АКАДЕМИЯ НАУК ТАДЖИКСКОЙ ССР
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ

Л. Г. МИХАЙЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Ответственный редактор —
доктор физико-математических наук
Э. М. МУХАМАДИЕВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ДОНИШ»
ДУШАНБЕ — 1986

УДК 517.95,517,956,517,55

Михайлов Л. Г. **Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями.** — Душанбе: Дониш, 1986. — 116 с.

Монография посвящена некоторым классам систем уравнений в частных производных со многими независимыми переменными. К ним относятся, в частности, комплексные системы обобщенных уравнений Коши—Римана и системы уравнений Бельтрами. Основное внимание уделяется методам исследования совместности переопределенных систем и построению многообразия решений.

Рецензенты: академик АН СССР, доктор физико-математических наук С. М. Никольский, член-корреспондент АН СССР, доктор физико-математических наук А. В. Бицадзе.

М $\frac{1702050000-066}{М502-86}$ 3—85

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии наук Таджикской ССР

Леонид Григорьевич МИХАЙЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Ответственный редактор — **Эргаш Мирзоевич Мухамадиев**

Редактор издательства **А. Г. Родина**
Технический редактор **В. Н. Щемелинина**
Корректоры **Л. Д. Полисская, Т. А. Рохман**

ИБ № 1046

Сдано в набор 03. 04. 1986 г. Подписано в печать 14. 10. 1986 г. КЛ 02486 Формат 60×84 1/16. Бумага тип. № 1 Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 6,74. Усл. краск.-отт. 6,85 Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 1550. Заказ 338. Цена в переплете № 7—1 р. 30 к.

Издательство и типография «Дониш», 734029, Душанбе, ул. Айни, 121, корп. 2.

Принятые обозначения и сокращения

$\equiv$ тождество, возможно и в смысле логическом, «то же самое, но в другой форме».

Т. о. — таким образом.

Независимые переменные: **вещественные** x, y, ξ, η или $(x_1,\ldots,x_n)$ $(y_1,\ldots y_n)$ и т. п., **комплексные** $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ или $z_k=x_k+iy_k$.

Вещественное и комплексное* **евклидовы пространства** точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ или $z=(z_1,\ldots z_n)$ обозначаются через R^n и $\mathbb{C}^n$ соответственно, $R^{2n}\equiv\mathbb{C}^n$.

Функции: вещественные $f(x, y)$, $u(x_1, \ldots, x_n)$, $v(x_1, \ldots, x_n)$ комплексные $w(z)\equiv w(x,y)=u(x, y)+iv(x,y)$, либо $w(z_1,\ldots,z_n)=$ $=u(x_1,\ldots,x_n)+iv(x_1,\ldots,x_n)$, в общем понимании это функции от точки из R^n или $\mathbb{C}^n$.

Черта над комплексной переменной или функцией обозначает переход к комплексно-сопряженному значению.

Производные: если $u=u(x, y)$, то частные производные обозначаются $u_x=\partial_x u$, $u_y=\partial_y u$, и аналогично для $u=u(x_1, \ldots, x_n)$: $u_{x_k}=\partial_{x_k}u$.

Комплексные производные (то же, что формальные производные): $\partial_{\bar z}=\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)$, $\partial_z=\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)$ и аналогично для

$$w=w(z_1,\ldots,z_n):\partial_{\bar z_k}=\frac{1}{2}(\partial_{x_k}+i\partial_{y_k}),\ \partial_{z_k}=\frac{1}{2}(\partial_{x_k}-i\partial_{y_k}).$$

Полная производная: если $f=f(x, y; u, v)$, где u, v — функции от x, y, то производная по первому аргументу обозначается через $f_x=\partial_x f$, а через $D_x f$ обозначено $f_x+f_u u_x+$ $+f_v v_x$.

Класс функций: С — класс непрерывных функций, C^m — класс m раз непрерывно дифференцируемых функций, L^p — суммируемых со степенью p.

---

* По техническим причинам известное обозначение комплексного евклидова пространства несколько изменено ($\mathbb{C}$).

О. п. д. — операция перекрестного дифференцирования, т. е. приравнивание вторых смешанных производных, отличающихся только порядком дифференцирований.

о. д. у. — обыкновенное дифференциальное уравнение, применяемое в различных падежах и числах, как, например, системы о. д. у.

п. д. — полный дифференциал; если $u = u(x, y)$, то это $du = u_x dx + u_y dy$.

п. д.-системы — это системы в полных дифференциалах, т. е. связанные с полными дифференциалами. Для $u = u(x, y)$ это будет $u_x = a(x, y)$, $u_y = b(x, y)$ где $a_y = b_x$ (**классическая** п. д.-система), но также **квазилинейная** п. д.-система $u_x = a(x, y, u)$ $u_y = b(x, y, u)$.

у. п. и. — **условия полной интегрируемости,** соотношения, получаемые о. п. д. из квазилинейной п. д.-системы и выполняющиеся тождественно.

с. К. Р. — **система Коши—Римана** $u_x - v_y = 0$, $u_y + v_x = 0$, поскольку для $w = u + iv$ будет $\partial_{\bar z} w = \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)]$, то с. К. Р. сводится к уравнению К. Р. $\partial_{\bar z} w = 0$. Аналогично для $w = w(z_1, \ldots, z_n)$ ими будут $\partial_{\bar z_k} w = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

а. ф. — **аналитическая функция,** т. е. решение с. К. Р. — это определение **аналитичности по Риману.** Обычно обозначается через φ или Φ. Для такой функции формальная комплексная производная $\partial_z \Phi$ совпадает с настоящей производной по комплексной переменной, определяемой как предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta z}$, не зависящий от пути. Сказанное верно также и для функций нескольких комплексных переменных. **Класс таких функций обозначается через** A.

Помимо указанного будет фигурировать еще другое определение: функция комплексных либо вещественных, либо частично тех и других переменных называется **аналитической по Вейерштрассу,** если в окрестности каждой точки области она может быть представлена абсолютно сходящимся степенным рядом. **Класс таких функций обозначается** RA. Для функции от комплексных переменных оба определения эквивалентны.

т. ф. к. п. — **теория функций комплексного переменного** $\equiv$ теория аналитических функций от одного или многих комплексных переменных.

н. с. К. Р. — **неоднородная система Коши—Римана,** т. е. $\partial_{\bar{z}_k} w = f_k(z_1, \ldots, z_n)$, $k = 1, \ldots, n$.

о. с. К. Р. — **обобщенная система Коши—Римана,** т. е. $\partial_{\bar{z}_k} w = a_k \bar{w} + b_k w + c_k$, $k = 1, \ldots, n$.

о. а. ф. — **обобщенная аналитическая функция,** т. е. решение о. с. К. Р.

Подчеркиванием выделяются либо отдельные мысли, мелкие утверждения, определения и т. п., либо подзаголовки подразделений, находящихся внутри пунктов.

ВВЕДЕНИЕ

Переопределенные системы уравнений в частных производных известны еще с прошлого века, когда формировались основные понятия гидродинамики, теории упругости и электромагнитного поля. Например, отражением понятия потенциала поля явилась математическая теория полного дифференциала; соответствующую (переопределенную) систему уравнений в частных производных принято называть системой в полных дифференциалах (подробнее см. ниже).

Термин «переопределенная» формально означает, что уравнений больше, чем неизвестных функций. Но уже давно известно, что многообразие решений тем не менее может содержать произвольные функции. Это хорошо видно на примере системы Коши—Римана, описывающей аналитические функции многих комплексных переменных. Другим примером может служить обратная задача общей теории поля: восстановить векторное поле, если известны поле вихрей и дивергенция. Если на плоскости эта задача описывается системой двух уравнений с двумя неизвестными функциями, то в трехмерном пространстве — системой четырех уравнений с тремя неизвестными функциями. Ясно, что термин «переопределенная» далеко не обязателен и применяется нами лишь для более четкого описания интересующего нас круга вопросов. Впрочем, есть один аспект, специфичный для таких систем,— это условия совместности.

Чаще всего условия совместности выявляются непосредственно после применения операции перекрестного дифференцирования — для уравнений, разрешенных относительно производных, или операции коммутирования — для более общих уравнений. Однако иногда выяснение даже необходимых условий, а тем более необходимых и достаточных, может оказаться весьма затруднительным. Примерами этого являются некоторые системы трех уравнений на плоскости (§ 6) и обобщенная система Коши—Римана в многомерном случае (§ 7).

Уже достаточно давно известно полное описание необходимых и достаточных условий совместности для двух типов систем. Во-первых, это квазилинейные системы в полных дифференциалах [12], [46]:

$$\partial_{x_j} u_k = h^{kj}(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_n). \tag{1}$$

Мы будем пользоваться более корректным в смысле стиля и более удобным термином «п. д.-системы». Во-вторых, это линейные системы [12], [46], [48]:

$$L^k u \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x_1, \ldots, x_n)\partial_{x_j} u = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Не без исторической целесообразности и для краткости систему (2) и ее теорию мы связываем с именем Якоби.

В современном изложении обе эти теории синтезированы теоремой Фробениуса [51], но более плодотворными для наших целей оказались их первоначальные формулировки, допускающие различные непосредственные разработки и обобщения, особенно важны обобщения на комплексные переменные.

Методы теории функций комплексного переменного (т. ф. к. п.) хорошо разработаны в случае плоскости. Сказанное относится также к более узкому, но тоже достаточно обширному направлению исследований, именуемому как методы теории функций в применении к уравнениям в частных производных (Function Theoretic Metods for Partial Differential Equations). Важную роль играют те или иные формулы представления решений через аналитические функции (а. ф.). Можно упомянуть представления решений эллиптического уравнения второго порядка с аналитическими коэффициентами, построенные И. Н. Векуа [6], а для систем подобного типа — А. В. Бицадзе [3, 4]. Значение подобных представлений видно хотя бы из того, что основные классы граничных задач они позволяют редуцировать к краевым задачам а. ф., теория которых достаточно полно разработана советскими математиками, и фундаментальную роль здесь сыграли монографии Н. И. Мусхелишвили [41] и Ф. Д. Гахова [9]. Указанные соображения можно отнести также к уравнению второго порядка с сингулярной линией, называемому уравнением Эйлера—Пуассона—Дарбу, или уравнением GASPT (Hydrodynamic Axially Symmetric Potencial Theory — гидродинамическая осесимметрическая теория потенциала). Уравнения с сингулярной точкой изучались нами в [18].

Существенное развитие методов т. ф. к. п. принадлежит теории обобщенных аналитических функций, завершенной И. Н. Векуа [7] и L. Bers [2]. Что касается многомерных задач, то развитие методов т. ф. к. п. значительно затруднено. О продвижении в некоторых направлениях свидетельствуют монографии Л. Хёрмандера [52], В. С. Владимирова [8], R. P Gilbert [15], а также цикл работ, описанных в обзорной статье Л. Ниренберга [61]. В ней идет речь об установлении «почти комплексных, или аналитических, структур» для некоторых линейных комплексных уравнений и систем типа (2). В случае $n=2m$ и комплексных $a_{kj} \in C^\infty$ основная теорема гласит, что если коммутанты $[L^k, L^j]=L^kL^j-L^jL^k$ являются линейными комбинациями операторов $L^1, \ldots, L^m$, то существуют локальные координаты, в которых (2) принимает вид системы Коши—Римана. Из этого следует формула представления решений через а. ф. К этому добавим, что соответствующая система с общими линейными членами в правой части сведется к обобщенной системе Коши—Римана (3), изучаемой нами в § 7.

Настоящая монография посвящена некоторым системам уравнений в частных производных главным образом с двумя вещественными искомыми функциями (что иногда равносильно одной комплексной), зависящими от произвольного числа независимых переменных. О типах систем можно составить представление из подробного оглавления с названиями пунктов. Мы стремились максимально развить и систематизировать методы конкретного и эффективного решения систем и получить явные формулы представления многообразий решений. Это удалось сделать для многих типов уравнений и систем с линейными дифференциальными операторами в левой части и с общими линейными членами — в правой.

Теории систем (1) и (2), излагаемые в § 3 и 4, снабжены различного рода разработками и обобщениями, в том числе на комплексные уравнения, искомые функции и независимые переменные. В § 5 изучаются системы второго порядка с одной вещественной искомой функцией, зависящей от двух либо трех независимых переменных, но описанные здесь способы исследования применимы также в случае произвольного числа независимых переменных.

Если в (1) задаются не все mn уравнений, а только некоторая их часть, то в одних случаях мы приходим к многообразиям решений с произвольными функциями, а в других — к необходимости изучения процедуры пополнения системы. Подобные схемы рассуждений лежат в основе изучения систем первого порядка с двумя искомыми функциями, причем мы снова ограничиваемся случаями двух либо трех независимых переменных (§ 6).

Одним из наиболее весомых является § 7, где изучается обобщенная система Коши—Римана со многими независимыми переменными:

$$\partial_{\overline{z}_k} w = a_k \overline{w} + b_k w + c_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Дается простое и эффективное исследование системы в самом общем случае и при условии принадлежности коэффициентов и решения классу C^2. Выясняются те необходимые условия совместности, когда система может иметь достаточно богатое (нетривиальное) многообразие решений. Тривиальными названы многообразия решений с конечным числом произвольных постоянных. Если все $a_k = 0$, b_k, c_k удовлетворяют соответствующим условиям совместности, многообразие решений системы (3) содержит произвольную а. ф. от n переменных. Если хотя бы одно $a_k \neq 0$, то после ряда последовательных упрощений, использующих условия совместности, система (3) сводится в конечном итоге к одному уравнению с одной переменной, так что многообразие решений содержит произвольную а. ф. одной переменной.

Рассматриваемая в § 8 система Бельтрами

$$\partial_{\overline{z}_k} w - q_k(z_1, \ldots, z_n) \partial_{z_k} w = 0, \quad k = 1, \ldots, n \tag{4}$$

после подстановки $z_k = x_k + iy_k$ сводится к комплексной системе типа (2), причем будет $n = 2m$. Как уже говорилось выше, в случае $q_k \in C^\infty$ такие системы изучены в [61]. Совершенно иной метод исследования, приводимый в § 8, отличается простотой и непосредственностью и подобен тем, которые применялись в случае $n = 1$ [7], при этом у нас достаточно требовать $q_k, w \in C^2$.

В заключение можно сделать одно замечание общего характера. Если интересоваться более широким обзором литературы по данной тематике, то следует обратиться к [50], [51], [63] и [64].

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. **Теорема существования для системы о·д·у.** Если x_1^0; y_1^0, ..., $y^0{}_n$ — заданные вещественные и a, b — вещественные положительные числа, то множество точек x; y, ..., y_n), удовлетворяющих неравенствам

$$|x-x^0| \leqslant a,\ |y_k-y^0{}_k| \leqslant b,\ k=1,\ldots,n,$$

называется прямоугольником и обозначается через $\Pi \equiv \Pi(a,b)$. Пусть на Π заданы непрерывные функции $f_k(x; y_1, \ldots, y_n)$ и требуется найти решение системы о. д. у.

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x; y_1,\ldots,y_n),\ k=1,\ldots,n, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$[y_k]_{x=x^0}=y^0{}_k,\ k=1,\ldots,n. \tag{1.2}$$

Из непрерывности функций $f_k(x; y_1, \ldots, y_n)$ вытекает существование такого числа M, что

$$|f_k(x; y_1,\ldots,y_n)| \leqslant M,\ k=1,\ldots,n.$$

Потребуем, кроме того, чтобы f_k удовлетворяли условию Липшица:

$$|f_k(x; y_1,\ldots,y_n)-f_k(x; \tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)| \leqslant B\sum_{k=1}^{n}|y_k-\tilde{y}_k|.$$

Если $f_k \in C^1$, то условие будет выполнено, причем

$$B=\max B_k,\ B_k=\max_j|\partial_{y_j}f_k|.$$

Теорема 1.1. *Если функции $f_k(x; y_1, \ldots, y_n)$, $k=1, \ldots, n$, непрерывны на $\Pi(a, b)$ и удовлетворяют условию Липшица по $y_1, \ldots, y_n$, то на $\Pi(h, b)$, где $h \leqslant \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M=\max|f_k|$ существует единственное решение задачи* (1.1.)—(1.2.).

Доказательство. Задача (1.1)—(1.2) равносильна системе интегральных уравнений

$$(1.3)\qquad y_k(x)=y^0_k+\int\limits_{x_0}^{x} f_k(x;y_1,\dots,y_n)dx,\quad k=1,\dots,n.$$

Будем решать ее методом последовательных приближений, полагая

$$(1.4)\qquad y^{p+1}_k(x)=y^0_k+\int\limits_{x^0}^{x} f_k(x;y^p_1,\dots,y^p_n)dx,\ k=1,\dots,n.$$

Ясно, что все функции $y^p_k(x)$ непрерывны и их значения не выходят из $\Pi(h,b)$:

$$|y^{p+1}_k(x)-y^0_k(x)|\leqslant\int\limits_{x^0}^{x}|f_k(x;y^p_1,\dots,y^p_n)|\,dx\leqslant M|x-x^0|\leqslant Mh\leqslant b.$$

Кроме того, из (1.4) имеем

$$|y^2_k(x)-y^1_k(x)|\leqslant\int\limits_{x^0}^{x}|f_k(x;y^1_1,\dots,y^1_n)-f_k(x;y^0_1,\dots,y^0_n)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant B\int\limits_{x^0}^{x}\sum_{k=1}^{n}|y^1_k(x)-y^0_k|\,dx\leqslant BnM\frac{1}{2}|x-x^0|^2,$$

. . . .

$$|y^{p+1}_k(x)-y^p_k(x)|\leqslant M(Bn)^p\frac{|x-x^0|^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Эти оценки, в которых при необходимости можем заменить $|x-x^0|<h$, доказывают равномерную сходимость рядов

$$y^0_k+\sum_{k=1}^{\infty}[y^{p+1}_k(x)-y^p_k(x)]$$

и последовательностей $\{y^p_k(x)\}$ к искомым функциям $y_k(x)$. Устремляя $p\to\infty$ в (1.4), найдем, что построенные функции удовлетворяют системе (1.3), а тем самым дают решение задачи (1.1)—1.2).

Переходя к доказательству единственности и допуская существование какого-либо другого решения $z_1(x),\dots,z_n(x)$, из уравнений (1.3) будем иметь

$$|z_k(x)-y^0_k|\leqslant\int\limits_{x^0}^{x}|f_k(x;z_1,\dots,z_n)|\,dx\leqslant M|x-x^0|,$$

$$|z_k(x)-y^1_k(x)|\leqslant\int\limits_{x^0}^{x}|f_k(x;z_1,\dots,z_n)-f(x;y^0_1,\dots,y^0_n)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant B \int\limits_{x^0}^{x} \sum_{k=1}^{n} |z_k(x) - y^0_k| dx \leqslant BnM \frac{|x-x^0|^2}{2!},$$

. . . .

$$|z_k(x) - y^p_k(x)| \leqslant M(Bn)^p \frac{|x-x^0|^{p+1}}{(p+1)!}.$$

В пределе $p \to \infty$ отсюда получаем $|z_k(x) - y_k(x)| \leqslant 0$, т. е. $z_k(x) \equiv y_k(x)$, $k=1, \ldots, n$, что и требовалось доказать.

Замечание 1.1 (о линейной системе). Пусть

$$f_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) y_j + b_k(x), \; k=1, \ldots, n.$$

Тогда (1.3) — линейная система интегральных уравнений типа Вольтерра, и, как известно, ее решение находится методом последовательных приближений, который сходится на том же отрезке, на котором были заданы $a_{kj}(x)$, $b_k(x)$, т. е. на всем отрезке $|x-x^0| \leqslant a$. Если теорему 1.1 из-за условия малости $h \leqslant \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ называют **локальной**, то в линейном случае она становится **нелокальной**.

1.2. **Первые интегралы и их свойства.** Пусть условия теоремы 1.1 выполнены не только при одной системе начальных данных, но и в некоторой области значений $y_1^0, \ldots, y^0_n$. Тогда можем говорить о решении задачи (1.1)—(1.2) как о функции начальных данных и записывать

$$y_k = y_k(x; y^0_1, \ldots, y^0_n), \; k=1, \ldots, n.$$

Теорема 1.2. *Если $f_k(x; y_1, \ldots, y_n)$ допускают непрерывные производные по $y_1, \ldots, y_n$, то решение задачи* (1.1)—(1.2) *также допускает непрерывные частные производные по $y^0_1, \ldots, y^0_n$ и якобиан*

$$I = \frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(y^0_1, \ldots, y^0_n)} \neq 0. \tag{1.5}$$

Если все $f_k \in C^m$, то и решение $(y_1, \ldots, y_n) \in C^m$.

Доказательство этой теоремы и другие упоминаемые свойства можно найти в [45], [47], [51]. Возможность варьирования начальных данных позволяет заменить их на произвольные постоянные $c_1, \ldots, c_n$, так что получаем выражение

$$y_k = y_k(x; c_1, \ldots, c_n), \; k=1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

называемое общим решением системы (1.1) или, как лучше говорить, многообразием всех решений. Эти равенства можем разрешить относительно $c_1, \ldots, c_n$, поскольку якобиан функций $y_1, \ldots, y_n$ по $c_1, \ldots, c_n$, совпадающий с якобианом (1.5), отличен от нуля, и это дает еще одно представление многообразия всех решений

$$(1.7)\qquad \varphi_k(x; y_1, \ldots, y_n) = c_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

причем снова якобиан

$$(1.8)\qquad \frac{D(\varphi_1 \ldots \varphi_n)}{D(y_1 \ldots y_n)} = \frac{1}{I} \neq 0.$$

Определение 1.1. Каждое равенство типа (1.7), левая часть которого не есть тождественная постоянная, но становится таковой при подстановке вместо $y_1, \ldots, y_n$ какого-либо решения системы (1.1), называется **первым интегралом** системы (1.1). Из теорем 1.1 и 1.2 непосредственно следует, что всего имеем n различных функционально независимых первых интегралов. Ясно также и обратное, что если мы знаем n независимых первых интегралов, то, разрешая (1.7) относительно $y_1, \ldots, y_n$, придем к общему решению в форме (1.6). Ясно, кроме того, что если $F \in C^1$ — произвольная функция, то $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = C$ также является первым интегралом.

Приведенными понятиями особенно удобно пользоваться при переходе к **симметричной форме системы о. д. у.**:

$$(1.9)\qquad \frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_{n+1})} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{a_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})}.$$

Принимая x_1 за x, а $x_2, \ldots, x_{n+1}$ — за $y_1 \ldots, y_n$ и определяя f_k формулами $a_1 f_k = a_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n$, придем к системе вида (1.1). Очевиден и обратный переход; т. о. системы (1.1) и (1.9) эквивалентны. Затруднение представит тот случай, когда $a_1 = 0$. Но тогда за x мы примем другое x_k, а именно то, для которого соответствующее $a_k \neq 0$. Существенным затруднение будет только в том случае, когда все $a_k = 0$. Из дальнейшего рассмотрения мы исключаем подобные случаи, называемые **сингулярными.**

Важно отметить еще, что для систем в симметричной форме (1.9) наиболее естественным является тот способ решения, когда ищут интегрируемые комбинации, т. е. такие, которые составляют полные дифференциалы $dF(x_1, \ldots, x_n) = 0$, откуда получаются первые интегралы $F(x_1, \ldots, x_n) = c$.

1.3. **Комплексная аналитическая система о. д. у.** Полностью следуя 1.1, произведем соответствующие обобщения на комплексные переменные. Если $z^0, w_1^0, \ldots, w^0_n$ — заданные комплексные и a, b — вещественные положительные числа, то через $\Pi \equiv \Pi(a, b)$ обозначим полицилиндр из $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$|z - z^0| \leqslant a, \; |w_k - w^0_k| \leqslant b, \; k = 1, \ldots, n.$$

Требуется найти решение системы

(1.10) $$\frac{dw_k}{dz} = f_k(z_1; w_1, \ldots, w_n), \quad k=1, \ldots, n,$$

удовлетворяющее начальному условию

(1.11) $$[w_k]_{z=z^0} = w^0_k, \quad k=1, \ldots, n.$$

Теорема 1.3. *Пусть f_k — заданные, а w_k, $k=1,\ldots,n$ — искомые функции класса A на $\Pi=\Pi(a,b)$*. Тогда на $\Pi(h,b)$, где $h < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M=\max|f_k|$, существует единственное решение задачи* (1.10)—(1.11) из класса A.

Доказательство полностью следует 1.1, надо всюду сделать соответствующие переобозначения x на z; y_k на w_k и т. д.

Замечание 1.2. Рассмотрим задачу (1.10)—(1.11) в RA

(1.12) $$\frac{dw_k}{dx} = f_k(x; w_1, \ldots, w_n), \quad k=1, \ldots, n,$$

(1.13) $$[w_k]_{x=x^0} = w^0_k, \quad k=1, \ldots, n,$$

где x вещественна, w_k и $f_k \in RA$. Совершая аналитическое продолжение (1.12) из RA в A, придем к (1.10), а после применения теоремы 1.3 мы вернемся к (1.12) просто заменой всюду z на x, тем самым теорема 1.3 будет доказана и для (1.12)—(1.13).

Замечание 1.3. Пусть теперь $w_k \in C^1$, а f_k как только что будут $\in RA$. Если w_k решение (1.12)—(1.13), построенное методом последовательных приближений, то, согласно теореме 1.3, оно единственно в C^1. С другой стороны, интегральные уравнения (1.3) производят вложение функций $y_k \in C^1$ в функции $y_k \in RA$. Мы доказали, т. о., что **если $f_k \in RA$, то всякое решение задачи (1.12)—(1.13) из C^1 непременно будет аналитическим, т. е. происходит вложение решений из C^1 в RA.** Подобное же рассуждение для уравнений (1.10) с комплексной независимой переменной не будет корректным, ибо запись $w \in C^1$, т. е. существование $\frac{dw_k}{dz}$ в (1.10) уже означает необходимо, что $w_k \in A$, т. е. мы неизбежно приходим к теореме 1.3.

До сих пор всюду фактически применялся метод последовательных приближений. Перейдем к методу мажорант.

---

* A — класс функций, аналитических по комплексным переменным, RA — аналитических по вещественным переменным; подробнее см. в 1.6.

Теорема 1.4. *Если $f_k \in A$ на $\Pi(a, b)$, то задача* (1.10)—(1.11) *имеет единственное решение, аналитическое при* $|z-z^0|<r$, *где*

$$r=a\left\{1-\exp\left[-\frac{b}{(n+1)Ma}\right]\right\}. \tag{1.14}$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $z^0=0$, $w^0_k=0$, $k=1,\dots,n$. Положим

$$w_p=\sum_{k=0}^{\infty} A_k^p z^k, \quad k!\,A^p_k=\left(\frac{d^k w_p}{dz^k}\right)_0. \tag{1.15}$$

При $z=0$ из системы (1.10) найдем $\left(\frac{dw_k}{dz}\right)_0$, дифференцируя затем (1.10) по z, аналогично найдем $\left(\frac{d^2 w_k}{dz^2}\right)_0$ и т. д. Поскольку при этом производятся только дифференцирования и подстановки, то все искомые производные выразятся через всевозможные производные от f_k как полиномы с целыми положительными коэффициентами. Мажорантную к (1.10) систему возьмем в виде

$$\frac{dw}{dz}=\frac{M}{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{w}{b}\right)^n}, \tag{1.16}$$

здесь мы полагаем $w_1=\dots=w_n=w$. Учитывая, что для (1.16) решение также записывается в виде ряда (1.15), произведение факториалов на коэффициенты которого выражается аналогичными полиномами, то оно будет мажорировать решение (1.10). Но для (1.16) решение дается формулой

$$w=b-b\left\{1+\frac{(n+1)Ma}{b}\ln\left(1-\frac{z}{a}\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}}$$

и является а. ф. при $|z|<r$, где r дается формулой (1.14). Теорема доказана.

Метод мажорант Коши имеет гораздо более обширные применения в теории уравнений с частными производными. Об этом говорит, например, теорема Коши—Ковалевской в наиболее общей ее формулировке [42], но и она далеко не исчерпывает всех типов уравнений, к которым этот метод может быть применен. Некоторым ее развитием в одном из подобных направлений является теория Рикье [44]. Ниже метод мажорант будет иллюстрирован на нелинейном уравнении первого порядка (см. § 3) и более существенно будет использован для переопределенных систем § 7, 8.

1.4. **Формула Коши—Грина**. Если D — односвязная область с границей Γ и $w \in C^1(D)$, то для всякой подобласти Δ с границей γ верна комплексная формула Грина

$$\iint\limits_{\Delta} \partial_{\bar z} w\, ds_z \quad \frac{1}{2i} \int\limits_{\gamma} w(t)\, dt.$$

По теореме о среднем из нее получаем

$$\partial_{\bar z} w = \lim_{\Delta \to z} \frac{1}{2i|\Delta|} \int\limits_{\gamma} w(t)\, dt, \tag{1 17}$$

где через $|\Delta|$ обозначена площадь Δ, а $\Delta \to z$ означает стягивание области Δ в точку z. В тех случаях, когда $w \notin C^1$, но правая часть (1.17) существует, ее принимают за определение обобщенной производной в смысле Помпей [7], называемой также ареолярной.

Наряду с интегралом Коши фундаментальное значение имеет также интеграл

$$\omega(z) \equiv Tf \equiv -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} ds_\zeta \ (z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta, ds_\zeta \quad d\xi d\eta). \tag{1.18}$$

Непосредственно очевидно, что $w \in C(E)$, E — вся плоскость, $\omega(\infty) = 0$, $\omega \in A(D^-)$, где D^- — внешняя область, т. е. $D + D^- = E$.

Разбивая область $D = \Delta + (D - \Delta)$ и соответственно интеграл из (1.18), будем иметь

$$\frac{1}{2i} \int\limits_{\gamma} \omega(t) dt = \frac{1}{2i} \int\limits_{\gamma} \omega\Delta(t) dt = \frac{1}{2i} \int\limits_{\gamma} dt \left(-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} ds_\zeta \right) =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} f(\zeta) ds_\zeta \left(-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dt}{\zeta - t} \right) = \iint\limits_{\Delta} f(\zeta) ds_\zeta,$$

что после подстановки в (1.17) дает

$$\partial_{\bar z} \omega = \lim_{\Delta \to z} \frac{1}{2i|\Delta|} \int\limits_{\gamma} \omega(t) dt = \lim_{\Delta \to z} \frac{1}{|\Delta|} \iint\limits_{\Delta} \omega(\xi) ds_\xi = f(z).$$

Это замечательное свойство $\partial_{\bar z}\omega = f(z)$ интеграла (1.18) может быть сохранено для различных классов функций $f(z)$ при соответственном обобщении понятия производной $\partial_{\bar z}\omega$: если $f(z) = f(x, y) = \tilde f(z, \bar z) \in RA$, то $\partial_{\bar z}\omega$ — обычная частная производная; если $f \in C(D)$, то $\partial_{\bar z}\omega$ существует в смысле D.

Помпей, а если $f \in L(D)$, то $\partial_{\bar z}\omega$ следует понимать в смысле С. Л. Соболева [7].

Перейдем к обращению операции дифференцирования по $\bar z$, называемому комплексным интегрированием. Первообразной к функции $f(x, y)$ по $\bar z$ назовем такую функцию $F(x, y)$, что $\partial_{\bar z} F = f$. Интеграл (1.18) дает одну из первообразных, а если $f(x, y) \in RA$, то, кроме того, она находится обычным неопределенным интегрированием по $\bar z$ (считая z постоянной):

$$F(z, \bar z) = \int f\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) d\bar z.$$

Поскольку $\partial_{\bar z}\Phi = 0$ для любой $\Phi \in A$, то совокупность всех первообразных дается формулой

$$w(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} ds_\zeta. \tag{1.19}$$

Если $w \in C(D+\Gamma)$, то, полагая $z=t$ и составляя интегралы Коши, найдем $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(t)}{t-z} dt$, что после подстановки в (1.19) дает **формулу Коши—Грина.**

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial_{\bar\zeta} w}{\zeta - z} ds_\zeta. \tag{1.20}$$

1.5. **Обобщенные аналитические функции.** Обобщенной системой Коши—Римана (о. с. К. Р.) называют всякую линейную систему двух уравнений в частных производных на плоскости с неизвестными функциями $u(x, y)$, $v(x, y)$, дифференциальную часть которой образуют операторы Коши—Римана; в комплексной форме она имеет вид

$$\partial_{\bar z} w = a(z)\bar w + b(z) w + c(z). \tag{1.21}$$

Всякое решение системы этого типа называют **обобщенной аналитической функцией (о. а. ф.).**

Формула (1.19) доставляет общее решение неоднородной о. с. К. Р. $\partial_{\bar z} w = f(z)$. В другом частном случае $\partial_{\bar z} w = b(z) w$ многообразие всех решений дается формулой $w(z) = \varphi(z) \exp(Tb)$, $\varphi \in A$. В общем случае однородной системы (1.21) (т. е. при $c \equiv 0$) получаем не явную, но весьма полезную **первую основную формулу**

$$w(z) = \varphi(z) \exp\left\{T\left(a \frac{\bar w}{w} + b\right)\right\}. \tag{1.22}$$

Из нее, например, сразу вытекает **аналог теоремы Лиувилля**: если на Γ $w(t)=\psi(t)$, где $\psi(z)\in A(D^-)$ и $\psi(\infty)$, 0, то $w(z)\equiv 0$ в D^+. Если к общей неоднородной системе (1.21) применить формулу (1.19), то получим интегральное уравнение Фредгольма:

$$w(z)=\Phi(z)+Tc+T(a\overline{w}+bw). \tag{1.23}$$

Если w_0 — решение однородного уравнения $w_0=T(a\overline{w}_0+bw_0)$, то в силу свойств правой части получим $w_0\in C(E)$, $w_0\in A(D^-)$ и $w_0(\infty)=0$. Из аналога теоремы Лиувилля следует, что $w_0\equiv 0$, а тогда из теоремы Фредгольма получаем, что неоднородное уравнение однозначно разрешимо для любого свободного члена. Обозначая резольвенты уравнения (1.23) через Γ_1, Γ_2, найдем частное решение неоднородной о. с. К. Р. (1.21) в виде

$$w=Tc+\Gamma_1 Tc+\Gamma_2\overline{Tc},$$

а общее решение однородной о. с. К. Р. (1.21) дается **второй основной формулой**

$$w(z)+\Phi(z)+\Gamma_1\Phi+\Gamma_2\overline{\Phi} \tag{1.24}$$

1.6. **Некоторые сведения из теории аналитических функций многих переменных.** Вещественное и комплексное евклидовы пространства точек $x=(x_1, ..., x_n)$ и $z=(z_1, ..., z_n)$ где $z_k=x_k+iy_k$, обозначаются через R^n и $\mathbb{C}^n$ соответственно; пространства $\mathbb{C}^n$ и R^{2n} отождествляются. Если D_k — односвязные области в плоскостях переменных z_k, ограниченные гладкими жордановыми линиями Γ_k, то область в C^n, заполненная точками $z=(z_1, ..., z_n)$, называется **полицилиндром** D, а в случае, когда D_k — круги $|z_k-z^0{}_k|<r_k$, ее называют **поликругом**, его мы будем обозначать $S(z^0, r)$, где $z^0=(z_1{}^0, ..., z^0{}_n)$, $r=(r_1,...,r_n)$. Для R^n **поликруг** $|x_k-x^0{}_k|<r_k$ называется **параллелипипедом и обозначается** $\Pi(x^0, r)\equiv\Pi$.

Пусть, как принято, $w(z_1, ..., z_n)$ обозначает комплекснозначную функцию точки из $\mathbb{C}^n$ или R^{2n}; т. е. $w=u+iv$, где u, v — функции от $(x_1, y_1; ..., x_n, y_n)$, примем также обозначения комплексно-сопряженных переменных и производных $\overline{z}_k=x_k-iy_k$, $2\partial_{\overline{z}_k}=\partial_{x_k}+i\partial_{y_k}$, $2\partial_{z_k}=\partial_{x_k}-i\partial_{y_k}$.
Если $n=1$ и $w\in C^1$, $w=u+iv$, то

$$\partial_{\overline{z}}w=\frac{1}{2}[(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)], \tag{1.25}$$

так что условия Коши—Римана принимают вид $\partial_{\overline{z}}w=0$. Если перейти к комплексно-сопряженным переменным

$$w(x,y)=w\left(\frac{z+\bar z}{2},\ \frac{z-\bar z}{2i}\right)\equiv\tilde w(z,\bar z),$$

то условие $\partial_{\bar z}w=0$, т. е. $\partial_{\bar z}\tilde w=0$ можно понимать буквально, т. е. $\tilde w$ не содержит $\bar z$ и является функцией одного только z.

Аналогично обстоит дело с функциями многих переменных. Если $w=w(z_1, \ldots, z_n)\in C^1$ и $\partial_{\bar z_k}w=0$, $k=1, \ldots, n$, то функция w называется **аналитической по Риману.** Иначе говоря, функция называется аналитической по совокупности переменных, если она аналитична по каждой из них. Если $w=f(z_1, \ldots, z_n)$ аналитична в полицилиндре, то, применяя формулу Коши по z_n, затем по z_{n-1} и т. д., получим **многомерную формулу Коши:**

$$f(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{dt_1}{t_1-z_1}\cdots\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{f(t_1,\ldots,t_n)}{t_n-z_n}\,dt_n. \tag{1.26}$$

Аналогично одномерной теории из нее вытекает много различных свойств: разложимость в степенной ряд с центром в точке z^0 и сходящийся в максимальном поликруге, содержащемся в D, теорема единственности и бесконечная дифференцируемость, а также **неравенства Коши** для коэффициентов степенного ряда

$$|a_{k_1\ldots k_n}|\leqslant\frac{M}{r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}},\quad M=\max|f(z_1,\ldots,z_n)|. \tag{1.27}$$

Неравенства (1.27) лежат в основе **метода мажорант,** широко используемого в аналитической теории дифференциальных уравнений [10]. Мажорантным по отношению к степенному ряду называется другой такой ряд, коэффициенты которого вещественны, положительны и превосходят модули соответствующих коэффициентов исходного ряда. Для упрощения записей будем полагать в (1.27) и далее $z_1^0=\ldots=z_n^0=0, r_1=\ldots=r_n=r$, причем это нисколько не ограничивает общности рассуждений.

Если вслед за Коши обозначать мажорирование двойным неравенством, то утверждается, что

$$f(z_1,\ldots,z_n)\ll\frac{M}{\left(1-\frac{z_1}{r_1}\right)\ldots\left(1-\frac{z_n}{r_n}\right)}\ll\frac{M}{1-\frac{z_1+\ldots+z_n}{r}}. \tag{1.28}$$

Первое соотношение непосредственно следует из разложения множителей в однократные геометрические ряды, их перемножения и применения неравенств (1.27). Второе соотношение становится ясным после разложения последнего выражения в геометрический ряд по степеням $(z_1 + ... + z_n)^p$ и расписывания этих выражений по степеням $z_1, ..., z_n$ с биномиальными коэффициентами.

Функция $f(z_1, ..., z_n)$ комплексных либо вещественных, либо частично тех и других переменных называется **аналитической по Вейерштрассу**, если в окрестности каждой точки области она может быть представлена абсолютно сходящимся степенным рядом

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_0^\infty a_{k_1 \ldots k_n} (z_1 - z^0_1)^{k_1} \ldots (z_n - z^0_n)^{k_n}. \tag{1.29}$$

Класс функций, **аналитических по комплексным переменным**, обозначается через A, в то время как функции, **аналитические по вещественным переменным, составляют класс** RA. **В классе** A **из аналитичности по Риману вытекает аналитичность по Вейерштрассу и обратно.** В самом деле, если f аналитична по Риману, то имеет место формула Коши, а из нее следует разложимость в степенной ряд. Обратно, если f представлена рядом (1.29), то из него получаем $\partial_{\bar{z}_k} f = 0, k = 1, \ldots, n$.

Что касается класса RA, то ни о каком определении аналитичности по Риману вообще говорить не приходится, это видно хотя бы из того факта, что существуют функции $f(x_1, ..., x_n) \in C^\infty$ и не представимые степенными рядами. Существенным отличием класса RA от A является отсутствие формулы Коши; как следствие, такое фундаментальное отличие: если $f(x_1, ..., x_n) \in RA(T)$ и $x^0 \in T$, то функция f представима степенным рядом, сходящимся в некотором $\Pi(x^0, r)$, но нельзя утверждать о сходимости ряда в максимальном параллелепипеде, содержащемся в T, как это имеет место в классе A.

Об аналитическом продолжении из RA **в** A. Как это выявилось достаточно давно [6], для применения методов т. ф. к. п. к уравнениям в частных производных важное значение имеют вопросы аналитического продолжения от вещественных либо комплексно-сопряженных переменных. Если абсолютно сходится ряд

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_0^\infty a_{k_k \ldots k_n} (x_1 - x^0_1)^{k_1} \ldots (x_n - x^0_n)^{k_n}, \tag{1.30}$$

то абсолютно сходится также ряд

(1.31) $$f(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{0}^{\infty} a_{k_1\ldots k_n}(z_1-x^0{}_1)^{k_1}\ldots(z_n-x^0{}_n)^{k_n}.$$

Этим осуществляется аналитическое продолжение функции из RA на $\Pi(x^0, r)$ в функцию из A на $S(x^0, r)$. При этом, как известно, степенные ряды обоих типов (1.30) и (1.31) обладают свойствами единственности. Поэтому можно утверждать теорему единственности в такой усиленной форме (ср. [5]): пусть дана $f(z_1, \ldots, z_n) \in A(D)$, $D \subset \mathbb{C}^n$ и $z^0 \in D$, **действительным окружением точки** z^0 называют любое точечное множество из $\mathbb{C}^n$, содержащее параллелепипед $\Pi(x^0, r): |x_k-x^0{}_k|<r, k=1, \ldots, n$, тогда если $f(z_1, \ldots, z_n)=0$, на $\Pi(x^0, r)$, то $f(z_1, \ldots, z_n)=0$ всюду в D.

Пусть теперь T — произвольная односвязная ограниченная область в R^n и задана $f(x_1, \ldots, x_n) \in RA(T)$. Для каждой внутренней точки $x^0=(x^0{}_1,\ldots,x^0{}_n)$ существует такое $r>0$, что на $\Pi(x^0, r)$ имеет место разложение (1.30), а посредством (1.31) и аналитическое продолжение на $S(x^0, r) \in \mathbb{C}^n$. Т. о., для любой замкнутой подобласти из T существует бесконечное покрытие параллелепипедами $\Pi(x^0, r)$, из которого согласно лемме Гейне—Бореля можно выделить конечное покрытие. Ему соответствует конечная система поликругов $S(x^0, r)$, в совокупности составляющая некоторую область $D \subset \mathbb{C}^n$. Поскольку в каждом из указанных налегающих друг на друга поликругов имелась а. ф., то в совокупности они явятся аналитическими продолжениями друг друга и составят единую а. ф. в области D. Т. о. доказано, что **всегда существует аналитическое продолжение функции** $f(x_1, \ldots, x_n) \in RA(T)$, $T \subset R^n$, **в функцию** $F(z_1, \ldots, z_n) \in A(D)$, $T \subset D$, $D \subset {}^n\mathbb{C}$, **совпадающую с** f **на** T, **и такое продолжение единственно.** Подчеркнем, что никакой информации о структуре, форме и размерах области D мы не получаем.

Рассмотрим функции от комплексно-сопряженных переменных $z_k=x_k+iy_k$, $\bar{z}_k=x_k-iy_k$, $x_k=\frac{1}{2}(z_k+\bar{z}_k)$, $y_k=\frac{1}{2i}(z_k-\bar{z}_k)$.

Ясно, что любую такую функцию можно преобразовать к вещественным переменным и обратно. В соответствии с этим будем писать

(1.32) $$f(x_1, y_1;\ldots;x_n y_n)=\tilde{f}(z_1, \bar{z}_1;\ldots;z_n, \bar{z}_n).$$

Поскольку для левой части уже доказана возможность аналитического продолжения в область $2n$ комплексных переменных, то уже из этого, вообще говоря, и для правой части

(1.32) следует возможность аналитического продолжения в функцию от $2n$ независимых комплексных переменных. Здесь надо заметить, что переменные z_k, $\bar{z}_k$ не являются независимыми в C^{2n}, хотя всюду с ними поступают именно так, часто не замечая этого, и обоснованием этого как раз является возможность их аналитического продолжения в независимые переменные. Более конкретно указанное можно осуществить следующим образом. Пусть дана правая часть (1.32). Перейдем к левой части и осуществим аналитическое продолжение x_k, y_k в комплексные переменные $\tilde{x}_k$, $\tilde{y}_k$, а в дальнейшем и совершенно не изменяя обозначений (на практике так и делают, часто не замечая этого). Затем с этими комплексными переменными произведем замену переменных

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}(z_k + \zeta_k), \ \tilde{y}_k = \frac{1}{2i}(z_k - \zeta_k), \ k = 1, \ldots, n.$$

Тогда будет

$$\tilde{x}_k + i\tilde{y}_k = \frac{1}{2}(x_k + \zeta_k) + \frac{i}{2i}(z_k - \zeta_k) = z_k, \ \tilde{x}_k - i\tilde{y}_k = \zeta_k.$$

В результате

$$\tilde{f}(z_1, \bar{z}_1; \ldots; z_n, \bar{z}_n) \approx \tilde{f}(z_1, \zeta_1; \ldots, z_n, \zeta_n).$$

Утверждение наше доказано. Более того, заметив, что многообразию в C^{2n}

(1.33) $$\zeta_1 = \bar{z}_1; \ldots; \zeta_n = \bar{z}_n$$

соответствует $\tilde{x}_k = \frac{1}{2}(z_k + \bar{z}_k) = x_k$, $\tilde{y}_k = \frac{1}{2i}(z_k - \bar{z}_k) = y_k$, т. е. действительное окружение комплексных переменных $\tilde{x}_k$, $\tilde{y}_k$ можем считать доказанным, **если в** R^{2n} **задана** $g(z_1, \bar{z}_1; \ldots; z_n, \bar{z}_n)$ **— аналитическая функция комплексно-сопряженных переменных, то она допускает аналитическое продолжение в функцию** $g(z_1, \zeta_1; \ldots; z_n, \zeta_n)$**, аналитическую от** $2n$ **независимых комплексных переменных в области** $D \subset C^{2n}$**, и если** $g=0$ **на многообразии (1.33), то** $g=0$ **всюду в** D**.**

Описав аналитическое продолжение от вещественных и комплексно-сопряженных переменных, мы ничего не сказали об обратной операции, которую назовем **сужением.** В применении к уравнениям в частных производных, которые обычно являются вещественными, необходимо делать оба указанных шага: продолжение в область комплексных переменных и обратное сужение к вещественным. Сужение от A к RA

производится просто заменой z_k на x_k, а от A к комплексно-сопряженным переменным — заменой (1.33). Сохранение тех или иных свойств гарантируется при этом указанными выше теоремами единственности. Примеров этому много в § 2, 3, 7, 8.

Якобианная теория функциональной зависимости в комплексной области. Пусть даны комплекснозначные функции вещественных переменных $w_k = w_k(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n) = u_k + iv_k$ или, что равносильно, $2n$ вещественных функций

$$u_k = u_k(x_1, y_1; \ldots, x_n, y_n), \; v_k = v_k(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.34}$$

Согласно основной теореме якобианной теории (см. [12], [49]), для функциональной зависимости системы (1.34) необходимо и достаточно, чтобы якобиан $I \equiv 0$ в рассматриваемой области, где

$$I \equiv \frac{D(u_1, v_1; \ldots; u_n, v_n)}{D(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} \partial_{x_1} u_1 \partial_{x_1} v_1 \ldots \partial_{x_1} u_n \partial_{x_1} v_n \\ \partial_{y_1} u_1 \partial_{y_1} v_1 \ldots \partial_{y_1} u_n \partial_{y_1} v_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \partial_{x_n} u_1 \partial_{x_n} v_1 \ldots \partial_{x_n} u_n \partial_{x_n} v_n \\ \partial_{y_n} u_1 \partial_{y_n} v_1 \ldots \partial_{y_n} u_n \partial_{y_n} v_n \end{vmatrix}. \tag{1.35}$$

Если система функций (1.34) функционально независима, то найдется точка, в которой $I \neq 0$, но тогда найдется и такая малая ее окрестность, в которой $I \neq 0$, поскольку мы считаем все функции $u_k, v_k \in C^2$, так что якобиан I есть непрерывная функция. Можно было заметить, что мы рассматриваем специфические системы четного числа функций от четного числа переменных и эту линию будем проводить далее, имея в виду миноры только четного порядка, вместе с u_k обязательно содержащие v_k, а вместе с производной по x_p — также производную по y_p. Умножая в (1.35) строки с четными номерами на i, складывая и вычитая из предшествующих, заменяя соседние строки на их суммы и разности, мы получим такой же, как в (1.35), определитель, но вместо производных по x_k, y_k будут производные по z_k, $\overline{z}_k$ от тех же функций u_k, v_k. Совершая аналогичные процедуры со столбцами, получим

$$(1.36)\qquad I\equiv\begin{vmatrix} \partial_{z_1}w_1 & \partial_{z_1}\overline{w_1} & \ldots & \partial_{z_1}w_n & \partial_{z_1}\overline{w_n}\\ \partial_{\overline{z_1}}w_1 & \partial_{\overline{z_1}}\overline{w_1} & \ldots & \partial_{\overline{z_1}}w_n & \partial_{\overline{z_1}}\overline{w_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \partial_{z_n}w_1 & \partial_{z_n}\overline{w_1} & \ldots & \partial_{z_n}w_n & \partial_{z_n}\overline{w_n}\\ \partial_{\overline{z_n}}w_1 & \partial_{\overline{z_n}}\overline{w_1} & \ldots & \partial_{\overline{z_n}}w_n & \partial_{\overline{z_n}}\overline{w_n}\end{vmatrix}.$$

Как известно, для а. ф. $\Phi(z)$ якобианом отображения $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ или $w=u+iv=\Phi(z)$ будет $|\Phi'(z)|^2$. Пусть теперь имеем систему а. ф. $w_k=w_k(z_1, \ldots, z_n)$, $k=1, \ldots, n$. Тогда $\partial_{\overline{z_k}}w_p=0$, $\partial_{z_k}\overline{w_p}=0$, так что в каждой строке и столбце через один будут нули и после (четного числа) соответствующих перестановок строк и столбцов получим два квадратных ящика нулей по неглавной диагонали, а на главной Δ и $\overline{\Delta}$, так что

$$(1.37)\qquad I=|\Delta|^2,\quad \Delta=\begin{vmatrix}\partial_{z_1}w_1 & \ldots & \partial_{z_1}w_n\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \partial_{z_n}w_1 & \ldots & \partial_{z_n}w_n\end{vmatrix}.$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Линейное однородное уравнение. С уравнением в частных производных

$$(2.1)\qquad Lu\equiv\sum_{k=1}^{n}a_k(x_1, \ldots, x_n)\,\partial_{x_k}u=0$$

тесно связана система

$$(2.2)\qquad \frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)}=\frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Теорема 2.1. *Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=c$ является первым интегралом системы (2.2), то $u=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Обратно, если $u=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ является каким-либо решением (2.1), то $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=c$ будет первым интегралом системы (2.2). Как система (2.2) имеет $n-1$ не-*

зависимых первых интегралов $\varphi_2(x_1, ..., x_n)=c_2$, .., $\varphi_n(x_1, ..., x_n)=c_n$, *так и уравнение* (2.1) *имеет* $n-1$ *функционально независимых решений* $u_k=\varphi_k(x_1, ..., x_n)$, $k=2, ..., n$, *и всякое решение уравнения* (2.1) *содержится в многообразии*

$$u=F[\varphi_2(x_1, ..., x_n), ..., \varphi_n(x_1, ..., x_n)], \tag{2.3}$$

где F — *произвольная дифференцируемая функция.*

Сделаем разъяснение относительно классов коэффициентов и решений. Они определяются теоремами 1.1 и 1.2 из § 1, применяемыми к системе (2.2). Например, если $a_k \in C^1$, то будет также $\varphi_k \in C^1$, $k=2, ..., n$, после чего корректно считать функции u, $F \in C^1$. Как было разъяснено в § 1, мы исключаем сингулярные случаи, когда одновременно все $a_k=0$, в какой-то точке u для определенности считаем, что ни одно $a_k \neq$.

Доказательство. Систему (2.2) можно записать в виде

$$\frac{dx_1}{dt}=a_1(x_1, ..., x_n), ..., \frac{dx_n}{dt}=a_n(x_1, ..., x_n). \tag{2.4}$$

Тогда можем говорить об интегральных кривых, называемых также характеристиками, выраженных параметрически $x_k=x_k(t)$, $k=1, ..., n$. Пусть $\varphi(x_1, ..., x_n)=c$ какой-либо первый интеграл системы (2.2). Согласно определению 1.1, подстановка сюда $x_k=x_k(t)$, $k=1, ..., n$ дает тождество, и следовательно $d\varphi=0$, а с другой стороны —

$$d\varphi=\partial_{x_1}\varphi dx_1+\partial_{x_2}\varphi dx_2+...+\partial_{x_n}\varphi dx_n. \tag{2.5}$$

Заменяя из (2.4) $dx_k=a_k dt$, получим

$$L\varphi=dt[a_1(x_1, ..., x_n)\partial_{x_1}\varphi+...+a_n(x_1, ..., x_n)\partial_{x_n}\varphi]=0, \tag{2.6}$$

т. е. $u=\varphi(x_1, ..., x_n)$ является решением (2.1). Обратно, пусть $L\varphi=0$. Подставляя в (2.6) $a_k=\frac{dx_k}{dt}$, будем иметь

$$L\varphi=\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}\varphi dx_k=d\varphi=0,$$

откуда следует, что $\varphi\equiv\text{const}$. Это доказывает, что $\varphi(x_1, ..., x_n)=c$ является первым интегралом системы (2.2).

Переходим к доказательству последнего утверждения теоремы и формулы (2.3). Прежде всего имеем

$$LF=\sum_{k=1}^{n}a_k\,\partial_{x_k}F=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=2}^{n}\partial_{\varphi_j}F\partial_{x_k}\varphi_j=$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \partial_{\varphi_j} F \sum_{k=1}^{n} a_k \partial_{x_k} \varphi_j = \sum_{j=2}^{n} \partial_{\varphi_j} F L\varphi_j.$$

Отсюда видим, что если $L\varphi_j=0, j=2,\dots,n$, то $LF=0$, т. е. (2.3) является решением уравнения (2.1) при любой функции $F \in C^1$. Обратно докажем, что всякое решение (2.1) содержится в формуле (2.3). Расписывая равенства $Lu=0$, $L\varphi_j=0$, имеем

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \partial_{x_1} u + \dots + a_n \partial_{x_n} u = 0, \\ a_2 \partial_{x_1} \varphi_2 + \dots + a_n \partial_{x_n} \varphi_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n \partial_{x_1} \varphi_n + \dots + a_n \partial_{x_n} \varphi_n = 0. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Получили линейную алгебраическую систему относительно $a_1, \dots, a_n$. Поскольку нам известно, что для всех значений $x_1,\dots,x_n$ не все a_k равны нулю, т. е. система (2.7) имеет ненулевое решение, то поэтому ее определитель, совпадающий с якобианом, будет

$$I = \frac{D(u;\varphi_2,\dots,\varphi_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)} \equiv 0.$$

Отсюда следует (см. § 1), что имеет место функциональная зависимость (2.3). Теорема доказана.

2.2 **Его свойства.** Для линейного уравнения (2.1), как и для соответствующей системы о. д. у. (2.2), можно отметить ряд свойств, из которых важнейшим является:

Свойство 2.1. Если известно m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$ функционально независимых решений (2.1), то заменами переменных число слагаемых в уравнении (2.1) можно уменьшить на m. Действительно, пусть

$$\varphi_{n-m+1}(x_1,\dots,x_n),\dots, \varphi_n(x_1,\dots,x_n) \tag{2.8}$$

— функционально независимые решения (2.1), так что якобиан системы этих функций по любым m переменным из всей совокупности $x_1, \dots, x_n$ отличен от нуля, см. § 1 и [51]. Через $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ обозначим произвольные функции, подчиненные только тому условию, чтобы вместе с (2.8) они составляли функционально независимую систему n функций, т. е. чтобы якобиан $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} \neq 0$. Введем новые переменные

$$y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n), \quad k=1,2,\dots,n. \tag{2.9}$$

Согласно сказанному выше, формулы (2.9) устанавливают взаимно однозначное соответствие, не прерывное и дифференцируемое. Подставляя (2.9) в (2.1), имеем

$$Lu=\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{p=1}^{n} \partial_{y_p} u \partial_{x_k} y_p=\sum_{p=1}^{n} \partial_{y_p} u \sum_{k=1}^{n} a_k \partial_{x_k} y_p=\sum_{p=1}^{n} Ly_p \partial_{y_p} u.$$

Но поскольку $Ly_p=L\varphi_p=0$ для $p=n-m+1, \ldots, n$, то получаем

$$Lu\equiv\sum_{p=1}^{n-m}(L\varphi_p)\partial_{y_p} u. \tag{2.10}$$

Свойство 2.1 доказано.

Особо отметим тот случай, когда $m=n-1$, т. е. когда известны все функционально независимые решения (2.1), обозначаемые через $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$. За y_1 возьмем тогда $y_1=x_1\equiv\varphi_1$. Поскольку в этом случае $\partial_{x_k}\varphi_1=0$, $k=2, \ldots, n$, то якобиан

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{D(\varphi_2,\ldots\varphi_n)}{D(x_2,\ldots x_n)}\neq 0.$$

Здесь надо воспользоваться свойством (1.5) первых интегралов. Т. о., в данном случае $L\varphi_1=a_1$ и формула (2.10) дает

$$Lu=a_1\partial_{y_1}u=0. \tag{2.11}$$

Поскольку $a_1\neq 0$, то получаем $\partial_{y_1}u=0$. Отсюда, между прочим, ясно, что многообразие всех решений запишется в виде $u=F(\varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, где F — произвольная функция. Возвращаясь к «старым» переменным, еще раз получим формулу (2.3).

Свойство 2.1, и особенно отмеченный его частный случай $m=n-1$, послужат далее основой **метода замены переменных**, применяемого для исследования или решения более общих уравнений с оператором Lu. К таковым относится

2.3. **Простейшее квазилинейное уравнение**

$$Lu\equiv\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\ldots,x_n)\partial_{x_k}u=f(x_1,\ldots,x_n;u). \tag{2.12}$$

Допуская, что известны все $n-1$ функционально независимых решений соответствующего уравнения без правой части, т. е. уравнения $Lu=0$, и совершая замену переменных (2.9), получим в соответствии с (2.11)

$$\widetilde{a}_1\partial_{y_1}u=\widetilde{f}(y_1,\ldots,y_n;u), \tag{2.13}$$

где $\widetilde{a_1}$ и $\widetilde{f_1}$ — те же функции a_1 и f, но с замененными согласно (2.9) переменными. (2.13) является обыкновенным дифференциальным уравнением по y_1 с параметрами $y_2, \ldots, y_n$. Во всех тех случаях, когда (2.13) интегрируемо в квадратурах, также в квадратурах мы получим общее решение уравнения (2.12), причем оно будет содержать произвольную функцию от $y_2,\ldots,y_n$. К отмеченному типу относится

2.4. **Простейшее линейное уравнение**

$$(2.14)\qquad Lu \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\ldots,x_n)\partial_{x_k}u = b(x_1,\ldots,x_n)u + f(x_1,\ldots,x_n).$$

В соответствии с (2.13) получаем

$$(2.15)\qquad \tilde{a}_1\partial_{y_1}u = \tilde{b}u + \tilde{f}.$$

Его общим решением будет

$$(2.16)\qquad u(y_1,\ldots,y_n) = \exp\left(\int \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}_1}dy_1\right)\left\{c(y_2,\ldots,y_n) + \int\left[\frac{\tilde{f}}{\tilde{a}_1}\exp\left(- \int \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{a}_1}dy_1\right)\right]dy_1\right\}.$$

После возвращения к «старым» переменным по формулам (2.9) получим общее решение уравнения (2.14), содержащее произвольную функцию

$$c[\varphi_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_n)].$$

Решение уравнения (2.14) может быть дано и другими способами. **Метод редукции** состоит в сведении к последовательному нахождению частных решений двух простейших неоднородных уравнений. Если ω — какое-либо частное решение уравнения

$$(2.17)\qquad L\omega = b,$$

то, полагая $u = \exp\omega.\,V$, из (2,14) получим

$$L\,u = L(\exp\omega)V + \exp LV = b\exp\omega V + \exp\omega L\,V = b\exp\omega V + f,$$

откуда

$$(2.18)\qquad L\,V = \exp(-\omega)f.$$

Если V_0 — какое-либо частное решение неоднородного уравнения (2.18), а $\tilde{V}$ — общее решение однородного, то общим решением (2.18) будет $\tilde{V}+V_0$ и соответственно для (2.14) получаем формулу

$$(2.19)\qquad u = \exp\omega(\tilde{V}+V_0),$$

вполне согласуемую с (2.16).

2.5. **Квазилинейное уравнение.** Под этим названием будет фигурировать уравнение

$$(2.20)\qquad \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\dots,x_n;u)\partial_{x_k}u = f(x_1,\dots,x_n;u),$$

где a_k, f — заданные функции своих аргументов. **Метод неявной функции,** излагаемый всюду в учебниках и имеющий гораздо более широкую область применения, например для подобных и более общих **систем уравнений,** состоит в том, что решение ищется в виде неявной функции

$$(2.21)\qquad V(x_1,\dots,x_n;u)=0,\ \text{откуда}\ \partial_{x_k}V+\partial_u V\partial_{x_k}u=0, k=1,\dots,n.$$

Подстановка в (2.20) дает

$$(2.22)\qquad \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\dots,x_n;u)\partial_{x_k}u + f(x_1,\dots,x_n;u)\partial_u V=0.$$

Мы пришли к **линейному однородному уравнению с** $n+1$ **независимыми переменными.**

Обладая большой общностью, изложенный метод имеет тот недостаток, что после решения дифференциального уравнения (2.22) требует еще обращения уравнения $V(x_1,\dots,x_n;u)=0$ относительно u. Последняя задача доставляет трудности совсем иного рода и не позволяет усмотреть каких-либо качественных или структурных свойств даже в тех или иных частных подслучаях, что всегда имеет немаловажное значение. Это можно видеть даже на примере линейного неоднородного уравнения. Для нахождения его частного решения достаточно найти какое-либо одно решение соответствующего однородного уравнения типа (2.22) — и тут метод неявной функции вполне приемлем и в самом деле часто применяется. Но усмотреть этим методом структуру общего решения весьма затруднительно. Еще в большей мере сказанное относится к решению общего линейного уравнения (2.14).

2.6. **Обобщения на комплексные аналитические уравнения.** Прежде всего рассмотрим линейное однородное уравнение

$$(2.23)\qquad Lw\equiv \sum_{k=1}^{n} a_k(z_1,\dots,z_n)\,\partial_{z_k}w=0,$$

где $z_k=x_k+iy_k$, a_k — заданные комплексные аналитические и w искомая аналитическая функции, короче $a_k, w\in A$. Рассмотрим также соответствующую систему комплексных аналитических о. д. у.:

$$(2.24)\qquad \frac{dz_1}{a_1(z_1,\dots,z_n)}=\dots=\frac{dz_n}{a_n(z_1,\dots,z_n)}.$$

Как сказано в § 1, к системе (2.24) применима вся теория систем о. д. у. Пусть известны ее первые интегралы:

$$(2.25)\qquad \varphi_k(z_1,\dots,z_n)=c_k,\ k=2,\dots,n,$$

где $\varphi_k\in A$ и c_k — произвольные комплексные переменные.

Теорема 2.2. *Пусть $a_k(z_1,\dots,z_n)\in A$, $k=1,\dots,n$. Тогда многообразие всех решений из класса A дается формулой*

$$(2.26)\qquad w=\Phi\,[\varphi_2(z_1,\dots,z_n),\dots,\varphi_n(z_1,\dots,z_n)],$$

где Φ — произвольная а. ф. своих $n-1$ аргументов $\varphi_2,\dots,\varphi_n$.

Первое доказательство. Совершим замену переменных

$$(2.27)\qquad \zeta_k=\varphi_k(z_1,\dots,z_n),\ k=1,\dots,n,\ \varphi_1\equiv z_1.$$

В соответствии с § 1 полный (вещественный) $2n$-мерный якобиан этого аналитического преобразования будет равен $|\Delta|^2$, где

$$\Delta\equiv\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)}{D(z_1,z_2,\dots,z_n)}=\frac{D(\varphi_2,\dots,\varphi_n)}{D(z_2,\dots,z_n)}\neq 0.$$

Последнее неравенство объясняется свойством первых интегралов, даваемых теоремой 1.2 и обобщаемым на комплексные переменные. Поэтому (2.27) осуществляет гомеоморфизм. После подстановки (2.27) в (2.23) будем иметь

$$Lw=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=1}^{n}\partial_{\zeta_j}w\,\partial_{z_k}\varphi_j=\sum_{j=1}^{n}L\varphi_j\,\partial_{\zeta_j}w=a_1\partial_{\zeta_1}w=0.$$

В силу того, что $a_1\neq 0$, дело свелось к уравнению $\partial_{\zeta_1}w=0$, общим решением которого в A является $w=\Phi(\zeta_2,\dots,\zeta_n)$, где Φ — произвольная а. ф. Вставляя ζ_k из (2.27), получим (2.26); теорема доказана.

Второе доказательство следует доказательству последней части теоремы 2.1. Запишем то, что w, $\varphi_2,\dots,\varphi_n$ являются решениями уравнения (2.23):

$$\begin{cases} a_1\partial_{z_1}w+\dots+a_n\partial_{z_n}w=0,\\ a_1\partial_{z_1}\varphi_2+\dots+a_n\partial_{z_n}\varphi_2=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ a_1\partial_{z_1}\varphi_n+\dots+a_n\partial_{z_n}\varphi_n=0.\end{cases}$$

Поскольку система имеет ненулевое решение $(a_1,\dots,a_n)$, то ее определитель, для аналитических функций совпадающий с якобианом:

$$\frac{D(w;\varphi_2,\ldots,\varphi_n)}{D(z_1,z_2,\ldots,z_n)}=0.$$

Согласно комплексной якобианной теории из § 1, отсюда следует, что $w=\Phi[\varphi_2, ..., \varphi_n]$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь **аналитическое уравнение в вещественных переменных:**

(2.28) $$Lw\equiv \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, ..., x_n)\,\partial_{x_k}w=0,$$

где a_k — заданные комплексные аналитические функции от вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, искомая функция w комплекснозначна и $w\in RA$. Совершив аналитическое продолжение на комплексные переменные, т. е. заменив x_k на z_k, придем к уравнению (2.23). Записав многообразие всех его решений из A формулой (2.26), произведем ее сужение, заменяя z_k на x_k.

Теорема 2.3. *Пусть в уравнении* (2.28) $x_1, ..., x_n$ *вещественны, но* $a_k(x_1, ..., x_n)$ *— комплексные аналитические функции. Тогда многообразие всех решений из* RA *дается формулой*

(2.29) $$w=\Phi\,[\varphi_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_n)],$$

где Φ *— произвольная а. ф., а* $\varphi_k(x_1,\ldots,x_n)=c_k$, $k=2,\ldots,n$ *— первые интегралы системы*

(2.30) $$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Замечание 1.3. Явная некорректность в системе (2.30), состоящая в том, что dx_k вещественны, а функции a_k комплексны, устраняется аналитическим продолжением в область комплексных переменных, т. е. заменой $(x_1, ..., x_n)$ на $(z_1, \ldots, z_n)$ и затем обратной. На практике обходятся без переобозначений, совершая этот процесс в уме. Отметим также, что к системе (2.30) без всяких оговорок можно применить обычный способ нахождения интегрируемых комбинаций $dF(x_1, ..., x_n)=0$. откуда $F(x_1,\ldots,x_n)=c$, где c — комплексная постоянная, **т. е.** получили первый интеграл.

Примеры:

1. $(x+1)u_x-ixyu_y=0,$

$$u=\Phi\,\{\ln y+i[x-\ln(1+x)]\}.$$

2. $iyu_x-iu_y+e^z u_z=0,$

$$u=\Phi[x+\frac{y^2}{2},\ iy+e^{-z}].$$

2.7. Уравнение в комплексно-сопряженных переменных

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \partial_{\bar z_k} w + b_k \partial_{z_k} w = 0 \tag{2.31}$$

эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \partial_{x_k} w + \beta_k \partial_{y_k} w = 0, \tag{2.32}$$

где $\alpha_k + i\beta_k = 2a_k$, $\alpha_k - i\beta_k = 2b_k$; не следует забывать, что α_k, β_k также являются комплексными. Не изменяя обозначения переменных x_k; y_k, но считая их продолженными на комплексные значения, рассмотрим соответствующую (2.32) систему о. д. у.:

$$\frac{dx_1}{\alpha_1} = \frac{dy_1}{\beta_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\alpha_n} = \frac{dy_n}{\beta_n}. \tag{2.33}$$

Если каждую пару уравнений перекомбинировать по схеме

$$\frac{dx_k + i dy_k}{\alpha_k + i\beta_k} = \frac{dx_k - i dy_k}{\alpha_k - i\beta_k},$$

то система (2.33) преобразуется в эквивалентную систему

$$\frac{d\bar z_1}{a_1} = \frac{dz_1}{b_1} \quad \ldots = \frac{d\bar z_n}{a_n} = \frac{dz_n}{b_n}, \tag{2.34}$$

соответствующую уравнению (2.31). Этим, собственно, и доказывается правомерность интегрирования уравнений типа (2.31) по комплексно-сопряженным переменным, как по независимым переменным. Что касается систем типа (2.34), то обнаруживается два способа их решения: непосредственное интегрирование по переменным $\bar z_k$, z_k, как по независимым (а точнее говоря, как это указано в § 1, надо совершить сначала аналитическое продолжение от $(\bar z_k, z_k)$ к независимым переменным (ζ_k, z_k) или же перейти к вещественным переменным, т. е. к уравнениям (2.34), и затем совершить аналитическое продолжение на комплексные переменные). И в том и в другом случае мы придем к уравнению вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \partial_{\zeta_k} w + b_k \partial_{z_k} w = 0$$

(либо с коэффициентами α_k, β_k), полностью лежащему в классе A и решенному выше.

Общая линейная система, однородная относительно операторов дифференцирования. Любое из рассматривавшихся комплексных уравнений, будь это (2.28) или (2.32), может быть расписано в два вещественных уравнения с двумя независимыми функциями u, v, где $u+iv=w$. Наиболее общей такой системой является

$$(2.35)\qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \partial_{x_k} u+\beta^i_k \partial_{y_k} u+\gamma^i_k \partial_{x_k} v+\delta^i_k \partial_{y_k} v=0,\ i=1,2.$$

Эквивалентной ей комплексной формой служит

$$(2.36)\qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \partial_{z_k} w+ b_k \partial_{\overline{z}_k} w+c_k \partial_{z_k} \overline{w}+d_k \partial_{\overline{z}_k} \overline{w}=0.$$

Мы видим, что изученные выше уравнения (2.31) образуют существенный подкласс уравнений (2.36), отличаясь на последние два слагаемых, содержащих $\overline{w}$. В связи с этим не будет излишним ввести понятие уравнений, аналитических или не аналитических по искомой функции. Обобщенная система Коши—Римана из [6] в общем случае неаналитична по $\overline{w}$, и, как было ясно из § 1, именно неаналитический член $a\overline{w}$ вызывал наибольшие затруднения при его изучении.

Уравнения с простейшей линейной правой частью. Для вещественных уравнений мы уже рассмотрели указанные в подзаголовке уравнения, см. 2.4. Рассмотрим аналогично комплексное уравнение

$$(2.37)\qquad Lw\equiv \sum_{k=1}^{n} a_k(z_1,\ldots,z_n)\partial_{z_k} w=b(z_1,\ldots,z_n)w+f(z_1,\ldots,z_n),$$

где b и f, как и все a_k, — заданные а. ф. Составляя систему о. д. у. (2.24), соответствующую левой части (2.37) и считая известными ее первые интегралы (2.25), заменим переменные по формулам (2.27). Тогда из (2.37) получим

$$(2.38)\qquad \widetilde{a}_1(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\partial_{\zeta_1} w=\widetilde{b}(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)w+\widetilde{f}(\zeta_1,\ldots,\zeta_n).$$

Интегрируя его аналогично (2.15) и с учетом того, что $w\in A$, получим

(2.39)

$$w=\exp\left(\int\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}_1}\,d\zeta_1\right)\left\{\psi(\zeta_2,\ldots,\zeta_n)+\int\frac{\widetilde{f}}{\widetilde{a}_1}\exp\left(-\int\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}_1}\,d\zeta_1\right)d\zeta_1\right\},$$

где $\psi(\zeta_2,\ldots,\zeta_n)$ — произвольная а. ф. всех своих аргументов.

Как нетрудно заметить, если, согласно § 1, восстановление первообразных производить оператором T, то можно получить решение уравнения (2.38), т. е. и (2.37), без требования аналитичности коэффициентов b, f. В самом деле, если дано уравнение $\partial_z w = g$, т. е. $\partial_{\bar z}(\overline{w}) = \overline{g}$, то, согласно [6], имеем $\overline{w} = \overline{T}\overline{g}$, т. е. $w = T\overline{g}$. Т. о. интегрирование по переменной $\bar z$ совершенно аналогично интегрированию по z, только вместо оператора T надо брать всюду оператор $\overline{T}$, а вместо произвольной а. ф. $\psi(z)$ надо брать $\overline{\psi(z)}$ или же $\psi_1(\bar z)$, $\psi_1 \in A$. В данном случае нам достаточны «частные решения», и потому полагаем $\overline{\psi(z)} \equiv 0$. В итоге получается такая же формула, как в (2.39), только вместо неопределенного интегрирования по z_1 надо брать оператор $\overline{T}$ (по переменной z_1)

$$(2.40)\quad w = \exp \overline{T}\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}_1}\right)\left\{\psi(z_2,\dots,z_n) + \overline{T}\left[\frac{\tilde{f}}{\tilde{a}_1}\exp\left(-\overline{T}\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}_1}\right)\right)\right]\right\}.$$

Уравнение с общей линейной правой частью

$$(2.41)\qquad Lw \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k(z_1,\dots,z_n)\partial_{\bar z_k} w = a\overline{w} + bw + f.$$

Аналогично предыдущему оно приводится к виду

$$a_1 \partial_{\bar\zeta_1} w = a\overline{w} + bw + f.$$

Если переобозначить $\overline{w} = V$, $\dfrac{\overline{b}}{\overline{a}_1} = \alpha$, $\dfrac{\overline{a}}{\overline{a}_1} = \beta$, $\dfrac{\overline{c}}{\overline{a}_1} = \gamma$, то получим

$$(2.42)\qquad \partial_{\zeta_1} V = \alpha\overline{V} + \beta V + \gamma.$$

Это обобщенное уравнение Коши—Римана по переменной ζ_1 и с параметрами $\zeta_2, \dots, \zeta_n$ В соответствии с 1.5 уравнение (2.42) равносильно интегральному по переменной ζ_1

$$(2.43)\qquad V(\zeta_1,\dots,\zeta_n) = \Phi(\zeta_1,\dots,\zeta_n) + T\gamma + T[\alpha\overline{V} + \beta V],$$

где Φ — произвольная а. ф. по переменной ζ_1, что же касается переменных $\zeta_2, \dots, \zeta_n$, то ее свойства определяются свойствами коэффициентов α, β и соответственно резольвент Γ_1, Γ_2.

2.8. **Уравнение Бельтрами.** Специально остановимся на случае $n=2$, причем сначала мы отказываемся от какого-либо требования аналитичности

$$(2.44)\qquad a(x, y)w_x + b(x, y)w_y = 0.$$

Переходя к комплексно-сопряженным переменным и производным, будем иметь

$$(2.45)\qquad \partial_{\bar z} w = q(z)\partial_{z} w,\quad q = -\frac{a+bi}{a-bi}.$$

В свою очередь, если перейти от (2.45) к (2.44), то получим

$$a=1-q, \quad b=i(1+q).$$

Полагая, что $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$, найдем

$$(2.46) \qquad 1-|q(z)|^2=\frac{4\Delta}{|a-bi|^2}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $|q(z)|\equiv 1$ тогда и только тогда, когда $\Delta\equiv 0$; а это последнее означает, что $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, т. е. $a=\lambda b$. Подставляя в (2.44), получим $aw_x+bw_y=b(\lambda w_x+w_y)$, т. е. уравнение (2.44) сводится к уравнению $\lambda w_x+w_y\equiv 0$, где λ — вещественно. Т. о. $|q(z)|\equiv 1$ **тогда и только тогда, когда уравнение (2.44) является вещественным.** Остаются, следовательно, только две возможности: 1) $|q(z)|<1$ либо $|q(z)|>1$, система (2.45) эллиптична; 2) $q(z)$ переходит от первых ко вторым, проходя в отдельных точках или линиях через $|q(z)|=1$, эти случаи следует называть сингулярными. Следовательно, **эллиптическому случаю отвечает только комплексное уравнение (2.44) и обратно**: если (2.44) комплексно и несингулярно, т. е. $|q(z)|\neq 1$ всюду и $q(z)\in C$, **то оно эллиптично.**

В эллиптическом случае уравнение Бельтрами достаточно полно изучено другими методами [6], [2]. При минимальных условиях на $q(z)$ доказано существование локального (и глобального) гомеоморфизма $w_0(z)$ и **представление многообразия всех решений из C^1 (и более широких классов, когда производные понимаются в обобщенном смысле) в виде**

$$(2.47) \qquad w=\Phi[w_0(z)],$$

где Φ — произвольная а. ф. от w_0.

Изложенное выше позволяет дать **более простой и эффективный способ нахождения гомеоморфизма в аналитическом случае.** Если $q(z)\in RA$, то $q=q(z,\bar z)$ может быть аналитически продолжена в $q(z,\zeta)$, и тогда достаточно проинтегрировать аналитическое о. д. у.:

$$(2.48) \qquad \frac{dz}{d\zeta}=-q(z,\zeta).$$

Если $\omega(z,\zeta)=c$ — его первый интеграл, то $w=\omega(z,\bar z)$ будет решением уравнения Бельтрами. Особо надо, конечно, проверять гомеоморфность отображения.

Пример $\quad w_{\bar z}=\lambda\frac{z}{\bar z}w_z$. Здесь имеем $\frac{dz}{d\zeta}=-\lambda\frac{z}{\zeta}$, откуда

$\frac{dz}{z}+\lambda\frac{d\zeta}{\zeta}=0$ или $z\zeta^{\lambda}=c$, т. е. искомым решением будет $w_0=$ $=z(\bar{z})^{\lambda}$ оно будет однозначной функцией при четных целых λ, вопроса о гомеоморфности мы не касаемся.

2.9. **Нелинейное уравнение в частных производных первого порядка.** Если принять обозначения неизвестной функции $u=u(x, y)$ и ее производных $p=u_x$, $q=u_y$, то уравнение запишем в виде

$$F(x, y; u, p, q)=0. \tag{2.49}$$

Не стремясь к полноте изложения и отсылая за нею к руководствам [46—48], мы опишем лишь простейший способ Лагранжа—Шарпи нахождения **полного интеграла** уравнения (2.49), т. е. семейства решений с двумя параметрами (см. ниже).

По отношению к заданному уравнению (2.49) подбирается такое второе уравнение

$$\Phi(x, y; u, p, q) = 0, \tag{2.50}$$

чтобы система (2.49), (2.50) удовлетворяла условиям полной интегрируемости (у. п. и.), см. ниже в § 3. Предполагая, что якобиан

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(p,q)}\neq 0,$$

можем систему (2.49), (2.50) представить в разрешенном виде

$$p=A(x,y;u),\quad q=B(x,y;u), \tag{2.51}$$

для которого у. п. и. имеет вид

$$A_y+BA_u=B_x+AB_u. \tag{2.52}$$

Все компоненты последнего равенства можно найти из системы (2.49), (2.50) дифференцированиями ее и алгебраическими разрешениями. Дифференцируя (2.49), (2.50) по u, затем по x и по y, найдем

$$F_u+F_pp_u+F_qq_u=0,\quad \Phi_u+\Phi_pp_u+\Phi_qq_u=0,$$

откуда

$$p_u=\frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix}F_u & F_q\\ \Phi_u & \Phi_q\end{vmatrix},\quad q_u=\frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix}F_p & F_u\\ \Phi_p & \Phi_u\end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix}F_p & F_q\\ \Phi_p & \Phi_q\end{vmatrix},$$

аналогично найдем

$$q_x=\frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix}F_p & F_x\\ \Phi_p & \Phi_x\end{vmatrix},\quad q_y=\frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix}F_y & F_q\\ \Phi_y & \Phi_q\end{vmatrix}.$$

Вставляя в (2.52), получим

$$(2.53)\qquad \begin{vmatrix} F_p & F_x+pF_u \\ \Phi_p & \Phi_x+p\Phi_u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q & F_y+qF_u \\ \Phi_q & \Phi_y+q\Phi_u \end{vmatrix} = 0.$$

Левая часть называется скобкой **Майера функций** $F(x, y; u, p, q)$, $\Phi(x, y; u, p, q)$ и обозначается $[F, \Phi]$, а в том частном случае, когда функции не содержат u, т. е. $F_u=0$, $\Phi_u=0$ (тогда будут отсутствовать вторые слагаемые во вторых столбцах), левая часть называется скобкой Пуассона и обозначается (F, Φ). Если $[F, \Phi]=0$, либо $(F, \Phi)=0$, говорят, что функции F, Φ находятся в **инволюции.**

Вводя обозначения

$$X=F_x, Y=F_y, \ U=F_u, \ P=F_p, Q=F_q,$$

можем переписать (2.53) в виде

$$(2.54)\qquad P\Phi_x+Q\Phi_y+(pP+qQ)\Phi_u-(X+pU)\Phi_p- \\ -(Y+qU)\Phi_q=0.$$

Получили линейное уравнение для определения функции $\Phi(x, y; u, p, q)$. Согласно теореме 2.1, его общее решение выразится через левые части первых интегралов соответствующей системы о. д. у.:

$$(2.55)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{pP+qQ}=-\frac{dp}{X+pU}=-\frac{dq}{Y+qU}.$$

Простота метода Лагранжа—Шарпи состоит в том, что достаточно найти лишь **один первый интеграл,** он дает искомое соотношение (2.50). Затем для нахождения функции u мы имеем уравнения (2.51), где функции A, B уже будут известны. Но поскольку в записи (2.51) не было отражено наличие произвольной постоянной a, то теперь мы перепишем (2.51) в виде

$$(2.56)\qquad u_x=A(x, y; u, a), \ u_y=B(x, y; u, a).$$

Согласно теореме 2.1, при соответствующих условиях существует семейство решений, содержащее произвольную постоянную b:

$$(2.57)\qquad u=\varphi(x, y; a, b)$$

или в неявном виде $\psi(x, y; u, a, b)=0$, которое и является **искомым полным интегралом.** В отличие от предыдущего здесь обычно результата не формулируют в виде теоремы, поскольку ее условия выглядят достаточно громоздкими.

Имея полный интеграл (2.57), дифференцированиями и исключениями можно получить все необходимые сведения, включая решение задачи Коши. В методе вариации постоянных Лагранжа a, b временно считаются функциями от x, y, тогда из (2.57) имеем:

$$p=\varphi_x+\varphi_a a_x+\varphi_b b_x,\quad q=\varphi_y+\varphi_a a_y+\varphi_b b_y.$$

Если потребовать

(2.58) $$\varphi_a a_x+\varphi_b b_x=0,\quad \varphi_a a_y+\varphi_b b_y=0,$$

то получим $p=\varphi_x$, $q=\varphi_y$ и (2.57) по-прежнему будет решением (2.56). Если (2.58) удовлетворено за счет $a=\text{const}$, $b=\text{const}$, то метод приводит к полному интегралу; если $\varphi_a=0$, $\varphi_b=0$, т. е. фактически в (2.57) не содержится произвольных постоянных a, b, такое решение называют **особым интегралом.** Если же $a\neq\text{const}$, $b\neq\text{const}$, но

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}=0,$$

то, согласно теории функциональной зависимости (§ 1), будет $b=\omega(a)$, где ω — какая-либо функция из C^1, и мы приходим к семейству решений с произвольной функцией

$$u=\varphi[x, y, a, \omega(a)],$$

называемому **общим решением**.

Задача Коши для уравнения (2.49) ставится следующим образом: найти интегральную поверхность, проходящую через линию, заданную параметрически:

(2.59) $$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

Подставив (2.59) в (2.57), обозначим

$$\Psi(t, a, b)\equiv\psi[x(t), y(t), u(t), a, b],$$

Из двух соотношений

$$\Psi(t, a, b)=0,\quad \Psi_t(t, a, b)=0$$

можно исключить параметр t, что и приводит к функциональной независимости $b=\omega(a)$, а соответствующий общий интеграл и будет искомым решением задачи Коши.

Рассмотрим теперь случай **любого числа независимых переменных**:

(2.60) $$F(x_1, \ldots, x_n; u; p_1, \ldots, p_n)=0,$$

где $u=u(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначено $p_i=u_{x_i}$. Если ввести функции

$$P_k=F_{p_k}, X_k=F_{x_k},\quad U=F_u,$$

то для нахождения полного интеграла, т. е. семейства решений $u=u(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n)$ с параметрами $a_1, \ldots, a_n$, получим систему о. д. у.:

(2.61)

$$\frac{dx_1}{P_1}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{p_1P_1+\ldots+p_nP_n}=\frac{dp_1}{-(X_1+p_1U)}=\ldots=\frac{dp_n}{-(X_n+p_nU)}.$$

2.10. Применение к нему аналитической теории. В заключение покажем, как применяется аналитическая теория к уравнениям типа (2.60). Пусть уравнение разрешено

$$\partial_{x_1}u=f(x_1,\ldots,x_n;u;\partial_{x_2}u,\ldots,\partial_{x_n}u) \tag{2.62}$$

и ставится задача Коши

$$[u]_{x_1=0}=\varphi(x_2,\ldots,x_n), \tag{2.63}$$

где f и φ — заданные а. ф. в области $\Pi(\rho, R):|x_k|<\rho, k=1,\ldots,n; |u|, |\partial_{x_k}u|<R$, $k=2,\ldots,n$. Заменяя $\tilde{u}=u-\varphi$, мы сведем условие (2.63) к нулевому. Итак, в (2.63) пусть $\varphi\equiv0$. Нахождение всех производных искомой функции при $x_1=0$ осуществляем последовательно: из (2.63) найдем все $[\partial_{x_k}u]_{x_1=0}=0$, $k=2,\ldots,n$, а также все дальнейшие производные. Затем из (2.62) находим $(\partial_{x_1}u)_0$, $(\partial^2_{x_1x_k}u)_0$, затем $(\partial^2_{x_1^2}u)_0$ и т. д. Мажорантным уравнением будет

(2.64)

$$\partial_{x_1}V=M\left\{\frac{1}{\left[1-\frac{1}{\rho}\left(\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\ldots+x_n\right)+V\right]\left[1-\frac{1}{R}\left(\partial_{x_2}V+\ldots+\partial_{x_n}V\right)\right]}-1\right\},$$

причем $0<\alpha<1$ и $[V]_{x_1=0}=0$. Разыскивая решение в виде $V=\psi(X)$, $X=\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\ldots+x_n$, получим

$$\frac{1}{\alpha}\psi'(X)=M\left\{\frac{1}{\left[1-\frac{1}{\rho}(X+\psi)\right]\left[1-\frac{n-1}{R}\psi'(X)\right]}-1\right\},\quad [\psi]_{X=0}=0. \tag{2.65}$$

Если α выбрано столь малым, что $\frac{1}{\alpha}-\frac{n-1}{R}M>0$, то при $X=0$ $\psi=0$ для нахождения $\psi'(0)$ получаем

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{n-1}{R}M\right)\psi'(0)=\frac{n-1}{\alpha R}[\psi'(0)]^2, \tag{2.66}$$

откуда для одного из двух значений имеем $\psi'(0)=0$. Дифференцируя (2.65), найдем затем $\psi''(0)$, причем оно>0 и т. д. Т. о. доказывается существование решения (2.65), разложенного в сходящийся ряд с положительными коэффициентами. Этим завершается доказательство существования и единственности решения задачи (2.62)—(2.63), см. [12].

§ 3. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

3.1. **Классическая п. д.-система.** Речь идет о восстановлении функции $u=u(x_1, \ldots, x_n)$ по ее полному дифференциалу

$$du=\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1\ldots,x_n)dx_k. \tag{3.1}$$

Задача равносильна, очевидно, решению системы

$$\partial_{x_k} u = a_k(x_1,\ldots, x_n), \quad k=1,\ldots, n, \tag{3.2}$$

которую называют системой в полных дифференциалах [49]. Более правильным, на наш взгляд, было бы назвать ее «полного дифференциала системой» или, короче «п. д.-системой», что и примем.

Теорема 3.1. *Пусть $u \in C^2$ и $a_k \in C^1$, $k=1, \ldots, n$. Для существования решений системы* (3.2) (*и уравнения* (3.1)) **необходимо и достаточно,** *чтобы выполнялись* **условия совместности**

$$\partial_{x_j} a_k=\partial_{x_k} a_j, \; k, j=1,\ldots,n. \tag{3.3}$$

Доказательство необходимости. Поскольку $u \in C^2$, то $\partial^2_{x_jx_k} u=\partial^2_{x_kx_j} u$. Дифференцируя (3.2) по x_j, а по x_k —уравнение с номером j, приравнивая, мы и получим (3.3). Описанную процедуру будем называть **операцией перекрестного дифференцирования (о. п. д.).**

Доказательство достаточности. Утверждается, что при условиях (3.3) решение (3.2) (или (3.1)) дается формулой

$$u(x_1,\ldots, x_n)=\sum_{k=1}^{n} \int_{x^0_k}^{x_k} a_k(x^\circ_1,\ldots, x^\circ_{k-1}; x_k,\ldots, x_n)dx_k+c. \tag{3.4}$$

Надо проверить выполнение равенств (3.2). Поскольку от x_1 зависит только 1-е слагаемое суммы (3.4), то имеем

$$\partial_{x_1}u=\partial_{x_1} \int_{x^0_1}^{x_1} a_1(x_1,\ldots, x_n)\,dx_1=a_1(x_1,\ldots, x_n).$$

Далее, от x_2 зависят два первых слагаемых, так что в силу (3.3) получаем

$$\partial_{x_2}u=\partial_{x_2} \int_{x^0_1}^{x_1} a_1dx_1+\partial_{x_2} \int_{x^0_2}^{x_2} a_2(x^0_1,x_2,\ldots,x_n)dx_2=$$

$$= \int_{x^0_1}^{x_1} \partial_{x_2} a_1 dx_1 + a_2(x^0_1,\dots,x_n) =$$

$$= \int_{x^0_1}^{x_1} \partial_{x_1} a_2 \, dx_1 + a_2 (x^0_1, x_2,\dots,x_n) =$$

$$= [a_2 (x_1,\dots,x_n) - a_2 (x^0_1,\dots,x_n)] + a_2 (x^0_1,\dots,x_n) = a_2 (x_1,\dots,x_n).$$

От x_3 зависят три первых слагаемых, так что

$$\partial_{x_3} u = \partial_{x_3} \int_{x^0_1}^{x_1} a_1 (x_1,\dots,x_n) dx_1 + \partial_{x_3} \int_{x^0_2}^{x_2} a_2 (x^0_1, x_2,\dots, x_n) dx_2 +$$

$$+ \partial_{x_3} \int_{x^0_3}^{x_3} a_3 (x^0_1, x^0_2, x_3,\dots,x_n) dx_3 = \int_{x^0_1}^{x_1} \partial_{x_3} a_3 dx_1 +$$

$$+ \int_{x^0_2}^{x_2} \partial_{x_2} a_3 \, dx_2 + a_3 (x^0_1, x^0_2, x_3, \dots, x_n) =$$

$$= [a_3(x_1,\dots,x_n) - a_3(x^0_1, x_2,\dots,x_n)] + [a_3(x^0_1, x_2,\dots,x_n) -$$

$$- a_3 (x^0_1, x^0_2, x_3,\dots,x_n)] + a_3(x^0_1, x^0_2, x_3,\dots,x_n) = a_3(x_1,\dots,x_n).$$

Теорема доказана. Отметим, что результаты данного и следующих пунктов обобщаются на случай $a_k \in C$ с помощью теории внешних форм [50], [51], но этим направлением интересоваться здесь и в дальнейшем мы не будем.

3.2. **Квазилинейные полный дифференциал и п. д.-система** Пусть теперь задаваемые функции a_k зависят также от искомой функции, тогда (3.1) и (3.2) примут вид

(3.5) $$d u = \sum_{k=1}^{n} a_k (x_1,\dots, x_n; u) dx_k,$$

(3.6) $$\partial_{x_k} u = a_k (x_1, \dots, x_n; u), \quad k=1,\dots, n.$$

Чтобы отличать от этих обобщений, будем называть (3.1) и

3.2. **Квазилинейные полный дифференциал и п. д.-система.**

Если $u \in C^2$ и $a_k \in C^1$, $k=1$, ..., n, то в (3.6) так же, как и выше, можем совершать о. п. д., только теперь надо брать полные производные

(3.7) $$D_{x_j} a_k = D_{x_k} a_j : \partial_{x_j} a_k + a_j \partial_u a_k = \partial_{x_k} a_j + a_k \partial_u a_j,$$
$$k, j = 1, n, \quad k \neq j.$$

В отличие от классической п. д.-системы здесь могут иметь место два совершенно различных случая: **случай 1^0**, когда все (3.7) выполняются тождественно относительно неизвестной функции u; **случай 2⁰**, когда условия (3.7) или все, или некоторые выполняются **нетождественно.** В литературе [47], [51] обычно ограничиваются только случаем 1⁰. Надо сказать, что мы неоднократно в дальнейшем будем рассматривать и случай 2⁰, причем как для систем, достаточно похожих на (3.6), так и весьма отличающихся от них.

Определение 3.1. Равенства (3.7), когда они выполняются тождественно, называются **условиями полной интегрируемости (у. п. и.).**

Лемма об инвариантности у. п. и. *Пусть* a_k $k=1, \ldots, n$, *функция* u, *а также* $h \in C^2$. *Если у. п. и.* (3.7) *выполнены и* $h'_v \neq 0$ *для системы* (3.6), *то при замене искомой функции*

$$u = h(x_1, \ldots, x_n; v)$$

для вновь получаемой относительно v *системы уравнений также будут выполнены у. п. и.*

Доказательство. Из (3.6) получаем

$$\partial_{x_k} u = \partial_{x_k} h + \partial_v h \partial_{x_k} v = a_k(x_1, \ldots, x_n; h),$$

$$\partial_{x_j} u = \partial_{x_j} h + \partial_v h \partial_{x_j} v = a_j(x_1, \ldots, x_n; h),$$

$$\partial^2_{x_k x_j} u = \partial^2_{x_k x_j} h + \partial^2_{v x_k} h \partial_{x_j} v + \partial^2_{v x_j} h \partial_{x_k} v + \partial^2_{vv} h \partial_{x_j} v \partial_{x_k} v + \\ + \partial_v h \, \partial^2_{x_k x_j} v,$$

$$\partial^2_{x_j x_k} u = \partial^2_{x_j x_k} h + \partial^2_{v x_j} h \partial_{x_k} v + \partial^2_{v x_k} h \partial_{x_j} v + \partial_{vv} h \partial_{x_k} v \partial_{x_j} v + \\ + \partial_v h \partial^2_{x_j x_k} v.$$

Выполнение у. п. и. (3.7) для исходной системы (3.6) равносильно $\partial^2_{x_k x_j} u \equiv \partial^2_{x_j x_k} u$, приравнивая их выражения из последних двух строк, получим $\partial^2_{x_k x_j} v \equiv \partial^2_{x_j x_k} v$, а это и есть у. п. и. для нового уравнения. Лемма доказана.

Пусть хотя бы одно из равенств (3.7) не выполняется тождественно, запишем его в виде

$$F(x_1, \ldots, x_n; u) = 0.$$

Если, как предположено, $a_k \in C^2$, то $F \in C^1$, и поскольку $F \not\equiv 0$, то $F_u \not\equiv 0$ (за исключением «неинтересного» здесь классического случая) найдутся точки, где $F_u \neq 0$, а тогда по теореме о неявной функции существует и единственна функция $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Может случиться, что она удовлетворяет всем другим соотношениям (3.7), а затем и всем уравнениям

(3.6). Так может оказаться, что вообще существует единственное решение системы. Нас будут интересовать семейства решений хотя бы с одной произвольной постоянной, ибо только в этом случае мы сможем удовлетворить начальному условию

$$(3.8) \qquad u=u^0 \text{ при } x_1=x^0_1, \ldots, x_n=x^0_n,$$

где u^0 — некоторое произвольно задаваемое число, которое может варьироваться в каком-либо интервале значений $(u^0-\eta,\ u^0+\eta)$, $\eta>0$. Этим рассуждением доказана необходимость в следующей теореме:

Теорема 3.2. *Пусть в системе* (3.6) *функции* u, a_k $k=1, \ldots, n, \in C^2(\Pi)$, *где* $\Pi\equiv\Pi(a,b): |x_k-x^0_k|<a,\ k=1 \ldots, n,$ $|u-u^0|<b$. *Если выполнены у. п.и.* (3.7), *то при* $\alpha<\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M=\max|a_k|$, $k=1, \ldots, n$, *на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача* (3.6)—(3.8) *имеет и притом единственное решение. Несколько иначе: если* $\alpha<\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, *то для однозначной разрешимости в* $C^2(\Pi)$ *задачи* (3.6)—(3.8) *с вариацией* u^0 *в некотором интервале значений необходимо и достаточно выполнение у. п. и.* (3.7).

Доказательство достаточности, или решение системы (3.6). Проинтегрируем 1-е уравнение из (3.6) по x_1 как о. д. у. с параметрами $x_2, \ldots, x_n$. По теореме 1,1, если x_1, $u\in\Pi(a,b)$; $|x_1-x^0_1|<a$, $|u-u^0|<b$, $M=\max\limits_{x_1}|a_k|$, $k=1,\ldots,n$, то на $\Pi(\alpha,b)$, $\alpha<\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ решение существует $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ такое, что будет $[u]_{x_1=x_1^0}=v(x_2, \ldots, x_n)$. Будем правую часть брать такой, что $v(x^0_2,\ldots,x^0_n)=u^0$, где u^0 — число, заданное в (3.8). Запишем решение указанной задачи в виде

$$(3.9) \qquad u=\varphi(x_1,\ldots, x_n; v),\quad \varphi\in C^2.$$

Трактуя это соотношение как замену искомой функции u на функцию v и подставляя в (3.6), получим

$$(3.10) \quad \partial_{x_1}v=0, \partial_{x_k}v=\frac{1}{\varphi'_v}[a_k-\partial_{x_k}\varphi]=g_k(x_1, \ldots, x_n; v),\ k=2, \ldots, n.$$

В силу леммы об инвариантности для (3.10) также должны выполняться у. п. и., в частности, будет $\partial_{x_1}g_k=0, k=2,\ldots,n$, т. е. $g_k\equiv g_k(x_2, \ldots, x_n; v)$. Первое уравнение в (3.10) отбрасывается, а в остальных полагаем $x_1=x_1^0$. Но, с другой стороны, при $x_1=x_1^0$ из (3.9) находим

$$[u]_{x_1=x^0_1}=\varphi(x^0_1, x_2, \ldots, x_n; v)=v,$$

откуда

$$\partial_{x_k}\varphi+\varphi'_v\partial_{x_k}v=\partial_{x_k}v, k=2,\ldots, n, x_1=x^0_1.$$

Подставляя сюда выражение $\partial_{x_k}v$ из (3.10), где положено $x_1=x_1^0$, окончательно получим

(3.11) $$\partial_{x_k}v=a_k(x^0_1, x_2\ldots, x_n; v),\ k=2, \ldots, n.$$

На втором этапе возьмем уравнение (3.11) при $k=2$ и рассмотрим его как о. д. у. по x_2 с параметрами x_3, ..., x_n. Снова применяя теорему 1.1 к этому о. д. у. с начальным условием $[v]_{x_2=x^0_2}=w(x_3,\ldots,x_n)$, записывая через w решение, заменяя искомую функцию на новую и применяя лемму об инвариантности у. п. и., получим уравнения типа (3.11) для $w: \partial_{x_k}w=a_k(x^0_1, x^0_2; x_3,\ldots, x_n; w)$, $k=3$, ..., n. Продолжая процесс, через $n-1$ шагов придем к одному уравнению по последней из переменных. После применения теоремы 1.1 наше доказательство будет закончено. О нем можно сказать, что оно является итерированием доказательства теоремы 1.1 по размерности.

3.3. **Линейные полные дифференциалы и п. д.-системы.** В данном случае (3.1) и (3.2) принимают вид

(3.12) $$du=\sum_{k=1}^{n}[b_k(x_1,\ldots, x_n)u+f_k(x_1, \ldots, x_n)]\,dx_k.$$

(3.13) $$\partial_{x_k}u=b_k(x_1, \ldots, x_n)u+f_k(x_1, \ldots, x_n), k=1,\ldots, n.$$

Соотношения (3.7) также линейны

(3.14) $$p_{kj}u+q_{kj}=0,\ k, j=1, \ldots, n,\ k\neq j,$$

(3.15) $$p_{kj}=\partial_{x_j}b_k-\partial_{x_k}b_j,\ q_{kj}=(\partial_{x_j}f_k-\partial_{x_k}f_j)+(b_kf_j-b_jf_k).$$

Условия полной интегрируемости принимают вид

(3.16) $$p_{kj}=0,\ q_{kj}=0,\text{ или } \partial_{x_j}b_k-\partial_{x_k}b_j=0,\ (\partial_{x_j}f_k-\partial_{x_k}f_j)+ +(b_kf_j-b_jf_k),\ k\neq j.$$

В соответствии с первой группой условий существует функция ω такая, что $\partial_{x_k}\omega=b_k$, $k=1, \ldots, n$, согласно (3.4) она дается формулой

(3.17) $$\omega(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k^0}^{x_k}b_k(x^0_1,\ldots,x^0_{k-1}; x_k,\ldots, x_n)\,dx_k.$$

С ее помощью система (3.13) преобразуется к виду

$$(3.18)\qquad \partial_{x_k}[\exp(-\omega)u] = \exp(-\omega)f_k,\quad k=1,\dots,n.$$

Снова имеем классический полный дифференциал, условия совместности которого выполнены в силу второй группы равенств (3.16) (т. е. $q_{kj}=0$). Применяя еще раз формулу (3.4), получим

$$(3.19)\qquad u(x_1,\dots,x_n) = \exp\omega\Big\{\sum_{k=1}^{n}\int_{x^0_k}^{x_k}[\exp(-\omega)f_k]_{x^0_1,\dots,x^0_{k-1}}\,dx_k + c\Big\}.$$

Т. о. **для полной интегрируемости уравнения (3.12) или системы (3.13) необходимо и достаточно выполнение условий (3.16), тогда решение дается формулой (3.19).** Отметим, что процедура вывода формулы (3.19) и ее вид в большой степени похожи на те, которые хорошо известны для линейного о. д. у.

3.4. **О некоторых п. д.-системах, интегрируемых в квадратурах.** Значительная часть учебных курсов по обыкновенным дифференциальным уравнениям состоит из решения в квадратурах тех или иных типов простейших уравнений. С другой стороны, как показывает доказательство основной теоремы 3.2, решение п. д.-систем сводится к последовательному интегрированию тех или иных отдельных обыкновенных уравнений. Естественно, возникает вопрос о выделении тех классов п. д.-систем, которые могут быть решены в квадратурах. Некоторые результаты подобного типа были получены Б. Шариповым в [54] для простейшей п. д.-системы

$$(3.20)\qquad u_x = a(x,y;u),\quad u_y = b(x,y;u),$$

при этом, разумеется, считалось выполненным у. п. и.

$$(3.21)\qquad b_x + ab_u = a_y + b\,a_u.$$

Обеспечение его выполнения занимает значительное место. Реализовать его практически лучше всего, задавая одну из функций того или иного конкретного вида, другую же надо найти из (3.21); мы имеем линейное уравнение первого порядка, о различных способах решения которого шла речь в § 2. Здесь, кстати, достаточно находить лишь одно его частное решение.

Пусть, например, $a\equiv a(x,y)$ и $A(x,y)$ такова, что $A_x=a$. Полагая тогда $u=A+\psi$, из системы (3.20) получим

$$\psi'_x=0,\ \text{т. е.}\ \psi\equiv\psi(y)\ \text{и}$$

$$(3.22)\qquad \psi' = b\,[x,y;\ A(x,y)+\psi(v)] - A_y.$$

Условие независимости правой части от x сводится к у. п. и.

(3.21). Если функция b ему удовлетворяет, то мы имеем о. д. у. (3.22), эквивалентное исходной системе.

Пусть теперь $a(x, y, u) \equiv \alpha(x,y)m(u)$, пусть $A(x, y)$ та же, что прежде, и $M(u)$ такова, что $M'(u) = \frac{1}{m(u)}$. Тогда первое уравнение системы (3.20) «проинтегрируется»: $\frac{u_x}{m(u)} = \alpha(x, y)$, $[M(u) - A]_x = 0$. $M(u) - A = \psi(y)$. Если последнее соотношение допускает обращение $u = h[A + \psi]$, то второе уравнение системы (3.20) нам дает уравнение

(3.23) $$\psi' = \frac{1}{h'} b[x, y; h(A+\psi)] - A_y,$$

правая часть которого не будет зависеть от x, если функция b удовлетворяет у. п. и. (3.21). Верно и обратное, если правая часть (3.23) не зависит от x, то выполнено у. п. и. (3.21). В этом плане можно высказать и общее суждение: **если одно из уравнений системы (3.20) удалось проинтегрировать в явном виде (через $\psi(y)$), то система (3.20) сведется к о. д. у. для ψ, причем условие независимости от x правой части второго уравнения $\psi' = B(x, y, \psi)$ совпадает с у. п. и. (3.21). Решение системы (3.20) существует в явном виде или находится в квадратурах тогда и только тогда, когда этим свойством обладает последнее о. д. у.**

Пример:

$$u_x = yu^n + \frac{1}{x}u, \quad u_y = xu^n + \frac{1}{x}u,$$

$$u = x\left[y\left(\frac{n-1}{n}x^n + c\right)\right]^{-\frac{1}{n-1}}.$$

3.5. **П. д.-системы с несколькими неизвестными функциями.** Пусть ищутся функции $u_j = u_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие системе

(3.24) $$\partial_{x_k} u_j = a_{kj}(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m), \; k = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m.$$

Подчеркнем, что левая часть пробегает производные от всех функций по всем переменным. Фиксируя j, произведем о. п. д.

(3.25) $$\partial_{x_p} a_{kj} + \sum_{l=1}^{n} a_{pl} \partial_{u_l} a_{kj} = \partial_{x_k} a_{pj} + \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \partial_{u_l} a_{pj}.$$

Точно так же, как в 3.2, здесь существенно различаются: случай 1°, когда все (3.25) выполняются тождественно относительно $u_1, \ldots, u_m$, тогда (3.25) называют у. п. и.; случай 2°, когда (3.25) не выполняются тождественно. Если хотя бы одно из них выполнено нетождественно, то имеем уравнение вида

$$F(x_1,\dots,x_n;\ u_1,\dots,u_m)=0,$$

где все $\partial_{u_j} F \neq 0$, а потому можем разрешить его, например, в виде $u_m = f(u_1,\dots,u_{m-1})$. В таком случае нельзя удовлетворить всем независимо заданным начальным условиям

(3.26) $$[u_j]_{x^0_1,\dots,x^0_n} = u^0_j,\quad j=1,\dots,m.$$

Это доказывает необходимость в формулируемой ниже теореме 3.3.

Обобщение леммы об инвариантности у. п. и. Если у. п. и. выполнены для системы (3.24), то при любой гомеоморфной замене искомых функций

(3.27) $$u_j = h_j(x_1,\dots,x_n;\ v_1,\dots,v_m),\quad j=1,\dots,m,$$

где $h_j \in C^2$ и якобиан

$$= \frac{D(h_1,\dots,h_m)}{D(v_1,\dots,v_m)} \neq 0,$$

для вновь полученной системы уравнений у. п. и. также будут выполнены.

Доказательство. Фиксируя j, составим из (3.27) выражения для $\partial^2_{x_k x_p} u$, $\partial^2_{x_p x_k} u$ через $\partial^2_{x_k x_p} v$, $\partial^2_{x_p x_k} v$. Совершенно аналогично 3.2 равенство первых двух повлечет равенство двух последних.

Теорема 3.3. *Пусть в системе* (3.24) $u_j, a_{kj} \in C^2(\Pi)$, $\Pi \equiv \Pi(a,b): |x_k - x^0_k| < a, |u_j - u^0_j| < b$. *Если выполнены у. п. и.* (3.25) и $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|a_{kj}|$, *то на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача* (3.24)—(3.26) *имеет единственное решение.*

Несколько иначе: *если* $a < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, *то для однозначной разрешимости задачи* (3.24)—(3.26) *с вариацией* $u_1^0, \dots, u^0_m$ *в некоторых интервалах необходимо и достаточно выполнение у. п. и.* (3.25).

Доказательство достаточности, или решение системы (3.24). Разобъем систему (3.24) на m подсистем

$$(S_1)\quad \partial_{x_1} u_j = a_{1j}(x_1,\dots,x_n;\ u_1,\dots,u_m),\quad j=1,\dots,m,$$

. . . .

$$(S_n)\quad \partial_{x_n} u_j = a_{nj}(x_1,\dots,x_n;\ u_1,\dots,u_m),\quad j=1,\dots,m.$$

Рассматривая систему (S_1), как систему о. д. у., по переменной x_1 с параметрами $x_2, \ldots, x_n$ и с теми же начальными условиями (3.26), сможем применить теорему 1.1. Если $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, то на $\Pi(\alpha, b)$ существует решение

$$
\begin{gathered}
u_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_m),\ j = 1, \ldots, m, \\
[u_j]_{x_1 = x^0_1} = \varphi_j(x^0_1, x_2, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_m) = v_j, \\
[v_k]_{x^0_2, \ldots, x^0_n} = u^0_k,\ k = 2, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{3.28}
$$

Подставляя (3.28) в (S_1), получим $\partial_{x_1} v_p = 0$, а подстановка в (S_k) $k = 2, \ldots, n$ дает

$$
\partial_{x_k} \varphi_j + \sum_{p=1}^{m} \partial_{v_p} \varphi_j \partial_{x_k} v_p = a_{kj}. \tag{3.29}
$$

По теореме 1.2 якобиан $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(v_1, \ldots, v_m)} \neq 0$, а потому, разрешая (3.29) алгебраически, получим

$$
\partial_{x_k} v_p = g_{kp},\ k = 2, \ldots, n.
$$

Совершая о. п. д. с $\partial_{x_1} v_p = 0$, получим $\partial_{x_1} g_{kp} = 0$, а потому в (3.29) можем положить $x_1 = x_1^0$. С другой стороны, дифференцируя (3.28) по x_k, имеем

$$
\partial_{x_k} \varphi_j + \sum_{p=1}^{m} \partial_{v_p} \varphi_j \partial_{x_k} v_p = \partial_{x_k} v_j,\ k = 2, \ldots, n.
$$

Сравнивая с (3.29), получаем

$$
\partial_{x_k} v_j = a_{kj}(x^0_1; x_2, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_m),\quad \begin{gathered} j = 1, \ldots, m, \\ k = 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.30}
$$

От одной подсистемы (S_1) освободились. Продолжая процесс, придем к системе о. д. у. по последней переменной x_n, и тем самым доказательство завершено.

Замечание 3.1 (о линейной системе). Если в (3.24) все a_{kj} линейны по $u_1, \ldots, u_m$, то линейными будут также подсистемы (S_k), и если учесть замечание 1.2 для всех (S_k) то получим, **что для линейной системы (3.24) теорема 3.3 становится нелокальной, т. е. все утверждения теоремы имеют место на всем** $\Pi(a, b)$.

3.6. **Укороченные п. д.-системы.** Теория п. д.-систем, полученная непосредственным итерированием по размерности теории для систем о. д. у., дает многообразие решений с произвольными постоянными. Многообразия с произвольными функциями могут быть получены с помощью понятия, указанного в заголовке, вводимого как для п. д.-систем с одной, так и с несколькими неизвестными функциями.

Определение 3.2. Какая-либо подсистема уравнений из п. д.-системы называется **укороченной п. д.-системой,** если найдется такая подсистема независимых переменных, по отношению к которым она будет п. д.-системой, оставшиеся независимые переменные считаются параметрами.

Возвращаясь вначале к системам с одной искомой функцией, видим, что любая часть такой системы является укороченной п. д.-системой. В самом деле, соответственно перенумеровывая переменные, можем такой подсистеме придать вид

(3.31) $$\partial_{x_k} u = a_k(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_n; u), \quad k=1, \ldots, p.$$

Начальное условие соответственно изменится следующим образом:

(3.32) $$[u]_{x^0_1, \ldots, x^0_p} = u^0(x_{p+1}, \ldots, x_n),$$

а условия полной интегрируемости (3.7) будут записаны для $k=1, \ldots, p$ и должны выполняться тождественно как относительно u, так и относительно параметров $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Теорема 3.2 примет вид:

Теорема 3.4. *Пусть в системе* (3.31) *функции* u, $a_k \in C^2(\Pi)$, *где* $\Pi \equiv \Pi(a, b): |x_k - x_k^0| < a$, $k=1, \ldots, p$, $|u-u^0| < b$. *Если выполнены у. п. и.* (3.7) *для* k, $j=1, \ldots, p$ и $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M=\max|a_k|$, *то на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача* (3.31)—(3.32) *имеет и притом единственное решение.*

Т. о. в этом случае система (3.31) имеет многообразие решений с произвольной функцией $u^0(x_{p+1}, \ldots, x_n)$. Это обстоятельство имеет весьма важное значение для дальнейшего.

Рассмотрим укороченную классическую п. д.-систему:

(3.33) $$\partial_{x_k} u = a_k(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_n), \quad k=1, \ldots, p.$$

Не повторяя теоремы 3.1, запишем только формулу для решения

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{p} \int_{x^0_k}^{x_k} a_k(x^0_1, \ldots, x^0_{k-1}; x_k, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_n)\, dx_k + \\ + c(x_{p+1}, \ldots, x_n).$$

Чтобы наметить другие возможные применения введенного понятия, укажем, что для укороченной линейной п. д.-системы типа (3.13) также будет иметь место формула типа (3.19), где вместо постоянной c будет функция $c(x_{p+1}, \ldots, x_n)$

Сложнее обстоит дело в системах со многими неизвестными функциями, не всякая часть системы (3.24) обязательно будет п. д.-системой по отношению к какой-либо части переменных. Переномеровывая переменные, всякой укороченной п. д.-системе можем придать вид

$$\partial_{x_k} u_j = a_{kj}(x_1, \ldots, x_p; \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m), \quad \begin{array}{l} k=1,\ldots,p, \\ j=1,\ldots,m, \end{array} \tag{3.34}$$

с начальными условиями

$$[u_j]_{x^0_1,\ldots,x^0_p} = u^0_j(x_{p+1}, \ldots, x_n), \quad j=1,\ldots,m. \tag{3.35}$$

Теорема 3.5. *Если по переменным* $x_1, \ldots, x_p$ *выполнены у. п. и.* (3.25), *то на* $\Pi(\alpha, b)$, $\alpha \leqslant \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|a_{kj}|$ *задача* (3.34)—(3.35) *имеем единственное решение.*

Замечание 3.2. В линейном случае условие $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ отсутствует и теорема верна на $\Pi(a, b)$.

3.7. Комплексные аналитические уравнения и системы в полных дифференциалах. Пусть все задаваемые $a_k(z_1, \ldots, z_n)$ и искомая функция w будут а. ф. комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$, $k=1, \ldots, n$. Восстановление функции w по ее полному дифференциалу

$$dw = \sum_{k=1}^{n} a_k(z_1, \ldots, z_n)\, dz_k, \tag{3.36}$$

равносильное решению п. д.-системы

$$\partial_{z_k} w = a_k(z_1, \ldots, z_n), \quad k=1, \ldots, n, \tag{3.37}$$

дается формулой

$$w(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^0_k}^{z_k} a_k(z^0_1, \ldots, z^0_{k-1}; z_k, \ldots, z_n)\, dz_k + c, \tag{3.38}$$

где c — произвольная комплексная постоянная.

Аналогично 2.2 изучается комплексная аналитическая квазилинейная п. д.-система

$$\partial_{z_k} w = a_k(z_1, \ldots, z_n;\ w), \quad k=1, \ldots, n, \tag{3.39}$$

где a_k — а. ф. всех своих аргументов. Для задачи с начальным условием

$$[w]_{z^0_1,\ldots,z^0_n} = c \tag{3.40}$$

имеет место теорема:

Теорема 3.6. *Пусть на* $\Pi = \Pi(a, b)$: $|z_k - z^0_k| < a$, $|w - w^0| < b$ *функции* $a_k, w \in A(\Pi)$. *Тогда на* $\Pi(\alpha, b)$, $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|a_k|$ *для однозначной разрешимости* (3.39)—(3.40) *необходимо и достаточно выполнение у. п. и.*

$$\partial_{z_j} a_k + a_j \partial_w a_k = \partial_{z_k} a_j + a_k \partial_w a_j,\ k,\ j = 1, \ldots, n, k \neq j. \tag{3.41}$$

Пусть теперь ищется m функций $w_j = w_j(z_1, \ldots, z_m), j = 1, \ldots, m$, удовлетворяющих системе

$$\partial_{z_k} w_j = a_{kj}(z_1, \ldots, z_n; w_1, \ldots, w_m),\quad \begin{matrix} k = 1, \ldots, n, \\ j = 1, \ldots, m \end{matrix} \tag{3.42}$$

и начальным условиям

$$[w_j]_{z^0_1, \ldots, z^0_n} = w_j^0,\ j = 1, \ldots, m. \tag{3.43}$$

Теорема 3.7. *Пусть на* $\Pi(a, b)$ *функции* $a_{kj}, w \in A$ (Π). *Тогда на* $\Pi(\alpha, b)$, $\alpha \ll \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$; $M = \max|a_{kj}|$ *для однозначной разрешимости задачи* (3.42)—(3.43) *необходимо и достаточно выполнение у. п. и.*

$$\partial_{z_p} a_{kj} + \sum_{i=1}^{n} a_{pi} \partial_{u_i} a_{kj} = \partial_{z_k} a_{pj} + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} \partial_{u_i} a_{pj}. \tag{3.44}$$

П. д.-система с простейшей линейной правой частью

$$\partial_{z_k} w = b_k(z_1, \ldots, z_n) w + f_k(z_1, \ldots, z_n),\ k = 1, \ldots, n, \tag{3.45}$$

где $w, b_k, f_k \in A$, исследуется совершенно аналогично п. 3.3. Если выполнены у. п. и.

$$\partial_{z_j} b_k - \partial_{z_k} b_j = 0,\ (\partial_{z_j} f_k - \partial_{z_k} f_j) + (b_j f_k - b_k f_j) = 0$$

и если

$$\omega(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^0_k}^{z_k} b_k(z^0_1, \ldots, z^0_{k-1}; z_k, \ldots, z_n)\, dz_k,$$

то решение дается формулой

$$w(z_1, \ldots z_n) = \exp\omega \cdot \{\sum_{k=1}^{n} \int_{z^0_k}^{z_k} [\exp(-\omega) f_k]_{z^0_1, \ldots z^0_{k-1}} dz_k + c\}.$$

П. д.-система с общей линейной правой частью имеет вид

$$\partial_{z_k} w = a_k(z_1, \ldots, z_n)\overline{w} + b_k(z_1, \ldots, z_n) w + f_k(z_1, \ldots, z_n),\ k = 1, \ldots, n,$$

и переходом к комплексно-сопряженным уравнениям и заменой $\overline{w}=V$ приводится к обобщенной системе Коши—Римана

$$\partial_{\overline{z}_k} V = \overline{a_k}\,\overline{V} + \overline{b_k} V + \overline{f_k},\quad k=1,\dots,n,$$

изучаемой в § 7.

§ 4. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ

4.1. **Полные и якобиевы системы.** Рассматривается система

$$L^k u \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x_1,\dots,x_n)\,\partial_{x_j} u = 0,\quad k=1,\dots,m, \tag{4.1}$$

где функции a_{kj} считаются заданными, а $u=u(x_1,\dots x_n)$ — искомой в некоторой области D, причем непременно $a_{kj}\in C^1$, $U\in C^2$. Возьмем какую-либо из строк $L^k u=0$. Ее можно рассматривать как уравнение первого порядка, изучавшееся в § 2, и тогда следует трактовать равенство обращающимся в тождество на многообразии его решений. Другая возможность может представиться, например, при $u\equiv\mathrm{const}$, когда все $\partial_{x_j}u\equiv 0$, т. е. тождественно равны нулю все слагаемые строки, аналогичное имеет место, когда $u\neq\mathrm{const}$, но все $a_{kj}\equiv 0$, $j=1,\dots,n$. В этих случаях мы говорим, что равенство $L^k u=0$ выполняется тождественно, и пишем $L^k u\equiv 0$.

Определение 4.1. Два или более уравнений (3.1) (например, все m) называют линейно зависимыми, если найдутся такие функции $\Lambda_k=\Lambda_k(x_1,\dots,x_n)$, что $\sum_{k=1}^{m}\Lambda_k L^k u\equiv 0$. В противном случае уравнения (4.1) и соответствующие их левые части называют **линейно независимыми.** Отбрасывая все линейно зависимые уравнения, рассмотрим случай, когда $m\geqslant n$. Оставим из них n уравнений, линейно не зависимых согласно предположению. Соответствующий определитель системы $\Delta(x)\neq 0$. Разрешая систему алгебраически, будем иметь $\partial_{x_j}u=0$, $j=1,\dots,n$, откуда $u=\mathrm{const}$. Такое решение, называемое **тривиальным**, всегда существует для систем типа (4.1) и в дальнейшем игнорируется.

Будем заниматься далее отысканием нетривиальных решений. Поскольку, как мы видели, при $m\geqslant n$ существует лишь тривиальное решение, и поскольку случай $m=1$ рассмотрен был в § 3, то имеем право считать далее $1<m<n$.

Определение 4.2. Коммутантом двух операторов типа (4.1) называется

$$Q^{k,p}u\equiv L^kL^pu-L^pL^ku.$$

Учитывая, что

$$L^kL^pu=\sum_{j=1}^n a_{kj}\partial_{x_j}L^pu=\sum_{j=1}^n a_{kj}\partial_{x_j}\sum_{s=1}^n a_{ps}\partial_{x_s}u=$$

$$=\sum_{j=1}^n a_{kj}\sum_{s=1}^n a_{ps}\partial^2_{x_jx_s}u+\sum_{j=1}^n a_{kj}\sum_{s=1}^n \partial_{x_j}a_{ps}\partial_{x_s}u,$$

$$L^pL^ku=\sum_{s=1}^n a_{ps}\sum_{j=1}^n a_{kj}\partial^2_{x_sx_j}u+\sum_{s=1}^n a_{ps}\sum_{j=1}^n \partial_{x_s}a_{kj}\partial_{x_j}u,$$

для коммутанта получаем выражение

$$Q^{k,p}u=\sum_{s=1}^n [L^k(a_{ps})-L^p(a_{ks})]\partial_{x_s}u. \tag{4.2}$$

Коммутант, таким образом, является оператором того же типа, что и (4.1). Если имеем какое-либо решение $u\neq\text{const}$ системы (4.1), то оно будет удовлетворять также любому коммутантному уравнению $Q^{k,p}u=0$, где $k,p=1,\dots,m,k\neq p$. Из общего числа $C^2_m=\frac{m(m-1)}{2}$ таких уравнений мы отбросим все те, которые линейно зависимы от (4.1). Присоединяя все новые независимые уравнения и повторяя еще раз операции коммутирования, мы придем наконец к системе из N независимых уравнений типа (4.1). Если $N\geqslant n$, то необходимо $u=\text{const}$. Будем считать, что $N<n$ и что для пополненной системы приняты прежние обозначения (4.1).

Определение 4.3. Если все коммутантные уравнения, получаемые из системы, будут линейно зависимыми от нее, то такую систему принято называть **полной**. А если все коммутанты тождественно равны нулю, то систему называют **якобиевой**. Произведем замену независимых переменных в системе (4.1)

$$y_1=\psi_1(x_1,\dots,x_n),\ \dots,\ y_n=\psi_n(x_1,\dots,x_n), \tag{4.3}$$

считая $\psi_k\in C^1$ и якобиан отличным от нуля, это обеспечивает возможность обращения соотношений (4.3). Такое преобразование (4.3) будем называть гомеоморфным.

Подставляя в (4.1), имеем

$$(4.4)\qquad \underset{(x)}{L^k}u \equiv L^k u = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \sum_{s=1}^{n} \partial_{x_j}\psi_s \partial y_s u = \sum_{s=1}^{n} \partial_{y_s} u \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \partial x_j \psi_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} L^k \psi_s \partial_{y_s} u = \underset{(y)}{L^k} u,$$

т. е. при любой замене независимых переменных (4.3) операторы (4.1) преобразуются в аналогичные. Ясно, что соответственно этому преобразуются также коммутанты, запишем это следующим образом:

$$Q^{k,p}u \equiv \underset{(x)}{Q^{k,p}}u = \Omega^{k,p}u = \underset{(y)}{\Omega^{k,p}}u.$$

4.2. **Их свойства.**

Свойство 4.1 При любой гомеоморфной замене независимых переменных (4.3) полнота и якобиевость системы (4.1) являются **инвариантами.**

Доказательство. Пусть исходная система (4.1) полна, т. е. для всяких k, p $\underset{(x)}{Q^{k,p}}u = \sum_{k=1}^{m} \Lambda_k(x) \underset{(x)}{L^k}u$. Но поскольку $\underset{(x)}{L^k}u = \underset{(y)}{L^k}u$ и $\underset{(x)}{Q^{k,p}}u = \underset{(y)}{Q^{k,p}}u$, то имеем

$$\underset{(y)}{\Omega^{k,p}}u = \underset{(x)}{Q^{k,p}}u = \sum_{k=1}^{m} \Lambda_k(x) \underset{(x)}{L^k}u = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\Lambda}_k(y) \underset{(y)}{L^k}u,$$

т. е. из полноты (3.1) следует полнота преобразованной системы. Обратное доказывается совершенно аналогично. Что касается инвариантности свойства якобиевости, то оно с очевидностью следует из равенства $\underset{(x)}{Q^{k,p}}u = \underset{(y)}{Q^{k,p}}u$.

Доказанные свойства могут быть высказаны в несколько иной форме, если назвать **равносильными** системы, получаемые одна из другой указанными выше гомеоморфными функциональными преобразованиями (4.3). Перейдем к дальнейшим свойствам.

Свойство 4.2. Всякую полную систему можно превратить в равносильную якобиеву. Действительно, поскольку $m<n$ и m строк линейно независимы, то можем разрешить (4.1) относительно $\partial_{x_1}u, \ldots, \partial_{x_m}u$:

$$(4.5)\qquad \begin{cases} L^1 u \equiv \partial_{x_1} u + \sum\limits_{j=m+1}^{n} b_{1,j} \partial_{x_j} u = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ L^m u \equiv \partial_{x_m} u + \sum\limits_{j=m+1}^{n} b_{m,j} \partial_{x_j} u = 0. \end{cases}$$

С одной стороны, из формулы (4.2), примененной к (4.5), видим, что коммутанты системы (4.5) будут иметь вид

$$\Omega^{k,p} u = \sum_{s=m+1}^{n} \alpha_s \partial_{x_s} u.$$

С другой—поскольку система (4.5) равносильна (4.1), то она и полна вместе с ней, а потому должно быть

$$\Omega^{k,p} u = \sum_{s=1}^{m} \Lambda_s(x) L^s u = \sum_{s=1}^{m} \Lambda_s(x) \partial_{x_s} u + \sum_{j=m+1}^{n} \beta_j(x) \partial_{x_j} u.$$

Поскольку сравнение двух последних выражений коммутанта $\Omega^{k,p} u$ влечет $\Lambda_s(x) = 0$, $s=1, \dots, m$, то, вставляя это в первое равенство последней строки, получаем $\Omega^{k,p} u \equiv 0$, что и требовалось доказать.

4.3. **Решение якобиевых систем.** Пусть нам дана якобиева система вида (4.5). Обращаясь к первому из уравнений (4.5), найдем $(n-1)$ его первых интегралов

$$x_2 = c_2, \dots, x_m = c_m, \varphi_{m+1}(x_1, \dots, x_n) = c_{m+1}, \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n) = c_n.$$

Заменяя независимые переменные

$$(4.6)\qquad y_1 = x_1, \dots, y_m = x_m, y_{m+1} = \varphi_{m+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n),$$

получим из (4.5) систему

$$(4.7)\qquad \begin{cases} L^1 u \equiv \partial_{y_1} u = 0, \\ L^2 u \equiv \partial_{y_2} u + \sum\limits_{j=m+1}^{n} h_{2j} \partial_{y_j} u = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ L^m u \equiv \partial_{y_m} u + \sum\limits_{j=m+1}^{n} h_{mj} \partial_{y_j} u = 0. \end{cases}$$

Согласно свойству 4.1 система (4.7) также является якобиевой, а потому коммутанты

$$Q^{1,p} u = L^1 L^p u - L^p L^1 u \equiv 0,\ p = 2, \dots, m.$$

С другой стороны, согласно (4.2), они равны

$$Q^{1,p}u = \sum_{s=1}^{n}[L^1(h_{ps}) - L^p(h_{1s})]\,\partial_{y_s}u = \sum_{s=m+1}^{n}\partial_{y_1}h_{ps}\,\partial_{y_s}u.$$

Сравнение последних двух равенств приводит к соотношениям $\partial_{y_1}h_{ps}=0$, $s=m+1, \ldots, n$, т. е. h_{ps} не зависят от y_1 для всех $p=2, \ldots, m$; $s=m+1, \ldots, n$. Отбрасывая первое из уравнений (4.7), мы приходим к системе уравнений с $(n-1)$ независимыми переменными:

$$(4.8)\qquad \begin{cases} \partial_{y_2}u + \sum\limits_{j=m+1}^{n} h_{2,j}\partial_{y_j}u = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \partial_{y_m}u + \sum\limits_{j=m+1}^{n} h_{m,j}\partial_{y_j}u = 0. \end{cases}$$

Поскольку система (4.8) равносильна системе (4.7), которая, в свою очередь, равносильна якобиевой системе (4.5), то (4.8) также якобиева.

Описанную процедуру понижения порядка системы можем снова применить теперь уже к системе (4.8). Через $(m-1)$ шагов придем к одному уравнению с $(n-m+1)$ независимыми переменными $\partial_{t_m}u + \sum\limits_{k=m+1}^{n} q_k(t_m, \ldots, t_n)\,\partial_{t_k}u = 0$, и если

$$\psi_1(t_m, \ldots, t_n) = c_1, \ldots, \psi_{n-m}(t_m, \ldots, t_n) = c_{n-m}$$

— его первые интегралы, то выражение

$$u = F[\psi_1, \ldots, \psi_{n-m}],$$

где F — произвольная функция своих переменных, дает нам многообразие всех решений последнего уравнения. Если мы вернемся к старым переменным и в конце концов к исходной системе уравнений, то найдем ее решение в виде

$$(4.9)\qquad u = F(\Theta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Theta_{n-m}(x_1, \ldots, x_n)).$$

где Θ_k — некоторые вполне определенные функции.

4.4. Примеры.

Пример 1 (см. [12], [46]):

$$(4.10)\qquad \begin{cases} L^1u \equiv \partial_{x_1}u + (x_2 + x_4 - 3x_1)\partial_{x_3}u + (x_3 + x_1x_2 + x_1x_4)\partial_{x_4}u = 0, \\ L^2u \equiv \partial_{x_2}u + (x_3x_4 - x_2)\partial_{x_3}u + (x_1x_3x_4 + x_2 - x_1x_2)\partial_{x_4}u = 0. \end{cases}$$

Единственным коммутантным уравнением здесь является

$$Q^{1,2}u=L^1L^2u-L^2L^1u=\partial_{x_3}u+x_1\partial_{x_4}u=0.$$

После его подстановок в (4.10) будем иметь якобиеву систему

$$\partial_{x_1}u+(3x_1^2+x_3)\partial_{x_4}u=0,\ \partial_{x_2}u+x_2\partial_{x_4}u=0,\ \partial_{x_3}u+x_1\partial_{x_4}u=0.$$

Поскольку $u=x_4-x_1x_3$ является решением последнего уравнения, то, переходя к независимым переменным x_1, x_2, x_3, $t=x_4-x_1x_3$, получим

$$\partial_{x_1}u+3x_1^2\partial_t u=0,\ \partial_{x_2}u+x_2\partial_t u=0,\ \partial_{x_3}u=0.$$

Учитывая, что $u=t-\frac{1}{2}x_2^2$ является решением второго уравнения, переходя к переменным x_1,x_2 и $s=t-\frac{1}{2}x_2^2$, придем к системе

$$\partial_{x_1}u+3x_1^2\partial_s u=0,\ \partial_s u=0.$$

Общим решением первого из уравнений является

$$u=F(s-x_1^3)=F(t-\frac{1}{2}x_2^2-x_1^3)=F(x_4-x_1x_3-\frac{1}{2}x_2^2-x_1^3),$$

где F — произвольная функция. Формула дает общее решение системы (4.10).

Пример 2: **системы с постоянными коэффициентами.** Как видно из формулы (4.2), для любой системы с постоянными коэффициентами все коммутанты $Q^{k,p}\equiv 0$, т. е. любая такая система непополняемая и якобиева.

Пример 3 (см. [27]):

$$u_x=\alpha(x,y,t)u_t,\ u_y=\beta(x,y,t)u_t. \tag{4.11}$$

Коммутантом здесь будет

$$Qu\equiv\gamma(x,y,t)\,u_t,\ \gamma=(\alpha_y-\beta_x)+(\alpha\beta_t-\beta\alpha_t).$$

Если $\gamma\neq 0$, то из пополненного уравнения получаем $u_t=0$, а тогда из (4.11) имеем также $u_x=0, u_y=0$, что в итоге дает $u\equiv\mathrm{const}$. Если $\gamma\equiv 0$, то система (4.11) якобиева. Согласно общей теории, надо взять первый интеграл уравнения $\frac{dx}{dt}=\alpha(x,y,t)$, пусть это $\psi(x,y,t)=\mathrm{const}$. После замены переменной $\tau=\psi(x,y,t)$, или $t=\psi_1(x,y,\tau)$, где $\psi_1\equiv\psi^{-1}$, получим $u_x=0$, $u_y=\beta[x,y,\psi_1(x,y,\tau)]\frac{1}{\partial_\tau\psi_1}u_\tau$. Если теперь $\Theta(x,y,\tau)=\mathrm{const}$ будет первым интегралом уравнения $\frac{dy}{d\tau}=\frac{\beta[x,y,\psi_1(x,y,\tau)]}{\partial_\tau\psi_1}$ и обозначено $\omega(x, y, t)] = \Theta[x, y, \psi_1(x, y, t)]$, то общим решением системы (4.11) будет $u = F[\omega(x, y, t)]$, где F любая функция из C^1.

Пример 4 (см. [27]):

$$(4.12)\qquad u_x = \alpha(x,y,t,\tau)u_\tau,\ u_y = \beta(x,y,t,\tau)u_\tau,\ u_t = \gamma(x,y,t,\tau)u_\tau.$$

Применяя результаты из примера 3 по отношению к каждой паре уравнений, получим три новых уравнения, соответствующих трем коммутантам, они будут иметь вид

$$\delta_i(x,y,t,\tau)u_\tau = 0,\quad i = 1, 2, 3.$$

Если хотя бы одно $\delta_i \neq 0$, то $u_\tau = 0$, и из (4.12) тогда получаем $u_x = u_y = u_t = 0$, т. е. $u = \mathrm{const}$. Если все $\delta_i \equiv 0$, $t = 1, 2, 3$, то система якобиева, и снова общее решение имеет вид $u = F[\omega(x, y, t, \tau)]$, где F произвольна, а ω составлена из первых интегралов о. д. у., соответствующих уравнениям (4.12).

Пример 5:

$$L^1u \equiv u_{x_1} + x_1u_{x_2} + x_2u_{x_3} = 0,\quad L^2u \equiv x_2u_{x_1} + x_3u_{x_2} + u_{x_3} = 0.$$

По общей формуле (4.2) находим

$$Q^{1,2}u = \sum_{s=1}^{3} [L^1(a_{2s}) - L^2(a_{1s})]u_{x_s} = [L^1(a_{21}) - L^2(a_{11})]u_{x_1} +$$

$$+ [L^1(a_{22}) - L^2(a_{12})]\,u_{x_2} + [L^1(a_{23}) - L^2(a_{13})]u_{x_3} =$$

$$= x_1u_{x_1} + (x_1 - x_2)u_{x_2} + (0 - x_3)u_{x_3} = x_1u_{x_1} - x_3u_{x_3} = 0.$$

Поскольку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & 1 \\ x_1 & 0 & -x_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} = x_1(x_1 - x_2x_3) -$$

$$- x_3(x_3 - x_1x_2) = x^2{}_1 - x_1x_2x_3 - x^2{}_3 + x_1x_2x_3 = x^2{}_1 - x^2{}_3 \neq 0,$$

то третье уравнение линейно независимо от двух первых, а потому для системы $L^1u = 0$, $L^2u = 0$, пополненной третьим независимым уравнением, после алгебраического разрешения будем иметь $u_{x_1} = 0$, $u_{x_2} = 0$, $u_{x_3} = 0$, т. е. $u = \mathrm{const}$.

4.5. **Неоднородная система Якоби** (см. [13], [35]. Считая, что L^ku по-прежнему обозначают выражения из (4.1), под названной в заголовке системой мы подразумеваем систему

$$(4.13)\qquad L^k u = f_k(x_1, \ldots, x_n),\ k = 1, \ldots, m.$$

Если $m \geqslant n$, то разрешая (4.13) алгебраически относительно $\partial x_k u$, придем к классической п. д.-системе, изученной в § 3, а потому считаем далее $m<n$. Однородную систему $L^k u=0$, $k=1, \dots, m$, соответствующую (4.13), будем обозначать далее через (4.13_0), аналогично и в других случаях.

Определяя коммутанты прежними формулами, из (4.13) будем иметь

$$(4.14)\qquad Q^{k,p}u=L^k f_p-L^p f_k.$$

Если система (4.13_0) не была полной, то левая часть из (4.14) не является линейной комбинацией левых частей из (4.13), так что (4.14) является новым уравнением, которым следует пополнить систему (4.13). Описанный процесс пополнения либо приведет к системе с $m\geqslant n$, о которой уже говорилось, либо закончится такой системой, коммутирования в которой не приведут к новым уравнениям. Поэтому переобозначая эту пополненную систему снова через (4.13), можем считать $m<n$, а подсистему (4.13_0)—полной. Совершая коммутирования, из (4.13) будем иметь

$$Q^{k,p}u=L^kL^pu-L^pL^ku \quad L^kf_p-L^pf_k=0.$$

Т. о. необходимо выполняются условия

$$(4.15)\qquad L^k f_p=L^p f_k\; k,p=1,\dots,m,\; k\neq p.$$

Разыскивая частное решение системы (4.13) $u=u^0$ в неявном виде $v(x_1, \dots, x_n; u)=0$, вместо (4.13) получим

$$(4.16)\qquad M^k v=L^k v+f_k\partial_u v=0, k=1,\dots,m.$$

Поскольку коммутанты этой системы

$$M^kM^jv-M^jM^kv=(L^kv+f_k\partial v)(L^jv+f_j\partial_u v)-$$
$$-(L^jv+\partial_u vf_j)(L^kv+f_k\partial_u v)=(L^kf_j-L^jf_k)\partial_u v,$$

то при выполнении условий (4.15) система (4.16) будет полной. Отмечая, что в ней m уравнений с $(n+1)$ независимыми переменными, из теории Якоби однородных систем заключаем, что существует решение v, являющееся произвольной функцией от $n-m+1$ переменных, так что функция u^0 непременно может быть найдена из соотношения $v(x_1, \dots, x_n; u^0)=0$.

Теорема 4.1. *Пусть в системе* (4.13) $m<n$ *и соответствующая однородная система полна. Тогда для совместности* (4.13) *необходимо и достаточно выполнение условий* (4.15).

4.6. **Общая линейная система [35]:**

$$(4.17)\qquad L^k u=b_k u+f_k,\; k=1,\dots,m.$$

Если $m\geqslant n$, то разрешая систему алгебраически, придем к линейной системе в полных дифференциалах, рассмотренной в 2.3. Считаем далее $m<n$. Обозначая через (4.17$_0$) соответствующую (4.17) систему без правых частей, т. е. $L^k u=0$, и коммутируя (4.17), получим

$$Q^{k,j}u=p_{kj}u+q_{kj}, \tag{4.18}$$

$$p_{kj}=L^k b_j-L^j b_k, q_{kj}=(L^k f_j-L^j f_k)+(b_j f_k-b_k f_j). \tag{4.19}$$

Если система (4.17$_0$) не была полной, то уравнения (4.18) пополнят ее. Обозначая пополненную систему так же, как исходную, можем считать, таким образом, что нам дана система (4.17), в которой $m<n$ и соответствующая система (4.17$_0$) полна. Тогда из (4.18) получаем

$$p_{kj}u+q_{kj}=0, \ k, j=1,\ldots,m, k\neq j.$$

Если хотя бы одно $p_{kj}\neq 0$, то u найдется единственным образом. Для существования многообразия решений необходимо $p_{kj}=0$, $q_{kj}=0$, т. е.

$$L^k b_j=L^j b_k, \ L^k f_j-L^j f_k=b_k f_j-b_j f_k, \tag{4.20}$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$L^k\omega=b_k \ k=1,\ldots,m. \tag{4.21}$$

Согласно теореме 4.1, условия которой (4.15) совпадают с первой группой условий (4.20), существует ее решение ω.

Умножив (4.17) на $e^{-\omega}$, будем иметь

$$e^{-\omega}L^k u-e^{-\omega}u L^k\omega=e^{-\omega}f_k \text{ или } L^k(e^{-\omega}u)=e^{-\omega}f_k, \ k=1,\ldots,m.$$

Полагая $e^{-\omega}u=w$, получим эквивалентную (4.17) систему

$$L^k w=e^{-\omega}f_k, \ k=1,\ldots,m. \tag{4.22}$$

Снова применяем теорему 4.1. Согласно 4.5, для совместности (4.22) необходимы и достаточны условия

$$L^k(e^{-\omega}f_j)=L^j(e^{-\omega}f_k),$$

которые преобразуются к виду

$$e^{-\omega}L^k f_j-e^{-\omega}f_j L^k\omega=e^{-\omega}L^j f_k-e^{-\omega}f_k L^j\omega,$$

что совпадает со второй группой условий из (4.20).

Теорема 4.2. *Пусть в* (4.17) $m<n$ *и соответствующая однородная система* $L^k u=0$ *полна. Тогда для существования многообразия решений системы* (4.17) *необходимо и достаточно выполнение условий* (4.20). *Если* ω *какое-либо частное решение неоднородной системы Якоби* (4.21), *то заменой* $w=e^{-\omega}u$ (4.17) *сводится к неоднородной системе Якоби* (4.22), *так что общее решение* (4.17) *дается формулой*

$$u=e^{\omega}(w_0+w), \tag{4.23}$$

где w_0 — частное решение (4.22), *а w — общее решение соответствующей однородной системы $L^k u=0$.*

4.7. **Обобщения теории на системы комплексных аналитических уравнений.** В большой мере мы следуем здесь обобщениям из § 3 и изложенному выше. Пусть $z_k=x_k+iy_k$, и $a_{kj}=a_{kj}(z_1,\dots,z_n)$—заданные а. ф., как и искомая функция w, удовлетворяющая системе

$$(4.24)\qquad L^k w\equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(z_1,\dots,z_n)\partial_{z_j} w=0,\ k=1,\dots,m.$$

Не повторяя предварительных обсуждений случаев $m\geqslant n$, пополнения системы коммутантными уравнениями и т. д., будем считать $1<m<n$ и систему якобиевой, т. е. $L^k L^p w\equiv \equiv L^p L^k w$, $p,k=1,\dots,m$, $p\neq k$. Пусть

$$(4.25)\qquad \varphi_2(z_1,\dots,z_n)=c_2,\dots,\varphi_n(z_1,\dots,z_n)=c_n$$

— первые интегралы 1-го из уравнений. Полагая

$$\zeta_1=z_1,\ \zeta_2=\varphi_2(z_1,\dots,z_n),\dots,\zeta_n=\varphi_n(z_1,\dots z_n),$$

придем снова к якобиевой системе $(m—1)$ уравнений с $(n—1)$ переменными. Через $(m—1)$ шагов придем к одному уравнению с $(n—m+1)$ независимыми переменными

$$(4.26)\qquad \sum_{j=1}^{n-m+1} b_j(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-m+1})\,\partial_{\sigma_j} w=0.$$

Поскольку a_{kj} и все замены переменных были аналитическими, то и все $b_j\in A$, так что к (4.26) применимо все, что было изложено в 3.5. Т. о. нами доказано утверждение: **если все a_{kj} и w а. ф. комплексных переменных, то к (4.24) применима теория Якоби.**

Рассмотрим систему с **линейными правыми частями**

$$(4.27)\qquad L^k w\equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(z_1,\dots,z_n)\partial_{z_j} w=b_k(z_1,\dots,z_n)\,w+$$
$$+f_k(z_1,\dots,z_n),\ k=1,\dots,n.$$

Будем следовать п. 4.6. Если $m>n$, то разрешая систему (4.27) алгебраически, придем к комплексной аналитической п. д.-системе, рассмотренной в § 3. Далее считаем $m<n$. Коммутируя (4.27), получим

$$Q^{k,j}w = p_{kj}w + q_{kj}, \tag{4.28}$$

$$p_{kj} = L^k b_j - L^j b_k,\ q_{kj} = (L^k f_j - L^j f_k) + (b_j f_k - b_k f_j).$$

Если левые части системы (4.27) не образовывали полной якобиевой системы, то (4.28) пополнят ее. Завершив процесс пополнения и обозначая систему снова в виде (4.27), можем считать в ней, что $m<n$ и что система левых частей полна и якобиева. А тогда те же коммутантные уравнения (4.28), в которых теперь $Q^{k,j}w \equiv 0$ дадут необходимые и достаточные условия совместности

$$p_{kj} = 0,\ q_{kj} = 0. \tag{4.29}$$

При выполнении этих условий существует решение системы

$$L^k \omega = b_k,\ k = 1,\ldots,m. \tag{4.30}$$

Умножая (4.27) на $\exp(-\omega)$, получим систему

$$L^k w = \exp(-\omega) f_k,\ k = 1,\ldots,m, \tag{4.31}$$

условия совместности которой сводятся к $q_{kj}=0$.

Теорема 4.3. *Пусть в* (4.27) $m<n$ *и соответствующая система левых частей полна и якобиева. Тогда для существования многообразия решений* (4.27) *необходимо и достаточно выполнение условий* (4.29). *Если* ω *какое-либо решение* (4.30), w_0 — *частное решение неоднородной* (4.31), *а* w — *общее решение однородной* (4.31), *то общее решение* (4.27) *дается формулой*

$$w = \exp\omega(w + w_0). \tag{4.32}$$

Рассмотрим систему в вещественных переменных:

$$Lw \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x_1,\ldots,x_n)\partial_{x_k} w = b_k(x_1,\ldots,x_n)w + \\ + f_k(x_1,\ldots,x_n), k = 1,\ldots,n, \tag{4.33}$$

где w, a_{kj}, b_k, $f_k \in RA$. Совершая аналитическое продолжение на комплексные переменные, придем к системе (4.27). Применив изложенные выше результаты к продолженному уравнению, мы возвратимся к исходному, заменяя z_k на x_k. Непосредственное применение теории Якоби к системе левых частей (4.33) невозможно, поскольку надо проделывать замены независимых переменных левыми частями первых интегралов, которые будут комплексными.

Система в **комплексно-сопряженных переменных.**

(4.34) $$Lw \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\partial_{\bar{z}_j}w + b_{kj}\partial_{z_j}w = b_k w + f_k,\ k=1,\dots,m,\ m<n$$

может быть записана в вещественных переменных, а может быть аналитически продолжена сразу в независимые комплексные переменные, см. § 1.

§ 5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

5.1. **Квазилинейные системы трех уравнений на плоскости.** Рассматривается система

(5.1) $$u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy} = F^i(x, y; u, u_x, u_y),\ i=1,2,3,$$

где F^i заданные, а $u=u(x, y)$ — искомая функции своих аргументов, причем $F^i \in C^1, u \in C^2$. Здесь и ниже применяется запись системы в строку. Для записи производных функций F^j по аргументам u_x, u_y удобно будет вводить обозначения $u_x=v, u_y=w$, которые будут применяться не только для формальных записей, но и, как введено, новых неизвестных функций. Тогда от (5.1) придем к системе уравнений первого порядка

(5.2) $$u_x=v, u_y=w, v_x, v_y=F^i, i=1,2, w_x w_y=F^i, i=2,3,$$

где $F^i \equiv F^i(x, y; u, v, w)$ — те же функции, что и в (5.1) Система (5.2) является системой в полных дифференциалах относительно трех неизвестных функций u, v, w, такого типа системы изучались в § 3. Прежде всего следует проанализировать условия полной интегрируемости (у. п. и.); это будут три равенства, полученных перекрестными дифференцированиями первой, второй и третьей пар уравнений, в соответствии с составлением вторых смешанных производных для функций u, v, w. Но равенство $u_{xy}=u_{yx}$, т. е. $v_y=w_x$, уже выполнено в системе (5.2), поскольку из четвертого и пятого уравнений имеем $v_y = F^2$ и $w_x=F^2$. Остаются два условия

(5.3) $$D_yF^1=D_xF^2,\ D_yF^2=D_xF^3,$$

достаточно очевидных еще в исходной системе (5.1). Т. о. тождественное относительно u, v, w выполнение соотношений (5.3) составляет полную совокупность у. п. и. для системы (5.2). Применяя результаты из § 3, можем рассмотреть задачу с начальными данными $u_0=c_1$, $v_0=c_2$, $w_0=c_3$, что приводит к следующей постановке задачи с начальными данными для системы (5.1):

$$(5.4)\qquad u_0=c_1,\ (u_x)_0=c_2,\ (u_y)_0=c_3.$$

Теорема 5.1. *Пусть в системе* (5.1) $u\in C^3(\Pi)$, $F^i\in C^1(\Pi)$, $i=1,2,3$, *где* $\Pi\equiv\Pi(a,b):|x-x^0|<a$, $|y-y^0|<a$, $|u-u_0|<b$, $|v-v_0|<b$, $|w-w_0|<b$. *Если* $\alpha<\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max|F^i|$, $i=1,2,3$ *и выполнены у. п. и.* (5.3), *то задача* (5.1)—(5.4) *имеет единственное решение.*

Замечание 5.1. Для линейной системы (5.1), когда $F^i=a^iu+b^iu_x+c^iu_y$, условия (5.3) сводятся к шести конкретным дифференциальным соотношениям на a^i, b^i, c^i и в соответствии с замечанием 3.1 теорема 5.1 становится **нелокальной.**

Замечание 5.2. Рассмотрим систему более общего вида:

$$(5.5)\qquad A^iu_{xx}+B^iu_{xy}+C^iu_{yy}=F^i(x,y;u,u_x,u_y),\ i=1,2,3,$$

где A^i, B^i, C^i — заданные функции тех же пяти аргументов, что и правые части. Если определитель левой части $\Delta\neq0$, то, разрешая алгебраически систему (5.5) относительно u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, мы приведем ее к виду (5.1). Если же $\Delta=\Delta(x,y;u,v,w)\equiv0$, то левые части (5.5) находятся в линейной зависимости, комбинируя соответственно уравнения из (5.5), придем к зависимости правых частей $H^1(F^1,F^2,F^3)=H(x,y;u,u_x,u_y)=0$. Если $H\equiv0$ тождественно относительно u, u_x, u_y, то в системе (5.5) одно уравнение отбрасывается как зависимое, тогда имеем систему, состоящую только из двух уравнений, но содержащую все три производные второго порядка. Вопрос о совместности системы и многообразии ее решений остается открытым. Если же $H\not\equiv0$, то уравнение $H=0$ будет новым уравнением первого порядка, которое в качестве третьего уравнения пополнит систему; дифференцируя его по x или y, снова придем к системе трех уравнений второго порядка.

5.2. Система двух уравнений первого типа, см. [31]:

$$(5.6)\qquad u_{xx},u_{xy}=F^i(x,y;u,u_x,u_y),\ i=1,2.$$

Производя о. п. д. $D_yF^1=D_xF^2$, будем иметь

$$F^1{}_y+F^1{}_uu_y+F^1{}_vu_{xy}+F^1{}_wu_{yy}=F^2{}_x+F^2{}_uu_x+F^2{}_vu_{xx}+F^2{}_wu_{yx}.$$

Вставляя сюда значения u_{xx}, u_{xy} из (5.6), придем к уравнению

$$(5.7)\qquad u_{yy}=H(x,y;u,u_x,u_y),$$

где H определено равенством

$$(5.8)\qquad F^1{}_w H=(F^2{}_x+F^2{}_u u_x+F^2{}_v F^1+F^2{}_w F^2)-(F^1{}_y+ \\ +F'{}_u u_y+F^1{}_v F^2).$$

Уравнение (5.7) дополняет систему (5.6) до системы трех уравнений типа (5.1). Прежде чем применять результаты п. 5.1, надо заметить, что из двух условий (5.3) первое будет выполнено автоматически, когда мы решим систему (5.6), (5.7), ибо оно взято за третье уравнение (5.7). Остается только одно требование

$$(5.9)\qquad D_y F^2=D_x H,$$

которое после подстановок сюда значений u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} из (5.6) и (5.7) будет содержать лишь u, u_x, u_y, и требуется, чтобы относительно них (5.9) выполнялось тождественно.

Теорема 5.2. *Пусть в системе* (5.6) *будет* $u\in C^2(\Pi)$, $F^i\in C^1(\Pi)$, $i=1, 2$ *и* $F_w\neq 0$. *Если* $\alpha<\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M=\max|F^i|$, $i=1, 2$ *и соотношение* (5.9) *выполняется тождественно,то на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача* (5.6)—(5.4) *имеет единственное решение.*

Рассмотрим, в частности, линейную систему (5.6), когда

$$F^1=pu_x+qu_y+ru,\quad F^2=au_x+bu_y+cu.$$

Условие полной интегрируемости (5.9) сведется к трем соотношениям $K=0$, $M=0$, $N=0$, где

$$K=(a^2+a_y+b\alpha-(p\alpha+a\beta+\gamma+\alpha_x),$$
$$M=(ab+b\beta+c+b_y)-(q\alpha+b\beta+\beta_x),$$
$$N=(ac+b\gamma+c_y)-(r\alpha+c\beta+\gamma_x).$$

Здесь, в свою очередь, α, β, γ даются равенствами $q\alpha=P$, $q\beta=Q$, $q\gamma=R$, причем

$$P=a_x-p_y+ab+c,$$
$$Q=b_x-q_y+aq+b^2-bp-r,$$
$$R=c_x-r_y+ar+bc-pc.$$

Замечание 5.3. Пусть $F^1{}_w\equiv 0$. Тогда из (5.8) необходимо следует $K=0$. Если $K\neq 0$, то $K=0$ будет уравнением первого порядка, а продифференцировав его по y, снова получим недостающее третье уравнение вида (5.7). Если же

$K\equiv 0$, то решение системы может быть получено другим способом; условие $F^1{}_w\equiv 0$ означает, что первое уравнение имеет вид $u_{xx}=F^1(x, y; u, u_x)$, т. е. является обыкновенным дифференциальным уравнением с параметром y.

5.3 Система двух уравнений типа [31].

(5.10) $$u_{xx}, u_{yy}=F^i(x, y; u, u_x, u_y),\ i=1,2.$$

Введем три новые неизвестные функции, полагая

(5.11) $$u_x=v,\ u_y=w,\ u_{xy}=\theta.$$

Для них можем записать с помощью (5.10) следующую п. д.-систему:

(5.12) $$u_x=v, u_y=w;\ v_x=F^1, v_y=\theta; w_x=\theta, w_y=F^2;$$
$$\theta_x=D_yF^1, \theta_y=D_xF^2.$$

Соответственно четырем парам уравнений требуется четыре условия полной интегрируемости. Но для всех трех первых они будут автоматически выполнены в силу уравнений системы, и останется только у. п. и. для последней пары, имеющее вид

(5.13) $$D_{yy}F^1=D_{xx}F^2.$$

Поскольку $F^i=F^i(x, y; u, v, w)$, то D_yF^1 и D_xF^2 будут выражены через производные от u, v, w, т. е. через u, v, w, θ, а затем также выразится и (5.13). Т. о. мы имеем п. д.-систему (5.12), для которой выполнены все у. п. и., кроме (5.13), и начальные данные $u_0=c_1$, $v_0=c_2$, $w_0=c_3$, $\theta_0=c_4$ преобразуются к виду

(5.14) $$u_0=c_1, (u_x)_0=c_2,\ (u_y)_0=c_3,\ (u_{xy})_0=c_4.$$

После ссылки на теорему 3.1 можем считать, что доказана

Теорема 5.3. *Пусть в системе* (5.10) *будет* $u\in C^4$, $F^i\in C^3$, $i=1, 2$ *и* $\alpha<\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M=\max|F^i|$, $i=1, 2$. *Если соотношение* (5.13) *выполняется тождественно по* u, u_x, u_y, u_{xy}, *то на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача* (5.10)—(5.14) *имеет и притом единственное решение.*

В линейном случае, когда система (5.10) имеет вид

(5.15) $$u_{xx}=pu_x+qu_y+ru,\ u_{yy}=au_x+bu_y+cu,$$

соотношение (5.13) примет вид

(5.16) $$(p_y-b_x)u_{xy}=Pu_x+Qu_y+Ru,$$

где P, Q, R — вполне определенные выражения через p, q,

r, a, b, c, их первые и вторые производные. Теорема 5.3 имеет место в том случае, когда все коэффициенты из (5.16) равны нулю. Если же $p_y - b_x \neq 0$, то к (5.15)—(5.16) можем применить теорему 5.1, из чего следует

Теорема 5.4. *Пусть в системе* (5.15) *коэффициенты принадлежат* C^2, *а решение* $u \in C^4$. *Если* $p_y - b_x \neq 0$ *и тождественно по* u, u_x, u_y *выполняются равенства перекрестного дифференцирования* (5.16) *с первым и вторым уравнениями* (5.15), *то задача* (5.15)—(5.4) *имеет и притом единственное решение.*

Пример 5.1. $u_{xx} = u, u_{yy} = u$. Условие (5.13) здесь выполнено тождественно. Решением будет

$$u = (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) e^y + (c_3 e^x + c_4 \cdot b^{-x}) e^{-y}.$$

5.4. **Системы с тремя переменными** [40]. Пусть теперь искомой является функция $\Phi = \Phi(x, y, t)$, и рассмотрим сначала **систему шести уравнений**:

$$\Phi_{xx}, \Phi_{xy}, \Phi_{xt}, \Phi_{yy}, \Phi_{yt}, \Phi_{tt} = F^i(\Phi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_t), i = 1, \ldots, 6, \tag{5.17}$$

где F^i — заданные функции как указанных аргументов, так и неуказанных независимых переменных (x, y, t). Будем считать, что $\Phi \in C^4$, $F^i \in C^2$. Вводя три другие неизвестные функции $\Phi_x = u$, $\Phi_y = v$, $\Phi_t = w$, после учета равенств перекрестного дифференцирования $u_y = v_x$, $u_t = w_x$, $v_t = w_y$, система (5.17) может быть преобразована к виду

$$\left|\begin{array}{l} \Phi_x = u, \Phi_y = v, \ \Phi_t = w, \\ u_x = F^1, u_y = F^2, u_t = F^3, \\ v_x = F^2, \ v_y = F^4, v_t = F^5, \\ w_x = F^3, w_y = F^5, w_t = F^6. \end{array}\right. \qquad F^i \equiv F^i(\Phi, u, v, w). \tag{5.18}$$

Двенадцать уравнений (5.18) составляют п. д.-систему относительно функций Φ, u, v, w, зависящих от трех переменных. Равенства первой строки — это обозначения новых функций, а последующая квадратная таблица 3×3 обладает симметрией относительной главной диагонали и потому равносильна шести уравнениям (5.17). Для ее совместности необходимо и достаточно, чтобы равенства перекрестного дифференцирования по три в каждой строке, а всего двенадцать, выполнялись тождествено относительно Φ, u, v, w. Однако все три равенства, получаемые в первой строке и записывавшиеся нами перед (5.18), будут автоматически выполнены в силу симметрии нижней квадратной таблицы из

(5.18) относительно главной диагонали. Т. о. остается восемь равенств

$$(5.19)\quad \begin{aligned} &D_yF^1=D_xF^2,\ D_tF^1=D_xF^3,\ D_tF^2=D_yF^3,\\ &D_yF^2=D_xF^4,\qquad\qquad\qquad D_tF^4=D_yF^5,\\ &D_yF^3=D_xF^5,\ D_tF^3=D_xF^6,\ D_tF^5=D_yF^6.\end{aligned}$$

Мы не записали стоявшее в центре равенство $D_tF^2=D_xF^5$ по той причине, что оно является следствием двух соседних по неглавной диагонали.

Ставящаяся для п. д.-системы (5.18) задача с начальными данными $\Phi_0=c_1$, $u_0=c_2$, $v_0=c_3$, $w_0=c_4$ преобразуется к исходной системе (5.17) в задачу

$$(5.20)\qquad \Phi_0=c_1, (\Phi_x)_0=c_2, (\Phi_y)_0=c_3, (\Phi_t)_0=c_4$$

Отметим также, что областью задания функций F^i является $\Pi\equiv\Pi(a,b)$: $|x-x^0|<a$, $|y-y^0|<a$, $|t-t^0|<a$, $|\Phi-\Phi_0|<b$ $|u-u_0|<b$, $|v-v_0|<b$, $|w-w_0|<b$. Тогда из теоремы 3.3 непосредственно следует:

Теорема 5.5. *Пусть в системе* (5.17) $w\in C^4(\Pi)$, $F^i\in C^2$ $i=1, ..., 6$. *Если* $\alpha<\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M=\max|F^i|$, $i=1, ..., 6$,

то для однозначной разрешимости задачи (5.17)—(5.20) *с вариацией* c_1, c_2, c_3, c_4 *в некоторых интервалах необходимо и достаточно, чтобы тождественно относительно* Φ, u, v, w *выполнялись восемь равенств* (5.19).

Замечание 5.4. В линейном случае, когда $F^i=a^i\Phi+$ $+b^i\Phi_x+c^i\Phi_y+d^i\Phi_t$, теорема становится нелокальной и условия (5.19) сведутся к некоторым конкретным соотношениям для a^i, b^i, c^i, d^i и их производных.

Замечание 5.5. Систему более общего вида

$$(5.21)\qquad \alpha^i\Phi_{xx}+\beta^i\Phi_{xy}+\gamma^i\Phi_{xt}+\delta^i\Phi_{yy}+\mu^i\Phi_{yt}+\nu^i\Phi_{tt}=F^i(\Phi,\Phi_x,\Phi_y,\Phi_t),\ i=1, ..., 6$$

с определителем левой части $\Delta\equiv\Delta(x, y, t)\neq 0$ можем привести к виду (5.17), разрешая алгебраически относительно Φ_{xx}, Φ_{xy}, Φ_{xt}, Φ_{yy}, Φ_{yt}, Φ_{tt}. Если же $\Delta\equiv 0$, то имеется линейная зависимость левых частей, а тогда необходима такая же зависимость правых частей

$$H(F^1, F^2, F^3, F^4, F^5, F^6)=0.$$

Если $H\neq 0$, то это уравнение первого порядка заменит недостающее зависимое уравнение системы; дифференцируя его, можем придать ему вид шестого уравнения. Если же $H \equiv 0$, то одно (или более) из шести уравнений системы (5.21) полностью отбрасывается, вопрос остается открытым.

5.5. **Системы из m, $2 \leqslant m \leqslant 5$ уравнений.** Рассмотрим системы, состоящие из **пяти уравнений** типа (5.17). Проще их классифицировать по отсутствующему шестому уравнению. Всего таких систем будет $N=6$. Пусть, например, отсутствует $\Phi_{xx}=F^1$. Тогда из (5.19) выпадут первые два равенства первой строки; останется шесть уравнений (5.19), и, вообще говоря, среди них обязательно найдется такое, из которого сможем найти Φ_{xx}, т. е. воспроизвести шестое уравнение. Остальные пять равенств (5.19) останутся условиями совместности. Аналогично обстоит дело при отсутствии уравнения $\Phi_{yy}=F^4$ или $\Phi_{tt}=F^6$. Если же отсутствует уравнение со смешанной производной, то из (5.19) выпадут три равенства, из оставшихся пяти одно заберется в качестве пополняющего уравнения, а оставшиеся четыре будут условиями совместности.

Системы из четырех уравнений. Всего таких систем будет $C_6^4=C_6^2=15$. В таблице (5.19) отбрасывается четыре или пять равенств. Из оставшихся четырех или трех равенств, вообще говоря, обязательно можно алгебраическим разрешением получить недостающие до шести два уравнения, а оставшиеся два или одно будут условиями совместности.

Системы из трех уравнений. Всего их будет $C_6^3=20$. Если иметь в виду приравнивание как третьих смешанных производных, так и четвертых, то здесь всегда воспроизводится три новых соотношения, но, конечно, нет гарантии, что все они независимы. Например, если в системе (5.17) отсутствуют уравнения с функциями F^1, F^2, F^3, то в таблице (5.19) будут отсутствовать все уравнения кроме двух, а из двух уравнений, если в них присутствуют все три недостающие производные второго порядка, никак нельзя получить три недостающих разрешенных уравнения. Если процесс пополнения остановится на менее чем шести уравнениях, то вопрос останется открытым. Если же пополнение дойдет до шести независимых уравнений, то мы придем к системе (5.17) без всяких условий совместности.

Системы из двух уравнений. Только одна о. п. д. пополнит систему только одним уравнением, притом, вообще говоря, неразрешенным, процесс пополнения останавливается. Пополнение до шести уравнений вряд ли возможно, и потому многообразие решений должно содержать не произвольные постоянные, а произвольные функции.

5.6. **Примеры:**

(1) $$\Phi_{xy}=\Phi,\ \Phi_{xt}=\Phi,\ \Phi_{yt}=\Phi_x.$$

Сначала система дополняется двумя уравнениями

$$\Phi_{xx}=\Phi_y,\ \Phi_{tt}=\Phi_x,$$

а затем еще одним $\Phi_{yy}=\Phi_x$. Система полученных шести уравнений непополняема далее, теорема 5.5 имеет место без всяких условий совместности. Существует многообразие решений с четырьмя произвольными постоянными.

(2) $$\Phi_{xx}=\Phi,\ \Phi_{xt}=-\Phi,\ \Phi_{yt}=y\Phi,$$

На первом этапе система пополняется уравнениями первого порядка

$$\Phi_t=-\Phi_x, \Phi_y=-y\Phi_x,$$

дифференцируя которые, придем к трем уравнениям второго порядка

$$\Phi_{xy}=-y\Phi,\ \Phi_{yy}=-\Phi_x+y^2\Phi,\ \Phi_{tt}=\Phi_x.$$

Система шести уравнений полна. Многообразие решений содержит четыре произвольных постоянных.

(3) $$\Phi_{xx}=\Phi_y,\ \Phi_{xy}=\Phi_t,\ \Phi_{yt}=\Phi_x.$$

Из трех о. п. д. две приводят к уже имеющимся уравнениям, а третья пополняет систему уравнением $\Phi_{yy}=\Phi_{tt}$, не разрешенным относительно второй производной. Многообразие решений не известно.

(4) $$\Phi_{yt}=\Phi,\ \Phi_x=\Phi.$$

Система непополняема. Многообразие решений дается формулой $\Phi=l^x\psi(y, t)$, где $\psi(y, t)$ — решение уравнения $\psi_{yt}=\psi$ оно содержит произвольные функции $\alpha(y)$ и $\beta(t)$.

(5) $$\Phi_{xx}=\Phi_y,\ \Phi_{xt}=\Phi.$$

Система пополняется одним уравнением $\Phi_{yt}=\Phi_x$, после чего все о. п. д. приводят к уравнениям системы. Иначе говоря, система трех уравнений полна. Если $\varphi_i(\alpha)$, $i=1, 2, 3, 4$, произвольные функции, то полагаем

$$\Phi(x,y,t)=\int\limits_l \left\{\left[\varphi_1(\alpha)\cos\left(\frac{t}{\alpha}-\alpha x\right)+\varphi_2(\alpha)\sin\left(\frac{t}{\alpha}-\alpha x\right)\right]^{-\alpha^2 x}+\right.$$

$$\left.+\left[\varphi_3(\alpha)\cos\left(\frac{x}{\alpha}-\alpha t\right)+\varphi_4(\alpha)\sin\left(\frac{x}{\alpha}-\alpha t\right)\right]e^{\frac{y}{\alpha^2}}\right\}d\alpha,$$

где l — произвольная часть оси $-\infty<\alpha<\infty$, не содержащая нуля; в случае бесконечной l надо позаботиться о сходимости интеграла.

Как нетрудно проверить, формула дает решение системы при любых $\varphi_i(\alpha)$, $i=1, 2, 3, 4$.

§ 6. СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ОТ ДВУХ ИЛИ ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. **Классификация.** В первой половине параграфа речь будет идти о системах на плоскости с искомыми функциями $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$. Системой в полных дифференциалах в рассматриваемом случае будет

(6.1) $$u_x, u_y, v_x, v_y=h^i(x, y; u, v), \quad i=1,2,3,4.$$

Всякое уравнение типа (6.1) или какие-либо системы таких уравнений будем называть **разрешенными**, опуская указание, что имеется в виду **разрешенность относительно производных.** Широко известные системы Коши—Римана, обобщенная Коши—Римана, см. 1.5, и система Бельтрами, см. 2.8, не являются разрешенными и в принципе не могут быть разрешены, если оставаться в вещественной области. Для первых двух это достигается переходом к комплексным переменным, что имело весьма существенное значение при разработке методов их исследования, как это видно из 1.5. Ниже будут изучаться системы различных типов: как разрешенные, так и неразрешенные, состоящие из четырех, трех или двух уравнений. Проще всего обстоит дело с системой четырех уравнений

(6.2) $$L^i(u_x, u_y, v_x, v_y)=F^i(x, y; u, v), \; i=1, 2, 3, 4.$$

Здесь и ниже под L^i будем понимать линейные однородные формы относительно всех указанных в них аргументов с функциональными коэффициентами класса C^2; они считаются заданными в окрестности точки (x^0, y^0), которую, очевидно, всегда можем преобразовать к началу координат. При описанных условиях систему (6.2) следует **называть квазилинейной и неразрешенной.** Как и в теории Якоби, см. § 4, будем называть формы L^i линейно независимыми, если в точке (x^0, y^0) определитель из их коэффициентов отличен от нуля. Разрешая систему (6.2) относительно u_x, u_y, v_x, v_y **алгебраически,** придем к системе (6.1).

Часто мы будем заниматься **линейными системами трех уравнений**

$$(6.3)\qquad L^i(u, u_x, u_y; v, v_x, v_y)=0,\ i=1, 2, 3,$$

где под L^i понимаем линейные однородные формы шести своих аргументов. Если **ранг матрицы 3×6 коэффициентов равен трем, то формы L^i называются линейно независимыми.** Отметим еще, что в случае двух уравнений к системам типа (6.3) относятся такие важнейшие системы, как Коши—Римана, обобщенная Коши—Римана и система Бельтрами. Часть результатов § 6 можно найти в статьях [28], [30], [38].

6.2. **Разрешенные системы двух уравнений.** Считая всюду правые части заданными функциями типа h^i из (6.1), будем вести классификацию систем по их левым частям. Всего имеется три группы систем: I. (u_x, v_x) или (u_y, v_y); II. (u_x, u_y) или (v_x, v_y); III. (u_x, v_y) или (u_y, v_x). Две системы группы I являются укороченными п. д.-системами или же просто системами о. д. у. с параметром. В системе (I. 1) для задачи с начальными данными

$$(6.4)\qquad [u]_{x=x^0}=\varphi(y),\ [v]_{x=x^0}=\psi(y)$$

применима теорема 3.4, и тем самым многообразие ее решений содержит две произвольные функции из (6.4). Аналогичный результат имеет место для системы (I. 2), многообразие решений которой будет содержать произвольные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Системы групп II и III не являются укороченными п. д.-системами. Выскажем некоторые соображения о способе их решения и постановке задач с начальными данными.

Линейные системы группы II. Считая коэффициенты произвольно заданными функциями, рассмотрим систему

$$(6.5)\qquad u_x=au+bv, u_y=cu+dv.$$

Система (6.5) эквивалентна двум соотношениям:

$$(6.6)\qquad d(u_x-au)=b(u_y-cu),\quad bv=u_x-au,$$

первое из которых является линейным уравнением общего вида и может быть решено различными способами, указанными в 2.4. Пусть $\omega(x, y)$ — какое-либо частное решение однородного уравнения $du_x=bu_y$, а $\theta(x, y)$ — частное решение неоднородного

$$d(u_x-a)=b(u_y-c);$$

решение его по методу неявной функции сводится к нахождению какого-либо решения однородного уравнения

$$d(w_x-aw_u)=b(w_y-cw_v).$$

Тогда общее решение первого из уравнений (6.6) в соответствии с (2.19) дается формулой

$$u = F[\omega(x, y)] \exp \theta(x, y), \tag{6.7}$$

где F — произвольная функция из C^1. Другая неизвестная функция v будет получена из второго (6.6), в которое будет подставлено (6.7).

В **квазилинейном случае двух уравнений**

$$u_x = a(x, y; u, v), \quad u_y = b(x, y; u, v), \tag{6.8}$$

разрешая второе относительно v, $v = M(x, y, u, u_y)$, после подстановки в первое получим

$$u_x = a[x, y; u, M(x, y, u, u_y)] \equiv g(x, y, u, u_y). \tag{6.9}$$

Пришли к нелинейному (но разрешенному) уравнению первого порядка, которое может быть решено как методом Лагранжа—Шарпи, см. 2.9, так и методами аналитической теории, см. 2.10.

Рассмотрим **линейную систему группы III**

$$u_x = \alpha u + \beta v, \quad v_y = \gamma u + \delta v. \tag{6.10}$$

Переписывая систему в виде

$$u_x - \alpha u = \beta v, \quad v_y - \delta v = \gamma u,$$

построим функции μ, ν такие, что $\mu_x = \alpha$, $\nu_y = \delta$. Тогда система примет вид

$$(e^{-\mu} u)_x = \beta e^{-\mu} v, \quad (e^{-\nu} v)_y = \delta e^{-\nu} u.$$

Вводя новые функции $\widetilde{u} = e^{-\mu} u$, $\widetilde{v} = e^{-\nu} v$, получим относительно функций $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, вместо которых снова будем писать u, v, систему вида

$$u_x = av, \quad v_y = bu. \tag{6.11}$$

Считая $a \neq 0$ и находя $v = \frac{1}{a} u_x$ после подстановки во второе уравнение, **получим** уравнение второго порядка

$$\left(\frac{1}{a} u_x\right)'_y = bu,$$

интегрируя которое по y и затем по x, придем к равносильному интегральному уравнению типа Вольтерра:

$$u(x, y) = \varphi(y) + \int_{x^0}^{x} a(\xi, y)\, \psi(\xi)\, d\xi + \int_{x^0}^{x} \tag{6.12}$$

$$a(\xi, y)\,d\xi \int\limits_{y_0}^{y} b(\xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\eta,$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$ — произвольно задаваемые функции, соответствующие начальным условиям

$$(6.13) \qquad [u]_{x=x^0} = \varphi(y); [v]_{y=y^0} = \left[\frac{1}{a} u_x\right]_{y=y^0} = \psi(x).$$

Интегральное уравнение (6.12) всегда разрешимо единственным образом, а потому такое же утверждение будет справедливо по отношению к задаче (6.11), (6.13), а также к задаче (6.10)—(6.13).

6.3. **Разрешенные системы трех уравнений.** Всего имеются четыре таких системы. Поскольку все они однотипны, то достаточно рассмотреть одну из них, например

$$(6{,}14) \qquad u_x, u_y, v_x = h^i(x, y; u, v), \quad i = 1, 2, 3,$$

причем u, v, $h^i \in C^2(\Pi)$, $\Pi: |x-x^0| < a$, $|y-y^0| < a$ $|u-u_0| < b$, $|v-v_0| < b$. Совершая о. п. д. первого со вторым, пополним систему четвертым уравнением

$$(6.15) \qquad v_y = h^4(x, y; u, v),$$

где h^4 задается соотношением

$$(6.16) \qquad h^1_v h^4 = h^2_x + h^2_u h^1 + h^2_v h^3 - h^1_y - h^1_u h^2.$$

Совершая теперь о. п. д. третьего из уравнений (6.14) с полученным уравнением (6.15), после подстановок вместо u_x, u_y, v_x, v_y правых частей уравнений получим

$$(6.17) \qquad H(x\, y; u, v) \equiv h^3_y + h^3_u h^2 + h^3_v h^1 - h^4_x - h^4_u h^1 - \\ - h^4_v h^3 = 0.$$

Функциональное соотношение между $(x, y; u, v)$ должно рассматриваться прежде всего. Оно может не удовлетворяться ни при каких вещественных значениях $(x, y; u, v)$, тогда исходная система не имеет решений, она несовместна, либо только при нулевых $u \equiv v \equiv 0$, либо постоянных значениях $u \equiv \mathrm{const}$, $v \equiv \mathrm{const}$, тогда решение называется **тривиальным.** Оставляя в стороне все подобные случаи, рассмотрим только те, когда **(6.17) реализуется на некотором многообразии.** Имеются две возможности; **случай 1^0**, когда (6.17) выполняется тождественно, или на многообразии размерности два; **случай 2^0**, когда (6.17) может быть разрешено в виде

$$(6.18) \qquad v = \psi(x, y; u), \quad \psi \in C^1$$

(или же $u=\psi_1(x, y; v)$, тогда мы говорим, что **(6.17) реализуется на многообразии размерности один.** Разрешение в форме (6.18) уравнения (6.17) обеспечивается теоремой существования неявной функции при условии $(H'_v)_0 \neq 0$.

Случай 1⁰. Имеем п. д.-систему (6.14), (6.15), для которой оба у. п. и. будут выполнены, можем применить теорему 3.1 существования и единственности задачи с начальными данными:

$$u_0 = c_1, \; v_0 = c_2, \tag{6.19}$$

откуда следует

Теорема 6.1. *Пусть в системе* (6.14) $u, v, h^i, i = 1,2,3 \in C^2(\Pi)$ *и* $(h^1_v)_0 \neq 0$. *Если* $\alpha \leqslant \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|h^i|$, $i=1, 2, 3$, *и* (6.17) *выполняется тождественно, то на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача* (6.14)—(6.19) *имеет и притом единственное решение. Несколько иначе, для обнозначной разрешимости задачи* (6.14)—(6.19) *с вариацией* c_1, c_2 *в некоторых интервалах необходимо и достаточно тождественное выполнение равенства* (6.17).

Замечание 6.1. В линейном случае, т. е. когда h^i, $i=1, 2, 3$ линейны по u, v, теорема 6.1 становится нелокальной.

Случай 2⁰. Соотношение (6.18) должно быть учтено всюду, в частности, будут связаны и начальные значения $u_0, v_0 : v_0=\psi(x_0, y_0; u_0)$, так что достаточно задавать только одно из них:

$$u_0 = c_1. \tag{6.20}$$

Во-вторых, подстановка (6.18) во все уравнения системы (6.14), (6.15) дает возможность отождествления третьего с первым и четвертого со вторым, т. е. приводит к соотношениям

$$\psi_x+\psi_u h^1 = h^3, \; \psi_y+\psi_u h^2 = h^4, \tag{6.21}$$

которые необходимо должны выполняться тождественно относительно u. Для определения функции u имеем п. д.-систему

$$u_x = h^1[x,y; u,\psi(x,y,u)], \; u_y = h^2[x,y; u, \psi(x,y,u)]. \tag{6.22}$$

Если здесь произвести о. п. д., то придем к соотношению, совпадающему с (6.16).

Теорема 6.2. *Пусть в системе* (6.14) *будет* u, v, h^i, $i=1, 2, 3, \in C^2(\Pi)$ и $(h^1_v)_0 \neq 0$. *Если тождественно относительно и выполнены соотношения* (6.21) *и* $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$,

$M=\max|h^i|$, $i=1, 2$, *то на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача* (6.14), (6.20) *разрешима единственным образом.*

Перейдем к изучению исключенного выше случая, когда $h^1_v\equiv 0$. Это означает, что $h^1\equiv h^1(x,y; u)$. В таком случае уже первая о. п. д. приводит к функциональному уравнению

$$(6.23)\qquad h(x, y; u, v)\equiv h^1_y+h^2h^1_u-h^2_x-h^1h^2_u-h^3h^2_v=0.$$

Случай 1^0, $h\equiv 0$. Надо различать два подслучая. Если $h^2_v\neq 0$, то h^3 выражается через h^1, h^2, т. е. третье уравнение есть следствие двух первых и его следует отбросить. Решая первое уравнение как о. д. у. с параметром y, найдем $u(x, y)$ с произвольной функцией $\varphi(y)$, а подставляя во второе, по теореме о неявной функции однозначно найдем вторую функцию. Если же $h^2_v\equiv 0$, то не только h^1, но и h^2 не зависит от v, т. е. первые два уравнения образуют п. д.-систему с одной искомой функцией, для которой у. п. и. совпадает с (6.23), а третье уравнение системы (6.14) послужит лишь для нахождения функции v по найденной уже функции u.

Теорема 6.3. *Пусть* $h^1_v\equiv 0$ *и соотношение* (6.23) *выполнено тождественно. Если* $h^2_v\neq 0$, *то многообразие решений содержит произвольную функцию* $\varphi(y)$. *Если же* $h^2_v\equiv 0$, *то многообразие решений содержит одну произвольную постоянную.*

Случай 2^0, соотношение (6.23) выполняется нетождественно, а на многообразии (6.18). После подстановки (6.18) в (6.14) первые два уравнения приведут нас к п. д.-системе для функции u, а третье — к у. п. и.

$$(6.24)\qquad \psi_x+h^1(x, y, u)\psi_u=h^3[x, y; u, \psi(x, y, u)].$$

Теорема 6.4. *Пусть* $h^1\equiv h^1(x, y, u)$ *и соотношение* (6.23) *выполняется не тождественно, а на многообразии* (6.18). *Если* $\alpha<\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, *то для однозначной разрешимости задачи* (6.14)—(6.20) *необходимо и достаточно выполнение условия* (6.24) *тождественно относительно* u.

6.4. **Неразрешенные системы трех уравнений.** Перейдем к рассмотрению систем трех уравнений (6.3), содержащих не три, как в (6.14), а все четыре производные, иначе говоря, будем рассматривать системы, не являющиеся разрешенными. Предположим, что система (6.3) может быть представлена в виде

$$(6.25)\qquad u, u_x, u_y=h^i(v, v_x, v_y),\quad i=1, 2, 3,$$

где h^i — некоторые вполне определенные функции класса $C^2(\Pi)$, как и искомые u, $v\in C^2$. Надо отметить, что при решении линейной системы (6.3) функции h^i будут также линейны, но мы рассматриваем более общую **нелинейную систему** (6.25). О ней можно говорить, что она **разрешена относительно одной из функций.**

Аналогичный нижеизложенному метод решения будет применим также в том случае, когда в (6.25) функции u, v поменяются местами. Составляя с помощью о. п. д. равенства

$$D_x h^1 = h^2, \quad D_y h^1 = h^3, \quad D_y h^2 = D_x h^3,$$

получаем

$$(6.26) \qquad \begin{cases} h^1{}_x + h^1{}_v v_x + h^1{}_w v_{xx} + h^1{}_\theta\, v_{yx} = h^2, \\ h^1{}_y + h^1{}_v v_y + h^1{}_w v_{xy} + h^1{}_\theta\, v_{yy} = h^3, \\ h^1{}_y + h^2{}_v v_y + h^2{}_w v_{xy} + h^2{}_\theta\, v_{yy} = h^3{}_x + \\ + h^3{}_v v_x + h^3{}_w v_{xx} + h^3{}_\theta\, v_{yx}. \end{cases}$$

Здесь и ниже используются обозначения $v_x = w, v_y = \theta$. Если определитель системы (6.26)

$$(6.27) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} h^1{}_w, & h^1{}_\theta, & 0 \\ 0, & h^1{}_w, & h^1{}_\theta \\ h^1{}_w, & h^3{}_\theta - h^2{}_w, & -h^2{}_\theta \end{vmatrix} = -h^1{}_w \frac{D(h^1, h^2)}{D(w, \theta)} - h^1{}_\theta \frac{D(h^1, h^3)}{D(w, \theta)}$$

отличен от нуля, то из (6.26) получаем

$$(6.28) \qquad v_{xx}, v_{xy}, v_{yy} = H^i(v, v_x, v_y), \quad i = 1, 2, 3,$$

где H^i определенным образом выражены через h^1, h^2, h^3 и их первые производные и потому $H^i \in C^1$. Применяя результаты § 5 к задаче с начальными данными

$$(6.29) \qquad v_0 = c_1, (v_x)_0 = c_2, (v_y)_0 = c_3,$$

найдем $v(x, y)$, а после подстановки в первое из уравнений (6.25) найдем также $u(x, y)$.

Теорема 6.5. *Пусть в системе* (6.25) u, v, h^i, $i = 1,2,3$, $\in C^2(\Pi)$, *где* $\Pi \equiv \Pi(a, b): |x - x^0| < a, |y - y^0| < a, |v - v_0| < b,$

$$|w - w_0| < b, |\theta - \theta_0| < b. \text{ Если } \alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \; M = \max|h^i|,$$

$i = 1, 2, 3$ *и тождественно по* v, v_x, v_y, *удовлетворяются равенства*

$$D_y H^1 = D_x H^2, \quad D_y H^2 = D_x H^3,$$

то на $\Pi(\alpha, b)$ задача (6.25)—(6.29) *имеет и притом единственное решение.*

Хотя изложенный способ решения имеет общий характер, тем не менее разрешенность системы в виде (6.25) и тем более разрешение системы (6.26) могут представить принципиальные затруднения. Если три уравнения (6.25) независимы, то еще нет никакой гарантии независимости трех строк из (6.26), третья строка, например, может быть тождеством и т. п.

6.5. **Частные типы систем. Примеры.** Если в системе (6.3) сделать то или иное частное предположение, то могут быть предложены более простые способы исследования. Приведем два типа таких систем. Пусть система имеет вид

(6.30) $$u_x, v_x = a^i u + b^i v, \quad L(u, u_x, u_y; v, v_x, v_y) = 0.$$

Аналогично преобразованию системы (6.8) из п. 6.2 можем упростить первые два уравнения заменами искомых функций. Пусть μ, ν таковы, что $\mu_x = a^1, \nu_y = b^2$. Полагая тогда $\widetilde{u} = e^{-\mu} u$, $\widetilde{v} = e^{-\nu} v$, получим $\widetilde{u}_x = p\widetilde{v}, \widetilde{v}_x = q\widetilde{u}$. Возвращаясь к прежним обозначениям функций и подставляя эти уравнения в третье, придадим системе окончательный вид

(6.31) $$u_x = pv, \quad v_x = qu, \quad u_y = av_y + bu + cv.$$

Производя о. п. д. первого с третьим после замен u_x, v_x правыми частями уравнений, получим

$$(pv)_y = av_{xy} + a_x v_y + (bu + cv)_x.$$

Преобразуя v_{xy} заменой $v_x = qu$, будем иметь

$$(pv)_y = a(qu)_y + a_x v_y + (bu + cv)_x,$$

заменяя из (6.31) значения u, u_x, u_y через v, v_x, v_y, получим

(6.32) $$Av_x + Bv_y + Cv = 0,$$

где

$$A = ab + c + \frac{1}{q}(b_x + aq_y), \quad B = a^2 q + a_x - p, \quad C = aqc + bp + c_x - p_y.$$

Т. о. система трех уравнений (6.31) свелась к одному уравнению первого порядка (6.32) относительно функции v. Однако может оказаться, что $A \equiv B \equiv C \equiv 0$. Тогда следует обратиться к исключениям из первых двух уравнений, что дает

$$\left(\frac{1}{q} v_x\right)_x = pv \text{ или } \left(\frac{1}{p} u_x\right)_x = qu.$$

Совершенно аналогично изложенному может быть решена система типа (6.30), где вместо u_x, v_x будут фигурировать (u_y, v_y). Если же на этом месте будут стоять (u_x, v_y) или (u_y, v_x), то такими же процедурами исключения придем к уравнению второго порядка для одной из функций. Пусть это будет система

$$u_x, v_y = a^i u + b^i v, \quad L(u, u_x, u_y; v, v_x, v_y) = 0.$$

Она преобразуется к виду

$$u_x = pv, v_y = qu, u_y = av_x + bu + cv.$$

С помощью о. п. д. и подстановок получим

$$av_{xx} + (a_x + c)v_x + \left(\frac{b_x}{q} - p\right)v_y + (bp - p_y + c_x)v = 0.$$

Если в системе (6.3) отсутствует одна из двух функций, например u, то после разрешения она принимает вид

(6.33) $$u_x, u_y, v_x = a^i(x, y)v_y + b^i(x, y)v, \quad i = 1, 2, 3.$$

Если $\omega(x, y)$ — решение уравнения $\omega_x = a^3\omega_y$, то после замены независимых переменных $\xi = \omega(x, y)$, $\eta = y$ будем иметь

(6.34) $$u_\xi, u_\eta = \alpha^i v_\xi + \beta^i v, \quad v_\eta = q(\xi, \eta)v.$$

Находя из третьего уравнения $v = \varphi(\xi) Q(\xi, \eta)$, где $Q(\xi, \eta)$ — вполне определенная, а $\varphi(\xi)$ — новая неизвестная функция, после подстановки в первые два уравнения получим

(6.35) $$u_\xi, u_\eta = c^i(\xi, \eta)\varphi'(\xi) + d^i(\xi, \eta)\varphi(\xi).$$

О. п. д. приводит к соотношению

(6.36) $$\alpha(\xi, \eta)\varphi''(\xi) + \beta(\xi, \eta)\varphi'(\xi) + \gamma(\xi, \eta) = 0,$$

где α, β, γ — вполне определенные функции, выражаемые через a^i, b^i, $i = 1, 2, 3$. Условие, необходимое и достаточное для совместности системы (6.34), а тем самым и (6.33), состоит в том, чтобы (6.36) имело решение, зависящее только от одной переменной. Как известно, уравнение (6.36) всегда может быть преобразовано к виду

(6.37) $$\varphi''(\xi) + \lambda(\xi, \eta)\varphi(\xi) = 0,$$

для которого указанное требование сводится к тому, чтобы коэффициент $\lambda(\xi, \eta)$ не зависел от η, т. е. $\lambda_\eta \equiv 0$.

Теорема 6.6. *Для совместности системы* (6.33) *необходимо и достаточно условие* $\lambda_\eta \equiv 0$, *где* $\lambda(\xi, \eta)$ *определенным образом, указанным выше, выражается через* a^i, b^i, $i = 1, 2, 3$, *а переменные* $\xi = \omega(x, y)$, $\eta = y$. *В таком случае многообразие решений содержит три произвольные постоянные: через две выражается* $\varphi(\xi)$ *из* (6.37), *а еще одна появится при решении п. д.-системы* (6.35).

Замечание 6.2. В том специальном случае, когда в

(6.36) $\alpha\equiv\beta\equiv\gamma\equiv0$, (6.35) будет п. д.-системой при любой $\varphi(\xi)$, многообразие решений содержит произвольную функцию $\varphi(\xi)\equiv\varphi[\omega(x,y)]$.

Примеры:

1. $u_x=2u+v, u_y=u-v, v_x=v$. В соответствии с п. 6.3 система пополняется четвертым уравнением $v_y=2v$, а для пополненной системы у. п. и. будут выполнены. Решение:

$$u=c_2e^{2x+y}-c_1e^{2y+x}, v=c_1e^{x+2y}.$$

2. $u_x=2u-\frac{1}{x}v+y,\ u_y=\frac{1}{x}v-y, v_x=u+v+y-xy$. Система пополняется четвертым уравнением, а затем функциональным соотношением $v=xu+xy$. Решение: $u=ce^{x+y}, v=cxe^{x+y}+$ $+xy$.

3. $u_x=\left(\frac{1}{x}+y\right)u,\ u_y=-\frac{y^2}{x}u+v, v_x=\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)u+\left(\frac{1}{x}+y\right)v.$

Перекрестное дифференцирование выполняется тождественно. Решение: $u=xe^{xy}\varphi(y)$, $v=(x^2+y^2)e^{xy}\varphi(y)+xe^{xy}\varphi'(y)$.

4. $u_x=v, v_x=u, u_y=v_y$. Система относится к типу (6.31), причем здесь оказывается $A\equiv B\equiv C\equiv0$. Уравнение второго порядка $v_{xx}=v$ дает $v=c_1(y)e^x+c_2(y)e^{-x}$. Но после подстановки в систему найдем $u=c_1(y)e^x-c_2(y)e^{-x}$, а из третьего $c'_1(y)e^x-c'_2(y)e^{-x}=c'_1(y)e^x+c'_2(y)e^{-x}$, т. е. $c'_2(y)=0$ или $c_2(y)\equiv\mathrm{const}$. Окончательно имеем

$$u=c_1(y)e^x-c_2e^{-x},\quad v=c_1(y)e^x+c_2e^{-x}.$$

6.6. **Системы с тремя независимыми переменными.** Следуя 6.1, осмыслим прежде всего, сколько и каких типов систем имеется в совокупности. Для функций $u=u(x, y, t)$, $v=v(x, y, t)$ п. д.-системой будет

$$(6.38)\qquad u_x,u_y,u_t,v_x,v_y,v_t=h^i(x,u,t;u,v),\ i=1,2,3,4,5,6.$$

Любые уравнения этого типа, а также системы, составленные из них, будем называть **разрешенными.** У. п. и. для (6.38) состоят из шести соотношений на функции h^i. Помимо (6.38) имеет интерес изучать системы двух, трех, четырех и пяти уравнений.

Разрешенные системы двух уравнений. Всего имеется 15 таких систем и аналогично 6.1 разбиваются они на три группы. **В группе I** имеем п. д.-системы с левыми частями

$$(u_x,v_x),\ (u_y,v_y),\ (u_t,v_t),$$

их можно рассматривать так же, как системы о. д. у. с двумя параметрами. **В группе II** имеем 6 систем:

$$(u_x, u_y),\ (u_x, u_t), (u_y, u_t); (v_x, v_y), (v_x, v_t), (v_y, v_t).$$

В линейном случае все они решаются способом, указанным в 6.2. Если возьмем для примера первую систему, т. е. (6.5), то, записав ее в виде (6.6), мы проведем указанное в 6.2 решение, не забывая зависимости от параметра t, так мы получим формулу типа (6.7) $u = F[\omega(x, y, t); t] \cdot \exp \theta(x, y, t)$, где F — произвольная функция двух переменных.

В квазилинейном случае

$$u_x = a(x, y, t; u, v),\quad u_y = b(x, y, t; u, v)$$

после исключения придем к одному нелинейному уравнению $u_x = g(x, y, t; u, u_y)$, решаемому по методу Лагранжа—Шарпи. В группе III тоже имеется шесть систем:

$$(u_x, v_y), (u_x, v_t), (u_y, v_t),\ (u_y, v_x),\ (u_t, v_x),\ (u_t, v_y).$$

Рассматривая для примера первую систему в линейном случае, т. е. систему (6.10), повторим полностью сказанное в 6.2, не забывая о параметре t. Система сведется к уравнению второго порядка и затем к интегральному уравнению типа Вольтерра с параметром t

$$u(x, y, t) = \varphi(y, t) + \int_{x_0}^{x} a(\xi, y, t)\psi(\xi, t)\, d\xi + \int_{x_0}^{x} a(\xi, y, t), \tag{6.39}$$

$$d\xi \int_{y_0}^{y} b(\xi, \eta, t)\, u(\xi, \eta, t)\, d\eta,$$

где $\varphi(y, t)$, $\psi(x, t)$ — произвольно задаваемые функции, соответствующие начальным данным

$$[u]_{x=x_0} = \varphi(y, t),\ [v]_{y=y_0} = \psi(x, t). \tag{6.40}$$

Как уравнение (6.39), так и задача (6.8)—(6.40) будут разрешимы единственным образом.

Разрешенные системы трех уравнений. Всего имеется 20 таких систем. Две из них содержат в левых частях производные только одной функции **(группа I)**. Рассмотрим одну из таких систем

$$u_x, u_y, u_t = h^i,\quad i = 1, 2, 3. \tag{6.41}$$

Совершая три о. п. д., получим

$$\begin{cases} h^1_y + h^1_u u_y + h^1_v v_y = h^2_x + h^2_u u_x + h^2_v v_x, \\ h^1_t + h^1_u u_t + h^1_v v_t = h^3_x + h^3_u u_x + h^3_v v_x, \\ h^2_t + h^2_u u_t + h^2_v v_t = h^3_y + h^3_u u_y + h^3_v v_y. \end{cases} \tag{6.42}$$

Вставляя уравнения (6.41), можем переписать систему в виде

$$(6.43)\qquad \begin{aligned} h^2{}_v v_x - h^1{}_v v_y &= H^1(x,y,t;u,v),\\ h^3{}_v v_x - h^1{}_v v_t &= H^2(x,y,t;u,v),\\ h^3{}_v v_y - h^2{}_v v_t &= H^3(x,y,t;u,v). \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $h^3{}_v$, а второе — на $h^2{}_v$ и вычитая, получим

$$-h^1{}_v(h^3{}_v v_y - h^2{}_v v_t) = h^3{}_v H^1 - h^2{}_v H^2.$$

Т. о. обнаруживается линейная зависимость левых частей (6.43), что влечет такую же зависимость правых частей

$$(6.44)\qquad h^3{}_v H^1 - h^2{}_v H^2 + h^1{}_v H^3 \equiv H(x,y,t;u,v) = 0.$$

Случай 1°, $H \equiv 0$. Тогда третье уравнение системы (6.42) полностью является следствием двух предшествующих, и потому его следует отбросить. Остается пять уравнений, причем два из них не являются разрешенными. Вопрос о решении системы остается открытым.

Случай 2°, $H \not\equiv 0$, **причем решением уравнения (6.44) будет** $v = \psi(x, y, t; u)$, $\psi \in C^1$. Подстановка этого соотношения во все уравнения системы (6.41) приведет нас к п. д.-системе с одной неизвестной функцией $u(x, y, t)$, а подстановка в (6.42) дает три у. п. и. для этой системы.

Группа II.

$$(u_x, u_y, v_t), (u_x, u_t, v_y), (u_y, u_t, v_x),$$
$$(v_x, v_y, u_t), (v_x, v_t, u_y), (v_y, v_t, u_x).$$

Здесь можно совершить одну (о. п. д.), получится одно уравнение с тремя новыми производными, не являющееся разрешенным. Вопрос о решении системы остается открытым.

Группу III образуют все остальные системы, их будет 12. Здесь характерно тоже присутствие двух производных от одной функции и одной—от другой, но в отличие от группы II, где все три производные были по различным переменным, здесь они все будут только по двум переменным, т. е. так, как было в 6.3. Иначе говоря, здесь обязательно содержится пара уравнений от различных функций, но по одной и той же переменной, т. е. укороченная п. д.-система. Кстати, записав решение этой подсистемы, можем редуцировать задачу к системе трех уравнений от двух переменных, т. е. свести к системам из 6.3. Но можно непосредственно применить метод из 6.3, не понижая числа переменных. Пусть это будет система (6.14), но для функций $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$. Все сказанное в 6.3 имеет место, только всюду надо добавить параметр t: в (6.14)—(6.18) и в (6.19), уравнение примет вид

$$(6.45) \qquad [u]_{x^0,y^0}=c_1(t), \ [v]_{x^0,y^0}=c_2(t).$$

Для задачи (6.14)—(6.45) имеет место теорема 6.1 и аналогичные постановки задач и теоремы для всех других систем группы III, только с соответствующим изменением параметра.

Разрешенные системы четырех уравнений. Всего имеется 15 систем. **Группу I** составляют системы

$$(u_x, v_x; u_y, v_y), \ (u_x u_t; v_x v_t), \ (u_y, u_t; v_y, v_t),$$

являющиеся **укороченными п. д.-системами.**

К группе II отнесем такие, в левых частях которых будут три производных одной функции и только одна — другой. Это будут

$$u_x, u_y, u_t, v_x), \ (u_x, u_y, u_t, v_y), \ (u_x, u_y, u_t, v_t);$$

$$(v_x, v_y, v_t, u_x), \ (v_x, v_y, v_t u_y), \ (v_x \cdot v_y, v_t, u_t).$$

Рассматривая, например, первую из систем

$$(6.46) \qquad u_x, u_y, u_t, v_x = h^i \ x, y, t; u, v),$$

можем произвести три о. п. д.

$$D_y h^1 = D_x h^2, \ D_t h^1 = D_x h^3, D_t h^2 = D_y h^3,$$

в более подробной записи

$$(6.47) \qquad \begin{cases} h^1{}_y + h^1{}_u u_y + h^1{}_v v_y = h^2{}_x + h^2{}_u u_x + h^2{}_v v_x, \\ h^1{}_t + h^1{}_u u_t + h^1{}_v v_t = h^3{}_x + h^3{}_u u_x + h^3{}_v v_x, \\ h^2{}_t + h^2{}_u u_t + h^2{}_v v_t = h^3{}_y + h^3{}_y u_y + h^3{}_v v_y. \end{cases}$$

После подстановки уравнений (6.46) сможем из первого соотношения найти v_y, а из второго — v_t, после чего третье превратится в функциональное соотношение

$$(6.48) \qquad H(x, y, t; u, v) = 0.$$

После этого имеем ситуацию, сходную с той, что наблюдалась в 6.3, а также в 6.6....

Случай 1^0, $H \equiv 0$. (6.46) и (6.47) образуют п. д.-систему. При выполнении всех у. п. и. имеет место теорема существования и единственности для задачи $u_0 = c_1$, $v_0 = c_2$.

Случай 2°, $H \neq 0$, но (6.48) реализуется на многообразии $v=\psi(x, y, t, u)$, $\psi \in C^1$. Задается только $u_0=c_1$.

Группу III составляют системы

$$(u_x, u_y, v_x, v_t),\ (u_x, u_y, v_y, v_t),$$
$$(u_x, u_t, v_y, v_t),\ (u_x, u_t, v_x, v_y),$$
$$(u_y, u_t, v_x, v_y),\ (u_y, u_t, v_x, v_t)$$

Рассматривая, например, первую из систем

(6.49) $$u_x, u_y, v_x, v_t = h^i(x, y, t; u, v),\ i=1, 2, 3, 4,$$

сможем совершить две о. п. д.:

$$h^1{}_y + h^1{}_u u_y + h^1{}_v v_y = h^2{}_x + h^2{}_u u_x + h^2{}_v v_x,$$
$$h^3{}_t + h^3{}_u u_t + h^3{}_v v_t = h^4{}_x + h^4{}_x u_x + h^4{}_v v_x.$$

Из первого найдем v_y, а из второго u_t, что приводит к шести уравнениям. Надо еще потребовать тождественного выполнения четырех о. п. д., вновь полученных производных с исходными.

§ 7. ОБОБЩЕННАЯ СИСТЕМА КОШИ—РИМАНА СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассматривается система

(7.1) $$\partial_{\bar{z}_k} w = a_k \bar{w} + b_k w + c_k,\ k=1, \ldots, n,$$

где $z_k = x_k + iy_k$, $2\partial_{\bar{z}_k} = \partial_{x_k} + i\partial_{y_k}$, a_k, b_k, c_k — заданные, а $w=u+iv$ — искомая функции класса C^2. По аналогии со случаем $n=1$ мы называем (7.1) обобщенной системой Коши—Римана (о. с. К. Р.), а ее решения — обобщенными аналитическими функциями (о. а. ф.). Изучение (7.1) будем вести в **полицилиндре**, т. е. в области, заполненной точками $z=(z_1, \ldots, z_n)$, где $z_k \in D_k$, а D_k — односвязные области с жордановой гладкой границей Γ_k в плоскостях переменных z_k. Ради простоты положим, что $\Gamma_1=\Gamma_2=\ldots=\Gamma_n=\Gamma$ и $D_1=D_2=\ldots=D_n=D$.

7.1. **Многомерная формула Коши—Грина и неоднородная система Коши—Римана.** Введем следующие обозначения операторов:

(7.2) $$S_k \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{d\tau_k}{\tau_k - t_k},\ T_k \equiv -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{ds_{\sigma_k}}{\sigma_k - z_k}.$$

Считая $w \in C^2(D)$, рассмотрим н. с. К. Р.

$$(7.3)\qquad \partial_{\bar z_k} w = c_k,\quad k=1,\ldots,n.$$

Совершая о. п. д. операторами из (7.3), получим необходимые условия совместности

$$(7.4)\qquad \partial_{\bar z_j} c_k = \partial_{\bar z_k} c_j,\ k\neq j,\ k,j=1,\ldots,n.$$

К первому из уравнений (7.3) применим формулу Коши—Грина (1.20)

$$w(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{w(t_1,z_2,\ldots,z_n)}{t_1-z_1}\,dt_1-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{c_1(\sigma_1,z_2,\ldots,z_n)}{\sigma_1-z_1}\,ds_{\sigma_1}\equiv S_1 w+T_1 c_1.$$

Переходя к обращению второго уравнения (7.3), в котором полагаем $z_1=t_1$, будем иметь

$$w(t_1;z_2,\ldots,z_n)=S_2 w+T_2 c_2,$$

а после подстановки в предшествующую формулу получим

$$w=S_1(S_2 w+T_2 c_2)+T_1 c_1=S_1 S_2 w+S_1 T_2 c_2+T_1 c_1.$$

Продолжим этот процесс, взяв для последнего уравнения только частное решение $w=T_n c_n$, тогда получим формулу (записанную в обратном порядке)

$$(7.5)\qquad w=T_1 c_1+S_1 T_2 c_2+\ldots+S_1 S_2\ldots S_{n-1} T_n c_n\equiv\Gamma[c_1,\ldots,c_n].$$

Вывод формулы (7.5) вполне аналогичен выводу многомерной формулы Коши, см. 1.6, он получен итерацией по размерности из одномерной формулы Коши—Грина. Но если формула Коши (1.26) обладает полной симметрией по отношению к независимым переменным, то в (7.5) никакой симметрии нет. Если же производить итерирование одномерных формул Коши—Грина в другом порядке, то получим несколько иные интегральные представления. На равных правах все они могут выступать в роли многомерных формул Коши—Грина и дают частное решение н. с. К. Р. (7.3).

Нетрудно осуществить проверку формулы (7.5) подстановкой в (7.3). Надо учитывать, что всякий оператор S_k дает функцию, голоморфную по z_k. При подстановке (7.5) в первое из уравнений (7.3) учтем, что все слагаемые, кроме первого, будут начинаться с оператора S_1 и потому голоморфны по z_1, т. е. остается $\partial_{\bar z_1} w=\partial_{\bar z_1} T_1 c_1=c_1$. При подстановке во второе уравнение учтем, что начиная с третьего все дальнейшие слагаемые содержат оператор S_2, а потому голоморфны по z_2, так что

$$\partial_{\bar z_2} w = \partial_{\bar z_2} T_1 c_1 + \partial_{\bar z_2} S_1 T_2 c_2 = T_1[\partial_{\bar z_2} c_1] + S_1[\partial_{\bar z_2} T_2 c_2] =$$
$$= T_1[\partial_{\bar z_1} c_2] + S_1 c_2 = (c_2 - S_1 c_2) + S_1 c_2 = c_2.$$

Аналогично проверяются все последующие уравнения.

При $n=2$ формула (7.5) была получена нами в [20], а затем в [11], [34] для любого n. Другим способом и при условии финитности c_k, $k=1, \ldots, n$ решение н. с. К. Р. (7.3) было получено несколько ранее Л. Хермандером [52].

7.2. **Второй частный случай**:

(7.6) $$\partial_{\bar z_k} w = b_k w + c_k, \quad k=1, \ldots, n.$$

о. п. д. приводит к соотношениям

(7.7) $$q^0{}_{jp} w + f^0{}_{jp} = 0, \quad j \neq p, \; j, p = 1, \ldots, n,$$

где обозначено

(7.8) $$q^0{}_{jp} = \partial_{\bar z_p} b_j - \partial_{\bar z_j} b_p, \quad f^0{}_{jp} = (\partial_{\bar z_p} c_j - \partial_{\bar z_j} c_p) - (b_p c_j - b_j c_p).$$

Если хотя бы одно $q^0{}_{jp} \neq 0$, то w найдется единственным образом, для существования многообразия решений необходимо выполнение условий

(7.9) $$q^0{}_{jp} = 0, \quad f^0{}_{jp} = 0, \quad \text{или} \quad \partial_{\bar z_p} b_j = \partial_{\bar z_j} b_p, \; \partial_{\bar z_p} c_j - \partial_{\bar z_j} c_p =$$
$$= b_p c_j - b_j c_p.$$

Все эти построения вполне аналогичны тем, что имелись в 3.3 для линейной п. д.-системы. Первая группа условий (7.9) позволяет ввести такую функцию ω, что $\partial_{\bar z_j} \omega = b_j$, $j=1, \ldots, n$. Согласно формуле (7.5), $\omega = \Gamma[b_1, \ldots, b_n]$. Производя в (7.6) замену $w = \exp\omega U$, получим н. с. К. Р.

(7.10) $$\partial_{\bar z_k} U = \exp(-\omega) c_k, \quad k=1, \ldots, n$$

условиями совместности которой служит вторая группа равенств (7.9). Применяя к (7.10) формулу (7.5), получим ее частное решение в виде $U_0 = \Gamma[e^{-\omega} c_1, \ldots, e^{-\omega} c_n]$, добавив же произвольную а. ф. $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$, получим общее решение.

Теорема 7.1. *Для существования многообразия решений системы* (7.6) *необходимы и достаточны условия* (7.9). *Многообразие всех решений дается тогда формулой*

(7.11) $$w=(\Phi+U_0)e^{\omega},$$

где $\Phi=\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ — *произвольная голоморфная функция, а* ω *и* U_0 *даются формулами*

(7.12) $$\omega=\Gamma[b_1,\ldots,b_n],\ U_0=\Gamma[e^{-\omega}c_1,\ldots,e^{-\omega}c_n].$$

Мы уже неоднократно встречались с необходимостью говорить о многообразиях решений. Во всех тех теоремах для вещественных систем уравнений в частных производных, где шла речь об условиях полной интегрируемости либо о вариации постоянных, задаваемых в начальных условиях, речь шла фактически о многообразиях, содержащих произвольные постоянные, а в некоторых случаях и произвольные функции. Для большей четкости и удобства следует ввести

Определение 7.1. Семейство функций, содержащее не более чем конечное число произвольных постоянных, называется **тривиальным, в противном случае — нетривиальным многообразием решений.** Всякая система о. д. у. может иметь только тривиальное многообразие решений. Классическая п. д.-система имеет многообразие решений с одной произвольной постоянной, т. е. тривиальное. П. д.-системы с одной или со многими неизвестными функциями, если это полная совокупность уравнений, т. е. уравнениями связаны все производные (от всех функций и по всем переменным), такие системы допускают не более чем тривиальное многообразие решений. Если все у. п. и. выполнены, то она действительно имеет указанное многообразие решений, если же не все у. п. и. выполняются, то многообразие может лишь сузиться, т. е. будет не более чем тривиальным. Совершенно не относится сказанное к укороченным п. д.-системам, как мы видели, многообразия их решений содержат произвольные функции, т. е. нетривиальны. Что касается систем (7.1), то для них, как правило, многообразия решений содержат ту или иную голоморфную функцию, как это имеет место в формуле (7.11), т. е., как правило, они имеют нетривиальные многообразия решений. Однако не надо забывать, что класс систем (7.1) в общем случае весьма обширен, и если для частного случая (7.6) условия совместности получаются непосредственно, то в общем случае это далеко не так. Совместность в строгом смысле означает существование хотя бы какого-нибудь одного решения, даже наличие тривиального решения, т. е. постоянного или нулевого, уже означает совместность системы. Но обычно в исследовании интересными являются, конечно же, нетривиальные решения; более того, для уравнений в частных производных интересуются чаще всего классами решений, содержащих произвольные функции. Очень близкое к этому понятие как раз введено определением 7.1. Это было сделано нами уже в первых работах по о. с. К. Р. более или менее общего типа (см. [22], [23]). Надо сказать, что без такой детерминированности класса решений продвижение было бы весьма затруднительно. Ниже всюду будем заниматься нахождением нетривиальных многообразий решений.

7.3. Приведение общей системы к каноническому виду. Приступая к исследованию системы (7.1) в общем случае, мы должны сделать предположение, что не все $a_k=0$, пусть некоторое $a_p\neq 0$. Совершим о. п. д. уравнений из (7.1) с номерами p и j:

$$\partial_{\bar z_j}[a_p\bar w + b_p w + c_p] = \partial_{\bar z_p}[a_j\bar w + b_j w + c_j],$$

$$a_p\partial_{\bar z_j}\bar w + \partial_{\bar z_j}a_p\bar w + b_p\partial_{\bar z_j}w + \partial_{\bar z_j}b_p w + \partial_{\bar z_j}c_p =$$

$$= a_j\partial_{\bar z_p}\bar w + \partial_{\bar z_p}a_j\bar w + b_j\partial_{\bar z_p}w + \partial_{\bar z_p}b_j w + \partial_{\bar z_p}c_j.$$

Вставляя из (7.1) $\partial_{\bar z_j}w$, $\partial_{\bar z_p}w$, сможем записать

$$a_p\overline{\partial_{z_j}w} + \partial_{\bar z_j}a_p\bar w + b_p(a_j\bar w + b_j w + c_j) + \partial_{\bar z_j}b_p w + \partial_{\bar z_j}c_p =$$

$$= a_j\overline{\partial_{z_p}w} + \partial_{\bar z_p}a_j\bar w + b_j(a_p\bar w + b_p w + c_p) + \partial_{\bar z_p}b_j w + \partial_{\bar z_p}c_j,$$

$$a_p\overline{\partial_{z_j}w} = a_j\overline{\partial_{z_p}w} + (\partial_{\bar z_p}a_j - \partial_{\bar z_j}a_p)\bar w + (b_ja_p - b_pa_j)\bar w +$$

$$+(b_jc_p - b_pc_j) + (\partial_{\bar z_p}b_j - \partial_{\bar z_j}b_p)w + (\partial_{\bar z_p}c_j - \partial_{\bar z_j}c_p).$$

После комплексного сопряжения получим

$$\partial_{z_j}w = \sigma_{jp}\partial_{z_p}w + q_{jp}\bar w + h_{jp}w + f_{jp},\quad j=1,\dots,n,\ j\neq p. \tag{7.13}$$

Здесь обозначено

$$\bar a_p\sigma_{jp} = \bar a_j,\quad \bar a_p q_{jp} = \bar q^0_{jp},\quad \bar a_p h_{jp} = \bar h^0_{jp},\quad \bar a_p f_{jp} = \bar f^0_{jp},$$

(7.14)

$$h^0_{jp} = (\partial_{\bar z_p}a_j - \partial_{\bar z_j}a_p) + (b_ja_p - b_pa_j),$$

причем для q^0_{jp}, f^0_{jp} используются прежние обозначения (7.8).

Совершая вторую о. п. д. уравнения (7.13) с уравнением номера k из системы (7.1), получим

$$\partial_{\bar z_k}[\sigma_{jp}\partial_{z_p}w + q_{jp}\bar w + h_{jp}w + f_{jp}] = \partial_{z_j}[a_k\bar w + b_k w + c_k],$$

$$\partial_{\bar z_k}\sigma_{jp}\partial_{z_p}w + \sigma_{jp}\partial_{z_p}(a_k\bar w + b_k w + c_k) + q_{jp}\partial_{\bar z_k}\bar w + \partial_{\bar z_k}q_{jp}\bar w +$$

$$+h_{jp}\partial_{\bar z_k} w+\partial_{\bar z_k} h_{jp}\overline{w}+\partial_{\bar z_1} f_{jp}=a_k\partial_{z_j}\overline{w}+$$

$$+\partial_{z_j}a_k\overline{w}+b_k\partial_{z_j}w+\partial_{z_j}b_k w+\partial_{z_j}c_k,$$

$$\partial_{\bar z_k}\sigma_{jp}\partial_{z_p}w+\sigma_{jp}a_k\partial_{z_p}\overline{w}+\sigma_{jp}b_k\partial_{z_p}w+q_{jp}\overline{\partial_{z_p}w}+\ldots=$$

$$=a_k\partial_{z_j}\overline{w}+b_k\partial_{z_j}w+\ldots.$$

Здесь и далее точками будем обозначать различные члены без производных. Заменяя $\partial_{z_p}\overline{w}=\overline{\partial_{\bar z_p} w}$, а также $\partial_{z_j}\overline{w}=\overline{\partial_{\bar z_j} w}$ из системы (7.1), сможем записать

$$(\partial_{\bar z_k}\sigma_{jp}+\sigma_{jp}b_k)\partial_{z_p}w+q_{jp}\overline{\partial_{z_k}w}-b_k\partial_{z_j}w+\ldots=0.$$

Вставляя сюда из (7.13) выражения $\partial_{z_j}w$ через $\partial_{z_p}w$, а также выражение $\overline{\partial_{z_k}w}$ через $\overline{\partial_{z_p}w}$, окончательно получим

$$\partial_{\bar z_k}\sigma_{jp}\partial_{z_p}w+q_{jp}\overline{\sigma_{kp}\partial_{z_p}w}=\ldots. \tag{7.15}$$

Сопрягая комплексно, имеем

$$\sigma_{kp}\overline{q_{jp}}\partial_{z_p}w+\overline{\partial_{\bar z_k}\sigma_{jp}}\,\overline{\partial_{z_p}w}=\ldots. \tag{7.16}$$

Рассмотрим (7.15), (7.16) как алгебраическую систему относительно $\partial_{z_p}w$, $\overline{\partial_{z_p}w}$ с определителем

$$\Delta\equiv|\partial_{\bar z_k}\sigma_{jp}|^2-|q_{jp}\sigma_{kp}|^2.$$

Если $\Delta\neq 0$, то после разрешения получим соотношение вида

$$\partial_{z_p}w=\lambda_p\overline{w}+\mu_p w+\nu_p. \tag{7.17}$$

Вставляя его в правую часть (7.13), получим еще $(n-1)$ подобных равенств, всего их будет n. Вместе с n уравнениями (7.1) они составят п. д.-систему, а она может иметь не более чем тривиальное многообразие решений. Если определитель $\Delta\equiv 0$, то это означает, что левые части (7.15), (7.16) линейно зависимы, а тогда должны быть зависимы и правые части, т. е. должно иметь место соотношение вида

$$\beta_p\overline{w}+\gamma_p w+\delta_p=0,$$

дифференцируя которое по z_k (либо по $\bar z_k$), снова придем к соотношению типа (7.17). Для существования нетривиального многообразия решений необходимо, чтобы (7.15) было тождеством, в частности, чтобы $\partial_{\bar z_k}\sigma_{jp}=0$ и $q_{jp}\overline{\sigma_{kp}}=0$. Нами доказана

Теорема 7.2. *Пусть a_k, b_k, c_k, $w \in C^2$ и $a_p \neq 0$. Для существования нетривиального многообразия решений системы* (7.1) *необходимо выполнение условий*

$$\partial_{\bar z_k}\sigma_{jp} = 0, \quad q_{jp}\overline{\sigma_{kp}} = 0. \tag{7.18}$$

В теореме 7.2 приведена далеко не вся совокупность условий совместности, которые могли быть записаны. Были выписаны только такие условия, которые дают возможность привести общую систему (7.1) к более простому каноническому виду, когда все $b_k = 0$. Действительно, из (7.18) следует, что для всех $k \neq p$ должно быть либо $q_{jp} = 0$, либо $\sigma_{kp} = 0$. Но здесь мы должны рассмотреть отдельно те уравнения, в которых $a_k = 0$, поступая с этой группой так, как описано в 7.2, откуда получаем условия $\partial_{\bar z_p} b_j - \partial_{\bar z_j} b_p = 0$ для соответствующих индексов. Во всех остальных уравнениях $a_k \neq 0$, но тогда и $\sigma_{kp} \neq 0$. Если же $\sigma_{kp} \neq 0$, то необходимо $q_{jp} = 0$, т. е.

$$\partial_{\bar z_p} b_j = \partial_{\bar z_j} b_p, \quad j = 1, \ldots, n, \ j \neq p.$$

В таком случае существует функция

$$\omega = \Gamma[b_1, \ldots, b_n], \quad \partial_{\bar z_j}\omega = b_j$$

такая, что после замены $w \doteq \exp\omega V$ получим

$$\partial_{\bar z_k} w = e^{\omega}\partial_{\bar z_k} V + e^{\omega} b_k V = a_k e^{\bar\omega}\bar V + b_k e^{\omega} V + c_k,$$

или

$$\partial_{\bar z_k} V = a_k e^{\bar\omega - \omega}\bar V + c_k e^{-\omega}.$$

7.4. **Условия совместности канонической системы.** Переходя к системе

$$\partial_{\bar z_k} w = a_k \bar w + c_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{7.19}$$

снова прибегнем к схеме рассуждений, примененной в 7.3. Но если в 7.3 мы ограничились совсем небольшой частью условий совместности, а именно только той, которая позволила привести общую систему к каноническому виду, то теперь мы выпишем гораздо большую совокупность условий совместности, и все они будут использованы ниже для преобразования системы к одному обобщенному уравнению Коши—Римана. Поскольку это последнее уже изучено и решено, то тем самым можем считать установленной достаточность вышеупомянутой системы условий совместности.

После первой о. п. д. из системы (7.19) будем иметь

(7.20) $$\partial_{z_j} w = \sigma_{jp} \partial_{z_p} w + r_{jp} w + \ldots, \; k, p = 1, \ldots, n, \; k \neq p,$$

где r_{jp} даются формулами

(7.21) $$a_p \overline{r_{jp}} = \partial_{\bar{z}_p} a_j - \partial_{\bar{z}_j} a_p,$$

а точками в отличие от 7.3 будем обозначать свободные члены. Достаточно очевидны следующие свойства коэффициентов:

(7.22) $$\sigma_{ik}\sigma_{ki} = 1, \; \sigma_{jk}\sigma_{kp} = \sigma_{jp}, \; -r_{ik} = \sigma_{ik} r_{ki}.$$

Поскольку система (7.20) получена перекрестным дифференцированием, а эта операция перестановочна, то система (7.20) инвариантна при перестановке индексов, в этом нетрудно убедиться также и непосредственными вычислениями. Т. о. (7.20) является треугольной системой $C^2_n = \frac{n(n-1)}{2}$ уравнений (подробнее она расписана в [32]). Заменив в (7.20) j на $j+1$, получим

$$\partial_{z_{j+1}} w = \sigma_{j+1,p} \partial_{z_p} w + r_{j+1,p} w.$$

С другой стороны, записывая (7.20) при значении $p = j+1$

$$\partial_{z_j} w = \sigma_{j,j+1} \partial_{z_{j+1}} w + r_{j,j+1} w,$$

подставляя сюда $\partial_{z_{j+1}} w$ из предыдущего, а левую часть заменяя из (7.20), после приравнивания коэффициентов получим

(7.23), $$\sigma_{j,j+1} r_{j+1,p} = r_{j,j+1} - r_{jp}.$$

Можем соотношения преобразовать следующим образом. Пусть $j=1$ и $p=k$, затем $p=i$:

$$\sigma_{1,2} r_{2k} = r_{12} - r_{1k}, \; \sigma_{1,2} r_{2i} = r_{12} - r_{1i},$$

после вычитания находим

$$-\sigma_{12}(r_{2k} - r_{2i}) = r_{1k} - r_{1i}.$$

Полагая затем $j=2$, аналогично получаем

$$-\sigma_{23}(r_{3k} - r_{3i}) = r_{2k} - r_{2i},$$

а подстановка в предыдущее равенство дает

$$-\sigma_{13}(r_{3k} - r_{3i}) = r_{1k} - r_{1i}.$$

Продолжая процесс, будем иметь

$$-\sigma_{im}(r_{mk} - r_{mi}) = r_{ik} - r_{ii},$$

а полагая $m = i = j$, получаем нужную нам формулу $-\sigma_{1j} r_{jk} = r_{1k} - r_{1j}$, которая в соответствии с (7.22) примет вид

(7.24) $$\sigma_{1k} r_{kj} = r_{1k} - r_{1j}.$$

Совокупность равенств (7.23), либо (7.24) является первой необходимой группой условий совместности, и если не выполнено хотя бы одно из них, то система (7.20), а вместе с ней и (7.19) имеет только нулевое решение. Выполнение равенств (7.23), либо (7.24), полное их количество $C^2_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, влечет за собой отождествление такого же количества уравнений из системы (7.20), в ней остается $C^2_n - C^2_{n-1} = n-1$ различных независимых уравнений, за них можем взять, например, уравнения первой строки, т. е. (7.20) при $j=1$, но можем взять и любые другие $(n-1)$ уравнений.

Совершая вторую о. п. д. между (7.20) и (7.19), получим

(7.25) $$\partial_{\bar{z}_k} \sigma_{jp} \partial_{z_k} w + \partial_{\bar{z}_k} r_{jp} w + (\sigma_{jp} \partial_{z_p} a_k - \partial_{z_j} a_k + r_{jp} a_k) \overline{w} + \ldots = 0$$

Если коэффициент при $\partial_{z_k} w$ отличен от нуля, то после подстановки (7.25) в (7.20) придем еще к $(n-1)$ независимым уравнениям вида

(7.26) $$\partial_{z_k} w = \alpha_k \overline{w} + \beta_k w + \gamma_k.$$

Система (7.25), (7.26) вместе с (7.19) составит $2n$ уравнений, образующих п. д.-систему, а такая система может иметь не более чем тривиальное многообразие решений. Для того, чтобы система (7.19) допускала нетривиальное многообразие решений, необходимо, чтобы (7.25) было тождеством, т. е., в частности,

(7.27) $$\partial_{\bar{z}_k} \sigma_{jp} = 0,\ \partial_{\bar{z}_k} r_{jp} = 0,\ \sigma_{jp} \partial_{z_p} a_k - \partial_{z_j} a_k + r_{jp} a_k = 0.$$

Теорема 7.3. *Пусть в системе* (7.19) a_k, c_k, $w \in C^2$ *и* $a_k \neq 0$, $k=1, \ldots, n$. *Для существования нетривиального многообразия решений системы* (7.19) *необходимо, чтобы выполнялись условия* (7.23) *и* (7.27).

Замечание 7.1. Первые две группы условий (7.27) означают аналитичность σ_{jp} *и* r_{jp} по переменным $z_1, \ldots, z_n$. Что касается третьей группы условий, то с помощью двух предшествующих она может быть заменена меньшей группой

(7.28) $$\sigma_{jp} \partial_{z_p} a_1 - \partial_{z_j} a_1 + r_{jp} a_1 = 0.$$

7.5. **Вспомогательная система и преобразования общей системы.** Рассмотрим аналитическую переопределенную систему

(7.29) $$\partial_{z_k} \chi = \sigma_{k1} \partial_{z_1} \chi,\ k=2, \ldots, n.$$

Совершая о. п. д. уравнений с номерами k и j, получим

$$\partial_{z_j}\sigma_{k1}+\sigma_{k1}\partial_{z_1}\sigma_{j1}=\partial_{z_k}\sigma_{j1}+\partial_{z_1}\sigma_{k1}.$$

Комплексно сопрягая его, после подстановки значений σ_{k1}, σ_{j1}, будем иметь

$$\partial_{\bar z_j}\left(\frac{a_k}{a_1}\right)+\frac{a_k}{a_1}\partial_{\bar z_1}\left(\frac{a_j}{a_1}\right)=\partial_{\bar z_k}\left(\frac{a_j}{a_1}\right)+\frac{a_j}{a_1}\partial_{\bar z_1}\left(\frac{a_k}{a_1}\right),$$

$$a^2_1(\partial_{\bar z_j}a_k-\partial_{\bar z_k}a_j)-a_1a_j(\partial_{\bar z_1}a_k-\partial_{\bar z_k}a_1)+a_1a_k(\partial_{\bar z_1}a_j-\partial_{\bar z_j}a_1)=0,$$

$$a^2_1\overline{a_jr_{kj}}-a_1a_ja_k\overline{r}_{1k}+a_1a_ka_j\overline{r}_{1j}=0$$

или

$$r_{1k}-r_{1j}=\sigma_{1k}r_{kj},$$

что совпадает с (7.24). Имея в виду аналитические решения системы (7.29), сможем утверждать применимость к ней как теории Коши—Ковалевской, так и теории Якоби, см. 4.5. Для (7.29) поставим начальное условие

(7.30) $$\chi(z_1, 0, \ldots, 0) = z_1.$$

Задача (7.29)—(7.30) имеет, притом единственное решение $\chi(z_1, \ldots, z_n)$, обратимое по первой переменной, ибо $(\partial_{z_1}\chi)_0=1$.

Произведем замену независимых переменных

(7.31) $$\zeta_1 = \chi(z_1, z_2, \ldots, z_n),\ \zeta_2=z_2, \ldots, \zeta_n = z_n.$$

Фактически заменяется одна только первая переменная. Поскольку

$$\partial_{\bar z_1}w=\sum_{j=1}^{n}\partial_{\bar\zeta_j}w\frac{\partial\bar\zeta_j}{\partial\bar z_1}=\overline{\partial_{z_1}\chi}\partial_{\bar\zeta_1}w,$$

$$\partial_{\bar z_k}w=\sum_{j=1}^{n}\partial_{\bar\zeta_j}w\frac{\partial\bar\zeta_j}{\partial\bar z_k}=\partial_{\bar\zeta_1}w\overline{\partial_{z_k}\chi}+\partial_{\bar\zeta_k}w,$$

то подставляя в систему (7.19), будем иметь

(7.32) $$\partial_{\bar\zeta_1}w=b\bar w+d_1,\ \partial_{\bar\zeta_2}w=d_2, \ldots, \partial_{\bar\zeta_n}w=d_n,$$

где b и d_k даются равенствами

(7.33) $$\overline{\partial_{z_1}\chi}\,b=a_1,\ d_k=c_k-\frac{a_k}{a_1}c_1,\ k=2, \ldots, n.$$

В силу того, что $a_1\neq 0$ и $a_1\in C^2$, будем иметь также $b\neq 0$ и $b\in C^2$.

Оставляя пока в стороне первое из уравнений (7.32), обратимся к последующим. О. п. д. среди них дает $\partial_{\bar\zeta_j}d_k=$

$=\partial_{\bar\zeta_k} d_j$, $k, j=2, 3,\dots, n$, $k\neq j$, так что можем построить такую функцию G, что $\partial_{\bar\zeta_k} G=d_k$, $k=2,\dots, n$; в качестве G можем взять построенный в 7.1 оператор Γ по переменным $\zeta_2,\dots,\zeta_n$. Полагая теперь $w=V+G$, из (7.32) получим

$$\partial_{\bar\zeta_1} V=b\overline{V}+d,\ \partial_{\bar\zeta_k} V=0,\ k=2,\dots, n. \tag{7.34}$$

Перекрестное дифференцирование в (7.34) дает

$$\partial_{\zeta_k} V=\rho_k V+\gamma_k,\ \rho_k=-\partial_{\zeta_k}\ln\bar b,\ k=2,\dots,n, \tag{7.35}$$

а после о. п. д. (7.35) с (7.34) найдем

$$\partial_{\bar\zeta_j}\rho_k=0,\ j=1,\dots,n,\ \rho_k=\partial_{\zeta_k}\ln b,\ k=2,\dots,n.$$

Т. о. функции $\rho_k=\rho_k(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)$, $k=2,\dots,n$, голоморфны по $\zeta_1, \zeta_2,\dots,\zeta_n$. Поскольку из равенств $\partial^2_{\zeta_j\zeta_k}\ln b=\partial^2_{\zeta_k\zeta_j}\ln b$ следует, что $\partial_{\zeta_j}\rho_k=\partial_{\zeta_k}\rho_j$, то можем найти такую функцию $\Phi(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$, голоморфную по $\zeta_1,\dots,\zeta_n$, что $\partial_{\zeta_k}\Phi=\rho_k$, $k=2,\dots,n$. Например, она дается формулой (3.38):

$$\Phi(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\sum_{k=2}^{n}\int_{\zeta_k^0}^{\zeta_k}\rho_k(\zeta_1,\zeta_2^0,\dots,\zeta_{k-1}^0;\zeta_k,\dots,\zeta_n)d\zeta_k+c(\zeta_1), \tag{7.36}$$

где $c(\zeta_1)$ — произвольная а. ф. Вводя вместо b новую функцию β по формуле

$$\ln b=\Phi-\overline{\Phi}+\beta, \tag{7.37}$$

после дифференцирования этого и сопряженного равенств будем иметь $\partial_{\zeta_k}\beta=0$, $\partial_{\bar\zeta_k}\beta=0$, $k=2,\dots,n$, а это значит, что $\beta\equiv\beta(\zeta_1)$. Переобозначая еще раз $\Phi=\ln f$, $\beta=\ln\alpha$, где $f\neq0$, $\alpha\neq0$, можем записать

$$b=\frac{\overline{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}}{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}\alpha(\zeta_1). \tag{7.38}$$

Подставляя это значение коэффициента в (7.34), получим

$$\partial_{\bar\zeta_1} V=\alpha(\zeta_1)\,\frac{\overline{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}}{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}\overline{V}+d,\ \partial_{\bar\zeta_2} V=0,\dots,\partial_{\bar\zeta_n} V=0. \tag{7.39}$$

Заменяя искомую функцию $V=f\Psi$, из (7.39) получим

$$\partial_{\bar\zeta_1}\Psi=\alpha(\zeta_1)\overline{\Psi}+\gamma,\ \partial_{\bar\zeta_2}\Psi=0,\dots,\partial_{\bar\zeta_n}\Psi=0. \tag{7.40}$$

Совершая первую о. п. д., из (7.40) найдем

(7.41) $$\partial_{\zeta_k}\Psi=g_k, \text{ где } \alpha g_k=-\partial_{\zeta_k}\bar{\gamma},\ k=2,\dots,n$$

а после второй о. п. д. придем к соотношениям

(7.42) $$\partial_{\bar{\zeta}_j}g_k=0,\quad j,\ k=2,\dots,n,\quad j\neq k.$$

Это означает, что функции $g_k=g_k(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)$ голоморфны по $\zeta_2,\dots,\zeta_n$. Как неоднократно бывало прежде, из (7.41) получается $\partial_{\zeta_j}g_k=\partial_{\zeta_k}g_j$, $j,\ k=2,\dots,n$, $j\neq k$, так что можем построить такую а. ф. R, что $\partial_{\zeta_k}R=g_k$, $k=2,\dots,n$. Полагая $\Psi=U+R$, наконец, получаем

$$\partial_{\bar{\zeta}_k}U=0,\quad \partial_{\zeta_k}U=0,\quad k=2,\dots,n.$$

Это означает, что функция U не зависит от $\zeta_2,\dots,\zeta_n$, $U=U(\zeta_1)$. Кроме того, первое из уравнений (7.40) дает

(7.43) $$\partial_{\bar{\zeta}_1}U=\alpha(\zeta_1)\bar{U}+h(\zeta_1).$$

Теорема 7.4. *Пусть в системе* (7.19) a_k, c_k, $w\in C^2$, $a_1\neq 0$ *и выполнены все условия совместности в смысле существования нетривиальных многообразий решений. Тогда заменой независимых переменных* (7.31) *и заменами искомых функций* $w=V+G$, $V=f\Psi$, $\Psi=U+R$ *система* (7.19) *приводится к одному обобщенному уравнению Коши—Римана* (7.43) *с одной независимой переменной.*

Замечание 7.2 (относительно условия $a_1\neq 0$). Конечно, можно заменить его на любое $a_p\neq 0$, только надо сделать соответствующие изменения, полагая в формулах (7.31) не $\zeta_1=\chi$, а $\zeta_p=\chi$. Что касается тех случаев, когда в системе некоторые $a_k\equiv 0$, например $a_{m+1}\equiv\dots\equiv a_n\equiv 0$, то тогда надо соответственно укоротить вспомогательную систему (7.29) и взять

(7.44) $$\partial_{z_k}\chi=\sigma_{k1}\partial_{z_1}\chi,\quad k=2,\dots,m.$$

Небольшое изменение претерпевает только первый этап перехода к системе (7.32): в нее без изменений переносятся уравнения с номерами от $m+1$ до n, а уравнения от 1 до m преобразуются к виду (7.32) указанной заменой переменных.

7.6. **Формулы представления.** Применяя к (7.43) теорию о. а. ф. одной переменной, можем получать различные результаты для системы (7.19). Покажем, например, как будут выглядеть две основные формулы теории о. а. ф., см. 1.5. Пусть U_0—частное решение неоднородного интегрального уравнения:

(7.45) $$U_0=T(\alpha\bar{U}_0)+Th,\quad \text{где } Tw\equiv-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{w(\sigma)}{\sigma-z}ds_\sigma.$$

Тогда функция $w_0 = fU_0 + G + fR$ будет частным решением системы (7.19). Соответствующие (7.19) и (7.45) однородные уравнения будем обозначать как (7.19₀) и (7.45₀).

Теорема 7.5. *Для всякого решения однородной системы* (7.19₀) *из класса нетривиальных многообразий найдется такая голоморфная функция одной переменной* $\varphi(\chi)$, *что*

(7.46) $$w = f(z_1, \ldots, z_n)\varphi[\chi(z_1, \ldots, z_n)] \exp \omega[\chi(z_1, \ldots, z_n)],$$

где f *вполне определенная а. ф., указанная выше, а*

$$\omega[\chi] = T_\chi\left[\chi\frac{\overline{w}}{w}\right] = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\alpha(\sigma)}{\sigma - \chi}\frac{\overline{w(\sigma)}}{w(\sigma)}\,ds_\sigma.$$

Теорема 7.6. *Если* $\Phi[\chi]$ — *произвольная а. ф., а* Γ_1, Γ_2 — *резольвенты интегрального уравнения* (7.45), *то всякое нетривиальное многообразие решений системы* (7.19) *содержится в формуле*

(7.47) $$w = f(z_1, \ldots, z_n)\{\Phi[\chi(z_1, \ldots, z_n)] + \Gamma_1\Phi + \Gamma_2\overline{\Phi}\}.$$

7.7. **Сопряженно-аналитические коэффициенты.** Рассмотрим тот частный случай системы (7.19)

(7.48) $$\partial_{\overline{z}_k} w = a_k(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)\overline{W}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

когда коэффициенты являются аналитическими функциями от сопряженных переменных, или же, что все равно, сопряженными к аналитическим, тогда будем писать $a_k \in \overline{A}$. В таком случае функции $\overline{a}_k \in A$ и такими же будут

$$\sigma_{jp} = \frac{\overline{a}_j}{\overline{a}_p}, \quad r_{jp} = \frac{1}{\overline{a}_p}(\partial_{z_p}\overline{a}_j - \partial_{z_j}\overline{a}_p).$$

Тогда первые две группы условий совместности (7.27) $\partial_{\overline{z}_k}\sigma_{jp} = 0$, $\partial_{\overline{z}_k} r_{jp} = 0$ будут выполнены автоматически, а третья дает $r_{jp}a_k = 0$. Оставляя в стороне возможность, когда часть $a_k \equiv 0$, т. е. когда w — а. ф. по этим переменным, мы приходим необходимо к условиям $r_{jp} = 0$, т. е.

(7.49) $$\partial_{\overline{z}_p} a_j = \partial_{\overline{z}_j} a_p, \quad j, p = 1, \ldots, n, \ j \neq p.$$

Рассматривая (7.49) как условия совместности п. д.-системы (являющейся классической по переменным $\overline{z}_k$)

(7.50) $$\partial_{\overline{z}_k} P = a_k, k = 1, \ldots, n,$$

можем построить функцию $P \equiv P(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n) \in \overline{A}$ непосредственно по явной формуле (3.38). Система (7.20) в данном случае принимает вид

(7.51) $$\partial_{z_j} w = \sigma_{jp} \partial_{z_p} w, \quad j, p = 1, \ldots, n, \; j \neq p.$$

Чисто алгебраическими исключениями $\overline{w}$ из системы (7.48) получаем, кроме того,

(7.52) $$\partial_{z_j} \overline{w} = \sigma_{jp} \partial_{z_p} \overline{w}.$$

Это означает, что вместе с w решением системы (7.51) будет также $\overline{w}$. Мы не знаем, будут ли системы $2n$ уравнений (7.51), (7.52) эквивалентны исходной системе (7.48), но из их вывода неизбежно следует, что всякое решение системы (7.48) будет также решением систем (7.51) и (7.52), т. о. можем говорить, что многообразие решений системы (7.48) **погружено** в многообразие решений системы (7.51), (7.52). **Дальнейшая схема рассуждений** такова: мы найдем многообразие всех решений системы (7.51), (7.52) и, подставляя его в (7.48), выделим многообразие всех решений этой системы.

Для системы (7.51), (7.52) характерны следующие обстоятельства. Во-первых, она аддитивна и однородна относительно операторов дифференцирования, т. е. является в настоящем смысле линейной системой над полем вещественных чисел, она может быть заменена эквивалентной вещественной системой дифференциальных уравнений, тоже линейной и однородной относительно операторов дифференцирования, но это будет уже система с двумя неизвестными функциями, поэтому мы не переходим к ней, чтобы использовать преимущество системы с одной искомой функцией, хотя и комплексной. Во-вторых, функция $w^0 = P(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$ является частным решением систем (7.51) и (7.52), ибо для нее $\partial_{z_j} P = \partial_{z_p} P \equiv 0$, так что (7.51) удовлетворяется тождественно, а (7.52) выполняется в силу того, что

$$\partial_{z_j} \overline{P} = \overline{\partial_{\overline{z}_j} P} = \overline{a}_j, \quad \partial_{z_p} \overline{P} = \overline{a}_p \quad \text{и} \quad \overline{a}_j = \sigma_{jp} \overline{a}_p.$$

В-третьих, имеет место

Лемма 7.1. *Если a_k, $w \in C^2$ и $a_k \neq 0$, то всякое решение системы* (7.51), (7.52) *содержится в формуле*

(7.53) $$w = F[P(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)],$$

где F — произвольная функция класса C^2.

Доказательство. Согласно якобианной теории функциональной зависимости, см. [12] и 1.6, для зависимости вида (7.53) между функциями w и P необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$(7.54)\qquad I_{k,p}=\frac{D(w,\overline{w},P,\overline{P})}{D(z_k,\overline{z}_k,z_p,\overline{z}_p)}=\begin{vmatrix} \partial_{z_k}w & \partial_{z_k}\overline{w} & \partial_{z_k}P & \partial_{z_k}\overline{P}\\ \partial_{\overline{z}_k}w & \partial_{\overline{z}_k}\overline{w} & \partial_{\overline{z}_k}P & \partial_{\overline{z}_k}\overline{P}\\ \partial_{z_p}w & \partial_{z_p}\overline{w} & \partial_{z_p}P & \partial_{z_p}\overline{P}\\ \partial_{\overline{z}_p}w & \partial_{\overline{z}_p}\overline{w} & \partial_{\overline{z}_p}P & \partial_{\overline{z}_p}\overline{P}\end{vmatrix}$$

равнялось тождественно нулю по любым парам переменных z_k, z_p, k, $p=1, \ldots, n$, $k\neq p$. Но в силу уравнений (7.51), (7.52) третья строка, умноженная на σ_{kp}, совпадает с первой, т. е. первая и третья строки пропорциональны. Но точно так же пропорциональны вторая и четвертая строки, ибо, например,

$$\partial_{\overline{z}_k}w=\overline{\partial_{z_k}\overline{w}}=\overline{\sigma_{kp}\,\partial_{z_p}\overline{w}}=\overline{\sigma}_{kp}\,\partial_{\overline{z}_p}w,\quad \partial_{\overline{z}_k}\overline{w}=\overline{\sigma}_{kp}\,\partial_{\overline{z}_p}\overline{w}.$$

Поэтому не только определитель (7.54), но и все миноры третьего порядка также равны нулю. В то же время существует минор второго порядка

$$I^0_{k,p}=\begin{vmatrix}\partial_{z_k}P & \partial_{z_k}\overline{P}\\ \partial_{\overline{z}_k}P & \partial_{\overline{z}_k}\overline{P}\end{vmatrix}=|\partial_{z_k}P|^2-|\partial_{\overline{z}_k}P|^2=-|a_k|^2\neq 0.$$

Лемма доказана. Т. о. все решения системы (7.48) содержатся в формуле (7.53). Подставляя (7.53) в (7.48), имеем

$$\partial_{\overline{z}_k}w=\partial_{\overline{z}_k}F[P]=\partial_P F\,\partial_{\overline{z}_k}P+\partial_{\overline{P}}F\,\partial_{\overline{z}_k}\overline{P}=\partial_P F a_k=a_k\overline{F},$$

т. е.

$$(7{,}55)\qquad \partial_P F=\overline{F}\ \text{или}\ \partial_{\overline{P}}F_1=\overline{F_1}\,(F_1=\overline{F}).$$

Т е о р е м а 7.7. *Пусть в системе* (7.48) *коэффициенты аналитичны по сопряженным переменным и* $a_k\neq 0$. *Тогда для существования нетривиального многообразия решений системы* (7.48) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (7.49), *обеспечивающие существование полного дифференциала* $P=P(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)\in\overline{A}$, $\partial_{\overline{z}_k}P=a_k(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$. *Многообразие всех решений системы* (7.48) *дается формулой*

$$(7.56)\qquad w(z_1,\ldots,z_n)=\overline{\Phi[P(\overline{z}_1,\ldots,\overline{z}_n)]}+\gamma_1\Phi+\gamma_2\overline{\Phi},$$

где γ_1, γ_2 — *резольвенты интегрального уравнения*

$$(7.57)\qquad F(P)=\overline{\Phi(P)}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\overline{P}(D)}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma-\overline{P}}\,ds_\sigma.$$

7.8. **Примеры. Различные замечания.** В примерах рассматриваются системы из двух уравнений, переменные обозначаются z, ζ.

Пример 1. $\partial_{\bar z} w = z\bar{w}$, $\partial_{\bar\zeta} w = \zeta \bar{w}$.

Решения даются формулой

$$w = c_1 \exp q + i c_2 \exp(-q), \text{ где } q = |z|^2 + |\zeta|^2,$$

c_1, c_2 — произвольные вещественные постоянные.

Пример 2. $\partial_{\bar z} w = z\bar{w}$, $\partial_{\bar\zeta} w = i\zeta\bar{w}$.

Система не имеет решений $w \neq 0$.

Пример 3.

$$\partial_{\bar z} w = 2\bar{z} \exp(-z^2\zeta), \quad \partial_{\bar\zeta} w = -\frac{1}{\bar\zeta} \exp(\overline{z^2\zeta} - z^2\zeta)\, \bar{w} + \\ + \frac{1}{\bar\zeta}(z^2 + \overline{z^2}) \exp(-z^2\zeta).$$

Частным решением системы будет

$$w_0 = (z^2 + \bar{z}^2) \exp(-z^2\zeta).$$

В примерах 1 и 2 многообразия решений тривиальны, что вполне соответствует нашим теоремам. Вообще, если в системе (7.19) коэффициенты $a_k \in A$, то σ_{kp} и $r_{kp} \in \bar{A}$, так что $\partial_{\bar z_k} \sigma_{jp} \neq 0$ и $\partial_{\bar z_k} r_{jp} \neq 0$, система не может иметь нетривиальных многообразий решений, что и проиллюстрировано в примерах 1 и 2.

Помимо указанных примеров и достаточно богатого подкласса систем с сопряженно-аналитическими коэффициентами, рассмотренного в 7.7, можно было бы привести множество других частных случаев и примеров. Для знакомства с некоторыми из них мы отсылаем к публикациям [21], [23] и укажем некоторые из соображений. В предшествующих параграфах неоднократно приходилось иметь дело с вещественно-аналитическими или же с аналитическими по комплексно-сопряженным переменным коэффициентами уравнений. С такими коэффициентами можно рассмотреть и системы из данного параграфа. Для них, в частности, представляет интерес найти более простые способы нахождения частного решения неоднородной системы, надо развить то, что для $n=2$ начато было в нашей работе [22].

Стремясь не загромождать изложения различными мелкими деталями, мы сознательно ограничили себя в обзоре работ, сузив его до предела. Для удобства читателей § 7 мы укажем на некоторые соображения в этом направлении. Такой обзор уже был начат в конце п. 7.1, сейчас мы продолжим его. В первых работах 1971 г. [20], [21] о. с. К. Р. была рассмотрена в том частном случае, когда $n=2$ и отсутствует $\overline{w}$, но уже в [21] было намечено исследование общей системы с сопряженно-аналитическими коэффициентами. В работе 1973 г. [22], представленной И. Н. Векуа, для $n=2$ было введено понятие нетривиального многообразия решений и намечен ряд других общих идей, осуществленных позднее и изложенных выше. Была приведена система необходимых условий совместности общей неоднородной системы. Для получения конструктивных формул была привлечена аналитическая теория некоторых вспомогательных уравнений с частными производными.

В работе 1974 г. [23], изобилующей опечатками, наметился другой метод исследования; когда о. с. К. Р. редуцируется к одному уравнению. Наконец, в работах 1978 г. [32], [33] сформировалась изложенная выше теория, опубликованная с некоторыми дополнениями в центральной печати [34]. В это же время появилась работа Г. А. Магомедова и В. П. Паломодова [17], в которой рассматривается подкласс систем (7.1) при $b_k=0$, $k=1, \ldots, n$, притом с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Теория системы трактуется как теория некоторой связности в линейных расслоениях на римановых поверхностях. Подробнейшим образом выписываются дифференциальные и интегродифференциальные условия, необходимые для совместности системы. Под другим названием, но речь также идет о многообразиях решений, названных нами нетривиальными (у них — бесконечномерными).

Классическая теория функций и, в частности теория краевых задач, очень широко и подробно разрабатывались на плоскости, только затем были даны построения на римановых поверхностях, и это естественно. Сказанное, конечно же, относится также к обобщенным аналитическим функциям одной переменной. В теории аналитических функций многих переменных встретились существенные затруднения для аналогичного широкого ее развития. Что касается теории обобщенных аналитических функций многих переменных, то ясно, что прежде всего надо развернуть ее общую теорию, которой не имелось до сих пор вообще. Этой цели и служит § 7.

§ 8. ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

Речь идет о системе

$$(8.1)\qquad L^k w \equiv \partial_{\bar z_k} w - q_k(z_1, \ldots, z_n)\,\partial_{z_k} w = 0,\ k = 1, \ldots, n,$$

где $w \in C^1$ — искомая и $q_k \in C^1$ — заданные функции, подчиненные условиям эллиптичности:

$$(8.2)\qquad |\, q_k(z_1, \ldots, z_n)\,| \leqslant q_0 < 1.$$

Определение 8.1. **Гомеоморфизмом** системы (8.1) называется совокупность n функционально независимых решений, осуществляющих взаимооднозначное отображение областей. Мы будем заниматься далее изучением **локального гомеоморфизма**, т. е. отображением достаточно малой окрестности точки $z^0(z_1{}^0, \ldots, z^0{}_n)$, для определенности, скажем, поликруга $G(z^0, r): |z_k - z_k{}^0| < r$, $k = 1, \ldots, n$ с достаточно малым r. Его центр z^0, называемый также начальной точкой, без ограничения общности, можем, очевидно, считать нулевой точкой.

8.1. **Якобиан гомеоморфизма.** Вначале мы изучим свойства произвольной совокупности решений системы (8.1):

$$(8.3)\qquad w_p = w_p(z_1, \ldots, z_n),\ p = 1, \ldots, n,\ w_p \in C^1.$$

Рассмотрим ее якобиан (см. 1.6):

$$I = \frac{D(w_1, \overline{w_1}; \ldots; w_n, \overline{w_n})}{D(z_1, \bar z_1; \ldots; z_n, \bar z_n)},$$

определяемый формулой (1.36)

$$(8.4)\qquad I = \begin{vmatrix} \partial_{z_1} w_1 & \partial_{z_1} \overline{w_1} & \ldots & \partial_{z_1} w_n & \partial_{z_1} \overline{w_n} \\ \partial_{\bar z_1} w_1 & \ldots & \partial_{\bar z_1} \overline{w_1} & \ldots & \partial_{\bar z_1} w_n & \partial_{\bar z_1} \overline{w_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial_{z_n} w_1 & \partial_{z_n} \overline{w_1} & \ldots & \partial_{z_n} w_n & \partial_{z_n} \overline{w_n} \\ \partial_{\bar z_n} w_1 & \partial_{\bar z_n} \overline{w_1} & \ldots & \partial_{\bar z_n} w_n & \partial_{\bar z_n} \overline{w_n} \end{vmatrix}.$$

Аналогично тому, как для системы а. ф., он был представлен формулой (1.37), преобразуем его, пользуясь уравнениями (8.1). Нетрудно заметить, что вся матрица I может быть составлена из совокупности матриц, которым соответствуют определители

$$\delta_{kp} = \begin{vmatrix} \partial_{z_k} w_p & \partial_{z_k} \overline{w_p} \\ \partial_{\bar z_k} w_p & \partial_{\bar z_k} \overline{w_p} \end{vmatrix}.$$

Преобразования всей матрицы I удобно представить совокупностью преобразований таких отдельных блоков. Из системы (8.1) имеем

$$\partial_{\bar z_k} w_p = q_k \partial_{z_k} w_p, \quad \partial_{z_k} \overline{w_p} = \overline{\partial_{\bar z_k} w_p} = \overline{q_k}\,\overline{\partial_{z_k} w_p}, \quad \partial_{\bar z_k} \overline{w_p} = \overline{\partial_{z_k} w_p},$$

так что

$$\delta_{kp} = \begin{vmatrix} \partial_{z_k} w_p & \overline{q_k}\,\overline{\partial_{z_k} w_p} \\ q_k \partial_{z_k} w_p & \overline{\partial_{z_k} w_p} \end{vmatrix}.$$

Умножая первую строку на q_k и вычитая из второй, получим

$$\delta_{kp} = \begin{vmatrix} \partial_{z_k} w_p & \overline{q_k}\,\overline{\partial_{z_k} w_p} \\ 0 & (1-|q_k|^2)\overline{\partial_{z_k} w_p} \end{vmatrix} = (1-|q_k|^2)\,|\partial_{z_k} w_p|^2.$$

В полной матрице (8.4) аналогично заменяя все $\partial_{z_k}\overline{w_p}$ и $\partial_{\bar z_k} w_p$ из (8.1), умножая нечетные строки на $q_1, \dots, q_n$ соответственно и вычитая из последующих четных, получим в этих последних строках нули на всех нечетных номерах. После перестановок строк и столбцов получим разбиение I на четыре блока, причем в левом нижнем углу будет блок из нулей, поэтому

$$\text{(8.5)} \qquad q_1 \dots q_n I = \prod_{k=1}^{n} (1-|q_k|^2)\,|\Delta|^2, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \partial_{z_1} w_1 \dots \partial_{z_1} w_n \\ \dots\dots \\ \partial_{z_n} w_1 \dots \partial_{z_n} w_n \end{vmatrix}.$$

Если некоторое $q_s = 0$, то умножение на q_s пропускается слева и отсутствует в произведении справа. Доказанное сформулируем в виде леммы.

Лемма 8.1. *Если* $w_1, \dots, w_n$ *решения системы* (8.1), *то якобиан этой системы функций дается формулой* (8.5).

Далее для определенности будем полагать, что $q_s \neq 0$, $s = 1, \dots, n$, и допустим, что система решений (8.3) осуществляет гомеоморфизм. Тогда в соответствии со сказанным в 1.6 $I_n \neq 0$ и найдется такая точка, в которой $I \neq 0$, будем считать ее нулевой. В достаточно малой ее окрестности также будет $I \neq 0$. Но тогда из формулы (8.5) следует, что $\Delta \neq 0$. Нами доказана следующая

Лемма 8.2. *Если система функций* (8.3), *являющихся решениями* (8.1), *осуществляет гомеоморфное отображение областей, то найдутся точка и достаточно малая ее окрестность, в которой* $\Delta \neq 0$, *где* Δ *дается формулой* (8.5).

Для дальнейшего нам понадобится также

Лемма 8.3. *Если (8.3) является гомеоморфизмом эллиптической системы (8.1), то в каждой паре строк из Δ с номерами k, j найдутся такие номера столбцов p, s, что $\Delta_{kjps} \neq 0$, где*

(8.6) $$\Delta_{kjps} = \begin{vmatrix} \partial_{z_k} w_p & \partial_{z_k} w_s \\ \partial_{z_j} w_p & \partial_{z_j} w_s \end{vmatrix}.$$

Утверждается также, что в каждой паре столбцов с номерами p, s найдутся такие номера строк k, j, что будет $\Delta_{kjps} \neq 0$.

Действительно, если бы $\Delta_{kjps} = 0$ для всех p, $s = 1, \ldots, n$, $p \neq s$, то, разлагая Δ по полосе из двух строк с номерами k, j, получили бы Δ, что противоречит лемме 8.2.

Другое доказательство является следствием того известного факта, что если n функций (8.3) независимы, то любая пара из них также независима. А для такой пары независимых функций w_p, w_s не могут все определители (8.6) равняться нулю.

8.2. **Полные системы Бельтрами.** Будем считать здесь, что $w \in C^2$. Совершая коммутирование уравнений (8.1), получим

(8.7) $$L^k L^j w - L^j L^k w \equiv (L^j q_k) \partial_{z_k} w - (L^k q_j) \partial_{z_j} w = 0, \quad k \neq j.$$

Определение 8.2. Если все коммутантные уравнения тождественно равны нулю, т. е. если

(8.8) $$L^j q_k = 0, \quad \overset{k}{L}_{q_j} = 0, \quad k, j = 1, \ldots, n, \ k \neq j, \quad k \neq j,$$

то система (8.1) называется **полной**. Здесь мы несколько отклоняемся от терминологии, принятой нами в § 4, где это понятие называлось якобиевостью. Но точно так же (8.8) можно было бы назвать условиями полной интегрируемости, как это было в § 3.

Теорема 8.1. *Если система уравнений Бельтрами (8.1) эллиптична и допускает гомеоморфизм, то она полна.*

Действительно, пусть задан гомеоморфизм (8.3) системы (8.1). Пусть k, j—заданные числа из совокупности $1, 2, \ldots, n$, и надо доказать, что $L^j q_k = 0$, $L^k q_j = 0$. Согласно лемме 8.3, найдутся такие номера p, s, что $\Delta_{pskj} \neq 0$. С другой стороны, w_p и w_s, являясь решениями системы (8.1), будут также решениями коммутантных уравнений:

$$\begin{cases} (L^j q_k) \partial_{z_k} w_p - (L^k q_j) \partial_{z_j} w_p = 0, \\ (L^j q_k) \partial_{z_k} w_s - (L^k q_j) \partial_{z_j} w_s = 0. \end{cases}$$

Рассматриваемая как алгебраическая с неизвестными $L^j q_k$, $L^k q_j$ и определителем Δ_{pskj}, который отличен от нуля, эта система имеет одно лишь только нулевое решение, т. е. $L^j q_k = 0$, $L^k q_j = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 8.2. *Если система уравнений Бельтрами* (8.1) *эллиптична и допускает гомеоморфизм класса* C^1, *то многообразие всех ее решений из* C^1 *дается формулой*

$$w = \Phi\,[w_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,w_n(z_1,\ldots,z_n)], \tag{8.9}$$

где $\Phi = \Phi[w_1,\ldots,w_n]$ — *произвольная аналитическая функция.*

Доказательство. В первой части мы должны убедиться, что (8.9) удовлетворяет (8.1). Во-первых, имеем

$$\partial_{\overline{z}_k} w = \sum_{p=1}^{n} \partial_{\overline{w}_p}\Phi\,\partial_{\overline{z}_k}\overline{w}_p + \partial_{w_p}\Phi\,\partial_{\overline{z}_k} w_p,$$

$$\partial_{z_k} w = \sum_{k=1}^{n} \partial_{\overline{w}_p}\Phi\,\partial_{z_k}\overline{w}_p + \partial_{w_p}\Phi\,\partial_{z_k} w_p.$$

Если учесть еще, что $\partial_{\overline{w}_p}\Phi \equiv 0$, $p = 1, \ldots, n$, то найдем

$$L^k w = \sum_{p=1}^{n} \partial_{w_p}\Phi\, L^k w_p = 0.$$

Переходя ко второй части, введем обозначения функций

$$\sigma_k = w_k(z_1,\ldots, z_n),\quad k = 1,\ldots,n,$$

а также обратных к ним

$$z_k = \psi_k(\sigma_1 \ldots, \sigma_n),\ k = 1,\ldots,n.$$

Тогда сможем записать

$$w = w(z_1,\ldots,z_n) = w\,[\psi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),\ldots,\psi_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)] \equiv F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n).$$

Совершая в уравнениях (8.1) переход к новым переменным, получим

$$L^k w = \sum_{j=1}^{n} \partial_{\overline{\sigma}_j} F L^k \overline{w}_j + \partial_{\sigma_j} F L^k w_j = \sum_{j=1}^{n} \partial_{\overline{\sigma}_j} F(\partial_{\overline{z}_k}\overline{w}_j - q_k \partial_{z_k}\overline{w}_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \partial_{\overline{\sigma}_j} F(\overline{\partial_{z_k} w_j - q_k \partial_{\overline{z}_k} w_j}) = (1 - |q_k|^2) \sum_{j=1}^{n} \partial_{\overline{\sigma}_j} F\, \overline{\partial_{z_k} w_j} = 0.$$

В силу эллиптичности системы первый множитель отличен от нуля, а придавая значения $k = 1, \ldots, n$, получим алгебраическую линейную систему относительно $\partial_{\bar\sigma_j} F$, $j=1, \ldots, n$. Поскольку ее определитель $\Delta \neq 0$ в силу леммы 8.2, то система имеет только нулевое решение $\partial_{\bar\sigma_j} F=0$, $j=1, \ldots, n$. Эти соотношения верны в каждой точке области, т. е. функция F аналитична по $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, а это означает, что имеет место формула (8.9). Теорема доказана.

8.3. **Построение гомеоморфизма.** Переходя к построению гомеоморфизма системы (8.1) методами аналитической теории, будем считать, что все q_k голоморфны по вещественным, или комплексно-сопряженным, переменным. Будем писать

$$q_k=q_k(z_1, \bar z_1; \ldots; z_n, \bar z_n), \quad k=1, \ldots, n.$$

Как показано в 1.6, локально всегда возможно их аналитическое продолжение в функции от $2n$ независимых комплексных переменных

$$q_k=q_k(z_1, s_1; \ldots; z_n, s_n), \quad k=1, \ldots, n.$$

Без ограничения общности можем считать их аналитическими в поликруге $G(r, r): |z_k|<r, \ |s_k|<r$. В таком случае система (8.1) будет аналитически продолжена в систему

$$(8.10) \qquad \hat L^k w \equiv \partial_{s_k} w - q_k(z_1, s_1; \ldots; z_n, s_n) \partial_{z_k} w=0, \quad k=1, \ldots, n.$$

Поставим для нее задачу с начальным данным

$$(8.11) \qquad [w]_{s_1=\ldots=s_n=0}=\psi(z_1, \ldots, z_n),$$

где ψ — произвольно заданная а. ф. Ищем решение задачи (8.10)—(8.11) в виде ряда

$$(8.12) \qquad w=\sum_0^\infty A_{k_1\ldots k_n}(z_1, \ldots, z_n) s_1^{k_1} \ldots s_n^{k_n}, \quad k_1! \ldots k_n! A_{k_1 \ldots k_n}=$$

$$=\left(\frac{\partial^{k_1+\ldots k_n} w}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}\right)_0.$$

Индексом «нолик» здесь и далее мы отмечаем значение функции в нулевой точке.

Нахождение производных. Производные по $z_1, \ldots, z_n$ находятся из (8.11). Полагая затем в (8.10) $s_1=\ldots=s_n=0$, найдем $(\partial_{s_k} w)_0$, $k=1, \ldots, n$. Продифференцировав (8.10) по z_p и зануляя все s_k, найдем $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_k \partial z_p}\right)_0$, а продифференцировав теперь (8.10) по s_p и зануляя все s_k, найдем $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_k \partial s_p}\right)_0$.

Эти последние могут быть найдены еще другим способом, а именно дифференцированием p-го уравнения по s_k, совпадение результатов следует из ее якобиевости; условия якобиевости $\hat{L}^j q_k=0$, $\hat{L}^k q_j=0$ могут быть получены из условий полноты (8.8) аналитическим продолжением.

Мажорантная задача. Имея в виду разложения q_k по степеням s_1, ... s_n, обозначим через M максимум модулей коэффициентов, а также $|\psi|$. Возьмем мажорантную задачу в виде

$$\partial_{s_k} V=\frac{M}{1-\frac{z_k}{r}}\partial_{z_k} V,\quad k=1,\ldots,n, \tag{8.13}$$

$$[V]_{s_1=\ldots=s_n=0}=\frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_k}{r}\right)}. \tag{8.14}$$

Ее решением будет

$$V=\frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\chi_k}{r}\right)},\quad \chi_k=z_k-Mr\ln\left(1-\frac{s_k}{r}\right). \tag{8.15}$$

При $|s_k|<r$ функция χ_k разлагается по степеням s_k в ряд с положительными коэффициентами, причем $[\chi_k]_0=z_k$. Ограничив $|z_k|<\frac{r}{2}$, сможем найти такое $\rho=\rho(r)$, что при $|s_k|<\rho$ будет $|\chi_k|<r$. Если учесть еще, что функция V также разлагается в ряд с положительными коэффициентами по степеням функций χ_k, то убедимся, что ряд, служащий разложением V по степеням s_1, ..., s_n, имеет положительные коэффициенты, сходится при $|z_k|<\frac{r}{2}$, $|s_k|<\rho(r)$, удовлетворяет уравнению (8.13), начальному условию (8.14) и мажорирует решение задачи (8.10)—(8.11).

Тем самым доказана

Лемма 8.4. *Пусть в системе* (8.10) *выполнены условия полноты и все* $q_k(z_1, s_1; \ldots; z_n, s_n)$, *а также начальная функция* ψ *голоморфны в* $G[r, r]$. *Тогда в* $G\left[\frac{r}{2}, \rho(r)\right]$, *где* $\rho(r)$ *достаточно мало, задача* (8.10)—(8.11) *имеет и притом единственное решение.*

Принимая за ψ значения функций $z_1,\dots,z_n$, получим различных решений системы (8.10), обозначаемых $\widetilde{w_1}, \dots, \widetilde{w}_n$ Нетрудно убедиться, что их разложения имеют вид

$$\widetilde{w}_p = z_p + (q_p)_0 s_p + \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} A^{p}_{\mu,\nu}(z_1,\dots,z_n) s_\mu s_\nu + O(s^3), p=1,\dots,n. \tag{8.16}$$

Здесь выписаны все члены первой степени, намечены — второй, а члены третьей и более высоких степеней обозначены через $O(s^3)$.

Возвращение к исходной системе. Для того, чтобы от продолженной системы (8.10) вернуться к исходной системе (8.1), надо положить всюду $s_k = \bar{z}_k$, $k=1, \dots, n$. Формулы (8.16) дадут нам решения исходной системы (8.1) в виде следующих рядов:

$$w_p = z_p + (q_p)_0 \bar{z}_p + \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} A^{p}_{\mu,\nu}(z_1,\dots,z_n) \bar{z}_\mu \bar{z}_\nu + O(|z|^3),\ p=1,\dots,n. \tag{8.17}$$

Вычислим полный якобиан этой системы функций в точке $z_1 = \dots = z_n = 0$. Из (8.17) находим $(\partial_{z_k} w_p)_0 = 0$, $k \neq p$, $(\partial_{z_p} w_p)_0 = 1$, так что в соответствии с (8.5) имеем $\Delta_0 = 1$ и

$$(q_1)_0 \dots (q_n)_0 I_0 = \prod_{k=1}^{n} (1 - |q_k|^2_0) > (1 - q^2_0)^n > 0, \tag{8.18}$$

где q_0 — константа эллиптичности из (8.2), $0 < q_0 < 1$. Т. о. доказано, что $I_0 \neq 0$, т. е. найдется такая окрестность $G(r, r)$, в которой $I \neq 0$. Этим доказано, что функции $w_1, \dots, w_n$ из (8.17) осуществляют взаимооднозначное соответствие, т. е. искомый гомеоморфизм построен. Нами доказана

Теорема 8.3. *Пусть коэффициенты системы* (8.1) *голоморфны по вещественным, или же комплексно-сопряженным, переменным, удовлетворяют условиям эллиптичности* (8.2) *и полноты* (8.8). *Тогда в достаточно малой окрестности каждой точки существует n функционально независимых решений, осуществляющих взаимооднозначное соответствие (гомеоморфизм).*

Другой способ построения гомеоморфизма состоит в применении теории Якоби. Как показано в 4.7, она справедлива для комплексных аналитических систем, к которым относится также система (8.10). Как было уже сказано, условия якобиевости для нее выполнены в силу условий полноты (8.8). Согласно теории Якоби, для первого уравнения

$$\partial_{s_1} w - q_1(z_1, s_1; \ldots; z_n, s_n)\partial_{z_1} w = 0$$

надо составить соответствующее о. д. у., и если $\omega(z_1, s_1; \ldots; z_n, s_n) = c^1$ — его первый интеграл, то, заменяя только одну переменную s_1 на $\sigma_1 = \omega(z_1, s_1; \ldots; z_n, s_n)$, из первого уравнения получим $\partial_{z_1} w = 0$, а остальные преобразуются к новым переменным, причем не будут зависеть от z_1. Продолжая процесс, через $(n-1)$ шагов придем к одному уравнению с $(n+1)$ переменными. Согласно теореме 2.2, оно имеет n функционально независимых решений V_p, $p = 1, \ldots, n$, являющихся левыми частями первых интегралов соответствующей системы о. д. у., причем якобиан этих n функций по любой из совокупностей n переменных будет отличен от нуля, как это разъяснено в первом доказательстве теоремы 2.2.

Возвратившись к переменным z_k, s_k, получим решения системы (8.10) $V_k(z_1, s_1; \ldots; z_n, s_n)$, $k = 1, \ldots, n$, якобиан которых по системе переменных $z_1, \ldots, z_n$ отличен от нуля. Производя, наконец, сужение на переменные $s_k = \bar{z}_k$, придем к решениям системы (8.1) $w_k = w_k(z_1, \bar{z}_1; \ldots; z_n, \bar{z}_n)$, $k = 1, \ldots, n$, для которых определитель из формулы (8.5) $\Delta \neq 0$, тем самым и якобиан $I \neq 0$. Гомеоморфизм построен.

8.4. Пополняемые системы Бельтрами. Допустим теперь, что не все коммутантные уравнения тождественно равны нулю, т. е. не все $L^k q_j \equiv 0$. Если для некоторой фиксированной пары индексов k, j будет $L^k q_j = 0$, но $L^j q_k \neq 0$, то из (8.7) найдем $\partial_{z_k} w = 0$. Тогда из (8.1) следует также $\partial_{\bar{z}_k} w = 0$ т. е. w не зависит от z_k, уравнение с номером k следует отбросить. Происходит понижение порядка (или ранга) системы. Поэтому можем считать $L^k q_j \neq 0$ и $L^j q_k \neq 0$. Соответствующее уравнение (8.7) тогда пополнит систему (8.1). Если $q_k \in RA$, то, как было показано выше, можем перейти к комплексной аналитической системе (8.10), для которой процесс пополнения полностью описан в теории Якоби.

Для конкретности рассмотрим подробнее случай $n = 2$, когда системе можно придать вид

$$\partial_{\bar{z}} w = a(z, \zeta)\partial_z w, \quad \partial_{\bar{\zeta}} w = b(z, \zeta)\partial_\zeta w. \tag{8.19}$$

Коммутантным уравнением будет

$$A\partial_z w = B\partial_\zeta w, \; A = \partial_{\bar{\zeta}} a - b\partial_\zeta a, \; B = \partial_{\bar{z}} b - a\partial_z b. \tag{8.20}$$

Пусть $A \neq 0$, $B \neq 0$. Полагая $z = x + iy$, $\zeta = t + i\tau$, найдем

$$\partial_x w = \alpha\partial_\tau w, \; \partial_y w = \beta\partial_\tau w, \; \partial_t w = \gamma\partial_\tau w, \tag{8.21}$$

(8.22) $$\alpha = i\,\frac{B}{A}\,\frac{a+1}{b-1},\quad \beta + \frac{B}{A}\,\frac{a-1}{b-1},\quad \gamma = i\,\frac{b+1}{b-1}.$$

Теорема 8.4. *Пусть a, $b \in C^1$, $b(z, \zeta) \neq 1$ и $A \neq 0$, $B \neq 0$, где A, B даются формулами* (8.20). *Если существует нетривиальное решение системы* (8.19), *то необходимо выполняются условия*

(8.23) $$\alpha_y - \beta\alpha_\tau = \beta_x - \alpha\beta_\tau,\ \alpha_t - \gamma\alpha_\tau = \gamma_x - \alpha\gamma_\tau,\ \beta_t - \gamma\beta_\tau = \gamma_y - \beta\gamma_\tau.$$

Действительно, если условия (8.23) не все будут выполнены, то из (8.21) производится еще одно уравнение подобного типа, и тогда все производные необходимо равны нулю, так что $w =$ const. Переходя к решению системы (8.21) в случае выполнения условий (8.23), сделаем предположение об аналитичности коэффициентов $a, b \in RA$, откуда $\alpha, \beta, \gamma \in RA$. Согласно 4.7, к системе (8.21) можем применить теорию Якоби, условия якобиевости (8.23) выполнены. Производя интегрирование о. д. у., соответствующего первому уравнению, и замену переменных, в конце концов придем к одному уравнению с двумя переменными, общим решением которого будет произвольная функция левой части первого интеграла. Другой путь — аналитическая теория, см. [27]. Задавая начальное условие

(8.24) $$[w]_{x=y=t=0} = \varphi(\tau),\quad \varphi \in RA$$

и разыскивая решение задачи (8.21)—(8.24) в виде

(8.25) $$w(x, y, t, \tau) = \sum_{0}^{\infty} w_{k\,m\,n}(\tau)x^k y^m t^n,$$

рассмотрим мажорантную задачу

(8.26) $$\partial_x V = \partial_y V = \partial_t V = p(x, y, t)\partial_\tau V,\quad p = \frac{M}{1 - \dfrac{x+y+t}{r}},$$

(8.27) $$[V]_{x=y=t=0} = \frac{M}{1 - \dfrac{\tau}{r}}.$$

Для $\alpha = \beta = \gamma = p(x, y, t)$ все условия совместности (8.23) будут выполнены; решением (8.26)—(8.27) будет

(8.28) $$V = \frac{M}{1 - \dfrac{\omega(x, y, t, \tau)}{r}},\quad \omega = \tau - Mr\ln\left(1 - \frac{x+y+t}{r}\right).$$

Поскольку эта функция разлагается в ряд с положительными коэффициентами по степеням ω, а ω в свою очередь — в аналогичный ряд по степеням $(x+y+t)$, то в итоге получаем разложение V в ряд типа (8.25) с положительными коэффициентами, он будет мажорировать решение задачи (8.21)—(8.24). Нами доказана

Теорема 8.5. *Пусть в окрестности некоторой точки коэффициенты системы* (8.19) $a(z, \zeta)=a(x, y, t, \tau)$, $b(z, \zeta)=b(x, y, t, \tau)$, *а также начальная функция* $\varphi(\tau)$ *аналитичны и разлагаются в ряды, сходящиеся при* $|x|<r$, $|y|<r$, $|t|<r$, $|\tau|<r$, *пусть выполнены условия* (8.23). *Тогда существует и притом единственное решение системы* (8.19), *удовлетворяющее условию* (8.24), *представимое степенным рядом, сходящимся при* $|x+y+t|<r$, $|\tau|<r$.

8.5. **Обобщенная система Бельтрами.** По аналогии с тем, как о. с. К. Р. в § 7, мы назвали систему с общей линейной правой частью и с операторами Коши—Римана в левых частях, так приведенное в заголовке название будем давать системе

$$L^k w\equiv\partial_{\bar z_k}w-q_k\partial_{z_k}w=\alpha_k\overline{w}+\beta_k w+\gamma_k,\quad k=1,\dots,n, \tag{8.29}$$

где q_k, α_k, β_k, γ_k — произвольно заданные функции класса C^1, причем q_k подчинены условиям эллиптичности (8.2). Обратимся ко второй части доказательства теоремы 8.2. Пользуясь гомеоморфизмом системы Бельтрами и заменяя им независимые переменные, мы пришли там к системе Коши—Римана. Те же выкладки, примененные к (8.29), по отношению к новой функции $V(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=w[\psi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_n),\dots,\psi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_n)]$ дадут

$$L^k w=(1-|q_k|^2)\sum_{j=1}^{n}\overline{\partial_{z_k}w_j}\,\partial_{\bar\sigma_j}V=\alpha_k\overline{V}+\beta_k V+\gamma_k,\quad k=1,\dots,n.$$

Поскольку в силу эллиптичности $1-|q_k|^2\neq0$, то получаем линейную алгебраическую систему относительно $\partial_{\bar\sigma_j}V$ с определителем $\overline{\Delta}$, который в силу леммы 8.2 отличен от нуля, система однозначно разрешима, так что получаем

$$\partial_{\bar\sigma_j}V=a_k\overline{V}+b_kV+c_k,\quad k=1,\dots,n. \tag{8.30}$$

Мы пришли к о. с. К. Р., изученной в § 7. Резюмируем полученный результат: **пусть дана эллиптическая обобщенная система Бельтрами (8.29) и для соответствующей системы Бельтрами известен гомеоморфизм; заменяя им независимые переменные, от (8.29) придем к о. с. К. Р. (8.30).**

Применяя к (8.30) результаты §7, можно было бы сформулировать для о. с. Б. (8.29) целый ряд утверждений; выписать необходимые условия совместности и для многообразия всех решений из класса нетривиальных многообразий дать представления первого и второго рода через голоморфные функции. При $n=1$ теория уравнения (8.1), а также (8.29) достаточно хорошо разработана (см. [2], [7]). Построение гомеоморфизма с помощью двумерных сингулярных интегральных уравнений дано при весьма слабых ограничениях типа условий Гельдера на коэффициенты или даже для разрывных коэффициентов, выходя в классы обобщенных решений с производной в смысле С. Л. Соболева, см. [7].

Случай $n=2$ впервые был рассмотрен нами в [25]. Фактически там получены результаты типа теорем 8.1 и 8.2, а построение гомеоморфизма было тоже дано в аналитическом случае, но несколько иным путем. Затем в [27] была рассмотрена неполная система Бельтрами, эта работа кратко изложена в 8.4. В появившейся после этого работе [1], за исключением формулировки теоремы 9 и обобщения 2 теоремы 8, все результаты также относятся к случаю $n=2$ и, отличаясь по форме, в значительной степени сходны по существу с опубликованными нами ранее в [25], [27]. При $n>2$ исследование системы (8.1) осуществлено нами недавно (см. [39], [62]) и в полном объеме публикуется впервые.

Несколько слов о сопоставлении §8 с работой [61], о которой шла речь во введении. Из [61] следует утверждение теоремы 8.3 и представление (8.9). Однако построения § 8, являясь более простыми и эффективными, оказываются полезными и в других случаях, таких как описанные в 8.4 пополняемые системы Бельтрами, а также обобщенная система Бельтрами из 8.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абросимов А. В. Система Бельтрами с несколькими независимыми переменными.— ДАН СССР, 1977, т. 236, № 6.

2. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.

3. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.

4. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений с частными производными. М.: Наука, 1981.

5. Бохнер С. и Мартин У. Т. Функции многих комплексных переменных. М.: ИЛ, 1951.

6. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

7. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

8. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.

9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

10. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

11. Горелов И. В. Об одном интегральном представлении функций многих комплексных переменных.— Докл. АН ТаджССР, 1978, т. 21, № 5.

12. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 1—3. М.; Л.: ГТТИ, 1933 (2-е издание); ОНТИ, 1936, (3-е издание).

13. Гурса Э. (E. Goursa). Leçons fur l'integration des equations aux derivees partiells du premier ordre, Paris, 1921.

14. Жильберт Р. П. (R. P. Gilbert). Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations, Academic Press. New York and London, 1969.

15. Жильберт Р. П. (R. P. Gilbert). Constructive Methods for Ellyptic Equations. Springer—Verlag, 1974.

16. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

17. Магомедов Г. А., Паломодов В. П.— Матем. сб., т. 106, (148), № 4, (8), 1978.

18. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963.

19. Михайлов Л. Г. (L. G. Mikhailov). A nev class of singular integral equations and its applications to the differential equations with singular coefficientes, Wolters—Noordhoff Publisching, Groningen. The Netherlands, 1970 (перевод с русского на английский монографии [18]). Ее стереотипное переиздание: Academie—Verlag. Berlin, 1970.

20. Михайлов Л. Г. Об одном интегральном представлении функ-

ций двух комплексных переменных.— Докл. АН ТаджССР, 1971, т. 14, № 5.
21. Михайлов Л. Г., Абросимов А. В. О некоторых переопределенных системах уравнений с частными производными.— Докл. АН ТаджССР, 1971, т. 14, № 6.
22. Михайлов Л. Г., Абросимов А. В. Обобщенная система Коши—Римана со многими независимыми переменными.— ДАН СССР, 1973, т. 210, № 1.
23. Михайлов Л. Г. Об одном способе исследования обобщенной системы Коши—Римана с двумя независимыми комплексными переменными.— Докл. АН ТаджССР, 1974, т. 17, № 9.
24. Михайлов Л. Г. (L. G. Mikhailov). On some new results in the theory of differential equations with singular coefficients, см. в трудах конференции [57].
25. Михайлов Л. Г., Крейс В. Об одной переопределенной системе уравнений с частными производными.— ДАН СССР, 1976, т. 228, № 6.
26. Михайлов Л. Г. (L. G. Mikhailov). On the analytic functions method in the theory of partial differential equations with singular coefficientes, см. в трудах конфренции [58].
27. Михайлов Л. Г. О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений с частными производными. — Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 4.
28. Михайлов Л. Г. Переопределенная система трех дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями. — Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 5.
29. Михайлов Л. Г., Рузметов Э. Исследование некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений на плоскости.— Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 11.
30. Михайлов Л. Г. О совместности некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями.— ДАН СССР, 1978, т. 238, № 6.
31. Михайлов Л. Г. О некоторых переопределенных системах уравнений с частными производными второго порядка. — Докл. АН ТаджССР, 1978, т. 21, № 4.
32. Михайлов Л. Г. Об условиях совместности обобщенной системы Коши—Римана со многими переменными.— Докл. АН ТаджССР, 1978, т. 21, № 6.
33. Михайлов Л. Г. Многообразие решений обобщенной системы Коши—Римана со многими переменными.— Докл. АН ТаджССР, 1978, т. 21, № 7.
34. Михайлов Л. Г. Об условиях совместности и многообразии решений обобщенной системы Коши—Римана со многими переменными.— ДАН СССР, 1979, т. 249, № 6.
35. Михайлов Л. Г., Бильман Б. М. О некоторых системах уравнений с частными производными первого порядка, — Докл. АН ТаджССР, 1979, т. 22, № 2.
36. Михайлов Л. Г. О представлении решений уравнений в частных производных второго порядка на плоскости через голоморфные функции.— Докл. АН ТаджССР, 1980, т. 23, № 7.
37. Михайлов Л. Г. Обобщенные аналитические функции многих переменных, см. в трудах конференции [60].
38. Михайлов Л. Г., Пиров Р. О некоторых переопределенных системах уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями.— Докл. АН ТаджССР, 1981, т. 24, № 2.
39. Михайлов Л. Г. Переопределенная система дифференциальных уравнений Бельтрами.— Докл. АН ТаджССР, 1981, т. 24, № 6.

40. Михайлов Л. Г. О некоторых системах уравнений в частных производных второго порядка с тремя переменными.—Докл. АН ТаджССР, 1981, т. 24, № 8.
41. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
42. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
43. Раджабов Н. Краевые задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами, связанных с уравнением Гельмгольца.— В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1969.
44. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.; Л.: 1947.
45. Сансоне Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, II. М.: ИЛ, 1954.
46. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 1—5. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
47. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
48. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.
49. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, изд. 3-е. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
50. Haak W., Wendland W. Partial and Pfaffian Differential Equations. Pergamon Pres, 1972.
51. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
52. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
53. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.
54. Шарипов Б. О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, интегрируемых в квадратурах.— Докл. АН ТаджССР, 1980, т. 23, № 3.
55. Труды международного симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. Тбилиси, 1973.
56. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematichen Physik, Wissenschaftliche schriftreihe der Technische Hochschule. Karl—Marx—Stadt, 1973.
57. Tagung über Probleme und Methoden der mathematichen Physik, Wissenschaftliche schriftreihe der Technische Hochschule. Karl—Marx—Stadt, 1975.
58. Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations. Darmstadt, 1976.
59. Komplexe Analysis und Ihre Anwendung auf Partielle Differential Gleichungen. Halle, 1977.
60. Komplexe Analysis und Ihre Anwendung auf Partielle Differential Gleichungen. Halle, 1980.
61. Ниренберг Л. Лекции о линейных дифференциальных уравнениях с частными производными.— Успехи математических наук, т. 30, вып. 4, 1975.
62. Михайлов Л. Г. Построение гомеоморфизма переопределенной системы Бельтрами со многими переменными. — Докл. АН ТаджССР, 1982, т. 25, № 8.
63. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1983.
64. Tutschke W. Partielle Differentialgleichungen in einer und in mehreren komplexen Variablen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1977.

ОГЛАВЛЕНИЕ