, определенное равенством $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{x})$, является накрывающим. (iii) Что такое $\tilde{W}$ и f в случае, когда оба отображения $p: \tilde{X} \rightarrow X$ и $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$ совпадают с $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, где $e(t) = \exp 2\pi i t$?

(е) Пусть $a: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и $b: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — гомеоморфизмы комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определенные формулами $az = z + i$, $bz = \bar{z} + 1/2 + i$. Покажите, что $ba = a^{-1}b$, и выведите отсюда, что

$$G = \{a^m b^n: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$$

является группой гомеоморфизмов $\mathbb{C}$. Далее докажите, что действие G собственно разрывно и что пространство орбит $\mathbb{C}/G$ хаусдорфово.

(f) (продолжение (е)). Найдите полуоткрытый прямоугольник,

содержащий ровно одну точку из каждой орбиты действия G , показав тем самым, что O/G — бутылка Клейна.

(g) (продолжение (f)). Вложение бутылки Клейна в $\mathbb{R}^4$. Пусть $\varphi: O \rightarrow \mathbb{R}^5$ определено формулой $\varphi(x+iy) = (\cos 2\pi y, \cos 4\pi x, \sin 4\pi x, \sin 2\pi y \cos 2\pi x, \sin 2\pi x \sin 2\pi y)$. Покажите, что φ переводит каждую орбиту группы G в одну точку, и выведите отсюда, что O/G гомеоморфно образу φ .

Покажите, что ограничение отображения $\psi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, где $\psi(p, q, r, s, t) = ((p+2)q, (p+2)r, s, t)$, на образ φ является гомеоморфизмом.

(h) Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие с линейно связным X . Докажите, что мощность множества $p^{-1}(x)$ не зависит от $x \in X^1$. Если она конечна и равна n , то говорят, что $p: \tilde{X} \rightarrow X$ есть n -листное накрытие.

(i) Найдите двулистное накрытие $p: S^1 \times S^1 \rightarrow K$, где K — бутылка Клейна.

(j) Подмножество Σ некоторого пространства называется *простой замкнутой кривой*, если оно гомеоморфно S^1 . Пусть $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ — каноническая проекция сферы на проективную плоскость. Докажите, что если Σ — простая замкнутая кривая в $\mathbb{R}P^2$, то $p^{-1}(\Sigma)$ — либо простая замкнутая кривая в S^2 , либо объединение двух непересекающихся простых замкнутых кривых. (Указание: рассмотрите Σ как образ некоторого замкнутого пути в $\mathbb{R}P^2$.)

(k) Вычислите $\pi(S^1 \times S^1, (1, 1))$ прямо из результатов этой главы. (Указание: используя часть (i) упр. (d), найдите накрышающее отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$, а затем воспользуйтесь теоремой 17.8.)

(l) Предполагая известной односвязность S^n при $n \geq 2$ (упр. 15.16 (c)), покажите, что фундаментальная группа $\mathbb{R}P^n$ при $n \geq 2$ — циклическая порядка 2. Далее покажите, что если p — простое число, то фундаментальная группа линзового пространства $L(p, q)$ циклическая порядка p .

(m) Существует ли топологическое пространство Y , для которого $S^1 \times Y$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^2$ или S^2 ?

(n) Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие и X, Y — хаусдорфовы пространства. Докажите, что X тогда и только тогда является n -мерным многообразием, когда Y есть n -мерное многообразие.

(o) Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие и Y — некоторое пространство. Предположим, что $f: Y \rightarrow X$ имеет поднятие $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$. Докажите, что любую гомотопию $F: Y \times I \rightarrow X$, для которой $F(y, 0) = f(y)$, $y \in Y$, можно поднять до гомотопии $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ с $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$, $y \in Y$.

(p) Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие и $f, g: Y \rightarrow \tilde{X}$ — два непрерывных отображения, для которых $pf = pg$. Докажите, что множество точек в Y , в которых f и g совпадают, открыто и замкнуто.

¹ Ср. с упр. 18.4 (c). — Прим. ред.

(q) Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие с локально линейно связным X (см. упр. 12.10 (j)). Докажите, что $\tilde{X}$ также локально линейно связно.

(г) Скольжением накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется гомеоморфизм $h: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, для которого $ph = p$. Докажите, что множество всех скольжений образует группу.

(s) Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие, для которого $\tilde{X}$ связно и локально линейно связно. Докажите, что действие группы скольжений накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ на $\tilde{X}$ собственно разрывно¹⁾.

¹⁾ См. теорему 21.8.— *Прим. ред.*

Глава 18

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА НАКРЫВАЮЩЕГО ПРОСТРАНСТВА

Эта глава посвящена группе $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ и ее связи с $\pi(X, x_0)$, где $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие и $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Большинство результатов содержится в упражнениях.

Первый результат следует непосредственно из теоремы 17.6.

18.1. Теорема. Если $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие с такими $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 \in X$, что $p(\tilde{x}_0) = x_0$, то индуцированный гомоморфизм $p_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$ является мономорфизмом.

Естественно поставить вопрос, что изменится, если изменить точки $\tilde{x}_0$ и x_0 . Ответ дает следующая

18.2. Теорема. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие с линейно связным $\tilde{X}$. Если $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$, то в X найдется путь f из $p(\tilde{x}_0)$ в $p(\tilde{x}_1)$, такой, что $u_f p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$.

Доказательство. Пусть g — путь в $\tilde{X}$ из $\tilde{x}_0$ в $\tilde{x}_1$. Путь g определяет изоморфизм u_g групп $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ и $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, так что $u_g \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Применение гомоморфизма p_* дает $p_* u_g \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Но $p_* u_g = u_{pg} p_*$ (см. упр. 15.11 (с)), так что путь $f = pg$ удовлетворяет нужным условиям. $\square$

Если в этой теореме $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$, то путь f определяет элемент $[f]$ группы $\pi(X, x_0)$ и, таким образом,

$$p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [f]^{-1} (p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) [f].$$

Другими словами, подгруппы $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ и $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ сопряжены в $\pi(X, x_0)$. На самом деле можно утверждать больше:

18.3. Теорема. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие с линейно связным $\tilde{X}$. При $x_0 \in X$ множество $\{p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0): \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$ есть класс сопряженности в $\pi(X, x_0)$.

Доказательство. Мы уже показали, что любые две подгруппы из этого множества сопряжены. Предположим теперь, что H — подгруппа $\pi(X, x_0)$, сопряженная одной из подгрупп $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Таким образом, $H = \alpha^{-1}(p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\alpha$ при некотором $\alpha \in \pi(X, x_0)$. Пусть $\alpha = [f]$ и $\tilde{f}$ — поднятие f с началом в $\tilde{x}_0$. Тогда $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{f}(1)) = \alpha_* p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$, так что H принадлежит нашему множеству. $\square$

Другие соотношения между $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ и $\pi(X, x_0)$ даются в качестве упражнений.

18.4. Упражнения. В этих упражнениях $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие с линейно связным $\tilde{X}$ и $x_0 \in X$.

(а) Для $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ и $[f] \in \pi(X, x_0)$ определим $\tilde{x} \cdot [f]$ равенством $\tilde{x} \cdot [f] = \tilde{f}(1)$, где $\tilde{f}$ — единственное поднятие f с началом в $\tilde{x}$. Докажите, что этим определено правое действие группы $\pi(X, x_0)$ на множестве $p^{-1}(x_0)$. (Указание: посмотрите доказательство теоремы 16.7 и используйте обозначение $l_a(f)$ для поднятия f с началом в a .)

(b) Говорят, что группа G действует транзитивно на множестве S , если для любых $a, b \in S$ найдется такой элемент $g \in G$, что $g \cdot a = b$. Другими словами, $S = G \cdot a$, орбите точки $a \in S$. Докажите, что $\pi(X, x_0)$ действует транзитивно на $p^{-1}(x_0)$.

(с) Докажите, что существует эквивариантная относительно группы $\pi(X, x_0)$ биекция между $p^{-1}(x_0)$ и множеством правых смежных классов группы $\pi(X, x_0)$ по подгруппе $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. (Указание: воспользуйтесь упр. 5.9 (d) с заменой левых смежных классов на правые и покажите, что стабилизатор действия $\pi(X, x_0)$ на $p^{-1}(x_0)$ есть $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.)

(d) Выведите из (с), что если $\tilde{X}$ односвязно, то существует эквивариантная относительно действия $\pi(X, x_0)$ биекция между $p^{-1}(x_0)$ и $\pi(X, x_0)$.

(е) Покажите, что если $p: \tilde{X} \rightarrow X$ есть n -листное накрытие (т. е. $p^{-1}(x_0)$ состоит из n точек), то $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$ является включением подгруппы индекса n .

(f) Допустим, что фундаментальная группа пространства X есть $\mathbb{Z}$ и множество $p^{-1}(x_0)$ конечно. Найдите фундаментальную группу пространства $\tilde{X}$.

(g) Докажите, что если X односвязно, то p — гомеоморфизм.

(h) Пусть $\tilde{X} = X$. Докажите, что если фундаментальная группа X конечна, то p — гомеоморфизм. Обязательно ли p будет гомеоморфизмом, если фундаментальная группа X бесконечна?

(i) Накрытие называется *регулярным*, если для некоторой точки $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ подгруппа $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ нормальна в $\pi(X, x_0)$. Докажите, что если f — замкнутый путь в X и накрытие регулярно, то либо всякое поднятие $\tilde{f}$ замкнуто, либо никакое поднятие не замкнуто.

(j) Предположим, что $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие, полученное из собственно разрывного действия G на $\tilde{X}$ (т. е. $X = \tilde{X}/G$). Докажите, что $p: \tilde{X} \rightarrow X$ регулярно ¹⁾.

(к) Докажите, что p тогда и только тогда является гомеоморфизмом, когда $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(X, x_0)$ ²⁾.

¹⁾ См. теорему 19.1 и лемму 19.2. При естественных дополнительных ограничениях справедливо также обратное утверждение, см. предложения 21.8—21.10. — *Прим. ред.*

²⁾ См. упр. (с) выше. — *Прим. ред.*

Глава 19

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА ПРОСТРАНСТВА ОРБИТ

В этой главе мы будем предполагать, что X — линейно связное пространство, на котором определено собственнo разрывное действие группы G . Таким образом, $p: X \rightarrow X/G$ — накрытие. Цель этой главы — найти соотношение между G и фундаментальной группой пространства орбит X/G .

Пусть $x_0 \in X$ и $y_0 = p(x_0) \in X/G$. Заметим, что $p^{-1}(y_0) = \{g \cdot x_0: g \in G\}$. Если $[f] \in \pi(X/G, y_0)$, то существует единственное поднятие $\tilde{f}$ пути f с началом в точке $x_0 \in X$. Элемент $\tilde{f}(1) \in p^{-1}(y_0)$, и потому существует единственный элемент $g_f \in G$, такой, что $\tilde{f}(1) = g_f \cdot x_0$. Следовательно, соответствие $f \mapsto g_f$ определяет отображение $\varphi: \pi(X/G, y_0) \rightarrow G$.

19.1. Теорема. *Отображение $\varphi: \pi(X/G, y_0) \rightarrow G$ является гомоморфизмом групп.*

Доказательство. Рассмотрим два замкнутых пути f, f' в X/G в точке y_0 . Если $\tilde{f} * \tilde{f}'$ — единственное поднятие $f * f'$ с началом в $x_0 \in X$, то $\tilde{f} * \tilde{f}' = \tilde{f} * l_a(f')$, где $\tilde{f}$ — единственное поднятие f с началом в x_0 , а $l_a(f')$ — единственное поднятие f' с началом в точке $a = \tilde{f}(1)$. Это следует из того, что $\tilde{f} * l_a(f')$ — также поднятие $f * f'$ с началом в точке $x_0 \in X$. Пусть $\tilde{f}'$ — единственное поднятие f' с началом в x_0 . Так как $g_f \cdot \tilde{f}$ — поднятие f с началом в $g_f \cdot x_0$ и $a = \tilde{f}(1) = g_f \cdot x_0$, то $l_a(f') = g_f \cdot \tilde{f}'$. Следовательно,

$$\tilde{f} * \tilde{f}'(1) = g_f \cdot \tilde{f}'(1) = g_f \cdot (g_{f'} \cdot x_0) = (g_f g_{f'}) \cdot x_0.$$

Отсюда следует, что $\varphi([f][f']) = \varphi([f])\varphi([f'])$ и φ — гомоморфизм. $\square$

Вычислим ядро гомоморфизма φ .

19.2. Лемма. *Ядро гомоморфизма $\varphi: \pi(X/G, y_0) \rightarrow G$ совпадает с подгруппой $p_*\pi(X, x_0)$.*

Доказательство. Ядро φ — это множество таких элементов $[f] \in \pi(X/G, y_0)$, что $\varphi[f] = 1$. Это в точности те элементы из $\pi(X/G, y_0)$, для которых $\tilde{f}(1) = x_0$, т. е. $\tilde{f}$ — замкнутый путь в X в точке $x_0 \in X$. Таким образом, это множество элементов $[f] \in \pi(X/G, y_0)$ вида $[p\tilde{f}]$ при $[\tilde{f}] \in \pi(X, x_0)$, т. е. $p_*\pi(X, x_0)$. $\square$

В частности, $p_*\pi(X, x_0)$ — нормальная подгруппа в $\pi(X/G, y_0)$, и потому определена факторгруппа $\pi(X/G, y_0)/p_*\pi(X, x_0)$.

19.3. Теорема. *Группы $\pi(X/G, y_0)/p_*\pi(X, x_0)$ и G изоморфны.*

Доказательство. Нам нужно только показать, что гомоморфизм $\varphi: \pi(X/G, y_0) \rightarrow G$ сюръективен. Для $g \in G$ обозначим через f_g путь в X из x_0 в $g \cdot x_0$. Тем самым определен элемент $[pf_g] \in \pi(X/G, y_0)$. По определению, $\varphi([pf_g]) \cdot x_0 = \tilde{pf}_g(1)$, где $\tilde{pf}_g$ — единственное поднятие pf_g с началом в x_0 . Но таким поднятием является f_g и $f_g(1) = g \cdot x_0$. Таким образом, $\varphi([pf_g]) = g$, что и доказывает сюръективность φ . $\square$

19.4. Следствие. *Если X односвязно, то $\pi(X/G, y_0) \cong G$.*

Из этого следствия можно вновь получить результат гл. 16 о том, что фундаментальная группа окружности есть $\mathbb{Z}$. Это следует из того, что окружность S^1 гомеоморфна $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Тем же способом можно вывести, что фундаментальная группа пространства $(S^1)^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ изоморфна $\mathbb{Z}^n$. Другие примеры, часто основанные на приведенных ранее упражнениях, содержатся в следующей подборке упражнений.

19.5. Упражнения. (а) Покажите, что фундаментальная группа линзового пространства $L(p, q)$ изоморфна $\mathbb{Z}_p$. (В силу упр. 15.16 (с) сфера S^3 односвязна.)

(б) Покажите, что для любой конечно порожденной абелевой группы G существует пространство X_G , фундаментальная группа которого равна G . (Учтите тот факт, что G есть произведение некоторого числа экземпляров $\mathbb{Z}$ и нескольких конечных циклических групп.)

(с) Пусть $Y = C^*/K$, где $C^* = C \setminus \{0\}$ и K — группа гомеоморфизмов вида $\{\varphi^n: n \in \mathbb{Z}\}$ с $\varphi(z) = 4z$. Докажите, используя следствие 19.4, что фундаментальная группа Y есть $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (Указание. Найдите односвязное пространство X , группу G и в ней нормальную подгруппу H так, чтобы X было G -пространством, $X/H \cong C^*$ и $G/H = K$. Далее воспользуйтесь упр. 5.13 (с).)

(d) Докажите, что формула $Tz = \bar{z} + 1 + i$ определяет гомеоморфизм $T: X \rightarrow X$, где $X = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{C}$. Покажите, что если G — группа гомеоморфизмов, порожденная отображением T , то X/G — лист Мёбиуса. Выведите отсюда, что фундаментальная группа листа Мёбиуса есть $\mathbb{Z}$.

(е) Докажите, что фундаментальная группа бутылки Клейна имеет вид $G = \{a^m b^n: m, n \in \mathbb{Z}, ba = a^{-1}b\}$, т. е. G — группа с двумя образующими a, b и одним соотношением $ba = a^{-1}b$.

(f) Пусть G собственно разрывно действует на X . Напомним, что, согласно упр. 18.4 (а), группа $\pi(X/G, y_0)$ действует на $p^{-1}(y_0)$ (справа). Докажите, что $(g \cdot x) \cdot [f] = g \cdot (x \cdot [f])$ при $g \in G, x \in p^{-1}(y_0)$ и $[f] \in \pi(X/G, y_0)$.

(g) Пусть G и H — группы, действующие на множестве S , причем G действует слева, а H — справа. Предположим, что $(g \cdot x) \cdot h = g \cdot (x \cdot h)$ для всех $g \in G, x \in S, h \in H$. Докажите, что если G действует на S свободно и транзитивно, то можно определить гомоморфизм $\varphi: H \rightarrow G$ так, чтобы его ядро совпадало со стабилизатором точки $x_0 \in S$ при действии H , где $S = \{g \cdot x_0: g \in G\}$. (Указание: определите $\varphi(h)$ при $h \in H$ как единственный элемент $g \in G$, для которого $g \cdot x_0 = x_0 \cdot h$.)

(h) При помощи (f) и (g) дайте новое доказательство теоремы 19.1 и леммы 19.2.

(i) При помощи (h) и упр. 18.4 (с) дайте новое доказательство теоремы 19.3.

Глава 20

ТЕОРЕМА БОРСУКА—УЛАМА И ТЕОРЕМА О СЭНДВИЧЕ С ВЕТЧИНОЙ

Дадим несколько приложений результатов предыдущих глав. Они обобщают результаты гл. 10 и опираются на теорему Борсука—Улама (сформулированную С. Уламом и доказанную К. Борсуком в начале 30-х годов).

20.1. Теорема. *Не существует непрерывного отображения $\varphi: S^2 \rightarrow S^1$, при котором $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.*

Эта теорема обобщает результат о том, что не существует непрерывного отображения $\varphi: S^1 \rightarrow S^0$, при котором $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ (такое отображение должно было бы быть сюръективным, но окружность S^1 связна, а S^0 —нет). На самом деле справедлив более общий результат: при $n \geq 1$ не существует непрерывного отображения $\varphi: S^n \rightarrow S^{n-1}$, при котором $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. При $n > 2$ доказательство выходит за рамки этой книги, так как оно должно использовать другие средства, например высшие гомотопические группы.

Для доказательства теоремы 20.1 предположим, что существует непрерывное отображение $\varphi: S^2 \rightarrow S^1$, при котором $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Группа $Z_2 = \{\pm 1\}$ антиподально действует на S^2 и на S^1 (т. е. $\pm 1 \cdot x = \pm x$), и в обоих случаях действие собственно разрывно. Если $p_2: S^2 \rightarrow S^2/Z_2$ и $p_1: S^1 \rightarrow S^1/Z_2$ —канонические проекции, то φ индуцирует непрерывное отображение $\psi: S^2/Z_2 \rightarrow S^1/Z_2$, для которого $p_1\varphi = \psi p_2$, а именно $\psi(\{\pm x\}) = \{\pm \varphi(x)\}$ (см. доказательство теоремы 5.5). Пусть $a = (1, 0, 0) \in S^2$, где, как обычно,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Пусть $b = p_2(a) \in S^2/Z_2$. Если l — путь в S^2 из a в $-a$, заданный формулой $f(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, то $p_2 f$ — замкнутый путь в S^2/Z_2 в точке b . Мы утверждаем, что элемент $[p_2 f] \in \pi(S^2/Z_2, b)$ удовлетворяет условию $[p_2 f]^2 = [\varepsilon_b]$. Имеем

$$(p_2 f * p_2 f)(t) = \begin{cases} p_2(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ p_2(\cos(2t-1)\pi, \sin(2t-1)\pi, 0), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \\ = p_2(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Определим $F: I \times I \rightarrow S^2$ равенством

$$F(t, s) = (s + (1-s)\cos 2\pi t, (1-s)\sin 2\pi t, \sqrt{2s(1-s)(1-\cos 2\pi t)}).$$

Мы видим, что $p_2 F: I \times I \rightarrow S^2/Z_2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} p_2 F(t, 0) &= (p_2 f * p_2 f)(t), \\ p_2 F(t, 1) &= p_2(1, 0, 0) = \varepsilon_b(t), \\ p_2 F(0, s) &= p_2(1, 0, 0) = p_2 F(1, s), \end{aligned}$$

откуда следует, что $[p_2 f]^2 = [\varepsilon_b] \in \pi(S^2/Z_2, b)$.

Отображение $\psi: S^2/Z_2 \rightarrow S^1/Z_2$ индуцирует гомоморфизм

$$\psi_*: \pi(S^2/Z_2, b) \rightarrow \pi(S^1/Z_2, \psi(b)),$$

так что $[\psi p_2 f]^2 = [\varepsilon_{\psi(b)}] \in \pi(S^1/Z_2, \psi(b))$. Очевидно, что $S^1/Z_2 \cong S^1$ и $\pi(S^1/Z_2, \psi(b)) = \{\alpha^n: n \in \mathbb{Z}\}$ при некотором $\alpha \in \pi(S^1/Z_2, \psi(b))$ (на самом деле $\alpha = [p_1 g]$, где $g: I \rightarrow S^1$ определено формулой $g(t) = \exp \pi i t \in S^1 \subset \mathbb{C}$). Из равенства $[\psi p_2 f]^2 = [\varepsilon_{\psi(b)}]$ следует, что $[\psi p_2 f] = [\varepsilon_{\psi(b)}]$, поскольку $[\psi p_2 f] = \alpha^k$ при некотором k , и $\alpha^{2k} = \alpha^0$ влечет за собой $\alpha^k = \alpha^0$.

Замечание. Упр. 15.16 (с) утверждает, что сфера S^2 односвязна (см. также следствие 23.9), поэтому из предыдущей главы мы выводим, что фундаментальная группа S^2/Z_2 есть Z_2 . Стало быть, ψ_* — гомоморфизм группы Z_2 в Z ; но всякий такой гомоморфизм тривиален, поэтому $[\psi p_2 f] = [\varepsilon_{\psi(b)}] \in \pi(S^1/Z_2, \psi(b))$. Предыдущее рассуждение было проведено только затем, что-

бы не использовать результаты упражнений и результаты, которые будут доказаны позже.

Возвращаясь к доказательству теоремы 20.1, вспомним результаты гл. 17 и рассмотрим однозначно определенные поднятия путей $\psi p_2 f$ и $\varepsilon_{\psi(b)}$ в S^1 с началом в точке $\varphi(a)$. Ими являются соответственно φf и $\varepsilon_{\varphi(a)}$ (напомним, что $\psi p_2 = p_1 \varphi$). Но $\varphi f(1) = \varphi(-a) = -\varphi(a)$, тогда как $\varepsilon_{\varphi(a)}(1) = \varphi(a)$, что противоречит равенству $[\psi p_2 f] = [\varepsilon_{\psi(b)}]$. Поэтому отображения φ не существует (заметим также, что $[p_2 f] \neq [e_b] \in \pi(S^2/Z_2, b)$). $\square$

20.2. Следствие. Пусть $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, для которого $f(-x) = -f(x)$ при всех $x \in S^2$. Тогда существует точка $x \in S^2$, в которой $f(x) = 0$.

Доказательство. Предположим, что $f(x) \neq 0$ при всех $x \in S^2$, и определим $g: S^2 \rightarrow S^1$ формулой $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$. Отображение g непрерывно и $g(-x) = -g(x)$, что противоречит теореме 20.1. $\square$

20.3. Следствие. Пусть $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение. Тогда существует точка $x \in S^2$, в которой $f(x) = f(-x)$.

Доказательство. Если $f(x) \neq f(-x)$ при всех $x \in S^2$, то можно определить $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $g(x) = f(x) - f(-x)$. Это отображение непрерывно и удовлетворяет условиям $g(-x) = -g(x)$ и $g(x) \neq 0$ для всех $x \in S^2$, что противоречит следствию 20.2. $\square$

Следствие 20.3 есть обобщение следствия 10.3. Оба предыдущих следствия остаются справедливыми и при замене S^2 и $\mathbb{R}^2$ на S^n и $\mathbb{R}^n$.

Следствие 20.3 утверждает, в частности, что не существует непрерывного инъективного отображения S^2 в $\mathbb{R}^2$. Отсюда непосредственно получается

20.4. Следствие. Никакое подмножество $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно S^2 .

Как и в гл. 10, мы получаем физическую интерпретацию этого утверждения.

20.5. Следствие. В любой момент времени на земной

поверхности найдется пара антиподальных точек, в которых одновременно совпадают температура и давление.

Аналогом первой теоремы о блинах является теорема о сэндвиче с ветчиной, которая утверждает, что трехслойный сэндвич можно разрезать точно пополам одним взмахом ножа. Точнее, имеет место

20.6. Теорема. Пусть A , B и C — ограниченные подмножества ¹⁾ $\mathbb{R}^3$. Тогда в $\mathbb{R}^3$ найдется плоскость, которая делит каждое из них точно пополам по объему.

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 10.5. Можно считать, что A , B и C лежат внутри сферы S в $\mathbb{R}^3$ диаметра l с центром в точке 0 . При $x \in S$ обозначим через D_x диаметр S , проходящий через точку x . При $t \in l$ обозначим через P_t плоскость, перпендикулярную D_x и проходящую через точку диаметра D_x на расстоянии t от x . Плоскость P_t делит A на две части A_1 и A_2 , из которых A_1 ближе к x , чем A_2 . Определим функции f_1 , f_2 равенствами

$$f_1(t) = \text{объем } A_1, \quad f_2(t) = \text{объем } A_2.$$

Очевидно, что f_1 и f_2 — непрерывные функции, отображающие отрезок l в $\mathbb{R}$, причем f_1 монотонно не убывает, а f_2 монотонно не возрастает. Следовательно, функция $f: l \rightarrow \mathbb{R}$, определенная как $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$, непрерывна и монотонно не убывает. Далее, $f(0) = -f(l)$, так что по теореме о промежуточном значении найдется такое $t \in l$, что $f(t) = 0$. Так как f монотонно не убывает, то она обращается в нуль либо в одной точке a , либо на отрезке $[a, b]$. В первом случае обозначим через $\alpha(x)$ точку a , а во втором — точку $(a+b)/2$. Тогда $P_{\alpha(x)}$ делит A на две равные части. Заметим, что отображение $\alpha: S \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно и удовлетворяет условию $\alpha(x) = l - \alpha(-x)$.

Аналогично можно определить непрерывные функции $\beta, \gamma: S \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $\beta(x) = l - \beta(-x)$, $\gamma(x) =$

¹⁾ Как и в теореме 10.5, предполагается, что множества A , B и C имеют объем. — *Прим. перев.*

$= 1 - \gamma(-x)$ и $P_{\beta(x)}, P_{\gamma(x)}$ делят соответственно B и C точно пополам. При помощи функций α, β и γ определим теперь $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ равенством

$$\varphi(x) = (\alpha(x) - \beta(x), \alpha(x) - \gamma(x)).$$

Так как α, β , и γ непрерывны, то φ непрерывно. Далее, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, так что, согласно следствию 20.2, найдется точка $y \in S$, в которой $\varphi(y) = 0$. Но это означает, что $\alpha(y) = \beta(y) = \gamma(y)$, поэтому плоскость $P_{\alpha(y)}$ делит A, B и C точно пополам.

20.7. Упражнения. (а) Докажите, что при $n \geq 2$ не существует непрерывного отображения $\varphi: S^n \rightarrow S^1$, при котором $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

(б) Предположим, что группа $\mathbb{Z}_p$ действует на $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ и $S^1 \subset \mathbb{C}$ следующим образом:

$$k \cdot (z_1, z_2) = (\exp(2\pi i k/p) z_1, \exp(2\pi i k q/p) z_2), \\ k \cdot z = \exp(2\pi i k/p) z,$$

где $k \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ и q — целое число, взаимно простое с p . Докажите, что не существует $\mathbb{Z}_p$ -эквивариантного непрерывного отображения S^3 в S^1 .

(с) Существует ли в трехмерном пространстве аналог второй теоремы о блинах?

(д) Пусть X и Y — пространства, на которых собственно разрывно действует группа G . Предположим также, что $\varphi: X \rightarrow Y$ есть G -эквивариантное непрерывное отображение. Пусть $\psi: X/G \rightarrow Y/G$ — отображение, индуцированное отображением φ . Докажите, что гомоморфизм $\psi_*: \pi(X/G, p(x_0)) \rightarrow \pi(Y/G, q\varphi(x_0))$ индуцирует гомоморфизм

$$\pi(X/G, p(x_0))/p_* \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y/G, q\varphi(x_0))/q_* \pi(Y, \varphi(x_0)),$$

который является изоморфизмом, где $p: X \rightarrow X/G$ и $q: Y \rightarrow Y/G$ — канонические проекции.

(е) При помощи (д) дайте новое доказательство теоремы Борсука — Улама и результата упр. (б) (каждое в одну строчку).

Глава 21

ЕЩЕ О НАКРЫВАЮЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ: ТЕОРЕМЫ О ПОДНЯТИИ

Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие и $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, причем Y связно. Напомним, что, как было показано в гл. 17, если поднятие $\tilde{f}$ отображения $f: Y \rightarrow X$ существует, то оно (в существенном) единственно. Далее, если поднятие $\tilde{f}$ существует, то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\
 & \nearrow \tilde{f}_* & \downarrow p_* \\
 \pi(Y, y_0) & & \pi(X, x_0) \\
 & \searrow f_* & \\
 & &
 \end{array}$$

Гомоморфизм p_* является мономорфизмом (теорема 18.1) и $p_* \tilde{f}_* = f_*$, так что $f_* \pi(Y, y_0) = p_* \tilde{f}_* \pi(Y, y_0) \subset p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Итак, необходимым алгебраическим условием существования поднятия $\tilde{f}$ является включение $f_* \pi(Y, y_0) \cap p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Оказывается, это условие будет и достаточным, если наложить одно дополнительное условие на Y . Таким образом, чисто топологический вопрос эквивалентен чисто алгебраическому вопросу. Условие на Y состоит в том, чтобы оно было связным и локально линейно связным. Пространство Y называется *локально линейно связным*, если для любого $y \in Y$ всякая открытая окрестность точки y содержит линейно связную окрестность этой точки (см. упр. 12.10 (j)). Связное и локально линейно связное пространство является линейно связным. Докажем это.

21.1. Лемма. Если Y связно и локально линейно связно, то Y линейно связно.

Доказательство. Пусть y — некоторая точка из Y и U — множество точек Y , которые можно соединить с y путем в Y . Если $u \in U$, то u имеет открытую линейно связную окрестность V (так как Y — открытая окрестность u и Y — локально линейно связное пространство). Если $v \in V$, то в V найдется путь из u в v , а в Y — путь из y в u , так что в Y найдется путь из y в v . Следовательно, $V \subset U$. Этим показано, что U открыто. Аналогичным образом можно показать, что $Y \setminus U$ открыто, так что U открыто и замкнуто. Так как $y \in U$, это множество не пусто. Но Y связно, и потому U должно совпадать с Y , что и доказывает линейную связность Y .

21.2. Теорема. Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие, Y — связное и локально линейно связное пространство и $y_0 \in Y$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Для непрерывного отображения $f: Y \rightarrow X$ с $f(y_0) = x_0$ тогда и только тогда существует поднятие $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ с $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$, когда

$$f_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Доказательство. Мы уже видели, что это условие необходимо, остается проверить его достаточность. Поэтому предположим, что $f_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, и покажем, что существует поднятие $\tilde{f}$. Определим $\tilde{f}$ следующим образом. Пусть $y \in Y$, и пусть $\varphi: I \rightarrow Y$ — путь в Y из y_0 в y . Тогда $f\varphi$ — путь в X из x_0 в $f(y)$. По теореме о накрывающей гомотопии для путей (теорема 17.6 (i)) существует единственный путь $\tilde{f}\varphi: I \rightarrow \tilde{X}$, для которого $\tilde{f}\varphi(0) = \tilde{x}_0$ и $p\tilde{f}\varphi = f\varphi$. Определим $\tilde{f}(y)$ как $\tilde{f}\varphi(1)$ (рис. 21.1).

Неожиданным образом $\tilde{f}$ оказывается корректно определенным и непрерывным. Покажем сначала, что $\tilde{f}$ корректно определено. Единственный выбор, кото-

рый мы делали, — это выбор пути φ из y_0 в y . Пусть ψ — другой путь в Y из y_0 в y . Произведение $\varphi * \bar{\psi}$ — замкнутый путь в Y в точке y_0 . Имеем

$$f_*[\varphi * \bar{\psi}] = [f\varphi * f\bar{\psi}] \in f_*\pi(Y, y_0).$$

Но $f_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, и потому найдется замкнутый путь α в $\tilde{X}$ в точке $\tilde{x}_0$, для которого $[f\varphi * f\bar{\psi}] = [\rho\alpha]$. Используя результаты гл. 14, получаем

$$f\varphi \sim f\varphi * e_{x_0} \sim f\varphi * (f\bar{\psi} * f\psi) \sim (f\varphi * f\bar{\psi}) * f\psi \sim \rho\alpha * f\psi.$$

Путь α замкнут, значит, $\rho\alpha * f\psi = \alpha * f\psi$, и по теореме о монодромии (теорема 17.7)

$$\tilde{f}\varphi(1) = \rho\alpha * f\psi(1) = (\alpha * f\psi)(1) = \tilde{f}\psi(1),$$

что и доказывает корректность определения $\tilde{f}(y)$. Заметим, что для определения $\tilde{f}$ нам нужна была только линейная связность Y .

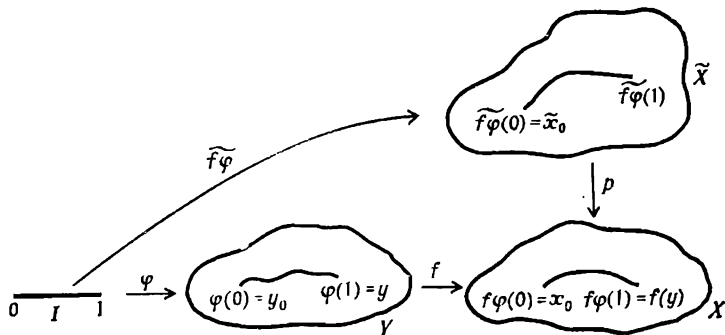


Рис.21.1

Чтобы доказать, что $\tilde{f}$ непрерывно, потребуется дополнительное предположение о том, что Y локально линейно связно. Пусть U — открытое подмножество $\tilde{X}$. Пусть $y \in \tilde{f}^{-1}(U)$; тогда U — открытая окрестность $\tilde{f}(y)$. Пусть U' — правильно накрытая окрестность точки $\rho\tilde{f}(y) = f(y)$, для которой $U' \subset p(U)$. По определению

$p^{-1}(U') = \bigcup_{j \in J} V_j$, где каждое V_j гомеоморфно U' , и $\tilde{f}(y) \in V_k$ при некотором k . Так как V_k и U — открытые окрестности $\tilde{f}(y)$, то $W = V_k \cap U$ — также открытая окрестность $\tilde{f}(y)$. Заметим, что $p(W)$ — правильно накрытая окрестность $f(y)$, так как U' правильно накрыта и $p(W) \subset U'$. Отображение f непрерывно, и потому $f^{-1}(p(W))$ — открытая окрестность точки $y \in Y$. Так как Y локально линейно связно, то найдется линейно связная открытая окрестность V точки y , лежащая в $f^{-1}(p(W))$. Мы утверждаем, что $\tilde{f}(V) \subset U$. Очевидно, $\tilde{f}(y) \in U$. Если y' — другая точка из V , то в V найдется путь φ из y в y' , и по определению $\tilde{f}$ мы видим, что $\tilde{f}(y')$ совпадает с $\tilde{f}\varphi(1)$, где $\tilde{f}\varphi$ — единственное поднятие $f\varphi$ с началом в $\tilde{f}(y)$ (если ψ — путь из y_0 в y , то $\psi * \varphi$ — путь из y_0 в y' , и $\tilde{f}(\psi * \varphi)(1) = \tilde{f}\varphi(1)$ по теореме о накрывающей гомотопии для путей). Образ пути $f\varphi$ лежит в $f(V) \subset p(W)$, и потому образ пути $\tilde{f}\varphi$ лежит в $p^{-1}(p(W))$. Но $p^{-1}(p(W)) = \bigcup_{j \in J} W_j$, где W_j — попарно непересекающиеся множества, гомеоморфные $p(W)$, и одно из них, например W_k , совпадает с W . Так как $\tilde{f}\varphi(0) = \tilde{f}(y) \in W$, то $\tilde{f}\varphi(1) = \tilde{f}(y') \in W$. Этим доказано, что $\tilde{f}(V) \subset W \subset U$, и, следовательно, $V \subset \tilde{f}^{-1}(U)$. Итак, любая точка из $\tilde{f}^{-1}(U)$ имеет открытую окрестность в $\tilde{f}^{-1}(U)$, так что $\tilde{f}^{-1}(U)$ открыто, и потому $\tilde{f}$ непрерывно. $\square$

Заметим еще раз, что для определения $\tilde{f}$ мы требовали от Y только линейной связности. Для непрерывности $\tilde{f}$ нужно, чтобы Y было локально линейно связным. Приведем теперь пример, показывающий, что если Y линейно связно, но не локально линейно связно, то $\tilde{f}$ не обязательно непрерывно. Пусть Y — следующее подмножество $\mathbb{R}^2$: $Y = A \cup B \cup C$, где

$$A = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\},$$

$$B = \{(x, y): -1 \leq x \leq 0, y = 0\},$$

$$C = \{(x, y): 0 < x \leq 1, y = (1/2) \sin(\pi/x)\}$$

(рис. 21.2). Это пространство называется *польской окружностью*.

Очевидно, что Y линейно связно. Далее, так как $B \cup C$ не является линейно связным, то Y односвязно

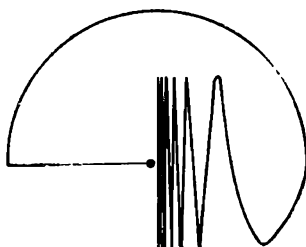


Рис. 21.2

и не локально линейно связно. Рассмотрим накрытие $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, и пусть $f: Y \rightarrow S^1$ — отображение, определенное формулами

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{при } (x, y) \in A \subset Y, \\ (x, -\sqrt{1-x^2}) & \text{при } (x, y) \in B \cup C \subset Y. \end{cases}$$

Очевидно, что f непрерывно. Полагая $y_0 = (1, 0)$, $\tilde{x}_0 = 0$, мы видим, что условие $f_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ выполнено (здесь $p = e$, $\tilde{X} = \mathbb{R}$). Можно определить $\tilde{f}$, как в доказательстве теоремы 21.2, и получить

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} (\arccos x)/2\pi & \text{при } (x, y) \in A \cup B, \\ (\arccos x)/2\pi - 1 & \text{при } (x, y) \in C. \end{cases}$$

Очевидно, что $p\tilde{f} = f$, $\tilde{f}(1, 0) = 0$, но $\tilde{f}$ разрывно в точке $(0, 0) \in Y$.

Приведем несколько следствий теоремы 21.2. Первое из них не нуждается в доказательстве.

21.3. Следствие. Если Y односвязно и локально линейно связно, то всякое непрерывное отображение $f: Y \rightarrow X$ поднимается до $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$.

21.4. Следствие. Пусть $p_1: X_1 \rightarrow X$, $p_2: X_2 \rightarrow X$ — два накрытия, для которых X_1 и X_2 связны и локально линейно связны. Пусть x_1, x_2, x_0 — отмеченные точки

в X_1, X_2, X соответственно, причем $p_1(x_1) = p_2(x_2) = x_0$. Если $p_{1*}\pi(X_1, x_1) = p_{2*}\pi(X_2, x_2)$, то существует сохраняющий отмеченные точки гомеоморфизм $h: X_1 \rightarrow X_2$, при котором $p_2h = p_1$.

Доказательство. Накрывающие отображения p_1 и p_2 поднимаются до отображений $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$, таких, что $p_2\tilde{p}_1 = p_1$ и $p_1\tilde{p}_2 = p_2$. Пусть $\varphi = \tilde{p}_2\tilde{p}_1: X_1 \rightarrow X_1$; тогда $p_1\varphi = p_1(\tilde{p}_2\tilde{p}_1) = (p_1\tilde{p}_2)\tilde{p}_1 = p_2\tilde{p}_1 = p_1$.

Далее, $\varphi(x_1) = x_1$; поэтому, согласно следствию 17.5, отображение φ тождественно, т. е. $\tilde{p}_2\tilde{p}_1 = 1$. Меняя местами X_1 и X_2 , убеждаемся, что $\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = 1$. Итак, $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ — гомеоморфизмы, и наше утверждение получается взятием $h = \tilde{p}_1$. $\square$

В частном случае односвязных пространств X_1 и X_2 получаем

21.5. Следствие. Пусть $p_1: X_1 \rightarrow X$, $p_2: X_2 \rightarrow X$ — два накрытия с односвязными и локально линейно связными пространствами X_1 и X_2 . Тогда существует гомеоморфизм $h: X_1 \rightarrow X_2$, при котором $p_2h = p_1$.

Из теоремы 15.9 легко следует утверждение, обратное следствию 21.4.

21.6. Следствие. Пусть $p_1: X_1 \rightarrow X$, $p_2: X_2 \rightarrow X$ — накрытия со связными и локально линейно связными пространствами X_1 и X_2 . Пусть x_1, x_2, x_0 — отмеченные точки, причем $p_1(x_1) = p_2(x_2) = x_0$. Если существует гомеоморфизм $h: X_1 \rightarrow X_2$, при котором $p_2h = p_1$ и $h(x_1) = x_2$, то $p_{1*}\pi(X_1, x_1) = p_{2*}\pi(X_2, x_2)$.

Будем говорить, что два накрытия $p_1: X_1 \rightarrow X$, $p_2: X_2 \rightarrow X$ эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h: X_1 \rightarrow X_2$, при котором $p_2h = p_1$. Заметим, что этот гомеоморфизм не обязан переводить отмеченную точку в отмеченную. Получаем обобщение следствий 21.4 и 21.6:

21.7. Теорема. Пусть $p_1: X_1 \rightarrow X$, $p_2: X_2 \rightarrow X$ — накрытия со связными и локально линейно связными X_1 и X_2 .

Пусть x_1, x_2, x_0 — отмеченные точки, причем $p_1(x_1) = p_2(x_2) = x_0$. Эти накрытия тогда и только тогда эквивалентны, когда подгруппы $p_{1*}\pi(X_1, x_1)$ и $p_{2*}\pi(X_2, x_2)$ сопряжены в группе $\pi(X, x_0)$.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из следствий 21.4, 21.6 и теоремы 18.3. $\square$

Группой скольжений накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется группа всех гомеоморфизмов $h: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, при которых $ph = p$ (см. упр. 17.9 (г)). Эта группа обозначается $G(\tilde{X}, p, X)$. Очевидно, что $\tilde{X}$ есть $G(\tilde{X}, p, X)$ -пространство.

21.8. Теорема. Если $\tilde{X}$ связно и локально линейно связно, то действие группы $G(\tilde{X}, p, X)$ на $\tilde{X}$ собственно разрывно.

Доказательство. Пусть x — любая точка из $\tilde{X}$ и U — правильно накрытая окрестность точки $p(x)$. Тогда $p^{-1}(U)$ — дизъюнктное объединение множеств $\{V_j, j \in J\}$, причем $x \in V_k$ для некоторого k . Пусть $h \in G(\tilde{X}, p, X)$. Если $h(x) = x$, то, согласно следствию 17.5, отображение h тождественно. Другими словами, если $h \neq 1$, то $h(x) \neq x$. Так как $ph(x) = p(x)$, то $h(x) \in V_l$ при некотором l . Далее, если $V_l = V_k$, то $h(x) = x$. Отсюда заключаем, что если $h \neq 1$, то $x \in V_k$ и $h(x) \in V_l$, причем $V_k \cap V_l = \emptyset$.

Можно считать, что U линейно связно, поскольку $\tilde{X}$ (а следовательно, и X) локально линейно связно. Итак, каждое из множеств $V_j, j \in J$, линейно связно. Имеем $ph(V_k) = U$, так что $h(V_k) \subset \bigcup_{j \in J} V_j$. Но множества $V_j, j \in J$, линейно связны и $h(x) \in V_l$ при некотором $x \in V_k$, откуда $h(V_k) \subset V_l$, и потому $V_k \cap h(V_k) = \emptyset$. Этим доказано, что действие группы $G(\tilde{X}, p, X)$ собственно разрывно. $\square$

Используя этот и некоторые предыдущие результаты, приходим к следующим интересным заключениям.

21.9. Теорема. Пусть $\tilde{X}$ связно и локально линейно

связно. Если $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ — нормальная подгруппа $\pi(X, x_0)$, то X гомеоморфно $\tilde{X}/G(\tilde{X}, p, X)$.

Доказательство. Так как $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ — нормальная подгруппа, то из теоремы 18.3 следует, что $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ для всех $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$; при этом $p(\tilde{x}_1) = x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Согласно следствию 21.4, в $G(\tilde{X}, p, X)$ найдется элемент h , для которого $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Обратно, если $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ при некотором $h \in G(\tilde{X}, p, X)$, то очевидно, что $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$. Итак, группа $G(\tilde{X}, p, X)$ отождествляет точки пространства $\tilde{X}$ точно так же, как p . Этим доказано, что между X и $\tilde{X}/G(\tilde{X}, p, X)$ имеется взаимно однозначное соответствие. Оно является гомеоморфизмом, потому что каждое из этих множеств имеет естественную фактортопологию, определяемую проекциями $p: \tilde{X} \rightarrow X$ и $\pi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G(\tilde{X}, p, X)$. $\square$

21.10. Следствие. Пусть $\tilde{X}$ связно и локально линейно связно. Если $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ — нормальная подгруппа $\pi(X, x_0)$, то $\pi(X, x_0)/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong G(\tilde{X}, p, X)$.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из теорем 21.9 и 19.3. $\square$

21.11. Следствие. Если $\tilde{X}$ односвязно и локально линейно связно, то $\pi(X, x_0) \cong G(\tilde{X}, p, X)$.

21.12 Упражнения. (а) Покажите, что подпространство P прямой $\mathbb{R}$, определенное как $P = \{0, 1/n: n \text{ — натуральное число}\}$, не является локально линейно связным.

(б) Пусть $p_1: X_1 \rightarrow S^1$, $p_2: X_2 \rightarrow S^1$ суть n -листные накрытия (n — натуральное число). Покажите, что они эквивалентны.

(с) Определите все накрывающие пространства для следующих пространств: (i) S^1 , (ii) $S^1 \times S^1$, (iii) односвязного и локально линейно связного пространства X .

(d) Пусть $p_1: X_1 \rightarrow X$, $p_2: X_2 \rightarrow X$ — накрытия связного и локально линейно связного пространства X . (i) Докажите, что если существует непрерывное сюръективное отображение $f: X_1 \rightarrow X_2$, при котором $p_2 f = p_1$, то оно является накрывающим отображением. (ii) Докажите, что если X_2 линейно связно и существует непрерывное отображение $f: X_1 \rightarrow X_2$, при котором $p_2 f = p_1$, то f — накрывающее отображение.

(е) Пусть $p_1: X_1 \rightarrow X$ и $p_2: X_2 \rightarrow X$ — накрытия, причем X_1 односвязно и локально линейно связно, а X_2 связно и локально линейно связно. Докажите, что существует непрерывное накрывающее отображение $p: X_1 \rightarrow X_2$.

(f) Пусть X — связное G -пространство, причем действие G на X собственнo разрывно. Докажите, что группа скользящих накрытия $p: X \rightarrow X/G$ совпадает с G .

(g) Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — накрытие со связным и локально линейно связным пространством $\tilde{X}$. Докажите, что $G(\tilde{X}, p, X)$ действует на $p^{-1}(x_0)$. Далее покажите, что действие $G(\tilde{X}, p, X)$ на $p^{-1}(x_0)$ тогда и только тогда транзитивно, когда $p_*\pi(\tilde{X}, x_0)$ — нормальная подгруппа $\pi(X, x_0)$ (определение транзитивного действия см. в упр. 18.4 (b)).

Глава 22

ЕЩЕ О НАКРЫВАЮЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ: ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

В предыдущей главе мы показали, что накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ определяется с точностью до эквивалентности классом сопряженных подгрупп $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в $\pi(X, x_0)$. Естественно спросить, существует ли для данного класса сопряженных подгрупп $\pi(X, x_0)$ накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$, отвечающее этому классу. Как мы покажем далее, ответ положителен, если X удовлетворяет еще некоторым дополнительным условиям (кроме связности и локальной линейной связности). Всегда существует накрытие, соответствующее классу сопряженности всей фундаментальной группы X , а именно $1: X \rightarrow X$. Но оно не представляет интереса. Напротив, накрытие, соответствующее классу сопряженности тривиальной подгруппы, очень интересно. Это накрытие, если оно существует для данного X , называется *универсальным накрытием* пространства X . Итак, универсальное накрытие X — это накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$, для которого $\tilde{X}$ односвязно. Вскоре мы дадим необходимое и достаточное условие существования универсального накрытия X .

Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — универсальное накрытие X . Если x — любая точка из X и $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, то найдется правильно накрытая окрестность U точки x , для которой $p^{-1}(U)$ является дизъюнктным объединением множеств $\{V_j, j \in J\}$, и $\tilde{x} \in V_k$ при некотором k . Обозначим V_k через V . Диаграмма